ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Վ.Հ. ՕՀԱՆՅԱՆ, Է.Է. ՊԻՎԱԶՅԱՆ,
Ա.Գ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ, Վ.Խ. ՆԱՎՈՅԱՆ

ՎԵՐԼՈՒԾԱԿԱՆ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ

ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԵՎ ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

ՈՒՍՈՒՄՆԱՄԵԹՈԴԱԿԱՆ ՁԵՌՆԱՐԿ

ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ – 2008

ՀՏԴ 514.12 (07)
ԳՄԴ 22.151.5 g73
Վ 499

Հրատարակության է երաշխավորել ԵՊՀ-ի ռադիոֆիզիկայի ֆակուլտետի խորհուրդը

Գրախոսներ՝ ֆ. գ. թ., դոցենտ Վ.Ա. ՓԻԼԻՊՈՍՅԱՆ
ֆ. գ. թ., դոցենտ Ա.Ղ. ԱԺՅԱՆ

ՕՀԱՆՅԱՆ Վ.Հ., ՊԻԿԱՃՅԱՆ Է.Է., ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ Ա.Գ., ՆԱԿՈՅԱՆ Վ.Խ.

Վ 499 Վերլուծական երկրաչափություն, (խնդիրներ և վարժություններ), ուսումնամեթոդական ձեռնարկ: – Եր.: ԵՊՀ-ի հրատ., 2008 թ., 76 էջ:

Ձեռնարկում շարադրված են «Վերլուծական երկրաչափություն» դասընթացի գաղափարներն ու փաստերը, իսկ լսարանային և ինքնուրույն աշխատանքի համար առաջադրված են ավելի քան 350 խնդիրներ:

Նախատեսվում է ռադիոֆիզիկայի, ֆիզիկայի, քիմիայի և երկրաբանության ֆակուլտետների ուսանողների համար:

ԳՄԴ 22.151.5 g73

ISBN 978-5-8084-1048-0

ԳԼՈՒԽ I

ԿՈՈՐԴԻՆԱՏԱՅԻՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ

Թվային առանցքի վրա A կետի դիրքը O սկզբնակետի նկատմամբ որոշվում է OA ուղղորդված հատվածի մեծությամբ, այն նշանակենք OA–ով:

1. Եթե առանցքի վրա տրված են $M_1(x_1)$ և $M_2(x_2)$ կետերը, ապա M_1 սկիզբ և M_2 ծայրակետ ունեցող հատվածի մեծությունը՝ $M_1M_2 = x_2 - x_1$, իսկ կետերի հեռավորությունը՝ $|M_1M_2| = |x_2 - x_1|$:
2. Հարթության $M_1(x_1, y_1)$ և $M_2(x_2, y_2)$ կետերի հեռավորությունն է՝ $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$:

Եթե $M(x, y)$ կետը M_1M_2 հատվածը բաժանում է λ հարաբերությամբ՝ $\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$, $\lambda \neq -1$, ապա

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}:$$

3. $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ գագաթներով եռանկյան մակերեսը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝
   $S = \frac{1}{2}|(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)|$:
4. Եթե համակարգը բաղկացած է n նյութական կետերից՝ $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, ... $A_n(x_n, y_n)$, որոնցում կենտրոնացված են համապատասխանաբար m_1, m_2, ... m_n զանգվածներ, ապա այդ համակարգի ծանրության կենտրոնի կոորդինատները որոշվում են հետևյալ բանաձևերով՝

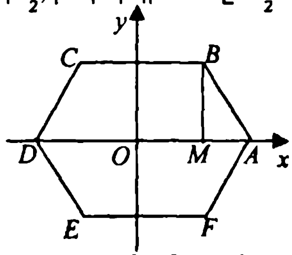
$$x = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + \cdots + x_nm_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n},$$
$$y = \frac{y_1m_1 + y_2m_2 + \cdots + y_nm_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}:$$

5. Եթե $M(x, y)$ կետի բևեռային կոորդինատներն են՝ (ρ, φ)-ն $(\rho \geq 0, -\pi < \varphi \leq \pi)$, ապա

$$\begin{cases} x = \rho cos\varphi, \\ y = \rho sin\varphi \end{cases} \text{ և } \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}: \end{cases}$$

Օրինակ 1. Գտնել կանոնավոր վեցանկյան գագաթների կոորդինատները, որի կողմը հավասար է a –ի, կոորդինատային սկզբնակետը գտնվում է վեցանկյան կենտրոնում, իսկ աբսցիսների առանցքն անցնում է երկու հակադիր գագաթներով:

Լուծում. $|OA| = |AB| = a$: OY առանցքի նկատմամբ A կետի համաչափ կետը կլինի՝ $D(-a; 0)$: Դիտարկենք ΔABM: $\measuredangle MAB = 60^0$, $\measuredangle ABM = 30^0$, $AM = \frac{a}{2}$, որտեղից ստանում ենք, որ B կետի աբսցիսը կլինի $\frac{a}{2}$, իսկ օրդինատը՝ $\frac{\sqrt{3}a}{2}$: Հետևաբար՝



$B\left(\frac{a}{2}; \frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$, $C\left(-\frac{a}{2}; \frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$, $E\left(-\frac{a}{2}; -\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$ և $F\left(\frac{a}{2}; -\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$:

Պատ.՝$A(a; 0)$, $B\left(\frac{a}{2}; \frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$, $C\left(-\frac{a}{2}; \frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$, $D(-a; 0)$, $E\left(-\frac{a}{2}; -\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$ և $F\left(\frac{a}{2}; -\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$:

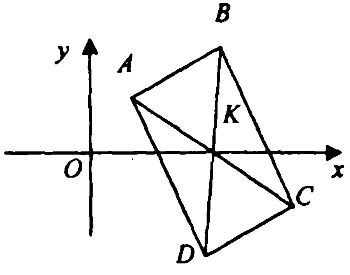
Օրինակ 2. Ուղիղն անցնում է $A(-1; -3)$կետով և OX –ի հետ կազմում է 45^0 անկյուն: Այդ ուղիղի վրա գտնել կետ, որի օրդինատը հավասար է 2 –ի:

Լուծում. Դիցուք որոնելի B կետի աբսցիսն x է: Ունենք՝ $tg\varphi = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, $tg45^0 = \frac{2+3}{x+1}$, $1 = \frac{5}{x+1}$, $x + 1 = 5$, $x = 4$:

Պատ.՝ $B(4; 2)$:

Օրինակ 3. Տրված են զուգահեռագծի երեք հաջորդական գագաթները՝ $A(1; 1)$, $B(2; 2)$, $C(3; -1)$: Գտնել նրա չորրորդ D գագաթը:

Լուծում.



Գտնենք AC և BD անկյունագծերի հատման K կետի կոորդինատները.

$x_k = \frac{x_A+x_C}{2}$, $x_k = \frac{1+3}{2} = 2$,

$y_k = \frac{y_A+y_C}{2}$, $y_k = \frac{1-1}{2} = 0$; $K(2; 0)$:

Մյուս կողմից՝ $x_k = \frac{x_B+x_D}{2}$, $y_k = \frac{y_B+y_D}{2}$, որտեղից $x_D = 2x_k - x_B$, $y_D = 2y_k - y_B$, $x_D = 2 \cdot 2 - 2 = 2$, $y_D = 2 \cdot 0 - 2 = -2$: Պատ.՝ (2; −2):

Օրինակ 4. Գտնել $A(2;\,0)$, $B(1;\,4)$, $C(5;\,4)$ գագաթներով եռանկյան մակերեսը:

Լուծում. Եռանկյան մակերեսը որոշվում է հետևյալ բանաձևով.

$$S = \frac{1}{2}|(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)|,$$

Այստեղ՝

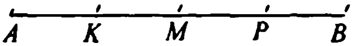
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}[(2-5)\cdot(4-4) - (1-5)\cdot(0-4)] = 8:$$

Պատ.՝8 քառ. միավոր:

Օրինակ 5. Լարի ծայրակետերն են $A(-2;\,1)$ և $B(5;\,4)$ կետերը: Լարի կեսը պղնձից է, մյուս կեսը ալյումինից: Որոշել ծանրության կենտրոնի կոորդինատները, եթե նրա լայնական հատույթն ամենուրեք նույնն է (պղնձի խտությունը՝ 8,9գ/սմ^3 է, ալյումինինը՝ 2,7գ/սմ^3):

Լուծում. Ենթադրենք լայնական հատույթի մակերեսը Sսմ^2 է: Որոշենք ձողի միջնակետի x_M, y_M կոորդինատները.

$$x_M = \frac{-2+5}{2} = \frac{3}{2}, \qquad y_M = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}:$$



Գտնենք ձողի երկարությունը՝ $|AB| = \sqrt{7^2 + 3^2} = \sqrt{58}$, իսկ $|AM| = |BM| = \frac{\sqrt{58}}{2}$: Ձողի AM և BM մասերի զանգվածները կլինեն՝

$$m_1 = 8{,}9\frac{\sqrt{58}}{2}\cdot S, m_2 = 2{,}7\frac{\sqrt{58}}{2}\cdot S:$$

AM և BM մասերի ծանրության կենտրոնների կոորդինատները կլինեն՝ $x_K = \frac{-2+{}^3/_2}{2} = -\frac{1}{4}$, $y_K = \frac{1+{}^5/_2}{2} = \frac{7}{4}$, $x_P = \frac{5+{}^3/_2}{2} = \frac{13}{4}$, $y_P = \frac{4+{}^5/_2}{2} = \frac{13}{4}$: AB ձողի ծանրության կենտրոնի կոորդինատները կլինեն՝

$$x = \frac{x_K m_1 + x_P m_2}{m_1 + m_2} = \frac{131}{232}, \qquad y = \frac{y_K m_1 + y_P m_2}{m_1 + m_2} = \frac{427}{232}:$$

Պատ.՝ $\left(\frac{131}{232}; \frac{427}{232}\right)$:

Խնդիրներ

1.1. Թվային ուղղի վրա կառուցել $A(-5)$, $B(7)$, $C(\sqrt{3})$, $D(17)$ կետերը:

1.2. Թվային առանցքի վրա նշել այն կետերը, որոնց կոորդինատները բավարարում են հետևյալ պայմաններին.

ա) $x > 3$, բ) $x - 5 \leq 0$, գ) $3 < x < 4$, դ) $|x| = 3$, ե) $|2 - x| = 4$, զ) $x^2 - 4x + 5 \leq 0$, է) $x^2 - 4x + 5 > 0$:

1.3. Որոշել AB հատվածի մեծությունը և երկարությունը, եթե
ա) $A(-1)$, $B(10)$; բ) $A(3)$, $B(7)$; գ) $A(-4)$, $B(-1)$; դ) $A(5)$, $B(-3)$;

1.4. Որոշել A կետի կոորդինատը, եթե հայտնի է՝
ա) $B(5)$ և $AB = 7$; բ) $B(-3)$ և $AB = 5$; գ) $B(4)$ և $|AB| = 3$;
դ) $B(-7)$ և $|AB| = 10$:

1.5. Որոշել $\lambda = \frac{AC}{CB}$ հարաբերությունը, եթե.
ա) $A(3)$, $B(9)$, $C(6)$; բ) $A(3)$, $B(6)$, $C(9)$; գ) $A(-2)$, $B(4)$, $C(8)$;
դ) $A(-2)$, $B(2)$, $C(0)$

1.6. Որոշել C կետի կոորդինատը, եթե $\lambda = \frac{AC}{CB}$.
ա) $A(-2)$, $B(6)$, $\lambda = 3$; բ) $A(-1)$, $B(1)$, $\lambda = -3$;
գ) $A(-3)$, $B(2)$, $\lambda = \frac{1}{4}$; դ) $A(4)$, $B(1)$, $\lambda = -\frac{1}{4}$:

1.7. Որոշել AB հատվածի M միջնակետի կոորդինատը, եթե.
ա) $A(-3)$, $B(1)$; բ) $A(25)$, $B(-1)$; գ) $A(7)$, $B(13)$; դ) $A(-5)$, $B(-3)$:

1.8. $A(-2)$ և $B(18)$ կետերով սահմանափակված հատվածը բաժանել չորս հավասար մասերի և որոշել տրոհման կետերի կոորդինատները:

1.9. $A(-5)$ և $B(10)$ կետերով սահմանափակված հատվածը բաժանել երեք հավասար մասերի և որոշել տրոհման կետերի կոորդինատները:

1.10. Որոշել AB հատվածի ծայրակետերի կոորդինատները, որը C և D կետերով բաժանված է երեք հավասար մասերի.
ա) $C(8)$, $D(13)$; բ) $C(-6)$, $D(-3)$:

1.11. Կոորդինատային հարթության վրա կառուցել $A(3,2)$, $B(5,-4)$, $C(-1,-2)$, $D(-7,10)$, $E(9,0)$, $F(0,7)$ կետերը:

1.12. Հարթության վրա տրված է A կետը: Գտնել հարթության այն M (N) կետի կոորդինատը, որը համաչափ է A կետին աբսցիսների (օրդինատների) առանցքի նկատմամբ.
ա) $A(2,3)$; բ) $A(-2,4)$, գ) $A(1,-3)$, դ) $A(0,4)$:

1.13. Գտնել AB հատվածի M միջնակետի կոորդինատները.
ա) $A(-1,5)$ և $B(-3,3)$; բ) $A(0,6)$ և $B(3,4)$;
գ) $A(-2,8)$ և $B(2,6)$; դ) $A(-1,-3)$ և $B(-3,-5)$:

1.14. Գտնել A, B, C գագաթներով եռանկյան պարագիծը.
ա) $A(3,6)$, $B(-3,5)$, $C(1,0)$; բ) $A(3,1)$, $B(-1,4)$, $C(1,1)$;
գ) $A(-2,3)$, $B(5,-2)$, $C(-3,-1)$; դ) $A(7,4)$, $B(3,-6)$, $C(-5,2)$:

1.15. Որոշել այն M կետի կոորդինատները, որը AB հատվածը բաժանում է λ հարաբերությամբ՝ $A(2\ 3)$, $B(-1,2)$ և
ա) $\lambda = 1$; բ) $\lambda = -2$; գ) $\lambda = \frac{1}{2}$; դ) $\lambda = -\frac{1}{3}$:

1.16. Տրված են զուգահեռագծի $A(-4,4)$, $B(2,8)$ կից գագաթները և անկյունագծերի հատման $M(2,2)$ կետը: Գտնել մյուս երկու գագաթները:

1.17. Տրված են քառակուսու երկու հակադիր գագաթները՝ $A(-1,4)$, $C(5,-2)$: Գտնել մյուս երկու գագաթները:

1.18. Տրված են $ABCD$ զուգահեռագծի երեք գագաթները՝ $A(2,3)$, $B(4,-1)$, $C(0,5)$: Գտնել չորրորդ գագաթը:

1.19. Կետը, ուղղածիգ շարժվելով, անցել է $M(5,5)$ և $N(1,3)$ կետերով: Որոշել այն P կետը, որում նրա շարժման հետագիծը հատում է Ox առանցքը:

1.20. Տրված են եռանկյան $A(1,4)$, $B(3,-9)$, $C(-5,2)$ գագաթները: Որոշել B գագաթից տարված միջնագծի երկարությունը:

1.21. Ապացուցել, որ A, B, C գագաթներով եռանկյան միջնագծերի հատման կետի կոորդինատներն են՝

$$x = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, y = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}:$$

1.22. Որոշել ABC եռանկյան միջնագծերի հատման կետի կոորդինատները, եթե.
ա) $A(3,1)$, $B(-1,4)$, $C(1,1)$;
բ) $A(-2,3)$, $B(5,-2)$, $C(-3,-1)$;
գ) $A(7,4)$, $B(3,-6)$, $C(-5,2)$;
դ) $A(-3,-3)$, $B(-1,-3)$, $C(1,1)$:

1.23. Կառուցել կետերը, եթե տրված են նրանց բևեռային կոորդինատները՝ $A(3,\frac{\pi}{3})$, $B(1,\frac{5\pi}{3})$, $C(3,0)$, $D(10,\frac{\pi}{2})$, $E(\frac{3}{2},\frac{7\pi}{4})$:

1.24. Գտնել այն կետերի բազմությունը, որոնց բևեռային կոորդինատները բավարարում են հետևյալ հավասարմանը.
ա) $r = 2$, բ) $r = const$, գ) $\varphi = \frac{\pi}{6}$, դ) $\varphi = \pi$:

1.25. Տրված է կանոնավոր վեցանկյուն, որի կողմը հավասար է a-ի: Ընդունելով որևէ գագաթ որպես բևեռ, նրանով անցնող կողմերից մեկը բևեռային առանցք, որոշել գագաթների բևեռային կոորդինատները:

1.26. Գտնել M կետի բևեռային կոորդինատները, եթե բևեռը համընկնում է կոորդինատների սկզբնակետի հետ, իսկ բևեռային առանցքը՝ աբսցիսների դրական կիսառանցքի հետ.
ա) $M(1,-\sqrt{3})$, բ) $M(-\sqrt{3},1)$, գ) $M(-2,2)$, դ) $M(1,1)$:

1.27. Տրված են M կետի բևեռային կոորդինատները: Գտնել այդ կետի դեկարտյան կոորդինատները, եթե բևեռը համընկնում է կոորդինատների սկզբնակետի, իսկ բևեռային առանցքը աբսցիսների դրական կիսառանցքի հետ.

ա) $M(2,\frac{\pi}{3})$, բ) $M(2,\frac{4\pi}{3})$, գ) $M(1,\frac{7\pi}{4})$, դ) $M(2,\frac{3\pi}{4})$:

1.28. Ապացուցել, որ $A(\rho_1,\varphi_1)$ և $B(\rho_2,\varphi_2)$ կետերի հեռավորությունը որոշվում է հետևյալ բանաձևով.

$$d=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2 cos(\varphi_2-\varphi_1)}:$$

1.29. Գտնել A և B կետերի հեռավորությունը, եթե

ա) $A(5,\frac{\pi}{6})$, $B(3,-\frac{\pi}{6})$; բ) $A(4,\frac{11\pi}{9})$, $B(3,\frac{8\pi}{9})$; գ) $A(4,\frac{\pi}{5})$, $B(6,\frac{6\pi}{5})$;

դ) $A(10,\frac{\pi}{2})$, $B(16,\frac{5\pi}{4})$:

1.30. Հաշվել ABC եռանկյան մակերեսը, եթե.

ա) $A(0,9)$, $B(-4,-1)$, $C(3,2)$;

բ) $A(2,1)$, $B(3,4)$, $C(1,6)$;

գ) $A(10,5)$, $B(3,2)$, $C(6,-5)$;

դ) $A(5,4)$, $B(11,0)$, $C(0,3)$:

1.31. Գտնել $A(1,3)$, $B(-2,0)$, $C(4,3)$, $D(-3,5)$ գագաթներով քառանկյան մակերեսը:

1.32. Գտնել $A(6,-8)$ կետի հեռավորությունը $C(-5,0)$ և $D(3,6)$ կետերով անցնող ուղիղից:

1.33. Ապացուցել, որ $A(2,-3)$, $B(-1,5)$ և $C(-4,13)$ կետերը գտնվում են մի ուղղի վրա:

1.34. Եռանկյան գագաթներն են՝ $A(2,1)$, $B(2,-2)$, $C(8,6)$ կետերը: Գտնել նրա պարագիծը, մակերեսը և բարձրությունների երկարությունները:

1.35. Եռանկյան երկու գագաթներն են $A(5,1)$-ն և $B(-2,2)$-ն, իսկ C գագաթը գտնվում է OX առանցքի վրա: Գտնել C գագաթի կոորդինատները, եթե եռանկյան մակերեսը հավասար է 10-ի:

1.36. Գտնել հնգանկյան մակերեսը, որի գագաթներն են $A(3,2)$, $B(1,5)$, $C(-5,0)$, $D(0,-1)$, $E(2,-3)$ կետերը:

1.37. Ապացուցել, որ բևեռային կոորդինատային համակարգում OAB եռանկյան մակերեսը, որտեղ O–ն բևեռն է և՝ $A(\rho_1,\varphi_1)$, $B(\rho_2,\varphi_2)$: կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով՝

$$S=\frac{1}{2}\rho_1\rho_2|sin(\varphi_2-\varphi_1)|$$

1.38. Գտնել բևեռային համակարգում տրված OAB եռանկյան մակերեսը, եթե O-ն բևեռն է և.

ա) $A(3,\frac{7\pi}{12})$, $B(5,\frac{\pi}{3})$;
բ) $A(3,\frac{\pi}{6})$, $B(2,\frac{\pi}{3})$;
գ) $A(4,\frac{\pi}{9})$, $B(1,\frac{5\pi}{18})$;
դ) $A(4,\frac{\pi}{3})$, $B(5,\frac{5\pi}{6})$:

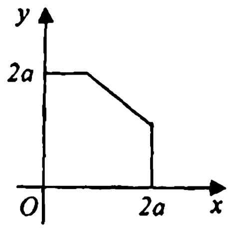
1.39. Բևեռային համակարգում տրված են քառակուսու երկու հակադիր գագաթները՝ $P(6,-\frac{7\pi}{12})$, $Q(4,\frac{\pi}{6})$: Որոշել նրա մակերեսը:

1.40. Համասեռ եռանկյունաձև հարթ սալիկի գագաթներն են $A(-1,2)$, $B(3,3)$, $C(1,-1)$ կետերը: Որոշել նրա ծանրության կենտրոնի կոորդինատները:

1.41. Գտնել համասեռ լարից պատրաստված ABC եռանկյան ծանրության կենտրոնի կոորդինատները, եթե նրա գագաթներն են $A(2,-1)$, $B(5,-1)$, $C(2,3)$ կետերը:

1.42. Տրված են համասեռ եռանկյունաձև սալիկի գագաթները՝ $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$: Եթե եռանկյունաձև սալիկը կտրենք միջին գծերով, կստացվի նոր եռանկյունաձև համասեռ սալիկ, որի գագաթները տրված եռանկյան կողմերի միջնակետերն են: Ապացուցել, որ այդ երկու սալիկների ծանրության կենտրոնները համընկնում են:

1.43. Գտնել համասեռ քառանկյունաձև սալիկի ծանրության կենտրոնը, եթե նրա գագաթներն են $A(4,4)$, $B(5,7)$, $C(10,10)$, $D(12,4)$ կետերը:

1.44. 

(գծ. 1)

Համասեռ քառակուսի սալիկից, որի կողմը $2a$ է, կտրված է եռանկյուն: Կտրվածքը ուղիղ գծով միացնում է կից կողմերի միջնակետերը: Որոշել ստացված սալիկի (գծ. 1) ծանրության կենտրոնի կոորդինատները, եթե կոորդինատային առանցքները ուղղված են քառակուսու կից կողմերով:

1.45. $O(0,0)$, $A(2,-5)$ և $B(4,2)$ կետերում կենտրոնացված են համապատասխանաբար 500գր, 200գր և 100գր զանգվածներ: Գտնել այդ համակարգի ծանրության C կենտրոնի կոորդինատները:

1.46. $A(1,8)$, $B(3,4)$, $C(4,2)$ կետերում կենտրոնացված են համապատասխանաբար 30գր, 40գր, և 60գր զանգվածներ: Որոշել A,B,C նյութական կետերի համակարգի ծանրության P կենտրոնի կոորդինատները;

Գտնել այդ նույն համակարգի ծանրության P կենտրոնը, ենթադրելով, որ A, B, C կետերում կենտրոնացված են հավասար զանգվածներ:

Պատասխաններ

1.3. ա) $AB = 11$, $|AB| = 11$; բ) $AB = 4$, $|AB| = 4$; գ) $AB = 3$, $|AB| = 3$; դ) $AB = -8$, $|AB| = 8$:

1.4. ա) $A(-2)$; բ) $A(2)$; գ) $A(1)$ կամ $A(7)$; դ) $A(3)$ կամ $A(-10)$:

1.5. ա) $\lambda = 1$; բ) $\lambda = -2$; գ) $\lambda = -\frac{5}{2}$; դ) $\lambda = 1$:

1.6. ա) $C(4)$; բ) $C(2)$; գ) $C(-2)$; դ) $C(5)$:

1.7. ա) $M(-1)$; բ) $M(12)$; բ) $M(10)$; դ) $M(-4)$:

1.8. $M_1(3)$; $M_2(8)$; $M_3(13)$:

1.9. $M_1(0)$; $M_2(5)$:

1.10. ա) $A(3)$; $B(18)$: Ցուցում. C –ն AD հատվածի միջնակետն է;
բ) $A(-9)$; $B(10)$:

1.12. ա) $M(2,-3)$ և $N(-2,3)$;
բ) $M(-2,-4)$ և $N(2,4)$;
գ) $M(1,3)$ և $N(-1,-3)$;
դ) $M(0,-4)$, $N(0,4)$:

1.13. ա) $M(-2;\ 4)$; բ) $M(\frac{3}{2};\ 1)$; գ) $M(0;\ 1)$; դ) $M(-2;\ -4)$:

1.14. ա) $\sqrt{37} + \sqrt{41} + \sqrt{40}$;
բ) $7 + \sqrt{13}$;
գ) $\sqrt{74} + \sqrt{65} + \sqrt{17}$;
դ) $\sqrt{116} + \sqrt{128} + \sqrt{148}$:

1.15. ա) $M(0{,}5;\ 2{,}5)$; բ) $M(-4;\ 1)$; գ) $M(1;\ \frac{8}{3})$; դ) $M(\frac{7}{2};\ \frac{7}{2})$:

1.16. $C(8;\ 0)$; $D(2;\ -4)$:

1.17. $B(-1;\ -2)$; $D(5;\ 4)$: Ցուցում. $B(x,y)$ կետի համար՝ $|AB| = |BC| = 6$:

1.18. $D(-2;\ 9)$:

1.19. $P(-5;\ 0)$:

1.20. 13:

1.22. ա) $(1;\ 2)$; բ) $(0;\ 0)$; գ) $(\frac{5}{3};\ 0)$; դ) $(-1;\ -\frac{5}{3})$:

1.25. $A(0;\ 0)$; $B(a;\ 0)$; $C(a\sqrt{3};\ \frac{\pi}{6})$; $D(2a;\ \frac{\pi}{3})$; $E(a\sqrt{3};\ \frac{\pi}{2})$; $F(a;\ \frac{2\pi}{3})$:

1.26. ա) $\left(2, \frac{5\pi}{3}\right)$; բ) $\left(2, \frac{5\pi}{6}\right)$; գ) $\left(\sqrt{8}, \frac{5\pi}{4}\right)$; դ) $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$:

1.27. ա) $(1, \sqrt{3})$; բ) $(-1, -\sqrt{3})$; գ) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; դ) $(-\sqrt{3}, 1)$:

1.29. ա) $\sqrt{19}$; բ) $\sqrt{13}$; գ) 10; դ) $\sqrt{356 + 160\sqrt{2}}$:

1.30. ա) $S = 29$; բ) $S = 4$; գ) $S = 29$; դ) $S = 13$:

1.31. $S = \frac{15}{2}$ քառ. միավոր:

1.32. 13:

1.34. $p = 15 + 5\sqrt{5}$; $S = 25$; $h_a = 5$; $h_b = 2\sqrt{5}$; $h_c = 10$:

1.35. $C_1(32;\ 0)$, $C_2(-8;\ 0)$:

1.36. $S = 29$ քառ. միավոր:

1.38. ա) $S = \frac{15\sqrt{2}}{4}$; բ) $S = \frac{3}{2}$; գ) $S = 1$; դ) $S = 10$:

1.39. $S = 2(13 + 6\sqrt{2})$:

1.40. $\left(1;\ \frac{4}{3}\right)$:

1.41. $\left(3;\ \frac{1}{2}\right)$:

1.43. (8,2; 6,2):

1.44. $\left(\frac{19}{21}a;\ \frac{19}{21}a\right)$:

1.45. $C(1;\ -1)$: Ցուցում. $A(m_1)$, $B(m_2)$ նյութական կետերի համակարգի ծանրության C կենտրոնը AB հատվածը բաժանում է $\lambda = \frac{m_2}{m_1}$ հարաբերությամբ:

1.46. $P(3{,}4)$; $P\left(\frac{8}{3};\ \frac{14}{3}\right)$:

ՎԵԿՏՈՐԱԿԱՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԻ ՏԱՐՐԵՐ

1. Յանկացած $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ վեկտորի երկարությունն է՝
$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}:$$
2. Եթե տրված են $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ վեկտորները, ապա նրանց գումարն է՝
$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k}:$$
3. λ թվի և $\vec{a}$ վեկտորի արտադրյալ է կոչվում
$$\lambda\vec{a} = (\lambda x)\vec{i} + (\lambda y)\vec{j} + (\lambda z)\vec{k}$$
վեկտորը:
$(-1)\vec{a}$ վեկտորը սովորաբար նշանակում են $-\vec{a}$-ով:
4. Երկու ոչ զրոյական վեկտորների սկալյար արտադրյալ է կոչվում այն թիվը, որը հավասար է այդ վեկտորների երկարությունների և նրանցով կազմված անկյան կոսինուսի արտադրյալին՝
$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi$ (եթե $\vec{a} = 0$, վերցնում ենք $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$):
Երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալն օժտված է հետևյալ հատկություններով.
ա) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ այն և միայն դեպքում, երբ $\vec{a} = 0$, կամ $\vec{b} = 0$, կամ էլ՝ $\vec{a} \perp \vec{b}$,
բ) տեղափոխական հատկություն՝
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$
գ) բաշխական հատկություն՝
$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$$
դ) թվային բազմապատկիչի նկատմամբ զուգորդական հատկություն՝
$$\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b}:$$
5. Եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները տրված են պրոյեկցիաներով՝ $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, ապա $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$:
6. Եթե $\vec{a}$-ն և $\vec{b}$-ն ոչ զրոյական վեկտորներ են, ապա՝
$$\cos\varphi = \cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}:$$
7. Եթե α, β, γ-ն $\vec{a}$ վեկտորի կազմած անկյուններն են կոորդինատական առանցքների հետ, ապա՝

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}, \cos\beta = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}, \cos\gamma = \frac{z_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}:$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ թվերը կոչվում են $\vec{a}$ վեկտորի ուղղորդ կոսինուսներ:

8. $\vec{a}$ և $\vec{b}$ ոչ զրոյական վեկտորների վեկտորական արտադրյալ է կոչվում $\vec{c}$ վեկտորը, որի երկարությունը հավասար է $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների վրա կառուցված զուգահեռագծի մակերեսին: Այն ուղղահայաց է այդ վեկտորներով որոշվող հարթությանը և ուղղված է այնպես, որ $\vec{c}$-ի վերջնակետից նայելիս $\vec{a}$-ից $\vec{b}$ կարճագույն պտույտը տեղի ունենա ժամացույցի սլաքի պտտման հակառակ ուղղությամբ: $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների վեկտորական արտադրյալը նշանակում են $\vec{a}\times\vec{b}$ կամ $[a,b]$:

Վեկտորական արտադրյալը օժտված է հետևյալ հատկություններով.

ա) $\vec{b}\times\vec{a} = -(\vec{a}\times\vec{b})$,

բ) թվային արտադրիչի նկատմամբ զուգորդական հատկություն՝

$$\lambda(\vec{a}\times\vec{b}) = (\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\lambda\vec{b}),$$

գ) բաշխական հատկություն՝

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c} + \vec{b}\times\vec{c}:$$

Եթե $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, ապա՝

$$\vec{a}\times\vec{b} = (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{i} + (x_2z_1 - x_1z_2)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k}:$$

Վեկտորական արտադրյալը գրում են նաև սիմվոլիկ որոշիչի տեսքով՝

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}:$$

9. $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ երեք ոչ համահարթ վեկտորների խառն արտադրյալ կամ վեկտորա-սկալյար արտադրյալ է կոչվում այն թիվը, որը հավասար է $\vec{a}\times\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալին: Խառն արտադրյալը նշանակում են $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$:

Նրա բացարձակ արժեքը հավասար է այդ երեք վեկտորների վրա կառուցված զուգահեռանիստի ծավալին:

Եթե $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, $\vec{c} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$, ապա՝

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 -$$

$$-x_3y_2z_1 - x_2y_1z_3 - x_1y_3z_2:$$

10. $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորների կրկնակի վեկտորական արտադրյալ է կոչվում $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ վեկտորը: Ընդ որում, տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները՝
ա) $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{b}(\vec{a}\vec{c})-\vec{a}(\vec{b}\vec{c})$,
բ) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\vec{b})$:

Եթե $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$, $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$, $\vec{c}=x_3\vec{i}+y_3\vec{j}+z_3\vec{k}$, ապա՝

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ \begin{vmatrix}y_2 & z_2\\ y_3 & z_3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}z_2 & x_2\\ z_3 & x_3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{vmatrix}\end{vmatrix}:$$

Դիտողություն. *$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ վեկտորը նշանակում են նաև $\vec{a}=\{x;\ y;\ z\}$ կամ $\vec{a}\{x;\ y;\ z\}$:*

Օրինակ 6. $\vec{a},\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորները բավարարում են $\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}=0$ պայմանին: Հաշվել $\mu=(\vec{a},\vec{b})+(\vec{b},\vec{c})+(\vec{c},\vec{a})$ մեծությունը, եթե $|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=1,|\vec{c}|=2$:

Լուծում. Քանի որ $-\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, ապա՝ $\vec{c}^2=(-\vec{c},-\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c},\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2(\vec{a},\vec{b})+2(\vec{b},\vec{c})+2(\vec{c},\vec{a})=1+1+4+2\mu$, այսպիսով $4=6+2\mu$, որտեղից $\mu=-1$: Պատ.՝ $\mu=-1$:

Օրինակ 7. Տրված են $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները: 1) $[\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b}]$ և 2) $\left[\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\vec{b}-\frac{\vec{a}}{2}\right]$ վեկտորները արտահայտել $\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]$ վեկտորի միջոցով:

Լուծում. Վեկտորական արտադրյալի հատկություններից հետևում է, որ.

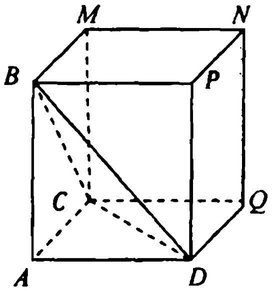
1) $[\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b}]=[\vec{a},\vec{a}-\vec{b}]+[\vec{b},\vec{a}-\vec{b}]=[\vec{a},\vec{a}]-[\vec{a},\vec{b}]+[\vec{b},\vec{a}]-[\vec{b},\vec{b}]=0-[\vec{a},\vec{b}]+[\vec{b},\vec{a}]-0=-2\vec{c}$;
2) համանմանորեն՝
$\left[\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\vec{b}-\frac{\vec{a}}{2}\right]=\frac{1}{2}\left[\vec{a},\vec{b}-\frac{\vec{a}}{2}\right]+\frac{1}{2}\left[\vec{b},\vec{b}-\frac{\vec{a}}{2}\right]=\frac{1}{2}[\vec{a},\vec{b}]-\frac{1}{4}[\vec{a},\vec{a}]+\frac{1}{2}[\vec{b},\vec{b}]-\frac{1}{4}[\vec{b},\vec{a}]=\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{4}(-\vec{c})=\frac{3}{4}\vec{c}$:

Օրինակ 8. Գտնել $[\vec{a},\vec{b}]$ -ն, եթե $\vec{a}=\{-1,0,1\}$ և $\vec{b}=\{2,1,3\}$:

Լուծում. $[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-\vec{i}-5\vec{j}-\vec{k}=\{-1;\ -5;\ -1\}$:

Պատ.՝ $\{-1;\ -5;\ -1\}$:

Օրինակ 9. Ապացուցել, որ քառանիստի ծավալը հավասար է այն երեք ոչ համահարթ վեկտորների խառն արտադրյալի $\frac{1}{6}$–ին, որոնք քառանիստի կողմնային կողերն են:



Լուծում. Լրացնենք $ABCD$ քառանիստը մինչև $ACQDBMNP$ զուգահեռանիստը: Կստանանք $V_{ABCD} = \frac{1}{3}hS_{ACD}$, որտեղ h –ը B գագաթից տարված բարձրության երկարությունն է, $S_{ACD} = \frac{1}{2}S_{ACDQ}$: Այսպիսով՝ $V = \frac{1}{6}hS_{ACQD} =$

$= \frac{1}{6}V_{ACQDBMNP} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right|$:

Խնդիրներ

2.1. Տրված են զուգահեռագծի երեք գագաթների շառավիղ-վեկտորները՝ $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$: Գտնել չորրորդ գագաթի շառավիղ-վեկտորը:

2.2. Ցույց տալ, որ ուռուցիկ քառանկյան կողմերի միջնակետերի միացմամբ ստացվում է զուգահեռագիծ:

2.3. Ապացուցել, որ եռանկյան միջին գիծը զուգահեռ է նրա հիմքին և հավասար է հիմքի կեսին:

2.4. Ապացուցել, որ սեղանի միջին գիծը զուգահեռ է նրա հիմքերին և հավասար է նրանց կիսագումարին:

2.5. Ապացուցել եթե քառանկյան անկյունագծերը հատման կետում կիսվում են, ապա այն զուգահեռագիծ է:

2.6. Տրված են $\vec{a}\{2,3,-1\}$, $\vec{b}\{0,1,4\}$, $\vec{c}\{1,0,-1\}$ վեկտորները: Որոշել հետևյալ վեկտորների կոորդինատները.

ա) $\vec{p} = 2\vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c}$,

բ) $\vec{p} = \vec{a} - \vec{b} - 3\vec{c}$,

գ) $\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$,

դ) $\vec{p} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$,

ե) $\vec{p} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$:

2.7. Գտնել $\vec{a}\{2,-3,-4\}$ վեկտորի ուղղորդ կոսինուսները:

2.8. Գտնել $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$ վեկտորին համուղղված միավոր վեկտորը:

2.9. Գտնել $\vec{x}$ վեկտորը հետևյալ հավասարումից.

ա) $3\{-2,3,1\} - 2\vec{x} = \{4,-5,-3\}$

բ) $\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{x} = 2(\vec{x} - \vec{a}) + 3\vec{a} + \lambda\vec{x}$

2.10. Տրված են $\vec{a}\{-1,5\}$, $\vec{b}\{3,5\}$, $\vec{c}\{-2,8\}$, $\vec{d}\{3,1\}$ վեկտորները: Հաշվել.

ա) $\vec{a}\vec{b}$, բ) $\vec{a}\vec{c}$, գ) $\sqrt{\vec{d}^2}$, դ) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\vec{d}$, ե) $(\vec{a} - \vec{b})(\vec{c} - \vec{d})$:

2.11. Գտնել $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներով կազմված անկյունը, եթե հայտնի է, որ $\vec{a} + 3\vec{b}$–ն ուղղահայաց է $7\vec{a} - 5\vec{b}$-ին, իսկ $\vec{a} - 4\vec{b}$-ն ուղղահայաց է $7\vec{a} - 2\vec{b}$-ին:

2.12. Տրված են $\vec{a}\{4,-2,-4\}$, $\vec{b}\{2,4,3\}$, $\vec{c}\{0,1,-1\}$ վեկտորները: Հաշվել.

ա) $\vec{a}\vec{b}$, բ) $\vec{a}\vec{c}$, գ) $\sqrt{\vec{a}^2}$, դ) $(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + \vec{c})$, ե) $(\vec{a} - \vec{b})^2$:

2.13. Տրված է ABCD քառանկյունը, ընդ որում՝ $\overrightarrow{AB}\{1,6,-2\}$, $\overrightarrow{BC}\{5,3,-1\}$, $\overrightarrow{CD}\{1,-7,1\}$: Ապացուցել, որ նրա անկյունագծերը փոխուղղահայաց են:

2.14. Գտնել հետևյալ վեկտորներով կազմված անկյան կոսինուսը.

ա) $\vec{a}\{2,-1,3\}$ և $\vec{b}\{1,-4,3\}$

բ) $\vec{a}\{2,-2,1\}$ և $\vec{b}\{3,0,-4\}$

գ) $\vec{a}\{0,-1,5\}$ և $\vec{b}\{7,5,1\}$

2.15. Տրված է՝ $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$ և $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$: Գտնել $|\vec{a} - \vec{b}|$–ն:

2.16. Տրված է՝ $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$: Գտնել $|\vec{a} + \vec{b}|$–ն:

2.17. $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները փոխուղղահայաց են, $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 12$: Որոշել $|\vec{a} + \vec{b}|$–ն և $|\vec{a} - \vec{b}|$-ն:

2.18. $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները կազմում են 60^0 անկյուն, $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 8$: Որոշել $|\vec{a} + \vec{b}|$–ն և $|\vec{a} - \vec{b}|$-ն:

2.19. $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները կազմում են 120^0 անկյուն, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$: Որոշել $|\vec{a} + \vec{b}|$–ն և $|\vec{a} - \vec{b}|$-ն:

2.20. Դիցուք $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները կազմում են $\varphi = \frac{2}{3}\pi$ անկյուն, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$: Հաշվել.

ա) $\vec{a}\vec{b}$, բ) $\vec{a}^2$, գ) $\vec{b}^2$, դ) $(\vec{a} + \vec{b})^2$, ե) $(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$, զ) $(\vec{a} - \vec{b})^2$, է) $(3\vec{a} + 2\vec{b})^2$:

2.21. Գտնել $\vec{x}$ վեկտորի կոորդինատները, եթե $|\vec{x}| = 50$, $\vec{x}$–ը OZ առանցքի հետ կազմում է սուր անկյուն և համագիծ է $\vec{a}\{6; -8; -7{,}5\}$ վեկտորին:

2.22. Տրված է $\vec{a}\{2;\ 1;\ -1\}$ վեկտորը: Գտնել $\vec{x}$ վեկտորը, որը համագիծ է $\vec{a}$-ին և $\vec{x} \cdot \vec{a} = 3$:

2.23. $\vec{x}$ վեկտորը ուղղահայաց է $\vec{a} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ և $\vec{b} = 18\hat{\imath} - 22\hat{\jmath} - 5\hat{k}$ վեկտորներին, Oy առանցքի հետ կազմում է բութ անկյուն: Գիտենալով, որ $|\vec{x}| = 50$, գտնել նրա կոորդինատները:

2.24. Գտնել $\vec{x}$ վեկտորը, եթե այն ուղղահայաց է $\vec{a} = \{2;\ 3;\ -1\}$ և $\vec{b} = \{1;\ -2;\ 3\}$ վեկտորներին և բավարարում է $\vec{x}(2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}) = -6$ պայմանին:

2.25. Գտնել $\vec{s} = \{4;\ -3;\ 2\}$ վեկտորի պրոյեկցիան l առանցքի վրա, որը կոորդինատական առանցքների հետ կազմում է հավասար անկյուններ:

2.26. Գտնել $\vec{s} = \{\sqrt{2};\ -3;\ -5\}$ վեկտորի պրոյեկցիան l ուղղության վրա, որը Ox-ի հետ կազմում է 45^0 անկյուն, Oz-ի հետ 60^0 անկյուն և Oy-ի հետ սուր անկյուն:

2.27. Տրված են $\vec{a} = \{5;\ 2;\ 5\}$ և $\vec{b} = \{2;\ -1;\ 2\}$ վեկտորները: Գտնել $\vec{a}$ վեկտորի պրոյեկցիան $\vec{b}$ վեկտորի ուղղության վրա:

2.28. Տրված են $\vec{a} = 3\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 5\vec{k}$ և $\vec{c} = 3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 12\vec{k}$ վեկտորները: Գտնել $պր_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b})$–ն:

2.29. Տրված են 3 վեկտորներ՝ $\vec{a} = \{1;\ -3;\ 4\}$, $\vec{b} = \{3;\ -4;\ 2\}$, $\vec{c} = \{-1;\ 1;\ 4\}$: Գտնել $պր_{\vec{b}+\vec{c}}\vec{a}$–ն:

2.30. Տրված են 3 վեկտորներ՝ $\vec{a} = -2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{\imath} + 5\vec{\jmath}$, $\vec{c} = 4\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 2\vec{k}$: Գտնել $պր_{\vec{c}}(3\vec{a} - 2\vec{b})$–ն:

2.31. Տրված են $A(-2;\ 3;\ -4)$, $B(3;\ 2;\ 5)$, $C(1;\ -1;\ 2)$ կետերը: Գտնել $պր_{\overline{CD}}\overrightarrow{AB}$–ն:

2.32. Հաշվել զուգահեռագծի մակերեսը, որի կողմերն են $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները, $\vec{a} = 3\vec{m} - 2\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + 4\vec{n}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 1$, $(\widehat{\vec{m},\vec{n}}) = \frac{\pi}{6}$:

2.33. Զուգահեռագծի կողմերն են $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$ և $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$ վեկտորները, որտեղ $|\vec{p}| = \sqrt{2}$, $|\vec{q}| = 3$, $(\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = \frac{\pi}{4}$: Գտնել զուգահեռագծի $\vec{b}$ կողմին տարված բարձրությունը:

2.34. Հաշվել եռանկյան մակերեսը, որի կողմերը $\vec{a} = 5\vec{m} - 3\vec{n}$, $\vec{b} = 7\vec{m} + 2\vec{n}$ վեկտորներն են, ընդ որում $|\vec{m}| = \sqrt{3}$, $|\vec{n}| = 4$, $(\widehat{\vec{m},\vec{n}}) = \frac{\pi}{3}$:

2.35. Գտնել ABC եռանկյան AD բարձրությունը, որի կողմերը $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ և $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ վեկտորներն են, ընդ որում՝ $\vec{a} = \vec{m} - 3\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + 4\vec{n}$, $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 2$, $(\widehat{\vec{m},\vec{n}}) = \frac{\pi}{6}$:

2.36. Տրված են $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 15$, $\vec{a}\vec{b} = 96$: Գտնել $|\vec{a} \times \vec{b}|$–ն :

2.37. Ի՞նչ պայմանի պետք է բավարարեն $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները, որպեսզի $3\vec{a}+\vec{b}$ և $\vec{a}-3\vec{b}$ վեկտորները լինեն համագիծ:

2.38. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ վեկտորները բավարարում են հետևյալ պայմանին. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$: Ապացուցել, որ $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{c}$:

2.39. Հաշվել հետևյալ վեկտորների վրա կառուցված զուգահեռագծի մակերեսը. $6\vec{a}-3\vec{b}$ և $3\vec{a}+2\vec{b}$, եթե $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$, $\widehat{(\vec{a},\vec{b})}=\frac{\pi}{6}$

2.40. Գտնել այն զուգահեռագծի անկյունագծերի երկարությունները և մակերեսը, որի կողմերն են $\vec{a}=\{6;\ 0;\ 2\}$ և $\vec{b}=\{1{,}5;\ 2;\ 1\}$ վեկտորները:

2.41. Գիտենալով, որ $\vec{a}=\alpha\vec{i}+7\vec{j}+3\vec{k}$ և $\vec{b}=\vec{i}+\beta\vec{j}+2\vec{k}$ վեկտորները համագիծ են, որոշել α և β գործակիցները:

2.42. Տրված են $\vec{a}\{3;\ 4;\ -1\}$, $\vec{b}\{2;\ 3;\ 5\}$ և $\vec{c}\{1;\ 0;\ 1\}$ վեկտորները: Հաշվել. ա) $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, բ) $(\vec{a}+\vec{b})\vec{b}\vec{c}$, գ) $(2\vec{a}-3\vec{b})\vec{a}\vec{c}$:

2.43. Համահա՞րթ են արդյոք հետևյալ վեկտորները.

ա) $\vec{a}\{1;\ 3;\ -5\}$, $\vec{b}\{3;\ -1;\ 2\}$ և $\vec{c}\{2;\ 1;\ 1\}$;

բ) $\vec{a}\{3;\ -1;\ 4\}$, $\vec{b}\{2;\ 1;\ -1\}$ և $\vec{c}\{1;\ -2;\ 5\}$:

2.44. α -ն ընտրել այնպես, որ $\vec{a}\{3;\ 2;\ -1\}$, $\vec{b}\{4;\ 5;\ 1\}$ և $\vec{c}\{\alpha;\ 0;\ 1\}$ վեկտորները լինեն համահարթ:

2.45. Գտնել $\vec{a}\{3;\ 4;\ -2\}$, $\vec{b}\{7;\ -1;\ 3\}$ և $\vec{c}\{2;\ -1;\ 1\}$ վեկտորների վրա կառուցված զուգահեռանիստի ծավալը:

2.46. Հաշվել եռանկյուն բուրգի ծավալը, որի գագաթներն են. $A(2;\ 1;\ -1)$, $B(3;\ -2;\ -7)$, $C(5;\ 1;\ -1)$, $D(1;\ 4;\ -3)$ կետերը:

2.47. Գտնել ABCDA′B′C′D′ զուգահեռանիստի A′ գագաթից իջեցրած բարձրության երկարությունը, եթե՝ $\overrightarrow{AB}=\vec{a}\{-1;\ 2;\ 5\}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}\{4;\ -3;\ 2\}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{c}\{2;\ 1;\ -1\}$:

2.48. Հաշվել եռանկյուն բուրգի D գագաթից տարված բարձրության երկարությունը, եթե նրա գագաթներն են $A(3;\ 2;\ 1)$, $B(4;\ 0;\ -1)$, $C(2;\ -1;\ )$, $D(4;\ 2;\ 5)$ կետերը:

2.49. Եռանկյուն բուրգի ծավալը 9 խորանարդ միավոր է: Նրա երեք գագաթներն են. $A(4;\ -1;\ 2)$, $B(5;\ 1;\ 4)$, $C(3;\ 2;\ -1)$ կետերը: Գտնել չորրորդ գագաթի կոորդինատները, եթե այն գտնվում է Oz առանցքի վրա:

2.50. Ցույց տալ, որ $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{0}$, եթե $\vec{a}\perp\vec{b}$ և $\vec{a}\perp\vec{c}$:

2.51. Ապացուցել, որ $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\vec{b})$:

2.52. Ապացուցել, որ $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{0}$:

2.53. Հաշվել $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$-ն, եթե.

ա) $\vec{a}\{3;\ -1;\ 2\}$, $\vec{b}\{1;\ 1;\ -1\}$, $\vec{c}\{2;\ 0;\ 1\}$,

բ) $\vec{a}\{1;\ 0;\ 2\}$, $\vec{b}\{2;\ 3;\ -1\}$, $\vec{c}\{1;\ -1;\ 0\}$,

գ) $\vec{a}\{5;\ 4;\ 1\}$, $\vec{b}\{3;\ 4;\ 0\}$, $\vec{c}\{-1; 3;\ 1\}$:

2.54. Տրված են $\vec{a}\{3;\ 0;\ -1\}$, $\vec{b}\{2;\ 4;\ 3\}$, $\vec{c}\{-1;\ 3;\ 2\}$, և $\vec{d}\{2;\ 0;\ 1\}$ վեկտորները: Հաշվել $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$-ն և $(\vec{a} \times \vec{c})(\vec{b} \times \vec{d})$-ն:

Պատասխաններ

2.1. $\vec{r}_4 = \vec{r}_1 + \vec{r}_3 - \vec{r}_2$:

2.6. ա) $\vec{p}\{2;\ 5;\ -4\}$, բ) $\vec{p}\{-1;\ 2;\ -2\}$, գ) $\vec{p}\{5;\ 5;\ 4\}$, դ) $\vec{p}\{1;\ 2;\ -4\}$, ե) $\vec{p}\{1;\ \frac{1}{3};\ -\frac{10}{3}\}$:

2.7. $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{29}}$, $\cos\beta = \frac{-3}{\sqrt{29}}$, $\cos\gamma = \frac{-4}{\sqrt{29}}$:

2.8. $\vec{a}_0 = \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$:

2.9. ա) $\vec{x}\{-5;\ 7;\ 3\}$, բ) $\vec{x} = \frac{3}{1+\lambda}\vec{b}$, երբ $\lambda \neq -1$; $\vec{x}$ –ը ցանկացած վեկտոր է, երբ $\vec{b} \neq 0$ և $\lambda = -1$:

2.10. ա) 22; բ) 42; գ) $\sqrt{10}$; դ) 18; ե) 20:

2.11. $\varphi = 60^0$:

2.12. ա) -2; բ) 2; գ) 6; դ) 49; ե) 89:

2.14. ա) $\frac{15}{2\sqrt{91}}$; բ) $\frac{2}{15}$; գ) 0:

2.15. 22: Ցուցում. օգտագործել զուգահեռագծի կողմերի և անկյունագծերի երկարությունների միջև եղած կապը:

2.16. 20: Ցուցում. տե՛ս նախորդ խնդրի ցուցումը:

2.17. 13; 13: Ցուցում. $|\vec{a} + \vec{b}| = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\vec{b} + |\vec{b}|^2$:

2.18. $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{129}$; $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$:

2.19. $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{19}$; $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$:

2.20. ա) -6; բ) 9; գ) 16; դ) 13; ե) -61; զ) 37; է) 73:

2.21. $\vec{x}\{-24;\ 32;\ 30\}$:

2.22. $\vec{x}\left\{1;\ \frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}\right\}$:

2.23. $\vec{x} = -4\vec{i} - 6\vec{j} + 12\vec{k}$:

2.24. $\vec{x}\{-3;\ 3;\ 3\}$:

2.25. $\sqrt{3}$:

2.26. -3: Ցուցում. նախ գտնել l ուղղության $\vec{l^0} = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, m, \frac{1}{2}\right\}$ միավոր վեկտորը:

2.27. 6:

2.28. -4:

2.29. 5:

2.30. -11:

2.31. $-6\frac{5}{7}$:

2.32. $S = 14$ քառ. միավոր:

2.33. $\frac{51\sqrt{65}}{65}$: Ցուցում. նախ գտնել զուգահեռագծի մակերեսը:

2.34. $S = 93$ քառ. միավոր:

2.35. 0,5:

2.36. $|\vec{a} \times \vec{b}| = 72$: Ցուցում. նախ գտնել $\cos(\vec{a}, \vec{b})$ –ն:

2.37. $\vec{a}$-ն և $\vec{b}$-ն պետք է լինեն համագիծ:

2.39. $S = 157{,}5$ քառ. միավոր:

2.40. $\frac{1}{2}\sqrt{277}$; $\frac{1}{2}\sqrt{101}$; $S = 13$ քառ. միավոր: Ցուցում. սկզբում գտնել $\vec{a} \times \vec{b}$ –ն:

2.41. $\alpha = \frac{3}{2}$; $\beta = \frac{14}{3}$:

2.42. ա) 24, բ) 24, գ) 72:

2.43. ա) ոչ, բ) այո:

2.44. $\alpha = -1$:

2.45. $V = 12$ խոր. միավոր:

2.46. $V = 12$ խոր. միավոր:

2.47. $h = \frac{65}{\sqrt{870}}$:

2.48. $\frac{12\sqrt{2}}{5}$:

2.49. $D(0;\ 0;\ 3)$:

2.53. ա) $\{8;\ 8;\ -8\}$, բ) $\{2;\ 3;\ -1\}$, գ) $\{55;\ -61;\ -31\}$:

2.54. ա) $-58\vec{i} - 20\vec{j} + \vec{k}$, բ) -80:

ՈՒՂԻՂԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ

1. Ուղիղի ընդհանուր հավասարումն է՝
$$Ax + By + C = 0,$$
որտեղ A–ն, B-ն, C-ն հաստատուններ են, իսկ A և B թվերից առնվազն մեկը զրո չէ:
2. Ուղիղի անկյունային գործակցով հավասարումն է՝
$$y = kx + b,$$
որտեղ k–ն անկյունային գործակիցն է, b-ն՝ օրդինատների առանցքից կտրած ուղղորդված հատվածի մեծությունն է:
3. Ուղիղի հավասարումը հատվածներով՝
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$
որտեղ a–ն և b-ն կոորդինատային առանցքներից կտրած ուղղորդված հատվածների մեծություններն են:
4. Տրված $M_0(x_0, y_0)$ կետով անցնող և k անկյունային գործակցով ուղիղի հավասարումն է՝
$$y - y_0 = k(x - x_0):$$
5. Տրված $M_1(x_1, y_1)$ և $M_2(x_2, y_2)$ կետերով անցնող ուղիղի հավասարումն է՝
$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}:$$
6. $y = k_1x + b_1$ և $y = k_2x + b_2$ ուղիղների կազմած անկյան տանգենսը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝
$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}, \left(\varphi \neq \frac{\pi}{2}\right):$$
Երկու ուղիղների <u>զուգահեռության պայմանը</u>՝ $k_1 = k_2$, <u>ուղղահայացության պայմանը</u>՝ $k_1k_2 = -1$:
7. Ուղիղի նորմավորված հավասարումն է՝
$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0,$$
որտեղ α–ն կոորդինատների սկզբնակետից ուղիղին իջեցրած ուղղահայացի կազմած անկյունն է OX առանցքի դրական ուղղության հետ, իսկ p–ն՝ սկզբնակետի հեռավորությունն է ուղիղից:

8. Ուղիղի $Ax + By + C = 0$ ընդհանուր հավասարումը բերում են նորմալ տեսքի, բազմապատկելով այն $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ նորմավորող բազմապատկիչով ($\mu \cdot C < 0$):

9. Տրված $M_0(x_0, y_0)$ կետի շեղումը $Ax + By + C = 0$ ուղիղից որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}:$$

10. Տրված $M_0(x_0, y_0)$ կետի հեռավորությունը $Ax + By + C = 0$ ուղիղից որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}:$$

11. $Ax_1 + By_1 + C = 0$ և $Ax_2 + By_2 + C = 0$ ուղիղների հատման կետով անցնող ուղիղների փնջի հավասարումն է՝

$$\alpha(Ax_1 + By_1 + C) + \beta(Ax_2 + By_2 + C) = 0:$$

որտեղ α –ն և β-ն ցանկացած իրական թվեր են, ընդ որում $\alpha^2 + \beta^2 > 0$:

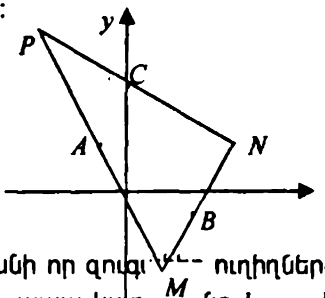
12. Եթե l ուղիղն անցնում է $M_0(x_0, y_0)$ կետով և զուգահեռ է $\vec{s}\{m; n\}$ ոչ զրոյական վեկտորին ($\vec{s}$ –ը կոչվում է l ուղիղի ուղղորդ վեկտոր), ապա նրա կանոնական հավասարումն է՝

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n},$$

որտեղից ստացվում են l ուղիղի պարամետրական հավասարումները՝

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty:$$

Օրինակ 10. Կազմել եռանկյան կողմերի հավասարումները, եթե $A(-1; 2)$, $B(3; -1)$, $C(0; 4)$ կետերը եռանկյան կողմերի միջնակետերն են:



Լուծում: Պետք է գտնել MNP եռանկյան կողմերի հավասարումները: $MN||AC$, $NP||AB$, $MP||BC$: Գտնենք ABC եռանկյան կողմերի անկյունային գործակիցները: $k_{AB} = \frac{-1-2}{3+1} = -\frac{3}{4}$, $k_{AC} = \frac{4-2}{0+1} = 2$, $k_{BC} = \frac{4+1}{0-3} = -\frac{5}{3}$:

Քանի որ զուգահեռ ուղիղների անկյունային գործակիցները հավասար են, ապա կստանանք $k_{MP} = k_{BC} = -\frac{5}{3}$, $k_{MN} = k_{AC} = 2$, $k_{NP} = k_{BA} = -\frac{3}{4}$:
MN ուղիղը անցնում է $B(3; -1)$ կետով և

$K_{MN} = 2$, ուստի կստանանք $y + 1 = 2(x - 3)$, $2x - y - 7 = 0$: PM և PN կողմերի հավասարումները կգտնենք նման ձևով:

NP ուղիղն անցնում է $C(0;\, 4)$ կետով և $k_{NP} = k_{AB} = -\frac{3}{4}$, հետևաբար NP –ի հավասարումը կլինի $y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 0)$, $3x + 4y - 16 = 0$: MP ուղիղն անցնում է $B(3;\, -1)$ և $k_{MP} = -\frac{5}{3}$, հետևաբար MP –ի հավասարումը կլինի $y + 1 = -\frac{5}{3}(x - 3)$, $5x + 3y - 12 = 0$:

Պատ.՝ $2x - y - 7 = 0$, $5x + 3y - 12 = 0$, $3x + 4y - 16 = 0$:

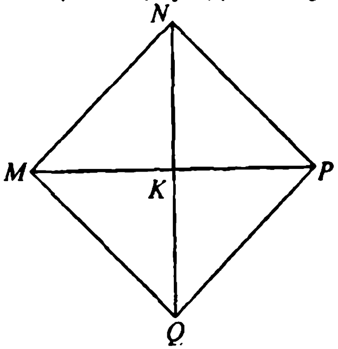
Օրինակ 11. Գտնել ուղղի հավասարումը, որը OY առանցքից անջատում է 2 երկարության հատված և $x - 2y + 3 = 0$ ուղղի հետ կազմում է 45^0 –ի անկյուն:

Լուծում. Ուղղի հավասարումը փնտրենք $y = kx + 2$ տեսքով: Տրված ուղղի անկյունային գործակիցը հավասար է $\frac{1}{2}$ –ի: Օգտվելով $tg\vartheta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$ բանաձևից, որտեղ $tg\vartheta = tg45^0 = 1$: Եթե $k_1 = \frac{1}{2}$ և $k_2 = k$, ապա կստանանք $1 = \frac{k - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}k}$, որտեղից $k = 3$, հետևաբար $y = 3x + 2$:

Իսկ եթե $k_2 = \frac{1}{2}$, $k_1 = k$, ապա $1 = \frac{\frac{1}{2} - k}{1 + \frac{1}{2}k}$, $k = -\frac{1}{3}$, հետևաբար $y = -\frac{1}{3}x + 2$:

Պատ.՝ $y = 3x + 2$, $y = -\frac{1}{3}x + 2$:

Օրինակ 12. $M(-1;\, 5)$ կետը հանդիսանում է քառակուսու գագաթ, որի անկյունագիծը գտնվում է $7x - y + 8 = 0$ ուղղի վրա: Կազմել քառակուսու կողմերի և անկյունագծի հավասարումները:



Լուծում. Քանի որ քառակուսու անկյունագծերը փոխուղղահայաց են, հետևաբար $k_{NQ}k_{MP} = -1$, $k_{MP} = -\frac{1}{7}$: MP ուղիղն անցնում է M կետով և նրա անկյունային գործակիցը հավասար է $-\frac{1}{7}$ –ի:

$y - 5 = -\frac{1}{7}(x + 4)$, $x + 7y - 31 = 0$:

Գտնենք K կետի կոորդինատները համատեղ լուծելով MP և QN ուղիղների հավասարումները $\begin{cases} 7x - y + 8 = 0 \\ x + 7y - 31 = 0 \end{cases}$, $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{9}{2}$; $K\left(-\frac{1}{2};\, \frac{9}{2}\right)$: Գտնենք P կետի կոորդինատները.

$x_k = \frac{x_M + x_P}{2}$, $x_P = 2x_K - x_M$, $x_P = 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 4 = 3$,
$y_k = \frac{y_M + y_P}{2}$, $y_P = 2y_K - y_M$, $y_P = 2 \cdot \frac{5}{2} - 5 = 4$: $P(3;\ 4)$:
Քառակուսու կողմերը անկյունագծերի հետ կազմում են 45^0 –ի անկյուն, հետևաբար

$tg\vartheta = 1$: $tg\vartheta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$, $k_1 = k_{MP} = -\frac{1}{7}$, $1 = \frac{k + \frac{1}{7}}{1 - \frac{k}{7}}$, $k_2 = \frac{3}{4}$: MN և PQ ուղիղների անկյունային գործակիցները հավասար են $\frac{3}{4}$ –ի, հետևաբար NP և QM ուղիղներինը կլինի $-\frac{4}{3}$, որտեղից կստանանք, որ
MN –ի հավասարումը՝ $3x - 4y + 32 = 0$,
PQ –ինը՝ $3x - 4y + 7 = 0$,
NP – ինը՝ $4x + 3y - 24 = 0$,
MQ –ինը՝ $4x + 3y + 1 = 0$:
Պատ.՝ $3x - 4y + 32 = 0$, $3x - 4y + 7 = 0$, $4x + 3y - 24 = 0$, $4x + 3y + 1 = 0$, $x + 7y - 31 = 0$:

Օրինակ 13. Կազմել ուղիղի հավասարումը, որն ուղղահայաց է $2x + 6y - 3 = 0$ ուղիղին և (5; 4) կետից գտնվում է $\sqrt{10}$ հեռավորության վրա:

Լուծում. Տրված ուղիղի անկյունային գործակիցը հավասար է $k_1 = -\frac{1}{3}$: Քանի որ ուղիղները փոխուղղահայաց են, ապա $k_2 = 3$: Փնտրվող ուղիղների հավասարումները կլինեն $y - y_1 = 3(x - x_1)$ կամ $3x - y + (y_1 - 3x_1) = 0$, որտեղ $(y_1 - 3x_1)$ ազատ անդամը անհայտ է: Որոշենք (5; 4) կետի հեռավորությունը որոնելի ուղիղներից:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \frac{|3 \cdot 5 - 1 \cdot 4 + (y_1 - 3x_1)|}{\sqrt{9 + 1}} = \sqrt{10}$$

$$|11 + (y_1 - 3x_1)| = 10, \quad \left[\begin{array}{l} 11 + (y_1 - 3x_1) = 10, \\ 11 + (y_1 - 3x_1) = -10, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} y_1 - 3x_1 = -1, \\ y_1 - 3x_1 = -21: \end{array}\right.$$

Այսպիսով, ուղիղների հավասարումները կլինեն.

$$3x - y - 1 = 0 \text{ և } 3x - y - 21 = 0:$$

Պատ.՝ $3x - y - 1 = 0$, $3x - y - 21 = 0$:

Խնդիրներ

3.1. Որոշել, թե ո՞ր կետերն են պատկանում $2x-3y-3=0$ ուղիղին և որոնք չեն պատկանում՝ $M_1(3;\ 1)$, $M_2(2;\ 3)$, $M_3(6;\ 3)$, $M_4(-3;\ -3)$, $M_5(3;\ -1)$, $M_6(-2;\ 1)$:

3.2. Որոշել, թե ո՞ր կետերն են պատկանում և որոնք չեն պատկանում $2x-y+5=0$ ուղիղին՝ $N_1(5;\ 15)$, $N_2(1;\ 1)$, $N_3(-2;\ 1)$, $N_4(3;\ 0)$, $N_5(7;\ -5)$, $N_6(1;\ 7)$, $N_7(\frac{1}{2};\ 6)$, $N_8(0;\ 3)$:

3.3. P_1, P_2, P_3, P_4, և P_5 կետերը գտնվում են $3x-2y-6=0$ ուղիղի վրա, նրանց աբսցիսներն են համապատասխանաբար՝ 4; 0; 2; -2; -6: Որոշել այդ կետերի օրդինատները:

3.4. Որոշել այն կետերի աբսցիսները, որոնք պատկանում են $7x+2y-8=0$ ուղիղին, եթե նրանց օրդինատներն են՝ 2; -4; 3; -1; 1; 0; 5:

3.5. Գտնել $3x+2y+2=0$ և $2x-3y-16=0$ ուղիղների հատման կետը:

3.6. ABC եռանկյան AB, BC և AC կողմերը գտնվում են համապատասխանաբար $4x+3y-5=0$, $x-3y+10=0$ և $x-2=0$ ուղիղների վրա: Որոշել եռանկյան գագաթների կոորդինատները:

3.7. Եռանկյան կողմերը գտնվում են $x+5y-7=0$, $3x-2y-4=0$ և $7x+y+19=0$ ուղիղների վրա: Հաշվել եռանկյան մակերեսը:

3.8. Եռանկյան մակերեսը 1,5 քառ. միավոր է, երկու գագաթներն են՝ $A(2;\ -3)$ և $B(3;\ -2)$, իսկ նրա ծանրության կենտրոնը գտնվում է $3x-y-8=0$ ուղիղի վրա: Գտնել երրորդ գագաթի կոորդինատները:

3.9. Գրել հետևյալ ուղիղների հավասարումները կտրած հատվածներով.
ա) $2x+3y-6=0$; բ) $4x-3y-24=0$; գ) $2x+3y-9=0$;
դ) $3x-5y-2=0$; ե) $5x+2y-1=0$; զ) $3x-2y+6=0$;
է) $x+y+6=0$:

3.10. Գտնել այն եռանկյան մակերեսը, որի կողմերը գտնվում են կոորդինատային առանցքների և $6x+7y-42=0$ ուղիղի վրա:

3.11. Ուղիղը կոորդինատային առանցքներից կտրում է հավասար և դրական մեծություններով հատվածներ: Գտնել ուղիղի հավասարումը, եթե այդ ուղիղով և կոորդինատային առանցքներով կազմված եռանկյան մակերեսը 32 քառ. միավոր է:

3.12. Գտնել այն ուղիղի հավասարումը, որն անցնում է $M_0(3;\ -7)$ կետով, իսկ կոորդինատային առանցքներից կտրում է տարբեր նշանի մեծություններով և հավասար երկարություններով հատվածներ:

3.13. Գտնել այն ուղիղի հավասարումը, որն անցնում է $P(2; 3)$ կետով և կոորդինատային առանցքներից կտրում է հավասար երկարությամբ հատվածներ:

3.14. Գտնել այն ուղիղի հավասարումը, որն անցնում է $P(8; 6)$ կետով և կոորդինատային քառորդից կտրում է 12 քառ. միավոր մակերեսով եռանկյուն:

3.15. Գտնել այն ուղիղի հավասարումը, որն.

ա) անցնում է $M(2; 5)$ կետով և անկյունային գործակիցը՝ $k = 3$;

բ) անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով և անկյունային գործակիցը՝ $k = -2$;

գ) համընկնում է առաջին կոորդինատային անկյան կիսորդի հետ;

դ) անցնում է $(-2; 1)$ կետով և OX առանցքի հետ կազմում է 30^0 անկյուն;

ե) անցնում է $(2; -1)$ կետով և OX առանցքի հետ կազմում է 120^0 անկյուն;

զ) OY առանցքից կտրում է $b = 2$ մեծությամբ հատված և անկյունային գործակիցը՝ $k = -3$;

է) OY առանցքից կտրում է $b = -3$ մեծությամբ հատված և անկյունային գործակիցը՝ $k = 1$:

3.16. Գտնել հետևյալ ուղիղների անկյունային գործակիցները և OY-ից կտրած հատվածների մեծությունները.

ա) $2x + y + 5 = 0$; բ) $x - 3y + 6 = 0$; գ) $x + y = 0$; դ) $2y + 5 = 0$;
ե) $3x + 1 = 0$:

3.17. Գտնել հետևյալ ուղիղների թեքման անկյունը OX առանցքի նկատմամբ.

ա) $x + y + 7 = 0$; բ) $x - y + 3 = 0$; գ) $x + \sqrt{3}y - 4 = 0$; դ) $x - \sqrt{3}y + 7 = 0$; ե) $\sqrt{3}x + y - 5 = 0$; զ) $3y - 7 = 0$; է) $3x - 2y + 5 = 0$:

3.18. Գտնել $M(5; -7)$ կետով անցնող և կոորդինատային առանցքներին զուգահեռ երկու ուղիղների հավասարումները:

3.19. Հետևյալ ուղիղների հավասարումները գրել անկյունային գործակցով և կտրած հատվածներով.

ա) $3x - 2y + 6 = 0$; բ) $x + y + 6 = 0$; գ) $2x - y + 3 = 0$;
դ) $2y + x - 5 = 0$; ե) $y + 3x - 4 = 0$; զ) $x - 7y + 11 = 0$;
է) $x + 3y - 24 = 0$:

3.20. Տրված է $3x - 4y + 5 = 0$ ուղիղը: Գտնել այն ուղիղի հավասարումը, որն անցնում է $M_0(-1; 2)$ կետով և.

ա) զուգահեռ է տրված ուղիղին,

բ) ուղղահայաց է տրված ուղղին:

ա) անցնում է $M_0(-2;\ 3)$ կետով և զուգահեռ է $\vec{s}\{5;\ -1\}$ վեկտորին;
բ) անցնում է $M_0(0;\ -2)$ և $M_1(3;\ -4)$ կետերով;
գ) անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով և զուգահեռ է $\vec{s}\{1;\ 1\}$ վեկտորին;
դ) անցնում է $M_0(1;\ -3)$ կետով և զուգահեռ է OX առանցքին:

3.33. Ուղիղի պարամետրական հավասարումներն են՝ $\begin{cases} x = -1 + 4t, \\ y = 2 - t: \end{cases}$

ա) Գտնել նրա որևէ ուղղորդ վեկտորը;
բ) որոշել $t_1 = 3,\ t_2 = 0,\ t_3 = -2,\ t_4 = -1$ պարամետրերին համապատասխանող կետերի կոորդինատները;
գ) որոշել տրված ուղիղի և կոորդինատային առանցքների հետ հատման կետերին համապատասխանող պարամետրերի արժեքները;
դ) որոշել, թե հետևյալ կետերից որոնք են պատկանում տրված ուղիղին՝ $M_1(-3;\ 1),\ M_2(3;\ 1),\ M_3(15;\ -2),\ M_4(0;\ \frac{7}{4}),\ M_5(2;\ 2)$:

3.34. Գտնել հետևյալ ուղիղի որևէ ուղղորդ վեկտոր.
ա) $3x + 7y + 8 = 0$; բ) $x + 5 = 0$; գ) $2x - 3y - 1 = 0$;
դ) $-x + 2y - 8 = 0$; ե) $2y + 5 = 0$:

3.35. Գտնել հետևյալ ուղիղների պարամետրական հավասարումները՝
ա) $3x - y + 5 = 0$, բ) $x + y - 3 = 0$, գ) $2x + 5 = 0$,
դ) $4x + 5y + 6 = 0$, ե) $x + 3y = 0$:

3.36. Գտնել հետևյալ ուղիղների ընդհանուր հավասարումները.
ա) $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 4 - t \end{cases}$; բ) $\begin{cases} x = 4t \\ y = 2 \end{cases}$; գ) $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 3t \end{cases}$:

3.37. Որոշել հետևյալ հավասարումներից որո՞նք են ուղիղի նորմավորված հավասարումներ.
ա) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 3 = 0$; բ) $\frac{2}{5}x - \frac{3}{5}y - 2 = 0$; գ) $\frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y + 2 = 0$;
դ) $\frac{-5}{13}x + \frac{12}{13}y - 2 = 0$; ե) $-x + 2 = 0$; զ) $y + 2 = 0$; ը) $-y - 2 = 0$:

3.38. Գտնել ուղիղի հավասարումը, եթե հայտնի է, որ կոորդինատների սկզբնակետից այդ ուղիղի վրա իջեցրած ուղղահայացի հիմքը $P(2;\ 3)$ կետն է:

3.39. Գտնել տրված կետի շեղումն ու հեռավորությունը տրված ուղիղից.
ա) $A(2;\ -1)$; $4x + 3y + 10 = 0$; բ) $B(0;\ -3)$; $5x - 12y - 23 = 0$;
գ) $C(-2;\ 3)$; $3x - 4y - 2 = 0$; դ) $D(1;\ -2)$; $x - 2y - 5 = 0$;

3.40. Պարզել $M(1;\ -3)$ կետը և կոորդինատների սկզբնակետը գտնվում են հետևյալ ուղիղի նույն, թե՞ տարբեր կողմերում.
ա) $2x - y + 5 = 0$; բ) $x - 3y - 5 = 0$; գ) $3x + 2y - 1 = 0$;

դ) $x - 3y + 2 = 0$; ե) $10x + 24y + 15 = 0$:

3.41. Քառակուսու գագաթներից մեկը $M(2; -5)$ կետն է, իսկ կողմերից մեկը գտնվում է $x - 2y - 7 = 0$ ուղիղի վրա: Գտնել քառակուսու մակերեսը:

3.42. Ուղղանկյան երկու կողմերը գտնվում են $3x - 2y - 5 = 0$ և $2x + 3y + 7 = 0$ ուղիղների վրա, իսկ գագաթներից մեկը $A(-2; 1)$ կետն է: Գտնել ուղղանկյան մակերեսը:

3.43. Գտնել հետյևալ զուգահեռ ուղիղների հեռավորությունը.

ա) $3x + 4y - 18 = 0$ և $3x + 4y - 43 = 0$;

բ) $x + y - 6 = 0$ և $2x + 2y - 3 = 0$;

գ) $2x - y + 7 = 0$ և $4x - 2y - 2 = 0$:

3.44. Տրված են երեք զուգահեռ ուղիղներ՝

$10x + 15y - 3 = 0$, $2x + 3y + 5 = 0$, $2x + 3y - 9 = 0$:

Ապացուցել, որ առաջին ուղիղը գտնվում է մյուս երկուսի միջև և գտնել, թե ի՞նչ հարաբերությամբ է նա բաժանում նրանց միջև եղած հեռավորությունը:

3.45. Քառակուսու երկու կողմերը գտնվում են $5x - 12y - 65 = 0$ և $5x - 12y + 26 = 0$ ուղիղների վրա: Գտնել քառակուսու մակերեսը:

3.46. Գտնել հետևյալ ուղիղներով կազմված անկյունների կիսորդների հավասարումները.

ա) $x - 3y + 2 = 0$ և $3x + y - 1 = 0$;

բ) $x + 2y + 5 = 0$ և $3x + 4y - 15 = 0$;

գ) $\sqrt{3}y - x = 12$ և $3x + 4y - 15 = 0$:

դ) $x - 3y + 5 = 0$ և $3x - y - 2 = 0$;

ե) $x - 2y - 3 = 0$ և $2x + 4y + 7 = 0$;

զ) $3x + 4y - 1 = 0$ և $55x + 12y - 2 = 0$:

3.47. Եռանկյան կողմերը գտնվում են $7x - 5y - 11 = 0$, $8x + 3y + 31 = 0$ և $x + 8y - 19 = 0$ ուղիղների վրա: Պարզել՝ կոորդինատների սկզբնակետը գտնվում է եռանկյան ներսում, թե՞ նրանից դուրս:

3.48. Եռանկյան կողմերը գտնվում են $x + y - 4 = 0$, $3x - 7y + 8 = 0$ և $4x - y - 31 = 0$ ուղիղների վրա: Պարզել՝ $M(-3; 2)$ կետը գտնվում է եռանկյան ներսում, թե՞ նրանից դուրս:

3.49. Գտնել $x + 2y - 11 = 0$ և $3x - 6y - 5 = 0$ ուղիղներով կազմված այն անկյան կիսորդի հավասարումը, որում գտնվում է $M(1; -3)$ կետը:

3.50. Գտնել այն շրջանագծի հավասարումը, որի կենտրոնը $C(6; -3)$ կետն է և որը շոշափում է $3x - 4y - 15 = 0$ ուղիղին:

3.51. Գտնել այն շրջանագծի հավասարումը, որը համակենտրոն է $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 17 = 0$ շրջանագծին և շոշափում է $3x - 4y + 7 = 0$ ուղիղին:

3.52. Գտնել $A(2; 3)$, $B(3; 6)$ կետերով անցնող և $2x + y - 2 = 0$ ուղիղին շոշափող շրջանագծի հավասարումը:

3.53. Տրված է $C(1; -3)$ կենտրոնով և $R = 2\sqrt{2}$ շառավղով շրջանագիծը: Գտնել $P(1; 1)$ կետից այդ շրջանագծին տարված շոշափողների հավասարումները:

3.54. Սեղանի հիմքերը գտնվում են $2x + 3y - 1 = 0$ և $4x + 6y + 15 = 0$ ուղիղների վրա: Գտնել սեղանի մակերեսը, եթե սեղանի միջին գծի երկարությունը 12 միավոր է:

3.55. Գտնել այն ուղիղի հավասարումը, որն անցնում է $5x + 3y - 9 = 0$ և $x + 2y - 1 = 0$ ուղիղների հատման կետով և.

ա) անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով;

բ) զուգահեռ է OX առանցքին;

գ) զուգահեռ է OY առանցքին;

դ) անցնում է $M(7; -1)$ կետով:

3.56. Գտնել այն ուղիղի հավասարումը, որն անցնում է $x - 3y + 5 = 0$ և $2x + 5y - 1 = 0$ ուղիղների հատման կետով և ուղղահայաց է $9x - 3y + 7 = 0$ ուղիղին:

3.57. Գտնել այն ուղիղի հավասարումը, որն անցնում է $5x - 2y + 11 = 0$ և $2x - 3y + 13 = 0$ ուղիղների հատման կետով և $x + y - 4 = 0$ ուղիղի վրա գտնվող այն կետով, որի աբսցիսը հավասար է 3-ի:

3.58. Փունջը որոշվում է $2x - y + 4 = 0$ և $x + 5y - 1 = 0$ ուղիղներով: Գտնել փնջին պատկանող այն ուղիղների հավասարումները, որոնք ուղղահայաց են փունջը որոշող ուղիղներին:

3.59. Գտնել այն ուղիղի հավասարումը, որն անցնում է $2x + 7y - 8 = 0$ և $3x + 2y + 5 = 0$ ուղիղների հատման կետով և $2x + 3y - 7 = 0$ ուղիղի հետ կազմում է 45^0 անկյուն (խնդիրը լուծել առանց ուղիղների հատման կետի կոորդինատները որոշելու):

3.60. ABC եռանկյան AM և BN բարձրությունները գտնվում են համապատասխանաբար $x + 5y - 3 = 0$ և $x + y - 1 = 0$ ուղիղների վրա, AB կողմը՝ $x + 3y - 1 = 0$ ուղիղի վրա: Գտնել CP բարձրության և մյուս կողմերի հավասարումները:

3.61. Տրված է փնջի հավասարումը՝

$$\alpha(5x + 3y + 6) + \beta(3x - 4y - 37) = 0:$$

Ապացուցել, որ $7x + 2y - 15 = 0$ ուղիղը չի պատկանում այդ փնջին:

3.62. Տրված է փնջի հավասարումը՝

$$\alpha(3x + y - 1) + \beta(2x - y - 9) = 0:$$

Ապացուցել, որ $x + 3y + 13 = 0$ ուղիղը պատկանում է այդ փնջին:

3.63. Տրված է փնջի հավասարումը՝

$$\alpha(5x + 3y + 6) + \beta(3x - 4y - 37) = 0:$$

C-ի ո՞ր արժեքի դեպքում է $4x - 3y + C = 0$ ուղիղը պատկանում այդ փնջին:

Պատասխաններ

3.1. M_1, M_3, M_4 կետերը պատկանում են, իսկ M_2, M_5, M_6 կետերը՝ ոչ:

3.2. N_1, N_3, N_6, N_7 կետերը պատկանում են, իսկ N_2, N_4, N_5 կետերը՝ ոչ:

3.3. 3; -3; 0; -6; -12:

3.4. $\frac{4}{7}$; $2\frac{2}{7}$; $\frac{2}{7}$; $1\frac{3}{7}$; $\frac{6}{7}$; $1\frac{1}{7}$; $-\frac{2}{7}$:

3.5. $(2; -4)$:

3.6. $A(2; -1)$, $B(-1; 3)$, $C(2; 4)$:

3.7. $S = 17$ քառ. միավոր:

3.8. $C_1(1; -1)$ կամ $C_2(-2; -10)$:

3.9. ա) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$, բ) $\frac{x}{-6} + \frac{y}{8} = 1$, գ) $\frac{x}{\frac{9}{2}} + \frac{y}{3} = 1$, դ) $\frac{x}{\frac{2}{3}} + \frac{y}{\frac{-2}{5}} = 1$,
ե) $\frac{x}{\frac{1}{5}} + \frac{y}{\frac{1}{2}} = 1$, զ) $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1$, է) $\frac{x}{-6} + \frac{y}{-6} = 1$:

3.10. $S = 21$ քառ. միավոր:

3.11. $x + y = 8$:

3.12. $x - y - 10 = 0$ կամ $x - y + 10 = 0$:

3.13. $x + y - 5 = 0$, $x - y + 1 = 0$:

3.14. $3x - 2y - 12 = 0$ կամ $3x - 8y + 24 = 0$:

3.15. ա) $y = 3x - 1$, բ) $y = -2x$, գ) $y = x$, դ) $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}}$, ե) $y = -\sqrt{3}x - 1 + 2\sqrt{3}$,
զ) $y = 3x + 2$, է) $y = x - 3$:

3.16. ա) $k = -2$, $b = -5$; բ) $k = \frac{1}{3}$, $b = 2$; գ) $k = -1$, $b = 0$; դ) $k = 0$, $b = -\frac{5}{2}$; ե) k և b գոյություն չունեն:

3.17. ա) $\varphi = 135^0$, բ) $\varphi = 45^0$, գ) $\varphi = 150^0$, դ) $\varphi = 30^0$, ե) $\varphi = 120^0$, զ) $\varphi = 0$, է) $\varphi = \left(arctg\frac{3}{2}\right)^0$,:

3.18. $x = 5$, $y = -7$:

3.19. ա) $y = \frac{3}{2}x + 3$, $\frac{x}{-2} + \frac{y}{2} = 1$; բ) $y = -x - 6$, $\frac{x}{-6} + \frac{y}{-6} = 1$; գ) $y = 2x + 3$, $\frac{x}{-\frac{3}{2}} + \frac{y}{3} = 1$; դ) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$, $\frac{x}{5} + \frac{y}{\frac{5}{2}} = 1$; ե) $y = -3x + 4$, $\frac{x}{\frac{4}{3}} + \frac{y}{4} = 1$;

գ) $y=\frac{1}{7}x+\frac{11}{7}$, $\frac{x}{-11}+\frac{y}{\frac{11}{7}}=1$; է) $y=-\frac{1}{3}x+8$, $\frac{x}{24}+\frac{y}{8}=1$:

3.20. ա) $3x-4y+11=0$, բ) $4x+3y-2=0$:

3.21. ա) $k=7$; բ) $k=\frac{7}{10}$; գ) $k=-\frac{3}{2}$:

3.22. $5x-2y-33=0$, $x+4y-11=0$, $7x+6y+33=0$:

3.23. $x+y+1=0$:

3.24. $4x+3y-11=0$, $x+y+2=0$, $3x+2y-13=0$:

3.25. ա) $\varphi=\frac{\pi}{4}$; բ) $\varphi=\frac{\pi}{2}$; գ) $\varphi=0$; դ) $\varphi=arctg\frac{16}{11}$:

3.26. $x-5y+3=0$ կամ $5x+y-11=0$:

3.27. $(-2;\ 1)$:

3.28. $C(6;\ -6)$:

3.29. $4x-3y+10=0$, $7x+y-20=0$, $3x+4y-5=0$: Ցուցում. եթե A գագաթը տրված ուղիղների հատման կետն է, ապա կիսորդի նկատմամբ B –ին համաչափ B_1 կետը կգտնվի AC –ի վրա:

3.30. $4x+7y-1=0$, $y-3=0$, $4x+3y-5=0$:

3.31. ա) $\vec{s}\{4;\ 2\}$, բ) $\vec{s}\{4;\ -5\}$, գ) $\vec{s}\{1;\ 7\}$, դ) $\vec{s}\{-1;\ 4\}$, ե) $\vec{s}\{2;\ 1\}$, զ) $\vec{s}\{2;\ 1\}$:

3.32. ա) $\begin{cases} x=-2+5t, \\ y=3-t; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x=3t, \\ y=-2-2t; \end{cases}$ գ) $\begin{cases} x=t, \\ y=t; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} x=t, \\ y=-3; \end{cases}$ ե) $\begin{cases} x=1, \\ y=t: \end{cases}$

3.33. ա) $\vec{s}\{4;\ -1\}$; բ) $M_1(11;\ -1)$, $M_2(-1;\ 2)$, $M_3(-9;\ 4)$, $M_4(-5;\ 3)$; գ) $t_1=\frac{1}{4}$, $t=2$; դ) M_2 –ը, M_3 –ը և M_4 –ը:

3.34. ա) $\vec{s}\{-7;\ 3\}$; բ) $\vec{s}\{0;\ 1\}$; գ) $\vec{s}\{3;\ 2\}$; դ) $\vec{s}\{2;\ 1\}$; ե) $\vec{s}\{1;\ 0\}$:

3.35. ա) $\begin{cases} x=-2+t, \\ y=-1+3t; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x=2-t, \\ y=1+t; \end{cases}$ գ) $\begin{cases} x=-\frac{5}{2}, \\ y=t; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} x=1-5t, \\ y=-2+4t; \end{cases}$

ե) $\begin{cases} x=-3t, \\ y=t: \end{cases}$

3.36. ա) $x+3y-10=0$, $y-2=0$, $3x-y-15=0$:

3.37. ա), դ), զ) և ը)՝ ուղիղի նորմավորված հավասարումներ են, իսկ բ)-ն, գ)-ն, ե)-ն և է)-ն՝ ոչ:

3.38. $2x+3y-13=0$:

3.39. ա) $\delta=-3$, $d=3$, բ) $\delta=1$, $d=1$, գ) $\delta=-4$, $d=4$, դ) $\delta=0$, $d=0$:

3.40. ա) նույն, բ) տարբեր, գ) նույն, դ) նույն, ե) տարբեր: Ցուցում. օգտվել շեղման սահմանումից:

3.41. $S=5$ քառ. միավոր:

3.42. $S=6$ քառ. միավոր:

3.43. ա) $d=5$, բ) $d=\frac{9\sqrt{2}}{4}$, գ) $d=\frac{8\sqrt{5}}{5}$:

3.44. $2:3$ (հաշված II ուղղից):
3.45. 49 քառ. միավոր:
3.46. ա) $2x + 4y - 3 = 0$, $4x - 2y + 1 = 0$, բ) $2x - 6y - 13 = 0$, $6x + 2y + 7 = 0$, գ) $11x + (8 - 5\sqrt{3})y + 30 = 0$, $x + (8 + 5\sqrt{3})y - 90 = 0$, դ) $4x - 4y + 3 = 0$, $2x - 2y - 7 = 0$, ե) $4x + 1 = 0$, $8y + 13 = 0$, զ) $14x - 8y - 3 = 0$, $64x + 112y - 23 = 0$:
3.47. Ներսում:
3.48. Դրսում:
3.49. $3x - 19 = 0$:
3.50. $(x - 6)^2 + (y + 3)^2 = 9$:
3.51. $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$:
3.52. $x^2 + y^2 - 26x - 2y + 45 = 0$ և $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 21 = 0$:
3.53. $x - y = 0$, $x + y - 2 = 0$:
3.54. $S = \frac{102}{\sqrt{13}}$ քառ. միավոր:
3.55. ա) $4x + 15y = 0$, բ) $7x + 4 = 0$, գ) $7x - 15 = 0$, դ) $3x + 34y + 13 = 0$:
3.56. $x + 3y - 1 = 0$:
3.57. $4x + 5y - 17 = 0$:
3.58. $11x + 22y + 7 = 0$, $55x - 11y + 101 = 0$:
3.59. $x - 5y + 13 = 0$, $5x + y + 13 = 0$:
3.60. (BC) $5x - y - 5 = 0$, (AC) $x - y + 3 = 0$, (CP) $3x - y - 1 = 0$:
3.61. $c = -29$:

ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ԿՈՐԵՐ

1. $C(a,b)$ կենտրոնով և R շառավղով շրջանագծի հավասարումն է՝ $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$:
2. Էլիպս է կոչվում հարթության այն կետերի բազմությունը, որոնց՝ տրված երկու F_1 և F_2 կետերից ունեցած հեռավորությունների գումարը հաստատուն է:
   Այդ կետերը կոչվում են էլիպսի կիզակետեր կամ ֆոկուսներ: Եթե հաստատունը նշանակենք $2a$–ով, միջֆոկուսային հեռավորությունը՝ $2c$-ով և ենթադրենք, որ ֆոկուսները գտնվում են աբսցիսների առանցքի վրա և համաչափ են կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ՝ $F_1(-c;\ 0)$, $F_2(c;\ 0)$, ապա էլիպսի կանոնական հավասարումն է՝
   $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$
   որտեղ $b^2=a^2-c^2$:
   $\varepsilon=\frac{c}{a}$ $(0\le\varepsilon<1)$ էլիպսի էքսցենտրիսիտետն է,
   $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ ուղիղները էլիպսի դիրեկտրիսներն են,
   $2a$–ն մեծ առանցքն է, $2b$-ն՝ փոքր առանցքը:
3. Հիպերբոլ է կոչվում հարթության այն կետերի բազմությունը, որոնց՝ տրված երկու F_1 և F_2 կետերից ունեցած հեռավորությունների տարբերության մոդուլը հաստատուն է:
   Այդ կետերը կոչվում են հիպերբոլի կիզակետեր կամ ֆոկուսներ: Եթե այդ հաստատունը նշանակենք $2a$–ով, միջֆոկուսային հեռավորությունը $2c$–ով, կոորդինատային համակարգն ընտրենք այնպես, որ ֆոկուսները լինեն՝ $F_1(-c;\ 0)$, $F_2(c;\ 0)$ կետերը, ապա հիպերբոլի կանոնական հավասարումն է՝
   $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$
   որտեղ $b^2=c^2-a^2$:
   $\varepsilon=\frac{c}{a}$ $(\varepsilon>1)$ հիպերբոլի էքսցենտրսիտետն է,

$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ ուղիղները հիպերբոլի դիրեկտրիսներն են,

$y = \pm\frac{b}{a}x$ ուղիղները հիպերբոլի ասիմպտոտներն են,

$2a$–ն իրական առանցքն է, $2b$-ն՝ կեղծ առանցքը:

4. Պարաբոլ է կոչվում հարթության այն կետերի բազմությունը, որոնք հավասարապես են հեռացված տրված կետից և տրված ուղիղից:

Այդ կետը կոչվում է պարաբոլի կիզակետ կամ ֆոկուս, իսկ ուղիղը՝ դիրեկտրիս:

Կոորդինատային առանցքներն ընտրում են այնպես, որ OX-ը լինի ուղղահայաց դիրեկտրիսին, անցնի կիզակետով և նրա դրական ուղղությունը համընկնի դիրեկտրիսից դեպի կիզակետ ուղղության հետ, իսկ OY-ը ուղղահայաց լինի OX-ին, անցնի OX առանցքի և դիրեկտրիսի հատման կետը կիզակետին միացնող հատվածի միջնակետով:

Պարաբոլի կանոնական հավասարումն է՝

$$y^2 = 2px:$$

Այդ պարաբոլի ֆոկուսն է $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ կետը, դիրեկտրիսը՝ $x = -$ ուղիղը, p թիվը՝ պարաբոլի պարամետրը:

Օրինակ 14. Կազմել շրջանագծի հավասարումը, որին շոշափում են $2x + y - 5 = 0$ և $2x + y + 15 = 0$ զուգահեռ ուղիղները, ընդ որում նրանցից մեկը շրջանագիծը շոշափում է $A(2;\ 1)$ կետում:

Լուծում. $d = \frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$: $A(2;\ 1)$ կետը գտնվում է $2x + y - 5 =$ ուղիղի վրա, հետևաբար

$\frac{|2\cdot2+1\cdot1+15|}{\sqrt{5}} = \frac{20}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}$, որտեղից $R = 2\sqrt{5}$:

Քանի որ $O_1(a,b)$ –ն շրջանագծի կենտրոնն է, ապա

$$(2-a)^2 + (1-b)^2 = 20$$

և

$$\frac{|2a+b-5|}{\sqrt{5}} = \frac{|2a+b+15|}{\sqrt{5}},$$

որը համարժեք է համարժեքին.

$$\left[\begin{array}{l} 2a+b-5 = 2a+b+15 \quad \emptyset \\ 2a+b-5 = -2a-b-15 \end{array}\right. \Rightarrow b = -2a-5:$$

a –ն և b –ն կգտնենք հետևյալ համակարգից՝

$$\begin{cases} (2-a)^2 + (1-b)^2 = 20, \\ b = -2a-5, \end{cases}$$

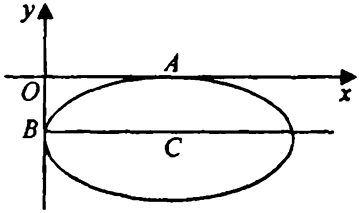
որտեղից կստանանք $a = -2,\ b = -1$: $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 20$:

Պատ.՝ $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 20$:

Օրինակ 15. Էլիպսը շոշափում է x-երի առանցքը $A(4; 0)$ և y-ների առանցքը $B(0; -3)$ կետերում: Կազմել էլիպսի հավասարումը, եթե համաչափության առանցքները զուգահեռ են կոորդինատային առանցքներին:

Լուծում. Այդ էլիպսի հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը.

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1:$$



Քանի որ A-ն և B-ն շոշափման կետեր են, ապա $a=4$, $b=3$, իսկ էլիպսի կենտրոնը գտնվում է $C(4; -3)$ կետում:

Հետևաբար՝ $\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{(y+3)^2}{9}=1:$

Պատ.՝ $\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{(y+3)^2}{9}=1:$

Օրինակ 16. Էլիպսը շոշափում է OY առանցքը $A(0; 5)$ կետում և հատում է OX առանցքը $B(5; 0)$ և $C(11; 0)$ կետորում: Գտնել էլիպսի հավասարումը, որի առանցքները զուգահեռ են կոորդինատային առանցքներին:

Լուծում: Էլիպսի հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը.

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1,$$

$x_0=a$, քանի որ էլիպսը շոշափում է OY առանցքը: $y_0=5$, քանի որ էլիպսի առանցքը զուգահեռ է OX առանցքին: Էլիպսի հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{(y-5)^2}{b^2}=1:$$

Կիսառանցքը՝ $a=OM=\frac{5+11}{2}=8$, հետևաբար կստանանք.

$$\frac{(x-8)^2}{64}+\frac{(y-5)^2}{b^2}=1:$$

B կետը պատկանում է էլիպսին, հետևաբար $\frac{(5-8)^2}{64}+\frac{25}{b^2}=1$, որտեղից $b^2=\frac{320}{11}$:

Հետևաբար էլիպսի հավսարումը կլինի

$$\frac{(x-8)^2}{64}+\frac{11(y-5)^2}{320}=1:$$

Օրինակ 17. $x=\pm 4$ ուղիղները հիպերբոլի դիրեկտրիսներն են, էքսցենտրիսիտետը հավասար է 1,5: Գտնել այն կետերի կոորդինատները, որոնց ֆոկալ շառավիղները աջ ֆոկուսից հավասար են 9-ի:

Լուծում: Հիպերբոլի հավասարումը փնտրենք հետևյալ տեսքով.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1:$$

Դիրեկտրիսի հավասարումները կլինեն $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$, այսինքն $\frac{a}{\varepsilon}=4$, $a=4\varepsilon$, $a=4\cdot1{,}5=6$:

էքսցենտրիսիտետը՝ $\varepsilon=\frac{c}{a}$, որտեղից $\frac{c}{6}=1{,}5$, $c=6\cdot1{,}5=9$:

b կիսառանցքը որոշվում է $b^2=c^2-a^2$ բանաձևով: $b^2=81-36=45$: Այսպիսով կստանանք՝

$$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{45}=1:$$

Ենթադրենք փնտրվող կետերը գտնվում են հիպերբոլի աջ ճյուղի վրա, այդ ժամանակ ֆոկալ շառավիղը որոշվում է $r=\varepsilon x-a$ բանաձևով: Ունենք՝ $9=1{,}5x-6$, $x=10$:

Կետի օրդինատը որոշենք հիպերբոլի հավասարումից՝

$$\frac{10^2}{36}-\frac{y^2}{45}=1,$$

որտեղից կստանանք $y=\pm4\sqrt{5}$: Պատ.՝$(10;\ 4\sqrt{5})$; $(10;\ -4\sqrt{5})$:

Օրինակ 18. Կազմել հիպերբոլի հավասարումը, եթե գագաթների միջև հեռավորությունը հավասար է 8–ի և ֆոկուսները գտնվում են $(-3;\ 3)$ և $(7;\ 3)$ կետերում:

Լուծում. Հիպերբոլի ֆոկուսները գտնվում են $y=3$ ուղիղի վրա: Հետևաբար հիպերբոլի կենտրոնը գտնվում է նույն ուղիղի վրա: Այդ դեպքում հիպերբոլի հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը.

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1,$$

որտեղ $(x_0;\ y_0)$–ն հիպերբոլի կենտրոնն է: Հիպերբոլի կենտրոնը կիսում է գագաթների միջև հեռավորությունը՝

$$x_0=\frac{-3+7}{2}=2,\ \ y_0=3,$$

մյուս կողմից՝ $2a=8$, $a=4$ և ֆոկուսների միջև հեռավորությունը՝

$$2c=\sqrt{(7+3)^2+(3-3)^2}=10,\ c=5,\ b=3:$$

Հիպերբոլի հավասարումը կլինի.

$$\frac{(x-2)^2}{16}-\frac{(y-3)^2}{9}=1:$$

Պատ.՝ $\frac{(x-2)^2}{16}-\frac{(y-3)^2}{9}=1$:

Օրինակ 19. Գտնել պարաբոլի հավասարումն ու նրա դիրեկտրիսը, եթե պարաբոլն անցնում է $x+y=0$ ուղիղի և x^2+y^2-

$4x=0$ շրջանագծի հատման կետով և համաչափ է OY առանցքի նկատմամբ:

Լուծում: Գտնենք տրված գծերի հատման կետերը, լուծելով համակարգը՝

$$\begin{cases} x=-y \\ x^2+y^2-4x=0 \end{cases}, \begin{cases} x_1=0 \\ y_1=0 \end{cases}, \begin{cases} x_2=2 \\ y_2=-2 \end{cases}:$$

Քանի որ պարաբոլն անցնում է $(0;0)$ կետով և համաչափ է OX առանցքի նկատմամբ, ապա այդ կետը կլինի պարաբոլի գագաթը: Հետևաբար պարաբոլի հավասարումը կլինի՝

$$x^2=2py:$$

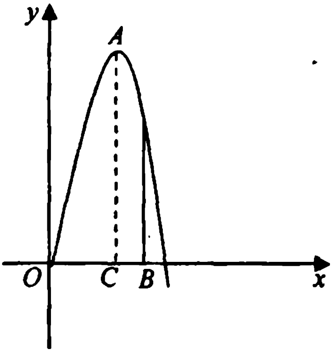
Քանի որ պարաբոլը անցնում է $(2;-2)$ կետով, ապա՝ $2^2=2p(-2)$, $p=-1$, որտեղից կստանանք պարաբոլի հավասարումը՝ $x^2=-2y$: Դիրեկտրիսի հավասարումը՝ $y=-\frac{p}{2}$, $y=\frac{1}{2}$, $2y-1=0$:

Պատ.՝ $x^2=-2y$, $2y-1=0$:

Օրինակ 20. Շատրվանի ջրի շիթը A կետում հասնում է ամենամեծ բարձրությանը՝ 4մ: A կետը O կետով անցնող ուղղածիգից ունի 0,5մ հեռավորություն: Գտնել ջրի շիթի բարձրությունը OX առանցքի այն կետում, որի հեռավորությունը O կետից հավասար է 0,75մ:

Լուծում. Շատրվանի ջրի շիթը ունի պարաբոլի տեսք, որի գագաթը գտնվում է $A(0,5;\ 1)$ կետում: Պարաբոլի համաչափության առանցքը զուգահեռ է OY առանցքին, հետևաբար պարաբոլի հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը.

$(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$:



Տեղադրելով x_0 -ի և y_0 -ի արժեքները, կստանանք՝ $(x-0,5)^2=2p(y-4)$: P-ն որոշելու համար վերջին հավասարման մեջ տեղադրենք $O(0;\ 0)$ կետի կոորդինատները $(-0,5)^2=2p(y-4)$, $p=-\frac{1}{32}$: Այսպիսով պարաբոլի հավասարումը կլինի՝ $(x-0,5)^2=-\frac{1}{16}(y-4)$ կամ $y=16(x-x^2)$: C կետի աբսցիսը տեղադրելով հավասարման մեջ կստանանք՝ $y=16(0,75-0,75^2)=3$:

Պատ.՝ 3:

Խնդիրներ

4.1. Գտնել շրջանագծի հավասարումն, եթե.

ա) կենտրոնը $C(3;4)$ կետն է, շառավիղը հավասար է 7-ի;

բ) $R = 17$, իսկ կենտրոնը $M(11; 2)$-ից $N(-4; 3)$ ուղղված հատվածը բաժանում է $3:2$ հարաբերությամբ;
գ) այն անցնում է $A(-5; 3)$ և $B(2; 6)$ կետերով, իսկ կենտրոնը գտնվում է Oy առանցքի վրա;
դ) այն անցնում է $A(1; 5)$ կետով և նրա կենտրոնն է $C(-2; -4)$ կետը;
ե) կենտրոնը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում, իսկ $3x - 4y + 20 = 0$ ուղիղը շոշափում է շրջանագծին:

4.2. Գտնել շրջանագծի կենտրոնն ու շառավիղը, եթե նրա հավասարումն է.
ա) $x^2 + 4x + y^2 - 5 = 0$;
բ) $x^2 + y^2 - 6y - 16 = 0$;
գ) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$;
դ) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$;
ե) $2x^2 + 2y^2 - 5x + 3y = 0$;
զ) $5x^2 + 5y^2 - 10x + 15y - 2 = 0$:

4.3. Գտնել էլիպսի հավասարումը, որի ֆոկուսները գտնվում են աբսցիսների առանցքի վրա, համաչափ են կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ և.
ա) նրա կիսաառանցքերն են 4 և 3-ը;
բ) մեծ առանցքը հավասար է 10-ի, միջֆոկուսային հեռավորությունը՝ 8-ի;
գ) փոքր առանցքը հավասար է 24-ի, միջֆոկուսային հեռավորությունը՝ 10-ի;
դ) միջֆոկուսային հեռավորությունը հավասար է 6-ի, էքսցենտրիսիտետը՝ $\varepsilon = \frac{3}{5}$;
ե) մեծ առանցքը հավասար է 20-ի, էքսցենտրիսիտետը՝ $\varepsilon = \frac{3}{5}$;
զ) փոքր առանցքը հավասար է 10-ի, էքսցենտրիսիտետը՝ $\varepsilon = \frac{12}{13}$;
է) միջդիրեկտրիսային հեռավորությունը հավասար է 5-ի, միջֆոկուսայինը՝ 4-ի:

4.4. Գտնել էլիպսի հավասարումն, եթե նրա ֆոկուսները գտնվում են օրդինատների առանցքի վրա, համաչափ են կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ և.
ա) նրա կիսաառանցքերը հավասար են համապատասխանաբար 7-ի և 2-ի;
բ) մեծ առանցքը հավասար է 10-ի, միջֆոկուսային հեռավորությունը՝ 8-ի;

գ) միջֆոկուսային հեռավորությունը հավասար է 24-ի, էքսցենտրիսիտետը՝ $\varepsilon = \frac{12}{13}$;

դ) փոքր առանցքը հավասար է 16-ի, էքսցենտրիսիտետը՝ $\varepsilon = \frac{3}{5}$;

ե) միջֆոկուսային հեռավորությունը հավասար է 6-ի, միջդիրեկտրիսային հեռավորությունը՝ $16\frac{2}{3}$-ի:

4.5. Հաստատուն երկարություն ունեցող հատվածն իր երկու ծայրերով սահում է ուղիղ անկյան կողմերի վրայով: Որոշել այն կորի հավասարումն, որը գծում է այդ հատվածի վրա գտնվող M կետը:

4.6. Կառուցել հետևյալ հավասարումներով որոշվող գծերը.

ա) $3x^2 + 6x + 4y^2 - 9 = 0$;

բ) $2x^2 + 5y^2 - 20y + 5 = 0$;

գ) $x^2 + 4x + 3y^2 - 9y + 2 = 0$;

դ) $5x^2 - 10x + 6y^2 - 12y - 4 = 0$;

ե) $3x^2 + 12x + 8y^2 - 16y - 4 = 0$:

4.7. Գտնել հիպերբոլի հավասարումը, որի կենտրոնը համընկնում է կորդինատների սկզբնակետի հետ, իրական առանցքն՝ աբսցիսների առանցքի հետ, եթե.

ա) իրական առանցքը հավասար է 10-ի, կեղծ առանցքը՝ 8-ի;

բ) իրական կիսաառանցքը հավասար է 3-ի, միջֆոկուսային հեռավորությունը՝ 10-ի;

գ) իրական առանցքը հավասար է 8-ի և հիպերբոլն անցնում է $M(8;\ 2\sqrt{3})$ կետով;

դ) կեղծ կիսաառանցքը հավասար է 5-ի և էքսցենտրիսիտետը՝ $\varepsilon = \frac{7}{3}$ –ի:

4.8. Գտնել հիպերբոլի հավասարումը, որի կենտրոնը համընկնում է կոորդինատների սկզբնակետի հետ, իրական առանցքը՝ օրդինատների առանցքի հետ, եթե.

ա) կեղծ առանցքը հավասար է 6-ի, էքսցենտրիսիտետը՝ $\varepsilon = \frac{5}{4}$ –ի;

բ) միջդիրեկտրիսային հեռավորությունը հավասար է 6-ի և գագաթների միջև եղած հեռավորությունը հավասար է 12-ի;

գ) ասիմպտոտների հավասարումներն են՝ $y = \pm 2x$, միջֆոկուսային հեռավորությունը հավասար է 10-ի;

դ) էքսցենտրիսիտետը հավասար է 2-ի և միջդիրեկտրիսային հեռավորությունը՝ 8-ի:

4.9. Հիպերբոլի ասիմպտոտներն են. $y = \pm\frac{3}{4}x$ ուղիղները: Կազմել հիպերբոլի հավասարումը, եթե այն անցնում է (4; 0) կետով:

4.10. Գտնել $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ հիպերբոլի ասիմպտոտներով կազմված անկյան և էքսցենտրիսիտետի միջև եղած կապը:

4.11. Գտնել $25x^2-16y^2=400$ հիպերբոլի ֆոկուսի շեղումը համապատասխան ասիմպտոտից:

4.12. Գտնել հետևյալ հիպերբոլների կենտրոնի կոորդինատները, ասիմպտոտների և դիրեկտրիսների հավասարումները.

ա) $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$;

բ) $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0$;

գ) $16x^2-9y^2-64x-18y+199=0$:

4.13. Գտնել պարաբոլի հավասարումը, որի գագաթը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում, իսկ համաչափության առանցքի ուղղությունը համընկնում է աբսցիսների առանցքի դրական ուղղության հետ, եթե.

ա) գագաթի հեռավորությունը ֆոկուսից հավասար է 3-ի;

բ) ֆոկուսի հեռավորությունը դիրեկտրիսից հավասար է 8-ի;

գ) պարաբոլը անցնում է $M(2;\ 6)$ կետով:

4.14. Գտնել պարաբոլի հավասարումը, որի գագաթը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում, համաչափության առանցքի ուղղությունը համընկնում է օրդինատների առանցքի ուղղության հետ, եթե.

ա) պարաբոլի ֆոկուսը $F(0;\ -2)$ կետն է;

բ) պարաբոլն անցնում է $M(3;\ -1)$ կետով;

գ) պարաբոլն անցնում է $N(-2;\ 5)$ կետով:

4.15. Որոշել պարաբոլի գագաթի կոորդինատները, պարամետրը և համաչափության առանցքի ուղղությունը.

ա) $y^2+5x-6y+4=0$; բ) $3x^2-4y+5=0$;

գ) $2x^2+4x+3y-8=0$; դ) $4x+3y^2-6y-9=0$;

ե) $9x^2-18x+3y+11=0$:

4.16. Գտնել $(x+2)^2+(y-3)^2=25$ շրջանագծի շոշափողի հավասարումը, որն անցնում է $A(-5;\ 7)$ կետով:

4.17. $M_1(x_1;y_1)$ կետը պատկանում է $x^2+y^2=R^2$ շրջանագծին: Գտնել շրջանագծի շոշափողի հավասարումը, որն անցնում է M_1 կետով:

4.18. $M_1(x_1;y_1)$ կետը պատկանում է $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ շրջանագծին: Գտնել շրջանագծի շոշափողի հավասարումը, որն անցնում է M_1 կետով:

4.19. $A\left(\frac{5}{3};\ -\frac{5}{3}\right)$ կետից $x^2+y^2=5$ շրջանագծին տարված են շոշափողներ: Գտնել նրանց հավասարումները:

4.20. $A(1;\ 6)$ կետից $x^2+y^2+2x-19=0$ շրջանագծին տարված են շոշափողներ: Գտնել նրանց հավասարումները:

4.21. Գտնել $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ էլիպսի շոշափողի հավասարումը, որն անցնում է նրա $M_1(x_1;y_1)$ կետով:

4.22. Գտնել $\frac{x^2}{10}+\frac{2y^2}{5}=1$ էլիպսի այն շոշափողների հավասարումները, որոնք զուգահեռ են $3x+2y+7=0$ ուղիղին:

4.23. Գտնել $x^2+4y^2=20$ էլիպսի այն շոշափողների հավասարումները, որոնք ուղղահայաց են $2x-2y-13=0$ ուղիղին:

4.24. Գտնել $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$ էլիպսի այն շոշափողների հավասարումները, որոնք զուգահեռ $4x-2y+23=0$ ուղիղին և հաշվել նրանց միջև եղած հեռավորությունը:

4.25. $A\left(\frac{10}{3};\ \frac{5}{3}\right)$ կետից $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$ էլիպսին տարված են շոշափողներ: Գտնել նրանց հավասարումները:

4.26. Գտնել $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ հիպերբոլի շոշափողի հավասարումը, որն անցնում է նրա $M_1(x_1;y_1)$ կետով:

4.27. Գտնել $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$ հիպերբոլի այն շոշափողների հավասարումները, որոնք ուղղահայաց են $4x+3y-7=0$ ուղիղին:

4.28. Գտնել $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{64}=1$ հիպերբոլի այն շոշափողների հավասարումները, որոնք զուգահեռ են $10x-3y+9=0$ ուղիղին:

4.29. Գտնել $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{8}=-1$ հիպերբոլի այն շոշափողների հավասարումները, որոնք զուգահեռ են $2x+4y-5=0$ ուղիղին և հաշվել նրանց միջև եղած հեռավորությունը:

4.30. $A(-1;\ -7)$ կետից $x^2-y^2=16$ հիպերբոլին տարված են շոշափողներ: Գտնել նրանց հավասարումները:

4.31. Գտնել $y^2=2px$ պարաբոլի այն շոշափողի հավասարումը, որն անցնում է նրա $M_1(x_1;y_1)$ կետով:

4.32. Գտնել $y^2=8x$ պարաբոլի այն շոշափողի հավասարումը, որը զուգահեռ է $2x-2y-3=0$ ուղիղին:

4.33. Գտնել $x^2=16y$ պարաբոլի այն շոշափողի հավասարումը, որն ուղղահայաց է $2x+4y+7=0$ ուղիղին:

4.34. Գտնել $A(2;\ 9)$ կետից $y^2=36x$ պարաբոլին տարված շոշափողների հավասարումները:

4.35. $A(5;\ 9)$ կետից $y^2=5x$ տարված են շոշափողներ: Գտնել շոշափման կետերը միացնող լարի հավասարումը:

Պատասխաններ

4.1. ա) $(x-3)^2+(y-4)^2=49$; բ) $(x-2)^2+(y-\frac{13}{5})^2=289$;

գ) $x^2+(y-1)^2=29$; դ) $(x+2)^2+(y+4)^2=90$; ե) $x^2+y^2=16$:

4.2. ա) $C(-2;\ 0)$, $R=3$; բ) $C(0;\ 3)$, $R=5$; գ) $C(3;\ -2)$, $R=\sqrt{14}$;

դ) $C(1;\ -3)$, $R=0$; ե) $C(\frac{5}{4};\ -\frac{3}{4})$, $R=\frac{\sqrt{34}}{4}$; զ) $C(1;\ -\frac{3}{2})$, $R=\frac{\sqrt{365}}{10}$:

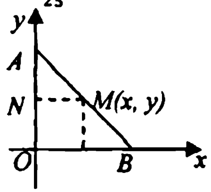
4.3. ա) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$; բ) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; գ) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$; դ) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$;

ե) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$; զ) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$; է) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{1}=1$:

4.4. ա) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{49}=1$; բ) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$; գ) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{169}=1$; դ) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1$;

ե) $\frac{x^2}{:}+\frac{y^2}{25}=1$:

4.5.



$AM=a$, $BM=b$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$: Ցուցում. օգտվել OAB և NAM եռանկյունների նմանությունից:

4.6. ա) $\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$; բ) $\frac{x^2}{15/2}+\frac{(y-2)^2}{3}=1$; գ) $\frac{(x+2)^2}{35/4}+\frac{\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}{35/12}=1$;

դ) $\frac{(x-1)^2}{3}+\frac{(y-1)^2}{5/2}=1$; ե) $\frac{(x+2)^2}{8}+\frac{(y-1)^2}{3}=1$:

4.7. ա) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$; բ) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$; գ) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$; դ) $\frac{x^2}{45/8}-\frac{y^2}{25}=1$:

4.8. ա) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$; բ) $\frac{x^2}{108}-\frac{y^2}{36}=-1$; գ) $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=-1$;

դ) $\frac{x^2}{192}-\frac{y^2}{64}=-1$:

4.9. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$:

4.10. $\operatorname{tg}\varphi=\frac{2\sqrt{\varepsilon^2-1}}{2-\varepsilon^2}$:

4.11. 5:

4.12. ա) $C(2;\ -3)$, $a=3$, $b=-4$, $\varepsilon=\frac{5}{3}$, դիրեկտրիսներն են՝ $5x-1=0$, $5x-19=0$, ասիմպտոտներն են՝ $4x-3y-17=0$, $4x+3y+1=0$:

բ) $C(-5;\ 1)$, $a=8$, $b=6$, $\varepsilon=1{,}25$, դիրեկտրիսներն են՝ $x=-11{,}4$; $x=1{,}4$, ասիմպտոտներն են՝ $3x+4y+11=0$, $3x-4y+19=0$:

դ) $C(2;\ -1)$, $a=3$, $b=-4$, $\varepsilon=1{,}25$, դիրեկտրիսներն են՝ $y=-4{,}2$; $y=2{,}2$, ասիմպտոտներն են՝ $4x+3y-5=0$, $4x-3y-11=0$:

4.13. ա) $y^2 = 12x$; բ) $y^2 = 16x$; ա) $y^2 = 18x$:
4.14. ա) $x^2 = -8y$; բ) $x^2 = -9y$; դ) $x^2 = 0{,}8y$:
4.15. ա) $C(1;\ 3)$, $p = \frac{5}{2}$, համաչափության առանցքի ուղղությունը համընկնում է OX առանցքի բացասական ուղղության հետ;
բ) $C(0;\ \frac{5}{4})$, $p = \frac{2}{3}$, համաչափության առանցքի ուղղությունը համընկնում է OY առանցքի դրական ուղղության հետ;
գ) $C(-1;\ \frac{10}{3})$, $p = \frac{3}{4}$, համաչափության առանցքի ուղղությունը համընկնում է OY առանցքի բացասական ուղղության հետ;
դ) $C(3;\ 1)$, $p = \frac{2}{3}$, համաչափության առանցքի ուղղությունը համընկնում է OX առանցքի բացասական ուղղության հետ;
ե) $C(1;\ -\frac{2}{3})$, $p = \frac{1}{6}$, համաչափության առանցքի ուղղությունը համընկնում է OY առանցքի բացասական ուղղության հետ:
4.16. $3x - 4y + 43 = 0$:
4.17. $x_1x + y_1y = R^2$: Ցուցում. օգտվել շոշափողի սահմանումից՝ որպես հատողի սահմանային դիրք:
4.18. $(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = R^2$:
4.19. $x - 2y - 5 = 0$, $2x - y - 5 = 0$:
4.20. $2x + y - 8 = 0$, $x - 2y + 11 = 0$:
4.21. $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$:
4.22. $3x + 2y - 10 = 0$, $3x + 2y + 10 = 0$:
4.23. $x + y - 5 = 0$, $x + y + 5 = 0$:
4.24. $2x - y - 12 = 0$, $2x - y + 12 = 0$; $d = \frac{24\sqrt{5}}{5}$:
4.25. $x + y - 5 = 0$, $x + 4y - 10 = 0$:
4.26. $\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$:
4.27. $3x - 4y - 10 = 0$, $3x - 4y + 10 = 0$:
4.28. $10x - 3y - 32 = 0$, $10x - 3y + 32 = 0$:
4.29. $x + 2y - 4 = 0$, $x + 2y + 4 = 0$; $d = \frac{8\sqrt{5}}{5}$:
4.30. $5x - 3y - 16 = 0$, $13x + 5y + 48 = 0$:
4.31. $y_1y = p(x + x_1)$:
4.32. $x + y + 2 = 0$:
4.33. $2x - y - 16 = 0$:
4.34. $3x - y + 3 = 0$, $3x - 2y + 12 = 0$:
4.35. $5x - 18y + 25 = 0$:

ԳԼՈՒԽ V

ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՎ ՈՒՂԻՂԸ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

Հարթությունը տարածության մեջ

1. Հարթության ընդհանուր հավասարումն է՝
$$Ax + By + Cz + D = 0,$$
որտեղ A, B, C, D–ն հաստատուններ են, ընդ որում A, B, C գործակիցներից առնվազն մեկը զրո չէ:
2. Հարթության վեկտորական հավասարումն է՝
$$\vec{n}\vec{r} + D = 0,$$
որտեղ $\vec{n}\{A, B, C\}$ –ն հարթության նորմալ վեկտորն է, $\vec{r}$-ը հարթության ընթացիկ կետի շառավիղ-վեկտորն է:
3. Հարթության նորմավորված հավասարումն է.
ա) դեկարտյան կոորդինատներով՝
$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$$
բ) վեկտորական տեսքով՝
$$\vec{r}\overrightarrow{n^0} - p = 0,$$
որտեղ $\vec{r}\{x, y, z\}$, $\overrightarrow{n^0}\{cos\,\alpha\,, cos\,\beta\,, cos\,\gamma\}$:
4. Հարթության հավասարումը հատվածներով՝
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$
որտեղ a–ն, b-ն, c-ն կոորդինատային առանցքներից կտրած ուղղված հատվածների մեծություններն են՝ $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$:
5. $M_1(x_1, y_1, z_1)$ կետով անցնող և $\vec{n}\{A, B, C\}$ վեկտորին ուղղահայաց հարթության հավասարումն է՝
$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0,$$
վեկտորական տեսքով՝
$$\vec{n}(\vec{r} - \vec{r_1}) = 0:$$
6. Տրված երեք կետերով անցնող հարթության հավասարումն է՝
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0:$$
7. $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ և $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ հարթություններով կազմված φ անկյունը որոշվում է
$$cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{{A_1}^2 + {B_1}^2 + {C_1}^2}\sqrt{{A_2}^2 + {B_2}^2 + {C_2}^2}}$$

բանաձևով: Հարթությունների զուգահեռության պայմանը՝

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

ուղղահայացության պայմանը՝

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0:$$

8. $M_1(x_1, y_1, z_1)$ կետի հեռավորությունը $Ax + By + Cz + D = 0$ հարթությունից՝

$$d = |x_1 cos\alpha + y_1 cos\beta + z_1 cos\gamma - p|$$

կամ

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}:$$

9. $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ և $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ հարթությունների հատման ուղիղով որոշվող հարթությունների փնջի հավասարումն է՝

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0:$$

Օրինակ 21: Գտնել հարթության հավասարումը, որն անցնում է $(2; -1; 1)$ կետով և ուղղահայաց է $3x - y - z + 1 = 0$ և $x - y + 2z + 1 = 0$ հարթությունների հատման գծին:

Լուծում: Հարթության հավասարումը, որն անցնում է տրված կետով կլինի

$$A(x-2) + B(y+1) + C(z-1) = 0:$$

Քանի որ հարթությունն ուղղահայաց է տրված հարթությունների հատման գծին, ապա նա ուղղահայաց է այդ հարթություններից յուրաքանչյուրին, որտեղից կստանանք՝

$$3A - B - C = 0 \text{ և } A - B + 2C = 0:$$

Դիտարկելով C –ն որպես պարամետր, A –ն և B –ն արտահայտենք C –ով, կստանանք՝ $A = \frac{3}{2}C$, $B = \frac{7}{2}C$: Տեղադրելով փնտրվող հարթության հավասարման մեջ կստանանք՝

$$3(x-2) + 7(y+1) + 2(z-1) = 0, 3x + 7y + 2z - 1 = 0:$$

Պատ.՝ $3x + 7y + 2z - 1 = 0$:

Օրինակ 22. Կազմել հարթության հավասարումը, որն անցնում է $M_1(3;\ 0;\ 4)$, $M_2(5;\ 2;\ 6)$ կետերով և ուղղահայաց է $2x + 4y + 6z - 7 = 0$ հարթությանը:

Լուծում. Եթե $M(x;\ y;\ z)$ –ը հարթության կամայական կետ է, ապա $\overrightarrow{M_1M}\{x-3;\ y-0;\ z-4\}$, $\overrightarrow{M_1M_2}\{2;\ 2;\ 2\}$ և $\vec{n}\{2;\ 4;\ 6\}$ վեկտորները պատկանում են միևնույն հարթությանը: Հետևաբար $\overrightarrow{M_1M}\overrightarrow{M_1M_2}\vec{n} = 0$ կամ

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z-4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

որտեղից կստանանք՝ $x - 2y - z - 7 = 0$:

Պատ.՝ $x - 2y - z - 7 = 0$:

Օրինակ 23. Տրված են $2x - 3y + z - 3 = 0$, $x - y - 2z + 4 = 0$ հարթությունները: Պարզել $M(1;\ 2;\ -1)$ և $N(-3;\ 1;\ 2)$ կետերը գտնվում են այդ հարթություններով կազմված միևնույն, կից, թե՞ հակադիր երկնիստ անկյուններում:

Լուծում. Որոշենք M կետի շեղումը հարթություններից

$$\delta_1 = \frac{2\cdot 1 - 3\cdot 2 - 1 - 3}{\sqrt{4+9+1}} = -\frac{8}{\sqrt{14}} < 0,$$

$$\delta_2 = \frac{1 - 2 + 2 + 4}{-\sqrt{1+1+4}} = -\frac{5}{\sqrt{6}} < 0,$$

իսկ N կետինը կլինի՝

$$\delta'_1 = \frac{2(-3) - 3\cdot 1 + 2 - 3}{\sqrt{14}} = -\frac{10}{\sqrt{14}} < 0,$$

$$\delta'_2 = \frac{-3 - 1 - 4 + 4}{-\sqrt{6}} = \frac{-4}{-\sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{6}} > 0:$$

Քանի որ δ_1 և δ'_1 միևնույն նշանի են, ապա M և N կետերը գտնվում են առաջին հարթության միևնույն կողմում: δ_2 և δ'_2 տարբեր նշանի են, ուստի կետերը գտնվում են երկրորդ հարթության տարբեր կողմերում: Հետևաբար M –ը և N –ը գտնվում են կից երկնիստ անկյուններում:

Ուղիղը տարածության մեջ

1. Ուղիղ գծի ընդհանուր հավասարումներն են՝

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0\ : \end{cases}$$

2. Ուղիղ գծի կանոնական հավասարումներն են՝

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p},$$

որտեղ m, n, p–ն ուղիղի ուղղորդ վեկտորի պրոյեկցիաներն են:

3. $M_1(x_1, y_1, z_1)$ և $M_1(x_2, y_2, z_2)$ կետերով անցնող ուղիղի հավասարումներն են՝

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}:$$

4. $\{m_1, n_1, p_1\}$ և $\{m_2, n_2, p_2\}$ ուղղորդ վեկտորներ ունեցող ուղիղներով կազմված φ անկյունը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$\cos\varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{{m_1}^2 + {n_1}^2 + {p_1}^2}\sqrt{{m_2}^2 + {n_2}^2 + {p_2}^2}}:$$

5. Երկու ուղիղների ուղղահայացության պայմանը՝

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0,$$

զուգահեռության պայմանը՝

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}:$$

Ուղիղի և հարթության փոխադարձ դասավորությունը

1. $\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}$ ուղիղի և $Ax + By + Cz + D = 0$ հարթության կազմված անկյունը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}:$$

2. Ուղիղի և հարթության զուգահեռության պայմանը՝

$$Am + Bn + Cp = 0,$$

ուղղահայացության պայմանը՝

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}:$$

3. Երկու ուղիղների՝ $\frac{x-a_1}{m_1} = \frac{y-b_1}{n_1} = \frac{z-c_1}{p_1}$ և $\frac{x-a_2}{m_2} = \frac{y-b_2}{n_2} = \frac{z-c_2}{p_2}$ մեկ հարթության մեջ գտնվելու պայմանը՝

$$\begin{vmatrix} a_2 - a_1 & b_2 - b_1 & c_2 - c_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0;$$

4. $\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}$ ուղիղը գտնվում է $Ax + By + Cz + D = 0$ հարթության մեջ, եթե

$$\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0, \\ Aa + Bb + Cc + D = 0: \end{cases}$$

Օրինակ 24: Գտնել

$$\frac{x-1}{9} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z}{-7}$$

ուղիղի պրոյեկցիան $2x - y - 3z + 6 = 0$ հարթության վրա:

Լուծում: Պրոյեկտող հարթությունը անցնում է տրված ուղիղով և ուղղահայաց է տրված հարթությանը: Ուղիղի հավասարումից հետևում է, որ փնտրվող հարթությունը պետք է անցնի $(1; -1; 0)$ կետով: Հետևաբար հարթության հավասարումը կլինի՝

$$A(x-1)+B(y+1)+C(z-0)=0:$$

Որոնելի ուղիղի $\vec{q}$ ուղղորդ վեկտորը կլինի ուղղահայաց տրված հարթության $\vec{n}\{A, B, C\}$ նորմալ վեկտորին, որտեղից ստանում ենք՝ $\vec{n}\cdot\vec{q}=0$, և.

$$9A-4B-7C=0:$$

Քանի որ պրոյեկտող հարթությունն ուղղահայաց է տրված հարթությանը, ապա՝

$$2A-B-3C=0:$$

Լուծելով այս երկու հավասարումների համակարգը, կստանանք՝

$$\frac{A}{C}=-5 \text{ և } \frac{B}{C}=-13:$$

Պրոյեկտող հարթության հավասարման երկու մասերը բաժանելով C –ի վրա կստանանք՝

$$\frac{A}{C}(x-1)+\frac{B}{C}(y+1)+z=0:$$

Տեղադրելով $\frac{A}{C}$ և $\frac{B}{C}$ արժեքները կստանանք՝

$$5x+13y-z+8=0:$$

Ուստի ուղիղի պրոյեկցիայի հավասարումը կլինի՝

$$\begin{cases}2x-y-3z+6=0,\\5x+13y-z+8=0:\end{cases}$$

Օրինակ 25. Գտնել այն ուղիղի հավասարումը, որն անցնում է $A(3; -4; 6)$ կետով և զուգահեռ է YOZ կոորդինատային անկյան կիսորդին:

Լուծում: Գտնենք YOZ անկյան կիսորդի հավասարումը: YOZ կոորդինատային հարթությանը պատկանող ուղիղը OX առանցքի հետ կազմում է 90^0 անկյուն, հետևաբար $\cos\alpha=\cos 90^0=0$, իսկ OY –ի և OZ –ի հետ՝ 45^0 անկյուն, որտեղից ստանում ենք՝ $\cos\beta=\cos 45^0=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\gamma=\cos 45^0=\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$\vec{q}=\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ –ն կլինի YOZ անկյան կիսորդի ուղղորդ վեկտորը, հետևաբար այդ ուղիղի հավասարումը կլինի՝

$\frac{x}{0}=\frac{y}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{z}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ կամ $\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$: $\vec{q}=\{0, 1, 1\}$ –ն կլինի նաև փնտրվող ուղիղի համար ուղղորդ վեկտոր, հետևաբար որոնելի ուղիղի հավասարումը կլինի՝

$$\frac{x-3}{0}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-6}{1}:$$

Պատ.՝ $\frac{x-3}{0}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-6}{1}$:

Օրինակ 26. Հաշվել $\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z+1}{-2}$ (1) և $\frac{x-0}{1}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-1}{1}$ (2) ուղիղների միջև եղած հեռավորությունը:

Լուծում. Ստուգենք, որ այս ուղիղները պատկանում են տարբեր հարթությունների: $M_1(2;-2;-1)$ կետը պատկանում է (1), իսկ $M_2(0;0;1)$-ը՝ (2) ուղիղներին: $\vec{n}_1\{2;2;-2\}$, $\vec{n}_2\{1;-3;-2\}$, $\vec{n}_3\{1;1;1\}$ վեկտորների կոորդինատներից կազմենք որոշիչ՝

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0,$$

որտեղից հետևում է, որ այդ ուղիղները չեն պատկանում միևնույն հարթությանը, այսինքն խաչվող են: Հետևաբար այդ ուղիղների հեռավորությունը կլինի այն զուգահեռ P_1 և P_2 հարթությունների հեռավորությունը, որոնք համապատասխանաբար պարունակում են այդ ուղիղները: $\vec{n}=-[\vec{n}_3;\vec{n}_2]=-\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$ վեկտորը հանդիսանում է այդ հարթությունների ընդհանուր նորմալը: Փնտրվող h հեռավորությունը կլինի $\overrightarrow{M_2M_1}\{2;-2;-2\}$ վեկտորի պրոյեկցիայի բացարձակ արժեքը $\vec{n}$ վեկտորի ուղղության վրա.

$$\text{պր}_{\vec{n}}\overrightarrow{M_2M_1}=\frac{(\overrightarrow{M_2M_1},\vec{n})}{|\vec{n}|}=\frac{2\cdot 1-2\cdot 3-4\cdot(-2)}{\sqrt{1^2+3^2+(-4)^2}}=\frac{2\sqrt{26}}{13}:$$

Պատ.՝ $\frac{2\sqrt{26}}{13}$:

Օրինակ 27. Կազմել հարթության հավասարումը, որն անցնում է $\begin{cases} x-y+3=0, \\ 6y+1=0, \end{cases}$ ուղիղով և $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{4}$ ուղիղը հատում է 45^0 անկյան տակ:

Լուծում. Գրենք հարթությունների փնջի հավասարումը, որն անցնում է տրված ուղիղով.

$x-y+3+\lambda(6y+1)=0$ կամ $x+(6\lambda-1)y+3+\lambda=0$:

Օգտվենք հարթության և ուղիղի կազմած անկյան բանաձևից՝

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}},$$

որտեղ $\varphi=45^0$, $A=1$, $B=6\lambda-1$, $C=0$, $m=1$, $n=1$, $p=4$: Տեղադրելով բանաձևի մեջ կստանանք՝ $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1+6\lambda-1}{\sqrt{1+4\lambda^2-4\lambda+1}\sqrt{1+1+16}}$, որտեղից՝ $\lambda=\frac{1}{2}$:

Տեղադրելով $\lambda = \frac{1}{2}$ արժեքը հարթության հավասարման մեջ կստանանք՝ $2x + 4y + 7 = 0$:

Պատ.՝ $2x + 4y + 7 = 0$:

Օրինակ 28. Գտնել $A(1; -3; 2)$ կետի պրոյեկցիան $6x + 3y - z - 41 = 0$ հարթության վրա:

Լուծում. Կետի պրոյեկցիան հարթության վրա կլինի այդ կետով անցնող և տրված հարթությանն ուղղահայաց ուղիղի և այդ հարթության հատման կետը: Այդ ուղիղի հավասարումը կլինի՝

$$\frac{x-1}{m} = \frac{y+3}{n} = \frac{z-2}{p},$$

որտեղ ուղղորդ վեկտորի կոորդինատները որոշվում են հետևյալ առնչություններից.

$$\frac{m}{6} = \frac{n}{3} = \frac{p}{-1},$$

այսինքն՝ $m:n:p = 6:3:(-1)$: Ուղիղի հավասարումը կլինի՝

$$\frac{x-1}{6} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-2}{-1}:$$

$\frac{x-1}{6} = t$, $\frac{y+3}{3} = t$, $\frac{z-2}{-1} = t$ առնչություններից x-ը, y-ը և z-ն արտահայտելով t-ով և տեղադրելով հարթության հավասարման մեջ կստանանք՝ $t = 1$, որտեղից հետևում է՝ $x = 7$, $y = 0$, $z = 1$:

Պատ.՝ (7; 0; 1):

Խնդիրներ

5.1. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $A(2; -1; 3)$ կետով և զուգահեռ է.
ա) OXY հարթությանը, բ) OYZ հարթությանը, գ) OXZ հարթությանը:

5.2. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $M(-1; 6; 3)$ կետով և.
ա) OX առանցքով, բ) OY առանցքով, գ) OZ առանցքով:

5.3. Գտնել $A(3; -2; 1)$ և $B(2; 1; 4)$ կետերով անցնող և.
ա) OX-ին զուգահեռ, բ) OY-ին զուգահեռ, գ) OZ-ին զուգահեռ, հարթության հավասարումը:

5.4. Գտնել հարթության նորմալ վեկտորը.
ա) $2x + 3y - 9z + 4 = 0$, բ) $x + 2y - 7 = 0$, գ) $4x + 5 = 0$:

5.5. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $M(7; 9; 11)$ կետով և ուղղահայաց է $\vec{n}\{-5; 4; 3\}$ վեկտորին:

5.6. Գտնել այն հատվածների մեծությունները, որոնք $3x - 5y + 6z - 24 = 0$ հարթությունը կտրում է կոորդինատային առանցքներից:

5.7. Տրված են $M(7; 5; 1)$ և $N(3; 2; 4)$ կետերը: MN հատվածի միջնակետով տանել հարթություն, որը OX–ից կտրում է $a = 5$ և OY-ից $b = 2$ մեծությամբ հատվածներ:

5.8. Տրված են $M(3; 1; -4)$ և $N(-1; 2; 5)$ կետերը: Գտնել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է M կետով և ուղղահայաց է MN հատվածին:

5.9. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է M_0 կետով և զուգահեռ է $3x - 5y + z - 17 = 0$ հարթությանը.
ա) $M_0(0; 5; 0)$; բ) $M_0(2; -7; 0)$; գ) $M_0(1; 0; 8)$; դ) $M_0(0; 6; -3)$:

5.10. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $M_1(2; 0; -1)$, $M_2(1; -1; 3)$ կետերով և ուղղահայաց է $3x + 2y - z + 5 = 0$ հարթությանը:

5.11. Գտնել հետևյալ հարթություններով կազմված անկյունը.
ա) $2x + y - z - 1 = 0$ և $x + 2y + z + 5 = 0$;
բ) $x - 3y + 2z + 7 = 0$ և $3x + y - 2z + 4 = 0$;
գ) $5x + z - 8 = 0$ և $2x + 3z + 1 = 0$:

5.12. Գտնել հետևյալ երեք կետերով անցնող հարթության հավասարումը.
ա) $(1; 0; 0)$; $(3; -1; 2)$; $(-1; 7; 0)$;
բ) $(3; 0; 1)$; $(2; 2; 1)$; $(0; 0; 5)$;
գ) $(-1; -3; 0)$; $(7; -1; 0)$; $(0; 3; 0)$:

5.13. Ինչպիսի՞ արժեքներ պետք է ընդունեն A և C գործակիցները, որպեսզի $Ax - 2y + 3z + 1 = 0$ և $4x + y + Cz + 8 = 0$ հարթությունները լինեն զուգահեռ:

5.14. $M_0(7; -3; 9)$ կետով տանել հարթություն, որն ուղղահայաց է $3x - 5y + z - 4 = 0$ և $x - y + 3z + 11 = 0$ հարթություններին:

5.15. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $M_1(1; 0; -1)$, $M_2(1; 3; -4)$ կետերով և $2x + y - z + 7 = 0$ հարթության հետ կազմում է $\frac{\pi}{3}$ անկյուն:

5.16. $2x - 7y + z - 3 = 0$ և $x + 4y - 3z + 1 = 0$ հարթություններով որոշվող փնջում, գտնել այն հարթությունը, որը.
ա) անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով;
բ) զուգահեռ է OX առանցքին;
գ) զուգահեռ է OY առանցքին;
դ) զուգահեռ է OZ առանցքին;
ե) անցնում է $M_0(1; -1; 2)$ կետով:

5.17. $x + 5y - z - 1 = 0$ և $2x + y - 6z + 3 = 0$ հարթությունների հատման գծով տանել հարթություն, որն անցնում է MN հատվածի միջնակետով, որտեղ՝ $M(1;\ 4;\ 0)$, $N(5;\ 2;\ -4)$:

5.18. $3x + y - z - 1 = 0$ և $x - 4y + 2z - 3 = 0$ հարթություններով որոշվող փնջում գտնել նրանցից յուրաքանչյուրին ուղղահայաց հարթությունները:

5.19. Ապացուցել, որ հարթության հավասարումը, որն անցնում է $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ կետով և ուղղահայաց է $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ և $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ հարթություններին, կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0:$$

5.20. Ապացուցել, որ հարթության հավասարումը, որն անցնում է $M_1(x_1; y_1; z_1)$ և $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ կետերով, ուղղահայաց է $Ax + By + Cz + +D = 0$ հարթությանը, կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0:$$

5.21. Ապացուցել, որ հետևյալ երեք հարթություններն անցնում են մեկ ուղիղով՝
ա) $7x + 4y + 7z + 1 = 0$; բ) $2x - y - z + 2 = 0$;
գ) $x + 2y + 3z - 1 = 0$:

5.22. Հետևյալ հարթությունների հավասարումները բերել նորմալ տեսքի.
ա) $x - 2y + 2z - 12 = 0$; բ) $2x - 3y + 5z - 5 = 0$;
գ) $\frac{3}{7}x + \frac{6}{7}y - \frac{2}{7}z + 3 = 0$; դ) $12y - 5z + 39 = 0$; ե) $y + 2 = 0$;
զ) $2z - 5 = 0$:

5.23. Գտնել հարթության հավասարումը, եթե սկզբնակետի հեռավորությունն այդ հարթությունից 10 է, իսկ $\vec{n}\left\{\frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ -\frac{2}{3}\right\}$–ը հարթության նորմալ վեկտորն է:

5.24. Գտնել $x - 2y + 2z - 9 = 0$ հարթության նորմալ վեկտորի ուղղորդ կոսինուսները:

5.25. Հարթությունը OX; OY; OZ առանցքներից կտրում է համապատասխանաբար $a = -18$; $b = -9$; $c = 9$ մեծությամբ հատվածներ: Գտնել նրա նորմալ վեկտորի ուղղորդ կոսինուսները:

5.26. Գտնել կետի շեղումն ու հեռավորությունը հարթությունից.

ա) $M_0(-2;\ -4;\ 3)$, $2x - y + 2z + 3 = 0$;
բ) $M_0(2;\ -1;\ -1)$, $16x - 12y + 15z - 4 = 0$;
գ) $M_0(1;\ 2;\ -3)$, $5x - 3y + z + 4 = 0$;
դ) $M_0(3;\ -6;\ 7)$, $4x - 3z - 1 = 0$;
ե) $M_0(9;\ 2;\ -2)$, $12y - 5z + 5 = 0$:

5.27. Գտնել հետևյալ զուգահեռ հարթությունների միջև եղած հեռավորությունը.
ա) $x - 2y - 2z - 12 = 0$, $x - 2y - 2z - 6 = 0$;
բ) $2x - 3y + 6z - 14 = 0$, $4x - 6y + 12z + 21 = 0$;
գ) $2x - y + 2z + 9 = 0$, $4x - 2y + 4z - 21 = 0$;
դ) $16x + 12y - 15z + 50 = 0$, $16x + 12y - 15z + 25 = 0$:

5.28. Տրված են զուգահեռ հարթություններ.
$3x + 4y - 2z - 1 = 0$,
$6x + 8y - 4z - 3 = 0$:
Գտնել նրանց զուգահեռ և նրանցից հավասարահեռ հարթության հավասարումը:

5.29. Գտնել այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց շեղումները $12x - 15y + 16 - 10 = 0$ հարթությունից հավասար են ± 5 –ի:

5.30. Կազմել այն կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնք հավասարահեռ են հետևյալ հարթություններից.
$x - 5y + 3z + 5 = 0$ և $2x - 10y + 6z + 9 = 0$:

5.31. Գտնել այն հարթությունների հավասարումները, որոնք կիսում են հետևյալ $5x - 2y + 5z - 3 = 0$, $2x + y - 7z + 2 = 0$ հարթություններով կազմված երկնիստ անկյունները:

5.32. Տրված են $M_1(1;\ 2;\ -1)$ և $M_2(-3;\ 1;\ 2)$ կետերը: Պարզել նրանք գտնվում են հետևյալ հարթություններով կազմված նույն, կից թե՞ հակադիր երկնիստ անկյուններում.
ա) $2x - 3y + z - 3 = 0$, $x - y - 2z + 4 = 0$;
բ) $5x - 2y + z - 1 = 0$, $6x - 3y + 2z - 1 = 0$;
գ) $3x + y + 11z - 3 = 0$,
$4x + 2y - 5z + 1 = 0$:

5.33. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որը կոորդինատական առանցքներից կտրում է $2;\ 8;\ 1$ թվերին համեմատական հատվածներ, եթե $M_0(1;\ -6;\ 0)$ կետի հեռավորությունը այդ հարթությունից 2 միավոր է:

5.34. Ապացուցել, որ $2x - 3y + 6z - 11 = 0$ հարթությունը հատում է $M_1(-1;\ 1;\ -2)$, $M_2(1;\ 0;\ 5)$ ծայրակետերով հատվածը:

5.35. Պարզել, $M(3;\ 2;\ -1)$ կետը գտնվում է $5x - y + z + 3 = 0$,

$4x - 3y + 2z + 5 = 0$ հարթություններով կազմված սուր թե՞ բութ անկյան ներսում:

5.36. Նշել հետևյալ ուղիղների դասավորվածության առանձնահատկությունները.

ա) $\begin{cases} x + y - z + 2 = 0, \\ 3x - 1 = 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 2x - 3 = 0, \\ y + 5 = 0; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} x - y + 2z = 0, \\ 2x + 3y - z = 0; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} 3x + 5y - 6 = 0, \\ x - 2y + 3 = 0; \end{cases}$

ե) $\begin{cases} y + 2z = 0, \\ 3y - z = 0; \end{cases}$ զ) $\begin{cases} 2y + z = 0, \\ 3x - 1 = 0: \end{cases}$

5.37. Գտնել ուղիղի կանոնական և պարամետրական հավասարումները, եթե այն անցնում է $M_0(1; 2; 3)$ կետով և նրա ուղղորդ վեկտորի կազմած անկյունները կոորդինատային առանցքների հետ համապատասխանաբար հավասար են՝ $\alpha = \frac{2\pi}{3}$; $\beta = \frac{\pi}{3}$; $\gamma = \frac{\pi}{4}$:

5.38. Ուղիղի հավասարումները բերել կանոնական տեսքի.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0: \end{cases}$$

5.39. Ուղիղի հավասարումները բերել կանոնական տեսքի.

$$\begin{cases} 3x - 5y + z - 8 = 0, \\ 2x + y - z + 2 = 0: \end{cases}$$

5.40. Պարզել $M(5; -2; -3)$ և $N(8; 3; 1)$ կետերը պատկանում են հետևյալ ուղիղին, թե՞ ոչ.

$$\begin{cases} 5x - 3y - 31 = 0, \\ 3x + 4y + 7z + 14 = 0: \end{cases}$$

5.41. $\begin{cases} 2x - 3y + 4z - 12 = 0, \\ x + 4y - 2z - 10 = 0, \end{cases}$ ուղիղը պրոյեկտված է կոորդինատային հարթությունների վրա: Գտնել պրոյեկտող հարթությունների հավասարումները:

5.42. Գտնել հետևյալ ուղիղի պրոյեկցիաները կոորդինատային հարթությունների վրա.

$$\begin{cases} 3x + 2y - 4z - 5 = 0, \\ 6x - y - 2z + 4 = 0: \end{cases}$$

5.43. Գտնել

$$\begin{cases} 3x - 5y + z - 8 = 0, \\ 2x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

ուղիղի պրոյեկցիան $2x + 2y + z - 15 = 0$ հարթության վրա:

5.44. Գտնել

$$\begin{cases} 3x - 5y + z - 8 = 0, \\ 2x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

ուղիղի ուղղորդ կոսինուսները:

5.45. Գտնել հետևյալ ուղիղներով կազմված անկյունը.
$$\begin{cases}2x-2y-z+8=0,\\ x+2y-2z+1=0,\end{cases}\quad \begin{cases}4x+y+3z-21=0,\\ 2x+2y-3z+15=0:\end{cases}$$
5.46. Գտնել $M_1(2;\,-3;\,\frac{1}{2})$ և $M_2(3;\,5;\,\frac{3}{2})$ կետերով անցնող ուղիղի հավասարումը:

5.47. $M_0(1;\,-3;\,4)$ կետով տանել ուղիղ՝ զուգահեռ
$$\begin{cases}2x-y+z-3=0,\\ x+3y-z-1=0,\end{cases}$$
ուղիղին:

5.48. Պարզել, հետևյալ ուղիղները գտնվում են միևնույն հարթության մեջ, թե ո՞չ՝

ա) $\begin{cases}x=7z-17,\\ y=3z-1\end{cases}$ և $\begin{cases}x=4z-11,\\ y=-10z+25;\end{cases}$

բ) $\begin{cases}4x+y+3z=0,\\ 2x+3y+2z-9=0\end{cases}$ և $\begin{cases}3x-2y+z+5=0,\\ x-3y-2z-3=0;\end{cases}$

գ) $\begin{cases}x+2y-z-2=0,\\ x+3y+z-1=0\end{cases}$ և $\begin{cases}2x-y+3z-4=0,\\ 3x+y-z-3=0:\end{cases}$

5.49. Գտնել այն ուղիղի հավասարումը, որն անցնում է $(-3;\,5;\,-9)$ կետով և հատում է հետևյալ ուղիղները.
$$\begin{cases}y=3x+5,\\ z=2x-3,\end{cases}\quad \begin{cases}y=4x-7,\\ z=5x+10:\end{cases}$$
5.50. Գտնել հետևյալ ուղիղների հատման կետի կոորդինատները.
$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{5}=\frac{z+4}{2},\qquad \frac{x-2}{2}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z-1}{3}:$$
5.51. Գտնել այն ուղիղի հավասարումը, որն անցնում է $M_0(2;\,-3;\,4)$ կետով և ուղղահայաց է հետևյալ ուղիղներին.
$$\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{1},\qquad \frac{x+4}{2}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-4}{3}:$$
5.52. Գտնել հետևյալ ուղիղների ընդհանուր ուղղահայացի հավասարումները.
$$\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{1},\qquad \frac{x+4}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-4}{3}:$$
5.53. Կազմել այն ուղիղի հավասարումը, որն անցնում է $M_0(2;\,-2;\,0)$ կետով, OY առանցքի հետ կազմում է 60^0 անկյուն և հատում է $\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-2}{-2}$ ուղիղը:

5.54. Գտնել $M_0(5;\,-1;\,-3)$ կետով անցնող և $\begin{cases}2x+3y+z-6=0,\\ 4x-5y-z+2=0\end{cases}$ ուղիղին զուգահեռ ուղիղի հավասարումները:

5.55. Տրված են մասնիկի շարժման հետագծի հավասարումները՝ $x = 3 - 4t,\ y = -3 + 2t,\ z = 3 - t$: Որոշել 7 վայրկյանում նրա անցած հեռավորությունը:

5.56. A մասնիկը, շարժվելով ուղղագիծ և հավասարաչափ $\vec{V}\{3;\ -2;\ 1\}$ արագությամբ, $t = 0$ պահին գտնվում է $M_0(2;\ 1;\ 4)$ կետում: Ո՞ր կետում կգտնվի մասնիկը $t = 5$ վայրկյանին: Կազմել նրա շարժման հետագծի հավասարումը:

5.57. Կազմել մասնիկի շարժման հետագծի հավասարումները, որը շարժվելով ուղղագիծ և հավասարաչափ $M_1(-7;\ 12;\ 5)$ կետից $M_2(9;\ -4;\ -3)$–ը անցել է 4 վայրկյանում: Գտնել մասնիկի արագության վեկտորը:

5.58. $F = 42$ Նյուտոն ուժը ուղղված է $\begin{cases} 5x + 3y - 7z + 4 = 0, \\ x + y - 5z + 2 = 0 \end{cases}$ ուղիղով: Որոշել կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ այդ ուժի մոմենտի մոդուլը:

5.59. Գտնել ճառագայթի հավասարումը, որի սկզբնակետը $A(0;\ 1;\ -3)$ կետն է, եթե այն ուղղահայաց է $\frac{x-4}{5} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-7}{2}$ ուղիղին և հատում է այդ ուղիղը:

5.60. Գտնել հետևյալ ուղիղների հեռավորությունը.

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-5}{4} \text{ և } \frac{x+1}{4} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{4}:$$

5.61. Գտնել հետևյալ խաչվող ուղիղների հեռավորությունը՝

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-2} = \frac{z+3}{1}, \quad \frac{x-5}{1} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+2}{3}:$$

5.62. Գտնել հետևյալ ուղիղների հեռավորությունը՝

$$\begin{cases} x = 2t - 3, \\ y = t + 1, \\ z = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y - z + 5 = 0, \\ 3x + 4y + 2z - 5 = 0: \end{cases}$$

5.63. Գտնել $M_0(4;\ -3;\ 1)$կետով անցնող և $\frac{x-0}{6} = \frac{y-0}{2} = \frac{z-0}{-3}$, $\frac{x+1}{5} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{2}$ ուղիղներին զուգահեռ հարթության հավասարումը:

5.64. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $\begin{cases} x - y + 3 = 0, \\ 6y + 1 = 0 \end{cases}$ ուղիղով, հատում է $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{4}$ ուղիղը և նրա հետ կազմում է 45^0 անկյուն:

5.65. Գտնել $M(1;\ -3;\ 2)$ կետի պրոյեկցիան $6x + 3y - z - 41 = 0$ հարթության վրա:

5.66. Գտնել $M(1; -3; 2)$ կետի հեռավորությունը $\frac{x-30}{6} = \frac{y-0}{2} = \frac{z+\frac{5}{2}}{-1}$ ուղիղից:

5.67. Գտնել $\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{2}$ ուղիղի և $4x + 2y + 2z - 5 = 0$ հարթության կազմած անկյունը:

5.68. Գտնել $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$ ուղիղի և $2x - y + z + 4 = 0$ հարթության հատման կետը:

5.69. Գտնել այն ուղիղի հավասարումը, որն անցնում է $x - 2y + 4z + 12 = 0$ հարթության և $\frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z-1}{4}$, $\frac{x+3}{-1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{5}$ ուղիղների հատման կետերով:

5.70. Գտնել այն ուղիղի հավասարումը, որն անցնում է $M_0(-2,3,4)$ կետով և ուղղահայաց է $7x - 3y + 9z - 13 = 0$ հարթությանը:

5.71. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $N(-3,2,1)$ կետով և ուղղահայաց է $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{-2}$ ուղիղին:

5.72. Գտնել B կետը, որը համաչափ է $A(3,-2,1)$ կետին $2x - y + 3z + 17 = 0$ հարթության նկատմամբ:

5.73. Գտնել N կետը, որը համաչափ է $M(1,-2,4)$ կետին $\frac{x-5}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{-1}$ ուղիղի նկատմամբ:

5.74. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $\frac{x+5}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-7}{-2}$, $\frac{x-1}{3} = \frac{y+5}{1} = \frac{z+3}{-2}$ զուգահեռ ուղիղներով:

5.75. Գտնել $M_0(2,-3,1)$ կետով անցնող այն հարթության հավասարումը, որը զուգահեռ է $\vec{a}\{1,-1,4\}$ և $\vec{b}\{-5,1,3\}$ վեկտորներին:

5.76. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $M(1,1,4)$ կետով և $\frac{x-3}{2} = \frac{y+5}{11} = \frac{z}{3}$ ուղիղով:

5.77. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $\frac{x-2}{11} = \frac{y+3}{9} = \frac{z-4}{7}$ ուղիղով և զուգահեռ է $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-5}{-1}$ ուղիղին:

5.78. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $\frac{x-3}{-4} = \frac{y-7}{1} = \frac{z+2}{-1}$ ուղիղով և ուղղահայաց է $x - 5y + 2z - 7 = 0$ հարթությանը:

5.79. Գտնել $x = t - 1$, $y = t$, $z = 2t + 3$ ուղիղը $9x - 7y + z - 13 = 0$ հարթության վրա պրոյեկտող հարթության հավասարումը:

5.80. $M(x,y,z)$ կետը շարժվում է ուղղագիծ և հավասարաչափ $M_0(15,-24,-16)$ կետից $v = 12$մ/վրկ արագությամբ $\vec{s}\{-2,2,1\}$

վեկտորի ուղղությամբ: Համոզվելով, որ կետի հետագիծը հատում է $3x + 4y + 7z - 17 = 0$ հարթությունը, գտնել.

1) նրանց հատման P կետը,
2) M_0 կետից P կետը հասնելու ժամանակահատվածը,
3) M_0P հատվածի երկարությունը:

5.81. $M(x,y,z)$ կետը շարժվում է հավասարաչափ և ուղղագիծ $M_0(28,-30,-27)$ կետից $v = 12{,}5$մ/վրկ արագությամբ՝ ուղղահայաց $15x - 16y - 12z + 26 = 0$ հարթությանը: Գտնել M կետի շարժման հավասարումը և որոշել.

1) M կետի շարժման հետագծի և հարթության հատման P կետը;
2) M_0 կետից P կետ հասնելու ժամանակահատվածը;
3) M_0P հատվածի երկարությունը:

5.82. $M(x,y,z)$ կետը շարժվում է ուղղագիծ և հավասարաչափ $M_0(11,-21,20)$ կետից $\vec{s}\{-1,2,-2\}$ ուղղությամբ ու $v = 12$մ/վրկ արագությամբ: Որոշել, որքա՞ն ժամանակում նա կանցնի ճանապարհի այն հատվածը, որը գտնվում է $2x + 3y + 5z - 41 = 0$, $2x + 3y + 5z + 31 = 0$ զուգահեռ հարթությունների միջև:

Պատասխաններ

5.1. ա) $z - 3 = 0$: բ) $x - 2 = 0$; գ) $y + 1 = 0$:
5.2. ա) $2z - y = 0$, բ) Oy $z - 3x = 0$, գ) Oz $y - 6x = 0$:
5.3. ա) $y - z + 3 = 0$, բ) $3x + z - 1 = 0$, գ) $3x + y - 7 = 0$:
5.4. ա) $\vec{n}\{2;\ 3;\ -9\}$, բ) $\vec{n}\{1;\ 2;\ 0\}$, գ) $\vec{n}\{4;\ 0;\ 0\}$:
5.5. $5x - 4y - 3z + 34 = 0$:
5.6. $a = 8$, $b = -\frac{24}{5}$, $c = 4$:
5.7. $2x + 5y - 7z - 10 = 0$:
5.8. $4x - y - 9z - 47 = 0$:
5.9. ա) $3x - 5y + z - 25 = 0$, բ) $3x - 5y + z - 41 = 0$,
գ) $3x - 5y + z - 11 = 0$, դ) $3x - 5y + z + 33 = 0$:
5.10. $7x - 11y - z - 15 = 0$:
5.11. ա) 60^0, բ) $arccos\left(-\frac{2}{7}\right)$, գ) 45^0:
5.12. $14x + 4y - 12z - 14 = 0$:
5.13. $A = -8$, $C = -\frac{3}{2}$:
5.14. $7x + 4y + z - 46 = 0$:
5.15. $\pm x\sqrt{30} + 5y + 5z + 5 \pm \sqrt{30} = 0$:
5.16. ա) $5x + 5y - 8z = 0$; բ) $15y - 7z + 5 = 0$; գ) $15x - 17z - 5 = 0$;
դ) $7x - 17y - 8 = 0$; ե) $3x - 3y - 2z - 2 = 0$:

5.17. $14x - 101y - 90z + 81 = 0$:

5.18. $20x - 41y + 19z - 36 = 0$; $22x + 3y - 5z - 10 = 0$;

5.22. ա) $\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - 4 = 0$; բ) $\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y + \frac{5}{6}z - \frac{5}{6} = 0$;գ) $-\frac{3}{7}x - \frac{6}{7}y + \frac{2}{7}z = 0$; դ) $-\frac{12}{13}y + \frac{5}{13}z - 3 = 0$; ե) $-y - 2 = 0$; զ) $z - \frac{5}{2} = 0$:

5.23. $\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - 10 = 0$:

5.24. $\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$:

5.25. $-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}$:

5.26. ա) $\delta = -3, d = 3$; բ) $\delta = 1, d = 1$; գ) $\delta = 0, d = 0$; դ) $\delta = -2, d = 2$; ե) $\delta = -3, d = 3$:

5.27. ա) $d = 2$; բ) $d = 3{,}5$; գ) $d = 6{,}5$; դ) $d = 1$: Ցուցում. հարթություններից մեկի վրա վերցնել որևէ կետ և գտնել նրա հեռավորությունը մյուս հարթությունից:

5.28. $12x + 16y - 8z - 5 = 0$;

5.29. $12x - 15y + 16z - 135 = 0$; $12x - 15y + 16z + 115 = 0$:

5.30. $4x - 20y + 12z + 19 = 0$:

5.31. $7x - y - 2z - 1 = 0$; $3x - 3y + 12z - 5 = 0$:

5.32. ա) կից անկյունում; բ) նույն անկյան մեջ; գ) հակադիր անկյուններում:

5.33. $4x + y + 8z + 20 = 0$, $4x + y + 8z - 16 = 0$:

5.35. Բութ անկյան ներսում:

5.36. ա) $\parallel YOZ$; բ) $\perp XOY$ կամ $\parallel OZ$; գ) անցնում է $O(0;\ 0; 0\ )$ կետով; դ) $\parallel OZ$; ե) անցնում է OX –ով; զ) $\parallel YOZ$; է) անցնում է OX –ով; ը) $\parallel YOZ$, հատում է OX –ը:

5.37. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{\sqrt{2}}$:

5.38. $\frac{x-0}{2} = \frac{y+8}{7} = \frac{z+4}{4}$:

5.39. $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-7}{13}$:

5.40. M կետը պատկանում է ուղղին, N-ը չի պատկանում ուղղին:

5.41. $4x + 5y - 32 = 0$, $11x + 10y - 78 = 0$, $11y - 8z - 8 = 0$: Ցուցում. տրված ուղղով անցնող հարթությունների փնջից ընտրել այն հարթությունը, որն ուղղահայաց է համապատասխան կոորդինատային հարթությանը:

5.42. $\begin{cases} 9x - 4y + 13 = 0, \\ z = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 15x - 8z + 3 = 0, \\ y = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 5y - 6z - 14 = 0, \\ x = 0: \end{cases}$

5.43. $\begin{cases} 2x + 2y + z - 15 = 0, \\ 4x - 9y + 10z - 9 = 0: \end{cases}$

5.44. $\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{301}}$, $\cos\beta = -\frac{2}{\sqrt{30}}$, $\cos\gamma = \frac{5}{\sqrt{30}}$:

5.45. $\cos\varphi = \frac{4}{21}$:

5.46. $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{8} = \frac{z-\frac{1}{2}}{1}$:

5.47. $\frac{x-2}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-4}{7}$:

5.48. ա) զտնվում են, բ) զտնվում են, գ) չեն գտնվում:

5.49. $y = 22x + 71,\ z = 2x - 3$: Ցուցում. տրված հավասարումները գրել կանոնական տեսքով և օգտվել երկու ուղիղների հատման պայմանից:

5.50. $(0;\ 7;\ -2)$:

5.51. $\frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-3}$:

5.52. $\frac{x-0}{4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{3}$:

5.53. $\frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{\sqrt{15}} = \frac{z-0}{-6}$ և $\frac{x-2}{-3} = \frac{y+2}{\sqrt{15}} = \frac{z-0}{6}$:

5.54. $\frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+3}{-22}$:

5.55. $7\sqrt{21}$:

5.56. $M(17;\ -9;\ 9);\ x = 2 + 3t;\ y = 1 - 2t;\ z = 4 + t$:

5.57. $x = -7 + 4t,\ y = 12 - 4t,\ z = 5 - 2t;\ \vec{V}\{4;\ -4;\ -2\}$:

5.58. $3\sqrt{38}$ նմ:

5.59. $\frac{x}{65} = \frac{y-1}{127} = \frac{z+3}{-226}$:

5.60. $\frac{15\sqrt{26}}{26}$:

5.61. $\frac{11\sqrt{6}}{5}$:

5.62. $\frac{76\sqrt{29}}{87}$:

5.63. $16x - 27y + 14z - 159 = 0$:

5.64. $2x + 4y + 7 = 0$:

5.65. $M_1(7, 0, 1)$:

5.66. $d = 14$:

5.67. $\sin\varphi = \frac{\sqrt{6}}{9}$:

5.68. $A(-7;\ -7;\ 3)$:

5.69. $\frac{x+4}{2} = \frac{y+10}{5} = \frac{z+7}{2}$:

5.70. $\frac{x+2}{7} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-4}{9}$:

5.71. $3x + 4y - 2z + 3 = 0$:

5.72. $(-5;\ 2;\ -11)$:

5.73. $N(3;\ -4;\ 2)$:

5.74. $x - y + z - 3 = 0$:

5.75. $7x + 23y + 4z + 51 = 0$:

5.76. $13x - 7y + 17z - 74 = 0$:

5.77. $16x - 25y + 7z - 135 = 0$:

5.78. $3x - 7y - 19z + 2 = 0$:

5.79. $15x + 17y - 16z + 63 = 0$:

5.80. 1) $P(-25;\ 16;\ 4)$; 2) $t = 5$; 3) $M_0P = 60$:

5.81. $x = 28 - 7{,}5t$, $y = -30 + 8t$, $z = -27 + 6t$;

1) $P(-2, 2, -3)$; 2) $t_1 = 0$, $t_2 = 4$; 3) $M_0P = 50$:

5.82. $t = 3$: Ցուցում. նախ գտնել հետագծի հավասարումները և հատման կետերը զուգահեռ հարթությունների հետ:

ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹՆԵՐ

Գլանային և կոնական մակերևույթներ

R շառավղով և $C(a;\ b;\ c)$ կենտրոնով գնդային մակերևույթի հավասարումն է՝

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2:$$

Եթե գլանային մակերևույթի ուղղորդ գծի հավասարումներն են

$$\begin{cases} F_1(x;\ y;\ z)=0, \\ F_2(x;\ y;\ z)=0, \end{cases} \qquad (1)$$

իսկ ծնիչները զուգահեռ են $\vec{a}=\{m;\ n;\ p\}$ ոչ զրոյական վեկտորին, ապա ծնիչների հավասարումները կլինեն՝

$$\frac{X-x}{m}=\frac{Y-y}{n}=\frac{Z-z}{p}, \qquad (2)$$

որտեղ $(X;\ Y;\ Z)$-ը ծնիչի ընթացիկ կետն է, իսկ $(x;\ y;\ z)$–ը պատկանում է ուղղորդ գծին:

Գլանային մակերևույթի հավասարումը ստանալու համար պետք է (1) և (2) չորս հավասարումներից արտաքսել $x,\ y,\ z$ պարամետրերը:

Եթե կոնի ուղղորդ գծի հավասարումներն են՝

$$\begin{cases} F_1(x;\ y;\ z)=0, \\ F_2(x;\ y;\ z)=0, \end{cases} \qquad (1')$$

իսկ գագաթը գտնվում է $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ կետում, ապա ծնիչների հավասարումները կլինեն՝

$$\frac{X-x_0}{x-x_0}=\frac{Y-y_0}{y-y_0}=\frac{Z-z_0}{z-z_0}, \qquad (2')$$

որտեղ $(X;\ Y;\ Z)$–ը ծնիչի ընթացիկ կետն է, իսկ $(x;\ y;\ z)$–ն ուղղորդ գծին պատկանող կետ է:

Կոնական մակերևույթի հավասարումը ստանալու համար պետք է (1') և (2') հավասարումներից արտաքսել $x;\ y;\ z$ պարամետրերը:

Եթե YOZ հարթության մեջ գտնվող $F(y,z)=0$ հավասարումով որոշվող գիծը պտտենք OY առանցքի շուրջը, ապա ստացված մակերևույթի հավասարումը կլինի՝

$$F\left(y;\ \pm\sqrt{x^2+z^2}\right)=0,$$

իսկ նույն գիծը OZ առանցքի շուրջը պտտելուց ստացված մակերևույթի հավասարումը կլինի՝

$$F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2};\ z\right)=0:$$

Համանման եղանակով ստացվում են նաև կոորդինատային մյուս հարթություններում գտնվող գծերը համապատասխան առանցքների շուրջը պտտելուց առաջացած մակերևույթների հավասարումները:

Երկրորդ կարգի մակերևույթների կանոնական հավասարումները

I Գլանային մակերևույթներ, որոնց ծնիչները զուգահեռ են OZ առանցքին՝

$$x^2+y^2=R^2 \text{ –շրջանային գլան,}$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ –էլիպտական գլան,}$$
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ –հիպերբոլական գլան,}$$
$$y^2=2px \text{ –պարաբոլական գլան;}$$

նման ձևով՝ ox -ին և oy -ին զուգահեռ ծնիչների դեպքում:

II Կոնական մակերևույթներ, որոնց գագաթը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում, իսկ առանցքը՝ կոորդինատային առանցքներից մեկն է:

Էլիպսոիդներ, հիպերբոլոիդներ և պարաբոլոիդներ

Էլիպսական կոներ՝

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \ (a=b \text{ դեպքում՝ շրջանային}),$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=0, \ (a=c \text{ դեպքում՝ շրջանային}),$$
$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=0, \ (b=c \text{ դեպքում՝ շրջանային}):$$

III Էլիպսոիդներ՝

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ –պտտման էլիպսոիդ,}$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ –եռառանցք էլիպսոիդ:}$$

IV Հիպերբոլոիդներ՝

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ –պտտման (շրջանային) միախոռոչ հիպերբոլոիդ,}$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ –էլիպտական միախոռոչ հիպերբոլոիդ,}$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \text{ –պտտման (շրջանային) երկխոռոչ հիպերբոլոիդ,}$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \text{ –էլիպտական երկխոռոչ հիպերբոլոիդ:}$$

V Պարաբոլոիդներ՝

$x^2 + y^2 = 2pz$ –պտտման պարաբոլոիդ,
$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ –էլիպտական պարաբոլոիդ, $p > 0$, $q > 0$,
$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ –հիպերբոլական պարաբոլոիդ:

Օրինակ 29. Կազմել գլանի հավասարումը, որի ծնիչները զուգահեռ են $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-0}{3}$ ուղիղին, իսկ ուղղորդագիծը $y^2 = 4x$, $z = 0$ պարաբոլն է:

Լուծում: Ծնիչները տրվում են

$$\frac{X - x}{1} = \frac{Y - y}{2} = \frac{Z - z}{3}$$

հավասարումներով, որտեղ (X,Y,Z) –ը գլանի ընթացիկ կետ է, իսկ (x,y,z) –ն ուղղորդագծի կետ է; կստանանք՝

$$x = X - t, \quad y = Y - 2t, \qquad z = Z - 3t:$$

Տեղադրելով այս արժեքները ուղղորդագծերի հավասարումների մեջ, կստանանք՝

$$\begin{cases} (Y - 2t)^2 = 4(X - t), \\ Z - 3t = 0, \end{cases}$$

որտեղից կգտնենք $t = \frac{Z}{3}$, և այն տեղադրելով առաջին հավասարման մեջ կստանանք՝

$$\left(Y - \frac{2}{3}Z\right)^2 = 4\left(X - \frac{1}{3}Z\right)$$

կամ

$$9Y^2 - 12YZ + 4Z^2 - 36X + 12Z = 0:$$

Պատ.՝ $9Y^2 - 12YZ + 4Z^2 - 36X + 12Z = 0$:

Օրինակ 30. Գտնել կոնի հավասարումը, որի գագաթը կոորդինատների սկզբնակետն է, իսկ ուղղորդագիծը՝

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ z = c: \end{cases}$$

Լուծում: Կոնի այն ծնիչների կանոնական հավասարումները, որոնք անցնում են $O(0;\ 0;\ 0)$ գագաթով և ուղղորդագծի $(x;\ y;\ z)$ կետով կլինի՝

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z}:$$

Հաշվի առնելով, որ $z = c$, վերջին հավասարություններից կունենանք՝

$$x = c\frac{X}{Z}, \qquad y = c\frac{Y}{Z}:$$

Տեղադրելով x և y արժեքները ուղղորդագծի առաջին հավասարման մեջ կստանանք՝

$$c^2\frac{X^2}{Z^2}+c^2\frac{Y^2}{Z^2}=a^2$$

կամ

$$\frac{X^2+Y^2}{a^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0:$$

Պատ.՝ $\frac{X^2+Y^2}{a^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0$:

Օրինակ 31. Կազմել մակերևույթի հավասարումը, որը ստացվում է կեղծ առանցքի շուրջ $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$, $z=0$ հիպերբոլի պտտումից, եթե այն անցնում է $(2,3,5)$ կետով:

Լուծում. Պտտումից առաջանում է միախոռոչ հիպերբոլոիդ, որի հավասարումը կլինի՝

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{c^2}=1:$$

$(2,3,5)$ կետը պատկանում է մակերևույթին, հետևաբար

$$\frac{4}{4}-\frac{9}{9}+\frac{25}{c^2}=1,$$

որտեղից՝ $c=5$:

Պատ.՝ $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1$:

Օրինակ 32. Ապացուցել, որ $z=x^2-4y^2$ հիպերբոլական պարաբոլոիդի և $x+2y=3$ հարթության հատումը ուղիղ գիծ է:

Լուծում. Գրենք հիպերբոլական պարաբոլոիդի հավասարումը $z=(x+2y)(x-2y)$: Ունենք՝

$$\begin{cases} z=(x+2y)(x-2y), \\ x+2y=3: \end{cases}$$

Համակարգը համարժեք է

$$\begin{cases} x+2y=3, \\ 3(x-2y)=z \end{cases}$$

համակարգին, որն ուղիղի հավասարում է տարածության մեջ:

Օրինակ 33. Կազմել կոնի հավասարումը, որի գագաթը կոորդինատների սկզբնակետն է, առանցքը համընկնում է OX –ի հետ, իսկ ծնորդի և առանցքի կազմած անկյունը $\alpha=\frac{\pi}{3}$ է:

Լուծում. Կոնի հավասարումը, որի առանցքը համընկնում է OX –ի հետ, ունի հետևյալ տեսքը.

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=0:$$

Դիցուք $M(x, y, z)$-ը մակերևույթի կետ է: Ունենք $\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{x} = \sqrt{3}$: Երբ $z = y$, ապա $x = \sqrt{\frac{2}{3}}y$: Հետևաբար $M\left(\sqrt{\frac{2}{3}}y;\ y;\ y\right)$ կետի կոորդինատները տեղադրելով մակերևույթի հավասարման մեջ և կրճատելով y^2-ով, կստանանք՝ $-\frac{2}{3a^2} + \frac{2}{b^2} = 0$, $b^2 = 3a^2$: Այսպիսով, ստանում ենք $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3a^2} + \frac{z^2}{3a^2} = 0$ կամ $3x^2 = y^2 + z^2$: Պատ.՝ $3x^2 = y^2 + z^2$:

Խնդիրներ

6.1. Գտնել այն $M(x;\ y;\ z)$ կետերի երկրաչափական տեղը, որոնք գտնվում են M_0 կետից d միավոր հեռավորության վրա.

ա) $M_0(-1;\ 2;\ 3)$,

բ) $M_0(2;\ -3;\ -5)$,

գ) $M_0(3;\ -4;\ -5)$,

դ) $M_0(-1;\ -2;\ 7)$:

6.2. Գտնել գնդային մակերևույթի կենտրոնն ու շառավիղը.

ա) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 10z + 22 = 0$,

բ) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 8x + 16y - 10z + \frac{1}{2} = 0$,

գ) $x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 6y + 37 = 0$,

դ) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 15x + 12y - 21z + 3 = 0$:

6.3. Գտնել գնդային մակերևույթի հավասարումն, եթե A և B կետերը նրա տրամագծերից մեկի ծայրակետերն են.

ա) $A(-1;\ 3;\ 0)$, $B(-3;\ -1;\ 4)$,

բ) $A(3;\ 4;\ 7)$, $B(5;\ 2;\ -3)$,

գ) $A(2;\ -3;\ 5)$, $B(4;\ 1;\ -3)$,

դ) $A(1;\ -4;\ 2)$, $B(5;\ -1;\ 8)$,

ե) $A(-5;\ 2;\ -3)$, $B(-1;\ 0;\ 4)$:

6.4. Գտնել C կենտրոնով գնդային մակերևույթի հավասարումն, եթե այն շոշափում է հետևյալ հարթությանը.

ա) $C(4;\ 1;\ -5)$, $2x + 3y + 6z - 37 = 0$,

բ) $C(3;\ 6;\ -4)$, $2x - 2y - z - 10 = 0$,

գ) $C(-2;\ 2;\ 5)$, $2x + y - 3z - 12 = 0$,

դ) $C(1;\ -4;\ -7)$, $3x + y + 2z + 9 = 0$:

6.5. Գտնել այն մակերևույթի հավասարումը, որն առաջանում է $\begin{cases} y^2 + z^2 = 9, \\ x = 0 \end{cases}$ շրջանագծի պտտումից Oy առանցքի շուրջը:

6.6. Գտնել այն մակերևույթի հավասարումը, որն առաջանում է

$\begin{cases} x^2 + z^2 = 25, \\ x = 0 \end{cases}$ շրջանագծի պտտումից Oz առանցքի շուրջը:

6.7. Գտնել այն մակերևույթի հավասարումը, որն առաջանում է $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1, \\ z = 0 \end{cases}$ շրջանագծի պտտումից Ox առանցքի շուրջը:

6.8. Գտնել այն մակերևույթի հավասարումը, որն առաջանում է $\begin{cases} x^2 + (y-2)^2 = 1, \\ z = 0 \end{cases}$ շրջանագծի պտտումից Oy առանցքի շուրջը:

6.9. Գտնել այն գլանային մակերևույթի հավասարումը, որի ծնիչները զուգահեռ են $\vec{a} = \{1; -1; 2\}$ վեկտորին, իսկ ուղղորդագիծն է՝ $\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 - 7z^2 + 28 = 0, \\ z + 4 = 0: \end{cases}$

6.10. Գտնել այն գլանային մակերևույթի հավասարումը, որի ուղղորդագիծն է՝ $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ z = 0, \end{cases}$ իսկ ծնիչները զուգահեռ են $x = y = z$ ուղիղին:

6.11. Գտնել այն գլանային մակերևույթի հավասարումը, որի ուղղորդագիծն է՝ $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0, \\ x + 5y - z + 1 = 0, \end{cases}$ իսկ ծնիչները զուգահեռ են $\vec{a} = \{3; 1; -2\}$ վեկտորին:

6.12. Գտնել այն գլանային մակերևույթի հավասարումը, որի ուղղորդագիծն է՝ $\begin{cases} 7x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 0, \\ x + 2y = 0, \end{cases}$ իսկ ծնիչները զուգահեռ են $\frac{x-2}{4} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+1}{5}$ ուղիղին:

6.13. Գտնել այն գլանային մակերևույթի հավասարումը, որի ուղղորդագիծն է՝ $\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1, \\ z = 0, \end{cases}$ իսկ ծնիչները զուգահեռ են OZ առանցքին:

6.14. Գտնել այն գլանային մակերևույթի հավասարումը, որի ուղղորդագիծն է՝ $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x + y + z = 1, \end{cases}$ իսկ ծնիչները զուգահեռ են $x = y = z$ ուղիղին:

6.15. Գտնել այն գլանային մակերևույթի հավասարումը, որի ուղղորդագիծն է՝ $\begin{cases} \frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1, \\ y = 0, \end{cases}$ իսկ ծնիչները զուգահեռ են OY առանցքին:

6.16. Գտնել այն կոնական մակերևույթի հավասարումը, որի գագաթը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում, իսկ ուղղորդագիծն է՝ $\begin{cases} x^2 + (y-4)^2 + z^2 = 1, \\ z = 2: \end{cases}$

6.17. Գտնել այն կոնական մակերևույթի հավասարումը, որի գագաթը գտնվում է $C(1;\,0;\,-2)$ կետում, իսկ ուղղորդագիծն է՝ $\begin{cases}4x^2+5y^2=2z,\\ z=1:\end{cases}$

6.18. Գտնել այն կոնական մակերևույթի հավասարումը, որի գագաթը գտնվում է $C(4;\,0;\,5)$ կետում, իսկ ուղղորդագիծն է՝ $\begin{cases}\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1,\\ z=4:\end{cases}$

6.19. Գտնել այն կոնական մակերևույթի հավասարումը, որի գագաթը գտնվում է $C(4;\,0;\,5)$ կետում, իսկ ուղղորդագիծն է՝ $\begin{cases}4x^2+3y^2 8z=0,\\ x+2z=0:\end{cases}$

6.20. Գտնել այն կոնական մակերևույթի հավասարումը, որի գագաթը գտնվում է $C(4;\,0;\,5)$ կետում, իսկ ուղղորդագիծն է՝ $\begin{cases}2x^2++4y+5z^2=0,\\ x-2y-1=0:\end{cases}$

6.21. Գտնել այն կոնական մակերևույթի հավասարումը, որի գագաթը գտնվում է $C(4;\,0;\,5)$ կետում, իսկ ուղղորդագիծն է՝ $\begin{cases}x^2+4y^2+z^2-x+8y-6z-3=0,\\ z=5:\end{cases}$

6.22. Դիցուք էլիպսը գտնվում է XOY հարթությունում, անցնում է $A(3;\,2;\,0)$ կետով, կենտրոնը համընկնում է կոորդինատների սկզբնակետի հետ և մեծ առանցքը հավասար է 10 միավորի: Գտնել այն մակերևույթի հավասարումը, որն առաջանում է այդ էլիպսի պտտումից OX առանցքի շուրջը:

6.23. Դիցուք էլիպսը գտնվում է XOZ հարթությունում, կենտրոնը համընկնում է կոորդինատների սկզբնակետի հետ, էքսցենտրիսիտետը՝ $\varepsilon=\frac{3}{5}$ և փոքր առանցքը հավասար է 8 միավորի: Գտնել այն մակերևույթի հավասարումը, որն առաջանում է այդ էլիպսի պտտումից OZ առանցքի շուրջը:

6.24. Դիցուք էլիպսը գտնվում է YOZ հարթությունում, անցնում է $\left(0;\,4;\,\frac{12}{5}\right)$ կետով, մեծ առանցքը գտնվում է OY առանցքի վրա, կենտրոնը համընկնում է կոորդինատների սկզբնակետի հետ, իսկ ֆոկուսներից մեկի հեռավորությունները մեծ առանցքի ծայրակետերից 3 և 7 է: Գտնել այն մակերևույթի հավասարումը, որն առաջանում է այդ էլիպսի պտտումից OY առանցքի շուրջը:

6.25. Գտնել էլիպսոիդի կենտրոնն ու կիսառանցքները.

ա) $4x^2+16x+2y^2+2y+5z^2-20z-6=0,$

բ) $5x^2 + y^2 + 9z^2 - 45 = 0$,
գ) $2x^2 + 7y^2 + 4z^2 - 28 = 0$,
դ) $7x^2 + 4y^2 + 3z^2 - 42 = 0$:

6.26. Ի՞նչ մակերևույթ է որոշում հետևյալ հավսարումը.
ա) $4x^2 - 3y^2 + 6z^2 - 18 = 0$,
բ) $12x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 24 = 0$,
գ) $5x^2 - 5y^2 + 9z^2 - 30 = 0$:

6.27. Գտնել այն մակերևույթի հավասարումը, որն առաջանում է $\begin{cases} \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{3} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$ հիպերբոլի պտտումից OY առանցքի շուրջը:

6.28. Գտնել այն մակերևույթի հավասարումը, որն առաջանում է $\begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1, \\ z = 0 \end{cases}$ հիպերբոլի պտտումից OY առանցքի շուրջը:

6.29. Գտնել այն մակերևույթի հավասարումը, որն առաջանում է $\begin{cases} \frac{y^2}{8} - \frac{z^2}{12} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$ հիպերբոլի պտտումից OZ առանցքի շուրջը:

6.30. Գտնել այն մակերևույթի հավասարումը, որն առաջանում է $\begin{cases} \frac{y^2}{6} - \frac{z^2}{2} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$ հիպերբոլի պտտումից OY առանցքի շուրջը:

6.31. Ցույց տալ, որ հետևյալ հավասարումով որոշվող մակերևույթը էլիպտական պարաբոլոիդ է.
ա) $4x^2 + 3y^2 - 24z = 0$, բ) $x^2 + 4z^2 - 8y = 0$,
գ) $3z^2 + 5y^2 - 10x = 0$, դ) $x^2 + 3y^2 - 6y - z - 1 = 0$,
ե) $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 4z + 18 = 0$:

6.32. Ապացուցել, որ $z - 3 = 0$ հարթությունը $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 2z$ էլիպտական պարաբոլոիդը հատում է էլիպսով: Գտնել նրա կիսառանցքները և կենտրոնի կոորդինատները:

6.33. Ի՞նչ մակերևույթ է որոշում հավասարումը՝
ա) $3x^2 - 4y^2 - 8z = 0$,
բ) $12x^2 - 2y - 5y^2 = 0$,
գ) $5y^2 - 10x - 4z^2 = 0$:

6.34. Ապացուցել, որ $z = x^2 - 4y^2$ հիպերբոլական պարաբոլոիդի հատումը $x + 2y = 3$ հարթության հետ ուղիղ գիծ է:

6.35. Ապացուցել, որ $z - 4 = 0$ հարթությունը $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 2z$ հիպերբոլական պարաբոլոիդը հատում է հիպերբոլով: Գտնել նրա կենտրոնի կոորդինատները և կիսառանցքները:

6.36. Գտնել $9x^2 - 4y^2 = 2z$ հիպերբոլական պարաբոլոիդի և OXY հարթության հատման գծի հավասարումները:

6.37. Գտնել մակերևույթի և ուղիղի հատման կետերը. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = z$, $\frac{x}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{2}$:

Պատասխաններ

6.1. ա) $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$,
բ) $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z+5)^2 = 4$,
գ) $(x-3)^2 + (y+4)^2 + (z+5)^2 = 25$,
դ) $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-7)^2 = 16$:

6.2. ա) $(x+1)^2 + y^2 + (z-5)^2 = 4$,
բ) $(x-2)^2 + (y+4)^2 + (z-\frac{5}{2})^2 = 26$,
գ) $(x+6)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 8$,
դ) $(x-\frac{5}{2})^2 + (y+2)^2 + (z-\frac{7}{2})^2 = \frac{86}{4}$:

6.3. ա) $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$,
բ) $(x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 27$,
գ) $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 21$,
դ) $(x-3)^2 + (y+\frac{5}{2})^2 + (z-6)^2 = \frac{61}{4}$,
ե) $(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z-\frac{1}{2})^2 = \frac{69}{4}$:

6.4. ա) $(x-4)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = \left(\frac{56}{7}\right)^2$,
բ) $(x-3)^2 + (y-6)^2 + (z+4)^2 = 16$,
գ) $(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = \frac{29^2}{14}$,
դ) $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z+7)^2 = \frac{18}{7}$:

6.5. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$:

6.6. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$:

6.7. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$:

6.8. $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 1$:

6.9. $(2x - z + 4)^2 + (2y + z - 4)^2 - 28 = 0$:

6.10. $(x-z)^2 + (y-z)^2 + a^2 = 0$:

6.11. $19x - 35y + 11z - 1 = 0$:

6.12. $7(x-2z)^2 + (18z - 5x - 20y)^2 + 64x - 128z = 0$:

6.13. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$:

6.14. $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - 13 = 0$:

6.15. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$:
6.16. $4x^2 + 4y^2 - 16yz + 19z^2 = 0$:
6.17. $4(3x + z - 1)^2 + 45y^2 = 2(z + 2)^2$:
6.18. $(-x + 4z - 1)^2 - 4y^2 = 0$:
6.19. $10x^2 + 9y^2 - 12xz + 12x = 0$:
6.20. $2x^2 + 4xy + 8y^2 + 5z = 0$:
6.21. $(x - 2)^2 + 4(y + 1)^2 - 4(z - 3)^2 = 0$:
6.22. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{25/4} + \frac{z^2}{25/4} = 1$:
6.23. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 1$:
6.24. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{16} = 1$:
6.25. ա) $C(-2;\ 3;\ 2)$, $a = \sqrt{15}$, $b = \sqrt{30}$, $c = 2\sqrt{3}$,
բ) $C(0;\ 0;\ 0)$, $a = 3$, $b = \sqrt{45}$, $c = \sqrt{5}$,
գ) $C(0;\ 0;\ 0)$, $a = \sqrt{14}$, $b = 2$, $c = \sqrt{7}$,
դ) $C(0;\ 0;\ 0)$, $a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{\frac{21}{2}}$, $c = \sqrt{14}$:
6.26. ա) $\frac{x^2}{18/4} - \frac{y^2}{6} + \frac{z^2}{3} = 1$, միախոռոչ հիպերբոլոիդ;
բ) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} - \frac{z^2}{6} = 1$, երկխոռոչ հիպերբոլոիդ;
գ) $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{10} + \frac{z^2}{10/3} = 1$, միախոռոչ հիպերբոլոիդ:
6.27. $\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{3} - \frac{x^2}{3} = 1$:
6.28. $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$:
6.29. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{8} - \frac{z^2}{12} = 1$:
6.30. $\frac{y^2}{6} - \frac{z^2}{2} - \frac{x^2}{2} = 1$:
6.31. ա) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 2z$, բ) $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 2y$, գ) $\frac{z^2}{5/3} + \frac{y^2}{1} = 2x$,
դ) $\frac{x^2}{1/3} + \frac{(y-1)^2}{1/6} = 2(z + 4)$, ե) $\frac{(x-3)^2}{2} + \frac{(y+3)^2}{2} = 2z$:
6.32. $a = 3\sqrt{6}$, $b = 2\sqrt{6}$, $O(0;\ 0;\ 3)$:
6.33. ա) $\frac{x^2}{4/9} - \frac{y^2}{1} = 2z$, բ) $\frac{x^2}{1/12} - \frac{z^2}{1/5} = 2z$, գ) $\frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{5/4} = 2x$:
6.34. $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ 3(x - 2y) = z: \end{cases}$
6.35. $(0;\ 0;\ 4)$, $a = 4\sqrt{6}$, $b = 4\sqrt{2}$:

6.36. Երկու հատվող ուղիղներ՝ $\begin{cases} 9x^2 - 4y^2 = 0, \\ z = 0: \end{cases}$

6.37. Ուղիղի բոլոր կետերը պատկանում են մակերևույթին: