УЧЕБНАЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛИТЕРАТУРА

А. Д. ПОЛЯНИН, В. Ф. ЗАЙЦЕВ, А. И. ЖУРОВ

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И МЕХАНИКИ

Допущено УМО по образованию в области Прикладной математики и управления качеством в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности «Прикладная математика»

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ
2005

УДК 517.9
ББК 517.2
П 54

Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И. **Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 256 с. — ISBN 5-9221-0539-6.

Описаны точные аналитические методы решения нелинейных уравнений математической физики. Наряду с классическими методами представлены также новые методы, которые интенсивно развивались в последнее время (неклассический метод поиска симметрий, прямой метод Кларксона–Крускала, метод дифференциальных связей, метод обобщенного разделения переменных и другие). Во всех разделах рассматриваются примеры использования методов для построения точных решений конкретных нелинейных дифференциальных уравнений. Исследуются уравнения тепло- и массопереноса, гидродинамики, теории волн, нелинейной акустики, теории горения, нелинейной оптики и др. Приведены многочисленные задачи и упражнения, позволяющие получить практические навыки применения рассматриваемых методов.

Для широкого круга научных работников, преподавателей вузов, инженеров, аспирантов и студентов, специализирующихся в различных областях прикладной математики, механики и физики. Ее теоретический материал и упражнения могут быть использованы в курсах лекций по уравнениям математической физики, для чтения спецкурсов и для проведения практических занятий.

Табл. 13. Ил. 22. Библиогр. 201 назв.

ISBN 5-9221-0539-6

Оглавление

Предисловие

Нелинейные дифференциальные уравнения с частными производными второго и более высоких порядков (нелинейные уравнения математической физики) часто встречаются в различных областях математики, физики, механики, химии, биологии и в многочисленных приложениях. Общее решение нелинейных уравнений математической физики удается получить только в исключительных случаях. Поэтому обычно приходится ограничиваться поиском и анализом частных решений, которые принято называть *точными решениями*.

Точные решения дифференциальных уравнений математической физики всегда играли и продолжают играть огромную роль в формировании правильного понимания качественных особенностей многих явлений и процессов в различных областях естествознания. Точные решения нелинейных уравнений наглядно демонстрируют и позволяют понять механизмы таких сложных нелинейных эффектов, как пространственная локализация процессов переноса, множественность или отсутствие стационарных состояний при определенных условиях, существование режимов с обострением и др. Простые решения широко используются для иллюстрации теоретического материала и некоторых приложений в учебных курсах университетов и технических вузов (по теории тепло- и массопереноса, гидродинамике, газовой динамике, теории волн, нелинейной оптике и др.).

Точные решения типа бегущей волны и автомодельные решения часто представляют собой асимптотики существенно более широких классов решений, соответствующих другим начальным и граничным условиям. Указанное свойство позволяет делать выводы общего характера и прогнозировать динамику различных явлений и процессов.

Даже те частные точные решения дифференциальных уравнений, которые не имеют ясного физического смысла, могут быть использованы в качестве основы для «тестовых» задач при проверке корректности и оценке точности различных численных, асимптотических и приближенных аналитических методов. Кроме того, допускающие точные решения модельные уравнения и задачи служат основой для разработки новых численных, асимптотических и приближенных методов, которые, в свою очередь, позволяют исследовать уже более сложные задачи, не имеющие точного аналитического решения. Точные методы и решения необходимы также для разработки и совершенствования соответствующих разделов компьютерных программ, предназначенных для аналитических вычислений (системы MATHEMATICA, MAPLE, CONVODE и др.)

Важно отметить, что многие уравнения прикладной и теоретической физики, химии и биологии содержат эмпирические параметры или эмпирические функции. Точные решения позволяют планировать эксперимент для определения этих параметров или функций путем искусственного создания подходящих (граничных и начальных) условий.

Под точными решениями нелинейных уравнений математической физики понимаются следующие решения:

1. Решения, которые выражаются через элементарные функции.

2. Решения, которые выражаются в виде квадратур.*

3. Решения, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями (системами обыкновенных дифференциальных уравнений).

4. Решения, которые выражаются через решения линейных уравнений с частными производными (линейных интегральных уравнений).

Под точными методами решения нелинейных уравнений математической физики понимаются методы, позволяющие получать точные решения.

В книге описаны основные (как классические, так и новые) точные методы решения нелинейных уравнений математической физики. Эти методы перечислены в сводной таблице.

ТАБЛИЦА

Основные точные методы решения нелинейных уравнений математической физики

№	Название метода	Характерные особенности
1	Классический метод поиска симметрий (метод группового анализа)	Основан на поиске преобразований, которые оставляют инвариантным вид уравнений. Позволяет получать инвариантные решения
2	Неклассический метод поиска симметрий	Важная модификация метода группового анализа (но более сложная для практического применения). Позволяет описать более широкий класс решений
3	Прямой метод Кларксона — Крускала	Задается общая структура решения, в которое входят произвольные функции. Эти функции неравноправны, для их определения используют специальные приемы
4	Метод дифференциальных связей	Основан на совместном исследовании данных уравнений и вспомогательных (более простых) уравнений, называемых дифференциальными связями
5	Метод обобщенного разделения переменных	Задается общий вид решения, характерный для линейных уравнений. Для определения искомых функций используют разные методы
6	Метод функционального разделения переменных	Задается общий вид решения с функциональным произволом. Для определения искомых функций используют методы дифференцирования и расщепления
7	Метод обратной задачи рассеяния	Основан на специальном представлении уравнения (с помощью пары линейных операторов) или на условии совместности двух линейных уравнений
8	Тест Пенлеве для нелинейных уравнений математической физики	Основан на поиске решений в виде разложений, имеющих особенность типа подвижного полюса. Положение полюса задается произвольной функцией

* Интегрирование дифференциальных уравнений в замкнутой форме — это представление решений дифференциальных уравнений аналитическими формулами, при записи которых используются указанный априори набор допустимых функций и перечисленный заранее набор математических операций. Решение выражается в виде квадратур, если в качестве допустимых функций используются элементарные функции и функции, входящие в уравнение, а под допустимыми операциями понимается конечное множество арифметических операций, операций суперпозиции (образования сложной функции) и операций взятия неопределенного интеграла.

Замечание 1. Наиболее популярными методами являются методы группового анализа и обратной задачи рассеяния (данные основаны на поиске ключевых слов в Интернете).

Замечание 2. В теории тепло- и массопереноса и гидродинамике* эффективно работают только первые шесть методов, указанных в таблице.

Замечание 3. Иногда объединяют метод группового анализа и неклассический метод поиска симметрий, а также методы обобщенного и функционального разделения переменных.

Замечание 4. Метод Монжа, метод Хироты и другие точные методы, имеющие существенно более узкую область применимости, в книге не рассматриваются.

Изложение методов сопровождается многочисленными конкретными примерами и упражнениями, необходимыми для лучшего усвоения материала и получения практических навыков решения дифференциальных уравнений. Помимо нелинейных уравнений второго и более высоких порядков, для иллюстрации широкой области применимости описанных методов в качестве примеров и упражнений иногда используются также некоторые нелинейные уравнения первого порядка и линейные уравнения второго и более высоких порядков.

При отборе практического материала (примеров и упражнений) авторы отдавали наибольшее предпочтение следующим двум важным типам уравнений:

- уравнениям, которые встречаются в различных приложениях (в теории тепло- и массопереноса, теории волн, гидродинамике, газовой динамике, теории горения, нелинейной оптике, химической технологии, биологии и др.);
- уравнениям общего вида, которые зависят от произвольных функций (точные решения таких уравнений представляют особый интерес для тестирования численных и приближенных методов).

Для максимального расширения круга потенциальных читателей с разной математической подготовкой авторы по возможности старались избегать использования специальной терминологии. Поэтому некоторые результаты описаны схематически и упрощенно, чего вполне достаточно для их применения в большинстве приложений. Многие разделы можно читать независимо друг от друга, что облегчает работу с материалом.

Для удобства читателей в книгу включены также четыре вспомогательных главы: по уравнениям Пенлеве, по методам решения квазилинейных и нелинейных уравнений с частными производными первого порядка, по методам решения функциональных уравнений.

Книга представляет собой расширенный курс лекций по методам решения нелинейных уравнений математической физики и механики, читаемый студентам кафедры «Прикладная математика» Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана.

Авторы надеются, что книга будет полезной для широкого круга научных работников, преподавателей вузов, инженеров, аспирантов и студентов, специализирующихся в области прикладной математики, механики, физики,

* Здесь имеется в виду поиск точных решений уравнений Навье — Стокса и уравнений гидродинамического пограничного слоя.

теории управления и химической технологии. Основной материал книги и упражнения могут быть использованы для чтения спецкурсов и проведения практических занятий по нелинейным уравнениям математической физики для студентов и аспирантов физико-математических специальностей университетов и технических вузов. Отдельные разделы книги могут быть включены в основные курсы по уравнениям математической физики.

Авторы

Некоторые обозначения и замечания

Латинские буквы

$C_1, C_2, \ldots$ — произвольные постоянные;

$r,\ \varphi,\ z$ — цилиндрические координаты, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$;

$r,\ \theta,\ \varphi$ — сферические координаты, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = \sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$;

t — время ($t \geqslant 0$);

w — искомая функция (зависимая переменная);

x, y, z — пространственные переменные (декартовы координаты);

$x_1, \ldots, x_n$ — декартовы координаты в n-мерном пространстве.

Греческие буквы

Δ — оператор Лапласа:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{ — в двумерном случае,}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ — в трехмерном случае,}$$

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \text{ — в } n\text{-мерном случае;}$$

$\Delta\Delta$ — бигармонический оператор, $\Delta\Delta = \dfrac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\dfrac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \dfrac{\partial^4}{\partial y^4}$ — в двумерном случае.

Краткие обозначения производных

Частные производные:

$$w_x = \frac{\partial w}{\partial x},\quad w_t = \frac{\partial w}{\partial t},\quad w_{xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\quad w_{xt} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t},\quad w_{tt} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\quad w_{xxx} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3},\ \ldots$$

Обыкновенные производные функции $f = f(x)$:

$$f'_x \equiv \frac{df}{dx},\quad f''_{xx} \equiv \frac{d^2 f}{dx^2},\quad f'''_{xxx} \equiv \frac{d^3 f}{dx^3},\quad f''''_{xxxx} \equiv \frac{d^4 f}{dx^4},\quad f_x^{(n)} \equiv \frac{d^n f}{dx^n} \quad \text{при} \quad n \geqslant 5.$$

Краткие обозначения дифференциальных операторов

$$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x},\quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t},\quad \partial_w = \frac{\partial}{\partial w};$$

$$\mathrm{D}_x = \frac{\partial}{\partial x} + w_x \frac{\partial}{\partial w} + w_{xx} \frac{\partial}{\partial w_x} + w_{xt} \frac{\partial}{\partial w_t} + \cdots;$$

$$\mathrm{D}_t = \frac{\partial}{\partial t} + w_t \frac{\partial}{\partial w} + w_{xt} \frac{\partial}{\partial w_x} + w_{tt} \frac{\partial}{\partial w_t} + \cdots,$$

где ∂_x, ∂_t, ∂_w — операторы дифференцирования по x, t, w, а D_x и D_t — операторы полного дифференцирования по x и t (считается, что $w = w(x,t)$).

ТАБЛИЦА
Наиболее распространенные типы точных решений (для уравнений с двумя независимыми переменными x и t и искомой функцией w)

№	Название решения	Структура решения (x и t можно поменять местами)
1	Решение типа бегущей волны*	$w = F(z),\ z = \alpha x + \beta t,\ \alpha\beta \neq 0$
2	Решение с аддитивным разделением переменных	$w = \varphi(x) + \psi(t)$
3	Решение с мультипликативным разделением переменных	$w = \varphi(x)\psi(t)$
4	Автомодельное решение**	$w = t^{\alpha}F(z),\ z = xt^{\beta}$
5	Обобщенное автомодельное решение	$w = \varphi(t)F(z),\ z = x\psi(t)$
6	Решение типа обобщенной бегущей волны	$w = F(z),\ z = \varphi(t)x + \psi(t)$
7	Решение с обобщенным разделением переменных	$w = \varphi_1(x)\psi_1(t) + \dots + \varphi_n(x)\psi_n(t)$
8	Решение с функциональным разделением переменных	$w = F(z),\ z = \varphi_1(x)\psi_1(t) + \dots + \varphi_n(x)\psi_n(t)$

* Обе переменные могут играть роль пространственных координат.

** Иногда решения вида $w = \bar{t}^{\alpha}F(z),\ \ z = \bar{x}\bar{t}^{\beta}$, где $\bar{x} = x + C_1$ и $\bar{t} = t + C_2$, также будут называться автомодельными решениями.

Замечания

1. В формулах, содержащих выражения типа $\dfrac{f(x)}{a-2}$, часто не оговаривается, что $a \neq 2$.

2. В книге обычно не рассматриваются простые решения, зависящие только от одной переменной, которая входит в исходное уравнение.

3. В книге часто используется очень простая и наглядная классификация наиболее распространенных типов точных решений, которая не связана с видом рассматриваемых уравнений (см. таблицу).

Этим знаком помечены ссылки на литературные источники.

Этим знаком помечены задачи и упражнения к разделам для самостоятельной работы читателя.

1. Классификация полулинейных уравнений с частными производными второго порядка

1.1. Типы уравнений. Уравнения характеристик

Рассмотрим полулинейное уравнение с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными

$$a(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2b(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+c(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=F\Bigl(x,y,w,\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y}\Bigr), \qquad (1)$$

где a, b, c — некоторые функции от x и y, имеющие непрерывные производные до второго порядка включительно.

Классификация полулинейных уравнений проводится аналогично классификации линейных уравнений; процедура приведения таких уравнений к каноническому виду определяется только левой частью уравнения.

Уравнение (1) в точке (x, y) принадлежит к

параболическому типу, если $b^2-ac=0$;
гиперболическому типу, если $b^2-ac>0$;
эллиптическому типу, если $b^2-ac<0$.

Для того, чтобы привести уравнение (1) к каноническому виду, надо записать уравнение характеристик

$$a\,dy^2-2b\,dx\,dy+c\,dx^2=0,$$

которое распадается на два уравнения:

$$a\,dy-\bigl(b+\sqrt{b^2-ac}\,\bigr)\,dx=0, \qquad (2)$$

$$a\,dy-\bigl(b-\sqrt{b^2-ac}\,\bigr)\,dx=0, \qquad (3)$$

и найти их общие интегралы.

1.2. Канонический вид уравнений параболического типа ($b^2-ac=0$)

Уравнения (2) и (3) в этом случае совпадают и имеют один общий интеграл

$$\varphi(x,y)=C.$$

Переходя от x, y к новым независимым переменным ξ, η по формулам

$$\xi=\varphi(x,y),\qquad \eta=\eta(x,y),$$

где $\eta = \eta(x, y)$ — любая дважды дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию невырожденности якобиана $\dfrac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)}$ в рассматриваемой области, приведем уравнение (1) к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = F_1\Big(\xi, \eta, w, \frac{\partial w}{\partial \xi}, \frac{\partial w}{\partial \eta}\Big). \tag{4}$$

В качестве функции η можно выбрать $\eta = x$ или $\eta = y$.

Видно, что преобразованное уравнение (4) имеет только один член со старшей производной (в частном случае $F_1 = w_\xi$ оно совпадает с линейным уравнением теплопроводности).

Замечание. В вырожденном случае, когда функция F_1 не зависит от производной w_ξ, уравнение (4) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение относительно переменной η, в котором ξ играет роль параметра.

1.3. Канонический вид уравнений гиперболического типа ($b^2 - ac > 0$)

Общие интегралы

$$\varphi(x, y) = C_1, \qquad \psi(x, y) = C_2$$

уравнений (2) и (3) являются вещественными и различными. Они определяют два различных семейства вещественных характеристик.

Переходя от x, y к новым независимым переменным ξ, η по формулам

$$\xi = \varphi(x, y), \qquad \eta = \psi(x, y),$$

приведем уравнение (1) к каноническому виду (первая каноническая форма)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = F_2\Big(\xi, \eta, w, \frac{\partial w}{\partial \xi}, \frac{\partial w}{\partial \eta}\Big).$$

Преобразование

$$\xi = t + z, \qquad \eta = t - z$$

приводит полученное уравнение к другому каноническому виду (вторая каноническая форма)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = F_3\Big(t, z, w, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial z}\Big),$$

где $F_3 = 4F_2$. В частном случае $F_3 = 0$ это уравнение совпадает с линейным уравнением колебаний струны.

1.4. Канонический вид уравнений эллиптического типа ($b^2 - ac < 0$)

Общие интегралы уравнений (2) и (3) в этом случае являются комплексно сопряженными и определяют два семейства мнимых характеристик.

Пусть общий интеграл уравнения (2) имеет вид

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = C, \qquad i^2 = -1,$$

где $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — вещественные функции.

Переходя от x, y к новым независимым переменным ξ, η по формулам

$$\xi = \varphi(x, y), \qquad \eta = \psi(x, y),$$

приведем уравнение (1) к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = F_4\Big(\xi, \eta, w, \frac{\partial w}{\partial \xi}, \frac{\partial w}{\partial \eta}\Big).$$

В частном случае $F_4 = 0$ это уравнение совпадает с уравнением Лапласа.

Задачи и упражнения к главе 1

1. При каких значениях определяющих коэффициентов уравнение

$a_1 w_{xx} + a_2 w_{xy} + a_3 w_{yy} + b_1 w_x + b_2 w_y = f(w)$

приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$w''_{\xi\xi} + k w'_{\xi} = f(w)$?

2. Каким условиям должны удовлетворять функциональные коэффициенты уравнения

$f_1(x) w_{xx} + f_2(x) w_{xy} + f_3(x) w_{yy} + g_1(x) w_x + g_2(x) w_y = \Phi(w)$,

чтобы оно приводилось к обыкновенному дифференциальному уравнению вида:

a) $w''_{\xi\xi} = \Phi(w)$,

b) $w''_{\xi\xi} + a w'_{\xi} = \Phi(w)$,

c) $h_1(\xi) w''_{\xi\xi} + h_2(\xi) w'_{\xi} = \Phi(w)$?

Указание. Преобразование искать в виде $\xi = y + \int \varphi(x)\,dx$, $\eta = y + \int \psi(x)\,dx$.

3. Каким условиям должны удовлетворять функциональные коэффициенты уравнения

$f_1(x) w_{xx} + f_2(x) w_{xy} + f_3(x) w_{yy} + g_1(x) w_x + g_2(x) w_y = \Phi(w)$,

чтобы оно приводилось к каноническому виду:

a) $w_{\xi\eta} = \Phi(w)$,

b) $w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta} = \Phi(w)$?

Литература к главе 1: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин, Г. И. Натансон (1964), А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972), В. С. Владимиров (1985), А. Д. Полянин (2001*a*).

2. Преобразования уравнений математической физики

2.1. Точечные преобразования

Пусть x, y — независимые переменные, а $w = w(x, y)$ — функция этих переменных. В общем случае точечное преобразование задается формулами

$$x = X(\xi, \eta, u), \qquad y = Y(\xi, \eta, u), \qquad w = W(\xi, \eta, u), \tag{1}$$

где ξ, η — новые независимые переменные, $u = u(\xi, \eta)$ — новая зависимая переменная, X, Y, W — некоторые (заданные или искомые) функции.

Точечные преобразования не только сохраняют порядок уравнения, к которому они применяются, но и не изменяют радикально структуру уравнения, так как старшие производные новых переменных линейно зависят от старших производных исходных переменных.

Преобразование (1) обратимо, если

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial x} & \dfrac{\partial X}{\partial y} & \dfrac{\partial X}{\partial w} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x} & \dfrac{\partial Y}{\partial y} & \dfrac{\partial Y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial W}{\partial x} & \dfrac{\partial W}{\partial y} & \dfrac{\partial W}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0.$$

В общем случае уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными

$$F\Big(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big) = 0 \tag{2}$$

с помощью обратимого точечного преобразования (1) приводится к виду

$$G\Big(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}, \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\Big) = 0. \tag{3}$$

Если $u = u(\xi, \eta)$ — некоторое решение уравнения (3), то формулы (1) определяют соответствующее решение уравнения (2) в параметрическом виде.

Простейшие преобразования независимых переменных имеют вид:

$$\begin{aligned} &\xi = x - x_0, \quad \eta = y - y_0 \quad &&\text{(преобразование сдвига)}, \\ &\xi = k_1 x, \qquad \eta = k_2 y \quad &&\text{(преобразование масштабирования)}. \end{aligned}$$

Первое преобразование соответствует переносу начала координат в точку (x_0, y_0), а второе — изменению масштабов (сжатию или растяжению) вдоль осей x и y.

Точечные преобразования используются для упрощения уравнений и приведения их к известным. Иногда они позволяют свести нелинейные уравнения к линейным.

Пример 1. Нелинейное уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x}\Big(w^m \frac{\partial w}{\partial x}\Big) + \big[x f(t) + g(t)\big] \frac{\partial w}{\partial x} + h(t) w$$

с помощью точечного преобразования

$$w(x,t) = u(z,\tau)H(t), \quad z = xF(t) + \int g(t)F(t)\,dt, \quad \tau = \int F^2(t)H^m(t)\,dt,$$

где функции F и H определяются формулами

$$F(t) = \exp\Bigl[\int f(t)\,dt\Bigr], \quad H(t) = \exp\Bigl[\int h(t)\,dt\Bigr],$$

приводится к более простому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial z}\Bigl(u^m \frac{\partial u}{\partial z}\Bigr).$$

Пример 2. Нелинейное уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\Bigl(\frac{\partial w}{\partial x}\Bigr)^2 + f(x,t)$$

заменой $u = \exp(aw)$ приводится к линейному уравнению для функции $u = u(x,t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + af(x,t)u.$$

➭ *Задачи и упражнения к разд. 2.1*

1. Найти преобразование, приводящее уравнение теплопроводности с нелинейным источником $w_t = aw_{xx} + bw^n$ к каноническому виду $u_\tau = u_{xx} + u^n$.

2. Найти преобразование, приводящее уравнение Бюргерса $w_t + aww_x = bw_{xx}$ к каноническому виду $u_\tau + uu_z = u_{zz}$.

3. Найти преобразование, приводящее уравнение Буссинеска $w_{tt} + a(ww_x)_x + bw_{xxxx} = 0$ к каноническому виду $u_{\tau\tau} + (u_z)_z + u_{zzzz} = 0$.

4. Найти точечные преобразования, приводящее нелинейные уравнения

a) $w_t = w_{xx} + aw_x^2$,

b) $w_t = w_{xx} + aww_x^2$,

c) $w_t = w_{xx} + f(w)w_x^2$

к линейному уравнению теплопроводности $u_t = u_{xx}$.

Указание. Преобразования ищутся в виде $u = F(w)$.

5. Найти точечное преобразование, приводящее уравнение $w_t = w_{xx} + aw\ln w + f(t)$ к более простому уравнению $u_t = u_{xx} + au\ln u$.

Указание. Преобразование ищется в виде $w = \varphi(t)u$, где $u = u(x,t)$.

6. Найти точечное преобразование, приводящее уравнение $w_t = w_{xx} + a(w_x)^2 + f(t)$ к более простому уравнению $u_t = u_{xx} + a(u_x)^2$.

Указание. Преобразование ищется в виде $w = \varphi(t) + u$, где $u = u(x,t)$.

7. Найти точечное преобразование, приводящее уравнение $w_t = w_{xx} + a(w_x)^n + bw + f(t)$ к более простому уравнению $u_t = u_{xx} + a(u_x)^n + bu$.

Указание. Преобразование ищется в виде $w = \varphi(t) + u$, где $u = u(x,t)$.

8. Показать, что уравнение Монжа — Ампера $w_{xy}^2 = w_{xx}w_{yy}$ инвариантно относительно преобразования

$$\bar{x} = a_1x + b_1y + c_1, \quad \bar{y} = a_2x + b_2y + c_2, \quad \bar{w} = kw + a_3x + b_3y + c_3$$

(т. е. приводится к уравнению такого же вида).

9. Найти преобразование вида

$$\tilde{t} = f(t), \quad \tilde{x} = g(t)x, \quad \tilde{w} = h(t)w + p(t)x,$$

связывающее цилиндрическое уравнение Кортевега — де Фриза

$$\tilde{w}_{\tilde{t}} = \tilde{w}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} + 6\tilde{w}\tilde{w}_{\tilde{x}} - \frac{\tilde{w}}{2\tilde{t}}$$

и обычное уравнение Кортевега — де Фриза

$$w_t = w_{xxx} + 6ww_x.$$

Литература к разд. 2.1: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004).

2.2. Преобразование годографа

Для упрощения нелинейных уравнений и систем уравнений с частными производными иногда используется преобразование годографа.

2.2.1. Случай, когда одна из независимых переменных принимается за искомую величину

Для уравнения с двумя независимыми переменными x, t и искомой функцией $w = w(x, t)$ преобразование годографа заключается в том, что решение ищется в неявном виде (x и t можно поменять местами):

$$x = x(t, w), \tag{4}$$

т. е. t и w принимаются за независимые переменные, а x — за зависимую переменную. Преобразование годографа (4) не меняет порядок уравнения и является частным случаем точечного преобразования (его можно записать в эквивалентном виде: $x = \widetilde{w}$, $t = \widetilde{t}$, $w = \widetilde{x}$).

Пример 3. Рассмотрим нелинейное уравнение второго порядка

$$\frac{\partial w}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \tag{5}$$

Ищем решение в неявном виде. Дифференцируя выражение (4) по обеим переменным как неявную функцию с учетом зависимости $w = w(x, t)$, получим:

$$\begin{aligned}
&1 = x_w w_x && \text{(дифференцирование по } x\text{)},\\
&0 = x_w w_t + x_t && \text{(дифференцирование по } t\text{)},\\
&0 = x_{ww} w_x^2 + x_w w_{xx} && \text{(дифференцирование по } x \text{ дважды)},
\end{aligned}$$

где индексы снизу обозначают соответствующие частные производные. Из этих соотношений выразим «старые» производные через «новые»:

$$w_x = \frac{1}{x_w}, \quad w_t = -\frac{x_t}{x_w}, \quad w_{xx} = -\frac{w_x^2 x_{ww}}{x_w} = -\frac{x_{ww}}{x_w^3}.$$

Подставив эти выражения в (5), приходим к линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial x}{\partial t} = a\frac{\partial^2 x}{\partial w^2}.$$

2.2.2. Использование эквивалентной системы уравнений

Для системы двух уравнений с двумя независимыми переменными x, y и зависимыми переменными $w = w(x, y)$, $v = v(x, y)$ преобразование годографа заключается в том, что w и v принимаются за независимые переменные, а x и y — за зависимые переменные, т. е. ищутся функции

$$x = x(w, v), \qquad y = y(w, v). \tag{6}$$

Преобразование годографа применяется в газовой динамике и в теории струй для линеаризации соответствующих уравнений и решения некоторых краевых задач.

Для исследования отдельных уравнений иногда бывает полезно перейти к эквивалентной системе уравнений, а затем сделать преобразование годографа. Проиллюстрируем сказанное на примерах конкретных нелинейных уравнений.

Пример 4. Стационарное уравнение Хохлова — Заболоцкой (встречается в акустике и в нелинейной механике)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\frac{\partial}{\partial y}\left(w\frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0 \tag{7}$$

представим в виде системы уравнений

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad -aw\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{8}$$

Используем преобразование годографа (6): примем w и v за независимые переменные, а x и y — за зависимые переменные. Дифференцируя каждое выражение (6) по x и по y (как сложные функции) и исключая из полученных соотношений частные производные x_w, x_v, y_w, y_v, имеем:

$$\frac{\partial x}{\partial w} = \frac{1}{J}\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{J}\frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial y}{\partial w} = -\frac{1}{J}\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{J}\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \text{где} \quad J = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{9}$$

Исключая из (8) с помощью (9) производные w_x, w_y, v_x, v_y, приходим к системе

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial w}, \quad -aw\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial w}. \tag{10}$$

Почленно продифференцируем первое уравнение по w, а второе — по v, и исключим смешанную производную y_{wv}. В результате для функции $x = x(w, v)$ получим линейное уравнение

$$\frac{\partial^2 x}{\partial w^2} + aw\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0. \tag{11}$$

Аналогичным образом из системы (10) для функции $y = y(w, v)$ имеем другое линейное уравнение:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{aw}\frac{\partial y}{\partial w}\right) = 0. \tag{12}$$

Взяв некоторое частное решение $x = x(w, v)$ уравнения (11) и подставив его в систему (10), простым интегрированием можно найти $y = y(w, v)$. Исключив из равенств (8) переменную v, получим точное решение $w = w(x, y)$ нелинейного уравнения (7).

Замечание. Уравнение (11) при произвольном a имеет простое частное решение

$$x = C_1 wv + C_2 w + C_3 v + C_4, \tag{13}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные. Подставив его в систему (10), получим

$$\frac{\partial y}{\partial v} = C_1 v + C_2, \quad \frac{\partial y}{\partial w} = -a(C_1 w + C_3)w. \tag{14}$$

Интегрируя первое уравнение (14), находим $y = \frac{1}{2}C_1 v^2 + C_2 v + \varphi(w)$. Подставив это решение во второе уравнение (14), определяем функцию $\varphi(w)$. В результате получим

$$y = \tfrac{1}{2}C_1 v^2 + C_2 v - \tfrac{1}{3}aC_1 w^3 - \tfrac{1}{2}aC_3 w^2 + C_5. \tag{15}$$

Формулы (13) и (15) определяют точное решение уравнения (7) в параметрической форме (v — параметр).

Аналогичным образом можно построить и другие точные решения уравнения (7).

Пример 5. Рассмотрим уравнение Борна — Инфельда

$$\left[1 - \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right]\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - \left[1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \tag{16}$$

которое используется в нелинейной электродинамике (в теории поля).

Путем введения новых переменных

$$\xi = x - t, \quad \eta = x + t, \quad u = \frac{\partial w}{\partial \xi}, \quad v = \frac{\partial w}{\partial \eta}$$

уравнение (16) можно записать в виде эквивалентной системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial v}{\partial \xi} &= 0, \\ v^2\frac{\partial u}{\partial \xi} - (1 + 2uv)\frac{\partial u}{\partial \eta} + u^2\frac{\partial v}{\partial \eta} &= 0. \end{aligned}$$

Преобразование годографа (u, v принимаются за независимые переменные, а ξ, η — за зависимые переменные) приводит к линейной системе

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{\partial \eta}{\partial u} &= 0, \\ v^2 \frac{\partial \eta}{\partial v} + (1+2uv)\frac{\partial \xi}{\partial v} + u^2 \frac{\partial \xi}{\partial u} &= 0, \end{aligned} \tag{17}$$

а после исключения η — к линейному уравнению второго порядка

$$u^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} + (1+2uv)\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} + v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} + 2u\frac{\partial \xi}{\partial u} + 2v\frac{\partial \xi}{\partial v} = 0.$$

Считая, что искомые решения находятся в гиперболической области, запишем уравнение характеристик (см. главу 1):

$$u^2\, dv^2 - (1+2uv)\, du\, dv + v^2\, du^2 = 0.$$

Интегралы этого уравнения имеют вид $r = C_1$, $s = C_2$, где

$$r = \frac{\sqrt{1+4uv}-1}{2v}, \qquad s = \frac{\sqrt{1+4uv}-1}{2u}. \tag{18}$$

Переходя в (17) к новым переменным (18), получим

$$\begin{aligned} r^2 \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial \eta}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial \xi}{\partial s} + s^2 \frac{\partial \eta}{\partial s} &= 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Исключив переменную η, приходим к простейшему уравнению

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial r \partial s} = 0,$$

общим решением которого является сумма двух произвольных функций разных аргументов. Функция η определяется из системы (19).

Задачи и упражнения к разд. 2.2

1. Используя преобразование годографа, найти общие решения модельных уравнений газовой динамики:

a) $w_t + aww_x = 0$,

b) $w_t + f(w)w_x = 0$.

Указание. Использовать преобразование годографа, описанное в примере 3.

2. Преобразовать нелинейное уравнение второго порядка

$$\frac{\partial w}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 = f(t,w)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

в линейное уравнение.

Указание. Использовать преобразование годографа, описанное в примере 3.

3. Найти вид функции $f(u)$, для которой преобразование годографа оставляет инвариантным уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = f\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

4. Преобразовать нелинейное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right]$$

к линейному уравнению.

Указание. Использовать преобразование годографа из примера 4, в котором надо сделать переобозначения $x \to t$, $y \to x$.

5. Преобразовать нелинейное уравнение теплопроводности в анизотропной среде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[g(w)\frac{\partial w}{\partial y}\right] = 0$$

к линейному уравнению.

Указание. Перейти к системе уравнений, а затем использовать преобразование годографа, как в примере 4.

6. Преобразовать нелинейную систему уравнений

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v^2+p(\rho))}{\partial x}=0,$$

описывающую одномерные адиабатические течения идеального газа, к линейной системе. Здесь v и ρ — неизвестные величины, а $p=p(\rho)$ — заданная функция (для идеального политропического газа $p=A\rho^\gamma$).

Указание. Принять v и ρ за независимые переменные, а x и t — за зависимые переменные.

7. Преобразовать нелинейную систему газодинамического типа

$$f_1(w,v)\frac{\partial w}{\partial x}+f_2(w,v)\frac{\partial w}{\partial y}+f_3(w,v)\frac{\partial v}{\partial x}+f_4(w,v)\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

$$g_1(w,v)\frac{\partial w}{\partial x}+g_2(w,v)\frac{\partial w}{\partial y}+g_3(w,v)\frac{\partial v}{\partial x}+g_4(w,v)\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

в линейную систему.

Указание. Приняв w и v за независимые переменные, а x и y — за зависимые переменные, использовать формулы (9).

8. Используя преобразование годографа (см. пример 3), найти общее решение нелинейного уравнения $w_x w_{xt}-w_t w_{xx}=0$.

Литература к разд. 2.2: Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе (1963), Дж. Уизем (1977, стр. 588–590), Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко (1978, стр. 33–34), Г. Г. Черный (1988, стр. 253–269), Р. Курант (1964, стр. 426), D. Zwillinger (1989), P. A. Clarkson, A. S. Fokas, M. J. Ablowitz (1989), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (2001 *b*), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004).

2.3. Контактные преобразования. Преобразования Лежандра и Эйлера

2.3.1. Общий вид контактных преобразований

Будем рассматривать функции двух переменных $w=w(x,y)$. Общим свойством контактных преобразований является зависимость исходных переменных от новых переменных и их первых производных:

$$x=X\Bigl(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\Bigr),\quad y=Y\Bigl(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\Bigr),\quad w=W\Bigl(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\Bigr).\tag{20}$$

Функции X, Y, W не являются произвольными: они выбираются так, чтобы первые производные исходных переменных также зависели только от преобразованных переменных и их производных не выше первого порядка:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=U\Bigl(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\Bigr),\qquad \frac{\partial w}{\partial y}=V\Bigl(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\Bigr).\tag{21}$$

Контактные преобразования (20)–(21) не повышают порядка уравнений, к которым они применяются.

В общем случае уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными

$$F\Bigl(x,y,w,\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y},\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Bigr)=0\tag{22}$$

с помощью контактного преобразования (20)–(21) приводится к виду

$$G\Bigl(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta},\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2},\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta},\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\Bigr)=0.\tag{23}$$

Иногда уравнение (23) бывает проще, чем уравнение (22). Если $u = u(\xi, \eta)$ — некоторое решение уравнения (23), то формулы (20) определяют соответствующее решение уравнения (22) в параметрическом виде.

Покажем, как найти функции U и V в (21) и соотношения, которым должны удовлетворять функции X, Y, W в (20). Продифференцируем по правилу дифференцирования неявных функций первое и второе выражения (20) по x и y, учитывая, что $u = u(\xi, \eta)$. В результате получим четыре соотношения:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial X}{\partial u}p + \frac{\partial X}{\partial p}p_\xi + \frac{\partial X}{\partial q}p_\eta\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \left(\frac{\partial X}{\partial \eta} + \frac{\partial X}{\partial u}q + \frac{\partial X}{\partial p}q_\xi + \frac{\partial X}{\partial q}q_\eta\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} = 1,\\
&\left(\frac{\partial Y}{\partial \xi} + \frac{\partial Y}{\partial u}p + \frac{\partial Y}{\partial p}p_\xi + \frac{\partial Y}{\partial q}p_\eta\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \left(\frac{\partial Y}{\partial \eta} + \frac{\partial Y}{\partial u}q + \frac{\partial Y}{\partial p}q_\xi + \frac{\partial Y}{\partial q}q_\eta\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0,\\
&\left(\frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial X}{\partial u}p + \frac{\partial X}{\partial p}p_\xi + \frac{\partial X}{\partial q}p_\eta\right)\frac{\partial \xi}{\partial y} + \left(\frac{\partial X}{\partial \eta} + \frac{\partial X}{\partial u}q + \frac{\partial X}{\partial p}q_\xi + \frac{\partial X}{\partial q}q_\eta\right)\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0,\\
&\left(\frac{\partial Y}{\partial \xi} + \frac{\partial Y}{\partial u}p + \frac{\partial Y}{\partial p}p_\xi + \frac{\partial Y}{\partial q}p_\eta\right)\frac{\partial \xi}{\partial y} + \left(\frac{\partial Y}{\partial \eta} + \frac{\partial Y}{\partial u}q + \frac{\partial Y}{\partial p}q_\xi + \frac{\partial Y}{\partial q}q_\eta\right)\frac{\partial \eta}{\partial y} = 1,
\end{aligned} \tag{24}$$

где использованы краткие обозначения $p = \frac{\partial u}{\partial \xi}$, $q = \frac{\partial u}{\partial \eta}$ $(p_\eta = q_\xi)$; индексы ξ и η соответствуют частным производным. Первая пара равенств (24) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно $\frac{\partial \xi}{\partial x}$, $\frac{\partial \eta}{\partial x}$, вторая — относительно $\frac{\partial \xi}{\partial y}$, $\frac{\partial \eta}{\partial y}$. Решив эти системы, можно найти производные $\frac{\partial \xi}{\partial x} = A$, $\frac{\partial \eta}{\partial x} = B$, $\frac{\partial \xi}{\partial y} = C$, $\frac{\partial \eta}{\partial y} = D$, а затем, продифференцировав третье соотношение (20) по x и y, можно выразить величины $U = \frac{\partial w}{\partial x}$, $V = \frac{\partial w}{\partial y}$ через новые переменные:

$$\begin{aligned}
U &= A\left(\frac{\partial W}{\partial \xi} + \frac{\partial W}{\partial u}p + \frac{\partial W}{\partial p}p_\xi + \frac{\partial W}{\partial q}p_\eta\right) + B\left(\frac{\partial W}{\partial \eta} + \frac{\partial W}{\partial u}q + \frac{\partial W}{\partial p}q_\xi + \frac{\partial W}{\partial q}q_\eta\right),\\
V &= C\left(\frac{\partial W}{\partial \xi} + \frac{\partial W}{\partial u}p + \frac{\partial W}{\partial p}p_\xi + \frac{\partial W}{\partial q}p_\eta\right) + D\left(\frac{\partial W}{\partial \eta} + \frac{\partial W}{\partial u}q + \frac{\partial W}{\partial p}q_\xi + \frac{\partial W}{\partial q}q_\eta\right).
\end{aligned}$$

При этом следующие из (21) условия — отсутствие зависимости от вторых производных

$$\frac{\partial U}{\partial p_\xi} = \frac{\partial V}{\partial p_\xi} = \frac{\partial U}{\partial p_\eta} = \frac{\partial V}{\partial p_\eta} = \frac{\partial U}{\partial q_\eta} = \frac{\partial V}{\partial q_\eta} = 0 \quad (p_\eta \equiv q_\xi)$$

— задают дополнительные соотношения между функциями X, Y, W.

Замечание. Важно отметить, что контактные преобразования определяются независимо от вида конкретных уравнений.

2.3.2. Преобразование Лежандра

Важным частным случаем контактных преобразований является преобразование Лежандра, которое определяется соотношениями

$$w(x, y) + u(\xi, \eta) = x\xi + y\eta, \quad x = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad y = \frac{\partial u}{\partial \eta}, \tag{25}$$

где u — новая зависимая переменная, а ξ и η — новые независимые переменные.

Из формул (25) получим первые производные (используются два следствия первого равенства, полученные путем его дифференцирования по x и y, с учетом двух других соотношений):

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \xi, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \eta. \tag{26}$$

С помощью формул (25)–(26) находим вторые производные:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = J\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = -J\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = J\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},$$

где

$$J = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2, \quad \frac{1}{J} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right)^2.$$

В общем случае уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными

$$F\left(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0 \tag{27}$$

с помощью преобразования Лежандра (25) (при $J \neq 0$) приводится к виду

$$F\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, \xi\frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta\frac{\partial u}{\partial \eta} - u, \xi, \eta, J\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, -J\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}, J\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right) = 0. \tag{28}$$

Иногда уравнение (28) бывает проще, чем уравнение (27).

Пусть $u = u(\xi, \eta)$ — некоторое решение уравнения (28). Тогда формулы

$$w = \xi\frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta\frac{\partial u}{\partial \eta} - u(\xi, \eta), \quad x = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad y = \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

определяют соответствующее решение уравнения (27) в параметрическом виде.

Замечание. Использование преобразования Лежандра может привести к потере решений, удовлетворяющих условию $J = 0$.

Пример 6. Уравнение стационарного трансзвукового газового потока

$$a\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

преобразованием Лежандра (25) сводится к линейному уравнению с переменными коэффициентами

$$a\xi\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0.$$

2.3.3. Преобразование Эйлера

Преобразование Эйлера является частным случаем контактных преобразований. Оно определяется соотношениями

$$w(x, y) + u(\xi, \eta) = x\xi, \quad x = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad y = \eta. \tag{29}$$

Из формул (29) (используются два следствия первого равенства, полученные путем его дифференцирования по x и y, с учетом других соотношений) можно получить:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \xi, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial \eta}. \tag{30}$$

Дифференцируя эти выражения по x и y, находим вторые производные

$$w_{xx} = \frac{1}{u_{\xi\xi}}, \quad w_{xy} = -\frac{u_{\xi\eta}}{u_{\xi\xi}}, \quad w_{yy} = \frac{u_{\xi\eta}^2 - u_{\xi\xi}u_{\eta\eta}}{u_{\xi\xi}}. \tag{31}$$

Нижние индексы обозначают соответствующие частные производные.

Преобразование Эйлера (29)–(31) используется для решения (линеаризации) некоторых нелинейных уравнений с частными производными.

В общем случае уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными

$$F\Big(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big) = 0 \tag{32}$$

с помощью преобразования Эйлера (29) приводится к виду

$$F\Big(u_\xi, \eta, \xi u_\xi - u, \xi, -u_\eta, \frac{1}{u_{\xi\xi}}, -\frac{u_{\xi\eta}}{u_{\xi\xi}}, \frac{u_{\xi\eta}^2 - u_{\xi\xi}u_{\eta\eta}}{u_{\xi\xi}}\Big) = 0. \tag{33}$$

Иногда уравнение (33) бывает проще, чем уравнение (32).

Пусть $u = u(\xi, \eta)$ — некоторое решение уравнения (33). Тогда формулы (29) определяют соответствующее решение уравнения (32) в параметрическом виде.

Пример 7. Нелинейное уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a = 0$$

преобразованием Эйлера (29)–(31) приводится к линейному уравнению теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}.$$

Пример 8. Нелинейное уравнение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = a\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{34}$$

также линеаризуется преобразованием Эйлера (29)–(31):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = a\frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Интегрируя, находим общее решение последнего уравнения

$$u = f(\xi) + g(\eta)e^{a\xi}, \tag{35}$$

где $f(\xi)$ и $g(\eta)$ — произвольные функции.

Используя формулы (29) и (35), получим общее решение исходного уравнения (34) в параметрическом виде:

$$w = x\xi - f(\xi) - g(y)e^{a\xi},$$
$$x = f'_\xi(\xi) + ag(y)e^{a\xi}.$$

Задачи и упражнения к разд. 2.3

1. Нелинейное уравнение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

свести к линейному уравнению.

Указание. Использовать преобразование Лежандра.

2. Уравнение минимальных поверхностей (описывающее, например, форму мыльной пленки, ограниченной заданным контуром)

$$\Big[1 + \Big(\frac{\partial w}{\partial y}\Big)^2\Big]\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \Big[1 + \Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2\Big]\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

свести к линейному уравнению.

Указание. Использовать преобразование Лежандра.

3. Уравнение Борна — Инфельда

$$\left[1-\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right]\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}-\left[1+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0$$

свести к линейному уравнению.

Указание. Использовать преобразование Лежандра.

4. Нелинейное уравнение

$$f\Bigl(\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y}\Bigr)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+g\Bigl(\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y}\Bigr)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+h\Bigl(\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y}\Bigr)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$$

свести к линейному уравнению.

Указание. Использовать преобразование Лежандра.

5. Нелинейное уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=f\Bigl(y,\frac{\partial w}{\partial x}\Bigr)$$

свести к линейному уравнению.

Указание. Использовать преобразование Эйлера.

6. Нелинейное уравнение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=f\Bigl(y,\frac{\partial w}{\partial x}\Bigr)\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

свести к линейному уравнению.

Указание. Использовать преобразование Эйлера.

7. Для функций многих переменных $w=w(x_1,\ldots,x_n)$ преобразование Лежандра задается соотношениями:

$$\begin{gathered}
x_1=X_1,\quad \ldots,\quad x_{k-1}=X_{k-1},\\
x_k=\frac{\partial W}{\partial X_k},\quad \ldots,\quad x_n=\frac{\partial W}{\partial X_n},\\
w(\mathbf{x})=\sum_{\imath=k}^{n}X_\imath\frac{\partial W}{\partial X_\imath}-W(\mathbf{X}),
\end{gathered}$$

где $\mathbf{x}=\{x_1,\ldots,x_n\}$ и $\mathbf{X}=\{X_1,\ldots,X_n\}$. Найти обратное преобразование и частные производные функции w по x_m при $m=1,\ldots,k-1$.

Литература к разд. 2.3: М. Г. Куренский (1934), Э. Камке (1966), Н. Х. Ибрагимов (1983), N. H. Ibragimov (1994), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004).

2.4. Преобразования Беклунда

2.4.1. Преобразования Беклунда для уравнений второго порядка

Пусть $w=w(x,y)$ — решение уравнения

$$F_1\Bigl(x,y,w,\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y},\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Bigr)=0,\tag{36}$$

а $u=u(\xi,\eta)$ — решение уравнения

$$F_2\Bigl(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Bigr)=0.\tag{37}$$

Говорят, что уравнения (36) и (37) связаны преобразованием Беклунда

$$\begin{aligned}
&\Phi_1\Bigl(x,y,w,\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y},u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\Bigr)=0,\\
&\Phi_2\Bigl(x,y,w,\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y},u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\Bigr)=0,
\end{aligned}\tag{38}$$

если из совместности пары (36) и (38) следует уравнение (37), а из совместности пары (37) и (38) следует (36). Если для некоторого конкретного решения $u = u(\xi, \eta)$ уравнения (37) удается разрешить уравнения (38) относительно $w = w(x, y)$, то функция $w = w(x, y)$ будет решением уравнения (36). Соотношения (38) называют также дифференциальными связями.

Преобразования Беклунда могут сохранять инвариантным вид уравнения* (это дает возможность «размножать» решения) или связывать решения разных уравнений (это позволяет из решений одного уравнения получать решения другого).

Пример 9. Покажем, что уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial w}{\partial t} = w\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{39}$$

связано с линейным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{40}$$

преобразованием Беклунда

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}uw = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial (uw)}{\partial x} = 0. \end{gathered} \tag{41}$$

Действительно, исключая из (41) w, приходим к уравнению (40).

Обратно: пусть $u(x, t)$ — ненулевое решение уравнения теплопроводности (40). Разделив (40) на u и вычислив частные производные по x от обеих частей полученного выражения, с учетом равенства $(u_t/u)_x = (u_x/u)_t$ имеем

$$\left(\frac{u_x}{u}\right)_t = \left(\frac{u_{xx}}{u}\right)_x.$$

Подставим сюда следствия первого соотношения (41) (см. первую и последнюю формулы в цепочке равенств):

$$\frac{u_x}{u} = \frac{w}{2} \quad\Longrightarrow\quad \frac{u_{xx}}{u} - \left(\frac{u_x}{u}\right)^2 = \frac{w_x}{2} \quad\Longrightarrow\quad \frac{u_{xx}}{u} = \frac{w_x}{2} + \frac{1}{4}w^2.$$

В результате приходим к уравнению Бюргерса (39).

Пример 10. Покажем, что уравнение Лиувилля

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = e^{\lambda w} \tag{42}$$

связано с линейным волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \tag{43}$$

преобразованием Беклунда

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{2k}{\lambda}\exp\Big[\frac{1}{2}\lambda(w+u)\Big], \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{k}\exp\Big[\frac{1}{2}\lambda(w-u)\Big], \end{gathered} \tag{44}$$

где $k \neq 0$ — произвольная постоянная.

Продифференцируем первое соотношение (44) по y, а второе — по x. Учитывая равенства $u_{yx} = u_{xy}$ и $w_{yx} = w_{xy}$ и исключая комбинации первых производных с помощью (44), имеем

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = k\exp\Big[\frac{1}{2}\lambda(w+u)\Big]\Big(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y}\Big) = -\exp(\lambda w), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\lambda}{2k}\exp\Big[\frac{1}{2}\lambda(w-u)\Big]\Big(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x}\Big) = \exp(\lambda w). \end{gathered} \tag{45}$$

* В таких случаях их называют автопреобразованиями Беклунда.

Складывая равенства (45), получим линейное уравнение (43). Вычитая из первого равенства второе, приходим к нелинейному уравнению (42).

Замечание 1. Важно отметить, что, в отличие от контактных преобразований, преобразования Беклунда определяются видом конкретных уравнений (преобразование Беклунда существует не всегда).

Замечание 2. Для двух эволюционных уравнений n-го порядка вида

$$\frac{\partial w}{\partial t} = F_1\Big(x, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big),$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = F_2\Big(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}\Big)$$

преобразование Беклунда часто ищут в форме дифференциальной связи

$$\Phi\Big(x, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^m w}{\partial x^m}, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\Big) = 0,$$

содержащей производные только по одной переменной x (вторая переменная t входит неявно через функции w, u). Эта связь может рассматриваться как обыкновенное дифференциальное уравнение относительно одной из зависимых переменных.

2.4.2. Преобразования Беклунда, основанные на законах сохранения

Будем считать, что дифференциальное уравнение может быть записано в форме закона сохранения:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[F\Big(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \ldots\Big)\Big] + \frac{\partial}{\partial y}\Big[G\Big(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \ldots\Big)\Big] = 0. \qquad (46)$$

Преобразование Беклунда (преобразование по решению)

$$dz = F(w, w_x, w_y, \ldots)\, dy - G(w, w_x, w_y, \ldots)\, dx, \quad d\eta = dy \qquad (47)$$
$$\Big(dz = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -G, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = F\Big)$$

определяет переход от x и y к новым независимым переменным z и η по правилу

$$\frac{\partial}{\partial x} = -G\frac{\partial}{\partial z}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta} + F\frac{\partial}{\partial z}.$$

Здесь использована краткая запись функций F и G из (46). Преобразование (47) сохраняет порядок рассматриваемого уравнения.

Замечание. Нередко встречаются преобразования по решению (47), дополненные преобразованием искомой величины вида $u = \varphi(w)$.

Пример 11. Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\Big], \qquad (48)$$

которое является частным случаем уравнения (46) при $y = t$, $F = f(w)w_x$, $G = -w$.

Преобразование по решению (47) в данном случае имеет вид

$$dz = w\, dx + [f(w)w_x]\, dt, \qquad d\eta = dt. \qquad (49)$$

Оно определяет переход от x, y к новым независимым переменным z, η по правилу

$$\frac{\partial}{\partial x} = w\frac{\partial}{\partial z}, \qquad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \eta} + [f(w)w_x]\frac{\partial}{\partial z}.$$

Применяя преобразование (49) к уравнению (48), получим
$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = w^2 \frac{\partial}{\partial z}\Big[f(w)\frac{\partial w}{\partial z}\Big]. \tag{50}$$
Подстановка $w = 1/u$ приводит (50) к уравнению вида (48):
$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial z}\Big[\frac{1}{u^2} f\Big(\frac{1}{u}\Big)\frac{\partial u}{\partial z}\Big].$$

В частном случае $f(w) = aw^{-2}$ нелинейное уравнение (48) преобразованием (49) переводится в линейное уравнение $u_\eta = au_{zz}$.

Задачи и упражнения к разд. 2.4

1. Показать, что нелинейное уравнение теплопроводности с экспоненциальным источником
$$w_{xx} + w_{yy} = ae^{\beta w}$$
связано с уравнением Лапласа
$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$
(линейное уравнение) преобразованием Беклунда
$$u_x + \tfrac{1}{2}\beta w_y = \big(\tfrac{1}{2}a\beta\big)^{1/2} \exp\big(\tfrac{1}{2}\beta w\big) \sin u,$$
$$u_y - \tfrac{1}{2}\beta w_x = \big(\tfrac{1}{2}a\beta\big)^{1/2} \exp\big(\tfrac{1}{2}\beta w\big) \cos u.$$

Указание. Использовать условия $u_{xy} = u_{yx}$ и $w_{xy} = w_{yx}$.

2. Показать, что два уравнения синус-Гордона:
$$w_{xy} = \sin w \quad \text{и} \quad u_{xy} = \sin u$$
связаны автопреобразованием Беклунда
$$u_x = w_x + 2k \sin\big[\tfrac{1}{2}(w+u)\big],$$
$$u_y = -w_y - 2k^{-1} \sin\big[\tfrac{1}{2}(w-u)\big],$$
где $k \neq 0$ — произвольная постоянная.

Указание. Использовать условия $u_{xy} = u_{yx}$ и $w_{xy} = w_{yx}$.

3. Показать, что уравнения
$$w_{xx} + w_{yy} = \operatorname{sh} w \operatorname{ch} w,$$
$$u_{xx} + u_{yy} = \sin u \cos u$$
связаны преобразованием Беклунда
$$u_x + w_y = \sin u \operatorname{ch} w,$$
$$u_y - w_x = \cos u \operatorname{sh} w.$$

Указание. Использовать условия $u_{xy} = u_{yx}$ и $w_{xy} = w_{yx}$.

4. Показать, что уравнение Кортевега — де Фриза
$$w_t + 6ww_x + w_{xxx} = 0$$
и модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза
$$u_t - 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0$$
связаны преобразованием Беклунда
$$u_x = \varepsilon(w + u^2), \quad \varepsilon = \pm 1,$$
$$u_t = \varepsilon w_{xx} - 2(uw)_x.$$

5. Показать, что нелинейное уравнение Шредингера
$$iw_t + w_{xx} + |w|^2 w = 0,$$
где w — комплексная функция действительных переменных x и t ($i^2 = -1$), инвариантно относительно преобразования Беклунда
$$w_x - \widetilde{w}_x = iaf_1 - \tfrac{1}{2} if_2 g_1,$$
$$w_t - \widetilde{w}_t = \tfrac{1}{2} g_1 \big(w_x + \widetilde{w}_x\big) - ag_2 + \tfrac{1}{4} if_1\big(|f_1|^2 + |f_2|^2\big).$$
Здесь приняты обозначения
$$f_1 = w - \widetilde{w}, \quad f_2 = w + \widetilde{w}, \quad g_1 = i\varepsilon\big(b - 2|f_1|^2\big)^{1/2}, \quad g_2 = i\big(af_1 - \tfrac{1}{2} f_2 g_1\big),$$
где a и b — произвольные действительные постоянные, $\varepsilon = \pm 1$.

6. Свести уравнение Калоджеро

$$w_{xt} = ww_{xx} + f(w_x)$$

к обыкновенному дифференциальному уравнению; найти общее решение исходного уравнения для $f(w_x) = a$.

Указание. Использовать преобразование по решению, исходя из закона сохранения

$$D_t[\Phi(w_x)] + D_x[-w\Phi(w_x)] = 0,$$

где $D_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$, $D_x = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $\Phi(u) = \exp\Bigl[\displaystyle\int \frac{u\,du}{f(u)}\Bigr]$.

7. Свести нелинейное уравнение третьего порядка

$$w_t = [f(w)w_x]_{xx}$$

к уравнению аналогичного вида и определить, для какой функции $f(w)$ полученное уравнение будет линейным.

Указание. Использовать преобразование по решению

$$dz = w\,dx + [f(w)w_x]_x\,dt, \qquad d\eta = dt$$

с последующей заменой $w = 1/u$.

8. Показать, что нелинейное уравнение

$$w_{tt} + w_t = a(w^{-2}w_x)_x$$

преобразованием по решению

$$\tau = t + \ln|w|, \quad dz = aw^{-2}w_x dt + (w + w_t)dx, \quad u = 1/w \qquad (dz = z_t\,dt + z_x\,dx)$$

приводится к линейному телеграфному уравнению

$$u_{\tau\tau} + u_\tau = au_{zz}.$$

Литература к разд. 2.4: G. L. Lamb (1974), R. M. Miura (1976), A. S. Fokas, R. L. Anderson (1979), A. S. Fokas, B. Fuchssteiner (1981), C. Rogers, W. F. Shadwick (1982), Р. Буллаф, Ф. Кодри (1983, стр. 24–28), Н. Х. Ибрагимов (1983, стр. 151–154), C. Rogers, T. Ruggeri (1985), J. Weiss (1986), М. Абловиц, Х. Сигур (1987, стр. 179–181), C. Rogers, W. F. Ames (1989), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004).

2.5. Дифференциальные подстановки

Помимо преобразований Беклунда, в математической физике используются также дифференциальные подстановки. Для уравнений второго порядка дифференциальные подстановки обычно имеют вид

$$w = \Psi\Bigl(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\Bigr).$$

Дифференциальная подстановка повышает порядок уравнения (если она подставляется в уравнение для w) и позволяет с помощью решений одного уравнения получать решения другого. Связь между решениями этих уравнений, вообще говоря, необратима и носит односторонний характер. Дифференциальные подстановки могут быть следствием преобразования Беклунда (хотя это и необязательно). Дифференциальная подстановка может понижать порядок уравнения (когда в качестве исходного принимается уравнение для u).

В общем случае дифференциальные подстановки определяются формулами (20), где функции X, Y, W могут задаваться произвольно.

Пример 12. Рассмотрим уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial w}{\partial t} = w\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \tag{51}$$

Первое соотношение (41) можно записать как дифференциальную подстановку (преобразование Хопфа — Коула)

$$w = \frac{2u_x}{u}. \tag{52}$$

Подставляя (52) в (51), получим уравнение

$$\frac{2u_{tx}}{u} - \frac{2u_t u_x}{u^2} = \frac{2u_{xxx}}{u} - \frac{2u_x u_{xx}}{u^2},$$

которое можно преобразовать к следующему виду:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{u}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right] = 0.$$

Таким образом, всякое решение линейного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

формулой (52) переводится в решение уравнения Бюргерса (51). Обратное неверно: решение уравнения (51) порождает, вообще говоря, решение более общего уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t)u,$$

где $f(t)$ — некоторая функция t.

Пример 13. Уравнение стационарного ламинарного гидродинамического пограничного слоя на плоской пластине имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \nu\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}, \tag{53}$$

где w — функция тока, x и y — соответственно продольная и поперечная координаты, ν — кинематическая вязкость жидкости.

Преобразование Мизеса (дифференциальная подстановка)

$$\xi = x, \quad \eta = w, \quad u(\xi,\eta) = \frac{\partial w}{\partial y}, \qquad \text{где} \quad w = w(x,y), \tag{54}$$

понижает порядок уравнения (53) и приводит его к более простому нелинейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \nu\frac{\partial}{\partial \eta}\left(u\frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \tag{55}$$

При выводе уравнения (55) использовались формулы для вычисления производных:

$$\frac{\partial}{\partial y} = u\frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = u, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = u\frac{\partial u}{\partial \eta},$$
$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = u\frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = u\frac{\partial}{\partial \eta}\left(u\frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

Задачи и упражнения к разд. 2.5

1. Показать, что преобразование Миуры (дифференциальная подстановка) переводит любое решение модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза

$$w_t - 6w^2 w_x + w_{xxx} = 0$$

в решение уравнения Кортевега — де Фриза

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

Указание. Надо доказать тождество $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = \big(\partial_x + 2w\big)\big(w_t - 6w^2 w_x + w_{xxx}\big)$.

2. Найти общее решение уравнения

$$w_y w_{xy} - w_x w_{yy} = f(x).$$

Указание. Использовать преобразование Мизеса (54).

3. Определить вид нелинейного уравнения второго порядка, к которому приводится уравнение гидродинамического пограничного слоя (53) с помощью преобразования Крокко:

$$\xi = x, \quad \zeta = w_y, \quad \Psi(\xi, \zeta) = w_{yy}, \qquad \text{где} \quad w = w(x, y).$$

Литература к разд. 2.5: R. M. Miura (1976), Л. Г. Лойцянский (1973, стр. 522–523), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004).

3. Решения типа бегущей волны и автомодельные решения. Метод подобия

3.1. Предварительные замечания

Для построения точных решений нелинейных уравнений математической физики разработан ряд методов, основанных на переходе к новым переменным (зависимым и независимым). При этом обычно ставится цель: найти новые переменные, число которых меньше, чем число исходных переменных. Переход к таким переменным приводит к более простым уравнениям. В частности, поиск точных решений уравнений с частными производными с двумя независимыми переменными сводится к исследованию обыкновенных дифференциальных уравнений (или систем таких уравнений). Естественно, при указанной редукции решения обыкновенных дифференциальных уравнений дают не все решения исходного уравнения с частными производными, а лишь класс решений, обладающих некоторыми специальными свойствами.

Наиболее простыми классами точных решений, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, являются решения типа бегущей волны и автомодельные решения. Существование этих решений обычно (но не всегда) обусловлено инвариантностью рассматриваемых уравнений относительно преобразований сдвига и растяжения-сжатия.

Решения типа бегущей волны и автомодельные решения часто встречаются в различных приложениях. Ниже рассмотрены характерные особенности этих решений. Считается, что искомая величина w зависит от двух переменных: x и t, где t играет роль времени, а x — роль пространственной координаты.

3.2. Решения типа бегущей волны

3.2.1. Общий вид решений типа бегущей волны

Решениями типа бегущей волны называются решения вида

$$w(x,t) = W(z), \qquad z = kx - \lambda t, \tag{1}$$

где величина λ/k играет роль скорости распространения волны (λ может быть любого знака, значение $\lambda = 0$ отвечает стационарному решению, а значение $k = 0$ — пространственно-однородному решению). Решения типа бегущей волны характеризуются тем, что профили этих решений в разные моменты времени* получаются друг из друга преобразованием сдвига и можно ввести движущуюся с постоянной скоростью декартову систему координат, в которой профиль искомой величины будет стационарным. При $k > 0$, $\lambda > 0$ волна (1) движется вдоль оси x вправо (в сторону увеличения значений x).

---

* Термин *решение типа бегущей волны* используется также в случаях, когда переменная t играет роль пространственной координаты.

Поиск решений типа бегущей волны проводится прямой подстановкой выражения (1) в исходное уравнение с учетом равенств $w_x = kW'$, $w_t = -\lambda W'$ и т. д. (штрих обозначает производную по z).

Решения типа бегущей волны допускают уравнения, которые не зависят явно от независимых переменных:

$$F\Big(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \ldots\Big) = 0. \qquad (2)$$

Подставляя (1) в (2), получим автономное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции $W(z)$:

$$F(W,\, kW',\, -\lambda W',\, k^2W'',\, -k\lambda W'',\, \lambda^2 W'',\, \ldots) = 0,$$

где k и λ — произвольные постоянные.

Пример 1. Нелинейное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\Big] \qquad (3)$$

допускает решение типа бегущей волны. Подставив (1) в (3), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$k^2[f(W)W']' + \lambda W' = 0.$$

Интегрируя дважды, получим его решение в неявном виде

$$k^2 \int \frac{f(W)\,dW}{\lambda W + C_1} = -z + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Пример 2. Рассмотрим однородное уравнение Монжа — Ампера

$$\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}\Big)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \qquad (4)$$

Подставив в него выражение (1), получим тождество. Поэтому уравнение (4) имеет решение

$$w = W(kx - \lambda t),$$

где $W(z)$ — произвольная функция, k, λ — произвольные постоянные.

Пример 3. Система нелинейных уравнений массо- и теплопереноса при наличии объемных химических реакций

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u, w),$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} = b\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(u, w)$$

допускает точное решение типа бегущей волны

$$u = u(z), \quad w = w(z), \quad z = kx - \lambda t,$$

где функции $u(z)$ и $w(z)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$ak^2 u''_{zz} + \lambda u'_z + f(u, w) = 0,$$
$$bk^2 w''_{zz} + \lambda w'_z + g(u, w) = 0.$$

3.2.2. Инвариантность уравнений относительно преобразований сдвига

Важно отметить, что уравнения вида (2) инвариантны (т. е. сохраняют вид) относительно преобразований сдвига по независимым переменным:

$$x = \bar{x} + C_1, \quad t = \bar{t} + C_2, \qquad (5)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Свойство инвариантности конкретных уравнений относительно преобразований сдвига (5) неразрывно связано с существованием у этих уравнений решений типа бегущей волны (из первого следует второе).

Решения типа бегущей волны являются простейшими *инвариантными решениями*, т. е. решениями, которые обусловлены способностью уравнений быть инвариантными относительно некоторых преобразований (содержащих произвольные постоянные).

Замечание. Условие инвариантности уравнения относительно преобразований (5) не является необходимым условием для существования решений типа бегущий волны. Прямой проверкой можно убедиться, что уравнение второго порядка

$$F\bigl(w, w_x, w_t, xw_x + tw_t, w_{xx}, w_{xt}, w_{tt}, xw_{xx} + tw_{xt},\\ xw_{xt} + tw_{tt}, x^2 w_{xx} + 2xtw_{xt} + t^2 w_{tt}, xw_t w_{xx} + tw_x w_{tt}\bigr) = 0$$

не допускает преобразований вида (5), но имеет точное решение типа бегущей волны (1), которое описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$F\bigl(W, kW', -\lambda W', zW', k^2W'', -k\lambda W'', \lambda^2 W'', kzW'', -\lambda zW'', z^2W'', -k\lambda zW''\bigr) = 0.$$

3.2.3. Функциональное уравнение, задающее решения типа бегущей волны

Покажем, что решения типа бегущей волны можно определить как решения функционального уравнения

$$w(x,t) = w(x + C\lambda, t + Ck), \tag{6}$$

где k и λ — некоторые постоянные, C — произвольная постоянная. Уравнение (6) означает, что искомая функция не меняется при одновременном увеличении обоих аргументов на пропорциональные величины (C — коэффициент пропорциональности).

Действительно, дифференцируя уравнение (6) по C, а затем полагая $C = 0$, приходим к дифференциальному уравнению с частными производными первого порядка

$$\lambda \frac{\partial w}{\partial x} + k \frac{\partial w}{\partial t} = 0.$$

Общее решение этого уравнения строится методом характеристик и имеет вид (1), что и требовалось доказать.

Задачи и упражнения к разд. 3.2

1. Найти решение типа бегущей волны уравнения Бюргерса: $w_t + ww_x = aw_{xx}$.

2. Найти решения типа бегущей волны нелинейных уравнений теплопроводности:

a) $w_t = (ww_x)_x$,
b) $w_t + aw_x = (ww_x)_x$,
c) $w_t = (ww_x)_x + a$.

3. Найти общее решение линейного уравнения $w_{tt} = w_{xx}$ путем построения точных решений типа бегущей волны.

Указание. Использовать принцип суперпозиции решений для линейных уравнений.

4. Найти решения типа бегущей волны нелинейных волновых уравнений:
a) $w_{tt} = (ww_x)_x$,
b) $w_{tt} = [f(w)w_x]_x$.

5. Найти решения типа бегущей волны нелинейных уравнений:
a) $w_t = [f(w_x)]_x$,
b) $w_{tt} = [f(w_x)]_x$.

6. Показать, что следующие уравнения не имеют решений типа бегущей волны:
a) $w_t = (ww_x)_x + x$,
b) $w_{tt} = (ww_x)_x + t^2$.

7. Найти решение задачи для нелинейного уравнения теплопроводности $w_t = a(w^n w_x)_x$ с начальным и граничным условиями

$$w = 0 \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (x > 0), \qquad w = kt^{1/n} \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (t > 0).$$

Указание. Решение ищется в виде

$$w(x,t) = \begin{cases} b(\lambda t - x)^m & \text{при } \ 0 \leqslant x \leqslant \lambda t, \\ 0 & \text{при } \ x > \lambda t. \end{cases}$$

8. Найти точные решения типа бегущей волны уравнения Борна — Инфельда

$$\left(1 - w_t^2\right) w_{xx} + 2w_x w_t w_{xt} - \left(1 + w_x^2\right) w_{tt} = 0.$$

Замечание. Это уравнение используется в нелинейной электродинамике (в теории поля).

9. Показать, что уравнение Кортевега — де Фриза $w_t + w_{xxx} - 6ww_x = 0$ имеет следующее решение типа бегущей волны:

$$w = -\frac{\lambda}{2\operatorname{ch}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}(z - z_0)\right]}, \qquad z = x - \lambda t,$$

где z_0 и $\lambda > 0$ — произвольные постоянные.

10. Найти решение типа бегущей волны уравнения Буссинеска: $w_{tt} + a(ww_x)_x + bw_{xxxx} = 0$.

3.3. Автомодельные решения. Метод подобия

3.3.1. Общий вид автомодельных решений. Метод подобия

Автомодельными называются решения вида

$$w(x,t) = t^\alpha U(\zeta), \qquad \zeta = xt^\beta. \tag{7}$$

Профили этих решений в разные моменты времени получаются друг из друга *преобразованиями подобия* (преобразованиями типа растяжения или сжатия).

Автомодельные решения существуют, если растяжение независимых и зависимой переменных по правилу

$$\begin{aligned} &t = C\bar{t}, \qquad x = C^k \bar{x}, \qquad w = C^m \bar{w}, \\ &C > 0 \text{ — произвольная постоянная,} \end{aligned} \tag{8}$$

при соответствующем выборе k и m эквивалентно тождественному преобразованию, т. е. исходное уравнение

$$F(x, t, w, w_x, w_t, w_{xx}, w_{xt}, w_{tt}, \ldots) = 0 \tag{9}$$

в результате преобразования (8) переходит в точно такое же уравнение

$$F(\bar{x}, \bar{t}, \bar{w}, \bar{w}_{\bar{x}}, \bar{w}_{\bar{t}}, \bar{w}_{\bar{x}\bar{x}}, \bar{w}_{\bar{x}\bar{t}}, \bar{w}_{\bar{t}\bar{t}}, \ldots) = 0. \tag{10}$$

Здесь функция F та же самая, что и в уравнении (9); при этом уравнение (9) не зависит от параметра C.

Найдем связь между параметрами α, β в решении (7) и параметрами k, m в преобразовании растяжения-сжатия (8). Пусть

$$w = \Phi(x, t) \tag{11}$$

— решение уравнения (9). Тогда функция

$$\bar{w} = \Phi(\bar{x}, \bar{t}) \tag{12}$$

будет решением уравнения (10).

Учитывая явный вид решения (7), из (12) получим

$$\bar{w} = \bar{t}^{\alpha} U(\bar{x}\bar{t}^{\beta}). \tag{13}$$

Возвращаясь в (13) к исходным переменным с помощью (8), имеем

$$w = C^{m-\alpha} t^{\alpha} U\big(C^{-k-\beta} x t^{\beta}\big). \tag{14}$$

Эта функция, по построению, удовлетворяет уравнению (9), т. е. является его решением. Потребуем, чтобы решение (14) совпало с (7) (т. е. чтобы условие единственности решения выполнялось для любых значений параметра $C \neq 0$). Для этого надо положить

$$\alpha = m, \qquad \beta = -k. \tag{15}$$

На практике поиск автомодельных решений проводится по полученному выше критерию существования: если k и m в (8) найдены, то автомодельные переменные имеют вид (7) с параметрами (15).

Метод построения автомодельных решений, основанный на использовании преобразований растяжения-сжатия типа (8), носит название *метода подобия*. Важно отметить, что эти преобразования содержат свободный (произвольный) параметр C.

Для наглядности на рис. 1 изображены основные этапы построения автомодельных решений.

3.3.2. Примеры автомодельных решений уравнений математической физики и механики

Пример 4. Рассмотрим уравнение теплопроводности с нелинейным источником степенно́го типа

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw^n. \tag{16}$$

Растяжение переменных по формулам (8) преобразует уравнение (16) к следующему виду:

$$C^{m-1}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} = aC^{m-2k}\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + bC^{mn}\bar{w}^n.$$

Приравнивание степеней C дает систему линейных алгебраических уравнений для определения постоянных k и m:

$$m - 1 = m - 2k = mn,$$

которая имеет единственное решение: $k = \frac{1}{2}$, $m = \frac{1}{1-n}$. Учитывая эти равенства и используя формулы (7) и (15), находим автомодельные переменные

$$w = t^{1/(1-n)} U(\zeta), \qquad \zeta = xt^{-1/2}.$$

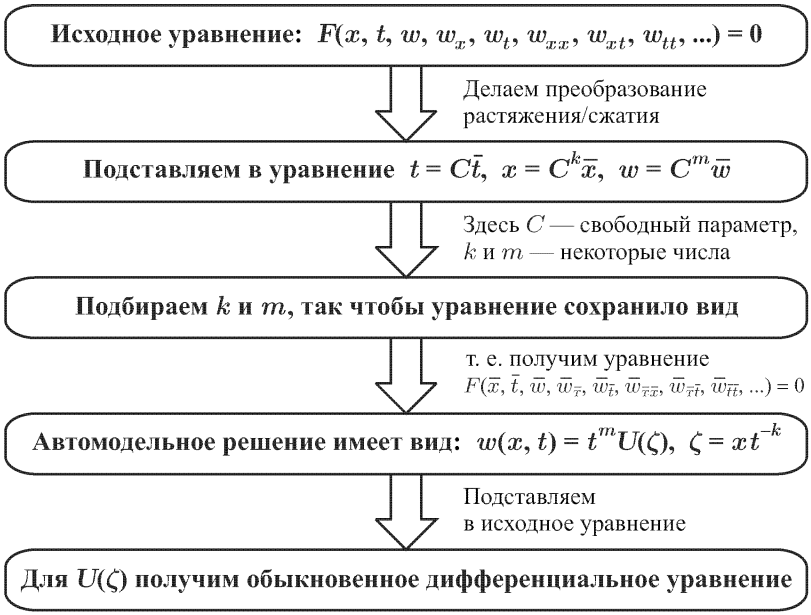

Рис. 1. Простейшая схема построения автомодельных решений, которая часто используется на практике.

Подставляя их в (16), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению для определения функции $U(\zeta)$:

$$aU''_{\zeta\zeta} + \frac{1}{2}\zeta U'_\zeta + \frac{1}{n-1}U + bU^n = 0.$$

Пример 5. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(w^n \frac{\partial w}{\partial x}\right), \qquad (17)$$

которое встречается в задачах волновой и газовой динамики.

Подставив (8) в (17), получим

$$C^{m-2}\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} = aC^{mn+m-2k}\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\bar{w}^n \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}\right).$$

Приравнивание степеней C дает одно линейное уравнение: $m - 2 = mn + m - 2k$. Отсюда имеем: $k = \frac{1}{2}mn + 1$, где m может быть выбрано произвольно. Используя далее формулы (7) и (15), находим автомодельные переменные:

$$w = t^m U(\zeta), \quad \zeta = xt^{-\frac{1}{2}mn-1}, \quad m \text{ — любое.}$$

Подставив их в (17), можно получить обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $U(\zeta)$.

В табл. 1 приведены другие примеры автомодельных решений нелинейных уравнений математической физики.

Описанный метод построения автомодельных решений применим также к системам уравнений с частными производными. Проиллюстрируем сказанное на конкретном примере.

Пример 6. Рассмотрим систему уравнений стационарного ламинарного гидродинамического пограничного слоя на плоской пластине:

$$\begin{aligned} u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} &= \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \qquad (18)$$

ТАБЛИЦА 1

Некоторые нелинейные уравнения математической физики, допускающие автомодельные решения

Уравнение	Название уравнения	Вид решения	Определяющее уравнение
$\dfrac{\partial w}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big]$	Нестационарное уравнение теплопроводности	$w=w(z),\ z=xt^{-1/2}$	$[f(w)w']'+\frac{1}{2}zw'=0$
$\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)+bw^k$	Уравнение теплопроводности с источником	$w=t^pu(z),\ z=xt^q,$ $p=\frac{1}{1-k},\ q=\frac{k-n-1}{2(1-k)}$	$a(u^nu')'-qzu'+$ $+bu^k-pu=0$
$\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+bw\dfrac{\partial w}{\partial x}$	Уравнение Бюргерса	$w=t^{-1/2}u(z),$ $z=xt^{-1/2}$	$au''+buu'+\frac{1}{2}zu'+\frac{1}{2}u=0$
$\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+b\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2$	Потенциальное уравнение Бюргерса	$w=w(z),\ z=xt^{-1/2}$	$aw''+b(w')^2+\frac{1}{2}zw'=0$
$\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^k\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$	Уравнение нелинейной фильтрации	$w=t^pu(z),\ z=xt^q,$ $p=-\frac{(k+2)q+1}{k},$ q — любое	$a(u')^ku''=qzu'+pu$
$\dfrac{\partial w}{\partial t}=f\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$	Уравнение нелинейной фильтрации	$w=t^{1/2}u(z),$ $z=xt^{-1/2}$	$2f(u')u''+zu'-u=0$
$\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big]$	Волновое уравнение	$w=w(z),\ z=x/t$	$(z^2w')'=[f(w)w']'$
$\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=aw^n$	Уравнение теплопроводности с источником	$w=x^{\frac{2}{1-n}}u(z),$ $z=y/x$	$(1+z^2)u''-\frac{2(1+n)}{1-n}zu'+$ $+\frac{2(1+n)}{(1-n)^2}u-au^n=0$
$\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+a\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$	Уравнение трансзвукового течения газа	$w=x^{-3k-2}u(z),$ $z=x^ky,\ k$ — любое	$\frac{a}{k+1}u'u''+\frac{k^2}{k+1}z^2u''-$ $-5kzu'+3(3k+2)u=0$
$\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}+bw\dfrac{\partial w}{\partial x}$	Уравнение Кортевега — де Фриза	$w=t^{-2/3}u(z),$ $z=xt^{-1/3}$	$au'''+buu'+\frac{1}{3}zu'+\frac{2}{3}u=0$
$\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=a\dfrac{\partial^3 w}{\partial y^3}$	Уравнение пограничного слоя	$w=x^{\lambda+1}u(z),$ $z=x^\lambda y,$ λ — любое	$(2\lambda+1)(u')^2-(\lambda+1)uu''$ $=au'''$

Сделаем в (18) растяжение независимых и зависимых переменных по правилу

$$x=C\bar{x},\quad y=C^k\bar{y},\quad u=C^m\bar{u},\quad v=C^n\bar{v}. \tag{19}$$

Умножив полученные уравнения на подходящие постоянные множители, имеем

$$\begin{aligned}\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}+C^{n-m-k+1}\bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}&=C^{-m-2k+1}\nu\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{y}^2},\\ \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}+C^{n-m-k+1}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}&=0.\end{aligned} \tag{20}$$

Потребуем, чтобы вид уравнений преобразованной системы (20) совпал с видом уравнений исходной системы (18). Это условие дает два линейных алгебраических уравнения: $n-m-k+1=0,\ -2k-m+1=0$. Разрешив их относительно m и n, получим

$$m=1-2k,\quad n=-k, \tag{21}$$

где показатель k может быть выбран произвольно. Для построения автомодельного решения используем схему на рис. 1, в которой для определения вида функций u и v надо соответственно переобозначить $x\to y$, $t\to x$, $w\to u$ (для компоненты u) и $x\to y$, $t\to x$, $w\to v$, $m\to n$ (для компоненты v). В результате имеем

$$u(x,y) = x^{1-2k}U(\zeta), \quad v(x,y) = x^{-k}V(\zeta), \quad \zeta = yx^{-k}, \tag{22}$$

где k — произвольная постоянная. Подставив (22) в исходную систему (18), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $U = U(\zeta)$, $V = V(\zeta)$:

$$U\big[(1-2k)U - k\zeta U'_\zeta\big] + VU'_\zeta = \nu U''_{\zeta\zeta},$$
$$(1-2k)U - k\zeta U'_\zeta + V'_\zeta = 0.$$

3.3.3. Более общий подход, основанный на решении функционального уравнения

Алгоритм построения автомодельного решения, описанный в разд. 3.3.1, был основан на явном представлении этого решения в виде (7). Однако существует более общий подход, позволяющий вывести зависимость (7) непосредственно из условия инвариантности уравнения (9) относительно преобразования (8).

Действительно, будем считать, что уравнение (9) в результате преобразования (8) переходит в точно такое же уравнение (10). Пусть (11) — решение уравнения (9). Тогда функция (12) будет решением уравнения (10). Возвращаясь в (12) к исходным переменным (8), имеем

$$w = C^m \Phi\big(C^{-k}x, C^{-1}t\big). \tag{23}$$

Эта функция, по построению, удовлетворяет уравнению (9), т. е. является его решением. Потребуем, чтобы решение (23) совпало с (11) (т. е. чтобы условие единственности решения выполнялось для любых значений параметра $C \neq 0$). В результате приходим к функциональному уравнению

$$\Phi(x,t) = C^m \Phi\big(C^{-k}x, C^{-1}t\big). \tag{24}$$

При $C = 1$ уравнение (24) обращается в тождество. Разложим (24) в ряд по параметру C в окрестности значения $C = 1$, затем поделим полученное выражение на $(C-1)$ и перейдем к пределу при $C \to 1$. В результате получим линейное уравнение с частными производными первого порядка для функции Φ:

$$kx\frac{\partial \Phi}{\partial x} + t\frac{\partial \Phi}{\partial t} - m\Phi = 0. \tag{25}$$

Запишем соответствующую характеристическую систему обыкновенных дифференциальных уравнений (см. разд. 14.1.1):

$$\frac{dx}{kx} = \frac{dt}{t} = -\frac{d\Phi}{m\Phi}.$$

Находим ее первые интегралы:

$$xt^{-k} = A_1, \qquad t^m\Phi = A_2,$$

где A_1, A_2 — произвольные постоянные. Общее решение уравнения с частными производными (25) ищется в виде $A_2 = U(A_1)$, где $U(A)$ — произвольная функция (см. разд. 14.1.1). В результате получим решение функционального уравнения (24):

$$\Phi(x,t) = t^m U(\zeta), \qquad \zeta = xt^{-k}. \tag{26}$$

Подставив (26) в (11), приходим к автомодельному решению (7) с параметрами (15).

3.3.4. Некоторые замечания

Замечание 1. При $\alpha = 0$ автомодельные решения (7) встречаются в задачах с простейшими начальными и граничными условиями:

$$w = w_1 \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (x > 0), \qquad w = w_2 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (t > 0),$$

где w_1 и w_2 — некоторые константы.

Замечание 2. Условие существования преобразования (8), сохраняющего вид рассматриваемого уравнения, является достаточным для существования автомодельного решения. Однако это условие не является необходимым: существуют уравнения, которые не допускают преобразований вида (8), но имеют автомодельные решения.

Например, уравнение

$$a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (bx^2 + at^2)f(w)$$

имеет автомодельное решение

$$w = w(z), \quad z = xt \quad \Longrightarrow \quad w'' - f(w) = 0,$$

но не допускает преобразований вида (8). В указанном уравнении a и b могут быть произвольными функциями аргументов x, t, w, w_x, w_t, w_{xx}, ...

Более широкий класс уравнений

$$F\left(w, \frac{a_1 w_x^n + b_1 w_t^m}{a_1 t^n + b_1 x^m}, \frac{a_2 w_{xx}^p + b_2 w_{tt}^q}{a_2 t^{2p} + b_2 x^{2q}}, \frac{a_3 w_{xx} + b_3 w_{tt}}{a_3 w_x^2 + b_3 w_t^2}\right) = 0,$$

где a_k и b_k — произвольные функции аргументов x, t, w, w_x, ..., также не допускает преобразований вида (8), но имеет автомодельные решения вида $w = w(z)$, $z = xt$.

Замечание 3. Решения типа бегущей волны тесно связаны с автомодельными решениями. Действительно, положив в (1)

$$t = \ln\tau, \quad x = \ln y,$$

получим представление бегущей волны в автомодельном виде

$$w = W\bigl(k\ln(y\tau^{-\lambda/k})\bigr) = U(y\tau^{-\lambda/k}),$$

где $U(z) = W(k\ln z)$.

Задачи и упражнения к разд. 3.3

1. Найти автомодельные решения нелинейных уравнений теплопроводности:
a) $w_t = a(ww_x)_x$,
b) $w_t = a(w^n w_x)_x$,
c) $w_t = a(e^w w_x)_x$.

2. Найти автомодельные решения нелинейных уравнений теплопроводности с источником:
a) $w_t = ax^{-n}(x^n ww_x)_x + b$,
b) $w_t = ax^{-n}(x^n w^k w_x)_x + bw^m$,
c) $w_t = a(x^n w_x)_x + bw^k$,
d) $w_t = a(w^n w_x)_x + bx^k$.

3. Найти автомодельное решение задачи о диффузионном пограничном слое на плоской пластине, которая описывается уравнением

$$4ayx^{-1/2}w_x + ay^2x^{-3/2}w_y = w_{yy}$$

и граничными условиями

$$w = w_1 \text{ при } x = 0, \quad w = w_2 \text{ при } y = 0, \quad w \to w_1 \text{ при } y \to +\infty.$$

4. Найти автомодельное решение обобщенного уравнения теплового пограничного слоя (в частности, оно описывает теплообмен плоской пластины с обтекающей ее жидкостью)

$$f\Big(\frac{y}{\sqrt{x}}\Big)\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{x}}g\Big(\frac{y}{\sqrt{x}}\Big)\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

удовлетворяющее граничным условиям из предыдущего примера.

5. Найти решение нелинейного уравнения теплопроводности

$$w_t = a(w^n w_x)_x,$$

удовлетворяющее начальным и граничным условиям:

$$\begin{array}{lllllll}
\text{a)} & w = 2 & \text{при} \ \ t = 0 & (x > 0), & w = 1 & \text{при} \ \ x = 0 & (t > 0); \\
\text{b)} & w = 0 & \text{при} \ \ t = 0 & (x > 0), & w = t & \text{при} \ \ x = 0 & (t > 0); \\
\text{c)} & w = 0 & \text{при} \ \ t = 0 & (x > 0), & w = bt^k & \text{при} \ \ x = 0 & (t > 0).
\end{array}$$

6. Найти решение задачи о тепловом взрыве, которая описывается нелинейным уравнением теплопроводности $w_t = a(w^n w_x)_x$, начальным и граничным условиями

$$w = 0 \quad \text{при} \quad t = 0 \quad (x > 0), \qquad w \to 0 \quad \text{при} \quad x \to \infty \quad (t > 0),$$

а также условием сохранения энергии

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x,t)\,dx = E_0 > 0.$$

7. Найти автомодельное решение обобщенного уравнения Бюргерса:

$$w_t + aw^n w_x = bw_{xx}.$$

8. Найти автомодельные решения нелинейных волновых уравнений:

a) $w_{tt} = a(ww_x)_x + b$,

b) $w_{tt} = a(w^n w_x)_x + bw^k$,

c) $w_{tt} = a(e^{\lambda w} w_x)_x$.

9. Найти автомодельные решения нелинейных уравнений:

a) $w_t = f(w_{xx})$,

b) $w_{tt} = [f(w_x)]_x$,

c) $w_{tt} = f(w_{xx})$.

10. Найти автомодельные решения однородного и неоднородных уравнений Монжа—Ампера:

a) $w_{xy}^2 = w_{xx}w_{yy}$,

b) $w_{xy}^2 = w_{xx}w_{yy} + ax^n$,

c) $w_{xy}^2 = w_{xx}w_{yy} + ayx^n$.

11. Найти автомодельные решения уравнений типа Кортевега—де Фриза:

a) $w_t + w_{xxx} + aww_x + bt^{-1}w = 0$,

b) $w_t + w_{xxx} + aw^n w_x = 0$,

c) $w_t + w_{xxx} + a(w_x)^n = 0$.

12. Найти автомодельное решение уравнения Буссинеска:

$$w_{tt} + a(ww_x)_x + bw_{xxxx} = 0.$$

13. Свести систему уравнений гидродинамического пограничного слоя (18) к одному уравнению путем введения функции тока w по формулам $u = \frac{\partial w}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial w}{\partial x}$, а затем построить автомодельное решение полученного уравнения.

14. Найти автомодельное решение уравнений гидродинамического пограничного слоя (18) с граничными условиями

$$u = v = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad u = U_0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad u \to U_0 \quad \text{при} \quad y \to \infty.$$

Указание. Достаточно свести задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с соответствующими граничными условиями.

15. Найти автомодельное решение задачи о ламинарном течении струи, которая описывается уравнениями гидродинамического пограничного слоя (18), граничными условиями

$$u_y = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad v = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad u \to 0 \quad \text{при} \quad y \to \infty,$$

и интегральным условием

$$\int_0^\infty u^2\, dy = A, \qquad A = \text{const}\,.$$

16. Определить, при каких значениях параметров n, m, k, p реакционно-диффузионная система уравнений

$$u_t - a_1 u_{xx} = b_1 u^n w^m,$$
$$w_t - a_2 w_{xx} = b_2 u^k w^p$$

допускает автомодельное решение.

17. Найти общий вид правой части уравнений

a) $w_t - w_{xx} = F(x,t,w)$,
b) $w_t - w_{xx} = F(w,w_x)$,
c) $w_t - (ww_x)_x = F(x,t,w)$,
d) $w_{tt} - w_{xx} = F(x,t,w)$,
e) $w_{tt} - w_{xx} = F(w,w_x)$,

которые допускают автомодельные решения.

Указание. Используя преобразования вида (8), получить функциональное уравнение для определения функции F. Решить это уравнение с помощью метода дифференцирования аналогично тому, как это делалось в разд. 3.3.3.

18. Найти общий вид правых частей реакционно-диффузионной системы уравнений

$$u_t - au_{xx} = f(u,w),$$
$$w_t - bw_{xx} = g(u,w),$$

которая допускает автомодельные решения.

3.4. Уравнения, инвариантные относительно комбинаций преобразований сдвига и растяжения, и их решения

3.4.1. Экспоненциально-автомодельные (предельные) решения

Экспоненциально-автомодельными решениями называются решения вида

$$w(x,t) = e^{\alpha t} V(\xi), \qquad \xi = xe^{\beta t}. \tag{27}$$

Экспоненциально-автомодельные решения существуют, если рассматриваемое уравнение (9) инвариантно относительно преобразования

$$t = \bar{t} + \ln C, \quad x = C^k \bar{x}, \quad w = C^m \bar{w}, \tag{28}$$

где $C > 0$ — произвольная постоянная, при некоторых k и m. Преобразование (28) представляет собой комбинацию преобразования сдвига по t с преобразованиями типа растяжения-сжатия по x и w. Важно подчеркнуть, что эти преобразования содержат произвольный параметр C, а рассматриваемое уравнение не зависит от параметра C.

Найдем связь между параметрами α, β в решении (27) и параметрами k, m в преобразовании сдвига-растяжения (28). Пусть $w = \Phi(x,t)$ — решение уравнения (9). Тогда функция $\bar{w} = \Phi(\bar{x},\bar{t})$ будет решением уравнения (10). Учитывая явный вид решения (27), получим

$$\bar{w} = e^{\alpha\bar{t}} V(\bar{x}e^{\beta\bar{t}}).$$

ТАБЛИЦА 2

Инвариантные решения, поиск которых основан на использовании комбинаций преобразований сдвига и растяжения (C, C_1, C_2 — произвольные постоянные)

№	Вид решений	Инвариантные преобразования	Связь между коэффициентами
1	$w=U(z),\ z=\alpha x+\beta y$	$t=\bar{t}+C_1,\ x=\bar{x}+C_2$	α и β — произвольные постоянные
2	$w=t^{\alpha}U(z),\ z=xt^{\beta}$	$t=C\bar{t},\ x=C^k\bar{x},\ w=C^m\bar{w}$	$\alpha=m,\ \beta=-k$
3	$w=e^{\alpha t}U(z),\ z=xe^{\beta t}$	$t=\bar{t}+\ln C,\ x=C^k\bar{x},\ w=C^m\bar{w}$	$\alpha=m,\ \beta=-k$
4	$w=t^{\alpha}U(z),\ z=x+\beta\ln t$	$t=C\bar{t},\ x=\bar{x}+k\ln C,\ w=C^m\bar{w}$	$\alpha=m,\ \beta=-k$

Возвращаясь к исходным переменным с помощью (28), имеем

$$w = C^{m-\alpha}e^{\alpha t}V\bigl(C^{-k-\beta}xe^{\beta t}\bigr).$$

Потребуем, чтобы данное решение совпало с (27) (т. е. чтобы условие единственности решения выполнялось для любых значений параметра $C \neq 0$). Для этого надо положить

$$\alpha = m, \qquad \beta = -k. \tag{29}$$

На практике поиск экспоненциально-автомодельных решений проводится по полученному выше критерию существования: если k и m в (28) найдены, то новые переменные имеют вид (27) с параметрами (29).

Замечание. Решения вида (27) иногда называют также *предельными автомодельными решениями*.

Пример 7. Покажем, что нелинейное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\Bigl(w^n\frac{\partial w}{\partial x}\Bigr) \tag{30}$$

допускает экспоненциально-автомодельное решение. Подставив (28) в (30), получаем

$$C^m\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} = aC^{mn+m-2k}\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\Bigl(\bar{w}^n\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}\Bigr).$$

Приравнивание степеней C дает одно линейное уравнение: $m = mn + m - 2k$. Отсюда имеем: $k = \frac{1}{2}mn$, где m — любое число. Используя далее формулы (27) и (29) и полагая без ограничения общности $m = 2$ (это эквивалентно операции масштабирования по времени t), находим новые переменные

$$w = e^{2t}V(\xi), \qquad \zeta = xe^{-nt}. \tag{31}$$

Подставляя их в (30), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $V(\xi)$:

$$a(V^nV'_\xi)'_\xi + n\xi V'_\xi - 2V = 0.$$

Пример 8. Используя описанный метод, можно показать, что уравнение (17) также имеет экспоненциально-автомодельное решение вида (31).

3.4.2. Инвариантные решения

Для наглядности в табл. 2 собраны инвариантные решения, поиск которых основан на использовании комбинаций преобразований сдвига и растяжения по независимым переменным и преобразований растяжения по зависимой переменной. Помимо решений типа бегущей волны, автомодельных решений и экспоненциально-автомодельных решений, рассмотренных ранее, в последней строке описано еще одно инвариантное решение. Проиллюстрируем способ его построения на конкретном примере.

Пример 9. Покажем, что нелинейное уравнение теплопроводности (30) допускает решение, указанное в четвертой строке в табл. 2. Для этого сделаем преобразование

$$t = C\bar{t}, \quad x = \bar{x} + k\ln C, \quad w = C^m\bar{w}.$$

В результате получим

$$C^{m-1}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} = aC^{mn+m}\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\bar{w}^n\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}\right).$$

Приравнивание степеней C дает одно линейное уравнение: $m-1 = mn+m$. Отсюда находим: $m = -1/n$, а k — любое число. Поэтому (см. четвертую строку в табл. 2) уравнение (30) имеет инвариантное решение вида

$$w = t^{-1/n}U(z), \quad z = x + \beta\ln t, \qquad \text{где } \beta \text{ — любое.} \tag{32}$$

Подставляя (32) в (30), приходим к автономному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$a(U^nU'_z)'_z - \beta U'_z + \frac{1}{n}U = 0.$$

Частному значению $\beta = 0$ соответствует решение с разделяющимися переменными в виде суммы функций разных аргументов.

Рассмотренные в разд. 3.2–3.4 конкретные примеры наглядно показывают, что построение точных решений путем понижения размерности уравнений с частными производными достигается, когда рассматриваемые уравнения инвариантны относительно некоторых преобразований (содержащих один или несколько произвольных параметров) или, другими словами, обладают определенной симметрией. Далее в главе 7 будет описан общий метод исследования симметрий дифференциальных уравнений (метод группового анализа), который позволяет регулярным образом получать подобные и более сложные инвариантные решения.

Задачи и упражнения к разд. 3.4

1. Найти предельное автомодельное решение нелинейного уравнения теплопроводности
$w_t = (w^nw_x)_x$,
удовлетворяющее условиям
$w \to 0$ при $t \to -\infty$ $(x > 0)$, $w = ae^{\beta t}$ при $x = 0$ $(t > -\infty)$.

2. Найти предельное автомодельное решение нелинейного уравнения $w_t = aw_x^nw_{xx}$.

3. Найти предельные автомодельные решения нелинейных волновых уравнений:
a) $w_{tt} = (ww_x)_x$,
b) $w_{tt} = a(w^nw_x)_x$.

4. Найти предельное автомодельное решение уравнения Монжа — Ампера: $w_{xy}^2 = w_{xx}w_{yy}$.

5. Свести систему уравнений гидродинамического пограничного слоя (18) к одному уравнению путем введения функции тока w по формулам $u = \frac{\partial w}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial w}{\partial x}$, а затем построить предельное автомодельное решение полученного уравнения.

6. Найти предельное автомодельное решение уравнений гидродинамического пограничного слоя (18).

7. Показать, что экспоненциально-автомодельные решения можно определить как решения, удовлетворяющие функциональному уравнению:

$$w(x,t) = C^mw(C^{-k}x, t - \ln C),$$

где константы C, k, m те же самые, что и в преобразовании (28).

8. Решить функциональное уравнение, приведенное в предыдущем примере.

Указание. Продифференцировать функциональное уравнение по C, а затем положить $C = 1$. Полученное уравнение с частными производными решить методом характеристик.

9. Определить, какому функциональному уравнению должно удовлетворять последнее инвариантное решение из табл. 2. Решить это функциональное уравнение.

10. Найти общий вид функций $f(w, w_x)$, для которых уравнения

a) $w_t = f(w, w_x)w_{xx}$,

b) $w_{tt} = f(w, w_x)w_{xx}$,

допускают предельные автомодельные решения.

3.5. Обобщенно-автомодельные решения

Обобщенно-автомодельные решения имеют вид

$$w(x,t) = \varphi(t)u(z), \qquad z = \psi(t)x. \tag{33}$$

Формула (33) включает в себя, как частные случаи, рассмотренные ранее автомодельные и экспоненциально-автомодельные решения (7) и (27).

Процедура поиска обобщенно-автомодельных решений состоит в следующем: после подстановки выражения (33) в рассматриваемое уравнение функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ выбираются таким образом, чтобы функция $u(z)$ удовлетворяла одному обыкновенному дифференциальному уравнению.

Пример 10. Ищем решение нелинейного уравнения теплопроводности (30) в виде (33). Используя (33) и учитывая связь $x = z/\psi(t)$, находим производные:

$$w_t = \varphi'_t u + \varphi\psi'_t x u'_z = \varphi'_t u + \frac{\varphi\psi'_t}{\psi} z u'_z, \quad w_x = \varphi\psi u'_z, \quad (w^n w_x)_x = \psi^2\varphi^{n+1}(u^n u'_z)'_z.$$

Подставив их в (30), после деления на φ'_t получим

$$u + \frac{\varphi\psi'_t}{\varphi'_t\psi} z u'_z = \frac{\psi^2\varphi^{n+1}}{\varphi'_t}(u^n u'_z)'_z. \tag{34}$$

Чтобы это соотношение представляло собой обыкновенное дифференциальное уравнение для $u(z)$, надо приравнять функциональные коэффициенты при zu'_z и $(u^n u'_z)'_z$ постоянным величинам:

$$\frac{\varphi\psi'_t}{\varphi'_t\psi} = a, \qquad \frac{\psi^2\varphi^{n+1}}{\varphi'_t} = b. \tag{35}$$

При этом функция $u(z)$ будет описываться уравнением

$$u + azu'_z = b(u^n u'_z)'_z.$$

Из первого уравнения (35) находим

$$\psi = C_1\varphi^a, \tag{36}$$

где C_1 — произвольная постоянная. Подставляя полученное выражение во второе уравнение (35) и интегрируя, имеем

$$\begin{aligned} &\frac{C_1^2}{b}t + C_2 = -\frac{1}{2a+n}\varphi^{-2a-n} && \text{при} \quad a \neq -\frac{n}{2}, \\ &\frac{C_1^2}{b}t + C_2 = \ln|\varphi|, && \text{при} \quad a = -\frac{n}{2}, \end{aligned} \tag{37}$$

где C_2 — произвольная постоянная. Из (36)–(37), в частности, имеем

$$\begin{aligned} &\varphi(t) = t^{-\frac{1}{2a+n}}, \quad \psi(t) = t^{-\frac{a}{2a+n}} && \text{при} \quad C_1 = 1, \quad C_2 = 0, \quad b = -\frac{1}{2a+n}; \\ &\varphi(t) = e^{2t}, \qquad \psi(t) = e^{-nt} && \text{при} \quad C_1 = 1, \quad C_2 = 0, \quad b = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Здесь первая пара функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ соответствует автомодельному решению ($a \neq -n/2$ — любое), а вторая пара — экспоненциально-автомодельному решению.

Задачи и упражнения к разд. 3.5

1. Найти обобщенно-автомодельное решение уравнения диффузионного пограничного слоя (описывает массообмен капель и пузырей с потоком):

$$f(x)\frac{\partial w}{\partial x}+g(x)y\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Указание. Решение ищется в виде $w=w(z)$, $z=y\varphi(x)$.

2. Найти обобщенно-автомодельное решение уравнения диффузионного пограничного слоя (описывает массообмен твердых частиц с потоком):

$$f(x)y^{n-1}\frac{\partial w}{\partial x}+g(x)y^n\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Указание. Решение ищется в виде $w=w(z)$, $z=y\varphi(x)$.

Литература к главе 3: Г. И. Баренблатт (1952, 1978), Л. И. Седов (1972), W. F. Ames (1972), Л. Г. Лойцянский (1973), Г. Шлихтинг (1974), G. W. Bluman, J. D. Cole (1974), L. Dresner (1983), В. П. Маслов, В. Г. Данилов, К. А. Волосов (1987), D. Zwillinger (1989), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002), А. Д. Полянин (2004).

4. Метод обобщенного разделения переменных

4.1. Введение

4.1.1. Решения с мультипликативным и аддитивным разделением переменных

Метод разделения переменных является самым распространенным методом решения линейных уравнений математической физики. Для уравнений с двумя независимыми переменными x и t и искомой функцией w этот метод базируется на поиске точных решений в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x)\psi(t). \qquad (1)$$

Интегрирование отдельных классов нелинейных уравнений с частными производными первого порядка основано на поиске точных решений в виде суммы функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \varphi(x) + \psi(t). \qquad (2)$$

Некоторые нелинейные уравнения математической физики второго и более высоких порядков также имеют точные решения вида (1) или (2). Подобные решения будем называть соответственно *решениями с мультипликативным* и *аддитивным разделением переменных*.

Литература к разд. 4.1.1: Э. Камке (1966), А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972), А. П. Маркеев (1990), А. Д. Полянин (2001 *а*), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (2003).

4.1.2. Простейшие случаи разделения переменных в нелинейных уравнениях

В отдельных случаях разделение переменных в нелинейных уравнениях проводится по той же схеме, что и в линейных уравнениях. Точное решение ищется в виде произведения или суммы функций разных аргументов. Подставив (1) или (2) в рассматриваемое уравнение и делая элементарные алгебраические операции, приходят к равенству двух выражений (для уравнений с двумя переменными), зависящих от разных аргументов. Такая ситуация возможна только в том случае, когда каждое из указанных выражений равно одной и той же постоянной величине. В результате получают обыкновенные дифференциальные уравнения для искомых величин.

Проиллюстрируем сказанное на конкретных примерах.

Пример 1. Уравнение теплопроводности со степенно́й нелинейностью

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(w^k\frac{\partial w}{\partial x}\right) \qquad (3)$$

имеет точное решение в виде произведения функций разных аргументов. Подставив (1) в уравнение (3), приходим к выражению

$$\varphi\psi'_t = a\psi^{k+1}(\varphi^k\varphi'_x)'_x.$$

Разделяя переменные путем деления обеих частей на $\varphi\psi^{k+1}$, получим

$$\frac{\psi'_t}{\psi^{k+1}} = \frac{a(\varphi^k\varphi'_x)'_x}{\varphi}.$$

Левая часть этого равенства зависит только от переменной t, а правая — только от x. Это возможно лишь при выполнении условий

$$\frac{\psi'_t}{\psi^{k+1}} = C, \qquad \frac{a(\varphi^k \varphi'_x)'_x}{\varphi} = C, \tag{4}$$

где C — произвольная постоянная. Решив обыкновенные дифференциальные уравнения (4), получим решение вида (1) уравнения (3).

Процедура построения решения с разделяющимися переменными вида (1) нелинейного уравнения (3) полностью аналогична процедуре, используемой для решения линейных уравнений, в частности, для уравнения (3) при $k = 0$. Случаи решений с подобным разделением переменных будем называть *простейшими*.

Пример 2. Волновое уравнение с экспоненциальной нелинейностью

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\frac{\partial}{\partial x}\Big(e^{\lambda w}\frac{\partial w}{\partial x}\Big) \tag{5}$$

имеет точное решение в виде суммы функций разных аргументов. Подставим выражение (2) в уравнение (5). После деления обеих частей на $e^{\lambda\psi}$ приходим к равенству

$$e^{-\lambda\psi}\psi''_{tt} = a(e^{\lambda\varphi}\varphi'_x)'_x,$$

левая часть которого зависит только от переменной t, а правая — только от x. Это возможно лишь при выполнении условий

$$e^{-\lambda\psi}\psi''_{tt} = C, \quad a(e^{\lambda\varphi}\varphi'_x)'_x = C, \tag{6}$$

где C — произвольная постоянная. Решив обыкновенные дифференциальные уравнения (6), получим решение уравнения (5) вида (2).

Пример 3. Уравнение теплопроводности в анизотропной среде с источником логарифмического типа

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[f(x)\frac{\partial w}{\partial x}\Big] + \frac{\partial}{\partial y}\Big[g(y)\frac{\partial w}{\partial y}\Big] = aw\ln w \tag{7}$$

имеет точное решение в виде произведения функций разных аргументов

$$w = \varphi(x)\psi(y). \tag{8}$$

Подставим выражение (8) в уравнение (7). После деления на $\varphi\psi$ и переноса отдельных слагаемых в разные части полученного равенства, получим

$$\frac{1}{\varphi}[f(x)\varphi'_x]'_x - a\ln\varphi = -\frac{1}{\psi}[g(y)\psi'_y]'_y + a\ln\psi.$$

Левая часть этого выражения зависит только от переменной x, а правая — только от y. Приравнивая их постоянной величине, можно получить обыкновенные дифференциальные уравнения для функций $\varphi(x)$ и $\psi(y)$.

Задачи и упражнения к разд. 4.1.2

1. Найти решения с аддитивным разделением переменных следующих уравнений:

a) $f(x)w_x^2 + g(y)w_y^2 = h_1(x) + h_2(y)$,
b) $f(x)w_x^n + g(y)w_y^m = aw$,
c) $[f(x)w_x]_x + [g(y)w_y]_y = 0$,
d) $[f(x)w_x]_x + [g(y)w_y]_y = aw$,
e) $w_t = aw_{xx} + b(w_x)^2 + c$,
f) $w_t = [f(x)w_x]_x + a(w_x)^2 + bw$,
g) $w_t = a(e^{\lambda w}w_x)_x + be^{\lambda w}$,
h) $w_t = a(w_{xx})^k$,
i) $w_{tt} = a(e^{\lambda w}w_x)_x + b$,
j) $w_{tt} + aw_t = b(e^{\lambda w}w_x)_x$,
k) $w_{xt} = a(e^{\lambda w}w_x)_x + be^{\lambda w}$,
l) $w_{tt} = w_{xxx} + f(w_x) + aw$.

2. Найти решения с мультипликативным разделением переменных следующих уравнений:

a) $w_t = a(ww_x)_x + bw$,
b) $w_t = a(ww_x)_x + bw^2$,
c) $w_t = a(w^n w_x)_x + bw$,
d) $w_t = a(w^n w_x)_x + bw^{n+1} + cw$,
e) $w_{tt} = a(w^n w_x)_x$,
f) $w_{tt} = a(ww_x)_x + bw$,
g) $w_{tt} = a(w^n w_x)_x + bw^{n+1}$,
h) $w_{tt} = a(w^n w_x)_x + bw^{n+1} + cw$.
i) $w_{xt} = a(w^n w_x)_x + bw^{n+1}$.

Литература к разд. 4.1.2: Л. В. Овсянников (1959), D. Zwillinger (1989), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002).

4.1.3. Примеры нетривиального разделения переменных в нелинейных уравнениях

Во многих случаях разделение переменных в нелинейных уравнениях происходит иначе, чем в линейных уравнениях. Проиллюстрируем сказанное на конкретных примерах.

Пример 4. Рассмотрим уравнение с кубической нелинейностью

$$\frac{\partial w}{\partial t} = f(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + w\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - aw^3, \tag{9}$$

где $f(t)$ — произвольная функция.

Ищем точные решения в виде произведения функций разных аргументов. Подставим (1) в (9) и поделим обе части полученного равенства на $f(t)\varphi(x)\psi(t)$. В результате имеем

$$\frac{\psi_t'}{f\psi} = \frac{\varphi_{xx}''}{\varphi} + \frac{\psi^2}{f}[(\varphi_x')^2 - a\varphi^2]. \tag{10}$$

В общем случае данное выражение нельзя представить в виде суммы функций разных аргументов. Это, однако, не означает, что уравнение (9) не имеет решений вида (1).

1°. Прямой проверкой можно убедиться, что функционально-дифференциальное уравнение (10) при $a > 0$ имеет решение

$$\varphi(x) = C\exp\bigl(\pm x\sqrt{a}\,\bigr), \quad \psi(t) = \exp\Bigl[a\int f(t)\,dt\Bigr], \tag{11}$$

где C — произвольная постоянная. Решение (11) для φ обращает в нуль выражение в квадратных скобках в (10), что позволяет разделить переменные.

2°. Имеется более общее решение функционально-дифференциального уравнения (10) при $a > 0$:

$$\varphi(x) = C_1\exp\bigl(x\sqrt{a}\,\bigr) + C_2\exp\bigl(-x\sqrt{a}\,\bigr),$$
$$\psi(t) = e^F\Bigl(C_3 + 8aC_1C_2\int e^{2F}\,dt\Bigr)^{-1/2}, \quad F = a\int f(t)\,dt,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. Функция $\varphi = \varphi(x)$ такова, что обе комбинации величин в уравнении (10), которые зависят от x, одновременно будут равны некоторым постоянным:

$$\varphi_{xx}''/\varphi = \text{const}, \quad (\varphi_x')^2 - a\varphi^2 = \text{const}\,.$$

Это обстоятельство и позволяет разделить переменные. Отметим, что функция $\psi = \psi(t)$ удовлетворяет уравнению Бернулли $\psi_t' = af(t)\psi - 4aC_1C_2\psi^3$.

3°. Имеется другое решение функционально-дифференциального уравнения (10) при $a < 0$:

$$\varphi(x) = C_1\sin\bigl(x\sqrt{-a}\,\bigr) + C_2\cos\bigl(x\sqrt{-a}\,\bigr),$$
$$\psi(t) = e^F\Bigl[C_3 + 2a(C_1^2 + C_2^2)\int e^{2F}\,dt\Bigr]^{-1/2}, \quad F = a\int f(t)\,dt,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. Функция $\varphi = \varphi(x)$ такова, что обе комбинации величин в уравнении (10), зависящие от x, будут равны константам. Отметим, что функция $\psi = \psi(t)$ описывается уравнением Бернулли $\psi'_t = af(t)\psi - a(C_1^2 + C_2^2)\psi^3$.

Пример 5. Рассмотрим уравнение третьего порядка с квадратичной нелинейностью

$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = b\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + c\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}. \qquad (12)$$

Будем искать точные решения уравнения (12) с разделяющимися переменными в виде суммы функций разных аргументов

$$w = f(x) + g(y). \qquad (13)$$

Подставив (13) в (12), имеем

$$g'_y f''_{xx} + af'_x g''_{yy} = bf'''_{xxx} + cg'''_{yyy}. \qquad (14)$$

Данное выражение нельзя представить в виде суммы двух функций разных аргументов.

Нетрудно догадаться, что функционально-дифференциальному уравнению (14) можно удовлетворить:

$$\begin{array}{lll} \text{если } g'_y = C_1 & \Longrightarrow \; g(y) = C_1 y + C_2, \quad f(x) = C_3\exp(C_1 x/b) + C_4 x & \text{(первый случай)}, \\ \text{если } f'_x = C_1 & \Longrightarrow \; f(x) = C_1 x + C_2, \quad g(y) = C_3\exp(aC_1 y/c) + C_4 y & \text{(второй случай)}, \end{array}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные. В указанных случаях два члена из четырех в (14) обращаются в нуль, что позволяет разделить переменные.

Уравнение (12) имеет также более сложное точное решение вида (13):

$$w = C_1 e^{-a\lambda x} + \frac{c\lambda}{a}x + C_2 e^{\lambda y} - ab\lambda y + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3, λ — произвольные постоянные. Механизм разделения здесь иной: оба нелинейных члена в левой части (14) содержат одинаковые по абсолютной величине, но разные по знаку слагаемые, которые нельзя представить в виде суммы функций разных аргументов. При сложении нелинейных членов указанные слагаемые сокращаются, что в итоге и приводит к разделению переменных:

$$\begin{array}{rcl} + \begin{array}{c} g'_y f''_{xx} \\ af'_x g''_{yy} \end{array} & \begin{array}{c} = \\ = \end{array} & \begin{array}{l} C_1C_2a^2\lambda^3 e^{\lambda y - a\lambda x} - C_1 b(a\lambda)^3 e^{-a\lambda x} \\ -C_1C_2a^2\lambda^3 e^{\lambda y - a\lambda x} + C_2 c\lambda^3 e^{\lambda y} \end{array} \\ \hline g'_y f''_{xx} + af'_x g''_{yy} & = & -C_1 b(a\lambda)^3 e^{-a\lambda x} + C_2 c\lambda^3 e^{\lambda y} = bf'''_{xxx} + cg'''_{yyy} \end{array}$$

Пример 6. Рассмотрим уравнение второго порядка с кубической нелинейностью

$$(1 + w^2)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - 2w\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - 2w\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = aw(1 - w^2). \qquad (15)$$

Ищем точное решение уравнения (15) с разделяющимися переменными в виде произведения функций разных аргументов

$$w = f(x)g(y). \qquad (16)$$

Подставив (16) в (15), получим соотношение

$$(1 + f^2g^2)(gf''_{xx} + fg''_{yy}) - 2fg[g^2(f'_x)^2 + f^2(g'_y)^2] = afg(1 - f^2g^2), \qquad (17)$$

которое нельзя представить в виде суммы двух функций разных аргументов. Тем не менее уравнение (15) имеет решения вида (16). Прямой проверкой можно убедиться, что функции $f = f(x)$ и $g = g(y)$, удовлетворяющие нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} (f'_x)^2 &= Af^4 + Bf^2 + C, \\ (g'_y)^2 &= Cg^4 + (a - B)g^2 + A, \end{aligned} \qquad (18)$$

где A, B, C — произвольные постоянные, обращают функционально-дифференциальное уравнение (17) в тождество [надо использовать следствия уравнений (18): $f''_{xx} = 2Af^3 + Bf$, $g''_{yy} = 2Cg^3 + (a - B)g$].

Замечание. Уравнение (15) заменой $u = 4\,\mathrm{arctg}\,w$ сводится к нелинейному уравнению теплопроводности с источником синусоидального вида $\Delta u = a\sin u$.

Рассмотренные примеры иллюстрируют некоторые особенности решений с разделением переменных. В разд. 4.2–4.4 будут описаны достаточно общие методы построения таких и более сложных решений нелинейных уравнений с частными производными.

Литература к разд. 4.1.3: R. Steuerwald (1936), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002).

4.2. Структура решений с обобщенным разделением переменных

4.2.1. Общий вид решений. Рассматриваемые классы нелинейных уравнений

Для простоты изложения ограничимся здесь описанием случая уравнений математической физики с двумя независимыми переменными x, y и зависимой переменной w (одна из независимых переменных может играть роль времени).

Линейные уравнения математической физики с разделяющимися переменными допускают точные решения в виде суммы

$$w(x,y) = \varphi_1(x)\psi_1(y) + \varphi_2(x)\psi_2(y) + \dots + \varphi_n(x)\psi_n(y), \tag{19}$$

где $w_i = \varphi_i(x)\psi_i(y)$ — соответствующие частные решения. При этом функции $\varphi_i(x)$, как и функции $\psi_i(y)$, при разных значениях i не связаны друг с другом.

Многие нелинейные уравнения с частными производными с квадратичными и степенны́ми нелинейностями вида

$$f_1(x)g_1(y)\Pi_1[w] + f_2(x)g_2(y)\Pi_2[w] + \dots + f_m(x)g_m(y)\Pi_m[w] = 0, \tag{20}$$

где $\Pi_i[w]$ — дифференциальные формы, представляющие собой произведения целых неотрицательных степеней функции w и ее частных производных $\partial_x w$, $\partial_y w$, $\partial_{xx} w$, $\partial_{xy} w$, $\partial_{yy} w$, $\partial_{xxx} w$, …, также имеют точные решения вида (19). Такие решения будем называть *решениями с обобщенным разделением переменных*. Для нелинейных уравнений, в отличие от линейных, функции $\varphi_i(x)$ при различных значениях i обычно связаны друг с другом [и с функциями $\psi_j(y)$]. В общем случае функции $\varphi_i(x)$ и $\psi_j(y)$ заранее не известны и подлежат определению в ходе исследования. Примеры точных решений нелинейных уравнений вида (19) для наиболее простых случаев $n = 1$ и $n = 2$ (при $\psi_1 = \varphi_2 = 1$) рассмотрены в разд. 4.1.2 и 4.1.3.

Отметим, что наиболее часто встречается решение с обобщенным разделением переменных специального вида

$$w(x,y) = \varphi(x)\psi(y) + \chi(x)$$

(в правой части независимые переменные можно поменять местами). В частном случае $\chi(x) = 0$ это решение переходит в решение с мультипликативным разделением переменных, а в случае $\varphi(x) = 1$ — в решение с аддитивным разделением переменных.

Замечание 1. Выражения вида (19) часто используются в прикладной и вычислительной математике для построения приближенных решений дифференциальных уравнений методом Галеркина (и его различными модификациями).

Замечание 2. Решения вида (19) могут допускать также уравнения, имеющие отличные от (20) нелинейности (см. пример 15 из разд. 4.5).

4.2.2. Общий вид функционально-дифференциальных уравнений

В общем случае после подстановки выражения (19) в дифференциальное уравнение (20) для определения функций $\varphi_i(x)$ и $\psi_i(y)$ получим функционально-дифференциальное уравнение

$$\Phi_1(X)\Psi_1(Y) + \Phi_2(X)\Psi_2(Y) + \cdots + \Phi_k(X)\Psi_k(Y) = 0, \tag{21}$$

где функционалы $\Phi_j(X)$ и $\Psi_j(Y)$ зависят соответственно от переменных x и y:

$$\begin{aligned} \Phi_j(X) &\equiv \Phi_j\bigl(x, \varphi_1, \varphi_1', \varphi_1'', \ldots, \varphi_n, \varphi_n', \varphi_n''\bigr), \\ \Psi_j(Y) &\equiv \Psi_j\bigl(y, \psi_1, \psi_1', \psi_1'', \ldots, \psi_n, \psi_n', \psi_n''\bigr). \end{aligned} \tag{22}$$

Здесь для наглядности формулы выписаны для случая уравнения второго порядка (20); для уравнений старших порядков в правые части формул (22) войдут соответствующие старшие производные функций φ_i и ψ_j.

Далее в разд. 4.4, 4.5 будут описаны два общих метода решения функционально-дифференциальных уравнений вида (21), (22). Кроме того, в разд. 4.3, 4.6 будут рассмотрены два специальных метода, не обладающих общностью (при использовании этих методов меньше объем вычислений).

Замечание. В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, в уравнение (21)–(22) входят несколько функций (и их производных), зависящих от разных аргументов.

Литература к разд. 4.2: С. С. Титов (1988), В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989, 1994), V. A. Galaktionov (1995), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002).

4.3. Упрощенная схема построения точных решений, основанная на априорном задании одной системы координатных функций

4.3.1. Описание упрощенной схемы построения точных решений

Для построения точных решений уравнений вида (20) с квадратичной или степеннóй нелинейностью, которые не зависят явно от x (т. е. все $f_i = \mathrm{const}$), можно использовать следующий упрощенный подход. Решения ищем в виде конечных сумм (19). Предположим, что система координатных функций $\varphi_i(x)$ описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Наиболее распространенные решения таких уравнений имеют вид

$$\varphi_i(x) = x^i, \quad \varphi_i(x) = e^{\lambda_i x}, \quad \varphi_i(x) = \sin(\alpha_i x), \quad \varphi_i(x) = \cos(\beta_i x). \tag{23}$$

Конечные наборы этих функций (в различных комбинациях) можно использовать для поиска точных решений с обобщенным разделением переменных вида (19), где λ_i, α_i, β_i рассматриваются как свободные параметры. Вторая система функций $g_i(y)$ определяется путем решения соответствующих нелинейных уравнений, получаемых подстановкой выражения (19) в рассматриваемое уравнение.

Указанный подход не имеет той общности, которой обладают методы, описанные далее в разд. 4.4 и 4.5. Однако явное задание одной системы координатных функций $\varphi_i(x)$ резко упрощает процедуру построения точных решений [при этом отдельные решения вида (19) могут быть потеряны].

Важно отметить, что известные к настоящему времени точные решения (с обобщенным разделением переменных) уравнений с частными производными с квадратичной нелинейностью в подавляющем большинстве задаются координатными функциями вида (23) (обычно при $n = 2$).

4.3.2. Примеры построения решений нелинейных уравнений старших порядков

Рассмотрим конкретные примеры использования упрощенной схемы построения точных решений с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений старших порядков.

Пример 7. Уравнения ламинарного пограничного слоя на плоской пластине сводятся к одному нелинейному уравнению третьего порядка для функции тока (Л. Г. Лойцянский 1973, Г. Шлихтинг 1974):

$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}. \tag{24}$$

Ищем точное решение этого уравнения с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,y) = x\psi(y) + \theta(y), \tag{25}$$

которое отвечает простейшим функциям $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = 1$ при $n = 2$ в формуле (19). Подставив (25) в (24), после перегруппировки членов имеем

$$x[(\psi'_y)^2 - \psi\psi''_{yy} - \nu\psi'''_{yyy}] + [\psi'_y\theta'_y - \psi\theta''_{yy} - \nu\theta'''_{yyy}] = 0.$$

Чтобы удовлетворить этому равенству при любых значениях x, надо приравнять нулю оба выражения в квадратных скобках. В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций $\psi = \psi(y)$ и $\theta = \theta(y)$:

$$\begin{aligned} (\psi'_y)^2 - \psi\psi''_{yy} - \nu\psi'''_{yyy} &= 0, \\ \psi'_y\theta'_y - \psi\theta''_{yy} - \nu\theta'''_{yyy} &= 0. \end{aligned}$$

Эта система имеет, например, точное решение

$$\psi = \frac{6\nu}{y + C_1}, \quad \theta = \frac{C_2}{y + C_1} + \frac{C_3}{(y + C_1)^2} + C_4,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.

Пример 8. Рассмотрим нелинейное уравнение n-го порядка

$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x)\frac{\partial^n w}{\partial y^n}, \tag{26}$$

где $f(x)$ — произвольная функция. В частном случае $n = 3$, $f(x) = \nu = \text{const}$ оно совпадает с уравнением пограничного слоя (24).

Ищем точное решение уравнения (26) с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,y) = \varphi(x)e^{\lambda y} + \theta(x), \tag{27}$$

которое отвечает функциям $\psi_1(y) = e^{\lambda y}$, $\psi_2(y) = 1$ в формуле (19). Подставив (27) в (26), после элементарных алгебраических действий получим

$$\lambda^2 e^{\lambda y}\varphi[\theta'_x + \lambda^{n-2}f(x)] = 0.$$

Этому равенству можно удовлетворить при

$$\theta(x) = -\lambda^{n-2}\int f(x)\,dx + C, \quad \varphi(x) \text{ — произвольная функция,} \tag{28}$$

где C — произвольная постоянная. (Другой случай, когда $\varphi = 0$, ψ — любое, малоинтересен.) Формулы (27)–(28) описывают точное решение уравнения (26):

$$w(x,y) = \varphi(x)e^{\lambda y} - \lambda^{n-2}\int f(x)\,dx + C, \tag{29}$$

содержащее произвольную функцию $\varphi(x)$ и две произвольные постоянные C и λ.

Пример 9. Рассмотрим нелинейное уравнение n-го порядка

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f(t)\frac{\partial^n w}{\partial x^n}, \tag{30}$$

где $f(t)$ — произвольная функция. В частном случае $n = 3$ и $f(t) = \text{const}$ оно встречается в гидродинамике (см., например, А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, 2002).

Ищем точное решение уравнения (30) вида

$$w = \varphi(t)e^{\lambda x} + \psi(t). \tag{31}$$

Подставив (31) в (30), имеем

$$\varphi_t' - \lambda\varphi\psi = \lambda^{n-1}f(t)\varphi.$$

Выразим отсюда ψ и подставим в (31). В результате получим решение уравнения (30):

$$w = \varphi(t)e^{\lambda x} + \frac{1}{\lambda}\frac{\varphi_t'(t)}{\varphi(t)} - \lambda^{n-2}f(t),$$

где $\varphi(t)$ — произвольная функция, λ — произвольная постоянная.

Задачи и упражнения к разд. 4.3

1. Найти решение с обобщенным разделением переменных нелинейного уравнения первого порядка:

$w_x = yF(x, w_y) + G(x, w_y)$.

Указание. Решение искать в виде $w = \varphi(x)y + \psi(x)$.

2. Найти решение с обобщенным разделением переменных нелинейного уравнения первого порядка:

$w_x = w_y^2 - aw^2 + f(x)w$.

Указание. Решение искать в виде $w = \varphi(x) + \psi(x)e^{\lambda y}$.

3. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений теплопроводности:

a) $w_t = a(ww_x)_x$,

b) $w_t = a(ww_x)_x + b$,

c) $w_t = a(ww_x)_x + bw$.

Указание. Решения искать в виде $w = f(t)x + g(t)$ и $w = f(t)x^2 + g(t)x + h(t)$.

4. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений конвективной теплопроводности:

a) $w_t = a(ww_x)_x + bw_x$,

b) $w_t = a(ww_x)_x + bw_x + cw + k$.

Указание. Решения искать в виде $w = f(t)x + g(t)$ и $w = f(t)x^2 + g(t)x + h(t)$.

5. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений теплопроводности (значение $n = 1$ соответствует решению с осевой симметрией, а $n = 2$ — решению с центральной симметрией):

a) $w_t = ax^{-n}(x^n ww_x)_x$,

b) $w_t = ax^{-n}(x^n ww_x)_x + b$,

c) $w_t = ax^{-n}(x^n ww_x)_x + bw$.

Указание. Решения искать в виде $w = f(t)x^2 + g(t)$.

6. Найти решение с обобщенным разделением переменных нелинейного уравнения

$w_t = aw_{xx} + bw_x^2 + cw + s$.

Указание. Решение искать в виде $w = f(t)x^2 + g(t)x + h(t)$.

7. Найти решения с обобщенным разделением переменных линейного уравнения

$w_t + f(t)x^{-1}w_x = aw_{xx}$.

Указание. Решения искать в виде

a) $w = x^2 + \varphi(t)$,

b) $w = x^4 + \varphi(t)x^2 + \psi(t)$,

c) $w = x^{2n} + \varphi_{2n-2}(t)x^{2n-2} + \cdots + \varphi_2(t)x^2 + \varphi_0(t)$.

8. При каком значении параметра a нелинейное уравнение

$w_t = ww_{xx} + aw_x^2 + b$

имеет решение с обобщенным разделением переменных вида $w = f(t)x^3 + g(t)x^2 + h(t)x + p(t)$?

9. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейного уравнения

$w_t = w_{xx} + w_x^2 + aw^2$.

Указание. Решения искать в виде

a) $w = f(t) + g(t)e^{\lambda x}$,

b) $w = f(t) + g(t)\operatorname{sh}(\lambda x)$,

c) $w = f(t) + g(t)\operatorname{ch}(\lambda x)$,

d) $w = f(t) + g(t)\sin(\lambda x + C)$.

10. Найти решения с обобщенным разделением переменных неоднородного уравнения Монжа — Ампера:

$w_{xy}^2 = w_{xx}w_{yy} + f(x)$.

Указание. Решения искать в виде $w = \varphi(x)y + \psi(x)$ и $w = \varphi(x)y^2 + \psi(x)y + \chi(x)$.

11. Найти решения с обобщенным разделением переменных неоднородного уравнения Монжа — Ампера:

$w_{xy}^2 = w_{xx}w_{yy} + f(x)y^k$.

Указание. Решения искать в виде $w = \varphi(x)y^m + \psi(x)$.

12. Найти решения с обобщенным разделением переменных уравнения стационарного трансзвукового газового потока:

$aw_x w_{xx} + w_{yy} = 0$.

Указание. Решения искать в виде

a) $w = f(y)x^m + g(y)$,

b) $w = f(y) + g(y)x^{3/2} + h(y)x^3$,

c) $w = f(y) + g(y)x + h(y)x^2 + p(y)x^3$.

13. Найти решение с обобщенным разделением переменных уравнения стационарного пограничного слоя с градиентом давления:

$w_y w_{xy} - w_x w_{yy} = \nu w_{yyy} + ae^{\beta x}$.

Указание. Решение искать в виде $w = f(x)e^{\lambda y} + g(x)e^{-\lambda y} + Ax + By + C$.

14. Найти решения с обобщенным разделением переменных уравнения движения вязкой жидкости (следствие уравнений Навье — Стокса, w — функция тока):

$w_y(\Delta w)_x - w_x(\Delta w)_y = \nu\Delta\Delta w$, где $\Delta w = w_{xx} + w_{yy}$.

Указание. Решения искать в виде

a) $w = f(x)y + g(x)$,

b) $w = f(x)e^{\lambda y} + g(x)$

(в этих формулах независимые переменные x и y можно поменять местами).

Литература к разд. 4.3: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989), А. Д. Полянин (2001 *b, c*), А. Д. Полянин, А. И. Журов (2002), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002), A. D. Polyanin (2002), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (2003), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004).

4.4. Решение функционально-дифференциальных уравнений методом дифференцирования

4.4.1. Описание метода дифференцирования

Процедура решения функционально-дифференциальных уравнений вида (21)–(22) состоит из трех последовательных этапов.

1°. Предположим, что $\Psi_k \not\equiv 0$. Поделим уравнение (21) на Ψ_k и продифференцируем по y. В результате получим уравнение такого же вида, но с меньшим числом членов:

$$\widetilde{\Phi}_1(X)\widetilde{\Psi}_1(Y) + \widetilde{\Phi}_2(X)\widetilde{\Psi}_2(Y) + \cdots + \widetilde{\Phi}_{k-1}(X)\widetilde{\Psi}_{k-1}(Y) = 0,$$
$$\widetilde{\Phi}_j(X) = \Phi_j(X), \quad \widetilde{\Psi}_j(Y) = [\Psi_j(Y)/\Psi_k(Y)]'_y.$$

Повторим аналогичную процедуру еще $(k-3)$ раз. В итоге приходим к двучленному уравнению с разделяющимися переменными

$$\widehat{\Phi}_1(X)\widehat{\Psi}_1(Y)+\widehat{\Phi}_2(X)\widehat{\Psi}_2(Y)=0. \tag{32}$$

Теперь надо рассмотреть две ситуации.

Невырожденный случай: $|\widehat{\Phi}_1(X)|+|\widehat{\Phi}_2(X)|\not\equiv 0$, $|\widehat{\Psi}_1(Y)|+|\widehat{\Psi}_2(Y)|\not\equiv 0$. Тогда решения уравнения (32) определяются из обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\widehat{\Phi}_1(X)+C\widehat{\Phi}_2(X)=0,\quad C\widehat{\Psi}_1(Y)-\widehat{\Psi}_2(Y)=0,$$

где C — произвольная постоянная. Предельному случаю $C=\infty$ соответствуют уравнения $\widehat{\Phi}_2=0$, $\widehat{\Psi}_1=0$.

Два вырожденных случая:

$$\begin{aligned}
&\widehat{\Phi}_1(X)\equiv 0,\quad \widehat{\Phi}_2(X)\equiv 0 \quad\Longrightarrow\quad \widehat{\Psi}_{1,2}(Y)\text{ — любые;}\\
&\widehat{\Psi}_1(Y)\equiv 0,\quad \widehat{\Psi}_2(Y)\equiv 0 \quad\Longrightarrow\quad \widehat{\Phi}_{1,2}(X)\text{ — любые.}
\end{aligned}$$

2°. Полученные решения двучленного уравнения (32) надо подставить в исходное функционально-дифференциальное уравнение (21)–(22), чтобы убрать «лишние» постоянные интегрирования [они появляются из-за того, что уравнение (32) получено из (21) путем дифференцирования].

3°. Случай $\Psi_k\equiv 0$ надо рассмотреть отдельно (поскольку уравнение на первом этапе делилось на Ψ_k). Аналогично следует исследовать все другие случаи тождественного обращения в нуль функционалов, на которые делились промежуточные функционально-дифференциальные уравнения.

Замечание 1. Функционально-дифференциальное уравнение (21)–(22) может не иметь решений.

Замечание 2. На каждом этапе число членов рассматриваемого функционально-дифференциального уравнения можно понижать путем дифференцирования как по переменной y, так и по переменной x. На первом этапе, например, можно предположить, что $\Phi_k\not\equiv 0$. Поделив уравнение (21) на Φ_k и продифференцировав по x, получим уравнение такого же вида, но с меньшим числом членов.

4.4.2. Примеры построения решений с обобщенным разделением переменных

Ниже даны конкретные примеры использования описанного метода для построения точных решений нелинейных уравнений с обобщенным разделением переменных.

Пример 10. Рассмотрим нелинейное уравнение n-го порядка

$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=f(x)\frac{\partial^n w}{\partial y^n}, \tag{33}$$

где $f(x)$ — произвольная функция. В частном случае $n=3$, $f(x)=\mathrm{const}$ оно совпадает с уравнением стационарного пограничного слоя на плоской пластине для функции тока.

Ищем точное решение уравнения (33) с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,y)=\varphi(x)\psi(y)+\chi(x). \tag{34}$$

Подставив (34) в (33) и сократив на φ, получим функционально-дифференциальное уравнение

$$\varphi'_x[(\psi'_y)^2 - \psi\psi''_{yy}] - \chi'_x\psi''_{yy} = f(x)\psi_y^{(n)}. \tag{35}$$

Поделим обе части уравнения (35) на $f = f(x)$, затем продифференцируем по x. В результате имеем

$$(\varphi'_x/f)'_x[(\psi'_y)^2 - \psi\psi''_{yy}] - (\chi'_x/f)'_x\psi''_{yy} = 0. \tag{36}$$

Невырожденный случай. Разделяя в (36) переменные, получим

$$(\chi'_x/f)'_x = C_1(\varphi'_x/f)'_x,$$
$$(\psi'_y)^2 - \psi\psi''_{yy} - C_1\psi''_{yy} = 0.$$

Интегрируя, приходим к следующим выражениям:

$$\psi(y) = C_4e^{\lambda y} - C_1, \quad \varphi(x)\text{ — любая}, \quad \chi(x) = C_1\varphi(x) + C_2\int f(x)\,dx + C_3, \tag{37}$$

где $C_1, C_2, C_3, C_4, \lambda$ — постоянные интегрирования. Подставив (37) в (35), находим связь между константами: $C_2 = -\lambda^{n-2}$. Учитывая сказанное, а также формулы (34) и (37), в итоге имеем решение уравнения (33) вида (34):

$$w(x,y) = \varphi(x)e^{\lambda y} - \lambda^{n-2}\int f(x)\,dx + C,$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция, C, λ — произвольные постоянные ($C = C_3$, $C_4 = 1$).

Вырожденный случай. Из уравнения (36) имеем

$$(\varphi'_x/f)'_x = 0, \quad (\chi'_x/f)'_x = 0, \quad \psi(y)\text{ — любая}. \tag{38}$$

Интегрируя дважды первые два уравнения (38), получим

$$\varphi(x) = C_1\int f(x)\,dx + C_2, \quad \chi(x) = C_3\int f(x)\,dx + C_4, \tag{39}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.

Подставив выражения (39) в (35), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению для определения функции $\psi = \psi(y)$:

$$C_1(\psi'_y)^2 - (C_1\psi + C_3)\psi''_{yy} = \psi_y^{(n)}. \tag{40}$$

Формулы (34), (39) и уравнение (40) описывают точное решение уравнения (33).

Пример 11. Двумерные стационарные уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости сводятся к одному нелинейному уравнению четвертого порядка для функции тока (Л. Г. Лойцянский, 1973):

$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w) - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(\Delta w) = \nu\Delta\Delta w, \qquad \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \tag{41}$$

Будем искать точные решения уравнения (41) с разделяющимися переменными вида

$$w = \varphi(x) + \psi(y). \tag{42}$$

Подставив (42) в (41), имеем

$$\psi'_y\varphi'''_{xxx} - \varphi'_x\psi'''_{yyy} = \nu\varphi''''_{xxxx} + \nu\psi''''_{yyyy}. \tag{43}$$

Продифференцируем обе части (43) по x и y. В результате получим

$$\psi''_{yy}\varphi''''_{xxxx} - \varphi''_{xx}\psi''''_{yyyy} = 0. \tag{44}$$

Невырожденный случай. При $\varphi''_{xx} \not\equiv 0$ и $\psi''_{yy} \not\equiv 0$, разделяя в (44) переменные, приходим к линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами

$$\varphi''''_{xxxx} = C\varphi''_{xx}, \tag{45}$$
$$\psi''''_{yyyy} = C\psi''_{yy}, \tag{46}$$

которые имеют решения различного вида в зависимости от величины константы интегрирования C.

1°. Решение уравнений (45), (46) при $C=0$:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= A_1 + A_2x + A_3x^2 + A_4x^3,\\ \psi(y) &= B_1 + B_2y + B_3y^2 + B_4y^3,\end{aligned}\tag{47}$$

где A_k, B_k — произвольные постоянные ($k=1,2,3,4$). Подставив (47) в (43), находим значения постоянных:

$$\begin{array}{lll} A_4 = B_4 = 0, & A_n, B_n \text{ — любые} & (n=1,2,3);\\ A_k = 0, & B_k \text{ — любые} & (k=1,2,3,4);\\ B_k = 0, & A_k \text{ — любые} & (k=1,2,3,4). \end{array}$$

Первые два набора постоянных определяют два известных полиномиальных решения уравнения (41) второй и третьей степени относительно независимых переменных (Л. Г. Лойцянский, 1973):

$$\begin{aligned} w &= C_1x^2 + C_2x + C_3y^2 + C_4y + C_5,\\ w &= C_1y^3 + C_2y^2 + C_3y + C_4, \end{aligned}$$

где C_1, …, C_5 — произвольные постоянные.

2°. Решение уравнений (45), (46) при $C=\lambda^2>0$:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= A_1 + A_2x + A_3e^{\lambda x} + A_4e^{-\lambda x},\\ \psi(y) &= B_1 + B_2y + B_3e^{\lambda y} + B_4e^{-\lambda y}.\end{aligned}\tag{48}$$

Подставим (48) в (43). После сокращения на λ^3 и приведения подобных членов получим

$$A_3(\nu\lambda - B_2)e^{\lambda x} + A_4(\nu\lambda + B_2)e^{-\lambda x} + B_3(\nu\lambda + A_2)e^{\lambda y} + B_4(\nu\lambda - A_2)e^{-\lambda y} = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при экспонентах нулю, находим значения постоянных:

$$\begin{array}{ll} A_3 = A_4 = B_3 = 0,\ A_2 = \nu\lambda & \text{(случай 1)},\\ A_3 = B_3 = 0,\ A_2 = \nu\lambda,\ B_2 = -\nu\lambda & \text{(случай 2)},\\ A_3 = B_4 = 0,\ A_2 = -\nu\lambda,\ B_2 = -\nu\lambda & \text{(случай 3)}. \end{array}$$

(Остальные постоянные могут принимать произвольные значения.) Указанные наборы постоянных определяют три решения уравнения (41) вида (42):

$$\begin{aligned} w &= C_1e^{-\lambda y} + C_2y + C_3 + \nu\lambda x,\\ w &= C_1e^{-\lambda x} + \nu\lambda x + C_2e^{-\lambda y} - \nu\lambda y + C_3,\\ w &= C_1e^{-\lambda x} - \nu\lambda x + C_2e^{\lambda y} - \nu\lambda y + C_3, \end{aligned}$$

где C_1, C_2, C_3, λ — произвольные постоянные.

3°. Решение уравнений (45), (46) при $C=-\lambda^2<0$:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= A_1 + A_2x + A_3\cos(\lambda x) + A_4\sin(\lambda x),\\ \psi(y) &= B_1 + B_2y + B_3\cos(\lambda y) + B_4\sin(\lambda y).\end{aligned}\tag{49}$$

Подстановка выражений (49) в (43) не дает новых действительных решений.

Вырожденные случаи. В случаях $\varphi''_{xx}\equiv 0$ и $\psi''_{yy}\equiv 0$ уравнение (44) обращается в тождество соответственно для любой функции $\psi=\psi(y)$ и любой функции $\varphi=\varphi(x)$. Эти случаи надо рассматривать отдельно. Например, при $\varphi''_{xx}\equiv 0$ имеем $\varphi(x)=Ax+B$, где A, B — любые. Подставив эту функцию в (43), приходим к уравнению $-A\psi'''_{yyy}=\nu\psi''''_{yyyy}$. Его общее решение описывается формулой $\psi(y)=C_1\exp(-Ay/\nu)+C_2y^2+C_3y+C_4$. В итоге имеем еще одно решение уравнения (41) вида (42):

$$w = C_1e^{-\lambda y} + C_2y^2 + C_3y + C_4 + \nu\lambda x \qquad (A=\nu\lambda,\ B=0),$$

которое с помощью группового анализа было получено В. В. Пухначевым (1960).

Пример 12. Рассмотрим нелинейное уравнение второго порядка параболического типа

$$\frac{\partial w}{\partial t} = aw\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\Bigl(\frac{\partial w}{\partial x}\Bigr)^2 + c.\tag{50}$$

Ищем точные решения уравнения (50) с разделяющимися переменными вида

$$w = \varphi(t) + \psi(t)\theta(x).\tag{51}$$

Подставив (51) в (50), после элементарных преобразований имеем

$$\varphi'_t - c + \psi'_t\theta = a\varphi\psi\theta''_{xx} + \psi^2[a\theta\theta''_{xx} + b(\theta'_x)^2]. \tag{52}$$

Поделим обе части этого выражения на ψ^2, а затем продифференцируем по t и x. В результате получим

$$(\psi'_t/\psi^2)'_t\theta'_x = a(\varphi/\psi)'_t\theta'''_{xxx}.$$

Разделяя переменные, приходим к обыкновенным дифференциальным уравнениям (K — произвольная постоянная)

$$\theta'''_{xxx} = K\theta'_x, \tag{53}$$

$$(\psi'_t/\psi^2)'_t = aK(\varphi/\psi)'_t. \tag{54}$$

Общее решение уравнения (53) дается формулами

$$\theta = \begin{cases} A_1x^2 + A_2x + A_3 & \text{при } K = 0, \\ A_1e^{\lambda x} + A_2e^{-\lambda x} + A_3 & \text{при } K = \lambda^2 > 0, \\ A_1\sin(\lambda x) + A_2\cos(\lambda x) + A_3 & \text{при } K = -\lambda^2 < 0, \end{cases} \tag{55}$$

где A_1, A_2, A_3 — произвольные постоянные. Интегрируя уравнение (54), находим (B — произвольная постоянная):

$$\begin{aligned} &\varphi(t)\text{ — любая}, \quad \psi = \frac{B}{t+C_1} && \text{при } K = 0, \\ &\psi(t)\text{ — любая}, \quad \varphi = B\psi + \frac{1}{aK}\frac{\psi'_t}{\psi} && \text{при } K \neq 0. \end{aligned} \tag{56}$$

Подставив решения (55) и (56) в (52), можно «убрать» лишние константы и определить функции φ и ψ. В итоге получим:

1°. Решение при $a \neq -b$, $a \neq -2b$:

$$w = \frac{c(a+2b)}{2(a+b)}(t+C_1) + C_2(t+C_1)^{-\frac{a}{a+2b}} - \frac{(x+C_3)^2}{2(a+2b)(t+C_1)} \qquad (\text{для } K = 0),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

2°. Решение при $b = -a$:

$$w = \frac{1}{a\lambda^2}\frac{\psi'_t}{\psi} + \psi(A_1e^{\lambda x} + A_2e^{-\lambda x}) \qquad (\text{для } K = \lambda^2 > 0),$$

где функция $\psi = \psi(t)$ определяется из автономного обыкновенного дифференциального уравнения

$$Z''_{tt} = ac\lambda^2 + 4a^2\lambda^4A_1A_2e^{2Z}, \qquad \psi = e^Z,$$

решение которого можно представить в неявной форме. В частных случаях $A_1 = 0$ или $A_2 = 0$ имеем $\psi = C_1\exp\bigl(\frac{1}{2}ac\lambda^2t^2 + C_2t\bigr)$.

3°. Решение при $b = -a$:

$$w = -\frac{1}{a\lambda^2}\frac{\psi'_t}{\psi} + \psi[A_1\sin(\lambda x) + A_2\cos(\lambda x)] \qquad (\text{для } K = -\lambda^2 < 0).$$

где функция $\psi = \psi(t)$ определяется из автономного обыкновенного дифференциального уравнения

$$Z''_{tt} = -ac\lambda^2 + a^2\lambda^4(A_1^2 + A_2^2)e^{2Z}, \qquad \psi = e^Z,$$

решение которого можно представить в неявной форме.

Замечание. Структуру решений уравнения (50) другим методом описал V. A. Galaktionov (1995).

Задачи и упражнения к разд. 4.4

1. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений первого порядка:

a) $w_x = aw_y^2 + bww_y + f(x)$,

b) $w_x = aw_y^n + f(x)w$.

Указание. Решения искать в виде $w = \varphi(x) + \psi(x)\theta(y)$.

2. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений теплопроводности:

a) $w_t = a(ww_x)_x$,

b) $w_t = a(ww_x)_x + b$.

Указание. Решения искать в виде $w = f(t)\theta(x) + g(t)$.

3. Найти решение с обобщенным разделением переменных нелинейного уравнения конвективной теплопроводности:

$w_t = a(ww_x)_x + bw_x$.

Указание. Решение искать в виде $w = f(t)\theta(x) + g(t)$.

4. Найти решение с обобщенным разделением переменных нелинейного волнового уравнения:

$w_{tt} = a(ww_x)_x$.

Указание. Решение искать в виде $w = f(t)\theta(x) + g(t)$.

5. Найти решения с обобщенным разделением переменных уравнения пограничного слоя с градиентом давления:

$w_y w_{xy} - w_x w_{yy} = \nu w_{yyy} + f(x)$.

Указание. Решения искать в виде $w = \varphi(x)\psi(y) + \chi(x)$.

6. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений третьего порядка:

a) $w_{xt} + w_x^2 - ww_{xx} = f(t)w_{xxx}$,

b) $w_t + aww_x + bw_{xtt} = 0$.

Указание. Решения искать в виде $w = \varphi(t)\theta(x) + \psi(t)$.

7. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений:

a) $w_t = a\exp(\lambda w_{xx})$,

b) $w_{tt} = a\exp(\lambda w_{xx})$.

Указание. Решения искать в виде $w = f(x)\theta(t) + g(x)$ (обе части уравнений надо прологарифмировать).

Литература к разд. 4.4: А. Д. Полянин, А. И. Журов (2002), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (2003), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004).

4.5. Решение функционально-дифференциальных уравнений методом расщепления

4.5.1. Предварительные замечания. Описание метода расщепления

При уменьшении числа членов функционально-дифференциального уравнения (21)–(22) с помощью дифференцирования возникают «лишние» постоянные интегрирования, которые надо убирать на заключительном этапе. Кроме того, порядок полученного уравнения может быть выше порядка исходного. Чтобы избежать этих трудностей, решение функционально-дифференциального уравнения удобно свести к последовательному решению билинейного функционального уравнения стандартного вида и решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений (т. е. исходная задача расщепляется на две более простые задачи). Ниже дано краткое описание основных этапов этого метода.

1°. На первом этапе рассмотрим уравнение (21) как билинейное функциональное уравнение, зависящее от двух переменных X и Y, где $\Phi_n = \Phi_n(X)$ и $\Psi_n = \Psi_n(Y)$ — искомые величины ($n = 1, \ldots, k$).

Можно доказать (например, путем дифференцирования по схеме, описанной в разд. 4.4, совместно с индукцией), что билинейному функциональному уравнению (21) можно удовлетворить только в случае, когда величины $\Phi_n = \Phi_n(X)$ ($n = 1, \ldots, k$) связаны линейными зависимостями. Учитывая это обстоятельство, нетрудно показать, что билинейное функциональное уравнение (21) имеет $(k-1)$ различных решений:

$$\begin{aligned}
&\Phi_i(X) = C_{i,1}\Phi_{m+1}(X) + C_{i,2}\Phi_{m+2}(X) + \cdots + C_{i,k-m}\Phi_k(X),\\
&\Psi_{m+j}(Y) = -C_{1,j}\Psi_1(Y) - C_{2,j}\Psi_2(Y) - \cdots - C_{m,j}\Psi_m(Y),\\
&i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, k-m; \quad m = 1, 2, \ldots, k-1;
\end{aligned} \tag{57}$$

где $C_{i,j}$ — произвольные постоянные. Функции $\Phi_{m+1}(X)$, …, $\Phi_k(X)$, $\Psi_1(Y)$, …, $\Psi_m(Y)$, стоящие в правых частях равенств (57), задаются произвольно. Видно, что при фиксированном m решение (57) содержит $m(k-m)$ произвольных постоянных.

2°. На втором этапе последовательно подставляем функционалы $\Phi_i(X)$ и $\Psi_j(Y)$ из (22) во все решения (57). В результате получаем системы обыкновенных дифференциальных уравнений* для определения искомых функций $\varphi_p(x)$ и $\psi_q(y)$. Решая эти системы, находим решения с обобщенным разделением переменных вида (19).

Замечание 1. Важно подчеркнуть, что используемое в методе расщепления билинейное функциональное уравнение (21) при фиксированном k является одним и тем же для разных классов исходных нелинейных уравнений математической физики.

Замечание 2. При фиксированном m решение (57) содержит $m(k-m)$ произвольных постоянных $C_{i,j}$. При заданном k наибольшее число произвольных постоянных имеют следующие решения:

Номер решения	*Число произвольных постоянных*	*Условия на* k
$m = \frac{1}{2}k$	$\frac{1}{4}k^2$	k — четное число,
$m = \frac{1}{2}(k \pm 1)$	$\frac{1}{4}(k^2-1)$	k — нечетное число.

Именно эти решения билинейного функционального уравнения чаще всего приводят к нетривиальным решениям с обобщенным разделением переменных в нелинейных уравнениях с частными производными.

Замечание 3. Билинейное функциональное уравнение (21) и его решения (57) играют важную роль в методе функционального разделения переменных (см. главу 5).

Для наглядности на рис. 2 изображены основные этапы построения решений с обобщенным разделением переменных методом расщепления.

4.5.2. Решения простейших функциональных уравнений и их применение

Приведем решения нескольких простейших функциональных уравнений вида (21), которые понадобятся далее для решения конкретных нелинейных уравнений с частными производными.

1°. Функциональное уравнение

$$\Phi_1\Psi_1 + \Phi_2\Psi_2 + \Phi_3\Psi_3 = 0 \tag{58}$$

* Обычно эти системы являются переопределенными.

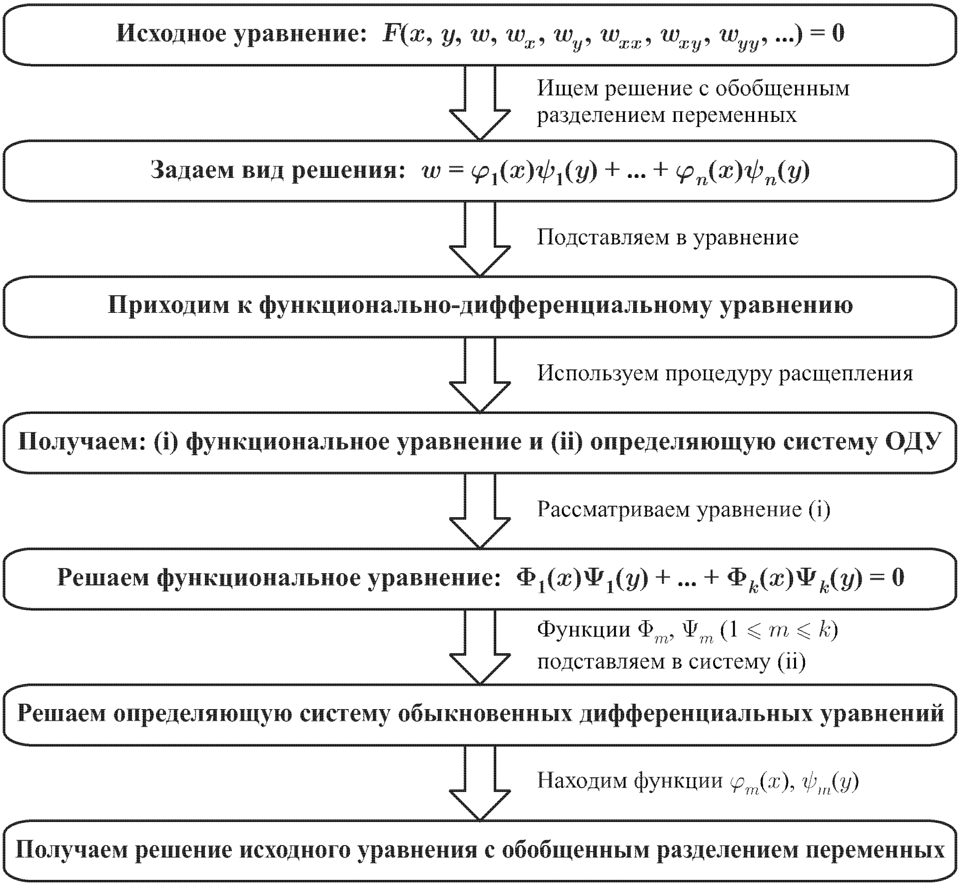

Рис. 2. Общая схема построения решений с обобщенным разделением переменных методом расщепления. Использовано сокращение: ОДУ — обыкновенные дифференциальные уравнения.

где все Φ_i — функции одного и того же аргумента, а все Ψ_i — функции другого аргумента, имеет два решения:

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = A_1\Phi_3, \quad \Phi_2 = A_2\Phi_3, \quad \Psi_3 = -A_1\Psi_1 - A_2\Psi_2; \\ &\Psi_1 = A_1\Psi_3, \quad \Psi_2 = A_2\Psi_3, \quad \Phi_3 = -A_1\Phi_1 - A_2\Phi_2, \end{aligned} \tag{59}$$

где A_1, A_2 — произвольные постоянные. Функции в правых частях равенств (59) считаются произвольными. В первом решении сделаны переобозначения: $A_1 = C_{1,1}$, $A_2 = C_{2,1}$, а во втором решении — переобозначения: $A_1 = -1/C_{1,2}$, $A_2 = C_{1,1}/C_{1,2}$ [сравни с решениями (57) при $k = 3$].

2°. Функциональное уравнение

$$\Phi_1\Psi_1 + \Phi_2\Psi_2 + \Phi_3\Psi_3 + \Phi_4\Psi_4 = 0, \tag{60}$$

где все Φ_i — функции одного и того же аргумента, а все Ψ_i — функции другого аргумента, имеет решение

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = A_1\Phi_3 + A_2\Phi_4, \qquad \Phi_2 = A_3\Phi_3 + A_4\Phi_4, \\ &\Psi_3 = -A_1\Psi_1 - A_3\Psi_2, \quad \Psi_4 = -A_2\Psi_1 - A_4\Psi_2, \end{aligned} \tag{61}$$

зависящее от четырех произвольных постоянных A_m [см. решение (57) при $k=4$, $m=2$, $C_{1,1}=A_1$, $C_{1,2}=A_2$, $C_{2,1}=A_3$, $C_{2,2}=A_4$]. Функции в правых частях равенств (61) считаются произвольными.

Уравнение (60) имеет также два других решения, зависящих от трех произвольных постоянных:

$$\begin{aligned}&\Phi_1=A_1\Phi_4,\quad \Phi_2=A_2\Phi_4,\quad \Phi_3=A_3\Phi_4,\quad \Psi_4=-A_1\Psi_1-A_2\Psi_2-A_3\Psi_3;\\ &\Psi_1=A_1\Psi_4,\quad \Psi_2=A_2\Psi_4,\quad \Psi_3=A_3\Psi_4,\quad \Phi_4=-A_1\Phi_1-A_2\Phi_2-A_3\Phi_3.\end{aligned}\tag{62}$$

В первом решении сделаны переобозначения: $A_1=C_{1,1}$, $A_2=C_{2,1}$, $A_3=C_{3,1}$, а во втором решении — переобозначения: $A_1=-1/C_{1,3}$, $A_2=C_{1,1}/C_{1,3}$, $A_3=C_{1,2}/C_{1,3}$.

3°. Решения функционального уравнения

$$\Phi_1\Psi_1+\Phi_2\Psi_2+\Phi_3\Psi_3+\Phi_4\Psi_4+\Phi_5\Psi_5=0,\tag{63}$$

можно найти по формулам (57) при $k=5$. Покажем простой способ получения решений, который удобно использовать на практике, исходя непосредственно из уравнения (63). Будем считать, что функциональные коэффициенты Φ_1, Φ_2, Φ_3 являются линейными комбинациями коэффициентов Φ_4 и Φ_5:

$$\Phi_1=A_1\Phi_4+B_1\Phi_5,\qquad \Phi_2=A_2\Phi_4+B_2\Phi_5,\qquad \Phi_3=A_3\Phi_4+B_3\Phi_5,\tag{64}$$

где A_n, B_n — произвольные постоянные. Подставим выражения (64) в (63) и соберем члены, пропорциональные Φ_4 и Φ_5:

$$(A_1\Psi_1+A_2\Psi_2+A_3\Psi_3+\Psi_4)\Phi_4+(B_1\Psi_1+B_2\Psi_2+B_3\Psi_3+\Psi_5)\Phi_5=0.$$

Приравнивая выражения в скобках нулю, получим

$$\begin{aligned}\Psi_4&=-A_1\Psi_1-A_2\Psi_2-A_3\Psi_3,\\ \Psi_5&=-B_1\Psi_1-B_2\Psi_2-B_3\Psi_3.\end{aligned}\tag{65}$$

Формулы (64), (65) дают одно из решений уравнения (63). Аналогичным образом находятся и другие решения.

Пример 13. Рассмотрим нелинейное уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a\frac{\partial}{\partial x}\Big(w\frac{\partial w}{\partial x}\Big)+f(t)w+g(t),\tag{66}$$

где $f(t)$ и $g(t)$ — произвольные функции.

Ищем решение этого уравнения с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,t)=\varphi(x)\psi(t)+\chi(t).\tag{67}$$

Подставив (67) в (66), после элементарных операций получим

$$a\psi^2(\varphi\varphi'_x)'_x+a\psi\chi\varphi''_{xx}+(f\psi-\psi''_{tt})\varphi+f\chi+g-\chi''_{tt}=0.$$

Это уравнение можно представить в виде функционального уравнения (60), где

$$\begin{aligned}&\Phi_1=(\varphi\varphi'_x)'_x,\quad \Phi_2=\varphi''_{xx},\quad \Phi_3=\varphi,\quad \Phi_4=1,\\ &\Psi_1=a\psi^2,\quad \Psi_2=a\psi\chi,\quad \Psi_3=f\psi-\psi''_{tt},\quad \Psi_4=f\chi+g-\chi''_{tt}.\end{aligned}\tag{68}$$

Подставив в решение (61) выражения (68), получим переопределенную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций $\varphi=\varphi(x)$, $\psi=\psi(t)$, $\chi=\chi(t)$:

$$\begin{aligned}&(\varphi\varphi'_x)'_x=A_1\varphi+A_2,\qquad \varphi''_{xx}=A_3\varphi+A_4,\\ &f\psi-\psi''_{tt}=-A_1a\psi^2-A_3a\psi\chi,\quad f\chi+g-\chi''_{tt}=-A_2a\psi^2-A_4a\psi\chi.\end{aligned}\tag{69}$$

Первые два уравнения (69) совместны только при

$$A_1 = 6B_2, \quad A_2 = B_1^2 - 4B_0B_2, \quad A_3 = 0, \quad A_4 = 2B_2, \tag{70}$$

где B_0, B_1, B_2 — произвольные постоянные, и имеют в этом случае решение

$$\varphi(x) = B_2x^2 + B_1x + B_0. \tag{71}$$

Подставив выражения для коэффициентов (70) в два последних уравнения (69), получим систему для определения функций $\psi(t)$ и $\chi(t)$:

$$\begin{aligned} \psi''_{tt} &= 6aB_2\psi^2 + f(t)\psi, \\ \chi''_{tt} &= [2aB_2\psi + f(t)]\chi + a(B_1^2 - 4B_0B_2)\psi^2 + g(t). \end{aligned} \tag{72}$$

Формулы (67), (71) и система (72) определяют точное решение уравнения (66) с обобщенным разделением переменных. Первое уравнение (72) решается независимо; оно линейно в случае $B_2 = 0$ и интегрируется в квадратурах при $f(t) = \text{const}$. Второе уравнение (72) линейно относительно χ (при известном ψ).

При $\varphi \not\equiv 0$, $\psi \not\equiv 0$, $\chi \not\equiv 0$ и произвольных f и g уравнение (66) не имеет других решений вида (67).

Замечание. Можно показать (V. A. Galaktionov, 1995), что уравнение (66) имеет более общее решение вида

$$w(x,y) = \varphi_1(x)\psi_1(t) + \varphi_2(x)\psi_2(t) + \psi_3(t), \qquad \varphi_1(x) = x^2, \quad \varphi_2(x) = x, \tag{73}$$

где функции $\psi_i = \psi_i(t)$ определяются из обыкновенных дифференциальных уравнений (штрихи обозначают производные по t)

$$\begin{aligned} \psi_1'' &= 6a\psi_1^2 + f(t)\psi_1, \\ \psi_2'' &= [6a\psi_1 + f(t)]\psi_2, \\ \psi_3'' &= [2a\psi_1 + f(t)]\psi_3 + a\psi_2^2 + g(t). \end{aligned} \tag{74}$$

Второе уравнение (74) имеет частное решение $\psi_2 = \psi_1$. Поэтому его общее решение можно записать в виде (В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, 2001 *a*)

$$\psi_2 = C_1\psi_1 + C_2\psi_1 \int \frac{dt}{\psi_1^2}.$$

Частному случаю $C_2 = 0$ отвечает решение, полученное в примере 4.

Пример 14. Рассмотрим нелинейное уравнение третьего порядка

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \nu\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, \tag{75}$$

которое встречается в гидродинамике.

Ищем точные решения уравнения (75) вида

$$w = \varphi(t)\theta(x) + \psi(t). \tag{76}$$

Подставив (76) в (75), имеем

$$\varphi'_t\theta'_x - \varphi\psi\theta''_{xx} + \varphi^2\big[(\theta'_x)^2 - \theta\theta''_{xx}\big] - \nu\varphi\theta'''_{xxx} = 0.$$

Это функционально-дифференциальное уравнение можно свести к функциональному уравнению (60), положив

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = \varphi'_t, \quad \Phi_2 = \varphi\psi, \quad \Phi_3 = \varphi^2, \quad \Phi_4 = \nu\varphi, \\ &\Psi_1 = \theta'_x, \quad \Psi_2 = -\theta''_{xx}, \quad \Psi_3 = (\theta'_x)^2 - \theta\theta''_{xx}, \quad \Psi_4 = -\theta'''_{xxx}. \end{aligned} \tag{77}$$

Подставив эти выражения в (61), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\varphi'_t = A_1\varphi^2 + A_2\nu\varphi, && \varphi\psi = A_3\varphi^2 + A_4\nu\varphi, \\ &(\theta'_x)^2 - \theta\theta''_{xx} = -A_1\theta'_x + A_3\theta''_{xx}, && \theta'''_{xxx} = A_2\theta'_x - A_4\theta''_{xx}. \end{aligned} \tag{78}$$

Можно показать, что два последних уравнения (78) имеют совместные решения только при линейной связи между функцией θ и ее производной:

$$\theta'_x = B_1\theta + B_2. \tag{79}$$

Шесть постоянных B_1, B_2, A_1, A_2, A_3, A_4 должны удовлетворять трем условиям:

$$\begin{aligned} B_1(A_1 + B_2 - A_3B_1) &= 0, \\ B_2(A_1 + B_2 - A_3B_1) &= 0, \\ B_1^2 + A_4B_1 - A_2 &= 0. \end{aligned} \tag{80}$$

Интегрируя уравнение (79), получим

$$\theta = \begin{cases} B_3\exp(B_1x) - \dfrac{B_2}{B_1} & \text{при } B_1 \neq 0, \\ B_2x + B_3 & \text{при } B_1 = 0, \end{cases} \tag{81}$$

где B_3 — произвольная постоянная.

Из первых двух уравнений (78) находим функции φ и ψ:

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{A_2\nu}{C\exp(-A_2\nu t) - A_1} & \text{при } A_2 \neq 0, \\ -\dfrac{1}{A_1t + C} & \text{при } A_2 = 0, \end{cases} \qquad \psi = A_3\varphi + A_4\nu, \tag{82}$$

где C — произвольная постоянная.

Формулы (81), (82) и соотношения (80) позволяют найти следующие решения уравнения (75) вида (76):

$$\begin{aligned}
&w = \frac{x + C_1}{t + C_2} + C_3 && \text{при } A_2 = B_1 = 0,\ B_2 = -A_1; \\
&w = \frac{C_1e^{-\lambda x} + 1}{\lambda t + C_2} + \nu\lambda && \text{при } A_2 = 0,\ B_1 = -A_4,\ B_2 = -A_1 - A_3A_4; \\
&w = C_1e^{-\lambda(x + \beta\nu t)} + \nu(\lambda + \beta) && \text{при } A_1 = A_3 = B_2 = 0,\ A_2 = B_1^2 + A_4B_1; \\
&w = \frac{\nu\beta + C_1e^{-\lambda x}}{1 + C_2e^{-\nu\lambda\beta t}} + \nu(\lambda - \beta) && \text{при } A_1 = A_3B_1 - B_2,\ A_2 = B_1^2 + A_4B_1,
\end{aligned}$$

где C_1, C_2, C_3, β, λ — произвольные постоянные (их можно выразить через A_k, B_k).

Исследование второго вырожденного решения (62) функционального уравнения (60) с учетом (77) приводит к двум решениям дифференциального уравнения (75):

$$\begin{aligned} w &= \frac{x}{t + C} + \psi(t), \\ w &= \varphi(t)e^{-\lambda x} - \frac{\varphi_t'(t)}{\lambda\varphi(t)} + \nu\lambda, \end{aligned}$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — произвольные функции, C, λ — произвольные постоянные.

Пример 15. Рассмотрим уравнение с экспоненциальной нелинейностью по старшей производной:

$$w_t = f(x)\exp(aw_{xx}). \tag{83}$$

Ищем точные решения вида

$$w = \varphi(x) + \psi(x)\theta(t). \tag{84}$$

Подставим (84) в (83), поделим обе части полученного выражения на $f(x)$, а затем прологарифмируем. Считая $\psi/f > 0$, после элементарных преобразований имеем

$$a\varphi_{xx}'' - \ln(\psi/f) + a\theta\psi_{xx}'' - \ln\theta_t' = 0. \tag{85}$$

Это функционально-дифференциальное уравнение можно записать в виде (58), положив

$$\Phi_1 = a\varphi_{xx}'' - \ln(\psi/f), \quad \Phi_2 = \psi_{xx}'', \quad \Phi_3 = 1, \quad \Psi_1 = 1, \quad \Psi_2 = a\theta, \quad \Psi_3 = -\ln\theta_t'.$$

Подставив эти выражения в первое решение (59), приходим к обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\Phi_1 = a\varphi_{xx}'' - \ln(\psi/f) = A_1, \quad \psi_{xx}'' = A_2, \quad \ln\theta_t' = A_1 + A_2a\theta.$$

Интегрируя, имеем

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \frac{1}{2a}A_1x^2 + C_3x + C_4 + \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}(x-\xi)\ln\frac{\psi(\xi)}{f(\xi)}\,d\xi,\\
\psi(x) &= \frac{1}{2}A_2x^2 + C_1x + C_2,\\
\theta(t) &= -\frac{1}{A_2a}\ln\bigl(C_5 - A_2ae^{A_1}t\bigr).
\end{aligned}\tag{86}$$

Формулы (84), (86) описывают точное решение уравнения (83).

Задачи и упражнения к разд. 4.5

1. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений тепло- и массопереноса:

a) $w_t = a(ww_x)_x$,
b) $w_t = a(ww_x)_x + b$,
c) $w_t = a(ww_x)_x + bw$,
d) $w_t = a(ww_x)_x + bw^2$,
e) $w_t = a(ww_x)_x + bw_x$.

Указание. Решения искать в виде $w = f(t)\theta(x) + g(t)$.

2. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных волновых уравнений:

a) $w_{tt} = a(ww_x)_x$,
b) $w_{tt} = a(ww_x)_x + b$,
c) $w_{tt} = a(ww_x)_x + bw$,
d) $w_{tt} = a(ww_x)_x + bw^2$,
e) $w_{tt} + aw_t = b(ww_x)_x$.

Указание. Решения искать в виде $w = f(t)\theta(x) + g(t)$.

3. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейного уравнения третьего порядка:

$w_{xt} + w_x^2 - ww_{xx} = f(t)w_{xxx}$,

Указание. Решения искать в виде $w = \varphi(t)\theta(x) + \psi(t)$.

4. Найти решения с обобщенным разделением переменных уравнений пограничного слоя степенной жидкости:

a) $w_yw_{xy} - w_xw_{yy} = a(w_{yy})^nw_{yyy}$,
b) $w_yw_{xy} - w_xw_{yy} = a(w_{yy})^nw_{yyy} + f(x)$.

Указание. Решения искать в виде $w = \varphi(x)\psi(y) + \chi(x)$.

5. Найти решения с аддитивным разделением переменных нелинейных уравнений четвертого порядка, которые встречаются в гидродинамике вязкой несжимаемой жидкости:

a) $w_y(\Delta w)_x - w_x(\Delta w)_y = \nu\Delta\Delta w$,
b) $w_y(\Delta w)_x - w_x(\Delta w)_y = \nu\Delta\Delta w + f(y)$,

где $\Delta w = w_{xx} + w_{yy}$.

6. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений:

a) $w_t = a\exp[f(x)w_{xx}]$,
b) $w_t = a\exp[f(t)w_{xx}]$.

Указание. Решения искать в виде $w = \varphi(x)\theta(t) + \psi(x)$ (обе части уравнений надо прологарифмировать).

Литература к разд. 4.5: Е. Р. Розендорн (1984), А. Д. Полянин (2001 *c*), А. Д. Полянин, А. И. Журов (2002), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (2003), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004).

4.6. Метод Титова—Галактионова

4.6.1. Описание метода. Подпространства, инвариантные относительно нелинейного оператора

Рассмотрим эволюционное уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = F[w], \tag{87}$$

где $F[w]$ — нелинейный дифференциальный оператор вида

$$F[w] \equiv F\Big(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n w}{\partial x^n}\Big). \tag{88}$$

Определение. Конечномерное линейное подпространство

$$\mathscr{L}_k = \big\{\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)\big\}, \tag{89}$$

элементами которого являются всевозможные линейные комбинации линейно-независимых функций $\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)$, называется инвариантным относительно оператора F, если $F[\mathscr{L}_k] \subseteq \mathscr{L}_k$. Это означает, что существуют функции $f_1, \dots, f_k$, такие что

$$F\left[\sum_{i=1}^{k} C_i\varphi_i(x)\right] = \sum_{i=1}^{k} f_i(C_1, \dots, C_k)\varphi_i(x) \tag{90}$$

для произвольных постоянных $C_1, \dots, C_k$.

Пусть линейное подпространство (89) инвариантно относительно оператора F. Тогда уравнение (87) имеет решения с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{k} \psi_i(t)\varphi_i(x), \tag{91}$$

где функции $\psi_1(t), \dots, \psi_k(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\psi_i' = f_i(\psi_1, \dots, \psi_k), \qquad i = 1, \dots, k. \tag{92}$$

Здесь штрих обозначает производную по t.

Следующий пример иллюстрирует описанный метод построения решений с обобщенным разделением переменных.

Пример 16. Рассмотрим нелинейное параболическое уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + kw^2 + bw + c. \tag{93}$$

Покажем, что при $k > 0$ дифференциальный оператор $F[w] = aw_{xx} + (w_x)^2 + kw^2 + bw + c$ (определяющий правую часть уравнения) имеет двумерное инвариантное подпространство $\mathscr{L}_2 = \big\{1, \cos(x\sqrt{k}\,)\big\}$. Действительно, для произвольных C_1 и C_2 справедливо равенство

$$F\big[C_1 + C_2\cos(x\sqrt{k}\,)\big] = k(C_1^2 + C_2^2) + bC_1 + c + C_2(2kC_1 - ak + b)\cos(x\sqrt{k}\,).$$

Поэтому уравнение (93) допускает решение с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)\cos(x\sqrt{k}\,), \tag{94}$$

где функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \psi_1' &= k(\psi_1^2 + \psi_2^2) + b\psi_1 + c, \\ \psi_2' &= \psi_2(2k\psi_1 - ak + b). \end{aligned} \tag{95}$$

Замечание 1. При $k > 0$ дифференциальный оператор $F[w]$ имеет трехмерное инвариантное подпространство $\mathscr{L}_3 = \{1, \sin(x\sqrt{k}\,), \cos(x\sqrt{k}\,)\}$.

Замечание 2. При $k < 0$ дифференциальный оператор $F[w]$ имеет трехмерное инвариантное подпространство $\mathscr{L}_3 = \{1, \operatorname{sh}(x\sqrt{k}\,), \operatorname{ch}(x\sqrt{k}\,)\}$.

Замечание 3. Более общее уравнение (93), где $a = a(t)$, $b = b(t)$, $c = c(t)$ — произвольные функции и $k = \mathrm{const} < 0$, также имеет решение с обобщенным разделением переменных вида (94), где функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ описываются автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений (95).

4.6.2. Некоторые обобщения

Аналогичным образом рассматривается более общее уравнение вида

$$L_1[w] = L_2[U], \qquad U = F[w], \tag{96}$$

где $L_1[w]$ и $L_2[U]$ — линейные дифференциальные операторы по переменной t вида

$$L_1[w] \equiv \sum_{i=0}^{m_1} a_i(t)\frac{\partial^i w}{\partial t^i}, \qquad L_2[U] \equiv \sum_{j=0}^{m_2} b_j(t)\frac{\partial^j U}{\partial t^j}, \tag{97}$$

а $F[w]$ — нелинейный дифференциальный оператор по переменной x

$$F[w] \equiv F\left(t, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n w}{\partial x^n}\right), \tag{98}$$

который может зависеть параметрическим образом от t.

Пусть линейное подпространство (89) инвариантно относительно оператора F, т. е. для произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_k$ имеет место равенство

$$F\left[\sum_{i=1}^{k} C_i\varphi_i(x)\right] = \sum_{i=1}^{k} f_i(t, C_1, \ldots, C_k)\varphi_i(x). \tag{99}$$

Тогда уравнение (96) имеет решения с обобщенным разделением переменных вида (91), где функции $\psi_1(t), \ldots, \psi_k(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$L_1\bigl[\psi_i(t)\bigr] = L_2\bigl[f_i(t, \psi_1, \ldots, \psi_k)\bigr], \qquad i = 1, \ldots, k. \tag{100}$$

Пример 17. Рассмотрим уравнение

$$a_2(t)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a_1(t)\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{101}$$

которое при $a_2(t) = k_2$, $a_1(t) = k_1/t$ используется для описания трансзвуковых газовых течений (t играет роль пространственной переменной).

Уравнение (101) является частным случаем уравнения (96), где $L_1[w] = a_2(t)w_{tt} + a_1(t)w_t$, $L_2[U] = U$, $F[w] = w_x w_{xx}$. Можно показать, что нелинейный дифференциальный оператор $F[w]$ допускает трехмерное инвариантное подпространство $\mathscr{L}_3 = \{1, x^{3/2}, x^3\}$. Поэтому уравнение (101) имеет решения с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)x^{3/2} + \psi_3(t)x^3,$$

где функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $\psi_3(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} a_2(t)\psi_1'' + a_1(t)\psi_1' &= \tfrac{9}{8}\psi_2^2, \\ a_2(t)\psi_2'' + a_1(t)\psi_2' &= \tfrac{45}{4}\psi_2\psi_3, \\ a_2(t)\psi_3'' + a_1(t)\psi_3' &= 18\psi_3^2. \end{aligned}$$

Замечание. Оператор $F[w]$ допускает также четырехмерное инвариантное подпространство $\mathscr{L}_4 = \{1, x, x^2, x^3\}$, которому соответствует решение с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)x + \psi_3(t)x^2 + \psi_4(t)x^3.$$

См. также пример 18 при $a_0(t) = 0$, $k = 1$, $n = 2$.

Пример 18. Рассмотрим более общее уравнение n-го порядка

$$a_2(t)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a_1(t)\frac{\partial w}{\partial t} + a_0(t)w = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^k \frac{\partial^n w}{\partial x^n}. \tag{102}$$

Нелинейный оператор $F[w] = (w_x)^k w_x^{(n)}$ допускает двумерное инвариантное подпространство $\mathscr{L}_2 = \{1, \varphi(x)\}$, где функция $\varphi(x)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $(\varphi'_x)^k \varphi_x^{(n)} = \varphi$. Поэтому уравнение (102) имеет решения с обобщенным разделением переменных вида

$$w(x,t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)\varphi(x),$$

где функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ описываются двумя независимыми обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$a_2(t)\psi_1'' + a_1(t)\psi_1' + a_0(t)\psi_1 = 0,$$
$$a_2(t)\psi_2'' + a_1(t)\psi_2' + a_0(t)\psi_2 = \psi_2^{k+1}.$$

Много других примеров подобного рода, а также некоторые детализации и обобщения описываемого метода, можно найти в цитируемой ниже литературе. Основные трудности, возникающие при использовании метода Титова — Галактионова для построения точных решений конкретных уравнений, состоят в отыскании линейных подпространств, инвариантных относительно заданного нелинейного оператора. Кроме того, исходное уравнение может отличаться от уравнений рассматриваемого типа (не всегда можно выделить подходящий нелинейный оператор $F[w]$).

Задачи и упражнения к разд. 4.6

1. Показать, что нелинейный дифференциальный оператор

$F[w] = (a_1 w_x + a_2 w + a_3)w_{xx} + a_4 w_x^2 + a_5 w_x + a_6 w + a_7$

допускает трехмерное линейное инвариантное подпространство $\mathscr{L}_3 = \{1, x, x^2\}$. Используя это обстоятельство, найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений:

a) $w_t = aww_{xx}$,
b) $w_t = aww_{xx} + b$,
c) $w_t = aww_{xx} + bw$,
d) $w_t = aww_{xx} + bw_x$,
e) $w_t = a(ww_x)_x$,
f) $w_t = a(ww_x)_x + b$,
g) $w_t = a(ww_x)_x + bw$,
h) $w_t = a(ww_x)_x + bw_x$,
i) $w_{tt} = aww_{xx}$,
j) $w_{tt} = a(ww_x)_x$,
k) $w_{tt} = aww_{xx} + b$,
l) $w_{tt} = a(ww_x)_x + b$.

2. При каких условиях нелинейный дифференциальный оператор

$F[w] = (a_1 w_x + a_2 w + a_3)w_{xx} + a_4 w_x^2 + a_5 w_x + a_6 w^2 + a_7 w + a_8$

допускает инвариантные линейные подпространства

a) $\mathscr{L}_2 = \{1, e^{\lambda x}\}$,
b) $\mathscr{L}_3 = \{1, \operatorname{sh}(\lambda x), \operatorname{ch}(\lambda x)\}$,
c) $\mathscr{L}_3 = \{1, \sin(\lambda x), \cos(\lambda x)\}$?

3. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений:

a) $w_t = w_{xx} + aw_x^2 + bw^2$,

b) $w_t = ww_{xx} + bw^2 + c$,

c) $w_t = ww_{xx} + bw_x^2 + c$,

d) $w_t = (ww_x)_x + aw^2 + b$.

Указание. Воспользоваться результатами решения предыдущей задачи.

4. При каких условиях нелинейный дифференциальный оператор

$F[w] = a_1 w_{xx}^2 + a_2 w_x w_{xx} + a_3 w w_{xx} + a_4 w_x^2 + a_5 w w_x + a_6 w^2 + a_7 w_x + a_8 w + a_9$

допускает инвариантные линейные подпространства

a) $\mathscr{L}_3 = \{1, x, x^2\}$,

b) $\mathscr{L}_4 = \{1, x, x^2, x^3\}$,

c) $\mathscr{L}_5 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$,

d) $\mathscr{L}_2 = \{1, e^{\lambda x}\}$,

e) $\mathscr{L}_3 = \{1, \operatorname{sh}(\lambda x), \operatorname{ch}(\lambda x)\}$,

f) $\mathscr{L}_3 = \{1, \sin(\lambda x), \cos(\lambda x)\}$,

g) $\mathscr{L}_3 = \{1, \operatorname{ch}(\lambda x), \operatorname{ch}(2\lambda x)\}$,

h) $\mathscr{L}_3 = \{1, \cos(\lambda x), \cos(2\lambda x)\}$,

i) $\mathscr{L}_2 = \{1, f(x)\}$?

5. Найти решения с обобщенным разделением переменных нелинейных уравнений:

a) $w_t = aw_{xx}^2$,

b) $w_{tt} = aw_{xx}^2 + b$,

c) $w_t = w_{xx}^2 + w^2$,

d) $w_t = ww_{xx} - \frac{3}{4}w_x^2 + \frac{4}{3}w^2$.

Указание. Воспользоваться результатами решения предыдущей задачи из пунктов c), d), f) и h).

6. Найти решения с обобщенным разделением переменных уравнений с кубической нелинейностью:

a) $w_t = 2w^2 w_{xx} - ww_x^2$,

b) $w_{tt} = 2w^2 w_{xx} - ww_x^2 + a$.

Указание. Показать, что нелинейный оператор $F[w] = 2w^2 w_{xx} - ww_x^2$ допускает трехмерное линейное инвариантное подпространство $\mathscr{L}_3 = \{1, x, x^2\}$.

Литература к разд. 4.6: С. С. Титов (1988), В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1994), V. A. Galaktionov (1995), V. A. Galaktionov, S. A. Posashkov, S. R. Svirshchevskii (1995), S. R. Svirshchevskii (1995, 1996), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004).

5. Метод функционального разделения переменных

5.1. Структура решений с функциональным разделением переменных

Нелинейные уравнения, полученные заменой $w = F(z)$ из линейных уравнений математической физики с разделяющимися переменными для функции $z = z(x, y)$, будут иметь точные решения вида

$$w(x, y) = F(z), \quad \text{где} \quad z = \sum_{m=1}^{n} \varphi_m(x)\psi_m(y). \tag{1}$$

Многие нелинейные уравнения с частными производными, которые не сводятся к линейным, также имеют точные решения вида (1). Такие решения будем называть *решениями с функциональным разделением переменных*. В общем случае функции $\varphi_m(x)$, $\psi_m(y)$, $F(z)$ в (1) заранее не известны и подлежат определению.

Основная идея: дифференциально-функциональное уравнение, полученное в результате подстановки выражения (1) в рассматриваемое уравнение с частными производными, надо привести к стандартному билинейному функциональному уравнению (21) из разд. 4.2.2 [или к дифференциально-функциональному уравнению вида (21)–(22) из разд. 4.2.2].

Замечание 1. При функциональном разделении переменных поиск решений простейшего вида $w = F(\varphi(x) + \psi(y))$ и $w = F(\varphi(x)\psi(y))$ приводит к одинаковым результатам, поскольку справедливо представление $F(\varphi(x)\psi(y)) = F_1(\varphi_1(x) + \psi_1(y))$, где $F_1(z) = F(e^z)$, $\varphi_1(x) = \ln\varphi(x)$, $\psi_1(y) = \ln\psi(y)$.

Замечание 2. При построении решений с функциональном разделением переменных вида $w = F(\varphi(x) + \psi(y))$ считается, что $\varphi \neq \text{const}$ и $\psi \neq \text{const}$.

Замечание 3. Функция $F(z)$ может описываться как одним обыкновенным дифференциальным уравнением, так и переопределенной системой уравнений (при анализе надо учитывать обе эти возможности).

5.2. Решения с функциональным разделением переменных специального вида

5.2.1. Решения типа обобщенной бегущей волны. Примеры

Для упрощения анализа некоторые функции в (1) можно задавать априорно, а другие определять в процессе решения. Такие решения будем называть *решениями с функциональным разделением переменных специального вида*.

Ниже указаны наиболее простые решения с функциональным разделением переменных специального вида (x и y можно поменять местами):

$$w = F(z),\quad z = \psi_1(y)x + \psi_2(y) \qquad \text{(аргумент } z \text{ линеен по } x\text{);}$$
$$w = F(z),\quad z = \psi_1(y)x^2 + \psi_2(y) \qquad \text{(аргумент } z \text{ квадратичен по } x\text{);}$$
$$w = F(z),\quad z = \psi_1(y)e^{\lambda x} + \psi_2(y) \qquad \text{(аргумент } z \text{ содержит экспоненциальную функцию } x\text{).}$$

Первое решение будем называть решением типа обобщенной бегущей волны. В последней формуле вместо $e^{\lambda x}$ могут стоять также функции $\operatorname{ch}(ax + b)$, $\operatorname{sh}(ax + b)$, $\sin(ax + b)$.

После подстановки любого из указанных выражений в рассматриваемое уравнение надо исключить x с помощью выражения для z. В результате получим функционально-дифференциальное уравнение с двумя аргументами y и z. Его решение в ряде случаев можно получить при помощи методов, описанных в главе 4.

Для наглядности общая схема построения решений типа обобщенной бегущей волны для эволюционных уравнений изображена на рис. 3.

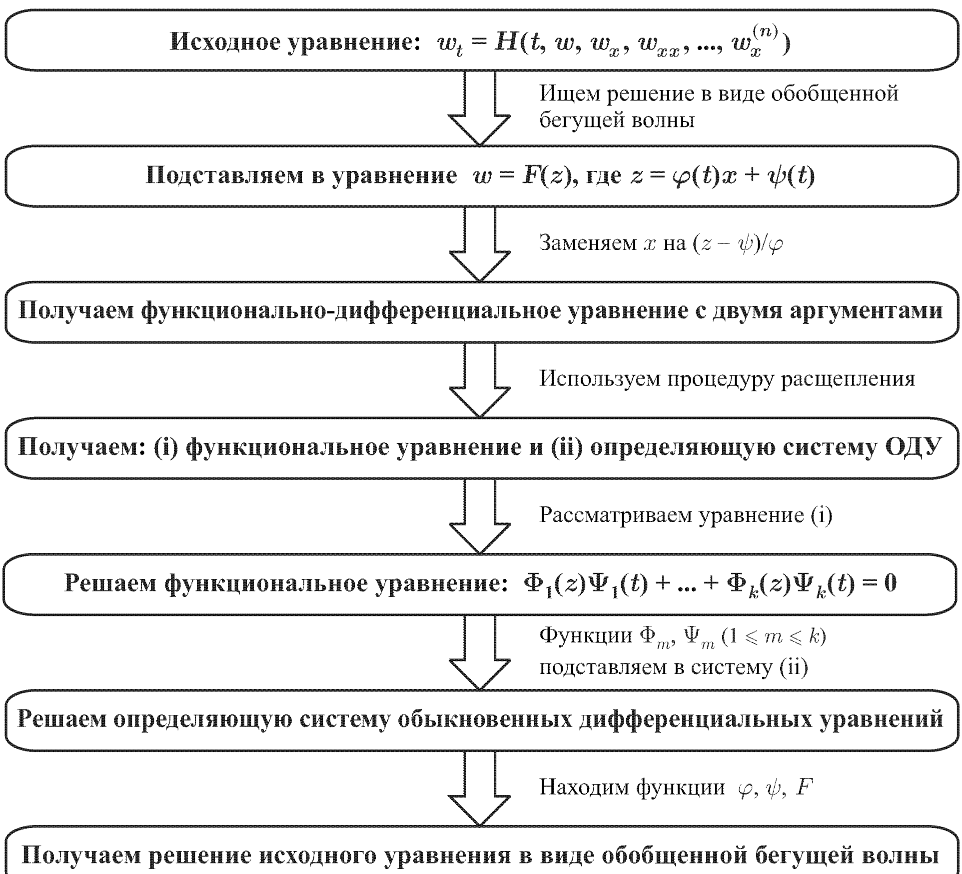

Рис. 3. Алгоритм построения решений типа обобщенной бегущей волны для эволюционных уравнений. Использовано сокращение: ОДУ — обыкновенные дифференциальные уравнения.

Замечание 1. Алгоритм, изображенный на рис. 3, может использоваться также для построения точных решений более общего вида* $w = \sigma(t)F(z) + \varphi_1(t)x + \psi_2(t)$, где $z = \varphi_1(t)x + \psi_2(t)$. Пример подобного решения рассмотрен далее в разд. 6.3 (пример 6).

Замечание 2. Решение с обобщенным разделением переменных (см. главу 4) является решением с функциональным разделением переменных частного вида, соответствующим случаю $F(z) = z$.

Рассмотрим примеры нелинейных уравнений, допускающих точные решения с функциональным разделением переменных частного вида, когда сложный аргумент z линеен или квадратичен по одной из независимых переменных.

Пример 1. Рассмотрим нестационарное уравнение теплопроводности с нелинейным источником

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mathcal{F}(w). \tag{2}$$

Ищем точные решения уравнения (2) с функциональным разделением переменных специального вида

$$w = w(z), \quad z = \varphi(t)x + \psi(t). \tag{3}$$

Требуется найти функции $w(z)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и правую часть уравнения $\mathcal{F}(w)$.

Подставив выражение (3) в (2) и поделив на w'_z, имеем

$$\varphi'_t x + \psi'_t = \varphi^2 \frac{w''_{zz}}{w'_z} + \frac{\mathcal{F}(w)}{w'_z}. \tag{4}$$

Выразим в (3) x через z и подставим его в (4). В результате приходим к функционально-дифференциальному уравнению с двумя переменными t и z:

$$-\psi'_t + \frac{\psi}{\varphi}\varphi'_t - \frac{\varphi'_t}{\varphi} z + \varphi^2 \frac{w''_{zz}}{w'_z} + \frac{\mathcal{F}(w)}{w'_z} = 0,$$

которое можно рассматривать как функциональное уравнение (60) из разд. 4.5, где

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = -\psi'_t + \frac{\psi}{\varphi}\varphi'_t, \quad &&\Phi_2 = -\frac{\varphi'_t}{\varphi}, \quad &&\Phi_3 = \varphi^2, \quad &&\Phi_4 = 1,\\ &\Psi_1 = 1, &&\Psi_2 = z, &&\Psi_3 = \frac{w''_{zz}}{w'_z}, &&\Psi_4 = \frac{\mathcal{F}(w)}{w'_z}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в формулы (61) из разд. 4.5, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} -\psi'_t + \frac{\psi}{\varphi}\varphi'_t &= A_1\varphi^2 + A_2, \quad & -\frac{\varphi'_t}{\varphi} &= A_3\varphi^2 + A_4,\\ \frac{w''_{zz}}{w'_z} &= -A_1 - A_3 z, & \frac{\mathcal{F}(w)}{w'_z} &= -A_2 - A_4 z, \end{aligned} \tag{5}$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 — произвольные постоянные.

Случай 1. При $A_4 \neq 0$ решение системы (5) имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \pm\left(C_1 e^{2A_4 t} - \frac{A_3}{A_4}\right)^{-1/2},\\ \psi(t) &= -\varphi(t)\left[A_1 \int \varphi(t)\,dt + A_2 \int \frac{dt}{\varphi(t)} + C_2\right],\\ w(z) &= C_3 \int \exp\bigl(-\tfrac{1}{2}A_3 z^2 - A_1 z\bigr)\,dz + C_4,\\ \mathcal{F}(w) &= -C_3(A_4 z + A_2)\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}A_3 z^2 - A_1 z\bigr), \end{aligned} \tag{6}$$

* Указанное решение содержит в себе, как частные случаи, все наиболее распространенные решения: решения типа бегущей волны, автомодельные решения, обобщенные автомодельные решения, решения с аддитивным и мультипликативным разделением переменных (а также многие инвариантные решения).

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные. Зависимость $\mathcal{F} = \mathcal{F}(w)$ задается двумя последними выражениями в параметрическом виде (z играет роль параметра). При $A_3 \neq 0$ функцию источника $\mathcal{F}(w)$ в (6) можно выразить через элементарные функции и функцию, обратную интегралу вероятностей.

В частном случае $A_3 = C_4 = 0$, $A_1 = -1$, $C_3 = 1$ функцию источника можно представить в явном виде:

$$\mathcal{F}(w) = -w(A_4 \ln w + A_2). \tag{7}$$

Решение уравнения (2) в этом случае можно получить также с помощью группового анализа (В. А. Дородницын, 1982).

Случай 2. При $A_4 = 0$ решения первых двух уравнений (5) имеют вид

$$\varphi(t) = \pm\frac{1}{\sqrt{2A_3 t + C_1}}, \qquad \psi(t) = \frac{C_2}{\sqrt{2A_3 t + C_1}} - \frac{A_1}{A_3} - \frac{A_2}{3A_3}(2A_3 t + C_1),$$

а решения остальных уравнений описываются двумя последними формулами (6) при $A_4 = 0$.

Пример 2. Рассмотрим более общее уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b(t)\frac{\partial w}{\partial x} + c(t)\mathcal{F}(w).$$

содержащее произвольные функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$.

Решения ищем в виде (3). В этом случае в системе (5) изменятся только первые два уравнения, а функции $w(z)$ и $\mathcal{F}(w)$ будут описываться двумя последними формулами (6).

Пример 3. Нелинейное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\mathcal{G}(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + \mathcal{F}(w)$$

также имеет решения вида (3). Искомые величины описываются системой (5), в которой w''_{zz} надо заменить на $[\mathcal{G}(w)w'_z]'_z$. Функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются двумя первыми формулами в (6). Одна из двух функций $\mathcal{G}(w)$ или $\mathcal{F}(w)$ может быть задана произвольно, а другая находится в процессе решения. В частном случае $\mathcal{F}(w) = \mathrm{const}$ можно получить $\mathcal{G}(w) = C_1 e^{2kw} + (C_2 w + C_3)e^{kw}$.

Пример 4. Аналогичным образом рассматривается нелинейное уравнение n-го порядка

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^n w}{\partial x^n} + \mathcal{F}(w).$$

Как и ранее, решения ищутся в виде (3). В этом случае в системе (5) величины φ^2 и w''_{zz} надо заменить соответственно на φ^n и $w_z^{(n)}$. В частности, при $A_3 = 0$, помимо уравнения с логарифмической нелинейностью вида (7), получим и другие уравнения.

Пример 5. Для нелинейного уравнения n-го порядка

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^n w}{\partial x^n} + \mathcal{F}(w)\frac{\partial w}{\partial x},$$

поиск точного решения вида (3) приводит к следующей системе уравнений для определения функций $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $w(z)$, $\mathcal{F}(w)$:

$$-\psi'_t + \frac{\psi}{\varphi}\varphi'_t = A_1\varphi^n + A_2\varphi, \qquad -\frac{\varphi'_t}{\varphi} = A_3\varphi^n + A_4\varphi,$$
$$\frac{w_z^{(n)}}{w'_z} = -A_1 - A_3 z, \qquad \mathcal{F}(w) = -A_2 - A_4 z,$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 — произвольные постоянные.

При $n = 3$, положив $A_3 = 0$ и $A_1 > 0$, в частности получим $\mathcal{F}(w) = -A_2 - A_4 \arcsin(kw)$.

Пример 6. Можно искать решения уравнения (2) с квадратичной зависимостью сложного аргумента по x:

$$w = w(z), \quad z = \varphi(t)x^2 + \psi(t). \tag{8}$$

Подставим это выражение в (2). В результате приходим к уравнению, которое содержит члены с x^2 (и не содержит членов, линейных по x). Исключив из полученного уравнения x^2 с помощью (8), имеем

$$-\psi'_t + \frac{\psi}{\varphi}\varphi'_t + 2\varphi - \frac{\varphi'_t}{\varphi}z + 4\varphi z\frac{w''_{zz}}{w'_z} - 4\varphi\psi\frac{w''_{zz}}{w'_z} + \frac{\mathcal{F}(w)}{w'_z} = 0.$$

Для решения этого функционально-дифференциального уравнения с двумя аргументами применим метод расщепления, описанный в разд. 4.5. Можно показать, что уравнение (2) с логарифмической нелинейностью (7) имеет решение вида (8).

Пример 7. Рассмотрим нелинейное уравнение m-го порядка

$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=f(x)\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big)^{n-1}\frac{\partial^m w}{\partial y^m},$$

которое в частном случае $f(x)=\text{const}$, $m=3$ описывает пограничный слой степеннóй жидкости на плоской пластине (w — функция тока, x и y — продольная и поперечная координаты, n — реологический параметр; значение $n=1$ соответствует ньютоновской жидкости).

Поиск точного решения вида

$$w=w(z),\qquad z=\varphi(x)y+\psi(x)$$

приводит к равенству $\varphi'_x(w'_z)^2=f(x)\varphi^{2n+m-3}(w''_{zz})^{n-1}w_z^{(m)}$, которое не зависит от функции ψ. Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\varphi(x)=\Big[\int f(x)\,dx+C\Big]^{\frac{1}{4-2n-m}},\qquad \psi(x)\text{ — произвольна,}$$

а функция $w=w(z)$ определяется путем решения обыкновенного дифференциального уравнения $(w'_z)^2=(4-2n-m)(w''_{zz})^{n-1}w_z^{(m)}$.

Пример 8. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^{n+1}w}{\partial x^n\partial y}=f(w).\tag{9}$$

Ищем решение с функциональным разделением переменных специального вида

$$w=w(z),\qquad z=\varphi(y)x+\psi(y).\tag{10}$$

Подставим (10) в (9), а затем исключим x с помощью выражения для z. В результате после деления на $w_z^{(n+1)}$ и перегруппировки членов получим функционально-дифференциальное уравнение с двумя аргументами:

$$\varphi^n\psi'_y-\varphi^{n-1}\psi\varphi'_y+\varphi^{n-1}\varphi'_y\left(z+n\frac{w_z^{(n)}}{w_z^{(n+1)}}\right)-\frac{f(w)}{w_z^{(n+1)}}=0.\tag{11}$$

Оно сводится к трехчленному билинейному функциональному уравнению, которое имеет два решения (см. разд. 4.5). В соответствии с этим рассмотрим два случая.

1°. В первом случае выражение в круглых скобках и последнюю дробь в (11) приравниваем к константам. В результате после элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned}(z-C_1)w_z^{(n+1)}+nw_z^{(n)}&=0,\\ C_2w_z^{(n+1)}-f(w)&=0,\\ \varphi^n\psi'_y-\varphi^{n-1}\psi\varphi'_y+C_1\varphi^{n-1}\varphi'_y-C_2&=0,\end{aligned}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Полагая $C_1=0$ (это соответствует сдвигу по z и переобозначению функции ψ) и интегрируя, имеем

$$\begin{aligned}w&=A\ln|z|+B_{n-1}z^{n-1}+\dots+B_1z+B_0,\\ f(w)&=AC_2n!(-1)^nz^{-n-1},\\ \psi(y)&=C_2\varphi(y)\int\frac{dy}{[\varphi(y)]^{n+1}}+C_3\varphi(y),\end{aligned}\tag{12}$$

где A, B_m, C_3 — произвольные постоянные, $\varphi(y)$ — произвольная функция.

Первые две формулы в (12) дают параметрическое представление для функции $f(w)$. В частном случае при $B_{n-1}=\dots=B_0=0$ после исключения z приходим к экспоненциальной зависимости

$$f(w)=\alpha e^{\beta w},\qquad \alpha=AC_2n!\,(-1)^n,\quad \beta=-(n+1)/A.$$

В силу (12) соответствующее решение уравнения (9) будет иметь функциональный произвол.

2°. Во втором случае (11) распадается на три обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\begin{gathered}\varphi^{n-1}\varphi'_y = C_1,\\ \varphi^n\psi'_y - \varphi^{n-1}\psi\varphi'_y = C_2,\\ (C_1 z + C_2)w_z^{(n+1)} + C_1 n w_z^{(n)} - f(w) = 0,\end{gathered} \tag{13}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Решения двух первых уравнений имеют вид

$$\varphi = (C_1 nt + C_3)^{1/n}, \quad \psi = C_4(C_1 nt + C_3)^{1/n} - \frac{C_2}{C_1}.$$

Эти формулы вместе с последним уравнением (13) дают автомодельное решение вида (10).

Задачи и упражнения к разд. 5.2.1

Ниже функции f, g, h подлежат определению.

1. Найти решения с функциональным разделением переменных специального вида нелинейного уравнения первого порядка:
$w_t = f(w)w_x + g(w)$.
Указание. Решения искать в виде
a) $w = w(z)$, $z = \varphi(t)x + \psi(t)$,
b) $w = w(z)$, $z = \varphi(x)t + \psi(x)$.

2. Найти решения с функциональным разделением переменных специального вида нелинейного уравнения первого порядка:
$w_t = f(w)w_x^2 + g(w)$.
Указание. Решения искать в виде
a) $w = w(z)$, $z = \varphi(t)x + \psi(t)$,
b) $w = w(z)$, $z = \varphi(t)x^2 + \psi(t)$.

3. Подробно рассмотреть и проделать все необходимые выкладки в примерах 2–5.

4. Найти решение типа обобщенной бегущей волны нелинейных уравнений:
a) $w_t = [f(w)w_x]_x + g(w)w_x$,
b) $w_t = [f(w)w_x]_x + g(w)w_x + h(w)$.
Указание. Решения искать в виде $w = w(z)$, где $z = \varphi(t)x + \psi(t)$.

5. Найти решение типа обобщенной бегущей волны нелинейного уравнения теплопроводности:
$w_t = [f(w)w_x^n]_x + g(w)$.
Указание. Решение искать в виде $w = w(z)$, где $z = \varphi(t)x + \psi(t)$.

6. Найти решения типа обобщенной бегущей волны нелинейных уравнений третьего порядка:
a) $w_t = f(w)w_{xxx} + g(w)$,
b) $w_t = f(w)w_{xxx} + g(w)w_x$,
c) $w_t = [f(w)w_{xx}]_x + g(w)$,
d) $w_t = [f(w)w_{xx}]_x + g(w)w_x$.

7. Найти решения с функциональным разделением переменных специального вида нелинейных уравнений теплопроводности:
a) $w_t = [f(w)w_x]_x + g(w)$,
b) $w_t = x^{-n}[x^n f(w)w_x]_x + g(w)$,
c) $w_t = aw_{xx} + bxw_x + f(w)$.
Указание. Решения искать в виде $w = w(z)$, где $z = \varphi(t)x^2 + \psi(t)$.

Литература к разд. 5.2.1: А. Д. Полянин, А. И. Журов (1998, 2002), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002), A. D. Polyanin (2002), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004).

5.2.2. Решение путем сведения к уравнениям с квадратичной нелинейностью

В ряде случаев поиск решения в виде (1) удается провести в два этапа. Сначала ищется преобразование, сводящее исходное уравнение к уравнению с квадратичной (иногда степенно́й) нелинейностью. Затем решение полученного уравнения ищется методами, описанными в разд. 4.3–4.6.

Уравнения с квадратичной нелинейностью иногда удается получить с помощью подстановок вида $w = F(z)$. Наиболее распространенные подстановки имеют вид:

$$w = z^\lambda \quad \text{(для уравнений со степенной нелинейностью)},$$
$$w = \lambda \ln z \quad \text{(для уравнений с экспоненциальной нелинейностью)},$$
$$w = e^{\lambda z} \quad \text{(для уравнений с логарифмической нелинейностью)},$$

где λ — постоянная, подлежащая определению. Указанный подход эквивалентен априорному заданию вида функции $F(z)$ в выражении (1).

Пример 9. Нелинейное уравнение теплопроводности с источником логарифмического типа

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)w \ln w$$

заменой $w = e^z$ сводится к уравнению с квадратичной нелинейностью

$$\frac{\partial z}{\partial t} = a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + f(t)z,$$

которое допускает точное решение с обобщенным разделением переменных вида

$$z = \varphi_1(x)\psi_1(t) + \varphi_2(x)\psi_2(t) + \psi_3(t),$$

где $\varphi_1(x) = x^2$, $\varphi_2(x) = x$, а функции $\psi_k(t)$ описываются соответствующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Много нелинейных уравнений различного типа, сводящихся с помощью подходящих преобразований к уравнениям с квадратичной нелинейностью, описано в цитируемой ниже литературе.

Задачи и упражнения к разд. 5.2.2

1. Найти решения с функциональным разделением переменных уравнений теплопроводности со степенно́й нелинейностью:

a) $w_t = (w^k w_x)_x + aw^{1-k}$,

b) $w_t = (w^k w_x)_x + aw + bw^{1-k}$,

c) $w_t = (w^k w_x)_x + aw^{1+k} + b + cw^{1-k}$.

Указание. Рассматриваемые уравнения заменой $u = w^k$ свести к уравнениям с квадратичной нелинейностью.

2. Найти решения с функциональным разделением переменных уравнений теплопроводности с логарифмической нелинейностью:

a) $w_t = w_{xx} + aw \ln w + b$,

b) $w_t = w_{xx} + aw \ln^2 w$,

c) $w_t = w_{xx} + aw \ln^2 w + bw \ln w + cw$.

Указание. Рассматриваемые уравнения заменой $w = e^u$ свести к уравнениям с квадратичной нелинейностью.

3. Найти решения с функциональным разделением переменных уравнений теплопроводности с экспоненциальной нелинейностью:

a) $w_t = (e^{\lambda w} w_x)_x + a$,

b) $w_t = (e^{\lambda w} w_x)_x + a + be^{-\lambda w}$,

c) $w_t = (e^{\lambda w} w_x)_x + ae^{\lambda w} + b + ce^{-\lambda w}$.

Указание. Рассматриваемые уравнения заменой $u = e^{\lambda w}$ свести к уравнениям с квадратичной нелинейностью.

Литература к разд. 5.2.2: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1989, 1994), V. A. Galaktionov (1995), V. A. Galaktionov, S. A. Posashkov, S. R. Svirshchevskii (1995), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004).

5.3. Метод дифференцирования

5.3.1. Основные идеи метода. Редукция к уравнению стандартного вида

В общем случае подстановка выражения (1) в рассматриваемое нелинейное уравнение с частными производными приводит к функционально-дифференциальному уравнению с тремя аргументами (первые два аргумента — x и y — обычные, а третий аргумент — z — сложный). Во многих случаях полученное уравнение методом дифференцирования удается свести к функционально-дифференциальному уравнению стандартного вида с двумя аргументами (исключается переменная x или y). Для решения уравнения с двумя аргументами используются методы, описанные в разд. 4.3–4.6.

5.3.2. Примеры построения решений с функциональным разделением переменных

Рассмотрим конкретные примеры использования метода дифференцирования для построения точных решений нелинейных уравнений с функциональным разделением переменных.

Пример 10. Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\mathcal{F}(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right]. \tag{14}$$

Ищем точные решения вида

$$w = w(z), \quad z = \varphi(x) + \psi(t). \tag{15}$$

Подставим (15) в (14). После деления на w'_z получим функционально-дифференциальное уравнение с тремя переменными

$$\psi'_t = \varphi''_{xx}\mathcal{F}(w) + (\varphi'_x)^2 H(z), \tag{16}$$

где

$$H(z) = \mathcal{F}(w)\frac{w''_{zz}}{w'_z} + \mathcal{F}'_z(w), \qquad w = w(z). \tag{17}$$

Дифференцируя (16) по x, имеем

$$\varphi'''_{xxx}\mathcal{F}(w) + \varphi'_x\varphi''_{xx}[\mathcal{F}'_z(w) + 2H(z)] + (\varphi'_x)^3 H'_z = 0. \tag{18}$$

Это функционально-дифференциальное уравнение с двумя переменными можно рассматривать как функциональное уравнение (58) из разд. 4.5, которое имеет два различных решения. Поэтому надо рассмотреть два случая.

Случай 1. Решения функционально-дифференциального уравнения (18) определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} \mathcal{F}'_z + 2H = 2A_1\mathcal{F}, \quad H'_z = A_2\mathcal{F}, \\ \varphi'''_{xxx} + 2A_1\varphi'_x\varphi''_{xx} + A_2(\varphi'_x)^3 = 0, \end{gathered} \tag{19}$$

где A_1 и A_2 — произвольные постоянные.

Первые два уравнения (19) линейны и не зависят от третьего уравнения. Их общее решение имеет вид

$$\mathcal{F} = \begin{cases} e^{A_1 z}(B_1 e^{kz} + B_2 e^{-kz}) & \text{при } A_1^2 > 2A_2, \\ e^{A_1 z}(B_1 + B_2 z) & \text{при } A_1^2 = 2A_2, \\ e^{A_1 z}[B_1\sin(kz) + B_2\cos(kz)] & \text{при } A_1^2 < 2A_2, \end{cases} \quad H = A_1\mathcal{F} - \tfrac{1}{2}\mathcal{F}'_z, \quad k = \sqrt{|A_1^2 - 2A_2|}. \tag{20}$$

Подставим выражение для H из (20) в (17). Получим дифференциальное уравнение для определения функции $w = w(z)$. В результате интегрирования имеем

$$w = C_1\int e^{A_1 z}|\mathcal{F}(z)|^{-3/2}dz + C_2, \tag{21}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Формула (20) для $\mathcal{F}$ вместе с выражением (21) задают зависимость $\mathcal{F} = \mathcal{F}(w)$ в параметрической форме.

Рассмотрим подробнее случай $A_2 = 0$ и $A_1 \neq 0$ $(k = |A_1|)$. Из формул (20) и (21) получим

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}(z) = B_1 e^{2A_1 z} + B_2, \quad H = A_1 B_2, \\ &w(z) = C_3 (B_1 + B_2 e^{-2A_1 z})^{-1/2} + C_2 \quad (C_1 = A_1 B_2 C_3). \end{aligned} \tag{22}$$

Исключая z, имеем

$$\mathcal{F}(w) = \frac{B_2 C_3^2}{C_3^2 - B_1 w^2}. \tag{23}$$

Первый интеграл последнего уравнения (19) при $A_2 = 0$ имеет вид $\varphi''_{xx} + A_1 (\varphi'_x)^2 = \text{const}$, а его общее решение описывается формулами

$$\begin{aligned} &\varphi(x) = -\frac{1}{2A_1} \ln\left[\frac{D_2}{D_1} \frac{1}{\operatorname{sh}^2(A_1\sqrt{D_2}\,x + D_3)}\right] &&\text{при} \quad D_1 > 0, \quad D_2 > 0; \\ &\varphi(x) = -\frac{1}{2A_1} \ln\left[-\frac{D_2}{D_1} \frac{1}{\cos^2(A_1\sqrt{-D_2}\,x + D_3)}\right] &&\text{при} \quad D_1 > 0, \quad D_2 < 0; \\ &\varphi(x) = -\frac{1}{2A_1} \ln\left[-\frac{D_2}{D_1} \frac{1}{\operatorname{ch}^2(A_1\sqrt{D_2}\,x + D_3)}\right] &&\text{при} \quad D_1 < 0, \quad D_2 > 0, \end{aligned} \tag{24}$$

где D_1, D_2, D_3 — постоянные интегрирования. Во всех трех случаях выполняются соотношения

$$(\varphi'_x) = D_1 e^{-2A_1\varphi} + D_2, \qquad \varphi''_{xx} = -A_1 D_1 e^{-2A_1\varphi}. \tag{25}$$

Подставим выражения (22) и (25) в исходное функционально-дифференциальное уравнение (16). Учитывая вид переменной z (15), получим уравнение для функции $\psi = \psi(t)$:

$$\psi'_t = -A_1 B_1 D_1 e^{2A_1\psi} + A_1 B_2 D_2.$$

Интегрируя, находим решение

$$\psi(t) = \frac{1}{2A_1} \ln \frac{B_2 D_2}{D_4 \exp(-2A_1^2 B_2 D_2 t) + B_1 D_1}, \tag{26}$$

где D_4 — произвольная постоянная.

Формулы (15), (22) (для w), (24), (26) определяют три решения нелинейного уравнения (14) с функцией $\mathcal{F}(w)$ вида (23) [напомним, что эти решения соответствуют частному случаю $A_2 = 0$ в (20) и (21)].

Случай 2. Решения функционально-дифференциального уравнения (18) определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\varphi'''_{xxx} = A_1 (\varphi'_x)^3, \quad \varphi'_x \varphi''_{xx} = A_2 (\varphi'_x)^3, \\ &A_1 \mathcal{F} + A_2 (\mathcal{F}'_z + 2H) + H'_z = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Первые два уравнения (27) совместны в двух случаях:

$$\begin{aligned} &A_1 = A_2 = 0 &&\Longrightarrow \quad \varphi(x) = B_1 x + B_2, \\ &A_1 = 2A_2^2 &&\Longrightarrow \quad \varphi(x) = -\frac{1}{A_2} \ln|B_1 x + B_2|. \end{aligned} \tag{28}$$

Первое решение в (28) в конечном итоге приводит к решению уравнения (14) типа бегущей волны $w = w(B_1 x + B_2 t)$, а второе решение — к автомодельному решению вида $w = \widetilde{w}(x^2/t)$. В этих случаях функция $\mathcal{F}(w)$ в уравнении (14) произвольна.

Замечание. Более общее нелинейное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\mathcal{F}(w) \frac{\partial w}{\partial x}\right] + \mathcal{G}(w)$$

также имеет решение вида (15). Для искомых функций $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ приходим к функционально-дифференциальному уравнению с тремя независимыми переменными

$$\psi'_t = \varphi''_{xx} \mathcal{F}(w) + (\varphi'_x)^2 H(z) + \mathcal{G}(w)/w'_z,$$

где функция $H(z)$ определяется по формуле (17). Дифференцируя последнее равенство по x, получим

$$\varphi'''_{xxx}\mathcal{F}(w)+\varphi'_x\varphi''_{xx}[\mathcal{F}'_z(w)+2H(z)]+(\varphi'_x)^3H'_z+\varphi'_x[\mathcal{G}(w)/w'_z]'_z=0.$$

Это функционально-дифференциальное уравнение с двумя независимыми переменными можно трактовать как билинейное функциональное уравнение (60) из разд. 4.5 с $\Phi_1=\varphi'''_{xxx}$, $\Phi_2=\varphi'_x\varphi''_{xx}$, $\Phi_3=(\varphi'_x)^3$, $\Phi_4=\varphi'_x$.

Пример 11. Рассмотрим нелинейное уравнение Клейна — Гордона

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\mathcal{F}(w). \tag{29}$$

Ищем точные решения в виде

$$w=w(z),\qquad z=\varphi(x)+\psi(t). \tag{30}$$

Подставив выражение (30) в (29), получим

$$\psi''_{tt}-\varphi''_{xx}+\left[(\psi'_t)^2-(\varphi'_x)^2\right]g(z)=h(z), \tag{31}$$

где

$$g(z)=w''_{zz}/w'_z,\quad h(z)=\mathcal{F}\bigl(w(z)\bigr)/w'_z. \tag{32}$$

Продифференцировав уравнение (31) сначала по t, а затем по x и разделив на $\psi'_t\varphi'_x$, имеем

$$2(\psi''_{tt}-\varphi''_{xx})\,g'_z+\left[(\psi'_t)^2-(\varphi'_x)^2\right]g''_{zz}=h''_{zz}.$$

Исключая $\psi''_{tt}-\varphi''_{xx}$ из этого уравнения с помощью (31), получим

$$\left[(\psi'_t)^2-(\varphi'_x)^2\right](g''_{zz}-2gg'_z)=h''_{zz}-2g'_zh. \tag{33}$$

Это равенство может выполняться только в двух случаях:

$$\begin{aligned}&1)\quad g''_{zz}-2gg'_z=0,\quad h''_{zz}-2g'_zh=0;\\&2)\quad (\psi'_t)^2=A\psi+B,\quad (\varphi'_x)^2=-A\varphi+B-C,\quad h''_{zz}-2g'_zh=(Az+C)(g''_{zz}-2gg'_z),\end{aligned} \tag{34}$$

где A, B, C — произвольные постоянные. Рассмотрим эти случаи по порядку.

Случай 1. Первые два уравнения (34) позволяют найти $g(z)$ и $h(z)$. Интегрируя, из первого уравнения имеем $g'_z=g^2+\text{const}$. Интегрируя далее, получим

$$g=k, \tag{35a}$$
$$g=-1/(z+C_1), \tag{35b}$$
$$g=-k\,\text{th}(kz+C_1), \tag{35c}$$
$$g=-k\,\text{cth}(kz+C_1), \tag{35d}$$
$$g=k\,\text{tg}(kz+C_1), \tag{35e}$$

где C_1 и k — произвольные постоянные.

Второе уравнение (34) имеет частное решение $h=g(z)$. Поэтому его общее решение определяется по формуле (В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, 2001 *a*)

$$h=C_2g(z)+C_3g(z)\int\frac{dz}{g^2(z)}, \tag{36}$$

где C_2 и C_3 — произвольные постоянные.

Из соотношений (32) определяются функции $w(z)$ и $\mathcal{F}(w)$ в виде

$$w(z)=B_1\int G(z)\,dz+B_2,\quad \mathcal{F}(w)=B_1h(z)G(z),\quad \text{где}\quad G(z)=\exp\left[\int g(z)\,dz\right], \tag{37}$$

B_1 и B_2 — произвольные постоянные (функция $\mathcal{F}$ задана в параметрической форме).

Исследуем подробнее случай (35b). Согласно (36) находим

$$h=A_1(z+C_1)^2+\frac{A_2}{z+C_1}, \tag{38}$$

где $A_1=-C_3/3$, $A_2=-C_2$ — любые. Подставляя выражения (35b) и (38) в (37), получим

$$w=B_1\ln|z+C_1|+B_2,\quad \mathcal{F}=A_1B_1(z+C_1)+\frac{A_2B_1}{(z+C_1)^2}.$$

ТАБЛИЦА 3

Нелинейные уравнения $w_{tt} - w_{xx} = \mathcal{F}(w)$, допускающие точные решения с функциональным разделением переменных вида $w = w(z)$, где $z = \varphi(x) + \psi(t)$

№	Правая часть уравнения $\mathcal{F}(w)$	Решение $w(z)$	Уравнения для $\psi(t)$ и $\varphi(x)$
1	$aw\ln w + bw$	e^z	$(\psi'_t)^2 = C_1e^{-2\psi} + a\psi - \frac{1}{2}a + b + A$, $(\varphi'_x)^2 = C_2e^{-2\varphi} - a\varphi + \frac{1}{2}a + A$
2	$ae^w + be^{-2w}$	$\ln\lvert z\rvert$	$(\psi'_t)^2 = 2a\psi^3 + A\psi^2 + C_1\psi + C_2$, $(\varphi'_x)^2 = -2a\varphi^3 + A\varphi^2 - C_1\varphi + C_2 + b$
3	$a\sin w + b\Bigl(\sin w\ln \operatorname{tg}\dfrac{w}{4} + 2\sin\dfrac{w}{4}\Bigr)$	$4\operatorname{arctg} e^z$	$(\psi'_t)^2 = C_1e^{2\psi} + C_2e^{-2\psi} + b\psi + a + A$, $(\varphi'_x)^2 = -C_2e^{2\varphi} - C_1e^{-2\varphi} - b\varphi + A$
4	$a\operatorname{sh} w + b\Bigl(\operatorname{sh} w\ln \operatorname{th}\dfrac{w}{4} + 2\operatorname{sh}\dfrac{w}{2}\Bigr)$	$2\ln\Bigl\lvert\operatorname{cth}\dfrac{z}{2}\Bigr\rvert$	$(\psi'_t)^2 = C_1e^{2\psi} + C_2e^{-2\psi} - \sigma b\psi + a + A$, $(\varphi'_x)^2 = C_2e^{2\varphi} + C_1e^{-2\varphi} + \sigma b\varphi + A$
5	$a\operatorname{sh} w + 2b\Bigl(\operatorname{sh} w\operatorname{arctg} e^{w/2} + \operatorname{ch}\dfrac{w}{2}\Bigr)$	$2\ln\Bigl\lvert\operatorname{tg}\dfrac{z}{2}\Bigr\rvert$	$(\psi'_t)^2 = C_1\sin 2\psi + C_2\cos 2\psi + \sigma b\psi + a + A$, $(\varphi'_x)^2 = -C_1\sin 2\varphi + C_2\cos 2\varphi - \sigma b\varphi + A$
Обозначения: A, C_1, C_2 — произвольные постоянные; $\sigma = 1$ при $z > 0$, $\sigma = -1$ при $z < 0$			

Исключая из этих соотношений z, находим явный вид правой части уравнения (29):

$$\mathcal{F}(w) = A_1B_1e^u + A_2B_1e^{-2u}, \quad \text{где} \quad u = \frac{w - B_2}{B_1}. \tag{39}$$

Для наглядности далее полагаем $C_1 = 0$, $B_1 = 1$, $B_2 = 0$ и введем обозначения $A_1 = a$, $A_2 = b$. Таким образом, имеем

$$w(z) = \ln|z|, \quad \mathcal{F}(w) = ae^w + be^{-2w}, \quad g(z) = -1/z, \quad h(z) = az^2 + b/z. \tag{40}$$

Осталось определить функции $\psi(t)$ и $\varphi(x)$. Подставим выражения (40) в функционально-дифференциальное уравнение (31). Учитывая зависимость (30), после элементарных преобразований получим

$$[\psi''_{tt}\psi - (\psi'_t)^2 - a\psi^3 - b] - [\varphi''_{xx}\varphi - (\varphi'_x)^2 + a\varphi^3] + (\psi''_{tt} - 3a\psi^2)\varphi - \psi(\varphi''_{xx} + 3a\varphi^2) = 0. \tag{41}$$

Дифференцируя (41) по t и x, приходим к уравнению с разделяющимися переменными*

$$(\psi'''_{ttt} - 6a\psi\psi'_t)\varphi'_x - (\varphi'''_{xxx} + 6a\varphi\varphi'_x)\psi'_t = 0,$$

решение которого описывается автономными обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\psi'''_{ttt} - 6a\psi\psi'_t = A\psi'_t,$$
$$\varphi'''_{xxx} + 6a\varphi\varphi'_x = A\varphi'_x,$$

где A — константа разделения. Каждое из этих уравнений можно два раза проинтегрировать:

$$\begin{aligned}(\psi'_t)^2 &= 2a\psi^3 + A\psi^2 + C_1\psi + C_2,\\ (\varphi'_x)^2 &= -2a\varphi^3 + A\varphi^2 + C_3\varphi + C_4,\end{aligned} \tag{42}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные. Исключая с помощью (42) производные из уравнения (41), находим связи между константами: $C_3 = -C_1$, $C_4 = C_2 + b$. Таким образом, функции $\psi(t)$ и $\varphi(x)$ описываются автономными уравнениями первого порядка с кубической нелинейностью

$$(\psi'_t)^2 = 2a\psi^3 + A\psi^2 + C_1\psi + C_2,$$
$$(\varphi'_x)^2 = -2a\varphi^3 + A\varphi^2 - C_1\varphi + C_2 + b.$$

Решения этих уравнений выражаются через эллиптические функции.

Для остальных случаев в (35) исследование проводится аналогичным образом. Результаты анализа для случаев (35a)–(35e) сведены в итоговой табл. 3.

* Для решения уравнения (41) проще всего использовать результаты решения функционального уравнения (60) из разд. 4.5 [см. формулы (61)–(62)].

ТАБЛИЦА 4

Нелинейные уравнения $w_{xx} + w_{yy} = \mathcal{F}(w)$, допускающие точные решения с функциональным разделением переменных вида $w = w(z)$, где $z = \varphi(x) + \psi(y)$

№	Правая часть уравнения $\Phi(w)$	Решение $w(z)$	Уравнения для $\varphi(x)$ и $\psi(y)$
1	$aw\ln w + bw$	e^z	$(\varphi'_x)^2 = C_1e^{-2\varphi} + a\varphi - \frac{1}{2}a + b + A$, $(\psi'_y)^2 = C_2e^{-2\psi} + a\psi - \frac{1}{2}a - A$
2	$ae^w + be^{-2w}$	$\ln\lvert z\rvert$	$(\varphi'_x)^2 = 2a\varphi^3 + A\varphi^2 + C_1\varphi + C_2$, $(\psi'_y)^2 = 2a\psi^3 - A\psi^2 + C_1\psi - C_2 - b$
3	$a\sin w + b\Bigl(\sin w\ln\operatorname{tg}\dfrac{w}{4} + 2\sin\dfrac{w}{4}\Bigr)$	$4\operatorname{arctg} e^z$	$(\varphi'_x)^2 = C_1e^{2\varphi} + C_2e^{-2\varphi} + b\varphi + a + A$, $(\psi'_y)^2 = C_2e^{2\psi} + C_1e^{-2\psi} + b\psi - A$
4	$a\operatorname{sh} w + b\Bigl(\operatorname{sh} w\ln\operatorname{th}\dfrac{w}{4} + 2\operatorname{sh}\dfrac{w}{2}\Bigr)$	$2\ln\Bigl\lvert\operatorname{cth}\dfrac{z}{2}\Bigr\rvert$	$(\varphi'_x)^2 = C_1e^{2\varphi} + C_2e^{-2\varphi} - \sigma b\varphi + a + A$, $(\psi'_y)^2 = -C_2e^{2\psi} - C_1e^{-2\psi} - \sigma b\psi - A$
5	$a\operatorname{sh} w + 2b\Bigl(\operatorname{sh} w\operatorname{arctg} e^{w/2} + \operatorname{ch}\dfrac{w}{2}\Bigr)$	$2\ln\Bigl\lvert\operatorname{tg}\dfrac{z}{2}\Bigr\rvert$	$(\varphi'_x)^2 = C_1\sin 2\varphi + C_2\cos 2\varphi + \sigma b\varphi + a + A$, $(\psi'_y)^2 = C_1\sin 2\psi - C_2\cos 2\psi + \sigma b\psi - A$
Обозначения: A, C_1, C_2 — произвольные постоянные; $\sigma = 1$ при $z > 0$, $\sigma = -1$ при $z < 0$			

Случай 2. Интегрируя первые два уравнения (34) (для второго случая), имеем два решения:

$$\begin{aligned} &\psi = \pm\sqrt{B}\,t + D_1, && \varphi = \pm\sqrt{B - C}\,t + D_2 && \text{при}\quad A = 0;\\ &\psi = \frac{1}{4A}(At + D_1)^2 - \frac{B}{A}, && \varphi = -\frac{1}{4A}(Ax + D_2)^2 + \frac{B - C}{A} && \text{при}\quad A \neq 0; \end{aligned} \tag{43}$$

где D_1 и D_2 — произвольные постоянные. В обоих случаях функция $\mathcal{F}(w)$ в уравнении (29) является произвольной. Первое решение (43) соответствует решению типа бегущей волны $w = w(kx + \lambda t)$, а второе приводит к решению вида $w = w(x^2 - t^2)$.

Пример 12. Нелинейное уравнение теплопроводности (диффузии)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \mathcal{F}(w)$$

исследуется точно так же, как и нелинейное уравнение Клейна — Гордона (см. пример 11). Основные результаты приведены в итоговой табл. 4 [опущены решение типа бегущей волны $w = w(kx + \lambda t)$ и решение вида $w = w(x^2 + y^2)$, которые имеются для любой $\mathcal{F}(w)$].

Задачи и упражнения к разд. 5.3

1. Найти решения с функциональным разделением переменных нелинейных уравнений первого порядка:

a) $w_t = f(w)w_x + g(w)$,
b) $w_t = f(w)w_x^2 + g(w)$,
c) $w_t^2 = f(w)w_x^2 + g(w)$.

Указание. Решения искать в виде $w = w(z)$, $z = \varphi(x) + \psi(t)$.

2. Найти решения с функциональным разделением переменных нелинейных уравнений теплопроводности:

a) $w_t = [f(w)w_x]_x + g(w)$,
b) $w_t = [f(w)w_x]_x + g(w)w_x$.

Указание. Решения искать в виде $w = w(z)$, $z = \varphi(x) + \psi(t)$ (для первого уравнения см. также замечание в конце примера 10).

3. Найти решения с функциональным разделением переменных нелинейных уравнений теплопроводности:

a) $w_t = x^{-n}[x^n f(w)w_x]_x$,
b) $w_t = x^{-n}[x^n f(w)w_x]_x + g(w)$.

Указание. Решения искать в виде $w = w(z)$, $z = \varphi(x) + \psi(t)$.

4. Найти решения с функциональным разделением переменных нелинейных уравнений параболического типа:

a) $w_t = [f(w)w_x^n]_x$,

b) $w_t = [f(w)w_x^n]_x + g(w)$.

Указание. Решения искать в виде $w = w(z)$, $z = \varphi(x) + \psi(t)$.

5. Найти решения с функциональным разделением переменных нелинейных уравнений гиперболического типа:

a) $w_{xy} = f(w)$,

b) $w_{xy} = w_x w_y f(w)$,

c) $w_{xy} = w_x^n f(w)$,

Указание. Решения искать в виде $w = w(z)$, $z = \varphi(x) + \psi(y)$.

Литература к разд. 5.3: A. M. Grundland, E. Infeld (1992), J. Miller (Jr.), L. A. Rubel (1993), R. Z. Zhdanov (1994), В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов (1994), P. W. Doyle, P. J. Vassiliou (1998), P. G. Estévez, C. Qu, S. Zhang (2002), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004).

5.4. Метод расщепления. Редукция к функциональному уравнению с двумя переменными

5.4.1. Метод расщепления. Редукция к функциональному уравнению стандартного вида

Общая процедура построения точных решений с функциональным разделением переменных, основанная на методе расщепления, состоит из нескольких этапов, кратко описанных ниже.

1°. Выражение (1) подставляется в рассматриваемое нелинейное уравнение с частными производными. В результате получается функционально-дифференциальное уравнение с тремя аргументами (первые два аргумента — x и y — обычные, а третий аргумент — z — сложный).

2°. Функционально-дифференциальное уравнение с помощью элементарных дифференциальных подстановок (основанных на выделении величин, содержащих искомые функции и их производные одного аргумента) сводится к чисто функциональному уравнению с тремя аргументами x, y, z.

3°. Функциональное уравнение с тремя аргументами методом дифференцирования сводится к функциональному уравнению стандартного вида с двумя аргументами (исключается переменная x или y), которое рассматривалось в разд. 4.2.

4°. Строится решение функционального уравнения с двумя аргументами из п. 3° (используются формулы, приведенные в разд. 4.5).

5°. Полученное в п. 4° решение вместе с использованными в п. 2° дифференциальными подстановками образует систему (обычно переопределенную) обыкновенных дифференциальных уравнений. Строится решение этой системы.

6°. Решение системы из п. 5° подставляется в исходное функционально-дифференциальное уравнение из п. 1°. В результате определяются связи между постоянными интегрирования и находятся все искомые величины.

7°. Отдельно рассматриваются возможные вырожденные случаи (возникающие при нарушении использованных при решении предположений).

Замечание. Наиболее сложной является третья стадия, которую не всегда удается реализовать.

Метод расщепления сводит решение функционально-дифференциального уравнения с тремя аргументами к решению чисто функционального уравнения с тремя аргументами (путем его сведения к стандартному функциональному уравнению с двумя аргументами) и решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений, т. е. исходная задача распадается на несколько более простых задач. Примеры построения решений с функциональным разделением переменных методом расщепления рассмотрены в разд. 5.5.

5.4.2. Функциональные уравнения с тремя аргументами специального вида

Подстановка выражения

$$w = F(z), \qquad z = \varphi(x) + \psi(y)$$

в нелинейные уравнения с частными производными во многих случаях приводит к функционально-дифференциальным уравнениям вида

$$\begin{aligned} &\Phi_1(x)\Psi_1(y,z) + \Phi_2(x)\Psi_2(y,z) + \dots + \Phi_k(x)\Psi_k(y,z) + \\ &\qquad + \Psi_{k+1}(y,z) + \Psi_{k+2}(y,z) + \dots + \Psi_n(y,z) = 0, \end{aligned} \tag{44}$$

где функционалы $\Phi_j(x)$ и $\Psi_j(y,z)$ зависят соответственно от переменных x и y, z:

$$\Phi_j(x) \equiv \Phi_j\bigl(x, \varphi, \varphi'_x, \varphi''_{xx}\bigr), \quad \Psi_j(y,z) \equiv \Psi_j\bigl(y, \psi, \psi'_y, \psi''_{yy}, F, F'_z, F''_{zz}\bigr). \tag{45}$$

(Данные выражения соответствуют уравнению второго порядка.).

Решение уравнения (44) целесообразно искать методом расщепления. На первом этапе будем рассматривать (44) как чисто функциональное уравнение, без учета зависимостей (45). Предположим, что $\Psi_1 \not\equiv 0$. Поделим уравнение (44) на Ψ_1 и продифференцируем по y. В результате получим уравнение такого же вида, но с меньшим числом членов, содержащих функции Φ_m:

$$\Phi_2(x)\Psi_2^{(2)}(y,z) + \dots + \Phi_k(x)\Psi_k^{(2)}(y,z) + \Psi_{k+1}^{(2)}(y,z) + \dots + \Psi_n^{(2)}(y,z) = 0, \tag{46}$$

где $\Psi_m^{(2)} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\Psi_m}{\Psi_1}\right) + \psi'_y \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\Psi_m}{\Psi_1}\right)$. Продолжая аналогичную процедуру, в итоге можно получить уравнение, не зависящее явно от x:

$$\Psi_{k+1}^{(k+1)}(y,z) + \dots + \Psi_n^{(k+1)}(y,z) = 0, \tag{47}$$

где $\Psi_m^{(k+1)} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\Psi_m^{(k)}}{\Psi_k^{(k)}}\right) + \psi'_y \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\Psi_m^{(k)}}{\Psi_k^{(k)}}\right)$.

Уравнение (47) можно рассматривать как уравнение с двумя независимыми переменными y и z. Если $\Psi_m^{(k+1)}(y,z) = Q_m(y)R_m(z)$ для всех $m = k+1, \dots, n$, то для решения уравнения (47) можно использовать результаты разд. 4.2–4.5.

Литература к разд. 5.4: А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002), A. D. Polyanin (2002), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004).

5.5. Решения некоторых нелинейных функциональных уравнений и их приложения в математической физике

В этом разделе исследуются некоторые функциональные уравнения с тремя аргументами, которые чаще всего встречаются при функциональном разделении переменных в нелинейных уравнениях математической физики. Эти результаты использованы для построения точных решений некоторых классов нелинейных уравнений теплопроводности и теории волн.

5.5.1. Функциональное уравнение $f(x)+g(y)=Q(z)$, где $z=\varphi(x)+\psi(y)$

Здесь одна из двух функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ задается, а другая ищется; одна из двух функций $g(y)$ и $\psi(y)$ задается, а другая ищется; функция $Q(z)$ ищется*.

Дифференцируя уравнение по x и по y, получим $Q''_{zz}=0$. Поэтому его решение имеет вид

$$f(x)=A\varphi(x)+B, \quad g(y)=A\psi(y)-B+C, \quad Q(z)=Az+C, \tag{48}$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

5.5.2. Функциональное уравнение $f(t)+g(x)+h(x)Q(z)+R(z)=0$, где $z=\varphi(x)+\psi(t)$

Дифференцируя уравнение по x, приходим к уравнению с двумя независимыми аргументами

$$g'_x+h'_xQ+h\varphi'_xQ'_z+\varphi'_xR'_z=0. \tag{49}$$

Такие уравнения рассматривались в разд. 4.3–4.6. Поэтому имеют место соотношения [их можно получить после переобозначений из формул (60) и (61), приведенных в разд. 4.5]:

$$\begin{aligned} g'_x&=A_1h\varphi'_x+A_2\varphi'_x,\\ h'_x&=A_3h\varphi'_x+A_4\varphi'_x,\\ Q'_z&=-A_1-A_3Q,\\ R'_z&=-A_2-A_4Q, \end{aligned} \tag{50}$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 — произвольные постоянные. Интегрирование системы (50) и подстановка полученных решений в исходное функциональное уравнение дает приведенные ниже результаты.

Случай 1. Решение функционального уравнения, соответствующее значению $A_3=0$ в (50):

$$\begin{aligned} f&=-\tfrac{1}{2}A_1A_4\psi^2+(A_1B_1+A_2+A_4B_3)\psi-B_2-B_1B_3-B_4,\\ g&=\tfrac{1}{2}A_1A_4\varphi^2+(A_1B_1+A_2)\varphi+B_2,\\ h&=A_4\varphi+B_1,\\ Q&=-A_1z+B_3,\\ R&=\tfrac{1}{2}A_1A_4z^2-(A_2+A_4B_3)z+B_4, \end{aligned} \tag{51}$$

где $\varphi=\varphi(x)$ и $\psi=\psi(t)$ — произвольные функции, A_k, B_k — произвольные постоянные.

---

* В подобных уравнениях со сложным аргументом считается, что $\varphi(x)\neq\mathrm{const}$ и $\psi(y)\neq\mathrm{const}$.

Случай 2. Решение функционального уравнения, соответствующее значению $A_3 \neq 0$ в (50):

$$\begin{aligned}
&f = -B_1 B_3 e^{-A_3\psi} + \Big(A_2 - \frac{A_1A_4}{A_3}\Big)\psi - B_2 - B_4 - \frac{A_1A_4}{A_3^2},\\
&g = \frac{A_1B_1}{A_3}e^{A_3\varphi} + \Big(A_2 - \frac{A_1A_4}{A_3}\Big)\varphi + B_2,\\
&h = B_1 e^{A_3\varphi} - \frac{A_4}{A_3},\\
&Q = B_3 e^{-A_3 z} - \frac{A_1}{A_3},\\
&R = \frac{A_4B_3}{A_3}e^{-A_3 z} + \Big(\frac{A_1A_4}{A_3} - A_2\Big)z + B_4,
\end{aligned} \tag{52}$$

где $\varphi = \varphi(x)$ и $\psi = \psi(t)$ — произвольные функции, A_k, B_k — произвольные постоянные.

Случай 3. Функциональное уравнение имеет также вырожденное решение

$$f = A_1\psi + B_1, \quad g = A_1\varphi + B_2, \quad h = A_2, \quad R = -A_1 z - A_2 Q - B_1 - B_2, \tag{53a}$$

где $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(t)$, $Q = Q(z)$ — произвольные функции, A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные, и вырожденное решение

$$f = A_1\psi + B_1, \quad g = A_1\varphi + A_2 h + B_2, \quad Q = -A_2, \quad R = -A_1 z - B_1 - B_2, \tag{53b}$$

где $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(t)$, $h = h(x)$ — произвольные функции, A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные. Вырожденные решения (53a) и (53b) можно получить из исходного уравнения и его следствия (49) с помощью формул (62) из разд. 4.5.

Пример 13. Рассмотрим нестационарное уравнение теплопроводности с нелинейным источником

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mathcal{F}(w). \tag{54}$$

Ищем точные решения вида

$$w = w(z), \quad z = \varphi(x) + \psi(t). \tag{55}$$

Подставим (55) в (54). После деления на w'_z получим функционально-дифференциальное уравнение

$$\psi'_t = \varphi''_{xx} + (\varphi'_x)^2\,\frac{w''_{zz}}{w'_z} + \frac{\mathcal{F}(w(z))}{w'_z}.$$

Представим его в виде функционального уравнения 5.5.2, где

$$f(t) = -\psi'_t, \quad g(x) = \varphi''_{xx}, \quad h(x) = (\varphi'_x)^2, \quad Q(z) = w''_{zz}/w'_z, \quad R(z) = f(w(z))/w'_z. \tag{56}$$

Используем решения уравнения 5.5.2. Подставив выражения (56) для g и h в (51)–(53), получим переопределенные системы уравнений для определения функции $\varphi = \varphi(x)$.

Случай 1. Система

$$\begin{aligned}
\varphi''_{xx} &= \tfrac{1}{2}A_1A_4\varphi^2 + (A_1B_1 + A_2)\varphi + B_2,\\
(\varphi'_x)^2 &= A_4\varphi + B_1,
\end{aligned}$$

полученная из (51) и соответствующая значению $A_3 = 0$ в (50), имеет совместное решение в следующих случаях:

$$\begin{aligned}
&\varphi = C_1 x + C_2 &&\text{при}\quad A_2 = -A_1C_1^2,\ A_4 = B_2 = 0,\ B_1 = C_1^2,\\
&\varphi = \tfrac{1}{4}A_4x^2 + C_1x + C_2 &&\text{при}\quad A_1 = A_2 = 0,\ B_1 = C_1^2 - A_4C_2,\ B_2 = \tfrac{1}{2}A_4,
\end{aligned} \tag{57}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Первое решение (57) при $A_1 \neq 0$ соответствует правой части уравнения (54), которая содержит функцию, обратную к интегралу вероятностей [вид правой части определяется из двух последних соотношений (51) и (56) для Q и R]. Второе решение (57) соответствует правой части уравнения (54) вида $\mathcal{F}(w)=k_1 w\ln w+k_2 w$. В обоих случаях первое соотношение (51) с учетом равенства $f=-\psi'_t$ представляет собой линейное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами, решением которого является сумма экспоненциальной функции и константы.

Случай 2. Система

$$\varphi''_{xx}=\frac{A_1B_1}{A_3}e^{A_3\varphi}+\Big(A_2-\frac{A_1A_4}{A_3}\Big)\varphi+B_2,$$
$$(\varphi'_x)^2=B_1e^{A_3\varphi}-\frac{A_4}{A_3},$$

полученная из (52) и соответствующая $A_3\neq 0$ в (50), имеет совместное решение в следующих случаях:

$$\varphi=\pm\sqrt{-A_4/A_3}\,x+C_1 \quad \text{при } A_2=A_1A_4/A_3,\ B_1=B_2=0,$$
$$\varphi=-\frac{2}{A_3}\ln|x|+C_1 \quad \text{при } A_1=\tfrac12 A_3^2,\ A_2=A_4=B_2=0,\ B_1=4A_3^{-2}e^{-A_3C_1},$$
$$\varphi=-\frac{2}{A_3}\ln\bigl|\cos\bigl(\tfrac12\sqrt{A_3A_4}\,x+C_1\bigr)\bigr|+C_2 \quad \text{при } A_1=\tfrac12 A_3^2,\ A_2=\tfrac12 A_3A_4,\ B_2=0,\ A_3A_4>0,$$
$$\varphi=-\frac{2}{A_3}\ln\bigl|\operatorname{sh}\bigl(\tfrac12\sqrt{-A_3A_4}\,x+C_1\bigr)\bigr|+C_2 \quad \text{при } A_1=\tfrac12 A_3^2,\ A_2=\tfrac12 A_3A_4,\ B_2=0,\ A_3A_4<0,$$
$$\varphi=-\frac{2}{A_3}\ln\bigl|\operatorname{ch}\bigl(\tfrac12\sqrt{-A_3A_4}\,x+C_1\bigr)\bigr|+C_2 \quad \text{при } A_1=\tfrac12 A_3^2,\ A_2=\tfrac12 A_3A_4,\ B_2=0,\ A_3A_4<0,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Эти решения соответствуют правой части уравнения (54), задаваемой в параметрической форме.

Случай 3. Вырожденным решениям функционального уравнения (53a) и (53b) соответствуют решения нелинейного уравнения теплопроводности (54) типа бегущей волны [функция $\mathcal{F}(w)$ — произвольна] и решения линейного уравнения (54) с источником вида $\mathcal{F}(w)=k_1w+k_2$.

Замечание. Можно искать более сложные решения уравнения (54) с функциональным разделением вида

$$w=w(z),\quad z=\varphi(\xi)+\psi(t),\quad \xi=x+at.$$

Подстановка этих выражений в уравнение (54) также приводит к функциональному уравнению 5.5.2, в котором x надо переобозначить на ξ и положить

$$f(t)=-\psi'_t,\quad g(\xi)=\varphi''_{\xi\xi}-a\varphi'_\xi,\quad h(\xi)=(\varphi'_\xi)^2,\quad Q(z)=w''_{zz}/w'_z,\quad R(z)=f(w(z))/w'_z.$$

Дальнейшая процедура построения решения проводится так же, как в примере 13.

Пример 14. Аналогичным образом рассматривается более общее уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t}=a(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+b(x)\frac{\partial w}{\partial x}+\mathcal{F}(w), \tag{58}$$

которое встречается в задачах конвективного тепло- и массообмена ($a=\text{const}$, $b=\text{const}$), в задачах теплопереноса в анизотропных средах ($b=a'_x$), в пространственных задачах теплопроводности с осевой и центральной симметрией ($a=\text{const}$, $b=\text{const}/x$).

Поиск точных решений уравнения (58) вида (55) приводит к функциональному уравнению 5.5.2, где

$$f(t)=-\psi'_t,\quad g(x)=a(x)\varphi''_{xx}+b(x)\varphi'_x(x),$$
$$h(x)=a(x)(\varphi'_x)^2,\quad Q(z)=w''_{zz}/w'_z,\quad R(z)=f(w(z))/w'_z.$$

Подставляя эти выражения в (51)–(53), получим системы обыкновенных дифференциальных уравнений для определения искомых величин.

Замечание. В примерах 13–14 построение точных решений различных уравнений математической физики сводилось к одному и тому же функциональному уравнению. Это наглядно демонстрирует полезность выделения и независимого рассмотрения отдельных функциональных уравнений (и целесообразность разработки методов решения функциональных уравнений со сложным аргументом).

5.5.3. Функциональное уравнение $f(t)+g(x)Q(z)+h(x)R(z)=0$, где $z=\varphi(x)+\psi(t)$

Дифференцируем уравнение по x. Получим функционально-дифференциальное уравнение с двумя переменными x и z:

$$g_x'Q+g\varphi_x'Q_z'+h_x'R+h\varphi_x'R_z'=0, \tag{59}$$

которое с точностью до очевидных переобозначений совпадает с уравнением (60) из разд. 4.5.

Невырожденный случай. Решение уравнения (59) можно получить с помощью формул (61) из разд. 4.5. В результате приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} g_x' &= (A_1g+A_2h)\varphi_x',\\ h_x' &= (A_3g+A_4h)\varphi_x',\\ Q_z' &= -A_1Q-A_3R,\\ R_z' &= -A_2Q-A_4R, \end{aligned} \tag{60}$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 — произвольные постоянные.

Решение системы (60) имеет вид

$$\begin{aligned} g(x) &= A_2B_1e^{k_1\varphi}+A_2B_2e^{k_2\varphi},\\ h(x) &= (k_1-A_1)B_1e^{k_1\varphi}+(k_2-A_1)B_2e^{k_2\varphi},\\ Q(z) &= A_3B_3e^{-k_1z}+A_3B_4e^{-k_2z},\\ R(z) &= (k_1-A_1)B_3e^{-k_1z}+(k_2-A_1)B_4e^{-k_2z}, \end{aligned} \tag{61}$$

где B_1, B_2, B_3, B_4 — произвольные постоянные, а k_1 и k_2 — корни квадратного уравнения

$$(k-A_1)(k-A_4)-A_2A_3=0. \tag{62}$$

В вырожденном случае при $k_1=k_2$ члены $e^{k_2\varphi}$ и e^{-k_2z} в (61) надо заменить соответственно на $\varphi e^{k_1\varphi}$ и ze^{-k_1z}. В случае чисто мнимых или комплексных корней уравнения (62) в решении (61) надо выделить действительную (или мнимую) часть.

Подставив (61) в исходное функциональное уравнение 5.5.3, получим условия, которым должны удовлетворять свободные коэффициенты, и найдем функцию $f(t)$:

$$\begin{aligned} &B_2=B_4=0 &&\Longrightarrow\ f(t)=[A_2A_3+(k_1-A_1)^2]B_1B_3e^{-k_1\psi},\\ &B_1=B_3=0 &&\Longrightarrow\ f(t)=[A_2A_3+(k_2-A_1)^2]B_2B_4e^{-k_2\psi},\\ &A_1=0 &&\Longrightarrow\ f(t)=(A_2A_3+k_1^2)B_1B_3e^{-k_1\psi}+(A_2A_3+k_2^2)B_2B_4e^{-k_2\psi}. \end{aligned} \tag{63}$$

В решения (61), (63) входят произвольные функции $\varphi=\varphi(x)$ и $\psi=\psi(t)$.

Вырожденный случай. Функциональное уравнение 5.5.3 имеет также вырожденное решение

$$f=B_1B_2e^{A_1\psi},\quad g=A_2B_1e^{-A_1\varphi},\quad h=B_1e^{-A_1\varphi},\quad R=-B_2e^{A_1z}-A_2Q,$$

где $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(t)$, $Q = Q(z)$ — произвольные функции, A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные, и вырожденное решение

$$f = B_1 B_2 e^{A_1\psi}, \quad h = -B_1 e^{-A_1\varphi} - A_2 g, \quad Q = A_2 B_2 e^{A_1 z}, \quad R = B_2 e^{A_1 z},$$

где $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(t)$, $g = g(x)$ — произвольные функции, A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные. Вырожденные решения можно получить из исходного уравнения и его следствия (59) с помощью формул (62) из разд. 4.5.

Пример 15. Для нелинейного уравнения первого порядка

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \mathcal{F}(w)\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + \mathcal{G}(x)$$

поиск точных решений вида (55) приводит к функциональному уравнению 5.5.3, где

$$f(t) = -\psi'_t, \;\; g(x) = (\varphi'_x)^2, \;\; h(x) = \mathcal{G}(x), \;\; Q(z) = \mathcal{F}(w)w'_z, \;\; R(z) = 1/w'_z, \;\; w = w(z).$$

Пример 16. Для нелинейного уравнения теплопроводности (14) [см. пример 10 из разд. 5.3.2] поиск точных решений вида $w = w(z)$, $z = \varphi(x) + \psi(t)$ приводит к функционально-дифференциальному уравнению (16), которое приводится к функциональному уравнению 5.5.3, если положить

$$f(t) = -\psi'_t, \quad g(x) = \varphi''_{xx}, \quad h(x) = (\varphi'_x)^2, \quad Q(z) = \mathcal{F}(w), \quad R(z) = \frac{[\mathcal{F}(w)w'_z]'_z}{w'_z}, \quad w = w(z).$$

5.5.4. Функциональное уравнение $f(x)+g(y)+h(x)P(z)+s(y)Q(z)+R(z)=0$, где $z=\varphi(x)+\psi(y)$

Дифференцируем уравнение по y. Полученное выражение делим на $\psi'_y P'_z$ и дифференцируем по y. В результате приходим к уравнению с двумя аргументами y и z, которое рассматривалось в главе 4 [см. уравнение (21) и его решения (57)].

Пример 17. Рассмотрим стационарное уравнение теплопроводности в неоднородной анизотропной среде с нелинейным источником

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[a(x)\frac{\partial w}{\partial x}\Big] + \frac{\partial}{\partial y}\Big[b(y)\frac{\partial w}{\partial y}\Big] = \mathcal{F}(w). \tag{64}$$

Поиск точных решений уравнения (64) вида $w = w(z)$, где $z = \varphi(x) + \psi(y)$, приводит к функциональному уравнению 5.5.4, где

$$f_1(x) = a(x)\varphi''_{xx} + a'_x(x)\varphi'_x, \quad f_2(y) = b(y)\psi''_{yy} + b'_y(y)\psi'_y, \quad g_1(x) = a(x)(\varphi'_x)^2,$$
$$g_2(y) = b(y)(\psi'_y)^2, \quad P(z) = Q(z) = w''_{zz}/w'_z, \quad R(z) = -\mathcal{F}(w)/w'_z, \quad w = w(z).$$

Не проводя полного анализа уравнения (64), ограничимся здесь изучением решений с обобщенным разделением переменных, которые существуют при произвольной правой части $\mathcal{F}(w)$.

Сделав замену $z = \zeta^2$, ищем решения уравнения (64) вида

$$w = w(\zeta), \qquad \zeta^2 = \varphi(x) + \psi(y). \tag{65}$$

Учитывая соотношения $\dfrac{\partial\zeta}{\partial x} = \dfrac{\varphi'_x}{2\zeta}$ и $\dfrac{\partial\zeta}{\partial y} = \dfrac{\psi'_y}{2\zeta}$, из (64) получим

$$\big[(a\varphi'_x)'_x + (b\psi'_y)'_y\big]\frac{w'_\zeta}{2\zeta} + \big[a(\varphi'_x)^2 + b(\psi'_y)^2\big]\frac{\zeta w''_{\zeta\zeta} - w'_\zeta}{4\zeta^3} = \mathcal{F}(w), \quad \mathcal{F}(w) = \mathcal{F}\big(w(\zeta)\big). \tag{66}$$

Для разрешимости этого функционального уравнения потребуем, чтобы выражения в квадратных скобках были функциями от ζ:

$$(a\varphi'_x)'_x + (b\psi'_y)'_y = M(\zeta), \quad a(\varphi'_x)^2 + b(\psi'_y)^2 = N(\zeta).$$

Продифференцировав первое из этих равенств по x и по y, приходим к уравнению $(M'_\zeta/\zeta)'_\zeta=0$, общее решение которого имеет вид $M(\zeta)=C_1\zeta^2+C_2$. Аналогично находим $N(\zeta)=C_3\zeta^2+C_4$. Здесь C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные. В итоге получим

$$(a\varphi'_x)'_x+(b\psi'_y)'_y=C_1(\varphi+\psi)+C_2,\quad a(\varphi'_x)^2+b(\psi'_y)^2=C_3(\varphi+\psi)+C_4.$$

Разделение переменных приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения функций $\varphi(x)$, $a(x)$, $\psi(y)$, $b(y)$:

$$(a\varphi'_x)'_x-C_1\varphi-C_2=k_1,\qquad (b\psi'_y)'_y-C_1\psi=-k_1,$$
$$a(\varphi'_x)^2-C_3\varphi-C_4=k_2,\qquad b(\psi'_y)^2-C_3\psi=-k_2.$$

Эта система всегда интегрируется в квадратурах и может быть преобразована к виду

$$\begin{aligned}&(C_3\varphi+C_4+k_2)\varphi''_{xx}+(C_1\varphi+C_2+k_1-C_3)(\varphi'_x)^2=0,\\&(C_3\psi-k_2)\psi''_{yy}+(C_1\psi-k_1-C_3)(\psi'_y)^2=0;\\&a=(C_3\varphi+C_4+k_2)(\varphi'_x)^{-2},\\&b=(C_3\psi-k_2)(\psi'_y)^{-2},\end{aligned}\tag{67}$$

где уравнения для функций φ и ψ не зависят от a и b и могут решаться независимо. Не проводя полного исследования системы (67), отметим простой частный случай, когда она интегрируется в явном виде.

При $C_1=C_2=C_4=k_1=k_2=0$, $C_3=C\neq 0$ имеем

$$a(x)=\alpha e^{\mu x},\quad b(y)=\beta e^{\nu y},\quad \varphi(x)=\frac{Ce^{-\mu x}}{\alpha\mu^2},\quad \psi(y)=\frac{Ce^{-\nu y}}{\beta\nu^2},$$

где α, β, μ, ν — произвольные постоянные. Подставив эти выражения в (66) и учитывая вид переменной ζ (65), получим уравнение для функции $w(\zeta)$:

$$w''_{\zeta\zeta}-\frac{1}{\zeta}w'_\zeta=\frac{4}{C}\mathcal{F}(w).$$

Система (67) имеет также другие решения, приводящие к различным выражениям для функций $a(x)$ и $b(y)$. В табл. 5 указаны случаи, когда эти функции могут быть выражены в явном виде (опущено решение типа бегущей волны, соответствующее $a=\mathrm{const}$, $b=\mathrm{const}$). В общем случае решение системы (66) приводит к функциям $a(x)$ и $b(y)$, которые записываются в параметрической форме.

ТАБЛИЦА 5

Решения с обобщенным разделением переменных вида $w=w(\zeta)$, где $\zeta^2=\varphi(x)+\psi(y)$, для уравнений теплопроводности в неоднородной анизотропной среде с нелинейным источником произвольного вида

Уравнение теплопроводности	Функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$	Уравнение для $w=w(\zeta)$
$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\alpha x^n\frac{\partial w}{\partial x}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\beta y^k\frac{\partial w}{\partial y}\Big)=\mathcal{F}(w)$	$\varphi=\frac{Cx^{2-n}}{\alpha(2-n)^2},\ \psi=\frac{Cy^{2-k}}{\beta(2-k)^2}$	$w''_{\zeta\zeta}+\frac{4-nk}{(2-n)(2-k)}\frac{1}{\zeta}w'_\zeta=\frac{4}{C}\mathcal{F}(w)$
$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\alpha e^{\mu x}\frac{\partial w}{\partial x}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\beta e^{\nu y}\frac{\partial w}{\partial y}\Big)=\mathcal{F}(w)$	$\varphi=\frac{C}{\alpha\mu^2}e^{-\mu x},\ \psi=\frac{C}{\beta\nu^2}e^{-\nu y}$	$w''_{\zeta\zeta}-\frac{1}{\zeta}w'_\zeta=\frac{4}{C}\mathcal{F}(w)$
$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\alpha e^{\mu x}\frac{\partial w}{\partial x}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\beta y^k\frac{\partial w}{\partial y}\Big)=\mathcal{F}(w)$	$\varphi=\frac{C}{\alpha\mu^2}e^{-\mu x},\ \psi=\frac{Cy^{2-k}}{\beta(2-k)^2}$	$w''_{\zeta\zeta}+\frac{k}{2-k}\frac{1}{\zeta}w'_\zeta=\frac{4}{C}\mathcal{F}(w)$
$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\alpha x^2\frac{\partial w}{\partial x}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\beta y^2\frac{\partial w}{\partial y}\Big)=\mathcal{F}(w)$	$\varphi=\mu\ln\lvert x\rvert,\ \psi=\nu\ln\lvert y\rvert$	Уравнение (66), оба выражения в квадратных скобках — константы
$\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\beta y^2\frac{\partial w}{\partial y}\Big)=\mathcal{F}(w)$	$\varphi=\mu x,\ \psi=\nu\ln\lvert y\rvert$	Уравнение (66), оба выражения в квадратных скобках — константы

Обозначения: C, α, β, μ, ν, n, k — свободные параметры ($C\neq0$, $\mu\neq0$, $\nu\neq0$, $n\neq2$, $k\neq2$)

Задачи и упражнения к разд. 5.5

1. Решить функциональные уравнения:

a) $f(x+y) = f(x) + f(y) - af(x)f(y)$,

b) $f(x)g(y) = h(x+y)$,

c) $f(x)g(y) + h(y) = f(x+y)$,

d) $f(x)g(y) = h\big(\varphi(x) + \psi(y)\big)$,

e) $f(x) + g(y) = h\big(\varphi(x)\psi(y)\big)$,

где $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$ — искомые функции.

Указание. Использовать метод дифференцирования и результаты раздела 5.5.

В упражнениях 2–8 функции f и g подлежат определению.

2. Найти решения с функциональным разделением переменных нелинейных уравнений первого порядка:

a) $w_t = f(w)w_x + g(w)$,

b) $w_t = f(w)w_x^n + g(w)$,

c) $w_t^2 = f(w)w_x^n + g(w)$.

Указание. Решения искать в виде $w = w(z)$, $z = \varphi(x) + \psi(t)$.

3. Найти решения с функциональным разделением переменных нелинейных уравнений теплопроводности:

a) $w_t = [f(w)w_x]_x + g(w)$,

b) $w_t = [f(w)w_x]_x + g(w)w_x$.

Указание. Решения искать в виде $w = w(z)$, $z = \varphi(x) + \psi(t)$.

4. Найти решения с функциональным разделением переменных нелинейных уравнений теплопроводности:

a) $w_t = [f(x)w_x]_x + g(w)$,

b) $w_t = aw_{xx} + bx^n w_x + f(w)$, $\quad n = 1,\ 0,\ -1$.

Указание. Эти уравнения являются частными случаями уравнения (58).

5. Найти решения с функциональным разделением переменных нелинейных уравнений теплопроводности:

a) $w_t = x^{-n}[x^n f(w)w_x]_x$,

b) $w_t = x^{-n}[x^n f(w)w_x]_x + g(w)$.

Указание. Решения искать в виде $w = w(z)$, $z = \varphi(x) + \psi(t)$.

6. Найти решения с функциональным разделением переменных нелинейных уравнений:

a) $w_t = [f(w)w_x^n]_x + g(w)$.

b) $w_t = x^{-n}[x^n f(w)w_x]_x + g(w)$.

Указание. Решения искать в виде $w = w(z)$, $z = \varphi(x) + \psi(t)$.

7. Найти решения с функциональным разделением переменных нелинейного волнового уравнения $w_{xt} = f(w)$.

Указание. Решения искать в виде:

$w = w(z)$, $z = \varphi(x) + \psi(t)$,

а затем использовать результаты решения функционального уравнения d) из первого упражнения.

8. Найти решения с функциональным разделением переменных нелинейного уравнения третьего порядка:

$w_{xxt} = f(w)$.

Указание. Решения искать в виде $w = w(z)$, $z = \varphi(x) + \psi(t)$. Полученное функционально-дифференциальное уравнение свести к функциональному уравнению 5.5.3.

Литература к разд. 5.5: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1996), А. Д. Полянин, А. И. Журов (1998), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004).

6. Прямой метод Кларксона—Крускала

6.1. Поиск точных решений специального вида

6.1.1. Упрощенная схема. Примеры построения точных решений

Прежде чем перейти к описанию метода Кларксона — Крускала в общем случае, рассмотрим сначала упрощенную схему.

Основная идея метода: в случае уравнения с искомой функцией $w = w(x,t)$ точное решение ищется в виде

$$w = f(t)u(z) + g(x,t), \qquad z = \varphi(t)x + \psi(t). \tag{1}$$

Функции $f(t)$, $g(x,t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ находятся в процессе решения; они выбираются таким образом, чтобы в итоге функция $u(z)$ удовлетворяла одному обыкновенному дифференциальному уравнению.

Ниже рассматриваются конкретные примеры построения точных решений нелинейных уравнений вида (1).

Пример 1. Рассмотрим уравнение Кортевега — де Фриза

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + bw\frac{\partial w}{\partial x}. \tag{2}$$

Точное решение ищем в виде (1). Подставив (1) в (2), имеем

$$af\varphi^3 u'''_{zzz} + bf^2\varphi uu'_z + f(bg\varphi - \varphi'_t x - \psi'_t)u'_z + (bfg_x - f'_t)u + ag_{xxx} + bgg_x - g_t = 0. \tag{3}$$

Приравнивая в (3) функциональные множители при u'''_{zzz} и uu'_z, получим

$$f = \varphi^2. \tag{4}$$

Приравнивая далее функциональный множитель при u'_z нулю, имеем

$$g = \frac{1}{b\varphi}(\varphi'_t x + \psi'_t). \tag{5}$$

Подставляя выражения (4) и (5) в (3), приходим к равенству

$$\varphi^5(au'''_{zzz} + buu'_z) - \varphi\varphi'_t u + \frac{1}{b\varphi^2}\left[(2\varphi_t^2 - \varphi\varphi_{tt})x + 2\varphi_t\psi_t - \varphi\psi_{tt}\right] = 0.$$

Поделим все члены на φ^5, а затем исключим x с помощью равенства $x = \dfrac{z-\psi}{\varphi}$. Получим

$$\begin{aligned} &au'''_{zzz} + buu'_z - \varphi^{-4}\varphi'_t u + \frac{1}{b}\varphi^{-8}(2\varphi_t^2 - \varphi\varphi_{tt})z + \\ &\qquad + \frac{1}{b}\varphi^{-8}(\varphi\psi\varphi_{tt} - \varphi^2\psi_{tt} + 2\varphi\varphi_t\psi_t - 2\psi\varphi_t^2) = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Потребуем, чтобы функциональный коэффициент при u и последний член были константами:

$$\varphi^{-4}\varphi'_t = -A, \qquad \varphi^{-8}(\varphi\psi\varphi_{tt} - \varphi^2\psi_{tt} + 2\varphi\varphi_t\psi_t - 2\psi\varphi_t^2) = B,$$

где A и B — произвольные постоянные. В результате приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций φ и ψ:

$$\begin{aligned} \varphi_t &= -A\varphi^4, \\ \psi_{tt} + 2A\varphi^3\psi_t - 2A^2\varphi^6\psi &= -B\varphi^6. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь при записи второго уравнения учтено первое уравнение и его следствие: $\varphi_{tt} = -4A\varphi^3\varphi_t = 4A^2\varphi^7$.

Используя (6) и (7), получим уравнение для функции $u(z)$:

$$au'''_{zzz} + buu'_z - Au - \frac{2A^2}{b}z + \frac{B}{b} = 0. \tag{8}$$

При $A \neq 0$ общее решение уравнений (7) имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= (3At + C_1)^{-1/3}, \\ \psi(t) &= C_2(3At + C_1)^{2/3} + C_3(3At + C_1)^{-1/3} + \frac{B}{2A^2}, \end{aligned} \tag{9}$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

Формулы (1), (4), (5), (9) вместе с уравнением (8) описывают точное решение уравнения Кортевега — де Фриза (2).

Пример 2. Рассмотрим уравнение Буссинеска

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(w\frac{\partial w}{\partial x}\right) + a\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0. \tag{10}$$

Как и в первом примере, решение ищем в виде (1), где функции $f(t)$, $g(x,t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ будут определяться в процессе решения. Подставив (1) в (10), имеем

$$\begin{aligned} af\varphi^4 u'''' + f^2\varphi^2 uu'' + f(z_t^2 + g\varphi^2)u'' + f^2\varphi^2(u')^2 + (fz_{tt} + 2fg_x\varphi + 2f_t z_t)u' + \\ + (fg_{xx} + f_{tt})u + g_{tt} + gg_{xx} + g_x^2 + ag_x^{(4)} = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Приравнивая функциональные множители при u'''' и uu'', получим

$$f = \varphi^2. \tag{12}$$

Приравнивая функциональный множитель при u'' нулю, с учетом (12) имеем

$$g = -\frac{1}{\varphi^2}(\varphi'_t x + \psi'_t)^2. \tag{13}$$

Подставляя выражения (12) и (13) в (11), приходим к равенству

$$\begin{aligned} \varphi^6(au'''' + uu'' + u'^2) + \varphi^2(x\varphi_{tt} + \psi_{tt})u' + 2\varphi\varphi_{tt}u - \\ - \left[\varphi^{-2}(\varphi_t x + \psi_t)^2\right]_{tt} + 6\varphi^{-4}\varphi_t^2(\varphi_t x + \psi_t)^2 = 0. \end{aligned}$$

Выполним двукратное дифференцирование выражения в квадратных скобках, а затем поделим все члены на φ^6. Исключив x с помощью равенства $x = \dfrac{z-\psi}{\varphi}$, получим

$$au'''' + uu'' + (u')^2 + \varphi^{-5}(\varphi_{tt}z + \varphi\psi_{tt} - \psi\varphi_{tt})u' + 2\varphi^{-5}\varphi_{tt}u + \dots = 0. \tag{14}$$

Потребуем, чтобы функциональный коэффициент при u' был функцией одной переменной z, т. е.

$$\varphi^{-5}(\varphi_{tt}z + \varphi\psi_{tt} - \psi\varphi_{tt}) = \varphi^{-5}\varphi_{tt}z + \varphi^{-5}(\varphi\psi_{tt} - \psi\varphi_{tt}) \equiv Az + B,$$

где A и B — произвольные постоянные. Отсюда получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций φ и ψ:

$$\begin{aligned} \varphi_{tt} &= A\varphi^5, \\ \psi_{tt} &= (A\psi + B)\varphi^4. \end{aligned} \tag{15}$$

Исключим в (14) вторые и третьи производные функций φ и ψ. В итоге приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению для функции $u(z)$:

$$au'''' + uu'' + (u')^2 + (Az + B)u' + 2Au - 2(Az + B)^2 = 0. \tag{16}$$

Формулы (1), (12), (13) вместе с уравнениями (15)–(16) описывают точное решение уравнения Буссинеска (10).

6.1.2. Процедура построения точных решений специального вида

1°. Основная идея метода: в случае уравнения с искомой функцией $w = w(x,t)$ точное решение ищется в виде

$$w(x,t) = f(x,t)u(z) + g(x,t), \qquad z = z(x,t). \tag{17}$$

Здесь функции $f(x,t)$, $g(x,t)$, $z(x,t)$ должны определяться в процессе решения таким образом, чтобы в итоге для функции $u(z)$ было получено одно обыкновенное дифференциальное уравнение.

Важно отметить, что связь между функциями w и u в формулах (1) и (17) линейна.

2°. Подставив выражение (17) в рассматриваемое нелинейное уравнение в частных производных с квадратичной или степенно́й нелинейностью, получаем

$$\Phi_1(x,t)\Pi_1[u] + \Phi_2(x,t)\Pi_2[u] + \cdots + \Phi_m(x,t)\Pi_m[u] = 0. \tag{18}$$

Здесь $\Pi_k[u]$ — дифференциальные формы, представляющие из себя произведения неотрицательных целых степеней функции u и ее производных u'_z, u''_{zz} и т. д., а $\Phi_k(x,t)$ зависят от функций $f(x,t)$, $g(x,t)$, $z(x,t)$ и их частных производных по x и t. Пусть дифференциальная форма $\Pi_1[u]$ содержит старшую производную по z. Тогда функция $\Phi_1(x,t)$ используется как нормирующий множитель. Это означает, что должны выполняться соотношения:

$$\Phi_k(x,t) = \Gamma_k(z)\Phi_1(x,t), \qquad k = 1, \ldots, m, \tag{19}$$

где $\Gamma_k(z)$ — некоторые функции, подлежащие определению; $\Gamma_1(z) \equiv 1$.

3°. На практике для упрощения выкладок при определении f, g, z, u, Γ_k можно воспользоваться следующими свойствами:

a) если $f = f(x,t)$ имеет вид $f = f_0(x,t)\Omega(z)$, то можно считать $\Omega \equiv 1$ [это соответствует замене $u(z) \to u(z)/\Omega(z)$];

b) если $g = g(x,t)$ имеет вид $g = g_0(x,t) + f(x,t)\Omega(z)$, то можно положить $\Omega \equiv 0$ [это соответствует замене $u(z) \to u(z) - \Omega(z)$];

c) если $z = z(x,t)$ задается неявно алгебраическим уравнением вида $\Omega(z) = h(x,y)$, где $\Omega(z)$ — любая обратимая функция, то можно взять $\Omega(z) = z$ [это соответствует замене $z \to \Omega^{-1}(z)$].

4°. После определения функций $\Gamma_k(z)$, подставив выражения (19) в (18), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $u(z)$:

$$\Pi_1[u] + \Gamma_2(z)\Pi_2[u] + \cdots + \Gamma_m(z)\Pi_m[u] = 0. \tag{20}$$

Проиллюстрируем характерные особенности применения метода Кларксона — Крускала на конкретном примере.

Пример 3. Ищем решение уравнения Буссинеска (10) в виде (17). Имеем

$$afz_x^4u'''' + a(6fz_x^2z_{xx} + 4f_xz_x^3)u''' + f^2z_x^2uu'' + \cdots = 0. \tag{21}$$

Здесь выписаны только три первых члена и опущены аргументы у функций f и z. Функциональные коэффициенты при u'''' и uu'' должны удовлетворять условию [см. (19)]:

$$f^2z_x^2 = afz_x^4\Gamma_3(z),$$

где $\Gamma_3(z)$ — функция, подлежащая определению. Тогда, воспользовавшись свойством a) из п. 3°, выбираем

$$f = z_x^2, \qquad \Gamma_3(z) = 1/a. \tag{22}$$

Аналогично функциональные коэффициенты при u'''' и u''' должны удовлетворять условию

$$6fz_x^2 z_{xx} + 4f_x z_x^3 = fz_x^4 \Gamma_2(z), \tag{23}$$

где $\Gamma_2(z)$ — новая функция, подлежащая определению. Тогда с учетом (22) имеем

$$14z_{xx}/z_x = \Gamma_2(z) z_x.$$

Интегрируя по x, получим

$$\ln z_x = I(z) + \ln \tilde{\varphi}(t), \qquad I(z) = \frac{1}{14}\int \Gamma_2(z)\,dz,$$

где $\widetilde{\varphi}(t)$ — произвольная функция. Повторное интегрирование приводит к выражению

$$\int e^{-I(z)}\,dz = \widetilde{\varphi}(t)x + \widetilde{\psi}(t),$$

где $\widetilde{\psi}(t)$ — произвольная функция. Слева стоит функция z, а следовательно, воспользовавшись свойством c) из п. 3°(c), имеем

$$z = x\varphi(t) + \psi(t), \tag{24}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ подлежат определению.

Из формул (22)–(24) следует, что

$$f = \varphi^2(t), \qquad \Gamma_2(z) = 0. \tag{25}$$

Подставив выражения (24) и (25) в (17), получим решение в виде (1), где функция f дается формулой (12). Отсюда следует, что использование общего подхода, основанного на представлении решения в виде (17) в конечном итоге приводит к точно такому же результату, что и использование более простой формулы (1).

Замечание 1. Аналогичным образом можно показать, что построение точного решения уравнения Кортевега — де Фриза (2) на основе формул (1) и (17) приводит к одинаковым результатам.

Замечание 2. Рассмотренные примеры наглядно показывают, что первоначальный анализ конкретных уравнений целесообразно проводить исходя из более простой формулы (1).

Задачи и упражнения к разд. 6.1

1. Найти точные решения вида (1) уравнения Бюргерса: $w_t + ww_x = aw_{xx}$.

2. Найти точные решения вида (1) следующих уравнений:

a) $w_t + ww_x = aw_{xxxx}$,

b) $w_t + ww_x = aw_x^{(n)}$.

3. Определить, при каких значениях параметра a уравнение Фитц-Хью — Нагумо (FitzHugh — Nagumo)

$$w_t = w_{xx} + w(1-w)(w-a)$$

допускает точные решения вида (17) при $g(x,t) = 0$ (решения типа бегущей волны не рассматривать).

Литература к разд. 6.1: P. A. Clarkson, M. D. Kruskal (1989), M. C. Nucci, P. A. Clarkson (1992), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004).

6.2. Поиск точных решений общего вида

6.2.1. Общий вид решений

Основная идея метода: в случае уравнения с искомой функцией $w = w(x,t)$ точное решение ищется в виде

$$w(x,t) = F\bigl(x, t, u(z)\bigr), \qquad z = z(x,t). \tag{26}$$

Функции $F(x,t,u)$, $z(x,t)$ должны выбираться так, чтобы для функции $u(z)$ в конечном итоге получить одно обыкновенное дифференциальное уравнение. В отличие от формул (1) и (17), связь между функциями w и u в (26) может быть нелинейной.

Проиллюстрируем характерные особенности применения метода Кларксона — Крускала для поиска точных решений в виде (26).

6.2.2. Примеры построения точных решений методом Кларксона—Крускала

Пример 4. Рассмотрим опять уравнение Буссинеска (10).

Подставив (26) в (10), имеем

$$aF_u z_x^4 u'''' + 4aF_{uu} z_x^4 u' u''' + a(4F_{xu} z_x^3 + 6F_u z_x^2 z_{xx}) u''' + \dots = 0. \tag{27}$$

Здесь выписаны только три главных члена и опущены аргументы у функций F и z. Для того чтобы (27) приводилось к обыкновенному дифференциальному уравнению для $u = u(z)$, отношения функциональных коэффициентов при $u'u'''$, u''', ... к функциональному коэффициенту при старшей производной u'''' должны быть функциями z и u, т. е.

$$\frac{4aF_{uu} z_x^4}{aF_u z_x^4} = \Gamma_2(z,u), \qquad \frac{a(4F_{xu} z_x^3 + 6F_u z_x^2 z_{xx})}{aF_u z_x^4} = \Gamma_3(z,u), \qquad \dots$$

Из первого равенства имеем

$$F_{uu}/F_u = \Gamma_2(z,u).$$

Интегрируя дважды по u, получим

$$F(x,t,u) = f(x,t)\Theta(z,u) + g(x,t), \tag{28}$$

где $f(x,t)$ и $g(x,t)$ — произвольные функции двух аргументов, $\Theta = \int \exp\Bigl(\int \Gamma_2\,du\Bigr)\,du$.

Полагая в (28) $\Theta(z,u(z)) = U(z)$ и используя представление (26), приходим к решению, которое с точностью до переобозначений совпадает с (17). Поэтому всякий раз, когда ищутся решения уравнения Буссинеска (10) с помощью общего представления (26), мы естественным образом приходим к специальному виду решения (17).

Пример 5. Рассмотрим уравнение Гарри Дима (Harry Dym)

$$\frac{\partial w}{\partial t} + 2\frac{\partial^3}{\partial x^3}\frac{1}{\sqrt{w}} = 0. \tag{29}$$

Будем искать точные решения в виде (26). Подставляя это выражение в уравнение, получим

$$-F^{-3/2} F_u z_x^3 u''' + \bigl(-3F^{-3/2} F_{uu} + \tfrac{9}{2} F^{-5/2} F_u^2\bigr) z_x^3 u' u'' + \dots = 0.$$

Отношение функциональных коэффициентов при $u'u''$ и u''' должно быть функцией z и u, т. е.

$$3\frac{F_{uu}}{F_u} - \frac{9}{2}\frac{F_u}{F} = \Gamma(z,u).$$

Двукратное интегрирование дает

$$F^{-1/2}(x,t,u) = f(x,t)\Theta(z,u) + g(x,t), \tag{30}$$

где $f(x,t)$ и $g(x,t)$ — произвольные функции двух аргументов, $\Theta = -\int \exp\Bigl(\frac{1}{3}\int \Gamma\,du\Bigr)\,du$. Из формул (26), (30) следует, что достаточно искать решения уравнения Гарри Дима (29) в виде

$$w^{-1/2}(x,t) = f(x,t)U(z) + g(x,t), \qquad z = z(x,t).$$

Литература к разд. 6.2: P. A. Clarkson, M. D. Kruskal (1989), D. Levi, P. Winternitz (1989), P. Olver (1994).

6.3. Некоторые модификации и обобщения

6.3.1. Комбинация методов Кларксона—Крускала и обобщенного разделения переменных

1°. При использовании различных модификаций метода Кларксона — Крускала, основанных на формулах (1), (17), (26), функция $u = u(z)$ находится в привилегированном положении, поскольку остальные функции надо выбирать так, чтобы для $u(z)$ было получено *одно обыкновенное дифференциальное уравнение*. Однако в ряде случаев целесообразно использовать эти методы в сочетании с методами обобщенного и функционального разделения переменных, когда все определяющие функции считаются равноправными. При этом функция $u(z)$ будет описываться переопределенной *системой уравнений*.

2°. Точные решения нелинейных уравнений в частных производных с квадратичной или степенно́й нелинейностью можно искать в виде (1), где $g(x,t) = g_1(t)x + g_0(t)$. Подставив (1) в рассматриваемое уравнение, заменим x выражением $x = [z - \psi(t)]/\varphi(t)$. В результате получим функционально-дифференциальное уравнение с двумя аргументами t и z. Его решение в ряде случаев можно получить методами дифференцирования и расщепления, описанными в разделах 4.2–4.4.

Пример 6. Рассмотрим уравнение осесимметричного стационарного ламинарного гидродинамического погранслоя

$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = a\frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \mathcal{F}(x), \tag{31}$$

где x — координата, отсчитываемая вдоль оси симметрии; $y = \frac{1}{4}r^2$, r — радиальная координата; функция тока w связана с продольной и поперечной компонентами скорости жидкости u и v по формулам $u = \frac{2}{r}\frac{\partial w}{\partial r}$ и $v = -\frac{2}{r}\frac{\partial w}{\partial x}$.

Решение уравнения (31) ищем в виде (множитель a берется для удобства)

$$w(x,y) = af(x)u(z) + ag(x), \qquad z = \varphi(x)y + \psi(x). \tag{32}$$

Подставим это выражение в исходное уравнение (31) и исключим y с помощью равенства $\varphi(x)y = z - \psi(x)$. После деления на $a^2\varphi^2 f$ приходим к функционально-дифференциальному уравнению с двумя аргументами вида (21)–(22) из разд. 4.2.2, где $k = 6$:

$$(zu''_{zz})'_z - \psi u'''_{zzz} + f'_x uu''_{zz} + g'_x u''_{zz} - \frac{(f\varphi)'_x}{\varphi}(u'_z)^2 + \frac{\mathcal{F}}{a^2 f\varphi^2} = 0. \tag{33}$$

Используем упрощенную схему построения точных решений. Будем считать, что функциональные коэффициенты при uu''_{zz}, u''_{zz}, $(u'_z)^2$, 1 являются линейными комбинациями коэффициентов 1 и ψ, стоящих соответственно при старших членах $(zu''_{zz})'_z$ и u'''_{zzz}. Имеем

$$\begin{aligned} f'_x &= A_1 + B_1\psi,\\ g'_x &= A_2 + B_2\psi,\\ -(f\varphi)'_x/\varphi &= A_3 + B_3\psi,\\ \mathcal{F}/(a^2 f\varphi^2) &= A_4 + B_4\psi, \end{aligned} \tag{34}$$

где A_k, B_k — произвольные постоянные. Подставим выражения (34) в (33) и соберем члены, пропорциональные ψ (считаем, что $\psi \neq \mathrm{const}$). Приравнивая функциональный множитель при ψ нулю, получим переопределенную систему

$$(zu''_{zz})'_z + A_1 uu''_{zz} + A_2 u''_{zz} + A_3(u'_z)^2 + A_4 = 0, \tag{35}$$

$$-u'''_{zzz} + B_1 uu''_{zz} + B_2 u''_{zz} + B_3(u'_z)^2 + B_4 = 0. \tag{36}$$

Случай 1. Положим

$$A_1 = A_3 = A_4 = 0, \quad A_2 = -n. \tag{37}$$

В этом случае решение уравнения (35) имеет вид

$$u(z) = \frac{C_1}{n(n+1)} z^{n+1} + C_2 z + C_3, \tag{38}$$

где C_1, C_2, C_3 — постоянные интегрирования. Решение (38) уравнения (35) является одновременно и решением уравнения (36) только при выполнении условий

$$n = -2, \quad B_1 = B_3, \quad C_1 = -4/B_1, \quad C_2^2 = -B_4/B_1, \quad C_3 = -B_2/B_1. \tag{39}$$

Подставим коэффициенты (37), (39) в систему (34). Интегрируя, получим

$$g(x) = 2x - C_3 f, \quad \varphi = \frac{C_4}{f^2}, \quad \psi = -\frac{C_1}{4} f'_x, \quad \mathcal{F} = -(aC_2C_4)^2 \frac{f'_x}{f^3}, \tag{40}$$

где $f = f(x)$ — произвольная функция.

Формулы (32), (38), (40) дают точное решение уравнения осесимметричного пограничного слоя (31).

Случай 2. При

$$B_1 = B_3 = B_4 = 0, \quad B_2 = -\lambda, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = -A_1, \quad A_4 = \lambda^2/A_1 \tag{41}$$

совместное решение системы (35), (36) имеет вид

$$u(z) = \frac{1}{A_1}(C_1 e^{-\lambda z} + \lambda z - 3). \tag{42}$$

Решение системы (34) с коэффициентами (41) описывается формулами

$$f = A_1 x + C_2, \quad \varphi = C_3, \quad \psi = -\frac{1}{\lambda} g'_x, \quad \mathcal{F} = \frac{(aC_3\lambda)^2}{A_1}(A_1 x + C_2), \tag{43}$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, а $g = g(x)$ — произвольная функция.

Формулы (32), (42), (43) дают точное решение уравнения пограничного слоя (31).

Пример 7. Рассмотрим уравнение с кубической нелинейностью

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b_3 w^3 + b_2 w^2 + b_1 w + b_0, \qquad b_3 \neq 0. \tag{44}$$

Решения ищем в виде

$$w(x,t) = f(x,t)u(z) + \lambda, \quad z = z(x,t), \tag{45}$$

где функции $f = f(x,t)$, $z = z(x,t)$, $u = u(z)$ и константа λ подлежат определению. Подставляя (45) в рассматриваемое уравнение, имеем

$$\begin{aligned} &afz_x^2 u'' + (afz_{xx} + 2af_x z_x - fz_t)u' + b_3 f^3 u^3 + (3b_3\lambda f^2 + b_2 f^2)u^2 + \\ &\quad + (3b_3\lambda^2 f + 2b_2\lambda f + b_1 f + af_{xx} - f_t)u + b_3\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0 = 0. \end{aligned} \tag{46}$$

Из переопределенной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая является следствием условий пропорциональности функций: (i) u'', uu', u^3 и (ii) u', u^2, получим

$$u(z) = 1/z, \tag{47}$$

где постоянный множитель взят равным единице [этот множитель можно учесть при выборе f, поскольку в формулу (45) функции u и f входят в виде произведения]. Подставим (47) в (46) и представим полученное выражение в виде конечного разложения по отрицательным степеням z. Приравнивая нулю функциональный коэффициент при z^{-3}, имеем

$$f = \beta z_x, \tag{48}$$

где β — корень квадратного уравнения $b_3\beta^2 + 2a = 0$, т. е.

$$\beta = \pm\sqrt{-2a/b_3}. \tag{49}$$

Приравнивая нулю функциональные коэффициенты при остальных степенях z, с учетом зависимости (48) получим

$$\begin{aligned} z_t - 3az_{xx} + (\beta b_2 + 3\beta b_3\lambda)z_x &= 0 && \text{(слева стоит коэффициент при } z^{-2}\text{)}, \\ z_{xt} - az_{xxx} - (b_1 + 2\lambda b_2 + 3b_3\lambda^2)z_x &= 0 && \text{(слева стоит коэффициент при } z^{-1}\text{)}, \\ b_3\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0 &= 0 && \text{(слева стоит коэффициент при } z^{0}\text{)}. \end{aligned} \tag{50}$$

Здесь два первых линейных уравнения с частными производными образуют переопределенную систему для функции $z(x,t)$, а последнее кубическое уравнение служит для определения постоянной λ.

Собирая формулы (45), (47), (48), запишем решение уравнения (44) в виде

$$w(x,t) = \frac{\beta}{z}\frac{\partial z}{\partial x} + \lambda. \tag{51}$$

Пусть β — любое из чисел (49), а λ — корень последнего (кубического) уравнения (50). Из двух первых уравнений (50) можно получить

$$z_t + p_1 z_{xx} + p_2 z_x = 0,$$
$$z_{xxx} + q_1 z_{xx} + q_2 z_x = 0,$$

где

$$p_1 = -3a, \qquad p_2 = \beta b_2 + 3\beta\lambda b_3,$$
$$q_1 = -\frac{\beta b_2 + 3\beta\lambda b_3}{2a}, \quad q_2 = -\frac{3b_3\lambda^2 + 2b_2\lambda + b_1}{2a}.$$

Возможны четыре случая.

1. При $q_2 \neq 0$ и $q_1^2 \neq 4q_2$ имеем

$$z(x,t) = C_1 \exp(k_1 x + s_1 t) + C_2 \exp(k_2 x + s_2 t) + C_3,$$
$$k_n = -\tfrac{1}{2}q_1 \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{q_1^2 - 4q_2}, \quad s_n = -k_n^2 p_1 - k_n p_2,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные; $n = 1,\ 2$.

2. При $q_2 \neq 0$ и $q_1^2 = 4q_2$ имеем

$$z(x,t) = C_1 \exp(kx + s_1 t) + C_2(kx + s_2 t)\exp(kx + s_1 t) + C_3,$$
$$k = -\tfrac{1}{2}q_1, \quad s_1 = -\tfrac{1}{4}p_1 q_1^2 + \tfrac{1}{2}p_2 q_1, \quad s_2 = -\tfrac{1}{2}p_1 q_1^2 + \tfrac{1}{2}p_2 q_1.$$

3. При $q_2 = 0$ и $q_1 \neq 0$ имеем

$$z(x,t) = C_1(x - p_2 t) + C_2 \exp[-q_1 x + q_1(p_2 - p_1 q_1)t] + C_3.$$

4. При $q_2 = q_1 = 0$ имеем

$$z(x,t) = C_1(x - p_2 t)^2 + C_2(x - p_2 t) - 2C_1 p_1 t + C_3.$$

6.3.2. Построение точных решений уравнений с тремя и более независимыми переменными

При построении точных решений нелинейных уравнений с тремя и более независимыми переменными иногда на промежуточных этапах возникают функционально-дифференциальные уравнения, которые рассматриваются разд. 4.2–4.5.

Пример 8. Рассмотрим нелинейное нестационарное уравнение теплопроводности, анизотропное по одному из направлений:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left[(bw + c)\frac{\partial w}{\partial y}\right]. \tag{52}$$

Решение ищем в виде

$$w = U(z) + f(x,t), \qquad z = y + g(x,t). \tag{53}$$

Подставив (53) в уравнение (52), имеем

$$[(bU + ag_x^2 - g_t^2 + bf + c)U_z']_z' + (ag_{xx} - g_{tt})U_z' + af_{xx} - f_{tt} = 0.$$

Пусть функции f и g удовлетворяют переопределенной системе уравнений

$$af_{xx} - f_{tt} = C_1, \tag{54}$$
$$ag_{xx} - g_{tt} = C_2, \tag{55}$$
$$ag_x^2 - g_t^2 + bf = C_3, \tag{56}$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. Тогда функция $U(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$[(bU+c+C_3)U'_z]'_z + C_2U'_z + C_1 = 0. \qquad (57)$$

Общие решения уравнений (54)–(55) имеют вид:

$$\begin{gathered} f = \varphi_1(\xi) + \psi_1(\eta) - \tfrac{1}{2}C_1t^2, \\ g = \varphi_2(\xi) + \psi_2(\eta) - \tfrac{1}{2}C_2t^2, \\ \xi = x + t\sqrt{a}, \quad \eta = x - t\sqrt{a}, \end{gathered}$$

Подставим эти выражения в уравнение (56), а затем исключим t с помощью формулы $t = \dfrac{\xi-\eta}{2\sqrt{a}}$. После несложных преобразований получим функционально-дифференциальное уравнение с двумя аргументами

$$\begin{gathered} b\varphi_1(\xi) + C_2\xi\varphi'_2(\xi) - k\xi^2 - C_3 + b\psi_1(\eta) + C_2\eta\psi'_2(\eta) - k\eta^2 + \\ + \psi'_2(\eta)[4a\varphi'_2(\xi) - C_2\xi] + \eta[2k\xi - C_2\varphi'_2(\xi)] = 0, \end{gathered} \qquad (58)$$

где

$$k = \frac{1}{8a}(bC_1 + 2C_2^2).$$

Уравнение (58) можно решить методом расщепления, описанным в разд. 5.4. Используя упрощенную схему, положим

$$\begin{aligned} b\varphi_1(\xi) + C_2\xi\varphi'_2(\xi) - k\xi^2 - C_3 &= A_1, \\ 4a\varphi'_2(\xi) - C_2\xi &= A_2, \\ 2k\xi - C_2\varphi'_2(\xi) &= A_3, \end{aligned} \qquad (59)$$

где A_1, A_2, A_3 некоторые постоянные. Совместное решение системы (59) имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_1(\xi) &= -\frac{C_2^2}{8ab}\xi^2 - \frac{BC_2}{b}\xi + \frac{A_1+C_3}{b}, \\ \varphi_2(\xi) &= \frac{C_2}{8a}\xi^2 + B\xi \end{aligned} \qquad (60)$$

и соответствует следующим значениям постоянных:

$$\begin{gathered} A_1 \text{ — любое}, \quad A_2 = 4aB, \quad A_3 = -BC_2, \quad B \text{ — любое}, \\ C_1 = -\frac{C_2^2}{b}, \quad C_2, C_3 \text{ — любые}, \quad k = \frac{C_2^2}{8a}. \end{gathered} \qquad (61)$$

Из равенств (58) и (59) получим уравнение, связывающее две функции ψ_1 и ψ_2:

$$A_1 + b\psi_1(\eta) + C_2\eta\psi'_2(\eta) - k\eta^2 + A_2\psi'_2(\eta) + A_3\eta = 0. \qquad (62)$$

Учитывая (61), отсюда имеем

$$\begin{aligned} &\psi_1(\eta) = -\frac{1}{b}(C_2\eta + 4aB)\psi'_2(\eta) + \frac{1}{b}\left(\frac{C_2^2}{8a}\eta^2 + BC_2\eta - A_1\right), \\ &\psi_2(\eta) \text{ — произвольная функция.} \end{aligned}$$

В итоге находим функции, определяющие решение (53):

$$\begin{aligned} f(x,t) &= -\frac{C_2^2}{2\sqrt{a}\,b}xt + \frac{C_2^2}{2b}t^2 - \frac{2\sqrt{a}\,BC_2}{b}t + \frac{C_3}{b} - \frac{1}{b}(C_2\eta + 4aB)\psi'_2(\eta), \\ g(x,t) &= \frac{C_2}{8a}\left(x^2 + 2\sqrt{a}\,xt - 3at^2\right) + B(x+\sqrt{a}\,t) + \psi_2(\eta). \end{aligned}$$

Замечание. В частном случае $a=1$, $b<0$, $c>0$ уравнение (52) описывает пространственные околозвуковые течения идеального политропного газа (С. И. Похожаев, 1989).

Задачи и упражнения к разд. 6.3

1. Показать, что система (35)–(36) имеет также решение вида $u(z) = C_1 z^2 + C_2 z + C_3$, где постоянные C_1, C_2, C_3 связаны с A_n, B_n. Построить соответствующее решение уравнения (31).

2. Найти точные решения уравнения с квадратичной нелинейностью:

$$w_t + \sigma w w_x = a w_{xx} + b_2 w^2 + b_1 w + b_0, \qquad b_2 \neq 0.$$

3. Найти точные решения уравнения с кубической нелинейностью:

$$w_t + \sigma w w_x = a w_{xx} + b_3 w^3 + b_2 w^2 + b_1 w + b_0, \qquad b_3 \neq 0.$$

Литература к разд. 6.3: G. I. Burde (1994, 1995), M. C. Nucci, P. A. Clarkson (1992), Н. А. Кудряшов (1993), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004).

7. Классический метод исследования симметрий дифференциальных уравнений

Предварительные замечания. Классический метод исследования симметрий дифференциальных уравнений* с помощью регулярной процедуры позволяет найти:

(i) преобразования, относительно которых уравнение инвариантно (при таких преобразованиях данное уравнение переходит в точно такое же уравнение),

(ii) новые переменные (как независимые, так и зависимые), при переходе к которым уравнение существенно упрощается.

Указанные в пункте (i) преобразования переводят решение уравнения в то же самое или другое решение этого же уравнения. В первом случае мы имеем инвариантное решение, которое можно найти, редуцируя исходное уравнение к новым переменным, число которых меньше, чем исходных. Во втором — неинвариантные решения могут быть «размножены» до семейства решений.

Замечание 1. В определенном смысле классический метод исследования симметрий дифференциальных уравнений можно рассматривать как существенное обобщение метода подобия, описанного в главе 3.

Замечание 2. В разд. 7.1–7.3 дано описание классического метода в нетрадиционном изложении с минимальным использованием специальной («групповой») терминологии. Такой подход облегчает работу с материалом и поэтому предпочтительнее при начальном ознакомлении с предметом. В разд. 7.4 будет дано объяснение происхождения распространенного термина «групповой анализ».

7.1. Однопараметрические преобразования и их локальные свойства

7.1.1. Однопараметрические преобразования. Инфинитезимальный оператор

Будем рассматривать обратимые преобразования вида

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \varphi_1(x,y,w,\varepsilon), & \bar{x}|_{\varepsilon=0} &= x,\\ \bar{y} &= \varphi_2(x,y,w,\varepsilon), & \bar{y}|_{\varepsilon=0} &= y,\\ \bar{w} &= \psi(x,y,w,\varepsilon), & \bar{w}|_{\varepsilon=0} &= w, \end{aligned} \qquad (1)$$

где φ_1, φ_2, ψ — достаточно гладкие функции своих аргументов, ε — вещественный параметр. Считается, что преобразования (1) обладают групповым свойством:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{x}} &= \varphi_1(\bar{x},\bar{y},\bar{w},\bar{\varepsilon}) = \varphi_1(x,y,w,\varepsilon+\bar{\varepsilon}),\\ \bar{\bar{y}} &= \varphi_2(\bar{x},\bar{y},\bar{w},\bar{\varepsilon}) = \varphi_2(x,y,w,\varepsilon+\bar{\varepsilon}),\\ \bar{\bar{w}} &= \psi(\bar{x},\bar{y},\bar{w},\bar{\varepsilon}) = \psi(x,y,w,\varepsilon+\bar{\varepsilon}), \end{aligned}$$

* Другое название этого метода — классический метод группового анализа дифференциальных уравнений.

т. е. последовательное применение двух преобразований вида (1) с параметрами ε и $\bar{\varepsilon}$ эквивалентно одному преобразованию того же вида с параметром $\varepsilon+\bar{\varepsilon}$.

В частном случае преобразований на плоскости функции φ_1 и φ_2 в (1) не зависят от w и $\psi = w$ (т. е. $\bar{w} = w$).

Разложение соотношений (1) для $\bar{x}$ и $\bar{w}$ в ряд Тейлора по параметру ε в окрестности точки $\varepsilon = 0$ дает

$$\bar{x} \simeq x + \varepsilon\xi(x, y, w), \quad \bar{y} \simeq y + \varepsilon\eta(x, y, w), \quad \bar{w} \simeq w + \varepsilon\zeta(x, y, w), \tag{2}$$

где

$$\xi(x, y, w) = \frac{\partial\varphi_1}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}, \quad \eta(x, y, w) = \frac{\partial\varphi_2}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}, \quad \zeta(x, y, w) = \frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}.$$

Вектор (ξ, η, ζ) является касательным вектором в точке (x, y, w) к кривой, описываемой соотношениями (1).

Линейный дифференциальный оператор первого порядка

$$\mathrm{X} = \xi(x, y, w)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y, w)\frac{\partial}{\partial y} + \zeta(x, y, w)\frac{\partial}{\partial w}, \tag{3}$$

соответствующий бесконечно малому преобразованию (2), называется инфинитезимальным оператором.

Теорема Ли. Пусть известны координаты $\xi(x, y, w)$, $\eta(x, y, w)$, $\zeta(x, y, z)$ инфинитезимального оператора (3). Тогда преобразование (1) можно полностью восстановить путем решения уравнений Ли

$$\frac{d\varphi_1}{d\varepsilon} = \xi(\varphi_1, \varphi_2, \psi), \quad \frac{d\varphi_2}{d\varepsilon} = \eta(\varphi_1, \varphi_2, \psi), \quad \frac{d\psi}{d\varepsilon} = \zeta(\varphi_1, \varphi_2, \psi)$$

с начальными условиями

$$\varphi_1|_{\varepsilon=0} = x, \quad \varphi_2|_{\varepsilon=0} = y, \quad \psi|_{\varepsilon=0} = w.$$

7.1.2. Инвариант оператора. Преобразования на плоскости

Инвариантом преобразования (1) называется функция $I(x, y, w)$, удовлетворяющая условию

$$I(\bar{x}, \bar{y}, \bar{w}) = I(x, y, w).$$

Разложив по малому параметру ε, разделим полученное выражение на ε, а затем перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$. В результате имеем линейное уравнение с частными производными для I:

$$\mathrm{X}I = \xi(x, y, w)\frac{\partial I}{\partial x} + \eta(x, y, w)\frac{\partial I}{\partial y} + \zeta(x, y, w)\frac{\partial I}{\partial w} = 0. \tag{4}$$

Инвариантом оператора (3) называется функция $I(x, y, w)$, удовлетворяющая уравнению (4).

Запишем соответствующую уравнению с частными производными (4) характеристическую систему обыкновенных дифференциальных уравнений (см. разд. 14.1.3):

$$\frac{dx}{\xi(x, y, w)} = \frac{dy}{\eta(x, y, w)} = \frac{dw}{\zeta(x, y, w)}. \tag{5}$$

ТАБЛИЦА 6
Однопараметрические преобразования на плоскости

Название	Преобразование	Оператор	Инвариант
Перенос по оси x	$\bar{x}=x+\varepsilon,\ \bar{y}=y$	$\mathrm{X}=\dfrac{\partial}{\partial x}$	$I_1=y$
Перенос вдоль прямой $ax+by=0$	$\bar{x}=x+b\varepsilon,\ \bar{y}=y-a\varepsilon$	$\mathrm{X}=b\dfrac{\partial}{\partial x}-a\dfrac{\partial}{\partial y}$	$I_1=ax+by$
Вращение	$\bar{x}=x\cos\varepsilon+y\sin\varepsilon,$ $\bar{y}=y\cos\varepsilon-x\sin\varepsilon$	$\mathrm{X}=y\dfrac{\partial}{\partial x}-x\dfrac{\partial}{\partial y}$	$I_1=x^2+y^2$
Преобразование Лоренца	$\bar{x}=x\operatorname{ch}\varepsilon+y\operatorname{sh}\varepsilon,$ $\bar{y}=y\operatorname{ch}\varepsilon+x\operatorname{sh}\varepsilon$	$\mathrm{X}=y\dfrac{\partial}{\partial x}+x\dfrac{\partial}{\partial y}$	$I_1=y^2-x^2$
Преобразование Галилея	$\bar{x}=x+\varepsilon y,\ \bar{y}=y$	$\mathrm{X}=y\dfrac{\partial}{\partial x}$	$I_1=y$
Однородное растяжение	$\bar{x}=xe^{\varepsilon},\ \bar{y}=ye^{\varepsilon}$	$\mathrm{X}=x\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial y}$	$I_1=y/x$
Неоднородное растяжение	$\bar{x}=xe^{a\varepsilon},\ \bar{y}=ye^{b\varepsilon}$	$\mathrm{X}=ax\dfrac{\partial}{\partial x}+by\dfrac{\partial}{\partial y}$	$I_1=\lvert y\rvert^a\lvert x\rvert^{-b}$

Пусть функционально независимые интегралы этой системы имеют вид

$$I_1(x,y,w)=C_1,\qquad I_2(x,y,w)=C_2, \tag{6}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Тогда общее решение уравнения (4) описывается формулой

$$I=\Psi(I_1,I_2), \tag{7}$$

где $\Psi(I_1,I_2)$ — произвольная функция двух аргументов, $I_1 = I_1(x,y,w)$ и $I_2=I_2(x,y,w)$.

Сказанное означает, что оператор (3) имеет два функционально независимых инварианта I_1 и I_2 и любая функция $\Xi(x,y,w)$, инвариантная относительно оператора (3), может быть записана в виде функции этих инвариантов.

В табл. 6 указаны наиболее распространенные преобразования на плоскости и соответствующие им операторы (3) и инварианты (указывается только один инвариант, так как второй инвариант везде один и тот же: $I_2=w$).

7.1.3. Формулы для вычисления производных. Координаты первого и второго продолжений

Первые производные при переходе к новым переменным (1) преобразуются следующим образом:

$$\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}}\simeq\frac{\partial w}{\partial x}+\varepsilon\zeta_1,\qquad \frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{y}}\simeq\frac{\partial w}{\partial y}+\varepsilon\zeta_2. \tag{8}$$

Здесь координаты первого продолжения ζ_1 и ζ_2 определяются по формулам

$$\begin{aligned}
\zeta_1&=D_x(\zeta)-w_xD_x(\xi)-w_yD_x(\eta)=\zeta_x+(\zeta_w-\xi_x)w_x-\eta_xw_y-\xi_ww_x^2-\eta_ww_xw_y,\\
\zeta_2&=D_y(\zeta)-w_xD_y(\xi)-w_yD_y(\eta)=\zeta_y-\xi_yw_x+(\zeta_w-\eta_y)w_y-\xi_ww_xw_y-\eta_ww_y^2,
\end{aligned} \tag{9}$$

где D_x и D_y — операторы полного дифференцирования по переменным x и y:

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + w_x \frac{\partial}{\partial w} + w_{xx} \frac{\partial}{\partial w_x} + w_{xy} \frac{\partial}{\partial w_y} + \cdots,$$
$$D_y = \frac{\partial}{\partial y} + w_y \frac{\partial}{\partial w} + w_{xy} \frac{\partial}{\partial w_y} + w_{yy} \frac{\partial}{\partial w_y} + \cdots. \qquad (10)$$

Покажем справедливость первой формулы (8). Очевидно, что

$$\bar w_x = \bar w_{\bar x} \bar x_x + \bar w_{\bar y} \bar y_x, \quad \bar w_y = \bar w_{\bar x} \bar x_y + \bar w_{\bar y} \bar y_y. \qquad (11)$$

Дифференцируя выражения (2) по x и y и отбрасывая члены второго и более высоких порядков по ε, имеем

$$\begin{aligned} &\bar x_x = 1 + \varepsilon D_x \xi, && \bar x_y = \varepsilon D_y \xi, \\ &\bar y_x = \varepsilon D_x \eta, && \bar y_y = 1 + \varepsilon D_y \eta, \\ &\bar w_x = w_x + \varepsilon D_x \zeta, && \bar w_y = w_y + \varepsilon D_y \zeta. \end{aligned} \qquad (12)$$

Для вычисления $\bar w_{\bar x}$ исключим $\bar w_{\bar y}$ из равенств (11), а затем заменим производные $\bar x_x$, $\bar x_y$, $\bar y_x$, $\bar y_y$, $\bar w_x$, $\bar w_y$ соответствующими выражениями из (12). В результате получим

$$\bar w_{\bar x} = \frac{w_x + \varepsilon(D_x\zeta + w_x D_y \eta - w_y D_x \eta) + \varepsilon^2 (D_x \zeta D_y \eta - D_x \eta D_y \zeta)}{1 + \varepsilon (D_x \xi + D_y \eta) + \varepsilon^2 (D_x \xi D_y \eta - D_x \eta D_y \xi)}.$$

Разлагая в ряд по ε, имеем

$$\bar w_{\bar x} \simeq w_x + \varepsilon \zeta_1, \quad \zeta_1 = D_x \zeta - w_x D_x \xi - w_y D_x \eta,$$

что и требовалось доказать. Аналогичным образом вычисляется ζ_2.

Вторые производные при переходе к новым переменным (1) преобразуются следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \bar w}{\partial \bar x^2} \simeq \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \varepsilon \zeta_{11}, \quad \frac{\partial^2 \bar w}{\partial \bar x \partial \bar y} \simeq \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \varepsilon \zeta_{12}, \quad \frac{\partial^2 \bar w}{\partial \bar y^2} \simeq \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \varepsilon \zeta_{22}. \qquad (13)$$

Здесь координаты вторых продолжений ζ_{ij} находятся по формулам

$$\begin{aligned} \zeta_{11} &= D_x(\zeta_1) - w_{xx} D_x(\xi) - w_{xy} D_x(\eta), \\ \zeta_{12} &= D_y(\zeta_1) - w_{xx} D_y(\xi) - w_{xy} D_y(\eta), \\ \zeta_{22} &= D_y(\zeta_2) - w_{xy} D_y(\xi) - w_{yy} D_y(\eta). \end{aligned}$$

которые в развернутом виде записываются так:

$$\begin{aligned} \zeta_{11} = {}& \zeta_{xx} + (2\zeta_{wx} - \xi_{xx}) w_x - \eta_{xx} w_y + (\zeta_{ww} - 2\xi_{wx}) w_x^2 - 2\eta_{wx} w_x w_y - \\ & - \xi_{ww} w_x^3 - \eta_{ww} w_x^2 w_y + (\zeta_w - 2\xi_x - 3\xi_w w_x - \eta_w w_y) w_{xx} - 2(\eta_x + \eta_w w_x) w_{xy}, \\ \zeta_{12} = {}& \zeta_{xy} + (\zeta_{wy} - \xi_{xy}) w_x + (\zeta_{wx} - \eta_{xy}) w_y - \xi_{wy} w_x^2 - \\ & - (\zeta_{ww} - \xi_{wx} - \eta_{wy}) w_x w_y - \eta_{wx} w_y^2 - \xi_{ww} w_x^2 w_y - \eta_{ww} w_x w_y^2 - \\ & - (\xi_y + \xi_w w_y) w_{xx} + (\zeta_w - \xi_x - \eta_y - 2\xi_w w_x - 2\eta_w w_y) w_{xy} - (\eta_x + \eta_w w_x) w_{yy}, \\ \zeta_{22} = {}& \zeta_{yy} - \xi_{yy} w_x + (2\zeta_{wy} - \eta_{yy}) w_y - 2\xi_{wy} w_x w_y + (\zeta_{ww} - 2\eta_{wy}) w_y^2 - \\ & - \xi_{ww} w_x w_y^2 - \eta_{ww} w_y^3 - 2(\xi_y + \xi_w w_y) w_{xy} + (\zeta_w - 2\eta_y - \xi_w w_x - 3\eta_w w_y) w_{yy}. \end{aligned} \qquad (14)$$

Формулы для координат первого и второго продолжений (9) и (14) понадобятся далее для анализа дифференциальных уравнений.

7.2. Симметрии нелинейных уравнений второго порядка. Условие инвариантности

7.2.1. Условие инвариантности. Процедура расщепления по производным

Будем рассматривать дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными

$$F\Big(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big) = 0. \tag{15}$$

Процедура поиска симметрий* уравнения (15) проводится в несколько этапов. На первом этапе потребуем, чтобы уравнение (15) было инвариантным (т. е. сохраняло вид) относительно преобразований (1), т. е.

$$F\Big(\bar{x}, \bar{y}, \bar{w}, \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}}, \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2}, \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}}, \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2}\Big) = 0. \tag{16}$$

Разложим это выражение в ряд при $\varepsilon \to 0$ с учетом равенства нулю главного члена разложения (15). Используя формулы (2), (8), (13) и удерживая члены первого порядка малости по ε, получим

$$\underset{2}{\mathrm{X}}F\left(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\bigg|_{F=0} = 0. \tag{17}$$

Здесь введено краткое обозначение:

$$\begin{aligned}\underset{2}{\mathrm{X}}F = \xi\frac{\partial F}{\partial x} + \eta\frac{\partial F}{\partial y} + \zeta\frac{\partial F}{\partial w} + \zeta_1\frac{\partial F}{\partial w_x} + \zeta_2\frac{\partial F}{\partial w_y} &+ \\ + \zeta_{11}\frac{\partial F}{\partial w_{xx}} + \zeta_{12}\frac{\partial F}{\partial w_{xy}} &+ \zeta_{22}\frac{\partial F}{\partial w_{yy}},\end{aligned} \tag{18}$$

где координаты первого и второго продолжений ζ_i и ζ_{ij} определяются по формулам (9) и (14). Соотношение (17) называется условием инвариантности, а оператор $\underset{2}{\mathrm{X}}$ — вторым продолжением оператора (3).

На втором этапе в (17) исключается производная $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ (или $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$) с помощью уравнения (15). После этого левая часть полученного равенства записывается как полином по «независимым переменным» — всевозможным произведениям производных (в данном случае произведения содержит разные степени w_x, w_y, w_{xx}, w_{xy}):

$$\sum A_{k_1k_2k_3k_4}(w_x)^{k_1}(w_y)^{k_2}(w_{xx})^{k_3}(w_{xy})^{k_4} = 0, \tag{19}$$

где функциональные коэффициенты $A_{k_1k_2k_3k_4}$ зависят только от $x, y, w, \xi, \eta, \zeta$ и производных функций ξ, η, ζ, и не зависят от производных w. Равенство (19) будет выполняться, если все $A_{k_1k_2k_3k_4} = 0$. Таким образом, условие инвариантности расщепляется до переопределенной определяющей системы, которая получается приравниванием нулю функциональных коэффициентов при различных произведениях степеней оставшихся производных (напомним, что искомые функции ξ, η, ζ не зависят от производных w_x, w_y, w_{xx}, w_{xy}).

На третьем этапе решается определяющая система и находятся допустимые координаты ξ, η, ζ оператора (3).

---

* Симметрии уравнения — преобразования, сохраняющие его вид.

Замечание 1. Важно отметить, что и функциональные коэффициенты $A_{k_1 k_2 k_3 k_4}$, и определяющая система линейны относительно искомых величин ξ, η, ζ.

Замечание 2. Инвариант I, являющийся решением уравнения (4), удовлетворяет также уравнению $\underset{2}{\mathrm{X}} I = 0$.

Проиллюстрируем процедуру поиска симметрий дифференциальных уравнений на конкретных примерах.

7.2.2. Примеры поиска симметрий нелинейных уравнений математической физики

Пример 1. Рассмотрим двумерное стационарное уравнение теплопроводности с нелинейным источником

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(w), \tag{20}$$

которое соответствует левой части $F = w_{xx} + w_{yy} - f(w)$ уравнения (15).

Допускаемый инфинитезимальный оператор X будем искать в виде (4), где координаты $\xi = \xi(x, y, w)$, $\eta = \eta(x, y, w)$, $\zeta = \zeta(x, y, w)$ пока неизвестны и подлежат определению в ходе последующего анализа. Условие инвариантности (17)–(18) с учетом зависимости $F = w_{xx} + w_{yy} - f(w)$ записывается так:

$$\zeta_{22} + \zeta_{11} - \zeta f'(w) = 0.$$

Подставив сюда выражения для координат второго продолжения (14) и заменив затем w_{yy} на $f(w) - w_{xx}$ [следствие уравнения (20)], имеем

$$\begin{aligned}
&-2\xi_w w_x w_{xx} + 2\eta_w w_y w_{xx} - 2\eta_w w_x w_{xy} - 2\xi_w w_y w_{xy} - 2(\xi_x - \eta_y) w_{xx} - 2(\xi_y + \eta_x) w_{xy} - \\
&\quad - \xi_{ww} w_x^3 - \eta_{ww} w_x^2 w_y - \xi_{ww} w_x w_y^2 - \eta_{ww} w_y^3 + (\zeta_{ww} - 2\xi_{xw}) w_x^2 - 2(\xi_{yw} + \eta_{xw}) w_x w_y + \\
&\quad + (\zeta_{ww} - 2\eta_{yw}) w_y^2 + (2\zeta_{xw} - \xi_{xx} - \xi_{yy} - f\xi_w) w_x + (2\zeta_{yw} - \eta_{xx} - \eta_{yy} - 3f\eta_w) w_y + \\
&\quad + \zeta_{xx} + \zeta_{yy} + f(\zeta_w - 2\eta_y) - \zeta f' = 0,
\end{aligned}$$

где $f = f(w)$ и $f' = df/dw$. Приравняем нулю коэффициенты при всех комбинациях производных. Получим следующую систему:

$$\begin{array}{ll}
w_x w_{xx}: & \xi_w = 0, \\
w_y w_{xx}: & \eta_w = 0, \\
w_{xx}: & \xi_x - \eta_y = 0, \\
w_{xy}: & \xi_y + \eta_x = 0, \\
w_x^2: & \zeta_{ww} - 2\xi_{wx} = 0, \\
w_x w_y: & \eta_{wx} + \xi_{wy} = 0, \\
w_x: & 2\zeta_{wx} - \xi_{xx} - \xi_{yy} - \xi_w f(w) = 0, \\
w_y^2: & \zeta_{ww} - 2\eta_{wy} = 0, \\
w_y: & 2\zeta_{wy} - \eta_{xx} - \eta_{yy} - 3\eta_w f(w) = 0, \\
1: & \zeta_{xx} + \zeta_{yy} - f'(w)\zeta + f(w)(\zeta_w - 2\eta_y) = 0.
\end{array} \tag{21}$$

Здесь в первом столбце указаны комбинации производных, во втором — соответствующие коэффициенты; при $w_y w_{xy}, w_x w_{xy}, w_x^3, w_x^2 w_y, w_x w_y^2, w_y^3$ эти коэффициенты дублируют приведенные в системе уравнения или их дифференциальные следствия, и потому опущены. Учитывая следствия первого, второго и пятого уравнений (21), имеем

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \quad \zeta = a(x, y) w + b(x, y). \tag{22}$$

Из четвертого и пятого уравнений системы (21) получим

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = 0, \quad \eta_{xx} + \eta_{yy} = 0. \tag{23}$$

Подставим выражения (22) в седьмое и девятое уравнений (21), а затем используем равенства (23). Имеем $a_x = a_y = 0$, откуда следует

$$a(x, y) = a = \mathrm{const}\,. \tag{24}$$

Система (21) с учетом соотношений (22), (24) принимает вид:

$$\begin{aligned} &\xi_x - \eta_y = 0,\\ &\xi_y + \eta_x = 0,\\ &b_{xx} + b_{yy} - awf'(w) - bf'(w) + f(w)(a - 2\eta_y) = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Для произвольной функции f, очевидно, $a=b=\eta_y=0$, тогда $\xi=C_1y+C_2$, $\eta=-C_1x+C_3$, $\zeta=0$. Полагая последовательно одну из констант равной единице, а остальные — нулю, находим, что исходное уравнение допускает три различных оператора:

$$\begin{aligned} &\mathrm{X}_1 = \partial_x && (C_2 = 1,\ C_1 = C_3 = 0);\\ &\mathrm{X}_2 = \partial_y && (C_3 = 1,\ C_1 = C_2 = 0);\\ &\mathrm{X}_3 = y\partial_x - x\partial_y && (C_1 = 1,\ C_2 = C_3 = 0). \end{aligned} \tag{26}$$

Первые два оператора соответствуют переносам вдоль осей x и y, третий — вращению.

Рассмотрим подробнее третье уравнение системы (25). Если выполняется равенство

$$(aw + b)f'(w) - f(w)(a - 2\eta_y) = 0, \tag{27}$$

то могут существовать другие решения системы (25), приводящие к операторам, отличным от (26). Надо исследовать два случая: $a \neq 0$ и $a = 0$.

Случай 1. Решая уравнение (27) при $a \neq 0$, получим

$$f(w) = C(aw + b)^{1-\frac{2\gamma}{a}},$$

где $\gamma=\eta_y=\mathrm{const}$, $b=\mathrm{const}$. Поэтому при $f(w)=w^k$ уравнение (20) допускает дополнительный оператор

$$\mathrm{X}_4 = x\partial_x + y\partial_y + \frac{2}{1-k}w\partial_w,$$

задающий неравномерное растяжение.

Случай 2. При $a = 0$ решение имеет вид

$$f(w) = Ce^{\lambda w},$$

где $\lambda = \mathrm{const}$. Тогда $b = -2\eta_y/\lambda$, а функции ξ и η удовлетворяют двум первым уравнениям (25), которые совпадают с условиями Коши — Римана для аналитических функций. Этим условиям удовлетворяют действительная и мнимая части любой аналитической функции $\Phi(z) = \xi(x,y) + i\eta(x,y)$ комплексной переменной $z = x + iy$. В частности, при $b = \mathrm{const}$ и $f(w) = e^w$ допускается дополнительный оператор

$$\mathrm{X}_4 = x\partial_x + y\partial_y - 2\partial_w,$$

который соответствует растяжению по x и y с одновременным сдвигом по w.

Пример 2. Рассмотрим нелинейное уравнение нестационарной теплопроводности

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\Big]. \tag{28}$$

В данном случае в условии инвариантности (17)–(18) надо положить

$$y = t, \quad F = w_t - f(w)w_{xx} - f'(w)w_x^2, \quad \zeta_{12} = \zeta_{22} = 0$$

и использовать выражения (9) и (14) для координат первого и второго продолжений ζ_1, ζ_2 и ζ_{11} при $y = t$. Заменив затем в полученном выражении w_t на правую часть уравнения (28), приравняем нулю коэффициенты при разных комбинациях оставшихся производных. В результате приходим к системе уравнений:

$$\begin{aligned}
&w_xw_{xx}\colon && 2f(w)[\eta_{wx}f(w)+\xi_w]+f'(w)\eta_x = 0,\\
&w_{xx}\colon && \zeta f'(w)-f^2(w)\eta_{xx}-f(w)(2\xi_x-\eta_t) = 0,\\
&w_xw_{xt}\colon && f(w)\eta_w = 0,\\
&w_{xt}\colon && f(w)\eta_x = 0,\\
&w_x^4\colon && f'(w)\eta_w+f(w)\eta_{ww} = 0,\\
&w_x^3\colon && 2[f'(w)]^2\eta_x+f(w)\xi_{ww}+f'(w)\xi_w+2f(w)f'(w)\eta_{wx} = 0,\\
&w_x^2\colon && f(w)\zeta_{ww}+f''(w)\zeta-2f(w)\xi_{wx}-f'(w)(2\xi_x-\eta_t)+f'(w)\zeta_w-f(w)f'(w)\eta_{ww} = 0,\\
&w_x\colon && 2f(w)\zeta_{wx}+2f'(w)\zeta_x-f(w)\xi_{xx}+\xi_t = 0,\\
&1\colon && \zeta_t-f(w)\zeta_{xx} = 0.
\end{aligned}$$

Здесь в первом столбце указаны комбинации производных, во втором столбце — соответствующие уравнения (приводятся с точностью до постоянного множителя); опущены тождественные выражения и дифференциальные следствия. Так как $f(w) \not\equiv 0$, то из третьего и четвертого уравнений системы следует, что $\eta = \eta(t)$. Тогда из первого и второго уравнения имеем

$$\xi = \xi(x, t), \qquad \zeta = \frac{f(w)(2\xi_x - \eta_t)}{f'(w)}.$$

С учетом найденных соотношений систему можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
&[ff'f''' - f(f'')^2 + (f')^2 f''](2\xi_x - \eta_t) = 0,\\
&f[4ff'' - 7(f')^2]\xi_{xx} - (f')^2\xi_t = 0,\\
&2f\xi_{xxx} - 2\xi_{xt} + \eta_{tt} = 0
\end{aligned}$$

(уравнения сокращены на общие множители, заведомо не равные нулю). В общем случае, при произвольной функции f, из первого уравнения следует $2\xi_x - \eta_t = 0$, из второго — $\xi_t = 0$. Из третьего уравнения получим $\xi = C_1 + C_2 x$, тогда $\eta = 2C_2 t + C_3$. Поэтому при произвольной функции f уравнение (28) допускает три оператора:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{X}_1 = \partial_x &&(C_1 = 1,\ C_2 = C_3 = 0);\\
&\mathrm{X}_2 = \partial_t &&(C_3 = 1,\ C_1 = C_2 = 0);\\
&\mathrm{X}_3 = 2t\partial_t + x\partial_x &&(C_2 = 1,\ C_1 = C_3 = 0).
\end{aligned}$$

Действуя аналогично, можно показать, что для следующих специальных видов функции f появляются дополнительные операторы:

1. $f = e^w$: $\mathrm{X}_4 = x\partial_x + 2\partial_w$.
2. $f = w^k$, $k \neq 0, -4/3$: $\mathrm{X}_4 = kx\partial_x + 2w\partial_w$.
3. $f = w^{-4/3}$: $\mathrm{X}_4 = 2x\partial_x - 3w\partial_w$, $\quad \mathrm{X}_5 = x^2\partial_x - 3xw\partial_w$.

Пример 3. Рассмотрим теперь нелинейное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right]. \tag{29}$$

В условии инвариантности (17)–(18) надо положить

$$y = t, \quad F = w_{tt} - f(w)w_{xx} - f'(w)w_x^2, \quad \zeta_2 = \zeta_{12} = 0$$

и использовать выражения (9) и (14) для координат первого и второго продолжений ζ_1 и ζ_{11}, ζ_{22} при $y = t$. Заменив в полученном выражении w_{tt} на правую часть уравнения (29), приравняем нулю коэффициенты при разных комбинациях оставшихся производных. Приходим к системе уравнений (опущены тождественные выражения и дифференциальные следствия):

$$\begin{aligned}
&w_x w_{xx}: && f(w)\xi_w = 0,\\
&w_t w_{xx}: && f(w)\eta_w = 0,\\
&w_{xx}: && f'(w)\zeta + 2f(w)(\eta_t - \xi_x) = 0,\\
&w_{xt}: && f(w)\eta_x - \xi_t = 0,\\
&w_x^3: && f'(w)\xi_w + f(w)\xi_{ww} = 0,\\
&w_x^2 w_t: && f(w)\eta_{ww} - f'(w)\eta_w = 0,\\
&w_x^2: && f(w)\zeta_{ww} + f'(w)\zeta_w + f''(w)\zeta - 2f(w)\xi_{wx} - 2f'(w)(\xi_x - \eta_t) = 0,\\
&w_x w_t: && 2f'(w)\eta_x + 2f(w)\eta_{wx} - 2\xi_{wt} = 0,\\
&w_x: && 2f'(w)\zeta_x - f(w)\xi_{xx} + 2f(w)\zeta_{wx} + \xi_{tt} = 0,\\
&w_t^2: && \zeta_{ww} - 2\eta_{wt} = 0,\\
&w_t: && f(w)\eta_{xx} + 2\zeta_{wt} - \eta_{tt} = 0,\\
&1: && \zeta_{tt} - f(w)\zeta_{xx} = 0.
\end{aligned}$$

Так как $f(w) \neq \mathrm{const}$, то из первых двух уравнений находим $\xi = \xi(x, t)$, $\eta = \eta(x, t)$. Поэтому десятое уравнение системы принимает вид $\zeta_{ww} = 0$ и приводит к выражению

$\zeta = a(x,t)w + b(x,t)$. В результате от системы остаются уравнения

$$wf'(w)a(x,y) + f'(w)b(x,y) + 2f(w)(\eta_t - \xi_x) = 0,$$
$$f'(w)a(x,y) + wf''(w)a(x,y) + f''(w)b(x,y) - 2f'(w)(\xi_x - \eta_t) = 0,$$
$$2f'(w)(a_x w + b_x) - f(w)\xi_{xx} + 2f(w)a_x = 0,$$
$$2a_t - \eta_{tt} = 0,$$
$$a_{tt}w + b_{tt} - f(w)(a_{xx}w + b_{xx}) = 0.$$

В случае произвольной функции $f(w)$ получим $a = b = 0$, $\eta_{tt} = 0$, $\xi_x - \eta_t = 0$. Интегрирование дает три оператора:

$$\mathrm{X}_1 = \partial_x, \quad \mathrm{X}_2 = \partial_t, \quad \mathrm{X}_3 = x\partial_x + t\partial_t.$$

Действуя аналогично, можно показать, что для следующих специальных видов функции f появляются дополнительные операторы:

1. $f = e^w$: $\mathrm{X}_4 = x\partial_x + 2\partial_w$.
2. $f = w^k$, $k \neq 0, -4/3, -4$: $\mathrm{X}_4 = kx\partial_x + 2w\partial_w$.
3. $f = w^{-4/3}$: $\mathrm{X}_4 = 2x\partial_x - 3w\partial_w$, $\mathrm{X}_5 = x^2\partial_x - 3xw\partial_w$.
4. $f = w^{-4}$: $\mathrm{X}_4 = 2x\partial_x - w\partial_w$, $\mathrm{X}_5 = t^2\partial_t + tw\partial_w$.

Найденные с помощью указанной процедуры симметрии дифференциальных уравнений позволяют получать их точные решения (см. следующий раздел).

Задачи и упражнения к разд. 7.2

1. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инварианты уравнения Бюргерса и потенциального уравнения Бюргерса:

a) $w_t + ww_x = aw_{xx}$,
b) $w_t + aw_x^2 = bw_{xx}$.

2. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инварианты обобщенного уравнения Бюргерса:

$w_t + f(w)w_x = aw_{xx}$.

Провести классификацию симметрий уравнения для всех $f(w)$.

3. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инварианты нестационарных уравнений теплопроводности с нелинейным источником:

a) $w_t = a(ww_x)_x + bw$,
b) $w_t = a(ww_x)_x + bw^2$,
c) $w_t = aw_{xx} + f(w)$.

Провести классификацию симметрий последнего уравнения для всех $f(w)$.

4. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инварианты нелинейных уравнений:

a) $w_t = w_{xx} + a(w_x)^2$,
b) $w_t = w_{xx} + aw(w_x)^2$.

5. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инварианты нелинейного волнового уравнения:

$w_{xt} = f(w)$.

Провести классификацию симметрий уравнения для всех $f(w)$.

6. Показать, что уравнение околозвукового течения газа

$$w_x w_{xx} + w_{yy} = 0$$

допускает операторы

$$\mathrm{X}_1 = \partial_x, \quad \mathrm{X}_2 = \partial_y, \quad \mathrm{X}_3 = \partial_w, \quad \mathrm{X}_4 = y\partial_w, \quad \mathrm{X}_5 = x\partial_x + 3w\partial_w, \quad \mathrm{X}_6 = y\partial_y - 2w\partial_w,$$

и найти соответствующие инварианты.

7. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инварианты уравнения движения нелинейной вязко-пластической среды:

$w_t = f(w_x)w_{xx}$.

Провести классификацию симметрий уравнения для всех $f(u)$.

8. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инварианты нелинейного уравнения теории фильтрации:

$w_t = [f(w_x)w_x]_x.$

Провести классификацию симметрий уравнения для всех $f(u)$.

9. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инварианты нелинейного телеграфного уравнения:

$w_{tt} + f(w)w_t = aw_{xx}.$

Провести классификацию симметрий уравнения для всех $f(w)$.

10. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инварианты уравнения нелинейного уравнения теплопроводности в анизотропных средах:

$[f(x)w_x]_x + [g(y)w_y]_y = h(w).$

Провести классификацию симметрий уравнения для всех $f(x)$ и $g(y)$ при произвольной $h(w)$.

Указание. Координаты допустимого оператора искать в виде $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, $\zeta = 0$.

11. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инварианты уравнения Калоджеро:

$w_{xt} = ww_{xx} + f(w_x).$

Провести классификацию симметрий уравнения для всех $f(u)$.

12. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инварианты нелинейного уравнения:

$w_{tt} = f(w_{xx}).$

Провести классификацию симметрий уравнения для всех $f(u)$.

13. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инварианты уравнения минимальных поверхностей:

$(1 + w_y^2)w_{xx} - 2w_x w_y w_{xy} + (1 + w_x^2)w_{yy} = 0.$

14. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инварианты уравнения Борна — Инфельда:

$(1 - w_t^2)w_{xx} + 2w_x w_t w_{xt} - (1 + w_x^2)w_{tt} = 0.$

15. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инварианты неоднородных уравнений Монжа — Ампера:

a) $w_{xy}^2 - w_{xx}w_{yy} = f(x),$

b) $w_{xy}^2 - w_{xx}w_{yy} = yf(x),$

c) $w_{xy}^2 - w_{xx}w_{yy} = y^2 f(x),$

d) $w_{xy}^2 - w_{xx}w_{yy} = e^y f(x).$

Провести классификацию симметрий уравнения для всех $f(x)$.

7.3. Использование симметрий уравнения для поиска точных решений. Инвариантные решения

7.3.1. Использование симметрий уравнения для построения однопараметрических решений

Пусть известно частное решение

$$w = g(x, y) \tag{30}$$

исследуемого уравнения. Покажем, что любая симметрия уравнения, задаваемая преобразованием вида (1), порождает однопараметрическое семейство решений (за исключением случаев, когда решение под действием этого преобразования переходит само в себя, см. разд. 7.3.2).

Действительно, поскольку уравнение (15) после перехода к новым переменным (1) принимает такой же вид (16), то преобразованное уравнение (16) имеет решение

$$\bar{w} = g(\bar{x}, \bar{y}). \tag{31}$$

Возвращаясь в (31) к старым переменным по формулам (1), получим однопараметрическое решение исходного уравнения (15).

Пример 4. Двумерное уравнение теплопроводности с экспоненциальным источником

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=e^w \tag{32}$$

допускает одномерное решение

$$w=\ln\frac{2}{x^2}. \tag{33}$$

Уравнение (32) допускает оператор $X_3=y\partial_x-x\partial_y$ (см. пример 1), который задает вращение на плоскости. Соответствующие преобразование приведено в табл. 6. Заменяя x в (33) на $\bar{x}$ (из табл. 6), получим однопараметрическое решение уравнения (32):

$$w=\ln\frac{2}{(x\cos\varepsilon+y\sin\varepsilon)^2},$$

где ε — свободный параметр.

7.3.2. Процедура построения инвариантных решений

Решение (30) уравнения (15) называется инвариантным относительно преобразования (1), если оно совпадает с решением (31), в котором надо вернуться к старым переменным по формулам (1). Сказанное означает, что инвариантное решение под действием данного преобразования переходит само в себя. Основные этапы построения инвариантных решений описаны ниже.

Инвариантные решения уравнения (15) ищем в неявном виде

$$I(x,y,w)=0,$$

поэтому $I(\bar{x},\bar{y},\bar{w})=0$. Находим однопараметрическое преобразование с оператором (3), координаты которого определяются из условия инвариантности (17) с помощью процедуры, описанной в разд. 7.2. Находим два функционально-независимых интеграла (6) характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений (5). Общее решение уравнения с частными производными (4) определяем по формуле (7). Затем полагаем в этой формуле $I=0$ и разрешаем полученное равенство относительно инварианта I_2. В результате имеем

$$I_2=\Phi(I_1), \tag{34}$$

где функции $I_1=I_1(x,y,w)$ и $I_2=I_2(x,y,w)$ известны,* а функция Φ подлежит определению. Соотношение (34) является основой для построения инвариантного решения: разрешая (34) относительно w и подставляя полученную зависимость в (15), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению для функции Φ.

Пример 5. Хорошо известным и очень важным частным случаем инвариантных решений являются автомодельные решения (см. разд. 3.3), которые основаны на преобразованиях растяжения. Соответствующий инфинитезимальный оператор и его инварианты имеют вид:

$$X=ax\frac{\partial}{\partial x}+by\frac{\partial}{\partial y}+cw\frac{\partial}{\partial w};\qquad I_1=|y|^a|x|^{-b},\quad I_2=|w|^a|x|^{-c}.$$

Подставляя инварианты в формулу (34), имеем $|w|^a|x|^{-c}=\Phi\bigl(|y|^a|x|^{-b}\bigr)$. Разрешив это равенство относительно w, получим вид искомого решения

$$w=|x|^{c/a}\Psi\bigl(y|x|^{-b/a}\bigr),$$

где $\Psi(z)$ — искомая функция.

* Обычно в качестве I_1 выбирают инвариант, который не зависит от w.

Для наглядности общая схема построения инвариантных решений для эволюционных уравнений второго порядка изображена на рис. 4. На рисунке опущено уравнение первого порядка с частными производными (4) для определения инвариантов инфинитезимального оператора (поскольку можно сразу перейти к соответствующей характеристической системе обыкновенных дифференциальных уравнений).

Исходное уравнение: $w_t = H(x, t, w, w_x, w_{xx})$

⇓ Записываем условие инвариантности

Получим: $\zeta_2 = \xi H_x + \eta H_t + \zeta H_w + \zeta_1 H_{w_x} + \zeta_{11} H_{w_{xx}}$

⇓ Заменяем w_t на H

Расщепляем по разным комбинациям производных w_x, w_{xx}, w_{xt}

⇓ Получаем определяющую систему

Решаем определяющую (переопределенную) систему УрЧП для ξ, η, ζ

⇓ Находим функции ξ, η, ζ

Записываем характеристическую систему ОДУ: $dx/\xi = dt/\eta = dw/\zeta$

⇓ Решаем характеристическую систему

Находим первые интегралы: $I_1(x, t, w) = C_1$ **и** $I_2(x, t, w) = C_2$

⇓ Инвариантное решение ищем в виде $I_2 = \Phi(I_1)$

Из исходного уравнения получаем ОДУ для функции $\Phi = \Phi(I_1)$

Рис. 4. Алгоритм построения инвариантных решений для эволюционных уравнений второго порядка. Использованы краткие обозначения: ОДУ — обыкновенные дифференциальные уравнения, УрЧП — уравнения с частными производными; $\xi = \xi(x, t, w)$, $\eta = \eta(x, t, w)$, $\zeta = \zeta(x, t, w)$; ζ_1, ζ_2, ζ_{11} — координаты продолженного оператора, которые определяются по формулам (9) и (14) при $y = t$.

7.3.3. Примеры построения инвариантных решений нелинейных уравнений

Пример 6. Рассмотрим опять стационарное уравнение теплопроводности с нелинейным источником:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(w).$$

1°. Исследуем случай $f = w^k$, когда уравнение допускает дополнительный оператор (см. пример 1):

$$\mathrm{X}_4 = x\partial_x + y\partial_y + \frac{2}{1-k} w\partial_w.$$

Чтобы найти инварианты этого оператора, надо рассмотреть линейное уравнение в частных производных первого порядка $\mathrm{X}_4 I = 0$, которое в развернутой форме записывается так:

$$x\frac{\partial I}{\partial x} + y\frac{\partial I}{\partial y} + \frac{2}{1-k}w\frac{\partial I}{\partial w} = 0.$$

Соответствующая ему характеристическая система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{1-k}{2}\frac{dw}{w}$$

имеет первые интегралы

$$y/x = C_1, \quad x^{2/(k-1)}w = C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Поэтому инвариантами оператора X_4 являются функции $I_1 = y/x$ и $I_2 = x^{2/(k-1)}w$.

Полагая $I_2 = \Phi(I_1)$ и выражая w, находим вид инвариантного (автомодельного) решения

$$w = x^{-2/(k-1)}\Phi(y/x), \tag{35}$$

где функция $\Phi(z)$ подлежит определению в ходе дальнейшего анализа. Подставляя (35) в исходное уравнение (20), получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, определяющее двухпараметрическое семейство решений

$$(k-1)^2(z^2+1)\Phi''_{zz} + 2(k^2-1)z\Phi'_z + 2(k+1)\Phi - (k-1)^2\Phi^k = 0,$$

где $z = y/x$. Его общее решение может быть найдено в квадратурах (в параметрической форме):

$$\begin{cases} z = \operatorname{tg} Q, \\ \Phi = \tau(\operatorname{tg}^2 Q + 1)^{1/(1-k)}, \end{cases} \quad \text{где} \quad Q = (k^2-1)\int \frac{d\tau}{\sqrt{2(k-1)^2\tau^{k+1} - 4(k+1)\tau^2 + A_1}} + A_2,$$

A_1, A_2 — произвольные постоянные, τ — параметр.

2°. Инвариантами оператора X_3 для рассматриваемого нелинейного уравнения теплопроводности являются $u = x^2 + y^2$ и w. Подстановка $w = w(u)$, $u = x^2 + y^2$ приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению, описывающему решения исходного уравнения, инвариантные относительно вращения

$$uw''_{uu} + w'_u = \tfrac{1}{4}f(w).$$

Замечание. В приложениях обычно в качестве инварианта вместо $u = x^2 + y^2$ используют полярный радиус $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Пример 7. Рассмотрим нелинейное уравнение нестационарной теплопроводности (28).

1°. При произвольной функции $f(w)$ уравнение допускает оператор (см. пример 2)

$$\mathrm{X}_3 = 2t\partial_t + x\partial_x.$$

Инварианты находятся из линейного уравнения в частных производных первого порядка $\mathrm{X}_3 I = 0$, которое в развернутой форме записывается так:

$$2t\frac{\partial I}{\partial t} + x\frac{\partial I}{\partial x} + 0\frac{\partial I}{\partial w} = 0.$$

Соответствующая ему характеристическая система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{2t} = \frac{dw}{0}$$

имеет первые интегралы

$$xt^{-1/2} = C_1, \quad w = C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Поэтому инвариантами оператора X_3 являются функции $I_1 = xt^{-1/2}$ и $I_2 = w$.

Полагая $I_2 = \Phi(I_1)$, получим

$$w = \Phi(z), \quad z = xt^{-1/2}, \tag{36}$$

где функция $\Phi(z)$ подлежит определению в ходе дальнейшего анализа. Подставляя (36) в исходное уравнение (28), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$2a[f(\Phi)\Phi'_z]'_z + z\Phi'_z = 0,$$

которое описывает инвариантное (автомодельное) решение.

ТАБЛИЦА 7

Допустимые операторы, инварианты и структура решений нелинейного уравнения нестационарной теплопроводности (28)

Функция $f(w)$	Операторы	Инварианты	Вид решения
Произвольная	$X_1 = \partial_x$, $X_2 = \partial_t$, $X_3 = 2t\partial_t + x\partial_x$	$I_1 = t,\ I_2 = w$, $I_1 = x,\ I_2 = w$, $I_1 = x^2/t,\ I_2 = w$	$w = w(t) = \mathrm{const}$, $w = w(x)$, $w = w(z),\ z = x^2/t$
e^w	$X_4 = x\partial_x + 2\partial_w$	$I_1 = t,\ I_2 = w - 2\ln\lvert x\rvert$	$w = 2\ln\lvert x\rvert + \theta(t)$
w^k $(k \neq 0, -\frac{4}{3})$	$X_4 = kx\partial_x + 2w\partial_w$	$I_1 = t,\ I_2 = w\lvert x\rvert^{-k/2}$	$w = \lvert x\rvert^{k/2}\theta(t)$
$w^{-4/3}$	$X_4 = 2x\partial_x - 3w\partial_w$, $X_5 = x^2\partial_x - 3xw\partial_w$	$I_1 = t,\ I_2 = wx^{2/3}$, $I_1 = t,\ I_2 = wx^3$	$w = x^{-2/3}\theta(t)$, $w = x^{-3}\theta(t)$

2°. Исследуем случай $f(w) = w^k$, когда уравнение допускает оператор

$$X_4 = kx\partial_x + 2w\partial_w.$$

Инварианты описываются линейным уравнением в частных производных первого порядка $X_4 I = 0$, которое в развернутой форме записывается так:

$$0\frac{\partial I}{\partial t} + kx\frac{\partial I}{\partial x} + 2w\frac{\partial I}{\partial w} = 0.$$

Соответствующая ему характеристическая система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dt}{0} = \frac{dx}{kx} = \frac{dw}{2w}$$

имеет первые интегралы

$$t = C_1, \quad x^{-2/k}w = C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Поэтому инвариантами оператора X_4 являются функции $I_1 = t$ и $I_2 = x^{-2/k}w$.

Полагая $I_2 = \theta(I_1)$ и разрешая это равенство относительно w, находим:

$$w = x^{2/k}\theta(t), \tag{37}$$

где функция $\theta(t)$ подлежит определению в ходе дальнейшего анализа. Подставляя (37) в исходное уравнение (28), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$2k\theta'_t = 2a(k+2)\theta^{k+1}.$$

Интегрируя, получим

$$\theta(t) = \left[A - \frac{2a(k+2)}{k}t\right]^{-1/k},$$

где A — произвольная постоянная. Таким образом, инвариантное относительно растяжения решение уравнения (28) при $f(w) = w^k$ имеет вид

$$w(x,t) = x^{2/k}\left[A - \frac{2a(k+2)}{k}t\right]^{-1/k}.$$

В табл. 7 приведена итоговая классификация симметрий уравнения (28) (см. примеры 2 и 7).

Пример 8. Рассмотрим нелинейное волновое уравнение (29).

Это уравнение при произвольной функции $f(w)$ допускает оператор (см. пример 3):

$$X_3 = t\partial_t + x\partial_x.$$

Инварианты находятся из линейного уравнения в частных производных первого порядка $X_3 I_1 = 0$, которое в развернутой форме записывается так:

$$t\frac{\partial I}{\partial t} + x\frac{\partial I}{\partial x} + 0\frac{\partial I}{\partial w} = 0.$$

ТАБЛИЦА 8

Допустимые операторы, инварианты и структура решений нелинейного волнового уравнения (29)

Функция $f(w)$	Операторы	Инварианты	Вид решения
Произвольная	$X_1=\partial_x$, $X_2=\partial_t$, $X_3=t\partial_t+x\partial_x$	$I_1=t,\ I_2=w$, $I_1=x,\ I_2=w$, $I_1=x/t,\ I_2=w$	$w=w(t)$, $w=w(x)$, $w=w(z),\ z=x/t$
e^w	$X_4=x\partial_x+2\partial_w$	$I_1=t,\ I_2=w-2\ln\lvert x\rvert$	$w=2\ln\lvert x\rvert+\theta(t)$
w^k $(k\neq 0,-\frac{4}{3},-4)$	$X_4=kx\partial_x+2w\partial_w$	$I_1=t,\ I_2=w\lvert x\rvert^{-k/2}$	$w=\lvert x\rvert^{k/2}\theta(t)$
$w^{-4/3}$	$X_4=2x\partial_x-3w\partial_w$, $X_5=x^2\partial_x-3xw\partial_w$	$I_1=t,\ I_2=wx^{2/3}$, $I_1=t,\ I_2=wx^3$	$w=x^{-2/3}\theta(t)$, $w=x^{-3}\theta(t)$
w^{-4}	$X_4=2x\partial_x-w\partial_w$, $X_5=t^2\partial_t+tw\partial_w$	$I_1=t,\ I_2=w\lvert x\rvert^{1/2}$, $I_1=x,\ I_2=w/t$	$w=\lvert x\rvert^{-1/2}\theta(t)$, $w=t\theta(x)$

Соответствующая ему характеристическая система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{x}=\frac{dt}{t}=\frac{dw}{0}$$

допускает первые интегралы

$$xt^{-1}=C_1, \quad w=C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Поэтому инвариантами оператора X_3 являются функции $I_1=xt^{-1}$ и $I_2=w$.

Полагая $I_2=\Phi(I_1)$, имеем

$$w=\Phi(y), \quad y=xt^{-1}. \tag{38}$$

Функцию $\Phi(y)$ найдем, подставляя (38) в исходное уравнение (29). В результате получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$[f(\Phi)\Phi'_y]'_y=(y\Phi'_y)'_y,$$

определяющее инвариантное (автомодельное) решение. Последнее уравнение имеет очевидный первый интеграл: $f(\Phi)\Phi'_y=y\Phi'_y+C$.

В табл. 8 приведена итоговая классификация симметрий уравнения (29) (см. примеры 3 и 8).

7.3.4. Решения, порождаемые линейными комбинациями допускаемых операторов

Если исследуемое уравнение допускает N операторов, то мы получаем, соответственно, N различных инвариантных решений. Однако, рассматривая операторы в отдельности, можно «потерять» решения, инвариантные относительно их линейной суперпозиции, которые могут иметь существенно иной вид. Чтобы найти все типы инвариантных решений, надо исследовать все возможные линейные комбинации допускаемых операторов.

Пример 9. Рассмотрим опять нелинейное уравнение нестационарной теплопроводности (28).

1°. Это уравнение для произвольной $f(w)$ допускает три оператора (см. табл. 7):

$$X_1=\partial_t, \quad X_2=\partial_x, \quad X_3=2t\partial_t+x\partial_x.$$

Соответствующие им инвариантные решения имеют вид:

$$w=F(x), \quad w=F(t), \quad w=F(x^2/t).$$

Однако перебор возможных линейных комбинаций дает еще оператор

$$X_{1,2} = X_1 + aX_2 = \partial_t + a\partial_x, \tag{39}$$

где $a \neq 0$ — произвольная постоянная. Инвариантное относительно этого оператора решение записывается так:

$$w = F(x - at). \tag{40}$$

Видно, что решение такого типа (бегущая волна) не содержится в инвариантных решениях, соответствующих «чистым» операторам X_1, X_2, X_3.

2°. Если $f(w) = e^w$, то к указанным выше трем операторам добавляется четвертый оператор $X_4 = x\partial_x + 2\partial_w$ (см. табл. 7). В этом случае линейная комбинация

$$X_{3,4} = X_3 + aX_4 = 2t\partial_t + (a+1)x\partial_x + 2a\partial_w$$

дает инвариантное решение

$$w = F(\xi) + a\ln t, \quad \xi = xt^{-\frac{a+1}{2}},$$

где функция $F = F(\xi)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(e^F F'_\xi)'_\xi + \tfrac{1}{2}(a+1)\xi F'_\xi = a.$$

3°. Если $f(w) = w^k$ ($k \neq 0, -4/3$), то к указанным в п. 1° трем операторам добавляется четвертый оператор $X_4 = kx\partial_x + 2w\partial_w$, и линейная комбинация

$$X_{3,4} = X_3 + aX_4 = 2t\partial_t + (ak+1)x\partial_x + 2aw\partial_w$$

порождает инвариантное (автомодельное) решение

$$w = t^a F(\zeta), \quad \zeta = xt^{-\frac{ak+1}{2}},$$

где функция $F = F(\zeta)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(F^k F'_\zeta)'_\zeta + \tfrac{1}{2}(ak+1)\zeta F'_\zeta = aF.$$

Приведенные в пп. 1°–3° инвариантные решения не содержатся в табл. 7. Это наглядно демонстрирует необходимость рассмотрения решений, порождаемых линейными комбинациями допускаемых операторов.

Пример 10. Рассмотрим теперь нелинейное волновое уравнение (29).

1°. Это уравнение для произвольной $f(w)$ допускает три оператора (см. табл. 8):

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_x, \quad X_3 = t\partial_t + x\partial_x,$$

а соответствующие им инвариантные решения имеют вид:

$$w = F(x), \quad w = F(t), \quad w = F(x/t).$$

Перебор возможных линейных комбинаций дает еще оператор (39). Инвариантное относительно этого оператора решение типа бегущей волны имеет вид (40) и не содержится в инвариантных решениях, соответствующих «чистым» операторам X_1, X_2, X_3.

2°. Если $f(w) = e^w$, то к указанным выше трем операторам добавляется четвертый оператор $X_4 = x\partial_x + 2\partial_w$ (см. табл. 8). В этом случае линейная комбинация

$$X_{3,4} = X_3 + aX_4 = t\partial_t + (a+1)x\partial_x + 2a\partial_w$$

($a \neq 0$ — произвольная постоянная) дает инвариантное решение

$$w = F(\xi) + 2a\ln t, \quad \xi = xt^{-a-1},$$

где функция $F = F(\xi)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(e^F F'_\xi)'_\xi = (a+1)^2\xi^2 F''_{\xi\xi} + (a+1)(a+2)\xi F'_\xi - 2a.$$

3°. Если $f(w) = w^k$ ($k \neq 0, -4/3, -4$), то появляется четвертый оператор $X_4 = kx\partial_x + 2w\partial_w$, и линейная комбинация

$$X_{3,4} = X_3 + aX_4 = t\partial_t + (ak+1)x\partial_x + 2aw\partial_w$$

дает инвариантное (автомодельное) решение

$$w = t^{2a} F(\zeta), \quad \zeta = xt^{-ak-1},$$

где функция $F = F(\zeta)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(F^k F'_\zeta)'_\zeta = (ak+1)^2\zeta^2 F''_{\zeta\zeta} + (ak+1)(ak+2-4a)\zeta F'_\zeta + 2a(2a-1)F.$$

Задачи и упражнения к разд. 7.3

1. Найти инвариантные решения уравнений параболического типа (эволюционных уравнений):

a) $w_t + ww_x = aw_{xx}$,
b) $w_t = w_{xx} + a(w_x)^2$,
c) $w_t = w_{xx} + aw(w_x)^2$,
d) $w_t = a(ww_x)_x + bw$,
e) $w_t = a(ww_x)_x + bw^2$,
f) $w_t + f(w)w_x = aw_{xx}$,
g) $w_t = aw_{xx} + f(w)$,
h) $w_t = f(w_x)w_{xx}$,
i) $w_t = [f(w_x)w_x]_x$.

Указание. Воспользоваться результатами предшествующего анализа симметрий указанных уравнений (см. задачи и упражнения к разд. 7.2).

2. Найти инвариантные решения уравнений:

a) $xw_x + yw_y = aw_{xx} + f(w)$,
b) $xw_x + yw_y = w_{xx} + w_{yy} + f(w)$.

Показать, что уравнение b) имеет неинвариантное решение типа бегущей волны $w = w(z)$, где $z = k_1x + k_2y$, k_1 и k_2 — произвольные постоянные (существование такого решения проверяется непосредственной подстановкой его в уравнение).

3. Найти инвариантные решения следующих уравнений:

a) $w_xw_{xx} + w_{yy} = 0$,
b) $w_{tt} + f(w)w_t = aw_{xx}$,
c) $w_{xt} = f(w)$,
d) $w_{xt} = ww_{xx} + f(w_x)$,
e) $w_{tt} = f(w_{xx})$,
f) $(1 + w_y^2)w_{xx} - 2w_xw_yw_{xy} + (1 + w_x^2)w_{yy} = 0$,
g) $(1 - w_t^2)w_{xx} + 2w_xw_tw_{xt} - (1 + w_x^2)w_{tt} = 0$,
h) $w_{xy}^2 - w_{xx}w_{yy} = f(x)$.

Указание. Воспользоваться результатами предшествующего анализа симметрий указанных уравнений (см. задачи и упражнения к разделу 7.2).

7.4. Некоторые обобщения. Уравнения старших порядков

7.4.1. Однопараметрические группы Ли точечных преобразований. Генератор группы

В этом разделе будем рассматривать функции, зависящие от $n+1$ переменных: $x_1, \ldots, x_n, w$. Введем краткое обозначение: $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Множество обратимых преобразований вида

$$\mathrm{T}_\varepsilon = \begin{cases} \bar{x}_i = \varphi_i(x, w, \varepsilon), & \bar{x}_i|_{\varepsilon=0} = x_i, \\ \bar{w} = \psi(x, w, \varepsilon), & \bar{w}|_{\varepsilon=0} = w, \end{cases} \tag{41}$$

где φ_i, ψ — достаточно гладкие функции своих аргументов ($i = 1, \ldots, n$), а ε — вещественный параметр, называется однопараметрической непрерывной точечной группой преобразований G, если для любых ε_1 и ε_2 выполняется соотношение $\mathrm{T}_{\varepsilon_1} \circ \mathrm{T}_{\varepsilon_2} = \mathrm{T}_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$, т. е. последовательное применение двух преобразований вида (1) с параметрами ε_1 и ε_2 эквивалентно одному преобразованию того же вида с параметром $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

Далее будут рассматриваться локальные однопараметрические непрерывные группы Ли точечных преобразований (кратко — точечные группы), соответствующие бесконечно малому преобразованию (41) при $\varepsilon \to 0$. Разложение соотношений (41) для $\bar{x}_i$ и $\bar{w}$ в ряд Тейлора по параметру ε в окрестности точки $\varepsilon = 0$ дает

$$\bar{x}_i \simeq x_i + \varepsilon\xi_i(x,w), \quad \bar{w} \simeq w + \varepsilon\zeta(x,w), \tag{42}$$

где

$$\xi_i(x,w) = \left.\frac{\partial\varphi_i(x,w,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}, \quad \zeta(x,w) = \left.\frac{\partial\psi(x,w,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}.$$

Линейный дифференциальный оператор первого порядка

$$\mathrm{X} = \xi_i(x,w)\frac{\partial}{\partial x_i} + \zeta(x,w)\frac{\partial}{\partial w}, \tag{43}$$

соответствующий бесконечно малому преобразованию (42), называется генератором группы (или инфинитезимальным оператором, или оператором группы). В формуле (43) по индексу i ведется суммирование.

Теорема Ли. Пусть известны координаты $\xi_i(x,w)$, $\zeta(x,w)$ генератора группы (43). Тогда однопараметрическую группу преобразований (41) можно полностью восстановить путем решения уравнений Ли

$$\frac{d\varphi_i}{d\varepsilon} = \xi_i(\varphi,\psi), \quad \frac{d\psi}{d\varepsilon} = \zeta(\varphi,\psi)$$

с начальными условиями

$$\varphi_i|_{\varepsilon=0} = x_i, \quad \psi|_{\varepsilon=0} = w.$$

При записи уравнений Ли использовано краткое обозначение: $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.

Замечание. Использование понятия локальной однопараметрической группы точечных преобразований послужило основой для введения и широкого распространения терминов «групповой анализ дифференциальных уравнений», «групповые методы» и др. (вместо используемого в данной книге термина «метод исследования симметрий дифференциальных уравнений»).

7.4.2. Инварианты группы. Локальные преобразования производных

Универсальным инвариантом (кратко — инвариантом) группы (41) и оператора (43) называется функция $I(x,w)$, удовлетворяющая условию $I(\bar{x},\bar{w}) = I(x,w)$. Разложение по малому параметру ε приводит к линейному уравнению с частными производными для I:

$$\mathrm{X}I = \xi_i(x,w)\frac{\partial I}{\partial x_i} + \zeta(x,w)\frac{\partial I}{\partial w} = 0. \tag{44}$$

Из теории уравнений с частными производными первого порядка следует, что группа (41) и оператор (43) имеют n функционально независимых универсальных инвариантов. Это, в свою очередь, означает, что всякая функция $F(x,w)$, инвариантная относительно группы (41), может быть записана в виде функции n инвариантов.

Производные при переходе к новым переменным (41) преобразуются следующим образом:

$$\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}_i} \simeq \frac{\partial w}{\partial x_i} + \varepsilon\zeta_i, \quad \frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{x}_i\partial\bar{x}_j} \simeq \frac{\partial^2 w}{\partial x_i\partial x_j} + \varepsilon\zeta_{ij}, \quad \frac{\partial^3\bar{w}}{\partial\bar{x}_i\partial\bar{x}_j\partial\bar{x}_k} \simeq \frac{\partial^3 w}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k} + \varepsilon\zeta_{ijk}, \quad \ldots \tag{45}$$

Здесь координаты первых трех продолжений ζ_i, ζ_{ij}, ζ_{ijk} определяются по формулам

$$\begin{aligned}\zeta_i &= D_i(\zeta) - p_s D_i(\xi_s),\\ \zeta_{ij} &= D_j(\zeta_i) - q_{is} D_j(\xi_s),\\ \zeta_{ijk} &= D_k(\zeta_{ij}) - r_{ijs} D_k(\xi_s),\end{aligned} \tag{46}$$

где по индексу s ведется суммирование и использованы краткие обозначения для частных производных

$$p_i = \frac{\partial w}{\partial x_i}, \quad q_{ij} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}, \quad r_{ijk} = \frac{\partial^3 w}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k},$$
$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial}{\partial w} + q_{ij} \frac{\partial}{\partial p_j} + r_{ijk} \frac{\partial}{\partial q_{jk}} + \ldots,$$

D_i — оператор полного дифференцирования по переменной x_i.

7.4.3. Условие инвариантности. Процедура расщепления. Инвариантные решения

Будем рассматривать дифференциальные уравнения в частных производных порядка m с n независимыми переменными

$$F\left(x, w, \frac{\partial w}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^3 w}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}, \ldots\right) = 0, \tag{47}$$

где $i, j, k = 1, \ldots, n$.

Групповой анализ уравнения (47) проводится в несколько этапов. На первом этапе потребуем, чтобы уравнение (47) было инвариантным (сохраняло вид) относительно преобразований (41), т. е.

$$F\left(\bar{x}, \bar{w}, \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}_i}, \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x_i \partial \bar{x}_j}, \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial x_i \partial \bar{x}_j \partial \bar{x}_k}, \ldots\right) = 0. \tag{48}$$

Разложим это выражение в ряд при $\varepsilon \to 0$ с учетом равенства нулю главного члена разложения (47). Используя формулы (41), (45) и удерживая члены первого порядка малости по ε, получим

$$\underset{m}{\mathrm{X}} F\left(x, w, \frac{\partial w}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^3 w}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}, \ldots\right)\bigg|_{F=0} = 0. \tag{49}$$

Здесь введено краткое обозначение:

$$\underset{m}{\mathrm{X}} F = \xi_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + \zeta \frac{\partial F}{\partial w} + \zeta_i \frac{\partial F}{\partial w_{x_i}} + \zeta_{ij} \frac{\partial F}{\partial w_{x_i x_j}} + \zeta_{ijk} \frac{\partial F}{\partial w_{x_i x_j x_k}} + \cdots, \tag{50}$$

где координаты первых трех продолжений $\zeta_i, \zeta_{ij}, \zeta_{ijk}$ определяются по формулам (45), а по повторяющимся индексам ведется суммирование. Соотношение (49) называется условием инвариантности, а оператор $\underset{m}{\mathrm{X}}$ — m раз продолженным генератором группы; в формулу (50) последними входят частные производные от F по всем производным порядка m от w.

На втором этапе в (49) исключается одна из старших производных порядка m с помощью уравнения (47). После этого полученное равенство записывается как полином по «независимым переменным» — всевозможным комбинациям оставшихся производных, представляющим собой произведения различных степеней величин w_x, w_y, w_{xx}, w_{xy}, … После этого все коэффициенты полинома (они зависят только от x, w, ξ_i, ζ и не зависят от производных w) приравнивают нулю. В результате условие инвариантности расщепляется до переопределенной линейной определяющей системы.

На третьем этапе решается определяющая система и находятся допустимые координаты ξ_i, ζ генератора группы (42).

Для уравнений m-го порядка с двумя независимыми переменными инвариантные решения вводятся таким же образом, что и для уравнений второго порядка. В этом случае процедура построения инвариантых решений (при известных координатах генератора группы) полностью совпадает с процедурой, подробно описанной в разд. 7.3.

Задачи и упражнения к разд. 7.4

1. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инвариантные решения уравнения Кортевега — де Фриза:

$$w_t + w_{xxx} - 6ww_x = 0.$$

2. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инвариантные решения модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза:

$$w_t + w_{xxx} - 6w^2 w_x = 0.$$

3. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инвариантные решения уравнений типа Кортевега — де Фриза:

a) $w_t + w_{xxx} + aww_x + bt^{-1}w = 0,$

b) $w_t + w_{xxx} + aw_x^2 = 0,$

c) $w_t + w_{xxx} + aw_x^3 = 0.$

4. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инвариантные решения обобщенного уравнения Кортевега — де Фриза:

$$w_t + w_{xxx} + f(w)w_x = 0.$$

Провести классификацию симметрий уравнения для всех $f(w)$.

5. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инвариантные решения уравнения, которое встречается в гидродинамике вязкой жидкости:

$$w_{xt} + w_x^2 - ww_{xx} = \nu w_{xxx}.$$

6. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инвариантные решения уравнения, которое встречается в гидродинамике вязкой жидкости:

$$w_{xt} + w_x^2 - ww_{xx} = \nu w_{xxx} + f(t).$$

Провести классификацию симметрий уравнения для всех $f(t)$.

7. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инвариантные решения уравнения стационарного безградиентного гидродинамического пограничного слоя:

$$w_y w_{xy} - w_x w_{yy} = w_{yyy}.$$

8. Найти допустимые инфинитезимальные операторы и инвариантные решения уравнения стационарного градиентного гидродинамического пограничного слоя:

$$w_y w_{xy} - w_x w_{yy} = w_{yyy} + f(x).$$

Провести классификацию симметрий уравнения для всех $f(x)$.

7.5. Симметрии систем уравнений математической физики

7.5.1. Основные соотношения, используемые при анализе симметрий систем уравнений

Анализ симметрий (групповой анализ) систем уравнений с частными производными отличается от анализа одиночных уравнений только тем, что в операторе (3) и его продолжениях необходимо учесть все зависимые и независимые переменные. Ниже приведены полезные формулы, которые наиболее часто используются на практике при анализе симметрий систем уравнений.

Для систем, состоящих из двух уравнений с двумя независимыми переменными x, y и искомыми величинами $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, допустимый оператор ищется в виде

$$\mathrm{X} = \xi(x, y, u, v)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y, u, v)\frac{\partial}{\partial y} + \zeta(x, y, u, v)\frac{\partial}{\partial u} + \chi(x, y, u, v)\frac{\partial}{\partial v}. \quad (51)$$

В общем случае второе продолжение оператора (51) на «независимые переменные» u_x, u_y, v_x, v_y и u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, v_{xx}, v_{xy}, v_{yy} записывается так:

$$\begin{aligned}\underset{2}{\mathrm{X}} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \zeta\frac{\partial}{\partial u} + \chi\frac{\partial}{\partial v} + \zeta_1\frac{\partial}{\partial u_x} + \zeta_2\frac{\partial}{\partial u_y} + \chi_1\frac{\partial}{\partial v_x} + \chi_2\frac{\partial}{\partial v_y} + \\ + \zeta_{11}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \zeta_{12}\frac{\partial}{\partial u_{xy}} + \zeta_{22}\frac{\partial}{\partial u_{yy}} + \chi_{11}\frac{\partial}{\partial v_{xx}} + \chi_{12}\frac{\partial}{\partial v_{xy}} + \chi_{22}\frac{\partial}{\partial v_{yy}}.\end{aligned} \quad (52)$$

Координаты первого продолжения вычисляются по формулам, аналогичным формулам (9) из разд. 7.1.2:

$$\begin{aligned}&\zeta_1 = D_x(\zeta) - u_x D_x(\xi) - u_y D_x(\eta), \qquad &\chi_1 = D_x(\chi) - v_x D_x(\xi) - v_y D_x(\eta),\\ &\zeta_2 = D_y(\zeta) - u_x D_y(\xi) - u_y D_y(\eta), \qquad &\chi_2 = D_y(\chi) - v_x D_y(\xi) - v_y D_y(\eta),\end{aligned} \quad (53)$$

а координаты второго продолжения — по формулам

$$\begin{aligned}&\zeta_{11} = D_x(\zeta_1) - u_{xx} D_x(\xi) - u_{xy} D_x(\eta), \qquad &\chi_{11} = D_x(\chi_1) - v_{xx} D_x(\xi) - v_{xy} D_x(\eta),\\ &\zeta_{12} = D_y(\zeta_1) - u_{xx} D_y(\xi) - u_{xy} D_y(\eta), \qquad &\chi_{12} = D_y(\chi_1) - v_{xx} D_y(\xi) - v_{xy} D_y(\eta),\\ &\zeta_{22} = D_y(\zeta_2) - u_{xy} D_y(\xi) - u_{yy} D_y(\eta), \qquad &\chi_{22} = D_y(\chi_2) - v_{xy} D_y(\xi) - v_{yy} D_y(\eta),\end{aligned} \quad (54)$$

где D_x и D_y — операторы полного дифференцирования по независимым переменным:

$$\begin{aligned}D_x &= \frac{\partial}{\partial x} + u_x\frac{\partial}{\partial u} + v_x\frac{\partial}{\partial v} + u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_x} + u_{xy}\frac{\partial}{\partial u_y} + v_{xx}\frac{\partial}{\partial v_x} + v_{xy}\frac{\partial}{\partial v_y} + \cdots,\\ D_y &= \frac{\partial}{\partial y} + u_y\frac{\partial}{\partial u} + v_y\frac{\partial}{\partial v} + u_{xy}\frac{\partial}{\partial u_x} + u_{yy}\frac{\partial}{\partial u_y} + v_{xy}\frac{\partial}{\partial v_x} + v_{yy}\frac{\partial}{\partial v_y} + \cdots.\end{aligned}$$

При анализе симметрий систем уравнений с частными производными требуется, чтобы каждое уравнение рассматриваемой системы удовлетворяло условию инвариантности, которое задается продолженным оператором (52).

7.5.2. Симметрии уравнений стационарного гидродинамического пограничного слоя

Проиллюстрируем технику анализа симметрий нелинейных систем уравнений с частными производными с помощью формул (51)–(54) на конкретном примере.

Пример 11. Рассмотрим систему уравнений стационарного гидродинамического пограничного слоя

$$\begin{aligned}uu_x + vu_y + f(x) &= u_{yy},\\ u_x + v_y &= 0.\end{aligned} \quad (55)$$

Определяющие соотношения для координат допустимого оператора. Будем искать оператор, допускаемый системой (55), в виде (51). Второе продолжение оператора (51) описывается формулой (52), в которой следует положить

$$\chi_1 = 0, \quad \zeta_{11} = \zeta_{12} = 0, \quad \chi_{11} = \chi_{12} = \chi_{22} = 0. \quad (56a)$$

(Здесь учтено, что в исследуемую систему входят только производные u_x, u_y, v_y и u_{yy}.) Ненулевые координаты продолженного оператора (52) вычисляются по формулам (53) и (54):

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= \zeta_x+\zeta_u u_x+\zeta_v v_x-u_x(\xi_x+\xi_u u_x+\xi_v v_x)-u_y(\eta_x+\eta_u u_x+\eta_v v_x),\\
\zeta_2 &= \zeta_y+\zeta_u u_y+\zeta_v v_y-u_x(\xi_y+\xi_u u_y+\xi_v v_y)-u_y(\eta_y+\eta_u u_y+\eta_v v_y),\\
\chi_2 &= \chi_y+\chi_u u_y+\chi_v v_y-v_x(\xi_y+\xi_u u_y+\xi_v v_y)-v_y(\eta_y+\eta_u u_y+\eta_v v_y),\\
\zeta_{22} &= \zeta_{yy}+2\zeta_{vy}v_y+\zeta_{vv}(v_y)^2+[2\zeta_{uy}-\eta_{yy}+2(\zeta_{uv}-\eta_{vy})v_y-\eta_{vv}(v_y)^2]u_y-\\
&\quad-[\xi_{yy}+2(\xi_{uy}+\xi_{uv}v_y)u_y+2\xi_{vy}v_y+\xi_{uu}(u_y)^2+\xi_{vv}(v_y)^2]u_x+\\
&\quad-(\zeta_{uu}-2\eta_{uy}-2\eta_{uv}v_y)(u_y)^2-\eta_{uu}(u_y)^3-2(\xi_y+\xi_u u_y+\xi_v v_y)u_{xy}-\\
&\quad-[2\eta_y-\zeta_u-\zeta_v+(\xi_u+\xi_v)u_x+(3\eta_u+\eta_v)u_y+2\eta_v v_y]u_{yy}.
\end{aligned}\tag{56b}$$

Подействуем продолженным оператором (52) с учетом (56a), (56b) на систему (55). Исключение в полученных выражениях производных u_{yy} и v_y с помощью соответственно первого и второго уравнений системы (55) дает два условия инвариантности. После приведения подобных членов и перегруппировки слагаемых приходим к определяющим уравнениям:

$$\begin{aligned}
&[-3\xi_v u_x+(2\xi_u-\eta_v)u_y+2\xi_y+\zeta_v]u_{xy}+\xi_{vv}u_x^3-(2\xi_{uv}-\eta_{vv})u_x^2u_y+\\
&\quad+(\xi_{uu}-2\eta_{uv})u_xu_y^2+\eta_{uu}u_y^3+(v\xi_v-2u\eta_v-\zeta_{vv}-2\xi_{yv})u_x^2+\\
&\quad+(2\zeta_{uv}+2u\eta_u-2\eta_{yv}-v\eta_v+2\xi_{yu})u_xu_y+(2v\eta_u+2\eta_{yu}-\zeta_{uu})u_y^2-\\
&\quad-u\xi_v u_xv_x-u\eta_v u_yv_x+(-v\xi_y-v\zeta_v-u\xi_x-2f\eta_v+2u\eta_y+f\xi_u+\\
&\quad+\zeta+2\zeta_{yv}+\xi_{yy})u_x+(v\eta_y-u\eta_x+3f\eta_u-2\zeta_{yu}+\chi+\eta_{yy})u_y+\\
&\quad+u\zeta_v v_x+f'_x\xi-\zeta_{yy}+u\zeta_x+v\zeta_y-f\zeta_u+2f\eta_y=0 \qquad (\textit{первое уравнение}),\\
&-(\xi_u+\eta_v)u_x^2+(\zeta_u-\chi_v+\eta_y-\xi_x)u_x-(\eta_v+\xi_u)u_yv_x+\zeta_v v_x+\\
&\quad+(\chi_u-\eta_x-\xi_y)u_y+\zeta_x+\chi_y=0 \qquad (\textit{второе уравнение}).
\end{aligned}$$

Расщепление этих уравнений по «независимым переменным» приводит к двум переопределенным системам, которые приведены ниже и должны выполняться одновременно.

Первая система:

$$\begin{aligned}
u_xu_{xy}&: && 3\xi_v=0,\\
u_yu_{xy}&: && 2\xi_u-\eta_v=0,\\
u_{xy}&: && 2\xi_y+\zeta_v=0,\\
u_x^3&: && \xi_{vv}=0,\\
u_x^2u_y&: && 2\xi_{uv}-\eta_{vv}=0,\\
u_xu_y^2&: && \xi_{uu}-2\eta_{uv}=0,\\
u_y^3&: && \eta_{uu}=0,\\
u_x^2&: && v\xi_v-2u\eta_v-\zeta_{vv}-2\xi_{yv}=0,\\
u_xu_y&: && 2\zeta_{uv}+2u\eta_u-2\eta_{yv}-v\eta_v+2\xi_{yu}=0,\\
u_y^2&: && 2v\eta_u+2\eta_{yu}-\zeta_{uu}=0,\\
u_xv_x&: && u\xi_v=0,\\
u_yv_x&: && u\eta_v=0,\\
u_x&: && \xi_{yy}-v\xi_y-v\zeta_v-u\xi_x-2f\eta_v+2u\eta_y+f\xi_u+\zeta+2\zeta_{yv}=0,\\
u_y&: && \eta_{yy}+v\eta_y-u\eta_x+3f\eta_u-2\zeta_{yu}+\chi=0,\\
v_x&: && u\zeta_v=0,\\
1&: && f'_x\xi-\zeta_{yy}+u\zeta_x+v\zeta_y-f\zeta_u+2f\eta_y=0.
\end{aligned}$$

Вторая система:

$$\begin{aligned}
u_x^2&: && \xi_u+\eta_v=0,\\
u_yv_x&: && \eta_v+\xi_u=0,\\
u_x&: && \zeta_u-\chi_v+\eta_y-\xi_x=0,\\
u_y&: && \chi_u-\eta_x-\xi_y=0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_x\colon &\quad \zeta_v = 0, \\ 1\colon &\quad \zeta_x + \chi_y = 0. \end{aligned}$$

В первой системе из 11-го и 12-го уравнений следует, что $\xi = \xi(x,y,u)$, $\eta = \eta(x,y,u)$, откуда с учетом второго уравнения имеем $\xi = \xi(x,y)$. Далее, из 15-го уравнения следует, что $\zeta = \zeta(x,y,u)$, что с учетом третьего уравнения дает $\xi = \xi(x)$. При этом уравнения 1, 4–6 удовлетворяются тождественно. Наконец, из 9-го уравнения следует $\eta_u = 0$, поэтому $\eta = \eta(x,y)$ (7-е уравнение при этом удовлетворяется тождественно). Таким образом, имеем

$$\xi = \xi(x), \quad \eta = \eta(x,y), \quad \zeta = \zeta(x,y,u), \tag{57}$$

и оставшиеся уравнения первой системы записываются так:

$$\begin{aligned} u_y^2\colon &\quad \zeta_{uu} = 0, \\ u_x\colon &\quad -u\xi'_x + 2u\eta_y + \zeta = 0, \\ u_y\colon &\quad \eta_{yy} + v\eta_y - u\eta_x - 2\zeta_{yu} + \chi = 0, \\ 1\colon &\quad f'_x\xi - \zeta_{yy} + u\zeta_x + v\zeta_y - f\zeta_u + 2f\eta_y = 0. \end{aligned} \tag{58}$$

Во второй системе в силу (57) тождественно выполняются уравнения 1, 2, 5, а остальные принимают вид:

$$\begin{aligned} u_x\colon &\quad \zeta_u - \chi_v + \eta_y - \xi_x = 0, \\ u_y\colon &\quad \chi_u - \eta_x = 0, \\ 1\colon &\quad \zeta_x + \chi_y = 0. \end{aligned} \tag{59}$$

Из первого уравнения (58) следует, что $\zeta = \zeta_1(x,y)u + \zeta_0(x,y)$. Подстановка этого выражения во второе уравнение (58) и расщепление по переменной u дает $\zeta_0 \equiv 0$. Аналогичная процедура с четвертым уравнением (58) позволяет найти $\zeta_1 = C_1 = \mathrm{const}$, т. е.

$$\zeta = C_1 u. \tag{60}$$

Учитывая эту зависимость, из второго уравнения (58) и последнего уравнения (59) имеем

$$\eta = \tfrac{1}{2}(\xi_x - C_1)y + h(x), \qquad \chi = \chi(x,u,v), \tag{61}$$

где $h = h(x)$ — произвольная функция. Подстановка выражений (60), (61) в третье и четвертое уравнения системы (58) и второе уравнение системы (59) приводит к следующей системе из трех уравнений:

$$\begin{aligned} &\chi = \tfrac{1}{2}\xi''_{xx}yu + h'_x u - \tfrac{1}{2}(\xi'_x - C_1)v, \\ &f'_x\xi + f(\xi'_x - 2C_1) = 0, \\ &\chi_u - \eta_x = 0. \end{aligned} \tag{62}$$

(Первое уравнение (59) совпадает с первым уравнением (62), продифференцированным по v.)

Так как χ не зависит от y, то из первого уравнения (62) имеем $\xi''_{xx} = 0$, т. е.

$$\xi = C_2 x + C_3.$$

Подставим это выражение в первое и последнее уравнения системы (62) и учтем зависимости (60) и (61). Переобозначив константы, находим координаты оператора (51):

$$\xi = C_1 + (C_2 + 2C_3)x, \quad \eta = C_3 y + h(x), \quad \zeta = C_2 u, \quad \chi = -C_3 v + h'(x)u. \tag{63}$$

К этим формулам надо добавить условие

$$\bigl[C_1 + (C_2 + 2C_3)x\bigr]f'(x) = (C_2 - 2C_3)f(x), \tag{64}$$

которое является следствием второго уравнения (62) и содержит функцию $f(x)$ и постоянные интегрирования C_n.

Симметрии уравнений гидродинамического пограничного слоя. Используя (64), проведем классификацию симметрий системы уравнений пограничного слоя (55) для всех $f(x)$.

1°. Чтобы удовлетворить условию (64) при произвольной функции $f(x)$, надо положить $C_1 = C_2 = C_3 = 0$. Подставляя эти значения в (63), находим координаты $\xi = \zeta = 0$, $\eta = h(x)$, $\chi = h'(x)u$, которые определяют допустимый оператор:

$$X_0 = h(x)\partial_y + h'(x)u\partial_v. \tag{65}$$

ТАБЛИЦА 9

Симметрии системы уравнений гидродинамического пограничного слоя (55), $a = \mathrm{const}$

Функция $f(x)$	Оператор	Инвариант 1	Инвариант 2	Инвариант 3
Произвольная	$X_0 = h(x)\partial_y + h'(x)u\partial_v$	x	u	$v - (\ln h)'_x yu$
0	$X_1 = \partial_x$ $X_2 = x\partial_x + u\partial_u$ $X_3 = 2x\partial_x + y\partial_y - v\partial_v$	y y $yx^{-1/2}$	u u/x u	v v $x^{1/2}v$
a	$X_1 = \partial_x$ $X_2 = 4x\partial_x + y\partial_y + 2u\partial_u - v\partial_v$	y $yx^{-1/4}$	u $ux^{-1/2}$	v $x^{1/4}v$
ae^x	$X_1 = 2x\partial_x - y\partial_y + 2u\partial_u - v\partial_v$	$yx^{1/2}$	u/x	$x^{1/2}v$
ax^n, $n \neq 0$	$X_1 = 4x\partial_x - (n-1)y\partial_y +$ $+ 2(n+1)u\partial_u + (n-1)v\partial_v$	$yx^{\frac{n-1}{4}}$	$x^{-\frac{n+1}{2}}u$	$x^{\frac{1-n}{4}}v$

2°. При $f(x) = 0$ условие (64) выполняется тождественно при любых C_n и с учетом (63) дает три оператора:

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_x && (C_1 = 1,\ C_2 = C_3 = 0,\ h = 0); \\ X_2 &= x\partial_x + u\partial_u && (C_2 = 1,\ C_1 = C_3 = 0,\ h = 0); \\ X_3 &= 2x\partial_x + y\partial_y - v\partial_v && (C_3 = 1,\ C_1 = C_2 = 0,\ h = 0), \end{aligned} \tag{66}$$

к которым надо добавить оператор (65) (этот оператор добавляется и во всех других случаях).

3°. При $f(x) \equiv 1$ из условия (64) получим $C_2 = 2C_3$. В этом случае, помимо оператора (65), допускаются два оператора: X_1, $2X_2 + X_3$, где X_n определяются формулами (66).

4°. При $f(x) = \pm e^x$ из условия (64) находим $C_1 = -4C_3$, $C_2 = -2C_3$, что соответствует одному оператору $4X_1 + 2X_2 - X_3$.

5°. При $f(x) = \pm x^n$ $(n \neq 0)$ имеем $C_1 = 0$, $C_2 = -\dfrac{2(1+n)}{(1-n)}$, что дает один оператор $2(n+1)X_2 - (n-1)X_3$.

Итоговые результаты классификации симметрий системы уравнений пограничного слоя (55) и соответствующие инварианты представлены в табл. 9. Инварианты I_n определяются первыми интегралами характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{du}{\zeta} = \frac{dv}{\chi},$$

соответствующей линейному уравнению с частными производными первого порядка $XI = 0$.

Замечание 1. Первый инвариант выбирался линейным по переменной y (когда это можно было сделать). Это упрощает выкладки, поскольку в уравнения входит старшая производная по y, а порядок производных по x меньше. Напомним, что вместо инвариантов I_n можно использовать $F_n(I_n)$, где функции F_n выбираются из соображений удобства.

Замечание 2. Симметрия X_0 соответствует инвариантности системы уравнений (55) по отношению к преобразованию

$$x = \bar{x}, \quad y = \bar{y} + h(x), \quad u = \bar{u}, \quad v = \bar{v} - h'_x u,$$

где $h = h(x)$ — произвольная функция.

Точные решения уравнений гидродинамического пограничного слоя. Точные решения ищутся в виде

$$I_2 = \Phi(I_1), \quad I_3 = \Psi(I_1), \tag{67}$$

где I_n — инварианты, а функции Φ и Ψ определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая получается в результате подстановки выражений (67) в исходную систему уравнений (55).

1°. Для произвольной функции $f(x)$ точное решение ищем в виде (см. первую строку в табл. 9)

$$u = \Phi(x), \quad v = (\ln h)'_x yu + \Psi(x). \tag{68}$$

Подставив выражения (68) в (55), приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая легко интегрируется. Имеем

$$\Phi(x) = \pm\Big[C_1 - 2\int f(x)\,dx\Big]^{1/2}, \quad h(x) = \frac{C_1}{\Phi(x)}, \quad \Psi(x)\text{ — произвольная функция}, \tag{69}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Решение (68)–(69) соответствует невязкому течению жидкости, поскольку $u_{yy} = 0$.

2°. При $f(x) = 0$ инварианты первого оператора в табл. 9 дают одномерное решение, которое не зависит от координаты x. Подставив $u = u(y)$, $v = v(y)$ в систему (55) и интегрируя, получим

$$\begin{aligned} &u = C_2\exp(C_1 y) + C_3, \quad v = C_1, \qquad \text{если } C_1 \neq 0;\\ &u = C_2 y + C_3, \qquad\qquad\quad\; v = 0, \qquad\; \text{если } C_1 = 0. \end{aligned}$$

При $f(x) = 0$ инварианты второго оператора в табл. 9 соответствуют решению вида

$$u = x\varphi(y), \quad v = \psi(y), \tag{70}$$

где функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \varphi^2 + \psi\varphi'_y &= \varphi''_{yy},\\ \varphi + \psi'_y &= 0, \end{aligned}$$

которая возникает в результате подстановки выражений (70) в исходную систему (55).

При $f(x) = 0$ инварианты третьего оператора (см. табл. 9) приводят к автомодельному решению

$$u = U(\theta), \quad v = x^{-1/2}V(\theta), \quad \theta = yx^{-1/2},$$

где функции $U(\theta)$ и $V(\theta)$ определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{2}\theta U U'_\theta + V U'_\theta &= U''_{\theta\theta},\\ -\tfrac{1}{2}\theta U'_\theta + V'_\theta &= 0. \end{aligned}$$

3°. Аналогичным образом строятся точные решения и для других функций $f(x)$, которые приведены в табл. 9.

Задачи и упражнения к разд. 7.5

1. Найти инвариантные решения системы уравнений стационарного гидродинамического пограничного слоя (55) в случаях:

a) $f(x) = a$,
b) $f(x) = ae^x$,
c) $f(x) = ax^n$.

Указание. Воспользоваться результатами классификации симметрий данной системы, которые приведены в табл. 9.

2. Найти допустимые операторы и инвариантные решения системы уравнений установившегося околозвукового течения газа

$u_y = v_x, \quad v_y = -uu_x.$

3. Найти допустимые операторы и инвариантные решения нелинейной системы уравнений одномерных длинноволновых колебаний упругого стержня

$u_t - v_x = 0, \quad v_t = -f(u)u_x.$

Провести классификацию симметрий системы уравнений для всех $f(u)$.

4. Найти допустимые операторы и инвариантные решения системы уравнений одномерного изэнтропического движения идеального газа

$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad u_t + uu_x + f(\rho)\rho_x = 0.$

Провести классификацию симметрий системы уравнений для всех $f(\rho)$.

5. Найти допустимые операторы и инвариантные решения системы уравнений двумерного установившегося течения идеальной несжимаемой жидкости

$uu_x + vu_y = -p_x, \quad uv_x + vv_y = -p_y, \quad u_x + v_y = 0.$

Замечание. Рассматриваемая система может быть сведена к системе из двух уравнений путем исключения давления p. Если затем ввести функцию тока ψ по формулам $u=\psi_y$, $v=-\psi_x$, то полученная система приводится к одному уравнению.

6. Найти допустимые операторы и инвариантные решения систем уравнений:

a) $u_t = u_{xx} + u^k f(u/w),\ \ w_t = u^m g(u/w)$;

b) $u_t = u_{xx} + u^k f(u/w),\ \ w_t + aw_x = u^m g(u/w)$.

Провести классификацию симметрий систем для всех $f(z)$, $g(z)$.

7. Найти допустимые операторы и инвариантные решения системы уравнений массо- и теплопереноса с объемными химическими реакциями:

$$u_t = au_{xx} + u^k f(u^n w^m), \quad w_t = bw_{xx} + u^p g(u^n w^m)$$

Провести классификацию симметрий системы уравнений для всех $f(z)$, $g(z)$.

Литература к главе 7: Л. В. Овсянников (1959, 1962, 1978), Ю. Н. Павловский (1961), G. W. Bluman, J. D. Cole (1974), J. M. Hill (1982, 1992), Н. Х. Ибрагимов (1983), Б. Д. Аннин, В. О. Бытеев, С. И. Сенашов (1985), D. H. Sattinger, O. L. Weaver (1986), П. Олвер (1989), В. И. Фущич, В. М. Штелень, Н. И. Серов (1989), G. W. Bluman, S. Kumei (1989), H. Stephani (1989), N. H. Ibragimov (1994, 1995), В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов (1994), G. Gaeta (1994), А. М. Виноградов, И. С. Красильщик (1997), G. Baumann (2000), П. П. Киряков, С. И. Сенашов, А. Н. Яхно (2001), D. M. Klimov, V. Ph. Zhuravlev (2002), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004), А. Д. Полянин (2004), В. И. Лагно, С. В. Спичак, В. И. Стогний (2004).

8. Неклассический метод исследования симметрий дифференциальных уравнений*

8.1. Описание метода. Условие инвариантной поверхности

Будем рассматривать уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными

$$F\Big(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big) = 0. \tag{1}$$

Результаты классического метода исследования симметрий дифференциальных уравнений (см. главу 7) можно существенно расширить, если вместо поиска инвариантов допустимого инфинитезимального оператора X путем решения характеристической системы уравнений

$$\frac{dx}{\xi(x,y,w)} = \frac{dy}{\eta(x,y,w)} = \frac{dw}{\zeta(x,y,w)}$$

задать соответствующее условие инвариантной поверхности

$$\xi(x,y,w)\frac{\partial w}{\partial x} + \eta(x,y,w)\frac{\partial w}{\partial y} = \zeta(x,y,w). \tag{2}$$

Уравнение (1) и условие (2) дополняются условием инвариантности

$$\underset{2}{\mathrm{X}} F\left(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\bigg|_{F=0} = 0, \tag{3}$$

которое совпадает с уравнением (17) из разд. 7.2.1.

Для построения точных решений исходного уравнения (1) используются все три уравнения (1)–(3). Важно отметить, что в данном случае полученные в результате процедуры расщепления определяющие уравнения для неизвестных функций $\xi(x,y,w)$, $\eta(x,y,w)$, $\zeta(x,y,w)$ будут нелинейными. Симметрии, задаваемые инвариантной поверхностью (2), называются неклассическими симметриями.

Для наглядности общая схема построения точных решений неклассическим методом на основе условия инвариантной поверхности для эволюционных уравнений второго порядка изображена на рис. 5.

Замечание. Помимо алгоритма, показанного на рис. 5, вместо решения характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений иногда после определения координат ξ, η, ζ из уравнений (1)–(2) исключается производная w_t, а затем решается полученное уравнение (которое можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение относительно x с параметром t). Указанный подход используется далее в примере 1, п. 4°.

---

* Перед чтением этой главы надо прочитать главу 7.

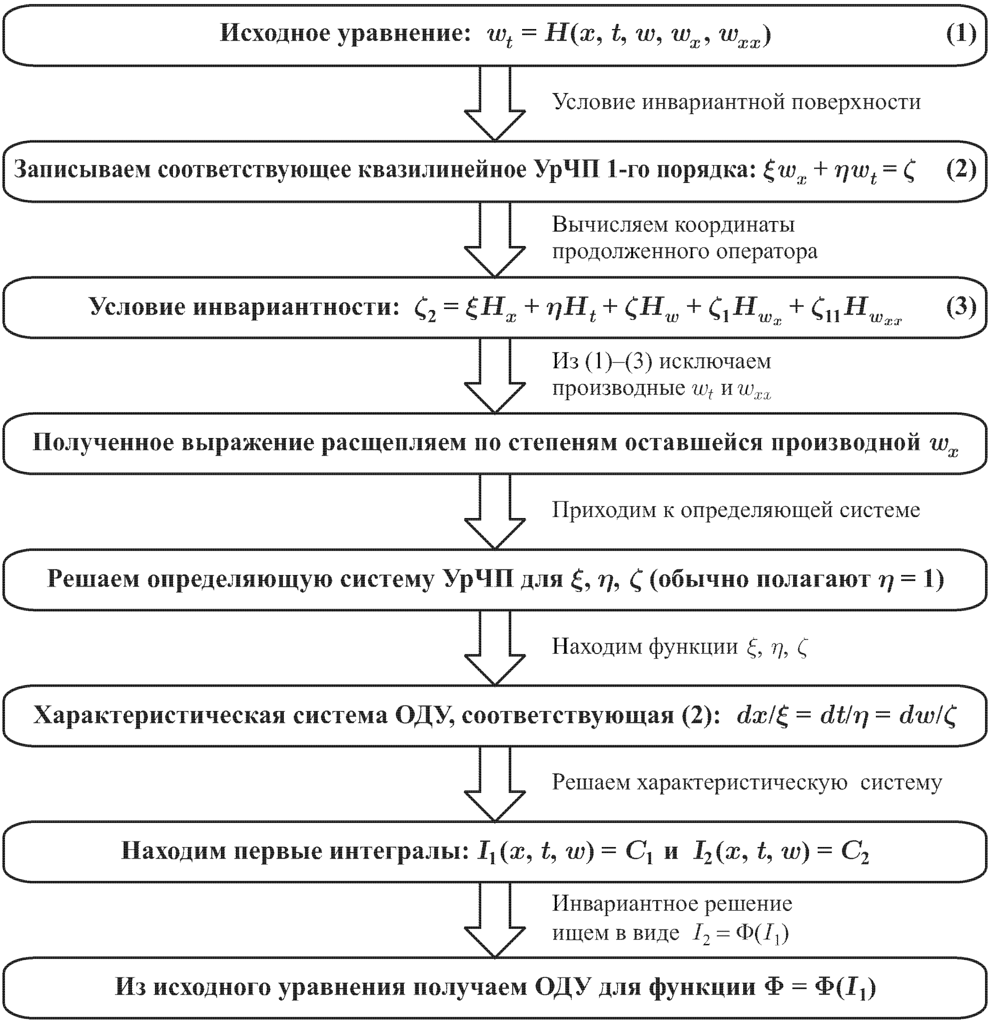

Рис. 5. Алгоритм построения точных решений неклассическим методом для эволюционных уравнений второго порядка. Использованы сокращения: ОДУ — обыкновенные дифференциальные уравнения, УрЧП — уравнения с частными производными.

8.2. Конкретные примеры: уравнение Фитц-Хью—Нагумо и нелинейное волновое уравнение

Пример 1. Рассмотрим уравнение Фитц-Хью — Нагумо (FitzHugh — Nagumo):

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + w(1 - w)(w - a), \tag{4}$$

которое соответствует левой части $F = w_{xx} - w_t + w(1 - w)(w - a)$ уравнения (1).

Если $\eta \neq 0$, то без ограничения общности в условии инвариантной поверхности можно положить $\eta = 1$. В результате имеем

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \xi(x, t, w)\frac{\partial w}{\partial x} = \zeta(x, t, w). \tag{5}$$

Используя классический алгоритм (см. разд. 7.2.1), подействуем продолженным оператором

$$\underset{2}{\mathrm{X}} = \xi\partial_x + \eta\partial_t + \zeta\partial_w + \zeta_1\partial_{w_x} + \zeta_2\partial_{w_t} + \zeta_{11}\partial_{w_{xx}} + \zeta_{12}\partial_{w_{xt}} + \zeta_{22}\partial_{w_{tt}} \tag{6}$$

на уравнение (4). Учитывая равенства $\partial_x = \partial_t = \partial_{w_x} = \partial_{w_{xt}} = \partial_{w_{tt}} = 0$ (поскольку уравнение не зависит явно от x, t, w_x, w_{xt}, w_{tt}), получим условие инвариантности в виде

$$\zeta_2 = \zeta[3w^2 - 2(a+1)w + a] + \zeta_{11}.$$

Подставляя сюда выражения (9) и (14) из разд. 7.1.3 для координат первого и второго продолжений ζ_2 и ζ_{11} при $y = t$ и $\eta = 1$, имеем

$$\begin{aligned}\zeta_t - \xi_t w_x + \zeta_w w_t - \xi_w w_x w_t = \zeta[-3w^2 + 2(a+1)w - a] +\\ + \zeta_{xx} + (2\zeta_{wx} - \xi_{xx})w_x + (\zeta_{ww} - 2\xi_{wx})w_x^2 - \xi_{ww}w_x^3 + (\zeta_w - 2\xi_x - 3\xi_w w_x)w_{xx}.\end{aligned} \tag{7}$$

Выразим производные w_t и w_{xx} с помощью (4)–(5) через остальные величины:

$$w_t = \zeta - \xi w_x, \quad w_{xx} = \zeta - \xi w_x - w(1-w)(w-a). \tag{8}$$

Подставив эти зависимости в условие инвариантности (7), приходим к кубическому полиному относительно оставшейся «независимой» производной w_x. Приравнивание нулю функциональных коэффициентов при различных степенях этого полинома дает определяющую систему

$$\begin{aligned}
w_x^3:&\quad \xi_{ww} = 0,\\
w_x^2:&\quad \zeta_{ww} - 2(\xi_{wx} - \xi\xi_w) = 0,\\
w_x:&\quad 2\zeta_{wx} - 2\xi_w\zeta - 3w(w-a)(w-1)\xi_w - \xi_{xx} + 2\xi\xi_x + \xi_t = 0,\\
1:&\quad \zeta_t - \zeta_{xx} + 2\xi_x\zeta + (2\xi_x - \zeta_w)w(w-a)(w-1) + [3w^2 - 2(a+1)w + a]\zeta = 0,
\end{aligned} \tag{9}$$

состоящую всего из четырех уравнений.

Анализ системы (9) приводит к различным решениям в зависимости от значения параметра a.

1°. Пусть $a = -1$. В этом случае уравнение (4) приводится к уравнению Ньюэлла — Уайтхеда (Newell — Whitehead)

$$w_t = w_{xx} + w - w^3.$$

Вычисление координат дает

$$\xi = \alpha(x,t), \quad \eta = 1, \quad \zeta = -\alpha_x w,$$

где функция $\alpha(x,t)$ удовлетворяет системе

$$\begin{aligned}\alpha_t - 3\alpha_{xx} + 2\alpha\alpha_x &= 0,\\ \alpha_{xt} - \alpha_{xxx} + 2\alpha_x^2 + 2\alpha_x &= 0,\end{aligned} \tag{10}$$

а соответствующее условие инвариантной поверхности имеет вид

$$w_t + \alpha w_x = -\alpha_x w. \tag{11}$$

Ищем стационарное частное решение уравнений (10) в виде $\alpha = \alpha(x)$. Продифференцируем первое уравнение (10) по x, а затем исключим из полученного выражения третью производную с помощью второго уравнения (10). В результате приходим к уравнению второго порядка. Исключив из него вторую производную с помощью первого уравнения (10), после элементарных преобразований получим

$$(6\alpha'_x - 2\alpha^2 + 9)\alpha'_x = 0. \tag{12}$$

Приравнивая в (12) выражение в скобках нулю, имеем уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Его общее решение можно записать в виде

$$\alpha = -\frac{3}{\sqrt{2}}\frac{A\exp(\sqrt{2}\,x) + B}{A\exp(\sqrt{2}\,x) - B} = -\frac{3}{\sqrt{2}}\frac{A\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,x\right) + B\exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,x\right)}{A\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,x\right) - B\exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,x\right)}, \tag{13}$$

где A и B — произвольные постоянные.

Соответствующая (11) характеристическая система уравнений

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{\alpha} = -\frac{dw}{\alpha'_x w} \tag{14}$$

допускает первые интегралы:

$$t + \tfrac{2}{3}\ln\left|A\exp\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\,x\right) + B\exp\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\,x\right)\right| = C_1, \quad \alpha w = C_2, \tag{15}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Вместо C_1 и C_2 удобно взять $\overline{C}_1 = \exp\bigl(\frac{3}{2}C_1\bigr)$ и искать решение в виде $C_2 = -\frac{3}{\sqrt{2}}\overline{C}_1 F(\overline{C}_1)$. Подставив сюда выражения (13) и (15), получим структуру решения в виде

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \bigl\{A\exp\bigl[\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}x+3t)\bigr] - B\exp\bigl[\tfrac{1}{2}(-\sqrt{2}x+3t)\bigr]\bigr\}F(z), \\ z &= A\exp\bigl[\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}x+3t)\bigr] + B\exp\bigl[\tfrac{1}{2}(-\sqrt{2}x+3t)\bigr]. \end{aligned} \tag{16}$$

Подставив (16) в исходное уравнение, находим уравнение для определения функции $F(z)$:

$$F''_{zz} = 2F^3. \tag{17}$$

Решение этого уравнения выражается через эллиптические функции. Поскольку уравнение (17) автономно, то в выражение для переменной $z = z(x,t)$ можно добавить произвольную аддитивную постоянную.

Замечание. Вырожденному случаю $\alpha'_x = 0$ в (12) соответствует решение типа бегущей волны.

2°. Пусть $a = 1/2$. Вычисление координат дает

$$\xi = \alpha(x,t), \quad \eta = 1, \quad \zeta = -\alpha_x\bigl(w - \tfrac{1}{2}\bigr), \tag{18}$$

где функция $\alpha(x,t)$ удовлетворяет системе

$$\begin{aligned} \alpha_t - 3\alpha_{xx} + 2\alpha\alpha_x &= 0, \\ 2\alpha_{xt} - 2\alpha_{xxx} + 4\alpha_x^2 + \alpha_x &= 0. \end{aligned}$$

Ищем стационарное решение $\alpha = \alpha(x)$ этих уравнений путем последовательного исключения старших производных (процедура описана в п. 1°). В результате имеем

$$\bigl(\alpha'_x - \tfrac{1}{3}\alpha^2 + \tfrac{3}{8}\bigr)\alpha'_x = 0.$$

Приравнивая выражение в круглых скобках нулю и решая полученное обыкновенное дифференциальное уравнение, находим

$$\alpha = -\frac{3}{2\sqrt{2}}\,\frac{A\exp\bigl(\frac{x}{\sqrt{2}}\bigr) + B}{A\exp\bigl(\frac{x}{\sqrt{2}}\bigr) - B} = -\frac{3}{2\sqrt{2}}\,\frac{A\exp\bigl(\frac{x}{2\sqrt{2}}\bigr) + B\exp\bigl(-\frac{x}{2\sqrt{2}}\bigr)}{A\exp\bigl(\frac{x}{2\sqrt{2}}\bigr) - B\exp\bigl(-\frac{x}{2\sqrt{2}}\bigr)},$$

где A и B — произвольные постоянные. Соответствующая уравнению (5) с координатами (18) характеристическая система (14) допускает первые интегралы

$$t + \tfrac{8}{3}\ln\bigl|A\exp\bigl(\tfrac{\sqrt{2}}{4}\,x\bigr) + B\exp\bigl(-\tfrac{\sqrt{2}}{4}\,x\bigr)\bigr| = C_1, \qquad \alpha\bigl(w - \tfrac{1}{2}\bigr) = C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Процедура, аналогичная описанной в п. 1°, приводит к точному решению:

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \tfrac{1}{2} + \bigl\{A\exp\bigl[\tfrac{1}{8}(2\sqrt{2}\,x+3t)\bigr] - B\exp\bigl[\tfrac{1}{8}(-2\sqrt{2}\,x+3t)\bigr]\bigr\}F(z), \\ z &= A\exp\bigl[\tfrac{1}{8}(2\sqrt{2}\,x+3t)\bigr] + B\exp\bigl[\tfrac{1}{8}(-2\sqrt{2}\,x+3t)\bigr], \end{aligned}$$

где функция $F(z)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$F''_{zz} = 8F^3.$$

3°. Пусть $a = 2$. Вычисление координат дает

$$\xi = \alpha(x,t), \quad \eta = 1, \quad \zeta = -\alpha_x(w-1), \tag{19}$$

где функция $\alpha(x,t)$ удовлетворяет системе (10). Ее стационарное решение определяется формулой (13). Соответствующую уравнению (5) с координатами (19) характеристическую систему можно получить из (14), если вместо w подставить $w-1$. Решение рассматриваемого уравнения имеет вид:

$$\begin{aligned} w(x,t) &= 1 + \bigl\{A\exp\bigl[\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}x+3t)\bigr] - B\exp\bigl[\tfrac{1}{2}(-\sqrt{2}x+3t)\bigr]\bigr\}F(z), \\ z &= A\exp\bigl[\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}x+3t)\bigr] + B\exp\bigl[\tfrac{1}{2}(-\sqrt{2}x+3t)\bigr], \end{aligned}$$

где A и B — произвольные постоянные, а функция $F = F(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением (17).

4°. Пусть a — произвольная постоянная. Вычисление координат дает

$$\xi = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(3w - a - 1), \quad \eta = 1, \quad \zeta = -\tfrac{3}{2}w(w-a)(w-1)$$

а соответствующее условие инвариантной поверхности имеет вид

$$w_t + \tfrac{\sqrt{2}}{2}(3w - a - 1)w_x + \tfrac{3}{2}w(w-a)(w-1) = 0. \tag{20}$$

Исключая w_t из (4) и (20), получаем уравнение

$$w_{xx} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(a + 1 - 3w)w_x - \tfrac{1}{2}w(w-a)(w-1), \tag{21}$$

которое с помощью подстановки $w = \sqrt{2}\,(\ln\varphi)_x$ сводится к линейному уравнению третьего порядка с постоянными коэффициентами

$$2\varphi_{xxx} - \sqrt{2}\,(1+a)\varphi_{xx} + a\varphi_x = 0.$$

Его общее решение имеет вид $\varphi = \psi_1(t)\exp\bigl(\tfrac{\sqrt{2}}{2}ax\bigr) + \psi_2(t)\exp\bigl(\tfrac{\sqrt{2}}{2}x\bigr) + \psi_3(t)$ и дает решение уравнения (21):

$$w(x,t) = \frac{a\psi_1(t)\exp\bigl(\tfrac{\sqrt{2}}{2}ax\bigr) + \psi_2(t)\exp\bigl(\tfrac{\sqrt{2}}{2}x\bigr)}{\psi_1(t)\exp\bigl(\tfrac{\sqrt{2}}{2}ax\bigr) + \psi_2(t)\exp\bigl(\tfrac{\sqrt{2}}{2}x\bigr) + \psi_3(t)},$$

где функции $\psi_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ находятся подстановкой в (20). В итоге получим решение исходного уравнения (4):

$$w(x,t) = \frac{aC_1\exp\bigl[\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}\,ax + a^2t)\bigr] + C_2\exp\bigl[\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}\,x + t)\bigr]}{C_1\exp\bigl[\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}\,ax + a^2t)\bigr] + C_2\exp\bigl[\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}\,x + t)\bigr] + C_3\exp(at)}, \tag{22}$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

5°. Пусть a — произвольная постоянная. Возможен также второй набор координат:

$$\xi = -\tfrac{\sqrt{2}}{2}(3w - a - 1), \quad \eta = 1, \quad \zeta = -\tfrac{3}{2}w(w-a)(w-1),$$

который отличается знаком ξ от набора в п. 4°. Заменой $x = -\bar{x}$ рассматриваемое уравнение вместе с соответствующим условием инвариантной поверхности сводятся к уравнению и условию инвариантной поверхности из п. 4°. Соответствующее решение получается из правой части формулы (22) заменой x на $-x$.

6°. Пусть a — произвольная постоянная и $\eta \equiv 0$. Вычисление координат дает

$$\xi = 1, \quad \eta = 0, \quad \zeta = \zeta(x,t,w),$$

где ζ удовлетворяет уравнению

$$2\zeta\zeta_{xw} + \zeta^2\zeta_{ww} + \zeta_{xx} + w(w-a)(w-1)\zeta_w - \zeta_t - [3w^2 - 2(a+1)w + a]\zeta = 0, \tag{23}$$

а соответствующее условие инвариантной поверхности имеет вид

$$w_x = \zeta. \tag{24}$$

Исключая w_x и w_{xx} из (4) и (24), получим

$$w_t = \zeta\zeta_w + \zeta_x - w(w-a)(w-1). \tag{25}$$

Если мы имеем решения уравнения (23), мы можем проинтегрировать уравнение (24) и получить точные решения исходного уравнения (4).

Замечание. Из рассмотренного примера видно, что использование условия инвариантной поверхности (2) существенно увеличивает произвол в определении координат ξ, η, ζ по сравнению с классической схемой, описанной в главе 7. Это происходит из-за того, что в классической схеме расщепление условия инвариантности производится сразу по двум производным w_x и w_{xx}, которые считаются независимыми величинами (см. пример 2 в главе 7). В неклассической схеме производные w_x и w_{xx} связаны вторым соотношением (8) и расщепление производится только по одной производной w_x. Поэтому в классической схеме определяющая система состоит из большего числа уравнений, накладывающих дополнительные ограничения на искомые величины (по сравнению с неклассической схемой). В частности, классическая схема не позволяет получить решения уравнения (5), рассмотренные выше в пп. 1°–5°.

Пример 2. Рассмотрим нелинейное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{26}$$

которое соответствует левой части $F = w_{tt} - ww_{xx}$ уравнения (1).

Присоединим к нему условие инвариантной поверхности (5). Условие инвариантности получим, подействовав продолженным оператором (6) на уравнение (26). Учитывая равенства $\partial_x = \partial_t = \partial_{w_x} = \partial_{w_t} = \partial_{w_{xt}} = 0$ (поскольку уравнение не зависит явно от x, t, w_x, w_t, w_{xt}) и $\eta = 1$, получим условие инвариантности в виде

$$\zeta_{22} = \zeta w_{xx} + w\zeta_{11}.$$

Подставляя сюда выражения (14) из разд. 7.1.3 для координат второго продолжения ζ_{11} и ζ_{22} при $y = t$ и $\eta = 1$, имеем

$$\begin{aligned}&\zeta_{tt}-\xi_{tt}w_x+2\zeta_{wt}w_t-2\xi_{wt}w_xw_t+\zeta_{ww}w_t^2-\xi_{ww}w_xw_t^2-2(\xi_t+\xi_w w_t)w_{xt}+(\zeta_w-\xi_w w_x)w_{tt}=\\&=\zeta w_{xx}+w\big[\zeta_{xx}+(2\zeta_{wx}-\xi_{xx})w_x+(\zeta_{ww}-2\xi_{wx})w_x^2-\xi_{ww}w_x^3+(\zeta_w-2\xi_x-3\xi_w w_x)w_{xx}\big].\end{aligned} \tag{27}$$

Из условия инвариантной поверхности (5) и уравнения (26) находим выражения для производных по t и смешанной производной:

$$w_t = \zeta - \xi w_x, \quad w_{tt} = ww_{xx}, \quad w_{xt} = \zeta_x - \xi_x w_x - \xi w_{xx}, \tag{28}$$

где последняя формула получена путем дифференцирования первой формулы по x. Подставив w_t, w_{tt}, w_{xt} из (28) в (27), получим полином относительно двух «независимых» производных w_x и w_{xx}. Приравнивание нулю функциональных коэффициентов этого полинома дает определяющую систему

$$\begin{aligned}
w_xw_{xx}&:\quad (\xi^2 - w)\xi_w = 0,\\
w_{xx}&:\quad 2\xi\xi_t + 2w\xi_x + 2\xi\xi_w\zeta - \zeta = 0,\\
w_x^3&:\quad (\xi^2 - w)\xi_{ww} = 0,\\
w_x^2&:\quad (\xi^2 - w)\zeta_{ww} + 2\xi\xi_{wt} + 2\xi\xi_{ww}\zeta - 2\xi\xi_x\xi_w + 2w\xi_{wx} = 0,\\
w_x&:\quad \xi_{tt}+2\xi\zeta_{wt}+2\xi_{wt}\zeta+2\xi\zeta\zeta_{ww}+\xi_{ww}\zeta^2-2\xi_t\xi_x-2\xi_x\xi_w\zeta-2\xi\xi_w\zeta_x+2w\zeta_{wx}-w\xi_{xx}=0,\\
1&:\quad \zeta_{tt} + 2\zeta\zeta_{wt} + \zeta^2\zeta_{ww} - 2\xi_t\zeta_x - 2\xi_w\zeta\zeta_x - w\zeta_{xx} = 0.
\end{aligned}$$

Из первого уравнения системы следуют две возможности:

$$1)\quad \xi = \xi(x,t); \tag{29}$$

$$2)\quad \xi = \sqrt{w}. \tag{30}$$

Рассмотрим их по порядку.

1°. Третье уравнение системы для случая (29) удовлетворяется тождественно, а из второго следует

$$\zeta = 2w\xi_x + 2\xi\xi_t. \tag{31}$$

Четвертое уравнение системы в силу (29) и (31) удовлетворяется тождественно. Подстановка функций (29) и (31) в пятое и шестое уравнения определяющей системы дает два решения:

$$\begin{aligned}&\xi = \alpha t + \beta, \quad \zeta = 2\alpha(\alpha t + \beta) \quad \text{(первое решение)};\\&\xi = \alpha x + \beta, \quad \zeta = 2\alpha w \qquad\qquad \text{(второе решение)};\end{aligned} \tag{32}$$

где α и β — произвольные постоянные.

Первое решение. Характеристическая система обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующая первому решению (32) при $\alpha = 2$ и $\beta = 0$, имеет вид

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{2t} = \frac{dw}{8t}.$$

Находим первые интегралы: $C_1 = x - t^2$, $C_2 = w - 4t^2$. Используя схему, изображенную на рис. 5, решение ищем в виде $w - 4t^2 = \Phi(x - t^2)$. Подставляя в (26)

$$w = \Phi(z) + 4t^2, \quad z = x - t^2, \tag{33}$$

получим автономное обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $\Phi = \Phi(z)$:

$$\Phi\Phi''_{zz} + 2\Phi'_z = 8.$$

Оно легко интегрируется, поскольку после понижения порядка переходит в уравнение с разделяющимися переменными. В результате можно найти точное решение вида (33) уравнения (26).

Второе решение. Характеристическая система обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующая второму решению (32) при $\alpha = 1$ и $\beta = 0$, имеет вид

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{x} = \frac{dw}{2w}.$$

Определяем первые интегралы: $C_1 = \ln|x| - t$, $C_2 = w/x^2$. Используя схему, изображенную на рис. 5, решение ищем в виде $w/x^2 = \Phi(\ln|x| - t)$. Подставляя в (26)

$$w = x^2\Phi(z), \quad z = \ln|x| - t,$$

получим автономное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(\Phi - 1)\Phi''_{zz} + 3\Phi\Phi'_z + 2\Phi^2 = 0,$$

которое допускает понижение порядка стандартной подстановкой $U(\Phi) = \Phi'_z$.

2°. Второй случай (30) приводит к тривиальному решению $\zeta = 0$ (это следует из четвертого уравнения определяющей системы), из которого следует очевидное решение $w = \mathrm{const}$.

Задачи и упражнения к главе 8

1. Используя неклассический метод исследования симметрий, найти точные решения уравнения теплопроводности с кубическим источником:

$w_t = w_{xx} - aw^3$.

2. Используя неклассический метод исследования симметрий, найти точные решения нелинейного уравнения теплопроводности вида

$w_t = w_{xx} - a^2w - w^3$.

3. В примере 1 (п. 1°) построить общее решение двух уравнений (10) в виде бегущей волны $\alpha = \alpha(x - \lambda t)$. Найти соответствующее точное решение уравнения Ньюэлла — Уайтхеда (Newell — Whitehead)

$w_t = w_{xx} + w - w^3$.

4. Используя неклассический метод исследования симметрий, построить точные решения нелинейных уравнений:

a) $w_t = a(ww_x)_x + bw$,
b) $w_t = a(ww_x)_x + bw^2$,
c) $w_{tt} = a(ww_x)_x$,
d) $w_{xt} = f(w)$,
e) $w_{xx} + w_{yy} = f(w)$,
f) $xw_x + yw_y = w_{xx} + w_{yy} + f(w)$,
h) $w_xw_{xx} + w_{yy} = 0$.

Полученные результаты сравнить с соответствующими результатами использования классического метода группового анализа (см. главу 7).

Литература к главе 8: G. W. Bluman, J. D. Cole (1969), P. J. Olver, Ph. Rosenau (1987), D. Levi, P. Winternitz (1989), M. C. Nucci, P. A. Clarkson (1992), P. A. Clarkson, E. L. Mansfield (1994), P. A. Clarkson (1995), P. A. Clarkson, D. K. Ludlow, T. J. Priestley (1997), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004).

9. Метод дифференциальных связей

9.1. Описание метода

9.1.1. Предварительные замечания. Простейший пример

В разд. 4.1.2 и 4.4.2 рассматривались примеры точных решений нелинейных уравнений с аддитивным разделением переменных вида

$$w(x,y) = \varphi(x) + \psi(y). \tag{1}$$

На начальной стадии функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ считаются произвольными; они подлежат определению в ходе дальнейшего анализа.

Дифференцируя выражение (1) по y, получим

$$\frac{\partial w}{\partial y} = f(y) \qquad (f = \psi'_y). \tag{2}$$

Обратно, из (2) следует представление решения в виде (1).

Дифференцируя далее (2) по x, имеем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0. \tag{3}$$

Обратно, из (3) следует представление решения в виде (1).

Таким образом задачу о поиске точных решений вида (1) для конкретного дифференциального уравнения с частными производными можно заменить эквивалентной задачей о поиске точных решений данного уравнения, удовлетворяющих дополнительному условию (2) или (3). Подобные дополнительные условия, записанные в виде одного или нескольких дифференциальных уравнений, будем называть *дифференциальными связями*. Порядок дифференциальной связи определяется порядком старшей производной: например, порядок дифференциальной связи (2) равен единице, а порядок дифференциальной связи (3) — двум.

Прежде чем перейти к общему описанию метода дифференциальных связей, продемонстрируем его характерные особенности на простом примере.

Пример 1. Рассмотрим нелинейное уравнение третьего порядка

$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = b\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}, \tag{4}$$

которое при $a = -1$ встречается в теории гидродинамического пограничного слоя.

Будем искать решения уравнения (4), удовлетворяющие линейной дифференциальной связи первого порядка:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \varphi(y). \tag{5}$$

Здесь функция $\varphi(y)$, вообще говоря, не может быть произвольной, она должна удовлетворять условию совместности уравнений (4) и (5). Условие совместности представляет собой дифференциальное уравнение для определения $\varphi(y)$ и является следствием уравнений (4) и (5) и их дифференциальных следствий.

Последовательно дифференцируя (5) по разным переменным, вычислим производные

$$w_{xx} = 0, \quad w_{xy} = \varphi'_y, \quad w_{xxy} = 0, \quad w_{xyy} = \varphi''_{yy}, \quad w_{xyyy} = \varphi'''_{yyy}. \tag{6}$$

Дифференцируя (4) по x, имеем

$$w_{xy}^2 + w_y w_{xxy} + a w_{xx} w_{yy} + a w_x w_{xyy} = b w_{xyyy}. \tag{7}$$

Подставляя в (7) производные функции w из (5) и (6), получим обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка для φ:

$$(\varphi'_y)^2 + a\varphi\varphi''_{yy} = b\varphi'''_{yyy}, \tag{8}$$

которое представляет собой условие совместности уравнений (4) и (5).

Для построения точного решения проинтегрируем уравнение (5). Имеем

$$w = \varphi(y)x + \psi(y). \tag{9}$$

Функцию $\psi(y)$ найдем, подставив (9) в (4) с учетом соотношения (8). В результате приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\varphi'_y\psi'_y + a\varphi\psi''_{yy} = b\psi'''_{yyy}. \tag{10}$$

В итоге имеем точное решение вида (9), где функции φ и ψ описываются уравнениями (8) и (10).

Замечание 1. Данное решение проще получить прямой подстановкой выражения (9) в исходное уравнение (4).

Замечание 2. Полученные результаты распространяются на более общий случай, когда в уравнение (4) входят произвольные функции $a = a(y)$ и $b = b(y)$.

9.1.2. Общее описание метода дифференциальных связей

Процедура построения точных решений нелинейных уравнений математической физики методом дифференциальных связей состоит из нескольких последовательных этапов, кратко описанных ниже.

1°. В общем случае выделение частных решений уравнения

$$F\Big(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \dots\Big) = 0 \tag{11}$$

осуществляется путем присоединения к нему дополнительной дифференциальной связи

$$G\Big(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \dots\Big) = 0. \tag{12}$$

Вид дифференциальной связи (12) может задаваться:

• из априорных соображений (она, например, может представлять собой разрешимое уравнение);

• исходя из некоторых свойств рассматриваемого уравнения (например, его симметрий или законов сохранения).

2°. Полученная таким образом переопределенная система (11)–(12) в общем случае нуждается в исследовании на совместность. При задании дифференциальной связи (12) из априорных соображений она должна иметь достаточный функциональный произвол (т. е. включать в себя произвольные определяющие функции). В результате анализа системы (11)–(12) на совместность должны быть получены условия, конкретизирующие вид определяющих функций. Эти условия (*условия совместности*) записываются в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений (или системы уравнений с частными производными).

В простейших случаях* исследование на совместность проводится путем дифференцирования уравнений (11) и (12) по x и y (надлежащее число раз) и исключения из полученных таким образом дифференциальных следствий и уравнений (11)–(12) старших производных (см. примеры 1 и 3). В результате приходят к уравнению, которое содержит степени младших производных. Приравнивание нулю коэффициентов при всех степенях производных и дает условия совместности, которые связывают функциональные коэффициенты уравнений (11) и (12).

3°. Решается полученная в п. 2° система дифференциальных уравнений для определяющих функций. Затем эти функции подставляются в дифференциальную связь (12). В результате приходят к уравнению

$$g\Big(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \dots\Big) = 0. \qquad (13)$$

Дифференциальную связь (13), которая совместна с рассматриваемым уравнением (11), называют *инвариантным многообразием* для уравнения (11).

4°. Надо найти общее решение: (i) уравнения (13) или (ii) какого-либо следствия уравнений (11) и (13). Полученное решение будет включать в себя некоторые произвольные функции $\{\varphi_m\}$ (эти функции могут зависеть как от x, y, так и от w). Отметим, что в ряде случаев вместо общего решения можно использовать частные решения уравнения (13) или его следствий.

5°. Решение, полученное в п. 4°, надо подставить в исходное уравнение (11). В результате приходят к функционально-дифференциальному уравнению, из которого надо найти функции $\{\varphi_m\}$. После определения $\{\varphi_m\}$ их надо подставить в решение из п. 4°. В итоге получим точное решение исходного уравнения (11).

Замечание 1. При неудачном выборе дифференциальной связи уравнения (11) и (12) могут оказаться несовместными (не имеющими общих решений).

Замечание 2. Вместо одной могут быть несколько дифференциальных связей вида (12).

Замечание 3. На последних трех этапах метода дифференциальных связей приходится решать различные уравнения (системы уравнений). Если хотя бы на одном из этих этапов решение получить не удается, то не удается построить и точное решение исходного уравнения.

Для большей наглядности общая схема применения метода дифференциальных связей изображена на рис. 6.

Задачи и упражнения к разд. 9.1

1. Найти дифференциальные связи первого и второго порядков, эквивалентные заданию решения в явном виде (функции φ и ψ считаются произвольными):

a) $w = \varphi(x)y + \psi(x)$,

b) $w = \varphi(x)y + \psi(y)$,

* В общем случае надо использовать методы исследования переопределенных систем, основанные: (i) на алгоритме Картана или (ii) на алгоритме Жане — Спенсера — Кураниши (Janet — Spenser — Kuranishi). Описание этих алгоритмов и другие сведения по теории переопределенных систем можно найти, например, в работах M. Kuranishi (1967), J. F. Pommaret (1978), А. Ф. Сидорова, В. П. Шапеева, Н. Н. Яненко (1984).

Рис. 6. Алгоритм построения точных решений методом дифференциальных связей.

c) $w = \varphi(y)x^2 + \psi(y)$,
d) $w = \varphi(x)y^n + \psi(x)$,
e) $w = x\varphi(y) + y\psi(x)$,
f) $w = \varphi(x) + \psi(x + y)$,
g) $w = \varphi(x + y) + \psi(x - y)$,
h) $w = \varphi(x + y) + \psi(x + ay)$.

Указание. Надо исключить одну или две функции φ и ψ из исходного выражения и его дифференциальных следствий.

2. Найти дифференциальные связи второго порядка, эквивалентные заданию решения в неявном виде:

a) $\displaystyle\int \varphi(w)\,dw = \psi(x) + ay$,

b) $\displaystyle\int f(w)\,dw = \varphi(x) + \psi(y)$.

Литература к разд. 9.1: Н. Н. Яненко (1964), А. Ф. Сидоров, В. П. Шапеев, Н. Н. Яненко (1984), В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов (1994), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004).

* Это решение обычно содержит некоторые произвольные функции и постоянные.

9.2. Дифференциальные связи первого порядка

9.2.1. Эволюционные уравнения второго порядка

Рассмотрим общее эволюционное уравнение второго порядка в разрешенном относительно старшей производной виде

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \mathcal{F}\Big(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial t}\Big). \tag{14}$$

Дополним его дифференциальной связью первого порядка

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \mathcal{G}\Big(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}\Big). \tag{15}$$

Условие совместности этих уравнений определяется путем однократного дифференцирования (14) по t и двукратного дифференцирования (15) по x с последующим приравниванием полученных третьих производных w_{xxt}:

$$\mathrm{D}_t\mathcal{F} = \mathrm{D}_x^2\mathcal{G}. \tag{16}$$

Здесь D_t и D_x — операторы полного дифференцирования по t и x:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_t &= \frac{\partial}{\partial t} + w_t\frac{\partial}{\partial w} + w_{xt}\frac{\partial}{\partial w_x} + w_{tt}\frac{\partial}{\partial w_t},\\ \mathrm{D}_x &= \frac{\partial}{\partial x} + w_x\frac{\partial}{\partial w} + w_{xx}\frac{\partial}{\partial w_x} + w_{xt}\frac{\partial}{\partial w_t}. \end{aligned} \tag{17}$$

Частные производные w_t, w_{xx}, w_{xt}, w_{tt} в (17) должны быть выражены через x, t, w, w_x с помощью (14) и (15) и их дифференциальных следствий. В результате имеем

$$\begin{aligned} &w_t=\mathcal{G}, \quad w_{xx}=\mathcal{F}, \quad w_{xt}=\mathrm{D}_x\mathcal{G}=\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial x}+w_x\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial w}+\mathcal{F}\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial w_x},\\ &w_{tt}=\mathrm{D}_t\mathcal{G}=\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial t}+\mathcal{G}\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial w}+w_{xt}\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial w_x}=\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial t}+\mathcal{G}\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial w}+\Big(\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial x}+w_x\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial w}+\mathcal{F}\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial w_x}\Big)\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial w_x}. \end{aligned} \tag{18}$$

В выражении для $\mathcal{F}$ в силу (15) производную w_t надо заменить на $\mathcal{G}$.

Пример 2. Выделим из класса нелинейных уравнений теплопроводности с источником

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\Big] + g(w) \tag{19}$$

уравнения, которые обладают инвариантными многообразиями простейшего вида

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \varphi(w). \tag{20}$$

Уравнения (19) и (20) являются частными случаями (14) и (15) при

$$\mathcal{F} = \frac{w_t - f'(w)w_x^2 - g(w)}{f(w)} = \frac{\varphi(w) - g(w) - f'(w)w_x^2}{f(w)}, \qquad \mathcal{G} = \varphi(w).$$

Функции $f(w)$, $g(w)$, $\varphi(w)$ заранее не известны и подлежат определению в процессе анализа.

По формулам (18) и (17) найдем частные производные и операторы полного дифференцирования:

$$\begin{aligned} &w_t = \varphi, \quad w_{xx} = \mathcal{F}, \quad w_{xt} = \varphi' w_x, \quad w_{tt} = \varphi\varphi',\\ &\mathrm{D}_t = \frac{\partial}{\partial t} + \varphi\frac{\partial}{\partial w} + \varphi' w_x\frac{\partial}{\partial w_x} + \varphi\varphi'\frac{\partial}{\partial w_t}, \quad \mathrm{D}_x = \frac{\partial}{\partial x} + w_x\frac{\partial}{\partial w} + \mathcal{F}\frac{\partial}{\partial w_x} + \varphi' w_x\frac{\partial}{\partial w_t}. \end{aligned}$$

Подставим выражения для D_x и D_t в условие совместности (16). После некоторых вычислений получим

$$f\left[\frac{(f\varphi)'}{f}\right]' w_x^2 + \frac{\varphi-g}{f}\varphi' - \varphi\left(\frac{\varphi-g}{f}\right)' = 0.$$

Чтобы удовлетворить этому равенству для любых w_x, надо положить

$$\left[\frac{(f\varphi)'}{f}\right]' = 0, \qquad \frac{\varphi-g}{f}\varphi' - \varphi\left(\frac{\varphi-g}{f}\right)' = 0. \tag{21}$$

Невырожденный случай. Считая функцию $f = f(w)$ заданной, получим трехпараметрическое решение уравнений (21) относительно функций $g = g(w)$ и $\varphi(w)$:

$$g(w) = \frac{a+cf}{f}\left(\int f\,dw + b\right), \qquad \varphi(w) = \frac{a}{f}\left(\int f\,dw + b\right), \tag{22}$$

где a, b, c — произвольные постоянные.

Подставим $\varphi(w)$ из (22) в уравнение (20). Интегрируя, получим

$$\int f\,dw = \theta(x)e^{at} - b. \tag{23}$$

Дифференцируя (23) по x и t, имеем $w_t = ae^{at}\theta/f$, $w_x = e^{at}\theta'_x/f$. Подставив эти выражения в (19) с учетом (22), приходим к уравнению $\theta''_{xx} + c\theta = 0$, общее решение которого имеет вид

$$\theta = \begin{cases} C_1\sin\bigl(x\sqrt{c}\bigr) + C_2\cos\bigl(x\sqrt{c}\bigr) & \text{при } c > 0,\\ C_1\operatorname{sh}\bigl(x\sqrt{-c}\bigr) + C_2\operatorname{ch}\bigl(x\sqrt{-c}\bigr) & \text{при } c < 0,\\ C_1x + C_2 & \text{при } c = 0,\end{cases} \tag{24}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Формулы (23)–(24) описывают точные решения (в неявной форме) уравнения (19) для произвольной функции $f(w)$ и функции $g(w)$, заданной формулой (22).

Вырожденный случай. Имеется также двухпараметрическое решение уравнений (21) относительно функций $g = g(w)$ и $\varphi(w)$ (как и ранее, f считается произвольной):

$$g(w) = \frac{b}{f} + c, \qquad \varphi(w) = \frac{b}{f},$$

где b и c — произвольные постоянные. Его можно получить из (22), переобозначив $b \to b/a$, $c \to ac/b$ и устремив a к нулю. После несложных вычислений получим соответствующее решение уравнения (19) в неявной форме

$$\int f\,dw = bt - \frac{1}{2}cx^2 + C_1x + C_2.$$

Продемонстрируем на конкретных примерах, как можно проводить вычисления, не прибегая к общим формулам (16)–(18).

Пример 3. Рассмотрим задачу отыскания нелинейных уравнений второго порядка

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f_1(w)\frac{\partial w}{\partial x} + f_0(w), \tag{25}$$

обладающих инвариантными многообразиями первого порядка вида

$$\frac{\partial w}{\partial t} = g_1(w)\frac{\partial w}{\partial x} + g_0(w). \tag{26}$$

Уравнения (25) и (26) являются частными случаями (14) и (15) при $\mathcal{F} = w_t - f_1(w)w_x - f_0(w)$ и $\mathcal{G} = g_1(w)w_x + g_0(w)$. Функции $f_1(w)$, $f_0(w)$, $g_1(w)$, $g_0(w)$ заранее не известны и подлежат определению в процессе анализа.

Сначала вычислим производные. Приравнивая правые части (25) и (26), имеем

$$w_{xx} = h_1w_x + h_0, \quad \text{где} \quad h_1 = g_1 - f_1, \quad h_0 = g_0 - f_0. \tag{27}$$

Здесь и далее опускается аргумент функций f_1, f_0, g_1, g_0, h_1, h_0. Дифференцируя (26) два раза по x и используя выражение (27) для w_{xx}, находим смешанные производные

$$w_{xt} = g_1 w_{xx} + g_1' w_x^2 + g_0' w_x = g_1' w_x^2 + (g_1 h_1 + g_0') w_x + g_1 h_0,$$
$$w_{xxt} = g_1'' w_x^3 + (g_1 h_1' + 3g_1' h_1 + g_0'') w_x^2 + (g_1 h_0' + 3g_1' h_0 + g_1 h_1^2 + g_0' h_1) w_x + (g_1 h_1 + g_0') h_0, \quad (28)$$

где штрих обозначает производную по w. Дифференцируя (27) по t и используя выражения (26) и (28) для w_t и w_{xt}, имеем

$$\begin{aligned} w_{xxt} &= h_1 w_{xt} + h_1' w_x w_t + h_0' w_t = \\ &= (g_1 h_1' + g_1' h_1) w_x^2 + (g_1 h_1^2 + g_0' h_1 + g_0 h_1' + g_1 h_0') w_x + g_1 h_0 h_1 + g_0 h_0'. \end{aligned} \quad (29)$$

Приравняем теперь третьи производные w_{xxt} из (28) и (29) и «соберем» члены при одинаковых степенях w_x. В результате получим условие инвариантности в виде

$$g_1'' w_x^3 + (2g_1' h_1 + g_0'') w_x^2 + (3g_1' h_0 - g_0 h_1') w_x + g_0' h_0 - g_0 h_0' = 0. \quad (30)$$

Условие (30) будет выполняться, если приравнять нулю коэффициенты при всех степенях w_x:

$$g_1'' = 0, \quad 2g_1' h_1 + g_0'' = 0, \quad 3g_1' h_0 - g_0 h_1' = 0, \quad g_0' h_0 - g_0 h_0' = 0.$$

Решение этой системы обыкновенных дифференциальных уравнений описывается формулами:

$$\begin{aligned} &g_1 = C_1 w + C_2, \quad g_0 = -C_1^2 C_3 w^3 - C_1 C_4 w^2 + C_5 w + C_6, \\ &h_1 = 3C_1 C_3 w + C_4, \quad h_0 = C_3 g_0, \end{aligned} \quad (31)$$

где $C_1, \ldots, C_6$ — произвольные постоянные. Используя равенства (27) для h_1, h_0 и (31), определяем искомые функции, входящие в уравнения (25) и (26):

$$\begin{aligned} &f_1(w) = C_1(1 - 3C_3) w + C_2 - C_4, \\ &f_0(w) = (-C_1^2 C_3 w^3 - C_1 C_4 w^2 + C_5 w + C_6)(1 - C_3), \\ &g_1(w) = C_1 w + C_2, \quad g_0(w) = -C_1^2 C_3 w^3 - C_1 C_4 w^2 + C_5 w + C_6. \end{aligned} \quad (32)$$

Рассмотрим подробнее один частный случай. Положим в (32):

$$C_1 = -k, \quad C_2 = C_4 = 0, \quad C_3 = -1/k, \quad C_5 = ak, \quad C_6 = bk,$$

где a, b, k — произвольные постоянные ($k \neq 0$). Соответствующее уравнение (25) и инвариантное многообразие (26) имеют вид

$$w_t = w_{xx} - (k+3) w w_x + (k+1)(w^3 + aw + b), \quad (33)$$
$$w_t = -k w w_x + k(w^3 + aw + b). \quad (34)$$

Общее решение квазилинейного уравнения первого порядка (34) записывается в неявной форме и содержит интеграл $I(w) = \int w(w^3 + aw + b)^{-1}\,dw$ и его обращение. Столь сложный вид делает его неудобным для построения точных решений уравнения (33).

В данном случае вместо (34) можно использовать следствие уравнений (33) и (34), полученное путем исключения производной по t:

$$w_{xx} = 3 w w_x - w^3 - aw - b. \quad (35)$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение соответствует подстановке выражений (31) для h_1 и h_0 в (27). Замена $w = -U_x/U$ преобразует (35) к линейному уравнению третьего порядка с постоянными коэффициентами

$$U_{xxx} + aU_x - bU = 0, \quad (36)$$

решения которого определяются корнями кубического уравнения $\lambda^3 + a\lambda - b = 0$. В частности, если все корни λ_n действительны, то общие решения уравнений (35) и (36) определяются по формулам

$$w = -U_x/U, \quad U = r_1(t)\exp(\lambda_1 x) + r_2(t)\exp(\lambda_2 x) + r_3(t)\exp(\lambda_3 x). \quad (37)$$

Функции $r_n(t)$ находятся путем подстановки выражения (37) в уравнение (33) [или в уравнение (34)].

Отметим, что более подробно уравнение (33) исследовано другим методом в разд. 6.3 (см. пример 7 при $b_0 = 0$).

Пример 4. Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + w^2. \tag{38}$$

Зададим дифференциальную связь первого порядка:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \varphi(x,t), \tag{39}$$

где φ — некоторая (пока произвольная) функция своих аргументов. Тогда исходное уравнение (38) можно записать в следующей форме:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi^2 + w^2. \tag{40}$$

Найдем условие совместности соотношений (39) и (40). Для этого продифференцируем (39) по t, а (40) — по x, а затем исключим из полученных выражений смешанную производную с учетом равенства $w_{xt} = w_{tx}$. Заменив согласно (39) производную w_x на φ, имеем

$$\varphi_t = \varphi_{xx} + 2\varphi\varphi_x + 2w\varphi.$$

Выразим отсюда w:

$$w = \frac{\varphi_t - \varphi_{xx} - 2\varphi\varphi_x}{2\varphi}. \tag{41}$$

Подставив (41) в (39) и (40), получим переопределенную систему уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varphi_t - \varphi_{xx} - 2\varphi\varphi_x}{2\varphi}\right) = \varphi, \\ &\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varphi_t - \varphi_{xx} - 2\varphi\varphi_x}{2\varphi}\right) = \varphi_x + \varphi^2 + \left(\frac{\varphi_t - \varphi_{xx} - 2\varphi\varphi_x}{2\varphi}\right)^2. \end{aligned} \tag{42}$$

Решение первого уравнения (42) ищем методом разделения переменных в виде произведения функций разных аргументов $\varphi(x,t) = \psi(t)\theta(x)$. Элементарные выкладки показывают, что первому уравнению (42) удовлетворяет функция

$$\varphi(x,t) = \psi(t)\sin(x + C), \tag{43}$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция, C — произвольная постоянная. Подставляя выражение (43) во второе уравнение (42), приходим к уравнению для определения функции $\psi(t)$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot\psi + \psi}{2\psi}\right) = \left(\frac{\dot\psi + \psi}{2\psi}\right)^2 + \psi^2 \tag{44}$$

(точка обозначает производную по t). Если решение автономного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (44) получено, то решение исходного уравнения (38) может быть найдено по формуле

$$w(x,t) = \frac{\dot\psi + \psi}{2\psi} - \psi\cos(x + C),$$

которая получается путем подстановки выражения (43) в (41).

Замечание 1. В общем случае для заданной функции $\mathcal{F}$ условие совместности (16) представляет собой нелинейное уравнение с частными производными для функции $\mathcal{G}$, которое имеет бесконечное множество решений (теорема о локальном существовании решений). Поэтому уравнение с частными производными второго порядка (14) допускает бесконечное множество совместных дифференциальных связей первого порядка (15).

Замечание 2. В общем случае решение уравнения с частными производными первого порядка (15) сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений [см. Э. Камке (1966) и В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (2003)].

Замечание 3. Вместо дифференциальной связи первого порядка (15) в ряде случаев удобнее использовать дифференциальную связь второго порядка, которая возникает в результате исключения производной по времени из уравнений (14) и (15). Полученная дифференциальная связь может рассматриваться как обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно переменной x с параметром t (см. разд. 9.3.1).

9.2.2. Гиперболические уравнения второго порядка

Аналогичным образом рассматривается гиперболическое уравнение второго порядка вида

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} = \mathcal{F}\Big(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial t}\Big), \tag{45}$$

дополненное дифференциальной связью первого порядка (15). Считаем, что $\mathcal{G}_{w_x} \neq 0$.

Условие совместности уравнений определяется путем однократного дифференцирования (45) по t и двукратного дифференцирования (15) по t и по x с последующим приравниванием полученных третьих производных w_{xtt}:

$$\mathrm{D}_t \mathcal{F} = \mathrm{D}_x[\mathrm{D}_t \mathcal{G}]. \tag{46}$$

Здесь D_t и D_x — операторы полного дифференцирования (17), в которых частные производные w_t, w_{xx}, w_{xt}, w_{tt} должны быть выражены через x, t, w, w_x с помощью (45) и (15) и их дифференциальных следствий.

Покажем, как вычисляются вторые производные. Продифференцируем (15) по x и заменим смешанную производную правой частью (45). Находим выражение для второй производной по x:

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} + w_x \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial w} + w_{xx} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial w_x} = \mathcal{F}\Big(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial t}\Big) \implies \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \mathcal{H}_1\Big(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}\Big). \tag{47}$$

Здесь и далее учитывается, что с помощью (15) производную по t можно выразить через производную по x. Дифференцируя далее (15) по t, имеем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + w_t \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial w} + w_{xt} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial w_x} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + \mathcal{G} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial w} + \mathcal{F} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial w_x} \implies \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \mathcal{H}_2\Big(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}\Big). \tag{48}$$

Заменяя в (17) производные w_t, w_{xt}, w_{xx}, w_{tt} их выражениями из (15), (45), (47), (48), находим операторы полного дифференцирования D_t и D_x, которые должны использоваться в условии совместности (46).

Пример 5. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} = f(w). \tag{49}$$

Дополним (49) квазилинейной дифференциальной связью вида

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \varphi(t) g(w). \tag{50}$$

Дифференцируя (49) по x и заменяя затем первую производную по x правой частью равенства (50), имеем

$$w_{xxt} = \varphi g f'_w. \tag{51}$$

Дифференцируя далее (50) по x и t, получим два соотношения:

$$w_{xx} = \varphi g'_w w_x = \varphi^2 g g'_w, \tag{52}$$

$$w_{xt} = \varphi'_t g + \varphi g'_w w_t. \tag{53}$$

Исключив в (53) смешанную производную с помощью уравнения (49), найдем первую производную по t:

$$w_t = \frac{f - \varphi'_t g}{\varphi g'_w}. \tag{54}$$

Дифференцируя (52) по t и заменяя w_t правой частью (54), имеем

$$w_{xxt} = 2\varphi\varphi'_t g g'_w + \varphi^2 (gg'_w)'_w w_t = 2\varphi\varphi'_t g g'_w + \varphi(gg'_w)'_w \frac{f - \varphi'_t g}{g'_w}. \tag{55}$$

Приравнивая теперь третьи производные (51) и (55), после сокращения на φ и элементарных преобразований приходим к определяющему уравнению

$$\varphi'_t g[(g'_w)^2 - gg''_{ww}] = gg'_w f'_w - f(gg'_w)'_w, \tag{56}$$

которое имеет два различных решения.

Решение 1. Уравнение (56) удовлетворяется тождественно для любой функции $\varphi = \varphi(t)$, если положить

$$(g'_w)^2 - gg''_{ww} = 0,$$
$$gg'_w f'_w - f(gg'_w)'_w = 0.$$

Общее решение этой системы уравнений имеет вид

$$f(w) = ae^{\lambda w}, \quad g(w) = be^{\lambda w/2}, \tag{57}$$

где a, b, λ — произвольные постоянные. Для простоты выкладок далее будем полагать

$$a = b = 1, \quad \lambda = -2. \tag{58}$$

Подставим функцию $g(w)$, заданную формулами (57)–(58), в дифференциальную связь (50). Интегрируя полученное уравнение, имеем

$$w = \ln[\varphi(t)x + \psi(t)], \tag{59}$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция. Подставляя (59) в уравнение (49) с правой частью (57)–(58), приходим к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению для определения функции $\psi(t)$:

$$\psi\varphi'_t - \varphi\psi'_t = 1.$$

Общее решение этого уравнения дается формулой

$$\psi(t) = C\varphi(t) - \varphi(t)\int \frac{dt}{\varphi^2(t)}, \tag{60}$$

где C — произвольная постоянная.

Таким образом, точное решение нелинейного уравнения $w_{xt} = e^{-2w}$ определяется выражениями (59)–(60), где $\varphi(t)$ — произвольная функция.

Решение 2. Второе решение задается линейной зависимостью

$$\varphi(t) = at + b, \tag{61}$$

где a и b — произвольные постоянные. В этом случае функции $f(w)$ и $g(w)$ связаны одним соотношением (56) при $\varphi'_t = a$. Интегрирование уравнения (50) при условии (61) позволяет найти структуру решения в виде

$$w = w(z), \quad z = (at + b)x + \psi(t), \tag{62}$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция. Подставим эту зависимость в исходное уравнение (49), а затем заменим x на z с помощью (62). В результате получим

$$[az + (at + b)\psi'_t - a\psi]w''_{zz} + aw'_z = f(w). \tag{63}$$

Для того чтобы это выражение было обыкновенным дифференциальным уравнением для функции $w = w(z)$, надо положить

$$(at + b)\psi'_t - a\psi = \mathrm{const}.$$

Интегрируя, определяем функцию $\psi(t)$:

$$\psi(t) = ct + d, \tag{64}$$

где c и d — произвольные постоянные.

Формулы (62) и (64) определяют решение уравнения (49) для произвольной функции $f(w)$. При этом функция $w(z)$ описывается уравнением (63) при условии (64). Частному случаю $a = d = 0$ соответствует решение типа бегущей волны, а случаю $b = c = d = 0$ — автомодельное решение.

9.2.3. Уравнения второго порядка общего вида

Рассмотрим гиперболическое уравнение второго порядка общего вида

$$\mathcal{F}(x, t, w, w_x, w_t, w_{xx}, w_{xt}, w_{tt}) = 0 \tag{65}$$

вместе с дифференциальной связью первого порядка

$$\mathcal{G}(x, t, w, w_x, w_t) = 0. \tag{66}$$

Последовательно дифференцируем уравнения (45) и (46) по обеим переменным для получения дифференциальных следствий, содержащих вторые и третьи производные. Имеем

$$\begin{gathered} \mathrm{D}_x\mathcal{F} = 0, \quad \mathrm{D}_t\mathcal{F} = 0, \quad \mathrm{D}_x\mathcal{G} = 0, \quad \mathrm{D}_t\mathcal{G} = 0, \\ \mathrm{D}_x[\mathrm{D}_x\mathcal{G}] = 0, \quad \mathrm{D}_x[\mathrm{D}_t\mathcal{G}] = 0, \quad \mathrm{D}_t[\mathrm{D}_t\mathcal{G}] = 0. \end{gathered} \tag{67}$$

Условие совместности для (65) и (66) можно найти путем исключения из девяти уравнений (65)–(67) производных w_t, w_{xx}, w_{xt}, w_{tt}, w_{xxx}, w_{xxt}, w_{xtt}, w_{ttt}. В результате получим выражение вида

$$\mathcal{H}(x, t, w, w_x) = 0. \tag{68}$$

Если левая часть (68) представляет собой полином относительно w_x, то для получения условий совместности надо приравнять нулю функциональные коэффициенты этого полинома.

Задачи и упражнения к разд. 9.2

1. Построить точные решения нелинейного уравнения теплопроводности с источником

$w_t = [f(w)w_x]_x + g(w)$,

используя дифференциальные связи первого порядка:

a) $w_x = \varphi(t)g(w)$,
b) $w_x = \varphi(x)g(w)$,
c) $w_t = \varphi(t)g(w)$.

2. Рассмотреть задачу отыскания нелинейных уравнений

$w_t = f(w)w_{xx} + g(w)w_x$,

обладающих инвариантными многообразиями первого порядка:

a) $w_t = \varphi(w)$,
b) $w_x = \varphi(t)\psi(w)$,
c) $w_t = \varphi(w)w_x + \psi(w)$.

Найти соответствующие точные решения.

3. Найти точные решения нелинейных уравнений:

a) $w_t = w_{xx} + (w_x)^2 + aw^2 + bw + c$,
b) $w_t = ww_{xx} + aw^2 + bw + c$,
c) $w_t = (ww_x)_x + aw^2 + bw + c$

с помощью дифференциальной связи первого порядка $w_x = f(x)g(t)$.

Указание. Для проверки результатов исследования уравнения а) см. пример 4 (приведенные там рассуждения использовать для анализа двух других уравнений).

4. Рассмотреть задачу отыскания нелинейных уравнений $w_{xt} = f(w)$, обладающих инвариантными многообразиями первого порядка $w_t = g(w)w_x$. Найти соответствующие точные решения.

5. Рассмотреть задачу отыскания нелинейных уравнений $w_{xt} = f(w)$, обладающих инвариантными многообразиями первого порядка $w_tw_x = g(w)$. Показать, что определяющие функции должны удовлетворять уравнению

$$gg'' - (g')^2 - 2f'g + 3fg' - 2f^2 = 0.$$

Построить соответствующие точные решения.

Литература к разд. 9.2: А. Ф. Сидоров, В. П. Шапеев, Н. Н. Яненко (1984), V. A. Galaktionov (1994), P. J. Olver (1994), В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов (1994), P. J. Olver, E. M. Vorob'ev (1996), E. M. Vorob'ev (1996), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004).

9.3. Дифференциальные связи второго и старших порядков

9.3.1. Дифференциальные связи второго порядка для эволюционных уравнений

1°. При использовании дифференциальных связей второго и более высоких порядков для построения точных решений нелинейных уравнений с частными производными надо, вообще говоря, уметь строить точные решения этих дифференциальных связей. В общем случае это весьма проблематично. Поэтому для эволюционных уравнений обычно используют дифференциальные связи специального вида, в которые входят производные только по одной переменной x (т. е. фактически рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка относительно x, в которые другая независимая переменная t входит неявно или параметрическим образом; от t будут зависеть постоянные интегрирования).

Задачу о совместности эволюционного уравнения второго порядка

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \mathcal{F}_1\Bigl(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Bigr) \tag{69}$$

с дифференциальной связью аналогичного вида

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \mathcal{F}_2\Bigl(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Bigr) \tag{70}$$

можно свести к задаче с дифференциальной связью первого порядка, которая рассматривается в разд. 9.2. Для этого надо сначала исключить из уравнений вторую производную w_{xx}. Затем полученное таким образом уравнение первого порядка

$$\Phi\Bigl(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial t}\Bigr) = 0$$

надо исследовать вместе с исходным уравнением (69) [или исходной дифференциальной связью (70)].

2°. Дифференциальную связь (70) для уравнения (69) удобно заменить эквивалентной дифференциальной связью, которая получается путем исключения w_t из (70) с помощью (69). В результате получается дифференциальная связь вида

$$\Psi\Bigl(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Bigr) = 0,$$

которую можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение по переменной x с параметром t (именно о дифференциальных связях такого вида говорится в п. 1°).

9.3.2. Примеры использования дифференциальных связей для построения точных решений

Пример 6. Выделим из класса нелинейных уравнений теплопроводности с источником

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Bigl[f_1(w)\frac{\partial w}{\partial x}\Bigr] + f_2(w) \tag{71}$$

уравнения, которые обладают инвариантными многообразиями вида

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = g_1(w)\Bigl(\frac{\partial w}{\partial x}\Bigr)^2 + g_2(w). \tag{72}$$

Функции $f_2(w)$, $f_1(w)$, $g_2(w)$, $g_1(w)$ подлежат определению в процессе анализа.

Исключая из (71) и (72) вторую производную, имеем

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \varphi(w)\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + \psi(w), \tag{73}$$

где использованы обозначения

$$\varphi(w) = f_1(w)g_1(w) + f_1'(w), \quad \psi(w) = f_1(w)g_2(w) + f_2(w). \tag{74}$$

Условие инвариантности многообразия (72) по отношению к уравнению (71) получим путем дифференцирования (72) по t:

$$w_{xxt} = 2g_1 w_x w_{xt} + g_1' w_x^2 w_t + g_2' w_t.$$

В этом равенстве надо исключить производные w_{xxt}, w_{xt}, w_t с помощью уравнений (72) и (73) и их дифференциальных следствий. В результате имеем

$$(2\varphi g_1^2+3\varphi' g_1+\varphi g_1'+\varphi'')w_x^4+(4\varphi g_1 g_2+5\varphi' g_2+\varphi g_2'-g_1\psi'-\psi g_1'+\psi'')w_x^2+2\varphi g_2^2+\psi' g_2-\psi g_2'=0. \tag{75}$$

Далее будем считать, что $g_2 \not\equiv 0$. Приравнивая в (75) к нулю коэффициенты при различных степенях w_x, приходим к трем уравнениям, которые удобно записать в форме

$$\begin{gathered} (\varphi' + \varphi g_1)' + 2g_1(\varphi' + \varphi g_1) = 0,\\ 4g_2(\varphi' + \varphi g_1) + (\varphi g_2 - \psi g_1)' + \psi'' = 0,\\ \varphi = -\tfrac{1}{2}(\psi/g_2)'. \end{gathered} \tag{76}$$

Первому уравнению можно удовлетворить, если положить $\varphi' + \varphi g_1 = 0$. Соответствующее частное решение системы (76) имеет вид:

$$\varphi = -\frac{1}{2}\mu', \quad \psi = \mu g_2, \quad g_1 = -\frac{\mu''}{\mu'}, \quad g_2 = \left(2C_1 + \frac{C_2}{\sqrt{|\mu|}}\right)\frac{1}{\mu'}, \tag{77}$$

где $\mu = \mu(w)$ — произвольная функция. Учитывая соотношения (74), находим функциональные коэффициенты исходного уравнения (71) и инвариантного множества (72):

$$f_1 = \left(C_3 - \frac{1}{2}w\right)\mu', \quad f_2 = (\mu - f_1)g_2, \quad g_1 = -\frac{\mu''}{\mu'}, \quad g_2 = \left(2C_1 + \frac{C_2}{\sqrt{|\mu|}}\right)\frac{1}{\mu'}. \tag{78}$$

Уравнение (72) с учетом (78) допускает первый интеграл:

$$w_x^2 = \left[4C_1\mu + 4C_2\sqrt{|\mu|} + 2\sigma_t'(t)\right]\frac{1}{(\mu')^2}, \tag{79}$$

где $\sigma(t)$ — произвольная функция. Исключим w_x^2 в (73) с помощью (79) и подставим функции φ и ψ из (77). Приходим к уравнению

$$\mu' w_t = -C_2\sqrt{|\mu|} - \sigma_t'(t). \tag{80}$$

Рассмотрим подробно частный случай $C_2 = C_3 = 0$. Интегрируя уравнение (80) с учетом равенства $\mu_t = \mu' w_t$, получим

$$\mu = -\sigma(t) + \theta(x), \tag{81}$$

где $\theta(x)$ — произвольная функция. Подставим (81) в (79) и учтем равенство $\mu_x = \mu' w_x$. В результате имеем

$$\theta_x^2 - 4C_1\theta = 2\sigma_t - 4C_1\sigma.$$

Приравнивая обе части этого равенства нулю и интегрируя полученные обыкновенные дифференциальные уравнения, находим функции в правой части формулы (81):

$$\sigma(t) = A\exp(2C_1 t), \qquad \theta(x) = C_1(x + B)^2, \tag{82}$$

где A и B — произвольные постоянные. Таким образом, точное решение уравнения (71) с функциями f_1 и f_2 из (78) при $C_2 = C_3 = 0$ записывается в неявном виде:

$$\mu(w) = -A\exp(2C_1 t) + C_1(x + B)^2.$$

В решении и определяющих выражениях (78) функция $\mu(w)$ задается произвольно.

Пример 7. Рассмотрим задачу об определении нелинейных уравнений второго порядка

$$\frac{\partial w}{\partial t} = f_2(w)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f_1(w)\frac{\partial w}{\partial x} + f_0(w), \tag{83}$$

обладающих инвариантными многообразиями вида

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = g_1(w)\frac{\partial w}{\partial x} + g_0(w). \tag{84}$$

Анализ совместности этих уравнений приводит к следующим зависимостям для определяющих функций:

$$\begin{aligned}
&f_2(w) \text{ — произвольная функция},\\
&f_1(w) = C_1 w + C_2 - (3C_1C_3 w + C_4)f_2(w),\\
&f_0(w) = (-C_1^2C_3w^3 - C_1C_4w^2 + C_5w + C_6)[1 - C_3f_2(w)],\\
&g_1(w) = 3C_1C_3w + C_4,\\
&g_0(w) = C_3(-C_1^2C_3w^3 - C_1C_4w^2 + C_5w + C_6),
\end{aligned} \tag{85}$$

где $C_1, \ldots, C_6$ — произвольные постоянные.

Уравнение (84) может быть проинтегрировано при некоторых значениях постоянных C_n, задающих функции (85). Для этого надо сопоставить уравнения (84) и (35). Построение соответствующих точных решений, как и вывод определяющих соотношений (85), предоставляем читателю в качестве упражнений.

В разд. 9.4 приведены примеры дифференциальных связей второго и третьего порядков, использование которых эквивалентно прямому заданию наиболее распространенных форм точных решений.

Отметим, что дифференциальные связи третьего и более высоких порядков редко используются, поскольку приводят к большим выкладкам и весьма сложным уравнениям (часто более сложным, чем исходные).

Задачи и упражнения к разд. 9.3

1. Построить точные решения нелинейного уравнения теплопроводности (71), используя дифференциальную связь второго порядка (72) при $g_2 \equiv 0$.

Указание. Положить в (75) $g_2 \equiv 0$, а затем показать, что общее решение первых двух уравнений (76) имеет вид

$$\varphi = C_1\mu' + C_2\mu\mu', \quad \psi = \frac{C_3}{\mu'} + \frac{C_4\mu}{\mu'}, \quad g_1 = -\frac{\mu''}{\mu'},$$

где $\mu = \mu(w)$ — произвольная функция, C_n — произвольные постоянные. Далее использовать такие же рассуждения, как в примере 5.

2. Построить точные решения нелинейного уравнения теплопроводности (71), используя дифференциальную связь второго порядка (72) и решение системы (76) при $\varphi \equiv 0$.

Указание. Для контроля результатов использовать решение, полученное в примере 2.

3. Построить точные решения нелинейного уравнения теплопроводности с квадратичной нелинейностью

$$w_t = [(a_1w + a_0)w_x]_x + b_2w^2 + b_1w + b_0,$$

используя дифференциальную связь второго порядка $w_{xx} = \varphi(x)w_x$.

Литература к разд. 9.3: А. Ф. Сидоров, В. П. Шапеев, Н. Н. Яненко (1984), V. A. Galaktionov (1994), В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов (1994), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004).

9.4. Использование нескольких дифференциальных связей

Как указывалось в замечании 2 из разд. 9.1 (см. также разд. 9.5.3), вместо одной могут задаваться сразу несколько дифференциальных связей вида (12). В общем случае дифференциальные связи должны исследоваться на совместность. Проиллюстрируем сказанное на конкретном примере.

Пример 8. Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности с источником

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + g(w). \tag{86}$$

Зададим две дифференциальные связи первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= \varphi(x,t,w),\\ \frac{\partial w}{\partial x} &= \psi(x,t,w), \end{aligned} \tag{87}$$

где φ и ψ — некоторые (пока произвольные) функции своих аргументов.

Сначала найдем условие совместности дифференциальных связей (87). Для этого продифференцируем первое соотношение (87) по x, второе — по t, а затем заменим в полученных выражениях первые производные правыми частями (87). Имеем

$$\begin{aligned} w_{tx} &= \varphi_x + \varphi_w w_x = \varphi_x + \psi\varphi_w,\\ w_{xt} &= \psi_t + \psi_w w_t = \psi_t + \varphi\psi_w. \end{aligned}$$

Приравнивая $w_{tx} = w_{xt}$, находим условие совместности

$$\varphi_x + \psi\varphi_w - \psi_t - \varphi\psi_w = 0. \tag{88}$$

Подставим теперь (87) в исходное уравнение (86). Получим

$$\varphi = (\psi_x + \psi\psi_w)f + \psi^2 f' + g. \tag{89}$$

Исключив функцию φ в условии совместности (88) с помощью (89), с учетом (87) приходим к следующему уравнению для определения функции ψ:

$$\psi_t = (\psi_{xx} + 2\psi\psi_{xw} + \psi^2\psi_{ww})f + (3\psi\psi_x + 2\psi^2\psi_w)f' + \psi^3 f'' + \psi g' - g\psi_w. \tag{90}$$

Уравнение (90) содержит три независимые переменные x, t, w и выглядит сложнее, чем исходное уравнение (86), которое содержит только две независимые переменные x, t. Однако наличие «лишней» переменной w дает более широкий выбор решений, которые можно искать, задавая структуру функции ψ. Ниже будет показано, как можно найти два класса решений нелинейного уравнения теплопроводности с источником (86), исходя из уравнения (90).

Случай 1. Сначала ищем частные решения уравнения (90), которые не зависят от x, в виде произведения функций разных аргументов

$$\psi = \alpha(t)h(w). \tag{91}$$

Формула (91) задает структуру решения, где функции $\alpha(t)$ и $h(w)$ пока неизвестны и подлежат определению в ходе дальнейшего анализа. Подставляя (91) в (90), получим (точка обозначает производную по t):

$$\dot\alpha(t) = \alpha^3(t)h(w)\big(f(w)h(w)\big)'' + \alpha(t)h(w)\big(g(w)/h(w)\big)'.$$

Это уравнение имеет нетривиальное решение, если имеют место равенства

$$\begin{aligned} h(w)\big(f(w)h(w)\big)'' &= A,\\ h(w)\big(g(w)/h(w)\big)' &= B, \end{aligned} \tag{92}$$

где A, B — произвольные постоянные. Уравнения (92) содержат три неизвестных функции; задавая одну из них (любую), можно найти две другие.

Функция (91) порождает решение исходного уравнения (86). Согласно второму уравнению (87), это решение можно записать в неявном виде

$$\int \frac{dw}{h(w)} = \alpha(t)x + \beta(t), \tag{93}$$

где функция $\alpha = \alpha(t)$ удовлетворяет уравнению Бернулли

$$\dot\alpha = A\alpha^3 + B\alpha,$$

которое легко интегрируется. Функция $\beta(t)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения, которое можно получить подстановкой решения (93) в исходное уравнение (86).

Считая функцию $h = h(w)$ заданной (ее можно задать произвольно), проинтегрируем уравнения (92). В результате находим вид функций, определяющих рассматриваемое уравнение (86):

$$f(w) = \frac{A}{h(w)} \int Q(w)\,dw + \frac{C_1 w + C_2}{h(w)}, \quad g(w) = h(w)\bigl[BQ(w) + C_3\bigr], \qquad Q(w) = \int \frac{dw}{h(w)},$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

Случай 2. Теперь ищем частные решения уравнения (90), которые не зависят от t, в виде произведения функций разных аргументов

$$\psi = \theta(x)p(w). \tag{94}$$

Подставив (94) в (90), после перегруппировки членов имеем

$$\theta''_{xx} fp + \theta\theta'_x p(2fp'_w + 3f'_w p) + \theta^3 p^2 (fp)''_{ww} + \theta(pg'_w - p'_w g) = 0. \tag{95}$$

Подобные функционально-дифференциальные уравнения подробно рассматривались в главе 4. Решения уравнения (95) (их несколько) можно получить методом расщепления, используя результаты разд. 4.5 [см. функциональное уравнение (60) и его решения (61)–(62)].

Не проводя полного анализа уравнения (95), укажем здесь одно его точное решение:

$$\theta(x) = x, \quad f(w) = \frac{aw + b}{p(w)}, \quad g(w) = -3(aw + b) - 2p(w) \int \frac{(aw + b)p'_w(w)\,dw}{p^2(w)}, \tag{96}$$

где $p = p(w)$ — произвольная функция, a, b — произвольные постоянные. Подставим (94) во вторую дифференциальную связь (87), а затем учтем зависимость $\theta(x) = x$ [см. (96)]. Получим $w_x = xp(w)$. Интегрируя это равенство, имеем

$$\int \frac{dw}{p(w)} = \frac{1}{2}x^2 + \xi(t). \tag{97}$$

Дифференцируя (97) по t и учитывая вид первой дифференциальной связи (87), находим функцию $\varphi = \xi'_t p(w)$. Подставив выражения для φ и ψ в (89) и учитывая зависимости (96)–(97), получим линейное дифференциальное уравнение для функции $\xi(t)$. Его решение приводит к экспоненциальной зависимости

$$\xi(t) = Ce^{-2at}, \tag{98}$$

где C — произвольная постоянная.

Формулы (97)–(98) дают решение в неявной форме нелинейного уравнения теплопроводности (86), определяющие функции которого $f(w)$ и $g(w)$ задаются выражениями (96), где $p(w)$ — произвольная функция.

Замечание. Неклассический метод исследования симметрий дифференциальных уравнений сводится к анализу уравнений с помощью двух дифференциальных связей, одна из которых первого порядка, а порядок второй определяется порядком рассматриваемого уравнения (см. разд. 9.5.3).

Задачи и упражнения к разд. 9.4

1. Найти частное решение функционально-дифференциального уравнения (95) при $\theta = 1/x$. Построить соответствующее точное решение нелинейного уравнения теплопроводности (86).

2. Построить все решения функционально-дифференциального уравнения (95) и найти соответствующие точные решения уравнения (86).

Указание. Для решения уравнения (95) использовать метод расщепления, изложенный в разд. 4.5.

3. Найти точные решения обобщенного уравнения Бюргерса

$w_t = f(w)w_{xx} + g(w)w_x$

с помощью двух дифференциальных связей (87).

Литература к разд. 9.4: P. J. Olver, E. M. Vorob'ev (1996).

ТАБЛИЦА 10
Дифференциальные связи второго порядка, соответствующие некоторым классам точных решений, задаваемых в явном виде

№	Тип решений	Структура решений	Дифференциальные связи
1	Решение с аддитивным разделением переменных	$w=\varphi(x)+\psi(y)$	$w_{xy}=0$
2	Решение с мультипликативным разделением переменных	$w=\varphi(x)\psi(y)$	$ww_{xy}-w_xw_y=0$
3	Решение с обобщенным разделением переменных	$w=\varphi(x)y^2+\psi(x)y+\chi(x)$	$w_{yy}-f(x)=0$
4	Решение с обобщенным разделением переменных	$w=\varphi(x)\psi(y)+\chi(x)$	$w_{yy}-f(y)w_y=0$ $w_{xy}-g(x)w_y=0$
5	Решение с функциональным разделением переменных	$w=f(z),\ \ z=\varphi(x)y+\psi(x)$	$w_{yy}-g(w)w_y^2=0$
6	Решение с функциональным разделением переменных	$w=f(z),\ \ z=\varphi(x)+\psi(y)$	$ww_{xy}-g(w)w_xw_y=0$

9.5. Связь между методом дифференциальных связей и другими методами

Метод дифференциальных связей является одним из наиболее общих методов построения точных решений нелинейных уравнений с частными производными. Многие другие методы можно считать его частными случаями*.

9.5.1. Обобщенное и функциональное разделение переменных и дифференциальные связи

В табл. 10 приведены примеры дифференциальных связей второго порядка, использование которых эквивалентно прямому заданию наиболее распространенных форм точных решений, используемых при разделении переменных. Для решений с функциональным разделением переменных (см. строки 5 и 6) функцию g можно выразить через f.

В табл. 11 приведены примеры дифференциальных связей третьего порядка, использование которых эквивалентно прямому заданию наиболее распространенных форм точных решений с обобщенным и функциональным разделением переменных.

В общем случае поиск решения с обобщенным разделением переменных вида $w(x,y) = \varphi_1(x)\psi_1(y) + \varphi_2(x)\psi_2(y) + \cdots + \varphi_n(x)\psi_n(y)$ эквивалентен заданию дифференциальной связи порядка $2n$.

Для указанных в табл. 10 и 11 типов решений предпочтительнее использовать методы обобщенного и функционального разделения переменных, поскольку они содержат меньше этапов, связанных с решением промежуточных дифференциальных уравнений. Кроме того, метод дифференциальных связей

* Основная трудность для практического использования метода дифференциальных связей состоит в его очень общей формулировке и необходимости при рассмотрении конкретных классов уравнений выбирать подходящие дифференциальные связи. Поэтому для построения точных решений нелинейных уравнений часто предпочтительнее использовать более простые (но менее общие) методы.

ТАБЛИЦА 11

Дифференциальные связи третьего порядка, соответствующие некоторым классам точных решений, задаваемых в явном виде

Тип решений	Структура решений	Дифференциальные связи
Решение с обобщенным разделением переменных	$w=\varphi(x)y^2+\psi(x)y+\chi(x)$	$w_{yyy}=0$
Решение с обобщенным разделением переменных	$w=\varphi(x)\psi(y)+\chi(x)$	$w_y w_{xyy}-w_{xy}w_{yy}=0$
Решение с функциональным разделением переменных	$w=f\big(\varphi(x)y+\psi(x)\big)$	$w_y(w_x w_{yyy}-w_y w_{xyy})=$ $=2w_{yy}(w_x w_{yy}-w_y w_{xy})$
Решение с функциональным разделением переменных	$w=f\big(\varphi(x)+\psi(y)\big)$	$w_x w_y w_{xyy}-w_y w_{xxy}=$ $=w_{xy}(w_x^2 w_{yy}-w_y^2 w_{xx})$

малопригоден для построения точных решений уравнений старших (произвольных) порядков.

9.5.2. Прямой метод Кларксона—Крускала и метод дифференциальных связей

Рассмотрим поиск точного решения в виде

$$w(x,t)=F\big(x,t,u(z)\big),\qquad z=z(x,t),\tag{99}$$

где $F(x,t,u)$ и $z(x,t)$ должны выбираться так, чтобы для функции $u(z)$ в конечном итоге получить одно обыкновенное дифференциальное уравнение (см. разд. 6.2).

Покажем, что использование структуры решения (99) эквивалентно поиску решения с помощью квазилинейной дифференциальной связи первого порядка

$$\xi(x,t)\frac{\partial w}{\partial t}+\eta(x,t)\frac{\partial w}{\partial x}=\zeta(x,t,w).\tag{100}$$

Действительно, первые интегралы характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dt}{\xi(x,t)}=\frac{dx}{\eta(x,t)}=\frac{dw}{\zeta(x,t,w)}$$

имеют вид

$$z(x,t)=C_1,\qquad \varphi(x,t,w)=C_2,\tag{101}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Поэтому общее решение уравнения (100) записывается так:

$$\varphi(x,t,w)=u(z(x,t)),\tag{102}$$

где $u(z)$ — произвольная функция. Разрешив (102) относительно w, получим представление решения в виде (99).

9.5.3. Методы группового анализа и метод дифференциальных связей

Классический и неклассический методы исследования симметрий дифференциальных уравнений (классический и неклассический методы группового анализа) можно переформулировать в терминах метода дифференциальных связей. Покажем это на примере уравнения второго порядка общего вида

$$F\Big(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big) = 0. \tag{103}$$

Дополним уравнение (103) двумя дифференциальными связями:

$$\xi \frac{\partial w}{\partial x} + \eta \frac{\partial w}{\partial y} = \zeta, \tag{104}$$

$$\xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y} + \zeta \frac{\partial F}{\partial w} + \zeta_1 \frac{\partial F}{\partial w_x} + \zeta_2 \frac{\partial F}{\partial w_y} + \zeta_{11} \frac{\partial F}{\partial w_{xx}} + \zeta_{12} \frac{\partial F}{\partial w_{xy}} + \zeta_{22} \frac{\partial F}{\partial w_{yy}} = 0, \tag{105}$$

где $\xi = \xi(x, y, w)$, $\eta = \eta(x, y, w)$, $\zeta = \zeta(x, y, w)$ — искомые функции, а координаты первого и второго продолжений ζ_i и ζ_{ij} определяются по формулам (9) и (14) из разд. 7.1. Дифференциальная связь (105) совпадает с условием инвариантности уравнения (103), см. (17) из разд. 7.2.

Замечание. Метод построения точных решений уравнения (103), основанный на уравнении с частными производными первого порядка (104) и условии инвариантности (105), соответствует неклассическому методу исследования симметрий дифференциальных уравнений (см. разд. 8.1).

При использовании классической схемы группового анализа сначала рассматриваются два уравнения: (103) и (105). Из этих уравнений исключается одна из старших производных, например, w_{yy}, а остальные производные (w_x, w_y, w_{xx}, w_{xy}) считаются «независимыми». Полученное выражение расщепляется по степеням «независимых» производных (см. разд. 7.2). В результате приходят к переопределенной системе уравнений и находят из нее функции ξ, η, ζ. Затем эти функции подставляются в квазилинейное уравнение первого порядка (104), решение которого позволяет определить общий вид решения (в этом решении содержится функциональный произвол). Далее с помощью уравнения (103) уточняется вид решения, полученного на предыдущем этапе.

Классическая схема может привести к потере решений, поскольку на первом этапе при расщеплении предполагается, что первые производные w_x и w_y являются независимыми, в то время как в силу уравнения (104) эти производные связаны линейным соотношением.

Задачи и упражнения к разд. 9.5

1. Найти дифференциальные связи второго порядка, эквивалентные заданию структуры решения в следующем виде (f и g — произвольные функции соответствующего аргумента):

a) $w = f(x + t) + g(x - t)$;
b) $w = f(x + at) + g(x + bt)$;
c) $w = f(x + at)g(x + bt)$.

Указание. Путем дифференцирования рассматриваемого выражения и его следствий исключить произвольные функции.

2. Найти дифференциальные связи третьего порядка, эквивалентные заданию структуры решения в следующем виде (f, g, h — произвольные функции соответствующего аргумента):

a) $w = f(x + t) + g(x - t) + h(x)$;
b) $w = f(x + at)g(x + bt) + h(t)$;
c) $w = f(z) + h(t)$, $z = x + g(t)$;
d) $w = f(z) + h(t)$, $z = xg(t)$;
e) $w = f(z)$, $z = x^2 g(t) + h(t)$;
f) $w = f(t)g(z)$, $z = x + h(t)$;

g) $w = f(t)g(z)$, $z = xh(t)$.

Указание. Путем дифференцирования рассматриваемого выражения и его следствий исключить произвольные функции.

3. Найти дифференциальную связь первого порядка вида (100), эквивалентную заданию структуры решения в следующем виде (f, g, h — произвольные функции соответствующего аргумента):

a) $w = f(t)g(z)$, $z = x + h(t)$;
b) $w = f(z)$, $z = xg(t) + h(t)$;
c) $w = f(z) + g(x)$, $z = xg(t)$.

Указание. Рассмотреть соответствующую характеристическую систему уравнений и исследовать вид ее первых интегралов.

Литература к разд. 9.5: С. В. Мелешко (1983), P. J. Olver (1994), В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов (1994), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (2004).

10. Тест Пенлеве для нелинейных уравнений математической физики

10.1. Подвижные особенности решений обыкновенных дифференциальных уравнений

10.1.1. Примеры решений, имеющих подвижные особенности

Взаимосвязь вида обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностями их решений была выявлена более ста лет назад. Особенности решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений точно соответствуют особенностям коэффициентов уравнений. Поскольку их положение не меняется с изменением постоянных интегрирования, то такие особенности именуют неподвижными. В случае нелинейных уравнений появляются также подвижные особенности решений, положение которых зависит от начальных условий (от постоянных интегрирования).

Ниже приведены простейшие примеры нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и их решений с подвижными особенностями.

Уравнение	*Решение*	*Тип особенности решения*
$u'_z = -u^2$	$u = 1/(z - z_0)$	подвижный полюс
$u'_z = 1/u$	$u = 2\sqrt{z - z_0}$	алгебраическая точка ветвления
$u'_z = e^{-u}$	$u = \ln(z - z_0)$	логарифмическая точка ветвления
$u'_z = -u \ln^2 u$	$u = \exp[1/(z - z_0)]$	существенно особая точка

Алгебраические точки ветвления, логарифмические точки ветвления и существенно особые точки решений называются *критическими особыми точками* (при обходе вокруг этих точек в комплексной плоскости z значение функции $u(z)$ меняется).

10.1.2. Результаты классификации нелинейных уравнений первого и второго порядков

1°. В 1884 году Л. Фукс (L. Fuchs) показал, что нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка

$$u'_z = R(z, u)$$

с рациональной по второму и аналитической по первому аргументу функцией R обладают решениями без подвижных критических особых точек (т. е. только с подвижными полюсами) лишь в случае общего уравнения Риккати $u'_z = A_0(z) + A_1(z)u + A_2(z)u^2$.

2°. Классификация (на комплексной плоскости) обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка вида

$$u''_{zz} = R(z, u, u'_z),$$

где $R = R(z, u, w)$ — функция рациональная по u и w и аналитическая по z, была проведена П. Пенлеве (P. Painlevé, 1900) и Б. Гамбье (B. Gambier, 1910). Они показали, что все уравнения данного вида, решения которых не имеют подвижных критических точек (допустимыми считаются неподвижные особые точки и подвижные полюсы) сводятся к 50 классам уравнений. Из них 44 класса интегрируются в квадратурах или допускают понижение порядка. Остальные 6 классов являются неприводимыми, их называют *уравнениями Пенлеве* (а их решения — трансцендентными функциями Пенлеве или трансцендентами Пенлеве).

10.1.3. Уравнения Пенлеве

1°. *Первое уравнение Пенлеве* (в канонической форме) имеет вид

$$u''_{zz} = 6u^2 + z. \tag{1}$$

В окрестности подвижного полюса z_0 его решения представимы в виде ряда

$$\begin{gathered} u = \frac{1}{(z - z_0)^2} + \sum_{m=2}^{\infty} a_m (z - z_0)^m, \\ a_2 = -\tfrac{1}{10} z_0, \quad a_3 = -\tfrac{1}{6}, \quad a_4 = C, \quad a_5 = 0, \quad a_6 = \tfrac{1}{300} z_0^2, \end{gathered} \tag{2}$$

где z_0 и C — произвольные постоянные; коэффициенты a_m ($m \geqslant 7$) однозначно определяются через z_0 и C.

2°. *Второе уравнение Пенлеве* (в канонической форме) имеет вид

$$u''_{zz} = 2u^3 + zu + \alpha. \tag{3}$$

В окрестности подвижного полюса z_0 его решения допускают следующие разложения:

$$\begin{gathered} u = \frac{k}{z - z_0} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m (z - z_0)^m, \\ b_1 = -\tfrac{1}{6} k z_0, \quad b_2 = -\tfrac{1}{4}(k + \alpha), \quad b_3 = C, \quad b_4 = \tfrac{1}{72} z_0 (k + 3\alpha), \\ b_5 = \tfrac{1}{3024}\bigl[(27 + 81\alpha^2 - 2z_0^3)k + 108\alpha - 216 C z_0\bigr], \end{gathered} \tag{4}$$

где $k = \pm 1$; z_0 и C — произвольные постоянные; коэффициенты b_m ($m \geqslant 6$) однозначно определяются через z_0 и C.

3°. Остальные четыре уравнения Пенлеве имеют квадратичную нелинейность относительно первой производной и здесь не приводятся. Отметим, что решение четвертого уравнения Пенлеве имеет подвижный полюс, а решения третьего, пятого и шестого уравнений Пенлеве имеют неподвижные логарифмические точки ветвления. Более подробную информацию об уравнениях Пенлеве можно найти далее в главе 13 и в литературе, цитируемой в конце разд. 10.1.

4°. Обыкновенное дифференциальное уравнение (любого порядка) называется уравнением типа Пенлеве, если его решения не имеют подвижных критических особых точек. О таких уравнениях говорят, что они обладают свойством Пенлеве.

10.1.4. Тест Пенлеве для обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка:

$$u_z^{(n)} = F\big(z, u, u'_z, \ldots, u_z^{(n-1)}\big), \qquad u_z^{(n)} \equiv \frac{d^n u}{dz^n}. \tag{5}$$

Тест Пенлеве основан на поиске решения уравнения (5) в виде разложения, имеющего особенность типа подвижного полюса:

$$u(z) = \frac{1}{(z-z_0)^p} \sum_{m=0}^{\infty} A_m (z-z_0)^m, \tag{6}$$

где z_0 — любое, p — целое положительное число. Решение (6) должно быть общим, поэтому коэффициенты разложения A_m должны содержать $(n-1)$ произвольных постоянных (в этом случае с учетом произвольности z_0 решение в соответствии с порядком уравнения будет зависеть от n произвольных постоянных). Если решений вида (6) несколько, то все они должны удовлетворять указанным требованиям.

Пример 1. Характерные особенности использования теста Пенлеве проиллюстрируем на примере нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$u''_{zz} = u^2 + au + bz + cz^2. \tag{7}$$

Для определения главного члена разложения (6), который характеризуется показателем степени p и коэффициентом A_0, подставим в уравнение (7) одночлен

$$u = \frac{A_0}{\xi^p}, \qquad \xi = z - z_0, \tag{8}$$

а затем полученное выражение умножим на ξ^{p+2} (произведение $\xi^{p+2}u''_{zz}$ дает величину нулевого порядка). Имеем

$$p(p+1)A_0 = A_0^2\xi^{2-p} + A_0 a\xi^2 + b(\xi+z_0)\xi^{p+2} + c(\xi+z_0)^2\xi^{p+2}. \tag{9}$$

При $\xi \to 0$ $(p > 0)$ в правой части ненулевой вклад может дать только первый член $A_0^2\xi^{2-p}$. Для того чтобы он был равен константе, надо положить $p = 2$. В этом случае из (9) при $\xi \to 0$ находим $A_0 = 6$. Таким образом, главный член разложения определяется формулой (8) при

$$p = 2, \quad A_0 = 6.$$

Учитывая сказанное, решение уравнения (7) ищем в виде разложения

$$u = 6\xi^{-2} + A_1\xi^{-1} + A_2 + A_3\xi + A_4\xi^2 + A_5\xi^3 + A_6\xi^4 + \cdots. \tag{10}$$

Подставим (10) в (7), «соберем» члены при одинаковых степенях ξ, а затем приравняем нулю коэффициенты при степенях ξ. Имеем систему алгебраических уравнений для определения A_m:

$$\begin{aligned}
\xi^{-3}&\colon\quad 10A_1 = 0,\\
\xi^{-2}&\colon\quad 12A_2 + A_1^2 + 6a = 0,\\
\xi^{-1}&\colon\quad 12A_3 + 2A_1A_2 + A_1 a = 0,\\
1&\colon\quad 10A_4 + 2A_1A_3 + A_2^2 + A_2 a + bz_0 + cz_0^2 = 0,\\
\xi&\colon\quad 6A_5 + 2A_1A_4 + 2A_2A_3 + A_3 a + 2cz_0 + b = 0,\\
\xi^2&\colon\quad 0\times A_6 + 2A_1A_5 + 2A_2A_4 + A_3^2 + A_4 a + c = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Здесь в первом столбце указаны степени ξ, при которых стоят соответствующие коэффициенты, приведенные во втором столбце. Из первых пяти уравнений (11) получим

$$A_1 = 0, \quad A_2 = -\tfrac{1}{2}a, \quad A_3 = 0, \quad A_4 = \tfrac{1}{10}\big(\tfrac{1}{4}a^2 - bz_0 - cz_0^2\big), \quad A_5 = -\tfrac{1}{6}b - \tfrac{1}{3}cz_0. \tag{12}$$

Подставив эти значения в последнее уравнение (11), имеем

$$0 \times A_6 + c = 0. \tag{13}$$

Отсюда в зависимости от параметра c могут иметь место две альтернативные возможности.

1°. При $c = 0$ равенство (13) выполняется тождественно для любого A_6. В этом случае уравнение (7) удовлетворяет тесту Пенлеве, а его решение может быть представлено в виде разложения (10), которое содержит две произвольные постоянные z_0 и A_6; при этом первые пять коэффициентов определяются по формулам (12), а коэффициенты A_7, A_8, ... могут быть определены последовательно из рекуррентных соотношений (которые здесь не приводятся).

2°. При $c \neq 0$ равенство (13) не выполняется ни при каких значениях A_6. Уравнение (7) в этом случае не имеет решений вида (6) и, следовательно, не удовлетворяет тесту Пенлеве.

Замечание 1. Члены уравнения, которые определяют коэффициенты p и A_0 главного члена разложения (8), называются *ведущими*. В уравнении (7) такими членами являются u''_{zz} и u^2.

10.1.5. Некоторые замечания о тесте Пенлеве. Индексы Фукса. Примеры

В общем случае, как и в примере 1, рекуррентные соотношения для определения коэффициентов разложения имеют вид

$$k_m A_m = \Phi_m(A_0, A_1, \dots, A_{m-1}), \qquad m = 1, 2, \dots \tag{14}$$

Чтобы получить произвольную постоянную A_m, учитываем, что в решении должны одновременно выполняться равенства:

$$k_m = 0, \quad \Phi_m(A_0, A_1, \dots, A_{m-1}) = 0. \tag{15}$$

В примере 1 для проверки выполнения теста Пенлеве потребовалось рассмотреть первые семь членов разложения, что было сопряжено с достаточно большим объемом выкладок. При этом заранее не было известно, сколько надо взять членов для анализа. Для практики полезно знать заранее (без проведения полного объема вычислений), сколько надо брать членов разложения (6), а также сколько коэффициентов A_m и какие из них могут быть произвольными. Для того чтобы ответить на эти вопросы, надо уметь вычислять числовой множитель k_m в формулах (14).

Из результатов анализа примера 1 следует, что множители k_m при коэффициентах A_m [см. первые члены во втором столбце (11)] определяются только ведущими членами уравнения (7). Аналогичная ситуация имеет место и в случае общего уравнения n-го порядка (5). Учитывая, что левая часть равенств (14) линейна относительно A_m, а правая не зависит от A_m, множители k_m можно найти путем подстановки двучлена

$$u = A_0 \xi^{-p} + A_m \xi^{m-p}, \quad \xi = z - z_0 \tag{16}$$

в ведущие члены уравнения (5). Собрав члены, пропорциональные степеням A_m, получим

$$A_m k_m \xi^q + O(A_m^2) = 0, \qquad q \geqslant m - n - p, \tag{17}$$

где k_m — искомый множитель, входящий в левую часть (14). Можно показать, что k_m является полиномом n-й степени (n — порядок дифференциального уравнения) относительно целочисленного индекса m:

$$k_m = b_m m^n + b_{n-1} m^{n-1} + \dots + b_1 m + b_0. \tag{18}$$

Уравнение $k_m = 0$ всегда имеет корень $m = 1$ (который отвечает произвольности выбора z_0), а остальные корни этого уравнения определяют *индексы Фукса* (иногда называемые *резонансами*) — номера $m_1, \ldots, m_{n-1}$ коэффициентов A_m в разложении (6), которые могут быть произвольными.

На практике тест Пенлеве удобно проводить последовательно в три этапа.

Первый этап. Сначала определяется главный член разложения (6), который характеризуется показателем степени p и коэффициентом A_0. Для этого в уравнение (5) подставляется одночлен (8), а затем обе части полученного выражения умножаются на ξ^{p+n}. В результате в левой части будет стоять константа. Значение p выбирается так, чтобы предельное значение правой части при $\xi \to 0$ также было равно константе (отличной от нуля). После этого приравнивание левой и правой (при $\xi \to 0$) частей позволяет найти коэффициент A_0.

Если все полученные на первом этапе значения p — целые и положительные (это первое необходимое условие для теста Пенлеве), то анализ уравнения (5) может быть продолжен. Если хотя бы одно значение p — нецелое или комплексное, то рассматриваемое уравнение не удовлетворяет тесту Пенлеве.

Второй этап. На этом этапе определяются индексы Фукса. Для этого в ведущие члены подставляется (16) и определяется множитель k_m, входящий в левую часть соотношений (14). Второе необходимое условие для теста Пенлеве: уравнение $k_m = 0$ должно иметь $n-1$ различных целых неотрицательных корней, т. е. должно иметь место представление

$$k_m = (m+1)(m-m_1)\ldots(m-m_{n-1}), \qquad 0 \leqslant m_1 < m_2 < \cdots < m_{n-1}, \quad (19)$$

где m_j — целые числа. Если это условие выполнено, то переходят к третьему этапу.

Если уравнение $k_m = 0$ имеет нецелые, отрицательные целые (кроме $m = -1$) или комплексные корни, то рассматриваемое уравнение не удовлетворяет тесту Пенлеве и на этом анализ заканчивается.

Третий этап. На этом этапе проверяется одновременное выполнение условий (15) и последовательно вычисляются коэффициенты разложения A_m до значения $m = m_{n-1}$ включительно. Если при каком-то $m_j \leqslant m_{n-1}$ условие (15) не выполняется, то уравнение не удовлетворяет тесту Пенлеве.

Пример 2. Найдем индексы Фукса для уравнения (7) из примера 1.

Подставляя двучлен (16) при $p=2$, $A_0=6$ в ведущие члены уравнения (7) (соответствующее «укороченное» уравнение имеет вид $u''_{zz} = u^2$), находим искомый сомножитель:

$$k_m = m^2 - 5m - 6 = (m+1)(m-6).$$

Из уравнения $k_m = 0$ получим индекс Фукса $m_1 = 6$. Поэтому второе необходимое условие теста Пенлеве выполнено и следует рассмотреть семь членов разложения (10) (последний член содержит коэффициент A_6). Дальнейший анализ проводится, как в примере 1.

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$u''_{zz} + 2uu'_z + au + bz + cz^2 = 0. \quad (20)$$

Первый этап. Подставив в (20) одночлен (8), находим константы, определяющие главный член разложения:

$$p = 1, \qquad A_0 = 1. \quad (21)$$

Так как p — целое положительное число, то уравнение (20) удовлетворяет первому необходимому условию теста Пенлеве.

Второй этап. Подставив двучлен (16) с учетом значений (21) в ведущие члены уравнения (20) (это члены, содержащие производные), после элементарных преобразований получим

$$A_m(m+1)(m-2)\xi^{m-3} + O(A_m^2) = 0.$$

Из квадратного уравнения
$$k_m = (m+1)(m-2) = 0$$
находим коэффициент Фукса (отличный от -1):
$$m_1 = 2.$$
Поскольку он — целый и положительный, то уравнение (20) удовлетворяет второму необходимому условию теста Пенлеве.

Третий этап. На этом этапе подставляем в уравнение разложение
$$u = \xi^{-1} + A_1 + A_2\xi + \cdots,$$
в котором надо учесть только три слагаемых (до члена, пропорционального A_2, что следует из второго этапа). В результате имеем
$$\begin{aligned} \xi^{-2}&: \quad -2A_1 = 0,\\ \xi^{-1}&: \quad 0 \times A_2 + a = 0. \end{aligned} \tag{22}$$
Из первого равенства (22) получим $A_1 = 0$. Второе равенство может выполняться только при $a = 0$. В этом случае значение A_2 — любое и уравнение (20) удовлетворяет тесту Пенлеве для произвольных b и c.

Пример 4. Рассмотрим уравнение
$$uu''_{zz} + (u'_z)^2 = 0. \tag{23}$$
Подставив сюда одночлен (8), находим два значения показателя:
$$p = 0, \quad p = -\frac{1}{2}.$$
Поэтому уравнение (23) не удовлетворяет тесту Пенлеве.

Общее решение уравнения (23) дается формулой $u = A\sqrt{z - z_0}$ и имеет алгебраическую точку ветвления.

10.1.6. Тест Пенлеве для систем обыкновенных дифференциальных уравнений

Тест Пенлеве можно использовать также для анализа систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Для системы, состоящей из N уравнений, решение ищется в виде разложений всех неизвестных величин в ряды с полюсными подвижными особенностями
$$u_k = (z - z_0)^{-p_k}\left[A_{k0} + A_{k1}(z - z_0) + A_{k2}(z - z_0)^2 + \cdots\right], \quad k = 1, \ldots, N, \tag{24}$$
где p_k — положительные целые числа. Общность решения должна обеспечиваться необходимым (соответствующим порядку системы) числом произвольных коэффициентов разложений и свободным параметром z_0. Если максимальные порядки старших производных отдельных уравнений системы равны $n_1, \ldots, n_N$, то число произвольных постоянных a_{km} в решении (24) должно быть равно $n_1 + \cdots + n_N - 1$.

Замечание 2. В 1888 году С. В. Ковалевской удалось проинтегрировать уравнения движения недеформируемого твердого тела с закрепленной точкой под действием силы тяжести в неизвестном до нее случае. Был выполнен анализ системы из шести нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, решения которых искались в виде (24) при $N = 6$. Важно отметить, что исследования С. В. Ковалевской предшествовали работам П. Пенлеве по классификации обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, который использовал разложения аналогичного вида. Поэтому в литературе наряду с термином «тест Пенлеве» иногда используется также термин «тест Ковалевской — Пенлеве».

Задачи и упражнения к разд. 10.1

1. Показать, что уравнение (7) при $c = 0$ линейным преобразованием вида $u = \alpha_1 \bar{u} + \beta_1$, $z = \alpha_2 \bar{z} + \beta_2$ приводится к первому уравнению Пенлеве (1).

2. Определить при каких значениях параметров a, b, c следующие уравнения второго порядка удовлетворяют тесту Пенлеве:

a) $u''_{zz} = a + bu + cu^2$,
b) $u''_{zz} - au'_z = bu + cu^2$,
c) $u''_{zz} - au'_z = bu + cu^3$,
d) $u''_{zz} - auu'_z = bu^2 + cz^3$,
e) $u''_{zz} - a(u'_z)^2 = bu + cu^2$.

3. Доказать, что следующие уравнения старших порядков удовлетворяют тесту Пенлеве:

a) $u'''_{zzz} - 6uu'_z - zu'_z - 2u = 0$,
b) $u''''_{zzzz} = 20uu''_{zz} + 10(u'_z)^2 - 40u^3 + z$,
c) $u''''_{zzzz} = 10u^2u''_{zz} + 10u(u'_z)^2 - 6u^5 - zu + a$.

4. Определить при каких значениях параметров a, b, c следующие уравнения старших порядков удовлетворяют тесту Пенлеве:

a) $u'''_{zzz} = u^2 + au + bz + c$,
b) $u'''_{zzz} + uu'_z + au'_z + bu + cz = 0$,
c) $u'''_{zzz} = uu'_z + au + bu^2 + cz$,
d) $u''''_{zzzz} - u'_{zz} + au^2 + bu + c = 0$,
e) $u''''_{zzzz} + uu''_{zz} + (u'_z)^2 + azu'_z + bu + cz^2 = 0$.

5. Проанализировать систему уравнений первого порядка на тест Пенлеве:

$$x'_t = -x + axy, \quad y'_t = -y + bx^2 + cy^2.$$

Указание. Главные члены разложений искать в виде

$$x = x_0(t - t_0)^{-p}, \quad y = y_0(t - t_0)^{-q},$$

а индексы Фукса — с помощью выражений

$$x = x_0(t - t_0)^{-p} + x_m(t - t_0)^{m-p}, \quad y = y_0(t - t_0)^{-q} + y_m(t - t_0)^{m-q}.$$

6. Проанализировать систему уравнений второго порядка типа Хенона — Хейлеса на тест Пенлеве:

$$x''_{tt} = -x + axy, \quad y'_{tt} = -y + bx^2 + cy^2.$$

См. указание к примеру 5.

7. Показать, что первое уравнение Пенлеве $u''_{zz} = 3u^2 + z$ (неканоническая форма) эквивалентно линейной системе уравнений с частными производными

$$\psi_{zz} = (u + \lambda)\psi,$$
$$\psi_\lambda = 2(2\lambda - u)\psi_z + u_z\psi,$$

где $\psi = \psi(z, \lambda)$, $u = u(z)$.

Указание. Использовать условие совместности уравнений $(\psi_{zz})_\lambda = (\psi_\lambda)_{zz}$ и дифференциальные следствия этих уравнений.

Литература к разд. 10.1: В. В. Голубев (1950), G. M. Murphy (1960), M. J. Ablowitz, A. Ramani, H. Segur (1980), A. R. Its, V. Yu. Novokshenov (1986), В. И. Громак, Н. А. Лукашевич (1990), A. R. Chowdhury (2000), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002), Н. А. Кудряшов (2004), В. И. Громак, А. С. Зинченко (2004).

10.2. Решения уравнений с частными производными, имеющие подвижный полюс. Описание метода

По аналогии с обыкновенными дифференциальными уравнениями решения уравнений с частными производными можно искать в виде разложений, содержащих особенность типа подвижного полюса. Положение полюса задается с помощью произвольной функции.

Для простоты изложения далее будем рассматривать уравнения математической физики с двумя независимыми переменными x, t и зависимой переменной w, которые не зависят явно от x и t.

10.2.1. Простейшая схема анализа нелинейных уравнений в частных производных

Решение ищется в окрестности сингулярного многообразия $x - x_0(t) = 0$ в виде разложения (M. Jimbo, M. D. Kruskal, T. Miwa, 1982):

$$w(x,t) = \frac{1}{\xi^p}\sum_{m=0}^{\infty} w_m(t)\xi^m, \qquad \xi = x - x_0(t). \tag{25}$$

Здесь показатель p — целое положительное число, что обеспечивает полюсной характер подвижной особенности решения. Функция $x_0(t)$ считается произвольной, а w_m зависят от производных этой функции.

Выражение (25) подставляется в рассматриваемое уравнение. Сначала из баланса ведущих сингулярных членов определяются показатель p и главный член разложения $u_0(t)$. Затем «собираются» члены при одинаковых степенях ξ. Приравнивая полученные выражения (при одинаковых степенях ξ) нулю, приходят к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $w_m(t)$.

Полученное решение будет общим, если в разложение (25) войдут произвольные функции, причем число этих функций равно порядку рассматриваемого уравнения.

10.2.2. Общая схема анализа нелинейных уравнений в частных производных

Решение уравнения в частных производных ищут в окрестности сингулярного многообразия $\xi(x,t) = 0$ в виде обобщенного разложения, симметричного по независимым переменным (J. Weiss, M. Tabor, G. Carnevalle, 1983):

$$w(x,t) = \frac{1}{\xi^p}\sum_{m=0}^{\infty} w_m(x,t)\xi^m, \qquad \xi = \xi(x,t), \tag{26}$$

где $\xi_t\xi_x \neq 0$. Здесь и далее нижние индексы x и t обозначают соответствующие частные производные; функция $\xi(x,t)$ считается произвольной, а w_m зависят от производных этой функции.

Разложение (25) является частным случаем разложения (26), когда уравнение сингулярного многообразия разрешено относительно переменной x.

Требование отсутствия подвижных критических точек подразумевает, что p — положительное целое число. Решение будет общим, если степень функционального произвола в коэффициентных функциях $w_m(x,t)$ и функции разложения $\xi(x,t)$ будет совпадать с порядком уравнения.

Подставляя выражение (26) в уравнение и выделяя (а затем приравнивая нулю) члены при одинаковых степенях ξ, получим рекуррентные соотношения для коэффициентов разложения

$$k_m w_m = \Phi_m(w_0, w_1, \ldots, w_{m-1}, \xi_t, \xi_x, \ldots). \tag{27}$$

Здесь k_m — полиномы степени n с целочисленным аргументом m вида

$$k_m = (m+1)(m-m_1)(m-m_2)\ldots(m-m_{n-1}), \tag{28}$$

где n — порядок рассматриваемого уравнения.

Если корни полинома $m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}$, именуемые индексами Фукса, или резонансами, оказываются целыми неотрицательными числами, причем выполнены условия совместности

$$\Phi_{m=m_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{29}$$

то говорят о выполнении теста Пенлеве для рассматриваемого уравнения. Уравнения, обладающие указанным свойством, часто относят к классу интегрируемых (что подтверждается приводимостью таких уравнений к линейным уравнениям во многих известных случаях).

10.2.3. Основные этапы исследования нелинейных уравнений на тест Пенлеве

Как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, для нелинейных уравнений математической физики тест Пенлеве удобно проводить последовательно в несколько этапов. На первом и втором этапах определяются главный член разложения (25) и индексы Фукса (это позволяет без проведения полного объема вычислений проверить необходимые условия для теста Пенлеве). Для наглядности на рис. 7 изображены основные этапы исследования нелинейных уравнений на тест Пенлеве с помощью разложения (25) или (26).

Замечание. Уравнение не удовлетворяет тесту Пенлеве при выполнении любого из условий: $p<0$, p — нецелое, p — комплексное, $m_j<0$, m_j — нецелое, m_j — комплексное (в последних трех случаях достаточно одного значения j, где $j = 1, \ldots, n-1$).

10.2.4. Некоторые замечания. Усеченные разложения

Многочисленными исследованиями установлено, что многие известные интегрируемые нелинейные уравнения математической физики обладают свойством Пенлеве. Были найдены также новые уравнения с таким свойством.

При первоначальной проверке выполнения теста Пенлеве для конкретного уравнения удобно пользоваться простейшей схемой, основанной на разложении (25). Важные технические упрощения по сравнению с разложением (26) обусловлены выполнением равенств $(w_m)_x = 0$, $\xi_x = 1$.

Разложение общего вида (26), подразумевающее более громоздкие, но вместе с тем более информативные выкладки, полезно использовать после установления свойства Пенлеве. Это позволяет выяснять многие важные свойства уравнений и их решений.

В ряде случаев для построения точных решений и поиска преобразования Беклунда, линеаризующего исходное уравнение, оказывается полезным использовать усеченное разложение

$$w = \frac{w_0}{\xi^p} + \frac{w_1}{\xi^{p-1}} + \cdots + w_p, \tag{30}$$

которое соответствует нулевым значениям коэффициентов разложения w_m при $m > p$ в (26) (см. примеры 5–7 в разд. 10.3 и пример 9 в разд. 10.4).

Анализ исходного нелинейного уравнения с частными производными на тест Пенлеве можно проводить для отдельных классов его точных решений (как правило, это решения типа бегущей волны и автомодельные решения), которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Если полученное обыкновенное дифференциальное уравнение не удовлетворяет

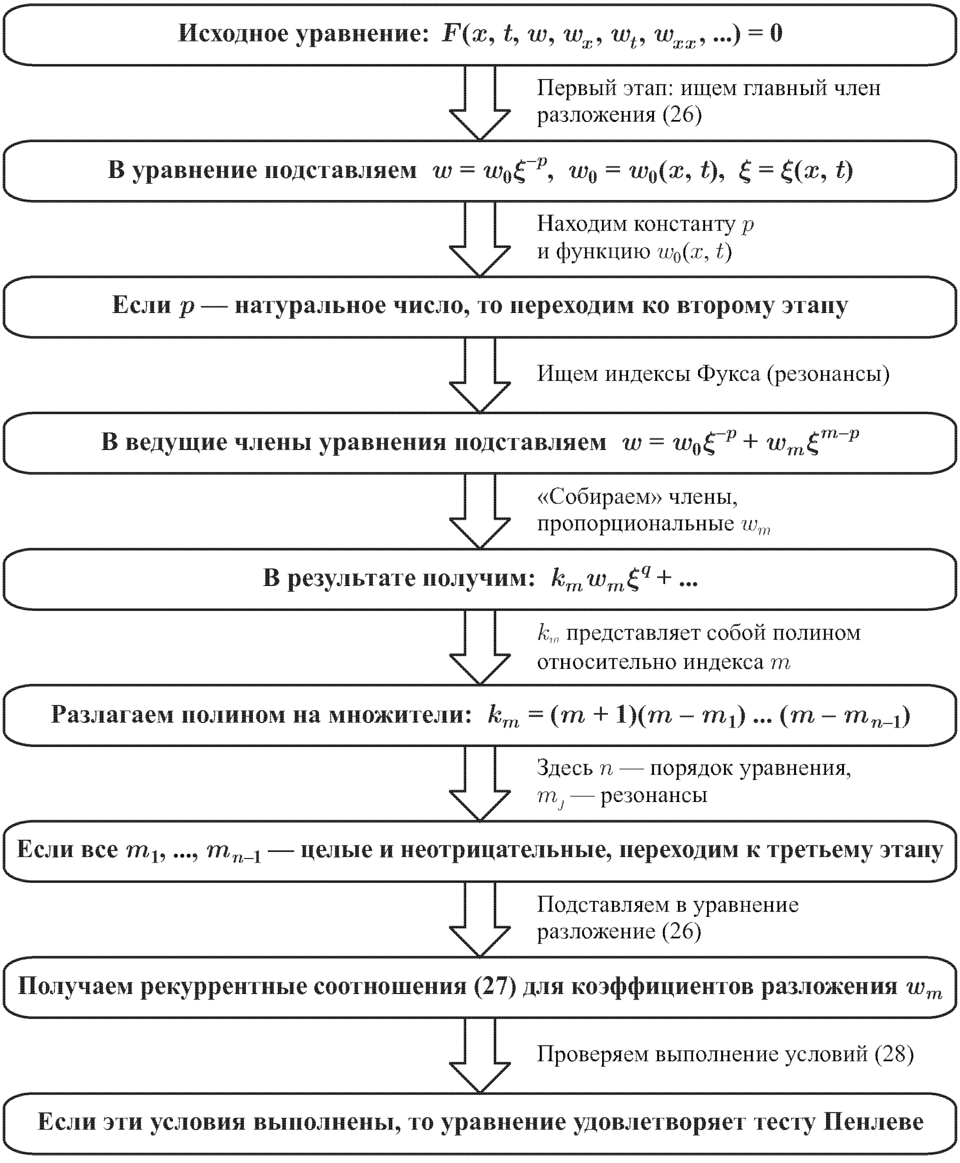

Рис. 7. Основные этапы теста Пенлеве для нелинейных уравнений математической физики. Для простейшей схемы полагается $\xi = x - x_0(t)$, а для общей — $\xi = \xi(x, t)$.

тесту Пенлеве, то исходное уравнение с частными производными также не удовлетворяет этому тесту. Если полученное обыкновенное дифференциальное уравнение удовлетворяет тесту Пенлеве, то исходное уравнение с частными производными обычно удовлетворяет этому тесту.

◈ ***Литература к разд. 10.2:*** M. Jimbo, M. D. Kruskal, T. Miwa (1982), J. Weiss, M. Tabor, G. Carnevalle (1983), J. Weiss (1983, 1984, 1985, 1986), W.-H. Steeb, N. Euler (1988), R. Conte (1989, 1999), R. Conte, M. Musette (1989, 1993), M. Musette (1998), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002), Н. А. Кудряшов (2004).

10.3. Примеры применения теста Пенлеве и усеченных разложений для анализа нелинейных уравнений математической физики

10.3.1. Уравнения, удовлетворяющие тесту Пенлеве

В этом разделе исследуются некоторые распространенные нелинейные уравнения математической физики. Для их анализа сначала будет использоваться простейшая схема применения теста Пенлеве, которая основана на разложении (25) из разд. 10.2 (см. также схему на рис. 7 при $\xi = x - x_0(t)$). Затем для построения преобразований Беклунда будет применяться усеченное разложение (30).

Пример 5. Рассмотрим уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w\frac{\partial w}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \tag{31}$$

Первый этап. Подставим в уравнение (31) главный член разложения (25), а затем обе части полученного выражения умножим на ξ^{p+2} (произведение $\xi^{p+2}w_{xx}$ дает величину нулевого порядка). Имеем

$$w_0'\xi^2 + pw_0x_0'\xi - pw_0^2\xi^{1-p} = \nu p(p+1)w_0,$$

где $\xi = x - x_0$, $x_0 = x_0(t)$, $w_0 = w_0(t)$, штрих обозначает производную по t. Из баланса ведущих членов (соответствующих «отбрасыванию» слева двух первых слагаемых), находим

$$p = 1, \qquad w_0 = -2\nu \qquad (m = 0). \tag{32}$$

Поскольку p — целое положительное число, то первое необходимое условие теста Пенлеве выполнено.

Второй этап. Для определения индексов Фукса (резонансов) подставим двучлен

$$w = -2\nu\xi^{-1} + w_m\xi^{m-1}$$

в ведущие члены ww_x и νw_{xx} уравнения (31). «Собрав» члены при одинаковых степенях w_m, получим

$$\nu(m+1)(m-2)w_m\xi^{m-3} + \cdots = 0.$$

Приравнивая $(m+1)(m-2)$ нулю, находим индекс Фукса

$$m_1 = 2.$$

Поскольку он целый и положительный, то второе необходимое условие теста Пенлеве выполнено.

Третий этап. Подставим разложение (25) (согласно второму этапу нужно учитывать члены до номера $m = 2$ включительно)

$$w = -2\nu\xi^{-1} + w_1 + w_2\xi + \cdots$$

в уравнение Бюргерса (31), приведем подобные члены, а затем приравняем нулю коэффициенты при разных степенях ξ. Имеем систему уравнений для определения функций w_m:

$$\begin{aligned} &\xi^{-2}\colon\;\; 2\nu(w_1 - x_0') = 0,\\ &\xi^{-1}\colon\;\; 0 \times w_2 = 0. \end{aligned} \tag{33}$$

Из второго равенства (33) следует, что функция $w_2 = w_2(t)$ может быть выбрана произвольно. Поэтому уравнение Бюргерса (31) удовлетворяет тесту Пенлеве и его решение имеет требуемый произвол в две функции: $x_0 = x_0(t)$, $w_2 = w_2(t)$.

Из первого равенства (33) находим $w_0 = x_0'(t)$. Решение уравнения (31) можно записать в виде

$$w(x,t) = -\frac{2\nu}{x - x_0(t)} + x_0'(t) + w_2(t)[x - x_0(t)]^2 + \cdots,$$

где $x_0(t)$, $w_2(t)$ — произвольные функции.

Преобразование Коула—Хопфа. Для дальнейшего анализа уравнения Бюргерса (31) используем усеченное разложение общего вида (30) при $p=1$:

$$w=\frac{w_0}{\xi}+w_1, \tag{34}$$

где $w_0=w_0(x,t)$, $w_1=w_1(x,t)$, $\xi=\xi(x,t)$. Подставим (34) в (31) и сгруппируем члены при одинаковых степенях ξ. Имеем

$$\xi^{-3}w_0\xi_x\big(w_0+2\nu\xi_x\big)+\xi^{-2}\big[w_0\xi_t-w_0(w_0)_x+w_0w_1\xi_x-2\nu(w_0)_x\xi_x-\nu w_0\xi_{xx}\big]+$$
$$+\xi^{-1}\big[-(w_0)_t-w_0(w_1)_x-w_1(w_0)_x+\nu(w_0)_{xx}\big]-(w_1)_t-w_1(w_1)_x+\nu(w_1)_{xx}=0,$$

где индексы x и t обозначают частные производные. Приравнивая нулю члены при одинаковых степенях ξ, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} w_0+2\nu\xi_x&=0,\\ w_0\xi_t-w_0(w_0)_x+w_0w_1\xi_x-2\nu(w_0)_x\xi_x-\nu w_0\xi_{xx}&=0,\\ (w_0)_t+w_0(w_1)_x+w_1(w_0)_x-\nu(w_0)_{xx}&=0,\\ (w_1)_t+w_1(w_1)_x-\nu(w_1)_{xx}&=0, \end{aligned} \tag{35}$$

где учтено, что $\xi_x\not\equiv 0$.

Из первого уравнения (35) имеем

$$w_0=-2\nu\xi_x. \tag{36}$$

Подставив это выражение во второе и третье уравнения (35), после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned} \xi_t+w_1\xi_x-\nu\xi_{xx}&=0,\\ (\xi_t+w_1\xi_x-\nu\xi_{xx})_x&=0. \end{aligned} \tag{37}$$

Очевидно, что если первое уравнение (37) удовлетворяется, то второе переходит в тождество. Последнее уравнение (35) представляет собой уравнение Бюргерса.

Таким образом, формулу (34) с учетом (36) можно записать в виде

$$w=-2\nu\frac{\partial}{\partial x}\ln\xi+w_1, \tag{38}$$

где функции w и w_1 удовлетворяют уравнениям Бюргерса, а функция ξ описывается первым уравнением (37). При известном решении w_1 уравнения Бюргерса формула (38) позволяет путем решения первого уравнения (37) (это уравнение линейно относительно ξ) находить другие решения уравнения (31).

Учитывая, что $w_1=0$ является частным решением уравнения Бюргерса, подставим его в (37) и (38). В результате приходим к преобразованию Коула—Хопфа

$$w=-2\nu\frac{\xi_x}{\xi},$$

которое позволяет с помощью решений линейного уравнения теплопроводности

$$\xi_t=\nu\xi_{xx}$$

находить решения нелинейного уравнения Бюргерса (31).

Пример 6. Рассмотрим уравнение Кортевега—де Фриза

$$\frac{\partial w}{\partial t}+w\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=0. \tag{39}$$

Первый этап. Подставим в уравнение (39) главный член разложения (25), а затем обе части полученного выражения умножим на ξ^{p+3} (произведение $\xi^{p+3}w_{xxx}$ дает величину нулевого порядка). Имеем

$$w_0'\xi^3+pw_0x_0'\xi^2-pw_0^2\xi^{2-p}-p(p+1)(p+2)w_0=0,$$

где $\xi=x-x_0$, $x_0=x_0(t)$, $w_0=w_0(t)$. Из баланса старших членов (учитываются два последних слагаемых), находим

$$p=2,\qquad w_0=-12\qquad (m=0).$$

Поскольку p — целое положительное число, то первое необходимое условие теста Пенлеве выполнено.

Второй этап. Для определения индексов Фукса (резонансов) подставим двучлен

$$w = -12\xi^{-2} + w_m \xi^{m-2}$$

в ведущие члены уравнения (39) (надо учесть второе и третье слагаемые). Выделив член, пропорциональный w_m, имеем

$$(m+1)(m-4)(m-6)w_m \xi^{m-5} + \dots = 0.$$

Приравнивая многочлен $(m+1)(m-4)(m-6)$ нулю, определяем индексы Фукса

$$m_1 = 4, \qquad m_2 = 6.$$

Поскольку индексы целые и положительные, то второе необходимое условие теста Пенлеве выполнено.

Третий этап. Подставим разложение (25) (согласно второму этапу нужно учитывать члены до номера $m = 6$ включительно)

$$w = -12\xi^{-2} + w_1\xi^{-1} + w_2 + w_3\xi + w_4\xi^2 + w_5\xi^3 + w_6\xi^4 + \dots, \qquad \xi = x - x_0(t) \tag{40}$$

в уравнение (39), «соберем» члены при одинаковых степенях ξ, а затем приравняем нулю коэффициенты при разных степенях ξ. Получим систему уравнений для определения функций w_m:

$$\begin{aligned}
\xi^{-4}&:\ 2w_1 = 0,\\
\xi^{-3}&:\ 24w_2 - 24x_0' - w_1^2 = 0,\\
\xi^{-2}&:\ 12w_3 + w_1x_0' - w_1w_2 = 0,\\
\xi^{-1}&:\ 0 \times w_4 + w_1' = 0,\\
1&:\ -6w_5 + w_2' - w_3x_0' + w_1w_4 + w_2w_3 = 0,\\
\xi&:\ 0 \times w_6 + w_3' - 2w_4x_0' + w_3^2 + 2w_1w_5 + 2w_2w_4 = 0.
\end{aligned} \tag{41}$$

Простые вычисления показывают, что уравнениям с резонансами (они соответствуют степеням ξ^{-1} и ξ) тождественно удовлетворяются. Поэтому уравнение Кортевега — де Фриза (39) удовлетворяет тесту Пенлеве.

Решение уравнений (41) приводит к следующим коэффициентам разложения в (40):

$$w_1 = 0,\ \ w_2 = x_0'(t),\ \ w_3 = 0,\ \ w_4 = w_4(t),\ \ w_5 = \tfrac{1}{6}x_0''(t),\ \ w_6 = w_6(t),$$

где $x_0(t)$, $w_4(t)$, $w_6(t)$ — произвольные функции.

Усеченное разложение и преобразование Беклунда. Для дальнейшего анализа используем усеченное разложение общего вида (30) при $p = 2$:

$$w = \frac{w_0}{\xi^2} + \frac{w_1}{\xi} + w_2. \tag{42}$$

Подставляя (42) в (39) и приравнивая нулю функциональные коэффициенты при разных степенях ξ (аналогично тому, как это делалось в примере 5), приходим к преобразованию Беклунда

$$\begin{aligned}
&w = 12(\ln\xi)_{xx} + w_2,\\
&\xi_t\xi_x + w_2\xi_x^2 + 4\xi_x\xi_{xxx} - 3\xi_{xx}^2 = 0,\\
&\xi_{xt} + w_2\xi_{xx} + \xi_{xxx} = 0,\\
&(w_2)_t + w_2(w_2)_x + (w_2)_{xxx} = 0,
\end{aligned} \tag{43}$$

которое связывает решения w и w_2 уравнений Кортевега — де Фриза. Исключив w_2 из второго и третьего уравнений (43), можно вывести уравнение для функции ξ, которое с помощью подходящих преобразований сводится к системе линейных уравнений.

Пример 7. Рассмотрим уравнение Кадомцева — Петвиашвили

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial t} + w\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right) + a\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

которое представляет собой пример интегрируемого обобщения уравнения Кортевега — де Фриза большей размерности и более высокого порядка.

Проверка уравнения на тест Пенлеве. В многомерных случаях используется аналог разложения (25):

$$w(x,y,t) = \frac{1}{\xi^p}\sum_{m=0}^{\infty} w_m(y,t)\xi^m, \quad \xi = x - x_0(y,t). \tag{44}$$

Баланс ведущих сингулярных членов для уравнения Кадомцева — Петвиашвили дает такой же результат, как и в случае уравнения Кортевега — де Фриза

$$p = 2, \quad w_0 = -12 \quad (m = 0).$$

В результате подстановки разложения (44) в исходное уравнение получим

$$w_{tx} + ww_{xx} + w_x^2 + w_{xxxx} + aw_{yy} = \sum_{m=0}^{\infty} \xi^{m-6} E_m(y,t) = 0,$$
$$E_m(y,t) = (m+1)(m-4)(m-5)(m-6)w_m + \cdots .$$

Видно, что имеется три резонанса: $m = 4,\ 5,\ 6$. Для проверки теста Фукса — Ковалевской — Пенлеве запишем рекуррентные соотношения для первых семи членов разложения

$$\begin{aligned}
&E_0 = 10w_0(w_0+12) = 0 && (m=0),\\
&E_1 = 12w_1(w_0+2) = 0 && (m=1),\\
&E_2 = 3[2(\xi_t + a\xi_y^2 + w_2)w_0 + w_1^2] = 0 && (m=2),\\
&E_3 = a(w_1)_{yy} - 2(w_0)_t - 4a(w_0)_y\xi_y - 2[aw_0\xi_{yy} - (\xi_t + a\xi_y^2 + w_2)w_1 - w_3w_0] = 0 && (m=3),\\
&E_4 = a(w_0)_{yy} - (w_1)_t - 2a(w_1)_y\xi_y - aw_1\xi_{yy} = 0 && (m=4),\\
&E_5 = a(w_1)_{yy} = 0 && (m=5),\\
&E_6 = a(w_2)_{yy} + \bigl\{(w_3)_t + 2a(w_3)_y\xi_y + aw_3\xi_{yy}) + {}\\
&\qquad + 2[(\xi_t + a\xi_y^2 + w_2w_4 + \tfrac{1}{2}w_3^2 + w_5w_1 + (w_0+12)w_6]\bigr\} = 0 && (m=6).
\end{aligned}$$

Три последних соотношения (которые соответствуют резонансам) в силу предыдущих соотношений выполняются тождественно и не содержат w_4, w_5, w_6. Полученный произвол в четыре функции (ξ, w_4, w_5, w_6) решения рассматриваемого уравнения четвертого порядка указывает на выполнение свойства Пенлеве.

Усеченное разложение и преобразование Беклунда. Использование усеченного разложения (42) приводит к преобразованию Беклунда (для упрощения полагаем $a = 1$)

$$\begin{aligned}
&w = 12(\ln\xi)_{xx} + w_2,\\
&\xi_t\xi_x + 4\xi_x\xi_{xxx} - 3\xi_{xx}^2 + \xi_y^2 + w_2\xi_x^2 = 0,\\
&\xi_{xt} + \xi_{xxxx} + \xi_{yy} - w_2\xi_{xx} = 0,\\
&(w_2)_{tx} + w_2(w_2)_{xx} + (w_2)_x^2 + (w_2)_{xxxx} + (w_2)_{yy} = 0.
\end{aligned}$$

Исключив w_2 из второго и третьего уравнений, можно получить уравнение для функции ξ, которое в свою очередь позволяет перейти к решению системы линейных уравнений.

10.3.2. Анализ нелинейных систем уравнений математической физики на тест Пенлеве

Системы уравнений с частными производными также полезно проверять на тест Пенлеве. Проиллюстрируем это на конкретном примере.

Пример 8. Рассмотрим модельную систему уравнений

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial w}{\partial t} + w\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{2}\frac{\partial c^2}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\\
&\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial (wc)}{\partial x} = \chi\frac{\partial^2 c}{\partial x^2},
\end{aligned} \tag{45}$$

которая описывает конвективный перенос активной примеси в вязкой жидкости, когда она оказывает обратное влияние на течение через давление, квадратично зависящее от концентрации примеси. Такими уравнениями описывается также одномерное течение электропроводной жидкости в магнитном поле с большим магнитным давлением.

Проверка системы на тест Пенлеве. По аналогии с разложением (25) представим искомые величины в виде

$$w(x,t) = \frac{1}{\xi^p}\sum_{m=0}^{\infty} w_m(t)\xi^m, \quad c(x,t) = \frac{1}{\xi^\beta}\sum_{m=0}^{\infty} c_m(t)\xi^m, \quad \xi \equiv x - x_0(t).$$

Из баланса ведущих сингулярных членов уравнений находим

$$p = \beta = 1, \quad w_0 = -\chi, \quad c_0^2 = \chi(2\nu - \chi).$$

Рекуррентные соотношения для членов разложения запишем в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} -(m-2)(\chi+\nu(m-1)) & (m-2)c_0 \\ (m-2)c_0 & -(m-2)m\chi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_m \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{m-1} \\ g_{m-1} \end{bmatrix}.$$

Величины f_{m-1}, g_{m-1} зависят от функций $w_0, \ldots, w_{m-1}, c_0, \ldots, c_{m-1}, x_0$. Условие однозначной разрешимости матричного уравнения относительно указанных старших коэффициентов нарушается при обращении в нуль характеристического определителя (случай вырожденной матрицы), и тогда эти коэффициенты могут оказаться произвольными. Тем самым резонансы определяются из условия

$$\nu\chi(m+1)(m-2)^2(m-2+\chi/\nu) = 0$$

и все оказываются целыми положительными (за исключением особого резонанса $m = -1$) только при единичном числе Прандтля $\mathrm{Pr} \equiv \nu/\chi = 1$. При этом один резонанс $m = 1$ — простой, а другой $m = 2$ — кратный, так что в итоге всех резонансов четыре.

Выписав первые три рекуррентных соотношения:

$$\begin{aligned} &c_0^2 + w_0(w_0 + 2\nu) = 0, && w_0 + \nu = 0 && (m = 0), \\ &c_0c_1 + w_0(\xi_t + w_1) = 0, && w_0c_1 + c_0(\xi_t + w_1) = 0 && (m = 1), \\ &(w_0)_t = 0, && (c_0)_t = 0 && (m = 2), \end{aligned}$$

убеждаемся, что для резонанса $m = 1$ выполняется условие совместности, поскольку два соотношения при $m = 1$ совпадают в силу выражений при $m = 0$. Кратный резонанс $m = 2$ также удовлетворяет условию совместности благодаря постоянству обоих коэффициентов w_0, c_0. Отсюда следует, что свойство Пенлеве для уравнений активной примеси оказывается выполненным (при $\nu/\chi = 1$).

Усеченные разложения и преобразование Беклунда. Используя усеченные разложения решений вида

$$w = \frac{w_0}{\xi} + w_1, \quad c = \frac{c_0}{\xi} + c_1$$

можно получить преобразование Беклунда для уравнений активной примеси (45):

$$\begin{aligned} &w_0 = -\nu\xi_x, \quad c_0 = \pm\nu\xi_x, \\ &\xi_t + (w_1 \mp c_1)\xi_x = \nu\xi_{xx}, \\ &(w_1)_t + w_1(w_1)_x = -c_1(c_1)_x + \nu(w_1)_{xx}, \\ &(c_1)_t + (w_1c_1)_x = \nu(c_1)_{xx}. \end{aligned}$$

Из сравнения с преобразованием Беклунда для уравнения Бюргерса легко видеть, что после перехода в выписанном преобразовании к разностным и суммарным переменным они совпадут. Действительно, использование таких замен переменных в исходных уравнениях при единичном числе Прандтля приводит к паре раздельных уравнений Бюргерса:

$$\begin{aligned} &s_t + ss_x = \nu s_{xx}, \quad s = w + c, \\ &r_t + rr_x = \nu r_{xx}, \quad r = w - c, \end{aligned}$$

каждое из которых сводится к линейному уравнению теплопроводности (см. пример 5).

➼ *Задачи и упражнения к разд. 10.3*

1. Провести тест Пенлеве для нелинейных уравнений второго порядка:

a) $w_t + ww_x = aw_{xx} + bx$,

b) $w_t + ww_x = aw_{xx} + b(t)$,

c) $w_t + ww_x = aw_{xx} + b + cw$,

d) $w_t + ww_x = a(t)w_{xx}$,

e) $w_t = w_{xx} + a(w_x)^2 + b$,

f) $w_t = (w^n w_x)_x$,

g) $w_{tt} = a(ww_x)_x$.

2. Провести тест Пенлеве для модифицированного и цилиндрического (сферического) уравнений Кортевега — де Фриза:

a) $w_t + w^2 w_x + w_{xxx} = 0,$

b) $w_t + w w_x + w_{xxx} + a t^{-1} w = 0$

при $a = 1/2$ и $a = 1$ (исследовать также случай произвольного a).

3. Провести тест Пенлеве для уравнения Гарри — Дима:

$w_t = w^3 w_{xxx}.$

4. Провести тест Пенлеве для нелинейных уравнений третьего порядка:

a) $w_t + w_{xxx} - a(w_x)^2,$

b) $w_t + w_{xxx} - a(w_x)^3,$

c) $w_t = (w^{-3} w_x)_{xx}.$

5. Провести тест Пенлеве для уравнения стационарного гидродинамического пограничного слоя:

$$w_y w_{xx} - w_x w_{yy} = \nu w_{yyy} + f(x).$$

6. Провести тест Пенлеве для уравнений Буссинеска:

$w_{tt} = (w w_x)_x \pm w_{xxxx}.$

7. Провести тест Пенлеве для уравнения пятого порядка (оно описывает волны под ледяным покровом)

$w_t + w w_x + a w_{xxx} = b w_{xxxxx}.$

Указание. Искать решения типа бегущей волны $w = w(z)$, $z = x - \lambda t$. Проинтегрировать полученное обыкновенное дифференциальное уравнение один раз по z и далее провести тест Пенлеве.

8. Провести тест Пенлеве для системы уравнений газовой динамики:

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0,$$
$$(\rho v)_t + [\rho v^2 + p(\rho)]_x = 0,$$

при $p(\rho) = a\rho^n$ ($n = 0,\ 1,\ 2$).

9. Провести тест Пенлеве для нелинейной системы уравнений второго порядка:

$$u_t + a_1 u w_x = b_1 u_{xx},$$
$$w_t + a_2 w u_x = b_2 w_{xx}.$$

Литература к разд. 10.3: M. Jimbo, M. D. Kruskal, T. Miwa (1982), J. Weiss, M. Tabor, G. Carnevalle (1983), J. Weiss (1983), R. Conte (1989), M. Musette (1998), В. А. Городцов (1998, 2000), Д. М. Климов, В. Г. Байдулов, В. А. Городцов (2001), А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев (2002), Н. А. Кудряшов (2004).

10.4. Построение решений нелинейных уравнений, не удовлетворяющих тесту Пенлеве, с помощью усеченных разложений

В некоторых случаях усеченные разложения вида (30) можно использовать для построения точных решений нелинейных уравнений математической физики, которые не удовлетворяют тесту Пенлеве. В этом случае параметр разложения p должен быть целым положительным числом; он определяется точно таким же образом, как на первом этапе проверки уравнения на тест Пенлеве. Проиллюстрируем сказанное на конкретном примере.

Пример 9. Рассмотрим нелинейное уравнение диффузии с кубическим источником

$$w_t = w_{xx} - 2w^3. \tag{46}$$

Первый этап. Подставим в уравнение (46) главный член разложения (25), а затем обе части полученного выражения умножим на ξ^{p+2}. Имеем

$$w_0' \xi^2 + p w_0 x_0' \xi = p(p+1) w_0 - 2 w_0^3 \xi^{2-2p},$$

где $\xi = x - x_0$, $x_0 = x_0(t)$, $w_0 = w_0(t)$. Из баланса старших членов (учитываются первое и последнее слагаемые в правой части), находим

$$p = 1, \quad w_0 = \pm 1 \qquad (m = 0). \tag{47}$$

Поскольку p — целое положительное число, то первое необходимое условие теста Пенлеве выполнено.

Второй этап. Поскольку уравнение инвариантно относительно замены w на $-w$, достаточно рассмотреть положительное значение w_0 в (47). Поэтому для определения резонансов подставим двучлен

$$w = \xi^{-1} + w_m \xi^{m-1}$$

в ведущие члены w_{xx} и bw^3 уравнения (46). «Собирая» члены, пропорциональные w_m, имеем

$$(m+1)(m-4)w_m \xi^{m-3} + \cdots = 0.$$

Приравнивая выражение $(m+1)(m-4)$ нулю, находим индекс Фукса $m_1 = 4$. Поскольку он целый и положительный, то второе необходимое условие Пенлеве выполнено.

Третий этап. Подставим разложение (25) (согласно второму этапу нужно учитывать члены до номера $m = 4$ включительно) в уравнение (46). Можно показать, что условие совместности (29) не выполняется, поэтому рассматриваемое уравнение не удовлетворяет тесту Пенлеве.

Использование усеченного разложения для поиска точных решений. Для дальнейшего анализа используем усеченное разложение общего вида (30) при $p = 1$ (это следует из первого этапа). В результате получим формулу (34). Подставляя (34) в уравнение диффузии (46) и «собирая» члены при одинаковых степенях ξ, имеем

$$\xi^{-3}\left(2w_0\xi_x^2 - 2w_0^3\right) + \xi^{-2}\left[w_0\xi_t - 2(w_0)_x\xi_x - w_0\xi_{xx} - 6w_0^2 w_1\right] + \\ + \xi^{-1}\left[-(w_0)_t + (w_0)_{xx} - 6w_0 w_1^2\right] - (w_1)_t + (w_1)_{xx} - 2w_1^3 = 0.$$

Приравнивая нулю члены при одинаковых степенях ξ, приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} w_0(\xi_x^2 - w_0^2) &= 0, \\ w_0\xi_t - 2(w_0)_x\xi_x - w_0\xi_{xx} - 6w_0^2 w_1 &= 0, \\ -(w_0)_t + (w_0)_{xx} - 6w_0 w_1^2 &= 0, \\ (w_1)_t - (w_1)_{xx} + 2w_1^3 &= 0. \end{aligned} \tag{48}$$

Из первого уравнения (48) имеем

$$w_0 = \xi_x. \tag{49}$$

(второе решение, отличающееся знаком, не рассматривается, поскольку в итоге приводит к точно такому же результату). Подставив (49) во второе и третье уравнения (48) и сократив на ненулевые множители, получим

$$\begin{aligned} \xi_t - 3\xi_{xx} - 6\, w_1\xi_x &= 0, \\ -\xi_{xt} + \xi_{xxx} - 6w_1^2\xi_x &= 0. \end{aligned} \tag{50}$$

Последнему уравнению (48), которое совпадает с исходным уравнением (46), можно удовлетворить, если положить

$$w_1 = 0. \tag{51}$$

Подставив (49) и (51) в формулу (36), для решения имеем следующее представление:

$$w = \frac{\xi_x}{\xi}, \tag{52}$$

где функция ξ описывается переопределенной линейной системой уравнений, которая получается в результате подстановки значения (51) в (50):

$$\begin{aligned} \xi_t - 3\xi_{xx} &= 0, \\ -\xi_{xt} + \xi_{xxx} &= 0. \end{aligned} \tag{53}$$

Продифференцируем первое уравнение по x, а затем исключим смешанную производную w_{xt} с помощью второго уравнения. Имеем $\xi_{xxx} = 0$, откуда следует

$$\xi = \varphi_2(t)x^2 + \varphi_1(t)x + \varphi_0(t). \tag{54}$$

Для определения функций $\varphi_k(t)$ подставим выражение (54) в уравнения (53). Получим

$$\begin{aligned} \varphi_2' x^2 + \varphi_1' x + \varphi_0' - 6\varphi_2 &= 0, \\ -\varphi_2' x - \varphi_1' &= 0. \end{aligned}$$

Приравнивая нулю функциональные коэффициенты при разных степенях x, а затем интегрируя соответствующие уравнения, имеем

$$\varphi_2 = C_2, \quad \varphi_1 = C_1, \quad \varphi_0 = 6C_2 t + C_0, \tag{55}$$

где C_0, C_1, C_2 — произвольные постоянные. Подставив (54) с учетом (55) в формулу (52), находим точное решение уравнения (46):

$$w = \frac{2C_2 x + C_1}{C_2 x^2 + C_1 x + 6C_2 t + C_0}.$$

Задачи и упражнения к разд. 10.4

1. Построить частные решения последнего уравнения (48) вида $w = w(x)$ и $w = w(t)$. Построить соответствующие точные решения переопределенной системы (50), а затем посмотреть, какие точные решения уравнения (46) можно получить с помощью усеченных преобразований.

2. Используя усеченное преобразование, построить точное решение уравнения Ньюэлла — Уайтхеда (Newell — Whitehead):

$w_t = w_{xx} + aw - bw^3.$

Указание. Использовать ту же процедуру, что и в примере 9. Решение уравнения для w_1 искать в виде $w_1 = k = \text{const}$.

3. Используя усеченное преобразование, построить точное решение уравнения Фитц-Хью — Нагумо (FitzHugh — Nagumo):

$w_t = w_{xx} + w(1 - w)(w - a).$

Указание. Использовать ту же процедуру, что и в примере 9. Решение уравнения для w_1 искать в виде $w_1 = k = \text{const}$.

4. Используя усеченное преобразование, построить точное решение уравнения:

$w_t + ww_x = w_{xx} - aw^3.$

Указание. Использовать ту же процедуру, что и в примере 9.

5. Построить точное решение уравнения Фишера:

$w_t = w_{xx} + aw - bw^2.$

Указание. Найти вид усеченного преобразования. Положить $w_2 = \text{const}$, а точное решение переопределенной системы уравнений для ξ искать в виде бегущей волны специального вида: $\xi = 1 + C\exp(kx - \lambda t)$.

Литература к разд. 10.4: Н. А. Кудряшов (1990*a*, 1990*b*, 1993, 2004), Н. А. Кудряшов, М. Б. Сухарев (2001).

11. Методы обратной задачи рассеяния (теория солитонов)

Предварительные замечания. Методы обратной задачи рассеяния основаны на «неявной» линеаризации уравнений. Основная идея: вместо исходного нелинейного уравнения с неизвестной функцией w рассматривается вспомогательная переопределенная линейная система уравнений для (векторной) функции $\boldsymbol{\varphi}$, причем коэффициенты этой системы зависят от w и производных от w по независимым переменным. Линейная система для $\boldsymbol{\varphi}$ выбирается так, что условие совместности ее уравнений приводит к исходному нелинейному уравнению для функции w.

11.1. Метод, основанный на использовании пар Лакса

11.1.1. Описание метода. Условие совместности. Пары Лакса

Будем изучать нелинейные эволюционные уравнения вида

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \mathrm{F}(w), \tag{1}$$

правая часть которых $\mathrm{F}(w)$ зависит от функции w и ее производных по x.

Рассмотрим два вспомогательных линейных дифференциальных уравнения, первое из которых соответствует задаче на собственные значения и содержит производные только по пространственной переменной x:

$$\mathrm{L}\varphi = \lambda\varphi, \tag{2}$$

а второе уравнение описывает эволюцию собственной функции во времени:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\mathrm{M}\varphi. \tag{3}$$

Коэффициенты линейных дифференциальных операторов L и M в уравнениях (2) и (3) зависят от функции w и ее производных по x.

Поскольку система (2)–(3) является переопределенной (так как имеются два уравнения на одну функцию φ), то операторы L и M не могут быть произвольными: они должны удовлетворять условию совместности. Чтобы найти это условие, сначала продифференцируем (2) по t. Считая, что собственные значения λ не зависят от времени t, имеем

$$\mathrm{L}_t\varphi + \mathrm{L}\varphi_t = \lambda\varphi_t.$$

Заменяя здесь φ_t на правую часть (3), получим

$$\mathrm{L}_t\varphi - \mathrm{L}\mathrm{M}\varphi = -\lambda\mathrm{M}\varphi.$$

Учитывая далее соотношения $\lambda\mathrm{M}\varphi = \mathrm{M}(\lambda\varphi)$ и $\lambda\varphi = \mathrm{L}\varphi$, приходим к условию совместности

$$\mathrm{L}_t\varphi = \mathrm{L}\mathrm{M}\varphi - \mathrm{M}\mathrm{L}\varphi,$$

которое можно записать в виде операторного уравнения

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial t} = \mathrm{LM} - \mathrm{ML}. \tag{4}$$

Говорят, что линейные операторы L и M [или линейные уравнения (2) и (3)] образуют *пару Лакса* для нелинейного уравнения (1), если условие совместности (4) совпадает с уравнением (1). В правой части уравнения (4) стоит *коммутатор операторов* L и M, для краткой записи которого используется обозначение $[\mathrm{L}, \mathrm{M}] = \mathrm{LM} - \mathrm{ML}$.

Таким образом, если удается подобрать подходящую пару Лакса, то анализ исходного нелинейного уравнения (1) можно свести к анализу двух более простых линейных уравнений (2) и (3).

Замечание. Оператор M в уравнениях (3) и (4) определяется неоднозначно; его можно заменить по правилу:

$$\mathrm{M} \Longrightarrow \mathrm{M} + p(t),$$

где $p(t)$ — произвольная функция. Эта функция находится при решении задачи Коши для уравнения (1) (см. разд. 11.4.2).

11.1.2. Примеры пар Лакса для нелинейных уравнений математической физики

Пример 1. Покажем, что для уравнения Кортевега — де Фриза

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 6w\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \tag{5}$$

пара Лакса задается операторами

$$\mathrm{L} = w - \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \mathrm{M} = 4\frac{\partial^3}{\partial x^3} - 6w\frac{\partial}{\partial x} - 3\frac{\partial w}{\partial x} + p(t), \tag{6}$$

которые приводят к линейным уравнениям

$$\begin{aligned} \varphi_{xx} + (\lambda - w)\varphi = 0, \\ \varphi_t + 4\varphi_{xxx} - 6w\varphi_x - 3w_x\varphi + p(t)\varphi = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $p(t)$ — произвольная функция.

Нетрудно убедиться в справедливости формул

$$\begin{aligned} \mathrm{LM}(\varphi) = &- 4\varphi_{xxxxx} + 10w\varphi_{xxx} + [15w_x - p(t)]\varphi_{xx} + (12w_{xx} - 6w^2)\varphi_x + \\ &+ [3w_{xxx} - 3ww_x + wp(t)]\varphi, \\ \mathrm{ML}(\varphi) = &- 4\varphi_{xxxxx} + 10w\varphi_{xxx} + [15w_x - p(t)]\varphi_{xx} + (12w_{xx} - 6w^2)\varphi_x + \\ &+ [4w_{xxx} - 9ww_x + wp(t)]\varphi, \end{aligned}$$

где $\varphi(x,t)$ — произвольная функция. Отсюда следует

$$\mathrm{LM}(\varphi) - \mathrm{ML}(\varphi) = (-w_{xxx} + 6ww_x)\varphi. \tag{8}$$

Из (6) и (8) получим

$$\mathrm{L}_t = w_t, \quad \mathrm{LM} - \mathrm{ML} = -w_{xxx} + 6ww_x.$$

Подставив эти выражения в (4), приходим к уравнению Кортевега — де Фриза (5).

Замечание. Процедура решения задачи Коши для уравнения (5) описана в разделе 11.4.

Линейные уравнения (2) и (3) для вспомогательной функции φ, образующие пару Лакса, могут быть векторными (в этом случае линейные операторы L и M будут задаваться матрицами). Другими словами, вместо одиночных уравнений (2) и (3) могут стоять соответствующие системы линейных уравнений.

Пример 2. Уравнение sh-Гордона
$$w_{xt} = 4a \operatorname{sh} w$$
можно представить в виде векторной пары Лакса
$$\mathrm{L}\boldsymbol{\varphi} = \lambda\boldsymbol{\varphi},$$
$$\boldsymbol{\varphi}_t = -\mathrm{M}\boldsymbol{\varphi},$$
где
$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{L} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_x + \frac{1}{2}w_x \\ \partial_x - \frac{1}{2}w_x & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{M} = \frac{a}{\lambda}\begin{pmatrix} 0 & e^w \\ e^{-w} & 0 \end{pmatrix},$$
где ∂_x — оператор дифференцирования по x.

Определение пары Лакса для заданного нелинейного уравнения представляет собой весьма сложную задачу (которая, в принципе, разрешима только для отдельных уравнений). Поэтому для «неявной» линеаризации уравнений обычно используют более простой метод, описанный далее в разд. 11.2.

➻ *Задачи и упражнения к разд. 11.1*

1. Проверить справедливость результатов, приведенных в примере 2.

Указание. Перейти от матричной формы записи пары Лакса к скалярной системе уравнений. Для получения условий совместности использовать равенства $(\varphi_1)_{xt} = (\varphi_1)_{tx}$ и $(\varphi_2)_{xt} = (\varphi_2)_{tx}$, где вторые производные определяются путем дифференцирования уравнений.

2. Показать, что нелинейное уравнение Шредингера
$$i\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha|w|^2 w = 0$$
может быть представлено в виде векторной пары Лакса
$$\mathrm{L}\boldsymbol{\varphi} = \lambda\boldsymbol{\varphi},$$
$$\boldsymbol{\varphi}_t = -\mathrm{M}\boldsymbol{\varphi},$$
где
$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{L} = \begin{pmatrix} i(1+p)\frac{\partial}{\partial x} & \bar{w} \\ w & i(1-p)\frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{M} = i\begin{pmatrix} p\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{|w|^2}{1+p} & -i\bar{w}_x \\ iw_x & p\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{|w|^2}{1-p} \end{pmatrix},$$
$\alpha = 2/(1-p^2)$, черта сверху обозначает комплексно сопряженную величину.

Указание. Перейти от матричной формы записи пары Лакса к скалярной системе уравнений. Для получения условий совместности использовать равенства $(\varphi_1)_{xt} = (\varphi_1)_{tx}$ и $(\varphi_2)_{xt} = (\varphi_2)_{tx}$, где вторые производные находятся путем дифференцирования уравнений. Третьи производные по x вычисляются по формулам $[(\varphi_1)_x]_{xx}$ и $[(\varphi_2)_x]_{xx}$, где первые производные $(\varphi_1)_x$ и $(\varphi_2)_x$ определяются из первой пары скалярных уравнений.

Литература к разд. 11.1: C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura (1967), P. D. Lax (1968), В. Е. Захаров, Л. Д. Фаддеев (1971), В. Е. Захаров, А. Б. Шабат (1971, 1974), M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur (1973, 1974), В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский (1980), Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев (1986), М. Абловиц, Х. Сигур (1987), Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис (1988), M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson (1991).

11.2. Метод, использующий условие совместности систем линейных уравнений

11.2.1. Общая схема. Условие совместности. Линейные системы с двумя уравнениями

Рассмотрим две системы линейных уравнений:
$$\boldsymbol{\varphi}_x = \mathrm{A}\boldsymbol{\varphi}, \tag{9}$$
$$\boldsymbol{\varphi}_t = \mathrm{B}\boldsymbol{\varphi}, \tag{10}$$

где φ есть n-мерный вектор, а A и B являются $n{\times}n$-матрицами. Правые части систем (9) и (10) не могут быть произвольными, они должны удовлетворять условию совместности. Чтобы найти это условие, продифференцируем системы (9) и (10) соответственно по t и x, а затем исключим из полученных соотношений смешанную производную φ_{xt}. Заменяя далее производные φ_x и φ_t правыми частями (9) и (10), имеем

$$\mathrm{A}_t - \mathrm{B}_x + [\mathrm{A}, \mathrm{B}] = 0, \tag{11}$$

где $[\mathrm{A}, \mathrm{B}] = \mathrm{AB} - \mathrm{BA}$. Оказывается, что для заданной матрицы A имеется простая дедуктивная процедура для нахождения B, в результате которой условие совместности (11) превращается в нелинейное эволюционное уравнение.

Далее ограничимся исследованием частного случая, когда вектор-функция φ имеет две компоненты: $\varphi = \binom{\varphi_1}{\varphi_2}$. Выбираем линейную систему уравнений (9) в виде

$$\begin{aligned} (\varphi_1)_x &= -i\lambda\varphi_1 + f\varphi_2, \\ (\varphi_2)_x &= g\varphi_1 + i\lambda\varphi_2, \end{aligned} \tag{12}$$

где λ — спектральный параметр, f и g — некоторые (в общем случае комплекснозначные) функции двух переменных x и t, $i^2 = -1$. Систему (10) дополним наиболее общей линейной системой, содержащей производные по t:

$$\begin{aligned} (\varphi_1)_t &= A\varphi_1 + B\varphi_2, \\ (\varphi_2)_t &= C\varphi_1 + D\varphi_2, \end{aligned} \tag{13}$$

где A, B, C, D — некоторые функции (зависящие от переменных x, t и параметра λ), подлежащие определению в ходе анализа. Дифференцируя уравнения (12) по t, а уравнения (13) — по x, и полагая $(\varphi_{1,2})_{xt} = (\varphi_{1,2})_{tx}$, получим условия совместности в виде

$$\begin{aligned} A_x &= Cf - Bg, \\ B_x + 2i\lambda B &= f_t - (A - D)f, \\ C_x - 2i\lambda C &= g_t + (A - D)g, \\ -D_x &= Cf - Bg. \end{aligned} \tag{14}$$

Для упрощения выкладок положим

$$D = -A.$$

В этом случае первое и последнее уравнения (14) совпадут и останутся три определяющих уравнения:

$$\begin{aligned} A_x &= Cf - Bg, \\ B_x + 2i\lambda B &= f_t - 2Af, \\ C_x - 2i\lambda C &= g_t + 2Ag. \end{aligned} \tag{15}$$

Требуется выразить функции A, B, C через f, g. Общее решение системы (15) для произвольных функций f и g получить не удается. Далее будем искать ее частные решения в виде конечных разложений по положительным или отрицательным степеням параметра λ.

11.2.2. Решение определяющих уравнений в виде полиномов по спектральному параметру. Примеры

Простейшие разложения искомых функций, приводящие к нетривиальному результату, имеют вид квадратичных полиномов по параметру λ:

$$\begin{aligned} A &= A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0, \\ B &= B_2\lambda^2 + B_1\lambda + B_0, \\ C &= C_2\lambda^2 + C_1\lambda + C_0. \end{aligned} \tag{16}$$

Подставим (16) в (15) и «соберем» члены при одинаковых степенях λ. В результате получим:

$$\lambda^2(A_{2x} - C_2 f + B_2 g) + \lambda(A_{1x} - C_1 f + B_1 g) + A_{0x} - C_0 f + B_0 g = 0, \tag{17}$$

$$2i\lambda^3 B_2 + \lambda^2(B_{2x} + 2iB_1 + 2A_2 f) + \\ + \lambda(B_{1x} + 2iB_0 + 2A_1 f) + B_{0x} + 2A_0 f - f_t = 0, \tag{18}$$

$$-2i\lambda^3 C_2 + \lambda^2(C_{2x} - 2iC_1 - 2A_2 g) + \\ + \lambda(C_{1x} - 2iC_0 - 2A_1 g) + C_{0x} - 2A_0 g - g_t = 0. \tag{19}$$

Приравняем последовательно нулю коэффициенты при одинаковых степенях λ. Из равенства нулю коэффициентов при λ^3 имеем

$$B_2 = C_2 = 0. \tag{20}$$

Приравнивая нулю коэффициенты при λ^2 и учитывая (20), получим соответственно

$$A_2 = a = \text{const}, \qquad B_1 = iaf, \qquad C_1 = iag. \tag{21}$$

Приравняем нулю коэффициент при λ в (17), а затем заменим B_1 и C_1 согласно (21). Имеем $A_{1x} = 0$, откуда $A_1 = a_1 = \text{const}$. Для простоты далее будем рассматривать специальный случай $a_1 = 0$ (произвольному значению a_1 соответствуют более общие результаты), т. е.

$$A_1 = 0. \tag{22}$$

Уравнения, полученные из (18) и (19) приравниванием нулю коэффициентов при λ, с учетом (21) и (22) дают

$$B_0 = -\tfrac{1}{2}af_x, \qquad C_0 = \tfrac{1}{2}ag_x. \tag{23}$$

Приравнивая в (17) нулю коэффициент при λ^0, после интегрирования имеем $A_0 = \frac{1}{2}afg + a_0$, где a_0 — произвольная постоянная. Как и ранее, для простоты полагаем $a_0 = 0$, что приводит к выражению

$$A_0 = \tfrac{1}{2}afg. \tag{24}$$

В результате уравнения (18) и (19) с учетом (23) и (24) принимают вид (соответствуют значению $\lambda = 0$):

$$\begin{aligned} f_t &= -\tfrac{1}{2}af_{xx} + af^2 g, \\ g_t &= \tfrac{1}{2}ag_{xx} - afg^2. \end{aligned} \tag{25}$$

Подставив (16), (20)–(25) в уравнения (13), получим

$$\begin{aligned}(\varphi_1)_t &= a(\lambda^2 + \tfrac{1}{2}fg)\varphi_1 + a(i\lambda f - \tfrac{1}{2}f_x)\varphi_2,\\ (\varphi_2)_t &= a(i\lambda g + \tfrac{1}{2}g_x)\varphi_1 - a(\lambda^2 + \tfrac{1}{2}fg)\varphi_2.\end{aligned} \tag{26}$$

Таким образом, две линейные системы (12) и (26) будут совместны, если функции f и g удовлетворяют системе с кубической нелинейностью (25). При

$$g = -k\bar{f}, \qquad a = 2i, \tag{27}$$

где k — действительная постоянная, а черта сверху обозначает комплексно-сопряженную величину, оба уравнения (26) переходят в одно и то же нелинейное уравнение Шредингера

$$if_t = f_{xx} + 2k|f^2|f \qquad (f\bar{f} = |f|^2). \tag{28}$$

Аналогичным образом можно задать другие полиномы по λ и определить соответствующие им линейные системы, порождающие нелинейные эволюционные уравнения.

Пример 3. Поиск решений определяющей системы (15) в виде полиномов третьей степени по λ приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned}A &= a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + \tfrac{1}{2}(a_3fg + a_1)\lambda + \tfrac{1}{2}a_2fg - \tfrac{1}{4}ia_3(fg_x - gf_x) + a_0,\\ B &= ia_3f\lambda^2 + (ia_2f - \tfrac{1}{2}a_3f_x)\lambda + ia_1f + \tfrac{1}{2}ia_3f^2g - \tfrac{1}{2}a_2f_x - \tfrac{1}{4}a_3f_{xx},\\ C &= ia_3g\lambda^2 + (ia_2g + \tfrac{1}{2}a_3g_x)\lambda + ia_1g + \tfrac{1}{2}ia_3fg^2 + \tfrac{1}{2}a_2g_x - \tfrac{1}{4}ia_3g_{xx},\end{aligned} \tag{29}$$

где a_0, a_1, a_2, a_3 — произвольные постоянные. Соответствующие (29) эволюционные уравнения для функций f, g имеют вид

$$\begin{aligned}f_t + \tfrac{1}{4}ia_3(f_{xxx} - 6fgf_x) + \tfrac{1}{2}a_2(f_{xx} - 2f^2g) - ia_1f_x - 2a_0f = 0,\\ g_t + \tfrac{1}{4}ia_3(g_{xxx} - 6fgg_x) - \tfrac{1}{2}a_2(g_{xx} - 2fg^2) - ia_1g_x + 2a_0g = 0.\end{aligned} \tag{30}$$

Рассмотрим два важных частных случая, приводящих к интересным нелинейным уравнениям математической физики.

1°. При

$$a_0 = a_1 = a_2 = 0, \quad a_3 = -4i, \quad g = 1$$

второе уравнение (30) удовлетворяется тождественно, а первое уравнение (30) переходит в уравнение Кортевега — де Фриза

$$f_t + f_{xxx} - 6ff_x = 0.$$

2°. При

$$a_0 = a_1 = a_2 = 0, \quad a_3 = -4i, \quad g = \pm f$$

оба уравнения (30) переходят в одно и то же модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза

$$f_t + f_{xxx} \mp 6f^2f_x = 0.$$

Пример 4. Будем искать теперь решение определяющей системы (15) в виде простейшего одночленного разложения по отрицательным степеням λ:

$$A = a(x,t)\lambda^{-1}, \quad B = b(x,t)\lambda^{-1}, \quad C = c(x,t)\lambda^{-1}. \tag{31}$$

В результате приходим к следующим соотношениям:

$$a_x = \tfrac{1}{2}i(fg)_t, \quad b = -\tfrac{1}{2}if_t, \quad c = \tfrac{1}{2}ig_t. \tag{32}$$

Соответствующие (32) эволюционные уравнения для функций f, g записываются так:

$$\begin{aligned}f_{xt} &= -4iaf,\\ g_{xt} &= -4iag.\end{aligned} \tag{33}$$

Если положить

$$a = \tfrac{1}{4} i \cos w, \quad b = c = \tfrac{1}{4} i \sin w, \quad f = -g = -\tfrac{1}{2} w_x, \tag{34}$$

то три соотношения (32) приводятся к одному и тому же уравнению — уравнению синус-Гордона

$$w_{xt} = \sin w, \tag{35}$$

а два уравнения (33) совпадут и дадут дифференциальное следствие уравнения (35):

$$w_{xxt} = w_x \cos w.$$

Таким образом, линейные системы уравнений (12) и (13), коэффициенты которых определяются формулами (31), (34) и $D = -A$, совместны, если функция u удовлетворяет уравнению синус-Гордона (21).

Замечание. Иногда определяющие уравнения (9)–(10) по аналогии с (2)–(3) также называют парой Лакса.

Задачи и упражнения к разд. 11.2

1. Вывести формулы (29) и (30) из системы (15).

2. Используя систему (30), получить нелинейное уравнение Шредингера (28).

3. Найти линейные системы вида (12) и (13), условие совместности которых приводит к уравнению sh-Гордона:

$w_{xt} = \operatorname{sh} w$.

Указание. Решение определяющей системы (15) ищется в виде (31).

4. Найти функции f и g, для которых условие совместности линейных уравнений

$$\varphi_{xx} + (\lambda - w)\varphi = 0,$$
$$\varphi_t + f\varphi_x + g\varphi = 0$$

дает уравнение Кортевега — де Фриза:

$w_t + w_{xxx} - 6ww_x = 0$.

Указание. Условие совместности получить, исходя из равенства $\varphi_{xxt} = \varphi_{txx}$, обе части которого вычисляются с помощью дифференцирования исходных уравнений. Решение определяющего уравнения искать в виде

$f = f_1\lambda + f_0$, $g = g_1\lambda + g_0$,

где функции $f_{1,0}$ и $g_{1,0}$ не зависят от λ.

5. К какому уравнению для функции w приводит условие совместности двух нелинейных уравнений Риккати:

$$\varphi_t = -a\lambda^{-1}e^w + a\lambda^{-1}e^{-w}\varphi^2,$$
$$\varphi_x = \lambda + w_x\varphi - \lambda\varphi^2?$$

Указание. Условие совместности получить, исходя из равенства $\varphi_{tx} = \varphi_{xt}$, обе части которого вычисляются с помощью дифференцирования исходных уравнений.

6. Написать условие совместности двух линейных систем уравнений:

$$\begin{aligned} (\varphi_1)_x &= -i\lambda\varphi_1 + \lambda f\varphi_2, \\ (\varphi_2)_x &= \lambda g\varphi_1 + i\lambda\varphi_2 \end{aligned} \quad \text{и} \quad \begin{aligned} (\varphi_1)_t &= A\varphi_1 + B\varphi_2, \\ (\varphi_2)_t &= C\varphi_1 - A\varphi_2. \end{aligned}$$

Найти решение полученной системы уравнений для функций A, B, C в виде кубических полиномов по параметру λ. Полагая далее $f = w - 1$, $g = -1$, вывести из условия совместности уравнение Гарри — Дима:

$w_t = 2(w^{-1/2})_{xxx}$.

Литература к разд. 11.2: В. Е. Захаров, А. Б. Шабат (1971), M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur (1974), М. Абловиц, Х. Сигур (1987), В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский (1980), M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson (1991).

11.3. Метод, основанный на использовании линейных интегральных уравнений

11.3.1. Описание метода

Рассмотрим подход, предложенный Захаровым и Шабатом (1974), основанный на использовании линейных интегральных уравнений вида*

$$K(x,y)=F(x,y)+\int_x^\infty K(x,z)N(x;z,y)\,dz,\quad y\geqslant x, \tag{36}$$

где F и N — заданные функции, а K — искомая функция. В каждом конкретном случае N явно выражается через F. Функции F, N, K, помимо явно указанных аргументов x, y, z, могут зависеть и от некоторых дополнительных параметров $t, \lambda, \ldots$ Производные по этим параметрам могут появляться в дифференциальных уравнениях, которым удовлетворяют функции F и K, но уравнение (36) рассматривается при фиксированных значениях этих параметров.

Определим оператор A_x следующим образом:

$$\mathrm{A}_x f(y)=\begin{cases}\int_x^\infty f(z)N(x;z,y)\,dz & \text{при}\ \ y\geqslant x,\\ 0 & \text{при}\ \ y<x.\end{cases}$$

Будем считать, что при каждом конкретном выборе N можно доказать обратимость оператора $(\mathrm{I}-\mathrm{A}_x)$ и непрерывность оператора $(\mathrm{I}-\mathrm{A}_x)^{-1}$, где I — единичный оператор.

Алгоритм поиска нелинейного уравнения, разрешимого методом обратной задачи рассеяния, состоит из трех последовательных этапов, кратко описанных ниже.

1°. Конкретизируется вид интегрального уравнения (36). Для этого задается связь между функциями N и F (N выражается через F).

2°. Задаются два подходящих линейных дифференциальных (обыкновенных или с частными производными) уравнения для функции F:

$$\mathrm{L}_m F=0,\qquad m=1,\ 2. \tag{37}$$

3°. Функция K связана с F уравнением (36), которое можно записать в виде

$$(\mathrm{I}-\mathrm{A}_x)K=F. \tag{38}$$

Действуя операторами L_m, входящими в (37), на уравнение (38), получим

$$\mathrm{L}_m(\mathrm{I}-\mathrm{A}_x)K=0,\qquad m=1,\ 2.$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$(\mathrm{I}-\mathrm{A}_x)(\mathrm{L}_m K)=\mathrm{R}_m,\qquad m=1,\ 2,$$

где R_m содержит все ненулевые члены коммутатора $[\mathrm{L}_m,(\mathrm{I}-\mathrm{A}_x)]$. При этом (36) и (37) должны быть выбраны таким образом, чтобы R_m можно было представить в виде

$$\mathrm{R}_m=(\mathrm{I}-\mathrm{A}_x)\mathrm{M}_m(K),\quad m=1,\ 2,$$

---

* Такие уравнения называются интегральными уравнениями типа Гельфанда — Левитана — Марченко.

где $\mathrm{M}_m(K)$ — нелинейный функционал от K. Но оператор $\mathrm{I}-\mathrm{A}_x$ обратим, поэтому функция K должна удовлетворять нелинейным дифференциальным уравнениям

$$\mathrm{L}_m K - \mathrm{M}_m(K) = 0, \quad m = 1, 2. \tag{39}$$

Следовательно, каждое решение линейного интегрального уравнения (36) является также решением нелинейных дифференциальных уравнений (39). Как правило, наибольший интерес представляют частные случаи или следствия одного из уравнений (39).

Замечание. Основными и наиболее сложными являются первые два этапа алгоритма. Линейные дифференциальные уравнения (37) обычно соответствуют линейной задаче на собственные значения (при $m=1$) и задаче об эволюции собственных функций во времени (при $m=2$).

Проиллюстрируем принципиальные особенности описанного алгоритма на конкретных примерах.

11.3.2. Конкретные примеры

Пример 5. Рассмотрим линейное интегральное уравнение

$$K(x,y) = F(x,y) + \int_x^\infty K(x,z)F(z,y)\,dz, \tag{40}$$

которое получается из (36) при $N(x;z,y) = F(z,y)$. Подразумевается, что функции F и K зависят еще от параметра t (для краткости это явно не указывается).

Отметим ряд тождеств, которые понадобятся в дальнейшем:

$$\partial_x^n \int_x^\infty K(x,z)F(z,y)\,dz = \int_x^\infty F(z,y)\partial_x^n K(x,z)\,dz + A_n, \tag{41}$$

$$\int_x^\infty K(x,z)\partial_x^n F(z,y)\,dz = (-1)^n \int_x^\infty F(z,y)\partial_z^n K(x,z)\,dz + B_n, \tag{42}$$

где A_n и B_n определяются по формулам

$$\begin{aligned}
&A_1 = -K(x,x)F(x,y), \quad A_n = (A_{n-1})_x - F(x,y)[\partial_x^{n-1}K(x,z)]_{z=x};\\
&B_1 = -K(x,x)F(x,y), \quad B_2 = -K(x,x)\partial_x F(x,y) + [\partial_z K(x,z)]_{z=x}F(x,y), \quad \ldots
\end{aligned}$$

Следствия указанных тождеств:

$$\begin{aligned}
&A_1 - B_1 = 0,\\
&A_2 - B_2 = -2F(x,y)\partial_x K(x,x),\\
&A_3 - B_3 = -3\partial_x F(x,y)\partial_x K(x,x) - 3F(x,y)\big[(\partial_x^2 + \partial_x\partial_z)K(x,z)\big]_{z=x}.
\end{aligned} \tag{43}$$

Введем оператор L_1 и потребуем, чтобы функция F удовлетворяла линейному волновому уравнению:

$$L_1 F \equiv (\partial_x^2 - \partial_y^2)F(x,y) = 0. \tag{44}$$

Подействуем оператором L_1 на (40). С учетом соотношений (41), (44) получим

$$\begin{aligned}
(\partial_x^2 - \partial_y^2)K(x,y) &= (\partial_x^2 - \partial_y^2)\int_x^\infty K(x,z)F(z,y)\,dz =\\
&= \int_x^\infty K_{xx}(x,z)F(z,y)\,dz - \int_x^\infty K(x,z)F_{yy}(z,y)\,dz + A_2.
\end{aligned}$$

Используя далее соотношения (42) и (43), имеем

$$(\partial_x^2 - \partial_y^2)K(x,y) = \int_x^\infty F(z,y)(\partial_x^2 - \partial_z^2)K(x,z)\,dz - 2F(x,y)\frac{d}{dx}K(x,x). \tag{45}$$

Воспользовавшись операторной формой записи рассматриваемого уравнения $F = (\mathrm{I} - \mathrm{A}_x)K$, представим (45) в виде

$$(\mathrm{I} - \mathrm{A}_x)\Big[(\partial_x^2 - \partial_y^2)K(x,y) + 2K_x(x,x)K(x,y)\Big] = 0.$$

Отсюда, с учетом обратимости оператора $(\mathrm{I} - \mathrm{A}_x)$, имеем

$$(\partial_x^2 - \partial_y^2)K(x,y) - w(x)K(x,y) = 0, \tag{46}$$

где функция $w(x)$ определена равенством

$$w(x) = -2\frac{d}{dx}K(x,x). \tag{47}$$

Потребуем теперь, чтобы функция F удовлетворяла другому линейному уравнению с частными производными:

$$L_2F = (\partial_t + (\partial_x + \partial_y)^3)F = 0. \tag{48}$$

Подействовав оператором L_2 на (40), получим

$$(\partial_t + (\partial_x + \partial_y)^3)K(x,y) = (\partial_t + (\partial_x + \partial_y)^3)\int_x^\infty K(x,z)F(z,y)\,dz.$$

Процедура, аналогичная выкладкам, проведенным для оператора L_1, дает

$$K_t + (\partial_x + \partial_y)^2 K - 3w(\partial_x + \partial_y)K = 0. \tag{49}$$

На характеристике $y = x$ уравнение (49) после дифференцирования по x с учетом равенства (47) преобразуется в уравнение Кортевега—де Фриза

$$w_t - 6ww_x + w_{xxx} = 0. \tag{50}$$

Таким образом, любая функция F, удовлетворяющая линейным уравнениям (44), (48) и быстро убывающая при $x \to +\infty$, порождает решение нелинейного уравнения (50), сводя его к решению линейного интегрального уравнения (40).

Пример 6. Рассмотрим теперь более сложное линейное интегральное уравнение

$$K(x,y) = F(x,y) + \frac{\sigma}{4}\int_x^\infty\int_x^\infty K(x,z)F(z,u)F(u,y)\,dz\,du, \tag{51}$$

где $\sigma = \pm 1$ (здесь и далее числовые множители выбираются из соображений удобства выкладок). Уравнение (51) является частным случаем уравнения (36) при

$$N(x;z,y) = \frac{\sigma}{4}\int_x^\infty F(z,u)F(u,y)\,du.$$

Пусть оператор L_1 и соответствующее ему линейное дифференциальное уравнение имеют вид

$$L_1F = (\partial_x - \partial_y)F = 0. \tag{52}$$

Решив это уравнение, находим общий вид функции F:

$$F(x,y) = F\Big(\frac{x+y}{2}\Big).$$

После сдвига нижнего предела интегрирования уравнение (51) может быть переписано в виде

$$K(x,y) = F\Big(\frac{x+y}{2}\Big) + \frac{\sigma}{4}\int_0^\infty\int_0^\infty K(x,x+\zeta)F\Big(\frac{2x+\zeta+\eta}{2}\Big)F\Big(\frac{x+\eta+y}{2}\Big)\,d\zeta\,d\eta \tag{53}$$

или

$$[(\mathrm{I} - \sigma\mathrm{A}_x)K](x,y) = F\Big(\frac{x+y}{2}\Big),$$

где оператор A_x определяется формулой

$$\mathrm{A}_x f(y) = \frac{1}{4}\int_0^\infty\int_0^\infty f(\zeta)F\Big(\frac{2x+\zeta+\eta}{2}\Big)F\Big(\frac{x+\eta+y}{2}\Big)\,d\zeta\,d\eta.$$

Введение функции

$$K_2(x,z) = \int_0^\infty K(x,x+\zeta)F\Big(\frac{x+\zeta+z}{2}\Big)\,d\zeta \tag{54}$$

позволяет записать уравнение (51) в виде

$$K(x,y) = F\Big(\frac{x+y}{2}\Big) + \frac{\sigma}{4}\int_0^\infty K_2(x,x+\eta)F\Big(\frac{x+\eta+y}{2}\Big)\,d\eta. \tag{55}$$

Подействовав на (55) оператором L_1 (52), на (54) оператором $\partial_x + \partial_z$ и учтя обратимость оператора $\mathrm{I} - \sigma \mathrm{A}_x$, получим после ряда выкладок:

$$(\partial_x + \partial_y)K_2(x,y) = -2K(x,x)K(x,y), \tag{56}$$

$$(\partial_x - \partial_y)K(x,y) = -\tfrac{1}{2}\sigma K(x,x)K_2(x,y), \tag{57}$$

а действуя оператором $\partial_x + \partial_y$ на (53), получим равенство

$$F'\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = (\mathrm{I} - \sigma\mathrm{A}_x)\Big[(\partial_x+\partial_y)K(x,y) + \frac{\sigma}{2}K_2(x,x)K(x,y)\Big]. \tag{58}$$

Теперь потребуем, чтобы функция F удовлетворяла второму линейному уравнению

$$L_2F = (\partial_t + (\partial_x+\partial_y)^3)F = 0. \tag{59}$$

Подействовав оператором L_2 на уравнение (53) и учитывая полученные вспомогательные выражения (56)–(58), получим окончательно, что при $y \geqslant x$

$$[\partial_t + (\partial_x+\partial_y)^3]K(x,y) = 3\sigma K(x,x)K(x,y)\partial_x K(x,x) + 3\sigma K^2(x,x)(\partial_x+\partial_y)K(x,y). \tag{60}$$

Если определить $w(x,t) = K(x,x;t)$, то уравнение (60) при $y = x$ можно переписать в терминах зависимой переменной q как модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза

$$w_t + w_{xxx} - 6\sigma w^2 w_x = 0. \tag{61}$$

Таким образом любое решение, одновременно удовлетворяющее двум линейным дифференциальным уравнениям (52) и (59) и достаточно быстро убывающее при $x\to\infty$, порождает решение нелинейного уравнения (61), которое определяется из линейного интегрального уравнения (51).

Пример 7. Рассмотрим теперь уравнение Кадомцева — Петвиашвили:

$$(w_t + w_{xxx} - 6ww_x)_x + 3aw_{yy} = 0. \tag{62}$$

Можно показать, что любая достаточно быстро убывающая при $x \to +\infty$ функция $F = F(x,z;y,t)$, удовлетворяющая одновременно двум линейным дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} \sqrt{a}\,F_y + F_{xx} - F_{zz} &= 0,\\ F_t + 4F_{xxx} + 4F_{zzz} &= 0 \end{aligned} \tag{63}$$

порождает решение уравнения Кадомцева — Петвиашвили (62) в виде

$$w = -2\frac{d}{dx}K(x,x;y,t),$$

где $K = K(x,z;y,t)$ — решение линейного интегрального уравнения Гельфанда — Левитана — Марченко

$$K(x,z;y,t) + F(x,z;y,t) + \int_x^\infty K(x,s;y,t)F(s,z;y,t)\,ds = 0. \tag{64}$$

Переменные y и t входят в него как параметры.

Задачи и упражнения к разд. 11.3

1. Написать линейные дифференциальные уравнения и интегральное уравнение Гельфанда — Левитана — Марченко, через решения которых можно выразить решение уравнения Буссинеска

$$w_{tt} + (ww_x)_x + w_{xxxx} = 0.$$

Указание. Использовать результаты примера 7.

2. Найти совместное частное решение двух линейных дифференциальных уравнений (44) и (48) экспоненциального вида $F = A\exp(\alpha x + \beta y + \gamma z)$.

Построить соответствующие точные решения интегрального уравнения Гельфанда — Левитана — Марченко (40) и уравнения Кортевега — де Фриза (50).

3. Найти совместное частное решение двух линейных дифференциальных уравнений (63) экспоненциального вида $F = A\exp(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t)$.

Построить соответствующие точные решения интегрального уравнения Гельфанда — Левитана — Марченко (64) и уравнения Кадомцева — Петвиашвили (62).

Литература к разд. 11.3: P. D. Lax (1968), М. Абловиц, Х. Сигур (1987), M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson (1991).

11.4. Решение задачи Коши методом обратной задачи

11.4.1. Предварительные замечания. Прямая и обратная задачи рассеяния

Решение задачи Коши для нелинейных уравнений, допускающих пару Лакса (или другую «неявную» линеаризацию, см. разд. 11.3), распадается на несколько последовательных этапов. Два из этих этапов основаны на решении прямой и обратной задач рассеяния для вспомогательных линейных уравнений. Ниже кратко излагаются соответствующие результаты для линейного стационарного уравнения Шредингера

$$\varphi''_{xx} + \bigl[\lambda - f(x)\bigr]\varphi = 0 \qquad (-\infty < x < \infty). \tag{65}$$

Считается, что функция $f(x)$ (эта функция называется *потенциалом*) стремится к нулю при $x \to \pm\infty$ и выполняется условие $\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)|f(x)|\,dx < \infty$.

Прямая задача рассеяния. Рассмотрим линейную задачу на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения (65).

Собственные значения могут быть двух типов:

$$\begin{aligned} &\lambda_n = -\varkappa_n^2, \quad n = 1,\,2,\,\ldots,\,N \quad &&\text{(дискретный спектр)},\\ &\lambda = k^2 \qquad -\infty < k < \infty &&\text{(непрерывный спектр)}. \end{aligned} \tag{66}$$

Известно, что при $\min f(x) < \lambda < 0$ уравнение (65) имеет дискретный спектр собственных значений, а при $f(x) < 0$ и $\lambda > 0$ оно имеет непрерывный спектр.

Пусть $\lambda_n = -\varkappa_n^2$ — дискретные собственные значения, занумерованные в порядке возрастания:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_N < 0,$$

а $\varphi_n = \varphi_n(x)$ — соответствующие собственные функции, которые обращаются в нуль при $x \to \pm\infty$ и квадратично суммируемы. Собственные функции определены с точностью до постоянного множителя. Если фиксировать собственную функцию ее асимптотикой при отрицательных x

$$\varphi_n \to \exp(\varkappa_n x) \quad \text{при} \quad x \to -\infty,$$

то главный член асимптотического разложения φ_n при больших положительных x будет иметь вид

$$\varphi_n \to c_n \exp(-\varkappa_n x) \quad \text{при} \quad x \to \infty. \tag{67}$$

Собственная функция φ_n имеет $n-1$ нулей, и справедливо равенство

$$c_n = (-1)^{n-1}|c_n|.$$

Для непрерывного спектра $\lambda = k^2$ волновая функция φ на бесконечности определяется линейной комбинацией экспонент $\exp(\pm ikx)$ (поскольку $f \to 0$ при $|x| \to \infty$). Условия на бесконечности

$$\begin{aligned} &\varphi \to e^{-ikx} &&\text{при} \quad x \to -\infty,\\ &\varphi \to a(k)e^{-ikx} + b(k)e^{ikx} &&\text{при} \quad x \to \infty, \end{aligned} \tag{68}$$

и уравнение (65) позволяют однозначно определить функции $a(k)$ и $b(k)$ (отметим, что они связаны простым соотношением $|a|^2 - |b|^2 = 1$). Первое слагаемое во втором условии (68) соответствует прошедшей волне, а второе слагаемое — отраженной волне. Поэтому отношение

$$r(k) = \frac{b(k)}{a(k)} \tag{69}$$

называется *коэффициентом отражения*.

Совокупность величин

$$S = \{\varkappa_n,\, c_n,\, r(k);\ n = 1, \ldots, N\}, \tag{70}$$

фигурирующих в выражениях (67)–(68), называется *данными рассеяния*. Определение этих данных для заданного потенциала $f(x)$ и является целью прямой задачи теории рассеяния. Данные рассеяния полностью определяют спектр задачи на собственные значения для стационарного уравнения Шредингера (65).

Отметим полезные формулы

$$\begin{gathered} |a(k)| = \bigl(1 - |r(k)|^2\bigr)^{-1}, \\ \arg a(k) = \frac{1}{i} \sum_{n=1}^{N} \frac{k - i\varkappa_n}{k + i\varkappa_n} - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|a(s)|}{s - k}\, ds, \end{gathered} \tag{71}$$

позволяющие по коэффициенту отражения $r(k)$ восстанавливать функцию $a(k)$. Интеграл в во второй формуле (71) понимается в смысле главного значения по Коши, $i\varkappa_n$ — нули аналитической в верхней полуплоскости функции $a(k)$ [значения $\varkappa_n$ фигурируют в асимптотиках (67)].

Обратная задача рассеяния. Отображение потенциалов уравнения (65) в данные рассеяния (70) однозначно и обратимо. Процедура восстановления $f(x)$ по заданным S составляет предмет обратной задачи рассеяния. Ниже приведены итоговые результаты исследования этой задачи.

Для определения потенциала надо сначала решить интегральное уравнение Гельфанда — Левитана — Марченко

$$K(x,y) + \Phi(x,y) + \int_x^{\infty} K(x,z)\Phi(z,y)\, dz = 0, \tag{72}$$

где функция $\Phi(x,y) = \overline{\Phi}(x+y)$ определяется через данные рассеяния (70) следующим образом:

$$\Phi(x,y) = \sum_{n=1}^{N} \frac{c_n}{ia'(i\varkappa_n)} e^{-\varkappa_n(x+y)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(k) e^{ik(x+y)}\, dk, \qquad a'(k) = \frac{da}{dk}. \tag{73}$$

Потенциал выражается через решение линейного уравнения (73) по формуле

$$f(x) = -2\frac{d}{dx} K(x,x). \tag{74}$$

Отметим, что прямая и обратная задачи теории рассеяния обычно изучаются в курсах квантовой механики. Более подробную информацию об этих задачах можно найти, например, в статье И. М. Гельфанда, Б. М. Левитана (1951) и книгах В. Е. Захарова, С. В. Манакова, С. П. Новикова, Л. П. Питаевского (1980), Н. А. Кудряшова (2004).

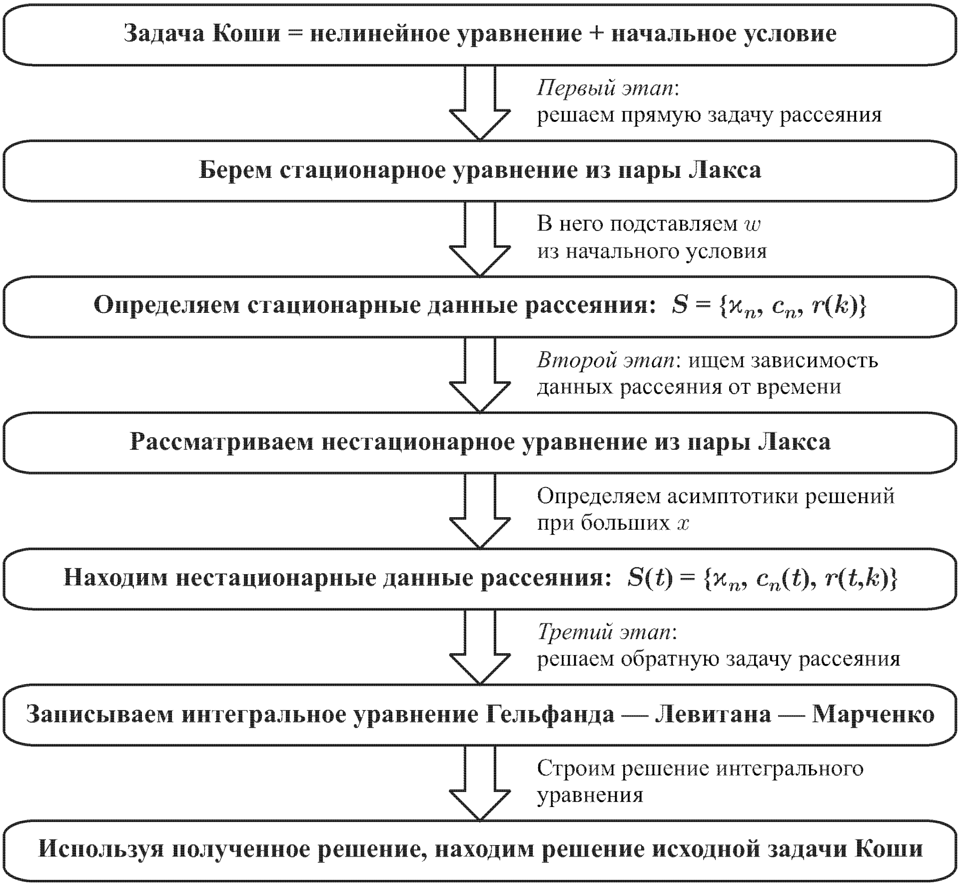

Рис. 8. Основные этапы решения задачи Коши для нелинейных уравнений, допускающих применение метода обратной задачи.

11.4.2. Решение задачи Коши для нелинейных уравнений методом обратной задачи

На рис. 8 изображена общая схема решения задачи Коши для нелинейных уравнений, допускающих применение метода обратной задачи. Считается, что на предварительном этапе для рассматриваемого уравнения была получена пара Лакса (2)–(3) или известно представление уравнения в виде условия совместности переопределенной системы линейных уравнений (9)–(10).

Используем описанную схему для решения задачи Коши в случае уравнения Кортевега — де Фриза

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 6w\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \tag{75}$$

с начальным условием

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \qquad (-\infty < x < \infty). \tag{76}$$

Считается, что функция $f(x) < 0$ и удовлетворяет тем же условиям, что и потенциал в уравнении (65).

Решение задачи Коши (75), (76) распадается на несколько последовательных этапов (см. рис. 8), которые используют представление уравнения Кортевега — де Фриза в виде пары Лакса (7) и результаты решения прямой и обратной задач рассеяния.

Первый этап. Сначала рассматривается линейная задача на собственные значения — прямая задача рассеяния — для вспомогательного обыкновенного дифференциального уравнения (65), которое возникает в результате подстановки начального профиля (76) в первое уравнение пары Лакса (7) для уравнения Кортевега — де Фриза (75). В результате решения этой задачи получают данные рассеяния (70).

Второй этап. При $t > 0$ в первом уравнении (7) вместо начального профиля $f(x)$ должна стоять функция $w = w(x,t)$. В соответствующей нестационарной задаче собственные значения (66) сохраняются (они не зависят от t, см. разд. 11.1.1), но меняются собственные функции $\varphi = \varphi(x,t)$.

Для непрерывных собственных значений $\lambda > 0$ асимптотики собственных функций аналогично (68) имеют вид:

$$\begin{aligned} &\varphi \to e^{-ikx} && \text{при} \quad x \to -\infty, \\ &\varphi \to a(k,t)e^{-ikx} + b(k,t)e^{ikx} && \text{при} \quad x \to \infty. \end{aligned} \tag{77}$$

Подставим первую асимптотику (77) во второе уравнение пары Лакса (7) и учтем, что $w \to 0$ при $x \to -\infty$. В результате находим функцию $p(t)$:

$$p(t) = -4ik^3 = \text{const}\,. \tag{78}$$

Чтобы определить зависимости $a = a(k,t)$ и $b = b(k,t)$ от времени, рассмотрим второе уравнение пары Лакса (7), где функция $p(t)$ дается формулой (78). Учитывая, что $w \to 0$ при $x \to \infty$, получим линеаризованное уравнение

$$\varphi_t + 4\varphi_{xxx} - 4ik^3\varphi = 0. \tag{79}$$

Подставляя в (79) вторую асимптотику (77) и приравнивая члены при экспонентах e^{-ikx} и e^{ikx}, приходим к линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$a'_t = 0, \qquad b'_t - 8ik^3 b = 0.$$

Интегрируя эти уравнения, находим коэффициент отражения

$$r(k,t) = \frac{b(t,k)}{a(t,k)} = r(k,0)e^{8ik^3 t}. \tag{80}$$

Аналогичным образом определяются асимптотики собственных функций для дискретных собственных значений при $k = i\varkappa_n$ с использованием линеаризованного уравнения (79).

В результате проведенного анализа получаем зависимости данных рассеяния от времени

$$S(t) = \{\varkappa_n,\ c_n(t) = c_n(0)e^{8\varkappa_n^3 t},\ r(k,t) = r(k,0)e^{8ik^3 t};\ n = 1,\dots,N\}. \tag{81}$$

Третий этап. Используя данные рассеяния (81), аналогично (73) введем функцию

$$\Phi(x,y;t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r(k,0)e^{i[8k^3 t + k(x+y)]}\,dk + \sum_{n=1}^{N} \frac{c_n(0)}{ia'(i\varkappa_n)} e^{8\varkappa_n^3 t - \varkappa_n(x+y)}, \tag{82}$$

которая в данном случае параметрически зависит от времени. Эта функция для первого уравнения пары Лакса (7) при $t > 0$ играет ту же самую роль, что и функция (73) для уравнения (65) [напомним, что уравнение (65) совпадает с первым уравнением пары Лакса (7), в котором функция w заменена на начальное условие (76)].

Чтобы восстановить функцию $w(x,t)$ по данным рассеяния (81), сначала надо решить линейное интегральное уравнение [полученное с помощью элементарных переобозначений из (72)]:

$$K(x,y;t) + \Phi(x,y;t) + \int_x^\infty K(x,z;t)\Phi(z,y;t)\,dz = 0, \tag{83}$$

в которое входит функция (82). Затем по формуле

$$w(x,t) = -2\frac{d}{dx}K(x,x;t), \tag{84}$$

которая получена с помощью переобозначений из (74), определяется решение задачи Коши для уравнения Кортевега — де Фриза (75)–(76).

11.4.2. N-солитонное решение уравнения Кортевега—де Фриза

Получим точное решение уравнения Кортевега — де Фриза (75) в случае безотражательных потенциалов, что соответствует нулевому коэффициенту отражения (69). Будем исходить из линейного интегрального уравнения (83).

Полагая $r(k,0) = 0$ в (82), имеем

$$\Phi(x,y;t) = \sum_{n=1}^N \gamma_n e^{-\varkappa_n(x+y)+8\varkappa_n^3 t}, \qquad \gamma_n = \frac{c_n(0)}{ia'(i\varkappa_n)} > 0.$$

Подставив эту функцию в (83), после элементарных преобразований получим уравнение

$$K(x,y;t) + \sum_{n=1}^N \Gamma_n(t)e^{-\varkappa_n(x+y)} + \sum_{n=1}^N \Gamma_n(t)e^{-\varkappa_n y}\int_x^\infty e^{-\varkappa_n z}K(x,z;t)\,dz = 0, \tag{85}$$

где использовано обозначение

$$\Gamma_n(t) = \gamma_n e^{8\varkappa_n^3 t}. \tag{86}$$

Решение интегрального уравнения (85) ищем в виде конечной суммы

$$K(x,y;t) = \sum_{n=1}^N e^{-\varkappa_n y}K_n(x,t). \tag{87}$$

Подставив (87) в (85) и интегрируя, имеем

$$\sum_{n=1}^N e^{-\varkappa_n y}K_n(x,t) + \sum_{n=1}^N \Gamma_n(t)e^{-\varkappa_n(x+y)} + \\ + \sum_{n=1}^N \Gamma_n(t)e^{-\varkappa_n y}\sum_{m=1}^N K_m(x,t)\frac{e^{-(\varkappa_n+\varkappa_m)x}}{\varkappa_n+\varkappa_m} = 0.$$

Переписывая это равенство в виде $\sum_{n=1}^{N} \psi_n(x,t)e^{-\varkappa_n y} = 0$, а затем полагая $\psi_n(x,t) = 0$, приходим к неоднородной системе линейных алгебраических уравнений для определения функций $K_n(x,t)$:

$$K_n(x,t) + \Gamma_n(t) \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{\varkappa_n + \varkappa_m} e^{-(\varkappa_n+\varkappa_m)x} K_m(x,t) = -\Gamma_n(t) e^{-\varkappa_n x}, \quad n = 1, \ldots, N. \tag{88}$$

Используя правило Крамера, можно записать решение системы (88) в виде отношения определителей

$$K_n(x,t) = \frac{\det \mathbb{A}^{(n)}(x,t)}{\det \mathbb{A}(x,t)}, \tag{89}$$

где $\mathbb{A}$ — матрица с элементами

$$\begin{aligned} A_{n,m}(x,t) &= \delta_{nm} + \frac{\Gamma_n(t)}{\varkappa_n + \varkappa_m} e^{-(\varkappa_n+\varkappa_m)x} = \\ &= \delta_{nm} + \frac{\gamma_n}{\varkappa_n + \varkappa_m} e^{-(\varkappa_n+\varkappa_m)x + 8\varkappa_n^3 t}, \\ \delta_{nm} &= \begin{cases} 1 & \text{при } n = m, \\ 0 & \text{при } n \neq m, \end{cases} \end{aligned} \tag{90}$$

а $\mathbb{A}^{(n)}(x,t)$ — матрица, полученная из $\mathbb{A}$ заменой ее n-го столбца правыми частями уравнений (88). Подставляя (89) в (87), имеем

$$K(x,y;t) = \sum_{n=1}^{N} e^{-\varkappa_n y} \frac{\det \mathbb{A}^{(n)}(x,t)}{\det \mathbb{A}(x,t)}.$$

Полагая далее $y = x$, приходим к выражению

$$K(x,x;t) = \frac{1}{\det \mathbb{A}(x,t)} \sum_{n=1}^{N} e^{-\varkappa_n x} \det \mathbb{A}^{(n)}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} \ln \det \mathbb{A}(x,t).$$

Отсюда с учетом формулы (84) находим решение уравнения Кортевега — де Фриза (75) в случае безотражательных потенциалов в виде

$$w(x,t) = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \det \mathbb{A}(x,t). \tag{91}$$

Эта решение содержит $2N$ свободных параметров $\varkappa_n$, γ_n $(n = 1, \ldots, N)$ и называется *N-солитонным решением*.

Пример 8. В частном случае $N = 1$ матрица $\mathbb{A}(x,t)$ характеризуется единственным элементом, который определяется значениями $n = m = 1$ в (90):

$$A_{1,1}(x,t) = 1 + \frac{\gamma}{2\varkappa} e^{-2\varkappa x + 8\varkappa^3 t}.$$

Подставляя это выражение в (91), получаем *односолитонное решение* уравнения Кортевега — де Фриза

$$w(x,t) = -\frac{2\varkappa^2}{\operatorname{ch}^2[\varkappa(x - 4\varkappa^2 t) + \xi_0]}, \qquad \xi_0 = \frac{1}{2\varkappa} \ln \frac{\gamma}{2\varkappa}, \tag{92}$$

представляющее собой уединенную бегущую волну, движущуюся вправо с постоянной скоростью $v = 4\varkappa^2$, которая быстро затухает на бесконечности.

Для N-солитонного решения (91) справедливы асимптотические формулы

$$w(x,t) \approx -2\sum_{n=1}^{N} \frac{\varkappa_n^2}{\operatorname{ch}^2\left[\varkappa_n(x - v_n t) + \xi_n^{\pm}\right]} \quad \text{при} \quad t \to \pm\infty, \tag{93}$$

где $v_n = 4\varkappa_n^2$ — скорость n-й компоненты. Из сопоставления формул (92) и (93) следует, что при больших временах N-солитонное решение распадается на N независимых односолитонных решений, причем солитоны с большей амплитудой движутся с большей скоростью.

Задачи и упражнения к разд. 11.4

1. Найти двухсолитонное решение уравнения Кортевега — де Фриза с помощью формул (90)–(91) при $N = 2$.

2. Выразить постоянные $\xi_n^{\pm}$, фигурирующие в асимптотиках (93), через $\varkappa_n$, γ_n для двухсолитонного решения ($N = 2$).

3. Найти разность постоянных $\xi_n^{+} - \xi_n^{-}$, которые входят в асимптотические формулы (93) для N-солитонного решения.

Литература к разд. 11.4: C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura (1967), P. D. Lax (1968), В. Е. Захаров, Л. Д. Фаддеев (1971), В. Е. Захаров, А. Б. Шабат (1971, 1974), M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur (1973, 1974), В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский (1980), Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев (1986), М. Абловиц, Х. Сигур (1987), Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис (1988), M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson (1991), E. D. Belokolos, A. I. Bobenko и др. (1994), Н. А. Кудряшов (2004).

12. Законы сохранения и интегралы движения

12.1. Основные определения и примеры

12.1.1. Общий вид законов сохранения

Рассмотрим уравнение с частными производными с двумя независимыми переменными

$$F\Big(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \ldots\Big) = 0. \tag{1}$$

Закон сохранения для этого уравнения имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial x} = 0, \tag{2}$$

где

$$T = T\Big(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial t}, \ldots\Big), \qquad X = X\Big(x, t, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial t}, \ldots\Big). \tag{3}$$

Левая часть закона сохранения (2) обращается в нуль на всех (достаточно гладких) решениях уравнения (1). В простейших случаях подстановка зависимостей (3) в закон сохранения (2) после дифференцирования и элементарных преобразований приводит к выражению, которое с точностью до функционального множителя совпадает с (1). Величины T и X в (2) называются соответственно *плотностью* и *потоком*.

В законе сохранения (2) плотность и поток определяются неоднозначно, их можно заменить по правилу $T \Longrightarrow T + \varphi(x)$ $X \Longrightarrow X + \psi(t)$, где $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ — произвольные функции, или в общем случае, по правилу

$$T \Longrightarrow T + \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad X \Longrightarrow X - \frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

где $\Phi = \Phi(x, t)$ — произвольная функция двух переменных.

Для нестационарных уравнений с n пространственными переменными $x_1, \ldots, x_n$ законы сохранения имеют вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_k}{\partial x_k} = 0.$$

Уравнения с частными производными могут иметь несколько (в некоторых случаях бесконечно много) законов сохранения, а могут и не иметь их вовсе.

12.1.2. Интегралы движения

Если общее изменение величины X на интервале $a \leqslant x \leqslant b$ равно нулю, т. е. выполняется равенство

$$X(a) = X(b)$$

(обычно это является следствием граничных условий), то имеет место «интеграл движения»:

$$\int_a^b T\,dx = \text{const} \qquad (\text{для всех } t). \tag{4}$$

Для многих конкретных уравнений соотношения вида (4) имеют ясный физический смысл и используются как для приближенного аналитического решения соответствующих задач, так и для контроля результатов применения численных методов.

12.1.3. Законы сохранения некоторых нелинейных уравнений математической физики

Пример 1. Уравнение Кортевега — де Фриза

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 6w\frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

имеет бесконечно много законов сохранения. Наиболее простые из них определяются выражениями [их надо подставить в (2)]:

$$\begin{aligned}
&T_1 = w, && X_1 = w_{xx} - 3w^2;\\
&T_2 = w^2, && X_2 = 2ww_{xx} - w_x^2 - 4w^3;\\
&T_3 = w_x^2 + 2w^3, && X_3 = 2w_x w_{xxx} - w_{xx}^2 + 6w^2 w_{xx} - 12ww_x^2 - 9w^4;\\
&T_4 = 3tw^2 + xw, && X_4 = t\bigl(6ww_{xx} - 3w_x^2 - 12w^3\bigr) - w_x + xw_{xx} - 3xw^2,
\end{aligned}$$

где нижние индексы обозначают частные производные по x.

Пример 2. Уравнение синус-Гордона

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - \sin w = 0$$

также имеет бесконечно много законов сохранения. Первые три описываются формулами

$$\begin{aligned}
&T_1 = w_x^2, && X_1 = 2\cos w;\\
&T_2 = w_x^4 - 4w_{xx}^2, && X_2 = 4w_x^2 \cos w;\\
&T_3 = 3w_x^6 - 12w_x^2 w_{xx}^2 + 16w_x^3 w_{xxx} + 24w_{xxx}^2, && X_3 = (2w_x^4 - 24w_{xx}^2)\cos w.
\end{aligned}$$

Пример 3. Неоднородное уравнение Монжа — Ампера

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = F(x,y)$$

где $F(x,y)$ — произвольная функция двух переменных, имеет закон сохранения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \int F(x,y)\,dy\right) = 0.$$

Пример 4. Уравнение Шредингера с кубической нелинейностью

$$i\frac{\partial w}{\partial t} = \Delta w + |w|^2 w, \qquad \Delta w = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2}$$

($i^2 = 1$, w — комплексная функция действительных аргументов) при $n \geqslant 2$ имеет два закона сохранения:

$$\bigl(|w|^2\bigr)_t + i\nabla\cdot\bigl(\bar w \nabla w - w\nabla \bar w\bigr)_x = 0,$$

$$\bigl(|\nabla w|^2 - \tfrac{1}{2}|w|^4\bigr)_t + i\nabla\cdot\bigl[(\Delta w + |w|^2 w)\nabla\bar w - (\Delta\bar w + |w|^2\bar w)\nabla w\bigr]_x = 0.$$

Здесь $\nabla = \bigl(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\bigr)$, а черта сверху обозначает комплексно-сопряженную величину.

В одномерном случае, который соответствует $n = 1$, рассматриваемое уравнение обладает бесконечным множеством законов сохранения.

Пример 5. Нелинейное уравнение теплопроводности с квадратичным источником

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw^2 \qquad (a \neq 0)$$

не имеет законов сохранения.

Задачи и упражнения к разд. 12.1

1. Представить обобщенное уравнение Бюргерса
$w_t + f(w)w_x = aw_{xx}$
в виде закона сохранения.

2. Нелинейное уравнение теплопроводности $w_t = [f(w)w_x]_x$ в общем случае имеет два закона сохранения:

$$w_t + [-f(w)w_x]_x = 0 \qquad \text{(тривиальный закон сохранения)},$$

$$[(C_1x + C_2)w]_t + [C_1F(w) - (C_1x + C_2)f(w)w_x]_x = 0, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Используя эти результаты, найти законы сохранения для уравнения $w_t = f(w)w_{xx}$.

3. Найти законы сохранения для нелинейного волнового уравнения:
$w_{tt} = [f(w)w_x]_x$.
Указание. См. законы сохранения в упражнении 2.

4. Найти законы сохранения для нелинейного уравнения теплопроводности в анизотропной среде:
$[f(w)w_x]_x + [g(w)w_y]_y = 0$.
Указание. См. законы сохранения в упражнениях 2 и 3.

5. Найти законы сохранения для следующих обобщений уравнения Кортевега — де Фриза:
a) $w_t + f(w)w_x = w_{xxx}$.
b) $w_t = [f(w)w_{xx}]_x + g(w)w_x$,
c) $w_t = f(w)w_{xxx} + g(w)w_x$.
Указание. Законы сохранения искать в виде $[\varphi(w)]_t + [\psi_2(w)w_{xx} + \psi_1(w)w_x^2 + \psi_0(w)]_x = 0$.

6. Найти закон сохранения для уравнения Калоджеро
$w_{xt} = ww_x + f(w_x)$.
Указание. Закон сохранения искать в виде $[F(w_x)]_t + [G(w)H(w_x)]_x = 0$.

7. Пусть эволюционное уравнение
$w_t = F(x, t, w, w_x, \dots, w_x^{(n)})$
допускает закон сохранения вида
$[p(x,t)w]_t + [\Phi(x, t, w, w_x, \dots, w_x^{(n-1)})]_x = 0$.
Доказать, что уравнение
$w_t = F(x, t, w, w_x, \dots, w_x^{(n)}) + aw + b$
допускает закон сохранения
$[e^{-at}p(x,t)w]_t + [e^{-at}\Phi(x, t, w, w_x, \dots, w_x^{(n-1)}) + e^{-at}\theta(x,t)]_x = 0$,
где $\theta = -b\int p(x,t)\,dx$.

8. Найти закон сохранения для уравнения из примера 7 при $a = a(t)$, $b = b(x,t)$.

9. Пусть эволюционное уравнение из примера 7 допускает закон сохранения вида
$[p(x,t)w^k]_t + [\Phi(x, t, w, w_x, \dots, w_x^{(n-1)})]_x = 0$.
Сформулировать, а затем доказать утверждение, аналогичное утверждению из примера 7.

Литература к разд. 12.1: Дж. Уизем (1977), R. M. Miura, C. S. Gardner, M. D. Kruskal (1968), M. D. Kruskal, R. M. Miura, C. S. Gardner, N. J. Zabusky (1970), A. C. Scott, F. Y. Chu, D. W. McLaughlin (1973), J. L. Lamb (1974), R. K. Dodd, R. K. Bullough (1977), П. Олвер (1989), N. H. Ibragimov (1994), S. E. Harris (1996), А. М. Виноградов, И. С. Красильщик (1997).

12.2. Уравнения, допускающие вариационную формулировку. Нётеровы симметрии

12.2.1. Лагранжиан, уравнение Эйлера—Лагранжа. Нётеровы симметрии

Будем рассматривать уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными

$$F\Big(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big) = 0, \qquad (5)$$

которые допускают вариационную формулировку о минимуме (максимуме) функционала

$$Z(w) = \int\limits_S L(x, y, w, w_x, w_y)\, dx\, dy. \tag{6}$$

Функция $L = L(x, y, w, w_x, w_y)$ называется *лагранжианом*.

Известно, что минимуму функционала (6) отвечает *уравнение Эйлера — Лагранжа*

$$\frac{\partial L}{\partial w} - D_x\Big(\frac{\partial L}{\partial w_x}\Big) - D_y\Big(\frac{\partial L}{\partial w_y}\Big) = 0, \tag{7}$$

в которое входят операторы полного дифференцирования по переменным x и y:

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + w_x\frac{\partial}{\partial w} + w_{xx}\frac{\partial}{\partial w_x} + w_{xy}\frac{\partial}{\partial w_y},$$

$$D_y = \frac{\partial}{\partial y} + w_y\frac{\partial}{\partial w} + w_{xy}\frac{\partial}{\partial w_x} + w_{yy}\frac{\partial}{\partial w_y}.$$

Исходное уравнение (5) должно являться следствием уравнения (7).

Симметрия, которая сохраняет дифференциальную форму

$$\Omega = L(x, y, w, w_x, w_y)\, dx\, dy,$$

называется *нётеровой симметрией* лагранжиана L. Для определения нётеровых симметрий следует найти точечные преобразования

$$\bar x = f_1(x, y, w, \varepsilon), \quad \bar y = f_2(x, y, w, \varepsilon), \quad \bar w = g(x, y, w, \varepsilon), \tag{8}$$

которые сохраняют дифференциальную форму: $\bar\Omega = \Omega$, т. е.

$$\bar L\, d\bar x\, d\bar y = L\, dx\, dy. \tag{9}$$

Вычисление дифференциалов $d\bar x, d\bar y$ с учетом (8) дает

$$d\bar x = D_x f_1\, dx, \quad d\bar y = D_y f_2\, dy,$$

поэтому соотношение (9) можно записать в виде

$$(L - \bar L D_x f_1 D_y f_2)\, dx\, dy = 0,$$

что эквивалентно равенству

$$L - \bar L D_x f_1 D_y f_2 = 0. \tag{10}$$

Поставим точечным преобразованиям (8) в соответствие продолженный оператор

$$X = \xi\partial_x + \eta\partial_y + \zeta\partial_w + \zeta_1\partial_{w_x} + \zeta_2\partial_{w_y}, \tag{11}$$

где координаты первого продолжения ζ_1 и ζ_2 определяются по формулам (7) из разд. 7.1. Тогда из (10) обычным образом можно получить условие инвариантности в виде

$$X(L) + L(D_x\xi + D_y\eta) = 0. \tag{12}$$

Нётеровы симметрии определяются формулой (12).

Каждый оператор нётеровой симметрии X порождает закон сохранения:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\xi L + (\zeta - \xi w_x - \eta w_y)\frac{\partial L}{\partial w_x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\eta L + (\zeta - \xi w_x - \eta w_y)\frac{\partial L}{\partial w_y}\Big) = 0. \tag{13}$$

12.2.2. Примеры построения законов сохранения с помощью нётеровых симметрий

Пример 6. Рассмотрим стационарное уравнение теплопроводности с нелинейным источником

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - f(w) = 0. \tag{14}$$

Это уравнение допускает вариационную формулировку о минимуме функционала (6) с лагранжианом

$$L = w_x^2 + w_y^2 + 2F(w), \qquad F(w) = \int f(w)\,dw, \tag{15}$$

в чем можно убедиться путем подстановки выражения (15) в уравнение Эйлера—Лагранжа (8). В (15) считается, что выполнено условие $F(w) \geqslant 0$.

Подставим (15) в условие инвариантности (12) с учетом выражения (11) и формул (7) из раздела 7.1. После соответствующей перегруппировки членов получим полином по степеням производных w_x и w_y:

$$\begin{gathered}-\xi_w w_x^3 - \eta_w w_x^2 w_y - \xi_w w_x w_y^2 - \eta_w w_y^3 + (2\zeta_w - \xi_x + \eta_y) w_x^2 - 2(\eta_x + \xi_y) w_x w_y + \\ + (2\zeta_w - \eta_y + \xi_x) w_y^2 + 2(\zeta_x + F\xi_w) w_x + 2(\zeta_y + F\eta_w) w_y + 2f\zeta + 2F(\xi_x + \eta_y) = 0.\end{gathered} \tag{16}$$

Приравнивая нулю функциональные коэффициенты при w_x^3, $w_x^2 w_y$, w_x, w_y, имеем $\xi_w = 0$, $\eta_w = 0$, $\zeta_x = 0$, $\zeta_y = 0$. Поэтому

$$\xi = \xi(x, y), \qquad \eta = \eta(x, y), \qquad \zeta = \zeta(w). \tag{17}$$

Приравнивая в (16) нулю коэффициенты при других степенях производных, имеем

$$\begin{aligned} w_x^2&:\ \ 2\zeta_w - \xi_x + \eta_y = 0, \\ w_y^2&:\ \ 2\zeta_w - \eta_y + \xi_x = 0, \\ w_x w_y&:\ \ \eta_x + \xi_y = 0, \\ 1&:\ \ f\zeta + F(\xi_x + \eta_y) = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Для произвольной функции $f = f(w)$ из последнего уравнения (18) получим

$$\zeta = 0, \qquad \xi_x + \eta_y = 0. \tag{19}$$

Из первого уравнения (18) и второго уравнения (19) при условии $\zeta = 0$ следует $\xi_x = 0$, $\eta_y = 0$, или $\xi = \xi(y)$, $\eta = \eta(x)$. Подставляя эти зависимости в третье уравнение (18), имеем

$$\xi = C_1 y + C_2, \qquad \eta = -C_1 x + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. Поэтому для произвольной функции $f(w)$ нётеровские симметрии лагранжиана (15) задаются тремя операторами:

$$\begin{aligned} &\mathrm{X}_1 = \partial_x && (C_2 = 1,\ C_1 = C_3 = 0); \\ &\mathrm{X}_2 = \partial_y && (C_3 = 1,\ C_1 = C_2 = 0); \\ &\mathrm{X}_3 = y\partial_x - x\partial_y && (C_1 = 1,\ C_2 = C_3 = 0). \end{aligned} \tag{20}$$

Эти операторы в соответствии с формулой (13) определяют три закона сохранения:

$$\begin{aligned} &D_x\bigl(-w_x^2 + w_y^2 + 2F\bigr) + D_y\bigl(-2w_x w_y\bigr) = 0 && (\xi = 1,\ \eta = \zeta = 0); \\ &D_x\bigl(-2w_x w_y\bigr) + D_y\bigl(w_x^2 - w_y^2 + 2F\bigr) = 0 && (\eta = 1,\ \xi = \zeta = 0); \\ &D_x\bigl(-y w_x^2 + y w_y^2 + 2x w_x w_y + 2yF\bigr) + \\ &\quad + D_y\bigl(-x w_x^2 + x w_y^2 - 2y w_x w_y - 2xF\bigr) = 0 && (\xi = y,\ \eta = -x,\ \zeta = 0), \end{aligned} \tag{21}$$

где функция $F = F(w)$ определена в (15).

Замечание 1. Операторы (20) можно было найти путем исследования симметрий исходного дифференциального уравнения (14), как это было сделано в примере 1 из разд. 7.1.

Замечание 2. В вариационной формулировке уравнения (15) предполагается, что $F(w) \geqslant 0$. Однако полученные законы сохранения (21) справедливы для любой функции $F(w)$. Такая ситуация типична и для других уравнений; для получения законов сохранения обычно достаточно того, что рассматриваемое уравнение может быть представлено в форме уравнения Эйлера — Лагранжа (7) (вариационной формулировки может и не быть).

Пример 7. Уравнению минимальных поверхностей

$$(1 + w_y^2)w_{xx} - 2w_x w_y w_{xy} + (1 + w_x^2)w_{yy} = 0 \qquad (22)$$

соответствует функционал (6) с лагранжианом

$$L = \sqrt{1 + w_x^2 + w_y^2}.$$

Допускаемые точечные операторы

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\partial_x + y\partial_y + w\partial_w, \quad X_4 = y\partial_x - x\partial_y, \quad X_5 = \partial_w$$

находятся из условия инвариантности (12) с помощью процедуры, подробно описанной в разд. 7.1.2 (соответствующие выкладки предлагаем провести читателю в качестве упражнения), и определяют нётеровы симметрии. Используя формулу (13), получим пять законов сохранения для уравнения (22):

$$\begin{aligned}
&X_1\colon\quad D_x\left(L - w_x\frac{\partial L}{\partial w_x}\right) + D_y\left(-w_x\frac{\partial L}{\partial w_y}\right) = 0,\\
&X_2\colon\quad D_x\left(-w_y\frac{\partial L}{\partial w_x}\right) + D_y\left(L - w_y\frac{\partial L}{\partial w_y}\right) = 0,\\
&X_3\colon\quad D_x\left(Lx + (w - xw_x - yw_y)\frac{\partial L}{\partial w_x}\right) + D_y\left(Ly + (w - xw_x - yw_y)\frac{\partial L}{\partial w_y}\right) = 0,\\
&X_4\colon\quad D_x\left(Ly + (yw_x - xw_y)\frac{\partial L}{\partial w_x}\right) + D_x\left(-Ly + (yw_x - xw_y)\frac{\partial L}{\partial w_y}\right) = 0,\\
&X_5\colon\quad D_x\left(\frac{w_x}{\sqrt{1 + w_x^2 + w_y^2}}\right) + D_y\left(\frac{w_y}{\sqrt{1 + w_x^2 + w_y^2}}\right) = 0.
\end{aligned}$$

➠ *Задачи и упражнения к разд. 12.2*

1. Написать дополнительные (кроме указанных в примере 6) законы сохранения для стационарных уравнений теплопроводности со степенно́й и экспоненциальной нелинейностью:

a) $w_{xx} + w_{yy} = aw^k$,

b) $w_{xx} + w_{yy} = ae^w$.

2. Написать законы сохранения для нелинейного волнового уравнения:

$w_{xx} - w_{tt} = f(w)$.

Указание. Представить рассматриваемое уравнение в виде уравнения Эйлера — Лагранжа (7) при $y = t$. Лагранжиан L искать в виде суммы двух слагаемых, одно из которых является квадратичной формой по производным, а второе зависит только от w. [В данном случае нельзя дать вариационную формулировку, но можно с помощью формулы (13) получить законы сохранения, см. также замечание 2.]

3. Написать законы сохранения для нелинейного уравнения:

$w_{xy} = f(w)$.

Рассмотреть случаи:

a) функция $f(w)$ — произвольная,

b) $f(w) = aw^k$,

c) $f(w) = ae^w$.

Указание. Представить рассматриваемое уравнение в виде уравнения Эйлера — Лагранжа (7) при $y = t$. Лагранжиан L искать в виде суммы двух слагаемых, одно из которых квадратично по производным, а второе зависит только от w.

4. Написать законы сохранения для нелинейного уравнения:
$w_{xx} + f(w_y)w_{yy} = 0.$

Указание. Представить рассматриваемое уравнение в виде уравнения Эйлера — Лагранжа (7). Лагранжиан L искать в виде суммы двух слагаемых, одно из которых зависит только от w_x, а второе — только от w_y.

5. Написать дополнительные законы сохранения для нелинейного уравнения из примера 5:
a) при $f(u) = au^k$,
b) при $f(u) = ae^u$.

Литература к разд. 12.2: A. M. Vinogradov (1984), П. Олвер (1989), J. A. Cavalcante, K. Tenenblat (1988), N. H. Ibragimov (1994), А. М. Виноградов, И. С. Красильщик (1997).

Вспомогательные главы

13. Уравнения Пенлеве

Предварительные замечания. Перед чтением этой главы полезно прочитать разд. 10.1.1, 10.1.2. Некоторые сведения о тесте Пенлеве для обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка и систем уравнений можно найти в разд. 10.1.3, 10.1.4.

13.1. Первое уравнение Пенлеве

1°. Первое уравнение Пенлеве имеет вид

$$y''_{zz} = 6y^2 + z. \tag{1}$$

Его решения — однозначные функции от z.

В окрестности подвижного полюса z_p решения уравнения (1) представимы в виде ряда

$$y = \frac{1}{(z - z_\mathrm{p})^2} + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_\mathrm{p})^n,$$

$$a_2 = -\tfrac{1}{10} z_\mathrm{p}, \quad a_3 = -\tfrac{1}{6}, \quad a_4 = C, \quad a_5 = 0, \quad a_6 = \tfrac{1}{300} z_\mathrm{p}^2,$$

где z_p и C — произвольные постоянные; коэффициенты a_n ($n \geqslant 7$) однозначно определяются через z_p и C.

2°. В окрестности любой фиксированной точки $z = z_0$ решение задачи Коши для первого уравнения Пенлеве (1) может быть представлено рядом Тейлора

$$y = A + B(z - z_0) + \tfrac{1}{2}(6A^2 + z_0)(z - z_0)^2 + \\ + \tfrac{1}{6}(12AB + 1)(z - z_0)^3 + \tfrac{1}{2}(6A^3 + B^2 + Az_0)(z - z_0)^4 + \cdots,$$

где A и B — начальные данные задачи Коши: $y|_{z=z_0} = A$, $y'_z|_{z=z_0} = B$.

Замечание. Аналогичным образом можно представить решения задачи Коши для второго и четвертого уравнений Пенлеве (для остальных уравнений Пенлеве надо исключить из рассмотрения неподвижные особые точки).

3°. Для больших значений $|z|$ справедлива асимптотическая формула:

$$y \sim z^{1/2} \wp\bigl(\tfrac{4}{5} z^{5/4} - a;\ 12,\ b\bigr),$$

где $\wp(\zeta; 12, b)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса, которая задается неявно с помощью интеграла

$$\zeta = \int \frac{d\wp}{\sqrt{4\wp^3 - 12\wp - b}};$$

a, b — некоторые константы.

Первое уравнение Пенлеве (1) инвариантно относительно растяжения переменных $z=\lambda\bar{z}$, $y=\lambda^3\bar{y}$, где $\lambda^5=1$.

13.2. Второе уравнение Пенлеве

1°. Второе уравнение Пенлеве имеет вид

$$y''_{zz}=2y^3+zy+\alpha. \tag{2}$$

Его решения — однозначные функции от z.

В окрестности подвижного полюса z_p решения уравнения (2) допускают следующие разложения:

$$y=\frac{m}{z-z_\text{p}}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n(z-z_\text{p})^n,$$

$$b_1=-\tfrac{1}{6}mz_\text{p},\;\; b_2=-\tfrac{1}{4}(m+\alpha),\;\; b_3=C,\;\; b_4=\tfrac{1}{72}z_\text{p}(m+3\alpha),$$
$$b_5=\tfrac{1}{3024}\bigl[(27+81\alpha^2-2z_\text{p}^3)m+108\alpha-216Cz_\text{p}\bigr],$$

где $m=\pm1$; z_p и C — произвольные постоянные; коэффициенты b_n $(n\geqslant 6)$ однозначно определяются через z_p и C.

2°. Обозначим решение второго уравнения Пенлеве при фиксированном параметре α символом $y(z,\alpha)$. Справедливо соотношение:

$$y(z,-\alpha)=-y(z,\alpha), \tag{3}$$

а решения $y(z,\alpha)$ и $y(z,\alpha-1)$ связаны между собой преобразованиями Беклунда:

$$\begin{aligned} y(z,\alpha-1)&=-y(z,\alpha)+\frac{2\alpha-1}{2y'_z(z,\alpha)-2y^2(z,\alpha)-z},\\ y(z,\alpha)&=-y(z,\alpha-1)-\frac{2\alpha-1}{2y'_z(z,\alpha-1)+2y^2(z,\alpha-1)+z}. \end{aligned} \tag{4}$$

Поэтому для изучения общего решения уравнения (2) при произвольных значениях α достаточно построить его для всех α из полосы $0\leqslant \operatorname{Re}\alpha<\frac{1}{2}$.

Три решения, отвечающие значениям α и $\alpha\pm1$, связаны рациональным соотношением:

$$y_{\alpha+1}=-\frac{(y_{\alpha-1}+y_\alpha)(4y_\alpha^3+2zy_\alpha+2\alpha+1)+(2\alpha-1)y_\alpha}{2(y_{\alpha-1}+y_\alpha)(2y_\alpha^2+z)+2\alpha-1},$$

где использовано обозначение $y_\alpha\equiv y(z,\alpha)$.

Решения $y(z,\alpha)$ и $y(z,-\alpha-1)$ связаны между собой преобразованиями Беклунда:

$$\begin{aligned} y(z,-\alpha-1)&=y(z,\alpha)+\frac{2\alpha+1}{2y'_z(z,\alpha)+2y^2(z,\alpha)+z},\\ y(z,\alpha)&=y(z,-\alpha-1)-\frac{2\alpha+1}{2y'_z(z,-\alpha-1)+2y^2(z,-\alpha-1)+z}. \end{aligned}$$

3°. При $\alpha=0$ уравнение (2) имеет тривиальное решение $y=0$. Отсюда с учетом формул (3), (4) следует, что второе уравнение Пенлеве при $\alpha=\pm1,\,\pm2,\,\ldots$ имеет рациональные частные решения:

$$y(z,\pm1)=\mp\frac{1}{z},\quad y(z,\pm2)=\pm\biggl(\frac{1}{z}-\frac{3z^2}{z^3+4}\biggr),\quad \ldots$$

При $\alpha = \frac{1}{2}$ уравнение (2) имеет однопараметрическое семейство решений

$$y(z, \tfrac{1}{2}) = -\frac{w'_z}{w}, \quad \text{где} \quad w = \sqrt{z}\,\Big[C_1 J_{1/3}\big(\tfrac{\sqrt{2}}{3} z^{3/2}\big) + C_2 Y_{1/3}\big(\tfrac{\sqrt{2}}{3} z^{3/2}\big)\Big]. \qquad (5)$$

(Здесь функция w является решением линейного уравнения второго порядка $w''_{zz} + \frac{1}{2} zw = 0$.) Из формул (3)–(5) следует, что второе уравнение Пенлеве для всех $\alpha = n + \frac{1}{2}$, где $n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$, имеет однопараметрическое семейство решений, которые выражаются через функции Бесселя.

13.3. Третье уравнение Пенлеве

1°. Третье уравнение Пенлеве имеет вид

$$y''_{zz} = \frac{(y'_z)^2}{y} - \frac{y'_z}{y} + \frac{1}{z}(\alpha y^2 + \beta) + \gamma y^3 + \frac{\delta}{y}. \qquad (6)$$

Если перейти к новой независимой переменной по формуле $z = e^\zeta$, то решения преобразованного уравнения будут однозначными функциями от ζ.

Любое решение уравнения Риккати

$$y'_z = ky^2 + \frac{\alpha - k}{kz} y + c, \qquad (7)$$

где $k^2 = \gamma$, $c^2 = -\delta$, $k\beta + c(\alpha - 2k) = 0$, будет также решением уравнения (6). Положив в (7) $z = \lambda\tau$, $y = -\frac{u'_z}{ku}$, где $\lambda^2 = \frac{1}{kc}$, получим линейное уравнение:

$$u''_{\tau\tau} + \frac{k - \alpha}{k\tau} u'_\tau + u = 0,$$

общее решение которого выражается через функции Бесселя:

$$u = \tau^{\frac{\alpha}{2k}} \Big[C_1 J_{\frac{\alpha}{2k}}(\tau) + C_2 Y_{\frac{\alpha}{2k}}(\tau)\Big].$$

2°. В ряде частных случаев уравнение (6) может быть проинтегрировано в квадратурах. Перепишем уравнение (6) в виде интегродифференциальных уравнений двумя различными способами:

$$\begin{aligned}\Big(\frac{y'_\zeta}{y}\Big)^2 + \Big(\frac{\delta}{y^2} - \gamma y^2\Big)e^{2\zeta} + 2\Big(\frac{\beta}{y} - \alpha y\Big)e^\zeta &= \\ = 2\int \Big[\Big(\frac{\delta}{y^2} - \gamma y^2\Big)e^{2\zeta} + \Big(\frac{\beta}{y} - \alpha y\Big)e^\zeta\Big]\, d\zeta; &\qquad (8)\end{aligned}$$

$$\frac{y'_\zeta}{y} = \int \Big[\Big(\frac{\delta}{y^2} + \gamma y^2\Big)e^{2\zeta} + \Big(\frac{\beta}{y} + \alpha y\Big)e^\zeta\Big]\, d\zeta, \qquad z = e^\zeta. \qquad (9)$$

Для уравнения (8) при $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ имеем общее решение $y = C_1 z^{C_2}$. Складывая (8) и удвоенное равенство (9), получим

$$\Big(\frac{y'_\zeta}{y}\Big)^2 + 2\frac{y'_\zeta}{y} + \Big(\frac{\delta}{y^2} - \gamma y^2\Big)e^{2\zeta} + 2\Big(\frac{\beta}{y} - \alpha y\Big)e^\zeta = 4\int \frac{\delta e^{2\zeta} + \beta e^\zeta y}{y^2}\, d\zeta. \qquad (10)$$

Вычитая из (8) удвоенное равенство (9), имеем

$$\Big(\frac{y'_\zeta}{y}\Big)^2 - 2\frac{y'_\zeta}{y} + \Big(\frac{\delta}{y^2} - \gamma y^2\Big)e^{2\zeta} + 2\Big(\frac{\beta}{y} - \alpha y\Big)e^\zeta = -4\int (\gamma e^{2\zeta} y^2 + \alpha e^\zeta y)\, d\zeta. \qquad (11)$$

Положив $\delta = \beta = 0$ в уравнении (10) и $\gamma = \alpha = 0$ в уравнении (11), после интегрирования получим:

$$\left(\frac{y'_\zeta}{y}\right)^2 + 2\frac{y'_\zeta}{y} - 2\alpha y e^\zeta - \gamma y^2 e^{2\zeta} = C_1, \tag{12}$$

$$\left(\frac{y'_\zeta}{y}\right)^2 - 2\frac{y'_\zeta}{y} + \frac{\delta}{y^2}e^{2\zeta} + \frac{2\beta}{y}e^\zeta = C_2. \tag{13}$$

Уравнения (12) и (13) интегрируются в элементарных функциях. Замена $y = e^{-\zeta}/v$ приводит (12) к автономному виду

$$(v'_\zeta)^2 = 2\alpha v + \gamma + (1 + C_1)v^2. \tag{14}$$

В итоге находим решение

$$y = \begin{cases} \dfrac{2\alpha}{z(\alpha^2 \ln^2 z + 2\alpha C \ln z + C^2 - \gamma)} & \text{при } C_1 = -1,\ \beta = \delta = 0; \\ \dfrac{1}{z\bigl(\sqrt{\gamma}\ln z + C\bigr)} & \text{при } C_1 = -1,\ \alpha = \beta = \delta = 0; \\ \dfrac{z^{m-1}}{C_2 z^{2m} + K_1 z^m + K_2} & \text{при } C_1 \neq -1,\ \beta = \delta = 0, \end{cases}$$

где $C_2 \neq 0$, $K_1 = -\dfrac{\alpha}{C_1 + 1}$, $K_2 = \dfrac{\alpha^2 - \gamma(1 + C_1)}{4C_2(1 + C_1)^2}$, $m^2 = 1 + C_1$.

Уравнение (13) преобразуется к уравнению (14) с помощью замены $y = ve^\zeta$.

При $\beta = -\alpha$, $\delta = -\gamma$ подстановка $y = e^{-iw}$ приводит уравнение (6) к следующему виду: $w''_{zz} + \dfrac{1}{z}w'_z = \dfrac{2\alpha}{z}\sin w + 2\gamma \sin 2w$.

13.4. Четвертое уравнение Пенлеве

1°. Четвертое уравнение Пенлеве имеет вид

$$y''_{zz} = \frac{(y'_z)^2}{2y} + \frac{3}{2}y^3 + 4zy^2 + 2(z^2 - \alpha)y + \frac{\beta}{y}. \tag{15}$$

Его решения — однозначные функции от z.

В окрестности подвижного полюса z_p решения уравнения (15) допускают следующие разложения:

$$y = \frac{m}{z - z_\text{p}} - z_\text{p} - \frac{m}{3}(z_\text{p}^2 + 2\alpha - 4m)(z - z_\text{p}) + C(z - z_\text{p})^2 + \sum_{j=3}^{\infty} a_j (z - z_\text{p})^j,$$

где $m = \pm 1$; z_p и C — произвольные постоянные; коэффициенты a_j ($j \geqslant 3$) однозначно определяются через α, β, z_p, C.

2°. Если выполняется условие $\beta + 2(1 + \alpha m)^2 = 0$, где $m = \pm 1$, то все решения уравнения Риккати

$$y'_z = my^2 + 2mzy - 2(1 + \alpha m)$$

одновременно являются решениями четвертого уравнения Пенлеве (15).

Уравнение (15) инвариантно относительно преобразования $y = \lambda \bar{y}$, $z = \lambda \bar{z}$, $\alpha = \bar{\alpha}\lambda^2$, $\beta = \bar{\beta}$, где $\lambda^4 = 1$.

3°. Решения уравнения (15) при различных значениях α и β связаны между собой преобразованиями Беклунда:

$$\tilde{y} = \frac{1}{2sy}(y'_z - q - 2szy - sy^2), \qquad q^2 = -2\beta,$$
$$y = -\frac{1}{2s\tilde{y}}(\tilde{y}'_z - p + 2sz\tilde{y} + s\tilde{y}^2), \qquad p^2 = -2\tilde{\beta},$$
$$2\beta = -\bigl(\tilde{\alpha}s - 1 - \tfrac{1}{2}p\bigr)^2, \qquad 4\alpha = -2s - 2\tilde{\alpha} - 3sp,$$

где $y = y(z, \alpha, \beta)$, $\tilde{y} = \tilde{y}(z, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$, s — произвольный параметр.

13.5. Пятое уравнение Пенлеве

1°. Пятое уравнение Пенлеве имеет вид

$$y''_{zz} = \frac{3y-1}{2y(y-1)}(y'_z)^2 - \frac{y'_z}{z} + \frac{(y-1)^2}{z^2}\left(\alpha y + \frac{\beta}{y}\right) + \gamma\frac{y}{z} + \frac{\delta y(y+1)}{y-1}. \qquad (16)$$

Если перейти к новой независимой переменной по формуле $z = e^\zeta$, то решения преобразованного уравнения будут однозначными функциями от ζ.

Решения пятого уравнения Пенлеве при различных значениях определяющих параметров связаны соотношениями:

$$y(z, \alpha, \beta, \gamma, \delta) = y(-z, \alpha, \beta, -\gamma, \delta),$$
$$y(z, \alpha, \beta, \gamma, \delta) = \frac{1}{y(z, -\beta, -\alpha, -\gamma, \delta)}.$$

2°. Положив $z = e^t$ в (16), получим

$$y''_{tt} = \frac{3y-1}{2y(y-1)}(y'_t)^2 + (y-1)^2\left(\alpha y + \frac{\beta}{y}\right) + \gamma y e^t + \frac{\delta y(y+1)}{y-1}e^{2t}. \qquad (17)$$

При $\gamma = \delta = 0$ уравнение (17) после однократного интегрирования приводится к автономному уравнению первого порядка:

$$y'_t = (y-1)\sqrt{2\alpha y^2 + Cy - 2\beta},$$

которое легко интегрируется в квадратурах.

Если выполнено условие

$$\gamma = \sqrt{-2\delta}\,\bigl(1 + \sqrt{-2\beta} - \sqrt{2\alpha}\,\bigr),$$

то любое решение уравнения Риккати

$$zy'_z = \sqrt{2\alpha}\,y^2 + \bigl(\sqrt{-2\delta}\,z - \sqrt{2\alpha} - \sqrt{-2\beta}\,\bigr)y + \sqrt{-2\beta} \qquad (18)$$

будет также решением пятого уравнения Пенлеве (16). Уравнение (18) может быть приведено к вырожденному гипергеометрическому уравнению.

13.6. Шестое уравнение Пенлеве

1°. Шестое уравнение Пенлеве имеет вид

$$y''_{zz} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-z}\right)(y'_z)^2 - \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{y-z}\right)y'_z +$$
$$+ \frac{y(y-1)(y-z)}{z^2(z-1)^2}\left[\alpha + \beta\frac{z}{y^2} + \gamma\frac{z-1}{(y-1)^2} + \delta\frac{z(z-1)}{(y-z)^2}\right]. \qquad (19)$$

Здесь точки $z=0$, $z=1$ и $z=\infty$ являются неподвижными логарифмическими точками ветвления.

П. Пенлеве нашел два случая интегрируемости этого уравнения. При $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$ общее решение уравнения (19) имеет вид

$$y = E(C_1\omega_1 + C_2\omega_2,\ z),$$

где $E(u,z)$ — эллиптическая функция, определяемая неявно с помощью интеграла

$$u = \int_0^E \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(y-z)}}, \tag{20}$$

с периодами $2\omega_1$, $2\omega_2$, которые являются функциями от z. При $\alpha=\beta=\gamma=0$, $\delta=\frac{1}{2}$ общее решение уравнения (19) имеет вид

$$y = E(w + C_1\omega_1 + C_2\omega_2,\ z),$$

где w — любое нетривиальное частное решение линейного уравнения

$$w''_{zz} - \frac{2z-1}{z(z-1)}w'_z + \frac{1}{4z(z-1)}w = 0,$$

$E(u,z)$ — эллиптическая функция, определяемая формулой (20).

2°. Между решениями уравнения (19) с различными параметрами существуют три соотношения:

$$y(z,\ -\beta,\ -\alpha,\ \gamma,\ \delta) = \frac{1}{y\Bigl(\dfrac{1}{z},\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\Bigr)},$$

$$y(z,\ -\beta,\ -\gamma,\ \alpha,\ \delta) = 1 - \frac{1}{y\Bigl(\dfrac{1}{1-z},\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\Bigr)},$$

$$y\Bigl(z,\ -\beta,\ -\alpha,\ -\delta+\frac{1}{2},\ -\gamma+\frac{1}{2}\Bigr) = \frac{z}{y(z,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta)}.$$

Последовательное применение этих соотношений дает 24 уравнения вида (19) с различными значениями параметров, связанные известными преобразованиями.

3°. Все решения уравнения Риккати

$$y'_z = \frac{\sqrt{2\alpha}}{z(z-1)}y^2 + \frac{\lambda z+\mu}{z(z-1)}y + \frac{\sqrt{-2\beta}}{z-1},$$

где

$$\lambda = \frac{\sqrt{2\alpha}-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}{\sqrt{2\alpha}-\sqrt{-2\beta}-1}, \qquad \mu = \frac{\sqrt{-2\beta}-(\alpha+\beta-\gamma-\delta)}{\sqrt{2\alpha}-\sqrt{-2\beta}-1},$$

являются также решениями уравнения (19), если $\sqrt{2\alpha}-\sqrt{-2\beta}\neq 1$ и выполняется условие

$$2\sqrt{2\alpha}\,(3\beta-\alpha+\gamma-\delta)+2\sqrt{-2\beta}\,(3\alpha-\beta-\gamma+\delta)+4\sqrt{-\alpha\beta}\,(\beta-\alpha+\gamma-\delta-1)+ \\ +(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2+2(\alpha-\beta-\gamma-4\alpha\beta-2\alpha\gamma-2\beta\delta)=0,$$

где для $\sqrt{-\alpha\beta}$ берется значение, которое совпадает с $\sqrt{\alpha}\sqrt{-\beta}$.

Литература к главе 13: Э. Л. Айнс (1939), В. В. Голубев (1950), G. M. Murphy (1960), В. И. Громак, Н. А. Лукашевич (1990), Математическая физика (1998, с. 427), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (2001*a*).

14. Квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка

14.1. Характеристическая система. Общее решение

14.1.1. Уравнения с двумя независимыми переменными

Общее квазилинейное уравнение с частными производными первого порядка с двумя независимыми переменными имеет вид

$$f(x,y,w)\frac{\partial w}{\partial x}+g(x,y,w)\frac{\partial w}{\partial y}=h(x,y,w) \tag{1}$$

и часто встречается в различных приложениях (в механике сплошных сред, газовой динамике, гидродинамике, теории волн, акустике, теории фильтрации, теории массо- и теплопереноса, химической технологии и других областях).

Если известны два независимых интеграла

$$u_1(x,y,w)=C_1,\qquad u_2(x,y,w)=C_2 \tag{2}$$

характеристической системы

$$\frac{dx}{f(x,y,w)}=\frac{dy}{g(x,y,w)}=\frac{dw}{h(x,y,w)}, \tag{3}$$

то общее решение уравнения (1) дается формулой

$$\Phi(u_1,u_2)=0, \tag{4}$$

где Φ — произвольная функция двух аргументов. Разрешив (4) относительно u_1 или u_2, решение часто записывают в виде

$$u_k=\overline{\Phi}(u_{3-k}),$$

где $\overline{\Phi}$ — произвольная функция одного аргумента; $k=1,\ 2$.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial x}+aw\frac{\partial w}{\partial y}=1. \tag{5}$$

Два независимых интеграла характеристической системы

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{aw}=\frac{dw}{1}$$

имеют вид

$$x-w=C_1,\quad 2y-aw^2=C_2.$$

Поэтому общее решение исходного уравнения (5) дается формулой

$$\Phi(x-w,\ 2y-aw^2)=0.$$

14.1.2. Использование двухпараметрических частных решений

Пусть двухпараметрическое частное решение уравнения (1) дается формулой

$$\Xi(x, y, w, C_1, C_2) = 0, \tag{6}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Тогда решение уравнения (1), имеющее функциональный произвол, можно представить в параметрическом виде с помощью равенства (6) и двух уравнений:

$$\begin{aligned}
&C_2 = F(C_1),\\
&\frac{\partial \Xi}{\partial C_1} + \frac{\partial \Xi}{\partial C_2}\frac{dF(C_1)}{dC_1} = 0,
\end{aligned}$$

где $F = F(C)$ — произвольная функция.

14.1.3. Уравнения с произвольным числом независимых переменных

Общее квазилинейное уравнение с частными производными первого порядка с n независимыми переменными имеет вид

$$f_1(x_1, \dots, x_n, w)\frac{\partial w}{\partial x_1} + \dots + f_n(x_1, \dots, x_n, w)\frac{\partial w}{\partial x_n} = g(x_1, \dots, x_n, w). \tag{7}$$

Пусть известны n независимых интегралов

$$u_1(x_1, \dots, x_n, w) = C_1, \quad \dots, \quad u_n(x_1, \dots, x_n, w) = C_n \tag{8}$$

характеристической системы

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1, \dots, x_n, w)} = \dots = \frac{dx_n}{f_n(x_1, \dots, x_n, w)} = \frac{dw}{g(x_1, \dots, x_n, w)}.$$

Тогда общее решение уравнения (7) дается формулой

$$\Phi(u_1, \dots, u_n) = 0,$$

где Φ — произвольная функция n аргументов, $u_m = u_m(x_1, \dots, x_n, w)$ — интегралы (8), $m = 1, \dots, n$.

Литература к разд. 14.1: Р. Курант (1964), Э. Камке (1966), И. Г. Петровский (1970), E. Zauderer (1983), D. Zwillinger (1989).

14.2. Задача Коши. Теорема существования и единственности

14.2.1. Две формулировки задачи Коши

1°. *Обобщенная задача Коши.* Требуется найти решение $w = w(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$x = h_1(\xi), \quad y = h_2(\xi), \quad w = h_3(\xi), \tag{9}$$

где ξ — параметр ($\alpha \leqslant \xi \leqslant \beta$), а $h_k(\xi)$ — заданные функции.

Геометрическая интерпретация: требуется найти интегральную поверхность уравнения (1), проходящую через линию (9), заданную параметрически.

2°. *Классическая задача Коши.* Требуется найти решение $w = w(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию

$$w = \varphi(y) \quad \text{при} \quad x = 0, \tag{10}$$

где $\varphi(y)$ — заданная функция.

Классическую задачу Коши удобно представить в виде обобщенной задачи Коши, записав начальное условие (10) в параметрическом виде:

$$x = 0, \quad y = \xi, \quad w = \varphi(\xi). \tag{11}$$

14.2.2. Процедура решения задачи Коши

Процедура решения задачи Коши (1), (9) состоит из нескольких этапов. Сначала определяются два независимых интеграла (2) характеристической системы (3). Затем для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 в интегралы (2) подставляются начальные данные (9):

$$u_1(h_1(\xi), h_2(\xi), h_3(\xi)) = C_1, \qquad u_2(h_1(\xi), h_2(\xi), h_3(\xi)) = C_2. \tag{12}$$

Исключая из (2) и (12) постоянные C_1 и C_2, имеем

$$\begin{aligned} u_1(x, y, w) &= u_1(h_1(\xi), h_2(\xi), h_3(\xi)),\\ u_2(x, y, w) &= u_2(h_1(\xi), h_2(\xi), h_3(\xi)). \end{aligned} \tag{13}$$

Формулы (13) представляют собой параметрическую форму решения задачи Коши (1), (9). В некоторых случаях, исключая из (13) параметр ξ, удается получить решение в явном виде.

14.2.3. Теорема существования и единственности

Пусть $\mathfrak{G}_0$ — область плоскости (x, y), а $\mathfrak{G}$ — цилиндрическая область пространства (x, y, w), полученная из $\mathfrak{G}_0$ добавлением координаты w, причем $|w| < A_1$. Пусть коэффициенты уравнения (1) f, g, h — непрерывно дифференцируемые функции от x, y, w в $\mathfrak{G}$, а $x = h_1(\xi)$, $y = h_2(\xi)$, $w = h_3(\xi)$ — непрерывно дифференцируемые функции от ξ для $|\xi| < A_2$, определяющие кривую C в $\mathfrak{G}$ с простой проекцией C_0 в $\mathfrak{G}_0$, и такие, что $(h_1')^2 + (h_2')^2 \neq 0$ (штрих обозначает производную по ξ). Считаем, что $fh_2' - gh_1' \neq 0$ на C. Тогда существует подобласть $\overline{\mathfrak{G}}_0$ области $\mathfrak{G}_0$, содержащая C_0, в которой определена непрерывно дифференцируемая функция $w = w(x, y)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению (1) в $\mathfrak{G}_0$ и начальному условию (9) на C_0. Эта функция определяется единственным образом.

Важно отметить, что эта теорема носит локальный характер: существование решения гарантируется только в некоторой, достаточно «узкой», заранее не фиксированной, окрестности линии C (см. замечание в конце примера 2).

Пример 2. Рассмотрим задачу Коши для уравнения Хопфа

$$\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \tag{14}$$

с начальным условием

$$w = \varphi(y) \quad \text{при} \quad x = 0. \tag{15}$$

Сначала представим начальное условие (15) в параметрическом виде (9):

$$x = 0, \quad y = \xi, \quad w = \varphi(\xi). \tag{16}$$

Решая характеристическую систему

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{w} = \frac{dw}{0}, \tag{17}$$

находим два независимых интеграла:

$$w = C_1, \quad y - wx = C_2. \tag{18}$$

Используя начальные условия (16), определяем значения постоянных интегрирования: $C_1 = \varphi(\xi)$, $C_2 = \xi$. Подставляя эти выражения в (18), получим решение задачи Коши (14), (15) в параметрическом виде:

$$w = \varphi(\xi), \tag{19}$$

$$y = \xi + \varphi(\xi)x. \tag{20}$$

Характеристики (20) представляют собой прямые линии в плоскости (x, y) с углом наклона $\varphi(\xi)$, пересекающие ось y в точках ξ. На каждой характеристике функция w имеет одинаковое значение, равное $\varphi(\xi)$ (на разных характеристиках значения w в общем случае разные).

При $\varphi'(\xi) > 0$ различные характеристики не пересекаются, и формулы (19), (20) описывают однозначное решение. В качестве примера рассмотрим начальный профиль

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} w_1 & \text{при } \ \xi \leqslant 0, \\ \dfrac{w_2\xi^2 + \varepsilon w_1}{\xi^2 + \varepsilon} & \text{при } \ \xi > 0, \end{cases} \tag{21}$$

где $w_1 < w_2$ и $\varepsilon > 0$. Из формул (19), (20) получим однозначное гладкое решение во всей полуплоскости $x > 0$. В области, которую заполняют характеристики $y = \xi + w_1 x$ (при $\xi \leqslant 0$), решение постоянно:

$$w = w_1 \quad \text{при} \quad y/x \leqslant w_1. \tag{22}$$

При $\xi > 0$ решение можно определить по формулам (19)–(21).

Посмотрим, во что перейдет указанное решение в предельном случае $\varepsilon \to 0$, который соответствует кусочно-непрерывному начальному профилю

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} w_1 & \text{при } \ \xi \leqslant 0, \\ w_2 & \text{при } \ \xi > 0, \end{cases} \quad \text{где} \quad w_1 < w_2. \tag{23}$$

Далее считаем, что $\xi > 0$ [при $\xi \leqslant 0$ справедлива формула (22)]. При $\xi = \text{const} \neq 0$ и $\varepsilon \to 0$ из (21) имеем $\varphi(\xi) = w_2$. Поэтому в области, которую заполняют характеристики $y = \xi + w_2 x$ (при $\xi > 0$), решение постоянно:

$$w = w_2 \quad \text{при} \quad y/x \geqslant w_2 \qquad (\text{при } \varepsilon \to 0). \tag{24}$$

При $\xi \to 0$ функция φ может принимать любое значение между w_1 и w_2 в зависимости от соотношений между двумя малыми параметрами ε и ξ, при этом первым слагаемым в правой части формулы (20) можно пренебречь. В результате из (19), (20) находим соответствующую асимптотику решения в явном виде:

$$w = y/x \quad \text{при} \quad w_1 \leqslant y/x \leqslant w_2 \qquad (\text{при } \varepsilon \to 0). \tag{25}$$

Объединяя формулы (22), (24) и (25), получим решение задачи Коши для уравнения (14) с начальным условием (23):

$$w(x, y) = \begin{cases} w_1 & \text{при } \ y \leqslant w_1 x, \\ y/x & \text{при } \ w_1 x \leqslant y \leqslant w_2 x, \\ w_2 & \text{при } \ y \geqslant w_2 x. \end{cases} \tag{26}$$

Характеристики уравнения (14) при условии (23) и зависимость функции w от y показаны на рис. 9 (где $w_1 = \frac{1}{2}$, $w_2 = 2$, $x_0 = 1$). В приложениях такое решение называют центрированной волной разрежения (см. также разд. 14.3).

Замечание. При наличии участка с $\varphi'(\xi) < 0$ характеристики будут пересекаться в некоторой области. В точке пересечения двух характеристик, задаваемых различными значениями параметра ξ_1 и ξ_2, функция w согласно первой формуле (21) будет иметь два разных значения, которые равны $\varphi(\xi_1)$ и $\varphi(\xi_2)$. Поэтому в области пересечения характеристик решение будет многозначным. Этот пример демонстрирует локальность теоремы существования и единственности. Более подробно эти вопросы рассмотрены в разд. 14.3, 14.4.

Литература к разд. 14.2: Р. Курант (1964), Э. Камке (1966), И. Г. Петровский (1970), Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко (1978), S. J. Farlow (1982).

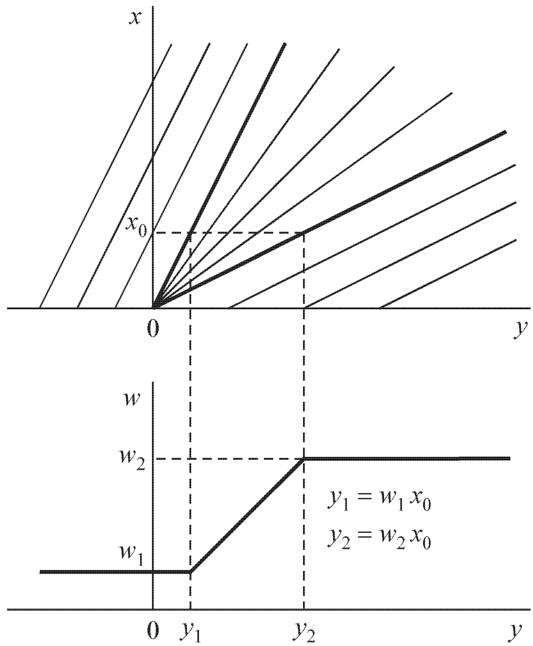

Рис. 9. Характеристики задачи Коши (14), (15) с начальным профилем (23) и зависимость искомой величины w от координаты y при $w_1 = \frac{1}{2}$, $w_2 = 2$, $x_0 = 1$.

14.3. Качественные особенности и разрывные решения квазилинейных уравнений

14.3.1. Модельное уравнение газовой динамики

Рассмотрим квазилинейное уравнение специального вида*

$$\frac{\partial w}{\partial x} + f(w)\frac{\partial w}{\partial y} = 0, \tag{27}$$

которое представляет собой закон сохранения количества вещества (или какой-либо другой величины) и часто встречается в механике сплошных сред, газовой динамике, гидродинамике, теории волн, акустике, теории фильтрации и химической технологии. Это уравнение используется для моделирования многих процессов диффузионного типа, таких, как адсорбция и хроматография, двухфазные течения в пористой среде, паводковые волны в реках, движение потоков транспорта на улицах, течения жидких пленок по наклонной плоскости и др. Независимые переменные x и y в уравнении (27) обычно играют роль времени и пространственной координаты, w играет роль плотности переносимой величины, а $f(w)$ — скорости переноса.

14.3.2. Решение задачи Коши

Решение $w = w(x, y)$ задачи Коши для уравнения (27) с начальным условием

$$w = \varphi(y) \quad \text{при} \quad x = 0 \qquad (-\infty < y < \infty) \tag{28}$$

* Уравнения общего вида рассматриваются далее в разд. 14.4.

можно представить в параметрическом виде

$$y = \xi + \mathcal{F}(\xi)x, \quad w = \varphi(\xi), \tag{29}$$

где $\mathcal{F}(\xi) = f\bigl(\varphi(\xi)\bigr)$.

Рассмотрим характеристические прямые $y = \xi + \mathcal{F}(\xi)x$ в плоскости (y, x) при различных значениях параметра ξ. Наклон каждой из этих прямых определяется значением коэффициента $\mathcal{F}(\xi)$. На каждой такой прямой искомая величина постоянна и равна $w = \varphi(\xi)$. В частном случае $f = a = \mathrm{const}$ рассматриваемое уравнение является линейным, при этом решение (29) записывается в явном виде $w = \varphi(y - ax)$ и описывает бегущую волну с неизменным профилем. Зависимость $f = f(w)$ приводит к типичному нелинейному эффекту — искажению профиля распространяющейся волны.

Далее рассматриваем область $x \geqslant 0$ и считаем*, что $f > 0$ при $w > 0$ и $f'_w > 0$. В этом случае большие значения w распространяются быстрее, чем малые. Если начальный профиль при всех y удовлетворяет условию $\varphi'(y) > 0$, то характеристики на плоскости (y, x), выходящие из точек оси y в область $x > 0$, являются расходящимися прямыми; решение существует и однозначно при всех $x > 0$. В физике такие решения называют волнами разрежения.

Пример 3. На рис. 10 и 11 для иллюстрации показаны характеристики и эволюция волны разрежения для уравнения Хопфа [при $f(w) = w$ в (27)] с начальным профилем

$$\varphi(y) = \frac{4}{\pi}\,\mathrm{arctg}(y - 2) + 2.$$

Видно, что решение является гладким при всех $x > 0$.

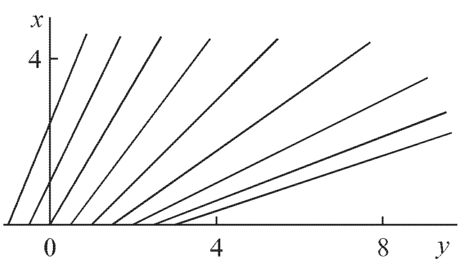

Рис. 10

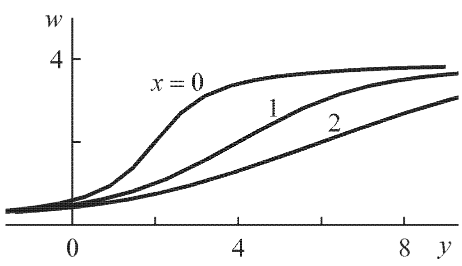

Рис. 11

Посмотрим теперь, что произойдет, если $\varphi'(y) < 0$ на некотором интервале оси y. Пусть y_1 и y_2 — точки на этом интервале. При $y_1 < y_2$ имеем $f(y_1) > f(y_2)$. Из первого соотношения (29) следует, что характеристики, выходящие из точек y_1 и y_2, пересекутся в «момент времени», равный

$$x_* = \frac{y_2 - y_1}{f(w_1) - f(w_2)}, \quad \text{где } w_1 = \varphi(y_1),\ w_2 = \varphi(y_2).$$

Так как w имеет различные значения на этих характеристиках, то решение не может быть непрерывно продолжено для $x > x_*$. Если $\varphi'(y) < 0$ на ограниченном интервале, то найдется такое значение $x_{\min} = \min\limits_{y_1, y_2} x_*$, что в

* Рассмотрение области $x \leqslant 0$ заменой $x = -\widetilde{x}$ сводится к рассмотрению области $x \geqslant 0$. Случай $f < 0$ заменой $y = -\widetilde{y}$ сводится к случаю $f > 0$.

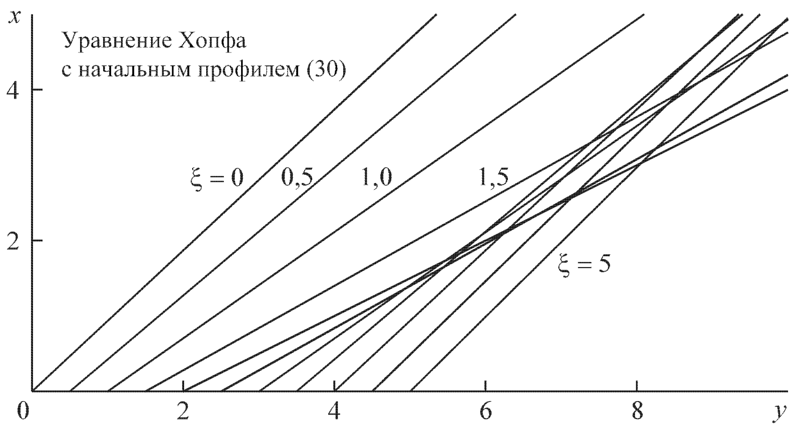

Рис. 12

области $x > x_{\min}$ характеристики будут пересекаться, см. рис. 12. Поэтому часть волны, где ее профиль является убывающей функцией от y, со временем будет «опрокидываться». Время начала опрокидывания $x_{\min}$ определяется по формуле

$$x_{\min} = -\frac{1}{\mathcal{F}'(\xi_0)},$$

где значение ξ_0 находится из условия $|\mathcal{F}'(\xi_0)| = \max|\mathcal{F}'(\xi)|$ при $\mathcal{F}'(\xi) < 0$. Формальное продолжение решения в область $x > x_{\min}$ делает это решение неоднозначным. Граница области однозначности решения в плоскости (y, x) является огибающей характеристик и может быть записана в параметрическом виде

$$y = \xi + \mathcal{F}(\xi)x, \quad 0 = 1 + \mathcal{F}'(\xi)x.$$

Пример 4. На рис. 13 в качестве иллюстрации изображена эволюция уединенной волны с начальным профилем

$$\varphi(y) = \operatorname{ch}^{-2}(y-2) + 1, \tag{30}$$

которая описывается уравнением (27) с $f(w) = w$. Видно, что при $x > x_{\min}$, где $x_{\min} = \frac{3}{4}\sqrt{3} \approx 1.3$, происходит опрокидывание волны.

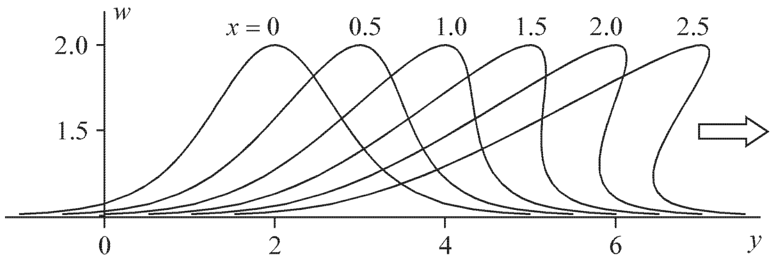

Рис. 13

14.3.3. Ударные волны. Условия на разрыве

В большинстве приложений, в которых встречается рассматриваемое уравнение, искомая функция $w(x, y)$ является плотностью некоторой среды и по

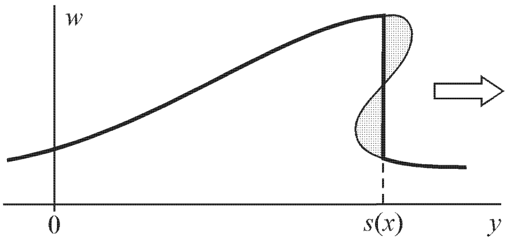

Рис. 14

своей сущности должна быть однозначна. В этих случаях вместо непрерывного гладкого решения приходится рассматривать обобщенное (негладкое) решение, описывающее ударную волну, которая имеет вид «ступеньки». При этом многозначная часть волнового профиля заменяется некоторым подходящим разрывом, как показано на рис. 14. Следует подчеркнуть, что разрыв может образоваться при сколь угодно гладких функциях $f(w)$ и $\varphi(y)$, входящих в уравнение (27) и начальное условие (28).

Далее будем считать, что функция $w(x,y)$ терпит разрыв на линии $y=s(x)$ в плоскости (y,x). По обе стороны от разрыва функция $w(x,y)$ является гладкой и однозначной; как и ранее, она описывается уравнениями (29). Скорость распространения разрыва V выражается через производную: $V=s'$. При этом должно выполняться соотношение

$$V=\frac{F(w_2)-F(w_1)}{w_2-w_1},\qquad F(w)=\int f(w)\,dw, \tag{31}$$

где индекс 1 соответствует значениям величин перед разрывом, а индекс 2 — после разрыва. В приложениях соотношение (31) принято называть законом сохранения на разрыве (вывод этого соотношения дан ниже в разд. 14.3.4).

Непрерывная волна опрокидывается и приводит к разрыву тогда и только тогда, когда скорость распространения $f(w)$ убывает с увеличением y, т. е. выполняется неравенство

$$f(w_2)<V<f(w_1). \tag{32}$$

Геометрический смысл условий (32) заключается в том, что характеристики, выходящие из оси x (эти характеристики «несут» информацию о начальных данных), должны пересекать линию разрыва, см. рис. 15. В этом случае разрывное решение будет устойчивым по отношению к малым возмущениям начального профиля (т. е. соответствующее решение также мало изменится).

Положение точки разрыва в плоскости (y,w) можно определить геометрически, следуя правилу Уизема: разрыв должен отсекать от профиля опрокидывающейся волны области с равными площадями (на рис. 14 эти области заштрихованы). Положение точки разрыва можно найти путем решения уравнений

$$\begin{gathered}s(x)=\xi_1+\mathcal{F}_1x,\\ s(x)=\xi_2+\mathcal{F}_2x,\\ w_2\mathcal{F}_2-w_1\mathcal{F}_1=F(w_2)-F(w_1)+\frac{\mathcal{F}_2-\mathcal{F}_1}{\xi_2-\xi_1}\int_{\xi_1}^{\xi_2}w\,d\xi.\end{gathered} \tag{33}$$

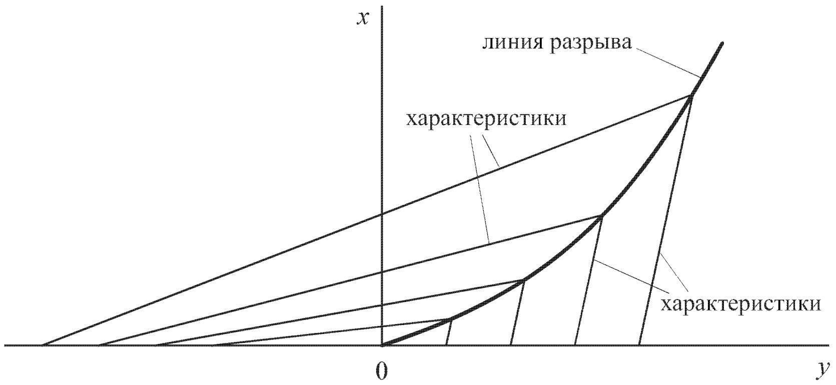

Рис. 15

Здесь w и $\mathcal{F}$ определяются как функции от ξ по формулам $w = \varphi(\xi)$ и $\mathcal{F} = f(w)$, функция $F(w)$ введена в (31), а индексы обозначают значения соответствующих величин при ξ_1 и ξ_2. Уравнения (33) позволяют найти зависимости $s = s(x)$, $\xi_1 = \xi_1(x)$, $\xi_2 = \xi_2(x)$. Можно показать, что из последнего уравнения (33) следует условие на разрыве (31).

Пример 5. Для уравнения Хопфа, которое соответствует $f(w) = w$ в (27), условие на скачке (31) с учетом равенства $F(w) = \frac{1}{2}w^2$ записывается так:

$$V = \frac{w_1 + w_2}{2},$$

а система (33), определяющая положение положения точки разрыва, принимает вид

$$\begin{aligned} s(x) &= \xi_1 + \varphi(\xi_1)x, \\ s(x) &= \xi_2 + \varphi(\xi_2)x, \\ \frac{\varphi(\xi_1) + \varphi(\xi_2)}{2} &= \frac{1}{\xi_2 - \xi_1} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \varphi(\xi)\, d\xi, \end{aligned}$$

где функция $\varphi(\xi)$ задает начальный профиль волны.

На рис. 16 изображено формирование ударной волны, которая описывается обобщенным решением уравнения Хопфа при $f(w) = w$ и образуется из уединенной волны с гладким начальным профилем (30).

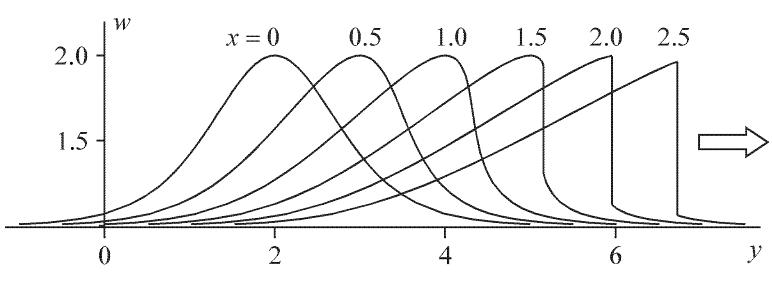

Рис. 16

Большое число решений задачи Коши для уравнения (27), описывающих слияние и распад разрывов, периодические волны и другие физические эффекты, приведено, например, в книгах Дж. Уизема (1977), Б. Л. Рождественского, Н. Н. Яненко (1978), А. Г. Куликовского, Е. И. Свешниковой (1998).

14.3.4. Использование интегральных равенств для определения обобщенных решений

Обобщенные решения, которые описываются кусочно-гладкими (кусочно-непрерывными) функциями, формально можно ввести путем рассмотрения следующего уравнения, представленного в интегральной форме:

$$-\iint\limits_{D}\Big[w\frac{\partial\psi}{\partial x}+F(w)\frac{\partial\psi}{\partial y}\Big]\,dy\,dx=0. \tag{34}$$

Здесь D — произвольный прямоугольник в плоскости (y,x); $\psi=\psi(x,y)$ — любая, так называемая *пробная функция* с непрерывными первыми производными в D, которая обращается в нуль на границе D, а функция $F(w)$ определена в (31). Если w и $F(w)$ непрерывно дифференцируемы, то уравнение (33) эквивалентно исходному дифференциальному уравнению (27). Действительно, если умножить уравнение (27) на ψ и проинтегрировать по области D, то, интегрируя затем по частям, получим (34). Обратно, интегрируя (34) по частям, имеем

$$\iint\limits_{D}\Big[\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial F(w)}{\partial y}\Big]\psi\,dy\,dx=0.$$

Поскольку это равенство должно выполняться для любой пробной функции ψ, отсюда с учетом соотношения $F'(w)=f(w)$ получим исходное уравнение (27). Однако уравнение (34) имеет более широкий класс решений, поскольку допустимые функции $w(x,y)$ не обязательно имеют производные. Функции $w(x,y)$, удовлетворяющие интегральному равенству (34) для всех пробных функций ψ, называются обобщенными (или слабыми) решениями уравнения (27).

Использование обобщенных решений удобно для описания разрывов, так как позволяет автоматически получать условия на разрыве. Рассмотрим решение уравнения (34), непрерывно дифференцируемое в двух частях D_1 и D_2 прямоугольника D, которое имеет конечный разрыв первого рода на границе Γ, разделяющей D_1 и D_2. Интегрируя в каждой из областей D_1 и D_2 по частям, из (34) получим

$$\iint\limits_{D_1}\Big[\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial F(w)}{\partial y}\Big]\psi\,dy\,dx+\iint\limits_{D_2}\Big[\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial F(w)}{\partial y}\Big]\psi\,dy\,dx+$$
$$+\int\limits_{\Gamma}\big\{[w]\,dy-[F(w)]\,dx\big\}\psi=0,$$

где $[w]=w_2-w_1$ и $[F(w)]=F(w_2)-F(w_1)$ — скачки на Γ. Криволинейный интеграл по Γ образован граничными членами интегралов по D_1 и D_2, возникающими в результате интегрирования по частям. Так как полученное равенство должно быть справедливым для всех пробных функций ψ, отсюда следует, что уравнение (27) справедливо внутри каждой из подобластей D_1 и D_2; кроме того, должно выполняться равенство

$$[w]\,dy-[F(w)]\,dx=0 \qquad (\text{на линии } \Gamma).$$

Считая, как и ранее, что линия разрыва описывается уравнением $y=s(x)$, получаем отсюда условие на разрыве (31).

Следует отметить, что условия (32) не следуют из интегрального равенства (34), а выводятся из дополнительного требования устойчивости решения.

14.3.5. Законы сохранения. Вязкие решения

Укажем здесь другие способы введения обобщенных решений.

1°. Обобщенные решения можно ввести с помощью закона сохранения

$$\frac{d}{dx}\int_{y_1}^{y_2} w\,dy + F(w_2) - F(w_1) = 0, \tag{35}$$

при записи которого использованы краткие обозначения: $w = w(x,y)$, $w_n = w(x,y_n)$, где $n = 1,\ 2$; функция $F(w)$, как и (31), вводится по формуле $F(w) = \int f(w)\,dw$. Равенство (35) считается выполненным для любых y_1 и y_2 и допускает простую физическую интерпретацию: скорость изменения общего количества величины w, распределенной на интервале $(y_1,\ y_2)$, компенсируется «потоком» функции $F(w)$ через концы этого интервала.

Пусть w — непрерывно дифференцируемое решение закона сохранения. Тогда дифференцируя (35) по y_2, а затем полагая $y_2 = y$, приходим к уравнению (27). Закон сохранения (35) удобен тем, что он допускает и разрывные решения. Нетрудно показать, что в этом случае должно выполняться условие на разрыве (31). Поэтому законы сохранения типа (35) иногда используются в качестве основы для определения обобщенных решений: см., например, Р. Курант (1964), Дж. Уизем (1977), Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко (1978).

2°. Возможен также другой подход к определению обобщенных решений, связанный с рассмотрением вспомогательного уравнения параболического типа

$$\frac{\partial w}{\partial x} + f(w)\frac{\partial w}{\partial y} = \varepsilon\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad \varepsilon > 0. \tag{36}$$

При этом обобщенное решение задачи Коши (27), (28) (для финитного начального профиля) определяется как предел решения уравнения (36) с тем же начальным условием (28) при $\varepsilon \to 0$. В работах О. А. Олейник (1957), И. М. Гельфанда (1959) было показано, что рассмотренные выше определения обобщенного решения приводят к одинаковым результатам.

Параметр ε играет роль «вязкости» (по аналогии с вязкостью жидкости или газа), которая «размазывает» разрыв, делая непрерывным профиль искомой величины w. Поэтому указанную конструкцию, основанную на предельном переходе при $\varepsilon \to 0$, называют методом исчезающей вязкости, а полученную предельную функцию — вязким решением. Уравнение (36) при малом ε нередко используется в качестве основы для численного моделирования разрывных решений уравнения (27); в этом случае нет необходимости специально выделять область разрыва в численной схеме.

Пример 6. Для уравнения Хопфа (14) вспомогательное уравнение (36) имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial y} = \varepsilon\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad \varepsilon > 0 \tag{37}$$

и является уравнением Бюргерса.

Решение задачи Коши (37), (28) дается формулами [см. E. Hopf (1950), Дж. Уизем (1977)]:

$$w(x,y) = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y-\eta}{x} \exp\Bigl[-\frac{1}{2\varepsilon}H(x,y,\eta)\Bigr]\,d\eta}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \exp\Bigl[-\frac{1}{2\varepsilon}H(x,y,\eta)\Bigr]\,d\eta}, \tag{38}$$

где

$$H(x,y,\eta) = \int_0^{\eta} \varphi(\bar\eta)\,d\bar\eta + \frac{(y-\eta)^2}{2x}. \tag{39}$$

Рассмотрим асимптотическое поведение решения (39) при малых ε, когда x, y, $\varphi(y)$ фиксированы. При $\varepsilon \to 0$ основной вклад в интегралы, входящие в формулу (38), дают окрестности стационарных точек функции H. Эти точки определяются из условия равенства нулю частной производной: $H_\eta = 0$. Отсюда имеем

$$\varphi(\eta) - \frac{y-\eta}{x} = 0. \tag{40}$$

Пусть $\eta = \xi(x,y)$ — стационарная точка, т. е. функция $\xi(x,y)$ определяется неявно, как решение алгебраического (или трансцендентного) уравнения

$$\varphi(\xi) - \frac{y-\xi}{x} = 0. \tag{41}$$

Вклад окрестности стационарной точки $\eta = \xi$ в интеграл вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q(\eta)\exp\Bigl[-\frac{1}{2\varepsilon}H(\eta)\Bigr]\,d\eta$$

при $\varepsilon \to 0$ определяется помощью метода перевала [см. М. В. Федорюк (1977, 1987), Ф. Олвер (1990)] и равен:

$$Q(\xi)\sqrt{\frac{4\pi\varepsilon}{|H''(\xi)|}}\,\exp\Bigl[-\frac{1}{2\varepsilon}H(\xi)\Bigr].$$

Предположим сначала, что существует только одна стационарная точка $\xi(x,y)$, удовлетворяющая уравнению (41). Тогда

$$\begin{gathered}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y-\eta}{x}\exp\Bigl[-\frac{1}{2\varepsilon}H(x,y,\eta)\Bigr]\,d\eta \simeq \frac{y-\xi}{x}\sqrt{\frac{4\pi\varepsilon}{|H''(\xi)|}}\,\exp\Bigl[-\frac{1}{2\varepsilon}H(x,y,\xi)\Bigr],\\ \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Bigl[-\frac{1}{2\varepsilon}H(x,y,\eta)\Bigr]\,d\eta \simeq \sqrt{\frac{4\pi\varepsilon}{|H''(\xi)|}}\,\exp\Bigl[-\frac{1}{2\varepsilon}H(x,y,\xi)\Bigr].\end{gathered} \tag{42}$$

Отсюда из формулы (38) получим

$$w(x,y) \simeq \frac{y-\xi}{x} \qquad (\text{при } \varepsilon \to 0), \tag{43}$$

где $\eta = \xi(x,y)$ определяется уравнением (41). Полученное асимптотическое решение можно переписать в параметрическом виде

$$w = \varphi(\xi), \qquad y = \xi + \varphi(\xi)x. \tag{44}$$

Видно, что оно точности совпадает с решением (19)–(20), полученным путем решения задачи Коши (14)–(15) для уравнения Хопфа; при этом стационарная точка $\xi = \xi(x,t)$ соответствует характеристической переменной.

Ранее было показано, что в некоторых случаях при достаточно больших x формулы (44) дают многозначные решения и приходится вводить разрывы. В то же время решение (38) уравнения Бюргерса (37) однозначно и непрерывно для любого x. Этот факт объясняется тем, что в таких случаях имеется сразу несколько стационарных точек, удовлетворяющих уравнению (41), и надо несколько скорректировать предыдущий асимптотический анализ. Пусть ξ_1 и ξ_2 — две стационарные точки, удовлетворяющие неравенству $\xi_1 < \xi_2$. Каждая из них вносит свой вклад в решение, этот вклад определяется по формулам (42). Учитывая сказанное, из формулы (38) имеем

$$\begin{aligned} w \simeq{}& \frac{\{(y-\xi_1)/x\}|H''(\xi_1)|^{-1/2}e^{-H(\xi_1)/(2\varepsilon)}}{|H''(\xi_1)|^{-1/2}e^{-H(\xi_1)/(2\varepsilon)} + |H''(\xi_2)|^{-1/2}e^{-H(\xi_2)/(2\varepsilon)}} + \\ &+ \frac{\{(y-\xi_2)/x\}|H''(\xi_2)|^{-1/2}e^{-H(\xi_2)/(2\varepsilon)}}{|H''(\xi_1)|^{-1/2}e^{-H(\xi_1)/(2\varepsilon)} + |H''(\xi_2)|^{-1/2}e^{-H(\xi_2)/(2\varepsilon)}}, \end{aligned} \tag{45}$$

где $H(\xi_n) = H(x, y, \xi_n)$. Когда $H(\xi_1) \neq H(\xi_2)$, наличие в экспонентах малого знаменателя ε делает один из членов преобладающим при $\varepsilon \to 0$. Отсюда следует, что

$$w \simeq \begin{cases} \dfrac{y - \xi_1}{x} & \text{при } H(\xi_1) < H(\xi_2), \\ \dfrac{y - \xi_2}{x} & \text{при } H(\xi_1) > H(\xi_2). \end{cases}$$

В каждом из этих случаев справедливо решение (44), где либо $\xi = \xi_1$, либо $\xi = \xi_2$. Но выбор здесь однозначен: и ξ_1, и ξ_2 являются функциями переменных x и y, знак разности $\delta = H(\xi_1) - H(\xi_2)$ определяет выбор ξ_1 и ξ_2 в заданной точке x, y. Переход от ξ_1 к ξ_2 происходит в тех точках, где

$$H(\xi_1) = H(\xi_2).$$

С учетом (39) отсюда имеем

$$\int_0^{\xi_1} \varphi(\bar\xi)\, d\bar\xi + \frac{(y - \xi_1)^2}{2x} = \int_0^{\xi_2} \varphi(\bar\xi)\, d\bar\xi + \frac{(y - \xi_2)^2}{2x}. \tag{46}$$

Поскольку и ξ_1, и ξ_2 удовлетворяют уравнению (41), то условие (46) можно записать в виде

$$(\xi_2 - \xi_1)\big[\varphi(\xi_1) + \varphi(\xi_2)\big] = 2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} \varphi(\bar\xi)\, d\bar\xi. \tag{47}$$

Точно такое же соотношение получается путем решения задачи Коши (14)–(15) для уравнения Хопфа (см. пример 6). Отсюда следует, что асимптотическое решение удовлетворяет условию на разрыве (31). Таким же образом можно показать, для него выполняется условие устойчивости (32).

Проведенный анализ показывает, что решение задачи Коши для уравнения Бюргерса при $\varepsilon \to 0$ переходит в обобщенное решение задачи Коши для уравнения Хопфа, которое может иметь разрывы.

Отметим, что имеются также иные способы введения обобщенных решений: см., например, M. G. Crandall, P.-L. Lions (1983), А. И. Субботин (1991), A. I. Subbotin (1995), A. A. Melikyan (1998), Б. П. Андреянов (1999). Более подробную информацию об обобщенных решениях и их приложениях можно найти, например, в цитируемой в конце этого раздела литературе (см. также разд. 14.4).

Замечание. В конкретных задачах квазилинейные уравнения первого порядка часто являются следствием интегральных законов сохранения, имеющих ясный физический смысл. В этих случаях обобщенные решения надо вводить, исходя из этих законов сохранения: см. например, Дж. Уизем (1977), Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко (1978). Полученные таким путем негладкие обобщенные решения могут отличаться от обобщенных решений, описанных выше.

14.3.6. Формула Хопфа для обобщенного решения

Приведем теперь общую формулу для обобщенного решения задачи Коши (27)–(28), которая описывает разрывные решения, удовлетворяющие условию устойчивости (32). Как и ранее, будем считать, что $x \geqslant 0$ и $f > 0$ при $w > 0$; $f'_w > 0$.

Рассмотрим функцию

$$Z(s) = \min_w \big\{ws - F(w)\big\}, \quad \text{где} \quad F(w) = \int f(w)\, dw. \tag{48}$$

Положим

$$H(x, y, \eta) = \int_0^{\eta} \varphi(\bar\eta)\, d\bar\eta + xZ\Big(\frac{y - \eta}{x}\Big). \tag{49}$$

Это — непрерывная функция от η при фиксированных x и y. Можно показать, что при фиксированном x и за исключением счетного множества значений y функция (49) имеет единственный минимум по η. Обозначим положение этого минимума $\eta = \xi$, где $\xi = \xi(x, y)$. Устойчивое обобщенное решение уравнения (28) с начальным условием (29) дается формулой

$$w(x, y) = \mathcal{Z}\Big(\frac{y-\xi}{x}\Big), \quad \text{где } \mathcal{Z}(s) = \frac{dZ}{ds}. \tag{50}$$

Формулы (48)–(50) были обоснованы в работах E. Hopf (1950), О. А. Олейник (1954), P. D. Lax (1954).

Функцию $Z = Z(s)$, заданную выражением (48), можно записать в параметрическом виде

$$s = f(w), \quad Z = ws - \int f(w)\, dw. \tag{51}$$

Отсюда получим параметрическое представление ее производной $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(s)$:

$$s = f(w), \quad \mathcal{Z} = w. \tag{52}$$

Положение минимума $\eta = \xi(x, y)$ функции (49) находится из условия $H_\eta = 0$, что приводит к следующему уравнению для определения функции ξ:

$$\varphi(\xi) - \mathcal{Z}\Big(\frac{y-\xi}{x}\Big) = 0. \tag{53}$$

Для иллюстрации использования приведенных формул рассмотрим два случая.

1°. Пусть алгебраическое (или трансцендентное) уравнение (53) в некоторой области плоскости $(x,\ y)$ имеет единственное решение $\xi = \xi(x, y)$. Положим в равенствах (52) $s = (y - \xi)/x$, а затем рассмотрим их совместно с уравнением (53). Исключая из них функции $f(w)$ и $\mathcal{Z}$, находим решение задачи в параметрическом виде (29). В этом случае получается гладкое (классическое) решение, описывающее волну разрежения.

2°. Пусть теперь алгебраическое (или трансцендентное) уравнение (53) имеет два решения ξ_1 и ξ_2, которые являются функциями переменных x и y. В каждом из этих случаев справедливо решение (29), где либо $\xi = \xi_1$, либо $\xi = \xi_2$. Для каждой пары чисел x, y выбирается то решение ξ_n ($n = 1,\ 2$), которое обеспечивает минимум функции $H(x, y, \xi_n)$, заданной формулой (49). В этом случае мы получаем разрывное (обобщенное) решение, описывающее ударную волну.

14.3.7. Задача о распаде произвольного разрыва

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (27) с разрывным начальным условием

$$w(0, y) = \begin{cases} w_1 & \text{при } y < 0, \\ w_2 & \text{при } y > 0. \end{cases} \tag{54}$$

Эта задача называется задачей о распаде произвольного разрыва. Ее кусочно-гладкое автомодельное обобщенное решение для произвольной гладкой функции $f = f(w)$ описывается формулой (знаки функции f и ее производной могут быть любыми):

$$w(x, y) = w(\xi) = [\dot{\mathfrak{F}}]^{-1}(\xi), \qquad \xi = y/x, \tag{55}$$

где

$$\mathfrak{F}(w)=\begin{cases} \sup\{g(w)\,|\,g(w)\leqslant f(w),\ g \text{ выпукла вниз на } [w_1,w_2]\} & \text{при } w_1<w_2;\\ \inf\{g(w)\,|\,g(w)\geqslant f(w),\ g \text{ выпукла вверх на } [w_2,w_1]\} & \text{при } w_2<w_1. \end{cases} \tag{56}$$

Здесь обратная к монотонной на интервале (a,b) функции $\mathfrak{P}(w)$ функция $[\mathfrak{P}]^{-1}(\xi)$ при необходимости доопределяется константами по непрерывности в окрестностях $\pm\infty$ и на отрезках, соответствующих разрывам $\mathfrak{P}(w)$. В точках, соответствующих промежуткам постоянства $\mathfrak{P}(w)$, функция $[\mathfrak{P}]^{-1}(\xi)$ доопределяется до непрерывной справа функции. Точкой в решении (55) обозначена производная по ξ.

Решение (55), (56) для гладких функций $f(w)$ было получено И. М. Гельфандом (1959). Эти результаты обобщены на случай непрерывных функций $f(w)$ Б. П. Андреяновым (1999).

14.3.8. Задача о распространении сигнала

В задаче о распространении сигнала и других физических приложениях ищут решение исходного уравнения со следующими условиями:

$$\begin{aligned} &w = w_0 \quad \text{при} \quad x=0 \quad \text{(начальное условие)},\\ &w = g(x) \quad \text{при} \quad y=0 \quad \text{(граничное условие)}, \end{aligned} \tag{57}$$

где w_0 — некоторая константа, а $g(x)$ — заданная функция. Рассматривается область $x>0$, $y>0$, где переменная x играет роль времени, а переменная y — роль пространственной координаты, и считается, что $f(w)>0$.

Характеристики этой задачи начинаются на положительной полуоси y и на положительной полуоси x, см. рис. 17. На характеристиках, начинающихся на

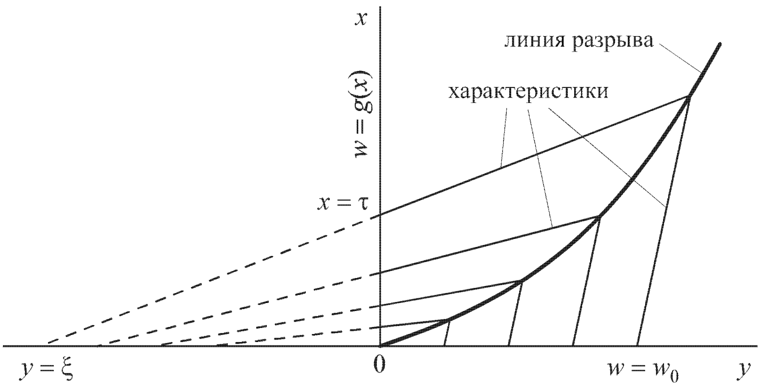

Рис. 17

оси y, имеем $w=w_0$. Поэтому они представляют собой прямые $y-a_0x=\text{const}$, где $a_0=f(w_0)$. Отсюда следует, что

$$w=w_0 \quad \text{при} \quad y>a_0x. \tag{58}$$

Рассмотрим теперь характеристики, начинающиеся на оси x, и предположим, что какая-либо из них начинается в точке $x=\tau$. Решение уравнения (27) с граничным условием (57) можно представить в параметрическом виде

$$y=\mathcal{G}(\tau)(x-\tau), \quad w=g(\tau), \tag{59}$$

где $\mathcal{G}(\tau) = f\bigl(g(\tau)\bigr)$. Это решение можно связать с решением (29) задачи Коши (27)–(28), если положить

$$\xi = -\tau\mathcal{G}(\tau), \quad \varphi(\xi) = g(\tau), \quad \mathcal{F}(\xi) = \mathcal{G}(\tau). \tag{60}$$

Это соответствует продолжению характеристик через точки $y = 0$, $x = \tau$ до оси y и обозначению точек пересечения через $y = \xi$. При этом задача о распространении сигнала формулируется как задача Коши.

Каждую область многозначности в решении (59) следует заменить разрывом. При выполнении условия

$$\mathcal{G}(+0) > a_0, \quad \text{где} \quad a_0 = f(w_0),$$

такая область возникает мгновенно, т. к. первая характеристика $y = \mathcal{G}(+0)x$ находится впереди последней характеристики $y = a_0 x$ невозмущенной области. В этом случае разрыв возникает в начале координат, и выполняется соотношение

$$G - G_0 = (w - w_0)\mathcal{G} - \frac{1}{x - \tau}\int_0^\tau \bigl[G(\bar\tau) - G_0\bigr]\,d\bar\tau. \tag{61}$$

Здесь величины w, $\mathcal{G}$ и G являются функциями от τ в области за разрывом и вычисляются по формулам

$$w = g(\tau), \quad \mathcal{G} = f\bigl(g(\tau)\bigr), \quad G = F\bigl(g(\tau)\bigr),$$

а индекс «ноль» соответствует значениям этих величин перед разрывом: $w = w_0$, $\mathcal{G}_0 = f(w_0)$, $G_0 = F(w_0)$.

Формулы (59) описывают решение в возмущенной области за разрывом. Равенство (61) позволяет найти величину $\tau(x)$ в точке разрыва; подставив эту величину в формулы (59), находим как местонахождение разрыва, так и значение w непосредственно за ним.

Если $g(x)$ остается постоянной и равной w_c, то при $a_\text{c} > a_0$, где $a_\text{c} = f(w_\text{c})$, решение имеет разрыв, который распространяется с постоянной скоростью и разделяет две однородные области с $w = w_\text{c}$ и $w = w_0$.

Литература к разд. 14.3: E. Hopf (1950), P. D. Lax (1954), О. А. Олейник (1957, 1959), И. М. Гельфанд (1959), F. Helfferich, G. Klein (1970), A. Jeffery (1976), Дж. Уизем (1977), Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко (1978), C. M. Dafermos (1983), Г. И. Баренблатт, В. М. Ентов, В. М. Рыжик (1984), H. Rhee, R. Aris, N. R. Amundson (1986, 1989), А. И. Субботин (1991), P. Bedrikovetsky (1993), J. Smoller (1994), A. I. Subbotin (1995), D. Logan (1997), A. A. Melikyan (1998), Б. П. Андреянов (1999), А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семенов (2001), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (2003).

14.4. Обобщенные решения квазилинейных уравнений

14.4.1. Предварительные замечания

В общем случае квазилинейное уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial x} + f(x, y, w)\frac{\partial w}{\partial y} = g(x, y, w) \tag{62}$$

можно представить в эквивалентном виде

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}F(x, y, w) = G(x, y, w), \tag{63}$$

где новые функции введены по формулам (w_0 — любое)

$$F(x,y,w)=\int_{w_0}^{w} f(x,y,t)\,dt, \quad G(x,y,w)=g(x,y,w)+\int_{w_0}^{w}\frac{\partial}{\partial y}\big[f(x,y,t)\big]\,dt. \tag{64}$$

Далее считаем, что функции f и g непрерывно дифференцируемы по каждой переменной.

Как было показано на конкретных примерах в разд. 14.2–14.3, характеристики уравнения (62) в некоторой области могут пересекаться, что приводит к неоднозначности (и физической неинтерпретируемости) решения. Поэтому вместо классического непрерывного гладкого решения приходится использовать обобщенное решение, описываемое разрывной функцией.

Будем рассматривать класс функций $w(x,y)\in\mathcal{K}$, удовлетворяющих условиям:

1°. В любой ограниченной части полуплоскости $x\geqslant 0$ имеется конечное число линий и точек разрыва; вне этих линий и точек функция $w(x,y)$ непрерывно дифференцируема по каждой переменной.

2°. На линиях разрыва $y=y(x)$ существуют левые $w(x,y-0)$ и правые $w(x,y+0)$ предельные значения.

14.4.2. Обобщенное решение. Условия на разрыве и условия устойчивости

Обобщенное решение можно ввести следующим образом. Пусть $\psi(x,y)\in\mathcal{C}_1$ — непрерывная финитная функция [обращается в нуль вне конечной части плоскости (x,y)], имеющая непрерывные первые производные. Умножим уравнение (62) на $\psi(x,y)$ и проинтегрируем полученное выражение по полуплоскости $\Omega=\{0\leqslant x<\infty,\ -\infty<y<\infty\}$. После интегрирования по частям имеем

$$\begin{gathered}\iint\limits_{\Omega}\Big[w\frac{\partial\psi}{\partial x}+F(x,y,w)\frac{\partial\psi}{\partial y}+G(x,y,w)\psi(x,y)\Big]\,dy\,dx+\\ +\int_{-\infty}^{\infty} w(0,y)\psi(0,y)\,dy=0.\end{gathered} \tag{65}$$

Выражение для функции $F(x,y,w)$ приведено в (64). Интегральное равенство (65) не содержит производных от искомой функции и не теряет смысла для разрывных $w(x,y)$. Функцию $w(x,y)\in\mathcal{K}$ будем называть обобщенным решением уравнения (62), если равенство (65) выполняется для любой финитной функции $\psi(x,y)\in\mathcal{C}_1$.

Основные свойства обобщенного решения:

1°. В области, где решение w непрерывно дифференцируемо, уравнения (62) и (65) эквивалентны.

2°. Пусть $y=y(x)$ — уравнение одной из линий разрыва функции $w(x,y)$. Тогда должно выполняться условие Гюгонио, выражающее скорость движения линии разрыва через параметры решения до и после разрыва:

$$V=\frac{[F(x,y,w)]}{[w]}\equiv\frac{F\big(x,y(x),w_2(x)\big)-F\big(x,y(x),w_1(x)\big)}{w_2(x)-w_1(x)}. \tag{66}$$

Здесь использованы обозначения

$$V = y'(x), \quad w_1(x) = w\big(x, y(x) - 0\big), \quad w_2(x) = w\big(x, y(x) + 0\big)$$

3°. При $f'_w(x, y, w) \neq 0$ условия устойчивости обобщенного решения по отношению к малым возмущениям начального профиля (именно такие решения физически реализуемы) имеют вид

$$f\big(x, y(x), w_2(x)\big) \leqslant V \leqslant f\big(x, y(x), w_1(x)\big). \tag{67}$$

Геометрический смысл этих условий заключается в том, что характеристики, выходящие из оси x (эти характеристики «несут» информацию о начальных данных), должны пересекать линию разрыва, см. рис. 15. Условия (67) являются важными: они допускают существование и обеспечивают единственность обобщенного решения.

Положения пп. 1° и 2° являются следствиями интегрального равенства (65), а условия п. 3° являются дополнительными [они не выводятся из интегрального равенства (65)]. При отказе от выполнения условий п. 3° можно строить различные решения, удовлетворяющие положениям пп. 1° и 2°.

Пример 7. Рассмотрим задачу Коши для уравнения (14) с начальным условием (23). Положим

$$\overline{w}(x, y) = \begin{cases} w_1 & \text{при } y < Vx, \\ w_2 & \text{при } y > Vx, \end{cases} \qquad \text{где } V = \frac{w_1 + w_2}{2}. \tag{68}$$

Эта функция постоянна слева и справа от линии разрыва $y = Vx$, на которой выполняется условие Гюгонио (66) [поскольку здесь $F(x, y, w) = \frac{1}{2}w^2$], и удовлетворяет начальному условию (23). Поэтому $\overline{w}$ является обобщенным решением.

На рис. 18 показаны линия разрыва и характеристики, соответствующие решению (68).

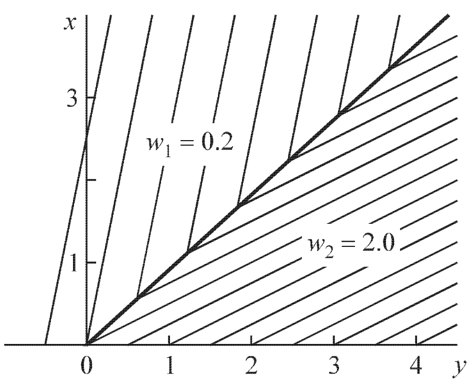

Рис. 18

Видно, что характеристики выходят из линии разрыва и не пересекают ось x. Поэтому решение (68) не является устойчивым, оно не удовлетворяет условиям (67) и физически не реализуемо. Устойчивое решение данной задачи было построено раньше и описывается формулой (26).

Если $f'_w(x, y, w)$ — знакопеременная функция, то условия устойчивости обобщенного решения несколько усложняются и записываются так:

$$\frac{F(x, y, w_*) - F(x, y, w_2)}{w_* - w_2} \leqslant V \leqslant \frac{F(x, y, w_*) - F(x, y, w_1)}{w_* - w_1},$$
$$y = y(x), \qquad w_1 < w_* < w_2,$$

где w_* — любое значение из интервала $(w_1,\, w_2)$.

14.4.3. Законы сохранения. Вязкие решения

Существуют и другие способы определения обобщенного решения.

1°. При $G \equiv 0$ обобщенные решения можно ввести с помощью закона сохранения

$$\frac{d}{dx}\int_{y_1}^{y_2} w\,dy + F(x, y_2, w_2) - F(x, y_1, w_1) = 0, \tag{69}$$

который считается справедливым для любых y_1 и y_2. При формулировке закона (69) были использованы краткие обозначения: $w = w(x, y)$, $w_n = w(x, y_n)$, где $n = 1, 2$. Можно показать, что гладкие решения закона сохранения (69) удовлетворяют дифференциальному уравнению (33), а для разрывных решений выполняется условие на разрыве (66).

2°. Вместо уравнения (62) можно взять вспомогательное уравнение второго порядка параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial x} + f(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial y} = \varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g(x, y, u) \qquad (\varepsilon > 0),$$

которое рассматривается с тем же начальным условием, что и уравнение (62). Обобщенное решение задачи Коши для уравнения (62) определяется как предел: $w(x, y) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} u(x, y)$. Полученная таким образом функция w часто называется вязким решением. Важно отметить, что для широкого класса функций f и g в уравнении (62) определения вязкого решения и обобщенного устойчивого решения (см. разд. 14.4.2) эквивалентны.

Определение непрерывного (но негладкого) вязкого обобщенного решения, основанного на пробных функциях и интегральных неравенствах, приведено в разд. 15.3.

14.4.4. Конструктивный метод построения обобщенных устойчивых решений

Рассмотрим задачу Коши для квазилинейного уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}F(x, y, w) = 0 \tag{70}$$

с начальным условием

$$w = \varphi(y) \quad \text{при} \quad x = 0. \tag{71}$$

Считаем, что функция $F(x, y, w)$ непрерывно дифференцируема по всем аргументам при $x \geqslant 0$, $-\infty < y < \infty$ и любых ограниченных w, и вторая производная $F_{ww} > 0$. Пусть функции $\varphi(y)$ и $\varphi'(y)$ кусочно-непрерывны при любых ограниченных значениях y.

Запишем характеристическую систему для уравнения (70):

$$y'_x = F_w(x, y, w), \qquad w'_x = -F_y(x, y, w), \tag{72}$$

где F_w и F_y — частные производные функции F по аргументам w и y.

Пусть функции

$$y(x) = Y(x, \tau, \xi, \eta), \qquad w(x) = W(x, \tau, \xi, \eta) \tag{73}$$

являются решением системы (72), удовлетворяющим краевым условиям

$$y(0) = \eta, \qquad y(\tau) = \xi. \tag{74}$$

Здесь η, ξ — произвольные числа, $\tau > 0$. Будем считать, что задача (73)–(74) имеет единственное ограниченное решение.

Обобщенное устойчивое решение задачи Коши (70)–(71) определяется формулами

$$\begin{aligned} w(x, y-0) &= W\big(x, x, y, \xi_-(x,y)\big), \\ w(x, y+0) &= W\big(x, x, y, \xi_+(x,y)\big), \end{aligned} \tag{75}$$

где через $\xi_-(x,y)$ и $\xi_+(x,y)$ обозначены соответственно точная нижняя и точная верхняя грани множества значений $\{\xi = \xi_n\}$, для которых функция

$$I(x, y, \xi) = \int_0^\xi \big[\varphi(\eta) - W(0, x, y, \eta)\big]\, d\eta \tag{76}$$

принимает наименьшее значение при фиксированных значениях переменных x, y $(x > 0)$. Если функция (76) принимает наименьшее значение при единственном значении $\xi = \xi_1$, то $\xi_- = \xi_+$ и формулы (76) описывают гладкое классическое решение.

Формулы (75)–(76) были получены О. А. Олейник (1954), обобщение этих результатов на случай уравнения (63) было дано в работе А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1954). Эти и другие конструктивные методы построения обобщенных решений излагаются в книгах Б. Л. Рождественского, Н. Н. Яненко (1978), H. Rhee, R. Aris, N. R. Amundson (1986).

Литература к разд. 14.4: О. А. Олейник (1954, 1957, 1959), И. М. Гельфанд (1959), E. Hopf (1965), С. Н. Кружков (1966), Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко (1978), P.-L. Lions (1982), M. G. Crandall, P.-L. Lions (1983), H. Rhee, R. Aris, N. R. Amundson (1986, 1989), А. И. Субботин (1991), A. I. Subbotin (1995), А. А. Меликян (1996), A. A. Melikyan (1998), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (2003).

15. Нелинейные уравнения общего вида с частными производными первого порядка

15.1. Методы решения

15.1.1. Полный, общий и особый интегралы

Общее нелинейное уравнение в частных производных первого порядка с двумя независимыми переменными имеет вид

$$F(x, y, w, p, q) = 0, \qquad \text{где} \quad p = \frac{\partial w}{\partial x},\ q = \frac{\partial w}{\partial y}. \tag{1}$$

Такие уравнения часто встречаются в аналитической механике, вариационном исчислении, теории оптимального управления, дифференциальных играх, динамическом программировании, геометрической оптике, дифференциальной геометрии и других областях.

В этом разделе будем рассматривать гладкие решения $w = w(x, y)$ уравнения (1), имеющие непрерывные производные по обоим аргументам (в разд. 15.3 будут рассмотрены негладкие решения).

1°. Пусть известно частное решение уравнения (1):

$$w = \Xi(x, y, C_1, C_2), \tag{2}$$

зависящее от двух произвольных постоянных C_1 и C_2. Двухпараметрическое семейство решений (2) называется полным интегралом уравнения (1), если в рассматриваемой области ранг матрицы

$$M = \begin{pmatrix} \Xi_1 & \Xi_{x1} & \Xi_{y1} \\ \Xi_2 & \Xi_{x2} & \Xi_{y2} \end{pmatrix} \tag{3}$$

равен двум (это справедливо, например, при $\Xi_{x1}\Xi_{y2} - \Xi_{x2}\Xi_{y1} \neq 0$). В матрице (3) Ξ_n обозначает частную производную по C_n ($n = 1,\ 2$), Ξ_{xn} — вторую частную производную по аргументам x и C_n, Ξ_{yn} — вторую частную производную по аргументам y и C_n.

В ряде случаев полный интеграл удается найти методом неопределенных коэффициентов, задав подходящим образом структуру частного решения.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial x} = a\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^n + b.$$

Частное решение ищем в виде суммы $w = C_1 y + C_2 + C_3 x$. Подставив это выражение в уравнение, находим связь между коэффициентами C_1 и C_3: $C_3 = aC_1^n + b$. Отсюда получим полный интеграл: $w = C_1 y + \bigl(aC_1^n + b\bigr)x + C_2$.

Полный интеграл уравнения (1) часто записывается в неявном виде*

$$\Xi(x, y, w, C_1, C_2) = 0. \tag{4}$$

* В формулах (2) и (4) символом Ξ обозначены разные функции.

2°. Общий интеграл уравнения (1) можно представить в параметрическом виде с помощью полного интеграла (2) [или (4)] и двух уравнений

$$\begin{aligned} &C_2 = f(C_1),\\ &\frac{\partial \Xi}{\partial C_1} + \frac{\partial \Xi}{\partial C_2} f'(C_1) = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где f — произвольная функция, а штрих обозначает производную. Общий интеграл в определенном смысле играет роль общего решения, зависящего от произвольной функции (вопрос о том, все ли решения он описывает, требует дополнительного анализа).

Пример 2. Для уравнения, рассмотренного в первом примере, общий интеграл можно представить в параметрическом виде с помощью соотношений

$$w = C_1 y + \bigl(aC_1^n + b\bigr)x + C_2, \qquad C_2 = f(C_1), \qquad y + anC_1^{n-1}x + f'(C_1) = 0.$$

Исключив отсюда C_2 и переобозначив параметр C_1 через C, удобно представить общий интеграл в более наглядной форме:

$$\begin{aligned} w &= Cy + \bigl(aC^n + b\bigr)x + f(C),\\ y &= -anC^{n-1}x + f'(C). \end{aligned}$$

3°. Особый интеграл уравнения (1) находится без использования полного интеграла путем исключения p и q из системы трех уравнений

$$F = 0, \qquad F_p = 0, \qquad F_q = 0,$$

где первое уравнение совпадает с (1).

15.1.2. Метод Лагранжа—Шарпи

Пусть найден один первый интеграл

$$\Phi(x, y, w, p, q) = C_1 \tag{6}$$

характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dw}{pF_p + qF_q} = -\frac{dp}{F_x + pF_w} = -\frac{dq}{F_y + qF_w}, \tag{7}$$

где

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad F_w = \frac{\partial F}{\partial w}, \quad F_p = \frac{\partial F}{\partial p}, \quad F_q = \frac{\partial F}{\partial q}.$$

Считаем, что интеграл (6) вместе с уравнением (1) можно разрешить относительно производных p, q:

$$p = \varphi_1(x, y, w, C_1), \quad q = \varphi_2(x, y, w, C_1). \tag{8}$$

Первое уравнение этой системы можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение с независимой переменной x и параметром y. Получив общее решение этого уравнения, зависящее от произвольной функции $\psi(y)$, подставляют его во второе уравнение. В итоге приходят к обыкновенному дифференциальному уравнению для ψ. Определив функцию $\psi(y)$ и подставив ее в общее решение первого уравнения (8), находим полный интеграл уравнения (1). Аналогичным образом решение системы (8) можно начинать со второго уравнения, рассматривая его как обыкновенное дифференциальное уравнение с независимой переменной y и параметром x.

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$ywp^2 - q = 0, \qquad \text{где} \quad p = \frac{\partial w}{\partial x}, \ q = \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Характеристическая система (7) в данном случае имеет вид

$$\frac{dx}{2ywp} = -\frac{dy}{1} = \frac{dw}{2ywp^2 - q} = -\frac{dp}{yp^3} = -\frac{dq}{wp^2 + yp^2 q}.$$

Воспользовавшись исходным уравнением, упрощаем знаменатель третьего отношения и получаем интегрируемую комбинацию: $dw/(ywp^2) = -dp/(yp^3)$. Отсюда находим первый интеграл $p = C_1/w$. Разрешая его вместе с исходным уравнением относительно p и q, получим систему

$$p = \frac{C_1}{w}, \qquad q = \frac{C_1^2 y}{w}.$$

Общее решение первого уравнения имеет вид $w^2 = 2C_1 x + \psi(y)$, где $\psi(y)$ — произвольная функция. Подставляя это решение во второго уравнение системы, имеем $\psi'(y) = 2C_1^2 y$. Поэтому $\psi(y) = C_1^2 y^2 + C_2$. В итоге получим полный интеграл в виде

$$w^2 = 2C_1 x + C_1^2 y^2 + C_2.$$

Отметим, что полный интеграл уравнения (1) является общим решением вполне интегрируемого уравнения Пфаффа

$$dw = \varphi_1(x, y, w, C_1)\, dx + \varphi_2(x, y, w, C_1)\, dy, \tag{9}$$

где φ_1 и φ_2 — функции из системы (8).

Замечание 1. Очевидным первым интегралом характеристической системы (7) является равенство $F(x, y, w, p, q) = C$, поэтому функция Φ, определяющая интеграл (6), должна быть отлична от F. Однако использование очевидного первого интеграла позволяет понизить порядок системы (7) на единицу.

15.1.3. Построение полного интеграла с помощью двух первых интегралов

Пусть найдены два независимых первых интеграла

$$\Phi(x, y, w, p, q) = C_1, \qquad \Psi(x, y, w, p, q) = C_2 \tag{10}$$

характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений (7). Считаем, что функции F, Φ, Ψ, определяющие уравнение (1) и интегралы (10), удовлетворяют следующим двум условиям:

$$\begin{aligned} &1) \quad J \equiv \frac{\partial(F, \Phi, \Psi)}{\partial(w, p, q)} \not\equiv 0, \\ &2) \quad [\Phi, \Psi] \equiv \begin{vmatrix} \Phi_p & \Phi_x + p\Phi_w \\ \Psi_p & \Psi_x + p\Psi_w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Phi_q & \Phi_y + q\Phi_w \\ \Psi_q & \Psi_y + q\Psi_w \end{vmatrix} \equiv 0, \end{aligned} \tag{11}$$

где J — якобиан функций F, Φ, Ψ по переменным w, p, q, а $[\Phi, \Psi]$ — скобка Якоби. В этом случае равенства (1) и (10) представляют собой параметрическую форму представления полного интеграла уравнения (1) (p и q рассматриваются как параметры). Исключив p и q из (1) и (10), а затем разрешив полученное уравнение относительно w, можно получить полный интеграл в явном виде $w = w(x, y, C_1, C_2)$.

Пример 4. Рассмотрим уравнение

$$pq - aw = 0, \qquad \text{где} \quad p = \frac{\partial w}{\partial x},\ q = \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Характеристическая система (7) в данном случае имеет вид

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dw}{2pq} = \frac{dp}{ap} = \frac{dq}{aq}.$$

Приравнивая сначала первое и пятое отношение, а затем второе и четвертое, находим первые интегралы

$$q - ax = C_1, \qquad p - ay = C_2.$$

Имеем $F = pq - aw$, $\Phi = q - ax$, $\Psi = p - ax$. Эти функции удовлетворяют условиям (11). Разрешая уравнение и первые интегралы относительно w, получим полный интеграл в виде

$$w = \frac{1}{a}(ax + C_1)(ay + C_2).$$

15.1.4. Случай, когда уравнение не зависит явно от w

Пусть исходное уравнение не содержит явно искомой функции, т. е. имеет вид

$$F(x, y, p, q) = 0. \tag{12}$$

1°. Если получено однопараметрическое семейство решений $w = \Xi(x, y, C_1)$, удовлетворяющее условию $\Xi'_1 \not\equiv \text{const}$, то полный интеграл дается выражением $w = \Xi(x, y, C_1) + C_2$.

2°. Первый интеграл (6) можно искать в форме $\Phi(x, y, p, q) = C_1$, аналогичной уравнению (12). В этом случае характеристическая система (7) записывается так:

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = -\frac{dp}{F_x} = -\frac{dq}{F_y}.$$

Соответствующее уравнение Пфаффа (9) принимает вид

$$dw = \varphi_1(x, y, C_1)\,dx + \varphi_2(x, y, C_1)\,dy$$

и может быть проинтегрировано в квадратурах. В результате имеем следующее выражение для полного интеграла:

$$w = \int_{x_0}^{x} \varphi_1(t, y, C_1)\,dt + \int_{y_0}^{y} \varphi_2(x_0, s, C_1)\,ds + C_2, \tag{13}$$

где константы x_0 и y_0 можно выбрать любыми.

3°. Пусть уравнение (12) удается разрешить относительно p или q, например

$$p = -\mathcal{H}(x, y, q).$$

Тогда, дифференцируя обе части по y, можно получить квазилинейное уравнение относительно производной q:

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\mathcal{H}(x, y, q) = 0, \qquad q = \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Это уравнение проще исходного, его качественные особенности и методы решения описаны в главе 14.

15.1.5. Уравнение Гамильтона—Якоби

Уравнение (1), разрешенное относительно одной из производных:

$$p + \mathcal{H}(x, y, w, q) = 0, \qquad \text{где} \quad p = \frac{\partial w}{\partial x},\ q = \frac{\partial w}{\partial y}, \tag{14}$$

принято называть уравнением Гамильтона—Якоби, а функцию $\mathcal{H}$ — гамильтонианом. Уравнения вида (14) часто встречаются в различных разделах механики, теории управления и в дифференциальных играх, где переменная x обычно играет роль времени, а переменная y — роль пространственной координаты. Уравнению Гамильтона—Якоби (14) соответствует функция $F(x, y, w, p, q) = p + \mathcal{H}(x, y, w, q)$ в уравнении (1).

Характеристическая система (7) для уравнения (14) с учетом равенства $p = -\mathcal{H}$ сводится к более простой системе, состоящей из трех дифференциальных уравнений

$$y'_x = \mathcal{H}_q, \quad w'_x = q\mathcal{H}_q - \mathcal{H}, \quad q'_x = -q\mathcal{H}_w - \mathcal{H}_y, \tag{15}$$

которые не зависят от p (в левой части уравнений стоят производные по переменной x).

Литература к разд. 15.1: В. В. Степанов (1958), Р. Беллман (1960), Р. Курант (1964), Э. Камке (1966), Л. Э. Эльсгольц (1969), И. Г. Петровский (1970), В. И. Арнольд (1974), E. Zauderer (1983), J. Lewin (1994), D. Zwillinger (1989), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (2003).

15.2. Задача Коши. Теорема существования и единственности

15.2.1. Постановка задачи и процедура построения решения

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (1) с начальными условиями

$$x = h_1(\xi), \quad y = h_2(\xi), \quad w = h_3(\xi), \tag{16}$$

где ξ — параметр ($\alpha \leqslant \xi \leqslant \beta$), а $h_k(\xi)$ — заданные функции.

Решение этой задачи осуществляется в несколько этапов:

1°. Сначала определяются дополнительные начальные условия для производных:

$$p = p_0(\xi), \quad q = q_0(\xi). \tag{17}$$

Для этого решают алгебраическую (или трансцендентную) систему уравнений

$$F(h_1(\xi), h_2(\xi), h_3(\xi), p_0, q_0) = 0, \tag{18}$$

$$p_0 h'_1(\xi) + q_0 h'_2(\xi) - h'_3(\xi) = 0 \tag{19}$$

относительно p_0 и q_0. Уравнение (18) получено в результате подстановки начальных данных (16) в исходное уравнение (1). Уравнение (19) является следствием зависимости $w = w(x, y)$ и формулы для дифференциала $dw = p\,dx + q\,dy$, где dx, dy, dw вычисляются по начальным данным (16).

2°. Решается автономная система уравнений

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dw}{pF_p + qF_q} = -\frac{dp}{F_x + pF_w} = -\frac{dq}{F_y + qF_w} = d\tau, \tag{20}$$

которая получена из (7) путем введения дополнительной переменной τ (играющей роль времени).

3°. Постоянные интегрирования определяются из начальных условий:

$$x = h_1(\xi), \quad y = h_2(\xi), \quad w = h_3(\xi), \quad p = p_0(\xi), \quad q = q_0(\xi) \quad \text{при} \ \ \tau = 0, \tag{21}$$

которые получены объединением условий (16) и (17). В результате находим три функции

$$x = x(\tau, \xi), \quad y = y(\tau, \xi), \quad w = w(\tau, \xi), \tag{22}$$

которые дают решение рассматриваемой задачи Коши в параметрическом виде (τ, ξ — параметры).

15.2.2. Теорема существования и единственности

Пусть функция $F = F(x, y, w, p, q)$, с помощью которой задается уравнение (1), дважды непрерывно дифференцируема по всем пяти аргументам (в рассматриваемой области), причем $F_p^2 + F_q^2 \neq 0$. Пусть функции $h_1(\xi)$, $h_2(\xi)$, $h_3(\xi)$, определяющие начальные данные (16), дважды непрерывно дифференцируемы по ξ, причем $(h_1')^2 + (h_2')^2 \neq 0$. Считаем, что функции $p_0(\xi)$ и $q_0(\xi)$, задающие дополнительные начальные условия (17), удовлетворяют системе (18)–(19). Кроме того, потребуем, чтобы было выполнено условие

$$\Delta \equiv F_p h_2' - F_q h_1' \neq 0,$$

в котором фигурируют функции из (16), (17) и штрихом обозначены производные по ξ. Тогда существует единственное дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (16)–(17).

Замечание 1. Эта теорема носит локальный характер: существование единственного гладкого решения задачи Коши гарантируется лишь в некоторой окрестности линии, задаваемой начальными данными (16) вместе с дополнительными условиями (17).

Замечание 2. Алгебраическая (или трансцендентная) система (18)–(19) может иметь несколько решений (см. пример 3 в конце этого раздела), что приводит к различным дополнительным начальным условиям для производных (17). Каждое из этих дополнительных условий будет порождать свое собственное решение задачи Коши (1), (16).

Замечание 3. Для нелинейных уравнений глобальное решение задачи Коши (1), (16) может оказаться многозначным также из-за пересечения характеристик в плоскости (x, y) (см. пример 7 в разд. 15.3). Подобная ситуация подробно обсуждалась в разд. 14.3–14.4, где рассматривались квазилинейные уравнения.

15.2.3. Задачи Коши для уравнения Гамильтона—Якоби

Начальное условие для уравнения Гамильтона — Якоби (14) обычно формулируется в виде

$$w = \varphi(y) \quad \text{при} \quad x = L. \tag{23}$$

В данном случае решение задачи Коши сводится к решению характеристической системы (15) с начальным условием

$$y = \xi, \quad w = \varphi(\xi), \quad q = \varphi'(\xi) \quad \text{при} \quad x = L, \tag{24}$$

где штрих означает производную по параметру ξ.

15.2.4. Примеры решения задачи Коши

Рассмотрим конкретные примеры.

Пример 5. Требуется найти решение уравнения

$$aw = pq, \qquad \text{где} \quad p = \frac{\partial w}{\partial x},\ q = \frac{\partial w}{\partial y}, \tag{25}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$w = f(y) \quad \text{при} \quad x = 0. \tag{26}$$

Запишем начальное условие (26) в параметрической форме:

$$x = 0, \quad y = \xi, \quad w = f(\xi). \tag{27}$$

Система (18)–(19) для определения $p_0(\xi)$ и $q_0(\xi)$ имеет вид: $af(\xi) = p_0q_0$, $q_0 - f'(\xi) = 0$. Отсюда имеем

$$p_0 = a\frac{f(\xi)}{f'(\xi)}, \quad q_0 = f'(\xi). \tag{28}$$

Характеристическая система (20) при $F = pq - aw$ записывается так:

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dw}{2pq} = \frac{dp}{ap} = \frac{dq}{aq} = d\tau. \tag{29}$$

Ее решение дается формулами (сначала интегрируются два последних уравнения):

$$p = C_1e^{a\tau}, \quad q = C_2e^{a\tau}, \quad x = \frac{C_2}{a}e^{a\tau} + C_3, \quad y = \frac{C_1}{a}e^{a\tau} + C_4, \quad w = \frac{C_1C_2}{a}e^{2a\tau} + C_5. \tag{30}$$

Используя начальные условия (27), (28), которые должны быть выполнены при $\tau = 0$, находим постоянные интегрирования

$$C_1 = a\frac{f(\xi)}{f'(\xi)}, \quad C_2 = f'(\xi), \quad C_3 = -\frac{f'(\xi)}{a}, \quad C_4 = \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}, \quad C_5 = 0.$$

Подставляя эти значения в (30), получим решение задачи Коши (25), (27) в параметрическом виде:

$$x = \frac{1}{a}f'(\xi)\bigl(e^{a\tau} - 1\bigr), \quad y = \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}\bigl(e^{a\tau} - 1\bigr) + \xi, \quad w = f(\xi)e^{2a\tau}.$$

Пример 6. Требуется найти решение уравнения

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = a^2, \tag{31}$$

проходящее через окружность

$$x^2 + y^2 = b^2, \quad w = 0. \tag{32}$$

Введя параметр ξ, запишем уравнение окружности так:

$$x = b\sin\xi, \quad y = b\cos\xi, \quad w = 0. \tag{33}$$

Уравнения для определения дополнительных начальных условий (18), (19) в данном случае имеют вид:

$$p_0^2 + q_0^2 = a^2, \quad p_0\cos\xi - \sin\xi q_0 = 0.$$

Отсюда получим

$$p_0 = \varepsilon a\sin\xi, \quad q_0 = \varepsilon a\cos\xi, \qquad \text{где } \varepsilon = \pm1. \tag{34}$$

Система (25) при $F = p^2 + q^2 - a^2$ записывается так:

$$\frac{dx}{2p} = \frac{dy}{2q} = \frac{dw}{2(p^2 + q^2)} = -\frac{dp}{0} = -\frac{dq}{0} = d\tau, \tag{35}$$

Ее решение дается формулами (сначала интегрируются два последних уравнения):

$$p = C_1, \quad q = C_2, \quad x = 2C_1\tau + C_3, \quad y = 2C_2\tau + C_4, \quad w = 2(C_1^2 + C_2^2)\tau + C_5. \tag{36}$$

Используя начальные условия (33), (34), которые должны быть выполнены при $\tau = 0$, находим постоянные интегрирования

$$C_1 = \varepsilon a\sin\xi, \quad C_2 = \varepsilon a\cos\xi, \quad C_3 = b\sin\xi, \quad C_4 = b\cos\xi, \quad C_5 = 0, \qquad \text{где } \varepsilon = \pm1.$$

Подставляя эти значения в (36), находим решение задачи Коши (31), (32) в параметрическом виде:

$$x = (2\varepsilon a\tau + b)\sin\xi, \quad y = (2\varepsilon a\tau + b)\cos\xi, \quad w = 2a^2\tau.$$

Исключая параметры ξ и τ, запишем решение в более наглядном виде:

$$a^2(x^2 + y^2) = (ab \pm w)^2. \tag{37}$$

Геометрическая интерпретация: формула (37) описывает два круглых конуса в пространстве $(x,\, y,\, w)$, у которых в основании лежит окружность (32) и общая ось совпадает с осью w. Координаты вершин конусов: $w = \pm ab$.

Важно отметить, что решение (37) является многозначной функцией.

Литература к разд. 15.2: В. В. Степанов (1958), Р. Курант (1964), Э. Камке (1966), И. Г. Петровский (1970).

15.3. Обобщенные вязкие решения и их приложения

15.3.1. Предварительные замечания

В разд. 15.1–15.2 изучались классические гладкие решения $w = w(x,y)$, имеющие непрерывные производные по обоим аргументам. Однако в теории оптимального управления, дифференциальных играх и некоторых других приложениях часто возникают задачи, решением которых являются непрерывные, но негладкие функции: см., например, А. И. Субботин (1991), W. H. Fleming, H. M. Soner (1993), A. I. Subbotin (1995), А. А. Меликян (1996), A. A. Melikyan (1998), M. Bardi, I. C. Dolcetta (1998). Для описания и построения обобщенных решений такого рода требуются другие подходы. Важно отметить, что для определения обобщенных решений нелинейных уравнений общего вида (1) и (14) не удается эффективно использовать наглядные конструкции типа интегральных равенств и законов сохранения, которые часто встречаются в теории квазилинейных уравнений (см. разд. 14.3–14.4).

Отметим, что негладкость решения может быть обусловлена различными причинами: 1) пересечением характеристик в плоскости (x,y) (см. далее пример 7), 2) негладкостью начального условия, 3) негладкостью функций F и $\mathcal{H}$, определяющих уравнения (1) и (14).

15.3.2. Вязкие решения, основанные на использовании параболического уравнения

Решение задачи Коши для уравнения (14) с начальным условием

$$w = \varphi(y) \quad \text{при} \quad x = 0 \tag{38}$$

можно аппроксимировать решением дифференциального уравнения с частными производными второго порядка параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \mathcal{H}\Big(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial y}\Big) = \varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (\varepsilon > 0) \tag{39}$$

с тем же самым начальным условием (38). Известно, что для достаточно широкого класса функций $\mathcal{H}$ и φ задача Коши для уравнения (39) имеет единственное решение. В теории уравнений Гамильтона — Якоби этот факт был использован для определения решения задачи Коши (14), (38) как предела решения задачи (39), (38): $w(x,y) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} u(x,y)$ [см., например, С. Н. Кружков (1966, 1975), M. G. Crandall, P.-L. Lions (1983)].

Эту конструкцию, основанную на предельном переходе при $\varepsilon \to 0$, как и в теории квазилинейных уравнений (см. разд. 14.3), называют методом исчезающей вязкости, а предельную функцию — вязким решением уравнения Гамильтона — Якоби.

Метод исчезающей вязкости можно реализовать, например, путем численного решения задачи (39), (38) при достаточно малых ε (в этом случае нет необходимости искать особые точки, в которых нарушается гладкость решения). Однако этот метод очень трудно использовать для построения аналитических решений, так как приходится рассматривать более сложное уравнение с частными производными второго порядка.

15.3.3. Обобщенные решения, основанные на пробных функциях и неравенствах

M. G. Crandall, P.-L. Lions (1983), M. G. Crandall, L. C. Evans, P.-L. Lions (1984) предложили обобщенные вязкие решения вводить с помощью интегральных неравенств. Этот подход не связан с рассмотрением уравнений более высокого порядка и позволяет в некоторых случаях получать обобщенное вязкое решение в аналитическом виде.

Определение. Непрерывная функция $w = w(x, y)$ называется вязким решением задачи с начальными данными (1), (38) в слое $0 \leqslant x \leqslant L$, если выполнены следующие условия [см., например, P.-L. Lions, P. E. Souganidis (1985), A. A. Melikyan (1998)]:

1°. Функция $w = w(x, y)$ удовлетворяет начальному условию (38).

2°. Пусть $\psi(x, y)$ — любая пробная непрерывно дифференцируемая функция. Если (x°, y°) — точка локального экстремума разности функций

$$w(x, y) - \psi(x, y), \tag{40}$$

то в этой точке должны выполняться неравенства

$$\begin{aligned} &F\big(x^\circ, y^\circ, w^\circ, \psi_x^\circ, \psi_y^\circ\big) \geqslant 0, \quad \text{если} \quad (x^\circ, y^\circ) \text{ — точка локального минимума,} \\ &F\big(x^\circ, y^\circ, w^\circ, \psi_x^\circ, \psi_y^\circ\big) \leqslant 0, \quad \text{если} \quad (x^\circ, y^\circ) \text{ — точка локального максимума.} \end{aligned} \tag{41}$$

Проверке подлежат только те точки локального экстремума, которые находятся внутри рассматриваемого слоя $(0 < x^\circ < L)$.

Отметим, что необязательно должна существовать пробная функция $\psi(x, y)$, для которой разность (40) имеет локальный экстремум. Однако если такая функция существует, то должно выполняться условие (41).

Если задача Коши имеет гладкое классическое решение, то оно совпадает с вязким обобщенным решением.

В теории оптимального управления и дифференциальных играх, помимо задач с начальными данными, встречаются также задачи с конечными данными, в которых решение уравнений (1) и (14) ищется в слое $0 \leqslant x \leqslant L$, а искомая величина w задается на правом конце слоя при $x = L$. Для этих задач в определении вязкого решения неравенства в (41) следует изменить на противоположные. Задачи с конечными данными сводятся к задачам с начальными данными путем введения вместо x новой независимой переменной $z = L - x$.

Отметим, что эквивалентные, но более сложные определения вязких минимаксных решений использовались в работах А. И. Субботина (1991), A. I. Subbotin (1995).

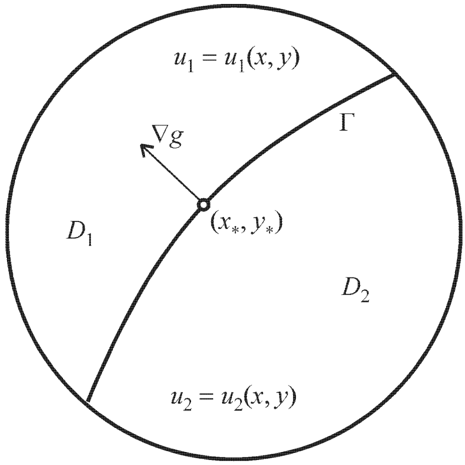

Рис. 19

15.3.4. Локальная структура обобщенных вязких решений

Обобщенное решение $w(x, y)$ состоит из регулярных и сингулярных точек. В некоторой окрестности регулярных точек функция $w(x, y)$ является решением в классическом смысле (такие дважды непрерывно дифференцируемые решения обсуждаются в теореме существования и единственности из разд. 15.2). Все нерегулярные точки относятся к сингулярным.

Пусть D — некоторая достаточно малая окрестность сингулярной точки (x_*, y_*). Обычно встречаются ситуации, когда сингулярные точки образуют некоторую гладкую кривую Γ, которая проходит через (x_*, y_*) и разбивает область D на две подобласти D_1 и D_2 (рис. 19). По обе стороны от Γ обобщенное решение w задается разными классическими решениями u_1 и u_2:

$$w(x, y) = \begin{cases} u_1(x, y), & \text{если } x, y \in D_1, \\ u_2(x, y), & \text{если } x, y \in D_2, \end{cases} \tag{42}$$

которые непрерывно, но негладко, сопрягаются вдоль общей границы. При переходе через Γ производные обобщенного решения $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial w}{\partial y}$ терпят разрыв. Будем считать, что гладкие составляющие обобщенного решения u_1 и u_2 гладко доопределены во всей рассматриваемой области D. Тогда уравнение кривой Γ, образованной сингулярными точками, можно записать в виде равенства

$$g(x, y) = 0, \qquad \text{где} \quad g(x, y) = u_2(x, y) - u_1(x, y). \tag{43}$$

Градиент функции g, направленный по нормали к кривой Γ, находится по формуле

$$\nabla g = (p_2 - p_1)\mathbf{e}_x + (q_2 - q_1)\mathbf{e}_y, \qquad p_n = \frac{\partial u_n}{\partial x}, \quad q_n = \frac{\partial u_n}{\partial y},$$

где $\mathbf{e}_x$ и $\mathbf{e}_y$ — направляющие векторы вдоль осей x и y. Возможны два случая.

1°. Вектор ∇g направлен из D_2 в D_1. В этом случае справедливы следующие утверждения, см. A. A. Melikyan (1998):

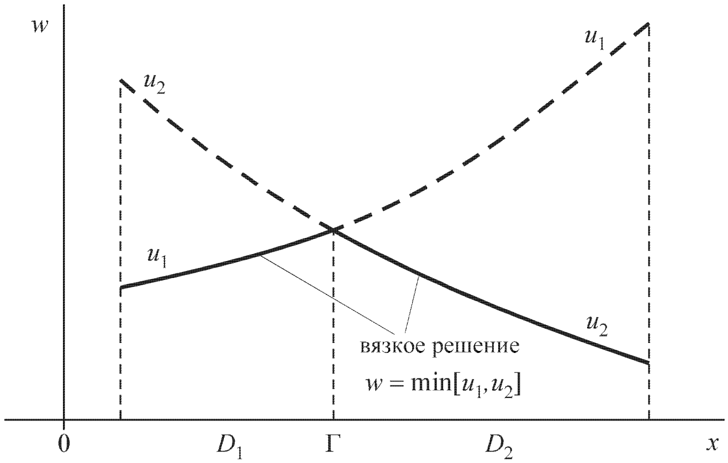

Рис. 20

A) Обобщенное решение в области D может быть записано в виде $w = \min[u_1,\, u_2]$, см. рис. 20.

B) Не существует гладкой пробной функции $\psi(x,y)$, такой, что локальный минимум разности функций (40) достигается в сингулярных точках, образующих Г.

C) Для однопараметрического семейства пробных функций

$$\psi(x,y) = \lambda u_2(x,y) + (1-\lambda)u_1(x,y), \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \tag{44}$$

максимум разности

$$\max_{x,y\in D}\bigl[w(x,y) - \psi(x,y)\bigr] \tag{45}$$

достигается в точках $x, y \in \Gamma$.

Замечание. Для обобщенного решения типа $w = \min[u_1,\, u_2]$ нет необходимости проверять первое неравенство (41); второе неравенство (41) достаточно проверить только на однопараметрическом семействе пробных функций (44).

2°. Вектор ∇g направлен из D_1 в D_2. В этом случае обобщенное решение можно представить в виде $w = \max[u_1,\, u_2]$ и надо проверять лишь первое неравенство (41) на однопараметрическом семействе пробных функций (44).

15.3.5. Обобщение классического метода характеристик

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Гамильтона — Якоби

$$\begin{gathered}\frac{\partial w}{\partial x} + \mathcal{H}\Bigl(x, y, \frac{\partial w}{\partial y}\Bigr) = 0,\\ w = \varphi(y) \quad \text{при} \quad x = L.\end{gathered} \tag{46}$$

Считаем, что функция $\mathcal{H}(x,y,q)$ является выпуклой по аргументу q для всех $x \in (0, L]$, $y \in \mathbb{R}$, а функция $\mathcal{H}(x,y,q)$ непрерывно дифференцируема по x, y, q, причем существуют вторые производные $\mathcal{H}_{xy}$, $\mathcal{H}_{xq}$.

Пусть решение характеристической системы (15), удовлетворяющее условию (24), имеет вид

$$y = Y(x,\xi), \quad w = W(x,\xi), \quad q = Q(x,\xi). \tag{47}$$

Обозначим через $\{\xi_n = \xi_n(x, y)\}$ множество функций, полученных путем разрешения первого равенства (47) относительно параметра ξ. Индекс n указывает на число таких функций.

Классический метод характеристик может быть использован для построения обобщенного вязкого решения с помощью формулы

$$w(x, y) = \max_{\xi \in \{\xi_n\}} W(x, \xi) \tag{48}$$

для всех $x \in (0, L]$, $y \in \mathbb{R}$. Значению $n = 1$ соответствует классическое гладкое решение. Формула (48) была получена S. Mirică (1985) и Н. Н. Субботиной (1991).

15.3.6. Примеры вязких (негладких) решений

Ниже рассмотрены две задачи, которые встречается в теории игр: см. А. И. Субботин (1991), A. I. Subbotin (1995).

Пример 7. Рассмотрим задачу с конечными данными для уравнения Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2} = 0 \tag{49}$$

с начальным условием

$$w = \tfrac{1}{2} y^2 \quad \text{при} \quad x = L. \tag{50}$$

Решение ищется в области $0 \leqslant x \leqslant L$.

Характеристическая система (15) для уравнения (49) с гамильтонианом $\mathcal{H}(x, y, w, q) = \sqrt{1 + q^2}$ имеет вид

$$y'_x = \frac{q}{\sqrt{1 + q^2}}, \quad w'_x = -\frac{1}{\sqrt{1 + q^2}}, \quad q'_x = 0. \tag{51}$$

Начальные условия получим из (24) при $\varphi(\xi) = \frac{1}{2}\xi^2$:

$$y = \xi, \quad w = \tfrac{1}{2}\xi^2, \quad q = \xi \quad \text{при} \quad x = L. \tag{52}$$

Интегрируя уравнения (51) с условиями (52), находим решение задачи Коши (49)–(50):

$$y = \frac{\xi(x - L)}{\sqrt{1 + \xi^2}} + \xi, \quad w = \frac{L - x}{\sqrt{1 + \xi^2}} + \tfrac{1}{2}\xi^2. \tag{53}$$

На рис. 21 в плоскости (x, y) изображены характеристики $y(x, \xi)$ при $L = 2$ для значений параметра $\xi = 0; \pm 0{,}2; \pm 0{,}4; \ldots; \pm 1{,}0$. Видно, что характеристики пересекаются. В данном примере можно построить локальное классическое решение задачи (49), (50). Однако его нельзя продолжить на весь рассматриваемый слой $0 \leqslant x \leqslant L$ (т. е. не существует глобального классического решения). Обратим внимание на то, что гамильтониан $\mathcal{H} = \sqrt{1 + q^2}$ уравнения (49) и функция, задающая начальное условие (50), являются бесконечно дифференцируемыми функциями.

Вязкое решение задачи Коши (49)–(50) имеет вид

$$w(x, y) = \max_{q \in \mathbb{R}} \bigl[qy + (L - x)\sqrt{1 + q^2} - \tfrac{1}{2}q^2\bigr], \tag{54}$$

где $0 \leqslant x \leqslant L$, y — любое. Линии уровня этой функции изображены на рис. 22. Жирной линией показано множество сингулярных точек, в которых решение недифференцируемо.

Пример 8. Рассмотрим задачу с конечными данными для более общего уравнения Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \mathcal{H}\Big(\frac{\partial w}{\partial y}\Big) = 0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant L) \tag{55}$$

с начальным условием общего вида

$$w = \varphi(y) \quad \text{при} \quad x = L. \tag{56}$$

Справедливы следующие два утверждения:

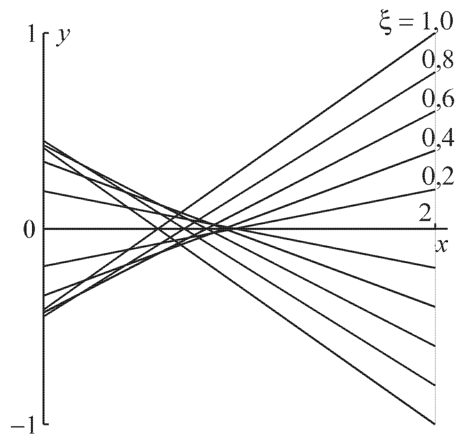

Рис. 21

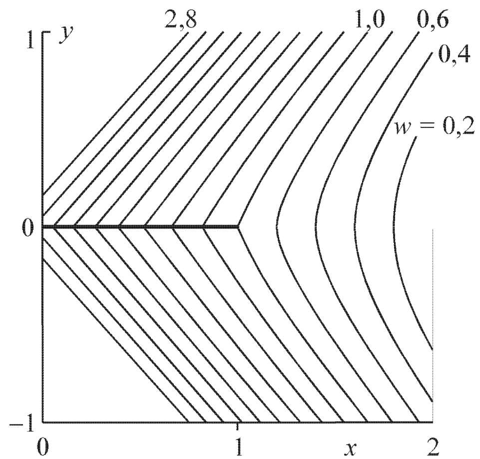

Рис. 22

1°. Пусть гамильтониан удовлетворяет условию Липшица

$$|\mathcal{H}(q_2) - \mathcal{H}(q_1)| \leqslant \beta|q_2 - q_1| \qquad \text{для любых } q_1, q_2 \in \mathbb{R}, \tag{57}$$

а $\varphi(y)$ — выпуклая функция. Тогда вязкое решение задачи (55)–(56) имеет вид

$$w(x, y) = \sup_{q\in\mathbb{R}}\bigl[qy + (L - x)\mathcal{H}(q) - \varphi^*(q)\bigr],$$

где φ^* — функция, сопряженная функции φ, т. е.

$$\varphi^*(q) = \sup_{x\in\mathbb{R}}\bigl[qx - \varphi(x)\bigr].$$

2°. Пусть гамильтониан $\mathcal{H}(q)$ является выпуклым и удовлетворяет условию Липшица (57), а функция $\varphi(y)$ — непрерывна. Тогда функция

$$w(x, y) = \sup_{t\in\mathbb{R}}\bigl[\varphi(y + (L - x)t) - (L - x)\mathcal{H}^*(t)\bigr]$$

является вязким решением задачи (55)–(56). Здесь функция

$$\mathcal{H}^*(t) = \sup_{q\in\mathbb{R}}\bigl[qt - \mathcal{H}(q)\bigr]$$

является сопряженной функцией к гамильтониану $\mathcal{H}(q)$.

Первоначально различные формулы для обобщенного решения уравнения (55) с начальным условием при $x = 0$ были получены Хопфом (E. Hopf, 1965), который рассматривал область $x > 0$. Позже M. Bardi, L. C. Evans (1984) показали, что решения Хопфа являются вязкими решениями.

Литература к разд. 15.3: E. Hopf (1965), С. Н. Кружков (1966, 1975), P.-L. Lions (1982), M. G. Crandall, P.-L. Lions (1983), M. G. Crandall, L. C. Evans, P.-L. Lions (1984), P.-L. Lions, P. E. Souganidis (1985), E. N. Barron, R. Jensen (1987), H. Ishii (1988), А. И. Субботин (1991), M. G. Crandall, H. Ishii, P.-L. Lions (1992), W. H. Fleming, H. M. Soner (1993), A. I. Subbotin (1995), А. А. Меликян (1996), A. A. Melikyan (1998), M. Bardi, I. C. Dolcetta (1998), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (2003).

16. Решение некоторых функциональных уравнений

16.1. Метод дифференцирования по параметру

16.1.1. Рассматриваемые классы уравнений. Описание метода

Будем рассматривать функциональные уравнения вида

$$w(x,t) = \theta(x,t,a)w\bigl(\varphi(x,t,a), \psi(x,t,a)\bigr), \tag{1}$$

где x и t — независимые переменные, $w = w(x,t)$ — искомая функция, $\theta = \theta(x,t,a)$, $\varphi = \varphi(x,t,a)$, $\psi = \psi(x,t,a)$ — заданные функции, a — свободный параметр, который может принимать любые значения (на некотором интервале). Будем считать, что при частном значении $a = a_0$ выполняются равенства

$$\theta(x,t,a_0) = 1, \quad \varphi(x,t,a_0) = x, \quad \psi(x,t,a_0) = t, \tag{2}$$

т. е. при $a = a_0$ рассматриваемое функциональное уравнение (1) превращается в тождество.

Разложим (1) в ряд по параметру a в окрестности a_0 с учетом равенств (2), затем разделим полученное выражение на $a - a_0$ и перейдем к пределу при $a \to a_0$. В результате получим линейное уравнение с частными производными первого порядка для функции w:

$$\varphi_a^\circ(x,t)\frac{\partial w}{\partial x} + \psi_a^\circ(x,t)\frac{\partial w}{\partial t} + \theta_a^\circ(x,t)w = 0, \tag{3}$$

где использованы обозначения

$$\varphi_a^\circ(x,t) = \frac{\partial \varphi}{\partial a}\bigg|_{a=a_0}, \quad \psi_a^\circ(x,t) = \frac{\partial \psi}{\partial a}\bigg|_{a=a_0}, \quad \theta_a^\circ(x,t) = \frac{\partial \theta}{\partial a}\bigg|_{a=a_0}.$$

Для решения уравнения (3) надо рассмотреть соответствующую характеристическую систему уравнений

$$\frac{dx}{\varphi_a^\circ(x,t)} = \frac{dt}{\psi_a^\circ(x,t)} = -\frac{dw}{\theta_a^\circ(x,t)w}. \tag{4}$$

Пусть

$$u_1(x,t) = C_1, \quad u_2(x,t,w) = C_2 \tag{5}$$

— независимые интегралы характеристической системы (4). Тогда общее решение уравнения (3) имеет вид

$$u_2(x,t,w) = F\bigl(u_1(x,t)\bigr), \tag{6}$$

где $F(z)$ — произвольная функция.

Из решения (6) надо выразить w и подставить его для проверки в исходное уравнение (1) [могли появится лишние решения; возможны также случаи, когда решение уравнения с частными производными (3) вообще не является решением функционального уравнения (1): см. далее пример 3].

Замечание 1. Уравнение (3) можно получить из (1) путем дифференцирования по параметру a, после чего надо положить $a = a_0$.

Замечание 2. Второй интеграл (5) удобно выбрать линейным относительно w, т. е. $u_2(x,t,w) = \xi(x,t)w$, а формулу (6) переписать в виде, разрешенном относительно w.

16.1.2. Решение конкретных функциональных уравнений методом дифференцирования по параметру

Пример 1. Автомодельные решения, которые часто встречаются в математической физике, можно определить как решения, инвариантные относительно преобразования масштабирования, т. е. удовлетворяющие функциональному уравнению:

$$w(x,t) = a^k w(a^m x, a^n t), \tag{7}$$

где k, m, n — некоторые заданные константы, $a > 0$ — произвольная постоянная.

Уравнение (7) обращается в тождество при $a = 1$. Дифференцируя (7) по a, а затем полагая $a = 1$, приходим к дифференциальному уравнению с частными производными первого порядка:

$$mx\frac{\partial w}{\partial x} + nt\frac{\partial w}{\partial t} + kw = 0. \tag{8}$$

Первые интегралы соответствующей характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{mx} = \frac{dt}{nt} = -\frac{dw}{kw}$$

записываются так:

$$xt^{-m/n} = C_1, \quad t^{k/n}w = C_2 \qquad (n \neq 0).$$

Поэтому общее решение уравнения с частными производными (8) имеет вид

$$w(x,t) = t^{-k/n}F(z), \quad z = xt^{-m/n}, \tag{9}$$

где $F(z)$ — произвольная функция. Прямой проверкой можно убедиться, что выражение (9) является решением рассматриваемого функционального уравнения (7).

Пример 2. Рассмотрим функциональное уравнение

$$w(x,t) = a^k w(a^m x, t + \beta \ln a), \tag{10}$$

где k, m, β — некоторые заданные константы, $a > 0$ — произвольная постоянная.

Уравнение (10) обращается в тождество при $a = 1$. Дифференцируя (10) по a, а затем полагая $a = 1$, приходим к дифференциальному уравнению с частными производными первого порядка:

$$mx\frac{\partial w}{\partial x} + \beta\frac{\partial w}{\partial t} + kw = 0. \tag{11}$$

Соответствующая характеристическая система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{mx} = \frac{dt}{\beta} = -\frac{dw}{kw}$$

допускает первые интегралы:

$$x\exp(-mt/\beta) = C_1, \quad w\exp(kt/\beta) = C_2.$$

Поэтому общее решение уравнения с частными производными (11) имеет вид

$$w(x,t) = \exp(-kt/\beta)F(z), \quad z = x\exp(-mt/\beta), \tag{12}$$

где $F(z)$ — произвольная функция. Прямой проверкой можно убедиться, что выражение (12) является решением функционального уравнения (10).

Пример 3. Рассмотрим теперь функциональное уравнение

$$w(x,t) = a^k w\bigl(x + (1-a)t,\ a^n t\bigr), \tag{13}$$

где $a > 0$ — любое, n — некоторая константа.

Уравнение (13) обращается в тождество при $a=1$. Дифференцируя (13) по a, а затем полагая $a=1$, приходим к дифференциальному уравнению с частными производными первого порядка:

$$-t\frac{\partial w}{\partial x}+nt\frac{\partial w}{\partial t}+kw=0. \qquad (14)$$

Соответствующая характеристическая система

$$-\frac{dx}{t}=\frac{dt}{nt}=-\frac{dw}{kw}$$

имеет первые интегралы:

$$t+nx=C_1, \qquad wt^{k/n}=C_2.$$

Поэтому общее решение уравнения с частными производными (14) имеет вид

$$w(x,t)=t^{-k/n}F(nx+t), \qquad (15)$$

где $F(z)$ — произвольная функция.

Подставим выражение (15) в исходное уравнение (13). После сокращения на $t^{-k/n}$ получим

$$F(nx+t)=F(nx+\sigma t), \qquad \sigma=(1-a)n+a^n. \qquad (16)$$

Отсюда при $F(z)\neq\mathrm{const}$ имеем $\sigma=1$, или

$$(1-a)n+a^n=1. \qquad (17)$$

Поскольку равенство (16) должно выполняться для любых $a>0$, то и (17) должно выполняться для любых $a>0$. Это может быть только при одном значении:

$$n=1.$$

В этом случае решение уравнения (13) дается формулой [см. (15) при $n=1$]:

$$w(x,t)=t^{-k}F(x+t), \qquad (18)$$

где $F(z)$ — произвольная функция.

Если $n\neq 1$, то уравнение (13) имеет только вырожденное решение $w(x,t)=Ct^{-k/n}$, где C — произвольная постоянная [вырожденное решение соответствует $F=\mathrm{const}$ в (16)].

16.2. Метод дифференцирования по независимым переменным

16.2.1. Предварительные замечания

1°. В ряде случаев путем дифференцирования по независимым переменным удается исключить некоторые аргументы рассматриваемого функционального уравнения и свести его к обыкновенному дифференциальному уравнению. Полученное таким образом решение затем надо подставить в исходное уравнение, чтобы «убрать» лишние постоянные интегрирования (которые могут возникнуть из-за дифференцирования).

2°. В некоторых случаях процедуру дифференцирования по независимым переменным надо проводить в комбинации с умножением (делением) уравнения и его дифференциальных следствий на подходящие функции. Иногда уравнение или его следствия полезно логарифмировать.

16.2.2. Решение конкретных функциональных уравнений методом дифференцирования по независимым переменным

Пример 4. Рассмотрим уравнение Пексидера (Pexider):

$$f(x)+g(y)=h(x+y), \qquad (19)$$

где $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$ — искомые функции.

Дифференцируя функциональное уравнение (19) по x и по y, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению $h''_{zz}(z) = 0$, где $z = x + y$. Его решением является линейная функция

$$h(z) = az + b. \tag{20}$$

Подставляя это выражение в (19), получим

$$f(x) + g(y) = ax + ay + b.$$

Разделяя переменные, находим функции f и g:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + b + c, \\ g(y) &= ay - c. \end{aligned} \tag{21}$$

Таким образом, решение уравнения Пексидера (19) дается формулами (20), (21), где a, b, c — произвольные постоянные.

Пример 5. Рассмотрим нелинейное функциональное уравнение

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + af(x)f(y), \qquad a \neq 0, \tag{22}$$

которое при $a = -1$ встречается в теории вероятностей.

Дифференцируя обе части уравнения по x и y, имеем

$$f''_{zz}(z) = af'_x(x)f'_y(y), \tag{23}$$

где $z = x + y$. Прологарифмируем обе части уравнения (23), а затем полученное равенство продифференцируем по x и y. Приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$[\ln f''_{zz}(z)]''_{zz} = 0. \tag{24}$$

Интегрируя (24) дважды по переменной z, имеем

$$f''_{zz}(z) = C_1 \exp(C_2 z), \tag{25}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Подставив (25) в (23), получим уравнение

$$C_1 \exp[C_2(x+y)] = af'_x(x)f'_y(y),$$

которое допускает разделение переменных. Интегрирование приводит к выражению

$$f(x) = A\exp(C_2 x) + B, \qquad A = \pm\frac{1}{C_2}\sqrt{\frac{C_1}{a}}. \tag{26}$$

Подставив (26) в исходное уравнение (22), находим значения постоянных: $A = -B = 1/a$ и $C_2 = \beta$ — произвольная постоянная. В результате получим искомое решение

$$f(x) = \frac{1}{a}\bigl(e^{\beta x} - 1\bigr).$$

16.3. Решение функциональных уравнений методом исключения аргумента

16.3.1. Рассматриваемые классы уравнений. Описание метода

Будем исследовать функциональные уравнения вида (1).

Вместо уравнения (1) рассмотрим более общее вспомогательное функциональное уравнение

$$w(x,t) = \theta(x,t,\xi)w\bigl(\varphi(x,t,\xi), \psi(x,t,\xi)\bigr), \tag{27}$$

где $\xi = \xi(x,t)$ — произвольная функция.

Основная идея: если нам удастся получить точное решение уравнения (27), то это решение будет одновременно и решением исходного функционального уравнения (1) [так как уравнение (1) соответствует частному случаю уравнения (27) при $\xi = a$].

Поскольку функция $\xi = \xi(x,t)$ является произвольной, выберем ее из условия

$$\psi(x,t,\xi) = b, \tag{28}$$

где b — некоторая постоянная (обычно удобно полагать $b = 1$ или $b = 0$). Разрешив (28) относительно ξ и подставив полученную зависимость $\xi = \xi(x,t)$ в (27), имеем

$$w(x,t) = \theta(x,t,\xi(x,t))\Phi(\varphi(x,t,\xi(x,t))), \tag{29}$$

где использовано обозначение $\Phi(\varphi) \equiv w(\varphi, b)$.

Выражение (29) является основой для построения точного решения исходного функционального уравнения: его надо подставить в (1) и выяснить, для каких функций $\Phi(\varphi)$ оно будет решением (при этом могут появиться некоторые ограничения на вид определяющих функций θ, φ, ψ).

Замечание 3. Условие (28) соответствует исключению второго аргумента (поскольку он заменяется на константу) в правой части уравнения (27).

Замечание 4. Вместо условия (28) функцию $\xi = \xi(x,t)$ можно выбирать из аналогичного условия: $\varphi(x,t,\xi) = b$.

16.3.2. Решение конкретных функциональных уравнений методом исключения аргумента

Пример 6. Рассмотрим функциональное уравнение (7), которое является частным случаем уравнения (1) при $\theta(x,t,a) = a^k$, $\varphi(x,t,a) = a^m x$, $\psi(x,t,a) = a^n t$.

Следуя описанной в разд. 16.3.1 схеме, используем вспомогательное уравнение

$$w(x,t) = \xi^k w(\xi^m x, \xi^n t), \tag{30}$$

где функцию ξ согласно (28) определим из условия

$$\xi^n t = 1 \qquad (b = 1). \tag{31}$$

Отсюда находим $\xi = t^{-1/n}$. Подставив эту зависимость в (30), имеем

$$w(x,t) = t^{-k/n}\Phi(t^{-m/n}x), \tag{32}$$

где использовано обозначение $\Phi(\varphi) \equiv w(\varphi, 1)$.

Прямой проверкой легко установить, что выражение (32) является решением рассматриваемого функционального уравнения (7) для произвольной функции Φ и совпадает (с точностью до переобозначения) с решением (9), полученным методом дифференцирования по параметру.

Замечание 5. Вместо 1 в правой части равенства (31) можно было взять любую отличную от нуля константу b; результат был бы тем же самым (с точностью до переопределения произвольной функции Φ).

Пример 7. Рассмотрим функциональное уравнение (10), которое является частным случаем уравнения (1) при $\theta(x,t,a) = a^k$, $\varphi(x,t,a) = a^m x$, $\psi(x,t,a) = t + \beta \ln a$.

Следуя описанной схеме, рассмотрим более общее вспомогательное уравнение

$$w(x,t) = \xi^k w(\xi^m x, t + \beta \ln \xi). \tag{33}$$

Функцию ξ найдем из условия

$$t + \beta \ln \xi = 0 \qquad (b = 0).$$

Имеем $\xi = \exp(-t/\beta)$. Подставив эту зависимость в (33), получим

$$w(x,t) = e^{-kt/\beta}\Phi(xe^{-mt/\beta}), \tag{34}$$

где использовано обозначение $\Phi(\varphi) \equiv w(\varphi, 0)$. Прямой проверкой можно убедиться, что выражение (34) является решением функционального уравнения (10) для произвольной функции Φ и совпадает с решением (12), полученным методом дифференцирования по параметру.

Пример 8. Рассмотрим теперь функциональное уравнение (13), которое является частным случаем уравнения (1) при $\theta(x,t,a)=a^k$, $\varphi(x,t,a)=x+(1-a)t$, $\psi(x,t,a)=a^n t$.

Следуя описанной схеме, рассмотрим вспомогательное уравнение

$$w(x,t)=\xi^k w\bigl(x+(1-\xi)t,\,\xi^n t\bigr). \tag{35}$$

где функцию ξ согласно (28) определим из условия (31). Имеем $\xi=t^{-1/n}$. Подставив эту зависимость в (35), получим

$$w(x,t)=t^{-k/n}\Phi(z),\qquad z=x+t-t^{(n-1)/n}, \tag{36}$$

где использовано обозначение $\Phi(\varphi)\equiv w(\varphi,1)$.

Подставим выражение (36) в исходное уравнение (13). После сокращения на $t^{-k/n}$ имеем

$$\Phi\bigl(x+t-t^{(n-1)/n}\bigr)=\Phi\bigl(x+(1-a+a^n)t-a^{n-1}t^{(n-1)/n}\bigr). \tag{37}$$

Поскольку это равенство должно выполняться для всех $a>0$, то имеются две возможности:

$$\begin{aligned}&1)\qquad n\text{ — любое},\quad \Phi=C=\mathrm{const};\\&2)\qquad n=1,\qquad\quad \Phi\text{ — любая}.\end{aligned} \tag{38}$$

Во втором случае, соответствующем значению $n=1$ в функциональном уравнении (13), его решение записывается так:

$$w(x,t)=t^{-k}F(x+t), \tag{39}$$

где $F(z)$ — произвольная функция, $F(z)=\Phi(z-1)$. Видно, что формула (39) совпадает с решением (18), полученным методом дифференцирования по параметру.

Замечание 6. Результаты решения конкретных функциональных уравнений, полученных в разд. 16.3.2 методом исключения аргумента, совпадают с результатами решения этих уравнений, полученными в разд. 16.1.2 методом дифференцирования по параметру. Следует отметить однако, что промежуточные результаты решения уравнения (18) этими методами не совпадают [сравни формулы (15) и (36)].

Замечание 7. Метод исключения аргумента значительно проще метода дифференцирования по параметру, поскольку он связан только с разрешением алгебраических (трансцендентных) уравнений вида (28) относительно ξ и не связан с выводом и решением соответствующих дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка.

Литература к главе 16: Я. Ацел, Ж. Домбр (2003), A. D. Polyanin, A. I. Zhurov (2004, 2005).

Список литературы

Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. — М.: Мир, 1987.

Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Харьков: ОНТИ, 1939.

Андреев В. К., Капцов О. В., Пухначев В. В., Родионов А. А. Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. — Новосибирск: Наука, 1994.

Андреянов Б. П. Метод исчезающей вязкости и явное решение задачи Римана для скалярного закона сохранения. // Вестник МГУ, сер. мат. и мех., 1999, № 1, с. 3–8.

Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1974.

Ацел Я., Домбр Ж. Функциональные уравнения с несколькими переменными. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.

Бабич В. М., Капилевич М. Б., Михлин С. Г., Натансон Г. И., Риз П. М., Слободецкий Л. Н., Смирнов М. М. Линейные уравнения математической физики. — М.: Наука, 1964.

Баренблатт Г. И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде. // Прикл. матем. и механика, 1952, т. 16, № 1, с. 67–78.

Баренблатт Г. И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. — М.: Гидрометеоиздат, 1978.

Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. — М.: Недра, 1984.

Беллман Р. Динамическое программирование. — М.: Изд-во иностр. литер., 1960.

Буллаф Р., Кодри Ф. (ред.) Солитоны. — М.: Мир, 1983.

Виноградов А. М., Красильщик И. С. (ред.). Симметрии и законы сохранения в математической физике. — М.: Факториал, 1997.

Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1985.

Галактионов В. А., Посашков С. А. О новых точных решениях параболических уравнений с квадратичными нелинейностями. // Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1989, т. 29, № 4, с. 497–506.

Галактионов В. А., Посашков С. А. Точные решения и инвариантные пространства для нелинейных уравнений градиентной диффузии. // Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1994, т. 34, № 3, с. 374–383.

Гельфанд И. М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений. // Успехи мат. наук, 1959, т. 14, № 2, с. 87–158.

Гельфанд И. М., Левитан Б. М., Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции. // Изв. АН СССР, Сер. матем., 1951, т. 45, № 4, с. 309–360.

Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.

Городцов В. А. Теплоперенос и турбулентная диффузия в одномерной гидродинамике без давления. // Прикл. матем. и механика, 1998, т. 62, № 6, с. 1021–1028.

Городцов В. А. Эффект локального роста концентрации примеси в одномерной гидродинамике. // Прикл. матем. и механика, 2000, т. 64, № 4, с. 615–623.

Громак В. И., Зинченко А. С. К теории уравнений Пенлеве высших порядков. // Диф. уравнения, 2004, т. 40, № 5, с. 582–589.

Громак В. И., Лукашевич Н. А. Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. — Минск: Университетское, 1990.

Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. — М.: Мир, 1988.

Дородницын В. А. Об инвариантных решениях уравнения нелинейной теплопроводности с источником. // Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1982, т. 22, № 6, с. 1393–1400.

Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными: Точные решения. — М.: Международная программа образования, 1996.

Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001 *a*.

Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Точные решения и преобразования нелинейных уравнений теплопроводности и теории волн. // Доклады РАН, 2001 *b*, т. 381, № 1, с. 31–36.

Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.

Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов: Метод обратной задачи. — М.: Наука, 1980.

Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д. Уравнение Кортевега — де Фриса — вполне интегрируемая гамильтонова система. // Функц. анализ и его прилож., 1971, т. 5, № 4, с. 18–27.

Захаров В. Е., Шабат А. Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах. // Журн. экспер. и теор. физики, 1971, т. 61, № 1, с. 118–134.

Захаров В. Е., Шабат А. Б. Схема интегрирования нелинейных эволюционных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. // Функц. анализ и его прилож., 1974, т. 8, № 3, с. 43–53.

Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. — М.: Наука, 1983.

Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. — М.: Наука, 1966.

Киряков П. П., Сенашов С. И., Яхно А. Н. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001.

Климов Д. М., Байдулов В. Г., Городцов В. А. Испытание Ковалевской — Пенлеве уравнений мелкой воды с использованием пакета Maple. // Доклады РАН, 2001, т. 376, № 5, с. 600–604.

Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. — М.: Физматгиз, 1963.

Кружков С. Н. Обобщенные решения нелинейных уравнений со многими независимыми переменными. // Мат. сборник, 1966, т. 70, № 3, с. 394–416.

Кружков С. Н. Обобщенные решения уравнений Гамильтона — Якоби типа эйконала. // Мат. сборник, 1975, т. 27, с. 406–446.

Кудряшов Н. А. Метод разложений Пенлеве для неинтегрируемых нелинейных уравнений. // Мат. моделирование, 1990*a*, т. 2, № 12, с. 102–116.

Кудряшов Н. А. Точные решения нелинейных волновых уравнений, встречающихся в механике. // Прикл. матем. и механика, 1990*b*, т. 54, № 3, с. 450–453.

Кудряшов Н. А. О точных решениях уравнений семейства Фишера. // Теор. и мат. физика, 1993, т. 94, № 2, с. 296–306.

Кудряшов Н. А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. — Москва–Ижевск, Институт компьютерных исследований. 2004.

Кудряшов Н. А., Сухарев М. Б. Точные решения нелинейного уравнения пятого порядка для описания волн на воде. // Прикл. матем. и механика, 2001, т. 65, № 5, с. 884–893.

Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.

Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. Нелинейные волны в упругих средах. — М.: Моск. лицей, 1998.

Курант Р. Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964.

Куренский М. Г. Дифференциальные уравнения. Книга вторая: дифференциальные уравнения с частными производными. — Л.: Изд. Артиллерийской акад. РККА, 1934.

Лагно В. И., Спичак С. В., Стогний В. И. Симметрийный анализ уравнений эволюционного типа. — Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.

Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1973.

Маркеев А. П. Теоретическая механика. — М.: Наука, 1990.

Маслов В. П., Данилов В. Г., Волосов К. А. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. — М.: Наука, 1987.

Математическая физика. Энциклопедия (ред. Л. Д. Фаддеев). — М.: Большая Российская энциклопедия, 1998.

Меликян А. А. Сингулярные характеристики уравнений в частных производных первого порядка. // Доклады РАН, 1996, т. 351, № 1, с. 24–28.

Овсянников Л. В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности. // Доклады АН СССР, 1959, т. 125, № 3, с. 492–495.

Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. — Новосибирск: Изд. СО АН СССР, 1962.

Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.

Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 1989.

Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. — М.: Наука, 1990.

Олейник О. А. О задаче Коши для нелинейных уравнений в классе разрывных функций. // Доклады АН СССР, 1954, т. 95, № 3, с. 451–454.

Олейник О. А. Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений. // Успехи мат. наук, 1957, т. 12, № 3, с. 3–73.

Олейник О. А. О единственности и устойчивости обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения. // Успехи мат. наук, 1959, т. 14, № 2, с. 165–170.

Павловский Ю. Н. Исследование некоторых инвариантных решений уравнений пограничного слоя. // Журн. вычисл. мат. и мат. физики, 1961, т. 1, № 2, с. 280–294.

Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. — М.: Наука, 1970.

Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001 *a*.

Полянин А. Д. Точные решения и преобразования уравнений стационарного ламинарного пограничного слоя. // Теор. основы хим. технол., 2001 *b*, т. 35, № 4, с. 339–348.

Полянин А. Д. Точные решения уравнений Навье — Стокса с обобщенным разделением переменных. // Доклады РАН, 2001 *c*, т. 380, № 4, с. 491–496.

Полянин А. Д. Неклассические (неинвариантные) решения типа бегущей волны и автомодельные решения. // Доклады РАН, 2004, т. 398, № 1, с. 33–37.

Полянин А. Д., Журов А. И. Точные решения нелинейных уравнений механики и математической физики. // Доклады РАН, 1998, т. 360, № 5, с. 640–644.

Полянин А. Д., Журов А. И. Обобщенное и функциональное разделение переменных в математической физике и механике. // Доклады РАН, 2002, т. 382, № 5, с. 606–611.

Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

Похожаев С. И. Об одной задаче Л. В. Овсянникова. // Прикл. мех. и техн. физика, 1989, № 2, с. 5–10.

Пухначев В. В. Групповые свойства уравнений Навье — Стокса в плоском случае. // Прикл. мех. и техн. физика, 1960, № 1, с. 83–90.

Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М.: Наука, 1978.

Розендорн Е. Р. Некоторые классы частных решений уравнения $z_{xx}z_{yy} + a\nabla z = 0$ и их приложения в задачах метеорологии. // Вестник МГУ, Сер. 1 (математика и механика), 1984, № 2, с. 56–58.

Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. — М.: Наука, 1972.

Сидоров А. Ф., Шапеев В. П., Яненко Н. Н. Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. — Новосибирск: Наука, 1984.

Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1958.

Субботин А. И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона — Якоби. — М.: Наука, 1991.

Субботина Н. Н. Метод характеристик Коши и обобщенные решения уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана. // Доклады АН СССР, 1991, т. 320, № 3, с. 556–561.

Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. — М.: Наука, 1986.

Титов С. С. Метод конечномерных колец для решения нелинейных уравнений математической физики. // Аэродинамика. — Саратов: Саратовский ун-т, 1988, с. 104–110.

Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1972.

Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.

Федорюк М. В. Метод перевала. — М.: Наука, 1977.

Федорюк М. В. Асимптотики: Интегралы и ряды. — М.: Наука, 1987.

Фущич В. И., Штелень В. М., Серов Н. И. Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. — Киев: Наукова Думка, 1989.

Черный Г. Г. Газовая динамика. — М.: Наука, 1988.

Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1974.

Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1969.

Яненко Н. Н. Теория совместности и методы интегрирования систем нелинейных уравнений в частных производных. // Труды IV Всесоюзного мат. съезда, том 2. — Л.: Наука, 1964, с. 613–621.

Ablowitz M. J., Clarkson P. A. Solitons, Non-linear Evolution Equations and Inverse Scattering. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991.

Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C., Segur H. Methods for solving the sine-Gordon equation. // Phys. Rev. Lett., 1973, Vol. 30, pp. 1262–1264.

Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C., Segur H. Nonlinear evolution equations of physical significance. // Phys. Rev. Lett., 1973, Vol. 31, pp. 125–127.

Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C., Segur H. The inverse scattering transforms — Fourier analysis for nonlinear problems. // Studies in Appl. Math., 1974, Vol. 53, pp. 249–315.

Ablowitz M. J., Ramani A., Segur H. A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. // J. Math. Phys., 1980, Vol. 21, pp. 715–721, pp. 1006–1015.

Ames W. F. Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering, Vol. 2. — New York: Academic Press, 1972.

Bardi M., Dolcetta I. C. Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman Equations. — Boston: Birkhäuser, 1998.

Barron E. N., Jensen R. Generalized viscosity solutions for Hamilton–Jacobi equations with time-measurable Hamiltonians. // J. Different. Equations, 1987, Vol. 68, № 1, pp. 10–21.

Baumann G. Symmetry Analysis of Differential Equations with Mathematica. — New York: Springer-Verlag, 2000.

Bedrikorvetsky P. Mathematical Theory of Oil and Gas Recovery. — London: Kluwer Acad. Publ., 1993.

Belokolos E. D., Bobenko A. I., Enol'skii V. Z., Its A. R., Matveev V. B. Algebro-Geometric Approach to Nonlinear Integrable Equations. — Berlin: Springer, 1994.

Bluman G. W., Cole J. D. The general similarity solution of the heat equation. // J. Math. Mech., 1969, Vol. 18, pp. 1025–1042.

Bluman G. W., Cole J. D. Similarity Methods for Differential Equations. — New York: Springer-Verlag, 1974.

Bluman G. W., Kumei S. Symmetries and Differential Equations. — New York: Springer-Verlag, 1989.

Burde G. I. The construction of special explicit solutions of the boundary-layer equations. Steady flows. // Quart. J. Mech. Appl. Math., 1994, Vol. 47, № 2, pp. 247–260.

Burde G. I. The construction of special explicit solutions of the boundary-layer equations. Unsteady flows. // Quart. J. Mech. Appl. Math., 1995, Vol. 48, № 4, pp. 611–633.

Cavalcante J. A., Tenenblat K. Conservation laws for nonlinear evolution equations. // J. Math. Physics, 1988, Vol. 29, № 4, pp. 1044–1049.

Chowdhury A. R. Painlevé Analysis and Its Applications. — Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2000.

Clarkson P. A., Kruskal M. D. New similarity reductions of the Boussinesq equation. // J. Math. Phys., 1989, Vol. 30, № 10, pp. 2201–2213.

Clarkson P. A., Fokas A. S., Ablowitz M. J. Hodograph transformations on linearizable partial differential equations. // SIAM J. Appl. Math., 1989, Vol. 49, pp. 1188–1209.

Clarkson P. A., Mansfield E. L. Symmetry reductions and exact solutions of a class of nonlinear heat equations. // Physica D, 1994, Vol. 70, № 3, pp. 250–288.

Clarkson P. A., Ludlow D. K., Priestley T. J. The classical, direct and nonclassical methods for symmetry reductions of nonlinear partial differential equations. // Methods and Applications of Analysis, 1997, Vol. 4, № 2, pp. 173–195.

Conte R. Invariant Painlevé analysis for partial differential equations. // Phys. Lett. Ser. A, 1989, Vol. 140, № 7,8, pp. 383–390.

Conte R. (editor). The Painlevé Property. One Century Later. — New York: Springer-Verlag, 1999.

Conte R., Musette M. Painlevé analysis and Bäcklund transformation in the Kuramoto–Sivashinsky equation. // J. Phys. A, 1989, Vol. 22, pp. 169–177.

Conte R., Musette M. Linearity inside nonlinearity: Exact solutions to the complex Ginzburg–Landau equation. // Physica D, 1993, Vol. 69, № 1, pp. 1–17.

Crandall M. G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations. Trans. Amer. Math. Soc., 1983, Vol. 277, № 1, pp. 1–42.

Crandall M. G., Evans L. C., Lions P.-L. Some properties of viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations. // Trans. Amer. Math. Soc., 1984, Vol. 283, № 2, pp. 487–502.

Crandall M. G., Ishii H., Lions P.-L. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. // Bull. Amer. Math. Soc., 1992, Vol. 27, № 1, pp. 1–67.

Dafermos C. M. Hyperbolic systems of conservation laws. Systems of nonlinear partial differential equations. // NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C: Math. Phys. Sci., 1983, Vol. 111, pp. 25–70.

Dodd R. K., Bullough R. K. Polynomial conserved densities for the sine-Gordon equations. // Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 1977, Vol. 352, pp. 481–503.

Doyle Ph. W., Vassiliou P. J. Separation of variables for the 1-dimensional non-linear diffusion equation. // Int. J. Non-Linear Mech., 1998, Vol. 33, № 2, pp. 315–326.

Dresner L. Similarity Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations. — Boston: Pitman, 1983.

Estévez P. G., Qu C. Z., Zhang S. L. Separation of variables of a generalized porous medium equation with nonlinear source. // J. Math. Anal. Appl., 2002, Vol. 275, pp. 44–59.

Farlow S. J. Partial Differential Equations for Scientists and Engineers. — New York: John Wiley & Sons, 1982.

Fleming W. H., Soner H. M. Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions. — New York: Springer-Verlag, 1993.

Fokas A. S., Anderson R. L. Group theoretical nature of Bäcklund transformations. // Lett. Math. Phys., 1979, Vol. 3, p. 117.

Fokas A. S., Fuchssteiner B. Bäcklund transformations for hereditary symmetries. // Nonlinear Anal., 1981, Vol. 5, pp. 423–432.

Gaeta G. Nonlinear Symmetries and Nonlinear Equations. — Dordrecht: Kluwer, 1994.

Galaktionov V. A. Quasilinear heat equations with first-order sign-invariants and new explicit solutions. // Nonlinear Analys., Theory, Meth. and Applications, 1994, Vol. 23, pp. 1595–1621.

Galaktionov V. A. Invariant subspace and new explicit solutions to evolution equations with quadratic nonlinearities. // Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1995, Vol. 125A, № 2, pp. 225–246.

Galaktionov V. A., Posashkov S. A., Svirshchevskii S. R. On invariant sets and explicit solutions of nonlinear equations with quadratic nonlinearities. // Differential and Integral Equations, 1995, Vol. 8, № 8, pp. 1997–2024.

Gambier B. Sur les équations differentielles du second ordre et du premier degré dont l'integrale générale est ą points critiques fixes. // Acta Math., 1910, Vol. 33, pp. 1–55.

Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. Method for solving the Korteveg–de Vries equation. // Phys. Rev. Lett., 1967, Vol. 19, № 19, pp. 1095–1097.

Grundland A. M., Infeld E. A family of non-linear Klein-Gordon equations and their solutions. // J. Math. Phys., 1992, Vol. 33, pp. 2498–2503.

Harris S. E. Conservation laws for a nonlinear wave equation. // Nonlinearity, 1996, Vol. 9, pp. 187–208.

Helfferich F., Klein G. Multicomponent Chromatography: Theory of Interference. — New York: Marcel Dekker, 1970.

Hill J. M. Solution of Differential Equations by Means of One-Parameter Groups. — Pitman, Marshfield, Mass., 1982.

Hill, J. M. Differential Equations and Groups Methods for Scientists and Engineers. — Boca Raton: CRC Press, 1992.

Hopf E. The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$. // Comm. Pure and Appl. Math., 1950, Vol. 3, pp. 201–230.

Hopf E. Generalized solutions of nonlinear equations of first order. // J. Math. Mech., 1965, Vol. 14, pp. 951–973.

Ibragimov N. H. (editor). CRC Handbook of Lie Group to Differential Equations, Vol. 1. Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws. — Boca Raton: CRC Press, 1994.

Ibragimov N. H. (editor). CRC Handbook of Lie Group to Differential Equations, Vol. 2. Applications in Engineering and Physical Sciences. — Boca Raton: CRC Press, 1995.

Ishii H. Representation of solutions of Hamilton–Jacobi equations. // Nonlinear Anal. Theory, Meth. and Appl., 1988, Vol. 12, № 2, pp. 121–146.

Its A. R., Novokshenov V. Yu. The Isomonodromic Deformation Method in the Theory of Painlevé Equations. — Berlin: Springer-Verlag, 1986.

Jeffery A. Quasilinear Hyperbolic Systems and Waves. — London: Pitman, 1976.

Jimbo M., Kruskal M. D., Miwa T. Painlevé test for the self-dual Yang–Mills equation. // Phys. Lett. Ser. A, 1982, Vol. 92, № 2, pp. 59–60.

Klimov D. M., Zhuravlev V. Ph. Group-Theoretic Methods in Mechanics and Applied Mathematics. — London: Taylor & Francis, 2002.

Kruskal M. D., Miura R. M., Gardner C. S., Zabusky N. J. Korteweg–de Vries equation and generalizations. V. Uniqueness and nonexistence of polynomial conservation laws. // J. Math. Phys., 1970, Vol. 11, pp. 952–960.

Kuranishi M. Lectures on Involutive Systems on Partial Differential Equations. — Sao Paulo: Publ. Soc. Math., 1967.

Lamb G. L. Bäcklund transformations for certain nonlinear evolution equations. // J. Math. Phys., 1974, Vol. 15, pp. 2157–2165.

Lax P. D. Week solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. // Communs. Pure and Appl. Math., 1954, Vol. 7, pp. 159–193.

Lax P. D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. // Comm. Pure Appl. Math., 1968, Vol. 21, № 5, pp. 467–490. (Русский перевод: Лэкс П. Интегралы нелинейных эволюционных уравнений и уединенные волны. // Математика, 1969, т. 13, № 5, с. 128–150.)

Levi D., Winternitz P. Nonclassical symmetry reduction: example of the Boussinesq equation. // J. Phys. A, 1989, Vol. 22, pp. 2915–2924.

Lewin J. Differential Games. — Berlin: Springer-Verlag, 1994.

Lions P.-L. Generalized Solutions of Hamilton–Jacobi Equations. — Boston: Pitman, 1982.

Lions P.-L., Souganidis P. E. Differential games, optimal control and directional derivatives of viscosity solutions of Bellman's and Isaacs' solutions. // SIAM J. Control and Optimization, 1985, Vol. 23, № 4, pp. 566–583.

Logan D. Non-linear Partial Differential Equations. — New York: CRC Press, 1997.

Melikyan A. A. Generalized Characteristics of First Order PDE's: Applications in Optimal Control and Differential Games. — Boston: Birkhäuser, 1998.

Miller W. (Jr.), Rubel L. A. Functional separation of variables for Laplace equations in two dimensions. // J. Phys. A, 1993, Vol. 26, pp. 1901–1913.

Mirică S. Extending Cauchy's method of characteristics for Hamilton–Jacobi equations. // Stud. Cerc. Mat., 1985, Vol. 37, № 6, pp. 555–565.

Miura R. M. (editor). Bäcklund Transformations. — Lecture Notes in Math., Vol. 515. — Berlin: Springer-Verlag, 1976.

Miura R. M., Gardner C. S., Kruskal M. D. Korteweg–de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion. // J. Math. Phys., 1968, Vol. 9, pp. 1204–1209.

Murphy G. M. Ordinary Differential Equations and Their Solutions. — New York: D. Van Nostrand, 1960.

Musette M. Painlevé analysis for nonlinear partial differential equations. // The Painlevé Property, One Centure Later (editor R. Conte), CRM Series in Math. Phys. — Berlin: Springer-Verlag, 1998, pp. 1–48.

Nucci M. C., Clarkson P. A. The nonclassical method is more general than the direct method for symmetry reductions. An example of the Fitzhugh–Nagumo equation. // Phys. Lett. A, 1992, Vol. 164, pp. 49–56.

Olver P. J. Direct reduction and differential constraints. // Proc. Roy. Soc. London, 1994, Ser. A, Vol. 444, pp. 509–523.

Olver P. J., Rosenau Ph. Group-invariant solutions of differential equations. // SIAM J. Appl. Math., 1987, Vol. 47, № 2, pp. 263–278.

Olver P. J., Vorob'ev E. M. Nonclassical and conditional symmetries. // CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Vol. 3 (editor N. H. Ibragimov). — Boca Raton: CRC Press, 1996, pp. 291–328.

Painlevé P. Mémoire sur les équations differentielles dont l'integrale générale est uniforme. // Bull. Soc. Math. France, 1900, Vol. 28, pp. 201–261.

Polyanin A. D. Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists (Supplement B). — Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2002.

Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations. — Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2004.

Polyanin A. D., Zhurov A. I. Solution of functional and functional-differential equations by the differentiation method. // EqWorld, 2004 (http://eqworld.ipmnet.ru/eqworld/en/methods/fe/art01.pdf).

Polyanin A. D., Zhurov A. I. Solution of functional equations by argument elimination method. // EqWorld, 2005 (http://eqworld.ipmnet.ru/eqworld/en/methods/fe/art02.pdf).

Pommaret J. F. Systems of Partial Differential Equations and Lie Pseudogroups. — New York: Gordon & Breach, 1978.

Rhee H., Aris R., Amundson N. R. First Order Partial Differential Equations, Vol. 1. — New Jersey: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1986.

Rhee H., Aris R., Amundson N. R. First Order Partial Differential Equations, Vol. 2. — New Jersey: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1989.

Rogers C., Ames W. F. Nonlinear Boundary Value Problems in Science and Engineering. — New York: Academic Press, 1989.

Rogers C., Ruggeri T. A reciprocal Bäcklund transformation: application to a nonlinear hyperbolic model in heat conduction. // Lett. Nuovo Cimento, 1985, Vol. 44, p. 289.

Rogers C., Shadwick W. F. Bäcklund Transformations and Their Applications. — New York: Academic Press, 1982.

Sattinger D. H., Weaver O. L. Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry, and Mechanics. — New York: Springer-Verlag, 1986.

Scott A. C., Chu F. Y., McLaughlin D. W. The soliton: A new concept in applied science. // Proc. IEEE, 1973, Vol. 61, pp. 1443–1483.

Smoller J. Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations. — New York: Springer-Verlag, 1994.

Steeb W.-H., Euler N. Nonlinear Evolution Equations and Painlevé Test. — Singapore: World Scientific, 1988.

Stephani H. Differential Equations: Their Solutions Using Symmetries. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989.

Steuerwald R. Über enneper'sche Flächen und Bäcklund'sche Transformation. // Abh. Bayer. Akad. Wiss. (Muench.), 1936, Vol. 40, pp. 1–105.

Subbotin A. I. Generalized Solutions of First Order PDEs: the Dynamical Optimization Perspective. — Boston: Birkhäuser, 1995.

Svirshchevskii S. R. Lie–Bäcklund symmetries of linear ODEs and generalized separation of variables in nonlinear equations. // Phys. Lett. A, 1995, Vol. 199, pp. 344–348.

Svirshchevskii S. R. Invariant linear subspaces and exact solutions of nonlinear evolutions equations. // Nonlinear Math. Phys., 1996, Vol. 3, № 1–2, pp. 164–169.

Vinogradov A. M. Local symmetries and conservation laws. // Acta Appl. Math., 1984, Vol. 2, № 7, pp. 21–78.

Vorob'ev E. M. Weak and partial symmetries of nonlinear PDE in two independent variables. // Nonlinear Mathematical Physics, 1996, Vol. 3, № 3–4, pp. 330–335.

Weiss J. The Painlevé property for partial differential equations. II: Backlund transformation, Lax pairs, and the Schwarzian derivative. // J. Math. Phys., 1983, Vol. 24, № 6, pp. 1405–1413.

Weiss J. The sine-Gordon equations: Complete and partial integrability. // J. Math. Phys., 1984, Vol. 25, pp. 2226–2235.

Weiss J. The Painlevé property and Bäcklund transformations for the sequence of Boussinesq equations. // J. Math. Phys., 1985, Vol. 26, pp. 258–269.

Weiss J. Bäcklund transformations and the Painlevé property. // J. Math. Phys., 1986, Vol. 27, № 5, pp. 1293–1305.

Weiss J., Tabor M., Carnevalle G. The Painlevé property for partial differential equations. // J. Math. Phys., 1983, Vol. 24, № 3, pp. 522–526.

Zauderer E. Partial Differential Equations of Applied Mathematics. — New York: John Wiley & Sons, 1983.

Zhdanov R. Z. Separation of variables in the non-linear wave equation. // J. Phys. A, 1994, Vol. 27, pp. L291–L297.

Zwillinger D. Handbook of Differential Equations. — San Diego: Academic Press, 1989.

Учебное издание

ПОЛЯНИН Андрей Дмитриевич
ЗАЙЦЕВ Валентин Федорович
ЖУРОВ Алексей Иванович

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И МЕХАНИКИ

Редактор *В.С. Аролович*
Оригинал-макет: *А.И. Журов, А.Д. Полянин*

ЛР №071930 от 06.07.99. Подписано в печать 11.02.05.
Формат 70×100/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 20,74.
Уч.-изд. л. 20,7. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
http://www.fml.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ППП «Типография «Наука»
121099, г. Москва, Шубинский пер., 6

ISBN 5-9221-0539-6

9 785922 105392