МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ

О.В. Александрова, Т.М. Вуколова,
М.К. Потапов

Натуральные, целые, рациональные числа и их применение в финансовой экономике и исчислении вероятностей

Серия "Математика для нематематиков"

Москва - 2005 год

Александрова О.В., Вуколова Т.М., Потапов М.К. Натуральные, целые, рациональные числа и их применение в финансовой экономике и исчислении вероятностей.

Учебно-методическое пособие. – М.: Изд. МГУ, 2005 – 40 с.

Серия брошюр "Математика для нематематиков"составлена на основе известного учебного пособия М.К.Потапова, В.В.Александрова и П.И.Пасиченко "Алгебра, тригонометрия и элементарные функции" и предназначена для желающих поступить в ВУЗ на нематематические специальности. Начинается серия с брошюры "Натуральные, целые, рациональные числа и их применение в финансовой экономике и исчислении вероятностей".

Рецензент: к.ф.-м.н. Ю.С. Семенов, Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ)

Содержание

Введение 4
1. Натуральные числа и их свойства 4
2. Целые числа 9
3. Рациональные числа 10
4. Примеры и задачи 14
5. Пропорции и проценты. Сложные проценты.
Элементы финансовой математики 20
6. Задачи на вероятности событий 25
7. Задачи для самостоятельного решения 32
Ответы 38
Литература 39

Введение

Часто задают вопрос: зачем изучать математику? На этот вопрос нет универсального ответа: кому-то математика нужна, чтобы лучше узнать окружающий мир, а кому-то для прагматической цели – например, чтобы делать успехи в бизнесе. На второй вопрос – какие разделы школьной математики наиболее интересны для приложений на практике – может дать ответ серия брошюр, которая выпускается на базе известного учебного пособия авторов М.К.Потапова, В.В.Александрова, П.И.Пасиченко. Первый выпуск – это брошюра "Натуральные, целые, рациональные числа и их применение в финансовой экономике и исчислении вероятностей". Второй выпуск будет посвящен числовым неравенствам и их применению для анализа элементарных функций.

1. Натуральные числа и их свойства

Понятие натуральных чисел возникло из потребностей счета. Множество натуральных чисел обозначается $\mathbb{N}$ и состоит из чисел $1; 2; 3; \ldots$, т.е. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Это множество является бесконечным.

На множестве натуральных чисел определены две арифметические операции: сложение и умножение. При этом сумма (результат сложения) и произведение (результат умножения) двух натуральных чисел также являются натуральными числами.

Основные законы сложения и умножения натуральных чисел:
1) $m + n = n + m$ (коммутативность сложения);
2) $(k + m) + n = k + (m + n)$ (ассоциативность сложения);
3) $m \cdot n = n \cdot m$ (коммутативность умноожения);
4) $(k \cdot m) \cdot n = k \cdot (m \cdot n)$ (ассоциативность сложения);
5) $(k + m) \cdot n = k \cdot n + m \cdot n$ (дистрибутивность сложения относительно умножения).

Натуральное число можно возвести в натуральную степень. Справедливы следующие свойства степеней:
1) $m^k \cdot m^n = m^{k+n}$;
2) $(m^k)^n = m^{k \cdot n}$;

3) $m^k \cdot n^k = (m \cdot n)^k$.

Натуральные числа можно сравнивать, т.е. для двух натуральных чисел m, n либо $m < n$, либо $m > n$, либо $m = n$.

Операции, обратные сложению и умножению, - а это операции вычитания и деления, выполняются на множестве натуральных чисел не всегда. Результат вычитания будет числом натуральным, только если мы из большего числа вычитаем меньшее. Натуральное число n делится нацело только на свои делители. Делителем натурального числа n называется любое натуральное число k такое, что найдется третье натуральное число m, для которого $n = m \cdot k$.

Рассмотрим новое число – число нуль. Это число обозначается символом 0. Нуль не считается натуральным числом.

Ряд натуральных чисел вместе с нулем называется расширенным натуральным рядом и обозначается:

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} .$$

Операции сложения и умножения, в которых участвует число 0, определяются следующим образом:
1) $0 + n = n + 0 = n$;
2) $0 + 0 = 0$;
3) $0 \cdot n = n \cdot 0 = 0$;
4) $0 \cdot 0 = 0$.

Число 0 меньше любого натурального числа. Нулевая степень любого натурального числа m есть число 1: $m^0 = 1$. Делить на нуль и возводить нуль в нулевую степень нельзя.

Одно и то же натуральное число p можно представить либо в десятичной позиционной, либо в десятичной поразрядной записи.

Пример. $4273 = 4 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 3$.

Общий вид:

а) $p = \overline{a_n\, a_{n-1} \ldots a_2\, a_1\, a_0}$;
б) $p = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$.

Далее мы будем часто пользоваться равенством

$$\overline{a_n\, a_{n-1} \ldots a_2\, a_1\, a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 .$$

Как хорошо известно, не всегда одно натуральное число делится другое, и поэтому большой интерес представляют признаки делимости. Приведем некоторые из них. Предварительно заметим, что: а) нуль делится на любое натуральное число и б) любое натуральное число делится на единицу.

Признак делимости на 2. *Чтобы натуральное число* $p = \overline{a_n\, a_{n-1} \ldots a_2\, a_1\, a_0}$ *делилось на 2, необходимо и достаточно, чтобы его последняя цифра* a_0 *делилась на* 2.

Натуральные числа, делящиеся на 2, вместе с нулем называются четными числами, все остальные – нечетными. Четные числа p могут быть представлены в виде $p = 2n$, где $n \in \mathbb{N}_0$, в то время как нечетные числа k – в виде $k = 2n + 1$.

Признак делимости на 4. *Чтобы натуральное число* $p = \overline{a_n\, a_{n-1} \ldots a_2\, a_1\, a_0}$ *делилось на 4, необходимо и достаточно, чтобы число* $\overline{a_1\, a_0}$, *образованное его последними двумя цифрами, делилось на* 4.

Признак делимости на 5. *Чтобы натуральное число* $p = \overline{a_n\, a_{n-1} \ldots a_2\, a_1\, a_0}$ *делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы его последняя цифра* a_0 *делилась на* 5.

Признаки делимости на 9 и на 3 формулируются (и доказываются) практически одинаково.

Признак делимости на 9 (на 3). *Чтобы натуральное число* $p = \overline{a_n\, a_{n-1} \ldots a_2\, a_1\, a_0}$ *делилось на 9 (на 3), необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр* $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$ *делилась на 9 (на 3).*

В доказательствах признаков делимости на 2,4,5,3,9 используется поразрядная форма записи числа. Для доказательства признака делимости на 9 воспользуемся тем, что для любого натурального n число $10^k - 1 = 99\ldots9 = 9 \cdot 11\ldots1$ (n единиц) всегда делится на 9. Введем обозначение $s = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$. Тогда разность

$$p - s = (a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0) - (a_n + a_{n-1} + \ldots +$$

$$+ a_1 + a_0) = a_n \cdot (10^n - 1) + a_{n-1} \cdot (10^{n-1} - 1) + \ldots + a_1 \cdot (10 - 1)$$

всегда делится на 9. Если число s делится на 9, то на 9 делится и число $p = s + (p - s)$, и наоборот. Признак делимости на 3 доказывается вполне аналогично.

Множество натуральных чисел состоит из единицы, простых и составных чисел.

Натуральное число p, отличное от 1, называется простым если оно не имеет других делителей, кроме 1 и самого себя. Натуральное число $m \neq 1$ называется составным, если оно имеет хотя бы один делитель, отличный от 1 и m. Единица не является ни простым, ни составным числом.

Натуральные числа m и n называются взаимно простыми, если у них нет общих делителей, отличных от 1. К примеру, числа 24 и 65 - взаимно простые.

Всякое составное число m можно записать в виде произведения простых чисел. Так, например,

$$315 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7\ , \quad 221 = 13 \cdot 17\ .$$

В этом случае говорят, что число m разложено на простые множители. Справедлива следующая теорема.

Основная теорема арифметики. *Каждое натуральное число $m > 1$ единственным образом (с точностью до порядка сомножителей) разлагается в произведение простых чисел .*

Наибольшим общим делителем (НОД) двух натуральных чисел m и n называется наибольшее натуральное число d, на которое делятся оба этих числа. Например, если $m = 132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$, $n = 90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$, то

$$d = \text{НОД}(132, 90) = 2 \cdot 3 = 6\ .$$

Наибольший общий делитель можно найти и для нескольких натуральных чисел.

Наименьшим общим кратным (НОК) двух натуральных чисел m и n называется наименьшее натуральное число c, которое делится на оба этих числа. Например,

$$c = \text{НОК}(132, 90) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 = 1980\ .$$

Деление с остатком. Одно натуральное число m всегда можно поделить на другое натуральное число k с остатком. Это означает, что требуется найти такие числа $q, r \in \mathbb{N}_0$, что справедливо равенство
$$m = q \cdot k + r \ ,$$
где число r должно удовлетворять условию $0 \le r < k$. Число q называется частным, а r – остатком. Если $r = 0$, то натуральное число m делится на натуральное число k без остатка (k является делителем m).

Верна следующая

Теорема. *Пусть m и k – два произвольных натуральных числа. Тогда существует единственная пара чисел q и r из расширенного натурального ряда, отвечающая условиям $m = q\cdot k + r$ и $0 \le r < k$.*

Примеры.

а) Пусть $m = 123$, $k = 10$. Поскольку $123 = 12\cdot 10+3$, то $q = 10$, а $r = 3$.

б) Числа m, которые при делении на 7 дают в остатке 3, могут быть записаны в следующем виде:
$$m = 7 \cdot k + 3 \, , \quad k \in \mathbb{N}_0 \ .$$

С помощью деления с остатком легко можно находить наибольший общий делитель двух чисел.

Теорема. НОД$\,(m, k) =$ НОД$\,(k, r)$, *где* $m = q\cdot k + r$ *и* $0 \le r < k$.

После того, как найден наибольший общий делитель двух чисел, довольно просто найти и их наименьшее общее кратное, если воспользоваться такой теоремой:

Теорема. НОД$\,(m, k) \cdot$ НОК$\,(m, k) = m \cdot k$.

Пример. НОД$\,(247, 221) =$ НОД$\,(221, 26) =$ НОД$\,(26, 13) = 13$, так как
$$247 = 1 \cdot 221 + 26 \ ,$$
$$221 = 8 \cdot 26 + 13 \ ,$$
$$26 = 2 \cdot 13 + 20 \ .$$

Далее,
$$\text{НОК}\,(247, 221) = \frac{247 \cdot 221}{13} = 19 \cdot 221 = 4199\,.$$

Понятия НОД и НОК используются при работе с дробями. Об этом мы поговорим чуть позже.

2. Целые числа

Будем рассматривать отрицательные числа – натуральные числа со знаком минус, т.е. числа вида $-n$, где $n \in \mathbb{N}$. Множество чисел, состоящее из натуральных чисел, нуля и отрицательных чисел, называется множеством целых чисел.
Обозначение:
$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}\,.$$

Сложение и умножение целых чисел производится по следующим правилам:
1) $(-n) + (-m) = -(m + n)$;
2) $(-n) + 0 = 0 + (-n) = -n$;
3) $(-m) + n = n + (-m) = \begin{cases} -(m-n)\,, & \text{если } m > n\,; \\ 0\,, & \text{если } m = n\,; \\ n - m\,, & \text{если } m < n\,. \end{cases}$
4) $(-m) \cdot n = m \cdot (-n) = -(m \cdot n)$;
5) $(-n) \cdot (-m) = mn$;
6) $(-n) \cdot 0 = 0 \cdot (-n) = 0$.

Основные законы сложения и умножения целых чисел такие же, как соответствующие законы для чисел натуральных.

Вычитание целых чисел осуществимо всегда (по определению, $m - n = m + (-n)$), в то время как деление – не всегда. Но, как и для натуральных чисел, для целых чисел применяется деление с остатком.

Разделить целое число m на натуральное число k с остатком означает найти такие числа $q, r \in \mathbb{Z}$, для которых верно равенство
$$m = q \cdot k + r\ ,$$
причем число r должно удовлетворять условию $0 \le r < k$.

Теорема. *Пусть m – целое, а k – произвольных натуральное число. Существует единственная пара целых чисел q и r такая, что $m = q \cdot k + r$ и $0 \leq r < k$.*

В зависимости от того, какой остаток дает целое число при делении на фиксированное натуральное число k, множество целых чисел разбивается на k непересекающихся классов, а именно, в один класс попадают те и только те целые числа, которые дают один и тот же остаток при делении на k.

Например, если $k = 2$, то множество целых чисел разбивается на два класса: четные числа и нечетные числа. Если $k = 3$, то множество целых чисел будет разбито на 3 класса:
а) числа, кратные 3, т.е. числа вида $3n,\ n \in \mathbb{Z}$;
б) числа, дающие при делении на 3 остаток 1, т.е. числа вида $3n + 1,\ n \in \mathbb{Z}$;
в) числа, дающие при делении на 3 остаток 2, т.е. числа вида $3n + 2,\ n \in \mathbb{Z}$.

Пример. Покажем, что при любом $n \in \mathbb{Z}$ число $n(2n+1)(7n+1)$ делится на 3.

Для этого, как только что, разобьем все целые числа n на три класса: 1) числа вида $3s$; 2) числа вида $3s + 1$; 3) числа вида $3s + 2$; $s \in \mathbb{Z}$.
1) Пусть $n = 3s$. Тогда число $n(2n+1)(7n+1) = 3s(6s+1)(21s+1)$ делится на 3.
2) Пусть $n = 3s + 1$. Число $n(2n + 1)(7n + 1) = (3s + 1)(6s + 3)(21s + 8)$ делится на 3.
3) Пусть $n = 3s + 2$. Число $n(2n + 1)(7n + 1) = (3s + 2)(6s + 5)(21s + 15)$ делится на 3.

Следовательно, при любом целом n число $n(2n + 1)(7n + 1)$ делится на 3.

3. Рациональные числа

Рациональные числа – это числа вида $\dfrac{p}{q}$, где p – целое, а q – натуральное число. Если $p > 0$, то такие рациональные числа часто называют обыкновенными дробями (заметим, что натуральные, а также целые числа m всегда можно рассматривать как дроби вида $\dfrac{m}{1}$). Все рациональные числа можно подразделить на обыкновенные дроби – положительные рациональные числа, нуль и обыкновенные дроби со знаком минус – отрицательные рациональные числа.

Одно и то же рациональное число r может быть представлено бесконечным числом способов в виде $\dfrac{p}{q}$. Например,

$$r = \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \dots \quad .$$

Вообще, $\dfrac{p}{q} = \dfrac{s}{t}$ тогда и только тогда, когда выполнено равенство $p \cdot t = s \cdot q$.

На множестве рациональных чисел, которое обозначается $\mathbb{Q}$, вводятся операции сложения и умножения, удовлетворяющие тем же же законам арифметики, что и соответствующие операции на множестве целых чисел. По определению,

$$\frac{p}{q} + \frac{s}{t} = \frac{p \cdot t + s \cdot q}{q \cdot t} \ , \quad \frac{p}{q} \cdot \frac{s}{t} = \frac{p \cdot s}{q \cdot t} \ .$$

Основной причиной, по которой стали рассматриваться рациональные числа, послужило то, что одно рациональное число всегда можно поделить на другое рациональное число, отличное от нуля. Пусть $r = \dfrac{p}{q}$, $s = \dfrac{m}{n} \neq 0$. Правило деления такое:

$$1/s = \frac{1}{s} = \frac{n}{m} \ , \quad r/s = \frac{r}{s} = r \cdot \frac{1}{s} = \frac{p \cdot n}{q \cdot m} \ .$$

Как уже отмечалось, рациональное число r может быть записано в виде дроби многими способами. Однако среди всех таких записей имеется лишь одна, $r = \dfrac{p}{q}$, в которой числа p и q взаимно просты. В этом случае дробь назывеатя несократимой (это означает, что в числителе и знаменателе этой дроби нельзя сократить общий делитель чисел p и q).

При арифметических операциях с дробями очень часто используются понятия наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя (см. ?).

Примеры.

1) Сократить дробь $r = \dfrac{78}{143}$ (записать в несократимом виде). Так как НОД$(143, 78) = 13$, то $r = \dfrac{6 \cdot 13}{11 \cdot 13} = \dfrac{6}{11}$.

2) Найти сумму $s = \dfrac{1}{78} + \dfrac{1}{143}$. Сначала найдем НОК$(143, 78) = \dfrac{143 \cdot 78}{13} = 858$. После этого

$$s = \frac{1}{78} + \frac{1}{143} = \frac{11}{11 \cdot 18} + \frac{6}{6 \cdot 143} = \frac{11}{858} + \frac{6}{858} = \frac{17}{858} .$$

Те дроби $\dfrac{p}{q}$, у которых знаменатель – степень 10, т.е. $q = 10^k$, могут быть записаны и в виде конечной десятичной дроби. Например, $\dfrac{721}{100} = 7,21\,;\ \dfrac{1}{1000} = 0,001$.

Теорема. *Для того, чтобы несократимая дробь $\dfrac{p}{q}$ могла быть представлена в виде конечной десятичной дроби, необходимо и достаточно. чтобы ее знаменатель имел вид $q = 2^m 5^n$, т.е. не имел простых делителей, отличных от 2 и 5.*

Пример. $\dfrac{11}{50} = \dfrac{11}{2 \cdot 5^2} = \dfrac{2 \cdot 11}{2^2 \cdot 5^2} = \dfrac{22}{100} = 0,22$.

Остальные дроби могут быть записаны в виде бесконечных периодических десятичных дробей.

Теорема. *Любая несократимая дробь $\dfrac{p}{q}$, у которой знаменатель q имеет хотя бы один простой делитель, отличный от 2 и 5, может быть единственным образом представлена в виде бесконечной периодической десятичной дроби.*

Пример. $\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2 \cdot 3} = 0,16666\ldots = 0,1(6)$.

Правило перевода бесконечной периодической дроби в обыкновенную. Пусть

$$r = N + 0, a_1\, a_2 \ldots\, a_k\, (a_{k+1} \ldots\, a_{k+d}) \ ,$$

где N - целая часть, после запятой идет непериодическая часть длины $k \geq 0$, а период в скобках имеет длину $d \geq 1$. Тогда

$$r = N + \frac{\overline{a_1\, a_2 \ldots\, a_k}}{10^k} + \frac{\overline{a_{k+1} \ldots\, a_{k+d}}}{10^k \cdot (10^d - 1)} \,.$$

Примеры.

1) Перевести в обыкновенную дробь число $0,1172 = 0,1172(0)$. Здесь $N = 0$, $k = 4$, $d = 1$.

$$0,1172(0) = 0 + \frac{1172}{10000} + \frac{0}{10000 \cdot 9} = \frac{1172}{10000} = \frac{293}{2500} \ .$$

2) Перевести в обыкновенную дробь число $0,3333\ldots = 0,(3)$. Здесь $N = 0$, $k = 0$, $d = 1$.

$$0,(3) = 0 + \frac{0}{1} + \frac{3}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \ .$$

3) Перевести в обыкновенную дробь число $1,2454545\ldots = 1,2(45)$. Здесь $N = 1$, $k = 1$, $d = 2$.

$$1,2(45) = 1 + \frac{2}{10} + \frac{45}{10 \cdot 99} = \frac{990 + 198 + 45}{990} = \frac{1233}{990} = \frac{137}{110} \ .$$

Свойства натуральных степеней рациональных чисел.
Основные свойства степеней таковы:

1) $r^n \cdot r^k = r^{n+k}$;

2) $r_1^n \cdot r_2^n = (r_1 \cdot r_2)^n$;

3) $(r^n)^k = r^{n \cdot k}$;

4) $\dfrac{r_1^n}{r_2^n} = \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^n$ при условии $r_2 \neq 0$;

5) $\dfrac{r^n}{r^k} = r^{n-k}$ при условии $r \neq 0$ и $n > k$.

6) По определению, если $r \in \mathbb{Q}$ и $r \neq 0$, то $r^0 = 1$.

Однако, не всегда имеет решение следующая задача: для данного натурального $k \geq 2$ и данного положительного $r \in \mathbb{Q}$ найти положительное число $p \in \mathbb{Q}$ такое, что $p^k = r$, т.е. не всегда из положительного рационального числа r извлекается рациональный корень степени k.

Теорема. *Не существует рационального числа, квадрат которого равен 2.*

Доказательство. Предположим, что существует такое рациональное число $r = \dfrac{p}{q}$, что $r^2 = \dfrac{p^2}{q^2} = 2$. Не ограничивая общности, можно считать, что дробь $\dfrac{p}{q}$ несократима. Поскольку

$p^2 = 2q^2$, то левая часть p^2 делится на 2. Но тогда и p делится на 2, так как квадрат нечетного числа – число нечетное. Таким образом, $p = 2k$, где k – целое. Отсюда $4k^2 = 2q^2$, т.е. $2k^2 = q^2$. Следовательно, и число q должно делиться на 2. Это значит, что и числитель, и знаменатель исходной дроби делится на 2, что противоречит несократимости этой дроби. Наше предположение о существовании такой дроби оказалось неверным. Теорема доказана.

Для тех, кто знаком с теоремой Пифагора, сделаем следующее замечание. Из приведенного доказательства следует, что диагональ квадрата со стороной 1 не является рациональным числом. Считается, что открытие чисел, не являющихся рациональными, настолько поразило древних греков, что они стали называть их "иррациональными" – то есть "непостижимыми для разума".

4. Примеры и задачи

Рассмотрим ряд примеров, иллюстрирующих приведенные выше результаты, и задач, для решения которых требуется знание свойств натуральных или целых чисел.

Задача 1. *Найти все натуральные числа вида* $\overline{34X5Y}$, *которые делятся на 36.*

Решение. Число делится на 36, если оно делится на 4 и на 9. Из признака делимости на 4 вытекает, что $\overline{5Y}$ должно делиться на 4, а это может быть, только если $Y = 2$ или $Y = 6$.

Используем теперь признак делимости на 9. Сумма цифр числа $\overline{34X5Y}$ равна $3+4+X+5+Y = 12+X+Y$. Если $Y = 2$, то для делимости числа на 9 необходимо, чтобы $14 + X$ было кратно 9. Поскольку X – целое число от 0 до 9, то $X = 4$. При $Y = 6$ сумма $18 + X$ делится на 9 только в случае $X = 0$ или $X = 9$.

Ответ: 34452; 34056; 34956.

Задача 2. *Доказать, что следующие числа являются составными:*
а) $A = 2^{33} + 1$;

б) $B = 222\ldots2221$ *(2005 двоек).*
в) $C = 2^{3^{2005}} - 1$.

Решение. а) $A = 2^{33}+1 = (2^{11})^3+1 = (2^{11}+1)(2^{22}+2^{11}+1)$;
б) сумма цифр числа B равна $2+2+2+\ldots+2+2+2+1 = 2005\cdot2+1 = 4011$. Сумма цифр числа 4011 равна 6. По признаку делимости на 3 и число 4011, и число B делится на 3.
в) $C = 2^{3^{2005}}-1 = 2^{3\cdot3^{2004}}-1 = (2^{3^{2004}})^3-1 = (2^{3^{2004}}-1)(2^{2\cdot3^{2004}} + 2^{3^{2004}}+1)$.

Задача 3. *Найти все пары натуральных чисел* (x, y)*, которые удовлетворяют уравнению* $2^{x^2}\cdot 3^{4y} = 18^{xy}$.

Решение. Перепишем исходное уравнение как $2^{x^2}\cdot3^{4y} = 2^{xy}\cdot3^{2xy}$. В виду однозначности разложения числа на простые множители это уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} x^2 = xy \\ 4y = 2xy \qquad (x, y \in \mathbb{N}) \end{cases}.$$

Поскольку $x, y > 0$, то из второго уравнения получаем $x = 2$, а из первого: $y = x = 2$.

Ответ: $(2; 2)$.

Задача 4. *Найти все пары целых чисел* (x, y)*, которые удовлетворяют уравнению:*
а) $x^2 + 23 = y^2$;
б) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 3$.
в) $x + y = xy$.
г) $y = \dfrac{2}{3}x$.

Решение.
а) Уравнение перепишем в виде $y^2 - x^2 = (y-x)(y+x) = 23$. Так как 23 – простое число, а $y \pm x \in \mathbb{Z}$, то равенство возможно только в следующих четырех случаях:

1) $\begin{cases} y - x = 23 \\ y + x = 1 \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} x = -11 \\ y = 12 \end{cases}$.

2) $\begin{cases} y - x = 1 \\ y + x = 23 \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} x = 11 \\ y = 12 \end{cases}$.

3) $\begin{cases} y - x = -23 \\ y + x = -1 \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} x = 11 \\ y = -12 \end{cases}$.

4) $\begin{cases} y-x=-1 \\ y+x=-23\ , \end{cases}$

т.е.

$$\begin{cases} x=-11 \\ y=-12\ . \end{cases}$$

Ответ: $(-11;-12)$, $(-11;12)$, $(11;-12)$, $(11;12)$.

б) Разложим на множители: $x^2-3xy+2y^2=x^2-xy-2xy+2y^2=x(x-y)-2y(x-y)=(x-2y)(x-y)=3$ (где $x-2y$, $x-y\in\mathbb{Z}$). Равенство возможно, если:

1) $\begin{cases} x-y=1 \\ x-2y=3\ , \end{cases}$ т.е. $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2\ . \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-y=3 \\ x-2y=1\ , \end{cases}$ т.е. $\begin{cases} x=5 \\ y=2\ . \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-y=-1 \\ x-2y=-3\ , \end{cases}$ т.е. $\begin{cases} x=1 \\ y=2\ . \end{cases}$

4) $\begin{cases} x-y=-3 \\ x-2y=-1\ , \end{cases}$

т.е.

$$\begin{cases} x=-5 \\ y=-2\ . \end{cases}$$

Ответ: $(-1;-2)$, $(-5;-2)$, $(5;2)$, $(1;2)$.

в) Преобразуем уравнение к виду: $xy-x-y=0$ или $xy-x-y+1=(x-1)(y-1)=1$. Поскольку $x-1$, $y-1$ целые, то возможны два варианта:

1) $\begin{cases} x-1=1 \\ y-1=1\ ; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-1=-1 \\ y-1=-1\ . \end{cases}$

Ответ: $(0;0)$, $(2;2)$.

г) Уравнение приводится к виду: $3y=2x$, где x, $y\in\mathbb{Z}$. Так как правая часть делится на 2, то и левая часть должна делиться на 2. Следовательно, $y=2k$, где $k\in\mathbb{Z}$. Тогда $2x=6k$, т.е. $x=3k$. Итак, все целочисленные решения можно записать в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x=3k \\ y=2k\ , \quad k\in\mathbb{Z}\ . \end{cases}$$

Геометрически решения соответствуют точкам с целочисленными координатами на плоскости, лежащим на прямой $3y = 2x$:

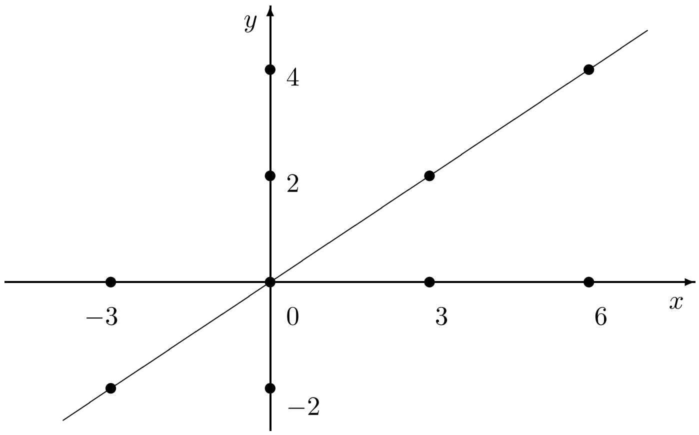

Рис. 1

Ответ: $(3k; 2k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Задача 5. *Найти наименьшее натуральное число, которое при делении на 7 дает остаток 6, а при делении на 9 дает остаток 8.*

Решение. Решим более общую задачу: найдем все такие целые числа a. Из равенства $a = 7k + 6 = 9n + 8 \quad (k, n \in \mathbb{Z})$ получаем, что

$$k = \frac{9n+2}{7} = n + \frac{2(n+1)}{7}\ .$$

Так как k, n – целые, то $n + 1$ делится на 7, т.е. $n = 7t - 1$, где $t \in \mathbb{Z}$. Отсюда

$$7k + 6 = 9n + 8 = 63t - 1\ ,$$

и, следовательно, $7k = 63t - 7$, т.е. $k = 9t - 1$. В итоге получаем, что $n = 7t - 1$, $k = 9t - 1$, а $a = 63t - 1$, где параметр t пробегает все целые числа. Наименьшее положительное значение, равное 62, a принимает при $t = 1$.

Ответ: 62.

Задача 6. *Три рыбака выловили за день некоторое количество рыб и легли спать, оставив всю рыбу в котле. Ночью один рыбак проснулся и решил приготовить себе ухи. Одну рыбу он выбросил, а ровно треть оставшихся рыб сварил, съел и лег спать дальше. Затем проснулся второй рыбак, и, не зная про действия первого, поступил точно так же: одну рыбу выбросил, треть оставшихся сварил, съел и снова лег спать. После этого и с третьим рыбаком произошла та же самая история. Сколько было изначально поймано рыб?*

Решение. Пусть было поймано n рыб. Найдем все целые n и p, которые удовлетворяют уравнению

$$\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}(n-1)-1\right)-1\right)=p\,.$$

После несложных преобразований это уравнение приводится к виду $8n-38=27p$, откуда p должно быть четным: $p=2t$, $t\in\mathbb{Z}$. Сокращая на 2, получаем $4n-19=27t$. По условию задачи $n=3s+1$ для целого s, и, следовательно, $4n-19=12s+4-19=12s-15=27t$, т.е. $4s-5=9t$. Но тогда $4(s+1)=9t+9$. Отсюда $s+1=9a$, $a\in\mathbb{Z}$. Далее из равенства $9t+9=4\cdot 9a$ получаем, что $t+1=4a$, $p=2t=8a-2$, и, в конце концов, $n=3s+1=27a-2$.

Ответ: Рыб могло быть 25, 52, 79 и т.д.

Замечание. Некоторые приводят ответ $n=-2$, но он вряд ли удовлетворит рыбаков.

В связи с последними тремя задачами заметим, что уравнение $ax+by=c$, где a, b, c – целые числа, причем a и b взаимно просты, всегда разрешимо в целых числах, причем число решений бесконечно.

Задача 7 (МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет наук о материалах, 2002 г.) *Найдите наименьшее натуральное число, которое обладает следующими свойствами: при делении на 2 в остатке получается 1, при делении на 19 остаток равен 3, а на 7 оно делится нацело.*

Решение. Искомое число a может быть представлено в следующих формах:

$$\begin{array}{lll} a = 2k+1, & k \in \mathbb{N}, & (1) \\ a = 19t+3, & t \in \mathbb{N}, & (2) \\ a = 7m, & m \in \mathbb{N}. & (3) \end{array}$$

Из выражения (1) следует, что число a – нечетное. Следовательно, число $19t+3$ также число нечетное, что может быть только при четном $t = 2n$, $n \in \mathbb{N}$.

Тогда $a = 19t+3 = 38n+3$. Из представления (3) получаем $38n+3 = 7m$, откуда

$$m = \frac{38n+3}{7} = 5n + \frac{3(n+1)}{7} \;\; .$$

Из этого следует, что число $\dfrac{3(n+1)}{7}$ – натуральное, и, следовательно, $n = 7p-1$, $p \in \mathbb{N}$. Отсюда $m = 5(7p-1)+3p = 38p-5$, т.е. $a = 7m$ имеет вид $266p-35$. Наименьшее положительное $a = 231$ получается при $p = 1$.

Ответ: 231.

Задача 8 (старинная задача). *Двенадцать человек несут двенадцать хлебов. Каждый мужчина несет по два хлеба, женщина – по половине хлеба, ребенок – по четверти хлеба. Сколько было мужчин, женщин и детей?*

Решение. Пусть было n мужчин, m женщин и p детей ($n, m, p \in \mathbb{N}$). Тогда

$$\begin{cases} n+m+p = 12 \\ 2n + \frac{1}{2}m + \frac{1}{4}p = 12 \end{cases},$$

т.е.

$$\begin{cases} n+m+p = 12 \\ 8n+2m+p = 48 \end{cases}.$$

Вычитая из второго уравнения первое, получим, что $7n+m = 36$. Отсюда

$$n = \frac{36-m}{7} = 5 + \frac{1-m}{7}\,.$$

По условию задачи m не меньше 1 и не больше 10. Следовательно, $1-m$ делится на 7 только в двух случаях: $m = 1$ или $m = 8$.

Если $m = 1$, то $n = 5$, $p = 6$. Случай $m = 8$ не подходит, поскольку $n = 4$, а $p = 0 \notin \mathbb{N}$.

Ответ: Пять мужчин, одна женщина и шесть детей.

5. Пропорции и проценты. Сложные проценты. Элементы финансовой математики

Задачи на пропорции и проценты (от латинского *pro cento*, что означает "от ста" или "сотая доля") возникают естественным образом в кругу задач, связанных с рациональными числами.

Равенство двух отношений

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\,,$$

где $b, d \neq 0$, называется пропорцией, а числа a, b, c, d – членами пропорции. Числа a и d называются крайними членами пропорции, а числа c и b – ее средними членами. Основное свойство пропорции: произведение крайних членов равно произведению средних членов, т.е. $ad = bc$.

На практике часто встречаются величины, которые имеют размерности. Познакомимся с одним из таких понятий, имеющим важное значение. Процентом данного числа a называется его сотая часть. Следовательно, само число составляет 100 процентов. Один процент обозначается так: 1%. Например, 15% от числа 100 есть 15, в то время как 15% от числа 360 будет $360 \cdot \dfrac{15}{100} = 54\,.$

При решении задач на проценты некоторая величина b принимается за 100% , а ее часть – величина a – принимается за $p\,\%$, и составляется пропорция

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{100}\,.$$

Из этой пропорции по двум известным величинам определяют неизвестную третью величину, пользуясь основным свойством пропорции: $p \cdot b = 100 \cdot a$.

Рассмотрим примеры и задачи.

Задача 1. *Сколько спирта содержится в 80 литрах спиртового раствора, если он составляет* 40% *объема раствора ?*

Решение. Так как $80 \cdot \dfrac{40}{100} = 32$, то раствор содержит 32 литра спирта.

Задача 2. *Число* a *больше числа* b *на* 50%. *На сколько процентов* b *меньше* a*?*

Решение. Составим пропорцию:

$$\frac{a}{b} = \frac{100+50}{100} = \frac{150}{100},$$

откуда $3b = 2a$. Чтобы ответить на вопрос задачи, надо посчитать, сколько процентов составляет разность $a - b$ от числа a. Составим еще одну пропорцию:

$$\frac{a-b}{a} = \frac{x}{100},$$

т.е.

$$x = 100 \cdot \frac{a-b}{a} = 100 \cdot \left(1 - \frac{b}{a}\right) = 100 \cdot \frac{1}{3} = 33\frac{1}{3}\,\%.$$

Ответ: Число b меньше числа a на $33\frac{1}{3}\%$.

Задача 3. *Цена на нефть сначала возросла на* 10%, *а потом снизилась на* 10%. *Сколько процентов составит новая цена от первоначальной?*

Решение. Обозначим первоначальную цену через a. Цена нефти после повышения будет равна $b = 1,1a$. После снижения цена c окажется равной $0,9b = 0,9 \cdot 1,1\,a = 0,99\,a$.

Ответ: Новая цена составляет 99% первоначальной.

Часто и при решении задач в нашей повседневной жизни используются так называемые сложные проценты. Что это такое мы рассмотрим на примере.

Пусть вкладчик положил в банк S_0 рублей. В конце каждого месяца (или какого-нибудь другого периода времени) банк начисляет $p\,\%$ к той сумме, которая находится на счету в начале этого месяца. В конце первого месяца на счету окажется сумма

$$S_1 = S_0 + S_0 \cdot \frac{p}{100} = S_0\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

В конце второго месяца на счету окажется сумма

$$S_2 = S_1 + S_1 \cdot \frac{p}{100} = S_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = S_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 .$$

Продолжая рассуждения аналогичным образом, получим, что в конце n-ого месяца сумма S_n на счету составит

$$S_n = S_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n . \tag{$*$}$$

Если сумма вклада определяется по формуле (*), то говорят, что на вклад начисляются сложные проценты или что используется схема начисления сложных процентов.

Рассмотрим типичные примеры.

Задача 4. *Некоторый банк в конце каждого месяца начисляет 7 % к сумме, которая находится на счету в начале месяца. Найти доход за первый квартал, если первоначальный вклад составляет 1 миллион рублей.*

Решение. Применяя формулу (*), получим, что через три месяца на счете окажется сумма

$$1000000 \left(1 + \frac{7}{100}\right)^3 = 1000000 \cdot (1,07)^3 = 1225043 \text{ рубля} .$$

Вычитая первоначальную сумму, получим величину дохода.

Ответ: Доход составит 225043 рубля.

Задача 5. *Какую сумму следует положить в банк при заданной ставке в 20% годовых, чтобы через 2 года получить 36000 рублей?*

Решение. Из формулы (*) получается равенство

$$S_2 = S_0 \left(1 + \frac{20}{100}\right)^2 = S_0 \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{36}{25} S_0 = 36000 ,$$

откуда $S_0 = 25000$.

Ответ: 25000 рублей.

Задача 6. *В результате замены газонокосилки производительность работы увеличилась на 25% и было скошено 1200 м^2 травы за один час. Какая площадь газона была бы скошена за час, если бы замены газонокосилки не было?*

Решение. Пусть производительность первой газонокосилки равняется S $м^2/ч$. Тогда

$$S\left(1+\frac{25}{100}\right) = S\cdot\frac{5}{4} = 1200\ ,$$

из чего получаем, что $S = 960$.

Ответ: За час было бы скошено 960 $м^2$ травы.

Задача 7. *Два вкладчика инвестировали по 1000 долларов каждый в разные финансовые учреждения на срок 6 месяцев. Первый вложил деньги в банк, который в конце каждого месяца выплачивал ему 20 % от той суммы, которая оказывалась на счету в начале месяца. Второй вкладчик заключил договор с финансовой компанией, по которому компания выплачивала ему ежемесячно 30 % от суммы первоначального вклада. Чей доход через полгода оказался больше и на сколько?*

Решение. Для первого вкладчика применим формулу (*) начисления сложных процентов. Получим, что через 6 месяцев на его счету окажется сумма, равная

$$1000\cdot\left(1+\frac{20}{100}\right)^6 = 1000\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^6 = 2985,984 \text{ доллара}\,,$$

а доход составит $2985,984 - 1000 = 1985,984$ доллара.

В то же время доход второго вкладчика, которому начисляются простые проценты, составит

$$1000\cdot\frac{30}{100}\times 6 = 1800 \text{ долларов}\,,$$

т.е. доход первого окажется выше дохода второго на 185,984 доллара.

Ответ: Доход первого вкладчика превышает доход второго на 185,984 доллара.

Задачи на смеси и сплавы также решаются с использованием пропорций и процентов. Объемной концентрацией C_A данного вещества A в общем объеме по определению называется отношение объема этого вещества к общему объему:

$$C_A = \frac{V_A}{V_{общ}}\ .$$

Иногда в задачах под концентрацией может подразумеваться не отношение объемов, а отношение масс. О какой концентрации идет речь, можно определить по единицам измерения.

Процентным содержанием p_A данного вещества A называется его концентрация, выраженная в процентах: $p_A = C_A \cdot 100\%$. Рассмотрим примеры.

Задача 8. *Сколько соляной кислоты* HCl *содержится в 60 литрах раствора, если процентное содержание кислоты в растворе равно* 20 % *?*

Решение. Так как
$$p_{\,\mathrm{HCl}} = \frac{V_{\mathrm{HCl}}}{V_{общ}} \cdot 100\% = 20\% \ ,$$
а $V_{общ} = 60$ *л*, то получаем, что $V_{\mathrm{HCl}} = \dfrac{20 \cdot 60}{100} = 12$ *л*.

Ответ: Данный раствор содержит 12 литров соляной кислоты.

Задача 9 (МГУ им. М.В. Ломоносова, географический факультет). *Смешав 40- и 60-процентные водные растворы кислоты и добавив 5 литров воды, получили 20-процентный раствор. Если бы вместо воды добавили 5 литров 80-процентного раствора, то получили бы 70-процентный раствор. Сколько литров 40- процентного и сколько литров 60-процентного раствора смешали?*

Решение. Пусть 40-процентного раствора было x литров, а 60-процентного – y литров. Тогда содержание кислоты после первого смешивания может быть представлено следующим уравнением:
$$0,4x + 0,6y = 0,2(x + y + 5) \ ,$$
а содержание кислоты после второго смешивания – уравнением
$$0,4x + 0,6y + 0,8 \cdot 5 = 0,7(x + y + 5) \ .$$
Получаем систему уравнений
$$\begin{cases} 2x + 3y = x + y + 5 \\ 4x + 6y + 40 = 7x + 7y + 35 \ , \end{cases}$$
т.е.
$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + y = 5 \ , \end{cases}$$

откуда $x = 1$, $y = 2$.

Ответ: 40-процентного раствора был 1 литр, а 60-процентного – 2 литра.

Задача 10. *Имеется уксусный раствор массой 1,5 кг, содержащий* 40% *уксуса. Сколько воды надо добавить в раствор, чтобы новый раствор содержал* 10% *уксуса?*

Решение. Пусть масса уксуса в 40%-ном растворе равна a *кг*. Тогда

$$\frac{a}{1,5} \cdot 100\% = 40\% ,$$

откуда $a = 0,6$ *кг*. Надо найти массу x, которая была добавлена к 40%-ному раствору, причем, конечно же, количество уксуса в новом растворе останется равным 0,6 *кг* . Это можно сделать из уравнения

$$\frac{0,6}{1,5 + x} \cdot 100\% = 10\% ,$$

т.е. $1,5 + x = 6$. Отсюда $x = 4,5$ *кг*.

Ответ: Надо добавить 4,5 *кг* воды.

6. Задачи на вероятности событий

Пусть имеется n равновероятных исходов, в реультате которых некоторое событие A может либо наступить, либо не наступить. Например, при подбрасывании монеты в принципе возможны два исхода: выпадение герба или выпадение решки (цифры), т.е. $n = 2$. При подбрасывании игрального кубика возможны 6 исходов: выпадение одной из цифр от 1 до 6, т.е. в этом случае $n = 6$.

Если при некотором исходе событие A наступает, то говорят, что исход благоприятен для события A. В противном случае исход называется неблагоприятным. Например, если событие A заключается в том, что при подбрасывании кубика выпадет не менее 5 очков, то такому событию благоприятны два исхода: выпадение 5 или 6 очков. Если выпало 3 очка, то такой исход будет неблагоприятным для A. Будем обозначать число благоприятных исходов для события A через m. Тогда число неблагоприятных исходов равно $n - m$.

Вероятностью события A, которая обозначается $\mathrm{P}(A)$, называется отношение числа исходов m, благоприятных событию A, к общему числу исходов n (доля числа благоприятных исходов):

$$\mathrm{P}(A) = \frac{m}{n}\ .$$

Например, если событие A – это выпадение не менее 5 очков при подбрасывании кубика ($m = 2$, $n = 6$), то вероятность этого события $\mathrm{P}(A) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

Если событие не наступает ни при каком исходе ($m = 0$), то оно называется невозможным событием и обозначается $\emptyset$. Вероятность невозможного события равна нулю:

$$\mathrm{P}(\emptyset) = \frac{0}{n} = 0\ .$$

Если событию благоприятствуют все исходы ($m = n$), то такое событие, рассматриваемое в рамках конкретной вероятностной задачи, называется достоверным событием и обозначается Ω. Вероятность достоверного события равна единице:

$$\mathrm{P}(\Omega) = \frac{n}{n} = 1\ .$$

Вообще, достоверное событие Ω можно рассматривать как множество всех возможных исходов в данной задаче, а любое событие A – как некоторое подмножество множества Ω, состоящее из исходов, благоприятных к A. Вероятность $\mathrm{P}(A)$ всегда лежит в пределах от нуля до единицы. Рассматриваемая нами классическая вероятность – число рациональное (классический случай – число исходов конечно и все исходы равновероятны). В общем же случае вероятность может быть любым действительным числом от нуля до единицы.

Рассмотрим несколько операций, которые могут быть применены к событиям. Суммой событий A и B называется событие, обозначаемое $A + B$ (иногда $A \cup B$), которое наступает в том и только том случае, когда наступает по крайней мере одно из событий A или B, т.е. либо A, либо B, либо A и B вместе. Всегда $A + B = B + A$.

Произведением событий A и B называется событие, обозначаемое AB (иногда $A \cap B$), которое наступает в том и только том случае, когда наступают одновременно и A, и B. Всегда $AB = BA$.

События A и B называются несовместными, если они не могут наступить одновременно, т.е. $AB = \emptyset$.

Событием, противоположным событию A, называется событие $\overline{A}$ (иногда это событие обозначается $\Omega \setminus A$), которое наступает тогда и только тогда, когда не наступает событие A. Если исход благоприятен событию A, то он не благоприятен событию $\overline{A}$, и наоборот, если он не благоприятен к A, то он благоприятен к $\overline{A}$. Поэтому

$$\mathrm{P}(\overline{A}) = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - \mathrm{P}(A) \; .$$

Правила де Моргана: $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$, $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$.

Разностью событий $A \setminus B$ называется событие, заключающееся в том, что событие A происходит, а событие B не происходит. Разность событий может быть записана также в таком виде: $A \setminus B = A\overline{B}$.

Пример. Пусть при бросании кубика событие A – это выпадение 1, 2, 4 или 5 очков, а событие B – 3, 4 или 5 очков. Запишем это так: $A = \{1, 2, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5\}$. При этом $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Тогда

1) $A + B = B + A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
2) $AB = BA = \{4, 5\}$;
3) $\overline{A} = \{3, 6\}$;
4) $\overline{B} = \{1, 2, 6\}$;
5) $A \setminus B = \{1, 2\}$;
6) $B \setminus A = \{3\}$.
В данном примере события A и B совместны.

Вероятность событий удовлетворяет следующим свойствам:

1) $0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$;
2) $\mathrm{P}(\Omega) = 1$, $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$;

3) Если события A и B несовместны, то $\mathrm{P}(A+B) = \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$;
4) В общем случае $\mathrm{P}(A+B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB)$.

Из данных формул можно вывести и другие. Например, поскольку $A+B = A+(B \setminus A)$ и события A, $B \setminus A$ несовместны, то по свойству 3) получается $\mathrm{P}(A+B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B \setminus A)$, откуда следует, что $\mathrm{P}(B \setminus A) = \mathrm{P}(A+B) - \mathrm{P}(A)$.

Условные вероятности. Для нахождения вероятности произведения двух событий $\mathrm{P}(AB)$ часто используют понятие условной вероятности.

Условная вероятность $\mathrm{P}_B(A)$ – это вероятность наступления события A, если известно, что событие B произошло (событие B не должно быть невозможным). Иногда условную вероятность обозначают так: $\mathrm{P}(A|\,B)$ (читается: вероятность A при условии B). Вообще говоря, условная вероятность $\mathrm{P}_B(A)$ может отличаться от $\mathrm{P}(A)$.

Как найти условную вероятность? Допустим, что событие B произошло. Тогда можно считать, что B – достоверное событие. Событие A может наступить, а может и не наступить, но в том случае, если исход благоприятен событию A, то этот исход должен быть заведомо благоприятен событию B (ведь известно, что событие B наступило). Это означает, что множество благоприятных исходов составляет событие AB, при том, что событие B будет достоверным.

Пусть n – первоначальное число исходов, k – число исходов, благоприятных B, а s – число исходов, благоприятных AB. Тогда, в силу вышесказанного,

$$\mathrm{P}_B(A) = \frac{s}{k} = \frac{s/n}{k/n} = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)} .$$

Из этой формулы, которую можно считать определяющей для условной вероятности, следует формула умножения вероятностей:

$$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}_B(A) \cdot \mathrm{P}(B) .$$

Пример. Пусть при бросании кубика: $A = \{1,2,4,5\}$, $B = \{3,4,5\}$. Тогда $AB = \{4,5\}$. Поэтому $s = 2$, $k = 3$, а условная вероятность $P_B(A) = \dfrac{2}{3}$. Проверим формулу умножения:

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = P(AB) = P_B(A) \cdot P(B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \ .$$

Заметим, что в данном случае $P_B(A) = P(A)$, хотя, к примеру, $1 = P_A(A) \neq P(A) = \dfrac{2}{3}$.

Независимость событий. Событие A не зависит от B с точки зрения теории вероятностей, если условная вероятность события A равна его безусловной вероятности: $P_B(A) = P(A)$. В таком случае $P(AB) = P_B(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B)$. Тогда и

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B) \ ,$$

т.е. событие B также не зависит от A. Таким образом, события A и B являются независимыми, тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) \ .$$

В только что разобранном примере с кубиком события A и B независимы.

Замечание. Если $P(B) = 0$, то условная вероятность $P_B(A)$ не определена.

Задача 1. *Вася приехал к своему другу в деревню, но не знал номера его дома. Ему было только известно, что номер дома делится на 5. Всего в деревне было 35 домов. Какова вероятность того, что Вася угадает номер дома с первого раза?*

Решение. Домов с номерами, кратными 5, в деревне ровно 7. Все варианты выбора дома для Васи равнозначны, а благоприятным будет только один исход из семи, ведь его друг живет в доме со вполне определенным номером. Поэтому вероятность равна $\dfrac{1}{7}$. Если бы Вася не знал вообще ничего о номере дома, то вероятность угадать дом с первого раза была бы значительно меньше: $\dfrac{1}{35}$. Таким образом, при условии, что событие B - "номер дома делится на 5 " - имеет место, условная вероятность события A - "в наугад выбранном доме в деревне живет Васин друг " - отличается от безусловной вероятности события A.

Ответ: $\dfrac{1}{7}$.

Понятие случайной величины и ее математического ожидания.

Пусть в результате испытания может наступить один и только один исход из n возможных исходов $\omega_1, \ldots, \omega_n$, т.е. множество этих исходов составляет достоверное событие

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\} .$$

Если в классической вероятностной задаче вероятности исходов $p_1, \ldots, p_n$ одинаковы и равны $\dfrac{1}{n}$, то в более общей ситуации эти вероятности (они всегда неотрицательны) могут быть различными. Однако при этом должно выполняться следующее свойство:

$$p_1 + \ldots + p_n = 1 ,$$

поскольку вероятность достоверного события $\mathrm{P}(\Omega) = 1$.

Пусть в зависимости от того, какой исход ω_i наступил, рассматривается некоторое число x_i ($i = 1, \ldots, n$). В таком случае говорят, что рассматривается (дискретная) *случайная величина* X, которая в результате испытания может принимать значения x_i с вероятностью p_i (условимся, что мы будем рассматривать только такие случайные величины, для которых числа x_i и p_i – рациональные). Отметим, что *до испытания* мы не можем сказать, какое именно значение примет случайная величина X, а можем лишь говорить о том, что X примет одно из значений x_i с заданной вероятностью p_i. Это событие (X принимает значение x_i) обозначается так: $X = x_i$. *После испытания* становится известно, какое именно значение приняла случайная величина X, и ни о какой вероятности речи уже не идет (можно сказать, что "вероятность наступившего события равна единице").

Часто случайная величина X задается своим *законом распределения* – таблицей

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

где $p_1+\ldots+p_n=1$. В первой строке выписываются возможные значения X, а во второй – вероятности, с которыми эти значения принимаются. Отметим, что некоторые значения x_i могут совпадать.

Математическим ожиданием случайной величины X называется число

$$\mathrm{M}(X)=x_1p_1+\ldots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i\ .$$

Пример 1. Пусть случайная величина X имеет следующий закон распределения:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
P	$1/n$	$1/n$	$\ldots$	$1/n$

Тогда

$$\mathrm{M}(X)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\ ,$$

т.е. в случае, когда все исходы равновероятны, математатическое ожидание совпадает со средним арифметическим чисел $x_1,\ldots,x_n$. Поэтому и в общем случае $\mathrm{M}(X)$ часто называют *средним значением* случайной величины X ($\mathrm{M}(X)$ всегда лежит между минимальным и максимальным значениями случайной величины).

В заключение заметим, что бывают случайные величины (мы не будем их здесь рассматривать), которые могут принимать значения, целиком заполняющие, например, некоторый промежуток (скажем, продолжительность наугад взятого телефонного разговора).

Пример 2. Пусть случайная величина X – число выпавших очков при одном подбрасывании кубика. Найдем математическое ожидание $\mathrm{M}(X)$.

Закон распределения X следующий:

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Тогда

$$\mathrm{M}(X) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3,5\ .$$

Этот пример показывает, что случайная величина может не принимать своего среднего значения.

Пример 3. Игрок в казино делает ставку 300 у.е. на следующих условиях: если при подбрасывании кубика выпадает 6 очков, то игрок получает 600 у.е., если выпадает 4 или 5 очков, то игрок получает 360 у.е., а если выпадает не более 3 очков, то игрок ничего не получает. Найти математическое ожидание получаемых игроком денег.

Пусть X – сумма, получаемая игроком. Игрок ничего не получает в трех случаях из шести, 360 у.е. – в двух случаях и 600 у.е. – в одном случае. Закон распределения X такой:

X	0	360	600
P	3/6	2/6	1/6

Отсюда

$$\mathrm{M}(X) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 360 \cdot \frac{1}{3} + 600 \cdot \frac{1}{6} = 220 \ \text{у.е.}$$

Это означает, что при ставке в 300 у.е. игрок в среднем получает 220 у.е., т.е. в среднем за один раз он проигрывает $300 - 220 = 80$ у.е. (хотя при удачном розыгрыше он может отыграть у казино $600 - 300 = 300$ у.е.). Такие условия игры достаточно выгодны для казино – ведь при большом количестве игроков каждый из них в среднем теряет 80 у.е. за один розыгрыш, хотя среди игроков могут быть как выигравшие, так и проигравшие.

7. Задачи для самостоятельного решения

1. Найти все пятизначные числа вида $\overline{71X1Y}$, которые делятся на 45.

2. Найти все пятизначные числа вида $\overline{135XY}$, которые делятся на 45.

3. Доказать, что следующие числа являются составными:
а) $2^{50}-1$; б) $9^{36}-5^{8}$; в) $13^{25}+17^{89}+2^{71}$; г) $2^{3^{2005}}+1$.

4. Доказать, что число тогда и только тогда делится на 11, когда разность между суммой его цифр, стоящих на четных местах, и суммой цифр, стоящих на нечетных местах, делится на 11.

5. Доказать, что для любого натурального числа $n \geq 2$ число $n^3 - n$ делится на 6.

6. Доказать, что для любого натурального числа n число $\frac{n}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{6}$ будет натуральным.

7. Доказать, что для любого натурального числа n число $n(n^2+5)$ делится на 6.

8. Найти НОД и НОК следующих чисел:
а) 308, 264; б) 144, 420, 252; в) $2^3\cdot 3^5\cdot 11\cdot 13^{12}$, $2^4\cdot 3^3\cdot 11^2\cdot 17$, $2^5\cdot 3^6\cdot 17\cdot 24$.

9. Решить в натуральных числах x, y уравнение $2^{x^2}\cdot 3^{y^2}=6^{x+y}$.

10. Решить в натуральных числах x, y уравнение $5^{-x}\cdot 10^{y}=20^{x^2}$.

11. (МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет наук о материалах, 2001 г.) Найдите наименьшее натуральное число, которое обладает следующими свойствами: при делении на 2 в остатке получается 1, при делении на 13 остаток равен 7, а на 9 оно делится нацело.

12. (НГУ, механико-математический факультет, 1996 г.) Купил Роман раков, вчера мелких, по цене 51 руб. за штуку, а сегодня – по 99 руб., но очень крупных. Всего на раков он истратил 2520 руб., из них переплата из-за отсутствия сдачи составила от 16 до 20 руб. Определить, сколько раков Роман купил вчера и сколько сегодня.

13. Абитуриенты сдавали экзамены в течение трех дней в одних и тех же аудиториях. Число экзаменовавшихся каждый день абитуриентов в каждой аудитории было равно числу аудиторий. Если бы экзамены проводились в другом корпусе, то их можно было бы провести за два дня, используя каждый день одни и те же аудитории, причем каждый день в каждой аудитории абитуриентов удалось бы рассадить по рядам так, что число рядов, а также число людей в ряду было бы равно числу используемых аудиторий. Определить минимально возможное число абитуриентов, которое могло быть проэкзаменовано при этих условиях.

14. Найти наименьшее трехзначное число, которое при делении 6 дает остаток 5, а при делении на 4 – остаток 3.

15. (Задача Фибоначчи) 30 птиц стоят 30 монет. Куропатки стоят по 3 монеты за штуку, голуби – по 2 монеты и пара воробьев – по монете. Сколько было птиц каждого вида?

16. (МГУ им. М.В. Ломоносова, олимпиада, 2005 г.) В каждом подъезде нового дома одинаковое число этажей, а на каждом этаже одинаковое число квартир. На восьмом этаже третьего подъезда первая квартира имеет номер 106. Какой номер имеет вторая квартира на третьем этаже шестого подъезда?

17. Найти все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющие следующему уравнению:
а) $x^2 - 47 = y^2$; б) $15x^2 - 11xy + 2y^2 = 7$.

18. (МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, 1995 г.) Найти все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} 2xy + 3x = 14 \\ xy \geq 11 \; . \end{cases}$$

19. При каких целых числах x дробь $\dfrac{x^3 - x^2 + 2}{x - 1}$ будет целым числом?

20. (МГУ им. М.В. Ломоносова, геологический факультет , 1994 г.) Технология изготовления дискет состоит из четырех этапов. На каждом из них увеличивается содержание кремния на определенное количество процентов по отношению к результату предыдущего этапа: на первом этапе – на 25%, на втором этапе – на 20%, на третьем – на 10%, на четвертом этапе – на 8%. На сколько процентов в результате увеличится содержание кремния?

21. (МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет , 1978 г.) Руда содержит 40% примесей, а выплавляемый из нее метаал – 4%. Сколько металла будет выплавлено из 24 тонн руды?

22. (МГУ им. М.В. Ломоносова, социологический факультет , 1998 г.) Зимой 9% коренного населения города занято народным промыслом. Летом 28% коренного населения уезжает из города, но доля занятых промыслом среди оставшейся части населения остается неизменной, а общая численность населения составляет 80% от прежней за счет приезжающих туристов. Сколько процентов населения летом занято промыслом?

23. В лесу собрали 200 кг ягод. После сортировки 70% собранных ягод поступили в магазин для продажи. Из этих ягод 21 кг не был продан. Какой процент поступивших в магазин ягод был продан?

24. В симпозиуме по математическим проблемам в биологии, проходившем в течении трех дней, участвовали биологи и математики. В первый день работы симпозиума в нем приняли участие ученые обеих специальностей. На второй день на симпозиум прибыли дополнительно специалисты по математике; при этом доля числа биологов в общем числе участников изменилась, и разность ее значений в первый и во второй день составила $\frac{1}{20}$. На третий день к работе симпозиума присоединились специалисты-биологи, в результате чего доля числа математиков в общем числе участников изменилась, и разность ее значений во второй и в третий день составила $\frac{7}{100}$. По окончании симпозиума оказалось, что первоначальная доля числа биологов больше окончательной доли числа математиков, причем разность их значений равна $\frac{1}{25}$. Найти долю числа биологов среди участников симпозиума в первый день.

25. Банк принимает от населения срочные вклады с ежемесячной выплатой 7% первоначального вклада. Найти доход за один квартал, если первоначальный вклад составляет 1 млн. рублей.

26. (МГУ им. М.В. Ломоносова, геологический факультет, 1996 г.) В двух банках в конце года на каждый счет начисляется прибыль: в первом банке – 60% к текущей сумме на счете, во втором – 40% к текущей сумме на счете. Вкладчик в начале года часть имеющихся у него денег положил в первый банк, а остальные деньги – во второй банк, с таким расчетом, чтобы через два года суммарное количество денег на обоих счетах удвоилось.

Какую часть денег вкладчик положил в первый банк?

27. (МГУ им. М.В. Ломоносова, экономический факультет, 1993 г.) За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно сначала в размере 5% в месяц, затем $11\dfrac{1}{9}$%, потом $7\dfrac{1}{7}$% и, наконец, 12% в месяц. Известно, что под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сума вклада увеличилась на 180%. Определить срок хранения вклада.

28. (МГУ им. М.В. Ломоносова, экономический факультет, 1995 г.) В банк помещен вклад в размере 3900 тыс. руб. под 50% годовых. В конце каждого из первых четырех лет хранения после начисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу пятого года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 725%. Какую сумму вкладчик ежегодно добавлял ко вкладу?

29. (МГУ им. М.В. Ломоносова, экономический факультет, 1995 г.) В первый год разработки месторождения было добыто 100 тыс. т железной руды. В течение нескольких следующих лет годовая добыча руды увеличивалась на 25% по сравнению с каждым предшествующим годом, а затем на протяжении последующих трех лет поддерживалась на достигнутом уровне. Общий объем добытой руды за все время добычи составил 850 тыс. т. Сколько лет разрабатывалось месторождение?

30. (МГУ им. М.В. Ломоносова, экономический факультет, 1997 г.) Имеются три пакета акций. Суммарное количество акций первых двух пакетов равно количеству акций третьего пакета. Первый пакет вчетверо дешевле второго, а суммарная стоимость первых двух пакетов равна стоимости третьего. Одна акция второго пакета дороже одной акции первого на величину, заключенную в пределах от 16 до 20 тыс. руб., а цена одной акции третьего пакета не меньше 42 тыс. руб. и не больше 60 тыс. руб. Какой наименьший и какой наибольший процент от общего количества акций может содержаться в первом пакете при данных условиях?

31. (МГУ им. М.В. Ломоносова, социологический факультет, 1997 г.) В дошкольном учреждении провели опрос. На вопрос "Что Вы предпочитаете: кашу или компот?" бо́льшая часть ответила: "Компот", а один респондент затруднился ответить. Среди любителей компота 30% предпочитают абрикосовый, а 70% – грушевый. Среди любителей каши 56,25% предпочитают манную кашу, 37,5% – рисовую, а один затруднился ответить, какую именно кашу он любит. Сколько детей было опрошено?

32. (МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет почвоведения, 1997 г.) В сосуде находился 10%-ный раствор спирта. Из сосуда отлили $\frac{1}{3}$ содержимого, а оставшуюся часть долили водой так, что сосуд оказался заполненным на $\frac{5}{6}$ первоначального объема. Какое процентное содержание спирта оказалось в сосуде?

33. (МГУ им. М.В. Ломоносова, химический факультет, 1997 г.) Из сосуда с чистым спиртом отлили $\frac{1}{3}$ часть и добавили столько же воды. Потом опять отлили $\frac{1}{3}$ часть и добавили столько же воды. Эту операцию проделали k раз. Найти наименьшее значение k, при котором содержание спирта станет меньше 10%.

34. (МГУ им. М.В. Ломоносова, геологический факультет, 1995 г.) Имеются два слитка, содержащие медь. Масса второго слитка на 3 кг больше, чем масса первого слитка. Процентное содержание меди в первом слитке – 10%, во втором – 40%. После сплавливания этих двух слитков получился слиток, процентное содержание меди в котором – 30%. Определить массу полученного слитка.

35. (МГУ им. М.В. Ломоносова, геоломический факультет, 1996 г.) В одном декалитре кислотного раствора 96% объема составляет кислота. Сколько воды можно долить, чтобы концентрация кислоты в полученном растворе была не больше 40%?

36. Следующие десятичные дроби записать в виде обыкновенных дробей:
а) $0,1(2)$; б) $1,(25)$; в) $1,(171)$; г) $1,(2519)$; д) $3,1(73)$.

37. Представить в виде обыкновенной дроби:

$$\frac{\dfrac{4\frac{1}{3}+5,4+0,2(16)}{0,0(3)+0,1+13/15}:\left[\left(4-0,8(3)-2\dfrac{7}{8}\right):\left(8\dfrac{7}{24}-7,91(6)\right)\right]}{\dfrac{3}{14}+\dfrac{9}{42}}.$$

38. В ящике 7 белых и 13 черных шаров. Вынут один шар. Какова вероятность, что вынутый шар

а) белого цвета; б) черного цвета; в) красного цвета; г) белого или черного цвета?

39. Имеется колода из 16 игральных карт: 4 валета, 4 дамы, 4 короля и 4 туза. Одна из мастей объявлена козырной. Из колоды достали одну карту. Какова вероятность, что эта карта козырная или туз?

40. Игральный кубик подброшен один раз. Событие A - "выпало не более 4 очков", событие B – "выпало нечетное число очков". Найти вероятности: $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}_B(A)$, $\mathrm{P}_A(B)$. Будут ли события A и B независимыми?

41. При игре в рулетку с одинаковой вероятностью может выпасть один из 38 номеров. Если выпадает номер, на который поставил игрок, то этот игрок получает обратно свою ставку и, кроме того, сумму ставки, увеличенную в 35 раз, если же выпадает другой номер, то игрок теряет свою ставку. Сколько в среднем получит игрок в одной игре при ставке 19 у.е. ?

42. Игрок вынимает из колоды в 36 карт одну карту. Он получает 10 руб., если вынимает бубнового короля, и проигрывает 1 руб. в остальных случаях. Сколько в среднем будет проигрывать игрок за одну игру?

Ответы.

1. 71010; 71910; 71415. **2.** 13500; 13545; 13590. **8.** а) НОД=44, НОК=1848; б) НОД=12; НОК=5040; в) НОД=$2^3\cdot 3^3$; НОК=$2^8\cdot 3^7\cdot 11^2\cdot 13^2\cdot 17$. **9.** $x=y=2$. **10.** $x=1$; $y=2$. **11.** 189. **12.** 18 и 16. **13.** 432. **14.** 995. **15.** 3;5; 22. **16.** 218. **17.** а) $(24,23)$; $(24,-23)$; $(-24,-23)$; $(-24,23)$; б) $(13,32)$; $(-5,-16)$; $(-13,-32)$; $(5,16)$. **18.** $(-14,-2)$. **19.** 0; -1; 2; 3. **20.** 72,2%. **21.** 15 т. **22.** 8,1%. **23.**

85%. **24.** 51/100. **25.** 210 тыс. руб. **26.** 1/15. **27.** 12 месяцев. **28.** 210 тыс. руб. **29.** 6 лет. **30.** 12,5% и 15%. **31.** 27. **32.** 8%. **33.** 6. **34.** 9 кг. **35.** Не менее 1,4 декалитра. **35.** 597/20. **38.** 7/20; 13/20; 0;1. **39.** 7/16. **40.** 2/3; 1/2; 2/3; 1/2; A и B независимы. **41.** В среднем проигрывает 1/2 у.е. **42.** В среднем проигрывает 25/36 руб.

Литература

1. Потапов М.К., Александров В.В., Пасиченко П.И. Алгебра, тригонометрия и элементарные функции. – М.: "Высшая школа", 2001 г.

2. Олехник С.Н., Потапов М.К. Сборник задач по алгебре, тригонометрии и элементарным функциям. – М.: "Высшая школа", 2001 г.

3. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. Задачи по математике. Алгебра. – М.: "Наука", 1988 г.

4. Болтянский В.Г., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И. Лекции и задачи по элементарной математике. – М.: "Наука", 1971 г.

Александрова Ольга Владимировна,
Вуколова Татьяна Михайловна,
Потапов Михаил Константинович

Натуральные, целые, рациональные числа и их применение в финансовой экономике и исчислении вероятностей.

М., Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 40 стр.

Оригинал макет изготовлен издательской группой механико-математического факультета МГУ

Подписано в печать 05.05.2005 г.
Формат 60×90 1/16. Объем 2,5 п.л.
Заказ 9 Тираж 250 экз.

Издательство ЦПИ при механико–математическом факультете МГУ г. Москва, Воробьевы горы.
Лицензия на издательскую деятельность ИД № 04059 от 20.02.2001 г.

Отпечатано на типографском оборудовании механико-математического факультета