СЕРИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
Том 38, № 5, 1974

Известия АН СССР

УДК 513.88

Ф. А. БЕРЕЗИН

КВАНТОВАНИЕ

Светлой памяти
Ивана Георгиевича Петровского

В статье предлагается общее определение квантования для классической механики с произвольным фазовым пространством. Обсуждается случай, когда фазовым пространством служит комплексное келерово многообразие. В качестве примеров рассматриваются однородные ограниченные области в C^n с бергмановской метрикой, а также двумерные цилиндр и тор.

Введение

Термин «квантование» возник в двадцатые годы в физической литературе и с самого начала употреблялся в двух смыслах. Во-первых, это дискретизация множества значений той или иной величины. Во-вторых, это — построение, исходя из классической механической системы, такой квантовой, которая имеет эту классическую своим пределом при $h \to 0$, где h — планковская постоянная *. В предлагаемой работе термин «квантование» употребляется в этом втором значении. Задача квантования в таком смысле, с точки зрения физики, принципиально не однозначна: так как квантовая механика описывает природу гораздо детальнее, чем классическая, то любую квантовую систему можно изменить, не меняя ее предельного классического описания.

Роль квантования, если подходить к нему с этих позиций, состоит в оказании помощи физической интуиции для правильного сопоставления математических объектов явлениям природы. Чисто математическое значение квантования состоит в том, что оно служит источником важных конструкций. Упомянем в этой связи теорию псевдодифференциальных операторов, в основе которой лежит квантование классических механических систем с линейным фазовым пространством, а также серию работ А. А. Кириллова, Б. Константа и их последователей, использующих идеи квантования в теории представлений групп Ли (см. ([3]), ([4]), ([5]) и цитированную там литературу).

---

* Постоянная h размерна (ее размерность равна произведению размерности энергии на размерность времени). Поэтому численное значение h зависит от выбора системы единиц. Стремление h к нулю означает переход от системы единиц, хорошо описывающих квантовые объекты, к системам, все более и более приспособленным к описанию классических.

В физической литературе квантование всегда понимается интуитивно. По-видимому, первая точная математическая конструкция квантования принадлежит Г. Вейлю ([1]). Вейлевское квантование применимо к классическим системам только с плоским фазовым пространством, так как оно основано на использовании канонических координат p_k, q_k. Квантованию систем с неплоским фазовым пространством (точнее, систем со связями) посвящена известная книга П. А. М. Дирака ([2]). Эта задача является актуальной в современной квантовой теории поля. Считать ее полностью решенной в ([2]) нельзя.

В настоящей статье предлагается общее определение квантования, а также конструкция квантования для случая, когда фазовым пространством классической механической системы служит комплексное келерово многообразие. Хотя конструкция является почти универсальной, ее содержательность устанавливается лишь для случая, когда многообразием служит C^n, либо однородная ограниченная область в C^n. В последнем случае возникает любопытная особенность: планковская постоянная не может принимать всех неотрицательных значений, но ограничена сверху: $h \leqslant c$, где c — константа, зависящая от области. Подробно этот эффект исследуется в другой статье. Для случая C^n предлагаемая конструкция приводит к хорошо известному виковскому квантованию.

В конце статьи рассматривается квантование на цилиндре и торе, строящееся по образцу вейлевского квантования. Основые результаты статьи кратко опубликованы в ([6]).

§ 1. Общая задача квантования

1. Классическая механика. Пусть $\mathfrak{M}$ — дифференцируемое многообразие, на котором задано кососимметрическое тензорное поле 2-го ранга ω, имеющее в локальных координатах дифференцируемые компоненты $\omega^{ik}(x)$ и удовлетворяющее условию

$$\sum_k \left[\omega^{\gamma k} \frac{\partial \omega^{\alpha\beta}}{\partial x^k} + \omega^{\beta k} \frac{\partial \omega^{\gamma\alpha}}{\partial x^k} + \omega^{\alpha k} \frac{\partial \omega^{\beta\gamma}}{\partial x^k} \right] = 0. \tag{1.1}$$

Компоненты поля ω всегда будут обозначаться буквами с верхними индексами. Обозначим через $A(\mathfrak{M})$ алгебру (относительно обычных операций линейного комбинирования и умножения) дифференцируемых комплекснозначных функций на $\mathfrak{M}$ и определим скобку Пуассона элементов $A(\mathfrak{M})$:

$$[f, g] = \sum \omega^{ik} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^k}. \tag{1.2}$$

Легко проверяется, что если функции f_1, f_2, f_3 дважды дифференцируемы, то условие (1.1) эквивалентно тождеству Якоби для скобки Пуассона (1.2):

$$[f_1, [f_2, f_3]] + [f_3, [f_1, f_2]] + [f_2, [f_3, f_1]] = 0. \tag{1.3}$$

(Последнее обстоятельство, между прочим, показывает, что условие (1.1)

не зависит от выбора системы координат, что на первый взгляд не очевидно.)

Многообразие $\mathfrak{M}$ вместе с алгеброй $A(\mathfrak{M})$, снабженной скобкой Пуассона (1.2), будем в дальнейшем называть классической механикой и обозначать $(\mathfrak{M}, \omega)$.

Примеры.

1. $\mathfrak{M}=R^{2n}$ — $2n$-мерное аффинное пространство. Введем обозначения для координат x^i в R^{2n} : $x^i=p_i$ при $i=1, 2, \ldots, n$, $x^i=q_{i-n}$ при $i=n+1, \ldots, 2n$. Положим $\omega^{i\,i+n}=1$, $i=1, \ldots, n$, $\omega^{ik}=0$ при $|i-k|\neq n$. Скобка Пуассона (1.2) приобретает классический вид:

$$[f, g] = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}\right). \tag{1.4}$$

2. Пусть $\mathfrak{G}$ — алгебра Ли, e^i — базис в $\mathfrak{G}$, C_k^{ij} — отвечающие e^i структурные константы. В качестве $\mathfrak{M}$ рассмотрим пространство линейных форм на $\mathfrak{G}$, через x^i обозначим координаты в $\mathfrak{M}$, соответствующие базису e^i. (Если $\xi=\Sigma\alpha_i e^i\in\mathfrak{G}$, $x\in\mathfrak{M}$, то $x(\xi)=\Sigma x^i\alpha_i$.) Положим

$$\omega^{ik}(x) = \sum C_s^{ik} x^s, \tag{1.5}$$

где C_s^{ik} — структурные константы. Свойство (1.1) эквивалентно тождеству Якоби для структурных констант:

$$\sum_k [C_s^{ik}C_k^{\alpha\beta} + C_s^{\beta k}C_k^{i\alpha} + C_s^{\alpha k}C_k^{\beta i}] = 0.$$

Скобка Пуассона (1.2) имеет вид

$$[f, g] = \sum_{i,k,s} C_s^{ik}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^k}x^s. \tag{1.6}$$

Этот пример ранее рассматривался в ([7]).

Пусть, в частности, $\mathfrak{G}$ — алгебра Гейзенберга — Вейля, т. е. алгебра Ли с базисом ξ^i, η^i, ζ, $i=1, \ldots, n$, и соотношениями $[\xi^i, \eta^j]=\delta_{ij}\zeta$, $[\xi^i, \zeta]=[\eta^i, \zeta]=[\xi^i, \xi^j]=[\eta^i, \eta^j]=0$. Соответствующие базису ξ^i, η^i, ζ координаты в $\mathfrak{M}$ обозначим p_i, q_i, ε. Скобка Пуассона (1.7) имеет вид

$$[f, g] = \varepsilon \sum \left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}\right),$$

т. е. отличается от (1.5) лишь множителем ε.

3. Пусть $\mathfrak{M}$ — симплектическое многообразие, т. е. многообразие четной размерности, на котором задана невырожденная замкнутая внешняя 2-форма ω. В локальных кординатах

$$\omega=\Sigma\omega_{ik}(x)\,dx^i\wedge dx^k.$$

В отличие от компонент ранее введенного тензорного поля, которое обозначалось той же буквой, компоненты формы ω_{ik} всегда будут снабжаться нижними индексами. Невырожденность означает, что $\det\|\omega_{ik}(x)\|\neq 0$ при всех $x\in\mathfrak{M}$. Следовательно, при каждом x существует

обратная матрица $\omega^{ik}(x)$. Легко проверяется, что замкнутость формы ω эквивалентна свойству (1.1) матрицы $\omega^{ik}(x)$*. Поэтому на симплектическом многообразии всегда существует классическая механика.

Замечание. Если тензорное поле $\omega^{ik}(x)$ не вырождено, т. е. $\det\|\omega^{ik}(x)\|\neq 0$ при всех $x\in\mathfrak{M}$, то можно рассмотреть обратную матрицу $\omega_{ik}(x)$ и с ее помощью — внешнюю форму

$$\omega = \sum \omega_{ik}(x)\, dx^i \wedge dx^k.$$

Условие (1.1) оказывается эквивалентным замкнутости формы ω. Таким образом, в этом случае многообразие $\mathfrak{M}$ оказывается симплектическим. Существуют, однако, важные механические системы, для которых требование невырожденности $\omega^{ik}(x)$ оказывается противоестественным **

---

* Условие $d\omega = 0$ через компоненты ω_{ik} записывается в виде

$$\frac{\partial\omega_{st}}{\partial x^k} + \frac{\partial\omega_{ks}}{\partial x^t} + \frac{\partial\omega_{tk}}{\partial x^s} = 0. \qquad (*)$$

Дифференцируя соотношение $\sum\limits_{\beta} \omega^{\alpha\beta}\omega_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}$, получаем:

$$\sum_{\beta}\left(\frac{\partial\omega^{\alpha\beta}}{\partial x^k}\,\omega_{\beta\gamma} + \omega^{\alpha\beta}\frac{\partial\omega_{\beta\gamma}}{\partial x^k}\right) = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial\omega^{\alpha,\beta}}{\partial x^k} = -\sum_{s,t}\omega^{\alpha s}\frac{\partial\omega_{st}}{\partial x^k}\,\omega^{t\beta}.$$

Подставляя это выражение в (1.1), находим:

$$\sum_{k}\left[\omega^{\gamma k}\frac{\partial\omega^{\alpha\beta}}{\partial x^k} + \omega^{\beta k}\frac{\partial\omega^{\gamma\sigma}}{\partial x^k} + \omega^{\alpha k}\frac{\partial\omega^{\beta\gamma}}{\partial x^k}\right] =$$

$$= \sum_{k,s,t}\omega^{\gamma k}\omega^{\alpha s}\omega^{\beta t}\left(\frac{\partial\omega_{st}}{\partial x^k} + \frac{\partial\omega_{tk}}{\partial x^s} + \frac{\partial\omega_{ks}}{\partial x^t}\right).$$

Таким образом, в случае невырожденности ω условия (1.1) и (*) эквивалентны.

** См. пример 2 в случае, когда $\dim\mathfrak{G}\equiv 1 \pmod 2$. Подобная ситуация возникает, в частности, в случае движения твердого тела с закрепленной точкой. Алгеброй $\mathfrak{G}$ здесь служит алгебра трехмерных вращений, скобка Пуассона задается формулой

$$[f, g] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g}{\partial x_2} & \dfrac{\partial g}{\partial x_3} \end{vmatrix}.$$

Функция Гамильтона имеет вид $H = \sum\limits_{i,k=1}^{3} h_{ik}x_i x_k$, $h_{ik} = \bar{h}_{ik} = h_{ki}$ Соответствующие уравнения движения $\dfrac{\partial x_i}{\partial t} = [H, x_i]$ называются уравнениями Эйлера, матрица h_{ik} называется тензором инерции.

Отображение классических механик. Пусть $(\mathfrak{M}_i, \omega_i)$, $i=1, 2$,— классические механики, причем $\det\|\omega_1^{ij}\|\neq 0$, $\det\|\omega_2^{ij}\|\neq 0$. Диффеоморфизм $\varphi:\mathfrak{M}_1\to\mathfrak{M}_2$ назовем отображением классических механик, если сопряженное отображение переводит форму ω_2 в ω_1; в локальных координатах

$$\omega_{1,ij}(x)=\sum_{p,q}\omega_{2,pq}(y(x))\frac{\partial y^p}{\partial x^i}\frac{\partial y^q}{\partial x^j}. \tag{1.7}$$

2. Общее определение квантования. Квантованием $\mathfrak{A}$ классической механики $(\mathfrak{M}, \omega)$ мы будем называть ассоциативную алгебру с инволюцией, обладающую свойствами, которые перечисляются ниже.

1) Существует семейство A_h ассоциативных алгебр с инволюцией таких, что

1_1) индекс h пробегает множество E на положительной части вещественной оси, имеющее 0 предельной точкой (0 не входит в E).

1_2) Алгебра $\mathfrak{A}$ является подалгеброй прямой суммы $\sum\limits_{h\in E}\oplus A_h$. Элементы алгебры $\mathfrak{A}$ нам будет удобно представлять в виде функций $f(h)$, $h\in E$, со значениями в A_h. Инволюция и умножение в $\mathfrak{A}$ обычным образом связаны с инволюцией и умножением в A_h: $f^{\tilde\sigma}(h)=(P(h))^\sigma$, где $\tilde\sigma$, σ — инволюция в $\mathfrak{A}$ и A_h соответственно, $(f_1\tilde{*}f_2)(h)=f_1(h)*f_2(h)$, где $\tilde{*}$, $*$ — умножение в $\mathfrak{A}$ и A_h соответственно. В дальнейшем умножение и инволюция в A_h и $\mathfrak{A}$ обозначаются одинаково.

2) Существует гомоморфизм φ алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $A(\mathfrak{M})$. Гомоморфизм должен обладать следующими свойствами:

2_1) Для любых двух точек x_1, $x_2\in\mathfrak{M}$ найдется такая функция $f(x)\in\varphi(\mathfrak{A})$, что $f(x_1)\neq f(x_2)$.

2_2) $\varphi\left[\frac{1}{h}(f*g-g*f)\right]=\frac{1}{i}[\varphi(f_1), \varphi(f_2)]$, где $*$ означает умножение в $\mathfrak{A}$ и $[\cdot, \cdot]$ — скобку Пуассона в $A(\mathfrak{M})$.

2_3) $\varphi(f^\sigma)=\overline{\varphi(f)}$, где $f\to f^\sigma$ означает инволюцию в $\mathfrak{A}$ и черта — комплексное сопряжение. Параметр h играет роль постоянной Планка.

Свойства 2), 2_1), 2_2) называются *принципом соответствия*. Будем говорить, то для квантования $\mathfrak{A}$ выполняется принцип соответствия в *слабой форме*, если условия 2), 2_1), 2_2) заменены следующими:

2′) В $\mathfrak{A}$ существует линейное многообразие $\tilde{\mathfrak{A}}$, на котором определено линейное отображение $\varphi:\tilde{\mathfrak{A}}\to A(\mathfrak{M})$ со свойствами:

$2_0'$) $\varphi(f_1*f_2)=\varphi(f_1)\cdot\varphi(f_2)$ при f_1, f_2, $f_1*f_2\in\tilde{\mathfrak{A}}$;

$2_1'$) $\varphi\left(\frac{1}{h}(f_1*f_2-f_2*f_1)\right)=\frac{1}{i}[\varphi(f_1), \varphi(f_2)]$ при f_1, f_2, f_1*f_2, $f_2*f_1\in\tilde{\mathfrak{A}}$;

$2_2'$) для любых двух точек x_1, $x_2\in\mathfrak{M}$ существует такая функция $f(x)\in\varphi(\tilde{\mathfrak{A}})$, что $f(x_1)\neq f(x_2)$;

$2_3'$) $\varphi(f^\sigma)=\overline{\varphi(f)}$.

Отметим, что с общей точки зрения квантование является некоммутативным расширением алгебры $A(\mathfrak{M})$.

Пусть в классической механике $(\mathfrak{M}, \omega)$ задана динамическая система с функцией Гамильтона H. Какая ей соответствует квантовая динамическая система? С нашей точки зрения ответ заключается в следующем. Рассмотрим квантование $\mathfrak{A}$ механики $(\mathfrak{M}, \omega)$ и обозначим через $f(h)$ прообраз H при гомоморфизме φ. Фиксируем h и рассмотрим линейное представление алгебры A_h в гильбертовом пространстве. Оператор $\hat{f}$, отвечающий $f(h)$, является гамильтонианом соответствующей квантовой системы. Неоднозначность в выборе прообраза $f(h)$ отражает бóльшую точность квантовомеханического описания природы по сравнению с классическим, отмеченную во Введении.

Перейдем к важному частному случаю квантования.

3. Специальное квантование. Так будем называть квантование, обладающее дополнительными свойствами:

3) Алгебра A_h состоит из функций $f(x)$, $x \in \mathfrak{M}$.

2) Алгебра $\mathfrak{A}$ состоит из функций $f(h, x)$, $f(h, x) \in A_h$ при фиксированном h.

5) Гомоморфизм $\varphi : \mathfrak{A} \to A(\mathfrak{M})$ задается формулой

$$\varphi(f) = \lim_{h \to 0} f(h, x).$$

Изучаемые в настоящей статье квантования являются специальными. В § 5 приводятся два примера, квантование на цилиндре и на торе, иллюстрирующих общее определение.

Кроме перечисленных свойств 1)—5), изучаемые нами квантования обладают свойствами:

6) Инволюция в A_h совпадает с комплексным сопряжением.

7) Алгебра A_h обладает единицей, причем единицей служит функция $f_0(x) \equiv 1$.

8) Алгебра A_h является алгеброй со следом, причем

$$\operatorname{sp} f = \int f(x)\, d\mu(x),$$

где $d\mu(x)$ — некоторая мера на $\mathfrak{M}$ *.

Отметим, что если тензорное поле $\omega^{ij}(x)$ не вырождено, т. е. если на $\mathfrak{M}$ существует внешняя замкнутая форма второй степени $\omega = \Sigma \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j$, то на $\mathfrak{M}$ существует естественная мера $d\mu(x) = \omega^{n/2}$ **.

4. Присоединенные элементы. Пусть задано специальное квантование, и пусть $f_t(x) \in A_h$ — однопараметрическая полугруппа. Функцию

* Следом называется линейный функционал $\operatorname{sp} f$, определенный на некотором подмножестве $\widetilde{A}_h \subset A_h$. Множества $\widetilde{A}_h$ и $\operatorname{sp} f$ должны обладать свойствами:

1) если $f_1 * f_2 \in \widetilde{A}_h$, то $f_2 * f_1 \in \widetilde{A}_h$,

2) если $f_1 * f_2 \in \widetilde{A}_h$, то $\operatorname{sp}(f_1 * f_2) = \operatorname{sp}(f_2 * f_1)$.

Ясно, что функционал $\operatorname{sp} f$ определен с точностью до множителя.

** В случае, если $\mathfrak{M}$ — келерово многообразие, возможны и другие естественные меры. См. ниже.

$\varphi(x) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{d}{dt} f_t(x)$ (если она существует в каком-нибудь смысле) будем называть элементом, присоединенным к алгебре A_h. Обозначим через ${}^{\varphi}A_h$ и A_h^{φ} подмножества A_h, для которых существуют пределы $\lim\limits_{t\to 0} f_t * g \in A_h$ и $\lim\limits_{t\to 0} g * f_t \in A_h$ соответственно. Для этих пределов сохраним обозначения $\varphi * g$ и $g * \varphi$. (В конкретных случаях, как мы увидим, умножение $f * g$ в A_h задается с помощью интеграла вида

$$(f * g)(x) = \int G_h(x_1, x_2 \mid x) f(x_1) g(x_1) d\mu(x_1) d\mu(x_2);$$

$\varphi * g$ и $g * \varphi$ задаются аналогичными интегралами.)

Функцию $\varphi(h, x)$ назовем элементом, присоединенным к алгебре $\mathfrak{A}$, если при каждом фиксированном h $\varphi(h, x)$ является присоединенным элементом к A_h.

Обозначим через ${}^{\varphi}\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}^{\varphi}$ множества функций $f(h, x) \in \mathfrak{A}$ таких, что при фиксированном h $f(h, x) \in {}^{\varphi}A_h$ и A_h^{φ} соответственно.

Элемент, присоединенный к $\mathfrak{A}$, назовем правильным, если существует $\varphi(0, x) = \lim\limits_{h\to 0} \varphi(h, x)$ и достаточно богатое множество $\tilde{\mathfrak{A}} \subset {}^{\varphi}\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}^{\varphi}$ такое, что для $f \in \tilde{\mathfrak{A}}$

$$(\varphi * f)(h, x) = \varphi(0, x) f(0, x) + o(1),$$

$$(f * \varphi)(h, x) = \varphi(0, x) f(0, x) + o(1),$$

$$\frac{1}{h}(f * \varphi - \varphi * f)(h, x) = \frac{1}{i}[f, \varphi](0, x) + o(1).$$

Будем говорить, что присоединенный элемент φ обладает *квазиклассическим свойством*, если вместо последнего соотношения выполняется равенство

$$\frac{1}{h}(\varphi * f - f * \varphi)(h, x) = \frac{1}{i}[\varphi, f](h, x).$$

Мы не уточняем слова «достаточно богатое», оставляя за собой свободу рук. В случае, если алгебра $\mathfrak{A}$ является топологической, естественно требовать, чтобы $\tilde{\mathfrak{A}}$ было плотно в $\mathfrak{A}$. В других случаях может оказаться более естественным требование, чтобы для любых $x_1, x_2 \in \mathfrak{M}$ существовал такой элемент $f(h, x) \in \tilde{\mathfrak{A}}$, что $f(0, x_1) \neq f(0, x_2)$.

5. Символы. Рассмотрим линейное представление $f \to \hat{f}$ алгебры A_h в гильбертовом пространстве. Элемент f будем по определению называть символом оператора $\hat{f}$ (с добавлением различных прилагательных, связанных с деталями конструкции). Присоединенный элемент φ будем называть символом инфинитезимального оператора $\hat{\varphi} = \lim\limits_{t=0} \frac{d}{dt} \hat{f}_t$.

6. Функтор квантования. Пусть $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ — алгебры, устроенные аналогично квантованиям: существуют алгебры $B_h^{(1)}$, $h \in E_1$, $B_h^{(2)}$, $h \in E_2$, такие, что $\mathfrak{B}_i$ состоит из функций $f(h)$, $h \in E_i$, принимающих значения в $B_h^{(i)}$. Гомоморфизм $\psi: \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2$ алгебр с такой структурой будем называть допу-

стимым, если он порожден гомоморфизмами ψ_h алгебр $B_h^{(i)}$: $(\psi f)(h) = \psi_h f(h)$. (Для того чтобы существовал допустимый гомоморфизм $\mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2$, необходимо, чтобы $E_1 \subset E_2$.) Аналогично определим допустимый изоморфизм алгебр $\mathfrak{B}_i$.

Фиксируем множество классических механик $\mathscr{E}$ и категорию $\mathscr{K}$ отображений элементов $\mathscr{E}$. Пусть каждой классической механике $(\mathfrak{M}, \omega) \in \mathscr{E}$ сопоставлено квантозание $\mathfrak{A}$.

Сопоставление $(\mathfrak{M}, \omega) \rightsquigarrow \mathfrak{A}$ будем называть функтором квантования, если для любой пары классических механик $(\mathfrak{M}_i, \omega_i) \in \mathscr{E}$, $i = 1, 2$, связанных соотношением

$$(\mathfrak{M}_2, \omega_2) = \Phi(\mathfrak{M}_1, \omega_1), \quad \Phi \in \mathscr{K},$$

найдется такой допустимый гомоморфизм $\tilde{\Phi}$, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} (\mathfrak{M}_1, \omega_1) & \rightsquigarrow & \mathfrak{A}_1 & \to & A(\mathfrak{M}_1) \\ \Phi\downarrow & & \tilde{\Phi}\uparrow & & \Phi^*\uparrow \\ (\mathfrak{M}_2, \omega_2) & \rightsquigarrow & \mathfrak{A}_2 & \to & A(\mathfrak{M}_2) \end{array} \tag{1.8}$$

где φ_1, φ_2 — гомоморфизмы, участвующие в определении квантования и Φ^* — отображение функций, сопряженное диффеоморфизму Φ.

Функтор квантования будем обозначать Q. Если сопоставление $(\mathfrak{M}, \omega) \rightsquigarrow \mathfrak{A}$ является функтором, то, чтобы подчеркнуть это обстоятельство, будем писать $\mathfrak{A} = Q(\mathfrak{M}, \omega)$.

Функтор квантозания Q будем называть специальным, если все квантования $\mathfrak{A} = Q(\mathfrak{M}, \omega)$ являются специальными.

7. Естественность. Для объектов, связанных со специальными квантованиями, возникает важное понятие естественности. Пусть $\mathscr{K}$ — некоторая категория отображений классических механик, $(\mathfrak{M}_i, \omega_i)$, $\mathfrak{A}_i$, $i = 1, 2$,— классические механики и их квантования.

Допустимый гомоморфизм $\psi: \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2$ называется естественным по отношению к $\mathscr{K}$, если существует отображение $\Phi \in \mathscr{K}$, $\Phi(\mathfrak{M}_2, \omega_2) = (\mathfrak{M}_1, \omega_1)$ такое, что

$$(\psi f)(h, x) = f(h, \Phi(x)), \quad x \in \mathfrak{M}_2. \tag{1.9}$$

Гомоморфизм ψ, связанный с отображением Φ соотношением (1.9), будем обозначать $\psi = \Phi^*$.

Специальный функтор квантования Q назовем естественным по отношению к $\mathscr{K}$, если в диаграмме (1.8) $\tilde{\Phi} = \Phi^*$.

Специальное квантование $\mathfrak{A} = Q(\mathfrak{M}, \omega)$, где Q — специальный функтор, будем называть естественным по отношению к категории $\mathscr{K}$, если этим свойством обладает функтор Q. В § 8 будет показано, что не существует функтора квантования Q, естественного по отношению к категории всех отображений классических механик.

8. Группы движений. Пусть $(\mathfrak{M}, \omega)$ — классическая механика и G — группа преобразований $\mathfrak{M}$, входящая в некоторую категорию $\mathscr{K}$ отображений классических механик. Последнее обстоятельство, в частности, означает, что преобразование τ_g в $A(\mathfrak{M})$:

$$(\tau_g f)(x) = f(g^{-1}x) \tag{1.10}$$

является автоморфизмом алгебры Ли скобок Пуассона. Пусть $\mathfrak{A}$— естественное относительно $\mathcal{H}$ квантование механики $(\mathfrak{M}, \omega)$. Из приведенных ранее определений немедленно следует, что преобразование (1.10) является автоморфизмом всех алгебр A_h.

Рассмотрим однопараметрическую подгруппу $\tau_{g(t)}$ автоморфизмов (1.10) алгебры A_h. Предположим, что они представимы в виде $\tau_{g(t)}f = \sigma_{t/h} * f * \sigma_{-t/h}$, где $\sigma_t \in A_h$ — однопараметрическая группа, причем $g = \lim\limits_{t\to 0} \frac{d\sigma_t}{dt}$ является правильным присоединенным элементом и множество $\tilde{\mathfrak{A}}$ состоит из функций, не зависящих от h. В таком случае элемент g обладает квазиклассическим свойством. В самом деле, из (1.10) следует, что

$$\lim_{t\to 0} \frac{d}{dt} f(g^{-1}(t)x) = \frac{1}{h}(g * f - f * g) = \frac{1}{i}[g, f] + o(1).$$

При $f \in \tilde{\mathfrak{A}}$ левая часть этого равенства не зависит от h, следовательно, тем же свойством обладает правая, поэтому $o(1) = 0$.

9. Эквивалентность квантований. Пусть $\mathfrak{A}$ — квантование классической механики $(\mathfrak{M}, \omega)$, E — множество значений h, s — некоторое взаимно однозначное преобразование E. Отображение s порождает автоморфизм s^* алгебры $\mathfrak{A}$: $(s^*f)(h) = f(sh)$.

Пусть теперь $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ — квантования одной и той же классической механики $(\mathfrak{M}, \omega)$. Квантования $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ назовем эквивалентными, если 1) существует такой изоморфизм $\Phi : \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2$ и такой изоморфизм $s^* : \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_1$ описанного выше типа, что изоморфизм $\Phi s^* : \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2$ является допустимым, 2) коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{A}_1 & \xrightarrow{\Phi s^*} & \mathfrak{A}_2 \\ & {\scriptstyle\varphi_1}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\varphi_2} & \\ & A(\mathfrak{M}) & \end{array} \tag{1.11}$$

где φ_i — гомоморфизмы, участвующие в определении квантования.

В случае, если на $\mathfrak{M}$ действует группа преобразований G, входящая в категорию, относительно которой квантования $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ естественны, вводится понятие естественной эквивалентности: в дополнение к (1.11) должна быть коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{A}_1 & \xrightarrow{\Phi s^*} & \mathfrak{A}_2 \\ {\scriptstyle\tau_g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\tau_g} \\ \mathfrak{A}_1 & \xrightarrow{\Phi s^*} & \mathfrak{A}_2 \end{array} \tag{1.12}$$

где τ_g — изоморфизм вида (1.10).

10. Комментарии. 1) Мотивировка определения специального квантования состоит в следующем. Согласно физическому представлению, квантование есть линейное сопоставление $q : f(x) \to \hat{f}$ функциям операторов в некотором гильбертовом пространстве.

Предположим, что отображение q взаимно однозначно, определено на множестве $\tilde{A} \subset A(\mathfrak{M})$ и что образом $\tilde{A}$ служит некоторая алгебра операторов A. В таком случае в $\tilde{A}$ можно перенести умножение из A: $(f_1 * f_2)(x) = q^{-1}(q(f_1)\, q(f_2))$. Множество $\tilde{A}$, наделенное этой операцией умножения, и есть алгебра A_h из определения специального квантования.

С точки зрения идеологии квантовой механики многообразие $\mathfrak{M}$ классической механики должно возникать в пределе при $h \to 0$. Поэтому специальное квантование, в котором $\mathfrak{M}$ участвует с самого начала, вряд ли может быть пригодно во всех случаях. Общее определение свободно от этого недостатка и, по-видимому, является универсальным.

2) Алгебраические и топологические свойства алгебр A_h и $\mathfrak{A}$, а также свойства функций $f(x) \in A_h$, $f(h, x) \in \mathfrak{A}$, не оговариваются в общих определениях для того, чтобы иметь возможность фиксировать эти свойства наиболее удобным образом в конкретных ситуациях.

3) Принцип соответствия фиксирует лишь асимптотическое поведение алгебр A_h при $h \to 0$. Требования функториальности и естественности снижают этот произвол.

Для случая, когда $\mathfrak{M} = C^n$, в § 7 доказана единственность с точностью до эквивалентности естественного квантования при некоторых дополнительных условиях алгебраического и топологического характера.

§ 2. Квантование в келеровых многообразиях

1. Алгебра ковариантных символов. Мы строим алгебры A_h для келеровых многообразий с помощью ковариантных символов операторов.

Напомним основные определения ([8]).

Пусть H — гильбертово пространство, M — некоторое множество с мерой $d\alpha$. Система векторов $e_\alpha \in H$, $\alpha \in M$, называется переполненной, если для любых $f, g \in H$ справедливо тождество Парсеваля

$$(f, g) = \int (f, e_\alpha)(e_\alpha, g)\, d\alpha. \tag{2.1}$$

Обозначим через $d\sigma(\alpha)$ меру, абсолютно непрерывную по $d\alpha$:

$$d\sigma(\alpha) = (e_\alpha, e_\alpha)\, d\alpha.$$

Заметим, что переполненная система порождает вложение H в пространство $L^2(M)$ по формуле

$$f \longmapsto f(\alpha) = (f, e_\alpha). \tag{2.2}$$

Начиная с этого места, будем считать, что пространство H реализовано как подпространство $L^2(M)$.

Из (2.2), в частности, следует, что

$$e_\alpha(\beta) = (e_\alpha, e_\beta) = \overline{(e_\beta, e_\alpha)} = \overline{e_\beta(\alpha)}. \tag{2.3}$$

Пусть $\hat{P}_\alpha$ — ортогональный проектор на e_α. Ковариантным символом

оператора $\hat{A}$ в H называется функция

$$A(\alpha) = \operatorname{sp}(\hat{A}\hat{P}_\alpha) = \frac{(\hat{A}e_\alpha, e_\alpha)}{(e_\alpha, e_\alpha)}. \tag{2.4}$$

Из определений ясно, что ковариантный символ единственным образом определен для любого оператора, в область определения которого входят e_α при всех $\alpha \in M$, в частности, для любого ограниченного оператора. Отметим, что ковариантный символ ограниченного оператора ограничен: $|A(\alpha)| \leqslant \|A\|$. Возможна ситуация, когда различные операторы имеют один и тот же ковариантный символ. Ниже мы увидим, что в интересующих нас случаях это не так: между операторами и ковариантными символами существует взаимно однозначное соответствие. Пусть $\hat{A}$ — ограниченный оператор в H, $A(\alpha)$ — его ковариантный символ. В ([8]) показано, что действие оператора на вектор определяется формулой:

$$(\hat{A}f)(\alpha) = \int f(\beta) A(\beta, \alpha) \frac{(e_\beta, e_\alpha)}{(e_\beta, e_\beta)} d\sigma(\beta), \tag{2.5}$$

где

$$A(\alpha, \beta) = \frac{(\hat{A}e_\alpha, e_\beta)}{(e_\alpha, e_\beta)} \tag{2.6}$$

— продолжение функции $A(\alpha)$ на $M \times M$.

Из (2.5) немедленно следует, что если $\hat{A} = \hat{A}_1\hat{A}_2$, A, A_1, A_2 — ковариантные символы соответствующих операторов, то

$$A(\alpha) = \int A_1(\gamma, \alpha) A_2(\alpha, \gamma) \frac{(e_\alpha, e_\gamma)(e_\gamma, e_\alpha)}{(e_\alpha, e_\alpha)(e_\gamma, e_\gamma)} d\sigma(\gamma). \tag{2.7}$$

Алгебра с законом умножения (2.7), состоящая из ковариантных символов ограниченных операторов, является основой дальнейших конструкций. Роль множества M всегда в дальнейшем играет многообразие $\mathfrak{M}$, служащее фазовым пространством классической механики. Из определения ковариантного символа следует, что если оператору $\hat{A}$ отвечает символ $A(\alpha)$, то эрмитово сопряженному оператору $\hat{A}^*$ отвечает комплесно сопряженный символ $\overline{A(\alpha)}$.

В общей теории, развитой в ([8]), наряду с ковариантными символами важную роль играют контравариантные символы операторов. Функция $\overset{\circ}{A}(\alpha)$ называется контравариантным символом оператора $\hat{A}$, если оператор $\hat{A}$ представим в виде слабого интеграла

$$\hat{A} = \int \overset{\circ}{\alpha}(A) \hat{P}_\alpha d\sigma(\alpha).$$

Между ко- и контравариантными символами одного и того же оператора имеется связь:

$$A(\alpha) = \int \overset{\circ}{A}(\beta) \frac{(e_\alpha, e_\beta)(e_\beta, e_\alpha)}{(e_\alpha, e_\alpha)(e_\beta, e_\beta)} d\sigma(\beta). \tag{2.8}$$

Отметим, что закон умножения (2.7) и связь между ко- и контравариантными символами задаются с помощью одной и той же функции

$$G(\alpha, \beta) = \frac{(e_\alpha, e_\beta)(e_\beta, e_\alpha)}{(e_\alpha, e_\alpha)(e_\beta, e_\beta)}. \tag{2.9}$$

Интегральный оператор (2.8), ядром которого служит функция (2.9), играет в предлагаемой теории важнейшую роль. Мы его обозначим через T.

Для полноты изложения приведем формулы для следа оператора и следа произведения операторов *:

$$\operatorname{sp}\hat{A} = \int A(\alpha)\, d\sigma(\alpha) = \int \mathring{A}(\alpha)\, d\sigma(\alpha), \tag{2.10}$$

$$\operatorname{sp}(\hat{A}\hat{B}^*) = \int A(\alpha)\, \overline{\mathring{B}}(\alpha)\, d\sigma(\alpha). \tag{2.11}$$

2. Келеровы многообразия. Пусть $\mathfrak{M}$ — келерово многообразие, в локальных координатах $ds^2 = \Sigma g_{i\bar{k}} dz^i d\bar{z}^k$, $\omega = \Sigma g_{i\bar{k}} dz^i \wedge d\bar{z}^k$. Согласно определению келерова многообразия $d\omega = 0$ и $\det\|g_{i\bar{k}}\| \neq 0$. Следовательно, $\mathfrak{M}$ является симплектическим многообразием. Тем самым на $\mathfrak{M}$ существует классическая механика $(\mathfrak{M}, \omega)$. Скобка Пуассона в комплексных локальных координатах имеет вид

$$[f_1, f_2] = i \sum g^{\bar{i}k} \left(\frac{\partial f_1}{\partial z^k} \frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}^i} - \frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}^i} \frac{\partial f_2}{\partial z^k} \right). \tag{2.12}$$

В дальнейшем часто будут встречаться функции на $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$, аналитические по первому и антианалитические по второму аргументам. Условимся обозначать такие функции через $f = f(z, \bar{v})$.

В этом пункте мы опишем общую схему квантования классической механики $(\mathfrak{M}, \omega)$.

Напомним, что потенциалом келеровой метрики называется функция $\Phi(z, \bar{z})$, удовлетворяющая системе уравнений

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^i \partial \bar{z}^k} = g_{i\bar{k}}. \tag{2.13}$$

Условие келеровости $d\omega = 0$ является одновременно условием локальной разрешимости системы (2.13). Система (2.13) имеет вещественное решение и в дальнейшем без оговорок предполагается, что Φ является вещественной функцией. Мы будем также предполагать, что потенциал Φ существует глобально на $\mathfrak{M}$ и что он допускает аналитическое продолжение $\Phi(z, \bar{v})$ на некоторую окрестность диагонали в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$.

---

* В ([8]) показано, что ядерность $\mathring{A}$ следует из существования 2-го интеграла (2.10); существование 1-го интеграла следует из ядерности $\mathring{A}$. Заметим, в частности, что у оператора $\mathring{A} = I$ ко- и контравариантные символы равны $A(\alpha) = \mathring{A}(\alpha) \equiv 1$. Поэтому конечность интеграла $\int d\sigma(\alpha)$ эквивалентна конечномерности пространства H и $\dim H = \operatorname{sp} I = \int d\sigma(\alpha)$.

Рассмотрим гильбертово пространство F_h аналитических функций на $\mathfrak{M}$ со скалярным произведением

$$(f, g) = c(h) \int f(z) \overline{g(z)}\, e^{-\frac{1}{h}\Phi(z,\bar z)} d\mu(z, \bar z), \tag{2.14}$$

где $d\mu(z, \bar z) = \omega^n = \det \| g_{i\bar k} \| \prod \frac{dz^k \wedge d\bar z^k}{2\pi i}$ *. Константа h играет в предлагаемой теории роль постоянной Планка, функция $c(h)$ определяется ниже. Интеграл (2.14), как и все аналогичные интегралы в дальнейшем, для которых область интегрирования не указана, предполагается распространенным на все $\mathfrak{M}$.

Пусть $f_k(z)$ — ортонормированный базис в F_h.

ТЕОРЕМА 2.1. 1) *В каждой координатной окрестности абсолютно и равномерно сходится ряд*

$$L_h(z, \bar z) = \sum f_k(z) \overline{f_k(z)}. \tag{2.15}$$

2) *Функция $L_h(z, \bar z)$ не зависит от выбора ортонормированного базиса f_k.*

Доказательство 1-го утверждения теоремы 2.1 дублирует стандартное доказательство существования керн-функции Бергмана (см., например, ([9])) и поэтому может быть опущено **. Применяя неравенство Коши — Буняковского, получаем в качестве следствия 1-го утверждения, что в каждой координатной окрестности в $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ абсолютно и равномерно сходится ряд

---

* ω^n, $n = \dim_{\mathbb{C}} = \mathfrak{M}$,— одна из возможных естественных мер на келеровом многообразии. Другой возможный вариант: $d\mu = \omega_1{}^n$,

$$\omega_1 = \sum \frac{\partial^2 \ln g}{\partial z^i \partial \bar z^k} dz^i \wedge d\bar z^k, \quad \text{где} \quad g = \det \| g_{i\bar k} \|.$$

Причина, по которой выбирается именно ω^n, состоит в том, что только в этом случае мы можем доказать принцип соответствия. См. следующий раздел.

** Доказательство существования керн-функции основано на неравенстве

$$|f(z_0)|^2 \leqslant a \int\limits_U |f(z)|^2 \prod \frac{dz^k \wedge d\bar z^k}{2\pi i}, \tag{*}$$

где U — координатная окрестность с центром в z_0. Положим

$$\rho(z, \bar z) = \exp\left\{-\frac{1}{h}\Phi(z, \bar z)\right\} \det \| g_{i\bar k}(z, \bar z) \|.$$

Очевидно, что $\rho(z, \bar z) \geqslant a_0 = a_0(U) > 0$ при $z \in U$. Поэтому из (*) вытекает неравенство

$$|f(z_0)|^2 \leqslant a a_0^{-1} \int\limits_U |f(z)|^2 \rho(z, \bar z) \prod \frac{dz^k \wedge d\bar z^k}{2\pi i}. \tag{**}$$

Первое утверждение теоремы (2.1) следует из неравенства (**) точно так же, как теорема о существовании керн-функции следует из (*).

$$L_h(z, \bar{v}) = \sum f_k(z)\overline{f_k(v)}. \tag{2.16}$$

Обозначим через $L_h^2(\mathfrak{M})$ гильбертово пространство всех измеримых функций на $\mathfrak{M}$ с суммируемым квадратом по мере $c(h)e^{-\frac{1}{h}\Phi}d\mu$ и через P — ортогональный проектор из $L_h^2(\mathfrak{M})$ на F_h. Очевидно, что

$$(Pf)(z) = c(h)\int f(v, \bar{v})L_h(z, \bar{v})e^{-\frac{1}{h}\Phi(v, \bar{v})}d\mu(v, \bar{v}).$$

Отсюда следует независимость $L_h(z, \bar{v})$ от выбора базиса. Теорема доказана.

Из неравенства Коши — Буняковского вытекает важная оценка

$$|L_h(z, \bar{v})|^2 \leqslant L_h(z, \bar{z})L_h(v, \bar{v}). \tag{2.17}$$

Положим

$$\Phi_{\bar{v}}(z) = L_h(z, \bar{v}). \tag{2.18}$$

Заметим, что

$$c(h)\int |\Phi_{\bar{v}}(z)|^2 e^{-\frac{1}{h}\Phi(z, \bar{z})}d\mu(z, \bar{z}) = \sum f_k(v)\overline{f_k(v)} = L_h(v, \bar{v}).$$

Следовательно, $\Phi_{\bar{v}} \in F_h$. Из (2.18) и (2.16) следует, что при любом $f \in F_h$

$$(f, \Phi_{\bar{v}}) = f(v). \tag{2.19}$$

Из (2.19) очевидным образом следует (2.1), причем роль α играет точка v многообразия $\mathfrak{M}$,

$$d\alpha = c(h)e^{-\frac{1}{h}\Phi(z, \bar{z})}d\mu(z, \bar{z}), \quad d\sigma(\alpha) = L_h(z, \bar{z})d\alpha. \tag{2.20}$$

Таким образом, функции $\Phi_{\bar{v}}(z)$ образуют переполненную систему в F_h. Алгебру A_h образуем из ковариантных символов ограниченных операторов в F_h. Отметим, что ковариантный символ $A(z, \bar{z})$ оператора $\hat{A}$ является значением на диагонали $z = v$ функции

$$A(z, \bar{v}) = \frac{(A\Phi_{\bar{v}}, \Phi_{\bar{z}})}{(\Phi_{\bar{v}}, \Phi_{\bar{z}})}, \tag{2.21}$$

определенной на $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$. Специализация формул (2.5), (2.7) и (2.10) в рассматриваемом случае дает:

$$(\hat{A}f)(z) = c(h)\int A(z, \bar{v})f(v)L_h(z, \bar{v})e^{-\frac{1}{h}\Phi(v, \bar{v})}d\mu(v, \bar{v}), \tag{2.22}$$

$$(A_1 * A_2)(z, \bar{z}) = c(h)\int A_1(z, \bar{v})A_2(v, \bar{z})\frac{L_h(z, \bar{v})L_h(v, \bar{z})}{L_h(z, \bar{z})L_h(v, \bar{v})}\cdot\frac{L_h(v, \bar{v})}{e^{\frac{1}{h}\Phi(v, \bar{v})}}d\mu(v, \bar{v}), \tag{2.23}$$

$$\operatorname{sp}\hat{A} = c(h)\int A(z, \bar{z})\frac{L_h(z, \bar{z})}{e^{\frac{1}{h}\Phi(z, \bar{z})}}d\mu(z, \bar{z}). \tag{2.24}$$

Замечания. 1. Согласно (2.22), оператор $\hat{A}$ восстанавливается по функции $A(z, \bar{v})$, служащей аналитическим продолжением $A(z, \bar{z})$ с диагонали в $\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$ на все $\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$. Тем самым в нашем случае оператор $\hat{A}$ однозначно восстанавливается по своему ковариантному символу $A(z, \bar{z})$. Соответствие между операторами и ковариантными символами оказывается взаимно однозначным.

2. Рассмотрим семейство келеровых метрик, отличающихся друг от друга постоянным множителем λ: $ds^2 = \lambda^{-1} ds_0^2$. Потенциалы метрик ds^2 и ds_0^2 связаны соотношением $\Phi(z, \bar{z}) = \lambda^{-1}\Phi_0(z, \bar{z})$. Таким образом, масштабный множитель λ по существу играет в предлагаемой теории роль планковской постоянной *.

3. Вспомогательные предположения и гипотезы. Рассмотрим функцию

$$\varphi(z, \bar{z} \mid v, \bar{v}) = \Phi(z, \bar{v}) + \Phi(v, \bar{z}) - \Phi(v, \bar{v}) - \Phi(z, \bar{z}). \tag{2.25}$$

Согласно общему предположению, функция $\Phi(z, \bar{v})$ определена в окрестности диагонали многообразия $\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$. Тем самым функция φ так же определена в окрестности диагонали $\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$. Предположим дополнительно, что функция φ допускает аналитическое продолжение на все многообразие $\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$ (как мы увидим в своем месте, это возможно без того, чтобы функция $\Phi(z, \bar{v})$ обладала тем же свойством).

Назовем точку $z\in\mathfrak{M}$ правильной, если, какова бы ни была окрестность U точки z, существует такое $\alpha(U)>0$, что $\varphi(z, \bar{z} \mid v, \bar{v}) \geqslant -\alpha(U)$ при $v\notin U$.

Следующая лемма служит основой доказательства принципа соответствия.

ЛЕММА 2.1. *Пусть z_0 — правильная точка, $f(v, \bar{v})$ — трижды непрерывно дифференцируемая функция и интеграл*

$$\mathcal{J}(h) = h^{-n} \int f(v, \bar{v})\, e^{\frac{1}{h}\varphi(v, \bar{v} \mid z_0, \bar{z}_0)}\, d\mu(v, \bar{v}) \tag{2.26}$$

существует в абсолютном смысле при $h=h_0$. Тогда $\mathcal{J}(h)$ существует при всех $0<h\leqslant h_0$ и при $h\to 0$

$$\mathcal{J}(h) = f(z_0, \bar{z}_0) + h(\Delta f(z_0, \bar{z}_0) + \sigma f(z_0, \bar{z}_0)) + o(h), \tag{2.27}$$

где Δ — оператор Лапласа — Бельтрами на $\mathfrak{M}$,

$$\sigma = \sigma(z_0, \bar{z}_0) = \frac{3}{2}\Delta \ln g(z_0, \bar{z}_0), \qquad g(z, \bar{z}) = \det \| g_{i\bar{k}}(z, \bar{z}) \|.$$

Доказательство. Заметим, что $\varphi(v, \bar{v} \mid z_0, \bar{z}_0) \leqslant 0$ и что

$$e^{\frac{1}{h}\varphi} = e^{\frac{1}{h_0}\varphi} \cdot e^{\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_0}\right)\varphi}. \tag{2.28}$$

* Отметим в связи с этим, что если $\mathfrak{M}$ — неприводимое симметрическое пространство, то инвариантная метрика ds^2 определена на нем с точностью до постоянного множителя.

Следовательно, $e^{\frac{1}{h}\varphi} \leqslant e^{\frac{1}{h_0}\varphi}$ при $0 < h \leqslant h_0$ и интеграл (2.26) существует при $0 < h \leqslant h_0$. Пусть теперь U — такая окрестность z_0, что при $v_1, v_2 \in U$ функция $\Phi(v_1, \bar{v}_2)$ аналитична по v_1 и антианалитична по v_2. Разобьем интеграл $\mathcal{J}(h)$ в сумму $\mathcal{J}(h) = \mathcal{J}_1(h) + \mathcal{J}_2(h)$, где $\mathcal{J}_1(h)$ берется по U, $\mathcal{J}_2(h)$ — по $\mathfrak{M} \setminus U$. Из (2.28) получаем, что при $0 < h \leqslant h_0$

$$e^{\frac{1}{h}\varphi} \leqslant e^{\frac{1}{h}\varphi} e^{-\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_0}\right)\delta}.$$

Таким образом, $\mathcal{J}_2(h) \leqslant \mathcal{J}_2(h_0) e^{-\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_0}\right)\delta}$, следовательно, $\mathcal{J}_2(h) \to 0$ при $h \to 0$ быстрее любой степени h.

Перейдем к интегралу $\mathcal{J}_1(h)$. Введем в U координаты t^i так, чтобы координатами z_0 служили $t^i = 0$. Разложим φ в ряд Тэйлора. Это удобно сделать с помощью операторов $L_t = \Sigma t^i \frac{\partial}{\partial \tau^i}$, $\bar{L}_t = \Sigma \bar{t}^i \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}^i}$:

$$\varphi(v, \bar{v} \mid z_0, \bar{z}_0) = \psi(t, \bar{t}) = \Phi(0, \bar{t}) + \Phi(t, 0) - \Phi(0, 0) - \Phi(t, \bar{t}) =$$

$$= -\left[L_t\bar{L}_t + \frac{1}{2}(L_t^2\bar{L}_t + L_t\bar{L}^2) + \frac{1}{4}L_t^2\bar{L}_t^2 + \frac{1}{6}(L_t^3\bar{L}_t + L_t\bar{L}_t^3)\right]\Phi(\tau, \bar{\tau})|_{\tau=\bar{\tau}=0} + R,$$

где $R = \sum\limits_{|p|+|q|=5} t^p t^{-q} R_{p,q}(t, \bar{t})$, $R_{p,q}(t, \bar{t})$ — аналитическая функция в $U \times U$, p, q — мультииндексы. Воспользуемся теперь леммой Д.1 Дополнения. Согласно этой лемме в координатах t^i при $h \to 0$

$$\mathcal{J}_1(h) = f(0, 0) + h(\Delta f(0, 0) + \sigma f(0, 0)) + o(h),$$

где $\sigma = \frac{3}{2}\Delta \ln g$, Δ — оператор Лапласа—Бельтрами и $g = \det \|g_{i\bar{k}}\|$. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть интеграл* (2.26) *существует при* $h = h_0$ *и* $f(v, \bar{v}) \equiv 1$. *Определим при* $0 < h \leqslant h_0$ *функцию* $\tilde{c}(h) = \tilde{c}(h \mid z, \bar{z})$ *равенством*

$$\tilde{c}^{-1}(h) = \int e^{\frac{1}{h}\varphi(z, \bar{z} \mid v, \bar{v})} d\mu(v, \bar{v}). \tag{2.29}$$

Тогда $\tilde{c}(h) = \frac{\tilde{c}_1(h)}{h^n}$, *где* $\tilde{c}_1(h)$ — *непрерывная при* $0 \leqslant h \leqslant h_0$ *функция, дифференцируемая при* $h = 0$, *причем*

$$\tilde{c}_1(0) = 1, \quad \tilde{c}_1'(0) = -\sigma = -\frac{3}{2}\ln g(z, \bar{z}). \tag{2.30}$$

Доказательство очевидно.

Дадим следующее важное определение. Точка $z_0 \in \mathfrak{M}$ называется *отмеченной*, если $\Phi(z_0, \bar{v}) = 0$, когда v пробегает некоторую окрестность U точки z_0.

Заметим, что потенциал Φ определен системой (2.13) не однозначно, но с точностью до слагаемого вида $\psi(z) + \overline{\psi(z)}$, где $\psi(z)$ — произвольная

аналитическая функция. Подбирая функцию $\psi(z)$ подходящим образом, можно сделать отмеченной любую точку $\mathfrak{M}$. Обратно, отметив некоторую точку, мы фиксируем потенциал с точностью до постоянного слагаемого.

Сформулируем предположения, при которых строится квантование на келеровом многообразии.

Гипотеза А. *В R^1_+ существует множество E, имеющее 0 своей предельной точкой, такое, что при $h \in E$*

$$L_h(z, \bar{z}) = \lambda e^{\frac{1}{h}\Phi(z, \bar{z})}. \tag{2.31}$$

Гипотеза В. *Существует $h_0 \in E$ такое, что при $0 < h \leqslant h_0$, $h \in E$, функции $f(z) \in F_h$ разделяют точки $\mathfrak{M}$ (т. е. для любых $z_1, z_2 \in \mathfrak{M}$ найдется $f(z) \in F_h$ такая, что $f(z_1) \neq f(z_2)$).*

Гипотеза С. *Пусть z_n — последовательность точек $\mathfrak{M}$, обладающая свойством: при h_0, определяемом гипотезой* В, *для любого $f \in F_h$ существует конечный предел $\lim\limits_{h\to\infty} f(z_n)$. Тогда последовательность z_n имеет предел $z_0 \in \mathfrak{M}$.*

Гипотеза D. *На $\mathfrak{M}$ существует отмеченная точка.*

Выведем из этих гипотез ряд следствий. Обозначим через F_{h, z_0} пространство F_h, построенное с помощью потенциала $\Phi_{z_0}(z, \bar{z})$ с отмеченной точкой z_0, нормированного условием $\Phi_{z_0}(z_0, \bar{z}_0) = 0$.

ЛЕММА 2.2. *Пусть для потенциала Φ выполнено условие* А *и, кроме того, $L_h(z, \bar{v}) \neq 0$ ни при каких $z, v \in \mathfrak{M}$, $h \in E$. Тогда:*

1) *для любой точки $z_0 \in \mathfrak{M}$ существует потенциал $\Phi_{z_0}(z, \bar{z})$, задающий ту же метрику, что $\Phi(z, \bar{z})$, и имеющий z_0 отмеченной точкой;*

2) *пространства F_h и F_{h, z_0} изоморфны, причем изоморфизм $U: F_{h, z_0} \to F_h$ задается формулой:*

$$(Uf)(z) = \frac{f(z) L_h(z, \bar{z}_0)}{\sqrt{L_h(z_0, \bar{z}_0)}}.$$

Доказательство. Рассмотрим разрез по отрицательной части вещественной оси и выделим однозначную ветвь логарифма условием $\ln 1 = 0$. Положим

$$\Phi_{z_0}(z, \bar{z}) = \Phi(z, \bar{z}) - h \ln(L_h(z, \bar{z}_0) L_h(z_0, \bar{z})) + h \ln L_h(z_0, \bar{z}_0).$$

Согласно свойству А, в достаточно малой окрестности z_0

$$\ln L_h(z, \bar{z}_0) = \frac{1}{h}\Phi(z, \bar{z}_0) + \ln\lambda.$$

Поэтому

$$\Phi_{z_0}(z, \bar{z}) = \Phi(z, \bar{z}) - \Phi(z, \bar{z}_0) - \Phi(z_0, z) + \Phi(z_0, \bar{z}_0)$$

— потенциал той же метрики, что $\Phi(z, \bar{z})$. Очевидно, что для потенциала $\Phi_{z_0}(z, \bar{z})$ точка z_0 является отмеченной.

Скалярное произведение в F_{h, z_0} задается формулой

$$(f, f) = c(h) \int |f|^2 \frac{L_h(z_0, \bar{z}) L_h(z, \bar{z}_0)}{L_h(z_0, \bar{z}_0) L_h(z, \bar{z})} d\mu(z, \bar{z}).$$

Полагая

$$g(z) = (Uf)(z) = \frac{f(z) L_h(z, \bar{z}_0)}{\sqrt{L_h(z_0, \bar{z}_0)}},$$

получаем изоморфизм

$$U: F_{h,z_0} \to F_h.$$

Замечание. $L_h(z, \bar{v}) \neq 0$ ни при каких $z, v \in \mathfrak{M}$ в случае, если множество E содержит целый отрезок. В самом деле, пусть $\Delta \subset E$ — отрезок, $\alpha \in E$. Из гипотезы А следует, что $L_h(z, \bar{v}) = [L_\alpha(z, \bar{v})]^{\alpha/h}$. Из аналитичности по z и однозначности $L_h(z, \bar{v})$ при $h \in \Delta$ вытекает, что $L_h(z, \bar{v}) \neq 0$.

ЛЕММА 2.3. *Пусть выполнена гипотеза* А. *Тогда*:

1) *при* $h \in E$ *функция* $c(h)$, *нормирующая скалярное произведение* (2.14), *может быть определена, и притом единственным образом, из условия*

$$L_h(z, \bar{z}) = e^{\frac{1}{h}\Phi(z, \bar{z})}; \tag{2.32}$$

2) *это значение* $c(h)$ *дается формулой*

$$c^{-1}(h) = \int \frac{L_h(z, \bar{v}) L_h(v, \bar{z})}{L_h(z, \bar{z}) L_h(v, \bar{v})} d\mu(v, \bar{v}) \tag{2.33}$$

(*интеграл в правой части* (2.33) *не зависит от* $z, \bar{z}$);

3) *функция* $\varphi(z, \bar{z} | v, \bar{v})$ *допускает однозначное аналитическое в вещественном смысле продолжение с окрестности диагонали в* $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ *на все* $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$;

4) *если, кроме гипотезы* А, *справедлива также гипотеза* D, *то формула* (2.33) *может быть заменена более простой формулой*:

$$c^{-1}(h) = \int \frac{d\mu(v, \bar{v})}{L_h(v, \bar{v})}. \tag{2.33'}$$

Доказательство. Обозначим временно через $L_h^{(1)}(z, \bar{z})$ функцию L_h, отвечающую $c(h) \equiv 1$, и через $L_h^{(c)}(z, \bar{z})$ — функцию L_h, отвечающую произвольной функции $c(h)$. Очевидно, что $L_h^{(c)} = c^{-1}(h) L_h^{(1)}$. Отсюда следует, что условие (2.32) определяет функцию $c(h)$ однозначно.

Применим теперь формулу (2.23) в случае, когда операторы $\hat{A}_1$ и $\hat{A}_2$ единичные. В этом случае $A_1 \equiv A_2 \equiv A_1 * A_2 \equiv 1$. Используя (2.32), получаем (2.33). Формула (2.33′) получается из (2.33) при $z = z_0$, где z_0 — отмеченная точка.

Пусть $h_0 \in E$. Согласно условию А в некоторой окрестности диагонали $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ справедливо равенство

$$e^{\frac{1}{h}\varphi(z, \bar{z} | v, \bar{v})} = \left[\frac{L_{h_0}(z, \bar{v}) L_{h_0}(v, \bar{z})}{L_{h_0}(z, \bar{z}) L_{h_0}(v, \bar{v})}\right]^{\frac{h_0}{h}}. \tag{2.34}$$

Выражение в скобках в правой части определено при всех z, $v \in \mathfrak{M}$ и положительно. Следовательно, правая часть (2.34) является аналитической в вещественном смысле функцией на $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$. Логарифмируя и умножая на h, получаем нужное аналитическое продолжение для φ. Лемма доказана.

Следствие. *При* $h \in E$

$$\Phi_{\bar{v}}(z) = e^{\frac{1}{h}\Phi(z,\bar{v})}. \tag{2.35}$$

Доказательство. Согласно определению (2.18), $\Phi_{\bar{v}}(z)$ является однозначной аналитической функцией на $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$. Согласно (2.32), левая и правая части (2.35) совпадают при $z = v$.

Подчеркнем, что, хотя $\Phi_{\bar{v}}(z)$ является однозначной аналитической функцией на всем многообразии $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$, из (2.35) не следует, что $\Phi(z, \bar{v})$ обладает тем же свойством.

ЛЕММА 2.4. *Пусть выполнены условия* A, B, C, D. *Тогда* 1) *каждая точка многообразия* $\mathfrak{M}$ *является правильной*, 2) *интеграл* (2.26) *существует при* $f(v, \bar{v}) \equiv 1$ *и* $h \in E$.

Доказательство. Из (2.34) следует, что при $h = h_0 \in E$, $f \equiv 1$ интеграл (2.26) с точностью до множителя совпадает с правой частью (2.23), где $A_1 \equiv A_2 \equiv 1$, т. е. когда операторы $\hat{A}_1$ и $\hat{A}_2$ единичные. Отсюда следует существование интеграла (2.26) при $f \equiv 1$, $h \in E$.

Перейдем к первому утверждению. Вспомним, что $\Phi_{\bar{v}}(z) = L_h(z, \bar{v}) \in F_h$ при любом $\bar{v}$ и любом h. В частности, это верно при $v = v_0$ — отмеченной точке и $h \in E$. В силу гипотезы A, в этом случае

$$\Phi_{\bar{v}}(z) = e^{\frac{1}{h}\Phi(z,\bar{v})} \equiv 1$$

(см. (2.35)). Таким образом, $f_0(z) \equiv 1 \in F_h$ при $h \in E$.

Фиксируем точку z_0 и окрестность U этой точки. Заметим, что из неравенства (2.17) и из (2.34) следует, что $e^{\frac{1}{h}\varphi} \leqslant 1$ при $z = z_0$ и $v \notin U$. Таким образом, если точка z_0 не является правильной, то либо существует такая точка $v_0 \notin U$, что

$$\frac{L_{h_0}(z_0, \bar{v}_0)\, L_{h_0}(v_0, \bar{z}_0)}{L_{h_0}(z_0, \bar{z}_0)\, L_{h_0}(v_0, \bar{v}_0)} = 1, \tag{2.36}$$

либо существует такая последовательность точек $v_n \notin U$, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_{h_0}(z_0, \bar{v}_n)\, L_{h_0}(v_n, \bar{z}_0)}{L_{h_0}(z_0, \bar{z}_0)\, L_{h_0}(v_n, \bar{v}_n)} = 1. \tag{2.37}$$

Рассмотрим сначала первую возможность. Покажем, что в случае равенства (2.36) $f(z_0) = f(v_0)$ для любой функции $f \in F_h$. Пусть $f_0(z) \equiv 1$, $f(z) \in F_h$. Положим $f_1(z) = \|f_0\|^{-1/2} f_0$, $f_2(z) = \alpha f(z) + \beta$, где α и β выбраны из условий $(f_1, f_2) = 0$, $(f_2, f_2) = 1$. Дополним пару функций f_1, f_2 до ортонормированного базиса f_k в F_h. Базис f_k используем в формуле (2.16).

Из (2.36), согласно свойствам неравенства Коши — Буняковского, вытекает, что $f_k(z_0)=\lambda f_k(v_0)$. Применяя это соотношение при $k=1$ и $k=2$, находим, что $\lambda=1$ и что $f(z_0)=f(v_0)$. Согласно гипотезе B отсюда следует равенство $v_0=z_0$, противоречащее условию $v_0\notin U$.

Перейдем ко второй возможности. Пусть H — произвольное гильбертово пространство, $\xi, \eta_n \in H$, причем $\frac{|(\xi, \eta_n)|}{\|\xi\|\|\eta_n\|}\to 1$. Положим $e_n=\frac{\eta_n}{\|\eta_n\|}$ и выберем слабо сходящуюся подпоследовательность e_{n_k}. Пусть $e=\lim e_{n_k}$. Тогда $\left(\frac{\xi}{\|\xi\|}, e\right)=1$, откуда следует, что $e=\lambda\frac{\xi}{\|\xi\|}$, $|\lambda|=1$. Так как $\|e\|=1$, то последовательность e_{n_k} сходится не только слабо, но и сильно. Рассмотрим в качестве H пространство l_2 и положим

$$\xi=\{f_1(z_0), f_2(z_0), \ldots\}, \quad \eta_n=\{f_1(v_n), f_2(v_n), \ldots\},$$

где f_k — базис в F_h, содержащий функцию $f_1(z)=\text{const}$. Так как $f_1(z_0)=$ $=f_1(v_n)=\text{const}\neq 0$, то из условия $e=\frac{\lambda}{\|\xi\|}\xi$ вытекает, что $\overline{\lim}\|\eta_{n_k}\|<\infty$. Пусть n_s — подпоследовательность номеров n_k, по которой существует $\lim\|\eta_{n_s}\|$. Очевидно, что при $s\to\infty$ существуют конечные пределы $f_k=\lim f_k(v_{n_s})$ и в сильном смысле $\lim\eta_{n_s}=\eta=(f_1, f_2, \ldots)$. Равенство (2.37) означает, что $\frac{|(\xi, \eta)|}{\|\xi\|\|\eta\|}=1$. Таким образом, $\eta=\lambda\xi$, т. е. $f_k=\lambda f_k(z_0)$. Полагая $k=1$, получаем, что $\lambda=1$. Пусть $f(z)=\sum c_k f_k(z)$, тогда

$$|f(v_{n_k})-f(z_0)|^2\leqslant\sum|c_k|^2\sum|f_k(v_{n_k})-f_k(z_0)|^2=$$

$$=\|f\|^2\|\eta-\eta_{n_k}\|^2\to 0 \quad \text{при} \quad k\to\infty.$$

Согласно гипотезе C отсюда вытекает существование предела $v_0=\lim v_{n_k}\in\mathfrak{M}$, а согласно гипотезе B $v_0=z_0$, что противоречит условию $v_n\notin U$. Лемма доказана.

Лемма 2.4 показывает, что из гипотез A—D следуют условия леммы 2.1.

4. Принцип соответствия. Рассмотрим множество функций $f(h|z, \bar z)$, $h>0$, непрерывных по совокупности переменных и обладающих тем свойством, что $f(h|z, \bar z)\in A_h$ при фиксированном h. Пусть E — множество, оговоренное в гипотезе A. Обозначим через $\mathfrak{A}$ алгебру, состоящую из значений функций $f(h|z, \bar z)$ при $h\in E$. Обозначим через $\mathfrak{B}$ множество функций, представимых в виде

$$f(h|z, \bar z)=f(0|z, \bar z)+hf_1(z, \bar z)+h^2f_2(h|z, \bar z),$$

где $f(0|z, \bar z)$, $f_1(z, \bar z)$ и $f_2(h|z, \bar z)$ — функции, допускающие аналитическое продолжение на $\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$. Относительно этих аналитических продолжений предположим, что существует такое h_0, что при $h<h_0$

$$c(h)\int(|f(0|z,\bar v)|^2+|f_1(z,\bar v)|^2+|f_2(h|z,\bar v)|^2e^{-\frac{1}{h}\Phi(z,\bar z)}d\mu(z,\bar z)\leqslant r,$$

где $r=r(v)$ не зависит от h.

Покажем, что для алгебры $\mathfrak{A}$ и множества $\tilde{\mathfrak{A}}=\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}$ выполняется принцип соответствия в слабой форме. Тем самым будет установлено, что алгебра $\mathfrak{A}$ является специальным квантованием.

ТЕОРЕМА 2.2. *Пусть выполнены гипотезы* A, B, C, D и $f, g\in\mathfrak{B}$. *Тогда при* $h\to 0$, $h\in E$

$$(f*g)(h|z,\bar z)=f(0|z,\bar z)g(0|z,\bar z)+o(1), \tag{2.38}$$

$$\frac{1}{h}(f*g-g*f)(h|z,\bar z)=\frac{1}{i}[f,g](0|z,\bar z)+o(1). \tag{2.39}$$

Доказательство. Положим $u(h|v,\bar v)=f(h|z,\bar v)g(h|v,\bar z)$ и запишем левую часть (2.38) в виде

$$\psi(h|z,\bar z)=c(h)\int u(h|v,\bar v)e^{\frac{1}{h}\varphi(z,\bar z|v,\bar v)}d\mu(v,\bar v), \tag{2.40}$$

где φ определяется формулой (2.25) и $c(h)=\tilde c(h)$ — формулой (2.29).

Согласно предположениям, сделанным относительно f и g, функция u представима в виде

$$u(h|v,\bar v)=u(0|v,\bar v)+hu_1(h|v,\bar v),$$

где

$$u(0|v,\bar v)=f(0|z,\bar v)g(0|v,\bar z),$$
$$u_1(h|v,\bar v)=f(0|z,\bar v)g_1(v,\bar z)+f_1(z,\bar v)g(0|v,\bar z)+hu_2(h\,v,\bar v),$$
$$u_2(h|v,\bar v)=f(0|z,\bar v)g_2(h|v,\bar z)+f_2(h|z,\bar v)g(0|v,\bar z)+f_1(z,\bar v)g_1(v,\bar z).$$

Из предположений относительно f и g следует, что при $h\leqslant h_0$

$$c(h)\int|u_2|e^{\frac{1}{h}\varphi}d\mu(v,\bar v)\leqslant a,$$

где $a=a(z,\bar z)$ не зависит от h.

Напомним теперь, что согласно (2.29), (2.30) при $h\in E$ $c(h)=\tilde c(h)=\dfrac{1-hb(h)}{h^n}$, причем $b(0)=\sigma$. Применим лемму 2.1 к интегралу (2.40) (напомним, что согласно лемме 2.4 применимость леммы 2.1 следует из гипотез A — D). В результате очевидных вычислений и оценок находим:

$$\psi(h|z,\bar z)=f(0|z,\bar z)g(0|z,\bar z)+h(\Delta_{v\bar v}f(0|z,\bar v)g(0|v,\bar z)|_{\substack{v=z\\ \bar v=\bar z}}+$$
$$+f(0|z,\bar z)g_1(z,\bar z)+f_1(z,\bar z)g(0|z,\bar z))+o(h). \tag{2.41}$$

Из (2.41) сразу следует (2.38). Меняя ролями f и g, получаем дополнительно, что

$$\frac{1}{h}(f*g-g*f)(h\,|\,z,\bar z)=$$
$$=\Delta_{v,\bar v}(f(0\,|\,z,\bar v)\,g(0\,|\,v,\bar z)-g(0\,|\,z,\bar v)\,f(0)\,|\,v,\bar z))_{\substack{v=z\\ \bar v=\bar z}}+o(1). \qquad (2.42)$$

Обратим теперь внимание на то, что оператор Лапласа — Бельтрами на келеровом многообразии имеет в локальных координатах вид (в применении к функциям)

$$\Delta=\sum g^{\bar ik}\frac{\partial^2}{\partial\bar z^i\partial z^k} \qquad (2.43)$$

(см. лемму 3 Дополнения). Сравнивая (2.42) и (2.43) с выражением для скобки Пуассона (2.12), находим, что первое слагаемое в правой части (2.42) равно $\frac{1}{i}[f,g]$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2.3. *Пусть выполнена гипотеза* B. *Тогда, каковы бы ни были точки* z_1, $z_2\in\mathfrak{M}$, *существует функция* $f(h|z,\bar z)\in\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}$ *такая, что* $f(0|z_1,\bar z_1)\neq f(0|z_2,\bar z_2)$.

Доказательство. Пусть z_1, $z_2\in\mathfrak{M}$. Согласно гипотезе B при некотором $\alpha\in E$ существует такая функция $\psi_1(z)\in F_\alpha$, что $\psi_1(z_1)\neq\psi_1(z_2)$. Покажем, что в F_α существует также функция $\psi(z)$, обладающая свойством $|\psi(z_1)|\neq|\psi(z_2)|$. В самом деле, если этим свойством не обладает $\psi_1(z)$, то при подходящем ε, $|\varepsilon|=1$, им заведомо обладает функция

$$\psi_2(z)=f_0(z)+\varepsilon\frac{\psi_1(z)}{|\psi_1(z_1)|},$$

где $f_0\equiv 1\in F_\alpha$.

Рассмотрим функцию $\psi_2(z)\overline{\psi_2(z)}\,e^{-\frac{1}{\alpha}\Phi(z,\bar z)}$. В случае, если она не разделяет точек z_1 и z_2, заменив $\psi_2(z)$ на $\psi(z)=\psi_2(z)+\mu f_0(z)$ при подходящем μ, мы добьемся того, что функция $\psi(z)\overline{\psi(z)}\,e^{-\frac{1}{\alpha}\Phi(z,\bar z)}$ будет разделять точки z_1 и z_2.

Рассмотрим дважды непрерывно дифференцируемую функцию $\varepsilon(h)$ со свойствами: $\varepsilon(h)\geqslant 0$, $\varepsilon(0)=1$, $\varepsilon(h)\equiv 0$ при $h>\alpha$. Покажем, что функция

$$f(h\,|\,z,\bar z)=\varepsilon(h)\,\psi(z)\,\overline{\psi(z)}\,e^{-\frac{1}{\alpha}\Phi(z,\bar z)} \qquad (2.44)$$

является искомой. Пусть $\hat A$ — оператор в F_h с ковариантным символом (2.44), $h<\alpha$, $h\in E$. Оценим $\|A\|$:

$$(\hat Af)(z)=\varepsilon(h)\,\psi(z)\,c(h)\int\overline{\psi(v)}\,f(v)\,e^{\left(\frac{1}{h}-\frac{1}{\alpha}\right)\Phi(z,\bar v)-\frac{1}{h}\Phi(v,\bar v)}\,d\mu(v,\bar v). \qquad (2.45)$$

Интеграл в правой части обозначим через $\mathcal{J}(z)$ и применим к нему неравенство Коши — Буняковского

$$|\mathcal{J}(z)|^2\leqslant c^{-1}(h)\,\|f\|^2\int|\psi(v)|^2 e^{\left(\frac{1}{h}-\frac{1}{\alpha}\right)(\Phi(z,\bar v)+\Phi(v,\bar z))-\frac{1}{h}\Phi(v,\bar v)}\,d\mu(v,\bar v).$$

Воспользовавшись неравенством $\Phi(z, \bar{v})+\Phi(v, \bar{z})-\Phi(v, \bar{v})-\Phi(z, \bar{z})\leqslant$ $\leqslant 0$, получаем дальнейшую оценку:

$$|\mathcal{J}(z)|^2 \leqslant c^{-1}(h)\|f\|^2 e^{\left(\frac{1}{h}-\frac{1}{\alpha}\right)\Phi(z, \bar{z})} \int |\psi(v)|^2 e^{-\frac{1}{\alpha}\Phi(v, \bar{v})} d\mu(v, \bar{v}) =$$

$$= c^{-1}(h)\, c^{-1}(\alpha)\|f\|^2\|\psi\|^2 e^{\left(\frac{1}{h}-\frac{1}{\alpha}\right)\Phi(z, \bar{z})}.$$

Возвращаясь к (2.45), получаем:

$$\|\hat{A}f\|^2 \leqslant \varepsilon^2(h)\, c(h)\, c^{-1}(\alpha)\, \|f\|^2\|\psi\|^2 \int |\psi(z)|^2 e^{\left(\frac{1}{h}-\frac{1}{\alpha}\right)\Phi(z, \bar{z})-\frac{1}{h}\Phi(z, \bar{z})} d\mu(z, \bar{z}) =$$

$$= \varepsilon^2(h)\, c(h)\, c^{-2}(\alpha)\|\psi\|^4\|f\|^2.$$

Отсюда $\|A\| = \varepsilon(h)\, c^{1/2}(h)\, c^{-1}(\alpha)\|\psi\|^2$, следовательно, $f(h|z, \bar{z})\in\mathfrak{A}$.

Покажем теперь, что $f\in\mathfrak{B}$. Положим

$$f_1(z) = \psi(z)^{-\frac{1}{\alpha}\Phi(z, \bar{v})}.$$

Достаточно проверить, что $f_1\in F_h$ при $h<\alpha$ и фиксированном v и что $\|f_1\|_h\leqslant r$, где $r=r(v)$ не зависит от h. Обозначим через $\chi(z, \bar{z})$ функцию

$$\chi(z, \bar{z}) = |\psi(z)|^2 e^{-\frac{1}{\alpha}(\Phi(z, \bar{v})+\Phi(v, \bar{z}))}$$

и через z_0 — отмеченную точку. В таком случае

$$\|f_1\|_h^2 = c(h)\int \chi(z, \bar{z})\, e^{\frac{1}{h}\varphi(z, \bar{z}|z_0, \bar{z}_0)} d\mu(z, \bar{z}),$$

где

$$\varphi(z, \bar{z}\,|\,z_0, \bar{z}_0) = \Phi(z, \bar{z}_0) + \Phi(z_0, \bar{z}) - \Phi(z_0, \bar{z}_0) - \Phi(z, \bar{z}) = -\Phi(z, \bar{z})$$

ввиду того, что z_0 — отмеченная точка. Мы находимся в условиях применимости леммы (2.1). Согласно этой лемме функция $\|f_1\|_h^2$ имеет предел при $h\to 0$:

$$\lim_{h\to 0}\|f_1\|_h^2 = \chi(z_0, \bar{z}_0) < \infty.$$

Отсюда следует нужная оценка. Теорема доказана.

Теоремы 2.2 и 2.3 означают выполнение принципа соответствия в слабой форме.

5. Свойства оператора T_h. Оператор T в общем случае задается формулой (2.8). В нашем случае мера σ и векторы φ_α зависят от h, в силу этого от h зависит также и оператор T, $T=T_h$. Учитывая гипотезу А, получаем, что при $h\in E$ оператор T_h равен

$$(T_h f)(z, \bar{z}) = \int f(v, \bar{v})\, G_h(z, \bar{z}\,|\,v, \bar{v})\, d\mu(v, \bar{v}), \tag{2.46}$$

где

$$G_h(z, \bar{z}\,|\,v, \bar{v}) = c(h)\,\frac{L_h(z, \bar{v})\, L_h(v, \bar{z})}{L_h(z, \bar{z})\, L_h(v, \bar{v})}.$$

Мы будем рассматривать оператор T_h в L^p на $\mathfrak{M}$. Норму T_h в L^p обозначим через $\|T_h\|_p$.

ТЕОРЕМА 2.4. 1) $\|T_h\|_p \leqslant 1$. 2) *При* $h \to 0$ *в слабом смысле* $\lim T_h = I$, *где* I — *единичный оператор в* L^p.

Доказательство. Ядро $G_h(z, \bar{z} | v, \bar{v})$ обладает свойствами: 1) $G_h \geqslant 0$, 2) $G_h(z, \bar{z} | v, \bar{v}) = G_h(v, \bar{v} | z, \bar{z})$, 3) $\int G_h(z, \bar{z} | v, \bar{v}) d\mu(v, \bar{v}) = 1$. (Свойства 1 и 2) очевидны, свойство 3) следует из (2.23) при $A_1 = A_2 \equiv 1$). Поэтому первое утверждение теоремы вытекает из следующего общего факта.

Пусть M — *множество с мерой* dx, A — *оператор в* $L^p(M)$, $p \geqslant 1$, *определяемый формулой*

$$(Af)(x) = \int K(x, y) f(y)\, dy,$$

причем $K(x, y) \geqslant 0$ *при почти всех* $x, y \in M$ *и* $\int K(x, y) dy = \int K(x, y) dx = 1$. *Тогда* $\|A\|_p \leqslant 1$.

В самом деле, в силу теоремы Рисса ([10]), $\ln \|A\|_p$ является выпуклой функцией p^{-1} при $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Поэтому достаточно проверить оценку нормы в пространствах $L^1(M)$ и $L^\infty(M)$ ($\|f\|_\infty = \sup |f(x)|$). Эти оценки очевидны:

$$\|Af\|_1 \leqslant \int K(x, y) |f(y)|\, dy\, dx = \int |f(y)|\, dy = \|f\|_1,$$

$$\|Af\|_\infty \leqslant \sup_x \int K(x, y) |f(y)|\, dy \leqslant \sup_x \sup_s |f(s)| \int K(x, y)\, dy = \sup_s |f(s)| = \|f\|_\infty.$$

Перейдем ко второму утверждению. Пусть вначале f — непрерывно дифференцируемая функция, равная нулю вне некоторой координатной окрестности U. Учитывая гипотезу A, запишем $T_h f$ в виде

$$(T_h f)(z, \bar{z}) = c(h) \int f(v, \bar{v})\, e^{\frac{1}{h} \varphi(v, \bar{v} | z, \bar{z})}\, d\mu(v, \bar{v}).$$

Согласно лемме 2.3 из гипотез A, B, C, D следует, что каждая точка $\mathfrak{M}$ является правильной и, значит, $\varphi \leqslant 0$, причем неравенство строгое, если $z \neq v$. Если же $z = v$, то, как следует непосредственно из (2.25), $\varphi = 0$. Следовательно, при фиксированном z функция φ имеет строгий максимум по v при $v = z$. Пусть $U_1 \supset U$ — более широкая координатная окрестность. Фиксируем $z \in U_1$ и введем в U_1 координаты t^i так, чтобы координатами z служили $t^i = 0$. Согласно предыдущему, в этих координатах

$$\varphi(z, \bar{z} | v, \bar{v}) = \psi(z, \bar{z} | t, \bar{t}) = \sum \varphi_{i\bar{k}} t^i \bar{t}^k + R(t, \bar{t}),$$

$$R(t, \bar{t}) = \sum_{|p| + |q| = 3} t^p \bar{t}^q R_{p,q}(t, \bar{t}),$$

где $R_{p,q}(t, \bar{t})$ — непрерывная функция, p, q — мультииндексы. Мы находимся в условиях применимости леммы 3 Дополнения. Согласно этой лемме при $z \in U$

$$|(T_h f)(z, \bar z) - f(z, \bar z)| \leqslant a\sqrt{h} \max_{t \in U} \left(\left| \frac{\partial f}{\partial t^i} \right|, \left| \frac{\partial f}{\partial \bar t^i} \right| \right) + f(z, \bar z) \cdot o(1). \quad (2.47)$$

В случае, если $z \notin U_1$, из правильности точки z следует, что

$$(T_h f)(z, \bar z) \leqslant a e^{-\frac{b}{h}}, \quad b > 0. \quad (2.47')$$

Пусть $h_n \to 0$, T_{h_n} — слабо сходящаяся последовательность, $Q = \lim T_{h_n}$. Из (2.47), (2.47′) следует, что если f — непрерывно дифференцируемая функция и $f = 0$ вне какой-нибудь координатной окрестности, то $Qf = f$. В силу этого $Q = I$. Таким образом, Q не зависит от выбора последовательности h_n и, следовательно, существует слабый предел для T_h при $h \to 0$: $\lim T_h = I$.

6. Обсуждение гипотез. Основная гипотеза о существовании потенциала справедлива для локальных келеровых многообразий, т. е. для ограниченных областей в C^n с келеровой метрикой. Келеров потенциал заведомо не существует глобально на компактных многообразиях. Однако он может существовать на многообразии $\widetilde{\mathfrak{M}}$, получаемом из компактного многообразия $\mathfrak{M}$ удалением подмногообразия меньшей размерности.

Из совокупности гипотез A—D следует любопытное дифференциально-геометрическое свойство многообразия $\mathfrak{M}$.

ТЕОРЕМА 2.5. *Пусть* $g(z, \bar z) = \det \|g_{i\bar k}\|$. *При выполнении гипотез* A—D $g(z, \bar z)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\Delta \ln g = \text{const},$$

где Δ — *оператор Лапласа — Бельтрами на* $\mathfrak{M}$.

Доказательство. Согласно лемме 2.3, гипотезы A—D влекут за собой применимость леммы 2.1 к функции $f(z, \bar z) \equiv 1$. Тем самым справедлива формула (2.30). Заметим, что

$$\tilde c_1'(0) = \tilde c_1'(0 \mid z, \bar z) = \lim_{h \to 0} \frac{\tilde c_1(h) - \tilde c_1(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^n \tilde c(h \mid z, \bar z) - 1}{h}. \quad (2.48)$$

Пусть теперь в правой части (2.48) $h \to 0$ по последовательности $h_n \in E$, где E — множество, оговоренное в условии A. При $h \in E$ $\tilde c(h \mid z, \bar z) = c(h)$ не зависит от $(z, \bar z)$ (см. (2.33), (2.33′)). Следовательно, $\tilde c'_1(0)$ обладает тем же свойством, и, в силу (2.30),

$$\sigma(z, \bar z) = \frac{3}{2} \Delta \ln g(z, \bar z) = \text{const}.$$

Теорема доказана.

7. Размерность пространства F_h.

ТЕОРЕМА 2.6.

$$\dim F_h = c(h) \int L_h(z, \bar z)\, e^{-\frac{1}{h}\Phi(z, \bar z)}\, d\mu(z, \bar z). \quad (2.49)$$

Доказательство. (2.49) следует из (2.24) при $\hat{A}=I$ (см. также примечание к стр. 1127).

8. Возможное обобщение. Рассмотрим ассоциативную алгебру A, состоящую из функций на $\mathfrak{M}$, допускающих аналитическое продолжение на $\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$. По аналогии с (2.23) зададим закон умножения в A в виде

$$(A_1 * A_2)(z, \bar{z}) = \int A_1(z, \bar{v}) A_2(v, \bar{z}) G(v, \bar{v} \mid z, \bar{z}) d\mu(v, \bar{v}). \tag{2.50}$$

Можно показать, что если алгебра A содержит достаточно много элементов, то с необходимостью

$$G = \frac{F(z, \bar{v}) F(v, \bar{z})}{F(z, \bar{z}) \tilde{F}(v, \bar{v})}, \tag{2.51}$$

где $F(z, \bar{v})$ — аналитическая функция на $\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$ и $\tilde{F}(v, \bar{v})$ — некоторая функция на $\mathfrak{M}$.

Если алгебра A обладает свойством 8) квантования (касающегося следа) и множество $\tilde{A}$, на котором определен след, достаточно велико, то с необходимостью $\tilde{F}(v, \bar{v}) = cF(v, \bar{v})$.

Подробно останавливаться на этих утверждениях мы не будем. Отметим лишь, что в случае ограниченной, но неоднородной области в C^n естественно попытаться строить алгебру с помощью формул (2.50), (2.51), полагая $F(z, \bar{z}) = K^{1/h}(z, \bar{z})$, $\tilde{F} = c\tilde{F}$, где K — керн-функция Бергмана. Принцип соответствия в этом случае следовал бы из леммы 2.1. Однако даже в этой простейшей ситуации, если только не выполнена гипотеза А, не удается доказать, что существует алгебра с законом умножения (2.50), (2.51), содержащая хотя бы одну функцию $f(z, \bar{z})$, кроме $f(z, \bar{z}) \equiv 0$.

§ 3. Квантование в однородных келеровых многообразиях

1. Линейное представление локальной группы движений в пространстве F_h. Пусть $\mathfrak{M}$ — однородное келерово многообразие, G — группа движений $\mathfrak{M}$, $\Phi(z, \bar{z})$ — потенциал инвариантной относительно G метрики на $\mathfrak{M}$. Мы будем предполагать, что потенциал Φ существует глобально на множестве $\tilde{\mathfrak{M}}$, получаемом из $\mathfrak{M}$ удалением подмногообразия меньшей размерности $\mathfrak{M}'$. В соответствии с этим функции $f(z) \in F_h$ также определены на $\tilde{\mathfrak{M}}$. Из инвариантности метрики, порождаемой потенциалом Φ, следует, что

$$\Phi(gz, \overline{gz}) = \Phi(z, \bar{z}) + \psi(g, z) + \overline{\psi(g, z)}, \tag{3.1}$$

где $\psi(g, z)$ при фиксированном g является аналитической функцией z, определенной в $\tilde{\mathfrak{M}} \cap g\tilde{\mathfrak{M}}$. Соотношение (3.1) определяет функцию $\psi(g, z)$ с точностью до чисто мнимого слагаемого. Чтобы ликвидировать эту неопределенность, выделим точку z_0 и положим

$$\psi(g, z_0) = \frac{1}{2}(\Phi(gz_0, \overline{gz_0}) - \Phi(z_0, \bar{z}_0)).$$

Фиксируем открытое множество $\mathfrak{M}_0 \subset \widetilde{\mathfrak{M}}$. Рассмотрим симметричную окрестность U_G единицы e группы G, настолько малую, что $g\mathfrak{M}_0 \subset \widetilde{\mathfrak{M}} \cap g\widetilde{\mathfrak{M}}$ при $g \in U_G$. Из (3.1) следует, что при $g_1, g_2, g_1g_2 \in U_G$, $z \in \mathfrak{M}_0$

$$\operatorname{Re}\psi(g_1g_2, z) = \operatorname{Re}\psi(g_1, g_2z) + \operatorname{Re}\psi(g_2, z).$$

В свою очередь отсюда при тех же условиях вытекает соотношение

$$\psi(g_1g_2, z) = \psi(g_1, g_2z) + \psi(g_2, z) + i\alpha(g_1, g_2), \tag{3.2}$$

где $\alpha(g_1, g_2)$ — вещественная функция.

Покажем, что при любом $z \in \widetilde{\mathfrak{M}}$

$$\psi(e, z) = 0. \tag{3.3}$$

Соотношение (3.3) справедливо при $z = z_0$ в силу определения функции ψ. Полагая в (3.2) $g_1 = g_2 = e$, получаем, что $\psi(e, z) = -\alpha(e, e)$ не зависит от z. В частности, $0 = \psi(e, z_0) = -\alpha(e, e)$, откуда $\psi(e, z) = -\alpha(e, e) = 0$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть выполнена гипотеза* А, *и пусть* $g \in U_G$. *Тогда*:

1) *если* $f(z) \in F_h$, *то функция*

$$f(gz)\, e^{-\frac{1}{h}\psi(g,z)},$$

первоначально определенная на $\mathfrak{M}_0$, *допускает аналитическое продолжение на* $\widetilde{\mathfrak{M}}$ *и оказывается принадлежащей* F_h.

2) *Операторы в* F_h

$$(\hat{T}_g f)(z) = f(g^{-1}z)\, e^{-\frac{1}{h}\psi(g^{-1}, z)} \tag{3.4}$$

унитарны и определяют проективное представление локальной группы U_G.

3) *В случае, если определяемая соотношением* (3.2) *функция* α *равна*

$$\alpha(g_1, g_2) = \sigma(g_1g_2) - \sigma(g_1) - \sigma(g_2),$$

операторы $\hat{T}_g e^{i\sigma(g)}$ *образуют линейное представление локальной группы* U_G.

4) *Представление* $\hat{T}_g$ *неприводимо.*

5) *Пусть* $\hat{A}$ — *ограниченный оператор в* F_h, $A(z, \bar{z})$ — *его ковариантный символ*, $(\tau_g A)(z, \bar{z})$ — *ковариантный символ оператора* $\hat{T}_g \hat{A} \hat{T}_g^{-1}$. *Тогда*:

5_1) *Функция* $A(z, \bar{z})$, *первоначально определенная на* $\widetilde{\mathfrak{M}}$, *допускает аналитическое продолжение на все* $\mathfrak{M}$.

5_2) *При всех* $z \in \mathfrak{M}$

$$(\tau_g A)(z, \bar{z}) = A(g^{-1}z, \overline{g^{-1}z}). \tag{3.5}$$

Доказательство. Используя (3.1), получаем из (2.35) при $v, z \in \widetilde{\mathfrak{M}} \cap g\widetilde{\mathfrak{M}}$:

$$\Phi_{\overline{g^{-1}v}}(g^{-1}z) = \Phi_{\bar{v}}(z)\, e^{\frac{1}{h}\psi(g^{-1}, z) + \frac{1}{h}\overline{\psi(g^{-1}, v)}}. \tag{3.6}$$

Положим $w=g^{-1}v$ и воспользуемся тем, что, согласно (3.3), (3.2),

$$\psi(g^{-1}, gz) = -\psi(g, z) - i\alpha(g^{-1}, g).$$

В результате имеем:

$$\Phi_{\bar{w}}(g^{-1}z)\, e^{-\frac{1}{h}\psi(g^{-1},z)} = \Phi_{\overline{gw}}(z)\, e^{-\frac{1}{h}\overline{\psi(g,w)}+\frac{i}{h}\alpha(g^{-1},g)}. \tag{3.7}$$

Заметим, что правая часть (3.7) при фиксированном w допускает аналитическое продолжение по z на $\widetilde{\mathfrak{M}}$. Следовательно, тем же свойством обладает левая часть.

Таким образом, оператор (3.4) определен на функциях $\Phi_{\bar{v}}(z)$, $v \in \widetilde{\mathfrak{M}} \cap \cap\, g\widetilde{\mathfrak{M}}$. Оператор (3.4), определенный только на функциях этого вида, обозначим через $\hat{T}'_g$. Из (3.7) следует, что $\hat{T}'_g\Phi_{\bar{v}} \in F_h$. Используя (3.7) и (3.6), находим:

$$(\hat{T}'_g\Phi_{\bar{w}}, \hat{T}'_g\Phi_{\bar{v}}) = (\Phi_{\overline{gw}}, \Phi_{\overline{gv}})\, e^{-\frac{1}{h}[\overline{\psi(g,w)}+\psi(g,v)]} =$$

$$= \Phi_{\overline{gw}}(gv)\, e^{-\frac{1}{h}[\overline{\psi(g,w)}+\psi(g,v)]} = \Phi_{\bar{w}}(v) = (\Phi_{\bar{w}}, \Phi_{\bar{v}}). \tag{3.8}$$

Обозначим через F'_h множество конечных линейных комбинаций векторов $\Phi_{\bar{v}_k}(z)$, $v_k \in \widetilde{\mathfrak{M}} \cap g\widetilde{\mathfrak{M}}$. Из общей формулы (2.19) следует, что F'_h плотно в F_h.

Пусть $\hat{T}''_g$ — распространение оператора $\hat{T}'_g$ на F'_h по линейности и $\hat{T}'''_g$ — замыкание $\hat{T}''_g$. Очевидно, что оператор $\hat{T}''_g$ определяется формулой (3.4). Из (3.8) следует унитарность $\hat{T}''_g$. Пусть $f_n \in F'_h$ и $f = \lim f_n$ по норме F_h. Из (2.19) следует, что $f = \lim f_n$ также равномерно внутри любого открытого множества, содержащегося в $\widetilde{\mathfrak{M}}$ вместе с замыканием. Отсюда вытекает, что оператор $\hat{T}'''_g$ также определяется формулой (3.4), т. е. $\hat{T}'''_g = \hat{T}_g$. В частности, правая часть (3.4) является однозначной аналитической функцией и $(\hat{T}_g f, \hat{T}_g f) = (f, f)$. То обстоятельство, что операторы $\hat{T}_g$ определяют проективное представление локальной группы U_G, непосредственно следует из соотношения (3.2). Отсюда же следует третье утверждение теоремы.

Докажем пятое утверждение теоремы. Пользуясь тождеством (3.7), получаем при $v \in \mathfrak{M}_0$:

$$(\hat{T}_g\hat{A}\hat{T}_g^{-1}\Phi_{\bar{v}}, \Phi_{\bar{v}}) = (\hat{A}T_g^{-1}\Phi_{\bar{v}}, \hat{T}_g^{-1}\Phi_{\bar{v}}) = (\hat{A}\Phi_{\overline{g^{-1}v}}, \Phi_{\overline{g^{-1}v}})\, e^{-\frac{1}{h}[\overline{\psi(g^{-1},v)}+\psi(g^{-1},v)]}.$$

В частности, при $\hat{A}=I$

$$(\Phi_{\bar{v}}, \Phi_{\bar{v}}) = (\Phi_{\overline{g^{-1}v}}, \Phi_{\overline{g^{-1}v}})\, e^{-\frac{1}{h}[\psi(g^{-1},v)+\overline{\psi(g,\overline{g^{-1}v})}]}.$$

Следовательно, символ оператора $\hat{T}_g\hat{A}\hat{T}_g^{-1}$ при $v \in \mathfrak{M}_0$ равен

$$\frac{(\hat{T}_g\hat{A}\hat{T}_g^{-1}\Phi_{\bar{v}}, \Phi_{\bar{v}})}{(\Phi_{\bar{v}}, \Phi_{\bar{v}})} = \frac{(\hat{A}\Phi_{\overline{g^{-1}v}}, \Phi_{\overline{g^{-1}v}})}{(\Phi_{\overline{g^{-1}v}}, \Phi_{\overline{g^{-1}v}})} = A(g^{-1}v, \overline{g^{-1}v}). \tag{3.9}$$

Левая часть (3.9) допускает очевидное аналитическое продолжение на $\widetilde{\mathfrak{M}}$,

следовательно, тем же свойством обладает правая часть. Пусть $v_0 \in \mathfrak{M}' = \mathfrak{M} \setminus \widetilde{\mathfrak{M}}$ и элемент $g \in U_G$ обладает тем свойством, что $v_1 = gv_0 \in \mathfrak{M}$*. Левая часть (3.9) определена при $v = v_1$. Это дает возможность определить правую часть при $v = v_0$. Таким образом, мы доопределяем символ $A(z, \bar{z})$ на все многообразие $\mathfrak{M}$. Очевидно, что получающаяся таким образом на всем $\mathfrak{M}$ функция $A(z, \bar{z})$ аналитична в вещественном смысле и что соотношение (3.9) сохраняет силу при всех $v \in \widetilde{\mathfrak{M}}$.

Перейдем к четвертому утверждению. Пусть $\hat{A}$ — ограниченный оператор, перестановочный со всеми T_g, $A(z, \bar{z})$ — его символ. Из (3.9) следует, что $A(z, \bar{z}) = A(g^{-1}z, \overline{g^{-1}z})$ при $g \in U_G$. Поскольку группа G порождается любой окрестностью единицы, последнее соотношение справедливо при всех $g \in G$. В силу транзитивности действия G на $\mathfrak{M}$, отсюда следует, что $A(z, \bar{z}) = a = \text{const}$. В силу взаимно однозначного характера соответствия между символами и операторами, отсюда вытекает, что $\hat{A} = aI$, где I — единичный оператор в F_h. Теорема полностью доказана.

2. Проективное представление полной группы движений в пространстве F_h.

ТЕОРЕМА 3.2. *Представление* (3.4) *продолжается до унитарного проективного представления группы G в целом.*

Доказательство. Рассмотрим алгебру A_h как линейное пространство и представление локальной группы U_G в A_h, определяемое формулой (3.5). Это представление продолжается до линейного представления группы G в целом, поскольку группа G порождается своей окрестностью U_G. По той же причине при всех $g \in G$ преобразования (3.5) являются автоморфизмами алгебры A_h. По своему построению алгебра A_h изоморфна алгебре всех ограниченных операторов в F_h. Как известно ([11]), автоморфизмы алгебры всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве являются внутренними. Поэтому для каждого $g \in G$ существует ограниченный оператор $\hat{U}_g$ в F_h, порождающий автоморфизм (3.5):

$$\hat{A}^g = \hat{U}_g \hat{A} \hat{U}_g^{-1}, \tag{3.10}$$

где $\hat{A} \to \hat{A}^g$ — автоморфизм алгебры операторов, соответствующий τ_g. Оператор $\hat{U}_g$ определен равенством (3.10) с точностью до множителя. Очевидно, что эти операторы образуют проективное представление группы G.

Преобразование τ_g переводит вещественные функции в вещественные. Следовательно, автоморфизм (3.10) переводит эрмитовы операторы в эрмитовы. Отсюда вытекает, что оператор $\hat{U}_g$ лишь множителем отличается от унитарного. Таким образом, операторы $\hat{U}_g$ можно считать унитарными, неопределенный множитель — равным по модулю 1. Теорема доказана.

Обозначим через $\tilde{G}$ группу, состоящую из всех операторов $\hat{U}_g$, $g \in G$. Очевидно, что $\tilde{G}$ является центральным расширением G. Таким образом,

* Такой элемент существует в силу того, что по предположению $\mathfrak{M}'$ — многообразие меньшей размерности.

операторы U_g образуют линейное унитарное представление группы $\widetilde{G}$. Это представление обозначим $\hat{T}_{\widetilde{g}}$. Обозначим через $\pi:\widetilde{G}\to G$ гомоморфизм, определяемый равенством $\pi(\hat{U}_g)=g$. В дальнейшем элементы группы $\widetilde{G}$ будем обозначать через $\widetilde{g}$.

Пусть $U_{\widetilde{G}}\subset\widetilde{G}$ — прообраз окрестности U_G при гомоморфизме π, $\hat{T}_g$ — представление (3.4). Согласно определению, $\hat{T}_{\widetilde{g}}=\theta\hat{T}_g$ при $\widetilde{g}\in U_{\widetilde{G}}$, $g=\pi(\widetilde{g})$, $|\theta|=1$. Следовательно,

$$(\hat{T}_{\widetilde{g}}f)(z)=f(g^{-1}z)\,e^{-\frac{1}{h}\varphi(\widetilde{g}^{-1},z)}, \tag{3.11}$$

где $\varphi(\widetilde{g},z)=\psi(g,z)+i\beta(\widetilde{g})$, $\beta(\widetilde{g})$ — вещественная функция, определенная с точностью до слагаемого вида $2\pi nh$. Эту неопределенность можно устранить, положив $\beta(e)=0$. В таком случае, согласно (3.3), также $\varphi(e,z)=0$. В дальнейшем предполагается, что $\beta(e)=\varphi(e,z)=0$.

ТЕОРЕМА 3.3. *Пусть $f_0(z)\equiv 1\in F_h$. Тогда 1) функция $e^{-\frac{1}{h}\varphi(\widetilde{g},z)}$ допускает продолжение на $\widetilde{G}\times\widetilde{\mathfrak{M}}$ с сохранением аналитичности по z, 2) глобальное представление $\hat{T}_{\widetilde{g}}$ группы $\widetilde{G}$ задается формулой* (3.11).

Доказательство. Из того обстоятельства, что операторы (3.11) образуют представление локальной группы $U_{\widetilde{G}}$, и из условия $\varphi(e,z)=0$ следует, что при $\widetilde{g}_1,\widetilde{g}_2,\widetilde{g}_1\widetilde{g}_2\in U_{\widetilde{G}}$, $z\in\mathfrak{M}_0$

$$\varphi(\widetilde{g}_1\widetilde{g}_2,z)=\varphi(\widetilde{g}_1,g_2z)+\varphi(\widetilde{g}_2,z),\qquad g_2=\pi(\widetilde{g}_2). \tag{3.12}$$

Полагая в (3.11) $f(z)\equiv 1$, находим, что функция $\varepsilon(\widetilde{g},z)\equiv\exp\left[-\frac{1}{h}\varphi(\widetilde{g},z)\right]$ определена на $U_{\widetilde{G}}\times\widetilde{\mathfrak{M}}$ и является аналитической функцией z при фиксированном g. Из (3.12) следует, что при $\widetilde{g}_1,\widetilde{g}_2,\widetilde{g}_1\widetilde{g}_2\in U_{\widetilde{G}}$, $z\in\mathfrak{M}_0$

$$\varepsilon(\widetilde{g}_1\widetilde{g}_2,z)=\varepsilon(\widetilde{g}_1,g_2z)\,\varepsilon(\widetilde{g}_2,z)\qquad(g_2=\pi(\widetilde{g}_2)). \tag{3.13}$$

Вспомним теперь, что представление (3.11) продолжается до унитарного представления группы $\widetilde{G}$ в целом. В частности, $\hat{T}_{\widetilde{g}_1}\hat{T}_{\widetilde{g}_2}=\hat{T}_{\widetilde{g}_1\widetilde{g}_2}$ при $\widetilde{g}_1,\widetilde{g}_2\in U_{\widetilde{G}}$. Сопоставляя это тождество с (3.13), находим, что $\varepsilon(\widetilde{g},z)$ имеет единственное продолжение на $U^2_{\widetilde{G}}\times\widetilde{\mathfrak{M}}$ с сохранением аналитичности по z и свойства (3.13) и что операторы $\hat{T}_{\widetilde{g}}$ имеют вид (3.11) при $\widetilde{g}\in U^2_{\widetilde{G}}$. Повторяя это рассуждение, получаем, что при любом целом $n>0$ существует однозначное продолжение $\varepsilon(\widetilde{g},z)$ на $U^n_{\widetilde{G}}\times\widetilde{\mathfrak{M}}$ с сохранением аналитичности по z и свойства (3.13) и продолжение формулы (3.11) на $U^n_{\widetilde{G}}$. Этим доказательство теоремы завершается, так как $\widetilde{G}=\bigcup U^n_{\widetilde{G}}$.

3. Ковариантные символы операторов $\hat{T}_{\widetilde{g}}$. Сопоставляя (3.2) и (3.12), находим, что $\alpha(g_1,g_2)=\beta(\widetilde{g}_1\widetilde{g}_2)-\beta(\widetilde{g}_1)-\beta(\widetilde{g}_2)$. В частности, $\alpha(g^{-1},g)=-\beta(\widetilde{g})-\beta(\widetilde{g}^{-1})$. Поэтому из (3.7), (3.11) следует, что

$$(\hat{T}_{\tilde{g}}\Phi_{\bar{v}}, \Phi_{\bar{v}}) = (\Phi_{\overline{gv}}, \Phi_{\bar{v}})\, e^{-\frac{1}{h}\overline{\varphi(\tilde{g}, v)}} =$$

$$= \Phi_{\overline{gv}}(v)\, e^{-\frac{1}{h}\overline{\varphi(\tilde{g}, v)}} = L_h(v, \overline{gv})\, e^{-\frac{1}{h}\overline{\varphi(\tilde{g}, v)}}, \quad g = \pi(\tilde{g}).$$

Отсюда находим ковариантный символ оператора $\hat{T}_{\tilde{g}}$:

$$T_{\tilde{g}}(z, \bar{z}) = \frac{(\hat{T}_{\tilde{g}}\Phi_{\bar{z}}, \Phi_{\bar{z}})}{(\Phi_{\bar{z}}, \Phi_{\bar{z}})} = \frac{L_h(z, \overline{gz})}{L_h(z, \bar{z})}\, e^{-\frac{1}{h}\overline{\varphi(\tilde{g}, z)}}. \tag{3.14}$$

Пусть $\tilde{g}(t)$ — однопараметрическая подгруппа $\tilde{G}$. Представим оператор $\hat{T}_{\tilde{g}(t)}$ в виде $\hat{T}_{\tilde{g}(t)} = \exp\left(\frac{t}{h}\hat{\mathscr{L}}\right)$. Ковариантный символ $\mathscr{L}(z, \bar{z})$ оператора Ли $\hat{\mathscr{L}}$ можно вычислить, подставив в (3.14) $\tilde{g} = \tilde{g}(t)$ и продифференцировав после этого (3.14) при $t = 0$. Из гипотезы А следует, что $\mathscr{L}(z, \bar{z})$ не зависит от h:

$$\mathscr{L}(z, \bar{z}) = h\frac{d}{dt} e^{\frac{1}{h}[\Phi(z, \overline{gz}) - \varphi(\tilde{g}, z) - \Phi(z, \bar{z})]}\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}[\Phi(z, \overline{gz}) - \varphi(\tilde{g}, z)]\Big|_{t=0}.$$

ТЕОРЕМА 3.4. 1) *Символы операторов Ли обладают квазиклассическим свойством.* 2) *Если* $\tilde{g}(t)$ — *однопараметрическая подгруппа* $\tilde{G}$, $\mathscr{L}(z, \bar{z})$ — *ковариантный символ соответствующего оператора Ли,* $g(t) = \pi(\tilde{g}(t))$, *то*

$$\frac{d}{dt}\tau_{g(t)}A\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}A(g^{-1}(t)z, \overline{g^{-1}(t)z})\Big|_{t=0} = \frac{1}{i}[\mathscr{L}, A], \tag{3.15}$$

где $[\mathscr{L}, A]$ — *скобка Пуассона в* $A(\mathfrak{M})$.

Доказательство. В силу связи между представлениями τ_g и $\hat{T}_{\tilde{g}}$

$$\frac{d}{dt}\tau_{g(t)}A\Big|_{t=0} = \frac{1}{h}(\mathscr{L} * A - A * \mathscr{L}). \tag{3.16}$$

Обе функции, $\mathscr{L}$ и A, не зависят от h. Поэтому при $h \to 0$ правая часть (3.16) равна $\frac{1}{i}[\mathscr{L}, A] + o(1)$, где $[\mathscr{L}, A]$ — скобка Пуассона *. Так как левая часть (3.16) не зависит от h, то тем самым $o(1) = 0$. Теорема доказана.

§ 4. Квантование в C^n**

1. Виковское квантование. Этот вариант квантования механики с плоским фазовым пространством является простейшим примером применения общих конструкций § 2. В подходящих координатах келеров потенциал имеет вид

$$\Phi(z, \bar{z}) = \sum z_k \bar{z}_k. \tag{4.1}$$

Отмеченной точкой является начало координат.

* Проверку выполнения условий теоремы 2.2 мы опускаем.

** Этот параграф содержит краткий обзор хорошо известных результатов. Наиболее близкое подробное изложение см. в ([12]), ([13]), ([14]), ([15]). Там же можно найти дальнейшие ссылки.

Пространство F_h состоит из целых функций с суммируемым квадратом по гауссовой мере

$$(f, f) = \frac{1}{h^n} \int |f(z)|^2 e^{-\frac{1}{h}\Phi(z,\bar{z})} d\mu(z, \bar{z}), \tag{4.2}$$

где $d\mu = \frac{d\mu_L}{\pi^n}$, $d\mu_L$ — обычная лебеговская мера в C^n. Пространство F_h в этой ситуации называется фоковским *. Ортонормированный базис в F_h состоит из векторов

$$f_k(z) = \prod \frac{z_s^{k_s}}{\sqrt{k_s!\, h^{k_s}}}, \quad k = k_1, \ldots, k_n. \tag{4.3}$$

Из (4.3) следует, что

$$L_n(z, \bar{z}) = \sum f_k(z) f_k(z) = e^{\frac{1}{h}\Sigma z_k \bar{z}_k} = e^{\frac{1}{h}\Phi(z,\bar{z})}.$$

Следовательно, гипотеза А выполнена. Справедливость гипотез В и С очевидна. Специализация формул (2.22), (2.23), (2.24) хорошо известна в теории виковского квантования.

Рассмотрим в F_h операторы $\hat{a}_k$, $\hat{a}_k^*$ (операторы «уничтожения» и «рождения»)

$$(\hat{a}_k f)(z) = h \frac{\partial f}{\partial z_k}, \quad (\hat{a}_k^* f)(z) = z_k f(z). \tag{4.4}$$

Виковской нормальной формой оператора $\hat{A}$ называется его запись через $\hat{a}_k$, $\hat{a}_k^*$ в специальном виде:

$$\hat{A} = \sum A_{mn} (\hat{a}^*)^m \hat{a}^n$$

(m, n — мультииндексы).

Термин «виковское квантование» связан с тем, что ковариантный символ оператора $\hat{A}$ является производящей функцией виковской нормальной формы

$$A(z, \bar{z}) = \sum A_{mn} \bar{z}^m z^n. \tag{4.5}$$

Если оператор $\hat{A}$ допускает запись в противоположной (антивиковской) нормальной форме

$$\hat{A} = \sum \mathring{A}_{mn} \hat{a}^m (\hat{a}^*)^n,$$

то ему можно сопоставить другую производящую функцию

$$\mathring{A}(z, \bar{z}) = \sum \mathring{A}_{mn} z^m \bar{z}^n.$$

* Введено В. А. Фоком в ([16]), ([17]). Скалярное произведение в ([16]), ([17]) задавалось не интегралом (3.2), а рядом, через коэффициенты Тэйлора функции f. Запись скалярного произведения в F_h в виде (3.2) впервые была опубликована в работе Баргмана ([18]), однако была хорошо известна задолго до появления этой статьи (см. доклад Р. А. Минлоса, Л. Д. Фаддеева и автора на Всесоюзном математическом конгрессе 1961 г. ([19])).

Функция $\mathring{A}$ оказывается контравариантным символом оператора $\hat{A}$.

Ко- и контравариантные символы операторов в этой ситуации называются также виковскими и антивиковскими.

Связь между виковскими и антивиковскими символами, а также закон умножения в алгебре виковских символов задаются, согласно общей теории, оператором T_h. В рассматриваемом случае ядро этого оператора имеет вид

$$G_h = \frac{1}{h^n} e^{-\frac{1}{h}\Sigma(z_i - v_i)(\bar{z}_i - \bar{v}_i)}, \tag{4.6}$$

т. е. является ядром Пуассона. Следовательно, оператор T_h может быть представлен в виде

$$T_h = e^{h\Delta}, \tag{4.7}$$

где Δ — оператор Лапласа.

2. Вейлевское квантование. Этот вариант квантования не использует комплексной структуры и поэтому его более естественно считать квантованием не в C^n, а в R^{2n}. Координаты в R^{2n} обозначим, как обычно, через $p=(p_1, \ldots, p_n)$, $q=(q_1, \ldots, q_n)$. Пусть $\varphi(\alpha, \beta)d\alpha d\beta$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\beta=(\beta_1, \ldots, \beta_n)$,— комплекснозначная мера ограниченной вариации в R^{2n} и

$$\mathcal{A}(p, q) = \int e^{i(p\alpha+q\beta)} \varphi(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta$$
$$\left(p\alpha = \sum p_k\alpha_k, \quad q\beta = \sum q_k\beta_k\right). \tag{4.8}$$

Сопоставим функции $\mathcal{A}(p, q)$ ограниченный оператор $\hat{A}$ в некотором гильбертовом пространстве H следующим образом. Обозначим через G группу Гейзенберга — Вейля и через $\mathfrak{G}$ — алгебру Ли этой группы. Пусть T_g— неприводимое унитарное представление этой группы в пространстве H. Обозначим через ξ_k, η_k, ζ базис в $\mathfrak{G}$ со стандартными соотношениями коммутации $[\xi_k, \eta_j]=\delta_{kj}\zeta$, $[\xi_k, \xi_j]=[\eta_k, \eta_j]=[\xi_k, \zeta]=[\eta_k, \zeta]=0$. Представление T_g сопоставляет элементам ξ_k, η_k, ζ косоэрмитовы операторы $\hat{\xi}_k$, $\hat{\eta}_k$, $\hat{\zeta}$ в H. Обозначим через $\hat{p}_k$, $\hat{q}_k$, $\hat{z}$ соответствующие эрмитовы операторы $\hat{p}_k = -i\hat{\xi}_k$, $\hat{q}_k=-i\hat{\eta}_k$, $\hat{z}=-i\hat{\zeta}$. В силу неприводимости, $\hat{z}=hI$, где I — единичный оператор *. Поэтому между $\hat{p}_k$, $\hat{q}_k$ выполнены соотношения:

$$[\hat{p}_k, \hat{q}_j] = \delta_{kj}\frac{h}{i} I, \quad [\hat{p}_k, \hat{p}_j] = [\hat{q}_k, \hat{q}_j] = 0. \tag{4.9}$$

Положим

$$\hat{A} = \int e^{i(\hat{p}\alpha+\hat{q}\beta)} \varphi(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta. \tag{4.10}$$

Сопоставление функции (4.8) оператора (4.10) было впервые предложено Г. Вейлем ([1]) и называется вейлевским квантованием. Функция

* В силу известной теоремы фон Неймана ([20]), представление T_g определяется числом h с точностью до унитарной эквивалентности.

$\mathcal{A}(p, q)$ называется вейлевским символом оператора $\hat{A}$. Операторы (4.10) образуют подалгебру в алгебре ограниченных операторов, причем $\|\hat{A}\| \leqslant \leqslant \int |\varphi| d\alpha d\beta$.

Рассмотрим реализацию пространства H в виде $L^2(R^n)$ и потребуем, чтобы операторы $\hat{p}_k$ и $\hat{q}_k$ задавались формулами

$$(\hat{p}_k f)(x) = \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x_k} f(x), \quad (\hat{q}_k f)(x) = x_k f(x). \tag{4.11}$$

При этой реализации представления алгебры $\mathfrak{G}$ оператор (4.10) записывается с помощью ядра $K(x, y)$, связанного с его вейлевским символом формулами:

$$\begin{gathered} K(x, y) = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int \mathcal{A}\left(p, \frac{x+y}{2}\right) e^{\frac{ip}{h}(x-y)} dp, \\ \mathcal{A}(p,q) = \int K\left(q - \frac{\xi}{2}, q + \frac{\xi}{2}\right) e^{-\frac{ip\xi}{h}} d\xi. \end{gathered} \tag{4.12}$$

Из (4.12) следует закон умножения в алгебре вейлевских символов: если $\hat{A} = \hat{A}_1 \hat{A}_2$, то соответствующие символы связаны соотношением *

$$\mathcal{A}(p,q) = \left(\frac{2}{h}\right)^n \int \mathcal{A}_1(p^{(1)}, q^{(1)}) \mathcal{A}_2(p^{(2)}, q^{(2)}) e^{\frac{2i}{h}\int_\Delta \omega} dp^{(1)} dq^{(1)} dp^{(2)} dq^{(2)}, \tag{4.13}$$

где Δ — треугольник в R^{2n} с вершинами в точках $(p^{(1)}, q^{(1)})$, $(p^{(2)}, q^{(2)})$, (p, q), $\omega = \Sigma dp_i \wedge dq_i$. $\int_\Delta \omega$ легко вычисляется:

$$\int_\Delta \omega = \sum \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ q_k^{(1)} & q_k^{(2)} & q_k \\ p_k^{(1)} & p_k^{(2)} & p_k \end{vmatrix}. \tag{4.14}$$

Для полноты изложения укажем связь между виковским и вейлевским квантованием. С этой целью рассмотрим представление алгебры $\mathfrak{G}$ в пространстве F_h. Положим

$$\hat{p}_k = \frac{1}{i\sqrt{2}} (\hat{a}_k - \hat{a}_k^*), \quad \hat{q}_k = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_k + \hat{a}_k^*), \tag{4.15}$$

где $\hat{a}_k$, $\hat{a}_k^*$ определяются формулами (4.4).

Теперь оператор $\hat{A}$ действует в F_h. Будучи ограниченным, он имеет виковский символ $A(z, \bar{z})$. Оказывается, что

$$A(z, \bar{z}) = (T_{\frac{h}{2}} \mathcal{A})(z, \bar{z}), \tag{4.16}$$

где T_h — интегральный оператор с ядром (4.6). При применении формулы

* В предшествующих работах в формуле (4.13) вместо $\int_\Delta \omega$ стоит явное выражение (4.14) для этого интеграла.

(4.16) предполагается, что $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip)$, $\bar{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(q - ip)$. Сопоставляя (4.16) и (4.7), находим, что

$$\mathcal{A}(p, q) = (T_{\frac{h}{2}} \mathring{A})(p, q)$$

(теперь $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip)$, $\bar{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(q - ip)$).

3. Проективные представления группы параллельных переносов в пространстве F_h. Группа параллельных переносов H действует транзитивно в C^n. Согласно общей теории, развитой в § 3, если $A(z, \bar{z})$ — ковариантный символ оператора $\hat{A}$, то $A(z - \xi, \bar{z} - \bar{\xi})$ — ковариантный символ оператора $\hat{T}_\xi^{(h)} \hat{\Delta} (\hat{T}_\xi^{(h)})^{-1}$, где $\hat{T}_\xi^{(h)}$ — оператор в F_h, определяемый формулой

$$(\hat{T}_\xi^{(h)} f)(z) = f(z - \xi) e^{\frac{1}{h}(z\bar{\xi} - \frac{1}{2}\xi\bar{\xi})}. \tag{4.17}$$

Из (4.17) следует соотношение между $\hat{T}_\xi^{(h)}$:

$$\hat{T}_\xi^{(h)} \hat{T}_\eta^{(h)} = e^{\frac{1}{h}(\xi\bar{\eta} - \bar{\xi}\eta)} \hat{T}_\eta^{(h)} \hat{T}_\xi^{(h)}. \tag{4.18}$$

Соотношение (4.18) показывает, что операторы $\hat{T}_\xi^{(h)}$ осуществляют проективное представление группы H и, одновременно, линейное представление группы Гейзенберга — Вейля G *. Из теоремы фон Неймана ([20]) следует, что представления $\hat{T}_\xi^{(h)}$ не эквивалентны при различных h и что каждое неприводимое унитарное представление группы G эквивалентно одному из $\hat{T}_\xi^{(h)}$.

§ 5. Квантование в однородных ограниченных областях

1. Построение квантования. Пусть Ω — ограниченная однородная область в C^n, $K(z, \bar{z})$ — керн-функция Бергмана. Ω является келеровым многообразием относительно метрики ds^2, потенциалом которой служит $\Phi(z, \bar{z}) = \ln K(z, \bar{z})$. Следуя схеме, описанной в § 2, рассмотрим гильбертово пространство F_h аналитических функций в Ω со скалярным произведением

$$(f, f) = c(h) \int |f(z)|^2 K^{-1/h}(z, \bar{z})\, d\mu(z, \bar{z}), \tag{5.1}$$

где $d\mu(z, \bar{z}) = \det \frac{\partial^2 \ln K}{\partial z^i \partial \bar{z}^k} \cdot \frac{d\mu_L(z, \bar{z})}{\pi^n}$, $d\mu_L(z, \bar{z})$ — лебегозская мера Ω. Рассмотрим функцию $L_h(z, \bar{v})$, определяемую формулой (2.16) и переполненную систему $\Phi_{\bar{v}}(z) = L_h(z, \bar{v})$. Образуем алгебру A_h из ковариантных символов ограниченных операторов в F_h и алгебру $\mathfrak{A}$, состоящую из функций

* Группа G является одномерным центральным расширением группы H.

$f(h|z, \bar{z})$, $0 < h \leqslant 1$, являющихся при фиксированном h элементами A_h и непрерывных по совокупности $h, z, \bar{z}$.

ТЕОРЕМА 5.1. *Алгебра $\mathfrak{A}$ является специальным квантованием с принципом соответствия в слабой форме.*

Ввиду того, что множество E в данном случае содержит отрезок, согласно лемме 2.2 и замечанию на стр. 1133 достаточно убедиться в справедливости гипотез A, B, C.

Доказательство теоремы 5.1 основано на следующих утверждениях.

ТЕОРЕМА 5.2. *Для однородной ограниченной области*

1) $\det \left\| \dfrac{\partial^2 \ln K}{\partial z^i \partial \bar{z}^k} \right\| = \lambda K(z, \bar{z})$;

2) $L_h(z, \bar{z}) = \mu K^{1/h}(z, \bar{z})$,

где $\lambda = \lambda(\Omega)$, $\mu = \mu(\Omega)$ — константы, зависящие лишь от области Ω;

3) *при $0 < h \leqslant 1$ пространства F_h не пусты: $F_h \supset H$, где H — пространство аналитических функций на Ω с суммируемым квадратом по мере Лебега.*

Второе утверждение теоремы означает справедливость гипотезы A.

Доказательство теоремы 5.2. Обозначим через H гильбертово пространство аналитических функций на Ω с суммируемым квадратом модуля по мере Лебега, через G — группу, транзитивно действующую на Ω, и через $\dfrac{\partial(gz)}{\partial z}$ — аналитический якобиан преобразования $z \to gz$: $\dfrac{\partial(gz)}{\partial z} = \det \left\| \dfrac{\partial v^i}{\partial z^k} \right\|$, где z^k — координаты точки z, v^i — координаты точки $v = gz$.

Из определения керн-функции немедленно следует, что *

$$K(z, \bar{z}) = K(gz, \overline{gz}) \left| \frac{\partial(gz)}{\partial z} \right|^2. \tag{5.2}$$

Пусть теперь $\rho(z, \bar{z}) = \det \left\| \dfrac{\partial^2 \ln K(z, \bar{z})}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \right\|$. Из (5.2) в свою очередь вытекает, что $\rho(z, \bar{z})$ удовлетворяет аналогичному тождеству:

$$\rho(z, \bar{z}) = \rho(gz, \overline{gz}) \left| \frac{\partial(gz)}{\partial z} \right|^2. \tag{5.3}$$

Поэтому функция $\lambda = \dfrac{\rho(z, \bar{z})}{K(z, \bar{z})}$ инвариантна относительно G и, в силу транзитивности, постоянна. Первое утверждение доказано. Из него немедленно следует третье. В самом деле, согласно первому утверждению теоремы 5.2, мера $d\mu$ в (5.1) равна

$$d\mu(z, \bar{z}) = \lambda \pi^{-n} K(z, \bar{z})\, d\mu_L(z, \bar{z}). \tag{5.4}$$

---

* Если $\varphi_n(z)$ — ортонормированный базис в H, то $\chi_n(z) = \varphi_n(gz) \dfrac{\partial(gz)}{\partial z}$ обладает тем же свойством, поэтому

$$K(z, \bar{z}) = \sum |\chi_n(z)|^2 = \sum |\varphi_n(gz)|^2 \left| \frac{\partial(gz)}{\partial z} \right|^2 = K(gz, \overline{gz}) \left| \frac{\partial(gz)}{\partial z} \right|^2.$$

Обозначим через H пространство аналитических функций на Ω с суммируемым квадратом по мере Лебега. Рассмотрим в H ортонормированный базис, включающий функцию $f_0(z)=\text{const}$. Используя этот базис, получаем, что $K(z, \bar{z}) \geqslant |f_0|^2$. Поэтому при $0<h\leqslant 1$

$$K^{-\frac{1}{h}+1}(z, \bar{z}) \leqslant |f_0|^{1-\frac{1}{h}} = \text{const}$$

и из (5.4) следует, что $H \subset F_h$. Отметим, что $H=F_1$. Перейдем ко второму утверждению.

ЛЕММА 5.1. *Существует такая окрестность единицы U группы движений G, что* $\left|\frac{\partial(gz)}{\partial z}-1\right|<\frac{1}{2}$ *при всех* $z\in\Omega$, $g\in U$.

Доказательство. Обратим внимание прежде всего на то, что действие группы G может быть продолжено по непрерывности на замыкание $\bar{\Omega}$ области Ω *. Положим по определению

$$j(g, z) = \lim_{z_n\to z} \frac{\partial(\partial z_n)}{\partial z_n} \quad \text{при } z\in\bar{\Omega}.$$

Очевидно, что функция $j(g, z)$ является непрерывной по совокупности переменных $g\in G$, $z\in\bar{\Omega}$. Отметим, что $j(e, z)=1$ при всех $z\in\bar{\Omega}$. Предположим теперь, что окрестности U с нужными свойствами нет. В таком случае существует последовательность $g_n\to e$ и последовательность $z_n\in\Omega$ такие, что

$$\left|\frac{\partial(g_n z_n)}{\partial z_n}-1\right| \geqslant \frac{1}{2}. \tag{5.5}$$

В силу компактности $\bar{\Omega}$ можно без ограничения общности считать, что $z_n\to z\in\bar{\Omega}$. Переходя в (5.5) к пределу при $n\to\infty$, получаем, что $|j(e, z)-1|\geqslant\frac{1}{2}$, что противоречит равенству $j(e, z)=1$. Лемма доказана.

Пусть теперь $\sigma_n(z)$ — ортонормированная система функций в пространстве F_h, $g\in U$. Сделав разрез по отрицательной части вещественной оси в плоскости w, определим однозначную ветвь функции $w^{1/h}$ условием $1^{1/h}=1$. Имея в виду эту ветвь, рассмотрим функции

$$\chi_n(z) = \sigma_n(gz)\left[\frac{\partial(gz)}{\partial z}\right]^{1/h},$$

которые в силу определения окрестности U являются однозначными аналитическими функциями на Ω. Из (5.2) следует, что преобразование

$$f(z)\to f(gz)\left[\frac{\partial(gz)}{\partial z}\right]^{\frac{1}{h}}$$

является унитарным оператором в F_h. Поэтому функции $\chi_n(z)$ образуют ортонормированный базис в F_h. Следовательно,

* В действительности, действие G продолжается непрерывным образом даже на некоторое комплексное многообразие, содержащее Ω ([21]).

$$L_h(z, \bar{z}) = \sum \chi_n(z)\,\overline{\chi_n(z)} = \sum \sigma_n(gz)\,\overline{\sigma_n(gz)} \left|\frac{\partial(gz)}{\partial z}\right|^{\frac{2}{h}} = L_h(gz, \overline{gz}) \left|\frac{\partial(gz)}{\partial z}\right|^{2/h}. \tag{5.6}$$

Последнее тождество, будучи справедливо при всех $g \in U$, автоматически распространяется на все $g \in G$. С другой стороны, из (5.2) следует, что функция $K^{1/h}(z, \bar{z})$ удовлетворяет аналогичному тождеству. Поэтому $\mu = L_h K^{-1/h}$ является инвариантной относительно G функций и, следовательно, $\mu = \text{const}$. Теорема 5.2 доказана полностью.

Таким образом, установлена справедливость гипотезы А. Справедливость гипотез В и С при $0 < h \leqslant 1$ очевидна. Теорема 5.1 доказана.

Замечания. 1) В случае, если область Ω является круговой, точка $z=0$ является отмеченной для потенциала $\Phi = \ln\,(K(z, \bar{z})/K(0, 0))$. Действительно, в этом случае в Ω существует полная ортогональная система, состоящая из однородных многочленов целых неотрицательных степеней. Используя эту систему, находим, что $K(z, 0) = K(0, \bar{z}) = K(0, 0,)$*, что эквивалентно отмеченности точки 0.

2) Пространство F_h заведомо непусто, если $0 < h \leqslant 1$. В случае, если $h > 1$, интеграл (5.1) может начать расходиться. Естественно попытаться в этом случае понимать его с помощью аналитического продолжения по h. Для случая, когда область Ω является симметрической, такая возможность подробно изучена. Оказывается, что в случае, если Ω — комплексный шар, таким способом можно построить пространство F_h при любом $h > 0$. Во всех остальных случаях существует константа $c(\Omega)$, ограничивающая возможные значения h: при $h > c(\Omega)$ скалярное произведение, определяемое с помощью аналитического продолжения, не положительно определено.

3) В пространстве F_h действует проективное представление $\hat{U}_g$ группы G. В достаточно малой окрестности единицы оператор $\hat{U}_g = \hat{T}_g$ определяется общей формулой (3.4), функция $\psi(g, z)$ определяется из (5.2). Логарифмируя (5.2), получаем:

$$\Phi(z, \bar{z}) = \Phi(gz, \overline{gz}) + \ln j(g, z) + \ln \overline{j(g, z)},$$

где $j(g, z)$ — аналитический якобиан. Следовательно,

$$(\hat{T}_g f)(z) = f(g^{-1}z)\, j^{1/h}(g^{-1}, z). \tag{5.7}$$

§ 6. Квантование на цилиндре и торе

1. Общие замечания. Двумерные цилиндр и тор являются келеровыми многообразиями. Комплексная структура и метрика на них определяются обычным образом с помощью развертки на плоскость. Вещественные координаты на цилиндре и торе будем обозначать через p и q, причем в случае цилиндра p пробегает вещественную ось, q — циклическая координата с периодом 2π, в случае тора обе координаты цикличе-

* $= \mu(\Omega)^{-\frac{1}{2}}$, где $\mu(\Omega)$ — лебегов объем в области Ω.

ские с периодом 2π. В обоих случаях положим $z=q+ip$. На цилиндре существует глобальный потенциал метрики

$$\Phi(z, \bar{z}) = -\frac{1}{2}(z-\bar{z})^2 = 2p^2. \tag{6.1}$$

Для случая тора глобальный потенциал существует на множестве $\widetilde{\mathfrak{M}}$, получаемом из тора удалением окружности $q=\text{const}$. В качестве потенциала на $\widetilde{\mathfrak{M}}$ можно рассмотреть функцию (6.1). Гипотеза А в обоих случаях не выполнена, поэтому не ясно, можно ли с помощью алгебр A_h, строящихся по методу § 2, образовать квантование, обладающее принципом соответствия. В связи с этим мы строим квантование на цилиндре и торе по образцу вейлевского квантования на плоскости.

2. Цилиндр. Формула (4.13), задающая закон умножения в алгебре A_h, в случае вейлевского квантования на плоскости не может быть в точности перенесена на случай цилиндра. Дело в том, что на плоскости существует единственный треугольник с вершинами в заданных трех точках, в то время как на цилиндре подобных геодезических треугольников существует много. В связи с этим введем определение.

Множество $\mathfrak{M}_h$ точек на цилиндре $\mathfrak{M}$ назовем допустимым, если в случае, когда вершины треугольника Δ принадлежат $\mathfrak{M}_h$, функция

$$\exp\frac{2i}{h}\int_{\Delta}\omega \tag{6.2}$$

не зависит от произвола в выборе треугольника.

Прежде всего опишем допустимые множества. Заметим, что

$$\int_{\Delta}\omega = q(p_2-p_1)+q_2(p_1-p)+q_1(p-p_2). \tag{6.3}$$

Учитывая, что q — циклическая переменная с периодом 2π, находим отсюда, что для того чтобы функция (6.2) не зависела от сторон треугольника, а зависела лишь от его вершин, необходимо и достаточно, чтобы разности p_2-p_1, p_1-p, $p-p_2$ принимали значения вида $\frac{nh}{2}$, n — целое.

Таким образом, допустимым является множество $\mathfrak{M}_h$, состоящее из окружностей на $\mathfrak{M}$, параллельных основанию и отстоящих друг от друга на $n\frac{h}{2}$.

В соответствии с этим модифицируем формулу (4.13):

$$\begin{gathered}\mathcal{A}(p, q) = \frac{h}{2}\sum_{n_1, n_2}\int \mathcal{A}_1(p_1, q_1)\,\mathcal{A}_2(p_2, q_2)\, e^{\frac{2i}{h}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ p_1 & p_2 & p\\ q_1 & q_2 & q\end{vmatrix}}\, dq_1\, dq_1,\\ p_1 = n_1\frac{h}{2}, \quad p_2 = n_2\frac{h}{2}, \quad p = n\frac{h}{2}.\end{gathered} \tag{6.4}$$

Перейдем к преобразованию Фурье:

$$\mathcal{A}(p, q) = \sum_{\beta} \int_0^{\frac{4\pi}{h}} e^{i(\alpha p + \beta q)} \varphi(\alpha, \beta)\, d\alpha, \quad \beta = 0, \pm 1, \ldots \tag{6.5}$$

$\left(\text{функция } \varphi(\alpha, \beta) \text{ периодична по } \alpha \text{ с периодом } \frac{4\pi}{h}\right)$.

Из (6.4) следует закон композиции для φ:

$$\varphi(\alpha, \beta) = \sum_{\beta'} \int_0^{\frac{4\pi}{h}} \varphi_1(\alpha - \alpha', \beta - \beta') \varphi_2(\alpha', \beta') e^{\frac{ih}{2}\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}} d\alpha'. \tag{6.6}$$

Положим $\|\varphi\| = \sum_{\beta} \int |\varphi(\alpha, \beta| d\alpha$. Из (6.6) следует, что $\|\varphi\| \leqslant \|\varphi_1\| \|\varphi_2\|$. Следовательно, множество функций φ таких, что $\|\varphi\| < \infty$, замкнуто относительно композиции (6.6) и, тем самым, множество функций $\mathcal{A}$ вида (6.5) с $\|\varphi\| < \infty$ замкнуто относительно композиции (6.4). Это множество обозначим через A_h.

Установим ассоциативность композиции (6.4). Рассмотрим в $L^2(0, 2\pi)$ интегральный оператор с ядром $K(x, y)$, 2π-периодическим по x и y. Сопоставим ему функцию $\mathcal{A}(p, q)$ по формуле, аналогичной (4.12):

$$\mathcal{A}(p, q) = 2 \int_0^{2\pi} K(q - \xi, q + \xi) e^{-\frac{2ip\xi}{h}} d\xi, \quad p = \frac{nh}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \ldots. \tag{6.7}$$

Обращение формулы (6.7):

$$K(x, y) = \frac{1}{4\pi} \sum \mathcal{A}\left(p, \frac{x + y}{2}\right) e^{\frac{ip}{h}(x - y)}. \tag{6.8}$$

Произведению операторов $\hat{A} = \hat{A}_1 \hat{A}_2$ в $L^2(0, 2\pi)$ отвечает композиция их ядер $K(x, y) = \int K_1(x, s) K_2(s, y) ds$. Переходя отсюда к функциям $\mathcal{A}(p, q)$ по формулам (6.7), (6.8), после очевидных преобразований получаем, что композиция (6.4) порождена произведением операторов. Таким образом, функции $\mathcal{A}(p, q)$ вида (6.5) с $\|\varphi\| < \infty$ и с законом умножения (6.4) образуют ассоциативную алгебру. Формулы (6.7), (6.8) описывают линейное представление алгебры A_h в $L^2(0, 2\pi)$.

Квантование $\mathfrak{A}$ образуем из таких функций $\mathcal{A}(h|p, q)$, $0 < h < \infty$, что $\mathcal{A}(h|p, q) \in A_h$ при фиксированном L.

Принцип соответствия (в слабой форме) вытекает из следующего соображения. Пусть функции $\mathcal{A}_1(h|p, q)$, $\mathcal{A}_2(h|p, q)$ определены при всех $(p, q) \in \mathfrak{M}$, $0 < h < \infty$ и непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных. В таком случае правая часть (6.4) после умножения на $h/2$ является интегральной суммой для интеграла (4.13) (при $n = 1$), распространенного на $\mathfrak{M}$. Следовательно, (6.4) и (4.13) имеют общую асимптотику при $h \to 0$.

Таким образом, принцип соответствия для рассматриваемого квантования на цилиндре вытекает из принципа соответствия для вейлевского квантования на плоскости. Более подробно на этом останавливаться не будем.

3. Тор. В качестве исходного пункта для построения квантования опять рассмотрим формулу (4.13). Те же соображения, что в случае цилиндра, показывают, что на допустимом множестве $\mathfrak{M}_h$ p_1, p_2, p могут принимать лишь дискретные значения $n\frac{h}{2}$. Ввиду симметрии относительно p и q, отсюда следует, что q_1, q_2, q также принимают лишь значения $n\frac{h}{2}$. Так как, с другой стороны, p и q — циклические координаты, то число различных значений, принимаемых p и q, конечно и определяется равенством $\frac{Nh}{2}=2\pi$, N — целое. Таким образом, оказывается, что h может принимать лишь дискретное множество значений *

$$h=\frac{4\pi}{N}. \tag{6.9}$$

Допустимым множеством является решетка $\mathfrak{M}_h$ на торе: $(p, q)=(m, n)\frac{h}{2}$.

Модифицируем формулу (4.13) следующим образом:

$$\mathcal{A}(p, q)=\left(\frac{h}{2}\right)^3 \sum_{p_i, q_i \in \mathfrak{M}_h} \mathcal{A}_1(p_1, q_1)\, \mathcal{A}_1(p_2, q_2)\, e^{\frac{2i}{h}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_1 & p_2 & p \\ q_1 & q_2 & q \end{vmatrix}}. \tag{6.10}$$

Обозначим через K_h решетку на окружности $0<x\leqslant 2\pi$, состоящую из точек $x=r\frac{h}{2}$, и через $L^2(K_h)$ — гильбертово пространство функций на K_h со скалярным произведением

$$(f, g)=\frac{h}{2}\sum_{x\in K_h} f(x)\,\overline{g(x)}.$$

Очевидно, что $\dim L^2(K_h)=N=\frac{4\pi}{h}$. В пространстве $L^2(K_h)$ каждый оператор задается ядром $K(x, y)$, $x, y\in K_h$. Сопоставим каждому оператору в $L^2(K_h)$ функцию $\mathcal{A}(p, q)$ на $\mathfrak{M}_L$ по формуле, аналогичной (6.7):

$$\mathcal{A}(p, q)=h\sum K(q-\xi, q+\xi)\, e^{\frac{2ip}{h}\xi}. \tag{6.11}$$

Обращение (6.11) совпадает по форме с (6.8). Произведению операторов $\hat{A}=\hat{A}_1\hat{A}_2$ в $L^2(K_h)$ отвечает композиция ядер $K(x, y)=\frac{h}{2}\sum K_1(x, s)K_2(s, y)$. Отсюда с помощью формул (6.11), (6.8) можно перейти к функциям $\mathcal{A}(p, q)$. В результате очевидных вычислений оказывается, что возникающая таким образом композиция функций $\mathcal{A}(p, q)$ совпадает с (6.10).

Таким образом, формула (6.10) определяет ассоциативную алгебру. Алгебра $\mathfrak{A}$ определяется так же, как для цилиндра **, выполнение принципа соответствия устанавливается так же, как в случае цилиндра.

* В другой статье будет показано, что в случае компактных комплексных симметрических пространств с полупростой группой движений ситуация аналогичная.

** Разница состоит лишь в том, что h пробегает значения вида (6.9), а не полуось $(0, \infty)$.

Отметим в заключение, что все формулы, относящиеся к квантованию, в случае тора получаются из аналогичных формул для вейлевского квантования, в случае плоскости — заменой интегралов интегральными суммами с шагом $\frac{h}{2}$.

§ 7. Вопросы единственности

В этом параграфе на основе некоторых общих соображений исследуется единственность виковского и вейлевского квантований в C^n.

1. Дополнительные определения. Пусть $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ — квантования одной и той же классической механики. Квантование $\mathfrak{A}_1$ будем называть подквантованием $\mathfrak{A}_2$ (обозначается $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_2$), если существует допустимый мономорфизм $\psi: \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2$.

Квантование $\mathfrak{A}$ будем называть *максимальным*, если из условия $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}_1$ следует, что $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — специальное квантование механики $(\mathfrak{M}, \omega)$, естественное по отношению к некоторой категории $\mathscr{K}$, в которую входит группа G движений многообразия $\mathfrak{M}$.

Как уже неоднократно отмечалось, в этом случае сдвиги порождают автоморфизмы алгебры A_h согласно формуле

$$(\tau_g f)(x) = f(g^{-1}x). \tag{7.1}$$

Квантование $\mathfrak{A}$ будем называть *эффективным*, если между алгебрами A_{h_1}, A_{h_2} при $h_1 \neq h_2$ не существует естественного изоморфизма (т. е. перестановочного со всеми τ_g).

Квантование назовем *неприводимым*, если алгебры A_h допускают точные неприводимые представления ограниченными операторами в гильбертовом пространстве.

Квантование назовем *w^*-квантованием*, если алгебры A_h являются w^*-алгебрами.

В частности, в случае неприводимого w^*-квантования алгебры A_h изоморфны полным алгебрам ограниченных операторов в гильбертовом пространстве.

2. Общее соображение. Рассмотрим множество $\tilde{M}$ $*$-алгебр A, состоящих из функций на однородном многообразии $\mathfrak{M}$ с группой движений G и обладающих свойствами:

i) Алгебра A изоморфна алгебре ограниченных операторов в гильбертовом пространстве.

ii) Сдвиги $(\tau_g f)(x) = f(g^{-1}x)$ являются изоморфизмами алгебр A.

iii) Единицей алгебры A служит функция $f_0(x) \equiv 1$.

Алгебры A_1, $A_2 \in \tilde{M}$ назовем естественно изоморфными, если между ними существует изоморфизм, перестановочный с автоморфизмом τ_g.

Множество классов попарно естественно изоморфных алгебр A обозначим через M.

Обозначим, далее, через $\tilde{T}$ множество всех неприводимых проективных представлений группы G и через T — множество классов унитарно

эквивалентных проективных представлений G. Построим мономорфное отображение $M \to T$.

Фиксируем $A \in \tilde{M}$. Обозначим через L изоморфную A алгебру ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ и через φ — изоморфизм $A \to L$. Пусть $\sigma_g = \varphi\tau_g\varphi^{-1}$ — автоморфизм L. Поскольку все автоморфизмы L — внутренние, существует определенный с точностью до числового множителя λ ограниченный оператор $\hat{U}_g$, порождающий автоморфизм σ_g:

$$\sigma_g \hat{f} = \hat{U}_g \hat{f} \hat{U}_g^{-1}. \tag{7.2}$$

Ввиду того, что $\sigma_g *$ — автоморфизм, он, в частности, переводит эрмитовы операторы в эрмитовы. Отсюда следует, что $\hat{U}_g$ лишь множителем отличается от унитарного оператора. Таким образом, $\hat{U}_g$ можно считать унитарным оператором, а неопределенный множитель λ — таким, что $|\lambda| = 1$.

Операторы $\hat{U}_g$ осуществляют унитарное проективное представление группы G.

Докажем неприводимость $\hat{U}_g$. Пусть $\hat{f}_0 \in L$, перестановочный с $\hat{U}_g$ и $f_0(x) = \varphi^{-1}(\hat{f}_0)$. В силу (7.2)

$$f_0(g^{-1}x) = (\tau_g f_0)(x) = \varphi^{-1}(\sigma_g \hat{f}_0) = \varphi^{-1}(\hat{U}_g \hat{f}_0 U_g) = \varphi^{-1}(\hat{f}_0) = f_0(x).$$

Ввиду транзитивности действия группы G на $\mathfrak{M}$, отсюда следует, что $f_0(x) = f_0 = \text{const}$. В силу свойства iii) это означает, что $\hat{f}_0 = f_0 I$, где I — единичный оператор в $\mathscr{H}$. Таким образом, каждой алгебре $A \in \tilde{M}$ сопоставлено неприводимое проективное представление $\hat{U}_g$ группы G.

ТЕОРЕМА 7.1 *Алгебры $A_1, A_2 \in \tilde{M}$ естественно изоморфны тогда и только тогда, когда соответствующие им представления $\hat{U}_g^{(1)}$ и $\hat{U}_g^{(2)}$ унитарно эквивалентны.*

Доказательство. Снабдим индексом i, $i = 1, 2$, объекты, относящиеся к алгебре A_i. Пусть представления $\hat{U}_g^{(i)}$ унитарно эквивалентны и $V: \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ — изоморфизм гильбертовых пространств, осуществляющий эту эквивалентность: $V\hat{U}_g^{(1)} = \hat{U}_g^{(2)} V$. С помощью V построим изоморфизмы $L_1 \to L_2$ и $A_1 \to A_2$:

$$\hat{f} \to V\hat{f}V^{-1}, \quad f(x) \to \varphi_2^{-1}(V\varphi_1(f)V^{-1}) = \psi(f). \tag{7.3}$$

Изоморфизм (7.3) $f \to \psi(f)$ является естественным:

$$\psi(\tau_g^{(1)} f) = \varphi_2^{-1}(V\hat{U}_g^{(1)} \varphi_1(f) (\hat{U}_g^{(1)})^{-1} V^{-1}) = \varphi_2^{-1}(\hat{U}_g^{(2)} V \varphi_1(f) V^{-1} (\hat{U}_g^{(2)})^{-1}) = \tau_g^{(2)} \psi(f).$$

Обратно, пусть алгебры A_1, A_2 естественным образом изоморфны и $\psi: A_1 \to A_2$ — изоморфизм. В этом случае $\chi = \varphi_2 \psi \varphi_1^{-1}$ — изоморфизм алгебр L_1 и L_2. Так как L_i — полные операторные алгебры, то существует изоморфизм $V: \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$, порождающий $\chi: \chi\hat{f} = V\hat{f}V^{-1}$, $\hat{f} \in L_1$. Естественность ψ означает тождество $\psi\tau_g^{(1)} = \tau_g^{(2)}\psi$. Из него следует, что $\chi\sigma_g^{(1)} = \sigma_g^{(2)}\chi$, где $\sigma_g^{(i)}$ — автоморфизм L_i вида (7.2). Более подробно:

$$V\hat{U}_g^{(1)}\hat{f}(\hat{U}_g^{(1)})^{-1}V^{-1}=\hat{U}_g^{(2)}V\hat{f}V^{-1}(\hat{U}_g^{(2)})^{-1}. \tag{7.4}$$

Отсюда имеем:

$$V^{-1}(\hat{U}_g^{(2)})^{-1}V\hat{U}_g^{(1)}\hat{f}=\hat{f}V^{-1}(\hat{U}_g^{(2)})^{-1}V\hat{U}_g^{(1)}. \tag{7.5}$$

Так как (7.5) справедливо при любом $\hat{f}\in L_1$, то $V^{-1}(U_g^{(2)})^{-1}V\hat{U}_g^{(1)}=\lambda I$, следовательно, $\hat{U}_g^{(1)}=\lambda V^{-1}\hat{U}_g^{(2)}V$. Полученное равенство означает унитарную эквивалентность проективных представлений $\hat{U}_g^{(1)}$ и $\hat{U}_g^{(2)}$. Теорема доказана.

3. Единственность виковского квантования. Мы будем в этом пункте рассматривать C^n как однородное пространство с группой движений G_1, состоящей из параллельных переносов и унитарных преобразований. Первую из этих подгрупп обозначим H, вторую U. Присоединим к алгебрам A_h, $0<h<\infty$, участвующим в построении виковского квантования, алгебру C комплексных чисел. Для удобства будем считать, что $C=A_\infty$. Квантование, образованное с помощью алгебр A_h, $0<h\leqslant\infty$, будем называть расширенным виковским квантованием.

ТЕОРЕМА 7.2. *Все неприводимые, эффективные, максимальные w^*-квантования в C^n, естественные по отношению к группе G_1, естественным образом эквивалентны. Одним из квантований такого рода является расширенное виковское. Тем самым все эти квантования естественным образом эквивалентны расширенному виковскому квантованию.*

Доказательство. Сопоставим каждой алгебре A_h входящей в расширенное виковское квантование, неприводимое унитарное проективное представление $\hat{U}_g^{(h)}$ группы G_1 так, как это было предложено в п. 2. Согласно теореме 7.1, для доказательства теоремы 7.2 достаточно убедиться в том, что представлениями $\hat{U}_g^{(h)}$ исчерпываются все, с точностью до унитарной эквивалентности, неприводимые проективные представления группы G_1. Каждое проективное представление группы G_1 является линейным представлением некоторого ее центрального расширения $\widetilde{G}_1$ с помощью не более, чем одномерного центра. С помощью стандартных методов гомологической алгебры легко устанавливается, что 1) каждое такое расширение является полупрямым произведением $\widetilde{G}_1=U\times\widetilde{H}$, где U — унитарная группа и $\widetilde{H}$ — расширение группы параллельных переносов H, 2) если группа $\widetilde{H}$ не коммутативна, то она является группой Гейзенберга — Вейля.

Группа H действует на C^n транзитивно. Следовательно, сужение представления $\hat{U}_g^{(h)}$ на H неприводимо. Отсюда сразу следует, что если при некотором h_0 группа $\widetilde{H}$ коммутативна, то пространство F_{h_0} одномерно и, следовательно, $A_{h_0}=C$*.

---

* В качестве $\widetilde{U}_g^{(h_0)}$ в этом случае естественно рассматривать единичное представление ε_g. Отметим, что в смысле топологии в пространстве представлений (см. ([3])) $\varepsilon_g=\lim\limits_{h\to\infty}\hat{U}_g^{(h)}$. Это обстоятельство служит основанием для обозначения $A_\infty=C$.

В случае, если группа $\widetilde{H}$ является группой Гейзенберга — Вейля, каждое ее неприводимое представление единственным образом, с точностью до проективной эквивалентности, достраивается до неприводимого представления группы $\widetilde{G}_1$ *. Вспомним теперь, что согласно § 4, п. 3, представлениями $\hat{U}_g^{(h)}$, $0<h<\infty$, порожденными виковским квантованием, исчерпываются все, с точностью до эквивалентности, неприводимые унитарные представления $\widetilde{H}$. Теорема 7.2 доказана.

Замечание. Пусть B_h — алгебра, естественно изоморфная алгебре виковских символов A_h. Поскольку изоморфизм $\psi: B_h \to A_h$ — линейное соответствие, он должен иметь вид

$$A(z, \bar{z}) = \int \mathscr{K}(z, \bar{z} \mid u, \bar{u}) B(u, \bar{u})\, d\mu(u, \bar{u}), \tag{7.6}$$

где $B \in B_h$, $A = \psi B \in A_h$.

Требование естественности приводит к тому, что

$$\mathscr{K}(gz, g\bar{z} \mid gu, g\bar{u}) = K(z, \bar{z} \mid u, \bar{u}) \text{ при } g \in G_1.$$

Отсюда получаем:

$$\mathscr{K}(z, \bar{z} \mid u, \bar{u}) = K(|z-u|^2) \quad (|z|^2 = \sum |z|^2). \tag{7.7}$$

Формула (4.16), связывающая виковское и вейлевское квантования, является частным случаем (7.6), (7.7).

4. Единственность вейлевского квантования. Обозначим через G_2 группу всех линейных неоднородных канонических преобразований в R^{2n}, т. е. группу всех линейных неоднородных преобразований, оставляющих инвариантной форму $\omega = \sum dp_l \wedge dq_l$. В комплексных координатах $z_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_k + ip_k)$, $\omega = \frac{1}{i}\sum dz_k \wedge d\bar{z}_k$, поэтому рассмотренная в предыдущем пункте группа G_1, сохраняющая метрику $ds^2 = \sum dz_k d\bar{z}_k$, является подгруппой G_2.

Присоединим к алгебрам A_h, $0<h<\infty$, образующим вейлевское квантование, алгебру $A_\infty = C$ и назовем квантование, построенное с помощью алгебр A_h, $0<h\leqslant\infty$, расширенным вейлевским квантованием.

ТЕОРЕМА 7.3. *Расширенное вейлевское квантование является единственным максимальным, неприводимым и эффективным w^*-квантованием, естественным по отношению к группе G_2* **.

---

* Пусть $\hat{T}_g$, $\hat{L}_g$ — неприводимые унитарные представления $\widetilde{G}_1$, сужения которых на $\widetilde{H}$ совпадают: $\hat{T}_\xi = \hat{L}_\xi$ при $\xi \in \widetilde{H}$. Так как $\widetilde{H}$ является нормальным делителем $\widetilde{G}_1$, то

$$\hat{T}_g \hat{T}_\xi \hat{T}_g^{-1} = \hat{T}_{g\xi g^{-1}}, \quad \hat{L}_g \hat{T}_\xi \hat{L}_g^{-1} = \hat{L}_{g\xi g^{-1}} = \hat{T}_{g\xi g^{-1}},$$

откуда $\hat{L}_g^{-1}\hat{T}_g\hat{T}_\xi = \hat{T}_\xi \hat{L}_g^{-1}\hat{T}_g$. В силу неприводимости T_ξ, отсюда следует, что $\hat{T}_g = \lambda \hat{L}_g$, т. е. проективная эквивалентность $\hat{T}_g$ и $\hat{L}_g$.

** Аналогичный результат с других позиций был получен в ([22]).

Чтобы не затемнять простой идеи сложными деталями, ограничимся эвристическим доказательством этой теоремы.

Первый этап. Повторяя во всех деталях доказательство теоремы 7.2, находим, что расширенное вейлевское квантование является единственным, с точностью до естественной эквивалентности, квантованием, обладающим свойствами, перечисленными в условии теоремы 7.3.

Второй этап. Пусть B_h — алгебра вейлевских символов и A_h — некоторая естественно изоморфная ей алгебра. Изоморфизм $\psi: B_h \to A_h$ запишем в виде (7.6). Требование естественности по отношению к G_2 приводит к тому, что $\mathscr{K}(gx|gy) = \mathscr{K}(x|y)$, где $x = (z, \bar{z})$, $y = (v, \bar{v})$, $g \in G_2$.

Таким образом, $\mathscr{K}(x|y)$ является инвариантом пары точек. Однако в R^{2n} нет инвариантов пары точек относительно группы G_2. Следовательно, $\mathscr{K}(x|y) = \delta(x-y)$, где $\delta(x)$ — δ — функция Дирака, и $A = B$ *.

§ 8. Заключительные замечания

1. Несуществование универсального квантования. Обозначим через $\mathscr{G}$ группу всех взаимно однозначных преобразований пространства R^{2n}, оставляющих инвариантной форму $\omega = \Sigma dp_i \wedge dq_i$, т. е. группу всех, в том числе нелинейных, канонических преобразований. Квантование, естественное по отношению к $\mathscr{G}$, назовем универсальным.

ТЕОРЕМА 8.1. *Не существует неприводимого универсального w^*-квантования.*

Прежде чем доказывать эту теорему, отметим, что она решает в отрицательную сторону вопрос о существовании квантования, естественного по отношению к категории всех морфизмов классических механик.

Доказательство теоремы 8.1. Пусть Q — универсальное квантование. Без ограничения общности можно считать его максимальным. В таком случае оно совпадает с вейлевским. В самом деле, поскольку группа всех линейных канонических преобразований является подгруппой $\mathscr{G}$, квантование Q удовлетворяет условиям теоремы 7.3. Следовательно, закон умножения в алгебрах A_h задается формулой (4.13). Таким образом, для универсальности квантования Q необходимо, чтобы

$$F(gx_1, gx_2, gx_3) = F(x_1, x_2, x_3), \tag{8.1}$$

где

$$F(x_1, x_2, x_3) = \int\limits_{\Delta(x_1, x_2, x_3)} \omega,$$

$\Delta(x_1, x_2, x_3)$ — треугольник с вершинами в x_1, x_2, x_3. Если преобразование $g \in \mathscr{G}$ не переводит прямые линии в прямые, т. е. не является аффинным, то равенство (8.1) невозможно (поскольку стороны треугольника $\Delta(x_1, x_2, x_3)$ являются отрезками прямых).

* Движущей пружиной строгого доказательства теоремы 7.3 является неприводимость представления G_2 в $L^2(R^{2n})$, определяемого формулой $(\tau_g f)(x) = f(g^{-1}x)$.

Теорема доказана. Ее доказательство можно резюмировать словами: группа $\mathcal{G}$ не имеет инвариантов трех точек.

2. Терминологическое замечание. Обозначим через $\mathcal{L}(\mathfrak{M})$ алгебру Ли относительно скобки Пуассона, состоящую из бесконечно дифференцируемых функций на симплектическом многообразии $\mathfrak{M}$. Термин «квантование» иногда употребляется по отношению к линейному представлению этой алгебры. Такое словоупотребление мне кажется неправильным в связи с тем, что квантование, используемое в физике, ни при каком его математическом осмыслении не является линейным представлением алгебры $\mathcal{L}(\mathfrak{M})$. Докажем в связи с этим следующую теорему.

Обозначим через $\mathcal{L}_0$ алгебру Ли относительно обычной скобки Пуассона, состоящую из многочленов двух переменных $\varphi(p, q)$.

ТЕОРЕМА 8.2. *Не существует представления T_φ алгебры $\mathcal{L}_0$ в $L^2(R^1)$ со свойствами*:

1) *пространство Шварца S входит в область определения всех T_φ и инвариантно относительно всех T_φ*;

2) $$T_p f = i\hat{p} f = i\frac{h}{i}\frac{df}{dx}, \quad T_q f = i\hat{q} f = ixf. \tag{8.2}$$

Доказательство. Разобьем доказательство на несколько этапов.

1) Пусть T_φ — представление со свойствами (8.2). Покажем, что оператор $T_{p^m q^n}$ может быть представлен в виде многочлена от операторов $\hat{p}, \hat{q}$ степени не выше m по $\hat{p}$ и не выше n по $\hat{q}$. Прежде всего заметим, что из равенства

$$0 = T_{[q, q^n]} = [T_q, T_{q^n}] = [i\hat{q}, T_{q^n}]$$

следует, что $T_{q^n} = f_n(\hat{q})$. Аналогично, $T_{p^n} = g_n(\hat{p})$. Из инвариантности пространства S относительно T_{p^n}, T_{q^n} и преобразования Фурье вытекает, что функции вещественного переменного $f_n(x)$, $g_n(x)$ бесконечно дифференцируемы.

Далее, если $f(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция, то

$$[p, f(q)] = f'(q), \quad [\hat{p}, f(\hat{q})] = \frac{h}{i} f'(\hat{q}) \tag{8.3}$$

(в первом равенстве — скобка Пуассона, во втором — коммутатор).

Применяя (8.3) $n+1$ раз, получаем, что

$$0 = T_{[p,\ldots,[p,[p,q^n]]]} = i^{n+1}[\hat{p}, \ldots, [\hat{p}, f_n(\hat{q})]] = h^{n+1} f_n^{(n+1)}(\hat{q}),$$

где $f_n^{(n+1)}(x) = \dfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} f_n(x)$. Следовательно, $f_n(x)$ — многочлен степени не выше n. Тем же свойством обладает $g_n(x)$. Заметим теперь, что

$$p^m q^n = \frac{1}{(m+1)(n+1)}[p^{m+1}, q^{n+1}].$$

Следовательно,

$$T_{p^m q^n} = \frac{1}{(m+1)(n+1)} [q_{m+1}(\hat{p}), f_{n+1}(\hat{q})].$$

Используя коммутационное соотношение $[\hat{p}, \hat{q}] = \frac{h}{i} I$, получаем отсюда в результате очевидных преобразований, что оператор $T_{p^m q^n}$ может быть записан как полином от $\hat{p}, \hat{q}$ степени не выше m по $\hat{p}$ и не выше n по $\hat{q}$.

2) Обозначим через $\mathcal{A}_\varphi(p, q)$ вейлевский символ * оператора T_φ. Покажем, что **

$$\mathcal{A}_\varphi(p, q) = ih\varphi\left(\frac{p}{h}, \frac{q}{h}\right) + c, \quad c = c(\varphi) = \text{const}. \tag{8.4}$$

Воспользуемся следующей общей формулой ([15]). Пусть $\hat{f}_1, \hat{f}_2$ — некоторые операторы, $f_1(p, q), f_2(p, q)$ — их вейлевские символы. Пусть, далее, $\hat{g} = [\hat{f}_1, \hat{f}_2]$ и $g(p, q)$ — вейлевский символ $\hat{g}$. Тогда

$$g(p, q) = \frac{h}{i}[f_1, f_2] +$$

$$+ \sum_1^\infty \left(\frac{h}{2}\right)^{2n+1} \sum_{k+l=2n+1} \frac{i^{k-l}}{k!l!} \left(\frac{\partial^{k+l} f_1}{\partial q^k \partial p^l} \frac{\partial^{k+l} f_2}{\partial p^k \partial q^l} - \frac{\partial^{k+l} f_1}{\partial p^k \partial q^l} \frac{\partial^{k+l} f_2}{\partial p^l \partial q^k}\right), \tag{8.5}$$

где $[f_1, f_2] = \frac{\partial f_1}{\partial p}\frac{\partial f_2}{\partial q} - \frac{\partial f_1}{\partial q}\frac{\partial f_2}{\partial p}$ — скобка Пуассона.

Для дальнейшего существенно, что если f_1 — многочлен не выше 2-й степени, f_2 — произвольный многочлен, то все слагаемые в (8.5), кроме 1-го, равны нулю

Согласно условию теоремы, формула (8.4) с константой $c=0$ справедлива при $\varphi = p$ и $\varphi = q$. Найдем $\mathcal{A}_{q^2}(p, q)$. Согласно предыдущему, $\mathcal{A}_{q^2}(p,q) =$

* Вейлевский символ дифференциального оператора с полиномиальными коэффициентами получается из общей формулы (4.8), когда $\varphi(\alpha, \beta)$ — линейная комбинация δ-функции и ее производных. Для этих операторов может быть дано также независимое определение вейлевского символа, которое состоит в следующем. Пусть A, B — произвольные некоммутирующие операторы. Симметрическим произведением $(A^m B^n)$ этих операторов называется коэффициент при $\frac{(m+n)}{m!\,n!}\alpha^m\beta^n$ в разложении

$$(\alpha A + \beta B)^N = \sum_{m+n=N} \frac{N!}{m!n!}\alpha^m\beta^n (A^m B^n).$$

(Например, $(AB) = \frac{1}{2}(AB + BA)$.) Используя соотношение $[\hat{p}, \hat{q}] = \frac{h}{i} I$, можно каждый оператор, являющийся полиномом от $\hat{p}$ и $\hat{q}$, записать в симметричной форме: $\hat{A} = \sum a_{mn}(\hat{p}^m \hat{q}^n)$. Вейлевским символом оператора $\hat{A}$ является производящая функция для коэффициентов a_{mn}: $\mathcal{A}(p, q) = \sum a_{mn} p^m q^n$.

** Будет доказано также, что константа c в (8.4) равна 0. Однако это усиление (8.4) нам не потребуется.

$= f_2(q)$ — многочлен не выше 2-й степени. Применяя (8.5), получаем:

$$2iq = \mathcal{A}_{[p,q^2]}(p, q) = h[p, f_2(q)] = hf_2'(q).$$

Отсюда $f_2(q) = \frac{i}{h}q^2 + c_1$. Аналогично, $g_2(p) = \frac{i}{h}p^2 + c_2$.

Далее, $pq = \frac{1}{4}[p^2, q^2]$. Поэтому

$$\mathcal{A}_{pq} = \frac{1}{4}\mathcal{A}_{[p^2,q^2]}(pq) = \frac{1}{4}\frac{h}{i}[g_2(p), f_2(q)] = \frac{i}{h}pq.$$

Таким образом, соотношение (8.4) справедливо, если φ — многочлен не выше 2-й степени.

Перейдем к общему случаю. Пусть φ — многочлен не выше 2-й степени и f — произвольный многочлен. Согласно (8.5),

$$\mathcal{A}_{[\varphi,f]}(p, q) = \frac{h}{i}[\mathcal{A}_\varphi, \mathcal{A}_f]. \tag{8.6}$$

Полагая в (8.6) $\varphi = p$ и $\varphi = q$, получаем:

$$\mathcal{A}_{\frac{\partial f}{\partial q}} = h\frac{\partial \mathcal{A}_f}{\partial q}, \quad \mathcal{A}_{\frac{\partial f}{\partial p}} = h\frac{\partial \mathcal{A}_f}{\partial p}. \tag{8.7}$$

Положим $\mathcal{B}_f(p, q) = \mathcal{A}_f(ph, qh)$. Из (8.7) следует, что

$$\mathcal{B}_{\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{\partial \mathcal{B}_f}{\partial q}, \quad \mathcal{B}_{\frac{\partial f}{\partial p}} = \frac{\partial \mathcal{B}_f}{\partial p}. \tag{8.8}$$

Обозначим через L линейный оператор $f \to \mathcal{B}_f$. Как уже отмечалось, $\mathcal{A}_f$ и, следовательно, $\mathcal{B}_f$ является многочленом, степень которого по совокупности p, q не превосходит степени f. Обозначим через $\mathcal{L}_n$ пространство многочленов степени не более n по совокупности p, q. Пространство $\mathcal{L}_n$ инвариантно относительно L, кроме того, из (8.8) следует, что оператор L перестановочен с $\frac{\partial}{\partial p}$ и $\frac{\partial}{\partial q}$. Отсюда следует, что

$$L = \sum_0^\infty L_n, \quad L_n = \sum_{k+l=n} a_{kl}\frac{\partial^n}{\partial p^k \partial q^l}, \quad a_{kl} = \text{const}. \tag{8.9}$$

(Ряд в первом равенстве (8.9) является формальным. Он имеет смысл, поскольку оператор L применяется лишь к многочленам.)

Воспользуемся соотношением (8.6) в случае, когда φ — однородный многочлен 2-й степени:

$$\mathcal{B}_{[\varphi,f]}(p, q) = \mathcal{A}_{[\varphi,f]}(ph, qh) = \frac{h}{i}[\mathcal{A}_\varphi, \mathcal{A}_f](ph, qh) = [\varphi, \mathcal{A}_f](ph, qh) =$$

$$= [\varphi, \mathcal{B}_f](p, q).$$

Следовательно, оператор L перестановочен также с оператором скобки Пуассона с φ, т. е. с операторами

$$p\frac{\partial}{\partial q}, \quad q\frac{\partial}{\partial p}, \quad p\frac{\partial}{\partial p}, \quad q\frac{\partial}{\partial q}. \tag{8.10}$$

Заметим, что коммутатор с операторами (8.10) не меняет порядка у однородного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. Следовательно, каждый оператор L_n коммутирует с операторами (8.10). В частности,

$$0 = \left[L_n,\ p\frac{\partial}{\partial p}\right] = \sum_{k+l=n} k a_{kl} \frac{\partial^n}{\partial p^k \partial q^l},$$

$$0 = \left[L_n,\ q\frac{\partial}{\partial q}\right] = \sum_{k+l=n} l a_{kl} \frac{\partial^n}{\partial p^k \partial q^l}.$$

Следовательно, $a_{kl}=0$ при $k\neq 0$, $l\neq 0$, т. е. $L_n=0$ при $n\neq 0$. Итак, $L=L_0$, $\mathscr{B}_f(p, q)=L_0 f(p, q)$, $\mathscr{A}_f(p, q)=L_0 f\left(\frac{p}{h}, \frac{q}{h}\right)$. Из условия $\mathscr{A}_p(p, q)=ip$ находим, что $L_0=ih$. Равенство (8.4) доказано.

3) Согласно (8.4),

$$\mathscr{A}_{p^4}(p, q) = \frac{i}{h^3} p^4 + c_1, \quad \mathscr{A}_{q^4}(p, q) = \frac{i}{h^3} q^4 + c_2,$$

$$\mathscr{A}_{[p^4, q^4]} = 16\, \mathscr{A}_{p^3 q^3} = 16 \frac{i}{h^5} p^3 q^3 + c_3.$$

Применяя (8.5), получаем:

$$16 \frac{i}{h^5} p^3 q^3 + c_3 = \mathscr{A}_{[p^4, q^4]} = \frac{h}{i} [\mathscr{A}_{p^4}, \mathscr{A}_{q^4}] +$$

$$+ \left(\frac{h}{2}\right)^3 2 \frac{i^{-3}}{3!} \frac{\partial^3 \mathscr{A}_{p^4}}{\partial p^3} \frac{\partial^3 \mathscr{A}_{q^4}}{\partial q^3} = 16 \frac{i}{h^5} p^3 q^3 + \frac{i}{h^3 4 \cdot 3!} (4!)^2 pq. \qquad (8.11)$$

Равенство (8.11) противоречиво. Теорема доказана.

ДОПОЛНЕНИЕ

1. Асимптотика некоторых интегралов. Пусть $\varphi(t, \bar{t})$ — четырежды и $u(t, \bar{t})$ — трижды непрерывно дифференцируемые функции в области $D \subset C^n$, определяемой условиями $|t_i| < \varepsilon$. Пусть, кроме того, функция $\varphi(t, \bar{t})$ имеет при $t=0$ локальный максимум и $\det \left\| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_i \partial \bar{t}_k} \right\| \neq 0$.

Обозначим через L_t оператор $L_t = \sum t_i \frac{\partial}{\partial z_i}$, через $\bar{L}_t$ — оператор $\bar{L}_t = \sum \bar{t}_i \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}$, через R — функцию

$$R = \sum_{p+q=5} t_{i_1} \ldots t_{i_p} \bar{t}_{j_1} \ldots t_{j_q} \widetilde{R}_{i_1, \ldots, i_p \mid j_1, \ldots, j_q}(t, \bar{t}),$$

где $\widetilde{R}_{i_1, \ldots, i_p \mid j_1, \ldots, j_q}(t, \bar{t})$ — непрерывная в замыкании D функция. Не оговариваясь в дальнейшем, будем считать для краткости, что

$$L_t^p \bar{L}_t^q \varphi = L_t^p \bar{L}_t^q \varphi \big|_{z=\bar{z}=0}.$$

Наконец, положим

$$g(t, \bar{t}) = \det \left\| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_i \partial \bar{t}_k} \right\|, \qquad dt d\bar{t} = \prod \frac{dt^k \wedge d\bar{t}^k}{2\pi i}$$

Рассмотрим интеграл

$$\mathcal{J}_h(u) = h^{-n} \int u(t, \bar{t})\, g(t, \bar{t})\, e^{-\frac{1}{h} Q(t, \bar{t})}\, dt d\bar{t},$$

где

$$Q(t, \bar{t}) = L_t \bar{L}_t \varphi + \frac{1}{2}(L_t^2 \bar{L}_t + \bar{L}_t^2 L_t)\varphi + \frac{1}{4} L_t^2 \bar{L}_t^2 \varphi + \frac{1}{6}(L_t^3 \bar{L}_t + \bar{L}_t^3 L_t)\varphi + \\ + R(t, \bar{t}). \qquad (\text{Д. } 1)$$

ЛЕММА 1. *При достаточно малом* ε *интеграл* $\mathcal{J}_h(u)$ *имеет при* $h \to 0$ *асимптотику*:

$$\mathcal{J}_h(u) = u(0, 0) + h\left(\Delta u + \frac{3}{2} u \Delta \ln g\right)\Big|_{t=\bar{t}=0} + o(h),$$

где Δ — *оператор Лапласа — Бельтрами метрики* $ds^2 = \sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_i \partial \bar{t}_k} dt_i d\bar{t}_k$.

Доказательство. Положим

$$\psi(t, \bar{t}) = e^{-\frac{1}{h} Q'(t, \bar{t})} - 1,$$

$$Q' = \frac{1}{2}(L_t^2 \bar{L}_t + \bar{L}_t^2 L_t)\varphi + \frac{1}{4} L_t^2 \bar{L}_t^2 \varphi + \frac{1}{6}(L_t^3 \bar{L}_t + \bar{L}_t^3 L_t)\varphi + R, \qquad (\text{Д. } 2)$$

и разложим ψ по степеням $1/h$:

$$\psi = \psi_0 + \tilde{R},$$

$$\psi_0 = -\frac{1}{h}\left[\frac{1}{2}(L_t^2 \bar{L}_t + \bar{L}_t^2 L_t)\varphi + \frac{1}{4} L_t^2 \bar{L}_t^2 \varphi + \right. \\ \left. + \frac{1}{6}(L_t^3 \bar{L}_t + \bar{L}_t^3 L_t)\varphi\right] + \frac{1}{4h^2} L_t^2 \bar{L}_t \varphi \cdot \bar{L}_t^2 L_t \varphi. \qquad (\text{Д. } 3)$$

В соответствии с формулами (Д. 2) и (Д. 3) интеграл $\mathcal{J}_h(u)$ представляется в виде $\mathcal{J}_h(u) = \mathcal{J}_h^0(u) + \tilde{\mathcal{J}}_h(u)$, где

$$\mathcal{J}_h^0(u) = \frac{1}{h^n} \int (1 + \psi_0)\, u g e^{-\frac{1}{h} L_t \bar{L}_t \varphi}\, dt d\bar{t}, \qquad (\text{Д. } 4)$$

$$\tilde{\mathcal{J}}_h(u) = \frac{1}{h^n} \int \tilde{R} u g e^{-\frac{1}{h} L_t \bar{L}_t \varphi}\, dt d\bar{t}. \qquad (\text{Д. } 5)$$

Стандартные для метода перевала оценки показывают, что при достаточно малом ε $\tilde{\mathcal{J}}_h(u) = o(h)$. Поэтому для наших целей следует ограничиться интегралом $\mathcal{J}_h^0(u)$.

В окрестности точки $t = \bar{t} = 0$

$$u(t, \bar{t})\, g(t, \bar{t}) = u(0, 0)\, g(0, 0) + L_t(ug) + \bar{L}_t(ug) + L_t \bar{L}_t(ug) + T(t, \bar{t}), \qquad (\text{Д. } 6)$$

где

$$T(t, \bar{t}) = \sum_{p+q=3} t_{i_1} \ldots t_{i_p} \bar{t}_{j_1} \ldots \bar{t}_{j_q} \widetilde{T}_{i_1,\ldots,i_p|j_1,\ldots,j_q}$$

и $\widetilde{T}_{i_1,\ldots,i_p|j_1,\ldots,j_q}$ — непрерывная функция.

В соответствии с (Д. 6) интеграл $\mathcal{J}_h^0(u)$ распадается в сумму слагаемых, которые удобно исследовать отдельно. Начнем с первого:

$$\mathcal{J}_h^{01}(u) = u(0, 0)\, g(0, 0) \frac{1}{h^n} \int (1 + \psi_0)\, e^{-\frac{1}{h} L_t \bar{L}_t \varphi}\, dt d\bar{t}. \qquad (Д.\ 7)$$

Подставим в (Д.7) ψ_0 из (Д.3) и исследуем возникающие интегралы.

$$1) \int L_t^2 \bar{L}_t \varphi e^{-\frac{1}{h} L_t \bar{L}_t \varphi}\, dt d\bar{t} = \int L_t \bar{L}_t^2 \varphi e^{-\frac{1}{h} L_t \bar{L}_t \varphi}\, dt d\bar{t} = 0. \qquad (Д.\ 8)$$

В самом деле, совершая замену переменных $t \to \theta t$, $\bar{t} \to \bar{\theta} t$, $|\theta| = 1$, получаем, что первый из этих интегралов приобретает множитель θ, второй — множитель $\bar{\theta}$. Так как, с другой стороны, они не зависят от θ, то оба они равны нулю. Аналогичным образом устанавливаются равенства

$$\int L_t^3 \bar{L}_t \varphi e^{-\frac{1}{h} L_t \bar{L}_t \varphi}\, dt d\bar{t} = \int L_t \bar{L}_t^3 \varphi e^{-\frac{1}{h} L_t \bar{L}_t \varphi}\, dt d\bar{t} = 0.$$

2) Рассмотрим следующее формальное тождество:

$$\int (L_t^2 \bar{L}_t^2 \varphi)(z, \bar{z})\, e^{-\frac{1}{h} L_t \bar{L}_t \varphi}\, dt dt =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial \mu}\right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\mu}}\right)^2 \int e^{-\frac{1}{h} L_t \bar{L}_t \varphi + \mu L_t + \bar{\mu} \bar{L}_t} \varphi(z, \bar{z})\, dt d\bar{t} \Big|_{\mu = \bar{\mu} = 0}, \qquad (Д.\ 9)$$

где $e^{-\frac{1}{h} L_t \bar{L}_t \varphi + \mu L_t + \bar{\mu} \bar{L}_t}$ означает оператор, действующий на функцию $\varphi(z, \bar{z})$ согласно формуле

$$e^{-\frac{1}{h} L_t \bar{L}_t \varphi + \mu L_t + \bar{\mu} \bar{L}_t} \varphi(z, \bar{z}) = e^{-\frac{1}{h} L_t \bar{L}_t \varphi} \varphi(z + \bar{\mu} t, \bar{z} + \mu t).$$

Выделяя в показателе в правой части (Д.9) полный квадрат и интегрируя по t, $\bar{t}$, находим, что

$$\int (L_t^2 \bar{L}_t^2 \varphi)(z, \bar{z})\, e^{-\frac{1}{h} L_t \bar{L}_t \varphi}\, dt d\bar{t} =$$

$$= h^n g^{-1} \frac{\partial^4}{\partial \mu^2 \partial \bar{\mu}^2} e^{h \mu \bar{\mu} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \Phi \frac{\partial}{\partial z}} \varphi(z, \bar{z}) \Big|_{\mu = \bar{\mu} = 0} = 2 g^{-1} h^{n+2} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \Phi \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 \varphi(z, \bar{z}), \qquad (Д.10)$$

где $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \Phi \frac{\partial}{\partial z} = \sum \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \widetilde{\varphi}_{ik} \frac{\partial}{\partial z_k}$, $\Phi = \|\widetilde{\varphi}_{ik}\|$ — матрица, обратная к $\left\| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \partial \bar{z}_k} \right\|$.

3) Заметим, что

$$L_t^2\bar{L}_t\varphi\cdot L_t\bar{L}_t^2\varphi=$$

$$=\left(\sum t_i\frac{\partial}{\partial v_i}\right)^2\left(\sum\bar{t}_i\frac{\partial}{\partial\bar{v}_i}\right)\left(\sum t_i\frac{\partial}{\partial w_i}\right)\left(\sum\bar{t}_i\frac{\partial}{\partial\bar{w}_i}\right)^2\varphi(v,\bar{v})\,\varphi(w,\bar{w})\Big|_{\substack{v=w=0\\ \bar{v}=\bar{w}=0}},$$

и обозначим для краткости

$$L_t^{(1)}=\sum t_i\frac{\partial}{\partial v_i},\quad L_t^{(2)}=\sum t_i\frac{\partial}{\partial w_i},$$
$$\bar{L}_t^{(1)}=\sum\bar{t}_i\frac{\partial}{\partial\bar{v}_i},\quad \bar{L}_t^{(2)}=\sum\bar{t}_i\frac{\partial}{\partial\bar{w}_i}. \tag{Д. 11}$$

Совершим теперь преобразование, аналогичное предыдущему:

$$\int L_t^{(1)}(\bar{L}_t^{(1)})^2(L_t^{(2)})^2(\bar{L}_t^2)\varphi(v,\bar{v})\,\varphi(w,\bar{w})\,e^{-\frac{1}{h}L_t\bar{L}_t\varphi}\,dt\,d\bar{t}=$$

$$=\frac{\partial^6}{\partial\mu^2\partial\bar{\mu}\partial\sigma\partial\bar{\sigma}^2}\int e^{-\frac{1}{h}L_t\bar{L}_t\varphi+\mu\bar{L}_t^{(1)}+\bar{\mu}L_t^{(1)}+\sigma\bar{L}_t^{(2)}+\bar{\sigma}L_t^{(2)}}\times$$

$$\times\varphi(v,\bar{v})\,\varphi(w,\bar{w})\prod dt\,d\bar{t}\Big|_{\mu=\sigma=0}=$$

$$=h^ng^{-1}\frac{\partial^6}{\partial\mu^2\partial\bar{\mu}\partial\sigma\partial\bar{\sigma}^2}e^{h\left(\mu\frac{\partial}{\partial\bar{v}}+\sigma\frac{\partial}{\partial\bar{w}}\right)\Phi\left(\bar{\mu}\frac{\partial}{\partial v}+\bar{\sigma}\frac{\partial}{\partial w}\right)}\varphi(v,\bar{v})\,\varphi(w,\bar{w})\Big|_{\mu=\sigma=0}=$$

$$=h^{n+3}g^{-1}\left[2\left(\frac{\partial}{\partial\bar{v}}\Phi\frac{\partial}{\partial w}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial\bar{w}}\Phi\frac{\partial}{\partial v}\right)+4\left(\frac{\partial}{\partial\bar{v}}\Phi\frac{\partial}{\partial w}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\bar{v}}\Phi\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\bar{w}}\Phi\frac{\partial}{\partial w}\right)\right]\times$$

$$\times\varphi(v,\bar{v})\,\varphi(w,\bar{w}). \tag{Д. 12}$$

Продолжим преобразование интегралов (Д.10) и (Д.12). Положим для краткости

$$\varphi_{ik}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_i\partial\bar{z}_k}\Big|_{z=\bar{z}=0}$$

и

$$\frac{\partial^{p+q}}{\partial\bar{z}^p\partial z^q}\varphi_{ik}=\frac{\partial^{p+q}}{\partial\bar{z}^p\partial z^q}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^i\partial z^k}\Big|_{z=\bar{z}=0}.$$

В этих обозначениях получаем, что интеграл (Д.10) при $z=\bar{z}=0$ равен

$$2g^{-1}h^{n+2}\sum\tilde{\varphi}_{ik}\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\varphi_{ki}}{\partial\bar{z}_\alpha\partial z_\beta}.$$

Аналогично, интеграл (Д.12) при $v=\bar{v}=w=\bar{w}=0$ равен

$$2h^{n+3}g^{-1}\left[\frac{\partial\varphi_{ti}}{\partial\bar{z}_j}\frac{\partial\varphi_{ts}}{\partial z_k}+2\frac{\partial\varphi_{ti}}{\partial\bar{z}_j}\frac{\partial\varphi_{ts}}{\partial z_k}\right]\tilde{\varphi}_{ik}\tilde{\varphi}_{jt}\tilde{\varphi}_{st}.$$

Таким образом, для интеграла (Д.7) получается следующее окончатель-

ное выражение:

$$\mathcal{J}_h^{01}(u) = u(0,\ 0)\left[1 + \frac{h}{2}\left\{\sum \tilde{\varphi}_{ik}\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\varphi_{kl}}{\partial\bar{z}_\alpha\partial z_\beta} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum \tilde{\varphi}_{tk}\tilde{\varphi}_{jl}\tilde{\varphi}_{st}\left(\frac{\partial\varphi_{tl}}{\partial\bar{z}_j}\frac{\partial\varphi_{ls}}{\partial z_k} + 2\frac{\partial\varphi_{lt}}{\partial\bar{z}_j}\frac{\partial\varphi_{ts}}{\partial z_k}\right)\right\}\right]. \qquad (Д.\ 13)$$

Перейдем к следующему интегралу:

$$\mathcal{J}^{02}(u) = \frac{1}{h^n}\int L_t(ug)(1 + \psi_0)\, e^{-L_t\bar{L}_t\varphi}dt d\bar{t}. \qquad (Д.\ 14)$$

Прежде всего находим, что

$$\int L_t(ug)\, e^{-\frac{1}{h}L_tL_t\varphi}\prod dt d\bar{t} = \int L_t(ug)(L_t^2\bar{L}_t^2\varphi)\, e^{-\frac{1}{h}L_t\bar{L}_t\varphi} =$$

$$= \int L_t(ug)(L_t^2\bar{L}_t\varphi)(\bar{L}_t^2L_t\varphi)\, e^{-\frac{1}{h}L_t\bar{L}_t\varphi}\prod dt d\bar{t} =$$

$$= \int L_t(ug)(L_t^2\bar{L}_t\varphi)\, e^{-\frac{1}{h}L_t\bar{L}_t\varphi}\prod dt d\bar{t} = 0. \qquad (Д.\ 15)$$

Равенства (Д.15) устанавливаются из тех же соображений, что (Д.8). Таким образом,

$$\mathcal{J}_h^{02}(u) = -\frac{1}{2h^{n+1}}\int L_t(ug)(\bar{L}_t^2L_t\varphi)\, e^{-\frac{1}{h}L_t\bar{L}_t\varphi}dt d\bar{t}. \qquad (Д.\ 16)$$

Введем, как ранее, операторы $L_t^{(1)}$, $\bar{L}_t^{(1)}$, $L_t^{(2)}$, $\bar{L}_t^{(2)}$ с помощью формул (Д. 11) и рассмотрим вспомогательный интеграл, отличающийся от (Д. 16) тем, что в нем предэкспоненциальный множитель заменен на

$$(L_t^{(1)}ug)(v,\ \bar{v})((\bar{L}_t^{(2)})^2L_t^{(2)}\varphi)(w,\ \bar{w}).$$

Используя те же соображения, что при вычислении интеграла $\mathcal{J}^{01}$, находим, что

$$\mathcal{J}_h^{02}(u) = -\frac{g^{-1}}{2h}\frac{\partial^4}{\partial\sigma^2\partial\bar{\mu}\partial\bar{\sigma}}\times$$

$$\times e^{h\left(\mu\frac{\partial}{\partial\bar{v}} + \sigma\frac{\partial}{\partial\bar{w}}\right)}\Phi\left(\bar{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial v} + \bar{\sigma}\frac{\partial}{\partial w}\right)\right)u(v,\bar{v})\, g(v,\bar{v})\,\varphi(w,\ \bar{w})\Big|_{\substack{\sigma=\mu=0\\ v=w=0}}.$$

Отсюда следует, что

$$\mathcal{J}_h^{02}(u) = -hg^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial\bar{w}}\Phi\frac{\partial}{\partial w}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\bar{w}}\Phi\frac{\partial}{\partial v}\right)u(v,\ \bar{v})\, g(v,\bar{v})\,\varphi(w,\bar{w})\Big|_{v=w=0} =$$

$$= -hg^{-1}\tilde{\varphi}_{tk}\tilde{\varphi}_{jl}\frac{\partial\varphi_{kl}}{\partial\bar{z}_j}\frac{\partial}{\partial z_l}(u(z,\ \bar{z})\, g(z,\bar{z}))\Big|_{z=\bar{z}=0}. \qquad (Д.\ 17)$$

Аналогично вычисляется интеграл

$$\mathcal{J}_h^{03}(u) = \frac{1}{h^n}\int \bar{L}_t(ug)(1 + \psi_0)\, e^{-\frac{1}{h}L_t\bar{L}_t\varphi}dt d\bar{t}.$$

Он оказывается равным

$$\mathcal{J}_h^{03}(u) = -hg^{-1}\tilde{\varphi}_{ik}\tilde{\varphi}_{jl}\frac{\partial\varphi_{ki}}{\partial z_l}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_j}(ug)\Big|_{z=\bar{z}=0}. \tag{Д. 18}$$

Перейдем к интегралу

$$\mathcal{J}_h^{04}(u) = \frac{1}{h^n}\int(L_t\bar{L}_t ug)(1+\psi_0)\,e^{-\frac{1}{h}L_t\bar{L}_t\varphi}dt d\bar{t}. \tag{Д. 19}$$

Стандартные соображения показывают, что

$$\frac{1}{h^n}\int(L_t\bar{L}_t ug)\,\psi_0\,e^{-\frac{1}{h}L_t\bar{L}_t\varphi}dt d\bar{t} = o(h).$$

Поэтому

$$\mathcal{J}_h^{04}(u) = \frac{1}{h^n}\int(L_t\bar{L}_t ug)\,e^{-\frac{1}{h}L_t\bar{L}_t\varphi}dt d\bar{t} + o(h).$$

Используя тот же прием, что раньше, находим отсюда, что

$$\mathcal{J}_h^{04}(u) = hg^{-1}\sum\tilde{\varphi}_{ik}\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial\bar{z}_k}(ug)\Big|_{z=\bar{z}=0} + o(h). \tag{Д. 20}$$

Наконец, очевидным образом,

$$\mathcal{J}_h^{05}(u) = h^{-n}\int Te^{-\frac{1}{h}L_t\bar{L}_t\varphi}\prod dt d\bar{t} = o(h).$$

Окончательно получаем:

$$\mathcal{J}_h^{0}(u) = u(0,0) + hu_1(0,0) + o(h), \tag{Д. 21}$$

где

$$u_1 = u\Big\{\frac{1}{2}\sum\tilde{\varphi}_{ik}\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\varphi_{ki}}{\partial\bar{z}_\alpha\partial z_\beta} + \frac{1}{2}\sum\tilde{\varphi}_{ik}\tilde{\varphi}_{jl}\tilde{\varphi}_{st}\Big(\frac{\partial\varphi_{tl}}{\partial\bar{z}_j}\frac{\partial\varphi_{ls}}{\partial z_k} +$$
$$+ 2\frac{\partial\varphi_{ll}}{\partial\bar{z}_j}\frac{\partial\varphi_{ts}}{\partial z_k}\Big) - g^{-1}\sum\tilde{\varphi}_{ik}\tilde{\varphi}_{jl}\Big(\frac{\partial\varphi_{ki}}{\partial\bar{z}_j}\frac{\partial g}{\partial z_l} + \frac{\partial\varphi_{ki}}{\partial z_l}\frac{\partial g}{\partial\bar{z}_j}\Big) +$$
$$+ g^{-1}\sum\tilde{\varphi}_{ik}\frac{\partial^2 g}{\partial\bar{z}_i\partial z_k}\Big\} + \sum\frac{\partial u}{\partial z_l}\Big(-\sum\tilde{\varphi}_{ik}\tilde{\varphi}_{jl}\frac{\partial\varphi_{ki}}{\partial\bar{z}_j} +$$
$$+ \sum\tilde{\varphi}_{il}g^{-1}\frac{\partial g}{\partial\bar{z}_i}\Big\} + \sum\frac{\partial u}{\partial\bar{z}_j}\Big(-\sum\tilde{\varphi}_{ik}\tilde{\varphi}_{jl}\frac{\partial\varphi_{ki}}{\partial z_l} + \sum\tilde{\varphi}_{jk}g^{-1}\frac{\partial g}{\partial z_k}\Big) + \sum\tilde{\varphi}_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial\bar{z}_i\partial z_k}. \tag{Д. 22}$$

Преобразуем полученный результат. С этой целью воспользуемся легко проверяемыми тождествами:

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}_{ik}}{\partial x} = -\sum\tilde{\varphi}_{is}\frac{\partial\varphi_{st}}{\partial x}\tilde{\varphi}_{tk}, \tag{Д. 23}$$

$$g^{-1}\frac{\partial g}{\partial x}=\sum\tilde{\varphi}_{ks}\frac{\partial\varphi_{sk}}{\partial x}, \tag{Д. 24}$$

где x означает любое из переменных z_α или $\bar{z}_\alpha$. Используя (Д.24), находим, что

$$\sum\tilde{\varphi}_{il}g^{-1}\frac{\partial g}{\partial\bar{z}_i}=\sum\tilde{\varphi}_{il}\tilde{\varphi}_{ks}\frac{\partial\varphi_{sk}}{\partial\bar{z}_i},$$

откуда следует обращение в нуль коэффициента при $\frac{\partial u}{\partial z_l}$. Аналогичным образом равен нулю коэффициент при $\partial u/\partial\bar{z}_j$.

Перейдем к коэффициенту при u. Из (Д.24) следует, что

$$\sum\tilde{\varphi}_{ik}\tilde{\varphi}_{jl}\left(\frac{\partial\varphi_{kl}}{\partial\bar{z}_j}\frac{\partial g}{\partial z_l}+\frac{\partial\varphi_{ki}}{\partial z_l}\frac{\partial g}{\partial\bar{z}_j}\right)=2g^{-1}\sum\tilde{\varphi}_{jl}\frac{\partial g}{\partial\bar{z}_j}\frac{\partial g}{\partial z_l}.$$

Используя это тождество, а также то обстоятельство, что $\frac{\partial\varphi_{ti}}{\partial\bar{z}_j}=\frac{\partial\varphi_{tj}}{\partial\bar{z}_i}$ (что следует из определения $\varphi_{ti}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_t\partial\bar{z}_i}$), находим, что коэффициент при u равен

$$\frac{1}{2}\sum\tilde{\varphi}_{ik}\left[\sum\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\varphi_{ki}}{\partial\bar{z}_\alpha\partial z_\beta}+\sum\tilde{\varphi}_{jl}\tilde{\varphi}_{st}\frac{\partial\varphi_{tj}}{\partial\bar{z}_l}\frac{\partial\varphi_{ls}}{\partial z_k}\right]+$$
$$+g^{-2}\sum\tilde{\varphi}_{ik}\left(g\frac{\partial^2 g}{\partial\bar{z}_i\partial z_k}-\frac{\partial g}{\partial\bar{z}_i}\frac{\partial g}{\partial z_k}\right).$$

Далее, комбинируя тождества (Д.23) и (Д.24), получаем, что

$$g^{-1}\frac{\partial^2 g}{\partial\bar{z}_i\partial z_k}=\sum\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\varphi_{\beta\alpha}}{\partial\bar{z}_i\partial z_k}+\sum\tilde{\varphi}_{jl}\tilde{\varphi}_{st}\left(\frac{\partial\varphi_{lj}}{\partial\bar{z}_i}\frac{\partial\varphi_{ts}}{\partial z_k}-\frac{\partial\varphi_{tj}}{\partial\bar{z}_l}\frac{\partial\varphi_{ls}}{\partial z_k}\right).$$

Отсюда имеем:

$$\sum\tilde{\varphi}_{ik}\left[\sum\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\varphi_{ki}}{\partial\bar{z}_\alpha\partial z_\beta}+\sum\tilde{\varphi}_{jl}\tilde{\varphi}_{st}\frac{\partial\varphi_{tj}}{\partial\bar{z}_l}\frac{\partial\varphi_{ls}}{\partial z_k}\right]=$$
$$=\sum\tilde{\varphi}_{ik}\left[g^{-1}\frac{\partial^2 g}{\partial\bar{z}_i\partial z_k}-\sum\tilde{\varphi}_{jl}\tilde{\varphi}_{st}\frac{\partial\varphi_{lj}}{\partial\bar{z}_i}\frac{\partial\varphi_{ts}}{\partial z_k}\right]=$$
$$=g^{-2}\sum\tilde{\varphi}_{ik}\left(g\frac{\partial^2 g}{\partial\bar{z}_i\partial z_k}-\frac{\partial g}{\partial\bar{z}_i}\frac{\partial g}{\partial z_k}\right).$$

Заметим теперь, что

$$\frac{\partial^2\ln g}{\partial\bar{z}_i\partial z_k}=g^{-2}\left(g\frac{\partial^2 g}{\partial\bar{z}_i\partial z_k}-\frac{\partial g}{\partial\bar{z}_i}\frac{\partial g}{\partial z_k}\right).$$

Таким образом, коэффициент при u равен $\frac{3}{2}\sum \tilde{\varphi}_{ik}\frac{\partial^2 \ln g}{\partial \bar{z}_i \partial z_k}$. Ниже будет показано (см. лемму 3), что оператор Лапласа — Бельтрами метрики

$$\varphi_{ik} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \partial \bar{z}_k}$$

в применении к функциям равен $\Delta = \sum \tilde{\varphi}_{ik}\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_i \partial z_k}$. Поэтому полученный результат может быть сформулирован в виде:

$$u_1 = \Delta u + \frac{3}{2} u \Delta \ln g.$$

Лемма доказана.

Пусть $u(t, \bar{t})$ — непрерывно (дифференцируемая функция, $\varphi = \Sigma t_i \varphi_{ik} \bar{t}_k$, $i, k = 1, \ldots, n$,— положительно определенная квадратичная форма, R — функция вида

$$R(t, \bar{t}) = \sum_{p+q=3} t_{i_1} \ldots t_{i_p} \bar{t}_{j_1} \ldots \bar{t}_{j_q} \tilde{R}_{i_1, \ldots, i_p | j_1, \ldots, j_q}(t, \bar{t}),$$

где $\tilde{R}_{i_1, \ldots, i_p | j_1, \ldots, j_q}$ — непрерывные функции. Через $g(t, \bar{t})$ обозначим непрерывно дифференцируемую функцию такую, что $g(0, 0) = \det \| \varphi_{ik} \|$.

Рассмотрим интеграл

$$\mathcal{J}_h(u) = \frac{1}{h^n} \int\limits_{|t_i| < \varepsilon} u(t, \bar{t}) g(t, \bar{t}) e^{-\frac{1}{h}[\varphi(t, \bar{t}) + R(t, \bar{t})]} dt d\bar{t}. \qquad (Д. 25)$$

ЛЕММА 2. *При достаточно малом* ε

$$|\mathcal{J}_h(u) - u(0, 0)| \leqslant c \sqrt{h} \max_{\substack{i \\ |t_i| < \varepsilon}} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial t_i} \right|, \left| \frac{\partial u}{\partial \bar{t}_i} \right| \right) + u(0, 0) \cdot o(1), \qquad (Д. 26)$$

где c, $o(1)$ *не зависят от* u.

Доказательство. Сделаем в интеграле (Д. 25) замену переменных $t \to t\sqrt{h}$, $\bar{t} \to \bar{t}\sqrt{h}$. Покажем, что после этого возможен предельный переход под знаком интеграла. Разобьем φ в сумму слагаемых $\varphi = \varphi_0 + \varphi'$, где φ_0 и φ' — положительно определенные квадратичные формы, причем $\varphi' > |R|$ при $|t_i| < \varepsilon$ (этим условием определяется ε). Таким образом, $e^{-\frac{1}{h}(\varphi + R)} \leqslant e^{-\frac{1}{h}\varphi_0}$ и $e^{-\varphi + R(t\sqrt{h}, \bar{t}\sqrt{h})} \leqslant e^{-\varphi_0(t, \bar{t})}$. Следовательно, интеграл $\mathcal{J}_h(u)$ после замены $t \to t\sqrt{h}$, $\bar{t} \to \bar{t}\sqrt{h}$ мажорируется сходящимся, а значит, возможен предельный переход под знаком интеграла, выполняя который, получаем:

$$\lim_{h\to 0} \mathcal{J}_h(u) = u(0, 0).$$

В частности, если $u=\text{const}$, отсюда следует, что $\mathcal{J}_h(u)-u=u\cdot o(1)$, где $o(1)$ не зависит от u.

Пусть теперь $u(0, 0)=0$, $u(t, \bar{t})=\Sigma t_i u_i+\bar{t}\tilde{u}_i$, где u_i, $\tilde{u}_i$ — ограниченные функции. Повторяя прежние соображения, находим, что

$$|\mathcal{J}_h(u)| \leqslant \sqrt{h}\int\sum(|u_i(t\sqrt{h}, \bar{t}\sqrt{h})|+|\tilde{u}_i(t\sqrt{h}, \bar{t}\sqrt{h})|)|t_i| \times$$
$$\times g(t\sqrt{h}, \bar{t}\sqrt{h})e^{-\varphi_0}\prod dt d\bar{t} \leqslant c\sqrt{h}\max_{i,|t_i|<\varepsilon}(|u_i(t, \bar{t})|, |\tilde{u}_i(t, \bar{t})|).$$

При этом u_i, $\tilde{u}_i$ можно выбрать так, что

$$|u_i| \leqslant c\max_{|t_\alpha|<\varepsilon}\left|\frac{\partial u_i}{\partial t_i}\right|, \quad |\tilde{u}_i| \leqslant c\max_{|t_\alpha|<\varepsilon}\left|\frac{\partial u}{\partial \bar{t}_i}\right|.$$

Пусть $u_0(t, \bar{t})=u(0, 0)=\text{const}$. Объединяя этот результат с предыдущим, получаем, что

$$\mathcal{J}_h(u) = \mathcal{J}_h(u-u_0)+\mathcal{J}_h(u_0) = \mathcal{J}_h(u-u_0)+u_0+u_0\cdot o(1),$$

откуда

$$|\mathcal{J}_h(u)-u(0, 0)| \leqslant c\sqrt{h}\max_{i,|t_\alpha|<\varepsilon}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t_i}\right|, \left|\frac{\partial u}{\partial \bar{t}_i}\right|\right)+u(0, 0)\cdot o(1).$$

Лемма доказана.

2. Оператор Лапласа—Бельтрами на келеровом многообразии. Пусть в некоторой области $D\subset C^n$ задана метрика

$$ds^2 = \sum \psi_{ik} dz_i d\bar{z}_k. \tag{Д. 27}$$

Необходимым и достаточным условием для того, чтобы метрика (Д. 27) была келеровой, а также для локального существования функции ψ такой, что $\psi_{ik}=\dfrac{\partial^2\psi}{\partial z_i \partial \bar{z}_k}$, служат тождества

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi_{ik}}{\partial z_\alpha} &= \frac{\partial\psi_{\alpha k}}{\partial z_i},\\ \frac{\partial\psi_{ik}}{\partial \bar{z}_\alpha} &= \frac{\partial\psi_{i\alpha}}{\partial \bar{z}_k}.\end{aligned} \tag{Д. 28}$$

Справедливо следующее общее утверждение.

ЛЕММА 3. *Оператор Лапласа — Бельтрами келеровой метрики* (Д.27) *в применении к функциям* * *имеет вид*

$$\Delta = \sum \tilde{\psi}_{ik} \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_i \partial z_k},$$

где $\|\tilde{\psi}_{ik}\|$ — *матрица, обратная* $\|\psi_{ik}\|$.

Доказательство. Согласно общей формуле,

$$\Delta u = \frac{1}{2} \sum \left[g^{-1} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \tilde{\psi}_{ik} g \frac{\partial}{\partial z_k} u + g^{-1} \frac{\partial}{\partial z_k} \tilde{\psi}_{ik} g \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} u \right] =$$

$$= \sum \tilde{\psi}_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}_i \partial z_k} + \frac{1}{2g} \sum \left[\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} g \tilde{\psi}_{ik} \right) \frac{\partial u}{\partial z_k} + \left(\frac{\partial}{\partial z_k} g \tilde{\psi}_{ik} \right) \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_i} \right].$$

Согласно (Д.23) и (Д.24)

$$g^{-1} \sum \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} g \tilde{\psi}_{ik} = \sum \left(g^{-1} \frac{\partial g}{\partial \bar{z}_i} \tilde{\psi}_{ik} + \frac{\partial \tilde{\psi}_{ik}}{\partial \bar{z}_i} \right) =$$

$$= \sum \tilde{\psi}_{is} \frac{\partial \psi_{sl}}{\partial \bar{z}_i} \tilde{\psi}_{ik} - \sum \tilde{\psi}_{is} \frac{\partial \psi_{st}}{\partial \bar{z}_i} \tilde{\psi}_{tk} = 0,$$

так как, согласно (Д. 28), $\frac{\partial \psi_{sl}}{\partial \bar{z}_i} = \frac{\partial \psi_{sl}}{\partial \bar{z}_l}$. Аналогично устанавливается равенство нулю коэффициента при $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}_i}$.

Поступило
6.IX.1973

Литература

1 **Вейль Г.**, Теория групп и квантовая механика, М.—Л., 1936.

2 **Дирак П. А. М.**, Лекции по квантовой механике, М., «Мир», 1968.

3 **Кириллов А. А.**, Элементы теории представлений, М., «Наука», 1972.

4 **Констант Б.**, Квантование и унитарные представления, Успехи матем. наук, т. 28, в. 1 (1973), 163—225.

5 **Auslander L., Kostant B.**, Quantisation and unitary representations of solvable Lie groups, Bull. Amer. Math. Soc., 73 (1967), 692—695.

6 **Березин Ф. А.**, Квантование в ограниченных комплексных областях, Докл. АН СССР, 211, № 6 (1973), 1263—1266.

7 **Березин Ф. А.**, Несколько замечаний об ассоциативной оболочке алгебры Ли, Функциональный анализ и его приложение, т. I, вып. 2 (1967), 1—14.

8 **Березин Ф. А.**, Ковариантные и контравариантные символы операторов, Изв. АН СССР. Сер. матем., 36 (1972), 1134—1167.

9 **Фукс Б. А.**, Теория аналитических функций нескольких комплексных переменных, М., ГИТТЛ, 1948.

10 **Riecz M.**, Sur les maxima des formes bilinéares et sur les fonctionnelles linéares, Acta Math., 49 (1926), 465—497.

11 **Sakai S.**, c^*-algebras and w^*-algebras, Proc. Internat. Congr. Math., Nice, 1970.

12 **Березин Ф. А.**, Метод вторичного квантования, М., «Наука», 1965.

* Но не к тензорным полям!

[13] **Березин Ф. А.**, Виковские и антивиковские символы операторов, Матем. сб., т. 86 (128), № 4 (1971), 578—610.

[14] **Berezin F. A, Subin M. A.**, Symbols of operators and quantisation, Colloquia Mathematica societatis Janos Bolyai, 5, Hungary (1970), 21—52.

[15] **Березин Ф. А.**, Об одном представлении операторов с помощью функционалов, Тр. Московск. матем. об-ва, т. XVIII (1967), 117—196.

[16] **Vok W.**, Konfiguratiansraum und zweite Quantelung, Zs. Pnys., 75 (1932), 622—647.

[17] **Vok W.**, Zur Quantenelectrodynamik, Sovet Phys., 6 (1934), 425—440.

[18] **Bargmann V.**, On a Hilbert Space of Analytic Functions, Comm. Pure and Appl. Math., 3 (1961), 215—228.

[19] **Березин Ф. А., Минлос Р. А., Фаддеев Л. Д.**, Квантовая механика систем с большим числом степеней свободы, Тр. IV Всесоюзн. матем. съезда 1961 г., т. II, 532—540, М., «Наука», 1964.

[20] von **Neumann J.**, Die Eindentigkeit der Schrödingerischen Operatoren, Math. Ann., 104 (1931), 570—578.

[21] **Винберг Э. Б., Гиндикин С. Г., Пятецкий-Шапиро И. И.**, О классификации и канонической реализации комплексных ограниченных однородных областей, Тр. Моск. матем. об-ва, т. 12 (1963), 359—388.

[22] **Буслаев В. С., Скриганов М. М.**, О характеристическом свойстве вейлевского квантования, Теор. и матем. физика, т. 2, № 3 (1970), 292—295.

Технический редактор *Н. С. Кондрашова*

Сдано в набор 3/VII-1974 г. Подписано к печати 13.VIII-1974 г. Тираж 1990 экз.
Формат бумаги 70×108¹/₁₆. Усл. печ. л. 18,2. Бум. л. 6,5. Уч.-изд. л. 15,6 Зак. 4205

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10