Յու. Ռ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

ԹՎԱՅԻՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐ

II

Դասագիրք համալսարանների
ֆիզիկամաթեմատիկական
մասնագիտությունների համար

Երևան - 2007

ՀՏԴ 51(07)
ԳՄԴ 22 y 73
Հ 177

Երաշխավորված է հրատարակության ԵՊՀ Ինֆորմատիկայի
և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի խորհուրդի կողմից

Խմբագիր՝ Լ.Գ. Մանուկյան

Հակոբյան Յու.Ռ.

Հ 177 Թվային մեթոդներ.- մաս II.- Եր.: ՎՄՎ - Պրինտ, 2007.- 248 էջ:

Գրքում տրված է հանրահաշվի, մաթեմատիկական անալիզի և դիֆերենցիալ հավասարումների խնդիրների լուծման թվային մեթոդների հիմունքների համակարգված շարադրանքը: Որպես ուսումնամեթոդական ձեռնարկ դասագիրքը նախանշված է համալսարանների ֆիզիկամաթեմատիկական մասնագիտությունների և բարձրագույն տեխնիկական ուսումնական հաստատությունների ուսանողների և ասպիրանտների համար: Այն կարող է օգտակար լինել նաև թվային հաշվարկների հետ առնչվող մասնագետներին: Յուրաքանչյուր գլուխ եզրափակվում է ինքնուրույն աշխատանքի համար նախատեսված խնդիրներով և վարժություններով:

Գրքի երկրորդ մասը ընդգրկում է նորմավորված տարածություններում մոտարկումների տեսությունը, թվային ինտեգրման, սովորական և մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների թվային լուծման մեթոդները:

Հ $\frac{1602010000}{0180(01)-2007}$ 2007 թ. ԳՄԴ 22 y 73

ISBN 978-99941-53-35-0

© Յու.Ռ. Հակոբյան, 2007

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԱԽԱԲԱՆ 7

Գլուխ 5. ՄՈՏԱՐԿՈՒՄՆԵՐ ՆՈՐՄԱՎՈՐՎԱԾ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՒՄ **8**

5.1 Լավագույն մոտարկման տարր 8

5.2 Հավասարաչափ մոտարկումներ 13

5.3 Լավագույն հավասարաչափ մոտարկման օրինակներ 22

5.4 Մոտարկումներ հիլբերտյան տարածությունում 25

5.5 Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացումը 32

5.6 Միջին քառակուսային մոտարկումներ հանրահաշվական բազմանդամներով 35

5.7 Փոքրագույն քառակուսիների մեթոդ 44

Խնդիրներ և վարժություններ - 5 48

Գլուխ 6. ԹՎԱՅԻՆ ԻՆՏԵԳՐՈՒՄ **52**

6.1 Քառակուսացման բանաձևեր 52

6.2 Ուղղանկյունների և սեղանների բանաձևերը 54

6.3 Սիմպսոնի բանաձևը 65

6.4 Սխալանքի գնահատման Ռունգեի կանոնը 69

6.5 Նյուտոն-Կոտսի բանաձևերը 75

6.6 Գաուսի քառակուսացման բանաձևը 79

6.7 Չեբիշևի քառակուսացման բանաձևը 86

6.8 Ադապտիվ ալգորիթմներ 89

6.9 Անիսկական ինտեգրալների հաշվումը 91

Խնդիրներ և վարժություններ - 6 98

Գլուխ 7. ՍՈՎՈՐԱԿԱՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐ **103**

7.1 Կոշու խնդիրը 103

7.2 Անալիտիկ մոտավոր մեթոդներ 108

7.3 Էյլերի մեթոդը 112

7.4 Էյլերի անբացահայտ մեթոդը 119

7.5 Էյլերի վերահաշվման մեթոդներ 122

7.6 Ռունգե-Կուտայի մեթոդը 128

7.7 Ռունգեի կանոնը և ճշգրտում ըստ Ռիչարդսոնի 131

7.8 Ադամսի մեթոդը 134
7.9 Կայունության խնդիրը և կոշտ հավասարումներ 142
7.10 Եզրային խնդիրներ 151
7.11 Վերջավոր տարբերությունների մեթոդ 155
7.12 Տարբերական սխեմայի հետազոտումը մեկ եզրային խնդրի համար 159
Խնդիրներ և վարժություններ - 7 163
Գլուխ 8. ՏԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ՍԽԵՄԱՆԵՐ ՄԱՍՆԱԿԱՆ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐՈՎ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ 167
8.1 Մաթեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումների մասին 167
8.2 Տարբերական սխեմաների տեսության հիմնական հասկացությունները ... 170
8.3 Տարբերական սխեմաներ տեղափոխման հավասարման համար 183
8.4 Կայունության սպեկտրալ հայտանիշը 187
8.5 Ջերմահաղորդականության հավասարումը 192
8.6 Ֆուրիեի մեթոդը 201
8.7 Լարի տատանման հավասարումը 207
8.8 Դիրիխլեի խնդիրը Պուասոնի հավասարման համար 212
8.9 Ցանցային հավասարումների համակարգերի լուծման մեթոդները 216
Խնդիրներ և վարժություններ - 8 225
ՀԱՎԵԼՎԱԾ. ՀԱՄԱՌՈՏ ԿԵՆՍԱԳՐԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ 229
ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ 244

ՆԱԽԱԲԱՆ

Գրքի երկրորդ մասը բաղկացած է չորս գլխից և հավելվածից:

Հինգերորդ գլխում դիտարկվում են մոտարկումներ նորմավորված տարածություններում: Ներմուծվում է լավագույն մոտարկման տարրի հասկացությունը, քննարկվում են նրա գոյության և միակության հարցերը: Ուսումնասիրվում են ֆունկցիաների հավասարաչափ և միջին քառակուսային մոտարկումները հանրահաշվական բազմանդամներով: Շարադրվում են Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման ալգորիթմի դասական և վերափոխված տարբերակները: Գլխի վերջին պարագրաֆը նվիրված է լայն կիրառություն ունեցող փոքրագույն քառակուսիների մեթոդին:

Վեցերորդ գլուխը վերաբերում է թվային ինտեգրման մեթոդներին: Դիտարկվում են ուղղանկյունների, սեղանների, Սիմպսոնի, Գաուսի և Չեբիշևի քառակուսացման բանաձևերը: Արտածվում է սխալանքի գնահատման Ռունգեի կանոնը, ինչպես նաև մոտավոր ինտեգրման արդյունքի ճշգրտման Ռիչարդսոնի մեթոդը: Վերջին պարագրաֆում շարադրվում են անիսկական ինտեգրալների հաշվման որոշ եղանակներ:

Յոթերորդ գլուխը նվիրված է սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համար Կոշու խնդրի և եզրային խնդիրների լուծման թվային մեթոդներին: Դիտարկվում են Էյլերի մեթոդը և նրա վերափոխությունները, Ռունգե-Կուտայի և Ադամսի մեթոդները, հետազոտվում է նրանց զուգամիտությունը: Հիմնավորվում է սխալանքի գործնական գնահատման Ռունգեի կանոնը և Ռիչարդսոնի ճշգրտման մեթոդը: Հետազոտվում է մեթոդների կայունությունը ըստ սկզբնական պայմանների: Երկրորդ կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համար եզրային խնդրի օրինակով շարադրվում է վերջավոր տարբերությունների մեթոդի էությունը և պարզաբանվում են տարբերական սխեմաների տեսության հիմնական դրույթները:

Ութերորդ գլխում դիտարկվում են մասնական ածանցյալներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման տարբերական մեթոդները: Սահմանվում են տարբերական սխեմաների տեսության հիմնական հասկացությունները մոտարկում, կայունություն և զուգամիտություն: Կառուցվում և հետազոտվում են տարբերական սխեմաներ տեղափոխման, ջերմահաղորդականության, լարի տատանման և Պուասոնի հավասարումների համար:

Հավելվածում բերված են համառոտ կենսագրական տեղեկություններ դասագրքում հիշատակված գիտնականների մասին:

Հեղինակը շնորհակալություն է հայտնում

Ս.Լ. Սահակյանին և Է.Հ. Դանոյանին՝ դասագրքի բազում քննարկումների ընթացքում էական դիտողությունների և առաջարկությունների համար,

Լ.Վ. Միքայելյանին՝ գրքի հավելվածի ընթերցման և ճշգրտման համար,

Մ.Ա. Սիկիլյանին՝ աշխատանքը հրատարակության նախապատրաստելու ընթացքում անգնահատելի օգնության համար:

Յու.Ռ. Հակոբյան

Գլուխ 5

ՄՈՏԱՐԿՈՒՄՆԵՐ ՆՈՐՄԱՎՈՐՎԱԾ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՒՄ

5.1 Լավագույն մոտարկման տարր

Նախորդ գլխում մենք ծանոթացել ենք ֆունկցիաների մոտարկման որոշ եղանակներին, որոնց հիմքում ընկած է ինտերպոլացիա հանրահաշվական բազմանդամների միջոցով: Սակայն մի շարք դեպքերում տրված կետերում մոտարկվող և մոտարկող ֆունկցիաների համընկման պահանջը նպատակահարմար չէ, օրինակ՝ եթե մենք առնչվում ենք փորձարարական տվյալների մշակման հետ, որոնք, որպես օրենք, պարունակում են անճշտություններ: Ինտերպոլացիայի հետ մեկտեղ գոյություն ունի ֆունկցիաների մոտակման խնդրի լուծման այլ մոտեցում, որի էությունը կայանում է ինչ-որ ֆունկցիոնալ տարածության մետրիկայում *լավագույն մոտարկման* կառուցման մեջ:

Հիշեցնենք նորմավորված տարածության սահմանումը:

Սահմանում 5.1.1 : L գծային տարածությունը (իրական կամ կոմպլեքս) կոչվում է *նորմավորված տարածություն*, եթե յուրաքանչյուր $x \in L$ տարրին համապատասխանության մեջ է դրված այդ տարրի *նորմ* անվանվող $||x||$ իրական թիվը այնպես, որ բավարարվում են

1. $||x|| \geq 0$, $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$,
2. $||\lambda x|| = |\lambda|\,||x||$,
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (եռանկյան անհավասարություն)

պայմանները կամայական $x, y \in L$ և λ (իրական կամ, համապատասխանաբար, կոմպլեքս) թվի համար:

Հետագայում մենք կսահմանափակվենք միայն իրական նորմավորված տարածությունների դիտարկմամբ:

Դիցուք L-ը նորմավորված տարածություն է, իսկ L_n-ը՝ նրա ինչ-որ n-չափանի ենթատարածությունն է:

Սահմանում 5.1.2 : Կամայական $f \in L$ տարրի *հեռավորություն* L_n ենթատարածությունից կոչվում է

$$\rho(f, L_n) \equiv \inf_{\varphi \in L_n} ||f - \varphi|| \tag{5.1.1}$$

մեծությունը:

Պարզ է, որ եթե $f \in L_n$, ապա $\rho(f, L_n) = 0$:

Սահմանում 5.1.3 : $\psi \in L_n$ տարրը, որի համար

$$||f - \psi|| = \rho(f, L_n), \tag{5.1.2}$$

կոչվում է *լավագույն մոտարկման տարր* $f \in L$ տարրի համար L_n ենթատարածության մեջ:

Ակնհայտ է, որ եթե $f \in L_n$, ապա նենց ինքն է իր համար միակ լավագույն մոտարկման տարրը:

5.1.1 Լավագույն մոտարկման տարրի գոյությունը

Տեղի ունի հետևյալ հիմնարար պնդումը:

Թեորեմ 5.1.1 : *Կամայական $f \in L$ տարրի համար L_n ենթատարածությունում գոյություն ունի լավագույն մոտարկման տարր:*

Ապացույց: Դիցուք $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ տարրերի համակարգը L_n ենթատարածության բազիսն է: Դրանով իսկ կամայական $\varphi \in L_n$ տարր միարժեքորեն ներկայացվում է

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i$$

տեսքով: Այդ դեպքում

$$||\varphi|| = \left|\left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i \right|\right| \equiv G(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \geq 0 \tag{5.1.3}$$

և

$$||f - \varphi|| = \left|\left| f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i \right|\right| \equiv F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \geq 0 \tag{5.1.4}$$

նորմերը կարելի է դիտարկել որպես ոչ բացասական ֆունկցիաներ որոշված $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ կետերի n-չափանի $\mathbf{R}^n$ թվաբանական տարածությունում: Հեշտ է տեսնել, որ F ֆունկցիայի ներմուծմամբ (5.1.1)-ում սահմանված $\rho(f, L_n)$ հեռավորությունը կարելի է գրել նաև հետևյալ կերպ.

$$\rho(f, L_n) = \inf_{\alpha \in \mathbf{R}^n} F(\alpha) : \tag{5.1.5}$$

Դժվար չէ համոզվել, որ G և F ֆունկցիաները անընդհատ են: Իրոք, $\mathbf{R}^n$-ի ցանկացած $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ և $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ կետերի համար ունենք

$$|G(\alpha) - G(\beta)| = \left| \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i \right\| - \left\| \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi_i \right\| \right| \leq$$

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) \varphi_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i| \, \|\varphi_i\| \leq q \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i| \, ,$$

որտեղ $q \equiv \max\limits_{1 \leq i \leq n} \|\varphi_i\|$: Ստացված անհավասարությունից հետևում է G ֆունկցիայի անընդհատությունը: Համանմանորեն ցույց է տրվում F ֆունկցիայի անընդհատությունը:

Լավագույն մոտարկման տարրի (5.1.2) և F ֆունկցիայի (5.1.4) սահմանումների համաձայն՝ բավարար է ապացուցել այնպիսի $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*) \in \mathbf{R}^n$ կետի գոյությունը, որի համար $F(\alpha^*) = \rho(f, L_n)$:

Դիտարկենք $\mathbf{R}^n$ տարածության մեջ

$$S = \left\{ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \; : \; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = 1 \right\}$$

միավոր սֆերան: Ինչպես հայտնի է, S-ը սահմանափակ փակ բազմություն է $\mathbf{R}^n$ տարածությունում: Հայտնի է նաև, որ անընդհատ ֆունկցիան փակ սահմանափակ բազմության վրա ընդունում է իր նվազագույն արժեքը (տե՛ս, օրինակ, [45]): Այդ պատճառով գոյություն ունի այնպիսի $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in S$ կետ, որ

$$G(\xi) = \min_{\alpha \in S} G(\alpha) \equiv \mu \; : \tag{5.1.6}$$

Քանի որ G ֆունկցիան ոչ բացասական է, ապա $\mu \geq 0$: Դեռ ավելին, $\mu > 0$: Իրոք, եթե μ-ն հավասար լիներ զրոյի, ապա (5.1.6) և (5.1.3) -ից կհետևեր, որ

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \varphi_i = 0 \; :$$

Այդ դեպքում, քանի որ φ_i տարրերը գծորեն անկախ են, կստանայինք, որ $\xi_i = 0$ բոլոր $i = 1, 2, \ldots, n$ արժեքների համար: Իսկ դա հակասում է $\xi \in S$ պայմանին: Այսպիսով, $\mu > 0$:

Վերցնենք

$$r = \frac{\rho(f, L_n) + \|f\| + 1}{\mu} \tag{5.1.7}$$

թիվը և տրոհենք $\mathbf{R}^n$ տարածությունը երկու չհատվող ենթաբազմությունների.

$$R_1^n = \left\{ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \; : \; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \leq r^2 \right\}$$

և

$$R_2^n = \left\{ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \; : \; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 > r^2 \right\} \; :$$

Պարզ է, որ $R_1^n \cup R_2^n = \mathbf{R}^n$: Դիտարկենք F ֆունկցիան R_2^n բազմության վրա: Ցանկացած $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in R_2^n$ կետի համար ունենք՝

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \equiv \lambda^2 > r^2 \tag{5.1.8}$$

և, համապատասխանաբար,

$$F(\alpha) = \left\| f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i \right\| \geq \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i \right\| - \|f\| = |\lambda| \left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{|\lambda|} \varphi_i \right\| - \|f\| \ : \tag{5.1.9}$$

Այնուհետև վերցնենք $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ կետը, որտեղ $\beta_i = \alpha_i / |\lambda|$, $i = 1, 2, \ldots, n$: Ակնհայտ է, որ $\beta \in S$: Այդ դեպքում (5.1.9)-ից, հաշվի առնելով (5.1.6) և (5.1.8), կստանանք

$$F(\alpha) \geq |\lambda| \left\| \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi_i \right\| - \|f\| = |\lambda| G(\beta) - \|f\| \geq |\lambda| \mu - \|f\| \geq r\mu - \|f\| \ :$$

Այստեղից՝ r թվի (5.1.7) ընտրության շնորհիվ, հետևում է

$$F(\alpha) \geq \rho(f, L_n) + 1 \ :$$

Վերջին անհավասարությունը տեղի ունի կամայական $\alpha \in R_2^n$ կետի համար: Այդ պատճառով, ելնելով (5.1.5)-ից, կարող ենք գրել, որ

$$\rho(f, L_n) = \inf_{\alpha \in \mathbf{R}^n} F(\alpha) = \inf_{\alpha \in R_1^n} F(\alpha) \ :$$

Իսկ քանի որ R_1^n-ը սահմանափակ փակ բազմություն է $\mathbf{R}^n$ տարածության մեջ, ապա F անընդհատ ֆունկցիան ընդունում է այդ բազմության վրա իր փոքրագույն արժեքը: Այլ խոսքով, գոյություն ունի այնպիսի $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*) \in R_1^n$ կետ, որ

$$F(\alpha^*) = \inf_{\alpha \in R_1^n} F(\alpha) = \rho(f, L_n) \ :$$

Այսպիսով,

$$\psi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* \varphi_i \in L_n$$

տարրը կլինի լավագույն մոտարկման տարր $f \in L$ տարրի համար: □

5.1.2 Լավագույն մոտարկման տարրի միակության մասին

Մինչ լավագույն մոտարկման տարրի միակության հարցի քննարկումը՝ դիտարկենք մի օրինակ:

Օրինակ 5.1.1 : Դիցուք $x = [x_1, x_2, x_3]^T$ վեկտորների $\mathbf{R}^3$ տարածության մեջ մտցված է $||x|| = \max\limits_{1\le i\le 3}|x_i|$ նորմը: Գտնենք լավագույն մոտարկման տարր $f = [1, 1, 1]^T$ վեկտորի համար $x = [x_1, x_2, 0]^T$ վեկտորների R_2^3 երկչափանի ենթատարածությունում:

Ցանկացած $x \in R_2^3$ վեկտորի համար ունենք՝

$$||f - x|| = \max\{|1 - x_1|, |1 - x_2|, 1\} \ge 1 \ :$$

Ակնհայտ է, որ

$$\rho(f, R_2^3) = \inf_{x\in R_2^3} ||f - x|| = 1 \ :$$

Հեշտ է տեսնել, որ ցանկացած $x \in R_2^3$ վեկտոր, որի կոմպոնենտները բավարարում են $|1 - x_1| \le 1$, $|1 - x_2| \le 1$, այսինքն՝ $0 \le x_1, x_2 \le 2$ պայմաններին, լավագույն մոտարկման տարր է f վեկտորի համար, քանի որ

$$||f - x|| = 1 = \rho(f, R_2^3) . \quad \clubsuit$$

Այսպիսով, դիտարկված օրինակը ցույց է տալիս, որ լավագույն մոտարկման տարրը միշտ չէ, որ միակն է:

Սահմանում 5.1.4 : L նորմավորված տարածությունը կոչվում է *խիստ նորմավորված*, եթե

$$||f + g|| = ||f|| + ||g|| , \quad f, g \ne 0$$

պայմանից հետևում է, որ $f = \alpha g$, որտեղ $\alpha > 0$:

Թեորեմ 5.1.2 : *Եթե L տարածությունը խիստ նորմավորված է, ապա լավագույն մոտարկման տարրը միակն է:*

Ապացույց: Եթե $f \in L_n$, ապա, ինչպես վերն ասվեց, այն միակ լավագույն մոտարկման տարրն է ինքն իր համար: Հետևաբար ենթադրենք, որ $f \in L \setminus L_n$ և նրա համար L_n ենթատարածության մեջ գոյություն ունեն երկու լավագույն մոտարկման տարր, այն է՝ ψ_1 և ψ_2: Այդ դեպքում

$$||f - \psi_1|| = ||f - \psi_2|| = \rho(f, L_n) \ : \tag{5.1.10}$$

Դիտարկենք

$$\psi_0 \equiv \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2) \in L_n$$

տարրը: Հաշվի առնելով (5.1.10) հավասարությունները նրա համար ունենք

$$||f-\psi_0|| = ||f-\frac{1}{2}(\psi_1+\psi_2)|| = \frac{1}{2}||(f-\psi_1)+(f-\psi_2)|| \le \frac{1}{2}(||f-\psi_1||+||f-\psi_2||) = \rho(f, L_n) \ :$$

Եթե

$$||(f - \psi_1) + (f - \psi_2)|| \le ||f - \psi_1|| + ||f - \psi_2||$$

անհավասարության մեջ լիներ խիստ անհավասարություն, ապա մենք կստանայինք

$$||f - \psi_0|| < \rho(f, L_n)\,.$$

ինչը կհակասեր $\rho(f, L_n)$ հեռավորության սահմանմանը: Հետևաբար,

$$||(f - \psi_1) + (f - \psi_2)|| = ||f - \psi_1|| + ||f - \psi_2|| \ :$$

Իսկ քանի որ տարածությունը խիստ նորմավորված է, ապա

$$f - \psi_1 = \alpha(f - \psi_2)\,, \quad \alpha \neq 0 \ :$$

Վերջին հավասարության մեջ α գործակիցը պետք է հավասար լինի մեկի: Իրոք, հակառակ դեպքում կունենայինք

$$f = \frac{1}{1-\alpha}(\psi_1 - \alpha\psi_2)\,,$$

ինչը կհակասեր մեր ենթադրությանը, որ $f \notin L_n$: Այսպիսով, $\alpha = 1$ և $f - \psi_1 = f - \psi_2$ հավասարությունից հետևում է, որ $\psi_1 = \psi_2$: □

Ինչպես կտեսնենք ստորև, տարածության խիստ նորմավորվածությունը լավագույն մոտարկման տարրի միակության անհրաժեշտ պայմանը չէ:

5.2 Հավասարաչափ մոտարկումներ

Որպես L նորմավորված տարածություն դիտարկենք $[a, b]$ հատվածի վրա անընդհատ ֆունկցիաների $C[a, b]$ տարածությունը

$$||f|| \equiv \max_{a \le x \le b} |f(x)| \tag{5.2.1}$$

նորմով:

Պարզ է, որ երկու $f, g \in C[a, b]$ ֆունկցիաների տարբերության նորմը, այսինքն՝

$$||f - g|| = \max_{a \le x \le b} |f(x) - g(x)|$$

մեծությունը, հավասար է $[a, b]$ հատվածի վրա այդ ֆունկցիաների մեծագույն շեղմանը: Օրինակ, եթե $f(x) \in C[a, b]$ ֆունկցիան մոտարկվում է մեկ այլ $F(x)$ ֆունկցիայով նույն տարածությունից և $||f - F|| < \varepsilon$, ապա

$$|f(x) - F(x)| < \varepsilon \qquad \forall x \in [a, b] \ :$$

Դրանով իսկ $F(x)$ ֆունկցիան $[a, b]$ հատվածի վրա *հավասարաչափ* մոտարկում է $f(x)$-ը ε ճշտությամբ: Այդ պատճառով մոտարկումները $C[a, b]$ տարածության մեջ կոչվում են *հավասարաչափ մոտարկումներ*:

Եթե $f(x)$ ֆունկցիան $[a, b]$ հատվածի վրա վերլուծվում է հավասարաչափ զուգամետ աստիճանային շարքի, ապա որպես մոտարկող բազմանդամ կարելի է վերցնել այդ շարքի մասնակի գումարը: Այդպիսի մոտեցում է օգտագործվում, օրինակ, տարրական ֆունկցիաների արժեքների հաշվարկի ժամանակ:

Օրինակ 5.2.1 : Դիցուք պահանջվում է հաշվել $f(x) = \sin x$ ֆունկցիայի արժեքը $[0, \pi/4]$ հատվածի ինչ-որ կետում 10^{-7} ճշտությամբ: Վերլուծենք $\sin x$ ֆունկցիան

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

շարքի (տե՛ս, օրինակ, [45]): Սահմանափակվելով շարքի առաջին հինգ անդամներով՝ ունենք

$$\left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}\right)\right| < \frac{1}{11!} \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^{11} < 0.2 \cdot 10^{-7} \ . \qquad (5.2.2)$$

Հետևաբար, տրված ճշտությամբ $[0, \pi/4]$ հատվածի վրա $\sin x$ ֆունկցիայի արժեքների փոխարեն կարելի է վերցնել

$$P_9(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \qquad (5.2.3)$$

բազմանդամի համապատասխան արժեքները:

Ինն աստիճանից ոչ բարձր բազմանդամների միջև կառուցված բազմանդամը դրված խնդրի միակ լուծումը չէ: Դեռ ավելին, կարելի է կառուցել յոթերորդ աստիճանի բազմանդամ, որը $[0, \pi/4]$ հատվածի վրա կմոտարկի $\sin x$ ֆունկցիան 10^{-7} տրված ճշտությամբ: Այդ նպատակի համար օգտվենք Չեբիշևի $T_n(x)$ բազմանդամներից, որոնք բավականին մանրամասն դիտարկել ենք 4.3 պարագրաֆում :

Կիրառելով (4.3.7) անդրադարձ բանաձևերը՝ գրենք

$$T_9(x) = 256\,x^9 - 576\,x^7 + 432\,x^5 - 120\,x^3 + 9\,x$$

բազմանդամը: Ինչպես հայտնի է, $x \in [-1, 1]$ արժեքների համար $|T_n(x)| \le 1$ (լեմմա 4.3.1): Ուստի դիտարկվող $[0, \pi/4]$ հատվածի համար ունենք

$$\left|x^9 - \frac{9}{4}x^7 + \frac{27}{16}x^5 - \frac{15}{32}x^3 + \frac{9}{256}x\right| = \frac{1}{2^8}\,|T_9(x)| \le \frac{1}{2^8} \qquad (5.2.4)$$

գնահատականը: $P_9(x)$ բազմանդամի (5.2.3) արտահայտության մեջ x^9 աստիճանը փոխարինենք

$$Q_7(x) = \frac{9}{4}x^7 - \frac{27}{16}x^5 + \frac{15}{32}x^3 - \frac{9}{256}x$$

բազմանդամով: Արդյունքում կստանանք յոթերորդ աստիճանի

$$\begin{aligned} P_7(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{1}{9!}\,Q_7(x) \\ &= -\frac{31}{161280}x^7 + \frac{597}{71680}x^5 - \frac{129023}{774144}x^3 + \frac{10321919}{10321920}x \end{aligned}$$

բազմանդամ: Այդ դեպքում

$$|\sin x - P_7(x)| = \left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{1}{9!}\,Q_7(x)\right)\right| =$$

$$\left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}\right) + \frac{1}{9!}\left(x^9 - Q_7(x)\right)\right| \le$$

$$\left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}\right)\right| + \frac{1}{9!}\left|x^9 - Q_7(x)\right| \ :$$

Այստեղից, ունեցած (5.2.2) և (5.2.4) գնահատականների հիման վրա, կստանանք՝

$$|\sin x - P_7(x)| \le 0.2 \cdot 10^{-8} + \frac{1}{9!} \cdot \frac{1}{2^8} < 0.2 \cdot 10^{-8} + 1.08 \cdot 10^{-8} < 0.13 \cdot 10^{-7} \ :$$

Այսպիսով, կառուցված $P_7(x)$ բազմանդամը հավասարաչափ մոտարկում է $\sin x$ ֆունկցիան $[0, \pi/4]$ հատվածի վրա տրված ճշտությամբ: ♣

Դիտարկենք հանրահաշվական բազմանդամները որպես մոտարկող ֆունկցիաներ: Նշանակենք H_n-ով n-ից ոչ բարձր աստիճանի իրական գործակիցներով բոլոր հանրահաշվական բազմանդամների դասը: Պարզ է, որ H_n-ը $C[a, b]$ տարածության $(n+1)$-չափանի ենթատարածություն է:

Ֆունկցիաների մոտարկման տեսության մեջ կարևորագույն արդյունքներից է հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ 5.2.1 (Կ.Վայերշտրաս) **:** *Եթե $f(x) \in C[a, b]$, ապա ցանկացած դրական ε-ի համար գոյություն ունի այնպիսի $\mathcal{P}(x)$ բազմանդամ, որ*

$$||f - \mathcal{P}|| < \varepsilon \ : \tag{5.2.5}$$

Ինչպես կարելի է տեսնել թեորեմի ապացույցից (տե՛ս, օրինակ, [30]), որքան փոքր է ε-ը, այնքան բարձր է $\mathcal{P}(x)$ բազմանդամի աստիճանը (ինչի բնական է): Եթե n-ը $\mathcal{P}(x)$ բազմանդամի աստիճանն է, ապա, հիմնվելով (5.2.5) անհավասարության վրա, կստանանք՝

$$\rho(f, H_n) = \inf_{P_n(x) \in H_n} ||f - P_n|| < \varepsilon \ :$$

Այստեղից, քանի որ $\varepsilon > 0$ կամայական է, ապա

$$\lim_{n \to \infty} \rho(f, H_n) = 0 \ : \tag{5.2.6}$$

Դեռ ավելին, $\rho(f, H_n)$ հաջորդականությունը մոնոտոն չաճող է: Իրոք, ելնելով

$$H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_n \subset \cdots \subset C[a, b]$$

ենթատարածությունների ներդրվածությունից և $\rho(f, H_n)$ հեռավորության սահմանումից, ունենք

$$\rho(f, H_0) \geq \rho(f, H_1) \geq \cdots \geq \rho(f, H_n) \geq \cdots \geq 0 \ :$$

Լավագույն մոտարկման տարրի գոյության 5.1.1 թեորեմի հիման վրա կարող ենք պնդել, որ ցանկացած $f(x) \in C[a, b]$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունի այնպիսի $Q_n(x) \in H_n$ բազմանդամ, որ

$$||f - Q_n|| = \rho(f, H_n) \ : \tag{5.2.7}$$

Այս $Q_n(x)$ բազմանդամը կոչվում է *լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամ* $f(x)$ ֆունկցիայի համար:

5.2.1 Ալտերնանսի մասին Չեբիշևի թեորեմը

Ստորև բերված հիմնարար պնդումը սահմանում է լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամ լինելու անհրաժեշտ և բավարար պայմանը:

Թեորեմ 5.2.2 (Պ.Լ.Չեբիշև) : *Որպեսզի $Q_n(x)$ բազմանդամը լինի լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամ $f(x) \in C[a, b]$ ֆունկցիայի համար, անհրաժեշտ է և բավարար, որ գոյություն ունենան առնվազն $n + 2$ կետ*

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+2} \in [a, b] \, , \tag{5.2.8}$$

այնպիսիք, որ

$$f(x_i) - Q_n(x_i) = \alpha \, (-1)^i ||f - Q_n|| \, , \quad i = 1, 2, \ldots, n + 2 \, , \tag{5.2.9}$$

որտեղ $\alpha = 1$ (կամ $\alpha = -1$) միաժամանակ բոլոր i-երի համար:

Թեորեմում նշված $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+2}$ կետերը կոչվում են *չեբիշևյան ալտերնանսի կետեր* (նկ. 5.2.1):

Նկ. 5.2.1 Չեբիշևյան ալտերնանսի կետերը

Ապացույց: Անհրաժեշտություն: Մենք չենք դիտարկի այն տրիվիալ դեպքը, երբ $f(x)$ ֆունկցիան ինքը n-րդ աստիճանի բազմանդամ է: Դիցուք $Q_n(x)$-ը լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամ է $f(x)$ ֆունկցիայի համար և

$$r(x) \equiv f(x) - Q_n(x)$$

Այդ դեպքում, (5.2.7)-ի համաձայն

$$||r|| = \rho(f, H_n) \ :$$

Մինչ ապացույցին անցնելը՝ տանք որոշ սահմանումներ:

Այն $x_0 \in [a, b]$ կետը, որի համար

$$|r(x_0)| = ||r|| ,$$

կանվանենք $Q_n(x)$ *բազմանդամի* $f(x)$ *ֆունկցիայից մեծագույն շեղման կետ* կամ e*-կետ*: Ընդ որում, եթե $r(x_0) = ||r||$, ապա x_0 կետը կանվանենք *դրական մեծագույն շեղման կետ* կամ e^+*-կետ*: Իսկ եթե $r(x_0) = -||r||$, ապա այս կետը կանվանենք *բացասական մեծագույն շեղման կետ* կամ e^-*-կետ*:

Քանի որ $r(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է, ապա, $[a, b]$ հատվածի վրա գոյություն ունի գոնե մեկ e կետ: Ավելին, $[a, b]$ հատվածի վրա գոյություն ունեն ինչպես e^+-կետեր, այնպես էլ՝ e^--կետեր: Իրոք, եթե, օրինակ, գոյություն չունենային e^--կետեր, ապա կգտնվեր այնպիսի ε, $0 < \varepsilon < ||r||$, որ

$$-||r|| + \varepsilon \le r(x) \le ||r|| \qquad \forall x \in [a, b] \ :$$

Այդ դեպքում, վերցնելով

$$Q_n^*(x) = Q_n(x) + \frac{\varepsilon}{2} ,$$

կստանայինք

$$-||r|| + \frac{\varepsilon}{2} \le f(x) - Q_n^*(x) = r(x) - \frac{\varepsilon}{2} \le ||r|| - \frac{\varepsilon}{2}$$

կամ

$$|f(x) - Q_n^*(x)| \le ||r|| - \frac{\varepsilon}{2} = \rho(f, H_n) - \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall x \in [a, b] \ :$$

Իսկ դա հակասում է $\rho(f, H_n)$ հեռավորության սահմանմանը: Համանմանորեն ապացուցվում է e^+-կետերի գոյությունը:

Ապացուցենք, որ $[a, b]$ հատվածը կարելի է տրոհել վերջավոր թվով հատվածների՝

$$[a, z_1] \, , \, [z_1, z_2] \, , \, [z_2, z_3] \, , \, \ldots \, , \, [z_{m-1}, z_m] \, , \, [z_m, b] \qquad (5.2.10)$$

այնպես, որ նրանցից յուրաքանչյուրը հերթով պարունակի կա՛մ միայն e^+-կետեր, կա՛մ միայն e^--կետեր:

Նկ. 5.2.2 $[a, b]$ հատվածի տրոհումը

Տրոհումը կատարենք հետևյալ կերպ (նկ. 5.2.2): Որոշակիության համար ենթադրենք, որ $[a, b]$ հատվածով երկայնությամբ a-ից b շարժման ընթացքում առաջին e-կետը՝ e^+-կետն է: Որպես z_1 վերցնենք $r(x)$ ֆունկցիայի ամենաաջ զրոն, որը գտնվում է a կետի և նրան հաջորդող առաջին e^--կետի միջև: Որպես z_2 վերցնենք $r(x)$ ֆունկցիայի ամենաաջ զրոն, որը գտնվում է z_1 կետի և նրան հաջորդող առաջին e^+-կետի միջև (եթե այդպիսինը գոյություն ունի): Որպես z_3 վերցնենք $r(x)$ ֆունկցիայի ամենաաջ զրոն, որը գտնվում է z_2 կետի և նրան հաջորդող առաջին e^--կետի միջև (եթե այդպիսինը գոյություն ունի) և այլն:

Դիցուք z_m-ը z_i կետերի միջև b-ից տարբեր ամենավերջին կետն է: Ընդ որում, ըստ կառուցման $r(z_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$: Քանի որ (5.2.10) հատվածներից յուրաքանչյուրի վրա գտնվում են հերթով e^+-կետեր և e^--կետեր, ապա թեորեմի պայմանի անհրաժեշտության համար բավական է ապացուցել, որ $m + 1 \geq n + 2$:

Ենթադրենք հակառակը՝ $m + 1 \leq n + 1$, այսինքն $m \leq n$: Համաձայն $[a, b]$ հատվածի (5.2.10) տրոհմանը $[a, z_1]$ հատվածի վրա գոյություն չունեն e^--կետեր, $[z_1, z_2]$ հատվածի վրա գոյություն չունեն e^+-կետեր և այլն: Քանի որ $r(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է և (5.2.10) հատվածների թիվը վերջավոր է, ապա կգտնվի այնպիսի ε թիվ, $0 < \varepsilon < ||r||$, որ

$$\begin{aligned} -||r|| + \varepsilon &\leq r(x) \leq ||r||, & x \in [a, z_1], \\ -||r|| &\leq r(x) \leq ||r|| - \varepsilon, & x \in [z_1, z_2], \\ -||r|| + \varepsilon &\leq r(x) \leq ||r||, & x \in [z_2, z_3] \end{aligned} \tag{5.2.11}$$

և այլն: Վերցնենք

$$d_m(x) = c(x - z_1)(x - z_2)\ldots(x - z_m)$$

բազմանդամը, որտեղ c թիվն ընտրված է այնպես, որ

$$||d_m|| \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.2.12}$$

և

$$d_m(x) > 0, \quad x \in [a, z_1) :$$

Այդ դեպքում $d_m(x)$ բազմանդամը, z_i կետերով անցնելիս, փոխում է իր նշանը: Հետևաբար այդ բազմանդամը միջակայքերում կունենա հերթափոխվող նշաններ, այսինքն՝

$$d_m(x) < 0\,, \quad x \in (z_1, z_2)\,.$$
$$d_m(x) > 0\,, \quad x \in (z_2, z_3)$$

և այլն: Վերցնենք

$$P_n(x) \equiv Q_n(x) + d_m(x)$$

(հիշեցնենք, որ համաձայն ենթադրության, $m \leq n$): Այդ դեպքում ցանկացած $x \in [a, z_1]$ կետի համար կունենանք

$$f(x) - P_n(x) = r(x) - d_m(x) < ||r|| \ : \tag{5.2.13}$$

Միաժամանակ, հաշվի առնելով (5.2.11) և (5.2.12) անհավասարությունները, $x \in [a, z_1]$ կետերի համար կստանանք

$$f(x) - P_n(x) = r(x) - d_m(x) \geq -||r|| + \varepsilon - ||d_m|| \geq -||r|| + \frac{\varepsilon}{2} > -||r|| \ : \tag{5.2.14}$$

Այսպիսով, (5.2.13) և (5.2.14)-ից հետևում է, որ

$$|f(x) - P_n(x)| < ||r||\,, \quad x \in [a, z_1] \ :$$

Այնուհետև, $x \in [z_1, z_2]$ ցանկացած կետի համար ունենք

$$f(x) - P_n(x) = r(x) - d_m(x) > -||r|| \ : \tag{5.2.15}$$

Միաժամանակ, դարձյալ հաշվի առնելով (5.2.11) և (5.2.12)-ը, $x \in [z_1, z_2]$ կետերի համար կստանանք

$$f(x) - P_n(x) = r(x) - d_m(x) \leq ||r|| - \varepsilon + ||d_m|| \leq ||r|| - \frac{\varepsilon}{2} < ||r|| \ : \tag{5.2.16}$$

Այսպիսով, (5.2.15) և (5.2.16)-ից հետևում է, որ

$$|f(x) - P_n(x)| < ||r||\,, \quad x \in [z_1, z_2] \ :$$

Շարունակելով համանման դատողությունները՝ արդյունքում կստանանք

$$|f(x) - P_n(x)| < ||r|| \qquad \forall x \in [a, b] \ :$$

Այսինքն՝

$$||f - P_n|| < ||r|| = \rho(f, H_n)\,,$$

ինչը հակասում է $\rho(f, H_n)$ հեռավորության սահմանմանը: Սրանով ապացուցվում է թեորեմի պայմանի անհրաժեշտությունը:

Բավարարություն: Դիցուք թեորեմի պայմանը կատարված է: Ենթադրենք, որ $f(x)$ ֆունկցիայի համար լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամը ոչ թե $Q_n(x)$-ն է, այլ մեկ ուրիշ բազմանդամ՝ $Q_n^*(x) \in H_n$: Այդ դեպքում ակնհայտ է, որ

$$||f - Q_n^*|| < ||f - Q_n|| \ : \tag{5.2.17}$$

Վերցնենք n-րդ աստիճանի բազմանդամ

$$R_n(x) \equiv Q_n^*(x) - Q_n(x) = [f(x) - Q_n(x)] - [f(x) - Q_n^*(x)]$$

և դիտարկենք նրա արժեքները (5.2.8) չեբիշևյան ալտերնանսի կետերում: Որոշակիության համար ենթադրենք, որ (5.2.9) պայմաններում $\alpha = 1$: Այդ դեպքում, հաշվի առնելով (5.2.17) անհավասարությունը, կունենանք

$$\begin{aligned} R_n(x_1) &= [f(x_1) - Q_n(x_1)] - [f(x_1) - Q_n^*(x_1)] = -||f - Q_n|| - [f(x_1) - Q_n^*(x_1)] \\ &\leq -||f - Q_n|| + ||f - Q_n^*|| < 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_n(x_2) &= [f(x_2) - Q_n(x_2)] - [f(x_2) - Q_n^*(x_2)] = ||f - Q_n|| - [f(x_2) - Q_n^*(x_2)] \\ &\geq ||f - Q_n|| - ||f - Q_n^*|| > 0, \end{aligned}$$

$$R_n(x_{n+2}) = [f(x_{n+2}) - Q_n(x_{n+2})] - [f(x_{n+2}) - Q_n^*(x_{n+2})] = (-1)^{n+2}||f - Q_n|| -$$

$$[f(x_{n+2}) - Q_n^*(x_{n+2})] \begin{array}{l} < 0 \text{ (եթե } n\text{-ը կենտ է)} \\ > 0 \text{ (եթե } n\text{-ը զույգ է)} \end{array}$$

Ստացվեց, որ n աստիճանից ոչ բարձր $R_n(x)$ բազմանդամը $[a, b]$ հատվածի վրա փոխում է իր նշանը առնվազն $n + 1$ անգամ: Հետևաբար այդ բազմանդամը պետք է ունենա առնվազն $n + 1$ արմատ, ինչն անհնար է: □

5.2.2 Լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամի միակությունը

$C[a, b]$ տարածությունը խիստ նորմավորված չէ: Դրանում հեշտ է հասկացվել հետևյալ օրինակի վրա:

Դիտարկենք $[0, 1]$ հատվածի վրա երկու ֆունկցիա՝ $f(x) = x$ և $g(x) \equiv 1$: Ակնհայտ է, որ $||f|| = 1$, $||g|| = 1$ և $||f + g|| = 2$: Սակայն $||f + g|| = ||f|| + ||g||$ հավասարությունից չի բխում, որ $f(x) = \alpha\, g(x)$, որտեղ $\alpha \neq 0$:

Այդ պատճառով մենք չենք կարող հենվել 5.1.2 թեորեմի վրա, որը հաստատում է լավագույն մոտարկման տարրի միակությունը խիստ նորմավորված տարածություններում: Այնուամենայնիվ, ճիշտ է հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ 5.2.3 : *Լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամը միակն է:*

Ապացույց: Ենթադրենք, որ $f(x) \in C[a,b]$ ֆունկցիայի համար H_n-ում գոյություն ունեն երկու լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամներ՝ $Q_n^{(1)}(x)$ և $Q_n^{(2)}(x)$: Այսինքն՝

$$||f - Q_n^{(1)}|| = ||f - Q_n^{(2)}|| = \rho(f, H_n) \ : \tag{5.2.18}$$

Դիտարկենք

$$Q_n(x) \equiv \frac{1}{2}\left(Q_n^{(1)}(x) + Q_n^{(2)}(x)\right) \in H_n$$

բազմանդամը: Հաշվի առնելով (5.2.18)-ը, նրա համար ունենք

$$||f - Q_n|| = \frac{1}{2}\,||(f - Q_n^{(1)}) + (f - Q_n^{(2)})|| \le \frac{1}{2}\left(||f - Q_n^{(1)}|| + ||f - Q_n^{(2)}||\right) = \rho(f, H_n) \ :$$

Այստեղից, ելնելով $\rho(f, H_n)$ հեռավորության սահմանումից, կստանանք

$$||f - Q_n|| = \rho(f, H_n) \ :$$

Դրանով իսկ $Q_n(x)$-ը նույնպես լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամ է $f(x)$ ֆունկցիայի համար: Այդ դեպքում, Չեբիշևի թեորեմի համաձայն, (5.2.8) ալտերնանսի կետերում տեղի ունեն

$$|f(x_i) - Q_n(x_i)| = \rho(f, H_n)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n+2$$

կամ

$$|(f(x_i) - Q_n^{(1)}(x_i)) + (f(x_i) - Q_n^{(2)}(x_i))| = 2\,\rho(f, H_n)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n+2 \tag{5.2.19}$$

հավասարությունները: Քանի որ

$$|f(x_i) - Q_n^{(1)}(x_i)| \le \rho(f, H_n)\,, \quad |f(x_i) - Q_n^{(2)}(x_i)| \le \rho(f, H_n)\,,$$

ապա (5.2.19) հավասարությունները հնարավոր են միայն այն դեպքում, երբ

$$f(x_i) - Q_n^{(1)}(x_i) = f(x_i) - Q_n^{(2)}(x_i)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n+2 \ :$$

Վերջին հավասարություններից հետևում է, որ

$$Q_n^{(1)}(x_i) = Q_n^{(2)}(x_i)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n+2 \ :$$

Այսպիսով, n-րդ աստիճանի $Q_n^{(1)}(x)$ և $Q_n^{(2)}(x)$ բազմանդամները համընկնում են $n+2$ կետերում: Ուստի նրանք նույնաբար հավասար են, այսինքն՝ $Q_n^{(1)}(x) \equiv Q_n^{(2)}(x)$: □

5.3 Լավագույն հավասարաչափ մոտարկման օրինակներ

Հիմնվելով Չեբիշևի թեորեմի վրա՝ դիտարկենք լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամների կառուցման մի քանի օրինակ:

Օրինակ 5.3.1 : Կառուցել լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամ H_0 դասից $[a, b]$ հատվածի վրա որոշված $f(x)$ անընդհատ ֆունկցիայի համար:

Դիցուք

$$m \equiv \min_{a \le x \le b} f(x) = f(x_1), \quad M \equiv \max_{a \le x \le b} f(x) = f(x_2) :$$

Դժվար չէ համոզվել, որ

$$Q_0(x) = \frac{M + m}{2}$$

որոնելի բազմանդամն է:

Նկ. 5.3.1 Լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամ H_0-ից

Իրոք,

$$||f - Q_0|| = \frac{M - m}{2}$$

և

$$f(x_1) - Q_0(x_1) = m - \frac{M + m}{2} = -\frac{M - m}{2} = -||f - Q_0|| .$$

$$f(x_2) - Q_0(x_2) = M - \frac{M + m}{2} = \frac{M - m}{2} = ||f - Q_0|| :$$

Չեբիշևյան ալտերնանսի կետերն են՝ x_1 և x_2 (նկ. 5.3.1): ♣

Օրինակ 5.3.2 : $[a,b]$ հատվածի վրա տրված է $f(x)$ անընդհատ ուռուցիկ ֆունկցիա (նկ. 5.3.2): Պահանջվում է կառուցել լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամ H_1 դասից:

Տանենք հատող $(a, f(a))$ և $(b, f(b))$ կետերով: Հատողի թեքության անկյան տանգենսը հավասար է $(f(b) - f(a))/(b - a)$: Տանենք շոշափող $y = f(x)$ կորին, զուգահեռ այդ հատողին: Շոշափման կետի d աբսցիսը որոշվում է

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

հավասարումից: Այնուհետև տանենք հատողից և շոշափողից հավասարահեռ ուղիղ (նկ. 5.3.2): Կառուցված գծային ֆունկցիան կլինի որոնելի լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամը H_1-ից: Իրոք, դիցուք $L \equiv ||f - Q_1||$: Այդ դեպքում

$$\begin{aligned} f(a) - Q_1(a) &= -L, \\ f(d) - Q_1(d) &= L, \\ f(b) - Q_1(b) &= -L: \end{aligned}$$

Նկ. 5.3.2 Լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամ H_1-ից

Նշենք, որ $a < d < b$ կետերը չեբիշևյան ալտերնանսի կետերն են: ♣

Օրինակ 5.3.3 : $f(x) = x^n$ ֆունկցիայի համար $[-1, 1]$ հատվածի վրա գտնել լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամ H_{n-1} դասից:

Դիտարկենք $(n-1)$-րդ աստիճանի

$$Q_{n-1}(x) \equiv x^n - \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) \tag{5.3.1}$$

բազմանդամ, որտեղ $T_n(x)$-ը Չեբիշևի բազմանդամ է: Այստեղ մենք հաշվի ենք առել այն փաստը, որ $T_n(x)$ բազմանդամի ավագ գործակիցը հավասար է 2^{n-1} (տես (4.3.8)): Ցույց տանք, որ $Q_{n-1}(x)$-ը որոնելի բազմանդամն է: Իրոք, (5.3.1)-ից ունենք

$$||x^n - Q_{n-1}|| = \frac{1}{2^{n-1}} ||T_n|| = \frac{1}{2^{n-1}} \max_{-1 \le x \le 1} |T_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}} :$$

Այնուհետև, դիցուք

$$1 = \theta_0 > \theta_1 > \cdots > \theta_{n-1} > \theta_n = -1 \qquad (5.3.2)$$

կետերը $T_n(x)$ բազմանդամի էքստրեմումի կետերն են (լեմմա 4.3.3): Այդ կետերում՝

$$\theta_0^n - Q_{n-1}(\theta_0) = \frac{1}{2^{n-1}}\, T_n(\theta_0) = \frac{1}{2^{n-1}}\,;$$

$$\theta_1^n - Q_{n-1}(\theta_1) = \frac{1}{2^{n-1}}\, T_n(\theta_1) = -\frac{1}{2^{n-1}}\,,$$

$$\vdots$$

$$\theta_n^n - Q_{n-1}(\theta_n) = \frac{1}{2^{n-1}}\, T_n(\theta_n) = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\,:$$

Դրանով իսկ $Q_{n-1}(x)$-ը լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամ է, իսկ (5.3.2) կետերը չեբիշևյան ալտերնանսի կետերն են: ♣

Ենթադրելով, որ $f(x) \in C^{(n+1)}[a,b]$, տանք $\rho(f, H_n)$ մեծության երկկողմանի գնահատականը:

Դասագրքի առաջին մասում (պարագրաֆ 4.3), քննարկելով ինտերպոլացիայի սխալանքի նվազեցման խնդիրը, մենք ցույց ենք տվել, որ եթե որպես հանգույցներ ընտրենք $T_{n+1}(x)$ բազմանդամի արմատների պատկերները

$$x = \frac{b-a}{2}\,\xi + \frac{b+a}{2}\,, \quad -1 \le \xi \le 1$$

արտապատկերմամբ և կառուցենք այդ հանգույցներով $L_n(x)$ ինտերպոլացիոն բազմանդամ, ապա

$$||f - L_n|| \le \frac{\max\limits_{a<x<b} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!\, 2^{2n+1}}(b-a)^{n+1}$$

(տե՛ս (4.3.20) գնահատականը): Այստեղից անմիջապես բխում է

$$\rho(f, H_n) \le \frac{\max\limits_{a\le x\le b} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!\, 2^{2n+1}}(b-a)^{n+1} \qquad (5.3.3)$$

գնահատականը:

Ստանանք այժմ ստորին գնահատականը: Դիցուք $Q_n(x)$-ը լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամ է H_n-ից $f(x)$ ֆունկցիայի համար: Քանի որ, համաձայն Չեբիշևի թեորեմի, $f(x) - Q_n(x)$ տարբերությունը ալտերնանսի մեկ կետից մյուսը անցնելիս փոխում է իր նշանը (տե՛ս (5.2.8) և (5.2.9)), ապա այն դառնում է զրո $[a,b]$ հատվածի առնվազն $(n+1)$ կետում՝ $z_0, z_1, \ldots, z_n$: Այսինքն՝

$$Q_n(z_i) = f(z_i)\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n\,:$$

Ուստի $Q_n(x)$ բազմանդամը կարելի է դիտել որպես ինտերպոլացիոն բազմանդամ $f(x)$ ֆունկցիայի համար՝ կառուցված $z_0, z_1, \ldots, z_n$ հանգույցներով: Օգտվելով ինտերպոլացիայի սխալանքի համար (4.3.4) արտահայտությունից՝ ունենք

$$f(x) - Q_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega_{n+1}(x) \qquad \forall x \in [a, b]\,.$$

որտեղ $\omega_{n+1}(x) \equiv (x - z_0)(x - z_1)\ldots(x - z_n)$ և $\xi = \xi(x) \in [a, b]$: Դիցուք

$$||\omega_{n+1}|| = \max_{a \le x \le b} |\omega_{n+1}(x)| = |\omega_{n+1}(\alpha)|\,, \qquad \alpha \in [a, b]\ :$$

Այդ դեպքում

$$\begin{aligned} \rho(f, H_n) &= ||f - Q_n|| \ge |f(\alpha) - Q_n(\alpha)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi(\alpha))|}{(n+1)!}\,|\omega_{n+1}(\alpha)| \\ &\ge \frac{\min\limits_{a \le x \le b} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}\,||\omega_{n+1}||\ : \end{aligned}$$

Վերը մենք ստացել ենք

$$||\omega_{n+1}|| \ge \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}$$

գնահատականը (տե՛ս (4.3.15),(4.3.16) և (4.3.19)): Հետևաբար,

$$\rho(f, H_n) \ge \frac{\min\limits_{a \le x \le b} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!\,2^{2n+1}}(b-a)^{n+1}\ : \tag{5.3.4}$$

Համեմատելով (5.3.3) և (5.3.4) վերին և ստորին գնահատականները, հանգում ենք այն եզրակացության, որ եթե $f^{(n+1)}(x)$ ածանցյալը պահպանում է իր նշանը $[a, b]$ հատվածի վրա և շատ չի փոփոխվում, ապա լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամի սխալանքի և Չեբիշևի բազմանդամի արմատներով կառուցված ինտերպոլացիոն բազմանդամի սխալանքի միջև տարբերությունը չնչին է:

Նշենք, որ ցանկացած անընդհատ ֆունկցիայի համար լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամի կառուցման վերջավոր ալգորիթմ գոյություն չունի: Գոյություն ունեն միայն լավագույնին մոտիկ բազմանդամի կառուցման իտերացիոն ալգորիթմներ (տե՛ս, օրինակ, [4]): Նրանց էությունը կայանում է չեբիշևյան ալտերնանսի կետերին հաջորդական մոտարկումների և այդ կետերին համապատասխանող բազմանդամների կառուցման մեջ, որոնք զուգամիտում են լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամին:

5.4 Մոտարկումներ հիլբերտյան տարածությունում

Ֆունկցիոնալ անալիզի կարևորագույն հասկացություններից մեկը *հիլբերտյան տարածության* գաղափարն է, որն առաջինը ներմուծել է գերմանացի մաթեմատիկոս Դ. Հիլբերտը:

Սահմանում 5.4.1 : L իրական գծային տարածությունը կոչվում է *էվկլիդյան*, եթե յուրաքանչյուր $x, y \in L$ տարրերի զույգին համապատասխանության մեջ է դրված (x, y) իրական թիվ, որը կոչվում է այդ տարրերի *սկալյար արտադրյալ*, այնպես որ բավարարվում են

1. $(x, x) \geq 0$, $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$,
2. $(x, y) = (y, x)$,
3. $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$,
4. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$

պայմանները կամայական $x, y, z \in L$ և λ իրական թվի համար:

Էվկլիդյան տարածությունում ճիշտ է *Կոշի-Բունյակովսկու անհավասարությունը.*

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)} \qquad \forall x, y \in L : \tag{5.4.1}$$

Այն ապացուցվում է բավականին պարզ եղանակով (թողնում ենք դա ընթերցողին որպես վարժություն):

Հիշեցնենք օրթոգոնալության հասկացությունը էվկլիդյան տարածությունում:

Սահմանում 5.4.2 : L էվկլիդյան տարածության x և y տարրերը կոչվում են *օրթոգոնալ*, եթե $(x, y) = 0$:

Էվկլիդյան տարածությունը կարելի է դարձնել նորմավորված՝ սահմանելով $x \in L$ տարրի նորմը հետևյալ կերպ.

$$||x|| \equiv \sqrt{(x, x)} : \tag{5.4.2}$$

Դժվար չէ համոզվել, որ նորմի 5.1.1 սահմանման մեջ թվարկված բոլոր հատկությունները բավարարվում են: Նշենք միայն, որ եռանկյան անհավասարության ապացույցի ժամանակ պետք է օգտվել (5.4.1) անհավասարությունից:

Սահմանում 5.4.3 : Էվկլիդյան տարածությունը, որում նորմը ներմուծված է (5.4.2) առնչության միջոցով, կոչվում է *ունիտար տարածություն*:

Սահմանում 5.4.4 : Լրիվ, անվերջ չափանի ունիտար տարածությունը կոչվում է *հիլբերտյան տարածություն*:

Դիտողություն 5.4.1 : *Երբեմն հիլբերտյան տարածությունը սահմանելիս պահանջում են, որ այն լինի* սեպարաբել, *այսինքն, նրանում գոյություն ունենա ամենուրեք խիտ հաշվելի բազմություն:*

Որպես հիլբերտյան տարածության օրինակ կարող է ծառայել l_2 տարածությունը, որի տարրերն են իրական թվերի $x = (x_1, x_2, \ldots)$ անվերջ հաջորդականությունները, որոնք բավարարում են

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$$

պայմանին: Սկալյար արտադրյալը և նորմը այդ տարածության մեջ որոշվում են համապատասխանաբար

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \quad \text{և} \quad ||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}$$

բանաձևերով:

5.4.1 Լավագույն մոտարկման տարրի որոշումը

Նախ և առաջ նշենք հիլբերտյան տարածության մեկ կարևոր հատկություն:

Թեորեմ 5.4.1 : *Հիլբերտյան տարածությունը խիստ նորմավորված է:*

Ապացույց: Դիցուք հիլբերտյան տարածության f և g ոչ զրոյական տարրերը այնպիսին են, որ

$$||f + g|| = ||f|| + ||g|| :$$

Մի կողմից, օգտվելով (5.4.2) առնչությունից, ունենք

$$||f + g||^2 = (f + g, f + g) = (f, f) + 2(f, g) + (g, g) = ||f||^2 + 2(f, g) + ||g||^2 :$$

Մյուս կողմից,

$$(||f|| + ||g||)^2 = ||f||^2 + 2||f||\,||g|| + ||g||^2 :$$

Հավասարեցնելով վերջին երկու հավասարությունների աջ մասերը՝ կստանանք

$$(f, g) = ||f||\,||g|| : \tag{5.4.3}$$

Վերցնենք $\alpha = ||f||/||g||$: Ակնհայտ է, որ $\alpha > 0$: Հաշվի առնելով (5.4.3) հավասարությունը՝ ստանում ենք

$$(f - \alpha g, f - \alpha g) = (f, f) - 2\alpha(f, g) + \alpha^2(g, g) = ||f||^2 - 2\alpha\,||f||\,||g|| + \alpha^2||g||^2 =$$

$$||f||^2 - 2\frac{||f||}{||g||}||f||\,||g|| + \frac{||f||^2}{||g||^2}||g||^2 = 0 :$$

Այստեղից, սկալյար արտադրյալի հատկությունից՝ $f - \alpha g = 0$, այսինքն՝ $f = \alpha g$: □

Այսպիսով, 5.1.2 թեորեմի հիման վրա կարող ենք այնդել, որ հիլբերտյան տարածությունում լավագույն մոտարկման տարրը միակն է:

Թեորեմ 5.4.2 : *Եթե $\psi \in L_n$ լավագույն մոտարկման տարրն է $f \in L$ տարրի համար, ապա*

$$(f - \psi, \varphi) = 0$$

կամայական $\varphi \in L_n$ տարրի համար:

Ապացույց: Ենթադրենք հակառակը, այսինքն՝ գոյություն ունի այնպիսի $g \in L_n$ տարր, որի համար

$$\mu \equiv (f - \psi, g) \neq 0 \ . \tag{5.4.4}$$

Առանց ընդհանրությունը սահմանափակելու՝ կարող ենք ենթադրել, որ g տարրը նորմավորված է, այսինքն՝ $||g|| = 1$: Վերցնենք $v = \psi + \mu g \in L_n$: Ունենք

$$||f - v||^2 = (f - v, f - v) = (f - \psi - \mu g, f - \psi - \mu g) =$$

$$(f - \psi, f - \psi) - 2\mu(f - \psi, g) + \mu^2(g, g) = ||f - \psi||^2 - 2\mu^2 + \mu^2 =$$

$$||f - \psi||^2 - \mu^2 < ||f - \psi||^2 \ .$$

Այսպիսով ստացանք, որ $||f - v|| < ||f - \psi||$: Իսկ դա հակասում է նրան, որ ψ-ն լավագույն մոտարկման տարրն է: □

Ապացուցված թեորեմի վրա հիմնված է լավագույն մոտարկման տարրի որոշման եղանակը: Դիցուք L_n ենթատարածությունը ծնվում է $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ տարրերի գծորեն անկախ համակարգով: Պարզ է, որ

$$\psi = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i \in L_n \tag{5.4.5}$$

լավագույն մոտարկման տարրը գտնելու համար պետք է որոշել $c_1, c_2, \ldots, c_n$ գործակիցները: Այդ գործակիցները, (5.4.4)-ի համաձայն, կարող են ստացվել

$$\left(f - \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j \ , \ \varphi_i\right) = 0 \ , \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

պայմաններից, որոնք հանգում են

$$\sum_{j=1}^{n} (\varphi_j, \varphi_i) c_j = (f, \varphi_i) \ , \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{5.4.6}$$

գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգի: Այս համակարգը կոչվում է *նորմալ համակարգ*: Բնականաբար հարց է ծագում այդ համակարգի միարժեք լուծելիության մասին: Նախապես մտցնենք մի կարևոր հասկացություն:

Սահմանում 5.4.5 : Սկալյար արտադրյալներից կազմված

$$G = \begin{bmatrix} (\varphi_1, \varphi_1) & (\varphi_2, \varphi_1) & (\varphi_n, \varphi_1) \\ (\varphi_1, \varphi_2) & (\varphi_2, \varphi_2) & (\varphi_n, \varphi_2) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ (\varphi_1, \varphi_n) & (\varphi_2, \varphi_n) & (\varphi_n, \varphi_n) \end{bmatrix} , \tag{5.4.7}$$

մատրիցը կոչվում է $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ տարրերի համակարգի *Գրամի մատրից*: Այդ մատրիցի որոշիչը կոչվում է *Գրամի որոշիչ*:

Կամայական $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$ վեկտորի համար ունենք

$$(Gx, x) = \sum_{i,j=1}^{n} (\varphi_j, \varphi_i) x_i x_j = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \varphi_j, \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi_i \right) = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi_i \right\|^2 \tag{5.4.8}$$

Լեմմա 5.4.1 : *Գրամի մատրիցը վերասերված է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ տարրերի համակարգը գծորեն կախված է :*

Ապացույց: Անհրաժեշտություն: Դիցուք (5.4.7) մատրիցը վերասերված է: Ուրեմն գոյություն ունի այնպիսի ոչ զրոյական վեկտոր $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$, որ $Gx = 0$: Այդ վեկտորի համար, համաձայն (5.4.8) հավասարության, ունենք՝

$$0 = (Gx, x) = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi_i \right\|^2$$

Այստեղից հետևում է, որ $\sum_{i=1}^{n} x_i \varphi_i = 0$: Իսկ դա նշանակում է, որ $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ համակարգը գծորեն կախված է: Անհրաժեշտությունը ապացուցված է:

Բավարարություն: Դիցուք $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ համակարգը գծորեն կախված է: Այսինքն, գոյություն ունեն այնպիսի $x_1, x_2, \dots, x_n$ թվեր, որոնք միաժամանակ հավասար չեն զրոյի և

$$x_1 \varphi_1 + x_2 \varphi_2 + \dots + x_n \varphi_n = 0 \ :$$

Այստեղից ստանում ենք

$$\begin{aligned} x_1(\varphi_1, \varphi_1) + x_2(\varphi_2, \varphi_1) + \dots + x_n(\varphi_n, \varphi_1) &= 0, \\ x_1(\varphi_1, \varphi_2) + x_2(\varphi_2, \varphi_2) + \dots + x_n(\varphi_n, \varphi_2) &= 0, \\ \dots\dots\dots, \\ x_1(\varphi_1, \varphi_n) + x_2(\varphi_2, \varphi_n) + \dots + x_n(\varphi_n, \varphi_n) &= 0 \end{aligned}$$

հավասարությունների համակարգը: Այսպիսով, G Գրամի մատրիցով գծային հանրահաշվական հավասարումների համասեռ համակարգը ունի ոչ զրոյական լուծում: Հետևաբար, G մատրիցը վերասերված է: □

Այսպիսով, քանի որ $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ տարրերը կազմում են L_n ենթատարածության բազիս, ապա (5.4.6) նորմալ համակարգը միարժեք լուծելի է: Ինչպես երևում է (5.4.7) սահմանումից, Գրամի մատրիցը սիմետրիկ է: Ավելին, ճիշտ է հետևյալ պնդումը:

Լեմմա 5.4.2 : *Եթե $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ տարրերի համակարգը գծորեն անկախ է, ապա Գրամի մատրիցը դրական որոշյալ է :*

Ապացույց: Վերցնենք կամայական $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$ ոչ զրոյական վեկտոր: Այդ դեպքում $\sum_{i=1}^{n} x_i \varphi_i \neq 0$ և, ինչպես հետևում է (5.4.8)-ից, $(Gx, x) > 0$: □

Թվում է, թե հիլբերտյան տարածությունում լավագույն մոտարկման տարրի որոշման խնդիրը լիովին լուծված է: Սակայն գործնականում այստեղ ի հայտ են

գալիս լուրջ դժվարություններ: Նախ և առաջ, պետք է ստուգորեն բնույթով $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ բազիսային տարրերը: Բազիսի անհաջող ընտրության դեպքում հաշվարկային սխալանքները կարող են անչափ մեծանալ, և արդյունքում ստացվող "լավագույն" մոտարկումը իրականից շատ հեռու կլինի: Պատճառը այն է, որ Գրամի մատրիցը կարող է լինել համարյա վերասերված և շատ վատ պայմանավորված: Այլ կերպ ասած, այդ մատրիցի որոշիչը կարող է լինել զրոյին մոտ, իսկ պայմանավորվածության թիվը շատ մեծ:

Օրինակ 5.4.1 (Հիլբերտի մատրիցը) : Մտցնենք $[0, 1]$ հատվածի վրա անընդհատ ֆունկցիաների տարածությունում

$$(f, g) \equiv \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$$

սկալյար արտադրյալը:

Դիտարկենք

$$\varphi_0(x) \equiv 1\,,\ \varphi_1(x) = x\,,\ \ldots,\ \varphi_n(x) = x^n$$

գծորեն անկախ ֆունկցիաների համակարգը: Սկալյար արտադրյալները հեշտությամբ հաշվվում են՝

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int_0^1 x^{i+j}\, dx = \frac{1}{i+j+1}\,, \quad i, j = 0, 1, \ldots, n\ :$$

Արդյունքում կստանանք

$$H = [h_{i,j}]_{i,j=0}^{n}\,, \quad h_{ij} = \frac{1}{i+j+1} \tag{5.4.9}$$

Գրամի մատրիցը, որը կոչվում է *Հիլբերտի մատրից*: Այս մատրիցը հաշվողական մաթեմատիկայում հայտնի է որպես վատ պայմանավորված մատրիցի դասական օրինակ: Մատրիցի պայմանավորվածության թիվը շատ արագ աճում է n-ի մեծացմանը զուգընթաց, այն է՝ $\kappa(H) \sim e^{3.5n}$ (տես, օրինակ, [53]): Միաժամանակ, n-ի մեծացման հետ միասին՝ Հիլբերտի մատրիցի որոշիչը շատ արագ ձգտում է զրոյի: Տեղի ունի հետևյալ բանաձևը (տե՛ս [48]).

$$\det(H) = \frac{[1!\,2!\,3!\,\ldots\,(n-1)!]^3}{n!\,(n+1)!\,\ldots\,(2n-1)!}\ :$$

Դիտարկենք գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգը

$$Hx = b\,, \tag{5.4.10}$$

որտեղ $b = [b_0, b_1, \ldots, b_n]^T$ վեկտորի կոմպոնենտները տրվում են հետևյալ կերպ.

$$b_i = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{i+j+1}\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n\ :$$

Համակարգի լուծումն է $x = [1.1, \ldots, 1]^T$: Կատարվել են հաշվարկներ MATLAB փաթեթի միջոցով: Արդյունքում, $n = 13$ դեպքում ստացվել է (5.4.10) համակարգի հետևյալ "լուծումը".

$$x_0 = 1.0000, \quad x_1 = 1.0000, \quad x_2 = 1.0006, \quad x_3 = 0.9916,$$
$$x_4 = 1.0519, \quad x_5 = 0.8693, \quad x_6 = 0.8092, \quad x_7 = 3.3755,$$
$$x_8 = -6.8166, \quad x_9 = 15.3612, \quad x_{10} = -15.2629, \quad x_{11} = 12.2917,$$
$$x_{12} = -3.4253, \quad x_{13} = 1.7506.$$

Ընդ որում պարզվում է, որ $\det(H) = 3.9220 \cdot 10^{-107}$ և $\kappa_2(H) = 1.5570 \cdot 10^{18}$: ♣

Դիտողություն 5.4.2 : *Նշենք, որ այս բաժնում շարադրված արդյունքները ճիշտ են նաև ունիտար տարածությունների համար:*

5.4.2 Օրթոնորմալ բազիսի օգտագործումը

Հատուկ հետաքրքրություն է ներկայացնում այն դեպքը, երբ $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ համակարգը *օրթոնորմալ է*, այսինքն՝ $(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}$, որտեղ δ_{ij}-ն Կրոնեկերի նշանն է: Այդ դեպքում, ինչպես հետևում է (5.4.6) համակարգից, լավագույն մոտարկման տարրի c_i գործակիցները հաշվվում են անմիջապես.

$$c_i = (f, \varphi_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n : \tag{5.4.11}$$

Այդ գործակիցները կոչվում են f տարրի *Ֆուրիեի գործակիցներ* ըստ $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ օրթոնորմալ համակարգի: Ընդ որում, լավագույն մոտարկման (5.4.5) տարրը գրվում է հետևյալ տեսքով.

$$\psi = \sum_{i=1}^{n} (f, \varphi_i)\varphi_i : \tag{5.4.12}$$

Հեշտությամբ որոշվում է նաև արտահայտությունը $\rho(f, L_n)$ մեծության համար: Իրոք, հաշվի առնելով (5.4.11)-ը, ստանում ենք

$$\rho^2(f, L_n) = ||f - \psi||^2 = (f - \psi, f - \psi) = (f, f) - 2(f, \psi) + (\psi, \psi) =$$

$$||f||^2 - 2\left(f, \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i, \sum_{j=1}^{n} c_j\varphi_j\right) =$$

$$||f||^2 - 2\sum_{i=1}^{n} c_i(f, \varphi_i) + \sum_{i=1}^{n} c_i^2 = ||f||^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i^2 :$$

Այսպիսով,

$$\rho(f, L_n) = \sqrt{||f||^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i^2} : \tag{5.4.13}$$

Այստեղից ակնհայտորեն հետևում է այսպես կոչված *Բեսելի անհավասարությունը.*

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \le ||f||^2 : \tag{5.4.14}$$

Եթե L-ը սեպարաբել հիլբերտյան տարածություն է, ապա նրանում գոյություն ունի

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots \tag{5.4.15}$$

տարրերի հաշվելի լրիվ օրթոնորմալ համակարգ (տե՛ս, օրինակ, [18],[20]): Ընդ որում, կամայական $f \in L$ տարր ներկայացվում է

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i \tag{5.4.16}$$

տեսքով, որտեղ $c_i = (f, \varphi_i)$ – Ֆուրիեի գործակիցներն են: (5.4.16) շարքը կոչվում է f տարրի *Ֆուրիեի շարք*: Դժվար չէ տեսնել, որ

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 = ||f||^2 \ : \tag{5.4.17}$$

Վերջին հավասարությունը կոչվում է *Պարսևալի հավասարություն*:

Դիցուք L_n-ը ենթատարածություն է՝ ծնված (5.4.15) համակարգի առաջին $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ տարրերով: Ինչպես վերն ասվեց, $\psi \in L_n$ լավագույն մոտարկման տարրը ներկայացվում է (5.4.12) տեսքով, այսինքն՝ (5.4.16) Ֆուրիեի շարքի հատվածն է: Ընդ որում, (5.4.13) և (5.4.17)-ից հետևում է, որ

$$\rho(f, L_n) = \sqrt{||f||^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i^2} = \sqrt{\sum_{i=n+1}^{\infty} c_i^2} \longrightarrow 0 \qquad \text{երբ} \quad n \to \infty \ :$$

Վերջինը նշանակում է, որ կամայական $f \in L$ տարր ցանկացած ճշտությամբ կարելի է մոտարկել վերջավոր չափանի ենթատարածությունների տարրերով:

Վերը շարադրածը նշանակում է, որ անհամեմատ ավելի գերադասելի է օգտագործել օրթոնորմալ բազիսներ: Սակայն նրանք ոչ միշտ են կարող միանգամից նշվել: Դրա հետ միասին գոյություն ունի *օրթոգոնալացման մեթոդ*, որը թույլ է տալիս կամայական գծորեն անկախ համակարգից անցում կատարել օրթոնորմալ համակարգի: Այդ հարցին է նվիրված հաջորդ պարագրաֆը:

5.5 Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացումը

Դիցուք L ունիտար տարածությունում տրված է գծորեն անկախ տարրերի

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \tag{5.5.1}$$

համակարգը: Նկարագրենք *Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման մեթոդը*, որն այս համակարգը ձևափոխում է

$$q_1, q_2, \ldots, q_n \tag{5.5.2}$$

օրթոնորմալ համակարգի: Այստեղ մենք կդիտարկենք այդ մեթոդի երկու տարբերակ:

5.5.1 Օրթոգոնալացման ալգորիթմի դասական տարբերակը

Ալգորիթմի առաջին քայլում կառուցվում է

$$q_1 = \frac{1}{||\varphi_1||}\varphi_1$$

տարրը: Ակնհայտ է, որ $||q_1|| = 1$:

Անցնենք երկրորդ քայլին: Դիտարկենք

$$\tilde{q}_2 = \alpha_{12}q_1 + \varphi_2$$

տարրը: Քանի որ φ_1 և φ_2 տարրերը գծորեն անկախ են, ապա $\tilde{q}_2$-ը տարբեր է զրոյից կամայական α_{12} գործակցի դեպքում: Պահանջենք, որ

$$(\tilde{q}_2, q_1) = 0 \ :$$

Դրանով իսկ

$$\alpha_{12}(q_1, q_1) + (\varphi_2, q_1) = 0$$

հավասարությունից կստանանք, որ

$$\alpha_{12} = -(\varphi_2, q_1) \ :$$

Այնուհետև հաշվենք

$$q_2 = \frac{1}{||\tilde{q}_2||}\tilde{q}_2 \ :$$

վեկտորը: Պարզ է, որ $||q_2|| = 1$:

Ենթադրենք, որ արդեն կառուցել ենք

$$q_1, q_2, \ldots, q_{k-1}$$

տարրերի օրթոնորմալ համակարգ, որտեղ $k \leq n$: Ալգորիթմի հաջորդ k-րդ քայլն իրականացվում է նման ձևով: Դիտարկենք հետևյալ տարրը.

$$\tilde{q}_k = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_{ik}q_i + \varphi_k \ :$$

Նորից, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ տարրերի գծային անկախությունից հետևում է, որ $\tilde{q}_k$ տարրը տարբեր է զրոյից կամայական α_{ik}, $i = 1, 2, \ldots, k-1$ գործակիցների դեպքում: Պահանջենք, որ

$$(\tilde{q}_k, q_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k-1 \ :$$

Արդյունքում

$$\sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{jk}(q_j, q_i) + (\varphi_k, q_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k-1$$

հավասարություններից գործակիցների համար կստանանք հետևյալ արտահայտությունները.

$$\alpha_{ik} = -(\varphi_k, q_i), \quad i = 1, 2, \ldots, k-1 :$$

Այնուհետև հաշվվում է

$$q_k = \frac{1}{||\tilde{q}_k||}\tilde{q}_k$$

տարրը:

Շարունակելով ընթացքը՝ կստանանք (5.5.2) տարրերի որոնելի օրթոնորմալ համակարգը: Գրենք մեթոդի ալգորիթմը:

Pseudocode **GRAM – SCHMIDT/Classic**

input n, $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$

$q_1 = \varphi_1/||\varphi_1||$

for $k = 2, 3, \ldots, n$ do

$\quad \tilde{q}_k = \varphi_k - \sum_{i=1}^{k-1}(\varphi_k, q_i)q_i$

$\quad q_k = \tilde{q}_k/||\tilde{q}_k||$

end

output $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$

Ցավոք, Գրամ-Շմիդտի նկարագրված ալգորիթմը, իր դասականան տարբերակով, կայուն չէ կլորացման սխալանքների նկատմամբ (տե՛ս, օրինակ, [35],[53]): Արդյունքում (5.5.2) «օրթոնորմալ» համակարգը կարող է ամենևին էլ օրթոգոնալ չլինել: Այդպիսի երևույթի կարելի է հանդիպել, մասնավորապես, այն դեպքում, երբ (5.5.1) տարրերի համակարգը *համարյա գծորեն կախված է*:

Օրինակ 5.5.1 : Դիտարկենք

$$\varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \varepsilon \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

գծորեն անկախ վեկտորները: Վերցնենք $\varepsilon = 10^{-8}$: Հաշվումների արդյունքում կստանանք՝

$$q_1 = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}, \quad q_2 = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ -0.7071 \\ 0.7071 \\ 0.0000 \end{bmatrix}, \quad q_3 = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ -0.7071 \\ 0.0000 \\ 0.7071 \end{bmatrix} :$$

Այստեղ $(q_2, q_3) \approx 0.5$: ♣

5.5.2 Գրամ-Շմիդտի վերափոխված ալգորիթմը

Օրթոգոնալացման դասական մեթոդի անկայունությունը ի հայտ է գալիս, երբ, կլորացման սխալանքների կուտակման հետևանքով, հաջորդաբար ստացվող q_k տարրերը կարող են օրթոգոնալ չլինել: Ընդ որում, կլորացման սխալանքների աղավաղող ազդեցությունը արտահայտվում է հատկապես այն դեպքում, երբ φ_k ելակետային տարրերը համարյա գծորեն կախված են: Նշված թերությունից զուրկ է մի ալգորիթմ, որի կառուցման ժամանակ չի օգտագործվում արդեն հաշվված տարրերի օրթոգոնալությունը: Այդ դեպքում $q_1, q_2, \ldots, q_{k-1}$ տարրերի ստացման ընթացքում առաջացած սխալանքները արդեն էապես չեն ազդում q_k-ի հաշվման վրա: Ստորև բերվող ալգորիթմը դասականից տարբերվում է հաշվումների կատարման այլ հաջորդականությամբ:

Pseudocode **GRAM – SCHMIDT/Modified**

```
input n, (φ1, φ2, ..., φn)
for k = 1, 2, ..., n do
    φk = φk/||φk||
    for j = k + 1, k + 2, ..., n do
        φj = φj − (φj, φk)φk
    end
end
output (φ1, φ2, ..., φn)
```

Նշենք, որ օրթոգոնալացման մեթոդի այս տարբերակում ձևափոխված տարրերը հաշվվում և տեղադրվում են ճիշտ այն տեղերում, որ զբաղեցնում էին համապատասխան ելակետային տարրերը:

Օրինակ 5.5.2 : Դիտարկենք 5.5.1 օրինակի ելակետային վեկտորները: Ինչպես և այնտեղ, վերցնենք $\varepsilon = 10^{-8}$: Վերափոխված ալգորիթմով հաշվումների արդյունքում կստանանք

$$q_1 = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}, \quad q_2 = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ -0.7071 \\ 0.7071 \\ 0.0000 \end{bmatrix}, \quad q_3 = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ -0.4082 \\ -0.4082 \\ 0.8165 \end{bmatrix}:$$

Անմիջական ստուգումով համոզվում ենք, որ ստացված համակարգը օրթոնորմալ է (համենայն դեպս, հաշվարկների ճշտության շրջանակներում): ♣

5.6 Միջին քառակուսային մոտարկումներ հանրահաշվական բազմանդամներով

Դիտարկենք $[a, b]$ հատվածի վրա քառակուսով ինտեգրելի ֆունկցիաների $L_2[a, b]$ հիլբերտյան տարածությունը: Այսինքն՝ այն ֆունկցիաների տարածությունը, որոնց

համար

$$\int_a^b f^2(x)\,dx < +\infty$$

(տե՛ս [18],[20],[30]): Սկալյար արտադրյալը և նորմը այդ տարածությունում սահմանվում են հետևյալ կերպ.

$$(f,g) \equiv \int_a^b f(x)g(x)\,dx\,, \quad ||f|| \equiv \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}\ :$$

Դժվար չէ ստուգել, որ սկալյար արտադրյալի և նորմի բոլոր հատկությունները տեղի ունեն, եթե իրարից ոչ ավելի քան զրո չափի բազմության վրա տարբերվող ֆունկցիաները համարենք հավասար:

Մոտարկումները $L_2[a,b]$ տարածության մեջ կոչվում են *միջին քառակուսային մոտարկումներ*: Համապատասխանաբար, $||f-g||$ նորմը $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաների *միջին քառակուսային շեղումն է*:

Հարկ է նշել, որ երկու անընդհատ ֆունկցիաների մոտիկությունը $L_2[a,b]$ տարածության նորմի իմաստով չի երաշխավորում նրանց մեծագույն շեղման փոքրությունը: Օրինակ, $L_2[0,1]$ տարածության մեջ դիտարկենք $g(x) \equiv 0$ և

$$f(x) = \begin{cases} -n^4x + n\,, & \text{եթե } 0 \le x \le \dfrac{1}{n^3}\,, \\ 0\,, & \text{եթե } \dfrac{1}{n^3} < x \le 1 \end{cases}$$

ֆունկցիաները (նկ. 5.6.1):

Նկ. 5.6.1 $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը

Ունենք

$$||f-g|| = \sqrt{\int_0^1 f^2(x)\,dx} = \sqrt{\int_0^{1/n^3} f^2(x)\,dx} \le \sqrt{n^2\,\frac{1}{n^3}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\ :$$

Այսպիսով, n-ի ընտրության հաշվին $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաների միջին քառակուսային շեղումը կարելի է դարձնել որքան ասես փոքր, մինչ դեռ $\max\limits_{0\le x\le 1}|f(x)-g(x)|$ մեծությունը կարող է լինել որքան ասես մեծ:

$L_2[a,b]$ տարածության հետ մեկտեղ կդիտարկենք նաև $L_2[a,b;p]$ այն ֆունկցիաների տարածությունը, որոնց համար

$$\int\limits_a^b p(x)f^2(x)\,dx < +\infty\,,$$

որտեղ $p(x)\ge 0$ ինչ-որ ֆիքսած ֆունկցիա է, որն ինտեգրելի է $[a,b]$ հատվածում և այդտեղ ընդունում է զրո արժեք ոչ ավելի, քան զրո չափի բազմության վրա (տե՛ս, օրինակ, [18],[20],[30]): $p(x)$ ֆունկցիան կոչվում է *կշռային ֆունկցիա* կամ ուղղակի *կշիռ*: Սկալյար արտադրյալը և նորմը $L_2[a,b;p]$ տարածությունում որոշվում են հետևյալ կերպ.

$$(f,g)\equiv\int\limits_a^b p(x)f(x)g(x)\,dx\,,\quad ||f||\equiv\sqrt{\int\limits_a^b p(x)f^2(x)\,dx}\,:$$

Պարզ է, որ $L_2[a,b]$ տարածությունը կարելի է դիտարկել որպես $L_2[a,b;p]$ տարածության մասնավոր դեպք, երբ $p(x)\equiv 1$:

5.6.1 Լավագույն միջին քառակուսային մոտարկման բազմանդամ

Ինչպես և 5.2 պարագրաֆում, H_n-ով նշանակենք իրական գործակիցներով n աստիճանից ոչ բարձր բոլոր հանրահաշվական բազմանդամների դասը: H_n դասը $L_2[a,b;p]$ տարածության $(n+1)$-չափանի ենթատարածությունն է:

Համաձայն այս գլխում արդեն ներմուծված գաղափարների $P_n(x)\in H_n$ բազմանդամը, որի համար

$$||f-P_n||=\rho(f,H_n)=\inf_{R_n(x)\in H_n}||f-R_n||\,,$$

կանվանենք *լավագույն միջին քառակուսային մոտարկման բազմանդամ* $f(x)\in L_2[a,b;p]$ ֆունկցիայի համար: 5.4 պարագրաֆում շարադրած ընդհանուր տեսության հիման վրա այդ բազմանդամը գոյություն ունի և միակն է:

Եթե H_n տարածության մեջ որպես բազիս վերցնենք աստիճանային ֆունկցիաների գծորեն անկախ համակարգ՝

$$\varphi_0(x)\equiv 1\,,\ \varphi_1(x)=x\,,\ \ldots,\ \varphi_n(x)=x^n\,, \tag{5.6.1}$$

ապա n աստիճանից ոչ բարձր բազմանդամի ստանդարտ գրառումը, ըստ էության, այդ բազմանդամի վերլուծումն է ըստ (5.6.1) ֆունկցիաների համակարգի: Դիցուք

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$$

լավագույն միջին քառակուսային մոտարկման բազմանդամ է $f(x) \in L_2[a,b;p]$ ֆունկցիայի համար: Նրա գործակիցների որոշման համար, համաձայն 5.4 պարագրաֆի արդյունքների, պետք է լուծել

$$\sum_{j=0}^{n}(\varphi_j,\varphi_i)a_j = (f,\varphi_i), \quad i = 0,1,\ldots,n \tag{5.6.2}$$

նորմալ համակարգը, որտեղ

$$(\varphi_j,\varphi_i) = \int_a^b p(x)x^{i+j}\,dx, \quad i,j = 0,1,\ldots,n,$$

$$(f,\varphi_i) = \int_a^b p(x)f(x)x^i\,dx, \quad i = 0,1,\ldots,n:$$

Օրինակ 5.6.1 : Պահանջվում է գտնել $[0,1]$ հատվածում $P_1(x) = a_0 + a_1x$ լավագույն միջին քառակուսային մոտարկման բազմանդամ $f(x) = \sqrt{x}$ ֆունկցիայի համար (կշիռ $p(x) \equiv 1$):

Կառուցենք հավասարումների նորմալ համակարգ: Ունենք՝

$$(\varphi_0,\varphi_0) = \int_0^1 1^2\,dx = 1, \quad (\varphi_1,\varphi_1) = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3},$$

$$(\varphi_1,\varphi_0) = (\varphi_0,\varphi_1) = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2},$$

$$(f,\varphi_0) = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}, \quad (f,\varphi_1) = \int_0^1 \sqrt{x}\,x\,dx = \frac{2}{5}:$$

Հետևաբար, նորմալ համակարգը այսպիսին է.

$$\begin{cases} a_0 + \dfrac{1}{2}a_1 = \dfrac{2}{3} \\[2ex] \dfrac{1}{2}a_0 + \dfrac{1}{3}a_1 = \dfrac{2}{5} \end{cases}:$$

Լուծելով այն՝ կստանանք՝ $a_0 = 4/15$, $a_1 = 4/5$ և, համապատասխանաբար, $P_1(x) = \dfrac{4}{15} + \dfrac{4}{5}x$: Ընդ որում

$$\|f - P_1\| = \sqrt{\int_0^1 \left(\sqrt{x} - \frac{4}{15} - \frac{4}{5}x\right)^2 dx} = \frac{\sqrt{2}}{30}: \qquad \clubsuit$$

Սակայն այդ ճանապարհը n-ի մեծ արժեքների դեպքում գործնականորեն պիտանի չէ 5.4 պարագրաֆում բերված պատճառներով: Օրինակ, հեշտ է տեսնել, որ $L_2[0,1]$ տարածության դեպքում (5.6.2) նորմալ համակարգի մատրիցը մեզ արդեն հայտնի (5.4.9) Հիլբերտի մատրիցն է: Ինչպես ցույց էր տրված 5.4 պարագրաֆում, խնդիրը էապես կպարզվի, եթե H_n ենթատարածությունում օգտագործենք օրթոգոնալ բազմանդամների համակարգ:

5.6.2 Բազմանդամների օրթոգոնալ համակարգեր

Նախորդ պարագրաֆում նկարագրված Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման մեթոդը թույլ է տալիս կամայական n-ի համար աստիճանային ֆունկցիաների (5.6.1) գծորեն անկախ համակարգը ձևափոխել

$$Q_0(x)\,,\ Q_1(x)\,,\ \ldots,\ Q_n(x)$$

բազմանդամների օրթոնորմալ համակարգի: Ընդ որում, ինչպես դժվար չէ նկատել սույն մեթոդի ալգորիթմից, $Q_k(x)$-ը ճիշտ k-րդ աստիճանի բազմանդամ է:

Դիտարկենք $L_2[a,b;\,p]$ տարածությունում

$$Q_0(x)\,,\ Q_1(x)\,,\ Q_2(x)\,,\ \ldots, \tag{5.6.3}$$

բազմանդամների օրթոգոնալ համակարգը, որտեղ $Q_k(x)$-ը ճիշտ k-րդ աստիճանի բազմանդամ է ($k=0,1,2,\ldots$):

Տեղի ունի հետևյալ պնդումը:

Լեմմա 5.6.1 : *Բազմանդամների (5.6.3) օրթոգոնալ համակարգը միակն է հաստատուն բազմապատկիչների ճշտությամբ:*

Ապացույց: Դիցուք (5.6.3) համակարգի հետ մեկտեղ գոյություն ունի մեկ այլ

$$R_0(x)\,,\ R_1(x)\,,\ R_2(x)\,,\ldots$$

օրթոգոնալ բազմանդամների համակարգ, որտեղ $R_k(x)$-ը ճիշտ k-րդ աստիճանի բազմանդամ է: Նախ ցույց տանք, որ $(Q_k,R_m)=0$, երբ $k\neq m$: Առանց ընդհանրությունը սահմանափակելու՝ կարելի է համարել, որ $k>m$: $R_m(x)$ բազմանդամը միարժեքորեն ներկայացվում է

$$R_m(x)=\sum_{j=0}^{m}\alpha_j Q_j(x) \tag{5.6.4}$$

տեսքով: Այդ դեպքում

$$(Q_k,R_m)=\left(Q_k,\sum_{j=0}^{m}\alpha_j Q_j\right)=\sum_{j=0}^{m}\alpha_j(Q_k,Q_j)=0\ :$$

Այժմ ապացուցենք, որ (5.6.4) ներկայացման մեջ α_j գործակիցները, երբ $j < m$, հավասար են զրոյի: Իրոք,

$$0 = (Q_j, R_m) = \left(Q_j, \sum_{i=0}^{m} \alpha_i Q_i\right) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i (Q_j, Q_i) = \alpha_j (Q_j, Q_j) \ :$$

Իսկ քանի որ $(Q_j, Q_j) \neq 0$, ապա $\alpha_j = 0$: Այսպիսով,

$$R_m(x) = \alpha_m Q_m(x) \ :$$

Ինչը և պահանջվում էր ապացուցել: □

Դիտողություն 5.6.1 : *Եթե օրթոգոնալ բազմանդամների վրա դնենք լրացուցիչ պայմաններ, պահանջելով, օրինակ, որ ավագ անդամի գործակիցը հավասար լինի մեկի կամ, որ ավագ անդամի գործակիցը լինի դրական, իսկ բազմանդամի նորմը հավասար լինի մեկի, ապա օրթոգոնալ բազմանդամների համակարգը* $[a, b]$ *հատվածում տրված* $p(x)$ *կշռի դեպքում միակը կլինի՝ բառիս բուն իմաստով:*

Եթե բազմանդամների (5.6.3) օրթոգոնալ համակարգը կառուցված է, ապա $P_n(x) \in H_n$ լավագույն միջին քառակուսային բազմանդամը $f(x) \in L_2[a, b; p]$ ֆունկցիայի համար կգրվի

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k Q_k(x) \tag{5.6.5}$$

տեսքով, որտեղ c_k գործակիցները, 5.4 պարագրաֆում շարադրած ընդհանուր տեսության հիման վրա, հաշվվում են

$$c_k = \frac{(f, Q_k)}{(Q_k, Q_k)}, \quad k = 0, 1, \ldots, n \tag{5.6.6}$$

բանաձևերով: Դժվար չէ ստանալ նաև

$$\rho(f, H_n) = ||f - P_n|| = \sqrt{||f||^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k^2 (Q_k, Q_k)} \tag{5.6.7}$$

արտահայտությունը $f(x)$ ֆունկցիայի H_n ենթատարածությունից միջին քառակուսային շեղման համար, որը համանման է (5.4.13) արտահայտությանը:

Նշենք օրթոգոնալ բազմանդամների ևս երկու կարևոր հատկություն:

Լեմմա 5.6.2 : *(5.6.3) համակարգի* $Q_n(x)$ *բազմանդամը, երբ* $n \geq 1$, *օրթոգոնալ է* H_{n-1} *ենթատարածության ցանկացած բազմանդամի:*

Ապացույց: Կամայական $R_{n-1}(x) \in H_{n-1}$ բազմանդամ ներկայացվում է

$$R_{n-1}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j Q_j(x)$$

տեսքով: Հետևաբար,

$$(Q_n, R_{n-1}) = \left(Q_n, \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j Q_j\right) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j (Q_n, Q_j) = 0\,,$$

ինչը և պահանջվում էր ապացուցել: □

Լեմմա 5.6.3 : *(5.6.3) օրթոգոնալ համակարգի $Q_n(x)$ բազմանդամը, երբ $n \geq 1$, (a, b) միջակայքում ունի ճիշտ n հատ իրարից տարբեր արմատներ:*

Ապացույց: Քանի որ

$$(Q_n, Q_0) = \int_a^b p(x) Q_n(x) Q_0(x)\, dx = 0\,,$$

ապա $Q_n(x)$ բազմանդամը (a, b) միջակայքում ունի կենտ պատիկության գոնե մեկ արմատ: Դիցուք $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ կետերը $Q_n(x)$ բազմանդամի (a, b) միջակայքին պատկանող կենտ պատիկության տարբեր արմատներ են: Պարզ է, որ $m \leq n$: Դիտարկենք

$$R_m(x) \equiv (x - \xi_1)(x - \xi_2) \ldots (x - \xi_m)$$

բազմանդամը: Այդ դեպքում $Q_n(x) R_m(x)$ բազմանդամի (a, b) միջակայքին պատկանող բոլոր արմատները ունեն զույգ պատիկություն: Ուստի

$$\int_a^b p(x) Q_n(x) R_m(x)\, dx \neq 0 \ :$$

Հետևաբար 5.6.2 լեմմայից հետևում է, որ $m \geq n$: Այսպիսով, $m = n$: □

5.6.3 Անդրադարձ առնչություններ օրթոգոնալ բազմանդամների համար

Ինչպես արդեն նշվել է, (5.6.3) բազմանդամների օրթոգոնալ համակարգը կարելի է կառուցել՝ օգտագործելով Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացումը: Սակայն այդ համակարգը կարելի է ստանալ մի այլ եղանակով: Պարզվում է, որ օրթոգոնալ բազմանդամները բավարարում են բավականաչափ պարզ անդրադարձ առնչությունների:

$x Q_n(x)$ բազմանդամի աստիճանը հավասար է $(n + 1)$-ի: Հետևաբար, այդ բազմանդամը կարելի է գրել

$$x Q_n(x) = \sum_{j=0}^{n+1} \alpha_j Q_j(x) \tag{5.6.8}$$

տեսքով: Վերջին նույնության երկու կողմը բազմապատկենք $p(x)Q_i(x)$-ով, որտեղ $i = 0, 1, \ldots, n-2$, և ինտեգրենք a-ից b սահմաններում: Կստանանք՝

$$\int_a^b p(x)Q_n(x)[x\,Q_i(x)]\,dx = \sum_{j=0}^{n+1} \alpha_j \int_a^b p(x)Q_j(x)Q_i(x)\,dx$$

կամ

$$(Q_n, x\,Q_i) = \sum_{j=0}^{n+1} \alpha_j (Q_j, Q_i) \ :$$

Քանի որ $x\,Q_i(x)$ բազմանդամի աստիճանը չի գերազանցում $(n-1)$-ը, ապա համաձայն 5.6.2 լեմմայի՝ $(Q_n, x\,Q_i) = 0$: Այնուհետև,

$$0 = \sum_{j=0}^{n+1} \alpha_j (Q_j, Q_i) = \alpha_i (Q_i, Q_i) \ :$$

Այստեղից հետևում է, որ $i = 0, 1, \ldots, n-2$ արժեքների համար $\alpha_i = 0$: Այսպիսով, (5.6.8)-ից ստանում ենք

$$x\,Q_n(x) = \alpha_{n-1}Q_{n-1}(x) + \alpha_n Q_n(x) + \alpha_{n+1}Q_{n+1}(x)$$

կամ

$$\alpha_{n+1}Q_{n+1}(x) + (\alpha_n - x)Q_n(x) + \alpha_{n-1}Q_{n-1}(x) = 0\,, \quad n = 1, 2, \ldots : \tag{5.6.9}$$

Արտահայտությունները α_{n-1}, α_n, α_{n+1} գործակիցների համար կարելի է ստանալ՝ (5.6.9) առնչությունը սկալյարորեն բազմապատկելով հաջորդաբար $p(x)Q_i(x)$ ֆունկցիաներով, որտեղ $i = n-1, n, n+1$, և ինտեգրելով a-ից b սահմաններում.

$$\alpha_{n-1} = \frac{(x\,Q_n, Q_{n-1})}{(Q_{n-1}, Q_{n-1})}\,, \quad \alpha_n = \frac{(x\,Q_n, Q_n)}{(Q_n, Q_n)}\,, \quad \alpha_{n+1} = \frac{(x\,Q_n, Q_{n+1})}{(Q_{n+1}, Q_{n+1})} \ : \tag{5.6.10}$$

Ստացված (5.6.9) անդրադարձ առնչությունները կարելի է օգտագործել բազմանդամների օրթոգոնալ համակարգի կառուցման համար: Օրինակ, $p(x) \equiv 1$ դեպքում օրթոգոնալ բազմանդամները, որոնց ավագ անդամի գործակիցը հավասար է մեկի, կարելի է ստանալ

$$\begin{aligned} &Q_0(x) \equiv 1\,, \quad Q_1(x) = x - \frac{a+b}{2}\,, \\ &Q_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)Q_n(x) - \alpha_{n-1}Q_{n-1}(x)\,, \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{5.6.11}$$

բանաձևերով, որտեղ համաձայն (5.6.10)-ի՝

$$\alpha_{n-1} = \frac{(x\,Q_n, Q_{n-1})}{(Q_{n-1}, Q_{n-1})}\,, \quad \alpha_n = \frac{(x\,Q_n, Q_n)}{(Q_n, Q_n)} \ :$$

Բազմանդամների օրթոնորմալ համակարգը կարելի է կառուցել հետևյալ կերպ.

$$Q_0(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{b-a}}, \quad Q_1(x) = \frac{\sqrt{3}}{(b-a)^{3/2}}(2x-b-a),$$

$$Q^*_{n+1}(x) = (x-\beta_n)Q_n(x) - \beta_{n-1}Q_{n-1}(x),$$

$$\beta_{n-1} = (x\,Q_n, Q_{n-1}), \quad \beta_n = (x\,Q_n, Q_n), \tag{5.6.12}$$

$$Q_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{(Q^*_{n+1}, Q^*_{n+1})}}Q^*_{n+1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots :$$

5.6.4 Բազմանդամների օրթոգոնալ համակարգերի օրինակներ

Պարագրաֆի վերջում բերենք որոշ, հաճախ հանդիպող օրթոգոնալ համակարգերի օրինակներ: Այս համակարգերի օրթոգոնալության ապացույցները, ինչպես նաև անդրադարձ առնչությունների դուրսբերումները թողնում ենք ընթերցողին որպես վարժություն:

- Լեժանդրի բազմանդամներ, որոնք տրվում են

$$\mathcal{L}_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{5.6.13}$$

Ռոդրիգի բանաձևով, $[-1, 1]$ հատվածում կազմում են $p(x) \equiv 1$ կշռով օրթոգոնալ համակարգ: Լեժանդրի բազմանդամների համար (5.6.9) անդրադարձ առնչությունները ընդունում են հետևյալ տեսքը.

$$(n+1)\mathcal{L}_{n+1}(x) - (2n+1)x\,\mathcal{L}_n(x) + n\mathcal{L}_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots : \tag{5.6.14}$$

- Առաջին սեռի Չեբիշևի բազմանդամները, որոնք տրվում են

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n = 0, 1, \ldots \tag{5.6.15}$$

բանաձևով, $[-1, 1]$ հատվածում կազմում են $p(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ կշռով օրթոգոնալ համակարգ: Այս բազմանդամներն մենք նախկինում հանդիպել ենք 4.3 պարագրաֆում, որտեղ նրանք սահմանվել են

$$T_0(x) \equiv 1, \quad T_1(x) = x,$$
$$T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{5.6.16}$$

անդրադարձ առնչություններով:

- Երկրորդ սեռի Չեբիշևի բազմանդամները, որոնք որոշվում են

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{5.6.17}$$

բանաձևերով, $[-1, 1]$ հատվածում կազմում են օրթոգոնալ համակարգ $p(x) = \sqrt{1-x^2}$ կշռով: Այդ բազմանդամների համար (5.6.9) անդրադարձ առնչությունները գրվում են հետևյալ տեսքով.

$$U_{n+1}(x) = 2x\,U_n(x) - U_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots : \tag{5.6.18}$$

- Հերմիտի բազմանդամները, որոնք տրվում են

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{5.6.19}$$

բանաձևով, $(-\infty, \infty)$ ամբողջ թվային առանցքի վրա կազմում են օրթոգոնալ համակարգ $p(x) = e^{-x^2}$ կշռով: Նրանք բավարարում են

$$H_{n+1}(x) = 2x\,H_n(x) - 2n\,H_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{5.6.20}$$

անդրադարձ առնչություններին:

5.7 Փոքրագույն քառակուսիների մեթոդ

Ենթադրենք, որ $f(x)$ մոտարկվող ֆունկցիան տրված է աղյուսակով, այսինքն՝ հայտնի են այդ ֆունկցիայի արժեքները ինչ-որ $x_0, x_1, \ldots, x_N$ կետերում, որոնք կանվանենք *հանգույցներ.*

$$y_i = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, N :$$

Այս կամ այն նպատակով երբեմն անհրաժեշտ է լինում գտնել, թեկուզ մոտավոր, այդ ֆունկցիայի անալիտիկ ներկայացումը: Մեթոդներից մեկը, ինչպես ցույց է տրվել չորրորդ գլխում, ինտերպոլացիան է: Սակայն այդ մեթոդը չի կարելի համարել առավել հաջող հետևյալ երկու պատճառով: Առաջին, եթե հանգույցների թիվը մեծ է, համապատասխանաբար մեծ կլինի նաև ինտերպոլացիոն բազմանդամի աստիճանը և, որպես հետևանք, մեծածավալ կլինի այդ բազմանդամի արտահայտությունը: Երկրորդ, եթե ֆունկցիայի արժեքները պարունակում են պատահական սխալանքներ, օրինակ, չափման սխալանքներ, ապա հարթության (x_i, y_i), $i = 0, 1, \ldots, N$ կետերով կորի ճշգրիտ անցնելու պահանջը իմաստազրկվում է:

Ձևակերպենք հետևյալ խնդիրը. *գտնել այնպիսի $Q_n(x) \in H_n$ բազմանդամ, որ*

$$\sum_{i=0}^{N} \omega_i [y_i - Q_n(x_i)]^2 = \min_{P_n(x) \in H_n} \sum_{i=0}^{N} \omega_i [y_i - P_n(x_i)]^2, \tag{5.7.1}$$

որտեղ $\omega_i > 0$ կշիռն է x_i հանգույցում:

Աղյուսակով տրված ֆունկցիաների մոտարկման այդպիսի եղանակը կոչվում է *փոքրագույն քառակուսիների մեթոդ*:

Նկ. 5.7.1 Մոտարկում ըստ փոքրագույն քառակուսիների մեթոդի

Ներմուծենք

$$\Phi(a_0, a_1, \ldots, a_n) \equiv \sum_{i=0}^{N} \omega_i [y_i - P_n(x_i)]^2 \tag{5.7.2}$$

ֆունկցիան, որտեղ $a_0, a_1, \ldots, a_n$ փոփոխականները

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \ :$$

բազմանդամի գործակիցներն են: Դրանով իսկ (5.7.1) խնդիրը հանգում է $\Phi(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ ֆունկցիայի մինիմումի որոշմանը: Այսինքն, պետք է գտնել այնպիսի $(a_0^*, a_1^*, \ldots, a_n^*)$ կետ, որ

$$\Phi(a_0^*, a_1^*, \ldots, a_n^*) = \min_{a_0, a_1, \ldots, a_n} \Phi(a_0, a_1, \ldots, a_n) \ : \tag{5.7.3}$$

Գրառումների պարզեցման համար $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ կետը կդիտարկենք որպես $\mathbf{R}^{n+1}$ վեկտորական տարածության տարր՝ ենթադրելով $a = [a_0, a_1, \ldots, a_n]^T$: Այդ դեպքում (5.7.3) պայմանը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$\Phi(a^*) = \min_{a \in \mathbf{R}^{n+1}} \Phi(a) \equiv \Phi_{min} \ : \tag{5.7.4}$$

Եթե $n = N$, ապա (5.7.1) խնդրի լուծումն է $L_N(x)$ ինտերպոլացիոն բազմանդամը, որի համար

$$L_N(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, N \ :$$

Պարզ է, որ այս դեպքում $\Phi_{min} = 0$: Այսինքն՝ մեր խնդիրը, փաստորեն, ձևափոխվում ինտերպոլացիայի խնդրի, ինչի մասին արդեն խոսվել է այս պարագրաֆի սկզբում: Ավելին, իմաստ չունի վերցնել $n > N$: Ուստի հետագայում կենթադրենք, որ $n < N$:

Եթե $x_0, x_1, \ldots, x_N$ հանգույցների բազմության վրա որոշված ֆունկցիաների տարածությունում ներմուծենք սկալյար արտադրյալ և նորմ՝

$$(f, g) \equiv \sum_{i=0}^{N} \omega_i f(x_i) g(x_i), \quad \|f\| \equiv \sqrt{\sum_{i=0}^{N} \omega_i f^2(x_i)}, \tag{5.7.5}$$

ապա (5.7.1) (կամ (5.7.4)) խնդիրը կարելի է լուծել 5.6 պարագրաֆում նկարագրված ընդհանուր մեթոդների կիրառմամբ (տե՛ս, օրինակ, [4],[7]): Սակայն այստեղ մենք կընտրենք ուրիշ ճանապարհ և ցույց կտանք, թե այլ դատողությունների միջոցով ինչպես կարելի է գալ հավասարումների նորմալ համակարգի:

Նախ և առաջ ստանանք (5.7.2)-ում որոշված $\Phi(a)$ ֆունկցիայի բացահայտ արտահայտությունը: Ունենք՝

$$\Phi(a) = \sum_{i=0}^{N} \omega_i \left[y_i - \sum_{k=0}^{n} a_k x_i^k \right]^2 = \sum_{i=0}^{N} \omega_i \left[y_i^2 - 2y_i \sum_{k=0}^{n} a_k x_i^k + \sum_{k,m=0}^{n} a_k a_m x_i^{k+m} \right]$$

$$= \sum_{k,m=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{N} \omega_i x_i^{k+m} \right) a_k a_m - 2 \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{N} \omega_i y_i x_i^k \right) a_k + \sum_{i=0}^{N} \omega_i y_i^2 :$$

Կատարենք հետևյալ նշանակումները՝

$$s_{km} \equiv \sum_{i=0}^{N} \omega_i x_i^{k+m}, \quad t_k \equiv \sum_{i=0}^{N} \omega_i y_i x_i^k, \quad r \equiv \sum_{i=0}^{N} \omega_i y_i^2 : \tag{5.7.6}$$

Այդ դեպքում

$$\Phi(a) = \sum_{k,m=0}^{n} s_{km} a_k a_m - 2 \sum_{k=0}^{n} t_k a_k + r = (Sa, a) - 2(t, a) + r, \tag{5.7.7}$$

որտեղ $S = [s_{km}]_{k,m=0}^{n}$ սիմետրիկ մատրից է, իսկ $t = [t_0, t_1, \ldots, t_n]^T$: Ակնհայտ է, որ $\Phi(a)$ ոչ բացասական և ըստ իր արգումենտների անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիա է:

$\Phi(a)$ ֆունկցիայի փոքրագույն արժեքը գտնելու համար հաշվենք նրա մասնակի ածանցյալները: Ելնելով այդ ֆունկցիայի (5.7.7) արտահայտությունից՝

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_k} = 2 \sum_{m=0}^{n} s_{km} a_m - 2t_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n :$$

Վերջին հավասարությունների աջ մասերը հավասարեցնելով զրոյի (տե՛ս [45], էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը), կստանանք

$$\sum_{m=0}^{n} s_{km} a_m = t_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n \tag{5.7.8}$$

հավասարումների *նորմալ համակարգը*, որը կարելի է գրել նաև

$$Sa = t \tag{5.7.9}$$

տեսքով:

Լեմմա 5.7.1 : *Նորմալ համակարգի S մատրիցը դրական որոշյալ է:*

Ապացույց: Վերցնենք կամայական ոչ զրոյական $a = [a_0, a_1, \ldots, a_n]^T$ վեկտոր: Օգտվելով S մատրիցի s_{km} տարրերի համար (5.7.6) արտահայտությունից ունենք

$$(Sa, a) = \sum_{k,m=0}^{n} s_{km} a_k a_m = \sum_{k,m=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{N} \omega_i x_i^{k+m} \right) a_k a_m =$$

$$\sum_{i=0}^{N} \omega_i \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x_i^k \right) \left(\sum_{m=0}^{n} a_m x_i^m \right) = \sum_{i=0}^{N} \omega_i P_n^2(x_i) \ :$$

Քանի որ $n < N$, ապա $P_n(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, N$ արժեքները չեն կարող միաժամանակ հավասար լինել զրոյի: Հետևաբար, $(Sa, a) > 0$: □

Այսպիսով, քանի որ S մատրիցը դրական որոշյալ է, ապա (5.7.8) (կամ (5.7.9)) նորմալ համակարգը միարժեքորեն լուծելի է: Դիցուք $a^* = [a_0^*, a_1^*, \ldots, a_n^*]^T$ վեկտորը (5.7.9) համակարգի լուծումն է: Հեշտ է տեսնել, որ a^*-ն $\Phi(a)$ ֆունկցիայի մինիմումի կետն է: Իրոք, a^*-ից տարբեր կամայական $a \in \mathbf{R}^{n+1}$ վեկտորի համար, ելնելով $\Phi(a)$ ֆունկցիայի (5.7.7) ներկայացումից, կստանանք

$$\begin{aligned} \Phi(a) - \Phi(a^*) &= (Sa, a) - 2(t, a) - (Sa^*, a^*) + 2(t, a^*) \\ &= (Sa, a) - 2(Sa^*, a) - (Sa^*, a^*) + 2(Sa^*, a^*) = \\ &= (Sa, a) - 2(Sa^*, a) + (Sa^*, a^*) = (S(a - a^*), (a - a^*)) > 0 \ : \end{aligned}$$

Ընդ որում,

$$\Phi_{min} = \Phi(a^*) = -(t, a^*) + r \ :$$

Այսպիսով,

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k^* x^k$$

բազմանդամը (5.7.1) խնդրի միակ լուծումն է:

Գրենք (5.7.9) հավասարումների նորմալ համակարգը այլ տեսքով: Դրա համար ներմուծենք

$$U = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & & x_N^n \end{bmatrix} \quad \text{և} \quad D = \begin{bmatrix} \omega_0 & & & \\ & \omega_1 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \omega_N \end{bmatrix}$$

մատրիցները՝ համապատասխանաբար $(N+1) \times (n+1)$ և $(N+1) \times (N+1)$ չափերի: Հաշվի առնելով (5.7.6)-ը՝ կստանանք

$$S = U^T D U \,, \quad t = U^T D y \,.$$

որտեղ $y = [y_0, y_1, \ldots, y_N]^T$: Դրանով իսկ (5.7.9) համակարգը կգրվի հետևյալ տեսքով.

$$U^T DUa = U^T Dy \ : \qquad (5.7.10)$$

Նշենք, որ (5.7.9) նորմալ համակարգի լուծման ժամանակ այստեղ նույնպես ծագում են բարդություններ, կապված հաշվողական անկայունության հետ, որոնց մասին խոսվում էր 5.4 և 5.6 պարագրաֆներում: Դա բնական է, քանի որ փոքրագույն քառակուսիների մեթոդով մոտարկումը, ըստ էության, միջին քառակուսային մոտարկման դիսկրետ նմանակն է: Օրինակ, եթե $\omega_i = 1, i = 0, 1, \ldots, N$, ապա $[0, 1]$ հատվածում հանգույցների հավասարաչափ բաշխման դեպքում, այսինքն, երբ $x_i = i/N$, $i = 0, 1, \ldots, N$, համաձայն (5.7.6) բանաձևերի, կունենանք

$$s_{km} = \sum_{i=0}^{N} x_i^{k+m} \approx N \int_0^1 x^{k+m}\, dx = N \cdot \frac{1}{k+m+1} \ :$$

Դրանով իսկ, N-ի աճման հետ զուգընթաց (5.7.9) նորմալ համակարգի S մատրիցը ասիմպտոտորեն (N բազմապատկիչի ճշտությամբ) կմոտենա $n+1$ կարգի Հիլբերտի (5.4.9) մատրիցին:

Նորմալ համակարգի լուծման հետ կապված բարդությունները, որոնք առաջանում են n-ի մեծ արժեքների դեպքում, կարելի է շրջանցել, եթե օգտագործենք (5.7.5) սկալյար արտադրյալի իմաստով օրթոգոնալ բազմանդամների համակարգը (տես, օրինակ, [4],[7],[31]): Այդպիսի համակարգի կառուցման մեթոդը համանման է 5.6 պարագրաֆում շարադրված մեթոդին, որը հիմնված է անդրադարձ առնչությունների վրա (տե՛ս [31]):

Փոքրագույն քառակուսիների մեթոդը գործնականում լայնորեն կիրառվում է փորձարարական տվյալների մշակման համար: Այն դեպքերում, երբ y_i մեծությունները ունեն տարբեր ճշտություն, համապատասխան ω_i կշիռները հաճախ կապում են ε_i չափման ճշտության հետ (օրինակ, վերցնում են $\omega_i = \varepsilon_i^{-2}$): Այդ դեպքում մոտարկող կորը կանցնի ավելի մոտ այն կետերին, որոնց կշիռն ավելի մեծ է:

Խնդիրներ և վարժություններ - 5

1. Ապացուցել, որ $f \in L$ տարրի համար $L_n \subset L$ ենթատարածության մեջ լավագույն մոտարկման տարրերի համախմբությունը ուռուցիկ բազմություն է:

2. Ապացուցել, որ $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ վեկտորների $||x|| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ նորմով $\mathbf{R}^n$ տարածությունը խիստ նորմավորված չէ:

3. $y = \sin x$ ֆունկցիայի համար $[0, \pi/2]$ հատվածում գտնել լավագույն հավասարաչափ մոտարկումը $y = ax$ տեսքի գծային ֆունկցիաների դասում:

4. $y = \cos x$ ֆունկցիայի համար $[0, \pi/2]$ հատվածում գտնել լավագույն հավասարաչափ մոտարկումը $y = ax$ տեսքի գծային ֆունկցիաների դասում:

5. Գտնել լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամները H_1-ից հետևյալ ֆունկցիաների համար.

1) $y = x^2$, $x \in [0, 1]$, 2) $y = x^3$, $x \in [0, 1]$,

3) $y = x^4$, $x \in [-1, 1]$, 4) $y = |x|$, $x \in [-1, 3]$,

5) $y = 3x^2 + 2x - 1$, $x \in [-1, 1/3]$, 6) $y = \sqrt{1 + x^2}$, $x \in [0, 1]$:

Նշել չեբիշևյան ալտերնանսի կետերը:

6. Կառուցել խզվող ֆունկցիայի օրինակ, որի համար լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամը չի բավարարում ալտերնանսի մասին Չեբիշևի թեորեմի պայմանին:

7. Գտնել լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամները H_2-ից հետևյալ ֆունկցիաների համար.

1) $y = x^3$, $x \in [-1, 1]$, 2) $y = 2x^2 + 3x + 5$, $x \in [1, 7]$,

3) $y = x^4$, $x \in [-1, 1]$, 4) $y = \sin 2x$, $x \in [0, 2\pi]$:

Նշել չեբիշևյան ալտերնանսի կետերը:

8. Կառուցել $f(x) \in C[a, b]$ ֆունկցիա և համապատասխան լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամ H_1-ից այնպես, որ ալտերնանսը չպարունակի a և b կետերը:

9. Ապացուցել, որ $f(x) \in C[-1, 1]$ զույգ ֆունկցիայի լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամը նույնպես զույգ է:

10. Ապացուցել, որ $f(x) \in C[-1, 1]$ կենտ ֆունկցիայի լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամը նույնպես կենտ է:

11. Գտնել լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամները H_3-ից հետևյալ ֆունկցիաների համար.

1) $y = \cos 2x$, $x \in [0, 2\pi]$, 2) $y = |x^2 - 7x + 10|$, $x \in [3, 4]$,

3) $y = e^{x^2}$, $x \in [-1, 1]$, 4) $y = 3\sin^2 10x + |x^2 - 7x + 10|$, $x \in [3, 4]$:

Նշել չեբիշևյան ալտերնանսի կետերը:

12. Բոլոր

$$ax^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$$

տեսքի բազմանդամների մեջ, որտեղ a-ն զրոյից տարբեր տրված թիվ է, գտնել $[-1, 1]$ հատվածում զրոյից ամենաքիչ շեղվող բազմանդամը:

13. Բոլոր $P_n(x) \in H_n$ բազմանդամների մեջ, որոնք $\xi \notin [-1,1]$ կետում ընդունում են η արժեքը, գտնել $[-1,1]$ հատվածում զրոյից ամենաքիչ շեղվող բազմանդամը:

Պատասխան. $P_n(x) = \eta T_n(x)/T_n(\xi)$, որտեղ $T_n(x)$ – Չեբիշևի բազմանդամն է:

14. $y = \sin 100x$ ֆունկցիայի համար $[0,\pi]$ հատվածում գտնել լավագույն հավասարաչափ մոտարկման բազմանդամ H_{90}-ից:

15. $f(x) = 1/(x+9)$ ֆունկցիան $[-1,1]$ հատվածում մոտարկվում է առաջին աստիճանի բազմանդամով հետևյալ եղանակներով.

1) Թեյլորի շարքի հատվածը $x = 0$ կետում,

2) ինտերպոլացիա $x_0 = -2^{-1/2}$, $x_1 = 2^{-1/2}$ օպտիմալ հանգույցներով,

3) լավագույն հավասարաչափ մոտարկում:

Կառուցել այդ բազմանդամները և գնահատել սխալանքների նորմերը $C[-1,1]$ տարածությունում:

16. Գտնել լավագույն միջին քառակուսային մոտարկման բազմանդամները H_1-ից հետևյալ ֆունկցիաների համար.

$$1)\ y = |x|, \quad x \in [-1,1], \qquad 2)\ y = x^3, \quad x \in [-1,1];$$

$$3)\ y = 1/x, \quad x \in [1,2], \qquad 4)\ y = \ln(1+x), \quad x \in [0,1]:$$

Գնահատել միջին քառակուսային շեղումները:

17. Գտնել լավագույն միջին քառակուսային մոտարկման բազմանդամները H_2-ից հետևյալ ֆունկցիաների համար.

$$1)\ y = x^3, \quad x \in [-1,1], \qquad 2)\ y = \sin x, \quad x \in [0,\pi]:$$

Գնահատել միջին քառակուսային շեղումները:

18. $y = x^3$ ֆունկցիայի համար $[0,2]$ հատվածում գտնել լավագույն միջին քառակուսային մոտարկման բազմանդամ H_3-ից: Գնահատել միջին քառակուսային շեղումը:

19. $f(x) = \sin x$ ֆունկցիայի համար $L_2[0,\pi/2]$ տարածությունում գտնել լավագույն միջին քառակուսային մոտարկումը $y = ax$ տեսքի ֆունկցիաների մեջ:

20. $f(x) = \cos x$ ֆունկցիայի համար $L_2[0,\pi/2]$ տարածությունում գտնել լավագույն միջին քառակուսային մոտարկումը $y = ax$ տեսքի ֆունկցիաների մեջ:

21. Ապացուցել, որ $f(x) \in L_2[-1,1]$ զույգ ֆունկցիայի լավագույն միջին քառակուսային մոտարկման բազմանդամը նույնպես զույգ է:

22. Ապացուցել, որ $f(x) \in L_2[-1,1]$ կենտ ֆունկցիայի լավագույն միջին քառակուսային մոտարկման բազմանդամը նույնպես կենտ է:

23. $f(x) = e^{-x}$ ֆունկցիան $[-1, 1]$ հատվածում մոտարկվում է առաջին աստիճանի բազմանդամով հետևյալ եղանակներով.

1) Թեյլորի շարքի հատվածը $x = 0$ կետում.

2) ինտերպոլացիա $x_0 = -1$, $x_1 = 1$ հանգույցներով,

3) ինտերպոլացիա $x_0 = -2^{-1/2}$, $x_1 = 2^{-1/2}$ օպտիմալ հանգույցներով,

4) լավագույն հավասարաչափ մոտարկում,

5) լավագույն միջին քառակուսային մոտարկում $L_2[-1, 1]$ տարածությունում:

Կառուցել այդ բազմանդամները և գնահատել նորմերի սխալանքները $C[-1, 1]$ տարածությունում:

24. Կիրառելով փոքրագույն քառակուսիների մեթոդը $y = \sin x$ ֆունկցիայի համար և օգտվելով նրա արժեքներից -1, -0.5, 0, 0.5, 1 կետերում գտնել լավագույն մոտարկումը H_3-ից:

25. Կիրառելով փոքրագույն քառակուսիների մեթոդը $y = \dfrac{1}{1+x}$ ֆունկցիայի համար և օգտվելով նրա արժեքներից $x = 0, 1, 2, \ldots, 8$ կետերում, գտնել լավագույն մոտարկումը H_4-ից:

26. Հարթության վրա տրված են իրարից տարբեր աբսցիսներով $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{N}$ կետերը: Որոշել ըստ փոքրագույն քառակուսիների մեթոդի y_i, $i = 0, 1, \ldots, N$ արժեքները մոտարկող $y = ax + b$ ուղիղ գծի a և b պարամետրերը: Այնուհետև, դիցուք x^*-ը և y^*-ը նշված կետերի կոորդինատների միջին արժեքներն են, որոնք հաշվվում են

$$x^* = \frac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N} x_i \qquad \text{և} \qquad y^* = \frac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N} y_i$$

բանաձևերով: Ապացուցել, որ (x^*, y^*) կետը գտնվում է $y = ax + b$ ուղիղ գծի վրա:

27. Դիցուք հարթության վրա տրված են իրարից տարբեր աբսցիսներով $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{N}$ կետերը: Որոշել ըստ փոքրագույն քառակուսիների մեթոդի y_i, $i = 0, 1, \ldots, N$ արժեքները մոտարկող $y = ax^n$ կորի a պարամետրը:

28. Դիցուք հարթության վրա տրված են իրարից տարբեր աբսցիսներով $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{N}$ կետերը: Որոշել ըստ փոքրագույն քառակուսիների մեթոդի y_i, $i = 0, 1, \ldots, N$ արժեքները մոտարկող հետևյալ կորերի a և b պարամետրերը.

$$1)\ y = ax^b, \qquad 2)\ y = ae^{bx}, \qquad 3)\ y = a + \frac{b}{x}, \qquad 4)\ y = \frac{1}{a + bx}:$$

Գլուխ 6

ԹՎԱՅԻՆ ԻՆՏԵԳՐՈՒՄ

6.1 Քառակուսացման բանաձևեր

Դիտարկենք $[a, b]$ հատվածի վրա անընդհատ $f(x)$ ֆունկցիայի

$$I(f) \equiv \int_a^b f(x)\,dx \tag{6.1.1}$$

որոշյալ ինտեգրալի հաշվման խնդիրը: Մաթեմատիկական անալիզի դասընթացում արտածվում է *Նյուտոն-Լայբնիցի* հայտնի

$$I(f) = F(b) - F(a) \tag{6.1.2}$$

բանաձևը, որտեղ $F(x)$-ը $f(x)$ ֆունկցիայի նախնականն է (տե՛ս, օրինակ, [45]): Ցավոք, գործնականում միշտ չէ, որ հնարավոր է գտնել $F(x)$ նախնական ֆունկցիան: Օրինակ, (6.1.2) բանաձևը պիտանի չէ

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx, \quad \int_a^b \frac{dx}{\ln x}, \quad \int_a^b e^{-x^2}\,dx$$

ինտեգրալների հաշվման համար: Բացի դրանից, որոշ դեպքերում ենթաինտեգրալային $f(x)$ ֆունկցիան չի տրվում բացահայտ տեսքով, այլ հայտնի են միայն նրա արժեքները $[a, b]$ հատվածի որոշ կետերում: Այդ դեպքում նախնականի որոշման հարցն ընդհանրապես կորցնում է իր իմաստը:

Վերը նշված պատճառներով մեծ կիրառական նշանակություն ունեն ինտեգրալների հաշվման մոտավոր մեթոդները: Այդպիսի մեթոդների թվում ամենից հաճախ օգտագործվում են

$$I(f) \approx Q_n(f) \equiv \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \tag{6.1.3}$$

տեսքի թվային ինտեգրման բանաձևերը, որոնք կոչվում են *քառակուսացման բանաձևեր*: $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ կետերը կոչվում են քառակուսացման բանաձևի *հանգույցներ*, իսկ $A_0, A_1, \ldots, A_n$ թվերը՝ քառակուսացման բանաձևի *գործակիցներ*:

Նշենք, որ (6.1.3) տեսքի հաշվարկային բանաձևերի օգտագործումը լիովին համաձայնեցվում է (6.1.1) ինտեգրալի սահմանման հետ՝ որպես ինտեգրալային գումարների հաջորդականության սահման (տե՛ս, օրինակ, [45]):

Դիտողություն 6.1.1 : *Մաթեմատիկայում* քառակուսացում *տերմինը նշանակում է տրված պատկերի մակերեսին հավասարամեծ քառակուսու կառուցումը: Ինչպես հայտնի է, (6.1.1) որոշյալ ինտեգրալը հավասար է այն կորագիծ սեղանի մակերեսին, որը սահմանափակված է $y = f(x)$ կորով և $y = 0$, $x = a$, $x = b$ ուղիղներով (տե՛ս, օրինակ, [45]):*

Քառակուսացման (6.1.3) բանաձևի *սխալանք* կոչվում է

$$R_n(f) \equiv I(f) - Q_n(f) \tag{6.1.4}$$

տարբերությունը:

Ներմուծենք ևս մեկ գաղափար:

Սահմանում 6.1.1 : Կասենք, որ (6.1.3) քառակուսացման բանաձևը *ճշգրիտ է* ֆունկցիաների որոշ $\mathcal{K}$ դասում, եթե

$$R_n(f) = 0 \qquad \forall f(x) \in \mathcal{K} : \tag{6.1.5}$$

Ինչպես արդեն գիտենք, հանրահաշվական բազմանդամներով բավականաչափ լավ կարելի է մոտարկել անընդհատ ֆունկցիաները (ինտերպոլացիա, հավասարաչափ և միջին քառակուսային մոտարկումներ): Ուստի, որպես քառակուսացման բանաձևի բնութագրիչ, կդիտարկենք ամենաբարձր կարգի այն հանրահաշվական բազմանդամները, որոնց համար այդ բանաձևը ճշգրիտ է: Որպես հիմք կարող են ծառայել հետևյալ դատողությունները:

Դիցուք (6.1.3) քառակուսացման բանաձևը ճշգրիտ է իրական գործակիցներով m աստիճանից ոչ բարձր հանրահաշվական բազմանդամների H_m դասում: Այդ դեպքում ցանկացած $P_m(x) \in H_m$ բազմանդամի համար, համաձայն (6.1.5) պայմանի, ճիշտ է

$$R_n(f) = R_n(f - P_m) + R_n(P_m) = R_n(f - P_m) \tag{6.1.6}$$

հավասարությունը: Կամայական $\Phi(x) \in C[a,b]$ ֆունկցիայի համար ունենք՝

$$\begin{aligned} |R_n(\Phi)| &= |I(\Phi) - Q_n(\Phi)| \le |I(\Phi)| + |Q_n(\Phi)| \le \int_a^b |\Phi(x)|\,dx + \sum_{k=0}^{n} |A_k|\,|\Phi(x_k)| \\ &\le \left[(b-a) + \sum_{k=0}^{n} |A_k|\right] \max_{a \le x \le b} |\Phi(x)| : \end{aligned}$$

Այսպիսով,

$$|R_n(\Phi)| \le C_n \, ||\Phi|| \, , \tag{6.1.7}$$

որտեղ $||\cdot||$-ը՝ (5.2.1) նորմն է $C[a,b]$ տարածության մեջ, իսկ

$$C_n \equiv (b-a) + \sum_{k=0}^{n} |A_k| \ : \tag{6.1.8}$$

Այնուհետև, (6.1.6) և (6.1.7)-ից ստանում ենք

$$|R_n(f)| = |R_n(f - P_m)| \le C_n ||f - P_m|| \qquad \forall P_m(x) \in H_m$$

անհավասարությունը: Այստեղից հետևում է

$$|R_n(f)| \le C_n \, \rho(f, H_m) \tag{6.1.9}$$

գնահատականը, որտեղ $\rho(f, H_m)$ մեծությունը $f(x)$ ֆունկցիայի հեռավորությունն է $H_m \subset C[a,b]$ ենթատարածությունից (տե՛ս (5.1.1)): Իսկ քանի որ $\rho(f, H_m)$ մեծությունը մոնոտոն ձգտում է զրոյի m-ի՝ մեծացմանը զուգընթաց (տե՛ս (5.2.6)), ապա որոշ վերապահումով կարելի է համարել, որ քառակուսացման բանաձևի սխալանքը այնքան ավելի փոքր է, որքան որ բարձր է հանրահաշվական բազմանդամների աստիճանը, որոնց համար այդ բանաձևը ճշգրիտ է: Վերապահումը կայանում է նրանում, որ (6.1.8)-ի C_n մեծությունը կախված է կոնկրետ քառակուսացման բանաձևից և, խիստ ասած, կարող է նաև աճել m-ի աճմանը զուգընթաց: Սակայն գործնականում օգտագործվող քառակուսացման բանաձևերի մեծամասնության համար և մասնավորապես մեր դասընթացում դիտարկվելիք բանաձևերի համար՝ նկատվում է նշված համապատասխանությունը բանաձևի սխալանքի և որոշակի աստիճանի բազմանդամների դասում նրա ճշգրտության միջև, ինչի մասին խոսվել էր վերը:

6.2 Ուղղանկյունների և սեղանների բանաձևերը

Պարզագույն քառակուսացման բանաձևեր կարելի է ստանալ որոշյալ ինտեգրալի երկրաչափական իմաստից բխող ակնառու դատողություններից:

6.2.1 Ուղղանկյունների բանաձևերը

Դիտարկենք

$$I(f) \equiv \int_a^b f(x)\,dx \approx Q_{\mathcal{R}}(f) \equiv (b-a) f(c) \tag{6.2.1}$$

տեսքի քառակուսացման բանաձևը, որտեղ c-ն $[a,b]$ հատվածի կետ է: Երկրաչափորեն դա նշանակում է, որ կորագիծ սեղանի մակերեսը, որը հավասար է $I(f)$-ի, փոխարինվում է $b-a$ հիմքով և $f(c)$ բարձրությամբ ուղղանկյան մակերեսով (նկ. 6.2.1): Այդ պատճառով (6.2.1) բանաձևն անվանում են *ուղղանկյունների բանաձև*:

Նկ. 6.2.1 Ուղղանկյունների բանաձևի երկրաչափական մեկնաբանությունը

Գործնականում, որպես կանոն, օգտագործվում են (6.2.1) բանաձևի հետևյալ մասնավոր դեպքերը:

- Ձախ ուղղանկյունների բանաձևը $(c = a)$.

$$I(f) \approx Q_{\mathcal{R}}^{-}(f) \equiv (b-a)f(a) \ : \tag{6.2.2}$$

- Աջ ուղղանկյունների բանաձևը $(c = b)$.

$$I(f) \approx Q_{\mathcal{R}}^{+}(f) \equiv (b-a)f(b) \ : \tag{6.2.3}$$

- Միջին ուղղանկյունների բանաձևը $(c = (a+b)/2)$.

$$I(f) \approx Q_{\mathcal{R}}^{\circ}(f) \equiv (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \ : \tag{6.2.4}$$

Այժմ դիտարկենք ուղղանկյունների քառակուսացման բանաձևերի սխալանքների գնահատման հարցը: Սկսենք ձախ ուղղանկյունների բանաձևից: Ենթադրենք, որ $f(x) \in C^1[a,b]$: Դիցուք

$$R_{\mathcal{R}}^{-}(f) \equiv I(f) - Q_{\mathcal{R}}^{-}(f) \ : \tag{6.2.5}$$

Սահմանենք

$$\Phi(\tau) \equiv \int\limits_a^{a+\tau} f(x)\,dx - \tau f(a), \qquad 0 \le \tau \le \Delta$$

ֆունկցիան, որտեղ $\Delta \equiv b-a$: Ակնհայտ է, որ $\Phi(\Delta) = R_{\mathcal{R}}(f)$ և $\Phi(0) = 0$: Ներմուծենք

$$F(\tau) \equiv \Phi(\tau) - \left(\frac{\tau}{\Delta}\right)^2 \Phi(\Delta). \qquad 0 \le \tau \le \Delta$$

օժանդակ ֆունկցիան: Հեշտ է տեսնել, որ $F(0) = F(\Delta) = 0$: Այդ դեպքում, ըստ Ռոլլի թեորեմի (տե՛ս, օրինակ, [45]), կգտնվի այնպիսի $\tau_1 \in (0,\Delta)$, որ $F'(\tau_1) = 0$: Հաշվենք $F(\tau)$ ֆունկցիայի ածանցյալը: Ունենք՝

$$F'(\tau) = \Phi'(\tau) - \frac{2\tau}{\Delta^2}\Phi(\Delta) = f(a+\tau) - f(a) - \frac{2\tau}{\Delta^2}\Phi(\Delta) \ :$$

Վերջին հավասարությունում վերցնելով $\tau = \tau_1$՝ կստանանք

$$f(a+\tau_1) - f(a) - \frac{2\tau_1}{\Delta^2}\,\Phi(\Delta) = 0 \ :$$

Այստեղից, կիրառելով Լագրանժի միջին արժեքի մասին թեորեմը (տե՛ս, օրինակ, [45]), կստանանք

$$\tau_1\left[f'(\xi) - \frac{2}{\Delta^2}\,\Phi(\Delta)\right] = 0\,, \qquad \xi \in (a, a+\tau_1) \ :$$

Հետևաբար՝

$$\Phi(\Delta) = \frac{f'(\xi)}{2}\,\Delta^2 \ :$$

Այսպիսով, գալիս ենք

$$R^-_{\mathcal{R}}(f) = \frac{f'(\xi)}{2}(b-a)^2\,, \qquad \xi \in (a, b) \tag{6.2.6}$$

արտահայտությանը (6.2.2) ձախ ուղղանկյունների բանաձևի սխալանքի համար: Այստեղից հեշտությամբ հետևում է

$$|R^-_{\mathcal{R}}(f)| \le \frac{M_1}{2}(b-a)^2\,, \qquad M_1 \equiv \max_{a\le x\le b}|f'(x)| \tag{6.2.7}$$

գնահատականը:

Նման եղանակով գնահատվում է աջ ուղղանկյունների բանաձևի

$$R^+_{\mathcal{R}}(f) \equiv I(f) - Q^+_{\mathcal{R}}(f) \tag{6.2.8}$$

սխալանքը: Այն հետևյալն է՝

$$R^+_{\mathcal{R}}(f) = -\frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2\,, \qquad \eta \in (a, b) \ : \tag{6.2.9}$$

Այս արտահայտության արտածումը թողնում ենք ընթերցողին որպես վարժություն: Նշենք միայն, որ այստեղ պետք է օգտագործել

$$F(\tau) \equiv \Phi(\tau) - \left(\frac{\tau}{\Delta}\right)^2 \Phi(\Delta)\,. \qquad 0 \le \tau \le \Delta$$

օժանդակ ֆունկցիան, որտեղ

$$\Phi(\tau) \equiv \int\limits_{b-\tau}^{b} f(x)\,dx - \tau f(b)$$

և $\Delta \equiv b-a$: (6.2.9)-ից հետևում է

$$|R^+_{\mathcal{R}}(f)| \le \frac{M_1}{2}(b-a)^2\,, \qquad M_1 \equiv \max_{a\le x\le b}|f'(x)| \tag{6.2.10}$$

գնահատականը, որը համանման է (6.2.7) գնահատականին:

Ինչպես երևում է (6.2.7) և (6.2.10) գնահատականներից, ձախ և աջ ուղղանկյունների բանաձևերը ճշգրիտ են զրո աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամների H_0 դասում, այսինքն՝ հաստատուն ֆունկցիաների դասում:

Արտածենք այժմ արտահայտություն (6.2.4) միջին ուղղանկյունների բանաձևի

$$R^{\circ}_{\mathcal{R}}(f) \equiv I(f) - Q^{\circ}_{\mathcal{R}}(f) \tag{6.2.11}$$

սխալանքի համար: Ենթադրենք, որ $f(x) \in C^2[a,b]$: Սահմանենք

$$\Phi(\tau) \equiv \int\limits_{c-\tau}^{c+\tau} f(x)\,dx - 2\tau f(c)\,, \qquad 0 \le \tau \le \Delta$$

ֆունկցիան, որտեղ $c = (a+b)/2$ և $\Delta \equiv (b-a)/2$: Ակնհայտ է, որ $\Phi(\Delta) = R^{\circ}_{\mathcal{R}}(f)$ և $\Phi(0) = 0$: Այնուհետև ներմուծենք

$$F(\tau) \equiv \Phi(\tau) - \left(\frac{\tau}{\Delta}\right)^3 \Phi(\Delta)\,, \qquad 0 \le \tau \le \Delta$$

օժանդակ ֆունկցիան: Պարզ է, որ $F(0) = F(\Delta) = 0$: Ըստ Ռոլլի թեորեմի՝ գոյություն ունի այնպիսի $\tau_1 \in (0,\Delta)$, որ $F'(\tau_1) = 0$: Հաշվենք $F(\tau)$ ֆունկցիայի ածանցյալը

$$F'(\tau) = \Phi'(\tau) - \frac{3\tau^2}{\Delta^3}\,\Phi(\Delta) = f(c+\tau) + f(c-\tau) - 2f(c) - \frac{3\tau^2}{\Delta^3}\,\Phi(\Delta)\ :$$

Հեշտ է տեսնել, որ $F'(0) = 0$: Ուստի, կրկին համաձայն Ռոլլի թեորեմի, կգտնվի այնպիսի $\tau_2 \in (0,\tau_1)$, որ $F''(\tau_2) = 0$: Հաշվենք $F(\tau)$ ֆունկցիայի երկրորդ ածանցյալը

$$F''(\tau) = f'(c+\tau) - f'(c-\tau) - \frac{6\tau}{\Delta^3}\,\Phi(\Delta)\ :$$

Վերջին հավասարությունում վերցնելով $\tau = \tau_2$՝ կստանանք

$$f'(c+\tau_2) - f'(c-\tau_2) - \frac{6\tau_2}{\Delta^3}\,\Phi(\Delta) = 0\ :$$

Այստեղից, կիրառելով Լագրանժի միջին արժեքի մասին թեորեմը, կունենանք

$$2\tau_2\left[f''(\mu) - \frac{3}{\Delta^3}\,\Phi(\Delta)\right] = 0\,, \qquad \mu \in (c-\tau_2, c+\tau_2)$$

հավասարությունը: Հետևաբար՝

$$\Phi(\Delta) = \frac{f''(\mu)}{3}\,\Delta^3\ :$$

Աջ մասում տեղադրելով Δ-ի փոխարեն $(b-a)/2$, կստանանք

$$R^{\circ}_{\mathcal{R}}(f) = \frac{f''(\mu)}{24}(b-a)^3\,, \qquad \mu \in (a,b) \tag{6.2.12}$$

արտահայտությունը (6.2.4) միջին ուղղանկյունների բանաձևի (6.2.11) սխալանքի համար: Այստեղից հեշտությամբ հետևում է հետևյալ գնահատականը.

$$|R^{\circ}_{\mathcal{R}}(f)| \leq \frac{M_2}{24}(b-a)^3, \qquad M_2 \equiv \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| \ : \tag{6.2.13}$$

Վերջին գնահատականից հետևում է, որ միջին ուղղանկյունների բանաձևը ճշգրիտ է առաջին կարգի հանրահաշվական բազմանդամների H_1 դասում, այսինքն՝ գծային ֆունկցիաների դասում:

Ուղղանկյունների բանաձևերի սխալանքները սովորաբար բավականաչափ մեծ են: Այդ սխալանքները կարելի է էապես փոքրացնել, եթե քառակուսացման բանաձևերը կիրառենք ոչ թե ամբողջ $[a, b]$ հատվածի վրա, այլ այն նախապես տրոհենք մասերի:

Բաժանենք $[a, b]$ հատվածը n հավասար մասերի

$$x_k = a + kh, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \quad h = \frac{b-a}{n} \tag{6.2.14}$$

տրոհման կետերով: Համապատասխանաբար, $I(f)$ ինտեգրալը ներկայացնենք

$$I(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\, dx \tag{6.2.15}$$

ինտեգրալների գումարի տեսքով: Կառուցելով յուրաքանչյուր $[x_k, x_{k+1}]$ հատվածում, որտեղ $k = 0, 1, \ldots, n-1$, ձախ, աջ կամ միջին ուղղանկյունների բանաձևերը, և գումարելով ըստ բոլոր հատվածների, կստանանք հետևյալ քառակուսացման բանաձևերը.

- Ձախ ուղղանկյունների ընդհանրացված բանաձևը.

$$I(f) \approx \mathbf{Q}^{-}_{\mathcal{R}}(f) \equiv h \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \ : \tag{6.2.16}$$

- Աջ ուղղանկյունների ընդհանրացված բանաձևը.

$$I(f) \approx \mathbf{Q}^{+}_{\mathcal{R}}(f) \equiv h \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) \ : \tag{6.2.17}$$

- Միջին ուղղանկյունների ընդհանրացված բանաձևը.

$$I(f) \approx \mathbf{Q}^{\circ}_{\mathcal{R}}(f) \equiv h \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k), \qquad c_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} \ : \tag{6.2.18}$$

Ընդհանրացված բանաձևերի սխալանքների գնահատականները ստանալիս մենք բազմիցս կօգտագործենք հետևյալ պնդումը:

Լեմմա 6.2.1 : *Դիցուք* $f(x) \in C[a,b]$ *և* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m \in [a,b]$ *կամայական կետեր են: Այդ դեպքում գոյություն ունի այնպիսի* $\xi \in [a,b]$ *կետ, որ*

$$\frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \cdots + f(\xi_m)}{m} = f(\xi) \ :$$

Պնդումը հեշտությամբ բխում է

$$\min_{a \le x \le b} f(x) \le \frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \cdots + f(\xi_m)}{m} \le \max_{a \le x \le b} f(x)$$

ակնհայտ անհավասարություններից և անընդհատ ֆունկցիայի միջանկյալ արժեքների մասին Բոլցանո-Կոշու թեորեմից (տե՛ս, օրինակ, [45]):

Գնահատենք ձախ ուղղանկյունների ընդհանրացված բանաձևի

$$\mathbf{R}^-_{\mathcal{R}}(f) \equiv I(f) - \mathbf{Q}^-_{\mathcal{R}}(f) \tag{6.2.19}$$

սխալանքը: Ելնելով (6.2.15) և (6.2.16)-ից՝ սխալանքը գրենք հետևյալ տեսքով.

$$\mathbf{R}^-_{\mathcal{R}}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx - hf(x_k) \right) \ :$$

Ձախ ուղղանկյունների սովորական բանաձևի սխալանքի համար վերն ստացված (6.2.6) արտահայտությունից ունենք

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx - hf(x_k) = \frac{f'(\xi_k)}{2} h^2, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

որտեղ $\xi_k \in (x_k, x_{k+1})$: Հետևաբար՝

$$\mathbf{R}^-_{\mathcal{R}}(f) = \frac{h^2}{2} \sum_{k=0}^{n-1} f'(\xi_k) \ :$$

Այնուհետև, կիրառելով 6.2.1 լեմման, կստանանք

$$\mathbf{R}^-_{\mathcal{R}}(f) = \frac{h^2}{2} n f'(\xi) = \frac{f'(\xi)}{2} (b-a)h, \quad \xi \in (a,b)$$

(նշենք, որ $nh = b - a$, համաձայն $[a,b]$ հատվածի (6.2.14) տրոհմանը): Այսպիսով,

$$\mathbf{R}^-_{\mathcal{R}}(f) = \frac{f'(\xi)}{2} (b-a)h, \qquad \xi \in (a,b) \ : \tag{6.2.20}$$

Այստեղից ստանում ենք սխալանքի գնահատականը՝

$$|\mathbf{R}^-_{\mathcal{R}}(f)| \le \frac{M_1}{2} (b-a)h, \qquad M_1 \equiv \max_{a \le x \le b} |f'(x)| \ : \tag{6.2.21}$$

Ճիշտ նույն կերպ ստացվում են արտահայտություններ (6.2.17) և (6.2.18) քառակուսացման բանաձևերի

$$\mathbf{R}^{+}_{\mathcal{R}}(f) \equiv I(f) - \mathbf{Q}^{+}_{\mathcal{R}}(f) \tag{6.2.22}$$

և

$$\mathbf{R}^{\circ}_{\mathcal{R}}(f) \equiv I(f) - \mathbf{Q}^{\circ}_{\mathcal{R}}(f) \tag{6.2.23}$$

սխալանքների համար: Դրանք են՝

$$\mathbf{R}^{+}_{\mathcal{R}}(f) = -\frac{f'(\eta)}{2}(b-a)h\,, \qquad \eta \in (a,b) \tag{6.2.24}$$

և

$$\mathbf{R}^{\circ}_{\mathcal{R}}(f) = \frac{f''(\mu)}{24}(b-a)h^2\,, \qquad \mu \in (a,b)\ : \tag{6.2.25}$$

Այստեղից ակնհայտորեն հետևում են

$$|\mathbf{R}^{+}_{\mathcal{R}}(f)| \le \frac{M_1}{2}(b-a)h\,, \qquad M_1 \equiv \max_{a\le x\le b}|f'(x)| \tag{6.2.26}$$

և

$$|\mathbf{R}^{\circ}_{\mathcal{R}}(f)| \le \frac{M_2}{24}(b-a)h^2\,, \qquad M_2 \equiv \max_{a\le x\le b}|f''(x)| \tag{6.2.27}$$

գնահատականները:

Օրինակ 6.2.1 : Գնահատել հանգույցների քանակը միջին ուղղանկյունների ընդհանրացված բանաձևում, որը բավարար է

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

ինտեգրալը 10^{-4} ճշտությամբ հաշվելու համար:

Համաձայն (6.2.27) գնահատականի՝ n թիվը կարելի է որոշել

$$\frac{M_2}{24}h^2 = \frac{M_2}{24\,n^2} < 10^{-4} \tag{6.2.28}$$

պայմանից: Հաշվենք M_2 մեծությունը: Ունենք՝

$$\left(e^{-x^2}\right)'' = (4x^2-2)e^{-x^2}\ :$$

Այստեղից գտնում ենք $M_2 = 2$: Այսպիսով, (6.2.28)-ից հետևում է, որ (6.2.18) բանաձևում բավարար է վերցնել

$$n > \frac{50\sqrt{3}}{3} \approx 28.87\,,$$

այսինքն՝ $n = 29$: Դրանով իսկ կստանանք ինտեգրալի 0.74686 մոտավոր արժեքը պահանջվող ճշտությամբ: ♣

Եթե $f'(x)$ ածանցյալը պահպանում է նշանը (a,b) միջակայքում, ապա ձախ և աջ ուղղանկյունների բանաձևերը տալիս են $I(f)$ ինտեգրալի երկկողմանի մոտարկումներ: Իրոք, եթե, օրինակ, $f'(x) > 0$, ապա, ինչպես հետևում է (6.2.20) և (6.2.24) արտահայտություններից, $\mathbf{R}^-_{\mathcal{R}}(f) > 0$ և $\mathbf{R}^+_{\mathcal{R}}(f) < 0$: Ուստի, համաձայն (6.2.19) և (6.2.22)-ի, ունենք

$$\mathbf{Q}^-_{\mathcal{R}} < I(f) < \mathbf{Q}^+_{\mathcal{R}} \ : \tag{6.2.29}$$

Այսպիսով, (6.2.16) բանաձևը տալիս է ինտեգրալի մոտավոր արժեքը *պակասորդով*, իսկ (6.2.17)-ը՝ *հավելորդով*: Այդ դեպքում կարող ենք օգտագործել *ուղղանկյունների համակցված բանաձևը*.

$$I(f) \approx \mathbf{Q}^*_{\mathcal{R}}(f) \equiv \frac{\mathbf{Q}^-_{\mathcal{R}}(f) + \mathbf{Q}^+_{\mathcal{R}}(f)}{2} \ : \tag{6.2.30}$$

Ընդ որում, (6.2.29) և (6.2.30)-ից հեշտ է ստանալ, որ

$$|I(f) - \mathbf{Q}^*_{\mathcal{R}}(f)| < \frac{\mathbf{Q}^+_{\mathcal{R}}(f) - \mathbf{Q}^-_{\mathcal{R}}(f)}{2} \ : \tag{6.2.31}$$

Դրանով իսկ ուղղանկյունների համակցված (6.2.30) բանաձևի սխալանքը գնահատվում է հենց ինտեգրալի մոտավոր արժեքների միջոցով:

6.2.2 Սեղանների բանաձևը

Թվային ինտեգրման այդ բանաձևն ունի հետևյալ տեսքը.

$$I(f) \equiv \int_a^b f(x)\,dx \approx Q_{\mathcal{T}}(f) \equiv \frac{b-a}{2}\,(f(a) + f(b)) \ : \tag{6.2.32}$$

Այստեղ $I(f)$ ինտեգրալի արժեքը մոտավորապես փոխարինվում է նկ. 6.2.2-ում պատկերված գծապատված սեղանի մակերեսով:

Նկ. 6.2.2 Սեղանների բանաձևի երկրաչափական մեկնաբանությունը

Գնահատենք սեղանների բանաձևի

$$R_T(f) \equiv I(f) - Q_T(f) \tag{6.2.33}$$

սխալանքը, ենթադրելով, որ $f(x) \in C^2[a,b]$: Սահմանենք

$$\Phi(\tau) \equiv \int_{c-\tau}^{c+\tau} f(x)\,dx - \tau\,[f(c-\tau) + f(c+\tau)]\,, \qquad 0 \le \tau \le \Delta\,.$$

ֆունկցիան, որտեղ $c = (a+b)/2$ և $\Delta \equiv (b-a)/2$: Ակնհայտ է, որ $\Phi(\Delta) = R_T(f)$ և $\Phi(0) = 0$: Ներմուծենք հետևյալ օժանդակ ֆունկցիան.

$$F(\tau) \equiv \Phi(\tau) - \left(\frac{\tau}{\Delta}\right)^3 \Phi(\Delta)\,. \qquad 0 \le \tau \le \Delta\ :$$

Պարզ է, որ $F(0) = F(\Delta) = 0$: Հետևաբար, համաձայն Ռոլլի թեորեմի, կգտնվի այնպիսի $\tau_1 \in (0,\Delta)$, որ $F'(\tau_1) = 0$: $F(\tau)$ ֆունկցիայի ածանցյալն է՝

$$F'(\tau) = \Phi'(\tau) - \frac{3\tau^2}{\Delta^3}\,\Phi(\Delta) = -\tau\,[f'(c+\tau) - f'(c-\tau)] - \frac{3\tau^2}{\Delta^3}\,\Phi(\Delta)\ :$$

Վերցնելով վերջին հավասարությունում $\tau = \tau_1$, կստանանք

$$\tau_1\,[f'(c+\tau_1) - f'(c-\tau_1)] + \frac{3\tau_1^2}{\Delta^3}\,\Phi(\Delta) = 0\ :$$

Այստեղից, կիրառելով Լագրանժի միջին արժեքի մասին թեորեմը, կունենանք՝

$$2\tau_1^2\left[f''(\xi) + \frac{3}{2\Delta^3}\,\Phi(\Delta)\right] = 0\,. \qquad \xi \in (c-\tau_1, c+\tau_1)\ :$$

Այսպիսով,

$$\Phi(\Delta) = -\frac{2}{3}\,f''(\xi)\,\Delta^3\ :$$

Աջ մասում տեղադրելով Δ-ի փոխարեն $(b-a)/2$-ը՝ կստանանք

$$R_T(f) = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3\,, \qquad \xi \in (a,b) \tag{6.2.34}$$

արտահայտությունը սեղանների բանաձևի (6.2.33) սխալանքի համար: Այստեղից ստանում ենք հետևյալ գնահատականը.

$$|R_T(f)| \le \frac{M_2}{12}\,(b-a)^3\,. \qquad M_2 \equiv \max_{a\le x\le b} |f''(x)|\ : \tag{6.2.35}$$

Ինչպես հետևում է այդ գնահատականից, սեղանների բանաձևը ճշգրիտ է առաջին աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամների Π_1 դասում:

Այժմ կառուցենք ընդհանրացված բանաձևը: Դիցուք ունենք $[a, b]$ հատվածի (6.2.14) տրոհումը n հավասար մասերի: Յուրաքանչյուր $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ հատվածում կիրառենք սեղանների (6.2.32) բանաձևը.

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\,[f(x_k) + f(x_{k+1})]\ :$$

Դրանով իսկ (6.2.15)-ից կստանանք քառակուսացման բանաձև

$$I(f) \approx \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_k) + f(x_{k+1})] \tag{6.2.36}$$

կամ

$$I(f) \approx \mathbf{Q}_T(f) \equiv \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(x_n)\right], \tag{6.2.37}$$

որը կրում է *սեղանների ընդհանրացված բանաձև* անունը (նկ. 6.2.3):

Նկ. 6.2.3 Սեղանների ընդհանրացված բանաձևի երկրաչափական մեկնաբանությունը

Արտածենք սեղանների ընդհանրացված բանաձևի

$$\mathbf{R}_T(f) \equiv I(f) - \mathbf{Q}_T(f) \tag{6.2.38}$$

սխալանքի գնահատականը: Ելնելով (6.2.15) և (6.2.36)-ից՝ սխալանքը գրենք հետևյալ տեսքով.

$$\mathbf{R}_T(f) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx - \frac{h}{2}\,(f(x_k) + f(x_{k+1}))\right)\ :$$

Համաձայն սեղանների սովորական բանաձևի սխալանքի համար (6.2.34) արտահայտության՝ ունենք

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx - \frac{h}{2}\,[f(x_k) + f(x_{k+1})] = -\frac{f''(\xi_k)}{12}\,h^3, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

որտեղ $\xi_k \in (x_k, x_{k+1})$: Այնուհետև, օգտվելով 6.2.1 լեմմայից, կստանանք

$$\mathbf{R}_{\mathcal{T}}(f) = -\frac{h^3}{12}\sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k) = -\frac{h^3}{12}\, n f''(\xi) = -\frac{f''(\xi)}{12}\,(b-a)h^2\,,$$

որտեղ $\xi \in (a, b)$: Այսպիսով,

$$\mathbf{R}_{\mathcal{T}}(f) = -\frac{f''(\xi)}{12}\,(b-a)h^2\,, \qquad \xi \in (a, b)\ : \tag{6.2.39}$$

Այստեղից հետևում է

$$|\mathbf{R}_{\mathcal{T}}(f)| \le \frac{M_2}{12}\,(b-a)h^2\,, \qquad M_2 \equiv \max_{a\le x\le b} |f''(x)| \tag{6.2.40}$$

գնահատականը:

6.2.3 Ուղղանկյունների և սեղանների համակցված բանաձևեր

Եթե $f''(x)$ երկրորդ կարգի ածանցյալը չի փոխում իր նշանը (a, b) միջակայքում, ապա միջին ուղղանկյունների և սեղանների բանաձևերը տալիս են $I(f)$ ինտեգրալի երկկողմանի մոտարկումներ: Դիցուք, օրինակ, $f''(x) > 0$: Այդ դեպքում, համաձայն (6.2.25) և (6.2.39)-ի, համապատասխանաբար $\mathbf{R}^{\circ}_{\mathcal{R}}(f) > 0$ և $\mathbf{R}_{\mathcal{T}}(f) < 0$: Ուստի (6.2.23) և (6.2.38)-ից հետևում է, որ

$$\mathbf{Q}^{\circ}_{\mathcal{R}}(f) < I(f) < \mathbf{Q}_{\mathcal{T}}(f)\ : \tag{6.2.41}$$

Այդ իրավիճակում կարելի է օգտագործել ուղղանկյունների և սեղանների համակցված հետևյալ բանաձևը.

$$I(f) \approx \mathbf{Q}_{\mathcal{RT}}(f) \equiv \frac{\mathbf{Q}^{\circ}_{\mathcal{R}}(f) + \mathbf{Q}_{\mathcal{T}}(f)}{2}\ : \tag{6.2.42}$$

Այս բանաձևը լավ է նրանով, որ

$$|I(f) - \mathbf{Q}_{\mathcal{RT}}(f)| < \frac{\mathbf{Q}_{\mathcal{T}}(f) - \mathbf{Q}^{\circ}_{\mathcal{R}}(f)}{2}\,. \tag{6.2.43}$$

այսինքն՝ բանաձևի սխալանքը գնահատվում է ինտեգրալի մոտավոր արժեքների միջոցով:

Ուղղանկյունների և սեղանների բանաձևերի հիման վրա կարելի է ստանալ ինտեգրալների ճշգրտված արժեքները, եթե հաշվի առնենք այդ բանաձևերի սխալանքների բնույթը: Համեմատելով (6.2.25) և (6.2.39) արտահայտությունները՝ տեսնում ենք, որ սեղանների բանաձևի սխալանքը մոտավորապես երկու անգամ ավելի մեծ է, և արտահայտությունները ունեն հակադիր նշաններ: Դրա հիման վրա կարելի է գրել ուղղանկյունների և սեղանների համակցված հետևյալ բանաձևը.

$$I(f) \approx \mathbf{Q}^{*}_{\mathcal{RT}}(f) \equiv \frac{2\mathbf{Q}^{\circ}_{\mathcal{R}}(f) + \mathbf{Q}_{\mathcal{T}}(f)}{3}\ : \tag{6.2.44}$$

Այդ դեպքում

$$I(f) - \mathbf{Q}^*_{\mathcal{RT}}(f) = \frac{2}{3}\left[I(f) - \mathbf{Q}^\circ_{\mathcal{R}}(f)\right] + \frac{1}{3}\left[I(f) - \mathbf{Q}_{\mathcal{T}}(f)\right] = \frac{2}{3}\,\mathbf{R}^\circ_{\mathcal{R}}(f) + \frac{1}{3}\,\mathbf{R}_{\mathcal{T}}(f)$$

$$= \frac{1}{36}\left[f''(\mu) - f''(\xi)\right](b-a)h^2, \qquad \mu, \xi \in (a, b) :$$

Ուստի, եթե $f''(x)$ ածանցյալը $[a, b]$ հատվածում դանդաղ է փոփոխվում, ապա կիրառելով (6.2.44) բանաձևը՝ կարելի է ստանալ ինտեգրալի առավել ճշգրիտ արժեքը:

Օրինակ 6.2.2 : Հաշվել հետևյալ ինտեգրալը.

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} :$$

Այս ինտեգրալը հեշտությամբ հաշվվում է Նյուտոն-Լայբնիցի (6.1.2) բանաձևով.

$$I = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} \approx 0.785398 :$$

Օգտվենք այժմ միջին ուղղանկյունների և սեղանների ընդհանրացված բանաձևերից: Վերցնենք $n = 10$: Արդյունքում կստանանք $\mathbf{Q}^\circ_{\mathcal{R}} = 0.785606$ և $\mathbf{Q}_{\mathcal{T}} = 0.784981$ (կլորացման սխալանքների ճշտությամբ): Այնուհետև, ըստ (6.2.44) բանաձևի գտնում ենք $\mathbf{Q}^*_{\mathcal{RT}} = 0.785398$: ♣

Այսպիսով, որոշ դեպքերում համակցված բանաձևերի օգտագործումը կարող է էապես լավացնել հաշվարկների արդյունքները:

6.3 Սիմպսոնի բանաձևը

Այս պարագրաֆում կարտածենք քառակուսացման մի բանաձև, որն ունի ճշտության ավելի բարձր աստիճան, քան ուղղանկյունների և սեղանների բանաձևերը:

Ենթաինտեգրալային $f(x)$ ֆունկցիայի համար կառուցենք ինտերպոլացիոն բազմանդամ՝ որպես հանգույցներ վերցնելով a, b և $c = (a+b)/2$ կետերը: Օգտվելով (4.2.4) Լագրանժի ինտերպոլացիոն բանաձևից՝ ոչ բարդ ձևափոխություններից հետո կստանանք.

$$f(x) \approx L_2(x) = f(c) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-c) + 2\,\frac{f(b) - 2f(c) + f(a)}{(b-a)^2}(x-c)^2 : \qquad (6.3.1)$$

Այնուհետև, վերցնենք

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b L_2(x)\,dx : \qquad (6.3.2)$$

Երկրաչափորեն դա նշանակում է, որ $I(f)$ ինտեգրալի արժեքը մոտավորապես փոխարինվում է $y = L_2(x)$ պարաբոլով սահմանափակված կորագիծ սեղանի մակերեսով (նկ. 6.3.1): Տեղադրելով $L_2(x)$-ի համար (6.3.1) արտահայտությունը (6.3.2) մոտավոր հավասարության մեջ կստանանք քառակուսացման բանաձև

$$I(f) \approx Q_S(f) \equiv \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f(c) + f(b)\right] . \qquad (6.3.3)$$

որը կոչվում է *Սիմպսոնի բանաձև* (նրան անվանում են նաև *պարաբոլների բանաձև*):

Նկ. 6.3.1 Սիմպսոնի բանաձևի երկրաչափական մեկնաբանությունը

Գնահատենք Սիմպսոնի բանաձևի

$$R_S(f) \equiv I(f) - Q_S(f) \qquad (6.3.4)$$

սխալանքը: Ենթադրենք, որ $f(x) \in C^4[a,b]$: Ինչպես ուղղանկյունների և սեղանների բանաձևում, սահմանենք

$$\Phi(\tau) \equiv \int_{c-\tau}^{c+\tau} f(x)\,dx - \frac{\tau}{3}\left[f(c-\tau) + 4f(c) + f(c+\tau)\right] , \qquad 0 \le \tau \le \Delta$$

ֆունկցիան, որտեղ $\Delta \equiv (b-a)/2$: Դժվար չէ համոզվել, որ $\Phi(\Delta) = R_S(f)$ և $\Phi(0) = 0$: Ներմուծենք հետևյալ օժանդակ ֆունկցիան.

$$F(\tau) \equiv \Phi(\tau) - \left(\frac{\tau}{\Delta}\right)^5 \Phi(\Delta) , \qquad 0 \le \tau \le \Delta :$$

Պարզ է, որ $F(0) = F(\Delta) = 0$: Հետևաբար, ըստ Ռոլլի թեորեմի, գոյություն ունի $\tau_1 \in (0, \Delta)$ այնպիսին, որ $F'(\tau_1) = 0$: Հաշվենք $F(\tau)$ ֆունկցիայի ածանցյալը.

$$F'(\tau) = \frac{2}{3}\left[f(c+\tau) + f(c-\tau) - 2f(c)\right] - \frac{\tau}{3}\left[f'(c+\tau) - f'(c-\tau)\right] - \frac{5\tau^4}{\Delta^5}\Phi(\Delta) : \quad (6.3.5)$$

Հեշտ է տեսնել, որ $F'(0) = 0$: Ուստի, կրկին ըստ Ռոլլի թեորեմի, կգտնվի $\tau_2 \in (0, \tau_1)$ այնպիսին, որ $F''(\tau_2) = 0$: Ածանցելով, (6.3.5)-ից կստանանք՝

$$F''(\tau) = \frac{1}{3}\left[f'(c+\tau) - f'(c-\tau)\right] - \frac{\tau}{3}\left[f''(c+\tau) + f''(c-\tau)\right] - \frac{20\tau^3}{\Delta^5}\,\Phi(\Delta)\ : \qquad (6.3.6)$$

Քանի որ $F''(0) = 0$, ապա ըստ Ռոլլի թեորեմի գոյություն ունի $\tau_3 \in (0, \tau_2)$ այնպիսին, որ $F'''(\tau_3) = 0$: Ելնելով (6.3.6)-ից, հաշվենք $F(\tau)$ ֆունկցիայի երրորդ ածանցյալը.

$$F'''(\tau) = -\frac{\tau}{3}\left[f'''(c+\tau) - f'''(c-\tau)\right] - \frac{60\tau^2}{\Delta^5}\,\Phi(\Delta)\ :$$

Վերցնելով $\tau = \tau_3$, կստանանք

$$\frac{\tau_3}{3}\left[f'''(c+\tau_3) - f'''(c-\tau_3)\right] + \frac{60\tau_3^2}{\Delta^5}\,\Phi(\Delta) = 0$$

հավասարությունը: Այնուհետև, կիրառելով միջին արժեքի մասին Լագրանժի թեորեմը, կստանանք՝

$$\frac{2\tau_3^2}{3}\left[f^{(4)}(\xi) + \frac{90}{\Delta^5}\,\Phi(\Delta)\right] = 0, \qquad \xi \in (c-\tau_3, c+\tau_3)\ :$$

Դրանով իսկ

$$\Phi(\Delta) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{90}\,\Delta^5\ :$$

Աջ մասում վերցնելով Δ-ի փոխարեն $(b-a)/2$-ը՝ կգանք

$$R_S(f) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{2880}(b-a)^5, \qquad \xi \in (a, b) \qquad (6.3.7)$$

արտահայտությանը Սիմպսոնի բանաձևի (6.3.4) սխալանքի համար: Այստեղից ստանում ենք հետևյալ գնահատականը.

$$|R_S(f)| \le \frac{M_4}{2880}(b-a)^5, \qquad M_4 \equiv \max_{a\le x\le b}|f^{(4)}(x)|\ : \qquad (6.3.8)$$

Ինչպես երևում է ստացված գնահատականից, Սիմպսոնի բանաձևը ճշգրիտ է երրորդ կարգի հանրահաշվական բազմանդամների H_3 դասում:

Այժմ կառուցենք *Սիմպսոնի ընդհանրացված բանաձևը*: Դրա համար $[a, b]$ հատվածը տրոհենք $n = 2m$ հավասար մասերի

$$x_j = a + jh,\ j = 0, 1, \ldots, 2m, \quad h = \frac{b-a}{2m}$$

կետերով: Ներկայացնենք $I(f)$ ինտեգրալը

$$I(f) = \sum_{k=1}^{m}\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx \qquad (6.3.9)$$

գումարի տեսքով: Յուրաքանչյուր $[x_{2k-2}, x_{2k}]$, $k = 1, 2, \ldots, m$ հատվածում կիրառենք Սիմպսոնի (6.3.3) բանաձևը՝

$$\int\limits_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\,[f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})]\ :$$

Տեղադրելով (6.3.9)-ի մեջ՝ կստանանք

$$I(f) \approx \frac{h}{3}\sum_{k=1}^{m}[f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})] \tag{6.3.10}$$

կամ

$$I(f) \approx \mathbf{S}_{\mathcal{S}}(f) \equiv \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\sum_{k=1}^{m} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(x_{2k}) + f(x_{2m})\right] \tag{6.3.11}$$

քառակուսացման բանաձևը, որը կոչվում է *Սիմպսոնի ընդհանրացված բանաձև*:

Արտածենք բանաձևի

$$\mathbf{R}_{\mathcal{S}}(f) \equiv I(f) - \mathbf{Q}_{\mathcal{S}}(f) \tag{6.3.12}$$

սխալանքի գնահատականը: Ելնելով (6.3.9) և (6.3.10)-ից՝ սխալանքը գրենք հետևյալ տեսքով.

$$\mathbf{R}_{\mathcal{S}}(f) = \sum_{k=1}^{m}\left(\int\limits_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx - \frac{h}{3}\,[f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})]\right)\ :$$

Սիմպսոնի սովորական բանաձևի սխալանքի համար վերն ստացված (6.3.7) արտահայտությունից ունենք

$$\int\limits_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx - \frac{h}{3}\,[f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})] = -\frac{f^{(4)}(\xi_k)}{90}\,h^5\,, \quad k = 1, 2, \ldots, m\,,$$

որտեղ $\xi_k \in (x_{2k-2}, x_{2k})$: Այնուհետև, կիրառելով 6.2.1 լեմման, կստանանք

$$\mathbf{R}_{\mathcal{S}}(f) = -\frac{h^5}{90}\sum_{k=1}^{m} f^{(4)}(\xi_k) = -\frac{h^5}{90}\,m f^{(4)}(\xi) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{180}\,(b-a)h^4\,,$$

որտեղ $\xi \in (a, b)$: Այսպիսով,

$$\mathbf{R}_{\mathcal{S}}(f) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{180}\,(b-a)h^4\,, \qquad \xi \in (a, b)\ : \tag{6.3.13}$$

Այստեղից հետևում է

$$|\mathbf{R}_{\mathcal{S}}(f)| \le \frac{M_4}{180}\,(b-a)h^4\,, \qquad M_4 \equiv \max_{a \le x \le b} |f^{(4)}(x)| \tag{6.3.14}$$

գնահատականը:

Օրինակ 6.3.1 : Գնահատել հանգույցների քանակը Սիմպսոնի ընդհանրացված բանաձևում, որը բավարար է

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

ինտեգրալը 10^{-4} ճշտությամբ հաշվելու համար:

Համաձայն (6.3.14) գնահատականի՝ $n = 2m$ թիվը կարելի է որոշել

$$\frac{M_4}{180}h^4 = \frac{M_4}{180\,n^4} < 10^{-4} \tag{6.3.15}$$

պայմանից: Հաշվենք M_4 մեծությունը: Ունենք

$$\left(e^{-x^2}\right)^{(4)} = 4(4x^4 - 12x^2 + 3)e^{-x^2}\ :$$

Այստեղից գտնում ենք $M_4 = 12$ և (6.3.15)-ից ստանում, որ (6.3.11) բանաձևում բավարար է վերցնել

$$n > \frac{10}{\sqrt[4]{15}} \approx 5.0813\,,$$

այսինքն՝ $n = 6$ (համեմատության համար տես 6.2.1 օրինակը): Դրանով իսկ կստանանք ինտեգրալի 0.74683 մոտավոր արժեքը պահանջվող ճշտությամբ: ♣

Սիմպսոնի բանաձևը, ինչպես նաև նախորդ պարագրաֆում դիտարկված ուղղանկյունների և սեղանների բանաձևերը, գործնականում ամենից հաճախ օգտագործվող բանաձևերն են:

6.4 Սխալանքի գնահատման Ռունգեի կանոնը

Հաճախ մոտավոր ինտեգրման սխալանքի գնահատումը, հիմնված վերը ստացված անալիտիկ արտահայտությունների վրա, լինում է բավականին բարդ: Ինչպես երևում է (6.2.21), (6.2.26), (6.2.27), (6.2.40) և (6.3.14) գնահատականներից, այն պահանջում է $M_p \equiv \max\limits_{a\le x\le b}|f^{(p)}(x)|$ մեծությունների հաշվումը, ինչը միշտ չէ որ հնարավոր է: Ուստի գործնականում հաճախ օգտագործվում է մեկ այլ եղանակ, որի հիմքում ընկած է ընտրված քառակուսացման բանաձևով ինտեգրալի կրկնակի վերահաշվումը՝ սկզբից h քայլով, իսկ հետո՝ $h/2$ քայլով:

6.4.1 Ռունգեի կանոնը

Դիցուք

$$I(f) \equiv \int_a^b f(x)\,dx$$

ինտեգրալի հաշվման համար կիրառվում է վերը դիտարկված ընդհանրացված քառակուսացման բանաձևերից մեկը՝

$$I(f) \approx Q(f,h) \equiv \sum_{k=0}^{n} A_k^{(h)} f(x_k^{(h)}) . \tag{6.4.1}$$

որտեղ $h = (b-a)/n$: Դիտարկենք այդ բանաձևի սխալանքը՝

$$R(f,h) \equiv I(f) - Q(f,h) \ : \tag{6.4.2}$$

Համաձայն սխալանքի համար ստացված (6.2.20), (6.2.24), (6.2.25), (6.2.39) և (6.3.13) արտահայտությունների, ունենք

$$R(f,h) = Cf^{(p)}(\xi)(b-a)h^p , \quad \xi \in (a,b) , \tag{6.4.3}$$

որտեղ C-ն ոչ զրոյական հաստատուն է՝ կախված ընտրված քառակուսացման բանաձևից: Բերված (6.4.3) արտահայտության մեջ՝ $p = 1$ ձախ և աջ ուղղանկյունների բանաձևերի համար, $p = 2$ միջին ուղղանկյունների և սեղանների բանաձևերի համար, $p = 4$ Սիմպսոնի բանաձևի համար: Եթե $[a,b]$ հատվածում $f^{(p)}(x)$ ածանցյալը դանդաղ է փոփոխվում, ապա

$$R(f,h) \approx M h^p , \tag{6.4.4}$$

որտեղ M-ը որոշակի մեծություն է, որը տրված ենթաինտեգրալային $f(x)$ ֆունկցիայի համար կհամարենք հաստատուն $[a,b]$ ինտեգրման հատվածում: Ավելին, նշենք, որ եթե $f^{(p)}(x)$ ածանցյալը սահմանափակ է, ապա բավականաչափ փոքր h-երի համար նույնպես կարելի է օգտվել (6.4.4) առնչությունից:

Փոքրացնենք (6.4.1) քառակուսացման բանաձևի քայլը երկու անգամ, այսինքն՝ վերցնենք քայլը հավասար $h/2$: Դա հավասարազոր է հանգույցների քանակի կրկնապատկմանը: Կստանանք ինտեգրալի նոր մոտավոր արժեք՝

$$I(f) \approx Q(f,h/2) \equiv \sum_{k=0}^{2n} A_k^{(h/2)} f(x_k^{(h/2)}) \ : \tag{6.4.5}$$

Համաձայն (6.4.4)-ի՝

$$R(f,h/2) \equiv I(f) - Q(f,h/2) \tag{6.4.6}$$

սխալանքի համար ունենք

$$R(f,h/2) \approx M \left(\frac{h}{2}\right)^p \tag{6.4.7}$$

Համեմատելով (6.4.4) և (6.4.7)-ը՝ տեսնում ենք, որ

$$R(f,h/2) \approx \frac{1}{2^p} R(f,h) \ : \tag{6.4.8}$$

Այսինքն՝ կես քայլին անցման արդյունքում սխալանքը փոքրանում է մոտավորապես 2^p անգամ: Այնուհետև, (6.4.2) և (6.4.6)-ից հետևում է

$$R(f,h/2) = R(f,h) + Q(f,h) - Q(f,h/2)$$

հավասարությունը: Այստեղից, հաշվի առնելով (6.4.8)-ը, ստանում ենք

$$R(f,h/2) \approx \frac{Q(f,h/2) - Q(f,h)}{2^p - 1} \tag{6.4.9}$$

մոտավոր արտահայտությունը (6.4.5) քառակուսացման բանաձևի սխալանքի համար: Սխալանքի գործնական գնահատման նկարագրված մեթոդը կրում է *Ռունգեի կանոն* անվանումը:

Պարզվում է, որ (6.4.9) բանաձևի աջ մասում գտնվող

$$E(f,h/2) \equiv \frac{Q(f,h/2) - Q(f,h)}{2^p - 1} \tag{6.4.10}$$

մեծությունը կարող է օգտագործվել ոչ միայն մոտավոր ինտեգրման սխալանքի գնահատման համար, այլ նաև բավականին ողորկ ֆունկցիաների դեպքում, ինտեգրալի արժեքի ճշգրտման համար:

6.4.2 Ինտեգրալի մոտավոր արժեքի ճշգրտումն ըստ Ռիչարդսոնի

Այժմ ենթադրենք, որ $f(x)$ ենթաինտեգրալային ֆունկցիան ունի ավելի բարձր կարգի ողորկություն, քան պահանջվում էր 6.2 և 6.3 պարագրաֆներում՝ քառակուսացման բանաձևերի սխալանքների արտածման ժամանակ: Ամենից առաջ ավելի հանգամանալից հետազոտենք քառակուսացման բանաձևերի սխալանքների տեսքը, ենթադրելով, որ ենթաինտեգրալային ֆունկցիան ունի լրացուցիչ ողորկություն:

Դիտարկենք սեղանների (6.2.37) ընդհանրացված բանաձևը: Ենթադրենք, որ $f(x) \in C^4[a,b]$: Ներկայացնենք $I(f)$ ինտեգրալը

$$I(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx$$

տեսքով: Յուրաքանչյուր $[x_k, x_{k+1}]$ հատվածում, որտեղ $0 \le k \le n-1$, գրենք $f(x)$ ֆունկցիայի Թեյլորի վերլուծությունը.

$$\begin{aligned} f(x) \;=\; & f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{f''(x_k)}{2!}(x - x_k)^2 + \frac{f'''(x_k)}{3!}(x - x_k)^3 + \\ & \frac{f^{(4)}(\xi_k)}{4!}(x - x_k)^4, \qquad \xi_k \in (x_k, x_{k+1}) : \end{aligned}$$

Ինտեգրելով վերջին հավասարությունը՝ կստանանք

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx = hf(x_k) + \frac{h^2}{2}f'(x_k) + \frac{h^3}{6}f''(x_k) + \frac{h^4}{24}f'''(x_k) + O(h^5) : \tag{6.4.11}$$

Համանմանորեն ունենք

$$f(x) = f(x_{k+1}) + f'(x_{k+1})(x - x_{k+1}) + \frac{f''(x_{k+1})}{2!}(x - x_{k+1})^2 + \frac{f'''(x_{k+1})}{3!}(x - x_{k+1})^3 + \frac{f^{(4)}(\eta_k)}{4!}(x - x_{k+1})^4, \qquad \eta_k \in (x_k, x_{k+1})$$

հավասարությունը, որն ինտեգրելով կստանանք

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx = hf(x_{k+1}) - \frac{h^2}{2}f'(x_{k+1}) + \frac{h^3}{6}f''(x_{k+1}) - \frac{h^4}{24}f'''(x_{k+1}) + O(h^5)\ : \quad (6.4.12)$$

Անդամ առ անդամ գումարենք (6.4.11) և (6.4.12) հավասարությունները.

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx = \frac{h}{2}[f(x_k) + f(x_{k+1})] + \frac{h^2}{4}[f'(x_k) - f'(x_{k+1})] + \frac{h^3}{12}[f''(x_k) + f''(x_{k+1})] + \frac{h^4}{48}[f'''(x_k) - f'''(x_{k+1})] + O(h^5)\ :$$

Ըստ Լագրանժի միջին արժեքի մասին թեորեմի (տե՛ս, օրինակ, [45]), ունենք՝

$$f'''(x_k) - f'''(x_{k+1}) = -hf^{(4)}(\nu_k), \qquad \nu_k \in (x_k, x_{k+1}).$$

Այսպիսով,

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx = \frac{h}{2}[f(x_k) + f(x_{k+1})] + \frac{h^2}{4}[f'(x_k) - f'(x_{k+1})] + \frac{h^3}{12}[f''(x_k) + f''(x_{k+1})] + O(h^5)\ : \quad (6.4.13)$$

Գումարելով ստացված հավասարություններն ըստ k-ի՝ կստանանք

$$I(f) = \mathbf{Q}_T(f) + \frac{h^2}{4}\sum_{k=0}^{n-1}[f'(x_k) - f'(x_{k+1})] + \frac{h^2}{6}\mathbf{Q}_T(f'') + O(h^4)\ : \quad (6.4.14)$$

Ձևափոխենք (6.4.14) հավասարության աջ մասի

$$J \equiv \frac{h^2}{4}\sum_{k=0}^{n-1}[f'(x_k) - f'(x_{k+1})]$$

մեծությունը: Համաձայն Թեյլորի բանաձևի՝ ունենք

$$f'(x_k) = f'(c_k) - \frac{h}{2}f''(c_k) + \frac{h^2}{8}f'''(c_k) + O(h^3),$$

$$f'(x_{k+1}) = f'(c_k) + \frac{h}{2} f''(c_k) + \frac{h^2}{8} f'''(c_k) + O(h^3)\,.$$

որտեղ $c_k = (x_k + x_{k+1})/2$: Վերջին երկու հավասարություններից հետևում է, որ

$$f'(x_k) - f'(x_{k+1}) = -hf''(c_k) + O(h^3)\ :$$

Այսպիսով,

$$J = -\frac{h^3}{4} \sum_{k=0}^{n-1} f''(c_k) + O(h^4) = -\frac{h^2}{4} \mathbf{Q}_{\mathcal{R}}^{\circ}(f'') + O(h^4)\ :$$

Դրանով իսկ (6.4.14) հավասարությունն ընդունում է հետևյալ տեսքը.

$$I(f) = \mathbf{Q}_{\mathcal{T}}(f) - \frac{h^2}{4} \mathbf{Q}_{\mathcal{R}}^{\circ}(f'') + \frac{h^2}{6} \mathbf{Q}_{\mathcal{T}}(f'') + O(h^4)\ : \tag{6.4.15}$$

Այնուհետև, (6.2.23), (6.2.25) և (6.2.38), (6.2.39)-ից ունենք

$$\mathbf{Q}_{\mathcal{R}}^{\circ}(f'') = I(f'') - \frac{f^{(4)}(\mu)}{24}(b-a)h^2\,, \qquad \mu \in (a,b)$$

և

$$\mathbf{Q}_{\mathcal{T}}(f'') = I(f'') + \frac{f^{(4)}(\nu)}{12}(b-a)h^2\,, \qquad \nu \in (a,b)\ :$$

Տեղադրելով $\mathbf{Q}_{\mathcal{R}}^{\circ}(f'')$ և $\mathbf{Q}_{\mathcal{T}}(f'')$-ի համար ստացված արտահայտությունները (6.4.15) հավասարության մեջ՝ կստանանք

$$I(f) = \mathbf{Q}_{\mathcal{T}}(f) + c_{\mathcal{T}} h^2 + O(h^4)$$

հավասարությունը, որտեղ

$$c_{\mathcal{T}} \equiv -\frac{1}{12} \int_a^b f''(x)\,dx\ :$$

Այսպիսով, ստանում ենք

$$\mathbf{R}_{\mathcal{T}}(f) = c_{\mathcal{T}} h^2 + O(h^4)\,, \tag{6.4.16}$$

որտեղ $c_{\mathcal{T}} h^2$ մեծությունը կոչվում է սեղանների ընդհանրացված բանաձևի *սխալանքի գլխավոր մաս*: Կարող է պատահել այնպես, որ $c_{\mathcal{T}} = 0$: Այդ դեպքում սխալանքի գլխավոր մասը հավասար է զրոյի, և սեղանների բանաձևի սխալանքը կլինի արդեն h^4 կարգի մեծություն:

Համանմանորեն, ենթադրելով, որ $f(x)$ ֆունկցիան ունի ավելի բարձր աստիճանի ողորկություն, կարելի է ստանալ մյուս քառակուսացման բանաձևերի սխալանքների հետևյալ ներկայացումները.

- եթե $f(x) \in C^2[a,b]$, ապա

$$\mathbf{R}_{\mathcal{R}}^{-}(f) = c_{\mathcal{R}}^{-} h + O(h^2)\,, \qquad c_{\mathcal{R}}^{-} = \frac{1}{2} \int_a^b f'(x)\,dx\,, \tag{6.4.17}$$

- եթե $f(x) \in C^2[a,b]$, ապա

$$\mathbf{R}^{+}_{\mathcal{R}}(f) = c^{+}_{\mathcal{R}} h + O(h^2), \qquad c^{+}_{\mathcal{R}} = -\frac{1}{2}\int_a^b f'(x)\,dx, \tag{6.4.18}$$

- եթե $f(x) \in C^4[a,b]$, ապա

$$\mathbf{R}^{\circ}_{\mathcal{R}}(f) = c^{\circ}_{\mathcal{R}} h^2 + O(h^4), \qquad c^{\circ}_{\mathcal{R}} = \frac{1}{24}\int_a^b f''(x)\,dx, \tag{6.4.19}$$

- եթե $f(x) \in C^6[a,b]$, ապա

$$\mathbf{R}_{\mathcal{S}}(f) = c_{\mathcal{S}} h^4 + O(h^6), \qquad c_{\mathcal{S}} = -\frac{1}{180}\int_a^b f^{(4)}(x)\,dx\ : \tag{6.4.20}$$

Վերը բերված (6.4.17)–(6.4.20) առնչությունների արտածումը թողնում ենք ընթերցողին՝ որպես վարժություն:

Այսպիսով, դիցուք $f(x) \in C^{p+m}[a,b]$, որտեղ $p = 1, m = 1$ ձախ և աջ ուղղանկյունների բանաձևերի համար, $p = 2, m = 2$ միջին ուղղանկյունների և սեղանների բանաձևերի համար, $p = 4, m = 2$ Սիմպսոնի բանաձևի համար: Միավորենք (6.4.16)–(6.4.20) առնչությունները մեկում՝

$$R(f,h) = ch^p + O(h^{p+m}), \tag{6.4.21}$$

որտեղ c-ն h-ից անկախ հաստատուն է, որը որոշվում է ընտրված քառակուսացման բանաձևով և ենթաինտեգրալային ֆունկցիայով: Այդ դեպքում, ինչպես հետևում է (6.4.2) և (6.4.21)-ից,

$$I(f) = Q(f,h) + ch^p + O(h^{p+m})\ : \tag{6.4.22}$$

Փոքրացնելով քառակուսացման բանաձևի քայլը երկու անգամ (այսինքն՝ վերցնելով քայլը հավասար $h/2$), կստանանք՝

$$I(f) = Q(f,h/2) + c\left(\frac{h}{2}\right)^p + O(h^{p+m})\ : \tag{6.4.23}$$

Այնուհետև, բազմապատկելով 2^p-ով (6.4.23) հավասարությունը և նրանից հանելով (6.4.22) հավասարությունը՝ կստանանք

$$I(f) = Q^*(f,h/2) + O(h^{p+m}), \tag{6.4.24}$$

որտեղ

$$Q^*(f,h/2) \equiv \frac{2^p Q(f,h/2) - Q(f,h)}{2^p - 1}\ : \tag{6.4.25}$$

Ստացված $Q^*(f,h/2)$ մեծությունը կոչվում է ինտեգրալի *ըստ Ռիչարդսոնի ճշգրտված* (կամ *էքստրապոլացված*) մոտավոր արժեք (տես ստորև 6.4.1 դիտողությունը):

Այսպիսով, համաձայն (6.4.24)-ի՝

$$R^*(f,h/2) \equiv I(f) - Q^*(f,h/2) = O(h^{p+m})$$

այն ժամանակ, երբ

$$R(f,h/2) \equiv I(f) - Q(f,h/2) = O(h^p)$$

(բնականաբար, եթե $c \neq 0$): Ընդ որում, ինչպես հետևում է (6.4.10) և (6.4.25)-ից՝

$$Q^*(f,h/2) = Q(f,h/2) + E(f,h/2) \ : \qquad (6.4.26)$$

Այդ իսկ պատճառով $E(f,h/2)$ մեծությունը (6.4.10)-ից կոչվում է $I(f)$ ինտեգրալի $Q(f,h/2)$ մոտավոր արժեքի *ճշգրտում ըստ Ռիչարդսոնի*:

Դիտողություն 6.4.1 : *Պարզվում է, որ եթե $Q(f,h/2) \neq Q(f,h)$, ապա ինտեգրալի ըստ Ռիչարդսոնի ճշգրտված $Q^*(f,h/2)$ արժեքը, որը հաշվվում է (6.4.25) բանաձևով, ընկած է $Q(f,h/2)$ և $Q(f,h)$ մեծությունները պարունակող ամենափոքր հատվածից դուրս (այդ հեշտությամբ ստուգվող պնդումը թողնում ենք ընթերցողին՝ որպես վարժություն): Այդ իսկ պատճառով $Q^*(f,h/2)$ մեծությունը կոչվում է նաև ինտեգրալի* էքստրապոլացված *մոտավոր արժեք:*

6.5 Նյուտոն-Կոտսի բանաձևերը

Ընդհանրացնելով 6.2 և 6.3 պարագրաֆների արդյունքները՝ ձևակերպենք քառակուսացման բանաձևերի կառուցման եղանակներից մեկը, որը հիմնված է ենթաինտեգրալային ֆունկցիան ինտերպոլացիոն բազմանդամով փոխարինման վրա:

6.5.1 Ինտերպոլացիոն քառակուսացման բանաձևեր

Ընտրենք $[a,b]$ հատվածում զույգ առ զույգ իրարից տարբեր $x_0, x_1, \ldots, x_n$ հանգույցներ և ենթաինտեգրալային $f(x)$ ֆունկցիայի համար կառուցենք $L_n(x)$ ինտերպոլացիոն բազմանդամ: Կարող ենք գրել, որ

$$f(x) = L_n(x) + R_n(x)\,,$$

որտեղ $R_n(x)$-ը ինտերպոլացիայի սխալանքն է: Ինտեգրելով ըստ x-ի վերջին հավասարությունը՝ կստանանք

$$I(f) = \int_a^b L_n(x)\,dx + \int_a^b R_n(x)\,dx \ : \qquad (6.5.1)$$

Այստեղից գալիս ենք ինտեգրալի մոտավոր հաշվման հետևյալ եղանակին.

$$I(f) \approx \int_a^b L_n(x)\,dx \ : \tag{6.5.2}$$

Ինտերպոլացիոն բազմանդամը գրենք (4.2.6) Լագրանժի տեսքով, այն է՝

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_k)\,\omega'_{n+1}(x_k)} \,,$$

որտեղ $\omega_{n+1}(x) \equiv (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$: Այդ դեպքում

$$\int_a^b L_n(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)\,, \tag{6.5.3}$$

որտեղ

$$A_k = \int_a^b \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_k)\,\omega'_{n+1}(x_k)}\,dx\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n \ : \tag{6.5.4}$$

Դրանով իսկ (6.5.2) և (6.5.3)-ից ստանում ենք *ինտերպոլացիոն քառակուսացման բանաձև*

$$I(f) \approx Q_n(f) \equiv \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)\,, \tag{6.5.5}$$

որի գործակիցները որոշվում են ըստ (6.5.4)-ի:

Համաձայն (6.5.1) հավասարության՝ (6.5.5) քառակուսացման բանաձևի սխալանքն է՝

$$R_n(f) = \int_a^b R_n(x)\,dx \ : \tag{6.5.6}$$

Մասնավորապես, եթե $f(x) \in C^{n+1}[a, b]$, ապա օգտվելով (4.3.4) ինտերպոլացիայի սխալանքի արտահայտությունից՝ կստանանք

$$R_n(f) = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b f^{(n+1)}(\xi)\omega_{n+1}(x)\,dx \ : \tag{6.5.7}$$

Այսպիսով, ինտերպոլացիոն քառակուսացման բանաձևի կառուցման ծամանակ կամայականությունը վերաբերում է միայն $[a, b]$ հատվածում հանգույցների ընտրությանը: Իսկ գործակիցները հաշվվում են ըստ (6.5.4) բանաձևի:

Թեորեմ 6.5.1 : *Որպեսզի (6.5.5) քառակուսացման բանաձևը լինի ինտերպոլացիոն, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն լինի ճշգրիտ հանրահաշվական բազմանդամների H_n դասում:*

Ապացույց: Անհրաժեշտություն: Դիցուք (6.5.5) քառակուսացման բանաձևը ինտերպոլացիոն է: Եթե $f(x) \in H_n$, ապա ակնհայտ է, որ $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$: Այդ դեպքում, ինչպես հետևում է (6.5.7)-ից, $R_n(f) = 0$: Անհրաժեշտությունն ապացուցված է:

Բավարարություն: Դիցուք (6.5.5) քառակուսացման բանաձևը ճշգրիտ է H_n դասում: Մասնավորապես, այն ճշգրիտ է կամայական

$$l_n^{(m)}(x) \equiv \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_m)\,\omega'_{n+1}(x_m)} \in H_n\,, \quad m = 0, 1, \ldots, n$$

բազմանդամի համար (տե՛ս (4.2.1)-ը): Ուստի, հաշվի առնելով այդ բազմանդամների (4.2.2) հատկությունը, այն է՝ $l_n^{(m)}(x_k) = \delta_{mk}$ (Կրոնեկերի սիմվոլ), կստանանք

$$\int_a^b l_n^{(m)}(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} A_k l_n^{(m)}(x_k) = A_m$$

բոլոր $m = 0, 1, \ldots, n$ արժեքների համար: Իսկ դա նշանակում է, որ (6.5.5) քառակուսացման բանաձևը ինտերպոլացիոն է: □

Եթե ինտեգրման a և b սահմանները ինտերպոլացիայի հանգույցներն են, ապա (6.5.5) քառակուսացման բանաձևը կոչվում է *փակ տիպի* բանաձև, հակառակ դեպքում՝ *բաց տիպի*:

Ինտերպոլացիոն քառակուսացման բանաձևի A_k գործակիցները կարելի է գտնել այլ եղանակով՝ չհաշվելով (6.5.4) ինտեգրալները: Դրա էությունը հետևյալն է: Թեորեմ 6.5.1-ի հիման վրա ունենք

$$\sum_{k=0}^{n} A_k x_k^m = \int_a^b x^m\,dx\,, \quad m = 0, 1, \ldots, n$$

հավասարությունները: Կատարենք հետևյալ նշանակումները.

$$\mu_m \equiv \int_a^b x^m\,dx = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}\,, \quad m = 0, 1, \ldots, n\,: \tag{6.5.8}$$

Այսպիսով, հանգում ենք հանրահաշվական հավասարումների հետևյալ համակարգին.

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{n} A_k & = \mu_0 \\ \sum\limits_{k=0}^{n} A_k x_k & = \mu_1 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ \sum\limits_{k=0}^{n} A_k x_k^n & = \mu_n \end{cases} \tag{6.5.9}$$

Այս համակարգը ունի միարժեք լուծում, քանի որ նրա որոշիչը Վանդերմոնդի որոշիչն է, որը հավասար չէ զրոյի: Ինտերպոլացիոն քառակուսացման բանաձևի գործակիցների որոշման շարադրված եղանակը կոչվում է *անորոշ գործակիցների մեթոդ*:

Նշենք, որ (6.5.9) համակարգի առաջին հավասարումը, այն է՝

$$\sum_{k=0}^{n} A_k = b - a\,, \tag{6.5.10}$$

բացահայտում է ինտերպոլացիոն քառակուսացման բանաձևի գործակիցների կարևոր մի հատկություն:

6.5.2 Նյուտոն-Կոտսի բանաձևերը

Փակ տիպի ինտերպոլացիոն քառակուսացման բանաձևերը՝ կառուցված ըստ հավասարահեռ հանգույցների, կոչվում են *Նյուտոն-Կոտսի բանաձևեր*:

Վերցնենք $[a, b]$ հատվածում հավասարահեռ հանգույցներ.

$$x_k = a + kh\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n\,, \quad h = \frac{b-a}{n}\ :$$

Ինչպես ցույց է տրված 4.5 պարագրաֆում, Լագրանժի ինտերպոլացիոն բանաձևը հավասարահեռ հանգույցների դեպքում կարելի է գրել

$$L_n(x_0 + th) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)(-1)^{n-k}\,\frac{C_n^k}{n!}\,\frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{t-k}$$

տեսքով, որտեղ

$$t = \frac{x - x_0}{h}\ :$$

Այդ դեպքում

$$\int_a^b L_n(x)\,dx = h\int_0^n L_n(x_0 + th)\,dt = h\sum_{k=0}^{n} f(x_k)(-1)^{n-k}\,\frac{C_n^k}{n!}\int_0^n \frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{t-k}\,dt\ :$$

Այսպիսով, ստանում ենք արտահայտություններ քառակուսացման բանաձևի գործակիցների համար՝

$$A_k = h\,\frac{(-1)^{n-k}\,C_n^k}{n!}\int_0^n \frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{t-k}\,dt\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n\,, \tag{6.5.11}$$

որոնք կոչվում են *Նյուտոն-Կոտսի գործակիցներ*:

Բացի վերը նշված (6.5.10) հատկությունից, Նյուտոն-Կոտսի գործակիցներն ունեն մեկ կարևոր հատկություն ևս, այն է՝

$$A_k = A_{n-k}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n\ : \tag{6.5.12}$$

Այդ առնչությունն ապացուցվում է անմիջական ստուգումով՝ օգտվելով (6.5.11) արտահայտությունից:

Ինչ վերաբերում է Նյուտոն-Կոտսի բանաձևի սխալանքին, ապա, համաձայն (6.5.6)-ի, ունենք

$$R_n(f) = \int_a^b R_n(x)\,dx = h\int_0^n R_n(x_0 + th)\,dt \ :$$

Այստեղից, օգտվելով (4.5.4) արտահայտությունից, կստանանք

$$R_n(f) = \frac{h^{n+2}}{(n+1)!}\int_0^n f^{(n+1)}(\xi)t(t-1)\dots(t-n)\,dt \ : \qquad (6.5.13)$$

Նյուտոն-Կոտսի բանաձևերի մասնավոր դեպքերն են սեղանների բանաձևը ($n = 1$) և Սիմպսոնի բանաձևը ($n = 2$):

Դիտողություն 6.5.1 : *Համաձայն (6.5.13) ընդհանուր արտահայտությանը՝ Սիմպսոնի բանաձևը ճշգրիտ է հանրահաշվական բազմանդամների H_2 դասում: Սակայն, ինչպես ցույց է տրվել 6.3 պարագրաֆում, այդ բանաձևը իրականում օժտված է ավելի լավ հատկություններով, այն է՝ ճշգրիտ է հանրահաշվական բազմանդամների H_3 դասում: Ավելին, ապացուցված է, որ կենտ n-երի համար Նյուտոն-Կոտսի բանաձևերը ճշգրիտ են H_n դասում, իսկ զույգ n-երի համար՝ H_{n+1} դասում (տես [4]):*

6.6 Գաուսի քառակուսացման բանաձևը

Նախորդ պարագրաֆում, փոխարինելով ենթաինտեգրալային ֆունկցիան ինտերպոլացիոն բազմանդամով, մենք արտածել ենք

$$I(f) \equiv \int_a^b f(x)\,dx \approx Q_n(f) \equiv \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \qquad (6.6.1)$$

քառակուսացման բանաձևը: Ընդ որում, $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ հանգույցների կամայական ընտրության դեպքում այդ բանաձևը ճշգրիտ է H_n դասում: Պարզվում է, որ հանգույցների հատուկ ընտրության դեպքում կարելի է ստանալ քառակուսացման բանաձևեր, որոնք ճշգրիտ են ավելի բարձր աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամների համար:

Դնենք հետևյալ խնդիրը. *տրված n-ի համար կառուցել (6.6.1) քառակուսացման բանաձև, որը ճշգրիտ կլինի հնարավորին չափով բարձր աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամների համար:*

Նախ և առաջ ճշտենք՝ ո՞ր աստիճանի բազմանդամների համար այդ բանաձևը ճշգրիտ լինել չի կարող:

Լեմմա 6.6.1 : *Կամայական (6.6.1) քառակուսացման բանաձևը չի կարող ճշգրիտ լինել հանրահաշվական բազմանդամների H_{2n+2} դասում:*

Ապացույց: Իրոք, դիտարկենք

$$P_{2n+2}(x) = (x - x_0)^2(x - x_1)^2 \dots (x - x_n)^2 \in H_{2n+2}$$

բազմանդամը: Ակնհայտ է, որ այս բազմանդամի համար (6.6.1) բանաձևը չի կարող ճշգրիտ լինել, քանի որ

$$\int_a^b P_{2n+2}(x)\,dx > 0\,, \quad \text{իսկ} \quad \sum_{k=0}^{n} A_k P_{2n+2}(x_k) = 0\,. \qquad \square$$

Ինչպես ցույց է տվել Կ.Գաուսը, հանրահաշվական բազմանդամների ամենաբարձր աստիճանը, որոնց համար (6.6.1) բանաձևը ճշգրիտ է, հավասար է $(2n+1)$-ի: Այդպիսի քառակուսացման բանաձևը կոչվում է *ճշտության բարձրագույն հանրահաշվական աստիճանի բանաձև* կամ *Գաուսի բանաձև*:

Նախքան բանաձևի կառուցմանն անցնելը՝ հիշեցնենք մեկ հասկացություն, որին մենք արդեն հանդիպել ենք 5.4 և 5.6 պարագրաֆներում:

Սահմանում 6.6.1 : Կասենք, որ $\varphi(x)$ և $\psi(x)$ ֆունկցիաները *օրթոգոնալ են* $[a, b]$ հատվածում, եթե

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = 0\ :$$

Ձևակերպենք և ապացուցենք պնդում, որի հիման վրա կառուցվում է Գաուսի բանաձևը:

Թեորեմ 6.6.1 : *Որպեսզի (6.6.1) քառակուսացման բանաձևը լինի ճշգրիտ H_{2n+1} բազմության վրա, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն լինի ինտերպոլացիոն և $\omega_{n+1}(x) \equiv (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n) \in H_{n+1}$ բազմանդամը $[a, b]$ հատվածում լինի օրթոգոնալ կամայական բազմանդամի H_n դասից:*

Ապացույց: Անհրաժեշտություն: Դիցուք (6.6.1) քառակուսացման բանաձևը ճշգրիտ է H_{2n+1} դասում: Դրանով իսկ այն կլինի ճշգրիտ նաև H_n դասում: Հետևաբար, ըստ 6.5.1 թեորեմի, այն ինտերպոլացիոն է:

Վերցնենք ցանկացած $P_n(x) \in H_n$ բազմանդամ: Համաձայն ենթադրության՝

$$S_{2n+1}(x) \equiv \omega_{n+1}(x)P_n(x) \in H_{2n+1}$$

բազմանդամի համար (6.6.1) բանաձևը ճշգրիտ է, այսինքն՝

$$\int_a^b S_{2n+1}(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} A_k S_{2n+1}(x_k)\ :$$

Այստեղից հետևում է, որ

$$\int_a^b \omega_{n+1}(x)P_n(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} A_k\omega_{n+1}(x_k)P_n(x_k) = 0 \ :$$

Անհրաժեշտությունն ապացուցված է:

Բավարարություն: Դիցուք (6.6.1) քառակուսացման բանաձևը ինտերպոլացիոն է և $\omega_{n+1}(x)$ բազմանդամը օրթոգոնալ է H_n դասի կամայական բազմանդամի: Վերցնենք ցանկացած $S_{2n+1}(x) \in H_{2n+1}$ բազմանդամ: Բաժանելով այդ բազմանդամը $\omega_{n+1}(x)$-ի վրա՝ կստանանք

$$S_{2n+1}(x) = \omega_{n+1}(x)P_n(x) + r_n(x)\,, \tag{6.6.2}$$

որտեղ $P_n(x),\ r_n(x) \in H_n$: Ինտեգրենք այդ հավասարությունը.

$$\int_a^b S_{2n+1}(x)\,dx = \int_a^b \omega_{n+1}(x)P_n(x)\,dx + \int_a^b r_n(x)\,dx \ :$$

Ըստ ենթադրության՝ աջ մասի առաջին ինտեգրալը հավասար է զրոյի, իսկ երկրորդ ինտեգրալը, համաձայն 6.5.1 թեորեմի, հավասար է քառակուսացման գումարին: Հետևաբար,

$$\int_a^b S_{2n+1}(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} A_k r_n(x_k) \ :$$

Ինչպես հետևում է (6.6.2)-ից, $r_n(x_k) = S_{2n+1}(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$: Ուստի

$$\int_a^b S_{2n+1}(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} A_k S_{2n+1}(x_k) \ :$$

Իսկ դա նշանակում է, որ (6.6.1) բանաձևը ճշգրիտ է H_{2n+1} դասում: □

Այսպիսով, H_{2n+1} դասում ճշգրիտ քառակուսացման բանաձևի գոյության հարցը հանգում է $(n+1)$-րդ աստիճանի այնպիսի բազմանդամի գոյության հարցին, որն օրթոգոնալ է բոլոր բազմանդամներին H_n դասից և որի արմատներն իրական են, իրարից տարբեր են և պատկանում են $[a, b]$ հատվածին: Այդ բազմանդամի արմատներն էլ կլինեն որոնելի քառակուսացման բանաձևի հանգույցներ:

Պարագրաֆ 5.6-ում, բազմանդամների օրթոգոնալ համակարգերի դիտարկման ժամանակ, ասվել է (առանց ապացույցի), որ

$$\mathcal{L}_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\,, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{6.6.3}$$

Լեժանդրի բազմանդամները կազմում են օրթոգոնալ համակարգ $[-1, 1]$ հատվածում: Այստեղ մենք կապացուցենք հետևյալ պնդումը:

Լեմմա 6.6.2 : *$\mathcal{L}_{n+1}(x)$ բազմանդամը $[-1,1]$ հատվածում օրթոգոնալ է կամայական բազմանդամի H_n դասից:*

Ապացույց: Նշանակենք՝

$$\varphi(x) \equiv (x^2-1)^{n+1} \ :$$

Ինչպես հետևում է Լեժանդրի բազմանդամների սահմանող (6.6.3) բանաձևից, պետք է ցույց տալ, որ այդ ֆունկցիայի $(n+1)$-րդ ածանցյալը օրթոգոնալ է կամայական բազմանդամի H_n դասից:

Վերցնենք ցանկացած բազմանդամ $P_n(x) \in H_n$: Հաջորդաբար օգտագործելով մասերով ինտեգրումը՝ կստանանք

$$\int_{-1}^{1} \varphi^{(n+1)}(x)P_n(x)\,dx = \varphi^{(n)}(x)P_n(x)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \varphi^{(n)}(x)P_n'(x)\,dx$$

$$= -\int_{-1}^{1} \varphi^{(n)}(x)P_n'(x)\,dx = -\varphi^{(n-1)}(x)P_n'(x)\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \varphi^{(n-1)}(x)P_n''(x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \varphi^{(n-1)}(x)P_n''(x)\,dx = \cdots$$

$$= (-1)^n\varphi(x)P_n^{(n)}(x)\Big|_{-1}^{1} + (-1)^{n+1}\int_{-1}^{1} \varphi(x)P_n^{(n+1)}(x)\,dx = 0 \ : \qquad \square$$

Այժմ դիտարկենք $[a,b]$ կամայական հատվածը: Արտապատկերենք այդ հատվածը $[-1,1]$ հատվածի վրա.

$$x = \frac{b-a}{2}\,\xi + \frac{b+a}{2}\,, \qquad \xi \in [-1,1] \ : \tag{6.6.4}$$

Սահմանենք

$$\hat{\mathcal{L}}_{n+1}(x) \equiv \mathcal{L}_{n+1}\left(\frac{2}{b-a}\,x - \frac{b+a}{b-a}\right) \in H_{n+1} \tag{6.6.5}$$

բազմանդամը, որտեղ $\mathcal{L}_{n+1}(\xi)$-ը Լեժանդրի բազմանդամն է:

Լեմմա 6.6.3 : *$\hat{\mathcal{L}}_{n+1}(x)$ բազմանդամը $[a,b]$ հատվածում օրթոգոնալ է ցանկացած բազմանդամի H_n դասից:*

Ապացույց: Իրոք, կատարելով փոփոխականի փոխարինում ինտեգրալի նշանի տակ՝ ցանկացած $P_n(x) \in H_n$ բազմանդամի համար ունենք

$$\int_{a}^{b} \hat{\mathcal{L}}_{n+1}(x)P_n(x)\,dx = \int_{a}^{b} \mathcal{L}_{n+1}\left(\frac{2}{b-a}\,x - \frac{b+a}{b-a}\right)P_n(x)\,dx =$$

$$\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} \mathcal{L}_{n+1}(\xi)P_n\left(\frac{b-a}{2}\,\xi + \frac{b+a}{2}\right)d\xi = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} \mathcal{L}_{n+1}(\xi)\hat{P}_n(\xi)\,d\xi\,,$$

որտեղ $\hat{P}_n(\xi) \equiv P_n((b-a)\xi/2 + (b+a)/2)$: Վերջին ինտեգրալը, համաձայն 6.6.2 լեմմայի, հավասար է զրոյի: $\square$

Այսպիսով, $(n+1)$-րդ աստիճանի այն բազմանդամի գոյությունը, որն օրթոգոնալ է բոլոր բազմանդամներին H_n դասից, ապացուցված է:

Լեմմա 6.6.4 : *$\hat{\mathcal{L}}_{n+1}(x)$ բազմանդամի արմատներն իրական են, տարբեր են իրարից և պատկանում են (a,b) միջակայքին:*

Ապացույց: Այստեղ մենք, ըստ էության, կկրկնենք 5.6.3 լեմմայի ապացույցը: Քանի որ

$$\int_a^b \hat{\mathcal{L}}_{n+1}(x)\,dx = 0,$$

ապա $\hat{\mathcal{L}}_{n+1}(x)$ բազմանդամն (a,b) միջակայքում ունի կենտ պատիկության գոնե մեկ արմատ: Դիցուք $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ կետերը $\mathcal{L}_{n+1}(x)$ բազմանդամի (a,b) միջակայքին պատկանող իրարից տարբեր կենտ պատիկության արմատներն են: Պարզ է, որ $m \le n+1$: Դիտարկենք

$$R_m(x) \equiv (x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_m)$$

բազմանդամը: $\hat{\mathcal{L}}_{n+1}(x)R_m(x)$ բազմանդամի (a,b) միջակայքին պատկանող բոլոր արմատները ունեն զույգ պատիկություն: Ուստի՝

$$\int_a^b \hat{\mathcal{L}}_{n+1}(x)R_m(x)\,dx \neq 0 :$$

Հետևաբար, ըստ 6.6.3 լեմմայի կարող ենք եզրակացնել, որ $m > n$: Այսպիսով, $m = n+1$: $\square$

Լեմմա 6.6.5 : *$(n+1)$-րդ աստիճանի բազմանդամը, որն $[a,b]$ հատվածում օրթոգոնալ է կամայական բազմանդամի H_n դասից, միակն է հաստատուն բազմապատկչի ճշտությամբ:*

Ապացույց: Ենթադրենք, որ գոյություն ունեն երկու բազմանդամ՝

$$\omega_{n+1}(x) = x^{n+1} + a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

և

$$\tilde{\omega}_{n+1}(x) = x^{n+1} + \tilde{a}_n x^n + \cdots + \tilde{a}_1 x + \tilde{a}_0,$$

որոնք օրթոգոնալ են կամայական բազմանդամի H_n դասից: Այդ դեպքում $P_n(x) \equiv \omega_{n+1}(x) - \tilde{\omega}_{n+1}(x)$ տարբերությունը կլինի n աստիճանից ոչ բարձր բազմանդամ: Ըստ ենթադրության՝

$$\int_a^b \omega_{n+1}(x)P_n(x)\,dx = 0 \qquad \text{և} \qquad \int_a^b \tilde{\omega}_{n+1}(x)P_n(x)\,dx = 0 :$$

Ուստի՝

$$\int_a^b P_n^2(x)\,dx = \int_a^b (\omega_{n+1}(x) - \tilde{\omega}_{n+1}(x))P_n(x)\,dx = 0 \ :$$

Հետևաբար, $P_n(x) \equiv 0$ և դրանով իսկ $\omega_{n+1}(x) \equiv \tilde{\omega}_{n+1}(x)$: □

Այսպիսով, որպես (6.6.1) քառակուսացման բանաձևի հանգույցներ կվերցնենք

$$x_k = \frac{b-a}{2}\xi_k + \frac{b+a}{2}, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{6.6.6}$$

որտեղ $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n \in [-1, 1]$ կետերը Լեժանդրի $\mathcal{L}_{n+1}$ բազմանդամի արմատներն են: Այսինքն՝ $x_0, x_1, \ldots, x_n$ հանգույցներն ընտրվում են որպես Լեժանդրի բազմանդամի արմատների պատկերներ (6.6.4) գծային արտապատկերման դեպքում: Այնուհետև, քանի որ քառակուսացման բանաձևը ինտերպոլացիոն է, նրա գործակիցները հաշվվում են ըստ (6.5.4) օրենքի:

Կամայական $[a, b]$ և $[-1, 1]$ հատվածների համար Գաուսի բանաձևերի գործակիցների միջև գոյություն ունի բավականին պարզ առնչություն, այն է՝

$$A_k^{[a,b]} = \frac{b-a}{2} A_k^{[-1,1]}, \quad k = 0, 1, \ldots, n \tag{6.6.7}$$

(այդ փաստի ապացույցը թողնում ենք ընթերցողին որպես վարժություն): Արդյունքում Գաուսի քառակուսացման բանաձևը կարող ենք գրել նաև

$$I(f) \equiv \int_a^b f(x)\,dx \approx Q_n(f) \equiv \frac{b-a}{2}\sum_{k=0}^{n} A_k^{[-1,1]} f(x_k) \tag{6.6.8}$$

տեսքով, որտեղ հանգույցները որոշվում են համաձայն (6.6.6)-ի, իսկ գործակիցները՝ ըստ

$$A_k^{[-1,1]} = \int_{-1}^{1} \frac{\omega_{n+1}(\xi)}{(\xi - \xi_k)\,\omega'_{n+1}(\xi_k)}\,d\xi, \quad k = 0, 1, \ldots, n \tag{6.6.9}$$

բանաձևի (այստեղ $\omega_{n+1}(\xi) \equiv (\xi - \xi_0)(\xi - \xi_1)\ldots(\xi - \xi_n)$):

Դիտողություն 6.6.1 : *Քանի որ Գաուսի բանաձևն ինտերպոլացիոն է, ապա նրա գործակիցների որոշման համար կարելի է օգտվել նաև անորոշ գործակիցների մեթոդից, որի մասին խոսվել է 6.5 պարագրաֆում:*

Օրինակ 6.6.1 : $[-1, 1]$ հատվածում ստանալ Գաուսի քառակուսացման բանաձևը $n = 2$ դեպքի համար:

Երրորդ աստիճանի Լեժանդրի բազմանդամն է՝

$$\mathcal{L}_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \ :$$

Այս բազմանդամի արմատներն են՝

$$x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}} :$$

A_0, A_1, A_2 գործակիցների որոշման համար օգտվենք անորոշ գործակիցների մեթոդից: Համաձայն (6.5.9)-ի՝ ունենք

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = 2 \\ -\sqrt{\frac{3}{5}} A_0 + \sqrt{\frac{3}{5}} A_2 = 0 \\ \frac{3}{5} A_0 + \frac{3}{5} A_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

համակարգը: Լուծելով այն՝ կստանանք

$$A_0 = \frac{5}{9}, \quad A_1 = \frac{8}{9}, \quad A_2 = \frac{5}{9} :$$

Այսպիսով,

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) :$$

Այս բանաձևը ճշգրիտ է բազմանդամների H_5 բազմության վրա: ♣

Նշենք Գաուսի բանաձևի գործակիցների մեկ հատկություն ևս:

Լեմմա 6.6.6 : *Գաուսի քառակուսացման բանաձևի գործակիցները դրական են:*

Ապացույց: Դիցուք $x_0, x_1, \ldots, x_n$ կետերը Գաուսի բանաձևի հանգույցներն են: Բոլոր $k = 0, 1, \ldots, n$ արժեքների համար դիտարկենք

$$P_{2n}^{(k)}(x) \equiv (x - x_0)^2 \ldots (x - x_{k-1})^2 (x - x_{k+1})^2 \ldots (x - x_n)^2 \in H_{2n}$$

բազմանդամները: Ունենք՝

$$0 < \int_a^b P_{2n}^{(k)}(x)\,dx = \sum_{m=0}^{n} A_m P_{2n}^{(k)}(x_m) = A_k P_{2n}^{(k)}(x_k) :$$

Քանի որ $P_{2n}^{(k)}(x_k) > 0$, ուստի և $A_k > 0$: □

Վերջում բերենք (առանց արտածման) արտահայտություն Գաուսի բանաձևի

$$R_n(f) \equiv I(f) - Q_n(f)$$

սխալանքի համար (տե՛ս, օրինակ, [4],[12],[27]): Եթե $f(x) \in C^{2n+2}[a, b]$, ապա

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)\,[(n+1)!]^4}{[(2n+2)!]^3 (2n+3)} (b-a)^{2n+3}, \qquad \xi \in (a, b) : \tag{6.6.10}$$

6.7 Չեբիշևի քառակուսացման բանաձևը

Ականավոր ռուս մաթեմատիկոս Պ.Լ.Չեբիշևը հետազոտել է հետևյալ հարցը. կառուցել հավասար գործակիցներով քառակուսացման բանաձև

$$I(f) \equiv \int_a^b f(x)\,dx \approx Q_n(f) \equiv A\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,. \tag{6.7.1}$$

որը կլիներ ճշգրիտ հանրահաշվական բազմանդամների H_n դասում:

Վերը նշված (6.7.1) բանաձևում մասնակցում են $n+1$ հատ անհայտ պարամետրեր՝ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ հանգույցները և A գործակիցը: Այդ անհայտները որոշվում են այն պայմանից, որ (6.7.1) բանաձևը պետք է լինի ճշգրիտ

$$f(x) = x^m\,, \quad m = 0, 1, \ldots, n$$

ֆունկցիաների համար, այսինքն՝

$$A\sum_{k=1}^{n} x_k^m = \mu_m\,, \quad m = 0, 1, \ldots, n\,, \tag{6.7.2}$$

որտեղ

$$\mu_m \equiv \int_a^b x^m\,dx = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}\,: \tag{6.7.3}$$

Վերցնելով $m = 0$, (6.7.2) և (6.7.3)-ից կստանանք

$$An = b - a$$

հավասարությունը, որտեղից էլ գտնում ենք

$$A = \frac{b-a}{n}\,: \tag{6.7.4}$$

Այնուհետև, $m = 1, 2, \ldots, n$ արժեքների համար (6.7.2) և (6.7.4)-ից ունենք՝

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^m = \frac{\mu_m}{A} = \frac{n}{b-a}\,\mu_m\,:$$

Այսպիսով, հանգույցների որոշման համար ստանում ենք ոչ գծային հավասարումների համակարգ.

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k & = & \dfrac{n}{b-a}\,\mu_1 \\ \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 & = & \dfrac{n}{b-a}\,\mu_2 \\ \cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^n & = & \dfrac{n}{b-a}\,\mu_n\,: \end{cases} \tag{6.7.5}$$

Դիտողություն 6.7.1 : *Պ.Լ.Չեբիշևը ցույց է տվել, որ (6.7.5) համակարգի լուծումը հանգում է որոշակի n-րդ աստիճանի հանրահաշվական հավասարման արմատների որոշմանը (տես [4],[27],[34]):*

Ինչպես ապացուցել է Ս.Ն.Բեռնշտեյնը, $n = 8$ և $n \geq 10$ արժեքների համար (6.7.5) համակարգը չունի իրական լուծումներ: Այսինքն, n-ի նշված արժեքների դեպքում Չեբիշևի քառակուսացման բանաձև գոյություն չունի: Այդ փաստի ապացույցը կարելի է գտնել [21]-ում: Հենց սա է Չեբիշևի բանաձևի սկզբունքային թերությունը:

Օրինակ 6.7.1 : $[-1, 1]$ հատվածում արտածել Չեբիշևի բանաձևը $n = 3$ դեպքի համար:

Ըստ (6.7.4) բանաձևի՝ $A = 2/3$: Հանգույցների որոշման համար, համաձայն (6.7.5)-ի, ունենք հետևյալ հավասարումների համակարգը.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0 \end{cases} \tag{6.7.6}$$

Խնդիրը բերենք երրորդ կարգի հանրահաշվական բազմանդամի արմատների որոշմանը (տես դիտողություն 6.7.1): Դրա համար ներմուծենք հետևյալ մեծությունները.

$$\begin{aligned} C_2 &= x_1 + x_2 + x_3 , \\ C_1 &= x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 , \\ C_0 &= x_1x_2x_3 : \end{aligned}$$

Այդ դեպքում, ինչպես հայտնի է, x_1, x_2, x_3-ը

$$x^3 - C_2x^2 + C_1x - C_0 = 0 \tag{6.7.7}$$

հանրահաշվական հավասարման արմատներն են (տես, օրինակ, [23]): Օգտվելով (6.7.6) առնչություններից՝ կգտնենք

$$C_2 = 0 , \qquad C_1 = \frac{1}{2}\left[(x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\right] = -\frac{1}{2} ,$$

$$C_0 = \frac{1}{6}\left[(x_1 + x_2 + x_3)^3 - 3(x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)\right] = 0 :$$

Դրանով իսկ (6.7.7) հավասարումը կընդունի

$$x^3 - \frac{1}{2}x = 0$$

տեսքը: Լուծելով այն, կգտնենք

$$x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} , \; x_2 = 0 , \; x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} :$$

Այսպիսով, ստանում ենք

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{2}{3}\left(f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f(0) + f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

քառակուսացման բանաձևը, որը ճշգրիտ է բազմանդամների H_3 դասում: ♣

Բերենք $[-1,1]$ հատվածի համար Չեբիշևի քառակուսացման բանաձևի հանգույցների թվային արժեքները (տե՛ս [4],[27]).

n = 1	**n = 6**
$x_1 = 0$	$-x_1 = x_6 = 0.8662468181$
n = 2	$-x_2 = x_5 = 0.4225186538$
$-x_1 = x_2 = 0.5773502691$	$-x_3 = x_4 = 0.2666354015$
n = 3	**n = 7**
$-x_1 = x_3 = 0.7071067812$	$-x_1 = x_7 = 0.8838617008$
$x_2 = 0$	$-x_2 = x_6 = 0.5296567753$
n = 4	$-x_3 = x_5 = 0.3239118105$
$-x_1 = x_4 = 0.7946544723$	$x_4 = 0$
$-x_2 = x_3 = 0.1875924741$	**n = 9**
n = 5	$-x_1 = x_9 = 0.9115893077$
$-x_1 = x_5 = 0.8324974870$	$-x_2 = x_8 = 0.6010186554$
$-x_2 = x_4 = 0.3745414096$	$-x_3 = x_7 = 0.5287617831$
$x_3 = 0$	$-x_4 = x_6 = 0.1679061842$
	$x_5 = 0$

Կամայական $[a,b]$ հատվածի համար Չեբիշևի բանաձևի հանգույցները հեշտ է ստանալ, եթե օգտվենք արդեն բազմաթիվ անգամ օգտագործված այդ հատվածի արտապատկերումից $[-1,1]$ հատվածի վրա.

$$x = \frac{b-a}{2}\xi + \frac{b+a}{2}, \qquad \xi \in [-1,1]\ :$$

Ստորև բերված են արտահայտություններ Չեբիշևի քառակուսացման բանաձևերի

$$R_n(f) \equiv I(f) - Q_n(f)$$

սխալանքների համար.

$$R_1(f) = \frac{1}{3} f^{(2)}(\eta_1), \qquad R_2(f) = \frac{1}{135} f^{(4)}(\eta_2),$$

$$R_3(f) = \frac{1}{360} f^{(4)}(\eta_3), \qquad R_4(f) = \frac{2}{42\,525} f^{(6)}(\eta_4),$$

$$R_5(f) = \frac{13}{544\,320} f^{(6)}(\eta_5), \qquad R_6(f) = \frac{1}{3\,969\,000} f^{(8)}(\eta_6),$$

$$R_7(f) = \frac{281}{1\,959\,552\,000} f^{(8)}(\eta_7), \qquad R_9(f) = \frac{74\,747}{11\,200 \cdot 9 \cdot 11!} f^{(10)}(\eta_9),$$

որտեղ $\eta_i \in [a,b]$ $(i = 1,2,\ldots,7,9)$ (տե՛ս [4]):

6.8 Ադապտիվ ալգորիթմներ

Թվային ինտեգրման սխալանքների բանաձևերի արտահայտություններից երևում է, որ ստացվելիք արդյունքների ճշտությունը կախված է ինչպես ենթաինտեգրալային ֆունկցիայի փոփոխման բնույթից, այնպես էլ քառակուսացման բանաձևի քայլից: Պարզ է, որ բաղդատելի ճշտության հասնելու համար կտրուկ փոփոխվող ֆունկցիայի ինտեգրման ժամանակ քայլը պետք է ընտրել ավելի փոքր, քան դանդաղ փոփոխվող ֆունկցիայի ինտեգրման դեպքում: Գործնականում հաճախ լինում են դեպքեր, երբ ենթաինտեգրալային ֆունկցիան ինտեգրման միջակայքի առանձին մասերում փոփոխվում է տարբեր ձևով: Դրա հետ կապված, անհրաժեշտություն է ծագել կառուցել հատուկ տիպի ալգորիթմներ, որոնք ավտոմատ կերպով հարմարվում են ֆունկցիայի փոփոխման բնույթին: Թվային ինտեգրման այդպիսի ալգորիթմները կոչվում են *ադապտիվ*: Նրանք թույլ են տալիս օգտագործել քառակուսացման բանաձևեր, որոնք ինտեգրման միջակայքի առանձին մասերում ունեն տարբեր քայլեր: Դա հնարավորություն է տալիս նվազեցնել մեքենայական ժամանակը առանց հաշվարկների ճշտության կորստի: Ընդգծենք, որ այդպիսի մոտեցումը ենթադրում է, որ ենթաինտեգրալային ֆունկցիան տրվում է անալիտիկորեն և ոչ թե աղյուսակի տեսքով:

Ադապտիվ ալգորիթմներ իրականացնող ծրագրերը սովորաբար մտնում են համակարգչի մաթեմատիկական ապահովման մեջ՝ ստանդարտ ենթածրագրերի տեսքով: Օգտագործողը տալիս է ինտեգրման հատվածի սահմանները (a և b), պահանջվող ճշտությունը ($\varepsilon > 0$) և կազմում է ծրագրի բլոկ՝ ենթաինտեգրալային $f(x)$ ֆունկցիայի արժեքները հաշվելու համար: Ծրագիրը հաշվում է

$$I(f) \equiv \int_a^b f(x)\,dx$$

ինտեգրալի $Q(f)$ մոտավոր արժեքը տրված ε ճշտությամբ, այսինքն՝

$$|Q(f) - I(f)| < \varepsilon \ :$$

Դիտողություն 6.8.1 : *Գործնականում ոչ բոլոր ֆունկցիաների համար է հնարավոր հաշվել ինտեգրալը տրված ճշտությամբ: Ուստի ծրագրում սովորաբար նախատեսված է լինում հաղորդագրություն օգտագործողին՝ պահանջվող ճշտության անհասանելիության վերաբերյալ: Այդ դեպքում ինտեգրալը հաշվվում է հնարավոր նվազագույն սխալանքով:*

Դիտարկենք համառոտակի ադապտիվ ալգորիթմի աշխատանքի սկզբունքը: Նախ $[a, b]$ հատվածը տրոհվում է m մասերի

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b \tag{6.8.1}$$

բաժանման կետերի միջոցով: Դիցուք $h_i \equiv x_i - x_{i-1}$: Յուրաքանչյուր $[x_{i-1}, x_i]$ հատվածում

$$I_i(f) \equiv \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$$

ինտեգրալը հաշվվում է δ_i *լոկալ* սխալանքով, որտեղ

$$|\delta_i| < \frac{h_i}{b-a}\varepsilon \ : \tag{6.8.2}$$

Այդ դեպքում, եթե $Q_i(f)$-ը $I_i(f)$ ինտեգրալի մոտավոր արժեքն է՝ հաշվված δ_i ճշտությամբ, ապա

$$I(f) = \sum_{i=1}^{m} I_i(f) = \sum_{i=1}^{m}[Q_i(f) + \delta_i] = \sum_{i=1}^{m} Q_i(f) + \sum_{i=1}^{m} \delta_i \ : \tag{6.8.3}$$

Եթե վերցնենք

$$Q(f) \equiv \sum_{i=1}^{m} Q_i(f)$$

մեծությունը որպես $I(f)$ ինտեգրալի մոտավոր արժեք, ապա կստանանք պահանջվող ճշտությունը: Իրոք, (6.8.2) և (6.8.3)-ից ունենք

$$|I(f) - Q(f)| \le \sum_{i=1}^{m} |\delta_i| < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{m} h_i = \varepsilon \ :$$

Դիտողություն 6.8.2 : *Ադապտիվ ալգորիթմները, որպես կանոն, կատարում են* $[a, b]$ *հատվածի (6.8.1) տրոհումը ավտոմատ կերպով:*

Յուրաքանչյուր $[x_{i-1}, x_i]$ տարրական հատվածում, $I_i(f)$ ինտեգրալի հաշվման համար կիրառվում է որոշակի քառակուսացման բանաձև: Դիցուք դա լինի, օրինակ, Սիմպսոնի բանաձևը: Նախ հաշվվում է $Q_i^{(1)}(f)$ մոտավոր արժեքը $h_i/2$ քայլով.

$$Q_i^{(1)}(f) = \frac{h_i}{6}\left[f(x_{i-1}) + 4f\left(x_{i-1} + \frac{h_i}{2}\right) + f(x_i)\right] \ :$$

Այնուհետև կատարվում են հաշվարկներ $h_i/4$ քայլով, այսինքն՝

$$Q_i^{(2)}(f) = \frac{h_i}{12}\left[f(x_{i-1}) + 4f\left(x_{i-1} + \frac{h_i}{4}\right) + 2f\left(x_{i-1} + \frac{h_i}{2}\right) + 4f\left(x_{i-1} + \frac{3h_i}{4}\right) + f(x_i)\right]$$

և այլն: Այս ընթացքը շարունակվում է այնքան, քանի դեռ չի ապահովվել δ_i ճշտությունը: Այդ նպատակի համար կարելի է կիրառել, օրինակ, սխալանքի գործնական գնահատման Ռունգեի կանոնը (տես (6.4.9) բանաձևը), այն է՝ որպես ընթացքի ավարտման չափանիշ օգտագործել

$$\frac{|Q_i^{(k)}(f) - Q_i^{(k-1)}(f)|}{2^p - 1} < |\delta_i|$$

պայմանը (Սիմպսոնի բանաձևի համար $p = 4$): Հենց որ նշված պայմանը բավարարվում է, ընթացքը դադարեցվում է և վերցվում է $Q_i(f) \equiv Q_i^{(k)}(f)$:

Հատուկ ուշադրություն դարձնենք այն բանի վրա, որ քառակուսացման բանաձևի քայլի հաջորդական փոքրացումը երկու անգամ հնարավորություն է տալիս օգտագործել $f(x)$ ֆունկցիայի արդեն հաշվված արժեքները $[x_{i-1}, x_i]$ հատվածի նախորդ տրոհման հանգույցներում: Դա էապես տնտեսում է մեքենայական ժամանակը:

Վերջում մեկ անգամ ևս նշենք, որ այստեղ մենք նկարագրեցինք ադապտիվ ալգորիթմների կառուցման միայն հիմնական սկզբունքները չմտնելով մանրամասնությունների մեջ: Այդ հարցերի ավելի մանրամասն և ամբողջական շարադրանքը կարելի է գտնել հատուկ գրականության մեջ (տե՛ս նաև [2],[28],[46],[53] գրքերը):

6.9 Անիսկական ինտեգրալների հաշվումը

Գործնականում հաճախ են հանդիպում խնդիրներ՝ կապված *անիսկական ինտեգրալների* հաշվման հետ: Դրանք անվերջ սահմաններով կամ անսահմանափակ ֆունկցիաներից ինտեգրալներ են:

6.9.1 Անիսկական ինտեգրալների մոտավոր հաշվման ընդհանուր սկզբունքը

Դիտարկենք

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \tag{6.9.1}$$

ինտեգրալի հաշվումը, որտեղ $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է, երբ $a \le x < +\infty$: Այս ինտեգրալը կոչվում է *զուգամետ*, եթե գոյություն ունի հետևյալ վերջավոր սահմանը.

$$\lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)\,dx \ : \tag{6.9.2}$$

Այդ դեպքում, ըստ սահմանման՝

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)\,dx \ : \tag{6.9.3}$$

Եթե (6.9.2) սահմանը անվերջ է կամ գոյություն չունի, ապա (6.9.1) ինտեգրալը կոչվում է *տարամետ* (տե՛ս, օրինակ, [45]):

Որպեսզի հաշվենք (6.9.1) զուգամետ անիսկական ինտեգրալը ε ճշտությամբ, ներկայացնենք այն հետևյալ գումարի տեսքով.

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^A f(x)\,dx + \int_A^{+\infty} f(x)\,dx \ : \tag{6.9.4}$$

Քանի որ ինտեգրալը զուգամետ է, ապա A թիվը կարելի է ընտրել այնքան մեծ, որ

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} \ : \tag{6.9.5}$$

Այնուհետև,

$$\int_a^A f(x)\,dx \tag{6.9.6}$$

ինտեգրալը հաշվվում է որևէ քառակուսացման բանաձևով: Դիցուք $Q(f)$-ը (6.9.6) ինտեգրալի մոտավոր արժեքն է $\varepsilon/2$ ճշտությամբ, այսինքն՝

$$\left|\int_a^A f(x)\,dx - Q(f)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \ : \tag{6.9.7}$$

Այդ դեպքում (6.9.4),(6.9.5) և (6.9.7)-ից կստանանք՝

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)\,dx - Q(f)\right| \le \left|\int_a^A f(x)\,dx - Q(f)\right| + \left|\int_A^{+\infty} f(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ :$$

Այսպիսով, $Q(f)$-ը (6.9.1) ինտեգրալի մոտավոր արժեքն է ε ճշտությամբ:

Օրինակ 6.9.1 : Դիցուք պահանջվում է հաշվել $\varepsilon > 0$ ճշտությամբ

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1 + x + \sin^2 x}\,dx \tag{6.9.8}$$

ինտեգրալը:

Գրենք այդ ինտեգրալը հետևյալ գումարի տեսքով.

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1 + x + \sin^2 x}\,dx = \int_0^A \frac{e^{-x}}{1 + x + \sin^2 x}\,dx + \int_A^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1 + x + \sin^2 x}\,dx \ :$$

Օգտվենք

$$\left|\int_A^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1 + x + \sin^2 x}\,dx\right| \le \int_A^{+\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_A^{+\infty} = \frac{1}{e^A}$$

գնահատականից: Այստեղից հետևում է, որ պահանջվող ճշտությամբ (6.9.8) ինտեգրալի հաշվման համար բավական է վերցնել

$$A > \ln \frac{2}{\varepsilon} : \qquad \clubsuit$$

Այժմ դիտարկենք

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{6.9.9}$$

ինտեգրալը, որտեղ $f(x)$ ֆունկցիան $[a,b]$ հատվածի ինչ-որ c ներքին կետում ունի երկրորդ սեռի խզում: Ըստ սահմանման՝

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\delta_1 \to +0 \\ \delta_2 \to +0}} \left\{ \int_a^{c-\delta_1} f(x)\,dx + \int_{c+\delta_2}^b f(x)\,dx \right\}, \tag{6.9.10}$$

և եթե գոյություն ունի վերջավոր սահման, ինտեգրալը կոչվում է *զուգամետ*, իսկ հակառակ դեպքում՝ *տարամետ* (տե՛ս, օրինակ, [45]):

Տրված $\varepsilon > 0$ ճշտությամբ զուգամետ (6.9.9) անիսկական ինտեգրալի հաշվման համար ընտրում են δ_1 և δ_2 դրական թվերը այնքան փոքր, որ տեղի ունենա

$$\left| \int_{c-\delta_1}^{c+\delta_2} f(x)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{6.9.11}$$

անհավասարությունը: Այնուհետև, մոտավոր ինտեգրման բանաձևերով հաշվում են

$$\int_a^{c-\delta_1} f(x)\,dx \qquad \text{և} \qquad \int_{c+\delta_2}^b f(x)\,dx \tag{6.9.12}$$

ինտեգրալները: Դիցուք $Q^{(1)}(f)$ և $Q^{(2)}(f)$-ը համապատասխանաբար (6.9.12) ինտեգրալների մոտավոր արժեքներն են $\varepsilon/4$ ճշտությամբ, այսինքն՝

$$\left| \int_a^{c-\delta_1} f(x)\,dx - Q^{(1)}(f) \right| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad \text{և} \qquad \left| \int_{c+\delta_2}^b f(x)\,dx - Q^{(2)}(f) \right| < \frac{\varepsilon}{4} : \tag{6.9.13}$$

Վերցնենք $Q(f) = Q^{(1)}(f) + Q^{(2)}(f)$: Ունենալով (6.9.11) և (6.9.13)-ը՝ կստանանք

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - Q(f) \right| \le \left| \int_a^{c-\delta_1} f(x)\,dx - Q^{(1)}(f) \right| + \left| \int_{c-\delta_1}^{c+\delta_2} f(x)\,dx \right| +$$

$$\left| \int_{c+\delta_2}^b f(x)\,dx - Q^{(2)}(f) \right| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon :$$

Այսպիսով, $Q(f)$-ն էլ հենց կլինի (6.9.9) ինտեգրալի մոտավոր արժեքը տրված ճշտությամբ:

Նույն կերպ որոշվում է (6.9.9) անիսկական ինտեգրալի զուգամիտությունն այն դեպքում, երբ $f(x)$ ենթաինտեգրալային ֆունկցիայի c խզման կետը համընկնում է $[a,b]$ հատվածի որևէ ծայրակետի հետ: Այդ դեպքում հաշվման եղանակը ակնհայտորեն ձևափոխվում է:

Օրինակ 6.9.2 : Դիցուք պահանջվում է $\varepsilon > 0$ ճշտությամբ հաշվել

$$\int_0^1 \frac{g(x)}{\sqrt{x}}\,dx \tag{6.9.14}$$

ինտեգրալը, որտեղ $g(x)$-ը անընդհատ ֆունկցիա է $[0,1]$ հատվածում:

Ներկայացնենք (6.9.14) ինտեգրալը հետևյալ գումարի տեսքով.

$$\int_0^1 \frac{g(x)}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^\delta \frac{g(x)}{\sqrt{x}}\,dx + \int_\delta^1 \frac{g(x)}{\sqrt{x}}\,dx\,, \qquad 0<\delta<1\ : \tag{6.9.15}$$

Դիցուք $M \equiv \max\limits_{0\le x\le 1}|g(x)|$: Ունենք

$$\left|\int_0^\delta \frac{g(x)}{\sqrt{x}}\,dx\right| \le M\int_0^\delta \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2M\sqrt{\delta}$$

գնահատականը: Ընտրենք δ մեծությունը այնպես, որ

$$2M\sqrt{\delta} < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

այսինքն՝

$$\delta < \frac{\varepsilon^2}{16M^2}\ :$$

Այնուհետև (6.9.15) հավասարության աջ մասում գտնվող երկրորդ ինտեգրալը հաշվվում է $\varepsilon/2$ ճշտությամբ որևէ քառակուսացման բանաձևով: ♣

Մեկ անգամ ևս ընդգծենք, որ վերը մենք շարադրել ենք անիսկական ինտեգրալների հաշվման միայն ընդհանուր սկզբունքը՝ հիմնված զուգամետ անիսկական ինտեգրալների հենց սահմանման վրա: Դրա հետ մեկտեղ գոյություն ունեն հատուկ եղանակներ, որոնք որոշ դեպքերում բավականին արդյունավետ են:

6.9.2 Անիսկական ինտեգրալների հաշվման հատուկ եղանակները

Անվերջ սահմաններով ինտեգրալների հաշվման եղանակներից մեկը հարմար փոփոխականի փոխարինումն է, որի դեպքում ինտեգրման սահմանները դառնում են վերջավոր:

Օրինակ 6.9.3 : Դիտարկենք

$$I \equiv \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

անիսկական ինտեգրալը: Կատարելով $t = 1/(1+x)$ տեղադրումը, այն կարելի է բերել հետևյալ ինտեգրալին

$$I = \int_0^1 t^{-2} e^{-\left(\frac{1}{t}-1\right)^2} dt \ : \qquad \clubsuit$$

Նշենք, որ փոփոխականի փոխարինման ժամանակ պետք է զգույշ լինել, որպեսզի ենթաինտեգրալային ֆունկցիայի մեջ չմտցվի անցանկալի եզակիություն:

Օրինակ 6.9.4 : Կատարենք

$$I \equiv \int_0^{+\infty} (1 + x^2)^{-4/3} dx$$

ինտեգրալում $t = 1/(1 + x)$ փոփոխականի փոխարինում: Արդյունքում կստանանք

$$I = \int_0^1 (t^2 + (1 - t)^2)^{-4/3} t^{2/3} dt \ :$$

Սակայն այս ինտեգրալում, ինչպես դժվար չէ ստուգել, ենթաինտեգրալային ֆունկցիայի ածանցյալը սահմանափակ չէ $t = 0$ կետում: Դա կարող է բերել մեծ սխալանքների նույնիսկ պարզագույն քառակուսացման բանաձևերի կիրառման ժամանակ: Նշված թերությունից կարելի է ազատվել $t = z^3$ տեղադրմամբ: Իրոք,

$$I = \int_0^1 3z^4 (z^6 + (1 - z^3)^2)^{-4/3} dz \ :$$

Այստեղ արդեն ենթաինտեգրալային ֆունկցիայի ածանցյալը անընդհատ է: $\clubsuit$

Փոփոխականի հարմար փոխարինումը հաճախ օգտակար է լինում նաև անսահմանափակ ֆունկցիաներից ինտեգրալների հաշվման ժամանակ:

Օրինակ 6.9.5 : Հեշտությամբ կարելի է ցույց տալ, որ

$$I \equiv \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}}\,dx$$

անիսկական ինտեգրալը $x = t^2$ տեղադրմամբ բերվում է հետևյալ ինտեգրալին.

$$I = \int_0^1 2\,e^{t^2}dt \ : \qquad \clubsuit$$

Որոշ դեպքերում անիսկական ինտեգրալը մասերով ինտեգրման միջոցով բերվում է որոշյալ ինտեգրալի:

Օրինակ 6.9.6 : Դիտարկենք նախորդ օրինակի ինտեգրալը.

$$I \equiv \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}}\,dx \ :$$

Կատարելով մասերով ինտեգրում՝ կստանանք

$$I = 2\int_0^1 (\sqrt{x})'e^x dx = 2e - 2\int_0^1 \sqrt{x}e^x dx \ :$$

Աջ մասում մնացած ինտեգրալը արդեն որոշյալ ինտեգրալ է, և նրա նկատմամբ կարելի է կիրառել որևէ քառակուսացման բանաձև: Սակայն ենթաինտեգրալային ֆունկցիայի ածանցյալը սահմանափակ չէ $x = 0$ կետում (այդ կապակցությամբ տես 6.9.4 օրինակի դատողությունները): Շարունակենք մասերով ինտեգրումը.

$$I = 2e - \frac{4}{3}\int_0^1 (x^{3/2})'e^x dx = \frac{2}{3}e + \frac{4}{3}\int_0^1 x^{3/2}e^x dx \ :$$

Այժմ արդեն վերջին ինտեգրալում ենթաինտեգրալային ֆունկցիայի ածանցյալը անընդհատ է $[0,1]$ հատվածում: Սակայն երկրորդ կարգի ածանցյալը դեռ սահմանափակ չէ $x = 0$ կետում: Ուստի, եթե ուզում ենք կիրառել ավելի բարձր կարգի ճշտություն ունեցող քառակուսացման բանաձևեր, քան ձախ կամ աջ ուղղանկյունների բանաձևերը, ապա մասերով ինտեգրման ընթացքը կարելի է շարունակել: $\clubsuit$

Անսահմանափակ ֆունկցիաներից ինտեգրալների մոտավոր հաշվման համար հաճախ օգտակար է լինում *եզակիության գումարային առանձնացման մեթոդը*: Այդ մեթոդի էությունը, որն առաջարկել է Լ.Վ.Կանտորովիչը, հետևյալն է: Ենթաինտեգրալային ֆունկցիան ներկայացվում է

$$f(x) = S(x) + g(x) \tag{6.9.16}$$

տեսքով, որտեղ $S(x)$ ֆունկցիան ունի նույն եզակիությունը, ինչ $f(x)$ ֆունկցիան, սակայն այդ ֆունկցիայի ինտեգրալը կարելի է հաշվել ճշգրիտ, իսկ $g(x)$-ը $[a,b]$ հատվածում բավականաչափ ողորկ ֆունկցիա է:

Օրինակ 6.9.7 : Դիցուք պահանջվում է հաշվել

$$I \equiv \int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx$$

ինտեգրալը: Դժվար չէ տեսնել, որ $x = 0$ կետը ենթաինտեգրալային ֆունկցիայի խզման կետն է: Ունենք՝

$$\ln \sin x = \ln x + \ln \frac{\sin x}{x} :$$

Այստեղ $\ln x$ ֆունկցիան նույնպես խզվող է $x = 0$ կետում, սակայն այն ճշգրիտ ինտեգրվում է՝

$$\int_0^{\pi/2} \ln x \, dx = x(\ln x - 1)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\left(\ln \frac{\pi}{2} - 1\right) :$$

Իսկ անընդհատ $\ln \dfrac{\sin x}{x}$ ֆունկցիայի ինտեգրալը արդեն կարելի է հաշվել որևէ քառակուսացման բանաձևով: ♣

Վերջում դիտարկենք եզակիության գումարային առանձնացման մեթոդի կիրառությունը

$$I \equiv \int_a^b \frac{\varphi(x)}{(x-c)^\alpha} \, dx$$

տիպի ինտեգրալի հաշվման համար, որտեղ $c \in [a, b]$, $0 < \alpha < 1$ և $\varphi(x) \in C^{m+1}[a, b]$:

Ըստ Թեյլորի բանաձևի՝ ունենք

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\varphi^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k + \psi(x),$$

որտեղ

$$\psi(x) = \frac{\varphi^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} (x-c)^{m+1}, \quad \xi \in (a, b) : \tag{6.9.17}$$

Այստեղից՝

$$\begin{aligned} I &= \sum_{k=0}^{m} \frac{\varphi^{(k)}(c)}{k!} \int_a^b (x-c)^{k-\alpha} dx + \int_a^b \frac{\psi(x)}{(x-c)^\alpha} \, dx \\ &= \sum_{k=0}^{m} \frac{\varphi^{(k)}(c)}{k!(k+1-\alpha)} \left[(b-c)^{k+1-\alpha} - (a-c)^{k+1-\alpha}\right] + \int_a^b \frac{\psi(x)}{(x-c)^\alpha} \, dx : \end{aligned} \tag{6.9.18}$$

Այնուհետև, (6.9.17)-ից հետևում է, որ

$$\frac{\psi(x)}{(x-c)^\alpha} \in C^m[a, b]$$

(դրանում համոզվե՛լ ինքնուրույն): Ուստի (6.9.18) հավասարության աջ մասում գտնվող ինտեգրալը կարելի է հաշվել համապատասխան քառակուսացման բանաձևի օգնությամբ:

1. Տրված են հետևյալ ինտեգրալները.

$$1)\ \int_0^1 \sin x^2\,dx\,, \qquad 2)\ \int_0^1 \exp(x^2)\,dx\ :$$

Գնահատել հանգույցների թիվը, որը բավարար է միջին ուղղանկյունների և սեղանների ընդհանրացված բանաձևերում այդ ինտեգրալները 10^{-4} ճշտությամբ հաշվելու համար:

2. Արտածել աջ ուղղանկյունների բանաձևի (6.2.9) սխալանքը:

3. Գտնել

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

ինտեգրալի հաշվման սխալանքն ըստ

$$\mathbf{Q}(f) = [f(0) + 2f(0.1) + 2f(0.2) + \cdots + 2f(0.9) + f(1.0)]/20$$

քառակուսացման բանաձևի:

4. Դիցուք

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

ինտեգրալի հաշվման համար օգտագործվում է սեղանների ընդհանրացված բանաձևը: Գնահատել հանգույցների քանակը, որն ապահովում է $0.5 \cdot 10^{-4}$ ճշտությունը $\max\limits_{0\le x\le 1} |f''(x)| \le 1$ պայմանին բավարարող $f(x)$ ֆունկցիաների դասում:

5. Դիցուք

$$\int_0^2 f(x)\,dx$$

ինտեգրալի հաշվման համար օգտագործվում է Սիմպսոնի ընդհանրացված բանաձևը: Գնահատել հանգույցների քանակը, որն ապահովում է $0.5 \cdot 10^{-4}$ ճշտությունը $\max\limits_{0\le x\le 2} |f^{(4)}(x)| \le 1$ պայմանին բավարարող $f(x)$ ֆունկցիաների դասում:

6. Սիմպսոնի ընդհանրացված բանաձևում քանի՞ հանգույց պետք է վերցնել

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

ինտեգրալը 10^{-4} ճշտությամբ հաշվելու համար:

7. Գտնել

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

ինտեգրալի հաշվման սխալանքն ըստ

$$Q(f) = [f(0) + 4f(0.1) + 2f(0.2) + 4f(0.3) + \cdots + 4f(0.9) + f(1.0)]/30$$

քառակուսացման բանաձևի:

8. Որոշել՝ ինչ ճշտությամբ կարելի է հաշվել

$$\int_0^1 \sin(e^x)\, dx$$

ինտեգրալը միջին ուղղանկյունների, սեղանների և Սիմպսոնի ընդհանրացված բանաձևերի օգնությամբ, վերցնելով ինը հանգույց:

9. Ստանալ (6.4.17) արտահայտությունը ձախ ուղղանկյունների բանաձևի սխալանքի համար:

10. Ստանալ (6.4.18) արտահայտությունը աջ ուղղանկյունների բանաձևի սխալանքի համար:

11. Ստանալ (6.4.19) արտահայտությունը միջին ուղղանկյունների բանաձևի սխալանքի համար:

12. Ստանալ (6.4.20) արտահայտությունը Սիմպսոնի բանաձևի սխալանքի համար:

13. Ապացուցել, որ

$$\int_0^1 f(x)\, dx \approx \frac{1}{90}\left[7f(0) + 32f\left(\frac{1}{4}\right) + 12f\left(\frac{1}{2}\right) + 32f\left(\frac{3}{4}\right) + 7f(1)\right]$$

քառակուսացման բանաձևը ճշգրիտ է չորրորդ կարգի հանրահաշվական բազմանդամների համար:

14. Արտածել ինտերպոլացիոն քառակուսացման բանաձև

$$\int_0^1 f(x)\, dx$$

ինտեգրալը հաշվելու համար, վերցնելով որպես հանգույցներ -2, -1 և 0 կետերը: Հաշվել այդ բանաձևի օգնությամբ $f(x) = \sin \pi x$ ֆունկցիայի ինտեգրալը:

15. Կիրառելով անորոշ գործակիցների մեթոդը՝ արտածել սեղանների և Սիմպսոնի բանաձևերը:

16. Ելնելով

$$\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx$$

հավասարությունից, գտնել π թվի մոտավորությունները:

17. Կառուցել երկրորդ աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամների համար ճշգրիտ

$$\int_1^3 f(x)\,dx \approx Af(0) + Bf(2) + Cf(4)$$

քառակուսացման բանաձևը:

18. Կառուցել

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx A_0 f(0) + A_1 f\left(\frac{2}{3}\right),$$

քառակուսացման բանաձևը, որը ճշգրիտ է հնարավորին բարձր աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամների համար:

19. Կառուցել

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx A_0 f\left(\frac{1}{2}\right) + A_1 f\left(\frac{2}{3}\right)$$

քառակուսացման բանաձևը, որը ճշգրիտ է հնարավորին բարձր աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամների համար:

20. Կառուցել

$$\int_0^2 f(x)\,dx \approx A_0 f(0) + A_1 f\left(\frac{1}{2}\right) + A_2 f(2)$$

քառակուսացման բանաձևը, որը ճշգրիտ է հնարավորին բարձր աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամների համար:

21. Գտնել $f(x) = ae^x + b\cos(\pi x/2)$ տեսքի ֆունկցիաների դասում ճշգրիտ

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(1)$$

քառակուսացման բանաձևի գործակիցները:

22. Գտնել $f(x) = a + b\cos x$ տեսքի ֆունկցիաների դասում ճշգրիտ

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx \approx A_1 f(0) + A_2 f(\pi)$$

քառակուսացման բանաձևի գործակիցները: Ապացուցել, որ այս բանաձևը ճշգրիտ կլինի նաև

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} [a_k \cos(2k+1)x + b_k \sin kx]$$

տեսքի ֆունկցիաների դասում:

23. Դիցուք T-ն եռանկյուն է $x = (x_1, x_2)$ հարթության վրա և A, B, C կետերը նրա կողմերի միջնակետերն են: Ցույց տալ, որ

$$\int_T f(x)\,dx \approx \frac{mes(T)}{3}\{f(A) + f(B) + f(C)\}$$

քառակուսացման բանաձևը ճշգրիտ է

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

տեսքի երկրորդ աստիճանի բազմանդամների համար:

24. Դիցուք R-ը ուղղանկյուն է $x = (x_1, x_2)$ հարթության վրա և A, B, C, D կետերը նրա կողմերի միջնակետերն են, իսկ E-ն նրա կենտրոնն է: Ցույց տալ, որ

$$\int_R f(x)\,dx \approx \frac{mes(T)}{6}\{f(A) + f(B) + f(C) + f(D) + 2f(E)\}$$

քառակուսացման բանաձևը ճշգրիտ է երկու փոփոխականի երրորդ աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամների համար:

25. $[-1, 1]$ հատվածում դուրս բերել Գաուսի քառակուսացման բանաձևը $n = 3$ համար:

26. Հաշվել Գաուսի բանաձևի $R_n(f)$ սխալանքը $f(x) = x^{2n+2}$ ֆունկցիայի համար: Ցույց տալ, որ

$$\lim_{n\to+\infty}\left[2^{2n+2}R_n(f)\right] = \pi :$$

27. Ապացուցել, որ ցանկացած անընդհատ ֆունկցիայի համար Գաուսի բանաձևի սխալանքը $R_n(f) \to 0$, երբ $n \to \infty$:

28. $[-1, 1]$ հատվածում կառուցել Չեբիշևի քառակուսացման բանաձևը $n = 2$ և $n = 3$ համար:

29. $[0,2]$, $[0,1]$ և $[-1,0]$ հատվածներում կառուցել երեք հանգույցներով Չեբիշևի քառակուսացման բանաձևերը:

30. α-ի ինչպիսի՞ արժեքների համար

$$\int_0^2 f(x)\,dx \approx f(\alpha) + f(2-\alpha)$$

քառակուսացման բանաձևը ճշգրիտ է երրորդ աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամների դասում:

31. Դիցուք պահանջվում է հաշվել

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$$

ինտեգրալը: Կիրառելով $x = 1/z$ փոփոխականի փոխարինումը և հաջորդող մասերով ինտեգրումը՝ հանգեցնել որոշյալ ինտեգրալի հաշվմանը:

32. Առաջարկել հետևյալ ինտեգրալների հաշվման եղանակները.

$$1)\ \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^3}\,dx, \quad 2)\ \int_1^{+\infty} \frac{xe^{-x^2}}{2+\sin x}\,dx, \quad 3)\ \int_5^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^5}}, \quad 4)\ \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{2+x}\,dx\ :$$

33. Կիրառելով եզակիության գումարային առանձնացման մեթոդը՝ առաջարկել հետևյալ ինտեգրալների հաշվման եղանակները.

$$1)\ \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}}\,dx, \quad 2)\ \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}\ :$$

34. Կիրառելով եզակիության գումարային առանձնացման մեթոդը՝ հաշվել 10^{-4} ճշտությամբ հետևյալ ինտեգրալները.

$$1)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1-x)^{3/4}}, \quad 2)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)},$$

$$3)\ \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}\,(e^{x/2}+3)}, \quad 4)\ \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\ :$$

Գլուխ 7

ՍՈՎՈՐԱԿԱՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐ

7.1 Կոշու խնդիրը

Մեխանիկայի, ֆիզիկայի, քիմիայի, գիտության և տեխնիկայի այլ բնագավառների շատ խնդիրներ մաթեմատիկական մոդելավորման ժամանակ հանգում են սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների: Ուստի այդ հավասարումների լուծումը կարևոր տեղ է զբաղեցնում կիրառական մաթեմատիկայում: Բերենք սովորական դիֆերենցիալ հավասարումներով նկարագրվող խնդիրների մի քանի օրինակ:

Օրինակ 7.1.1 (ճոճանակի ազատ տատանումներ) : Դիցուք l երկարության ձողի վրա ամրացված m զանգվածի նյութական մարմինը ծանրության ուժի ազդեցության տակ կատարում է ազատ տատանումներ դիմադրող միջավայրում (նկ. 7.1.1): Ենթադրվում է, որ ձողի կշիռը m-ի համեմատությամբ աննշան փոքր է: Այդպիսի ֆիզիկական համակարգը կոչվում է *ճոճանակ*:

Նկ. 7.1.1 Ճոճանակի ազատ տատանումներ

Ճոճանակի շեղման $\theta(t)$ անկյունը ուղղաձիգ առանցքից ժամանակի t պահին որոշվում է

$$\theta''(t) + a\,\theta'(t) + b\sin\theta(t) = 0$$

դիֆերենցիալ հավասարումից, որտեղ a-ն և b-ն դրական հաստատուններ են, որոնք կախված են l-ից, m-ից, ազատ անկման g արագացումից և միջավայրի R դիմադրությունից: Ընդ որում, ժամանակի $t = t_0$ սկզբնական պահին տրվում են սկզբնական շեղումը և սկզբնական անկյունային արագությունը.

$$\theta(t_0) = \theta_0, \quad \theta'(t_0) = \omega_0 : \qquad \clubsuit$$

Օրինակ 7.1.2 (Հետագծի խնդիրը) : Դիտարկվում է արկի շարժումը, որն արձակվում է երկրագնդի մակերևույթին որոշ անկյան տակ: Մաթեմատիկական մոդելի պարզեցման համար ենթադրվում է, որ արկը տեղափոխվում է այնպիսի հեռավորություն, որի դեպքում, առանց ճշտության կորստի, երկրագնդի մակերևույթը կարելի է համարել տափակ: Ենթադրվում է նաև, որ արկի հետագիծը գտնվում է մի հարթության մեջ. այսինքն՝ ենթադրվում է կողմնական քամու և այլ արգելքների բացակայությունը: Հաշվի առնելով կատարված ենթադրությունները՝ ընտրվում է երկչափանի կոորդինատական համակարգ, որի սկզբնակետը համընկնում է արձակման կետի հետ: Արկի հետագիծը պատկերված է նկ. 7.1.2-ում:

Նկ. 7.1.2 Արկի հետագիծը

Դիցուք $x(t)$-ն և $y(t)$-ն՝ արկի կոորդինատներն են ժամանակի t պահին: Համարելով, որ արկը արձակված է $t = 0$ պահին, ունենք

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0 \tag{7.1.1}$$

սկզբնական պայմանները: Ժամանակի t պահին արկի արագության վեկտորն է՝ $\mathbf{v}(t) = (x'(t), y'(t))$: Նշանակենք արագության վեկտորի մեծությունը $v(t)$-ով, իսկ

նրա անկյունը հորիզոնի հետ՝ $\theta(t)$-ով, ինչպես ցույց է տրված նկ. 7.1.2-ում: Այդ մեծությունները որոշվում են

$$v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,, \quad \theta(t) = \operatorname{arctg}\frac{y'(t)}{x'(t)} \tag{7.1.2}$$

արտահայտություններից: Արկի շարժման հավասարումները գրվում են

$$x''(t) = -\frac{c\rho s}{2m}\, v^2(t)\cos\theta(t)\,, \quad y''(t) = -\frac{c\rho s}{2m}\, v^2(t)\sin\theta(t) - g \tag{7.1.3}$$

տեսքով, որտեղ m-ը արկի զանգվածն է, s-ը արկի լայնական հատույթն է, c-ն դիմադրության գործակիցն է, ρ-ն օդի խտությունն է, իսկ g-ն՝ ազատ անկման արագացումը: Այսպիսով, ունենք երկու ոչ գծային ((7.1.2) առնչությունների պատճառավ) դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգ: (7.1.3) համակարգի լուծումը պետք է բավարարի (7.1.1) սկզբնական պայմաններին: Այլ երկու պայմանները տրվում են

$$v(0) = v_0\,, \quad \theta(0) = \theta_0 \tag{7.1.4}$$

հավասարություններով, որտեղ v_0-ն արկի մեկնարկային արագությունն է, իսկ θ_0-ն՝ արձակման անկյունը: Պարզ է, որ այս երկու պարամետրերի փոփոխությունը կբերի հետագծի փոփոխությանը: ♣

Օրինակ 7.1.3 (Գիշատիչ-զոհ մոդելը) : Դիտարկվում է երկու կենսաբանական տեսակների պոպուլյացիայի դինամիկան, որոնք միմյանց վրա փոխազդում են *գիշատիչ-զոհ* սկզբունքով: Ընդ որում, ենթադրվում է, որ զոհը կարող է հայթայթել բավարար սնունդ, բայց գիշատչի հետ ամեն մի հանդիպման ժամանակ վերջինս սպանում է զոհին:

Նկ. 7.1.3 Գիշատիչների և զոհերի պոպուլյացիայի դինամիկա

Դիցուք $x(t)$-ն և $y(t)$-ն համապատասխանաբար զոհերի և գիշատիչների քանակներն են ժամանակի t պահին: Որոշ պարզեցումներից հետո դիֆերենցիալ հավասարումները այդ ֆունկցիաների նկատմամբ գրվում են

$$\begin{aligned} x'(t) &= \alpha\, x(t) + \beta\, x(t)y(t)\,, \\ y'(t) &= \gamma\, y(t) + \delta\, x(t)y(t) \end{aligned} \tag{7.1.5}$$

տեսքով, որտեղ $\alpha > 0, \beta < 0, \gamma < 0, \delta > 0$ որոշ հաստատուններ են: Ժամանակի $t = 0$ սկզբնական պահին տրվում են

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \tag{7.1.6}$$

պայմանները: Վերը բերված (7.1.5) հավասարումներն առաջին անգամ արտածվել են 1925 թ. և հայտնի են որպես *Լոտկա-Վոլտերայի հավասարումներ*:

Ինչպես ցույց են տալիս հետազոտումները, գոհերի և գիշատիչների պոպուլյացիայի դինամիկան (x, y) հարթության մեջ գրաֆիկորեն բնութագրվում է բացվող պարուրագծով, որը հեռանում է (x_0, y_0) կետից (նկ. 7.1.3): ♣

Մի շարք հավասարումների համար (օրինակ, անջատվող փոփոխականներով հավասարումներ, հաստատուն գործակիցներով գծային հավասարումներ և այլն) հաջողվում է ստանալ լուծումը բացահայտ տեսքով: Սակայն այն հավասարումների դասերը, որոնց համար մշակված են ճշգրիտ լուծումների ստացման մեթոդներ, համեմատաբար նեղ են և ընդգրկում են գործնականում հանդիպող խնդիրների միայն փոքր մասը: Օրինակ, բավականաչափ պարզ

$$u'(x) = x^2 + u^2(x) \tag{7.1.7}$$

հավասարման լուծումը չի ներկայացվում տարրական ֆունկցիաների միջոցով: Ուստի այդպիսի հավասարումների լուծման համար օգտագործվում են մոտավոր մեթոդներ:

Սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման մոտավոր մեթոդները տրոհվում են հիմնականում երկու խմբի՝ *անալիտիկ* և *թվային*:

Անալիտիկ սովորաբար անվանում են մեթոդները, որոնց միջոցով կառուցվում է $u(x)$ ճշգրիտ լուծմանը ձգտող $u_n(x)$ ֆունկցիաների ինչ-որ հաջորդականություն: Ընդ որում, $u_n(x)$ ֆունկցիաները արտահայտվում են տարրական ֆունկցիաներով կամ ինտեգրալի միջոցով: Սահմանափակվելով n վերջավոր թվով՝ ստանում են մոտավոր արտահայտություն $u(x)$ լուծման համար: Սակայն անալիտիկ մեթոդները հարմար են միայն այն դեպքում, երբ միջանկյալ հաշվարկների մեծ մասը հաջողվում է կատարել ճշգրիտ: Դա իրագործելի է համեմատաբար պարզ հավասարումների համար, ինչը խիստ սահմանափակում է կիրառման տիրույթը: Անալիտիկ մեթոդներում երբեմն օգտագործվում են նաև հավասարումների պարզեցումներ, որոնք էապես չեն ազդում լուծման վրա: Որոշ խնդիրներում հաջողվում է լուծումը ներկայացնել երկու բաղադրիչների գումարի տեսքով, որոնցից առաջինը տալիս է հիմնական ներդրում լուծման մեջ, իսկ երկրորդը փոքր հավելում է, որը կարելի է անտեսել:

Թվային մեթոդները իրենցից ներկայացնում են ալգորիթմներ, որոնց միջոցով հաշվվում են որոնելի լուծման արժեքները արգումենտի արժեքների որոշ դիսկրետ բազմության վրա: Առավել տարածված և համակողմանի թվային մեթոդը *վերջավոր տարբերությունների* կամ *տարբերական* մեթոդն է: Նրա էությունը կայանում է նրանում, որ դիֆերենցիալ հավասարման մեջ գտնվող ածանցյալները փոխարինվում են վերջավոր-տարբերական առնչություններով (տե՛ս պարագրաֆ 4.6): Տարբերական մեթոդները կիրառելի են խնդիրների շատ լայն դասի համար: Ուստի բավականաչափ

մեծ օպերատիվ հիշողության ծավալ ունեցող արագագործ համակարգիչների երևան գալու հետ մեկտեղ այդ մեթոդները դարձել են դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման հիմնական գործիքներից մեկը:

Սկսենք մոտավոր մեթոդների ուսումնասիրումը Կոշու խնդրից:

Դիտարկենք n-րդ կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարում

$$u^{(n)}(x) = f(x, u, u', \ldots, u^{(n-1)}) \ : \tag{7.1.8}$$

Կոշու խնդիրը (7.1.8) հավասարման համար ձևակերպվում է հետևյալ կերպ. գտնել (7.1.8) հավասարման լուծումը, որը $x = x_0$ կետում բավարարում է

$$u(x_0) = u_0 \, , \; u'(x_0) = u_0^{(1)} \, , \ldots , \; u^{(n-1)}(x_0) = u_0^{(n-1)} \tag{7.1.9}$$

պայմաններին, որտեղ $u_0, u_0^{(1)}, \ldots, u_0^{(n-1)}$ տրված արժեքներն են: (7.1.9) պայմանները կոչվում են *սկզբնական պայմաններ*:

Սույն դասընթացում մենք կուսումնասիրենք

$$u'(x) = f(x, u) \, , \quad u(x_0) = u_0 \tag{7.1.10}$$

Կոշու խնդրի լուծման մոտավոր մեթոդները:

Ձևակերպենք (7.1.10) խնդրի լուծման գոյության և միակության բավարար պայմանները (տե՛ս, օրինակ, [26],[40],[50]):

Դիցուք $f(x, u)$ ֆունկցիան սահմանված է և անընդհատ

$$D = \{(x, u) \ : \ |x - x_0| \le a \, , |u - u_0| \le b\} \tag{7.1.11}$$

փակ սահմանափակ տիրույթում, որտեղ a-ն և b-ն ինչ-որ դրական թվեր են: Ուստի այն սահմանափակ է D տիրույթում, այսինքն՝ գոյություն ունի այնպիսի $M > 0$ թիվ, որ

$$|f(x, u)| \le M \qquad \forall \, (x, u) \in D \ : \tag{7.1.12}$$

Այնուհետև, դիցուք $f(x, u)$ ֆունկցիան D տիրույթում բավարարում է *Լիպշիցի պայմանին* u փոփոխականի նկատմամբ, այսինքն՝ գոյություն ունի այնպիսի $L > 0$ թիվ, որ

$$|f(x, u_1) - f(x, u_2)| \le L \, |u_1 - u_2| \qquad \forall \, (x, u_1), (x, u_2) \in D \ : \tag{7.1.13}$$

Այդ դեպքում x_0 կետի $|x - x_0| \le H$ շրջակայքում, որտեղ

$$H \equiv \min \left(a, \frac{b}{M} \right) , \tag{7.1.14}$$

գոյություն ունի (7.1.10) խնդրի միակ լուծում (նկ. 7.1.4):

Նկ. 7.1.4 Լուծումը սկզբնական կետի շրջակայքում

Նշենք, որ եթե $f(x,u)$ ֆունկցիան D տիրույթում ունի սահմանափակ $f'_u(x,u)$ մասնակի ածանցյալ, այսինքն՝ գոյություն ունի այնպիսի $L > 0$ թիվ, որ

$$|f'_u(x,u)| \le L \qquad \forall (x,u) \in D\,. \tag{7.1.15}$$

ապա այն բավարարում է Լիպշիցի պայմանին: Իրոք, ըստ Լագրանժի միջին արժեքի թեորեմի ունենք

$$f(x,u_1) - f(x,u_2) = f'_u(x,\theta u_1 + (1-\theta)u_2)(u_1 - u_2)\,, \quad 0 < \theta < 1\ :$$

Այստեղից ակնհայտորեն հետևում է (7.1.13) անհավասարությունը:

7.2 Անալիտիկ մոտավոր մեթոդներ

Սույն պարագրաֆում մենք կդիտարկենք

$$u'(x) = f(x,u)\,, \quad u(x_0) = u_0 \tag{7.2.1}$$

Կոշու խնդրի լուծման երկու անալիտիկ մեթոդ: Ենթադրենք, որ տեղի ունեն վերը բերված (7.2.1) խնդրի լուծման գոյության և միակության (7.1.11)–(7.1.14) բավարար պայմանները:

7.2.1 Պիկարի մեթոդը

Կառուցենք մոտավոր լուծումներ $x \ge x_0$ արժեքների համար: ($x \le x_0$ դեպքը լիովին համանման է): Ինտեգրելով (7.2.1) հավասարումը x_0-ից x սահմաններում՝ կստանանք

$$u(x) = u_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t,u(t))\,dt\ : \tag{7.2.2}$$

Վերջին հավասարության մեջ փոխարինելով ինտեգրալի նշանի տակ գտնվող u անհայտ ֆունկցիան u_0 սկզբնական արժեքով՝ կստանանք որոնելի լուծման առաջին մոտարկումը.

$$u_1(x) = u_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u_0)\, dt \ :$$

Այնուհետև, տեղադրելով (7.2.2) հավասարության աջ մասում u-ի փոխարեն գտնված u_1 ֆունկցիան, կստանանք երկրորդ մոտարկումը.

$$u_2(x) = u_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u_1(t))\, dt \ :$$

Ընդհանրապես, հաջորդող մոտարկումները կառուցվում են

$$u_n(x) = u_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u_{n-1}(t))\, dt\,, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{7.2.3}$$

բանաձևով (այստեղ $u_0(x) \equiv u_0$): Գրաֆիկորեն $u_n(x)$ հաջորդական մոտարկումները, որտեղ $n = 0, 1, 2, \ldots$, իրենցից ներկայացնում են $M_0(x_0, u_0)$ կետով անցնող կորեր (նկ. 7.2.1):

Նկ. 7.2.1 Մոտարկումներ ըստ Պիկարի մեթոդի

Ապացուցենք, որ (7.2.3) բանաձևով հաշվվող $u_n(x)$ մոտավոր լուծումները $[x_0, x_0 + H]$ հատվածում, որտեղ H մեծությունը որոշվում է համաձայն (7.1.14)-ի, հավասարաչափ զուգամիտում են (7.2.1) խնդրի ճշգրիտ լուծմանը:

Սկզբից ցույց տանք, որ բոլոր $n = 0, 1, 2, \ldots$ արժեքների համար $(x, u_n(x))$ կետերը, որտեղ $x \in [x_0, x_0 + H]$, պատկանում են D փակ ուղղանկյուն տիրույթին (7.1.11)-ից: Իրոք, $n = 0$ արժեքի համար դա ակնհայտ է:

Դիցուք պնդումը ճիշտ է $n-1$-ի համար: Այդ դեպքում (7.1.12) և (7.1.14)-ի հիման վրա (7.2.3)-ից կստանանք

$$|u_n(x) - u_0| \le \int_{x_0}^{x} |f(t, u_{n-1}(t))|\, dt \le M\,(x - x_0) \le MH \le b\,,$$

ինչը և ապացուցում է պնդումը:

Դիտարկենք $n = 0, 1, \ldots$ արժեքների համար

$$\varepsilon_n(x) \equiv |u(x) - u_n(x)|\,, \qquad x_0 \le x \le x_0 + H \tag{7.2.4}$$

սխալանքները: Երբ $n = 0$, օգտվելով Լագրանժի միջին արժեքի թեորեմից, կստանանք

$$\varepsilon_0(x) = |u(x) - u_0| = |u(x) - u(x_0)| = |u'(\xi)|(x - x_0)\,,$$

որտեղ $x_0 < \xi < x$: Իսկ քանի որ, համաձայն (7.1.12) գնահատականի, $|u'(\xi)| = |f(\xi, u(\xi))| \le M$, ապա

$$\varepsilon_0(x) \le M(x - x_0)\ : \tag{7.2.5}$$

Դիցուք այժմ $n \ge 1$: (7.2.2) և (7.2.3)-ից հետևում է, որ

$$u(x) - u_n(x) = \int_{x_0}^{x} [f(t, u(t)) - f(t, u_{n-1}(t))]\, dt\ :$$

Այստեղից, հաշվի առնելով (7.2.4) նշանակումները, կստանանք

$$\varepsilon_n(x) \le \int_{x_0}^{x} |f(t, u(t)) - f(t, u_{n-1}(t))|\, dt$$

անհավասարությունը: Լիպշիցի (7.1.13) պայմանի համաձայն ունենք

$$|f(t, u(t)) - f(t, u_{n-1}(t))| \le L\,|u(t) - u_{n-1}(t)| = L\,\varepsilon_{n-1}(t)\ :$$

Ուստի

$$\varepsilon_n(x) \le L \int_{x_0}^{x} \varepsilon_{n-1}(t)\, dt\,, \qquad n = 1, 2, \ldots : \tag{7.2.6}$$

Օգտվելով (7.2.6) անդրադարձ առնչություններից և (7.2.5) սկզբնական գնահատականից՝ հաջորդաբար գտնում ենք

$$\varepsilon_1(x) \le L \int_{x_0}^{x} \varepsilon_0(t)\, dt \le LM \int_{x_0}^{x} (t - x_0)\, dt = LM\, \frac{(x - x_0)^2}{2!}\,,$$

$$\varepsilon_2(x) \le L \int_{x_0}^{x} \varepsilon_1(t)\, dt \le L^2 M \int_{x_0}^{x} \frac{(t - x_0)^2}{2!}\, dt = L^2 M\, \frac{(x - x_0)^3}{3!}$$

և այլն: Արդյունքում՝

$$\varepsilon_n(x) \le L^n M \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots : \tag{7.2.7}$$

Այս գնահատականից հետևում է, որ $[x_0, x_0 + H]$ հատվածում $\varepsilon_n(x)$ սխալանքը հավասարաչափ ձգտում է զրոյի, երբ $n \to \infty$:

Պիկարի մեթոդը հարմար է կիրառել, երբ (7.2.3) բանաձևի աջ մասի ինտեգրալները հաջողվում է արտահայտել տարրական ֆունկցիաների միջոցով: Իսկ եթե (7.2.1) հավասարման աջ մասը այնքան բարդ է, որ ինտեգրալները ստիպված ենք հաշվել մոտավոր, ապա մեթոդը դառնում է գործնականորեն քիչ պիտանի:

Օրինակ 7.2.1 : Կիրառենք Պիկարի մեթոդը

$$u'(x) = x^2 + u^2, \quad u(0) = 0$$

հավասարման համար, որի լուծումը, ինչպես արդեն ասվել է նախորդ պարագրաֆում, չի արտահայտվում տարրական ֆունկցիաների միջոցով:

Այս դեպքում ինտեգրալները (7.2.3)-ում հաշվվում են ճշգրիտ, և մենք հեշտությամբ ստանում ենք

$$\begin{aligned} u_0(x) &\equiv 0, \\ u_1(x) &= \frac{x^3}{3}, \\ u_2(x) &= \frac{x^3}{3}\left(1 + \frac{x^4}{21}\right), \\ u_3(x) &= \frac{x^3}{3}\left(1 + \frac{x^4}{21} + \frac{2x^8}{693} + \frac{x^{12}}{19845}\right) \end{aligned} \tag{7.2.8}$$

և այլն: Դժվար չէ տեսնել, որ $x \le 1$ արժեքների համար այս մոտարկումները արագ զուգամիտում են և թույլ են տալիս հաշվել լուծումը բարձր ճշտությամբ: ♣

Պիկարի մեթոդը հեշտությամբ ընդհանրացվում է ավելի բարձր կարգի հավասարումների համար: Սակայն, ինչքան բարձր է հավասարման կարգը, այնքան ավելի հազվադեպ է հաջողվում ճշգրիտ հաշվել ինտեգրալները (7.2.3)-ում, ինչը սահմանափակում է մեթոդի կիրառումը այս դեպքում:

7.2.2 Աստիճանային շարքերի մեթոդը

Նկարագրենք մեկ այլ անալիտիկ մեթոդ, որը հիմնված է լուծման աստիճանային շարքի վերլուծման գաղափարի վրա: Հաճախ այդ նպատակով օգտագործվում են Թեյլորի շարքերը: Ենթադրելով, որ (7.2.1) Կոշու խնդրի $u(x)$ լուծումը բավականաչափ ողորկ է, կփնտրենք մոտավոր լուծումը

$$u_n(x) = u_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{u^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{7.2.9}$$

տեսքով: $u^{(k)}(x_0)$ ածանցյալները արտահայտվում են (7.2.1) հավասարման աջ մասի մասնական ածանցյալների միջոցով: Իրոք, ունենք

$$
\begin{aligned}
u'(x_0) &= f(x_0, u_0)\,, \\
u''(x_0) &= f'_x(x_0, u_0) + f'_u(x_0, u_0)\, f(x_0, u_0)\,, \\
u'''(x_0) &= f''_{xx}(x_0, u_0) + 2f''_{xu}(x_0, u_0)\, f(x_0, u_0) + f''_{uu}(x_0, u_0)\, f^2(x_0, u_0) + \\
&\quad f'_u(x_0, u_0)[f'_x(x_0, u_0) + f'_u(x_0, u_0)\, f(x_0, u_0)]
\end{aligned}
\tag{7.2.10}
$$

և այլն:

Այս մեթոդը x_0-ի շրջակայքում բավականաչափ մեծ n-ի համար տալիս է (7.2.1) խնդրի $u(x)$ ճշգրիտ լուծման լավ մոտարկում: Սակայն, հեռանալով x_0 սկզբնական կետից՝ սխալանքը, ընդհանրապես ասած, աճում է: Դեռ ավելին, մեթոդը դառնում է անընդունելի, երբ x-ը դուրս է գալիս $u(x)$ ֆունկցիայի Թեյլորի շարքի զուգամիտության տիրույթից: Շարքի զուգամիտության շառավիղի գնահատման հարցը բավականին բարդ է (տես, օրինակ, [33]), և այստեղ մենք այն չենք քննարկի:

Օրինակ 7.2.2 : Դիտարկենք Կոշու հետևյալ խնդիրը.

$$u'(x) = x^2 + u^2\,, \quad u(0) = 0\ :$$

Ըստ (7.2.10) բանաձևերի՝ գտնում ենք $u'(0) = 0, u''(0) = 0$, $u'''(0) = 2$: Այդ դեպքում, համաձայն (7.2.9)-ի, կստանանք

$$u_3(x) = \frac{x^3}{3}$$

(համեմատել 7.2.1 օրինակում Պիկարի մեթոդով ստացված (7.2.8) մոտավոր լուծումների հետ): ♣

Աստիճանային շարքերի մեթոդի թերություններից է (7.2.10) բանաձևերի մեծածավալությունը, քանի որ նրանք պահանջում են $f(x, u)$ ֆունկցիայի մասնական ածանցյալների հաշվում:

7.3 Էյլերի մեթոդը

Դիտարկենք

$$u'(x) = f(x, u)\,, \quad x_0 \le x \le x_0 + H \tag{7.3.1}$$

դիֆերենցիալ հավասարումը

$$u(x_0) = u_0 \tag{7.3.2}$$

սկզբնական պայմանով: Ուսումնասիրենք այս խնդրի լուծման տարբերական մեթոդները: Ինչպես և նախորդ պարագրաֆում, կենթադրենք, որ (7.3.1), (7.3.2) խնդրի

համար կատարված են լուծման գոյության և միակության բավարար պայմանները: Ներմուծենք որոշ հասկացություններ և տերմիններ:

Դիցուք $[x_0, x_0 + H]$ հատվածում ընտրված է կետերի (*հանգույցների*) ինչ-որ բազմություն

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = x_0 + H\,. \tag{7.3.3}$$

որը կանվանենք *ցանց*: Դիսկրետ արգումենտի $w = \{w_n\}_{n=0}^{N}$ ֆունկցիան, որոշված ցանցի հանգույցների վրա, կանվանենք *ցանցային ֆունկցիա*: Պարզ է, որ ցանցային ֆունկցիաների բազմությունը կազմում է գծային տարածություն: Սահմանենք այդ տարածությունում *նորմ* հետևյալ կերպ.

$$||w|| \equiv \max_{0 \le n \le N} |w_n|\ : \tag{7.3.4}$$

7.3.1 Տարբերական մեթոդների դասակարգումը

Տարբերական մեթոդները թույլ են տալիս հաջորդաբար գտնել (7.3.1),(7.3.2) խնդրի մոտավոր լուծման $v_n \equiv v(x_n)$ արժեքները (7.3.3) ցանցի հանգույցներում ըստ

$$v_{n+1} = F(v_{n-p}, v_{n-p+1}, \ldots, v_n, v_{n+s}) \tag{7.3.5}$$

օրենքի, որտեղ F-ը նշված արգումենտների որոշ հայտնի ֆունկցիա է: Այդ ֆունկցիայի տեսքը կախված է մեթոդի կառուցման եղանակից և (7.3.1) հավասարման աջ մասից: (7.3.5)-ում p պարամետրը ոչ բացասական ամբողջ թիվ է (սովորաբար $p \ll N$), իսկ s մեծությունը կարող է ընդունել երկու արժեք՝ 0 կամ 1: Եթե $p = 0$, ապա մեթոդը կոչվում է *միաքայլ*, իսկ եթե $p \ge 1$՝ *բազմաքայլ*: Ինչպես միաքայլ, այնպես էլ բազմաքայլ մեթոդները կոչվում են *բացահայտ*, երբ $s = 0$, և *անբացահայտ*, երբ $s = 1$: Այսպիսով, ունենք՝

- միաքայլ բացահայտ մեթոդ

$$v_{n+1} = F(v_n)\,, \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1\,, \tag{7.3.6}$$

- միաքայլ անբացահայտ մեթոդ

$$v_{n+1} = F(v_n, v_{n+1})\,, \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1\,, \tag{7.3.7}$$

- բազմաքայլ բացահայտ մեթոդ

$$v_{n+1} = F(v_{n-p}, \ldots, v_n)\,, \qquad n = p, p+1, \ldots, N-1\,, \tag{7.3.8}$$

- բազմաքայլ անբացահայտ մեթոդ

$$v_{n+1} = F(v_{n-p}, \ldots, v_n, v_{n+1})\,, \qquad n = p, p+1, \ldots, N-1\ : \tag{7.3.9}$$

Բոլոր (7.3.6)-(7.3.9) մեթոդներում վերցվում է $v_0 = u_0$: Բացի դրանից, (7.3.8) և (7.3.9) բազմաքայլ մեթոդներում օգտագործվում են առաջին p արժեքները՝ $v_1, v_2, \ldots, v_p$, որոնք որոշվում են այլ մեթոդների միջոցով կամ ինչ-որ լրացուցիչ նկատառումներից:

Թեև $[x_0, x_0 + H]$ հատվածի (7.3.3) անհավասարաչափ տրոհումը վերջավոր թվով մասերի չի առաջացնում հատուկ դժվարություններ, գործնականում հաճախ օգտագործվում է

$$x_n = x_0 + nh, \quad n = 0, 1, \ldots, N; \quad h = \frac{H}{N} \tag{7.3.10}$$

հավասարաչափ ցանց, որտեղ h մեծությունը կոչվում է ցանցի *քայլ*:

7.3.2 Էյլերի մեթոդը

Ցանցի x_n հանգույցում, որտեղ $0 \le n \le N-1$, ունենք

$$u'(x_n) = f(x_n, u(x_n)) \tag{7.3.11}$$

հավասարությունը: Փոխարինենք $u'(x_n)$ ածանցյալը

$$u'(x_n) \approx \frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{h}$$

տարբերական հարաբերությունով: Ենթադրելով, որ $u(x) \in C^2[x_0, x_0 + H]$, և օգտագործելով Թեյլորի վերլուծությունը հնշտությամբ ստանում ենք

$$u'(x_n) = \frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{h} - \frac{h}{2} u''(x_n + \theta h), \qquad 0 < \theta < 1$$

հավասարությունը (տես 4.6.1 լեմմայի ապացույցը): Վերջին հավասարությունից և (7.3.11)-ից հետևում է, որ $n = 0, 1, \ldots, N-1$ արժեքների համար

$$\frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{h} = f(x_n, u(x_n)) + \varepsilon_n, \tag{7.3.12}$$

որտեղ

$$\varepsilon_n \equiv \frac{h}{2} u''(x_n + \theta h), \qquad 0 < \theta < 1 : \tag{7.3.13}$$

Դեն նետելով (7.3.12) հավասարություններում $O(h)$ մեծության ε_n անդամները՝ գալիս ենք

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{h} = f(x_n, v_n), \quad n = 0, 1, \ldots, N-1; \; v_0 = u_0 \tag{7.3.14}$$

հավասարումների համակարգի Կոշու խնդրի $v = \{v_n\}_{n=0}^N$ մոտավոր լուծման որոշման համար: Այս մեթոդը կոչվում է *Էյլերի մեթոդ*: Սկսած $v_0 = u_0$-ից, v_n մեծությունները հաջորդաբար գտնվում են ըստ

$$v_{n+1} = v_n + h f(x_n, v_n), \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{7.3.15}$$

բանաձևի: Այսպիսով, Էյլերի մեթոդը միաքայլ բացահայտ մեթոդ է: Համեմատության համար, (7.3.12)-ից ունենք

$$u(x_{n+1}) = u(x_n) + h f(x_n, u(x_n)) + h \varepsilon_n, \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1 : \tag{7.3.16}$$

ε_n մեծությունը (7.3.13)-ից կանվանենք (7.3.14) մեթոդի *անկապակցություն* կամ *մոտարկման սխալանք*: Նկատի ունենալով $\varepsilon_n = O(h)$ առնչությունը ասում են, որ Էյլերի մեթոդը ունի *մոտարկման առաջին կարգ*:

Տանք Էյլերի մեթոդի երկրաչափական մեկնաբանությունը: Ենթադրենք, որ x_n հանգույցում, որտեղ $0 \le n \le N-1$, մոտավոր և ճշգրիտ լուծումները համընկնում են, այսինքն՝ $v_n = u(x_n)$: Այդ դեպքում, ինչպես հետևում է (7.3.11) և (7.3.15)-ից,

$$v_{n+1} = u(x_n) + h\,f(x_n, u(x_n)) = u(x_n) + h\,u'(x_n)\ : \qquad (7.3.17)$$

Համաձայն (7.3.17) հավասարության, v_n-ից v_{n+1} անցումը ($O(h^2)$ ճշտությամբ) երկրաչափորեն պատկերված է նկ. 7.3.1-ում: Հիշեցնենք, որ եթե α-ն շոշափողի թեքության անկյունն է Ox առանցքին, ապա $\operatorname{tg}\alpha = u'(x_n)$:

Նկ. 7.3.1 Էյլերի մեթոդի քայլը

Ընդ որում, (7.3.15) և (7.3.16)-ից գտնում ենք ճշգրիտ և մոտավոր լուծումների տարբերությունը x_{n+1} հանգույցում, այն է՝

$$u(x_{n+1}) - v_{n+1} = h\,\varepsilon_n\ :$$

Այստեղից, հաշվի առնելով (7.3.13)-ը, կստանանք

$$|u(x_{n+1}) - v_{n+1}| \le \frac{M_2}{2}\,h^2\,, \qquad (7.3.18)$$

որտեղ $M_2 \equiv \max\limits_{x_0 \le x \le x_0 + H} |u''(x)|$: Այս մեծությունը, ունենալով

$$u''(x) = f'_x(x,u) + f'_u(x,u)f(x,u)$$

հավասարությունը, կարելի է գնահատել հետևյալ կերպ.

$$M_2 \le \max_D |f'_x(x,u)| + LM$$

(տե՛ս (7.1.12) և (7.1.15)): (7.3.18) գնահատականի հիման վրա ասում են, որ Էյլերի մեթոդի *տեղային սխալանքը* $O(h^2)$ մեծություն է:

7.3.3 Էյլերի մեթոդի զուգամիտությունը

Նախ և առաջ ապացուցենք հետևյալ օժանդակ պնդումը:

Լեմմա 7.3.1 : *Դիցուք $z = \{z_n\}_{n=0}^N$ ցանցային ֆունկցիան այնպիսին է, որ*

$$|z_{n+1}| \le (1 + hL)|z_n| + hE\,, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1\,, \tag{7.3.19}$$

որտեղ $L \ge 0$ և $E \ge 0$ որոշ հաստատուններ են: Այդ դեպքում

$$||z|| \le e^{HL}|z_0| + \frac{E}{L}\left(e^{HL} - 1\right)\ : \tag{7.3.20}$$

Մասնավորապես, եթե $z_0 = 0$, ապա

$$||z|| \le \frac{E}{L}\left(e^{HL} - 1\right)\ : \tag{7.3.21}$$

Ապացույց: Կամայական n-ի համար, որտեղ $n = 1, 2, \ldots, N$, հաջորդաբար օգտագործելով (7.3.19) անհավասարությունները, կստանանք

$$|z_n| \le (1 + hL)|z_{n-1}| + hE \le (1 + hL)[(1 + hL)|z_{n-2}| + hE] + hE =$$
$$(1 + hL)^2|z_{n-2}| + [1 + (1 + hL)]hE \le \cdots \le (1 + hL)^n|z_0| + \sum_{k=0}^{n-1}(1 + hL)^k \cdot hE\ :$$

Այնուհետև,

$$|z_n| \le (1 + hL)^n|z_0| + \frac{E}{L}\left((1 + hL)^n - 1\right)$$

և

$$||z|| \le (1 + hL)^N|z_0| + \frac{E}{L}\left((1 + hL)^N - 1\right)\ :$$

Այստեղից, քանի որ

$$(1 + hL)^N = \left(1 + \frac{HL}{N}\right)^N \le e^{HL}$$

(տե՛ս, օրինակ, [45]), կստանանք (7.3.20) գնահատականը, որի ակնհայտ հետևանքն է (7.3.21) գնահատականը: □

Այժմ անցնենք անմիջականորեն Էյլերի մեթոդի սխալանքի գնահատականին: Ներմուծենք

$$z_n \equiv u(x_n) - v_n\,, \quad n = 0, 1, \ldots, N \tag{7.3.22}$$

ցանցային *սխալանքի ֆունկցիան*, որտեղ u-ն Կոշու խնդրի ճշգրիտ լուծումն է, իսկ $v = \{v_n\}_{n=0}^N$-ն՝ (7.3.14)-ով որոշվող մոտավոր լուծումը: $z = \{z_n\}_{n=0}^N$ սխալանքի ֆունկցիայի (7.3.4) նորմի արժեքը կանվանենք Էյլերի մեթոդի *գլոբալ սխալանք*:

Ընդհանրապես, պետք է տարբերել գլոբալ սխալանքի հետևյալ երկու բաղադրիչները.

1) *մոտարկման սխալանքը*, որն առաջանում է (7.3.1) դիֆերենցիալ հավասարումը (7.3.14) տարբերական հավասարումներով փոխարինելու արդյունքում,

2) *կլորացման սխալանքները*, որոնք առաջանում են $f(x,u)$ ֆունկցիայի արժեքների հաշվման ընթացքում և ըստ (7.3.15) բանաձևերի թվաբանական գործողությունների կատարման ժամանակ:

Մենք կքննարկենք կլորացման սխալանքների ազդեցությունը ավելի ուշ, իսկ այժմ գնահատենք միայն մոտարկման սխալանքով պայմանավորված գլոբալ սխալանքը: Այլ կերպ ասած, կհամարենք, որ v_{n+1} արժեքները, որտեղ $n = 0, 1, \ldots, N-1$, հաշվվում են ըստ (7.3.15) բանաձևերի ճշգրիտ, առանց կլորացումների:

Ելնելով (7.3.15), (7.3.16) և (7.3.22)-ից՝ բոլոր $n = 0, 1, \ldots, N-1$ արժեքների համար գրենք

$$z_{n+1} = z_n + h[f(x_n, u(x_n)) - f(x_n, v_n)] + h\varepsilon_n$$

հավասարությունները և, համապատասխանաբար,

$$|z_{n+1}| \le |z_n| + h|f(x_n, u(x_n)) - f(x_n, v_n)| + h|\varepsilon_n|$$

անհավասարությունները: Համաձայն (7.1.13) Լիպշիցի պայմանի՝ ունենք

$$|f(x_n, u(x_n)) - f(x_n, v_n)| \le L\,|z_n| \ :$$

Ուստի

$$|z_{n+1}| \le (1 + hL)|z_n| + h|\varepsilon_n| \ :$$

Այնուհետև, հաշվի առնելով (7.3.13) արտահայտությունը ε_n անկապակցության համար, կստանանք

$$|z_{n+1}| \le (1 + hL)|z_n| + hE\,, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1\,. \tag{7.3.23}$$

որտեղ

$$E \equiv \frac{M_2}{2}\,h \quad \text{և} \quad M_2 \equiv \max_{x_0 \le x \le x_0 + H} |u''(x)| \ : \tag{7.3.24}$$

Դրանով իսկ z սխալանքի ֆունկցիան բավարարում է 7.3.1 լեմմայի պայմաններին: Իսկ քանի որ $z_0 = 0$, ապա, համաձայն (7.3.21) անհավասարության, կստանանք Էյլերի մեթոդի գլոբալ սխալանքի

$$||z|| \le \frac{M_2}{2L}(e^{HL} - 1)\,h \tag{7.3.25}$$

գնահատականը: Այսպիսով, գլոբալ սխալանքը $O(h)$ մեծություն է: Ուստի ասում են, որ Էյլերի մեթոդն ունի *առաջին կարգի ճշտություն*:

Օրինակ 7.3.1 : Կիրառենք Էյլերի մեթոդը

$$u' = \frac{1}{2}(x - u)\,, \quad 0 \le x \le 1\,, \quad u(0) = 1$$

Կոշու խնդրի լուծման համար: Այդ խնդրի ճշգրիտ լուծումը $u(x) = 3e^{-x/2} + x - 2$ ֆունկցիան է: Համեմատենք մոտավոր լուծումները $h = 0.5, 0.25, 0.125$ և 0.0625 քայլերի համար: Հաշվման արդյունքները բերված են հետևյալ աղյուսակում.

x_n	v_n				ճշգրիտ լուծում
	$h = 0.5$	$h = 0.25$	$h = 0.125$	$h = 0.0625$	
0.000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000000
0.125			0.9375	0.9404	0.9432392
0.250		0.8750	0.8867	0.8922	0.8974907
0.375			0.8469	0.8547	0.8620873
0.500	0.7500	0.7969	0.8174	0.8271	0.8364023
0.625			0.7976	0.8089	0.8198469
0.750		0.7598	0.7868	0.7996	0.8118678
0.875			0.7845	0.7985	0.8119456
1.000	0.6875	0.7585	0.7902	0.8051	0.8195920

Ինչպես տեսնում ենք, քայլի փոքրացման հետ մեկտեղ ճշտությունն աճում է: ♣

Հետազոտենք այժմ կլորացման սխալանքների ազդեցությունը գլոբալ սխալանքի վրա: Ենթադրենք, որ (7.3.15) բանաձևի աջ մասի հաշվման ժամանակ թույլ է տրվում ինչ-որ δ_n սխալանք: Դրանով իսկ փաստորեն հաշված v_{n+1} մոտարկումների համար ունենք

$$v_{n+1} = v_n + h\,f(x_n, v_n) + \delta_n\,, \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1\ :$$

Այդ դեպքում (7.3.22) սխալանքի ֆունկցիայի համար տեղի ունեն

$$z_{n+1} = z_n + h[f(x_n, u(x_n)) - f(x_n, v_n)] + h\varepsilon_n - \delta_n \tag{7.3.26}$$

հավասարությունները, որտեղ $n = 0, 1, \ldots, N-1$: Ենթադրենք, որ կլորացման սխալանքները բացարձակ արժեքով չեն գերազանցում ինչ-որ Δ, այսինքն՝

$$|\delta_n| \le \Delta\,, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1\ :$$

Ելնելով (7.3.26)-ից և կրկնելով վերը բերված դատողությունները՝ (7.3.23) անհավասարությունների փոխարեն կստանանք

$$|z_{n+1}| \le (1 + hL)|z_n| + h\left(E + \frac{\Delta}{h}\right), \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

անհավասարությունները, որտեղ E մեծությունը որոշված է (7.3.24)-ում: Այնուհետև կիրառելով 7.3.1 լեմման՝ կստանանք

$$||z|| \le \frac{e^{HL} - 1}{L}\left(\frac{M_2}{2}h + \frac{\Delta}{h}\right) \equiv g(h) \tag{7.3.27}$$

գնահատականը:

Այսպիսով, Էյլերի մեթոդի $g(h)$ գլոբալ սխալանքը իր մեջ ներառում է երկու բաղադրիչ. մոտարկման սխալանքով պայմանավորված $c \cdot M_2 h/2$ *մեթոդի սխալանքը* և կլորացման սխալանքների կուտակումից առաջացած $c \cdot \Delta/h$ *հաշվողական սխալանքը* (այստեղ $c \equiv (e^{HL} - 1)/L$): Ընդ որում, h քայլի փոքրացման հետ մեկտեղ մեթոդի սխալանքը գծորեն նվազում է, սակայն աճում է հաշվողական սխալանքը: Այս իրավիճակը գրաֆիկորեն պատկերված է նկ. 7.3.2-ում: Համանման երևույթի հետ առնչվել ենք 4.6 պարագրաֆում թվային դիֆերենցման բանաձևերը դիտարկելիս:

Նկ. 7.3.2 Գլոբալ սխալանքի վարքը Էյլերի մեթոդում

Դժվար չէ ստանալ արտահայտություն h_0 օպտիմալ քայլի համար, որի դեպքում (7.3.27) անհավասարության աջ մասը ընդունում է փոքրագույն արժեքը՝

$$h_0 = \sqrt{\frac{2\Delta}{M_2}}\ :$$

Միաժամանակ նշենք, որ գործնականորեն չի հաջողվում ստանալ օպտիմալ քայլի արժեքը: Սակայն օգտագործվող քայլը, որպես օրենք, ավելի մեծ է, քան թե h_0-ն և հիմնական ներդրում գլոբալ սխալանքի մեջ կատարում է մոտարկման սխալանքը (ժամանակակից համակարգիչներով հաշվարկելիս Δ մեծությունը շատ փոքր է):

7.4 Էյլերի անբացահայտ մեթոդը

Այստեղ մենք կդիտարկենք (7.3.1),(7.3.2) Կոշու խնդրի լուծման Էյլերի մեթոդի մեկ վերափոխում: Ունենալով

$$u'(x_{n+1}) = f(x_{n+1}, u(x_{n+1})) \tag{7.4.1}$$

հավասարությունը՝ փոխարինենք $u'(x_{n+1})$ ածանցյալը ձախակողմյան տարբերական ածանցյալով (տե՛ս (4.6.2)): Ընդ որում, եթե $u(x) \in C^2[x_0, x_0 + H]$, ապա

$$u'(x_{n+1}) = \frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{h} - \varepsilon_{n+1}\,. \tag{7.4.2}$$

որտեղ

$$\varepsilon_{n+1} \equiv -\frac{h}{2}\, u''(x_{n+1} - \theta h), \qquad 0 < \theta < 1 \; : \tag{7.4.3}$$

(7.4.1) և (7.4.2)-ից հետևում է, որ բոլոր $n = 0, 1, \ldots, N-1$ արժեքների համար

$$\frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{h} = f(x_{n+1}, u(x_{n+1})) + \varepsilon_{n+1} \; : \tag{7.4.4}$$

Դեն նետելով (7.4.4) հավասարություններում $O(h)$ մեծության ε_{n+1} անդամները՝ ստանում ենք

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{h} = f(x_{n+1}, v_{n+1}), \quad n = 0, 1, \ldots, N-1 \, ; \; v_0 = u_0 \tag{7.4.5}$$

հավասարությունների համակարգը (7.3.1), (7.3.2) խնդրի $v = \{v_n\}_{n=0}^{N}$ մոտավոր լուծման որոշման համար: Այս մեթոդը կոչվում է *Էյլերի անբացահայտ մեթոդ*, քանի որ v_{n+1} անհայտը գտնելու համար պահանջվում է լուծել

$$v_{n+1} = v_n + h\, f(x_{n+1}, v_{n+1}) \tag{7.4.6}$$

հավասարումը, որն ընդհանուր դեպքում ոչ գծային է: Սովորաբար այդ նպատակի համար օգտագործվում են իտերացիոն մեթոդներ: Ընդ որում, ընդհանուր սխալանքի մեջ կմտնի նաև իրականորեն հաշված v_{n+1} արժեքի սխալանքը: Ուստի (7.4.5) Էյլերի անբացահայտ մեթոդի կիրառումը պահանջում է (7.3.14) բացահայտ մեթոդի համեմատությամբ ավելի շատ հաշվողական աշխատանք: Սակայն, չնայած դրան, (7.4.5) մեթոդը լայնորեն կիրառվում է հաշվարկներում, քանի որ որոշ խնդիրների համար այն ունի էական առավելություն բացահայտ մեթոդի համեմատությամբ հաշվողական ընթացքի կայունության տեսակետից (տե՛ս 7.9 պարագրաֆը):

Ինչպես և Էյլերի (7.3.14) բացահայտ մեթոդում, անվանենք ε_{n+1} մեծությունը (7.4.3)-ից (7.4.5) մեթոդի *անկապակցություն* կամ *մոտարկման սխալանք*: Ընդ որում, քանի որ $\varepsilon_{n+1} = O(h)$, ասում են, որ մեթոդն ունի *մոտարկման առաջին կարգ*:

Գնահատենք այժմ մոտարկման սխալանքով պայմանավորված մեթոդի գլոբալ սխալանքը: Կենթադրենք, որ v_{n+1} մոտավոր լուծման արժեքները որոշվում են (7.4.6) հավասարումից ճշգրիտ, առանց կլորացումների:

Դիտարկենք

$$z_n \equiv u(x_n) - v_n \, , \quad n = 0, 1, \ldots, N \tag{7.4.7}$$

ցանցային *սխալանքի ֆունկցիան*: (7.4.4), (7.4.6) և (7.4.7)-ից ունենք

$$z_{n+1} = z_n + h[f(x_{n+1}, u(x_{n+1})) - f(x_{n+1}, v_{n+1})] + h\,\varepsilon_{n+1}$$

հավասարությունները բոլոր $n = 0, 1, \ldots, N-1$ արժեքների համար: Այստեղից հետևում են

$$|z_{n+1}| \le |z_n| + h|f(x_{n+1}, u(x_{n+1})) - f(x_{n+1}, v_{n+1})| + h|\varepsilon_{n+1}|$$

անհավասարությունները: Համաձայն Լիպշիցի (7.1.13) պայմանի՝

$$|f(x_{n+1}, u(x_{n+1})) - f(x_{n+1}, v_{n+1})| \le L\,|z_{n+1}| \ :$$

Այսպիսով,

$$|z_{n+1}| \le |z_n| + hL|z_{n+1}| + h|\varepsilon_{n+1}| \ : \tag{7.4.8}$$

Կհամարենք, որ ցանցի h քայլը բավականին փոքր է: Դիցուք, որոշակիության համար, $h \le 1/2L$: Այդ դեպքում

$$1 - hL \ge \frac{1}{2} \quad \text{և} \quad \frac{1}{1-hL} \le 1 + 2hL \ :$$

Օգտվելով այդ անհավասարություններից՝ (7.4.8)-ից հաջորդաբար ստանում ենք

$$(1 - hL)|z_{n+1}| \le |z_n| + h|\varepsilon_{n+1}| \,,$$

$$|z_{n+1}| \le \frac{1}{1-hL}\,|z_n| + \frac{h}{1-hL}\,|\varepsilon_{n+1}| \,,$$

$$|z_{n+1}| \le (1 + 2hL)|z_n| + 2h|\varepsilon_{n+1}| \ :$$

Այստեղից, հաշվի առնելով (7.4.3) արտահայտությունը ε_{n+1} անկապակցության համար, գտնում ենք

$$|z_{n+1}| \le (1 + 2hL)|z_n| + hE \,, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{7.4.9}$$

անհավասարությունները, որտեղ

$$E \equiv M_2 h \qquad \left(M_2 \equiv \max_{x_0 \le x \le x_0 + H} |u''(x)|\right) \ : \tag{7.4.10}$$

Դրանով իսկ z սխալանքի ֆունկցիան բավարարում է 7.3.1 լեմմայի պայմաններին: Քանի որ $z_0 = 0$, ապա համաձայն (7.3.21) անհավասարության՝ ստանում ենք

$$||z|| \le \frac{M_2}{2L}\left(e^{2HL} - 1\right) h \tag{7.4.11}$$

գնահատականը: Այսպիսով, Էյլերի անբացահայտ մեթոդն ունի *ճշտության առաջին կարգ*:

Մասնավորապես, (7.4.9) և (7.4.10)-ից հետևում է, որ Էյլերի անբացահայտ մեթոդի *տեղային սխալանքը* $O(h^2)$ մեծությունն է:

Վերջում նշենք, որ Էյլերի բացահայտ և անբացահայտ մեթոդները կարող են արտածվել նաև թվային ինտեգրման բանաձևերից: Իրոք,

$$u(x_{n+1}) = u(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, u(x))\,dx$$

ակնհայտ հավասարության աջ մասի ինտեգրալի նկատմամբ կիրառելով (6.2.2) ձախ ուղղանկյունների բանաձևը, կստանանք

$$u(x_{n+1}) \approx u(x_n) + h\, f(x_n, u(x_n))$$

մոտավոր հավասարությունը, որից էլ հետևում է Էյլերի մեթոդի (7.3.15) հաշվարկային բանաձևը: Իսկ եթե ինտեգրալի նկատմամբ կիրառենք (6.2.3) աջ ուղղանկյունների բանաձևը, ապա կստանանք

$$u(x_{n+1}) \approx u(x_n) + h\, f(x_{n+1}, u(x_{n+1}))\,,$$

որտեղից գալիս ենք (7.4.5) Էյլերի անբացահայտ մեթոդի:

7.5 Էյլերի վերահաշվման մեթոդներ

Ճշտության առաջին կարգ ունեցող Էյլերի մեթոդը դանդաղ է զուգամիտում: Սակայն մեթոդի զուգամիտության արագությունը կարելի է բարձրացնել հաշվողական սխեմայի որոշ բարդացման հաշվին:

Շարադրենք այսպես կոչված *Էյլերի վերահաշվման մեթոդը*: Համաձայն այդ մեթոդի՝ v_{n+1}-ի հաշվարկը իրականացվում է երկու փուլով: Սկզբից գտնվում է

$$\bar{v}_n = v_n + \alpha h f(x_n, v_n) \tag{7.5.1}$$

միջանկյալ արժեքը, որտեղ $\alpha > 0$ (փաստորեն դա Էյլերի մեթոդն է αh քայլով): Այնուհետև հաշվվում է v_{n+1} արժեքը ըստ

$$v_{n+1} = v_n + h\,[(1-\sigma) f(x_n, v_n) + \sigma f(x_n + \alpha h, \bar{v}_n)] \tag{7.5.2}$$

բանաձևի, որտեղ $\sigma > 0$: Արտաքսելով $\bar{v}_n$-ը (7.5.1) և (7.5.2)-ից, կստանանք հետևյալ մեթոդը.

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{h} = (1-\sigma) f(x_n, v_n) + \sigma f(x_n + \alpha h, v_n + \alpha h f(x_n, v_n))\,, \tag{7.5.3}$$

$$n = 0, 1, \ldots, N-1: \quad v_0 = u_0\ :$$

Սկզբից քննարկենք մեթոդի մոտարկման սխալանքի հարցը և դրա հետ կապված՝ α և σ պարամետրերի ընտրությունը: Դիցուք $u(x) \in C^3[x_0, x_0 + H]$: Գրենք արտահայտություն մեթոդի *անկապակցության* կամ *մոտարկման սխալանքի* համար.

$$\varepsilon_n \equiv \frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{h} - (1-\sigma) f(x_n, u(x_n)) - \sigma f(x_n + \alpha h, u(x_n) + \alpha h f(x_n, u(x_n)))\,, \tag{7.5.4}$$

որտեղ $0 \le n \le N-1$: Օգտվելով Թեյլորի վերլուծությունից՝ ունենք

$$\frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{h} = u'(x_n) + \frac{h}{2} u''(x_n) + \frac{h^2}{6} u'''(x_n + \theta_1 h)\,, \quad 0 < \theta_1 < 1\ :$$

Այդ դեպքում (7.5.4)-ից, քանի որ $u'(x_n) = f(x_n, u(x_n))$, կստանանք

$$\varepsilon_n = \frac{h}{2}\, u''(x_n) + \sigma\,[u'(x_n) - f(x_n + \alpha h, u(x_n) + \alpha h u'(x_n))] + \mu_n\,. \qquad (7.5.5)$$

որտեղ μ_n մեծությունը գնահատվում է հետևյալ կերպ.

$$|\mu_n| \le \frac{M_3}{6}\, h^2\,, \qquad M_3 \equiv \max_{x_0 \le x \le x_0 + H} |u'''(x)| \ : \qquad (7.5.6)$$

Ձևափոխենք (7.5.5) արտահայտությունը ε_n անկապակցության համար՝ գրելով այն

$$\begin{aligned} \varepsilon_n \ = \ & \frac{h}{2}\, u''(x_n) + \sigma[u'(x_n) - f(x_n + \alpha h, u(x_n) + \alpha h u'(x_n)) + \\ & f(x_n + \alpha h, u(x_n + \alpha h)) - u'(x_n + \alpha h)] + \mu_n \end{aligned}$$

տեսքով: Ներմուծենք հետևյալ նշանակումները.

$$\nu_n \equiv f(x_n + \alpha h, u(x_n + \alpha h)) - f(x_n + \alpha h, u(x_n) + \alpha h u'(x_n)) \ : \qquad (7.5.7)$$

Այդ դեպքում

$$\varepsilon_n = \frac{h}{2}\, u''(x_n) + \sigma\,[u'(x_n) - u'(x_n + \alpha h)] + \mu_n + \sigma\,\nu_n \ : \qquad (7.5.8)$$

Շարունակենք ձևափոխությունները: Գրենք

$$u'(x_n + \alpha h) = u'(x_n) + \alpha h u''(x_n) + \frac{\alpha^2 h^2}{2}\, u'''(x_n + \theta_2 \alpha h)\,, \quad 0 < \theta_2 < 1$$

Թեյլորի վերլուծությունը: Այստեղից

$$u'(x_n) - u'(x_n + \alpha h) = -\alpha h\, u''(x_n) + \rho_n\,, \qquad (7.5.9)$$

որտեղ ρ_n մեծության գնահատականը հետևյալն է.

$$|\rho_n| \le \frac{M_3}{2}\, \alpha^2 h^2 \ : \qquad (7.5.10)$$

Այսպիսով, (7.5.8) և (7.5.9)-ից կստանանք

$$\varepsilon_n = \left(\frac{1}{2} - \alpha\sigma\right) h\, u''(x_n) + \mu_n + \sigma(\nu_n + \rho_n) \ : \qquad (7.5.11)$$

Մենք արդեն գնահատել ենք μ_n և ρ_n մեծությունները (տե՛ս (7.5.6) և (7.5.10) գնահատականները): Մնացել է գնահատել ν_n մեծությունը (7.5.7)-ից: Լիպշիցի (7.1.13) պայմանի շնորհիվ ունենք՝

$$|\nu_n| \le L\,|u(x_n + \alpha h) - u(x_n) - \alpha h\, u'(x_n)| \ :$$

Նորից օգտվենք Թեյլորի վերլուծությունից.

$$u(x_n+\alpha h)=u(x_n)+\alpha h u'(x_n)+\frac{\alpha^2h^2}{2}u''(x_n+\theta_3\alpha h)\,,\quad 0<\theta_3<1\ :$$

Կստանանք

$$|\nu_n|\le\frac{LM_2}{2}\alpha^2h^2\,,\qquad M_2\equiv\max_{x_0\le x\le x_0+H}|u''(x)|\ : \tag{7.5.12}$$

Այսպիսով, (7.5.11) և (7.5.6), (7.5.10), (7.5.12)-ից գտնում ենք, որ

$$\varepsilon_n=\left(\frac{1}{2}-\alpha\sigma\right)h\,u''(x_n)+O(h^2)\ : \tag{7.5.13}$$

Ավելի ճիշտ՝

$$|\varepsilon_n|\le\left|\left(\frac{1}{2}-\alpha\sigma\right)h\,u''(x_n)\right|+\left(\frac{M_3}{6}+\frac{\alpha^2\sigma}{2}(LM_2+M_3)\right)h^2\ : \tag{7.5.14}$$

(7.5.13)-ից հետևում է, որ ε_n անկապակցությունը կլինի h-ի նկատմամբ երկրորդ կարգի մեծություն, եթե

$$\alpha\sigma=\frac{1}{2}\ : \tag{7.5.15}$$

Ընդ որում, համաձայն (7.5.14)-ի

$$|\varepsilon_n|\le C(\alpha)h^2\,, \tag{7.5.16}$$

որտեղ

$$C(\alpha)\equiv\frac{M_3}{6}+\frac{\alpha}{4}(LM_2+M_3)\ : \tag{7.5.17}$$

Այսինքն, (7.5.3) մեթոդը (7.5.15) պայմանով *մոտարկման երկրորդ կարգի* մեթոդ է:

Որպես α և σ պարամետրերի միջև (7.5.15) առնչության արդյունք ստանում ենք, որ (7.5.3) մեթոդի *տեղային սխալանքը* $O(h^3)$ մեծություն է: Իրոք, (7.5.4)-ից ունենք

$$\begin{aligned}u(x_{n+1}) &= u(x_n)+h[(1-\sigma)f(x_n,u(x_n))+\\ &\quad \sigma f(x_n+\alpha h,u(x_n)+\alpha h\,f(x_n,u(x_n)))]+h\,\varepsilon_n\ :\end{aligned} \tag{7.5.18}$$

Ենթադրենք, որ $v_n=u(x_n)$: Այդ դեպքում (7.5.3) և (7.5.18)-ից հետևում է, որ

$$u(x_{n+1})-v_{n+1}=h\,\varepsilon_n\ :$$

Այստեղից, (7.5.16) գնահատականի շնորհիվ

$$|u(x_{n+1})-v_{n+1}|\le C(\alpha)\,h^3\ : \tag{7.5.19}$$

Այսպիսով, (7.5.3) Էյլերի վերահաշվման մեթոդը (7.5.15) լրացուցիչ պայմանով իրենից ներկայացնում է *մոտարկման երկրորդ կարգի* բացահայտ մեթոդների

միապարամետր ընտանիք: Նշենք նաև, որ (7.5.3) մեթոդը պատկանում է *պրեդիկտոր-կոռեկտոր* տիպի մեթոդների դասին: Մեթոդի յուրաքանչյուր քայլը ընդգրկում է իր մեջ երկու փուլ. նախ՝ հաշվարկ ըստ (7.5.1) բանաձևի, որը տալիս է սկզբնական մոտավորություն (*պրեդիկտոր*), այնուհետև՝ v_{n+1} արժեքի ճշգրտումը ըստ (7.5.2) բանաձևի (*կոռեկտոր*):

Գործնականում ամենից հաճախ օգտագործվում են հետևյալ երկու մասնավոր դեպքերը:

- Հոյնի մեթոդը $(\alpha = 1\,,\ \sigma = 0.5)$

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{h} = \frac{1}{2}\left[f(x_n, v_n) + f(x_{n+1}, v_n + hf(x_n, v_n))\right]\,, \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1\,; \quad v_0 = u_0\ : \tag{7.5.20}$$

Մեթոդի քայլը իրականացվում է հետևյալ սխեմայով.

$$\bar{v}_n = v_n + hf(x_n, v_n) \qquad (\textit{պրեդիկտոր})\,. \tag{7.5.21}$$

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, v_n) + f(x_{n+1}, \bar{v}_n)\right] \qquad (\textit{կոռեկտոր})\ : \tag{7.5.22}$$

Երկրաչափորեն v_{n+1}-ի ստացումը ($O(h^3)$ ճշտությամբ) պատկերված է նկ. 7.5.1-ում: Ընդ որում, ինչպես միշտ, ենթադրվում է, որ $v_n = u(x_n)$: Որպես բացատրություն նկարին նշենք, որ $\operatorname{tg}\gamma = (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)/2$, որտեղ $\operatorname{tg}\alpha = u'(x_n)$ և $\operatorname{tg}\beta = u'(x_{n+1})$:

Նկ. 7.5.1 Հոյնի մեթոդի քայլը

- Միջին կետի մեթոդը $(\alpha = 0.5\,,\ \sigma = 1)$

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{h} = f\left(x_n + \frac{h}{2}, v_n + \frac{h}{2} f(x_n, v_n)\right)\,, \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1\,; \quad v_0 = u_0\ : \tag{7.5.23}$$

Այստեղ v_n-ից v_{n+1} անցումը կատարվում է հետևյալ սխեմայով.

$$\bar{v}_n = v_n + \frac{h}{2} f(x_n, v_n) \qquad (\textit{պրեդիկտոր}), \tag{7.5.24}$$

$$v_{n+1} = v_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, v_n\right) \qquad (\textit{կոռեկտոր}) : \tag{7.5.25}$$

Մեթոդի երկրաչափական մեկնաբանությունը ($O(h^3)$ ճշտությամբ) պատկերված է նկ. 7.5.2-ում: Այստեղ $\operatorname{tg}\gamma = u'(x_n + \frac{h}{2})$:

Նկ. 7.5.2 Միջին կետի մեթոդի քայլը

Օրինակ 7.5.1 : Դիտարկենք

$$u' = \frac{1}{2}(x - u), \quad 0 \le x \le 1, \quad u(0) = 1$$

Կոշու խնդիրը, որի ճշգրիտ լուծումն է $u(x) = 3e^{-x/2} + x - 2$ ֆունկցիան: Համեմատենք Էյլերի, Հոյնի և միջին կետի մեթոդներով ստացված մոտավոր լուծումները (ցանցի քայլն է $h = 0.125$): Հաշվարկների արդյունքները տրված են հետևյալ աղյուսակում.

x_n	Էյլերի մեթոդ	Հոյնի մեթոդ	միջին կետի մեթոդ	ճշգրիտ լուծում
0.000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000000
0.125	0.9375	0.9434	0.9434	0.9432392
0.250	0.8867	0.8977	0.8977	0.8974907
0.375	0.8469	0.8624	0.8624	0.8620873
0.500	0.8174	0.8368	0.8368	0.8364023
0.625	0.7976	0.8203	0.8203	0.8198469
0.750	0.7868	0.8124	0.8124	0.8118678
0.875	0.7845	0.8125	0.8125	0.8119456
1.000	0.7902	0.8202	0.8202	0.8195920

Ինչպես տեսնում ենք, Հոյնի և միջին կետի մեթոդները տալիս են ավելի ճշգրիտ արդյունքներ՝ Էյլերի մեթոդի համեմատությամբ: ♣

Այժմ համառոտակի քննարկենք մոտարկման սխալանքով պայմանավորված Էյլերի վերահաշվման մեթոդի գլոբալ սխալանքը: Դիցուք $z = \{z_n\}_{n=0}^{N}$, որտեղ $z_n \equiv u(x_n) - v_n$, ցանցային *սխալանքի ֆունկցիա է*: Էյլերի մեթոդի համար (ինչպես բացահայտ, այնպես էլ անբացահայտ) մենք պարզել ենք, որ ճշտության կարգը համընկնում է մոտարկման կարգի հետ: Նման համապատասխանություն պահպանվում է նաև Էյլերի վերահաշվման մեթոդում: (7.3.25) գնահատականին բերող դատողությունների օգնությամբ դժվար չէ ցույց տալ, որ $||z|| = O(h^2)$: Մասնավորապես, (7.5.20) Հոյնի մեթոդի համար և (7.5.23) միջին կետի մեթոդի համար ճիշտ է

$$||z|| \leq \frac{C(\alpha)}{L(1+0.5hL)} \left(e^{HL(1+0.5hL)} - 1\right) h^2 \qquad (7.5.26)$$

գնահատականը, որտեղ $C(\alpha)$ մեծությունը հաշվվում է (7.5.17) բանաձևով ($\alpha = 1$ (7.5.20) մեթոդի համար և $\alpha = 0.5$ (7.5.23) մեթոդի համար): Թողնում ենք (7.5.26) գնահատականի արտածումը ընթերցողին որպես վարժություն:

Վերջում նշենք, որ Հոյնի և միջին կետի մեթոդները կարելի է ստանալ թվային ինտեգրման բանաձևերի միջոցով: Կիրառելով

$$u(x_{n+1}) = u(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, u(x))\, dx$$

հավասարության աջ մասի ինտեգրալին (6.2.32) սեղանների բանաձևը՝ կստանանք

$$u(x_{n+1}) \approx u(x_n) + \frac{h}{2}\left[f(x_n, u(x_n)) + f(x_{n+1}, u(x_{n+1}))\right]$$

մոտավոր հավասարությունը: Փոխարինենք աջ մասում $u(x_{n+1})$-ը նրա մոտավոր արժեքով.

$$u(x_{n+1}) \approx u(x_n) + hf(x_n, u(x_n)) \ :$$

Դրանով իսկ գալիս ենք Հոյնի մեթոդի (7.5.21), (7.5.22) հաշվարկային բանաձևերի: Իսկ եթե ինտեգրալին կիրառենք միջին ուղղանկյունների բանաձևը, ապա կստանանք

$$u(x_{n+1}) \approx u(x_n) + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, u\left(x_n + \frac{h}{2}\right)\right) \ :$$

Այստեղից, եթե $u(x_n + \frac{h}{2})$-ը փոխարինենք նրա մոտավոր արժեքով, այն է՝

$$u\left(x_n + \frac{h}{2}\right) \approx u(x_n) + \frac{h}{2} f(x_n, u(x_n)),$$

ապա կստանանք միջին կետի (7.5.24), (7.5.25) հաշվարկային բանաձևերը:

7.6 Ռունգե-Կուտայի մեթոդը

Դիտարկենք (7.3.1),(7.3.2) Կոշու խնդրի լուծման առավել գործածելի մեթոդներից մեկը, որը հայտնի է որպես *Ռունգե-Կուտայի մեթոդ*: Այդ մեթոդը գրվում է հետևյալ կերպ.

$$\frac{v_{n+1}-v_n}{h} = \frac{1}{6}\left[k_1^{(n)} + 2k_2^{(n)} + 2k_3^{(n)} + k_4^{(n)}\right], \qquad (7.6.1)$$
$$n = 0, 1, \ldots, N-1; \quad v_0 = u_0,$$

որտեղ

$$\begin{aligned} k_1^{(n)} &= f(x_n, v_n), \\ k_2^{(n)} &= f\left(x_n + \tfrac{h}{2}, v_n + \tfrac{h}{2}k_1^{(n)}\right), \\ k_3^{(n)} &= f\left(x_n + \tfrac{h}{2}, v_n + \tfrac{h}{2}k_2^{(n)}\right), \\ k_4^{(n)} &= f(x_{n+1}, v_n + hk_3^{(n)}) : \end{aligned} \qquad (7.6.2)$$

Ինչպես տեսնում ենք, Ռունգե-Կուտայի մեթոդը միաքայլ բացահայտ մեթոդ է: Մոտավոր լուծման արժեքները հաշվվում են հաջորդաբար, սկսած $v_0 = u_0$-ից, ըստ հետևյալ բանաձևի.

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{6}\left[k_1^{(n)} + 2k_2^{(n)} + 2k_3^{(n)} + k_4^{(n)}\right], \quad n = 0, 1, \ldots, N-1 : \qquad (7.6.3)$$

Ռունգե-Կուտայի մեթոդը ունի *մոտարկման չորրորդ կարգ*: Դիտարկենք արտահայտություն մեթոդի *անկապակցության* կամ *մոտարկման սխալանքի* համար.

$$\varepsilon_n \equiv \frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{h} - \frac{1}{6}\left[\tilde{k}_1^{(n)} + 2\tilde{k}_2^{(n)} + 2\tilde{k}_3^{(n)} + \tilde{k}_4^{(n)}\right], \quad n = 0, 1, \ldots, N-1. \qquad (7.6.4)$$

որտեղ

$$\begin{aligned} \tilde{k}_1^{(n)} &= f(x_n, u(x_n)), \\ \tilde{k}_2^{(n)} &= f\left(x_n + \tfrac{h}{2}, u(x_n) + \tfrac{h}{2}\tilde{k}_1^{(n)}\right), \\ \tilde{k}_3^{(n)} &= f\left(x_n + \tfrac{h}{2}, u(x_n) + \tfrac{h}{2}\tilde{k}_2^{(n)}\right), \\ \tilde{k}_4^{(n)} &= f(x_{n+1}, u(x_n) + h\tilde{k}_3^{(n)}) : \end{aligned} \qquad (7.6.5)$$

Կարելի է ցույց տալ, որ եթե $u(x) \in C^5[x_0, x_0 + H]$, ապա

$$|\varepsilon_n| \le C_{RK} h^4, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1, \qquad (7.6.6)$$

որտեղ C_{RK}-ն դրական հաստատուն է: Այս գնահատականի արտածումը բավականին ծավալուն է, ուստի մենք այն այստեղ չենք բերի (տե՛ս, օրինակ, [4],[27],[34]):

Ռունգե-Կուտայի մեթոդի *տեղային սխալանքը* $O(h^5)$ մեծություն է: Իրոք, (7.6.4)-ից ունենք

$$u(x_{n+1}) = u(x_n) + \frac{h}{6}\left[\tilde{k}_1^{(n)} + 2\tilde{k}_2^{(n)} + 2\tilde{k}_3^{(n)} + \tilde{k}_4^{(n)}\right] + h\,\varepsilon_n : \qquad (7.6.7)$$

Եթե ենթադրենք, որ x_n հանգույցում, որտեղ $0 \le n \le N-1$, մոտավոր և ճշգրիտ լուծումները համընկնում են, ապա (7.6.3) և (7.6.7)-ից կստանանք

$$u(x_{n+1}) - v_{n+1} = h\,\varepsilon_n \ :$$

Այստեղից, հաշվի առնելով (7.6.6) գնահատականը, ունենք

$$|u(x_{n+1}) - v_{n+1}| \le C_{RK} h^5 \ : \tag{7.6.8}$$

Այժմ անցնենք մոտարկման սխալանքով պայմանավորված Ռունգե-Կուտայի մեթոդի գլոբալ սխալանքի գնահատմանը: Ներմուծենք $z = \{z_n\}_{n=0}^{N}$, որտեղ $z_n \equiv u(x_n) - v_n$, ցանցային *սխալանքի ֆունկցիա*: Ինչպես հետևում է (7.6.3) և (7.6.7)-ից, բոլոր $n = 0, 1, \ldots, N-1$ արժեքների համար ճիշտ են

$$|z_{n+1}| \le |z_n| + \frac{h}{6}\left[|\tilde{k}_1^{(n)} - k_1^{(n)}| + 2|\tilde{k}_2^{(n)} - k_2^{(n)}| + 2|\tilde{k}_3^{(n)} - k_3^{(n)}| + |\tilde{k}_4^{(n)} - k_4^{(n)}|\right] + h|\varepsilon_n| \tag{7.6.9}$$

անհավասարությունները: Ունենալով (7.6.2) և (7.6.5) արտահայտությունները համապատասխանաբար $k_i^{(n)}$ և $\tilde{k}_i^{(n)}$ մեծությունների համար և օգտվելով (7.1.13) Լիպշիցի պայմանից՝ դժվար չէ ստանալ հետևյալ գնահատականները.

$$\begin{aligned}
|\tilde{k}_1^{(n)} - k_1^{(n)}| &\le L\,|z_n|\,,\\
|\tilde{k}_2^{(n)} - k_2^{(n)}| &\le L\left(1 + \frac{hL}{2}\right)|z_n|\,.\\
|\tilde{k}_3^{(n)} - k_3^{(n)}| &\le L\left(1 + \frac{hL}{2} + \frac{(hL)^2}{4}\right)|z_n|\,.\\
|\tilde{k}_4^{(n)} - k_4^{(n)}| &\le L\left(1 + hL + \frac{(hL)^2}{2} + \frac{(hL)^3}{4}\right)|z_n| \ :
\end{aligned} \tag{7.6.10}$$

Այնուհետև, (7.6.9) և (7.6.10)-ից հետևում է

$$|z_{n+1}| \le (1 + h\,Q(h))|z_n| + h|\varepsilon_n|$$

անհավասարությունը, որտեղ

$$Q(h) \equiv L\left(1 + \frac{hL}{2} + \frac{(hL)^2}{6} + \frac{(hL)^3}{24}\right) \ : \tag{7.6.11}$$

Ի վերջո, հաշվի առնելով (7.6.6) գնահատականը, կստանանք

$$|z_{n+1}| \le (1 + h\,Q(h))|z_n| + h\,C_{RK} h^4\,, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

անհավասարությունները: Դրանով իսկ z սխալանքի ֆունկցիան բավարարում է 7.3.1 լեմմայի պայմաններին: Քանի որ $z_0 = 0$, ապա համաձայն (7.3.21) անհավասարության՝ կստանանք

$$||z|| \le \frac{C_{RK}}{Q(h)}\left(e^{HQ(h)} - 1\right) h^4 \tag{7.6.12}$$

գնահատականը, որտեղ C_{RK}-ն հաստատուն է (7.6.6)-ից, իսկ $Q(h)$ մեծությունը որոշված է (7.6.11)-ում (նշենք, որ $Q(h) \to L$ երբ $h \to 0$): Այսպիսով, Ռունգե-Կուտայի մեթոդն ունի *չորրորդ կարգի ճշտության*:

Օրինակ 7.6.1 : Կիրառենք Ռունգե-Կուտայի մեթոդը

$$u' = \frac{1}{2}(x - u), \quad 0 \le x \le 1, \quad u(0) = 1$$

Կոշու խնդրի լուծման համար: Խնդրի ճշգրիտ լուծումն է $u(x) = 3e^{-x/2} + x - 2$ ֆունկցիան: Ստորև բերված աղյուսակում տրված են $h = 0.125$ քայլով կատարված հաշվարկների արդյունքները: Համեմատության համար տրված են նաև Հոյնի և միջին կետի մեթոդներով ստացված տվյալները:

x_n	Հոյնի մեթոդ	միջին կետի մեթոդ	Ռունգե-Կուտայի մեթոդ	ճշգրիտ լուծում
0.000	1.0000	1.0000	1.0000000	1.0000000
0.125	0.9434	0.9434	0.9432392	0.9432392
0.250	0.8977	0.8977	0.8974907	0.8974907
0.375	0.8624	0.8624	0.8620874	0.8620873
0.500	0.8368	0.8368	0.8364024	0.8364023
0.625	0.8203	0.8203	0.8198470	0.8198469
0.750	0.8124	0.8124	0.8118679	0.8118678
0.875	0.8125	0.8125	0.8119457	0.8119456
1.000	0.8202	0.8202	0.8195921	0.8195920

Այսպիսով, Ռունգե-Կուտայի մեթոդը տալիս է բավականին լավ մոտարկում խնդրի ճշգրիտ լուծմանը: ♣

Վերջում նշենք կապը Ռունգե-Կուտայի մեթոդի և Սիմպսոնի քառակուսացման բանաձևի միջև: Կիրառելով

$$u(x_{n+1}) = u(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, u(x))\, dx$$

հավասարության աջ մասի ինտեգրալին (6.3.3) Սիմպսոնի բանաձևը՝ կստանանք

$$u(x_{n+1}) \approx u(x_n) + \frac{h}{6}\left[f(x_n, u(x_n)) + 4f\left(x_n + \frac{h}{2}, u\left(x_n + \frac{h}{2}\right)\right) + f(x_{n+1}, u(x_{n+1}))\right]$$

մոտավոր հավասարությունը: Համաձայն (7.6.5)-ում մտցված նշանակումների՝ $f(x_n, u(x_n)) = \tilde{k}_1^{(n)}$: Այնուհետև, ոչ բարդ դատողությունների միջոցով կարելի է ցույց տալ, որ

$$4f\left(x_n + \frac{h}{2}, u\left(x_n + \frac{h}{2}\right)\right) \approx 2(\tilde{k}_2^{(n)} + \tilde{k}_3^{(n)}), \quad f(x_{n+1}, u(x_{n+1})) \approx \tilde{k}_4^{(n)} :$$

Այսինքն,

$$u(x_{n+1}) \approx u(x_n) + \frac{h}{6}\left[\tilde{k}_1^{(n)} + 2\tilde{k}_2^{(n)} + 2\tilde{k}_3^{(n)} + \tilde{k}_4^{(n)}\right].$$

որտեղից էլ հետևում է Ռունգե-Կուտայի մեթոդը:

7.7 Ռունգեի կանոնը և ճշգրտում ըստ Ռիչարդսոնի

Սույն գլխի նախորդ պարագրաֆներում մենք դիտարկել ենք Կոշու խնդրի լուծման միաքայլ մեթոդները. Էյլերի մեթոդը (բացահայտ և անբացահայտ), Էյլերի վերահաշվման մեթոդը և Ռունգե-Կուտայի մեթոդը: Բոլոր մեթոդների համար ստացել ենք ինչպես տեղային, այնպես էլ գլոբալ սխալանքի գնահատականը: Սակայն (7.3.25), (7.4.11), (7.5.26) և (7.6.12) գնահատականների գործնական օգտագործումը կապված է որոշ դժվարությունների հետ և, որպես օրենք, հնարավոր չէ: Բացի այդ, վերջնական արդյունքի վրա որոշակի ազդեցություն են գործում նաև կլորացման սխալանքները: Ուստի, կարևոր նշանակություն են ստանում սխալանքի գնահատման այլ եղանակներ, որոնք չեն պահանջում ինչպես տեսական հաշվարարություններ, այնպես էլ հաշվողական ծախսերի էական ավելացում: Այդպիսի եղանակներից է *Ռունգեի կանոնը*, որի հիմքում ընկած է կրկնակի վերահաշվարկի գաղափարը: Հիշեցնենք, որ այդ կանոնի հետ մենք արդեն առնչվել ենք 6.4 պարագրաֆում քառակուսացման բանաձևերի սխալանքը գնահատելիս:

7.7.1 Ռունգեի կանոնը

Ենթադրենք, որ

$$u'(x) = f(x,u), \quad x_0 \le x \le x_0 + H: \quad u(x_0) = u_0 \tag{7.7.1}$$

Կոշու խնդրի թվային լուծման համար օգտագործվում է *p-րդ կարգի ճշտության* միաքայլ մեթոդը, որտեղ $p \ge 1$: Դիցուք հաշվարկները կատարվում են $h = H/N$ քայլով

$$x_n^{(h)} = x_0 + nh, \quad n = 0, 1, \ldots, N \tag{7.7.2}$$

ցանցի վրա և $v^{(h)} = \{v_n^{(h)}\}_{n=0}^N$՝ մոտավոր լուծումն է: Մեր կողմից դիտարկված բոլոր մեթոդների համար կարելի է նկատել հետևյալ օրինաչափությունը. *մեթոդի ճշտության կարգը մեկով ցածր է տեղային սխալանքի կարգից*: Վերլուծության պարզության համար կենթադրենք, որ ամեն մի քայլում կատարվող սխալանքը մոտավորապես նույնն է և հավասար է Ch^{p+1}, որտեղ C-ն ինչ-որ ոչ զրոյական հաստատուն է: Այդ դեպքում $x_{n+1}^{(h)}$ հանգույցում սխալանքի համար, որտեղ $0 \le n \le N-1$, ունենք

$$z_{n+1}^{(h)} \equiv u(x_{n+1}^{(h)}) - v_{n+1}^{(h)} \approx (n+1)Ch^{p+1}: \tag{7.7.3}$$

Երկու անգամ փոքրացնենք ցանցի քայլը՝ վերցնելով այն հավասար $h/2$-ի: Նոր մանրացված ցանցի

$$x_k^{(h/2)} = x_0 + k\,\frac{h}{2}, \quad k = 0, 1, \ldots, 2N \tag{7.7.4}$$

հանգույցները ներառում են (7.7.2) ցանցի բոլոր հանգույցները, այն է՝

$$x_{2n}^{(h/2)} = x_n^{(h)}, \quad n = 0, 1, \ldots, N \tag{7.7.5}$$

(տե՛ս նկ. 7.7.1): Դիցուք $v^{(h/2)} = \{v_k^{(h/2)}\}_{k=0}^{2N}$ (7.7.1) խնդրի նույն մեթոդով ստացված մոտավոր լուծումն է (7.7.4) ցանցի վրա: Համանմանորեն (7.7.3)-ին, $x_{2(n+1)}^{(h/2)}$ հանգույցում, որտեղ $0 \le n \le N-1$, ունենք

$$z_{2(n+1)}^{(h/2)} \equiv u(x_{2(n+1)}^{(h/2)}) - v_{2(n+1)}^{(h/2)} \approx 2(n+1)C\left(\frac{h}{2}\right)^{p+1} \tag{7.7.6}$$

Դրանով իսկ (7.7.3) և (7.7.6)-ից, հաշվի առնելով (7.7.5) առնչությունը, գտնում ենք

$$z_{2(n+1)}^{(h/2)} \approx \frac{z_{n+1}^{(h)}}{2^p} \ : \tag{7.7.7}$$

Այնուհետև,

$$z_{2(n+1)}^{(h/2)} = u(x_{2(n+1)}^{(h/2)}) - v_{2(n+1)}^{(h/2)} = u(x_{n+1}^{(h)}) - v_{2(n+1)}^{(h/2)} =$$
$$z_{n+1}^{(h)} + v_{n+1}^{(h)} - v_{2(n+1)}^{(h/2)} \approx 2^p z_{2(n+1)}^{(h/2)} + v_{n+1}^{(h)} - v_{2(n+1)}^{(h/2)} \ :$$

Այստեղից սխալանքի գնահատման համար ստանում ենք

$$z_{2(n+1)}^{(h/2)} \approx \frac{v_{2(n+1)}^{(h/2)} - v_{n+1}^{(h)}}{2^p - 1} \tag{7.7.8}$$

մոտավոր բանաձևը:

Նկ. 7.7.1 Ռունգեի կանոնի արտածման վերաբերյալ պատկերը

7.7.2 Ճշգրտում ըստ Ռիչարդսոնի

Պարզվում է, որ (7.7.8) բանաձևի աջ մասի

$$E_{2(n+1)}^{(h/2)} \equiv \frac{v_{2(n+1)}^{(h/2)} - v_{n+1}^{(h)}}{2^p - 1} \tag{7.7.9}$$

մեծությունը կարելի է օգտագործել մոտավոր լուծման ճշգրտման համար: Իրոք, առանձնացնենք մեթոդի յուրաքանչյուր քայլում ստացվող սխալանքի գլխավոր մասը՝ ներկայացնելով այդ սխալանքը

$$C_1 h^{p+1} + O(h^{p+2})$$

տեսքով, որտեղ C_1-ը ինչ-որ ոչ զրոյական հաստատուն է: Այդ դեպքում, հաշվի առնելով այդ ճշտումը, գրենք (7.7.3) և (7.7.6) մոտավոր հավասարությունները որպես

$$z_{n+1}^{(h)} = u(x_{n+1}^{(h)}) - v_{n+1}^{(h)} \approx (n+1)C_1 h^{p+1} + O(h^{p+1}) \tag{7.7.10}$$

և

$$z_{2(n+1)}^{(h/2)} = u(x_{2(n+1)}^{(h/2)}) - v_{2(n+1)}^{(h/2)} \approx 2(n+1)C_1 \left(\frac{h}{2}\right)^{p+1} + O(h^{p+1}) \tag{7.7.11}$$

համապատասխանաբար (նշենք, որ բավականաչափ մեծ n-երի համար $nh = O(1)$): Դրանով իսկ (7.7.10) և (7.7.11)-ից ունենք

$$u(x_{n+1}^{(h)}) \approx v_{n+1}^{(h)} + (n+1)C_1 h^{p+1} + O(h^{p+1}) \tag{7.7.12}$$

և

$$u(x_{2(n+1)}^{(h/2)}) \approx v_{2(n+1)}^{(h/2)} + (n+1)C_1 \frac{h^{p+1}}{2^p} + O(h^{p+1}) \ : \tag{7.7.13}$$

Հանելով 2^p-ով բազմապատկված (7.7.13) հավասարությունից (7.7.12) հավասարությունը՝ կստանանք

$$u(x_{2(n+1)}^{(h/2)}) \approx \frac{2^p v_{2(n+1)}^{(h/2)} - v_{n+1}^{(h)}}{2^p - 1} + O(h^{p+1}) \ : \tag{7.7.14}$$

Վերջին մոտավոր հավասարության աջ մասի

$$V_{2(n+1)}^{(h/2)} \equiv \frac{2^p v_{2(n+1)}^{(h/2)} - v_{n+1}^{(h)}}{2^p - 1} \tag{7.7.15}$$

մեծությունը կոչվում է *ճշգրտված ըստ Ռիչարդսոնի* մոտավոր լուծում (7.7.4) ցանցի $x_{2(n+1)}^{(h/2)}$ հանգույցում: Ինչպես երևում է (7.7.14)-ից, $V_{2(n+1)}^{(h/2)}$ լուծման ճշտության կարգը հավասար է $(p+1)$-ի, թեև կիրառվող մեթոդը ունի ճշտության p-րդ կարգ: Այսպիսով, խնդրի լուծումը երկու ցանցերի վրա թույլ է տալիս բարձրացնել արդյունքների ճշտությունը: Վերջապես, (7.7.9) և (7.7.15)-ից հեշտությամբ հետևում է, որ

$$V_{2(n+1)}^{(h/2)} = v_{2(n+1)}^{(h/2)} + E_{2(n+1)}^{(h/2)} \ : \tag{7.7.16}$$

Այդ պատճառով $E_{2(n+1)}^{(h/2)}$ մեծությունը (7.7.9)-ից կոչվում է մոտավոր լուծման *շտկում ըստ Ռիչարդսոնի* (7.7.4) ցանցի $x_{2(n+1)}^{(h/2)}$ հանգույցում:

7.7.3 Սխալանքի վերահսկումը քայլի վրա

Վերը ստացված (7.7.8) բանաձևը, այսինքն՝ $E_{2(n+1)}^{(h/2)}$ մեծությունը կարելի է օգտագործել հաշվարկների ճշտության վերահսկման նպատակով և քայլի ավտոմատիկ փոփոխման համար: Դա կարելի է իրականացնել, օրինակ, հետևյալ կերպ: Ընտրվում է բավականին փոքր $\varepsilon > 0$ թիվ: Եթե $|E_{2(n+1)}^{(h/2)}| \leq \varepsilon$, ապա հասած ճշտությունը համարվում է բավարար, և ընթացքը շարունակվում է նույն քայլով: Ավելին, եթե $|E_{2(n+1)}^{(h/2)}| \ll \varepsilon$, ապա կարելի է փորձել այնուհետև շարժվել ավելի մեծ քայլով (օրինակ, $2h$ քայլով): Իսկ եթե $|E_{2(n+1)}^{(h/2)}| > \varepsilon$, ապա ճշտությունը համարվում է անբավարար: Այդ դեպքում կարելի է ետ դառնալ $x_n^{(h)}$ հանգույցը և կրկնել հաշվարկները ավելի փոքր քայլով (օրինակ, $h/2$ քայլով): Այդպիսի բավականին պարզ քայլի փոփոխման եղանակը հաճախ թույլ է տալիս լուծել խնդիրը էապես քիչ հաշվողական ծախսերով՝ հաստատուն քայլի համեմատությամբ՝ միաժամանակ պահպանելով արդյունքի ճշտությունը:

7.8 Ադամսի մեթոդը

Վերը դիտարկված Ռունգե-Կուտայի մեթոդը

$$u'(x) = f(x, u), \quad x_0 \leq x \leq x_0 + H; \quad u(x_0) = u_0 \tag{7.8.1}$$

Կոշու խնդրի լուծման համար ունի ինչպես բարձր ճշտություն, այնպես էլ բավականին պարզ հաշվողական սխեմա: Միաժամանակ, ցանցի որոշ հանգույցում մոտավոր լուծումը ստանալու համար պետք է հաշվել (7.8.1) հավասարման աջ մասի արժեքները չորս կետում (տե՛ս (7.6.1) և (7.6.2) բանաձևերը): Եթե հավասարման աջ մասը բավականին բարդ է, ապա դա կապված է որոշակի հաշվողական ծախսերի հետ: Սույն պարագրաֆում մենք կշարադրենք բազմաքայլ տարբերական *Ադամսի մեթոդը*, որի կիրառումը պահանջում է ամեն մի քայլում հավասարման աջ մասի միապատիկ հաշվարկ: Տարբերում են Ադամսի մեթոդի երկու տարբերակ, այն է՝ *Ադամս-Բաշֆորտի մեթոդ* (որն անվանում են նաև *էքստրապոլացիոն մեթոդ*) և *Ադամս-Մոուլտոնի մեթոդ* (կամ *ինտերպոլացիոն մեթոդ*):

7.8.1 Ադամս-Բաշֆորտի մեթոդը

Ընտրենք $[x_0, x_0 + H]$ հատվածում

$$x_n = x_0 + nh, \quad n = 0, 1, \ldots, N; \quad h = \frac{H}{N} \tag{7.8.2}$$

հավասարաչափ ցանց: Վերցնենք ինչ-որ ամբողջ թիվ $p \geq 0$ (սովորաբար, $p \ll N$): Գրենք

$$u(x_{n+1}) = u(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} u'(x)\, dx \tag{7.8.3}$$

ակնհայտ նույնությունը: Ենթադրելով, որ $n \geq p$, փոխարինենք $[x_n, x_{n+1}]$ հատվածում $u'(x)$ ենթաինտեգրալային ֆունկցիան $x_{n-p}, \ldots, x_{n-1}, x_n$ հանգույցներով կառուցված p-րդ աստիճանի ինտերպոլացիոն բազմանդամով: Համաձայն (4.2.6) Լագրանժի բանաձևի՝ ունենք

$$u'(x) = \sum_{k=0}^{p} u'(x_{n-k}) \frac{\omega_{p+1}(x)}{(x - x_{n-k})\omega'_{p+1}(x_{n-k})} + R_p(x), \tag{7.8.4}$$

որտեղ $\omega_{p+1}(x) \equiv (x - x_{n-p}) \ldots (x - x_{n-1})(x - x_n)$, իսկ $R_p(x)$-ը մնացորդային անդամ է: Եթե $u(x) \in C^{p+2}[x_0, x_0 + H]$, ապա համաձայն ինտերպոլացիայի սխալանքի համար (4.3.4) բանաձևի՝

$$R_p(x) = \frac{u^{(p+2)}(\xi)}{(p+1)!} \omega_{p+1}(x), \quad \xi \in (x_{n-p}, x_n) : \tag{7.8.5}$$

Ինտեգրելով $u'(x)$-ի (7.8.4) արտահայտությունը՝ (7.8.3) նույնությունից կստանանք

$$u(x_{n+1}) = u(x_n) + \sum_{k=0}^{p} u'(x_{n-k}) \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{\omega_{p+1}(x)}{(x - x_{n-k})\omega'_{p+1}(x_{n-k})} dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} R_p(x)\, dx : \tag{7.8.6}$$

Կատարենք (7.8.6) հավասարության աջ մասի ինտեգրալներում $t = (x - x_n)/h$ փոփոխականի փոխարինում: Պարզ ձևափոխությունների միջոցով կստանանք

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{\omega_{p+1}(x)}{(x - x_{n-k})\omega'_{p+1}(x_{n-k})} dx = h(-1)^k \frac{C_p^k}{p!} \int_0^1 \frac{t(t+1)\ldots(t+p)}{t+k} dt \tag{7.8.7}$$

և

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} R_p(x)\, dx = \frac{h^{p+2}}{(p+1)!} \int_0^1 u^{(p+2)}(\xi) t(t+1)\ldots(t+p)\, dt : \tag{7.8.8}$$

Ներմուծենք հետևյալ նշանակումները.

$$A_k \equiv (-1)^k \frac{C_p^k}{p!} \int_0^1 \frac{t(t+1)\ldots(t+p)}{t+k} dt, \quad k = 0, 1, \ldots, p \tag{7.8.9}$$

և

$$\varepsilon_n \equiv \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} \int_0^1 u^{(p+2)}(\xi) t(t+1)\ldots(t+p)\, dt : \tag{7.8.10}$$

Արդյունքում (7.8.6) - (7.8.10)-ից կստանանք

$$u(x_{n+1}) = u(x_n) + h \sum_{k=0}^{p} A_k f(x_{n-k}, u(x_{n-k})) + h\,\varepsilon_n \tag{7.8.11}$$

կամ

$$\frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{h} = \sum_{k=0}^{p} A_k f(x_{n-k}, u(x_{n-k})) + \varepsilon_n \ : \qquad (7.8.12)$$

Դեն նետելով (7.8.12) հավասարության մեջ ε_n մեծությունը՝ գալիս ենք հետևյալ տարբերական մեթոդին.

$$\begin{gathered} \frac{v_{n+1} - v_n}{h} = \sum_{k=0}^{p} A_k f(x_{n-k}, v_{n-k}) , \\ n = p, p+1, \ldots, N-1 , \\ v_0 = u_0 ; \quad v_1, v_2, \ldots, v_p \text{ – տրված են} , \end{gathered} \qquad (7.8.13)$$

որը կոչվում է *Ադամս-Բաշֆորտի մեթոդ*: Այս մեթոդը անվանում են նաև *Ադամսի էքստրապոլացիոն մեթոդ*, քանի որ ինտերպոլացիոն բազմանդամը $u'(x)$ ֆունկցիայի համար կառուցվել է ըստ $[x_{n-p}, x_n]$ հատվածին պատկանող հանգույցների, իսկ կիրառվել է $[x_n, x_{n+1}]$ հատվածում, այսինքն ըստ էության կատարվել է *էքստրապոլացիա*:

Մոտավոր լուծման արժեքները, սկսված v_{p+1}-ից, որոշվում են հաջորդաբար

$$v_{n+1} = v_n + h \sum_{k=0}^{p} A_k f(x_{n-k}, v_{n-k}) , \quad n = p, p+1, \ldots, N-1 \qquad (7.8.14)$$

բացահայտ բանաձևով: Այսպիսով, համաձայն 7.3 պարագրաֆում ընդունված տարբերական մեթոդների դասակարգման, Ադամս-Բաշֆորտի մեթոդը *բազմաքայլ բացահայտ մեթոդ է* (եթե $p > 0$):

Ինչպես երևում է (7.8.12) և (7.8.13)-ից, ε_n մեծությունը իրենից ներկայացնում է մեթոդի *անկապակցություն* կամ *մոտարկման սխալանք*: Օգտվելով (7.8.10) արտահայտությունից՝ հեշտ է ցույց տալ, որ

$$|\varepsilon_n| \le M_{p+2} h^{p+1} , \qquad (7.8.15)$$

որտեղ $M_{p+2} \equiv \max\limits_{x_0 < x < x_0 + H} |u^{(p+2)}(x)|$: Այսինքն, (7.8.13) մեթոդն ունի *մոտարկման* $(p+1)$*-րդ կարգ*: Ընդ որում, *տեղային սխալանքը* $O(h^{p+2})$ մեծություն է: Իրոք, եթե ենթադրենք, որ $x_{n-p}, \ldots, x_{n-1}, x_n$ հանգույցներում ճշգրիտ և մոտավոր լուծումները համընկնում են, ապա (7.8.11),(7.8.14) և (7.8.15)-ից ակնհայտորեն ստանում ենք հետևյալ գնահատականը.

$$|u(x_{n+1}) - v_{n+1}| = h\,|\varepsilon_n| \le M_{p+2} h^{p+2} \ : \qquad (7.8.16)$$

Դիտողություն 7.8.1 : *Որպեսզի (7.8.14) բանաձևով հաշվենք v_{p+1} առաջին արժեքը, մեզ բացի v_0-ից անհրաժեշտ են նաև $v_1, v_2, \ldots, v_p$ "մեկնարկային" արժեքները: Այդ նպատակով կարելի է օգտագործել միաքայլ մեթոդները, օրինակ, Ռունգե-Կուտայի մեթոդը:*

Դիտարկենք Ադամս-Բաշֆորտի մեթոդի մի քանի մասնավոր դեպք: Տալով p-ին տարբեր արժեքներ, (7.8.9) և (7.8.14)-ից ստանում ենք հետևյալ հաշվարկային բանաձևերը.

ա) $p = 0$ դեպքը՝

$$v_{n+1} = v_n + hf(x_n, v_n), \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

(Էյլերի մեթոդ),

բ) $p = 1$ դեպքը՝

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{2}\left[3f(x_n, v_n) - f(x_{n-1}, v_{n-1})\right], \quad n = 1, 2, \ldots, N-1,$$

գ) $p = 2$ դեպքը՝

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{12}\left[23f(x_n, v_n) - 16f(x_{n-1}, v_{n-1}) + 5f(x_{n-2}, v_{n-2})\right],$$
$$n = 2, 3, \ldots, N-1 :$$

Գնահատենք այժմ Ադամս-Բաշֆորտի մեթոդի մոտարկման սխալանքով պայմանավորված գլոբալ սխալանքը: Դիցուք $z = \{z_n\}_{n=0}^{N}$, որտեղ $z_n \equiv u(x_n) - v_n$, ցանցային *սխալանքի ֆունկցիա է*: Այդ դեպքում (7.8.11) և (7.8.14)-ից ակնհայտորեն հետևում են

$$|z_{n+1}| \le |z_n| + h\sum_{k=0}^{p} |A_k|\,|f(x_{n-k}, u(x_{n-k})) - f(x_{n-k}, v_{n-k})| + h\,|\varepsilon_n|$$

անհավասարությունները, որտեղ $n = p, p+1, \ldots, N-1$: Լիպշիցի (7.1.13) պայմանի պատճառով ունենք

$$|f(x_{n-k}, u(x_{n-k})) - f(x_{n-k}, v_{n-k})| \le L\,|z_{n-k}| :$$

Ուստի

$$|z_{n+1}| \le |z_n| + hL\sum_{k=0}^{p} |A_k|\,|z_{n-k}| + h\,|\varepsilon_n| :$$

Այստեղից, օգտվելով (7.8.15) գնահատականից, ստանում ենք

$$|z_{n+1}| \le |z_n| + hAL\sum_{k=0}^{p} |z_{n-k}| + hE, \quad n = p, p+1, \ldots, N-1 \tag{7.8.17}$$

անհավասարությունները, որտեղ

$$A \equiv \max_{0\le k\le p} |A_k|, \quad E \equiv M_{p+2}h^{p+1} : \tag{7.8.18}$$

Շարունակենք ձևափոխությունները: Հաջորդաբար կիրառելով (7.8.17) անհավասարությունները, կստանանք

$$|z_{n+1}| \le |z_p| + hAL \sum_{m=p}^{n} \sum_{k=0}^{p} |z_{m-k}| + (n-p+1)hE\,, \quad n = p, p+1, \ldots, N-1\,,$$

իսկ քանի որ $(n-p+1)h \le Nh = H$ (տե՛ս (7.8.2)), ապա

$$|z_{n+1}| \le |z_p| + hAL \sum_{m=p}^{n} \sum_{k=0}^{p} |z_{m-k}| + HE\,, \quad n = p, p+1, \ldots, N-1\ :$$

Այնուհետև,

$$\begin{aligned} |z_{n+1}| \ \le\ & |z_p| + hAL(|z_0| + 2|z_1| + \cdots + (p+1)|z_p|) + \\ & hAL(p+1) \sum_{k=p+1}^{n} |z_k| + HE\,, \\ & n = p, p+1, \ldots, N-1\ : \end{aligned} \tag{7.8.19}$$

Դիցուք $v_1, v_2, \ldots, v_p$ "մեկնարկային" արժեքները հաշվված են δ ճշտությամբ, այսինքն՝

$$|z_k| \le \delta\,, \quad k = 1, 2, \ldots, p\ : \tag{7.8.20}$$

Այդ դեպքում (7.8.19)-ից, հաշվի առնելով $z_0 = 0$՝ կստանանք

$$\begin{aligned} |z_{n+1}| \le \left(1 + hAL\,\frac{p(p+3)}{2}\right)\delta + hAL(p+1) \sum_{k=p+1}^{n} |z_k| + HE\,, \\ n = p, p+1, \ldots, N-1\ : \end{aligned} \tag{7.8.21}$$

Նշանակումների պարզեցման նպատակով ներմուծենք հետևյալ նշանակումները.

$$a \equiv \left(1 + hAL\,\frac{p(p+3)}{2}\right)\delta\,, \quad b \equiv hAL(p+1)\,, \quad c \equiv HE\ : \tag{7.8.22}$$

Այդ դեպքում (7.8.21) անհավասարությունները կգրվեն

$$|z_{n+1}| \le a + b \sum_{k=p+1}^{n} |z_k| + c\,, \quad n = p, p+1, \ldots, N-1$$

տեսքով: Ելնելով վերջին անհավասարությունից՝ ըստ n-ի մաթեմատիկական ինդուկցիայի օգնությամբ դժվար չէ ցույց տալ, որ

$$|z_n| \le (a+c)(1+b)^{n-p-1}\,, \quad n = p+1, p+2, \ldots, N\ :$$

Այնուհետև, օգտվելով b մեծության արտահայտությունից (տե՛ս (7.8.22)), կստանանք

$$\begin{aligned} |z_n| \ &\le\ (a+c)(1+b)^{N-p-1} \le (a+c)(1+b)^N \le (a+c)(1+hAL(p+1))^N \\ &=\ (a+c)\left(1 + \frac{ALH(p+1)}{N}\right)^N \le (a+c)e^{ALH(p+1)}\ : \end{aligned}$$

Վերջապես, տեղադրելով արտահայտություններ a և c մեծությունների համար (7.8.22)-ից և E մեծության համար (7.8.18)-ից, ստանում ենք հետևյալ անհավասարությունները.

$$|z_n| \le e^{ALH(p+1)} \left[\left(1 + hAL\,\frac{p(p+3)}{2} \right) \delta + HM_{p+2} h^{p+1} \right], \qquad (7.8.23)$$
$$n = p+1, p+2, \ldots, N \ :$$

Այսպիսով, (7.8.20) և (7.8.23)-ից հետևում է

$$||z|| \le C_1 \delta + C_2 h^{p+1} \qquad (7.8.24)$$

գնահատականը, որտեղ

$$C_1 \equiv e^{ALH(p+1)} \left(1 + hAL\,\frac{p(p+3)}{2} \right), \quad C_2 \equiv e^{ALH(p+1)} HM_{p+2} \ :$$

Ինչպես երևում է (7.8.24) գնահատականից, *ճշտության* $(p+1)$ *-րդ կարգ* ստանալու համար $v_1, v_2, \ldots, v_p$ "մեկնարկային" արժեքները պետք է նույնպես հաշվվեն $\delta = O(h^{p+1})$ ճշտությամբ (տե՛ս 7.8.1 դիտողությունը):

7.8.2 Ադամս-Մոուլտոնի մեթոդը

Դիցուք $p \ge 0$ ինչ-որ ամբողջ թիվ է ($p \ll N$): Ենթադրելով $n \ge p-1$, փոխարինենք (7.8.3) նույնությունում $u'(x)$ ենթաինտեգրալային ֆունկցիան $x_{n-p+1}, \ldots, x_n, x_{n+1}$ հանգույցներով կառուցված p-րդ աստիճանի ինտերպոլացիոն բազմանդամով: Օգտվելով (4.2.6) Լագրանժի բանաձևից՝ ունենք

$$u'(x) = \sum_{k=0}^{p} u'(x_{n-k+1}) \frac{\omega_{p+1}(x)}{(x - x_{n-k+1})\omega'_{p+1}(x_{n-k+1})} + R_p(x), \qquad (7.8.25)$$

որտեղ $\omega_{p+1}(x) \equiv (x - x_{n-p+1}) \ldots (x - x_n)(x - x_{n+1})$, իսկ $R_p(x)$-ը մնացորդային անդամ է: Եթե $u(x) \in C^{p+2}[x_0, x_0 + H]$, ապա, համաձայն ինտերպոլացիայի սխալանքի համար (4.3.4) բանաձևի՝

$$R_p(x) = \frac{u^{(p+2)}(\xi)}{(p+1)!}\,\omega_{p+1}(x), \quad \xi \in (x_{n-p+1}, x_{n+1}) \ : \qquad (7.8.26)$$

Ինտեգրելով $u'(x)$ ածանցյալի (7.8.25) արտահայտությունը՝ (7.8.3)-ից կստանանք

$$u(x_{n+1}) = u(x_n) + \sum_{k=0}^{p} u'(x_{n-k+1}) \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{\omega_{p+1}(x)}{(x - x_{n-k+1})\omega'_{p+1}(x_{n-k+1})}\,dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} R_p(x)\,dx \ : \qquad (7.8.27)$$

Կատարենք (7.8.27) հավասարության աջ մասի ինտեգրալներում $t = (x - x_{n+1})/h$ փոփոխականի փոխարինում: Արդյունքում կստանանք

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{\omega_{p+1}(x)}{(x - x_{n-k+1})\omega'_{p+1}(x_{n-k+1})}\, dx = h(-1)^k \frac{C_p^k}{p!} \int_{-1}^{0} \frac{t(t+1)\dots(t+p)}{t+k}\, dt \qquad (7.8.28)$$

և

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} R_p(x)\, dx = \frac{h^{p+2}}{(p+1)!} \int_{-1}^{0} u^{(p+2)}(\xi) t(t+1)\dots(t+p)\, dt\ : \qquad (7.8.29)$$

Ներմուծենք հետևյալ նշանակումները.

$$B_k \equiv (-1)^k \frac{C_p^k}{p!} \int_{-1}^{0} \frac{t(t+1)\dots(t+p)}{t+k}\, dt\,, \quad k = 0, 1, \dots, p \qquad (7.8.30)$$

և

$$\varepsilon_n \equiv \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} \int_{-1}^{0} u^{(p+2)}(\xi) t(t+1)\dots(t+p)\, dt\ : \qquad (7.8.31)$$

Այսպիսով, (7.8.27)-(7.8.31)-ից ունենք

$$u(x_{n+1}) = u(x_n) + h \sum_{k=0}^{p} B_k f(x_{n-k+1}, u(x_{n-k+1})) + h\,\varepsilon_n \qquad (7.8.32)$$

կամ

$$\frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{h} = \sum_{k=0}^{p} B_k f(x_{n-k+1}, u(x_{n-k+1})) + \varepsilon_n\ : \qquad (7.8.33)$$

Դեն նետելով (7.8.33) հավասարությունում ε_n մեծությունը՝ ստանում ենք հետևյալ տարբերական մեթոդը.

$$\begin{gathered} \frac{v_{n+1} - v_n}{h} = \sum_{k=0}^{p} B_k f(x_{n-k+1}, v_{n-k+1})\,, \\ n = p-1, p, \dots, N-1\,, \\ v_0 = u_0\,; \quad v_1, v_2, \dots, v_{p-1} \text{ — տրված են}\,, \end{gathered} \qquad (7.8.34)$$

որը կոչվում է *Ադամս-Մոուլտոնի մեթոդ*: Այդ մեթոդն անվանում են նաև *Ադամսի ինտերպոլացիոն մեթոդ*:

Մոտավոր լուծման արժեքները, սկսված v_p-ից, որոշվում են

$$v_{n+1} = v_n + h \sum_{k=0}^{p} B_k f(x_{n-k+1}, v_{n-k+1})\,, \quad n = p-1, p, \dots, N-1 \qquad (7.8.35)$$

հավասարումներից: Այսպիսով, Ադամս-Մոուլտոնի մեթոդը, երբ $p > 1$, *բազմաքայլ անբացահայտ մեթոդ է*:

Համեմատելով (7.8.33) և (7.8.34)-ը՝ տեսնում ենք, որ ε_n մեծությունը իրենից ներկայացնում է մեթոդի *անկապակցություն* կամ *մոտարկման սխալանք*: Օգտվելով (7.8.31) արտահայտությունից՝ դժվար չէ ցույց տալ, որ

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{M_{p+2}}{p+1} h^{p+1} \ : \tag{7.8.36}$$

Դա նշանակում է, որ Ադամս-Մոուլտոնի մեթոդը ունի *մոտարկման* $(p+1)$*-րդ կարգ*: Ընդ որում, մեթոդի *տեղային սխալանքը*, ինչպես և Ադամս-Բաշֆորտի մեթոդում, $O(h^{p+2})$ մեծություն է (դրա ապացույցը թողնում ենք ընթերցողին): Այստեղ մենք դուրս չենք բերելու Ադամս-Մոուլտոնի մեթոդի գլոբալ սխալանքի գնահատականը (տե՛ս, օրինակ, [4]): Նշենք միայն, որ եթե $v_1, v_2, \ldots, v_{p-1}$ "մեկնարկային" արժեքները հաշվված են $O(h^{p+1})$ ճշտությամբ, ապա գլոբալ սխալանքը նույնպես ունի այդ ճշտությունը:

Դիտարկենք Ադամս-Մոուլտոնի մեթոդի մի քանի մասնավոր դեպք: Համաձայն (7.8.30) և (7.8.35)-ի ստանում ենք հետևյալ հաշվարկային բանաձևերը.

ա) $p = 0$ դեպքը՝

$$v_{n+1} = v_n + hf(x_{n+1}, v_{n+1}), \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

(Էյլերի անբացահայտ մեթոդ),

բ) $p = 1$ դեպքը՝

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{2}\left[f(x_{n+1}, v_{n+1}) + f(x_n, v_n)\right], \quad n = 0, 1, \ldots, N-1,$$

գ) $p = 2$ դեպքը՝

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{12}\left[5f(x_{n+1}, v_{n+1}) + 8f(x_n, v_n) - f(x_{n-1}, v_{n-1})\right],$$
$$n = 1, 2, \ldots, N-1,$$

դ) $p = 3$ դեպքը՝

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{24}\left[9f(x_{n+1}, v_{n+1}) + 19f(x_n, v_n) - 5f(x_{n-1}, v_{n-1}) + f(x_{n-2}, v_{n-2})\right],$$
$$n = 2, 3, \ldots, N-1 \ :$$

7.8.3 Պրեդիկտոր-կոռեկտոր տիպի մեթոդներ

Ադամս-Մոուլտոնի մեթոդը տալիս է ոչ թե v_{n+1}-ի հաշվման բացահայտ բանաձև, այլ հավասարում (ընդհանուր դեպքում՝ ոչ գծային) այդ արժեքի որոշման համար:

Բնական է, որ Ադամս-Մոուլտոնի մեթոդի թվային իրականացումը ավելի բարդ է, քան Ադամս-Բաշֆորտի մեթոդինը: Սակայն, չնայաց դրան, Ադամս-Մոուլտոնի մեթոդը նույնպես օգտագործվում է: Բանն այն է, որ մեթոդի հիմքում դրված ինտերպոլացիայի հանգույցների դասավորությունը ավելի հաջող է, քան Ադամս-Բաշֆորտի մեթոդում: Այդ պատճառով Ադամս-Մոուլտոնի մեթոդը տալիս է, ընդհանրապես, ավելի ճշգրիտ արդյունք՝ նույն թվով ինտերպոլացիայի հանգույցներ օգտագործելիս (տես, օրինակ, [22]):

Գործնականում լայնորեն կիրառվում է երկու մեթոդների միասնական օգտագործումը: Դա այսպես կոչված *պրեդիկտոր-կոռեկտոր* մեթոդներն են (այլ կերպ ասած, *նախագուշակման* և *շտկման* մեթոդներ): Դրանց էությունը կայանում է նրանում, որ սկզբից Ադամս-Բաշֆորտի բացահայտ մեթոդով գտնվում է ընթացիկ հանգույցում ճշգրիտ լուծման սկզբնական մոտավորությունը (*նախագուշակում*), իսկ այնուհետև այդ արժեքը Ադամս-Մոուլտոնի մեթոդի միջոցով ճշգրտվում է (*շտկում*): Ավելի ճիշտ, հաշվողական սխեման գրվում է հետևյալ կերպ.

$$
\begin{aligned}
v_{n+1}^{AB} &= v_n + h\sum_{k=0}^{p} A_k f(x_{n-k}, v_{n-k}),\\
v_{n+1} &= v_n + h\sum_{k=1}^{p} B_k f(x_{n-k+1}, v_{n-k+1}) + hB_0 f(x_{n+1}, v_{n+1}^{AB}),
\end{aligned}
\tag{7.8.37}
$$

$$n = p, p+1, \ldots, N-1 :$$

Որոշ դեպքերում իմաստ ունի կատարել մի քանի լրացուցիչ իտերացիա.

$$
\begin{aligned}
& w^{(0)} = v_n + h\sum_{k=0}^{p} A_k f(x_{n-k}, v_{n-k})\\
& Q = v_n + h\sum_{k=1}^{p} B_k f(x_{n-k+1}, v_{n-k+1})\\
& \text{for } i = 1, 2, \ldots, l \text{ do}\\
& \qquad w^{(l)} = Q + hB_0 f(x_{n+1}, w^{(l-1)})\\
& \text{end}\\
& v_{n+1} = w^{(l)}
\end{aligned}
$$

Այսպիսով, պրեդիկտոր-կոռեկտոր տիպի մեթոդները բացահայտ մեթոդներ են:

7.9 Կայունության խնդիրը և կոշտ հավասարումներ

Թվային ալգորիթմների կարևորագույն հատկություններից է *կայունությունը*: Այս հասկացությանը բազմիցս առնչվել ենք մեր դասընթացի նախորդ բաժիններում: Սույն պարագրաֆում կքննարկենք այս գաղափարը սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համար Կոշու խնդրի լուծման տարբերական մեթոդների կիրարկմամբ: Ընդ որում, մենք կտարբերենք ինչպես բուն դիֆերենցիալ հավասարումների, այնպես էլ նրանց լուծման տարբերական մեթոդների կայունությունը:

7.9.1 Դիֆերենցիալ հավասարումների կայունությունը

Նախ և առաջ դիտարկենք երկու օրինակ:

Օրինակ 7.9.1 : Դիցուք տրված է

$$\begin{aligned} &u' = xu(u-2), \quad x \geq 0, \\ &u(0) = u_0 \end{aligned} \tag{7.9.1}$$

Կոշու խնդիրը: Այս խնդրի լուծումը

$$u(x) = \frac{2u_0}{u_0 + (2-u_0)e^{x^2}}$$

ֆունկցիան է: Եթե $u_0 = 2$, ապա $u(x) \equiv 2$: Եթե $u_0 = 2 - \varepsilon$, որտեղ $\varepsilon > 0$, ապա

$$u(x) = \frac{2(2-\varepsilon)}{2 - \varepsilon + \varepsilon e^{x^2}} \ :$$

Այս դեպքում $u(x) \to 0$ երբ $x \to \infty$: Իսկ եթե $u_0 = 2 + \varepsilon$, որտեղ $\varepsilon > 0$, ապա

$$u(x) = \frac{2(2+\varepsilon)}{2 + \varepsilon - \varepsilon e^{x^2}} \ :$$

Այս լուծումը ունի եզակիություն $x_0 = \sqrt{\ln(1 + 2\varepsilon^{-1})}$ կետում:

Նկ. 7.9.1 (7.9.1) խնդրի լուծումը տարբեր սկզբնական պայմանների դեպքում

Լուծումների բնորոշ վարքը ցույց է տրված նկ. 7.9.1-ում: ♣

Օրինակ 7.9.2 : Դիտարկենք երկրորդ կարգի

$$u'' - 2u' - 3u = 0, \quad x \geq 0 \tag{7.9.2}$$

դիֆերենցիալ հավասարումը

$$u(0) = 1\,, \quad u'(0) = -1 \tag{7.9.3}$$

սկզբնական պայմաններով:

Խնդրի լուծումն է $u(x) = e^{-x}$ ֆունկցիան: Պարզ է, որ $u(x) \to 0$ երբ $x \to \infty$: Փոփոխենք (7.9.3) պայմաններից առաջինը $\varepsilon > 0$ փոքր մեծությունով այնպես, որ

$$u(0) = 1 + \varepsilon\,, \quad u'(0) = -1\ : \tag{7.9.4}$$

Այդ դեպքում (7.9.4) պայմաններով (7.9.2) հավասարման լուծումը կլինի

$$u(x) = \left(1 + \frac{3}{4}\varepsilon\right) e^{-x} + \frac{\varepsilon}{4} e^{3x} \tag{7.9.5}$$

ֆունկցիան: Տեսնում ենք, որ (7.9.5)-ի աջ մասի առաջին գումարելին ձգտում է զրոյի երբ $x \to \infty$, այն ժամանակ երբ երկրորդ գումարելին ցանկացած դրական ε-ի դեպքում ձգտում է անվերջության:

Նկ. 7.9.2 (7.9.2) հավասարման լուծումը տարբեր սկզբնական պայմանների դեպքում

Այդ երկու լուծումները պատկերված են նկ. 7.9.2-ում: ♣

Դիտարկված օրինակները ցույց են տալիս, որ որոշ դիֆերենցիալ հավասարումների համար սկզբնական պայմանների որքան ասես փոքր փոփոխությունները կարող են առաջացնել լուծման ինչքան ասես մեծ փոփոխություններ: Այդպիսի դիֆերենցիալ հավասարումները կոչվում են *անկայուն* սկզբնական պայմանների նկատմամբ: Գործնականում հնարավոր չէ ստանալ այդ հավասարումների ընդունելի թվային լուծում, քանի որ մոտարկման և կլորացման սխալանքները նույնպիսի ազդեցություն են գործում, ինչպես և սկզբնական պայմանների փոփոխությունները և կարող են բերել արդյունքի աղետալի աղավաղմանը:

Առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների համար Կոշու խնդրի լուծման թվային մեթոդների կայունության հետազոտումը կարելի է կատարել

$$u' = \lambda u, \quad x \geq 0 \tag{7.9.6}$$

պարզ հավասարման օրինակի վրա, որտեղ $\lambda \neq 0$ հաստատուն է,

$$u(0) = u_0 \tag{7.9.7}$$

սկզբնական պայմանով: (7.9.6) հավասարումը հաճախ դիտարկում են որպես *մոդելային հավասարում* (տե՛ս ստորև 7.9.1 դիտողությունը): Հեշտ է տեսնել, որ (7.9.6)-(7.9.7) խնդրի լուծումը

$$u(x) = u_0 e^{\lambda x} \tag{7.9.8}$$

ֆունկցիան է: Եթե $\lambda < 0$, ապա այդ լուծումը ձգտում է զրոյի, երբ $x \to \infty$: Իսկ եթե $\lambda > 0$, ապա այն անսահմանորեն աճում է ըստ բացարձակ արժեքի:

Դիտողություն 7.9.1 : *Հիմնավորենք (7.9.6) հավասարման անվանումը՝* մոդելային հավասարում*: Դիտարկենք*

$$u' = f(x, u), \quad x \geq 0 \tag{7.9.9}$$

հավասարումը: Դիցուք $u(x)$-ը՝ (7.9.9) հավասարման լուծումն է, որը բավարարում է $u(0) = u_0$ սկզբնական պայմանին, իսկ $\tilde{u}(x)$-ը լուծումն է $\tilde{u}(0) = u_0 + \varepsilon$ սկզբնական պայմանով: Ստանանք հավասարում

$$z(x) \equiv \tilde{u}(x) - u(x)$$

սխալանքի համար: Ունենք

$$z'(x) = \tilde{u}'(x) - u'(x) = f(x, \tilde{u}) - f(x, u) = f'_u(x, u + \theta z)\, z(x),$$

որտեղ $0 < \theta < 1$: Ներմուծենք

$$\lambda(x) \equiv f'_u(x, u + \theta z)$$

նշանակումը: Այսպիսով, $z(x)$ ֆունկցիան

$$\begin{aligned} z' &= \lambda(x) z, \quad x \geq 0, \\ z(0) &= \varepsilon \end{aligned}$$

խնդրի լուծումն է, ինչը և հանդիսացավ (7.9.6) հավասարման անվան ընտրության պատճառ:

Եթե $\lambda < 0$, ապա (7.9.6) հավասարումը *կայուն է* (7.9.7) սկզբնական պայմանի նկատմամբ: Հակառակ դեպքում, այսինքն երբ $\lambda > 0$, հավասարումն *անկայուն է*:

Իրոք, դիցուք $\tilde{u}(x)$-ը՝ (7.9.6) հավասարման լուծումն է $\tilde{u}(0) = u_0 + \varepsilon$ խոտորված սկզբնական պայմանով: Այդ դեպքում $z(x) \equiv \tilde{u}(x) - u(x)$ սխալանքը

$$\begin{aligned} z' &= \lambda z\,, \quad x \geq 0\,, \\ z(0) &= \varepsilon \end{aligned} \tag{7.9.10}$$

խնդրի լուծումն է: Համաձայն (7.9.8)-ի՝ այդ լուծումը կլինի

$$z(x) = \varepsilon e^{\lambda x}\ : \tag{7.9.11}$$

Այսպիսով, եթե $\lambda < 0$, ապա սխալանքը ձգտում է զրոյի, երբ $x \to \infty$: Իսկ եթե $\lambda > 0$, ապա այն անսահմանորեն աճում է x-ի աճման հետ մեկտեղ: Ուստի հետագայում կհամարենք, որ մոդելային հավասարման մեջ $\lambda < 0$:

7.9.2 Տարբերական մեթոդների կայունությունը

Անդրադառնանք այժմ Կոշու խնդրի լուծման տարբերական մեթոդների կայունության հարցին՝ (7.9.6) մոդելային խնդրի համեմատ: Ինչպես հետևում է (7.9.8)-ից,

$$|u(x)| \leq |u_0| \qquad \forall x \geq 0\ : \tag{7.9.12}$$

Ըստ էության, (7.9.12) անհավասարությունը նշանակում է, որ սկզբնական պայմանում թույլ տրված սխալանքը չի աճում (տե՛ս (7.9.10) և (7.9.11)): Տարբերական մեթոդը կհամարենք *կայուն* (7.9.6) մոդելային հավասարման վրա, եթե v_n, $n = 0, 1, \ldots$ մոտավոր լուծման համար տեղի ունի (7.9.12) անհավասարության նմանակ, այն է՝

$$|v_n| \leq |v_0|\,, \quad n = 0, 1, \ldots : \tag{7.9.13}$$

Էյլերի մեթոդը: Համաձայն (7.3.15) օրենքի՝ ունենք

$$v_{n+1} = (1 + h\lambda)v_n\,, \quad n = 0, 1, \ldots :$$

Այստեղից ստանում ենք

$$v_n = (1 + h\lambda)^n v_0\,, \quad n = 0, 1, \ldots$$

բանաձևը: Ակնհայտ է, որ (7.9.13) անհավասարությունը տեղի կունենա, եթե

$$|1 + h\lambda| \leq 1\,,$$

այսինքն՝

$$-h\lambda \leq 2\ : \tag{7.9.14}$$

Նկատի ունենալով այդ սահմանափակումը քայլի վրա՝ ասում են, որ Էյլերի մեթոդը *պայմանականորեն կայուն* է:

Էյլերի անբացահայտ մեթոդը: Համաձայն (7.4.6)-ի՝ լուծումն ընթացիկ հանգույցում որոշվում է

$$v_{n+1} = v_n + h\lambda v_{n+1}$$

հավասարումից: Լուծելով այն v_{n+1}-ի նկատմամբ՝ կստանանք

$$v_{n+1} = \frac{1}{1 - h\lambda} v_n, \quad n = 0, 1, \ldots :$$

Այս առնչությունից հետևում է, որ

$$v_n = \frac{1}{(1 - h\lambda)^n} v_0, \quad n = 0, 1, \ldots :$$

Այստեղից երևում է, որ (7.9.13) անհավասարությունը տեղի ունի ցանկացած h քայլի դեպքում: Այսպիսով, Էյլերի անբացահայտ մեթոդը *բացարձակապես կայուն* է:

Էյլերի վերահաշվման մեթոդները: (7.9.6) մոդելային հավասարման համար (7.5.3)-ից, հաշվի առնելով (7.5.15) պայմանը, ստանում ենք

$$v_{n+1} = \left(1 + h\lambda + \frac{1}{2} h^2\lambda^2\right) v_n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

առնչությունը, որտեղից էլ հետևում է

$$v_n = \left(1 + h\lambda + \frac{1}{2} h^2\lambda^2\right)^n v_0, \quad n = 0, 1, \ldots$$

բացահայտ արտահայտությունը մոտավոր լուծման համար: Դժվար չէ ցույց տալ, որ

$$\left|1 + h\lambda + \frac{1}{2} h^2\lambda^2\right| \leq 1$$

անհավասարությունը տեղի ունի, երբ $-h\lambda \leq 2$: Դա նշանակում է, որ Էյլերի վերահաշվման մեթոդները (մասնավորապես, Հոյնի և միջին կետի մեթոդները) *պայմանականորեն կայուն* են:

Ռունգե-Կուտայի մեթոդը: Համաձայն (7.6.3) բանաձևի՝ ունենք

$$v_{n+1} = \left(1 + h\lambda + \frac{1}{2} h^2\lambda^2 + \frac{1}{6} h^3\lambda^3 + \frac{1}{24} h^4\lambda^4\right) v_n, \quad n = 0, 1, \ldots :$$

Այստեղից ստանում ենք արտահայտություն մոտավոր լուծման համար.

$$v_n = \left(1 + h\lambda + \frac{1}{2} h^2\lambda^2 + \frac{1}{6} h^3\lambda^3 + \frac{1}{24} h^4\lambda^4\right)^n v_0, \quad n = 0, 1, \ldots :$$

Ինչպես ցույց են տալիս հաշվարկները,

$$\left|1 + h\lambda + \frac{1}{2} h^2\lambda^2 + \frac{1}{6} h^3\lambda^3 + \frac{1}{24} h^4\lambda^4\right| \leq 1$$

անհավասարությունը տեղի ունի, երբ $-h\lambda \leq 2.78$: Այսպիսով, Ռունգե-Կուտայի մեթոդը նույնպես *պայմանականորեն կայուն* է, թեև այստեղ կայունության պայմանը փոքր-ինչ ավելի թույլ է, քան Էյլերի մեթոդում:

Այստեղ մենք չենք զբաղվելու Ադամսի բազմաքայլ մեթոդների կայունության հետազոտմամբ, քանի որ այն պահանջում է հատուկ եղանակների կիրառում: Սահմանափակվենք միայն մեկ երկքայլ մեթոդի դիտարկմամբ:

Օրինակ 7.9.3 : Դիտարկենք

$$u' = -2u\,, \quad u(0) = 1 \tag{7.9.15}$$

Կոշու խնդիրը, որի լուծումն է $u(x) = e^{-2x}$ ֆունկցիան: Կիրառենք խնդրի թվային լուծման համար

$$\frac{v_{n+1} - v_{n-1}}{2h} = -2v_n\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,; \quad v_0 = 1\,,\ v_1 = e^{-2h} \tag{7.9.16}$$

երկքայլ տարբերական մեթոդը: Ինչպես տեսնում ենք, առաջին երկու հանգույցներում մոտավոր և ճշգրիտ լուծումները համընկնում են: Մոտավոր լուծման արժեքները հաջորդ հանգույցներում հաշվվում են

$$v_{n+1} = -4hv_n + v_{n-1}\,, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{7.9.17}$$

օրենքով: Ստացված (7.9.17) առնչությունները իրենցից ներկայացնում են հաստատուն գործակիցներով *երկրորդ կարգի համասեռ տարբերական հավասարում* (տե՛ս, օրինակ, [11],[37]):

Փնտրենք (7.9.17) հավասարման մասնավոր լուծումը

$$v_n = q^n\,, \quad n = 0, 1, \ldots$$

տեսքով, որտեղ $q \neq 0$: Տեղադրելով այն (7.9.17) հավասարման մեջ՝ կստանանք

$$q^2 + 4hq - 1 = 0$$

քառակուսի հավասարում, որը կոչվում է *բնութագրիչ հավասարում*: Այդ հավասարումը ունի երկու տարբեր իրական արմատ.

$$q_1 = -2h + \sqrt{4h^2 + 1}\,, \quad q_2 = -2h - \sqrt{4h^2 + 1}\ :$$

Համաձայն երկրորդ կարգի տարբերական հավասարումների տեսության (տես [11],[37]), (7.9.17) հավասարման ընդհանուր լուծումը գրվում է հետևյալ տեսքով.

$$v_n = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n\,, \quad n = 0, 1, \ldots\,:$$

Այստեղ C_1 և C_2 հաստատունները որոշվում են $v_0 = 1$ և $v_1 = e^{-2h}$ պայմաններից, այսինքն՝

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1\,, \\ C_1 q_1 + C_2 q_2 = e^{-2h} \end{cases}$$

հավասարումների համակարգից: Լուծելով այդ համակարգը՝ կգտնենք

$$C_1 = \frac{1}{2} + \frac{2h + e^{-2h}}{2\sqrt{4h^2+1}}, \quad C_2 = \frac{1}{2} - \frac{2h + e^{-2h}}{2\sqrt{4h^2+1}} :$$

Այսպիսով, ստանում ենք

$$v_n = C_1(-2h + \sqrt{4h^2+1})^n + C_2(-1)^n(2h + \sqrt{4h^2+1})^n, \quad n = 0, 1, \ldots \qquad (7.9.18)$$

բացահայտ բանաձև (7.9.16) տարբերական մեթոդով որոշվող մոտավոր լուծման համար: Ստացված (7.9.18) բանաձևը թույլ է տալիս հետևել v_n լուծման վարքը, երբ $n \to \infty$: Իրոք, կամայական ֆիքսված h քայլի համար

$$0 < -2h + \sqrt{4h^2+1} < 1, \quad 2h + \sqrt{4h^2+1} > 1 :$$

Այդ պատճառով, երբ $n \to \infty$, ապա (7.9.18) արտահայտության աջ մասի առաջին անդամը ձգտում է զրոյի, իսկ երկրորդ անդամը, տատանվելով, ձգտում է անվերջության: Միաժամանակ, խնդրի ճշգրիտ լուծումը ձգտում է զրոյի, երբ $x \to \infty$ (նկ. 7.9.3): Այսինքն, (7.9.16) մեթոդը (7.9.15) խնդրի կիրառմամբ անկայուն է:

Նկ. 7.9.3 (7.9.15) խնդրի ճշգրիտ (–) և մոտավոր (∗) լուծումները

Երկրորդ գումարելին (7.9.18)-ի աջ մասում իրենից ներկայացնում է այսպես կոչված *մակաբույծ* բաղադրիչ: ♣

7.9.3 Կոշտ հավասարումներ

Գոյություն ունեն հավասարումներ, որոնց թվային լուծումը ստանդարտ մոտեցման դեպքում բերում է անբավարար արդյունքների: Այդպիսի հավասարումների թվին պատկանում են այսպես կոչված *կոշտ հավասարումները*: Պարզաբանենք կոշտության երևույթի էությունը հետևյալ օրինակի վրա (տե՛ս [31]):

Դիտարկենք

$$u' = -100u + 100\,, \quad u(0) = 2 \tag{7.9.19}$$

Կոշու խնդիրը, որի ճշգրիտ լուծումն է

$$u(x) = 1 + e^{-100x} \tag{7.9.20}$$

ֆունկցիան: Այդ լուծումը կայուն է և շատ արագ նվազում է $u(0) = 2$ արժեքից մինչև իր սահմանային արժեքը, որը հավասար է մեկի: Այսպես, օրինակ, $u(0.1) \approx 1+5\cdot 10^{-5}$:

Կիրառենք (7.9.19) խնդրի լուծման համար

$$v_{n+1} = (1 - 100h)v_n + 100h\,,\ n = 0, 1, \ldots\,;\ v_0 = 2 \tag{7.9.21}$$

Էյլերի մեթոդը: Համաձայն կայունության (7.9.14) պայմանի՝ պետք է վերցնել $h \le 0.02$: Վերցնելով $h = 0.02$, (7.9.21)-ից ստանում ենք

$$v_{n+1} = -v_n + 2\,,\ n = 0, 1, \ldots\,;\ v_0 = 2$$

հաշվարկային բանաձև: Այս բանաձևով ստացվող

$$v_0 = 2\,,\ v_1 = 0\,,\ v_2 = 2\,,\ v_3 = 0\,, \ldots$$

հաջորդականությունը ոչ մի դեպքում չի կարելի դիտարկել որպես (7.9.19) խնդրի (7.9.20) ճշգրիտ լուծման բավարար մոտարկում, թեև մոտավոր լուծումը կայուն է (7.9.13) իմաստով: Երբ $h = 0.01$, հաշվարկները տալիս են

$$v_0 = 2;\ v_{n+1} = 1\,,\ n = 0, 1, \ldots:$$

Եապես ավելի մանր քայլը, օրինակ՝ $h = 0.001$, բավականին լավ է արտացոլում լուծման վարքը.

$$v_0 = 2\,,\ v_1 = 1.9\,,\ v_2 = 1.81\,, \ldots:$$

Էյլերի (7.9.21) մեթոդով ստացվող մոտավոր լուծման համար դժվար չէ արտածել

$$v_n = 1 + (1 - 100h)^n\,, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{7.9.22}$$

բանաձևը (թողնում ենք այն ընթերցողին որպես վարժություն): Համեմատելով (7.9.20) և (7.9.22) արտահայտությունները ճշգրիտ և մոտավոր լուծումների համար համապատասխանաբար, տեսնում ենք, որ $(1 - 100h)^n$ մեծությունը e^{-100x} անդամի մոտարկումն է, ընդ որում՝ բավականին լավ փոքր h-երի համար: Թեև e^{-100x} անդամը տալիս է չնչին փոքր ներդրում ճշգրիտ լուծման մեջ (համենայն դեպս, երբ $x \ge 0.1$),

կայունության պահպանման համար պահանջվում է, որ h քայլը լինի բավականաչափ փոքր: Դրանով բնութագրվում են կոշտ հավասարումները. *դրանց լուծումը ներառում է արագ մարվող բաղադրիչ, որի ներդրումը ոչ էական է, սակայն շատ թվային մեթոդների կայունության պահպանման համար պահանջվում է, որ այդ բաղադրիչը մոտարկվի բավականաչափ ճշգրիտ՝ բավականաչափ փոքր h քայլի ընտրության միջոցով*: Իսկ դա բերում է ինչպես մեքենայական ժամանակի մեծ ծախսերի, այնպես էլ կլորացման սխալանքների կուտակմանը:

Թվային ալգորիթմների կառուցումը կոշտ հավասարումների լուծման համար ժամանակակից հաշվողական մաթեմատիկայի կարևորագույն ուղղություններից է: Սույն դասընթացում մենք չենք զբաղվելու այդ հարցով: Նշենք միայն, որ կոշտ հավասարումների լուծման համար օգտագործվում են, որպես օրենք, անբացահայտ մեթոդները: Կիրառենք, օրինակ, (7.9.19) խնդրի լուծման համար բացարձակապես կայուն Էյլերի անբացահայտ մեթոդը: Համաձայն (7.4.5)-ի՝ ունենք

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{h} = -100v_{n+1} + 100\,,\ n = 0, 1, \ldots\,; \quad v_0 = 2\ :$$

Քանի որ հավասարումը v_{n+1}-ի նկատմամբ գծային է, ապա հաշվարկները կիրականացվեն

$$v_{n+1} = \frac{v_n + 100h}{1 + 100h}\,,\ n = 0, 1, \ldots\,; \quad v_0 = 2$$

բանաձևով: Կատարելով հաշվարկները $h = 0.02$ քայլով՝ գտնում ենք

$$v_0 = 2\,,\ v_1 = 1.3333\,,\ v_2 = 1.1111\,,\ v_3 = 1.0370\,, \ldots :$$

Նույնիսկ համեմատաբար մեծ $h = 0.1$ քայլի դեպքում կստանանք

$$v_0 = 2\,,\ v_1 = 1.0909\,,\ v_2 = 1.0083\,,\ v_3 = 1.0008\,, \ldots$$

հաջորդականությունը, որը որակապես ճիշտ է արտացոլում խնդրի ճշգրիտ լուծման վարքը:

7.10 Եզրային խնդիրներ

Մինչև այժմ մենք ուսումնասիրում էինք Կոշու խնդրի թվային լուծման մեթոդները՝ սահմանափակվելով առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների դիտարկմամբ: Այդ խնդրում լուծման գոյությունը և միակությունը ապահովող լրացուցիչ պայմանները տրվում են մեկ կետում և իրենցից ներկայացնում են որոնելի ֆունկցիայի և նրա մի քանի ածանցյալների արժեքներ՝ կախված դիֆերենցիալ հավասարման կարգից: Գոյություն ունեն նաև *եզրային խնդիրներ*, որոնցում փնտրվում է դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը ինչ-որ հատվածում, և լրացուցիչ պայմանները տրվում են հատվածի ծայրակետերում:

Օրինակ 7.10.1 (Ջերմաստիճանի մնայուն բաշխումը ձողում): Պահանջվում է գտնել T ջերմաստիճանի բաշխումը l երկարության ձողում, որը պատրաստված է κ ջերմահաղորդականության գործակցով հատասեռ նյութից: Ձողի $x = 0$ և $x = l$ ծայրակետերում պահպանվում է հաստատուն ջերմաստիճան.

$$T(0) = T_0, \quad T(l) = T_l :$$

Ենթադրվում է, որ ձողում արտադրվում է տաքություն $q(x)$ սրագությամբ: Պարզվում է, որ դիֆերենցիալ հավասարումը $T(x)$ ջերմաստիճանի նկատմամբ գրվում է հետևյալ տեսքով.

$$-\kappa T''(x) = q(x), \quad 0 \le x \le l :$$

Դրանով իսկ ունենք եզրային խնդիր: ♣

Օրինակ 7.10.2 (Ձողի երկայնակի ծռումը): Դիտարկվում է EI հաստատուն կոշտության ձողի իր առանցքով ուղղված P սեղմող ուժի ազդեցության տակ երկայնակի ծռման խնդիրը (*Էյլերի խնդիրը*): Դիցուք ձողի $x = 0$ ձախ ծայրը ամրացված է, իսկ $x = l$ աջ ծայրը հենված է (նկ. 7.10.1):

Նկ. 7.10.1 Ձողի երկայնակի ծռումը

Հայտնի է, որ ձողի իր առանցքից շեղման $y(x)$ ֆունկցիան բավարարում է

$$y^{IV} + \frac{P}{EI} y'' = 0$$

դիֆերենցիալ հավասարմանը: Համաձայն ձողի ծայրերի ամրացման եղանակին՝ ունենք հետևյալ եզրային պայմանները.

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad y(l) = y'(l) = 0 :$$

Պահանջվում է գտնել P-ի փոքրագույն արժեքը (այսպես կոչված *կրիտիկական ուժ*), որի դեպքում առաջանում է ձողի երկայնակի ծռում: Այլ կերպ ասած, հարցը հանգում է P-ի այն փոքրագույն դրական արժեքի որոշմանը, որի դեպքում եզրային խնդիրը ունի ոչ տրիվիալ լուծում: ♣

Դիտարկենք երկրորդ կարգի

$$u'' = f(x, u, u'), \quad a < x < b \tag{7.10.1}$$

դիֆերենցիալ հավասարումը

$$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta \tag{7.10.2}$$

եզրային պայմաններով: Այս խնդրի լուծման գոյության և միակության պայմանները սպառիչ կերպով ուսումնասիրված են գիտական գրականությունում (տես, օրինակ, [29]): Ձևակերպենք այդպիսի պայմաններից մեկը:

Դիցուք $f(x, u, z)$ ֆունկցիան և նրա $f'_u(x, u, z)$ և $f'_z(x, u, z)$ մասնական ածանցյալները անընդհատ են $D = \{(x, u, z) : a \le x \le b, -\infty < u, z < +\infty\}$ տիրույթում: Եթե

$$f'_u(x, u, z) > 0 \qquad \forall (x, u, z) \in D$$

և գոյություն ունի այնպիսի $M > 0$ հաստատուն, որ

$$|f'_z(x, u, z)| \le M \qquad \forall (x, u, z) \in D,$$

ապա (7.10.1), (7.10.2) եզրային խնդիրը ունի միակ լուծում:

Գոյություն ունեն եզրային խնդիրների լուծման տարբեր թվային մեթոդներ: Օրինակ, եզրային խնդիրը կարելի է հանգեցնել Կոշու խնդիրների հաջորդականությանը: Այդ տիպի մեթոդներից համառոտակի նկարագրենք այսպես կոչված *հրածգության մոթոդը*:

Նկ. 7.10.2 Հրածգության մոթոդի երկրաչափական մեկնաբանությունը

Ընտրենք ինչ-որ K_1 թիվ և դիտարկենք (7.10.1) հավասարումը

$$u(a) = \alpha, \quad u'(a) = K_1 \tag{7.10.3}$$

սկզբնական պայմաններով: Ենթադրենք, որ $[a, b]$ հատվածում կառուցված է (7.10.1), (7.10.3) խնդրի V_1 մոտավոր լուծումը: Ստացված $V_1(b)$ արժեքի և β աջ

եզրային պայմանի համեմատումը տալիս է ինֆորմացիա $\theta_1 = \operatorname{arctg} K_1$ թեքման անկյան շտկման համար (նկ. 7.10.2): Դրանով գալիս ենք Կոշու նոր խնդրի (7.10.1) հավասարման համար

$$u(a) = \alpha\,, \quad u'(a) = K_2$$

սկզբնական պայմաններով, որտեղ K_2 թիվը ընտրված է այնպես, որ փոքրանա $\beta - V_1(b)$ տարբերությունը:

Օգտվելով ունեցած ինֆորմացիայից՝ կարելի է կիրառել $u'(a) = K_1, K_2, K_3, \ldots$ արժեքների ընտրության այս կամ այն ստրատեգիան, որը կբերի $V_1(b), V_2(b), V_3(b), \ldots$ հաջորդականության հնարավորին չափ արագ զուգամիտությանը β թվին:

Նշենք, որ հրածգության մոթողը տալիս է լավ արդյունքներ այն դեպքում, երբ Կոշիի խնդրի լուծումը ոչ այնքան զգայուն է $u'(a)$ տրվող արժեքների փոփոխման նկատմամբ: Հակառակ դեպքում կարելի է ստանալ անկայուն հաշվարկ:

Օրինակ 7.10.3 : Դիտարկենք

$$u'' = 100\,u\,, \quad 0 < x < 1 \tag{7.10.4}$$

հավասարումը

$$u(0) = 1\,, \quad u(1) = 0 \tag{7.10.5}$$

եզրային պայմաններով: Դժվար չէ ստուգել, որ (7.10.4),(7.10.5) խնդրի լուծումը հետևյալն է.

$$u(x) = \frac{1}{1 - e^{-20}}\, e^{-10x} - \frac{e^{-20}}{1 - e^{-20}}\, e^{10x}\ : \tag{7.10.6}$$

Նկ. 7.10.3 $u(x)$ և $u(x;K)$ ֆունկցիաների գրաֆիկները (երբ $K = -9.99$)

Դիտարկենք այժմ (7.10.4) հավասարումը

$$u(0) = 1\,, \quad u'(0) = K \tag{7.10.7}$$

սկզբնական պայմաններով: (7.10.4),(7.10.7) խնդրի լուծումն է K պարամետրից կախված

$$u(x;K) = \frac{10 - K}{20}\, e^{-10x} + \frac{10 + K}{20}\, e^{10x} \tag{7.10.8}$$

ֆունկցիան: Հեշտ է տեսնել, որ $u(1;K)=0$ արժեքը հասանելի է, երբ

$$K=-10\,\frac{1+e^{-20}}{1-e^{-20}}\approx -10\ :$$

Պարզվում է, որ $u(x;K)$ ֆունկցիան շատ զգայուն է K պարամետրի փոփոխման նկատմամբ: Օրինակ, $K=-9.99$ արժեքի համար ֆունկցիայի վարքը ցույց է տրված նկ. 7.10.3-ում: Բանն այն է, որ Կոշու խնդրի (7.10.8) լուծումը աճում է ինչպես e^{10x}, և այդ արագ աճող բաղադրիչը մարելու համար սկզբնական պայմանը պետք է ընտրվի բավականին ճշգրիտ: ♣

Հրածգության մեթոդում խնդիրը հանգում է երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարման համար Կոշու խնդրի լուծմանը, ինչը չի քննարկվել մեր դասընթացում: Այդպիսի խնդիրների լուծման եղանակներից մեկը կայանում է հետևյալում:

Եթե ունենք

$$u''=f(x,u,u')$$

հավասարումը

$$u(a)=\alpha\,,\quad u'(a)=\gamma$$

սկզբնական պայմաններով, ապա այն կարելի է բերել երկու առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի, եթե կատարենք $u'(x)=y(x)$ տեղադրումը: Այդ դեպքում $u''(x)=y'(x)$, և մենք ստանում ենք

$$\begin{cases} u'(x)=y(x)\,, \\ y'(x)=f(x,u,y) \end{cases}$$

համակարգը $u(a)=\alpha$, $y(a)=\gamma$ սկզբնական պայմաններով: Այդ համակարգի լուծման համար կարելի է կիրառել, օրինակ,

$$\begin{aligned} &\frac{U_{n+1}-U_n}{h}=Y_n\,, \\ &\frac{Y_{n+1}-Y_n}{h}=f(x_n,U_n,Y_n)\,, \end{aligned} \qquad n=0,1,\ldots$$

Էյլերի մեթոդը $U_0=\alpha$, $Y_0=\gamma$ սկզբնական արժեքներով:

7.11 Վերջավոր տարբերությունների մեթոդ

Սույն պարագրաֆում մենք կդիտարկենք եզրային խնդիրների լուծման ամենատարածված եղանակը՝ *վերջավոր տարբերությունների մեթոդը*: Այս մեթոդի օգնությամբ եզրային խնդրի լուծումը հանգում է տրված որոշ կետերի բազմության վրա որոնելի ֆունկցիայի արժեքների նկատմամբ հավասարումների համակարգի լուծմանը (գծային կամ ոչ գծային՝ կախված դիֆերենցիալ հավասարման տիպից):

Ինչպես արդեն ասվել է 7.1 պարագրաֆում, դա կարելի է իրագործել՝ փոխարինելով դիֆերենցիալ հավասարման մեջ մասնակցող ածանցյալները վերջավոր-տարբերական մոտարկումներով:

Դիտարկենք

$$-u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), \quad a < x < b \tag{7.11.1}$$

գծային դիֆերենցիալ հավասարումը

$$\begin{aligned} \mu_0 u(a) + \mu_1 u'(a) &= \alpha, \\ \nu_0 u(b) + \nu_1 u'(b) &= \beta \end{aligned} \tag{7.11.2}$$

եզրային պայմաններով, որտեղ $p(x), q(x), f(x)$ ֆունկցիաները և $\mu_0, \mu_1, \nu_0, \nu_1, \alpha, \beta$ թվերը տրված են, ընդ որում $\mu_0^2 + \mu_1^2 > 0$, $\nu_0^2 + \nu_1^2 > 0$: (7.11.2) պայմաններր սահմանում են գծային կախվածություն որոնելի լուծման և նրա ածանցյալների արժեքների միջև $[a, b]$ հատվածի ծայրակետերում: Այն դեպքում, երբ $\mu_1 = \nu_1 = 0$, այդ պայմանները կոչվում են *առաջին սեռի պայմաններ*: Եթե $\mu_0 = \nu_0 = 0$, ապա (7.11.2) պայմանները կոչվում են *երկրորդ սեռի պայմաններ*: Ընդհանուր դեպքում, երբ $\mu_i, \nu_i \neq 0$, $i = 0, 1$, եզրային պայմանները անվանում են *երրորդ սեռի պայմաններ*: Որոշ խնդիրներում միջակայքի ձախ և աջ ծայրակետերում կարող են տրվել տարբեր սեռի պայմաններ:

Նշենք, որ (7.11.1), (7.11.2) եզրային խնդրի լուծման գոյության և միակության բավարար պայմանները կարելի է գտնել, օրինակ, [29] մենագրությունում: Մասնավորապես, եթե $p(x), q(x)$ և $f(x)$ ֆունկցիաները անընդհատ են $[a, b]$ հատվածում, ընդ որում $q(x) \geq 0$, ապա (7.11.1) հավասարումը առաջին սեռի եզրային պայմաններով ունի միակ լուծում $u(x) \in C^2[a, b]$: Ավելին, եթե $p(x), q(x), f(x) \in C^2[a, b]$, ապա $u(x) \in C^4[a, b]$:

Կառուցենք $[a, b]$ հատվածում

$$\omega_h = \{x_n : x_n = a + nh, \ n = 0, 1, \ldots, N + 1\} \tag{7.11.3}$$

հավասարաչափ *ցանց* $h = (b - a)/(N + 1)$ քայլով: Ցանցի x_n հանգույցները, որտեղ $1 \leq n \leq N$, անվանենք *ներքին*, իսկ $x_0 = a$ և $x_{N+1} = b$ հանգույցները՝ *եզրային*: Ցանցի վրա որոշված $v^h = \{v_n\}_{n=0}^{N+1}$ ֆունկցիան, որտեղ $v_n \equiv v(x_n)$, կանվանենք *ցանցային*: Նշանակենք G_h-ով ցանցային ֆունկցիաների գծային տարածությունը: Պարզ է, որ $[a, b]$ հատվածում որոշված կամայական $f(x)$ ֆունկցիան ծնում է $f^h = \{f_n\}_{n=0}^{N+1}$ ցանցային ֆունկցիա, որտեղ $f_n \equiv f(x_n)$:

Դիտարկենք սկզբից (7.11.1) հավասարումը

$$u(a) = \alpha, \ u(b) = \beta \tag{7.11.4}$$

առաջին սեռի եզրային պայմաններով: Կատարենք (7.11.1), (7.11.4) խնդրի վերջավոր-տարբերական մոտարկումը, փոխարինելով հավասարման մեջ երկրորդ ածանցյալը երկրորդ տարբերական ածանցյալով, իսկ առաջին ածանցյալը՝ կենտրոնական

տարբերական ածանցյալով (տե՛ս 4.6 պարագրաֆը): Սահմանենք (7.11.1),(7.11.4) խնդրի մոտավոր լուծումը որպես

$$\begin{cases} -(v_n)_{x\bar{x}} + p_n(v_n)_{\mathring{x}} + q_n v_n = f_n, \quad n = 1, 2, \ldots, N, \\ v_0 = \alpha, \; v_{N+1} = \beta \end{cases} \tag{7.11.5}$$

ցանցային հավասարումների գծային համակարգին բավարարող $v^h \in G_h$ ցանցային ֆունկցիա, որտեղ, համաձայն (4.6.3) և (4.7.7) նշանակումների՝

$$(v_n)_{\mathring{x}} \equiv \frac{v_{n+1} - v_{n-1}}{2h}, \quad (v_n)_{x\bar{x}} = \frac{v_{n-1} - 2v_n + v_{n+1}}{h^2} :$$

Վերջավոր-տարբերական խնդիրը, որը մոտարկում է դիֆերենցիալ եզրային խնդիրը, անվանում են *տարբերական սխեմա*: Այսպիսով, (7.11.5) ցանցային հավասարումների համակարգը տարբերական սխեմա է (7.11.1),(7.11.4) խնդրի համար:

Գրենք (7.11.5) տարբերական սխեման

$$\begin{cases} -\left(1 + \frac{h}{2} p_n\right) v_{n-1} + \left(2 + h^2 q_n\right) v_n - \left(1 - \frac{h}{2} p_n\right) v_{n+1} = h^2 f_n, \\ \qquad\qquad n = 1, 2, \ldots, N, \\ v_0 = \alpha, \; v_{N+1} = \beta \end{cases} \tag{7.11.6}$$

տեսքով: Դրանով իսկ ստանում ենք երեքանկյունագծային մատրիցով գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգ: Այդ համակարգը կարելի է արդյունավետորեն լուծել 3.9 պարագրաֆում նկարագրված մեթոդով: Ընդ որում, մեթոդի կոռեկտության և կայունության համար պետք է ապահովել (7.11.6) համակարգի մատրիցի անկյունագծային գերիշխումը, այսինքն՝

$$|2 + h^2 q_n| \geq \left|1 + \frac{h}{2} p_n\right| + \left|1 - \frac{h}{2} p_n\right|, \quad n = 1, 2, \ldots, N \tag{7.11.7}$$

պայմանների արկայությունը (տե՛ս 3.9.1 թեորեմը): Եթե ենթադրենք, որ $q(x) \geq 0$, ապա (7.11.7) անհավասարությունները տեղի կունենան բավականաչափ փոքր h քայլի դեպքում՝ մասնավորապես, երբ

$$h \max_{a \leq x \leq b} |p(x)| \leq 2 :$$

Այդպիսի սահմանափակում ցանցի քայլի վրա կարելի է շրջանցել, եթե (7.11.1) հավասարման մեջ առաջին ածանցյալի մոտարկման համար կենտրոնական տարբերական ածանցյալի փոխարեն օգտագործենք աջակողմյան կամ ձախակողմյան տարբերական ածանցյալները՝ կախված գործակցի նշանից: Ավելի ճիշտ, ձևափոխենք (7.11.5) տարբերական սխեման գրելով n-րդ հավասարումը

$$-(v_n)_{x\bar{x}} + p_n(v_n)_x + q_n v_n = f_n, \quad \text{եթե} \quad p_n < 0,$$

կամ

$$-(v_n)_{x\bar{x}} + p_n(v_n)_{\bar{x}} + q_n v_n = f_n\,, \quad \text{եթե} \quad p_n \geq 0$$

տեսքով: Այդ դեպքում ցանցային հավասարումների համակարգի մատրիցը կունենա անկյունագծային գերիշխում անկախ h քայլի մեծությունից: Սակայն նշենք, որ եթե կենտրոնական տարբերություններով մոտարկումը ունի ճշտության երկրորդ կարգ ըստ h-ի (լեմմա 4.6.3), ապա միակողմանի տարբերություններով մոտարկումը ունի միայն առաջին կարգ (տե՛ս 4.6.1 և 4.6.2 լեմմաները):

(7.11.2) երրորդ սեռի պայմանների դեպքում տարբերական հավասարումները եզրային հանգույցներում կարելի է գրել, օրինակ, հետևյալ կերպ.

$$\mu_0 v_0 + \mu_1 \frac{v_1 - v_0}{h} = \alpha\,, \quad \nu_0 v_{N+1} + \nu_1 \frac{v_{N+1} - v_N}{h} = \beta\ :$$

Եթե (7.11.1),(7.11.2) խնդրի լուծումը բավականաչափ ողորկ է, ապա եզրային պայմանների ավելի ճշգրիտ մոտարկում տալիս են

$$\mu_0 v_0 + \mu_1 \frac{-3v_0 + 4v_1 - v_2}{2h} = \alpha\,, \quad \nu_0 v_{N+1} + \nu_1 \frac{3v_{N+1} - 4v_N + v_{N-1}}{2h} = \beta$$

հավասարումները: Իրոք, եթե $u(x) \in C^3[a,b]$, ապա օգտվելով Թեյլորի բանաձևից՝ հեշտությամբ կարելի է ցույց տալ, որ

$$\frac{-3u(x_0) + 4u(x_1) - u(x_2)}{2h} = u'(a) + O(h^2)\,;$$

$$\frac{3u(x_{N+1}) - 4u(x_N) + u(x_{N-1})}{2h} = u'(b) + O(h^2)$$

(թողնում ենք ընթերցողին համոզվել դրանում ինքնուրույն):

Տարբերական սխեմաների կառուցման ժամանակ ոչ միշտ է պետք ցուցաբերել շաբլոնային մոտեցում, այլ խելամտորեն օգտագործել խնդրի դիֆերենցիալ օպերատորի տեսքը, նրա եզրային պայմանները և այլն: Դիտարկենք, օրինակ,

$$-(a(x)u')' = f(x)\,, \quad a < x < b \tag{7.11.8}$$

հավասարումը, որտեղ $a(x) > 0$, (7.11.4) եզրային պայմաններով: Իհարկե, մենք կարող ենք գրել (7.11.8) հավասարումը

$$-a(x)u'' - a'(x)u' = f(x)$$

համարժեք տեսքով, որից հետո կիրառել մեզ հայտնի վերջավոր-տարբերական բանաձևերը: Իսկ կարելի է վարվել այլ կերպ: Ներմուծենք ω_h ցանցի հանգույցների մեջտեղում օժանդակ "ֆիկտիվ" հանգույցներ.

$$x_{n\pm 1/2} = x_n \pm \frac{h}{2}\,, \quad n = 1, 2, \ldots, N\ :$$

Այդ դեպքում $n = 1, 2, \ldots, N$ արժեքների համար ունենք՝

$$-(a(x)u')'\Big|_{x=x_n} \approx -\frac{a_{n+1/2}u'(x_{n+1/2}) - a_{n-1/2}u'(x_{n-1/2})}{h} \approx$$

$$-\frac{1}{h}\left[a_{n+1/2}\frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{h} - a_{n-1/2}\frac{u(x_n) - u(x_{n-1})}{h}\right] =$$

$$\frac{1}{h^2}\left[-a_{n-1/2}u(x_{n-1}) + (a_{n-1/2} + a_{n+1/2})u(x_n) - a_{n+1/2}u(x_{n+1})\right] :$$

Այստեղ մենք օգտվել ենք $a_{n\pm 1/2} \equiv a(x_{n\pm 1/2})$ նշանակումից: Վերցնելով որպես հիմք ստացված արտահայտությունը՝ գրենք հետևյալ ցանցային հավասարումների համակարգը.

$$\begin{cases} -a_{n-1/2}v_{n-1} + (a_{n-1/2} + a_{n+1/2})v_n - a_{n+1/2}v_{n+1} = h^2 f_n\,, \\ \qquad\qquad n = 1, 2, \ldots, N\,, \\ v_0 = \alpha\,,\ v_{N+1} = \beta\ : \end{cases} \tag{7.11.9}$$

Հեշտ է տեսնել, որ (7.11.9) համակարգի մատրիցը սիմետրիկ է և ունի անկյունագծային գերիշխում:

Այսպիսով, մենք համառոտակի ծանոթացել ենք սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համար տարբերական սխեմաների կառուցման հիմնական սկզբունքների հետ:

7.12 Տարբերական սխեմայի հետազոտումը մեկ եզրային խնդրի համար

Դիտարկենք

$$Lu \equiv -u'' + q(x)u = f(x)\,, \quad a < x < b \tag{7.12.1}$$

գծային դիֆերենցիալ հավասարումը

$$u(a) = \alpha\,,\ u(b) = \beta \tag{7.12.2}$$

եզրային պայմաններով: Ենթադրենք, որ $q(x), f(x) \in C^2[a, b]$, ընդ որում $q(x) \geq 0$: Այդ դեպքում գոյություն ունի (7.12.1),(7.12.2) խնդրի $u(x) \in C^4[a, b]$ միակ լուծումը (տե՛ս [29]): (7.12.1) հավասարման ձախ մասը սահմանում է երկրորդ կարգի L գծային դիֆերենցիալ օպերատոր:

Գրենք

$$\begin{cases} L_h v_n \equiv -(v_n)_{x\bar{x}} + q_n v_n = f_n\,, \quad n = 1, 2, \ldots, N\,. \\ v_0 = \alpha\,,\ v_{N+1} = \beta \end{cases} \tag{7.12.3}$$

տարբերական սխեմա: (7.12.3) վերջավոր-տարբերական հավասարման ձախ մասը սահմանում է L_h գծային *տարբերական օպերատոր*, որը L դիֆերենցիալ օպերատորի վերջավոր-տարբերական մոտարկումն է:

Տարբերական սխեման մեզ տալիս է սիմետրիկ երեքանկյունագծային մատրիցով

$$\begin{cases} -v_{n-1} + \left(2 + h^2 q_n\right) v_n - v_{n+1} = h^2 f_n, \quad n = 1, 2, \ldots, N, \\ v_0 = \alpha, \; v_{N+1} = \beta \end{cases}$$

ցանցային հավասարումների համակարգ: Քանի որ համակարգի մատրիցը ունի անկյունագծային գերիշխում, ապա (7.12.3) տարբերական խնդիրը ունի միակ լուծում:

Սահմանենք $u^h = \{u_n\}_{n=0}^{N+1}$ ցանցային ֆունկցիաների G_h տարածությունում

$$\|u^h\| \equiv \max_{0 \le n \le N+1} |u_n|$$

նորմ:

Պարզ է, որ (7.12.1),(7.12.2) խնդրի ճշգրիտ լուծումը, ընդհանուր առմամբ, x_h ցանցի վրա չի բավարարում (7.12.3) տարբերական սխեմային: Հետազոտենք հետևյալ հարցը. *ի՞նչ ճշտությամբ է այդ լուծումը բավարարում (7.12.3) տարբերական սխեմային*: Այդ նպատակով ներմուծենք $\varepsilon^h = \{\varepsilon_n\}_{n=0}^{N+1}$ ցանցային ֆունկցիա հետևյալ կերպ.

$$\begin{aligned} &\varepsilon_n \equiv L_h u_n - f_n, \quad n = 1, 2, \ldots, N, \\ &\varepsilon_0 \equiv u_0 - \alpha, \; \varepsilon_{N+1} \equiv u_{N+1} - \beta : \end{aligned} \tag{7.12.1}$$

Անվանենք այդ ֆունկցիան (7.12.3) տարբերական սխեմայի *անկապակցություն* կամ *մոտարկման սխալանք*: Համաձայն (7.12.2) եզրային պայմանների՝ $\varepsilon_0 = \varepsilon_{N+1} = 0$: Ներքին հանգույցներում ունենք՝

$$|\varepsilon_n| = |-(u_n)_{x\bar{x}} + q_n u_n + u''(x_n) - q_n u_n| = |u''(x_n) - (u_n)_{x\bar{x}}| :$$

Այստեղից, օգտվելով (4.6.8) գնահատականից, կստանանք

$$|\varepsilon_n| \le \frac{M_4}{12} h^2, \quad n = 1, 2, \ldots, N,$$

որտեղ $M_4 \equiv \max\limits_{a \le x \le b} |u^{IV}(x)|$: Այսպիսով,

$$\|\varepsilon^h\| \le \frac{M_4}{12} h^2 : \tag{7.12.5}$$

Քանի որ $\|\varepsilon^h\| \to 0$, երբ $h \to 0$, ապա ասում են, որ (7.12.3) տարբերական սխեման *մոտարկում է* (7.12.1),(7.12.2) դիֆերենցիալ խնդիրը և ունի *մոտարկման երկրորդ կարգ*:

Քննարկենք տարբերական սխեմայի մի կարևոր հատկություն, որը կոչվում է *կայունություն*: Նախ ապացուցենք հետևյալ օժանդակ պնդումը:

Լեմմա 7.12.1 (մաքսիմումի սկզբունք): *Դիցուք θ^h ցանցային ֆունկցիան այնպիսին է, որ $M \equiv \max\limits_{0 \le n \le N+1} \theta_n \ge 0$ և*

$$L_h \theta_n \le 0, \quad n = 1, 2, \ldots, N :$$

Այդ դեպքում ֆունկցիան եզրային հանգույցներում ընդունում է իր M մեծագույն արժեքը, այսինքն՝ $\max(\theta_0, \theta_{N+1}) = M$:

Ապացույց: Ենթադրենք հակառակը, որ եզրային հանգույցներում նշված M մեծագույն արժեքը հասանելի չէ, այսինքն $\theta_0 < M$, $\theta_{N+1} < M$: Այդ դեպքում M արժեքը հասանելի է ինչ-որ ներքին հանգույցում: Ավելին, կգտնվի այնպիսի x_m ներքին հանգույց, որ

$$\theta_{m-1} < M\,,\ \theta_m = M\,,\ \theta_{m+1} \le M\ :$$

Այդ հանգույցի համար

$$L_h\theta_m = -\frac{\theta_{m-1} - 2\theta_m + \theta_{m+1}}{h^2} + q_m\theta_m \ge \frac{2M - (\theta_{m-1} - \theta_{m+1})}{h^2} > 0\,,$$

ինչը հակասում է լեմմայի պայմանին: □

Ձևակերպենք և ապացուցենք այժմ հիմնական պնդումը:

Թեորեմ 7.12.1 : *Եթե v^h-ը (7.12.3) տարբերական խնդրի լուծումն է, ապա*

$$||v^h|| \le \frac{(b-a)^2}{8}\max_{1\le n\le N}|f_n| + \max(|\alpha|,|\beta|)\ : \tag{7.12.6}$$

Ապացույց: Նշանակենք $F \equiv \max\limits_{1\le n\le N}|f_n|$: Ներմուծենք

$$w_n = \frac{(x_n - a)(b - x_n)}{2}F\,,\quad n = 0, 1, \ldots, N+1$$

ցանցային ֆունկցիա: Ակնհայտ է, որ $w_n \ge 0$, ընդ որում $w_0 = w_{N+1} = 0$: Այդ դեպքում

$$\max_{0\le n\le N+1} w_n \le \max_{a\le x\le b}\frac{(x-a)(b-x)}{2}F = \frac{(b-a)^2}{8}F\ : \tag{7.12.7}$$

Այնուհետև, հեշտ է համոզվել, որ

$$L_h w_n \ge F\,,\quad n = 1, 2, \ldots, N\ : \tag{7.12.8}$$

Դիցուք $\theta^h \equiv v^h - w^h$: Այդ ցանցային ֆունկցիայի համար, L_h տարբերական օպերատորի գծայնության և (7.12.8) անհավասարությունների պատճառով, ունենք

$$L_h\theta_n = L_h v_n - L_h w_n = f_n - L_h w_n \le f_n - F \le 0\,,\quad n = 1, 2, \ldots, N\ : \tag{7.12.9}$$

Սկզբից ենթադրենք, որ $\max\limits_{0\le n\le N+1}\theta_n \ge 0$: Այդ դեպքում θ^h ցանցային ֆունկցիան բավարարում է 7.12.1 լեմմայի պայմաններին: Հետևաբար,

$$\max_{0\le n\le N+1}\theta_n = \max(\theta_0, \theta_{N+1}) = \max(\alpha, \beta) \le \max(|\alpha|, |\beta|)\ : \tag{7.12.10'}$$

Իսկ եթե $\max\limits_{0\le n\le N+1}\theta_n < 0$, ապա ակնհայտորեն

$$\max_{0\le n\le N+1}\theta_n \le \max(|\alpha|, |\beta|)\ : \tag{7.12.10''}$$

Օգտվելով (7.12.7) և (7.12.10) անհավասարություններից, ստանում ենք, որ

$$v_n = w_n + \theta_n \le \frac{(b-a)^2}{8} F + \max(|\alpha|, |\beta|) \tag{7.12.11}$$

բոլոր $n = 0, 1, \ldots, N+1$ արժեքների համար: Ճիշտ են նաև

$$-v_n \le \frac{(b-a)^2}{8} F + \max(|\alpha|, |\beta|), \quad n = 0, 1, \ldots, N+1 \tag{7.12.12}$$

անհավասարությունները: Իրոք, եթե v^h ցանցային ֆունկցիան (7.12.3) տարբերական խնդրի լուծումն է, ապա $-v^h$ ֆունկցիան կլինի

$$\begin{cases} L_h(-v_n) = -f_n, & n = 1, 2, \ldots, N, \\ -v_0 = -\alpha, \ -v_{N+1} = -\beta \end{cases}$$

տարբերական խնդրի լուծում: (7.12.11) և (7.12.12) անհավասարություններից հետևում են

$$|v_n| \le \frac{(b-a)^2}{8} F + \max(|\alpha|, |\beta|), \quad n = 0, 1, \ldots, N+1$$

անհավասարությունները և դրանով իսկ՝ (7.12.6) գնահատականը: □

Ստացված (7.12.6) գնահատականը արտացոլում է վերը հիշատակված (7.12.3) տարբերական սխեմայի *կայունության* հատկությունը: Պարզաբանենք այդ հասկացության էությունը: Դիտարկենք (7.12.3) խնդրի հետ մեկտեղ խոտորված աջ մասերով

$$\begin{cases} L_h(\bar{v}_n) = f_n + \varepsilon_n, & n = 1, 2, \ldots, N, \\ \bar{v}_0 = \alpha + \varepsilon_0, \ \bar{v}_{N+1} = \beta + \varepsilon_{N+1} \end{cases}$$

տարբերական խնդիրը: Այդ դեպքում, L_h տարբերական օպերատորի գծայնության պատճառով, $\bar{v}^h - v^h$ ցանցային ֆունկցիան

$$\begin{cases} L_h(\bar{v}_n - v_n) = \varepsilon_n, & n = 1, 2, \ldots, N, \\ \bar{v}_0 - v_0 = \varepsilon_0, \ \bar{v}_{N+1} - v_{N+1} = \varepsilon_{N+1} \end{cases}$$

տարբերական խնդրի լուծումն է: Հետևաբար, համաձայն (7.12.6) գնահատականի՝

$$||\bar{v}^h - v^h|| \le \frac{(b-a)^2}{8} \max_{1 \le n \le N} |\varepsilon_n| + \max(|\varepsilon_0|, |\varepsilon_{N+1}|) \ : \tag{7.12.13}$$

Այսպիսով, (7.12.3) տարբերական խնդրի լուծման խոտորումը համաչափելի է աջ մասերի խոտորումների հետ: Վերջապես, մենք կարող ենք այժմ ցույց տալ (7.12.3) տարբերական սխեմայի *զուգամիտությունը*: Իրոք, (7.12.13) գնահատականից և (7.12.4)-ից հետևում է՝

$$||u^h - v^h|| \le \frac{(b-a)^2}{8} \max_{1 \le n \le N} |\varepsilon_n| \le \frac{(b-a)^2}{8} ||\varepsilon^h|| \ :$$

Այստեղից, օգտվելով (7.12.5) գնահատականից, կստանանք, որ

$$||u^h - v^h|| \leq \frac{M_1}{96}(b-a)^2 h^2 \ . \qquad (7.12.14)$$

Այսպիսով, (7.12.1),(7.12.2) եզրային խնդրի օրինակի վրա մենք ցուցադրել ենք գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համար տարբերական սխեմաների տեսության հիմնական դրույթը, որը կարելի է համառոտակի ձևակերպել այսպես. *մոտարկումից և կայունությունից հետևում է զուգամիտությունը*: Մենք այս հարցը ավելի մանրամասն կքննարկենք հաջորդ գլխում:

Խնդիրներ և վարժություններ - 7

1. $D = \{(x, u) : 1 \leq x \leq 3 \, , \, 1 \leq u \leq 4\}$ տիրույթում գտնել Լիպշիցի հաստատունը u փոփոխականի նկատմամբ հետևյալ ֆունկցիաների համար.

$$1)\ f(x,u) = x^2 - u\,, \quad 3)\ f(x,u) = 2xu^2\,,$$

$$2)\ f(x,u) = -xu\,, \quad 4)\ f(x,u) = -\frac{x}{u}\ :$$

2. Կիրառելով աստիճանային շարքերի մեթոդը՝ գտնել

$$u' = u^2\,, \quad u(0) = 1$$

խնդրի մոտավոր լուծումը $x = 0.2$ և $x = 1.2$ կետերում: Համեմատել $u(x) = (1-x)^{-1}$ ճշգրիտ լուծման համապատասխան արժեքների հետ: Պարզաբանել, թե ինչո՞ւ երկրորդ դեպքում ($x = 1.2$) արդյունքը անբավարար է:

3. Կիրառելի՞ է արդյոք Էյլերի մեթոդը

$$u' = 1 + u^2\,, \quad 0 \leq x \leq 3\,;\ u(0) = 0\ ?$$

խնդրի համար: Խնդրի ճշգրիտ լուծումը $u(x) = \operatorname{tg} x$ ֆունկցիան է:

4. Ցույց տալ, որ Էյլերի մոթոդը, կիրառած

$$u' = \frac{3}{2}u^{1/3}\,, \quad u(0) = 0$$

խնդրին, տալիս է անբավարար արդյունք (ճշգրիտ լուծումն է՝ $u(x) = x^{3/2}$ ֆունկցիան):

5. Կառուցել ալգորիթմ, որի միջոցով կարելի է գտնել $u(0) = 0\,,\ v(0) = 0$ սկզբնական պայմաններով

$$\begin{cases} u' = \dfrac{u}{x} + v\,f(x)\,, \\ v' = u + x \end{cases}$$

դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի մոտավոր լուծումը ($f(x)$-ը անընդհատ ֆունկցիա է):

6. Դիտարկվում է Կոշու խնդիրը

$$\begin{cases} u'' = x^2 - u' - v^2, \\ v'' = x + v' + u^3 \end{cases}$$

երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի համար $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$, $v(0) = 1$, $v'(0) = 0$ սկզբնական պայմաններով: Հանգեցնել խնդիրը առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգին: Կառուցել Էյլերի բացահայտ և անբացահայտ մեթոդները:

7. Արտածել Էյլերի վերահաշվման մեթոդի (7.5.26) գլոբալ սխալանքի գնահատականը:

8. Դիտարկվում է

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{h} + (\alpha_1 a(x_n) + \alpha_2 a(x_{n+1}))(\beta_1 v_n + \beta_2 v_{n-1}) = \gamma_1 f(x_n) + \gamma_2 f(x_{n+1}),$$
$$n = 0, 1, \ldots; \; v_0 = u_0$$

տարբերական մեթոդը

$$u' + a(x)u = f(x), \quad u(0) = u_0$$

Կոշու խնդրի համար: Ընտրել $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i = 1, 2)$ գործակիցները երկրորդ կարգի մոտարկումը ստանալու համար:

9. Կառուցել ամենաբարձր մոտարկման կարգը ունեցող

$$\frac{v_n - v_{n-2}}{2h} = \alpha f(x_n, v_n) + \beta f(x_{n-1}, v_{n-1}) + \gamma f(x_{n-2}, v_{n-2})$$

տիպի տարբերական մեթոդ

$$u' = f(x, u), \quad u(x_0) = u_0$$

Կոշու խնդրի լուծման համար:

10. Դիտարկվում է

$$u' = x + u, \quad u(0) = 1$$

Կոշու խնդիրը, որի ճշգրիտ լուծումն է $u(x) = 2e^x - x - 1$ ֆունկցիան: Ռունգե-Կուտայի մեթոդով գտնել մոտավոր լուծման արժեքը $x = 0.2$ կետում: Կատարել հաշվարկներ $h = 0.2$ և $h = 0.1$ քայլերով: Ճշգրտել լուծումը ըստ Ռիչարդսոնի և համեմատել ճշգրիտ լուծման արժեքի հետ:

11. Կիրառել երրորդ կարգի ճշտության Ադամս-Բաշֆորտի մեթոդը

$$u' = u^2, \quad u(0) = 1$$

խնդրի լուծման համար: Գտնել մոտավոր լուծման v_3 և v_4 արժեքները $h = 0.1$ քայլով ցանցի վրա՝ վերցնելով որպես "մեկնման" արժեքներ $v_0 = 1.0000$, $v_1 = 1.1111$ և $v_2 = 1.2500$: Համեմատել $u(x) = (1 - x)^{-1}$ ճշգրիտ լուծման համապատասխան արժեքների հետ:

12. Կառուցել հրածգության մոթոդը

$$-u'' + (1 + x^2)u' + u = 1\,, \quad 0 < x < 1; \quad u(0) = 0\,,\ u(1) = 1$$

եզրային խնդրի համար, որը $\varepsilon > 0$ ճշտությամբ բավարարում է աջ եզրային պայմանին:

13. Գրել հրածգության մոթոդը

$$u'' = f(x, u, u')\,, \quad a < x < b$$

հավասարման համար

$$\mu_0 u(a) + \mu_1 u'(a) = \alpha\,, \quad \nu_0 u(b) + \nu_1 u'(b) = \beta$$

եզրային պայմաններով:

14. Ճի՞շտ է արդյոք

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{2h}\left[\frac{u(x+2h) + u(x)}{2} - \frac{u(x) + u(x-2h)}{2}\right]$$

հավասարությունը, եթե $u(x) \in C^2$:

15. Ճի՞շտ է արդյոք

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}\left[\frac{u(x+2h) + u(x)}{2} - 2u(x) + \frac{u(x) + u(x-2h)}{2}\right]$$

հավասարությունը, եթե $u(x) \in C^3$:

16. Գրել տարբերական սխեմա

$$(1 + x^2)u'' + 2xu' - u = \sin x\,, \quad 0 < x < 1; \quad u(0) = 1\,,\ u(1) = 0$$

եզրային խնդրի համար այնպես, որ ցանցային հավասարումների համակարգի մատրիցը լինի սիմետրիկ և ունենա անկյունագծային գերիշխում:

17. Կիրառելով վերջավոր տարբերությունների մեթոդը՝ $h = 0.2$ քայլով ցանցի վրա գրել ցանցային հավասարումների համակարգը

$$-u'' + (1 - x)u' + 2u = e^{x-1}\,, \quad 1 < x < 2.4; \quad u(1) = 1\,,\ u(2.4) = 0.5$$

եզրային խնդրի համար:

18. $u'' - x^2 u = 1$ հավասարման համար կառուցել $u'(0) + 4u(0) = 1$ ձախ եզրային պայմանի երկրորդ կարգի մոտարկումը՝ օգտագործելով ցանցի երկու կետեր:

19. $u'' = \sin x + 1$ հավասարման համար կառուցել $u'(1) - 3u(1) = 1$ աջ եզրային պայմանի երկրորդ կարգի մոտարկումը՝ օգտագործելով ցանցի երկու կետեր:

20. Կառուցել երկրորդ կարգի մոտարկմամբ երկկետային տարբերական սխեմա

$$-u' + 2u = \cos 2x, \quad u(0) = 0$$

խնդրի համար:

21. Մոտարկո՞ւմ է արդյոք

$$-\frac{v_{n+1} - v_{n-1}}{2h} + v_n = x_n^2, \quad n = 1, 2, \ldots, N; \; v_0 = 0, \; v_1 = 0$$

տարբերական սխեման

$$-u' + u = x^2, \quad u(0) = 0$$

եզրային խնդիրը երկրորդ կարգով ըստ h-ի: Եթե՝ ոչ, ապա ձևափոխել սխեման այնպես, որ այն ունենա մոտարկման երկրորդ կարգ:

22. Ինչպիսի՞ α, β և γ պարամետրերի դեպքում է

$$-\frac{v_{n-1} - 2v_n + v_{n+1}}{h^2} + (\alpha v_{n-1} + \beta v_n + \gamma v_{n+1}) = f_n + \frac{h^2}{12} f''(x_n),$$
$$n = 1, 2, \ldots, N; \; v_0 = v_{N+1} = 0$$

տարբերական սխեման մոտարկում

$$-u'' + u = f(x), \quad u(0) = u(1) = 0$$

խնդիրը չորրորդ կարգով:

Գլուխ 8

ՏԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ՍԽԵՄԱՆԵՐ ՄԱՍՆԱԿԱՆ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐՈՎ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

8.1 Մաթեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումների մասին

Բնագիտության շատ խնդիրների մաթեմատիկական մոդելները հանգում են մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների: Այդպիսի հավասարումների անհայտ ֆունկցիաների արգումենտներին հաճախ վերագրվում է տարածական փոփոխականների և ժամանակի իմաստ: Այդ իսկ պատճառով մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումները, որոնք նկարագրում են իրական ֆիզիկական երևույթներ, կոչվում են *մաթեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումներ*: Բերենք մի քանի դասական օրինակ:

- Լարի տատանման հավասարումը (կամ ալիքային հավասարումը)

Ազատ տատանումներ կատարող $x = 0$ և $x = l$ ամրացված ծայրերով l երկարության համասեռ առաձգական լարի $u(x,t)$ լայնական շեղումը նկարագրվում է

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \ t > 0 \tag{8.1.1}$$

դիֆերենցիալ հավասարումով

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t > 0 \tag{8.1.2}$$

եզրային պայմաններով և

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \le x \le l \tag{8.1.3}$$

սկզբնական պայմաններով (նկ. 8.1.1): Ենթադրվում է եզրային և սկզբնական պայմանների համաձայնեցումը, այսինքն՝ $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\psi(0) = \psi(l) = 0$:

Նկ. 8.1.1 Լարի տատանումը

Նշենք, որ (8.1.1) հավասարման մեջ $a = T/\rho$, որտեղ T-ն լարի լարումն է, իսկ ρ-ն՝ լարի նյութի խտությունը: (8.1.3) պայմաններում $\varphi(x)$ և $\psi(x)$ ֆունկցիաները որոշում են լարի սկզբնական դիրքը և սկզբնական արագությունը համապատասխանաբար: Եթե տատանումները կատարվում են $f(x,t)$ ֆունկցիայով բնութագրվող արտաքին ուժի ազդեցությամբ, ապա (8.1.1)-ի փոխարեն գրվում է

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f \tag{8.1.4}$$

հավասարումը: Մասնական ածանցյալներով երկրորդ կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարումների դասակարգման համաձայն (8.1.4)-ը *հիպերբոլական տիպի* հավասարում է:

- Ջերմահաղորդականության հավասարումը (կամ դիֆուզիայի հավասարումը)

Դիտարկվում է l երկարությամբ մեկուսացված համասեռ բարակ ձող, որի ծայրերում պահպանվում է հաստատուն ջերմաստիճան: Ձողի $u(x,t)$ ջերմաստիճանը բավարարում է

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \ t > 0 \tag{8.1.5}$$

հավասարմանը

$$u(0,t) = \alpha, \quad u(l,t) = \beta, \quad t > 0 \tag{8.1.6}$$

եզրային պայմաններով: Որպես *սկզբնական պայման* տրվում է ջերմաստիճանի բաշխումը ժամանակի $t = 0$ պահին, այսինքն՝

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l : \tag{8.1.7}$$

Նշենք, որ (8.1.5) հավասարման մեջ $a = \kappa/s\rho$, որտեղ κ-ն ջերմահաղորդականության գործակիցն է, s-ը՝ ձողի նյութի տեսակարար ջերմունակությունը, իսկ ρ-ն՝ նրա խտությունը: Ենթադրվում է եզրային և սկզբնական պայմանների համաձայնեցումը՝ $\varphi(0) = \alpha$, $\varphi(l) = \beta$: Ձողի ներսում $f(x,t)$ ֆունկցիայով բնութագրվող ջերմության

աղբյուրի կամ ջերմության կլանիչի առկայության դեպքում ջերմահաղորդականության հավասարումը կլինի անհամասեռ՝

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f \ : \qquad (8.1.8)$$

Հիշեցնենք, որ (8.1.8)-ը *պարաբոլական տիպի* հավասարում է:

Հարթ թիթեղում ջերմության տարածման ընթացքը նկարագրում է

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\,\Delta u + f \qquad (8.1.9)$$

ջերմահաղորդականության հավասարումը, որտեղ Δ-ն *Լապլասի օպերատորն է՝*

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

իսկ $u(x, y, t)$-ն (x, y) կետի ջերմաստիճանն է ժամանակի t պահին: Նշենք, որ (8.1.8) և (8.1.9) տիպի հավասարումները նկարագրում են ջերմության տարածումից բացի նաև *դիֆուզիոն* պրոցեսներ:

Դիտողություն 8.1.1 : Դիֆուզիա *բառը ծագել է լատիներեն* diffusio *բառից՝* տարածում, ցրում: *Այն նշանակում է նյութի տեղափոխմանը և խտության հավասարեցմանը բերող միջավայրի մասնիկների շարժում: Օրինակ, մոլեկուլների ջերմային շարժումով պայմանավորված մոլեկուլյար դիֆուզիան՝ մեկ նյութի (գազի, հեղուկի, պինդ մարմնի) ներթափանցումն է մյուսի մեջ նրանց անմիջական շփման դեպքում կամ ծակոտկեն միջնապատի միջով:*

- Պուասոնի հավասարումը

Հարթ թիթեղում ստացիոնար (ժամանակի ընթացքում չփոփոխվող) ջերմության $u(x, y)$ բաշխումը նկարագրվում է

$$\Delta u = f \qquad (8.1.10)$$

էլիպտական տիպի հավասարումով, որը կոչվում է *Պուասոնի հավասարում*: Համասեռ $\Delta u = 0$ հավասարումը անվանում են *Լապլասի հավասարում*: Կախված հետազոտվող երևույթի բնույթից՝ թիթեղի եզրի վրա կարող են տրվել տարբեր տիպի *եզրային պայմաններ*:

Նշենք, որ (8.1.10) տեսքի հավասարում հանդիպում է նաև էլեկտրոստատիկայի, էլեկտրոնային օպտիկայի, առաձգականության տեսության և այլ խնդիրների նկարագրման ժամանակ:

- Տեղափոխման հավասարումը

Դիտարկենք որոշ նյութի միաչափ կոնվեկտիվ տեղափոխման պրոցեսը $-a(x, t)$ արագությամբ շարժվող միջավայրով: Այդ երևույթի մաթեմատիկական մոդելը

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial u}{\partial x} = f, \quad t > 0 \qquad (8.1.11)$$

հավասարումն է, որտեղ $f(x,t)$-ն բնութագրում է նյութի հնարավոր աղբյուրների կամ հոսքերի ինտենսիվությունը: Ըստ որում, $t = 0$ պահին տրվում է նյութի խտության սկզբնական բաշխումը՝

$$u(x,0) = \varphi(x) \ : \tag{8.1.12}$$

Դիտողություն 8.1.2 : Կոնվեկցիա *բառը առաջացել է լատիներեն* convectio *բառից՝* տեղափոխում, փոխանցում*: Այն նշանակում է մասսաների, լիցքերի և այլ ֆիզիկական մեծությունների տեղափոխում շարժվող միջավայրով (օդի, գոլորշու, հեղուկի հոսքերով): Տարբերում են միջավայրի անհամասեռությամբ պայմանավորված* բնական *կոնվեկցիա (ջերմաստիճանի կամ խտության գրադիենտի առկայությունը) և միջավայրի վրա արտաքին մեխանիկական ազդեցությամբ առաջացած* հարկադրական *կոնվեկցիա:*

Դիտարկված հավասարումները իհարկե չեն սպառում մաթեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումների ամբողջ բազմազանությունը (տես, օրինակ, [32],[42]]): Վերը բերված հավասարումները պարզագույն և, միաժամանակ, մաթեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումների բնորոշ ներկայացուցիչներ են: Չնայած որոշ հավասարումների համար կարելի է ստանալ ճշգրիտ լուծումներ (օրինակ, Ֆուրիեյի շարքերի միջոցով), մենք այդ հավասարումները կդիտարկենք որպես հալմար մոդելային խնդիրներ թվային ալգորիթմները ներկայացնելու համար: Բանն այն է, որ ավելի ընդհանուր տեսքի հավասարումների համար (օրինակ, փոփոխական գործակիցներով) ստանալ լուծումը անալիտիկ տեսքով, որպես կանոն, հնարավոր չէ: Եվ այստեղ արդեն պետք է կիրառել թվային մեթոդներ:

Մաթեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումների լուծման թվային մեթոդներից ամենալայն տարածում ստացել են *վերջավոր-տարբերական մեթոդները*: Այդ մեթոդներում արգումենտի անընդհատ փոփոխման տիրույթը փոխարինվում է նրա դիսկրետ փոփոխման տիրույթով՝ *ցանցով*: Հավասարումների մեջ մասնակցող ածանցյալները, ինչպես նաև եզրային և սկզբնական պայմանները, արտահայտվում են ցանցի *հանգույցներում* ֆունկցիաների արժեքների միջոցով: Արդյունքում ստացվում է ցանցային հավասարումների համակարգ, որը կոչվում է *տարբերական սխեմա*: Լուծելով այդ համակարգը, գտնում են որոնելի լուծման մոտավոր արժեքները ցանցի հանգույցներում:

8.2 Տարբերական սխեմաների տեսության հիմնական հասկացությունները

Ինչպես արդեն ասվել է նախորդ պարագրաֆի վերջում, տարբերական սխեմայի կառուցումը ներառում է երկու հիմնական փուլ.

– ցանցի կառուցում անկախ փոփոխականների անընդհատ փոփոխման տիրույթում,

– դիֆերենցիալ օպերատորի փոխարինում տարբերական օպերատորով, ինչպես նաև եզրային և սկզբնական պայմանների տարբերական նմանակների կառուցում:

Քննարկենք յուրաքանչյուր փուլն առանձին:

8.2.1 Ցանցեր և ցանցային ֆունկցիաներ

Դիֆերենցիալ հավասարումների թվային լուծման ժամանակ հնարավոր չէ ստանալ մոտավոր լուծումը դիտարկվող տիրույթում փոփոխվող անկախ փոփոխականների բոլոր արժեքների համար: Ուստի ընտրվում է այդ տիրույթի կետերի որոշակի բազմություն, որը կոչվում է *ցանց*: Այդ կետերը կոչվում են ցանցի *հանգույցներ*:

Բերենք երկչափ տիրույթներում ցանցերի կառուցման մի քանի օրինակ:

Օրինակ 8.2.1 (Հավասարաչափ ցանց ուղղանկյունում): Դիտարկենք x, y փոփոխականների հարթության մեջ $\Omega = \{0 < x < a, 0 < y < b\}$ ուղղանկյուն տիրույթը $\partial\Omega$ եզրով: Տրոհենք Ox առանցքի $[0, a]$ հատվածը և Oy առանցքի $[0, b]$ հատվածը M և N հավասար մասերի համապատասխանաբար $x_i = ih_1$ $(i = 0, 1, \ldots, M)$ և $y_j = jh_2$ $(j = 0, 1, \ldots, N)$ կետերի միջոցով, որտեղ $h_1 = a/M$ և $h_2 = b/N$: Այդ կետերից տանելով կոորդինատական առանցքներին զուգահեռ ուղիղներ կստանանք (x_i, y_j) հանգույցներով

$$\omega_h \equiv \{(x_i, y_j) \in \overline{\Omega}\}$$

ցանցը, որտեղ $h = (h_1, h_2)$ (նկ. 8.2.1): Անվանենք h_1 և h_2 մեծությունները ցանցի *քայլեր* ըստ x և y ուղղությունների համապատասխանաբար:

Նկ. 8.2.1 Հավասարաչափ ցանց ուղղանկյունում

Երկու հանգույց կանվանենք *հարևան*, եթե նրանց հեռավորությունը Ox կամ Oy առանցքների ուղղությամբ հավասար է h_1 կամ h_2 համապատասխանաբար: Այն (x_i, y_j) հանգույցները, որոնք ընկած են Ω տիրույթի ներսում, կոչվում են *ներքին*,

իսկ տիրույթի եզրի վրա գտնվող հանգույցները՝ *եզրային*: Սահմանենք ներքին հանգույցների ցանց

$$\omega_h^\circ \equiv \{(x_i, y_j) \in \Omega\}$$

և եզրային հանգույցների ցանց

$$\omega_h' \equiv \{(x_i, y_j) \in \partial\Omega\} \ :$$

Ակնհայտ է, որ $\omega_h = \omega_h^\circ \cup \omega_h'$: ♣

Ճշգրտության բարձրացման նպատակով որոշ դեպքերում անհրաժեշտ է լինում կատարել ցանցի հանգույցների խտացում դիտարկվող տիրույթի առանձին մասերում: Այդ դեպքում օգտագործում են անհավասարաչափ ցանցեր:

Օրինակ 8.2.2 (Անհավասարաչափ ցանց ուղղանկյունում): Դիտարկենք 8.2.1 օրինակի Ω տիրույթը: Տրոհենք $[0, a]$ և $[0, b]$ հատվածները համապատասխանաբար M և N մասերի կամայականորեն վերցված $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_M = a$ և $0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_N = b$ կետերի միջոցով (նկ. 8.2.2): Այստեղ արդեն հարևան հանգույցների միջև եղած հեռավորությունները (ինչպես x, այնպես էլ y ուղղությամբ) հաստատուն մեծություններ չեն: Ցանցի *քայլերն են* $h_1^{(i)} = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, M$ և $h_2^{(j)} = x_j - x_{j-1}$, $j = 1, 2, \ldots, N$:

Նկ. 8.2.2 Անհավասարաչափ ցանց ուղղանկյունում

Այսպիսով, (x_i, y_j) հանգույցների համախմբությունը կազմում է

$$\omega_h \equiv \{(x_i, y_j) \in \bar{\Omega}\}$$

ցանց: Հատուկ նշենք, որ այստեղ արդեն h նշանին տրվում է փոքր-ինչ այլ իմաստ՝ $h = (h_1^{(1)}, h_1^{(2)}, \ldots, h_1^{(M)}; h_2^{(1)}, h_2^{(2)}, \ldots, h_2^{(N)})$: Ներքին և եզրային հանգույցների ցանցերը (ω_h° և ω_h') սահմանվում են ճիշտ նույն կերպ, ինչպես նախորդ օրինակում: ♣

Օրինակ 8.2.3 (Ցանց կամայական ձևի տիրույթի համար): Դիցուք x, y փոփոխականների հարթության մեջ տրված է կամայական երկրաչափական ձևի Ω տիրույթ $\partial\Omega$ եզրով: Ընտրենք ըստ x և y ուղղությունների համապատասխանաբար $h_1 > 0$ և $h_2 > 0$ որոշակի քայլերը և տանենք $x = x_i, i = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ և $y = y_j$, $j = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ ուղիղները, որտեղ $x_i = ih_1$ և $y_j = jh_2$: Այդ դեպքում ամբողջ հարթության մեջ կստանանք հավասարաչափ ցանց (վանդակ) (x_i, y_j) հանգույցներով: Այն հանգույցները, որոնք գտնվում են Ω տիրույթի ներսում, անվանենք *ներքին* հանգույցներ (նկ. 8.2.3-ում նրանք ցույց են տրված • նիշով) և նրանց համախմբությունը նշանակենք ω_h°-ով: Այնուհետև, $x = x_i$ և $y = y_j$ ուղիղների հատման կետերը $\partial\Omega$ եզրի հետ անվանենք *եզրային* հանգույցներ (նկ. 8.3.3-ում նրանք ցույց են տրված ∘ նիշով), իսկ նրանց համախմբությունը նշանակենք ω_h'-ով: Մեր նշանակումներով՝ $h = (h_1, h_2)$:

Նկ. 8.2.3 Ցանց կամայական ձևի տիրույթի համար

Այսպիսով, Ω տիրույթի համար կառուցված է $\omega_h = \omega_h^\circ \cup \omega_h'$ ցանցը, որը տիրույթի եզրի մոտ անհավասարաչափ է: ♣

Նման ձևով կարելի է կառուցել ցանցեր նաև ավելի մեծ չափի տարածության տիրույթներում: Մեր դիտարկած մի քանի օրինակներով չեն սպառվում ցանցերի կառուցման բոլոր եղանակները, որոնք, հատկապես, շատ բազմազան են կամայական ձևի տիրույթների համար:

Դիտողություն 8.2.1 : *Դիտարկված օրինակներում մենք ներմուծում էինք h նշանը, որին՝ կախված ցանցի յուրահատկությունից, վերագրվում էր տարբեր իմաստ: Պայմանավորվենք հետագայում այդ նշանը օգտագործել որպես պարամետր և մեկնաբանել այն որպես ցանցի «քայլ»:*

Ցանցի հանգույցների վրա որոշված ֆունկցիան կանվանենք *ցանցային*: Եթե համարակալենք ցանցի բոլոր հանգույցները որոշակի կարգով, ապա ցանցային

ֆունկցիան կարելի է համարել վեկտոր, որի չափը հավասար է ցանցի հանգույցների քանակին: Կօգտագործենք $G_h, G_h^{\vee}$ և G_h' գրությունները $\omega_h, \omega_h^{\vee}$ և ω_h' ցանցերի վրա որոշված ցանցային ֆունկցիաների տարածությունները նշանակելու համար համապատասխանաբար:

8.2.2 Դիֆերենցիալ օպերատորների տարբերական մոտարկումը

Դիցուք ունենք որոշ L գծային դիֆերենցիալ օպերատոր, որը գործում է մեկ կամ մի քանի փոփոխականի $u = u(x)$ ֆունկցիայի վրա: Այստեղ որպես x հասկանում ենք համապատասխան չափողականության տարածության կետ: Փոխարինելով $x \in \omega_h$ հանգույցում $Lu(x)$-ի արտահայտության մեջ մտնող ածանցյալները վերջավոր-տարբերական առնչություններով, կստանանք $L_h u(x)$ արտահայտությունը, որը ցանցի հանգույցների ինչ-որ $S_h(x)$ բազմության վրա u ֆունկցիայի արժեքների գծային կոմբինացիա է՝

$$L_h u(x) = \sum_{x \in S_h(x)} A_h(x, \xi)\, u(\xi), \tag{8.2.1}$$

որտեղ $A_h(x, \xi)$ գործակիցներն են: Հանգույցների $S_h(x)$ համախմբությունը կոչվում է *շաբլոն* x հանգույցի համար:

Այսպիսով, (8.2.1) արտահայտությամբ որոշվում է L դիֆերենցիալ օպերատորը մոտարկող L_h *տարբերական օպերատոր*:

Դիտարկենք որոշ պարզագույն դիֆերենցիալ օպերատորների տարբերական մոտարկումներ:

- Օպերատոր $Lu \equiv u'$:

Ըստ էության, այս օպերատորի մոտարկման հարցը մենք արդեն բավականին մանրամասն քննարկել ենք 4.6 պարագրաֆում: Մենք կարող ենք օգտվել աջակողմյան, ձախակողմյան կամ կենտրոնական տարբերական ածանցյալներից: Համապատասխանաբար կստանանք հետևյալ տարբերական օպերատորները.

$$L_h u(x) \equiv \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \equiv u_x(x) \tag{8.2.2}$$

(շաբլոնը՝ $S_h(x) = \{x, x+h\}$),

$$L_h u(x) \equiv \frac{u(x) - u(x-h)}{h} \equiv u_{\bar{x}}(x) \tag{8.2.3}$$

(շաբլոնը՝ $S_h(x) = \{x-h, x\}$) կամ

$$L_h u(x) \equiv \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} \equiv u_{\overset{\circ}{x}}(x) \tag{8.2.4}$$

(շաբլոնը՝ $S_h(x) = \{x-h, x+h\}$):

Որպես դիտարկվող օպերատորի տարբերական մոտարկում կարելի է վերցնել նաև (8.2.2) և (8.2.3) դեպքերի գծային կոմբինացիան, այսինքն՝

$$L_h^{(\sigma)}u(x) \equiv \sigma\, u_x(x) + (1-\sigma)u_{\bar{x}}(x)\,. \tag{8.2.5}$$

որտեղ σ-ն ցանկացած իրական թիվ է: $L_h^{(\sigma)}$ տարբերական օպերատորը որոշված է $S_h(x) = \{x-h, x, x+h\}$ երեքկետային շաբլոնի վրա: Մասնավորապես, $\sigma = 0.5$ դեպքում կստանանք (8.2.4) տարբերական օպերատորը:

- Օպերատոր $Lu \equiv u''$:

Մենք արդեն բազմիցս օգտվել ենք երկրորդ կարգի ածանցյալի տարբերական մոտարկումից (տե՛ս (4.6.7)-ը): Սահմանենք

$$L_h u(x) \equiv \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} \equiv u_{x\bar{x}}(x)\ : \tag{8.2.6}$$

Այստեղ շաբլոնն է՝ $S_h(x) = \{x-h, x, x+h\}$:

Այժմ դիտարկենք երկու փոփոխականից ֆունկցիաների վրա գործող դիֆերենցիալ օպերատորները:

- Օպերատոր $Lu \equiv \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x}$:

Օգտվելով նկ. 8.2.4-ում պատկերված շաբլոններից՝ գրենք համապատասխան տարբերական մոտարկումները.

$$L_h u(x,t) \equiv u_t(x,t) - u_x(x,t) \qquad \text{(շաբլոն (ա))}\,, \tag{8.2.7}$$

$$L_h u(x,t) \equiv u_t(x,t) - u_{\bar{x}}(x,t) \qquad \text{(շաբլոն (բ))}\,. \tag{8.2.8}$$

$$L_h u(x,t) \equiv u_t(x,t) - u_{\hat{x}}(x,t) \qquad \text{(շաբլոն (գ))}\ : \tag{8.2.9}$$

Նկ. 8.2.4 Շաբլոններ $\partial u/\partial t - \partial u/\partial x$ օպերատորի մոտարկման համար

Դիտարկվող օպերատորի համար, ինչպես (8.2.5)-ում, կարելի է կառուցել σ պարամետրից կախված

$$L_h^{(\sigma)}u(x,t) \equiv u_t(x,t) - [\sigma\, u_x(x,t) + (1-\sigma)u_{\bar{x}}(x,t)] \tag{8.2.10}$$

տարբերական օպերատորների ընտանիք: Մասնավորաբար, երբ $\sigma = 0.5$, (8.2.10)-ից ստանում ենք վերը բերված (8.2.9) տարբերական օպերատորը:

- Օպերատոր $Lu \equiv \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$:

Այս դիֆերենցիալ օպերատորի մոտարկման համար օգտվենք նկ. 8.2.5-ում պատկերված շաբլոններից:

Նկ. 8.2.5 Շաբլոններ $\partial u/\partial t - \partial^2 u/\partial x^2$ օպերատորի մոտարկման համար

Համապատասխանորեն կստանանք հետևյալ տարբերական օպերատորները՝

$$L_h u(x,t) \equiv u_t(x,t) - u_{x\bar{x}}(x,t) \qquad \text{(շաբլոն (ա))}, \tag{8.2.11}$$

$$L_{\hat{h}} u(x,t) \equiv u_{\bar{t}}(x,t) - u_{x\bar{x}}(x,t) \qquad \text{(շաբլոն (բ))}: \tag{8.2.12}$$

- Լապլասի օպերատոր $\Delta u \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$:

Առավել հաճախ օգտագործվող Լապլասի օպերատորի տարբերական մոտարկումը կատարվում է ըստ նկ. 8.2.6-ում պատկերված «խաչ» շաբլոնի:

Նկ. 8.2.6 «Խաչ» շաբլոնը

Լապլասի Δ_h տարբերական օպերատորը սահմանենք

$$\Delta_h u(x,y) \equiv u_{x\bar{x}}(x,y) + u_{y\bar{y}}(x,y) \tag{8.2.13}$$

արտահայտության միջոցով:

8.2.3 Տարբերական սխեմաներ

Մաթեմատիկական ֆիզիկայի խնդիրների դրվածքի մեջ, բացի դիֆերենցիալ հավասարումից, մտնում են նաև *եզրային* և *սկզբնական* լրացուցիչ պայմանները, որոնք ապահովում են լուծման միակությունը: Մենք արդեն վերը ասել ենք, որ *տարբերական սխեմա* կոչվում է դիֆերենցիալ հավասարումը, ինչպես նաև եզրային և սկզբնական պայմանները մոտարկող տարբերական հավասարումների համակարգը: Բերենք տարբերական սխեմաների կառուցման մի քանի օրինակ:

Օրինակ 8.2.4 : Դիտարկենք

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,t), \quad -\infty < x < +\infty, \ 0 < t \le T$$

տեղափոխման հավասարումը

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty$$

սկզբնական պայմանով:

Կառուցենք $-\infty < x < +\infty$, $0 \le t \le T$ տիրույթում ω_h ցանց՝ $h > 0$ քայլով ըստ x փոփոխականի և $\tau = T/N$ (N-ը բնական թիվ է) քայլով ըստ t-ի (նկ. 8.2.7): Ցանցի հանգույցներն են (x_m, t_n) կետերը, որտեղ $x_m = mh$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ և $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \ldots, N$: Ֆիքսած n-ի դեպքում (x_m, t_n) հանգույցների համախմբությունն անվանենք ցանցի n-րդ *շերտ*:

Նկ. 8.2.7 Ցանց տեղափոխման հավասարման համար

Ցանցային $w \in G_h$ ֆունկցիայի արժեքը (x_m, t_n) հանգույցում նշանակենք w_m^n-ով:

Կառուցենք տարբերական սխեման ըստ նկ. 8.2.4ա-ում պատկերված շաբլոնի.

$$\begin{cases} \dfrac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - a_m^n \dfrac{v_{m+1}^n - v_m^n}{h} = f_m^n, \\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \ n = 0, 1, \ldots, N-1, \\ v_m^0 = \varphi_m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$$

Այստեղ՝ $\varphi_m \equiv \varphi(x_m)$: Մոտավոր $v \in G_h$ լուծման արժեքը (x_m, t_{n+1}) հանգույցում հաշվվում է բացահայտորեն ըստ

$$v_m^{n+1} = \left(1 - \frac{\tau}{h} a_m^n\right) v_m^n + \frac{\tau}{h} a_m^n v_{m+1}^n + \tau f_m^n$$

բանաձևի: Այսպիսով, իմանալով լուծումը n-րդ շերտում, մենք կարող ենք հաշվել լուծումը հաջորդ՝ $(n+1)$-րդ շերտում: Քանի որ սկզբնական շերտում v_m^0 արժեքները տրված են, ապա մենք կարող ենք քայլ առ քայլ հաշվել մոտավոր լուծման արժեքները ցանցի կամայական հանգույցում: Ուշադրություն դարձնենք, որ թեև x ուղղությամբ միաչափ ցանցի հանգույցների քանակը անվերջ է, v_m^{n+1}-ի հաշվման համար պահանջվում են միայն $\varphi_m, \varphi_{m+1}, \ldots, \varphi_{m+n+1}$ արժեքները: ♣

Օրինակ 8.2.5 : Դիտարկենք $\Omega = \{0 < x < a,\ 0 < y < b\}$ ուղղանկյուն տիրույթում *Դիրիխլեի խնդիր* Պուասոնի հավասարման համար.

$$\begin{cases} \Delta u = f, & (x, y) \in \Omega \\ u = \varphi, & (x, y) \in \partial\Omega : \end{cases} \tag{8.2.14}$$

Կառուցենք $\overline{\Omega}$ տիրույթում $\omega_h = \omega_h^\circ \cup \omega_h'$ հավասարաչափ ցանց $h = (h_1, h_2)$ քայլով (օրինակ 8.2.1): Նշանակենք $w(i, j)$-ով $w \in G_h$ ցանցային ֆունկցիայի արժեքը (x_i, y_j) հանգույցում: Օգտագործելով «խաչ» շաբլոնը (նկ. 8.2.6)՝ գրենք

$$\begin{cases} \Delta_h v(i, j) = f(i, j), & (x_i, y_j) \in \omega_h^\circ \\ v(i, j) = \varphi(i, j), & (x_i, y_j) \in \omega_h' \end{cases} \tag{8.2.15}$$

տարբերական սխեման (Δ_h տարբերական օպերատորը տրված է (8.2.13)-ում): Ստացված ցանցային հավասարումների այսպիսի համակարգի լուծման եղանակը քննարկված է 8.9 պարագրաֆում: ♣

Օրինակ 8.2.6 : Դիտարկենք (8.2.14) Դիրիխլեյի խնդիրը $\partial\Omega$ ողորկ եզրով Ω կամայական տիպի տիրույթում: Այդ խնդրի համար շարադրենք տարբերական սխեմայի կառուցման եղանակներից մեկը:

Կառուցենք Ω տիրույթում ω_h ցանցը, ինչպես նկարագրվել է 8.2.3 օրինակում: Տրոհենք ω_h° ներքին հանգույցների բազմությունը երկու ենթաբազմությունների: $(x_i, y_j) \in \omega_h^\circ$ հանգույցը անվանենք *խիստ ներքին*, եթե $(x_i - h_1, y_j), (x_i + h_1, y_j)$, $(x_i, y_j - h_2)$ և $(x_i, y_j + h_2)$ հանգույցները պատկանում են $\overline{\Omega}$-ին: Խիստ ներքին հանգույցների բազմությունը նշանակենք $\omega_h^{\circ\circ}$-ով: Սնացած ներքին հանգույցները անվանենք *սահմանամերձ*: Դիցուք $\omega_h^{\circ\prime} \equiv \omega_h^\circ \setminus \omega_h^{\circ\circ}$՝ սահմանամերձ հանգույցների բազմությունն է:

Խիստ ներքին հանգույցներում տարբերական հավասարումները գրվում են ճիշտ այնպես, ինչպես (8.2.15) սխեմայում՝

$$\Delta_h v(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \omega_h^{\circ\circ} :$$

Եզրային հանգույցներում ունենք

$$v(x,y) = \varphi(x,y)\,, \quad (x,y) \in \omega_h' \ :$$

Մնացած՝ սահմանամերձ հանգույցներում հավասարումներ գրելու համար կիրառենք գծային ինտերպոլացիա x կամ y առանցքների ուղղությամբ:

Դիտարկենք նկ. 8.2.8-ում պատկերված դրությունը: Դիցուք $A(x_i, y_j)$-ն սահմանամերձ հանգույց է, իսկ $B(x_i + h_1, y_j)$-ն և $C(x_i, y_j - h_2)$-ն նրան հարևան ներքին հանգույցներն են ըստ x և y ուղղությունների համապատասխանաբար: Այնուհետև, A-ին ամենամոտ եզրային հանգույցներն են ըստ x և y ուղղությունների՝ $D(x_i - \delta_1, y_j)$-ն և $E(x_i, y_j + \delta_2)$-ն համապատասխանաբար, որտեղ $0 < \delta_1 < h_1$ և $0 < \delta_2 < h_2$:

Նկ. 8.2.8 Ցանց սահմանամերձ հանգույցի շրջակայքում

Ըստ Թեյլորի բանաձևի ունենք

$$u(B) = u(x_i + h_1, y_j) = u(A) + h_1 \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} + O(h_1^2)$$

և

$$u(D) = u(x_i - \delta_1, y_j) = u(A) - \delta_1 \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} + O(\delta_1^2) \ :$$

Բազմապատկելով առաջին հավասարությունը δ_1-ով, երկրորդը՝ h_1-ով, ապա անդամ առ անդամ գումարելով, կստանանք՝

$$u(A) = \frac{h_1 u(D) + \delta_1 u(B)}{h_1 + \delta_1} + O(h_1^2) \ :$$

Դեն նետելով այստեղ մնացորդային անդամը, ձեռք կբերենք հավասարում A սահմանամերձ հանգույցում՝

$$v(A) = \frac{h_1 \varphi(D) + \delta_1 v(B)}{h_1 + \delta_1} \ :$$

Փաստորեն մենք կատարեցինք գծային ինտերպոլացիա ըստ մոտավոր լուծման արժեքների B և D կետերում: Համանմանորեն կստանանք

$$v(A) = \frac{h_2\varphi(E) + \delta_2 v(C)}{h_2 + \delta_2}$$

հավասարումը: Կարելի է նաև, երկու ուղղությունների հավասարազոր օգտագործմամբ, A հանգույցում հավասարումը գրել հետևյալ տեսքով.

$$v(A) = \frac{1}{2}\left(\frac{h_1\varphi(D) + \delta_1 v(B)}{h_1 + \delta_1} + \frac{h_2\varphi(E) + \delta_2 v(C)}{h_2 + \delta_2}\right) :$$

Այսպիսով, սահմանամերձ հանգույցներում ցանցային հավասարումների գրառման եղանակները բազմազան են: ♣

Բոլոր օրինակներում մենք սահմանափակվել ենք առաջին սեռի եզրային և սկզբնական պայմանների դիտարկմամբ: Աջանցյալներով արտահայտված եզրային և սկզբնական պայմանները բնականաբար մոտարկվում են ավելի բարդ արտահայտություններով (տե՛ս, օրինակ, [4],[7],[34],[36]):

8.2.4 Տարբերական սխեմաների զուգամիտությունը, մոտարկումը և կայունությունը

Այս հասկացությունները, սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համար եզրային խնդիրների լուծման տարբերական մեթոդների կիրարկմամբ, արդեն քննարկվել են 7.12 պարագրաֆում: Այստեղ մենք կտանք տարբերական սխեմաների այդ կարևորագույն բնութագրերի ավելի խիստ սահմանումները և կհաստատենք կապը նրանց միջև:

Դիցուք $\partial\Omega$ եզրով Ω տիրույթում պահանջվում է գտնել

$$Lu(x) = f(x)\,, \quad x \in \Omega \tag{8.2.16}$$

դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը, որը բավարարում է լրացուցիչ (եզրային կամ սկզբնական)

$$lu(x) = \varphi(x)\,, \quad x \in \partial\Omega \tag{8.2.17}$$

պայմաններին, որտեղ L-ը և l-ը գծային դիֆերենցիալ օպերատորներ են, իսկ $f(x)$-ը և $\varphi(x)$-ը՝ տրված ֆունկցիաներ: Ենթադրվում է, որ (8.2.16),(8.2.17) խնդրի լուծումը գոյություն ունի և միակն է:

Կառուցենք Ω տիրույթի համար $\omega_h = \omega_h^\circ \cup \omega_h'$ ցանցը: Դրենք

$$\begin{cases} L_h v^h(x) &= f^h(x)\,, \quad x \in \omega_h^\circ \\ l_h v^h(x) &= \varphi^h(x)\,, \quad x \in \omega_h' \end{cases} \tag{8.2.18}$$

տարբերական սխեման, որտեղ L_h-ը և l_h-ը L և l դիֆերենցիալ օպերատորների տարբերական մոտարկումներն են համապատասխանաբար, իսկ $f^h \in G_h^\circ$ և $\varphi^h \in G_h'$ ցանցային ֆունկցիաները տրված են: Ցանցային $v^h \in G_h$ ֆունկցիան (8.2.18) տարբերական խնդրի լուծումն է:

Սահմանենք G_h, G_h° և G_h' ցանցային ֆունկցիաների գծային տարածություններում որոշակի $\|\cdot\|_h, \|\cdot\|_h^\circ$ և $\|\cdot\|_h'$ նորմեր համապատասխանաբար: Նշանակենք $|h|$-ով $h = (h_1, h_2, \ldots, h_p)$ «քայլի» երկայությունը՝ $|h| \equiv \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_p^2}$: Նշանակենք u^h-ով (8.2.16), (8.2.17) խնդրի u ճշգրիտ լուծման *նեղացումը* ω_h ցանցի վրա վերցնելով $u^h(x) = u(x)$ կամայական $x \in G_h$ հանգույցում:

Ձևակերպենք այժմ տարբերական սխեմաների տեսության հիմնական հասկացությունները:

Սահմանում 8.2.1 : Ասում են, որ (8.2.18) տարբերական սխեման *զուգամիտում է* (8.2.16), (8.2.17) դիֆերենցիալ խնդրի լուծմանը, եթե

$$\|u^h - v^h\|_h \to 0, \qquad \text{երբ} \quad |h| \to 0 : \tag{8.2.19}$$

Ընդ որում, եթե տեղի ունի

$$\|u^h - v^h\|_h \le C|h|^m \tag{8.2.20}$$

անհավասարությունը, որտեղ C-ն h-ից անկախ դրական հաստատուն է և $m > 0$, ապա ասում են, որ սխեման ունի *m-րդ կարգի ճշտություն*: Իսկ եթե առկա է

$$\|u^h - v^h\|_h \le C\left(h_1^{m_1} + h_2^{m_2} + \cdots + h_p^{m_p}\right) \tag{8.2.21}$$

անհավասարությունը, որտեղ $m_\alpha > 0$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, ապա ասում են, որ *սխեմայի ճշտության կարգը ըստ h_α-ի հավասար է m_α-ի* :

Սահմանում 8.2.2 : Ասում են, որ (8.2.18) տարբերական սխեման *մոտարկում է* (8.2.16), (8.2.17) դիֆերենցիալ խնդիրը, եթե

$$\|L_h u^h - f^h\|_h^\circ \to 0, \quad \|l_h u^h - \varphi^h\|_h' \to 0, \qquad \text{երբ} \quad |h| \to 0 : \tag{8.2.22}$$

Եթե տեղի ունեն

$$\|L_h u^h - f^h\|_h^\circ \le C_1|h|^m, \quad \|l_h u^h - \varphi^h\|_h' \le C_2|h|^m \tag{8.2.23}$$

անհավասարությունները, որտեղ C_1 և C_2 դրական հաստատունները h-ից անկախ են, և $m > 0$, ապա ասում են, որ տարբերական սխեման ունի *m-րդ կարգի մոտարկում*: Իսկ եթե

$$\begin{aligned} \|L_h u^h - f^h\|_h^\circ &\le C_1\left(h_1^{m_1} + h_2^{m_2} + \cdots + h_p^{m_p}\right), \\ \|l_h u^h - \varphi^h\|_h^\circ &\le C_2\left(h_1^{m_1} + h_2^{m_2} + \cdots + h_p^{m_p}\right), \end{aligned} \tag{8.2.24}$$

որտեղ $m_\alpha > 0$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, ապա ասում են, որ *սխեմայի մոտարկման կարգը ըստ h_α-ի հավասար է m_α-ի* :

Սահմանում 8.2.3 : Ասում են, որ (8.2.18) տարբերական սխեման *կայուն է*, եթե

$$||v^h||_h \le C_3||f^h||_h^\circ + C_4||\varphi^h||_h', \qquad (8.2.25)$$

որտեղ C_3-ը և C_4-ը ինչպես h-ից, այնպես էլ f^h-ից և φ^h-ից անկախ դրական հաստատուներ են:

(8.2.25) անհավասարությունը նշանակում է, որ (8.2.18) տարբերական խնդրի մուտքային տվյալների փոքր փոփոխությանը համապատասխանում է լուծման փոքր փոփոխություն: Դրանով իսկ կայունությունը բնութագրում է տարբերական սխեմայի զգայունությունը տարբեր տիպի սխալանքների նկատմամբ: Նշենք, որ կայունությունը (ի տարբերություն զուգամիտության և մոտարկման) տարբերական սխեմայի ներքին հատկությունն է, որը կապված չէ դիտարկվող դիֆերենցիալ խնդրի հետ:

Ներմուծված հասկացությունների միջև կապը հաստատում է հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ 8.2.1 (Լաքս-Ֆիլիպով) **:** *Եթե (8.2.18) տարբերական սխեման մոտարկում է (8.2.16), (8.2.17) դիֆերենցիալ խնդիրը և կայուն է, ապա այն զուգամետ է, ընդ որում ճշտության կարգը որոշվում է մոտարկման կարգով:*

Ապացույց: Քանի որ L_h և l_h տարբերական օպերատորները գծային են, ապա

$$L_h(u^h - v^h) = L_h u^h - L_h v^h = L_h u^h - f^h,$$
$$l_h(u^h - v^h) = l_h u^h - l_h v^h = l_h u^h - \varphi^h :$$

Դրանով իսկ $u^h - v^h$ տարբերությունը բավարարում է

$$\begin{cases} L_h(u^h - v^h) &= L_h u^h - f^h, & x \in \omega_h^\circ \\ l_h(u^h - v^h) &= l_h u^h - \varphi^h, & x \in \omega_h' \end{cases}$$

տարբերական հավասարումների համակարգին: Համաձայն (8.2.25) գնահատականի ունենք

$$||u^h - v^h||_h \le C_3||L_h u^h - f^h||_h^\circ + C_4||l_h u^h - \varphi^h||_h' :$$

Այստեղից, հաշվի առնելով (8.2.22)-ը և (8.2.23)-ը (կամ (8.2.24)-ը), գալիս ենք մեր պնդմանը: □

Այսպիսով, ստացված արդյունքը համառոտակի կարելի է ձևակերպել այսպես. *մոտարկումից և կայունությունից հետևում է զուգամիտությունը*: Ուստի, կառուցելով մոտարկող տարբերական սխեմա, և ապացուցելով նրա կայունությունը, մենք կարող ենք վստահ լինել, որ այն զուգամետ է:

Հաջորդ պարագրաֆներում մենք կքննարկենք տարբերական սխեմաների կառուցման և հետազոտման եղանակները սույն գլխի սկզբում դիտարկված մաթեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումների համար:

8.3 Տարբերական սխեմաներ տեղափոխման հավասարման համար

Դիտարկենք

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial u}{\partial x} = f\,, \quad -\infty < x < +\infty\,,\ 0 < t \le T \tag{8.3.1}$$

հավասարումը, որտեղ $a = const > 0$,

$$u(x,0) = \varphi(x)\,, \quad -\infty < x < +\infty \tag{8.3.2}$$

սկզբնական պայմանով:

Կառուցենք դիտարկվող տիրույթում ω_h ցանցը, ինչպես նկարագրված է 8.2.4 օրինակում (նկ. 8.2.7): Այդ ցանցի վրա որոշված G_h ֆունկցիաների տարածությունում ներմուծենք

$$||w|| \equiv \max_{0\le n\le N}\sup_m |w_m^n| \tag{8.3.3}$$

նորմը: Այնուհետև, $\omega_h' = \{x_m\ :\ m = 0, \pm1, \pm2, \ldots\}$ միաչափ ցանցի վրա որոշված $\psi = \{\psi_m\ :\ m = 0, \pm1, \pm2, \ldots\} \in G_h'$ ֆունկցիաների համար նորմը սահմանենք հետևյալ կերպ.

$$||\psi||' \equiv \sup_m |\psi_m|\ : \tag{8.3.4}$$

Հետագայում կօգտագործենք նաև

$$w^n \equiv \{w_m^n\ :\ m = 0, \pm1, \pm2, \ldots\}$$

նշանակումը ցանցի n-րդ շերտի վրա որոշված ցանցային ֆունկցիաների համար:

Դիտարկենք աջակողմյան շաբլոնով կառուցված

$$\begin{cases} \dfrac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - a\,\dfrac{v_{m+1}^n - v_m^n}{h} = f_m^n\,, \\ m = 0, \pm1, \pm2, \ldots\,,\ n = 0, 1, \ldots, N-1\,, \\ v_m^0 = \varphi_m\,, \quad m = 0, \pm1, \pm2, \ldots \end{cases} \tag{8.3.5}$$

տարբերական սխեման (նկ. 8.2.4ա): Համաձայն այդ սխեմայի, մեկ շերտից մյուսին անցումը կատարվում է ըստ

$$v_m^{n+1} = (1-r)v_m^n + rv_{m+1}^n + \tau f_m^n\,, \qquad r \equiv a\frac{\tau}{h} \tag{8.3.6}$$

բանաձևի:

Դիտողություն 8.3.1 : *Տարբերական սխեմայի զուգամիտության հետազոտման ժամանակ մենք կենթադրենք, որ τ և h քայլերը ձգտում են զրոյի ոչ թե իրարից անկախ, այլ լինելով*

$$r = a\frac{\tau}{h} = const \tag{8.3.7}$$

հարաբերության մեջ:

Նախ պարզենք (8.3.5) տարբերական սխեմայի մոտարկման կարգը: Օգտվելով Թեյլորի վերլուծությունից (տես լեմմա 4.6.1) և հաշվի առնելով (8.3.2) սկզբնական պայմանը, դժվար չէ ստանալ

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - a\,\frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = f_m^n + \varepsilon_m^{n+1},$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \; n = 0, 1, \ldots, N-1,$$

$$u_m^0 = \varphi_m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

որտեղ

$$\varepsilon_m^{n+1} = \frac{\tau}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_{(x_m, t_n + \theta_1 \tau)} - a\,\frac{h}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{(x_m - \theta_2 h, t_n)}, \quad 0 < \theta_1, \theta_2 < 1 :$$

Այստեղից, ենթադրելով (8.3.1),(8.3.2) խնդրի ճշգրիտ լուծման երկրորդ կարգի մասնական ածանցյալների սահմանափակությունը, կստանանք

$$|\varepsilon_m^{n+1}| \le C(\tau + h), \qquad C = const > 0$$

բոլոր $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ և $n = 0, 1, \ldots, N-1$ արժեքների համար: Այսպիսով, (8.3.5) տարբերական սխեման մոտարկում է (8.3.1),(8.3.2) խնդիրը:

Այժմ հետազոտենք սխեմայի կայունությունը:

Թեորեմ 8.3.1 : *Եթե $r \le 1$, ապա (8.3.5) տարբերական խնդրի $v \in G_h$ լուծման համար ճիշտ է հետևյալ գնահատականը.*

$$||v|| \le T||f|| + ||\varphi||' : \tag{8.3.8}$$

Ապացույց: Քանի որ $r \le 1$, ապա (8.3.6)-ից հետևում է

$$|v_m^{n+1}| \le (1-r)|v_m^n| + r|v_{m+1}^n| + \tau|f_m^n|$$

անհավասարությունը: Այստեղից

$$\sup_m |v_m^{n+1}| \le (1-r)\sup_m |v_m^n| + r\sup_m |v_{m+1}^n| + \tau||f||,$$

և մենք ստանում ենք

$$||v^{n+1}||' \le ||v^n||' + \tau\,||f||, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

անհավասարությունները: Այս անհավասարությունների հաջորդական կիրառմամբ բոլոր $n = 1, 2, \ldots, N$ արժեքների համար կստանանք՝

$$||v^n||' \le ||v^{n-1}||' + \tau||f|| \le ||v^{n-2}||' + 2\tau||f|| \le \cdots$$
$$\le ||v^0||' + n\tau||f|| \le ||v^0||' + N\tau||f|| = ||\varphi||' + T||f|| :$$

Այսպիսով,

$$||v^n||' \le T||f|| + ||\varphi||' , \quad n = 0, 1, \ldots, N .$$

որտեղից էլ ակնհայտորեն հետևում է (8.3.8) գնահատականը: □

Ստացված գնահատականը պնդում է (8.3.5) սխեմայի կայունությունը (8.3.3) նորմում:

Ցույց տանք, որ $r \le 1$ պայմանը էական է, այսինքն՝ $r > 1$ դեպքում սխեման անկայուն է: Դրա համար բավարար է ցույց տալ, որ այն զուգամետ չէ (տես 8.2.1 թեորեմը):

Ենթադրելով $f(x,t) \equiv 0$ անմիջական ստուգմամբ կարող ենք համոզվել, որ (8.3.1), (8.3.2) խնդրի լուծումը $u(x,t) = \varphi(x+at)$ ֆունկցիան է: Ուստի լուծումը հաստատուն է յուրաքանչյուր $x+at = const$ ուղիղ գծի վրա, որը կոչվում է հավասարման *բնութագրիչ* (տես սույն պարագրաֆի վերջը): Շարադրման պարզության համար վերցնենք $T = 1$: Այդ դեպքում լուծումը հաստատուն է $x + at = a$ բնութագրիչի վրա, որն անցնում է $(0,1)$ և $(a,0)$ կետերով (նկ. 8.3.1): Ակնհայտ է, որ $u(0,1) = \varphi(a)$:

Նկ. 8.3.1 $r > 1$ դեպքում (8.3.5) սխեմայի տարամիտության ապացույցի առթիվ

Հեշտ է տեսնել, որ (8.3.5) տարբերական խնդրի v_0^N լուծումը $(0,1)$ կետում միարժեքորեն որոշվում է $\varphi(x)$ ֆունկցիայի արժեքներով $0 \le x \le a/r$ հատվածին պատկանող հանգույցների վրա, և կախված չէ $\varphi(x)$ ֆունկցիայի արժեքներից այդ հատվածից դուրս: Եթե $r > 1$, ապա $a/r < a$: Ուստի զուգամիտություն $(0,1)$ հանգույցում, ընդհանրապես ասած, գոյություն չունի: Իրոք, դիցուք որոշ $\varphi(x)$ ֆունկցիայի համար տեղի ունի զուգամիտություն, այսինքն՝

$$\lim_{h,\tau \to 0} v_0^N = u(0,1) = \varphi(a) \ :$$

Փոխենք $\varphi(x)$ ֆունկցիայի արժեքները $x = a$ կետի շրջակայքում այնպես, որ $0 \le x \le a/r$ հատվածում այն մնա, սակայն, անփոփոխ: Ավելի ճիշտ, վերցնենք մի այլ սկզբնական ֆունկցիա $\tilde{\varphi}(x)$ այնպես, որ $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$, երբ $0 \le x \le a/r$, բայց $\tilde{\varphi}(a) \ne \varphi(a)$: Այդ դեպքում ճշգրիտ լուծման արժեքը $(0,1)$ կետում կփոխվի (այժմ այն հավասար է $\tilde{\varphi}(a)$-ի), այն դեպքում, երբ v_0^N մոտավոր լուծումը կմնա նախկինը:

Դրանով իսկ զուգամիտություն փոփոխված սկզբնական արժեքի դեպքում արդեն չկա: Իսկ քանի որ (8.3.5) սխեման մոտարկող է, ապա այն չի կարող լինել կայուն (հակառակ դեպքում այն կհակասեր 8.2.1 թեորեմի պնդմանը):

Բերենք մի պարզ օրինակ, թե ինչպես է $r > 1$ դեպքում սխեմայի անկայունությունը ազդում մոտավոր լուծման վրա սկզբնական արժեքների փոքր սխալանքների դեպքում: Դիտարկենք (8.3.1), (8.3.2) խնդիրը, երբ $f(x,t) \equiv 0$ և $\varphi(x) \equiv 0$: Այդ խնդրի լուծումն է՝ $u(x,t) \equiv 0$: Ունենալով

$$v_m^0 = 0\,, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{8.3.9}$$

սկզբնական արժեքները, մոտավոր լուծումը հաջորդ շերտերում որոշվում է ըստ

$$v_m^{n+1} = (1-r)v_m^n + rv_{m+1}^n\,, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

բանաձևի: Ակնհայտ է, որ $v_m^n \equiv 0$: Այժմ ենթադրենք, որ սկզբնական արժեքներում թույլ է տրվել սխալանք և (8.3.9)-ի փոխարեն իրականում ունենք

$$\tilde{v}_m^0 = (-1)^m \varepsilon\,, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\,, \tag{8.3.10}$$

որտեղ $\varepsilon = const$: Դժվար չէ ստանալ բացահայտ բանաձև նոր (8.3.10) սկզբնական արժեքներին համապատասխանող $\tilde{v}_m^n$ ցանցային ֆունկցիայի համար՝

$$\tilde{v}_m^n = (1-2r)^n (-1)^m \varepsilon\ :$$

Մասնավորապես, վերջին շերտում՝

$$|\tilde{v}_m^N| = |1-2r|^N |\varepsilon| = |1-2r|^{T/\tau} |\varepsilon|\ :$$

Քանի որ $|1-2r| > 1$, ապա $\tau \to 0$ դեպքում սկզբում թույլ տրված սխալանքը շատ արագ աճում է ուստի և լուծումը աղետալիորեն աղավաղվում է:

Կատարելով համանման դատողություններ, կարելի է ցույց տալ, որ նկ. 8.2.4բ-ում պատկերված ձախակողմյան շաբլոնով կառուցված

$$\begin{cases} \dfrac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - a\,\dfrac{v_m^n - v_{m-1}^n}{h} = f_m^n\,, \\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\,,\ n = 0, 1, \ldots, N-1\,, \\ v_m^0 = \varphi_m\,, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\,, \end{cases}$$

տարբերական սխեման անկայուն է կամայական r-ի դեպքում:

- Տեղափոխման հավասարման բնութագրիչների մասին

Կարելի է ցույց տալ, որ

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a(x,t)\,\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,t) \tag{8.3.11}$$

տեղափոխման հավասարման մեջ ձախ մասը իրենից ներկայացնում է $u(x,t)$ ֆունկցիայի լրիվ ածանցյալ ըստ t-ի՝

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} - a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} :$$

Ուստի (8.3.11) հավասարումը կարող է գրվել հետևյալ *բնութագրիչ* տեսքով.

$$\frac{du}{dt} = f(x,t), \tag{8.3.12}$$

$$\frac{dx}{dt} = -a(x,t) : \tag{8.3.13}$$

Նշենք, որ (8.3.13) սովորական դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրալ կորերը կոչվում են *բնութագրիչներ*: Այդ կորերը հոսքի գծերն են. $x = x(t; x_0, t_0)$ բնութագրիչը իրենից ներկայացնում է կրող միջավայրի մասնիկի շարժման հետագիծ, որը ժամանակի $t = t_0$ պահին ունի $x = x_0$ կոորդինատը (նկ. 8.3.2):

Նկ. 8.3.2 $x = x(t; x_0, t_0)$ բնութագրիչը

Պարզ է, որ $x = x(t; x_0, t_0)$ ֆիքսված բնութագրիչի վրա դիտարկվող (8.3.12) հավասարումը սովորական դիֆերենցիալ հավասարում է t անկախ փոփոխականով և $u(t) \equiv u(x(t; x_0, t_0), t)$ որոնելի ֆունկցիայով: Այդ հավասարման լուծումը միարժեքորեն որոշվում է $u(t_0) = u(x_0, t_0)$ սկզբնական պայմանով: «Մաքուր տեղափոխման» դեպքում՝ $f(x,t) \equiv 0$, բնութագրիչի վրա ունենք $u(t) \equiv u(t_0)$: Երբ $a = const$, բնութագրիչները ներկայացնում են $x + at = const$ զուգահեռ ուղիղների ընտանիք:

8.4 Կայունության սպեկտրալ հայտանիշը

Շարադրենք տարբերական սխեմաների կայունության վերլուծության բավականին պարզ եղանակ, որն առաջարկել է Ջ.Նեյմանը: Այստեղ մենք կսահմանափակվենք տեղափոխման հավասարման համար (8.3.1), (8.3.2) Կոշու խնդրի հետազոտմամբ:

Սկզբից դիտարկենք

$$\begin{cases} \dfrac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - a\,\dfrac{v_{m+1}^n - v_m^n}{h} = f_m^n, \\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \; n = 0, 1, \ldots, N-1, \\ v_m^0 = \varphi_m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases} \tag{8.4.1}$$

տարբերական սխեման: Համաձայն 8.2.3 սահմանմանը (8.4.1) տարբերական սխեմայի կայունությունը նշանակում է

$$||v|| \le C_1||f|| + C_2||\varphi||' \tag{8.4.2}$$

գնահատականի առկայություն, որտեղ C_1 և C_2 դրական հաստատունները կախված չեն ոչ ցանցի քայլերից, ոչ էլ $f = \{f_m^n\} \in G_h$ և $\varphi = \{\varphi_m\} \in G_h'$ ցանցային ֆունկցիաներից (տես ցանցային նորմերի (8.3.3) և (8.3.4) սահմանումները): (8.4.2) անհավասարությունը պետք է տեղի ունենա կամայական f և φ ֆունկցիաների համար: Մասնավորապես, կայունության համար անհրաժեշտ է, որպեսզի այն ճիշտ լինի $f \equiv 0$ և կամայական $\varphi \in G_h'$ ֆունկցիայի համար: Սա նշանակում է, որ

$$\begin{cases} \dfrac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - a\,\dfrac{v_{m+1}^n - v_m^n}{h} = 0, \\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \; n = 0, 1, \ldots, N-1, \\ v_m^0 = \varphi_m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases} \tag{8.4.3}$$

տարբերական խնդրի լուծման համար պետք է տեղի ունենա

$$||v|| \le C\,||\varphi||' \tag{8.4.4}$$

գնահատականը, որտեղ C-ն ցանցի քայլերից և φ ցանցային ֆունկցիայից անկախ դրական հաստատուն է: (8.4.4) հատկությունը կոչվում է *(8.4.1) սխեմայի կայունություն ըստ սկզբնական տվյալների*:

Ըստ սկզբնական տվյալների սխեմայի կայունության համար անհրաժեշտ է, որ (8.4.4) գնահատականը տեղի ունենա, մասնավորապես,

$$\varphi_m(\alpha) = e^{i\alpha m}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{8.4.5}$$

կոմպլեքս ցանցային ֆունկցիայի համար, որտեղ α-ն կամայական իրական պարամետր է: Քանի որ $|\varphi_m(\alpha)| = |e^{i\alpha m}| = 1$, ապա (8.4.4) գնահատականը այս դեպքում ընդունում է

$$||v(\alpha)|| \le C \tag{8.4.6}$$

տեսքը, որտեղ $v(\alpha)$-ն (8.4.5) սկզբնական ֆունկցիային համապատասխանող (8.4.3) տարբերական խնդրի լուծումն է: Դժվար չէ համոզվել, որ

$$v_m^n(\alpha) = \lambda^n(\alpha)e^{i\alpha m},$$

որտեղ

$$\lambda(\alpha) = 1 - r + re^{i\alpha}, \qquad r \equiv a\frac{\tau}{h} : \tag{8.4.7}$$

Քանի որ

$$\sup_m |v_m^n(\alpha)| = |\lambda(\alpha)|^n,$$

ապա (8.4.6) գնահատականի գոյության համար անհրաժեշտ է, որ բոլոր իրական α-ների համար

$$\max_{0\le n\le N} |\lambda(\alpha)|^n \le C :$$

Այս անհավասարությունը տեղի կունենա, եթե

$$|\lambda(\alpha)| \le 1 + K\tau \qquad \forall\alpha \in \mathbf{R}, \tag{8.4.8}$$

որտեղ K-ն τ-ից և α-ից անկախ դրական հաստատուն է: Իրոք, այդ դեպքում

$$\max_{0\le n\le N} |\lambda(\alpha)|^n \le \max_{0\le n\le N}(1 + K\tau)^n \le (1 + K\tau)^N = \left(1 + \frac{KT}{N}\right)^N \le e^{KT} :$$

Ստացված (8.4.8) պայմանը կոչվում է *Նեյմանի կայունության անհրաժեշտ սպեկտրալ պայման*: Այն կոչվում է սպեկտրալ հետևյալ պատճառով: Դիտարկվող (8.4.3) տարբերական խնդրում մի շերտից մյուսին անցումը կարելի է գրել

$$v^{n+1} = Pv^n$$

օպերատորային ձևով, որտեղ P *անցման օպերատորը* գործում է ըստ

$$(Pw)_m = (1 - r)w_m + rw_{m+1}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

օրենքի: Հեշտ է ցույց տալ, որ $\lambda(\alpha)$ թվերը (8.4.7)-ից P օպերատորի սեփական արժեքներն են, իսկ $\varphi(\alpha)$ ցանցային ֆունկցիաները (8.4.5)-ից համապատասխան սեփական ֆունկցիաներ են, այսինքն՝

$$P\varphi(\alpha) = \lambda(\alpha)\varphi(\alpha) \qquad \forall\alpha \in \mathbf{R} :$$

Երբ α-ն անցնում է ամբողջ իրական առանցքով, $\lambda(\alpha)$ կետը գծում է կոմպլեքս հարթության վրա որոշ գիծ, որը բաղկացած է P անցման օպերատորի սեփական արժեքներից:

Պարզենք (8.4.8) պայմանի առկայությունը մեր սխեմայի դեպքում: Դժվար չէ տեսնել, որ (8.4.7) կետերի համախմբությունը կոմպլեքս հարթության վրա կազմում է r շառավիղով շրջանագիծ, որի կենտրոնը գտնվում է իրական առանցքի $1 - r$ կետում: Իրոք,

$$|\lambda(\alpha) - (1 - r)| = r\,|e^{i\alpha}| = r :$$

Երբ $r \le 1$, այդ շրջանագիծը գտնվում է միավոր շրջանի ներսում (նկ. 8.4.1ա), ուստի $|\lambda(\alpha)| \le 1$: Երբ $r > 1$, շրջանագիծը գտնվում է միավոր շրջանից դուրս, շոշափելով վերջինը միայն իրական առանցքի $\lambda = 1$ կետում (նկ. 8.4.1բ): Դժվար չէ տեսնել, որ (8.4.8) պայմանը այստեղ տեղի չունի:

(ա) (բ)

Նկ. 8.4.1 Անցման օպերատորի սպեկտրի կետերը (8.4.1) սխեմայի համար

Նախորդ պարագրաֆում մենք բավականին մանրամասն հետազոտել ենք (8.4.1) տարբերական սխեման և ցույց ենք տվել, որ $r \le 1$ դեպքում այն կայուն է, իսկ $r > 1$ դեպքում՝ անկայուն: Այսպիսով, Նեյմանի պայմանը բավականին զգայուն գտնվեց, որպեսզի ճշտությամբ միմյանցից անջատի կայունության և անկայունության դեպքերը:

Կատարենք այժմ տեղափոխման հավասարման համար այլ տարբերական սխեմաների վերլուծությունը: Դիտարկենք

$$\begin{cases} \dfrac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - a\,\dfrac{v_m^n - v_{m-1}^n}{h} = f_m^n, \\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1, \\ v_m^0 = \varphi_m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases} \tag{8.4.9}$$

սխեման: Ինչպես արդեն ասվել է նախորդ պարագրաֆում, այդ սխեման անկայուն է կամայական r-ի դեպքում (հիշեցնենք, որ այստեղ $a > 0$): Հեշտ է համոզվել, որ (8.4.5) տեսքի սկզբնական ցանցային ֆունկցիայի համար համապատասխան համասեռ խնդրի ($f \equiv 0$) լուծումը կլինի

$$v_m^n(\alpha) = \lambda^n(\alpha) e^{i\alpha m},$$

որտեղ

$$\lambda(\alpha) = 1 + r - re^{-i\alpha}\ : \tag{8.4.10}$$

(8.4.10) կետերի համախմբությունը, երբ $\alpha \in \mathbf{R}$, իրենից ներկայացնում է կոմպլեքս հարթության վրա r շառավիղով շրջանագիծ, որի կենտրոնը գտնվում է իրական առանցքի $1 + r$ կետում (նկ. 8.4.2ա): Ուստի (8.4.8) պայմանը տեղի չունի r-ի ոչ մի արժեքի դեպքում: Այսպիսով, կայունության սպեկտրալ հայտանիշը (8.4.9) սխեմայի համար նույնպես զգայուն է:

Նկ. 8.4.2 Անցման օպերատորի սպեկտրի կետերը. (ա) (8.4.9) սխեմայի համար, (բ) (8.4.11) սխեմայի համար

Դիտարկենք այժմ

$$\begin{cases} \dfrac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - a\,\dfrac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} = f_m^n, \\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \; n = 0, 1, \ldots, N-1, \\ v_m^0 = \varphi_m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases} \tag{8.4.11}$$

տարբերական սխեման: Այս սխեմայի համար, կատարելով համանման դատողություններ, գտնում ենք, որ

$$\lambda(\alpha) = 1 + i\,a\frac{\tau}{h}\sin\alpha \; : \tag{8.4.12}$$

Այստեղ (8.4.12) կետերի համախմբությունը կազմում է $2a\tau/h$ երկարությամբ ուղղաձիգ հատված, որն անցնում է իրական առանցքի $\lambda = 1$ կետով (նկ. 8.4.2բ): Եթե $a\tau/h = r = const$, ինչպես ենթադրում էինք վերը, ապա (8.4.8) պայմանը տեղի չունի: Իսկ եթե ըստ ժամանակի τ քայլը, երբ $h \to 0$, փոփոխվում է h^2-ին համեմատականորեն այնպես, որ $\tau = rh^2$, որտեղ $r = const$, ապա այս դեպքում (8.4.8) կայունության անհրաժեշտ սպեկտրալ պայմանը արդեն տեղի ունի: Իրոք, կամայական $\alpha \in \mathbf{R}$ համար ունենք

$$|\lambda(\alpha)| \le \left|\lambda\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = \sqrt{1 + a^2\frac{\tau^2}{h^2}} = \sqrt{1 + a^2 r\tau} \le 1 + \frac{a^2 r}{2}\tau \; :$$

Ասենք, որ $\tau = rh^2$ պահանջը ավելի խիստ պայման է քայլերի հարաբերակցության վրա: Սա նշանակում է, որ փոքր h-երի դեպքում մենք ստիպված ենք ընտրել չափազանց փոքր քայլ ըստ ժամանակի: Իսկ դա, իր հերթին, կբերի մեքենայական ժամանակի զգալի աճի:

Ելնելով վերը շարադրածից, մենք գալիս ենք հետևյալ եզրակացությանը: Եթե կայունության (8.4.8) անհրաժեշտ սպեկտրալ պայմանը տեղի չունի, ապա ցանցային նորմերի ինչպիսի խելամիտ ընտրություն էլ կատարվի չի կարելի սպասել տարբերական սխեմայի կայունության: Իսկ եթե այն տեղի ունի, ապա կան մեծ հիմքեր համարելու, որ սխեման կայուն է: Ըստ այդմ Նեյմանի պայմանը կարելի է դիտարկել որպես յուրատեսակ ֆիլտր, որը մաղում է անկայուն սխեմաները:

8.5 Ջերմահաղորդականության հավասարումը

Դիտարկենք

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, \quad 0 < x < 1, \ 0 < t \le T \tag{8.5.1}$$

ջերմահաղորդականության հավասարումը, որտեղ $a = const > 0$,

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le 1 \tag{8.5.2}$$

սկզբնական պայմանով և

$$u(0,t) = \alpha(t), \ u(1,t) = \beta(t), \quad 0 < t \le T \tag{8.5.3}$$

եզրային պայմաններով:

Ենթադրվում է, որ (8.5.1)-(8.5.3) խնդրի լուծումը գոյություն ունի և միակն է:

Կառուցենք դիտարկվող տիրույթում ω_h ցանցը (x_m, t_n) հանգույցներով, որտեղ $x_m = mh, m = 0, 1, \ldots, M+1$, $h = 1/(M+1)$ և $t_n = n\tau, n = 0, 1, \ldots, N$, $\tau = T/N$ (նկ. 8.5.1): Դիցուք G_h-ը ω_h ցանցի վրա որոշված ցանցային ֆունկցիաների տարածությունն է: Նշանակենք u_m^n-ով $u \in G_h$ ֆունկցիայի արժեքը (x_m, t_n) հանգույցում: Ֆիքսված n-ի դեպքում (x_m, t_n) հանգույցների համախմբությունը անվանենք ցանցի *n-րդ շերտ:* Կօգտագործենք $w^n \equiv \{w_m^n : m = 0, 1, \ldots, M+1\}$ նշանակումը n-րդ շերտում տրված ցանցային ֆունկցիաների համար:

Նկ. 8.5.1 Ցանց ջերմահաղորդականության հավասարման համար

Ցանցային ֆունկցիաների G_h տարածությունում սահմանենք

$$||w|| \equiv \max_{0 \le n \le N} \max_{0 \le m \le M+1} |w_m^n| \tag{8.5.4}$$

նորմը: Այնուհետև, միաչափ $\omega_h' = \{x_m : m = 0, 1, \ldots, M+1\}$ ցանցի վրա տրված $\psi = \{\psi_m\}_{m=0}^{M+1} \in G_h'$ ֆունկցիայի համար նորմը սահմանենք հետևյալ կերպ.

$$||\psi||' \equiv \max_{0 \le m \le M+1} |\psi_m| \ : \tag{8.5.5}$$

Սույն պարագրաֆում մենք կդիտարկենք երեք առավել գործածելի սխեմաներ ջերմահաղորդականության հավասարման համար:

8.5.1 Բացահայտ սխեմա

Կառուցենք տարբերական սխեմա ըստ նկ. 8.2.5ա -ում պատկերված շաբլոնի.

$$\begin{cases} \dfrac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - a\,\dfrac{v_{m-1}^n - 2v_m^n + v_{m+1}^n}{h^2} = f_m^n, \\ m = 1, 2, \ldots, M\,,\ n = 0, 1, \ldots, N-1\,, \\ v_m^0 = \varphi_m\,, \quad m = 0, 1, \ldots, M+1\,, \\ v_0^n = \alpha^n\,,\ v_{M+1}^n = \beta^n\,, \quad n = 1, 2, \ldots, N\,: \end{cases} \tag{8.5.6}$$

Այստեղ $\alpha^n \equiv \alpha(t_n)$, $\beta^n \equiv \beta(t_n)$:

Համաձայն այս սխեմայի. իմանալով մոտավոր լուծումը n-րդ շերտում, որտեղ $0 \le n \le N-1$, լուծման արժեքները հաջորդ $(n+1)$-րդ շերտում հաշվվում են ըստ

$$v_m^{n+1} = rv_{m-1}^n + (1-2r)v_m^n + rv_{m+1}^n + \tau f_m^n\,, \quad m = 1, 2, \ldots, M \tag{8.5.7}$$

բացահայտ բանաձևի, որտեղ $r \equiv a\tau/h^2$: Այդ իսկ պատճառով (8.5.6) տարբերական սխեման կոչվում է *բացահայտ*:

Pseudocode **EXPLICIT**

```
input a, T, M, N
h = 1/(M + 1)
τ = T/N
r = aτ/h^2
for m = 0, 1, ..., M + 1 do
    v_m^0 = φ_m
end
for n = 0, 1, ..., N − 1 do
    v_0^{n+1} = α^{n+1}
    v_{M+1}^{n+1} = β^{n+1}
    for m = 1, 2, ..., M do
        v_m^{n+1} = (1 − 2r)v_m^n + r(v_{m−1}^n + v_{m+1}^n) + τf_m^n
    end
end
output v
```

Պարզենք սխեմայի մոտարկման կարգը: Օգտագործելով Թեյլորի վերլուծությունը (տե՛ս 4.6.1 և 4.6.4 լեմմաները), և հաշվի առնելով (8.5.2) և (8.5.3) սկզբնական և եզրային պայմանները, դժվար չէ ստանալ, որ

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - a\,\frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2} = f_m^n + \varepsilon_m^{n+1}\,,$$

$$m = 1, 2, \ldots, M\,,\ n = 0, 1, \ldots, N-1\,,$$

$$u_m^0 = \varphi_m\,, \quad m = 0, 1, \ldots, M+1\,,$$

$$u_0^n = \alpha^n\,,\ u_{M+1}^n = \beta^n\,, \quad n = 1, 2, \ldots, N\,,$$

որտեղ

$$\varepsilon_m^{n+1} = \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_{(x_m, t_n+\theta_1\tau)} - a\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\Big|_{(x_m+\theta_2 h, t_n)}, \quad 0<\theta_1<1\,,\ -1<\theta_2<1\ :$$

Ենթադրելով հավասարության աջ մասում մասնական ածանցյալների սահմանափակությունը, այստեղից հետևում են

$$|\varepsilon_m^{n+1}| \le C(\tau + h^2)\,, \qquad C = const > 0 \tag{8.5.8}$$

գնահատականները բոլոր $m = 1, 2, \ldots, M$ և $n = 0, 1, \ldots, N-1$ արժեքների համար: Դրանով իսկ (8.5.6) տարբերական սխեման մոտարկում է (8.5.1)-(8.5.3) խնդիրը առաջին կարգով ըստ τ-ի և երկրորդ կարգով ըստ h-ի:

Այժմ անդրադառնանք (8.5.6) սխեմայի կայունության հարցին:

Թեորեմ 8.5.1 : *Եթե $r \le 1/2$, ապա (8.5.6) տարբերական սխեմայի $v \in G_h$ լուծման համար ճիշտ է*

$$||v|| \le T||f|| + \max\left(||\varphi||'\,,\ \Phi\right) \tag{8.5.9}$$

գնահատականը, որտեղ

$$\Phi \equiv \max\left(\max_{1\le n\le N}|\alpha^n|\,,\ \max_{1\le n\le N}|\beta^n|\right)\ :$$

Ապացույց: Քանի որ $r \le 1/2$, ապա (8.5.7)-ից ունենք

$$|v_m^{n+1}| \le r|v_{m-1}^n| + (1-2r)|v_m^n| + r|v_{m+1}^n| + \tau|f_m^n| \le ||v^n||' + \tau||f|| \tag{8.5.10}$$

բոլոր $m = 1, 2, \ldots, M$ և $n = 0, 1, \ldots, N-1$ արժեքների համար: Ակնհայտ են

$$|v_0^{n+1}| = |\alpha^{n+1}| \le \Phi\,, \quad |v_{M+1}^{n+1}| = |\beta^{n+1}| \le \Phi \tag{8.5.11}$$

անհավասարությունները: Այնուհետև, (8.5.10)-ից և (8.5.11)-ից հետևում է, որ

$$||v^{n+1}||' \le \max\left(||v^n||'\,,\ \Phi\right) + \tau\,||f||\,, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1\ : \tag{8.5.12}$$

Օգտվելով (8.5.12) անհավասարություններից, ցանկացած n-ի համար, որտեղ $1 \le n \le N$, ունենք

$$||v^n||' \le \max\left(||v^{n-1}||'\,,\ \Phi\right) + \tau\,||f|| \le \max\left(\max\left(||v^{n-2}||'\,,\ \Phi\right) + \tau\,||f||\,,\ \Phi\right) + \tau\,||f|| \le$$

$$\max\left(||v^{n-2}||'\,,\ \Phi\right) + 2\tau\,||f|| \le \cdots \le \max\left(||v^0||'\,,\ \Phi\right) + n\tau\,||f|| \le \max\left(||v^0||'\,,\ \Phi\right) +$$

$$N\tau\,||f|| = \max\left(||\varphi||'\,,\ \Phi\right) + T\,||f||\ :$$

Այստեղից ակնհայտորեն հետևում է (8.5.9) գնահատականը: □

Ստացված (8.5.9) գնահատականը հաստատում է (8.5.6) սխեմայի կայունությունը (8.5.4) նորմում: Նկատի ունենալով τ և h քայլերի հարաբերակցության վրա դրվող $r \le 1/2$ պայմանը, ասում են, որ բացահայտ սխեման *պայմանականորեն կայուն է*:

Նշենք, որ քայլերի հարաբերակցության վրա նույն պահանջը դնում է նաև Նեյմանի կայունության անհրաժեշտ սպեկտրալ պայմանը: Իրոք, մոտարկելով

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f\,, \quad -\infty < x < +\infty\,,\ 0 < t \le T\,, \tag{8.5.13}$$

$$u(x,0) = \varphi(x)\,, \quad -\infty < x < +\infty \tag{8.5.14}$$

ջերմահաղորդականության խնդիրը 8.2.4 օրինակում նկարագրված ցանցի վրա (նկ. 8.2.7), գտնում ենք, որ անցման օպերատորի սեփական արժեքներն են՝

$$\lambda(\alpha) = 1 - 2r + 2r\cos\alpha\,, \quad \alpha \in \mathbf{R}\ :$$

Ակնհայտ է, որ $|\lambda(\alpha)| \le 1$ երբ $r \le 1/2$:

8.5.2 Անբացահայտ սխեմա

Ըստ նկ. 8.2.5բ -ում տրված շաբլոնի կառուցենք

$$\begin{cases} L_h v_m^n \equiv \dfrac{v_m^n - v_m^{n-1}}{\tau} - a\,\dfrac{v_{m-1}^n - 2v_m^n + v_{m+1}^n}{h^2} = f_m^n\,, \\ m = 1,2,\ldots,M\ ,\ n = 1,2,\ldots,N\,, \\ v_m^0 = \varphi_m\,, \quad m = 0,1,\ldots,M+1\,, \\ v_0^n = \alpha^n\,,\ v_{M+1}^n = \beta^n\,, \quad n = 1,2,\ldots,N \end{cases} \tag{8.5.15}$$

տարբերական սխեման: Ի տարբերություն բացահայտ սխեմայի, այստեղ յուրաքանչյուր n-րդ շերտում, որտեղ $1 \le n \le N$, մոտավոր լուծումը գտնելու համար անհրաժեշտ է լուծել

$$\begin{cases} -rv_{m-1}^n + (1+2r)v_m^n - rv_{m+1}^n = \tau f_m^n + v_m^{n-1}\,, \\ \qquad\qquad m = 1,2,\ldots,M\,, \\ v_0^n = \alpha^n\,,\ v_{M+1}^n = \beta^n \end{cases}$$

գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգը, որտեղ $r \equiv a\tau/h^2$: Ստացված համակարգի մատրիցը երեքանկյունագծային է: Ուստի այդ համակարգը կարելի է արդյունավետ լուծել 3.9 պարագրաֆում նկարագրված մեթոդով: Նկատենք, որ 3.9.1 թեորեմի բոլոր պայմանները այստեղ բավարարված են և, մասնավորապես, առկա է մատրիցի խիստ անկյունագծային գերիշխումը՝ $1 + 2r > 2r$:

Կառուցված (8.5.15) տարբերական սխեման կոչվում է *անբացահայտ*: Ստորև տրված է այդ սխեմայի իրականացման ալգորիթմը:

Pseudocode **IMPLICIT**

```
input a, T, M, N
h = 1/(M + 1)
τ = T/N
r = aτ/h^2
for m = 0, 1, ..., M + 1 do
    v_m^0 = φ_m
end
for n = 1, 2, ..., N do
    v_0^n = α^n
    v_{M+1}^n = β^n
    solve system
        -r v_{m-1}^n + (1 + 2r) v_m^n - r v_{m+1}^n = τ f_m^n + v_m^{n-1},
                                m = 1, 2, ..., M
    end solve
end
output v
```

Սխեմայի մոտարկման կարգը նույնն է, ինչպես բացահայտ սխեմայի դեպքում: Իրոք, օգտվելով 4.6.2 և 4.6.4 լեմմաներից, և հաշվի առնելով (8.5.2) և (8.5.3) սկզբնական և եզրային պայմանները, կստանանք

$$\frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{\tau} - a\,\frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2} = f_m^n + \varepsilon_m^n\,.$$

$$m = 1, 2, \ldots, M\,,\ n = 1, 2, \ldots, N\,,$$

$$u_m^0 = \varphi_m\,, \quad m = 0, 1, \ldots, M+1\,,$$

$$u_0^n = \alpha^n\,,\ u_{M+1}^n = \beta^n\,, \quad n = 1, 2, \ldots, N\,,$$

որտեղ

$$\varepsilon_m^n = -\frac{\tau}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_{(x_m, t_n - \theta_1\tau)} - a\,\frac{h^2}{12}\,\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\Big|_{(x_m + \theta_2 h, t_n)}\,, \quad 0 < \theta_1 < 1\,,\ -1 < \theta_2 < 1\,:$$

Այստեղից, ենթադրելով հավասարության աջ մասում մասնական ածանցյալների սահմանափակությունը, կստանանք, որ

$$|\varepsilon_m^n| \le C(\tau + h^2)\,, \qquad C = const > 0 \tag{8.5.16}$$

բոլոր $m = 1, 2, \ldots, M$ և $n = 1, 2, \ldots, N$ արժեքների համար: Այսպիսով, անբացահայտ տարբերական սխեման մոտարկում է (8.5.1)-(8.5.3) խնդիրը առաջին կարգով ըստ τ-ի և երկրորդ կարգով ըստ h-ի:

Ապացուցենք (8.5.15) տարբերական սխեմայի կայունությունը (8.5.4) նորմում: Այդ նպատակով մեզ պետք կգա հետևյալ օժանդակ պնդումը:

Լեմմա 8.5.1 (մաքսիմումի սկզբունք) **:** *Դիցուք $\theta \in G_h$ ցանցային ֆունկցիան այնպիսին է, որ*

$$L_h\theta_m^n \le 0, \quad m = 1, 2, \ldots, M, \; n = 1, 2, \ldots, N \; : \tag{8.5.17}$$

Այդ դեպքում այն ընդունում է իր մեծագույն արժեքը կամ սկզբնական շերտում ($n = 0$), կամ էլ եզրում ($m = 0$ կամ $m = M + 1$):

Ապացույց: Նշանակենք $\mu \equiv \max\limits_{\omega_h} \theta_m^n$: Պարզ է, որ մաքսիմումը հասանելի է ω_h ցանցի որոշ հանգույցներում: Դիցուք k-ն ցանցի այն ամենաստորին շերտի համարն է, որտեղ θ ցանցային ֆունկցիան ընդունում է μ արժեքը: Եթե $k = 0$, ապա պնդումն ապացուցված է:

Դիցուք $k \ge 1$: Ցույց տանք, որ (x_m, t_k) ներքին հանգույցներում, այն է՝ երբ $1 \le m \le M$, θ ֆունկցիան չի կարող ընդունել μ արժեքը: Ընդունենք հակառակը, այսինքն՝ $\theta_i^k = \mu$ ինչ-որ i-ի համար, որտեղ $1 \le i \le M$: Այդ դեպքում (x_i, t_k) հանգույցում կունենանք

$$L_h\theta_i^k = \frac{\theta_i^k - \theta_i^{k-1}}{\tau} - a\,\frac{\theta_{i-1}^k - 2\theta_i^k + \theta_{i+1}^k}{h^2} = \frac{\mu - \theta_i^{k-1}}{\tau} + a\,\frac{2\mu - \theta_{i-1}^k - \theta_{i+1}^k}{h^2} \ge \frac{\mu - \theta_i^{k-1}}{\tau} > 0,$$

ինչը հակասում է (8.5.17) պայմանին: Ուստի մեր ենթադրությունը ճիշտ չէ, և θ ֆունկցիան կընդունի իր մեծագույն μ արժեքը (x_0, t_k) կամ (x_{M+1}, t_k) հանգույցներից գոնե մեկում: □

Թեորեմ 8.5.2 : *Տարբերական (8.5.15) խնդրի $v \in G_h$ լուծման համար ճիշտ է*

$$||v|| \le \frac{1}{8a}\,||f|| + \max(||\varphi||', \Phi) \tag{8.5.18}$$

գնահատականը, որտեղ

$$\Phi \equiv \max\left(\max_{1\le n\le N} |\alpha^n|, \max_{1\le n\le N} |\beta^n|\right) \; :$$

Ապացույց: Դիտարկենք $w \in G_h$ օժանդակ ֆունկցիան, որը որոշվում է հետևյալ կերպ.

$$w_m^n = \frac{x_m(1 - x_m)}{2a}, \quad m = 0, 1, \ldots, M + 1, \; n = 0, 1, \ldots, N \; :$$

Պարզ է, որ $w_m^n \ge 0$, ընդ որում $w_0^n = w_{M+1}^n = 0$: Այդ դեպքում

$$||w|| \le \max_{0\le x\le 1} \frac{x(1 - x)}{2a} = \frac{1}{8a} \; : \tag{8.5.19}$$

Այնուհետև, պարզ հաշվարկներով ստանում ենք, որ

$$L_h w_m^n = 1, \quad m = 1, 2, \ldots, M, \; n = 1, 2, \ldots, N \; : \tag{8.5.20}$$

Դիցուք $\theta \equiv v - ||f||w$: Այս ցանցային ֆունկցիայի համար, L_h տարբերական օպերատորի գծայնության և (8.5.20) հատկության շնորհիվ, բոլոր $m = 1, 2, \ldots, M$ և $n = 1, 2, \ldots, N$ արժեքների համար ունենք

$$L_h\theta_m^n = L_h v_m^n - ||f||\, L_h w_m^n = f_m^n - ||f|| \le 0 \ :$$

Դրանով իսկ θ ֆունկցիան բավարարում է 8.5.1 լեմմայի պայմանին: Այդ դեպքում

$$\theta_m^n \le \max\left(\max_{0\le m\le M+1} \theta_m^0 \,,\ \max_{1\le n\le N} \theta_0^n \,,\ \max_{1\le n\le N} \theta_{M+1}^n\right) ,$$
$$m = 0, 1, \ldots, M+1 \,,\ n = 0, 1, \ldots, N \ :$$

Ցանցային θ ֆունկցիայի սահմանումից ունենք

$$\theta_m^0 = v_m^0 - ||f||w_m^0 \le v_m^0 = \varphi_m \le ||\varphi||' ,$$
$$\theta_0^n = v_0^n - ||f||w_0^n = v_0^n = \alpha^n \le \Phi ,$$
$$\theta_{M+1}^n = v_{M+1}^n - ||f||w_{M+1}^n = v_{M+1}^n = \beta^n \le \Phi \ :$$

Հետևաբար,

$$\theta_m^n \le \max\left(||\varphi||' \,,\ \Phi\right) , \quad m = 0, 1, \ldots, M+1 \,,\ n = 0, 1, \ldots, N \ :$$

Վերջապես, հաշվի առնելով (8.5.19) գնահատականը, կստանանք

$$v_m^n = \theta_m^n + ||f||w_m^n \le \max\left(||\varphi||' \,,\ \Phi\right) + \frac{1}{8a}\,||f|| \,. \qquad (8.5.21)$$
$$m = 0, 1, \ldots, M+1 \,,\ n = 0, 1, \ldots, N \ :$$

Ճիշտ են նաև

$$-v_m^n \le \max\left(||\varphi||' \,,\ \Phi\right) + \frac{1}{8a}\,||f|| \,, \quad m = 0, 1, \ldots, M+1 \,,\ n = 0, 1, \ldots, N \qquad (8.5.22)$$

անհավասարությունները: Դրանք հետևում են այն ակնհայտ փաստից, որ եթե v ցանցային ֆունկցիան (8.5.15) տարբերական խնդրի լուծումն է, ապա $-v$ ֆունկցիան կլինի

$$\begin{cases} L_h(-v_m^n) = -f_m^n \,, \quad m = 1, 2, \ldots, M \,,\ n = 1, 2, \ldots, N \,, \\ -v_m^0 = -\varphi_m \,, \quad m = 0, 1, \ldots, M+1 \,, \\ -v_0^n = -\alpha^n \,,\ -v_{M+1}^n = -\beta^n \,, \quad n = 1, 2, \ldots, N \end{cases}$$

տարբերական խնդրի լուծումը: Այսպիսով, (8.5.21) և (8.5.22)-ից ստանում ենք

$$|v_m^n| \le \frac{1}{8a}\,||f|| + \max\left(||\varphi||' \,,\ \Phi\right) , \quad m = 0, 1, \ldots, M+1 \,,\ n = 0, 1, \ldots, N$$

անհավասարությունները, որոնցից և բխում է (8.5.18) գնահատականը: □

Մենք ապացուցել ենք (8.5.16) տարբերական սխեմայի կայունությունը առանց ցանցի քայլերի հարաբերակցության վրա որևէ մի սահմանափակման : Այդ պատճառով անբացահայտ տարբերական սխեման անվանում են *անպայմանորեն* կամ *բացարձակ կայուն*:

Նեյմանի կայունության անհրաժեշտ սպեկտրալ պայմանը՝ (8.5.14),(8.5.15) խնդրի կիրարկմամբ, նույնպես հաստատում է անբացահայտ սխեմայի բացարձակ կայունությունը: Իրոք, այստեղ անցման օպերատորի սեփական արժեքներն են՝

$$\lambda(\alpha) = \frac{1}{1 + 2\tau(1 - \cos\alpha)}, \quad \alpha \in \mathbf{R} :$$

Ակնհայտ է, որ $|\lambda(\alpha)| \leq 1$ ցանկացած դրական τ-ի դեպքում:

Բերենք մի քանի էական դիտողություն բացահայտ և անբացահայտ սխեմաների վերաբերյալ: Համաձայն (8.5.8) և (8.5.16)-ի, երկուսն էլ ունեն $O(\tau + h^2)$ մոտարկման կարգ: Բացահայտ սխեման իրականացվում է ավելի հեշտ, այն դեպքում երբ անբացահայտ սխեմայի հաշվարկները պահանջում են յուրաքանչյուր ժամանակային շերտում գծային հանրահաշվական հավասարումների լուծում: Սակայն պետք է նկատի ունենալ, որ երեքանկյունագծային մատրիցով համակարգերը լուծվում են ըստ կարգի օպտիմալ մեթոդով (տես 3.9 պարագրաֆը): Ուստի երկու դեպքում էլ առանձին շերտում մոտավոր լուծման որոշումը պահանջում է $O(h^{-1})$ թվաբանական գործողություն: Բացահայտ սխեմայում շերտերի քանակը, ընդհանրապես, $\tau \leq h^2/a$ սահմանափակության պատճառով, ավելի շատ է, քան անբացահայտ սխեմայում: Պետք չէ մոռանալ նաև մոտարկման ճշտության մասին, որը բացահայտ սխեմայում, ժամանակային քայլի վրա սահմանափակության առկայությամբ, $O(h^2)$ մեծություն է, և որպեսզի ունենանք նույն ճշտությունը անբացահայտ սխեմայի դեպքում, պետք է նույնպես վերցնել $\tau = O(h^2)$:

8.5.3 Կռանկ-Նիկոլսոնի սխեմա

Դիտարկենք ևս մեկ տարբերական սխեմա ջերմահաղորդականության հավասարման համար: Գրենք (8.5.1)-(8.5.3) խնդրի համար

$$\begin{cases} \dfrac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - \dfrac{a}{2}\left[(v_m^{n+1})_{x\bar{x}} + (v_m^n)_{x\bar{x}}\right] = f_m^{n+1/2}, \\ m = 1, 2, \ldots, M, \; n = 0, 1, \ldots, N-1, \\ v_m^0 = \varphi_m, \quad m = 0, 1, \ldots, M+1, \\ v_0^n = \alpha^n, \; v_{M+1}^n = \beta^n, \quad n = 1, 2, \ldots, N \end{cases} \tag{8.5.23}$$

ցանցային հավասարումների համակարգը, որտեղ $f_m^{n+1/2} \equiv f(x_m, t_n + \tau/2)$: Այս սխեման, որը կրում է *Կռանկ-Նիկոլսոնի* անունը, կառուցված է ըստ նկ. 8.5.2-ում պատկերված վեցկետային շաբլոնի:

Նկ. 8.5.2 Կռանկ-Նիկոլսոնի սխեմայի շարլոնը

Կռանկ-Նիկոլսոնի սխեման պատկանում է անբացահայտ սխեմաների դասին, քանի որ յուրաքանչյուր $(n+1)$-րդ շերտում, որտեղ $0 \le n \le N-1$, լուծվում է

$$\begin{cases} -\dfrac{r}{2}v_{m-1}^{n+1} + (1+r)v_m^{n+1} - \dfrac{r}{2}v_{m+1}^{n+1} = g_m^{n+1}, \\ \qquad m = 1, 2, \ldots, M, \\ v_0^{n+1} = \alpha^{n+1}, \; v_{M-1}^{n+1} = \beta^{n+1} \end{cases}$$

գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգը, որտեղ

$$g_m^{n+1} \equiv \frac{r}{2}v_{m-1}^n + (1-r)v_m^n + \frac{r}{2}v_{m+1}^n + \tau f_m^{n-1/2} :$$

Ի տարբերություն բացահայտ և անբացահայտ սխեմաների, Կռանկ-Նիկոլսոնի սխեման ունի մոտարկման երկրորդ կարգ ըստ τ քայլի: Ենթադրելով ճշգրիտ լուծման բավականաչափ ողորկություն, դժվար չէ ստանալ, որ

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{a}{2}\left[(u_m^{n+1})_{x\bar{x}} + (u_m^n)_{x\bar{x}}\right] = f_m^{n+1/2} + \varepsilon_m^{n+1/2},$$

$$m = 1, 2, \ldots, M, \; n = 0, 1, \ldots, N-1,$$

$$u_m^0 = \varphi_m, \quad m = 0, 1, \ldots, M+1,$$

$$u_0^n = \alpha^n, \; u_{M+1}^n = \beta^n, \quad n = 1, 2, \ldots, N,$$

որտեղ

$$|\varepsilon_m^{n+1/2}| \le C(\tau^2 + h^2), \quad C = const > 0 \tag{8.5.24}$$

բոլոր $m = 1, 2, \ldots, M$ և $n = 0, 1, \ldots, N-1$ արժեքների համար:

Ապացուցված է, որ Կռանկ-Նիկոլսոնի սխեման կայուն է (8.5.4) նորմում, եթե $\tau = O(h^2)$ (տե՛ս, օրինակ, [36]): Միաժամանակ, հաջորդ պարագրաֆում մենք ցույց կտանք, որ այդ սխեման բացարձակ կայուն է ցանցային էվկլիդյան նորմում: Դա նշանակում է, որ ունենալով (8.5.24) գնահատականը, և վերցնելով $\tau = O(h)$, մենք ապահովում ենք $O(h^2)$ մոտարկման սխալանք:

Սխեման իրականացվում է ըստ հետևյալ ալգորիթմի.

Pseudocode **CRANK – NICOLSON**

```
input a, T, M, N
h = 1/(M + 1)
τ = T/N
r = aτ/h^2
for m = 0, 1, ..., M + 1 do
    v_m^0 = φ_m
end
for n = 0, 1, ..., N − 1 do
    v_0^{n+1} = α^{n+1}
    v_{M+1}^{n+1} = β^{n+1}
    for m = 1, 2, ..., M do
        g_m = (1 − r)v_m^n + 0.5r(v_{m−1}^n + v_{m+1}^n) + τf_m^{n+1/2}
    end
    solve system
        −0.5rv_{m−1}^{n+1} + (1 + r)v_m^{n+1} − 0.5rv_{m−1}^{n+1} = g_m ,
                        m = 1, 2, ..., M
    end solve
end
output v
```

Վերջում նշենք, որ ջերմահաղորդականության հավասարման համար դիտարկված բոլոր սխեմաները մասնավոր դեպքերն են այսպես կոչված

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - a\left[\sigma\left(v_m^{n+1}\right)_{x\bar{x}} + (1-\sigma)\left(v_m^n\right)_{x\bar{x}}\right] = f_m^{n+\sigma}$$

կշիռներով սխեմայի, որտեղ $f_m^{n+\sigma} \equiv f(x_m, t_n + \sigma\tau)$: Իրոք, $\sigma = 0$ դեպքում մենք ստանում ենք բացահայտ սխեմա, $\sigma = 1$ դեպքում՝ անբացահայտ, իսկ $\sigma = 0.5$ դեպքում՝ Կռանկ-Նիկոլսոնի սխեմա:

8.6 Ֆուրիեի մեթոդը

Որոշ դեպքերում ցանցային խնդրի լուծումը հաջողվում է վերլուծել ըստ համապատասխան տարբերական օպերատորի սեփական ֆունկցիաների: Լուծման այդպիսի ներկայացումները հաճախ օգտագործվում են մոդելային խնդիրների ուսումնասիրման ժամանակ, քանի որ այդ խնդիրները հնարավորություն են տալիս հայտնագործել դիտարկվող հավասարումների դասի հիմնական հատկությունները: Գոյություն ունեն վերլուծություններ ըստ տարբեր ցանցային բազիսային ֆունկցիաների՝ կախված ցանցային խնդրի տիպից (տե՛ս, օրինակ, [39]): Սույն պարագրաֆում մենք կդիտարկենք այդպիսի վերլուծություններից մեկը:

8.6.1 Ֆուրիեի դիսկրետ շարքեր ըստ սինուսների

Դիցուք $0 \le x \le 1$ հատվածում տրված է $\omega_h = \{x_m = mh \ : \ m = 0, 1, \ldots, M+1\}$ ցանցը $h = 1/(M+1)$ քայլով: Նշանակենք $\overset{\circ}{G}_h$-ով ω_h ցանցի վրա որոշված այն $v = \{v_m\}_{m=0}^{M+1}$ ցանցային ֆունկցիաների բազմությունը, որոնք հավասար են զրոյի եզրային հանգույցներում, այսինքն՝ $v_0 = v_{M+1} = 0$: Ակնհայտ է, որ այդ ֆունկցիաների համախմբությունը M-չափանի գծային տարածություն է: Ներմուծենք $\overset{\circ}{G}_h$ տարածության մեջ սկալյար արտադրյալ և նորմ՝

$$(v, w) \equiv h \sum_{m=1}^{M} v_m w_m \,, \quad ||v|| \equiv \sqrt{(v, v)} \ : \tag{8.6.1}$$

Դիտարկենք

$$\psi^{(p)} = \left\{ \psi_m^{(p)} = \sqrt{2} \sin \frac{p\pi m}{M+1} \right\}_{m=0}^{M+1} , \quad p = 1, 2, \ldots, M \tag{8.6.2}$$

ցանցային ֆունկցիաները: Ցույց տանք, որ այդ ֆունկցիաները կազմում են օրթոնորմավորված համակարգ $\overset{\circ}{G}_h$-ում: Նախ ապացուցենք, որ

$$\sum_{m=0}^{M} \cos \frac{s\pi m}{M+1} = \begin{cases} 0, & \text{եթե } s\text{-ը զույգ է} \\ 1, & \text{եթե } s\text{-ը կենտ է} \end{cases} \tag{8.6.3}$$

բոլոր $s = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(2M+1)$ արժեքների համար: Իրոք,

$$\sum_{m=0}^{M} \cos \frac{s\pi m}{M+1} = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{M} \left[e^{i \frac{s\pi m}{M+1}} + e^{-i \frac{s\pi m}{M+1}} \right] = \frac{1}{2} \left[\sum_{m=0}^{M} e^{i \frac{s\pi m}{M+1}} + \sum_{m=0}^{M} e^{-i \frac{s\pi m}{M+1}} \right] =$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{e^{i \frac{s\pi(M+1)}{M+1}} - 1}{e^{i \frac{s\pi}{M+1}} - 1} + \frac{e^{-i \frac{s\pi(M+1)}{M+1}} - 1}{e^{-i \frac{s\pi}{M+1}} - 1} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{(-1)^s - 1}{e^{i \frac{s\pi}{M+1}} - 1} + \frac{(-1)^s - 1}{e^{-i \frac{s\pi}{M+1}} - 1} \right] ,$$

որտեղից էլ հեշտությամբ հետևում է (8.6.3) հատկությունը:

Եթե $p \ne q$, ապա

$$(\psi^{(p)}, \psi^{(q)}) = 2h \sum_{m=1}^{M} \sin \frac{p\pi m}{M+1} \sin \frac{q\pi m}{M+1} = 2h \sum_{m=0}^{M} \sin \frac{p\pi m}{M+1} \sin \frac{q\pi m}{M+1} =$$

$$h \left[\sum_{m=0}^{M} \cos \frac{(p-q)\pi m}{M+1} - \sum_{m=0}^{M} \cos \frac{(p+q)\pi m}{M+1} \right] \ :$$

Իսկ քանի որ $p-q$ և $p+q$ թվերը զույգ կամ կենտ են միաժամանակ, ապա, համաձայն (8.6.3)-ի՝ $(\psi^{(p)}, \psi^{(q)}) = 0$: Իսկ եթե $p = q$, ապա

$$(\psi^{(p)}, \psi^{(p)}) = 2h \sum_{m=1}^{M} \sin^2 \frac{p\pi m}{M+1} = 2h \sum_{m=0}^{M} \sin^2 \frac{p\pi m}{M+1} = h \sum_{m=0}^{M} \left[1 - \cos \frac{2p\pi m}{M+1} \right] =$$

$$h(M+1) - h \sum_{m=0}^{M} \cos \frac{2p\pi m}{M+1} = h(M+1) = 1 \ :$$

Այսպիսով, (8.6.2) ֆունկցիաները կազմում են օրթոնորմավորված բազիս ցանցային ֆունկցիաների $\overset{\circ}{G}_h$ տարածությունում:

Ցանկացած $v \in \overset{\circ}{G}_h$ ցանցային ֆունկցիա ներկայացվում է

$$v = \sum_{p=1}^{M} c_p \psi^{(p)} \tag{8.6.4}$$

գումարի տեսքով, այսինքն՝

$$v_m = \sum_{p=1}^{M} c_p \psi_m^{(p)} = \sqrt{2} \sum_{p=1}^{M} c_p \sin \frac{p\pi m}{M+1}, \quad m = 1, 2, \ldots, M \ : \tag{8.6.5}$$

Կասենք, որ (8.6.4) գումարը v ցանցային ֆունկցիայի վերլուծությունն է *Ֆուրիեի դիսկրետ շարքի*: Վերլուծության c_p գործակիցները կոչվում են v ֆունկցիայի *Ֆուրիեի գործակիցներ*: Բազիսային $\psi^{(p)}$ ֆունկցիաների օրթոնորմալության պատճառով ստանում ենք հետևյալ արտահայտությունները Ֆուրիեի գործակիցների համար.

$$c_p = (v, \psi^{(p)}) = h \sum_{m=1}^{M} v_m \psi_m^{(p)} = \sqrt{2} h \sum_{m=1}^{M} v_m \sin \frac{p\pi m}{M+1}, \quad p = 1, 2, \ldots, M \ : \tag{8.6.6}$$

Այնուհետև, ունենք

$$||v|| = \sqrt{\sum_{p=1}^{M} c_p^2}, \tag{8.6.7}$$

ինչը սովորական Ֆուրիեի շարքերի տեսության հայտնի Պարսևալի հավասարության նմանակն է:

Ցանցային $v \in \overset{\circ}{G}_h$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցների որոշումը ըստ (8.6.6) բանաձևերի կոչվում է *Ֆուրիեի ուղիղ դիսկրետ ձևափոխություն*: Իսկ ցանցային ֆունկցիայի վերականգնումը ըստ (8.6.5) բանաձևերի կոչվում է *Ֆուրիեի հակադարձ դիսկրետ ձևափոխություն*: Երկու դեպքում էլ խնդիրը հանգում է

$$S_k = \sum_{l=1}^{M} a_l \sin \frac{k\pi l}{M+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, M \tag{8.6.8}$$

տեսքի գումարների հաշվմանը: Հեշտ է համոզվել, որ բոլոր S_k մեծությունների հաշվման համար բավարար է կատարել $O(M^2)$ թվաբանական գործողություն (ենթադրելով, որ $\sin(k\pi l/(M+1))$ արժեքները հայտնի են): Սակայն այս թիվը կարելի է էապես փոքրացնել, եթե օգտագործենք (8.6.2) ցանցային օրթոգոնալ ֆունկցիաների հատուկ տեսքը: Գոյություն ունի ալգորիթմ, որը թույլ է տալիս հաշվել բոլոր (8.6.8) գումարները ծախսելով $O(M \log_2 M)$ թվաբանական գործողություն: Այդ ալգորիթմը կոչվում է *Ֆուրիեի արագ ձևափոխություն*: Նրա մանրամասն նկարագրությունը կարելի է գտնել, օրինակ, [2],[39] գրքերում: Նշենք միայն, որ ալգորիթմի հիմնական գաղափարն այն է, որ (8.6.8) գումարներում նախքան բազմապատկում կատարելը խմբավորվում են ընդհանուր բազմապատկիչ ունեցող անդամները:

8.6.2 Սեփական արժեքների տարբերական խնդիրը

Սահմանենք $v \in \overset{\circ}{G}_h$ ցանցային ֆունկցիայի վրա գործող Λ տարբերական օպերատորը հետևյալ կերպ.

$$\Lambda v_m = (v_m)_{\bar{x}x}, \quad m = 1, 2, \ldots, M, \quad \Lambda v_0 = \Lambda v_{M+1} = 0 :$$

Ցույց տանք, որ $\psi^{(p)}$ ցանցային ֆունկցիաները Λ օպերատորի սեփական ֆունկցիաներն են: Իրոք, $m = 1, 2, \ldots, M$ արժեքների համար ունենք

$$\Lambda \psi_m^{(p)} = \frac{\sqrt{2}}{h^2}\left[\sin\frac{p\pi(m-1)}{M+1} - 2\sin\frac{p\pi m}{M+1} + \sin\frac{p\pi(m+1)}{M+1}\right] =$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{h^2}\sin\frac{p\pi m}{M+1}\left(\cos\frac{p\pi}{M+1} - 1\right) = -\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{p\pi}{2(M+1)}\psi_m^{(p)} :$$

Այսպիսով,

$$\Lambda \psi^{(p)} = \lambda_p \psi^{(p)}, \quad p = 1, 2, \ldots, M, \tag{8.6.9}$$

որտեղ

$$\lambda_p = -\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{p\pi}{2(M+1)} \tag{8.6.10}$$

թվերը Λ օպերատորի համապատասխան սեփական արժեքներն են: Այդ սեփական արժեքների համար ճիշտ են հետևյալ առնչությունները.

$$8 < \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi}{2(M+1)} = |\lambda_1| < |\lambda_2| < \cdots < |\lambda_M| = \frac{4}{h^2}\cos^2\frac{\pi}{2(M+1)} < \frac{4}{h^2} : \tag{8.6.11}$$

Այստեղ $|\lambda_M|$-ի վերին գնահատականը ակնհայտ է: Ինչ վերաբերում է $|\lambda_1|$-ի ստորին գնահատականին, ապա այն կարելի է ստանալ հետևյալ կերպ: Ունենք

$$|\lambda_1| = \pi^2\left(\sin\frac{\pi}{2(M+1)}\Big/\frac{\pi}{2(M+1)}\right)^2$$

Քանի որ $M \geq 1$, ապա $\pi/(2(M+1))$ թիվը գտնվում է $(0, \pi/4]$ միջակայքում: Հեշտ է ստուգել, որ $\sin\alpha/\alpha$ ֆունկցիայի մինիմումը, երբ $\alpha \in (0, \pi/4]$, հասանելի է $\alpha = \pi/4$ կետում: Ուստի $|\lambda_1| > 8$:

8.6.3 Ֆուրիեի դիսկրետ շարքերի կիրառումը

Պարզվում է, որ օգտագործելով Ֆուրիեի վերլուծությունը, որոշ դեպքերում կարելի է ստանալ տարբերական խնդրի լուծումը, ինչպես նաև ապացուցել սխեմայի կայունությունը: Բերենք երկու օրինակ:

- Որպես առաջին օրինակ դիտարկենք

$$\begin{cases} -\Lambda v_m + q v_m = f_m, \quad m = 1, 2, \ldots, M, \\ v_0 = v_{M+1} = 0 \end{cases} \tag{8.6.12}$$

տարբերական սխեման, որտեղ $q = const > 0$: Այս սխեման մոտարկում է 7.12 պարագրաֆում դիտարկված համասեռ եզրային պայմաններով (7.12.1) սովորական դիֆերենցիալ հավասարումը: Փնտրենք (8.6.12) խնդրի լուծումը հետևյալ տեսքով.

$$v = \sum_{p=1}^{M} c_p \psi^{(p)} . \tag{8.6.13}$$

Դիցուք F_p թվերը՝ ցանցային $f = \{f_m\}_{m=0}^{M+1}$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցներն են: Ունենք

$$f = \sum_{p=1}^{M} F_p \psi^{(p)} : \tag{8.6.14}$$

Տեղադրելով (8.6.13) և (8.6.14) վերլուծությունները (8.6.12) հավասարման մեջ, կստանանք

$$\sum_{p=1}^{M} c_p[-\Lambda\psi^{(p)} + q\psi^{(p)}] = \sum_{p=1}^{M} F_p \psi^{(p)} :$$

Այնուհետև, համաձայն (8.6.9)-ի՝

$$\sum_{p=1}^{M} c_p(q - \lambda_p)\psi^{(p)} = \sum_{p=1}^{M} F_p \psi^{(p)} :$$

Այստեղից, քանի որ $\psi^{(p)}$ ֆունկցիաները գծորեն անկախ են, ստանում ենք

$$c_p(q - \lambda_p) = F_p , \quad p = 1, 2, \ldots, M$$

կամ

$$c_p = \frac{F_p}{q - \lambda_p} , \quad p = 1, 2, \ldots, M : \tag{8.6.15}$$

Այսպիսով, մենք գտնում ենք Ֆուրիեի գործակիցները, և դրանով իսկ՝ (8.6.13) խնդրի լուծումը:

Ունենալով (8.6.7) հավասարությունը, հեշտ է ապացուցել (8.6.12) տարբերական սխեմայի կայունությունը: Իրոք, օգտվելով (8.6.15) արտահայտություններից և հաշվի առնելով (8.6.11) անհավասարությունները, կստանանք

$$||v|| = \sqrt{\sum_{p=1}^{M} c_p^2} = \sqrt{\sum_{p=1}^{M} \frac{F_p^2}{(q - \lambda_p)^2}} \le \frac{1}{q - \lambda_1} \sqrt{\sum_{p=1}^{M} F_p^2} = \frac{1}{q + 8} ||f|| :$$

Ստացված

$$||v|| \le \frac{1}{q + 8} ||f||$$

գնահատականը (8.6.12) տարբերական սխեմայի կայունությունն է ըստ աջ մասի (8.6.1) էվկլիդյան ցանցային նորմում:

• Որպես երկրորդ օրինակ վերցնենք (8.5.23) Կռանկ-Նիկոլսոնի սխեման: Ապացուցենք այդ սխեմայի կայունությունը ըստ աջ մասի և սկզբնական տվյալների: Դրա համար դիտարկենք

$$\begin{cases} \dfrac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - \dfrac{a}{2}\left[(v_m^{n+1})_{x\bar{x}} + (v_m^n)_{x\bar{x}}\right] = f_m^{n+1/2}, \\ m = 1, 2, \ldots, M\,,\ n = 0, 1, \ldots, N-1\,, \\ v_m^0 = \varphi_m\,, \quad m = 0, 1, \ldots, M+1\,, \\ v_0^n = v_{M+1}^n = 0\,, \quad n = 1, 2, \ldots, N \end{cases} \tag{8.6.16}$$

տարբերական խնդիրը: Ենթադրվում է եզրային և սկզբնական պայմանների համաձայնեցվածությունը՝ $\varphi_0 = \varphi_{M+1} = 0$:

Ունենալով φ սկզբնական ցանցային ֆունկցիայի

$$v^0 = \varphi = \sum_{p=1}^{M} c_p^0 \psi^{(p)}$$

Ֆուրիեի վերլուծությունը, փնտրենք (8.6.16) խնդրի լուծումը n-րդ շերտում, որտեղ $1 \le n \le N$, հետևյալ տեսքով.

$$v^n = \sum_{p=1}^{M} c_p^n \psi^{(p)}\ : \tag{8.6.17}$$

Դիցուք $F_p^{n+1/2}$ թվերը՝ ցանցային $f^{n+1/2} = \{f_m^{n+1/2}\}_{m=0}^{M+1}$ ֆունկցիայի, որտեղ $f_0^{n+1/2} = f_{M+1}^{n+1/2} = 0$, Ֆուրիեի գործակիցներն են: Ունենք

$$f^{n+1/2} = \sum_{p=1}^{M} F_p^{n+1/2} \psi^{(p)}\ : \tag{8.6.18}$$

Ֆիքսված n արժեքի համար, որտեղ $0 \le n \le N-1$, գրենք (8.6.16) համակարգի հավասարումները

$$\frac{1}{\tau}(v^{n+1} - v^n) - \frac{a}{2}\left[\Lambda v^{n+1} + \Lambda v^n\right] = f^{n+1/2}$$

օպերատորային տեսքով: Տեղադրելով (8.6.17) և (8.6.18) վերլուծությունները վերջին հավասարման մեջ, կստանանք

$$\sum_{p=1}^{M} \left[\frac{c_p^{n+1} - c_p^n}{\tau} - \frac{a\lambda_p}{2}\left(c_p^{n+1} + c_p^n\right)\right] \psi^{(p)} = \sum_{p=1}^{M} F_p^{n+1/2} \psi^{(p)}\ :$$

Այստեղից, հավասարեցնելով սեփական ցանցային ֆունկցիաների գործակիցները, գտնում ենք

$$c_p^{n+1} = \frac{1 + \tau a \lambda_p/2}{1 - \tau a \lambda_p/2}\, c_p^n + \frac{\tau}{1 - \tau a \lambda_p/2}\, F_p^{n+1/2}, \quad p = 1, 2, \ldots, M\ : \tag{8.6.19}$$

Հաջորդաբար հաշվարկելով Ֆուրիեի գործակիցները ըստ (8.6.19) բանաձևերի՝ սկսած $n = 0$-ից, կստանանք (8.6.16) տարբերական խնդրի լուծումը:

Այնուհետև, քանի որ

$$1 - \tau a \lambda_p/2 > 1 \quad \text{և} \quad \left|\frac{1 + \tau a \lambda_p/2}{1 - \tau a \lambda_p/2}\right| < 1 .$$

ապա

$$|c_p^{n+1}| \le |c_p^n| + \tau |F_p^{n+1/2}| , \quad p = 1, 2, \ldots, M \ : \tag{8.6.20}$$

Այդ դեպքում, օգտվելով հայտնի Մինկովսկու անհավասարությունից (տե՛ս, օրինակ, [9],[20]) և (8.6.7) հավասարությունից, կստանանք

$$||v^{n+1}|| = \sqrt{\sum_{p=1}^{M} |c_p^{n+1}|^2} \le \sqrt{\sum_{p=1}^{M} \left(|c_p^n| + \tau |F_p^{n+1/2}|\right)^2} \le \sqrt{\sum_{p=1}^{M} |c_p^n|^2} + \tau \sqrt{\sum_{p=1}^{M} |F_p^{n+1/2}|^2} =$$

$$||v^n|| + \tau ||f^{n+1/2}|| \ :$$

Այսպիսով, ունենք

$$||v^{n+1}|| \le ||v^n|| + \tau ||f^{n+1/2}|| , \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

անհավասարությունները: Այստեղից արդեն հեշտությամբ հետևում է

$$\max_{0 \le n \le N} ||v^n|| \le T \max_{0 \le n \le N-1} ||f^{n+1/2}|| + ||\varphi||$$

գնահատականը, որը հաստատում է Կռանկ-Նիկոլսոնի սխեմայի կայունությունը ըստ աջ մասի և սկզբնական տվյալների:

Վերջում նշենք, որ Ֆուրիեի մեթոդի կիրառման հնարավորությունները լուծման անմիջական հաշվման համար սահմանափակ են: Բանն այն է, որ մեթոդը դառնում է ոչ պիտանի, օրինակ, փոփոխական գործակիցներով հավասարումների համար, կամ էլ անկանոն երկրաչափական ձևի տիրույթների համար: Միաժամանակ ասենք, որ նշված դեպքերում հաջողությամբ կիրառվում են տարբերական մեթոդները:

8.7 Լարի տատանման հավասարումը

Դիտարկենք ամրացված ծայրերով լարի տատանման խնդիրը.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f , \quad 0 < x < 1 , 0 < t \le T , \tag{8.7.1}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) , \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) , \quad 0 \le x \le 1 , \tag{8.7.2}$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 , \quad 0 < t \le T \ : \tag{8.7.3}$$

Հավասարման մեջ $a = const > 0$: Ենթադրվում է, որ սկզբնական և եզրային պայմանները համաձայնեցված են, այսինքն՝ $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ և $\psi(0) = \psi(1) = 0$: Մենք կենթադրենք նաև, որ (8.7.1),(8.7.2)-ում տրված ֆունկցիաները և (8.7.1)-(8.7.3) խնդրի լուծումը շարադրման ընթացքում ունեն պահանջվող ողորկություն:

8.7.1 Սխեմայի կառուցումը

Ջերմահաղորդականության խնդիրը լուծելիս օգտվենք 8.5 պարագրաֆում կառուցված ցանցից (նկ. 8.5.1): Նախքան տարբերական սխեմա գրելը, դիտարկենք (8.7.2) սկզբնական պայմաններից երկրորդի մոտարկման հարցը: Կիրառելով Թեյլորի վերլուծությունը, ունենք

$$u_m^1 = u(x_m, \tau) = u_m^0 + \tau \left.\frac{\partial u(x_m, t)}{\partial t}\right|_{t=0} + \frac{\tau^2}{2} \left.\frac{\partial^2 u(x_m, t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} + \frac{\tau^3}{6} \left.\frac{\partial^3 u(x_m, t)}{\partial t^3}\right|_{t=\theta},$$

որտեղ $0 < \theta < \tau$: Այստեղից՝

$$\frac{u_m^1 - u_m^0}{\tau} = \left.\frac{\partial u(x_m, t)}{\partial t}\right|_{t=0} + \frac{\tau}{2} \left.\frac{\partial^2 u(x_m, t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} + O(\tau^2) :$$

Այնուհետև, հաշվի առնելով (8.7.1) հավասարումը և (8.7.2) սկզբնական պայմանները, կստանանք

$$\frac{u_m^1 - u_m^0}{\tau} = \nu_m + O(\tau^2), \tag{8.7.4}$$

որտեղ

$$\nu_m \equiv \psi_m + \frac{\tau}{2} \left(a\,\varphi''(x_m) + f_m^0\right) :$$

Օգտագործելով նկ. 8.2.6-ում տրված «խաչ» շաբլոնը, գրենք

$$\begin{cases} (v_m^n)_{\bar{t}t} - a\,(v_m^n)_{x\bar{x}} = f_m^n, \quad m = 1, 2, \ldots, M, \; n = 1, 2, \ldots, N-1, \\ v_m^0 = \varphi_m, \quad \dfrac{v_m^1 - v_m^0}{\tau} = \nu_m, \quad m = 1, 2, \ldots, M, \\ v_0^n = v_{M+1}^n = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, N \end{cases} \tag{8.7.5}$$

տարբերական սխեման: Պարզ է, որ

$$(u_m^n)_{\bar{t}t} - a\,(u_m^n)_{x\bar{x}} = f_m^n + O(\tau^2 + h^2) \tag{8.7.6}$$

(տե՛ս 4.6.4 լեմման): Այսպիսով, (8.7.4)-ից և (8.7.6)-ից հետևում է, որ (8.7.5) սխեման ունի մոտարկման երկրորդ կարգ՝ ինչպես ըստ h-ի, այնպես էլ ըստ τ-ի:

Սխեմայի թվային իրականացումը կատարվում է հետևյալ հերթականությամբ: Առաջին երկու շերտերում գտնում ենք

$$v_m^0 = \varphi_m, \; m = 1, 2, \ldots, M, \quad v_0^0 = v_{M+1}^0 = 0,$$
$$v_m^1 = v_m^0 + \tau\nu_m, \; m = 1, 2, \ldots, M, \quad v_0^1 = v_{M+1}^1 = 0 :$$

Այնուհետև, $n = 1, 2, \ldots, N-1$ արժեքների համար լուծումը հաջորդաբար հաշվվում է ըստ

$$v_m^{n+1} = r^2 v_{m-1}^n + 2(1 - r^2) v_m^n + r^2 v_{m+1}^n - v_m^{n-1} + \tau^2 f_m^n,$$
$$m = 1, 2, \ldots, M,$$
$$v_0^{n+1} = v_{M+1}^{n+1} = 0$$

բացահայտ բանաձևերի, որտեղ

$$r \equiv \sqrt{a}\,\frac{\tau}{h}\ : \tag{8.7.7}$$

8.7.2 Կայունության հետազոտումը

Մենք կսահմանափակվենք (8.7.5) տարբերական սխեմայի ըստ սկզբնական տվյալների կայունության ուսումնասիրությամբ: Այդ նպատակով դիտարկենք

$$\begin{cases} (v_m^n)_{\bar{t}t} - a\,(v_m^n)_{x\bar{x}} = 0\,, \quad m = 1,2,\ldots,M\,,\ n = 1,2,\ldots,N-1\,, \\ v_m^0 = \varphi_m\,, \quad \dfrac{v_m^1 - v_m^0}{\tau} = \nu_m\,, \quad m = 1,2,\ldots,M\,, \\ v_0^n = v_{M+1}^n = 0\,, \quad n = 0,1,\ldots,N \end{cases} \tag{8.7.8}$$

տարբերական խնդիրը: Փնտրենք այս խնդրի լուծումը *փոփոխականների անջատման մեթոդով*: Սկզբից գտնենք

$$v_m^n = \psi_m z^n \tag{8.7.9}$$

տեսքի մասնավոր լուծումները, որտեղ $\psi_m \equiv \psi(x_m)$, $z^n \equiv z(t_n)$: Տեղադրելով (8.7.9) որոնելի լուծումը (8.7.8) համակարգի հիմնական հավասարման մեջ, որը մոտարկում է (8.7.1) համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումը, կստանանք

$$\psi_m (z^n)_{\bar{t}t} - a(\psi_m)_{x\bar{x}}\, z^n = 0\,,$$

$$m = 1,2,\ldots,M\,, \quad n = 1,2,\ldots,N-1$$

կամ

$$\frac{(\psi_m)_{x\bar{x}}}{\psi_m} = \frac{1}{a}\,\frac{(z^n)_{\bar{t}t}}{z^n} \equiv \lambda\,. \tag{8.7.10}$$

Դրանով իսկ խնդիրը բերվում է

$$(\psi_m)_{x\bar{x}} = \lambda\psi_m\,, \quad m = 1,2,\ldots,M$$

սեփական արժեքների խնդրի, որի լուծումներն են $\psi^{(p)}$ ցանցային ֆունկցիաները (8.6.2)-ից և համապատասխան λ_p արժեքները (8.6.10)-ից:

Յուրաքանչյուր $p = 1,2,\ldots,M$ արժեքի համար՝ համաձայն (8.7.10)-ի, ունենք

$$(z^n(p))_{\bar{t}t} - a\lambda_p z^n(p) = 0\,, \quad n = 1,2,\ldots,N-1$$

երկրորդ կարգի համասեռ տարբերական հավասարումը: Հաշվի առնելով (8.7.7) նշանակումները, գրենք այն

$$z^{n-1}(p) - (2 + r^2h^2\lambda_p)z^n(p) + z^{n+1}(p) = 0\,, \quad n = 1,2,\ldots,N-1 \tag{8.7.11}$$

տեսքով: Այս հավասարման մասնավոր լուծումը փնտրվում է

$$z^n(p) = \mu^n$$

տեսքով, որտեղ $\mu \neq 0$ (այստեղ μ^n-ը μ թվի n-րդ աստիճանն է): (8.7.11) հավասարման մեջ տեղադրելուց հետո կստանանք

$$\mu^2 - (2 + r^2h^2\lambda_p)\mu + 1 = 0$$

բնութագրիչ հավասարումը: Հաշվենք դիսկրիմինանտը.

$$\mathcal{D}_p = r^2h^2\lambda_p(4 + r^2h^2\lambda_p) \ :$$

Քանի որ $\lambda_p < 0$ (տե՛ս (8.6.10)), ապա $\mathcal{D}_p$ մեծությունը կլինի բացասական, եթե

$$4 + r^2h^2\lambda_p > 0$$

կամ

$$4 - r^2h^2|\lambda_p| > 0 \ : \qquad (8.7.12)$$

Դրա համար, ինչպես հետևում է (8.6.11)-ից, բավարար է պահանջել, որ $r \leq 1$, այսինքն՝

$$\tau \leq \frac{1}{\sqrt{a}}\, h \ : \qquad (8.7.13)$$

Այդ դեպքում բնութագրիչ հավասարման արմատներն են՝

$$\mu = \frac{2 + r^2h^2\lambda_p \pm i\sqrt{-\mathcal{D}_p}}{2} \ :$$

Հայտնի է, որ (8.7.11) հավասարման ընդհանուր լուծումը գրվում է

$$z^n(p) = A_p \cos n\alpha_p + B_p \sin n\alpha_p\,, \quad n = 0, 1, \ldots, N$$

տեսքով, որտեղ A_p-ն և B_p-ն կամայական հաստատուներ են, իսկ α_p-ն

$$\sin\alpha_p = \frac{\sqrt{-\mathcal{D}_p}}{2}\,, \quad \cos\alpha_p = \frac{2 + r^2h^2\lambda_p}{2} \qquad (8.7.14)$$

հավասարություններով որոշվող անկյունն է (տե՛ս, օրինակ, [11],[36]): Այսպիսով, մենք ստացել ենք

$$v_m^n(p) = (A_p \cos n\alpha_p + B_p \sin n\alpha_p)\psi_m^{(p)}\,, \quad p = 1, 2, \ldots, M$$

մասնավոր լուծումները, որոնք բավարարում են (8.7.8) համակարգի հիմնական հավասարմանը և համասեռ եզրային պայմաններին: Ակնհայտ է, որ

$$v_m^n = \sum_{p=1}^{M}(A_p \cos n\alpha_p + B_p \sin n\alpha_p)\psi_m^{(p)} \qquad (8.7.15)$$

ցանցային ֆունկցիան նույնպես այդպիսի լուծում է: Մնում է ընտրել A_p և B_p գործակիցները այնպես, որ բավարարվեն սկզբնական պայմանները:

Գրենք $\varphi = \{\varphi_m\}_{m=0}^{M+1}$ և $\nu = \{\nu_m\}_{m=0}^{M+1}$ ցանցային ֆունկցիաների

$$\varphi = \sum_{p=1}^{M} a_p \psi^{(p)}, \quad \nu = \sum_{p=1}^{M} b_p \psi^{(p)} \tag{8.7.16}$$

վերլուծությունները (մենք ենդադրում ենք, որ $\nu_0 = \nu_{M+1} = 0$): Պահանջենք, որ $v^0 = \varphi$: Վերցնելով (8.7.15)-ում $n = 0$՝

$$\sum_{p=1}^{m} A_p \psi^{(p)} = \sum_{p=1}^{m} a_p \psi^{(p)}$$

հավասարությունից գտնում ենք

$$A_p = a_p, \quad p = 1, 2, \ldots, M \ : \tag{8.7.17}$$

Այնուհետև,

$$\frac{1}{\tau}\left(v^1 - v^0\right) = \sum_{p=1}^{M} \left(A_p \frac{\cos\alpha_p - 1}{\tau} + B_p \frac{\sin\alpha_p}{\tau}\right) \psi^{(p)} \ :$$

Հավասարեցնելով վերջին հավասարության և (8.7.16)-ից ν-ի վերլուծության աջ մասերը, կստանանք

$$A_p \frac{\cos\alpha_p - 1}{\tau} + B_p \frac{\sin\alpha_p}{\tau} = b_p, \quad p = 1, 2, \ldots, M \ :$$

Այստեղից, հաշվի առնելով (8.7.17)-ը, գտնում ենք

$$B_p = \frac{1 - \cos\alpha_p}{\sin\alpha_p} a_p + \frac{\tau}{\sin\alpha_p} b_p, \quad p = 1, 2, \ldots, M \ : \tag{8.7.18}$$

Տեղադրելով A_p և B_p գործակիցների (8.7.17) և (8.7.18) արտահայտությունները (8.7.15)-ի մեջ, որոշ ձևափոխություններից հետո գտնում ենք (8.7.8) խնդրի լուծումը՝

$$v_m^n = \sum_{p=1}^{M} \left[\frac{\cos(n - 1/2)\alpha_p}{\cos(\alpha_p/2)} a_p + \frac{\tau \sin n\alpha_p}{\sin\alpha_p} b_p\right] \psi_m^{(p)} \ : \tag{8.7.19}$$

Ի վերջո, գնահատենք ստացված (8.7.19) լուծումը: Դրա համար փոքր-ինչ ուժեղացնենք (8.7.12) անհավասարությունը պահանջելով

$$4 - r^2 h^2 |\lambda_p| \geq \varepsilon \qquad \forall p = 1, 2, \ldots, M, \tag{8.7.20}$$

որտեղ ε-ը որոշ թիվ է $(0, 4)$ միջակայքից: Դրա համար, համաձայն (8.6.11)-ի, բավարար է վերցնել $r \leq \sqrt{4 - \varepsilon}/2$, այսինքն՝

$$\tau \leq \frac{\sqrt{4 - \varepsilon}}{2\sqrt{a}} h \ : \tag{8.7.21}$$

Բոլոր $n = 0, 1, \ldots, N$ արժեքների համար, ելնելով (8.7.19) արտահայտությունից և Մինկովսկու անհավասարությունից (տե՛ս, օրինակ, [9],[20]), կստանանք

$$||v^n|| = \sqrt{\sum_{p=1}^{M} \left[\frac{\cos(n-1/2)\alpha_p}{\cos(\alpha_p/2)} a_p + \frac{\tau \sin n\alpha_p}{\sin \alpha_p} b_p \right]^2} \leq$$

$$\sqrt{\sum_{p=1}^{M} \frac{\cos^2(n-1/2)\alpha_p}{\cos^2(\alpha_p/2)} a_p^2} + \sqrt{\sum_{p=1}^{M} \frac{\tau^2 \sin^2 n\alpha_p}{\sin^2 \alpha_p} b_p^2} \leq \tag{8.7.22}$$

$$\sqrt{\sum_{p=1}^{M} \frac{1}{\cos^2(\alpha_p/2)} a_p^2} + \sqrt{\sum_{p=1}^{M} \frac{\tau^2}{\sin^2 \alpha_p} b_p^2} \ :$$

Հաշվի առնելով (8.7.14) և (8.7.20)-ը, ունենք

$$\cos^2 \frac{\alpha_p}{2} = \frac{1+\cos\alpha_p}{2} = \frac{4 + r^2h^2\lambda_p}{4} = \frac{4 - r^2h^2|\lambda_p|}{4} \geq \frac{\varepsilon}{4} \ :$$

Այնուհետև,

$$\frac{\sin^2 \alpha_p}{\tau^2} = \frac{4\sin^2(\alpha_p/2)\cos^2(\alpha_p/2)}{\tau^2} \geq \frac{\sin^2(\alpha_p/2)}{\tau^2}\varepsilon =$$

$$\frac{1-\cos\alpha_p}{2\tau^2}\varepsilon = \frac{r^2h^2|\lambda_p|}{4\tau^2}\varepsilon = \frac{a|\lambda_p|}{4}\varepsilon > 2a\varepsilon \ :$$

Օգտագործելով այս գնահատականները, (8.7.22)-ից կստանանք

$$||v^n|| \leq \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} ||\varphi|| + \frac{1}{\sqrt{2a\varepsilon}} ||\nu|| , \quad n = 0, 1, \ldots, N ,$$

որտեղից էլ

$$\max_{0 \leq n \leq N} ||v^n|| \leq \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} ||\varphi|| + \frac{1}{\sqrt{2a\varepsilon}} ||\nu|| \ : \tag{8.7.23}$$

Դրանով իսկ մենք ապացուցել ենք (8.7.5) տարբերական սխեմայի կայունությունը ըստ սկզբնական տվյալների ցանցային էվկլիդյան նորմում:

8.8 Դիրիխլեի խնդիրը Պուասոնի հավասարման համար

Մինչև այժմ մենք ուսումնասիրում էինք տարբերական սխեմաներ մաթեմատիկական ֆիզիկայի այն հավասարումների համար, որոնք նկարագրում են ժամանակի ընթացքում փոփոխվող պրոցեսներ: Այդպիսի հավասարումներ ընդունված է անվանել *ոչ ստացիոնար*: Երբ մասնական ածանցյալներով հավասարումը չի պարունակում ժամանակային փոփոխականը, այն կոչվում է *ստացիոնար*: Որպես օրինակ դիտարկենք Դիրիխլեի խնդիրը Պուասոնի հավասարման համար:

Դիցուք $\Omega = \{0 < x, y < 1\}$ տիրույթում տրված է

$$-\Delta u = f, \quad (x, y) \in \Omega \tag{8.8.1}$$

հավասարումը

$$u = \varphi, \quad (x, y) \in \partial\Omega \tag{8.8.2}$$

եզրային պայմանով: Մենք կենթադրենք, որ գոյություն ունի (8.8.1), (8.8.2) խնդրի միակ լուծումը: Ենթադրենք նաև, որ այդ լուծումը ունի շարադրման ընթացքում պահանջվող ողորկություն:

Կառուցենք Ω տիրույթում ω_h հավասարաչափ ցանց (x_i, y_j) հանգույցներով, որտեղ $x_i = ih$ $(i = 0, 1, \ldots, M+1)$, $y_j = jh$ $(j = 0, 1, \ldots, M+1)$ և $h = 1/(M+1)$, ինչպես ցույց է տրված նկ. 8.8.1-ում: Այստեղ մենք ունենք ω_h ցանցի բնական տրոհում, այն է՝ $\omega_h = \omega_h^\circ \cup \omega_h'$, որտեղ ω_h° և ω_h'-ը համապատասխանաբար ներքին և եզրային հանգույցների բազմություններն են (տես 8.2.1 օրինակը): Ցանցային $w \in G_h$ ֆունկցիայի արժեքը (x_i, y_j) հանգույցում նշանակենք $w(i, j)$-ով:

Ցանցային ֆունկցիաների G_h տարածությունում սահմանենք

$$||w|| \equiv \max_{\omega_h} |w(i, j)|$$

նորմը: Այնուհետև, նորմերը G_h° և G_h' տարածություններում համապատասխանաբար սահմանենք հետևյալ կերպ.

$$||w||^\circ \equiv \max_{\omega_h^\circ} |w(i, j)|, \quad ||w||' \equiv \max_{\omega_h'} |w(i, j)| :$$

Նկ. 8.8.1 Ցանց Պուասոնի հավասարման համար

Ըստ նկ. 8.2.6-ում պատկերված «խաչ» շաբլոնի կառուցենք

$$\begin{cases} -\Delta_h v(i, j) = f(i, j), & (x_i, y_j) \in \omega_h^\circ \\ v(i, j) = \varphi(i, j), & (x_i, y_j) \in \omega_h' \end{cases} \tag{8.8.3}$$

տարբերական սխեմա, որտեղ Δ_h *Լապլասի տարբերական օպերատորը* որոշվում է հետևյալ կերպ.

$$\Delta_h v(i,j) \equiv v_{x\bar{x}}(i,j) + v_{y\bar{y}}(i,j) \ : \tag{8.8.4}$$

Կարելի է ցույց տալ, որ (8.8.3) սխեման ունի մոտարկման երկրորդ կարգ: Իրոք, օգտվելով Թեյլորի վերլուծությունից (տե՛ս լեմմա 4.6.4), կստանանք

$$-\Delta_h u(i,j) = f(i,j) + \varepsilon(i,j)\,,$$

որտեղ

$$\varepsilon(i,j) = -\frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\Big|_{(x_i+\theta_1 h, y_j)} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\Big|_{(x_i, y_j+\theta_2 h)}\right), \quad -1 < \theta_1, \theta_2 < 1 \ :$$

Ենթադրելով այս արտահայտության աջ մասում մասնական ածանցյալների սահմանափակությունը, կստանանք

$$|\varepsilon(i,j)| \le Ch^2, \qquad C = const > 0$$

բոլոր $(x_i, y_j) \in \omega_h^\circ$ հանգույցների համար:

Այժմ անցնենք (8.8.3) տարբերական սխեմայի կայունության հետազոտմանը: Նախապես ձևակերպենք և ապացուցենք մեկ օժանդակ պնդում:

Լեմմա 8.8.1 (մաքսիմումի սկզբունք) **:** *Դիցուք $\theta \in G_h$ ցանցային ֆունկցիան այնպիսին է, որ*

$$-\Delta_h \theta(i,j) \le 0\,, \quad (x_i, y_j) \in \omega_h^\circ \ : \tag{8.8.5}$$

Այդ դեպքում այն ընդունում է իր մեծագույն արժեքը տիրույթի եզրի վրա, այսինքն՝

$$\max_{\omega_h} \theta(i,j) = \max_{\omega_h'} \theta(i,j) \ : \tag{8.8.6}$$

Ապացույց: Դիցուք $\mu \equiv \max\limits_{\omega_h} \theta(i,j)$: Ենթադրենք հակառակը՝ եզրային հանգույցներում մաքսիմումը հասանելի չէ: Այդ դեպքում ակնհայտորեն կգտնվի այնպիսի հանգույց $(x_k, y_l) \in \omega_h^\circ$, որ $\theta(k,l) = \mu$ և նրա չորս հարևան հանգույցներից գոնե մեկում θ ֆունկցիայի արժեքը μ-ից փոքր է: Այդպիսի (x_k, y_l) հանգույցում ունենք

$$-\Delta_h \theta(k,l) = -\frac{\theta(k-1,l) - 2\theta(k,l) + \theta(k+1,l)}{h^2} - \frac{\theta(k,l-1) - 2\theta(k,l) + \theta(k,l+1)}{h^2} =$$
$$\frac{4\mu - \theta(k-1,l) - \theta(k+1,l) - \theta(k,l-1) - \theta(k,l+1)}{h^2} > 0\,.$$

ինչը հակասում է (8.8.5) պայմանին: Այսինքն մեր ենթադրությունը ճիշտ չէ ուստի և θ ֆունկցիան իր մեծագույն արժեքն ընդունում է գոնե մեկ եզրային հանգույցում: □

Թեորեմ 8.8.1 : *Տարբերական (8.8.3) խնդրի $v \in G_h$ լուծման համար ճիշտ է հետևյալ գնահատականը.*

$$||v|| \leq \frac{1}{8}\,||f||^{\circ} + ||\varphi||' \ : \tag{8.8.7}$$

Ապացույց: Դիտարկենք հետևյալ կերպ սահմանվող $w \in G_h$ ցանցային ֆունկցիան.

$$w(i,j) = \frac{x_i(1-x_i)}{4} + \frac{y_j(1-y_j)}{4}\,, \quad i,j = 0,1,\ldots,M+1 \ :$$

Ակնհայտ է, որ $w(i,j) \geq 0$: Դժվար չէ ստանալ

$$||w|| \leq \frac{1}{8} \tag{8.8.8}$$

գնահատականը: Այնուհետև, պարզ հաշվարկով գտնում ենք, որ

$$\Delta_h w(i,j) = -1\,, \quad (x_i, y_j) \in \omega_h^{\circ} \ : \tag{8.8.9}$$

Դիցուք $\theta \equiv v - ||f||^{\circ} w$: Տարբերական Δ_h օպերատորի գծայնության և (8.8.9) հատկության շնորհիվ ունենք

$$-\Delta_h \theta(i,j) = -\Delta_h v(i,j) + ||f||^{0} \Delta_h w(i,j) = f(i,j) - ||f||^{\circ} \leq 0$$

բոլոր $(x_i, y_j) \in \omega_h^{\circ}$ հանգույցների համար: Սա նշանակում է, որ θ ֆունկցիան բավարարում է 8.8.1 լեմմայի (8.8.5) պայմանին: Ուստի, համաձայն (8.8.6)-ի, ճիշտ են

$$\theta(i,j) \leq \max_{\omega_h'} \theta(i,j)\,, \quad (x_i, y_j) \in \omega_h$$

անհավասարությունները: Ցանցային θ ֆունկցիայի սահմանումից ունենք

$$\max_{\omega_h'} \theta(i,j) \leq \max_{\omega_h'} v(i,j) \leq ||v||' = ||\varphi||' \ :$$

Հետևաբար՝

$$\theta(i,j) \leq ||\varphi||'\,, \quad (x_i, y_j) \in \omega_h \ :$$

Այնուհետև, օգտվելով (8.8.8) գնահատականից, ստանում ենք

$$v(i,j) = \theta(i,j) + ||f||^{\circ} w(i,j) \leq ||\varphi||' + \frac{1}{8}\,||f||^{\circ}\,, \quad (x_i, y_j) \in \omega_h \tag{8.8.10}$$

անհավասարությունները: Ճիշտ են նաև

$$-v(i,j) \leq ||\varphi||' + \frac{1}{8}\,||f||^{\circ}\,, \quad (x_i, y_j) \in \omega_h \tag{8.8.11}$$

անհավասարությունները: Իրոք, եթե v ցանցային ֆունկցիան (8.8.3) տարբերական խնդրի լուծում է, ապա $-v$ ֆունկցիան կլինի

$$\begin{cases} -\Delta_h(-v(i,j)) &= -f(i,j)\,, \quad (x_i, y_j) \in \omega_h^{\circ} \\ -v(i,j) &= -\varphi(i,j)\,, \quad (x_i, y_j) \in \omega_h' \end{cases}$$

տարբերական խնդրի լուծում: Վերջապես, (8.8.10) և (8.8.11)-ից ստանում ենք

$$|v(i,j)| \le \frac{1}{8}\,||f||^{\circ} + ||\varphi||'. \quad (x_i, y_j) \in \omega_h$$

գնահատականը, ինչից բխում է (8.8.7) գնահատականը: □

Այսպիսով, մենք ապացուցել ենք (8.8.3) տարբերական սխեմայի կայունությունը:

Հաջորդ պարագրաֆում մենք կքննարկենք (8.8.3) տարբերական սխեմայով որոշվող ցանցային հավասարումների համակարգի կառուցվածքը, և կդիտարկենք այդպիսի համակարգերի լուծման որոշ մեթոդներ:

8.9 Ցանցային հավասարումների համակարգերի լուծման մեթոդները

Նախորդ պարագրաֆում կառուցված (8.8.3) տարբերական սխեման, որն մոտարկում է Դիրիխլեի խնդիրը Պուասոնի հավասարման համար, տալիս է

$$\begin{cases} -v(i-1,j) - v(i+1,j) + 4v(i,j) - v(i,j-1) - v(i,j+1) = h^2 f(i,j), \\ \qquad\qquad i,j = 1,2,\ldots,M, \\ v(i,0) = \varphi(i,0),\ v(i,M+1) = \varphi(i,M+1), \quad i = 0,1,\ldots,M+1, \\ v(0,j) = \varphi(0,j),\ v(M+1,j) = \varphi(M+1,j), \quad j = 0,1,\ldots,M+1 \end{cases} \tag{8.9.1}$$

գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգը: Այսպիսով, մենք ունենք M^2 հավասարումների համակարգ M^2 անհայտով (դրանք $v(i,j)$ արժեքներն են, երբ $1 \le i,j \le M$): Քննարկենք այդպիսի համակարգերի լուծման մեթոդները: Եթե M-ը մեծ չէ, ապա կարելի է կիրառել ստանդարտ մեթոդներ, օրինակ՝ Գաուսի մեթոդը: Սակայն արդեն $M = 100$-ի դեպքում մենք ստանում ենք $10^4 \times 10^4$ չափսի համակարգ: Այստեղ արդեն անհրաժեշտ են լուծման հատուկ մեթոդներ, քանի որ Գաուսի մեթոդի իրականացումը կպահանջի 10^{12} կարգի թվաբանական գործողություն: Իսկ դա նշանակում է, որ համակարգի լուծումը կարող է հսկայական մեքենայական ժամանակ խլել:

Անկախ դիֆերենցիալ հավասարման տեսքից, տիրույթի երկրաչափական ձևից, եզրային պայմանների տիպից և ածանցյալների մոտարկման եղանակից տարբերական հավասարումների համակարգերի առանձնահատկությունը նրա գլխավոր մատրիցի *նոսրությունն է*: Այսինքն, այդ մատրիցի տարրերի մեծամասնությունը զրոներն են, որոնք գտնվում են նախորոք հայտնի տեղերում: Մատրիցի նշված հատկությունը հաջողությամբ օգտագործվում է ցանցային հավասարումների համակարգերի լուծման էֆեկտիվ ալգորիթմներ կառուցելիս:

Օրինակ, $M = 4$ դեպքում գրենք (8.9.1) համակարգի հավասարումները, դեպի աջ մաս տանելով եզրային պայմաններից հայտնի անդամները: Կստանանք հետևյալ տեսքի համակարգը.

$$
\left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc}
4 & -1 & & & -1 & & & & & & & & & & & \\
-1 & 4 & -1 & & & -1 & & & & & & & & & & \\
 & -1 & 4 & -1 & & & -1 & & & & & & & & & \\
 & & -1 & 4 & & & & -1 & & & & & & & & \\
\hline
-1 & & & & 4 & -1 & & & -1 & & & & & & & \\
 & -1 & & & -1 & 4 & -1 & & & -1 & & & & & & \\
 & & -1 & & & -1 & 4 & -1 & & & -1 & & & & & \\
 & & & -1 & & & -1 & 4 & & & & -1 & & & & \\
\hline
 & & & & -1 & & & & 4 & -1 & & & -1 & & & \\
 & & & & & -1 & & & -1 & 4 & -1 & & & -1 & & \\
 & & & & & & -1 & & & -1 & 4 & -1 & & & -1 & \\
 & & & & & & & -1 & & & -1 & 4 & & & & -1 \\
\hline
 & & & & & & & & -1 & & & & 4 & -1 & & \\
 & & & & & & & & & -1 & & & -1 & 4 & -1 & \\
 & & & & & & & & & & -1 & & & -1 & 4 & -1 \\
 & & & & & & & & & & & -1 & & & -1 & 4
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
v(1,1) \\ v(2,1) \\ v(3,1) \\ v(4,1) \\ \hline
v(1,2) \\ v(2,2) \\ v(3,2) \\ v(4,2) \\ \hline
v(1,3) \\ v(2,3) \\ v(3,3) \\ v(4,3) \\ \hline
v(1,4) \\ v(2,4) \\ v(3,4) \\ v(4,4)
\end{array}\right]
=
$$

$$
\left[\begin{array}{l}
h^2 f(1,1) + \varphi(1,0) + \varphi(0,1) \\
h^2 f(2,1) + \varphi(2,0) \\
h^2 f(3,1) + \varphi(3,0) \\
h^2 f(4,1) + \varphi(4,0) + \varphi(5,1) \\
\hline
h^2 f(1,2) \qquad\qquad + \varphi(0,2) \\
h^2 f(2,2) \\
h^2 f(3,2) \\
h^2 f(4,2) \qquad\qquad + \varphi(5,2) \\
\hline
h^2 f(1,3) \qquad\qquad + \varphi(0,3) \\
h^2 f(2,3) \\
h^2 f(3,3) \\
h^2 f(4,3) \qquad\qquad + \varphi(5,3) \\
\hline
h^2 f(1,4) + \varphi(1,5) + \varphi(0,4) \\
h^2 f(2,4) + \varphi(2,5) \\
h^2 f(3,4) + \varphi(3,5) \\
h^2 f(4,4) + \varphi(4,5) + \varphi(5,4)
\end{array}\right] \quad : \qquad (8.9.2)
$$

Ավելի մանրամասն դիտարկենք (8.9.1) համակարգը: Թեև այդ համակարգի կառուցվածքը բավականին պարզ է, նրա (8.9.2) տիպի գրառումը շատ ծավալուն է: Ավելի հարմար է համակարգը ներկայացնել վանդակային ձևով, օգտագործելով ցանցի ներքին հանգույցների նկ. 8.9.1ում նշված համարակալումը, որը կոչվում է *բառսրանագրական կարգավորում* (տես նկ. 8.9.1):

Նկ. 8.9.1 Հանգույցների բառարանագրական կարգավորումը

Ընդ որում, հանգույցի դեկարտյան կոորդինատներից հեշտությամբ որոշվում է նրա բառարանագրական համարը, և ընդհակառակը՝

$$(i,j) \;\to\; n = (j-1)M + i\,,$$
$$n \;\to\; j = \left\lfloor \frac{n-1}{M} \right\rfloor + 1\,,\; i = n - (j-1)M\;:$$

Ներմուծենք

$$v_j = [v(1,j), v(2,j), \ldots, v(M,j)]^T\,, \quad j = 1, 2, \ldots, M$$

և

$$\begin{aligned}
r_1 &= h^2[f(1,1), f(2,1), \ldots, f(M,1)]^T + \\
&\quad [\varphi(1,0) + \varphi(0,1), \varphi(2,0), \ldots, \varphi(M-1,0), \varphi(M,0) + \varphi(M+1,1)]^T\,, \\
r_j &= h^2[f(1,j), f(2,j), \ldots, f(M,j)]^T + [\varphi(0,j), 0, \ldots, 0, \varphi(M+1,j)]^T\,, \\
&\qquad\qquad j = 2, 3, \ldots, M-1\,, \\
r_M &= h^2[f(1,M), f(2,M), \ldots, f(M,M)]^T + \\
&\quad [\varphi(1,M+1) + \varphi(0,M), \varphi(2,M+1), \ldots \\
&\quad \ldots, \varphi(M-1,M+1), \varphi(M,M+1) + \varphi(M+1,M)]^T
\end{aligned}$$

վեկտորները: Այդ դեպքում (8.9.1) համակարգը կարելի է գրել

$$\begin{bmatrix} T & -I & & & & \\ -I & T & -I & & & \\ & -I & T & -I & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -I & T & -I \\ & & & & -I & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{M-1} \\ v_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_{M-1} \\ r_M \end{bmatrix} \tag{8.9.3}$$

կոմպակտ վանդակային երեքանկյունագծային տեսքով, որտեղ T-ն հետևյալ երեքանկյունագծային $M \times M$ չափի մատրիցն է

$$T = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & & \\ & -1 & 4 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 4 & -1 \\ & & & & -1 & 4 \end{bmatrix}, \tag{8.9.4}$$

իսկ I-ն՝ M կարգի միավոր մատրից է:

Ցանցային հավասարումների (8.9.3) համակարգի տեսքը մեզ բերում է այն մտքի, որ հնարավոր է ընդհանրացնել 3.9 պարագրաֆում դիտարկված երեքանկյունագծային սկալյար մատրիցով համակարգերի լուծման ալգորիթմը:

8.9.1 Վանդակային երեքանկյունագծային համակարգերի լուծման մեթոդը

Դիտարկենք ավելի ընդհանուր տեսքի համակարգ

$$\begin{cases} D_1 v_1 - B_1 v_2 = r_1 \\ -A_j v_{j-1} + D_j v_j - B_j v_{j+1} = r_j, \quad j = 2, 3, \ldots, M-1, \\ -A_M v_{M-1} + D_M v_M = r_M; \end{cases} \tag{8.9.5}$$

որտեղ v_j և r_j վեկտորները ունեն M երկարություն, իսկ A_j, B_j և D_j մատրիցները M կարգի քառակուսի մատրիցներ են:

Ինչպես և սկալյար մատրիցով համակարգերի դեպքում, մեթոդի ալգորիթմը բաղկացած է երկու փուլից: Առաջին փուլում (*ուղիղ արտաքսում*) (8.9.5) համակարգը բերվում է

$$\begin{cases} v_j - \Gamma_j v_{j+1} = \rho_j, \quad j = 1, 2, \ldots, M-1, \\ v_M = \rho_M \end{cases} \tag{8.9.6}$$

համարժեք համակարգի, որի գործակիցները և աջ մասերը հաշվվում են ըստ հետևյալ բանաձևերի.

$$\begin{aligned} &\Gamma_1 = D_1^{-1} B_1, \qquad \Gamma_j = (D_j - A_j \Gamma_{j-1})^{-1} B_j; \qquad j = 2, 3, \ldots, M-1, \\ &\rho_1 = D_1^{-1} r_1, \quad \rho_j = (D_j - A_j \Gamma_{j-1})^{-1} (r_j + A_j \rho_{j-1}), \quad j = 2, 3, \ldots, M: \end{aligned} \tag{8.9.7}$$

Երկրորդ փուլում (*հակադարձ տեղադրում*) (8.9.6) համակարգից անմիջականորեն գտնվում են անհայտները՝

$$\begin{aligned} v_M &= \rho_M; \\ v_j &= \Gamma_j v_{j+1} + \rho_j, \quad j = M-1, M-2, \ldots, 1: \end{aligned}$$

Թեև շարադրված մեթոդի արդյունավետությունը էապես ավելի բարձր է, քան սովորական Գաուսի մեթոդինը, բայց և այնպես այն այդքան էլ շահավետ չէ,

ինչպես կարելի էր սպասել, քանի որ նրա իրականացումը պահանջում է $O(M^3)$ թվաբանական գործողություն (տե՛ս, օրինակ, [36],[39]): Բանն այն է, որ ուղիղ արտաքսման ընթացքում պետք է շրջել M-րդ կարգի մատրիցներ:

Ինչ վերաբերում է մեթոդի կոռեկտությանը, ապա ճիշտ է հետևյալ պնդումը, որը համանման է 3.9.1 թեորեմի (ապացույցը տե՛ս [39]-ում):

Թեորեմ 8.9.1 : *Դիցուք (8.9.5) համակարգում D_j $(1 \le j \le M)$ մատրիցները չվերասերված են, A_j և B_j $(2 \le j \le M-1)$ մատրիցները ոչ դրական են և, բացի դրանից, տեղի ունեն*

$$\begin{aligned} &\|D_1^{-1}B_1\|_2 \le 1\,, \\ &\|D_j^{-1}A_j\|_2 + \|D_j^{-1}B_j\|_2 \le 1\,, \quad 2 \le j \le M-1\,, \\ &\|D_M^{-1}A_M\|_2 \le 1 \end{aligned} \tag{8.9.8}$$

պայմանները, ընդ որում պայմաններից գոնե մեկում անհավասարությունը խիստ է: Այդ դեպքում $D_j - A_j\Gamma_{j-1}$ $(j = 2, 3, \ldots, M)$ մատրիցները չվերասերված են և դրանով իսկ մեթոդը կոռեկտ է:

Մասնավորապես, մեր (8.9.3) համակարգի համար (8.9.7) բանաձևերը էապես պարզեցվում են՝

$$\Gamma_1 = T^{-1}\,, \qquad \Gamma_j = (T - \Gamma_{j-1})^{-1}\,, \qquad j = 2, 3, \ldots, M-1\,,$$

$$\rho_1 = T^{-1}r_1\,, \quad \rho_j = (T - \Gamma_{j-1})^{-1}(r_j + \rho_{j-1})\,, \quad j = 2, 3, \ldots, M\,:$$

Ընդ որում (8.9.8) պայմանները հանգում են մեկի, այն է՝

$$\|T^{-1}\|_2 \le \frac{1}{2}\,:$$

Դժվար չէ համոզվել, որ վերջին պայմանը բավարարված է: Իրոք, (8.9.4)-ից T մատրիցի սեփական արժեքներն են

$$\lambda_p(T) = 2 + 4\sin^2\frac{p\pi}{2(M+1)}\,, \quad p = 1, 2, \ldots, M$$

թվերը (տե՛ս (8.6.9) և (8.6.10)-ի արտածումը):. Ակնհայտ է, որ $\lambda_p(T) > 2$: Ուստի

$$\|T^{-1}\|_2 = \max_p |\lambda_p(T^{-1})| = \frac{1}{\min\limits_p \lambda_p(T)} < \frac{1}{2}\,:$$

8.9.2 Ֆուրիեի մեթոդը

Դիտարկենք (8.8.3) տարբերական խնդրի լուծման ևս մեկ ուղիղ մեթոդ, որի հիմքում ընկած է փոփոխականների անջատման եղանակը:

Նախ և առաջ, (8.8.3) տարբերական խնդիրը կարելի է բերել համասեռ եզրային պայմաններով խնդրի՝ փոփոխելով սահմանամերձ հանգույցներում գրված հավասարումների աջ մասերը (փաստորեն մենք դա էլ արել ենք (8.9.2) համակարգի գրառման ժամանակ): Ավելի ճիշտ, ω_h ցանցի ներքին հանգույցներում (8.8.3) խնդրի լուծումը համընկնում է

$$\begin{cases} -\Delta_h u(i,j) = r(i,j), & (x_i, y_j) \in \omega_h^\circ \\ u(i,j) = 0, & (x_i, y_j) \in \omega_h' \end{cases} \tag{8.9.9}$$

խնդրի լուծման հետ, որի աջ մասը որոշվում է ըստ

$$r(i,j) = f(i,j) + \frac{1}{h^2}\mu_1(i,j) + \frac{1}{h^2}\mu_2(i,j), \quad (x_i, y_j) \in \omega_h^\circ$$

բանաձևի, որտեղ

$$\mu_1(i,j) = \begin{cases} \varphi(0,j), & i = 1 \\ 0, & 2 \le i \le M-1 \\ \varphi(M+1,j), & i = M \end{cases}, \quad \mu_2(i,j) = \begin{cases} \varphi(i,0), & j = 1 \\ 0, & 2 \le j \le M-1 \\ \varphi(i,M+1), & j = M \end{cases}$$

Այսպիսով, բավարար է գտնել (8.9.9) խնդրի լուծումը:

- Սեփական արժեքների խնդիրը Լապլասի տարբերական օպերատորի համար

Պարագրաֆ 8.6-ում մենք դիտարկել ենք երկրորդ տարբերական ածանցյալի Λ օպերատորի համար սեփական արժեքների խնդիրը: Երկչափ դեպքում այդ խնդրի նմանակն է սեփական արժեքների խնդիրը ուղղանկյուն տիրույթում հավասարաչափ ցանցի վրա որոշված Δ_h Լապլասի տարբերական օպերատորի համար:

Նշանակենք $\overset{\circ}{G}_h$-ով G_h տարածության այն ցանցային ֆունկցիաների բազմությունը, որոնք հավասար են զրոյի եզրային հանգույցներում: Այդ ֆունկցիաների համախմբությունը կազմում է M^2 չափի գծային տարածություն: Ներմուծենք G_h-ում սկալյար արտադրյալ՝

$$(v, w) \equiv h^2 \sum_{i,j=1}^{M} v(i,j)w(i,j) :$$

Սահմանենք $p, q = 1, 2, \ldots, M$ արժեքների համար

$$\Phi^{(p,q)}(i,j) \equiv \psi_i^{(p)}\psi_j^{(q)}, \quad 0 \le i, j \le M+1 \tag{8.9.10}$$

ցանցային ֆունկցիաներ, որտեղ

$$\psi_i^{(p)} = \sqrt{2}\sin\frac{p\pi i}{M+1}, \quad \psi_j^{(q)} = \sqrt{2}\sin\frac{q\pi j}{M+1}$$

(տե՛ս (8.6.2)): Հեշտ է տեսնել, որ (8.9.10) ֆունկցիաների համախմբությունը կազմում է օրթոնորմալ բազիս $\overset{\circ}{G}_h$-ում: Իրոք,

$$(\Phi^{(p,q)}, \Phi^{(k,l)}) = \left(h\sum_{i=1}^{M}\psi_i^{(p)}\psi_i^{(k)}\right)\left(h\sum_{j=1}^{M}\psi_j^{(q)}\psi_j^{(l)}\right) = \delta_{pk}\delta_{ql}$$

(δ_{pk} և δ_{ql} Կրոնեկերի սիմվոլներն են): Դրանով իսկ կամայական $u \in \overset{\circ}{G}_h$ ցանցային ֆունկցիա վերլուծվում է

$$u = \sum_{p,q=1}^{M} c_{pq}\Phi^{(p,q)} \tag{8.9.11}$$

տեսքով, որտեղ c_{pq}-երը *Ֆուրիեի գործակիցներն են*, որոնք հաշվվում են բան

$$c_{pq} = \left(u, \Phi^{(p,q)}\right), \quad p, q = 1, 2, \ldots, M \tag{8.9.12}$$

բանաձևերի:

Ցույց տանք, որ (8.9.10) ցանցային ֆունկցիաները Δ_h տարբերական օպերատորի սեփական ֆունկցիաներն են: Օգտվելով (8.6.9)-ից, կստանանք

$$\Delta_h \Phi^{(p,q)}(i, j) = \left(\omega_i^{(p)}\right)_{x\bar{x}} \omega_j^{(q)} + \omega_i^{(p)} \left(\omega_j^{(q)}\right)_{y\bar{y}} = (\lambda_p + \lambda_q)\Phi^{(p,q)}(i, j) :$$

Այսպիսով,

$$\Delta_h \Phi^{(p,q)} = \lambda_{pq} \Phi^{(p,q)}, \quad p, q = 1, 2, \ldots, M, \tag{8.9.13}$$

որտեղ

$$\lambda_{pq} = -\frac{4}{h^2}\left(\sin^2 \frac{p\pi}{2(M+1)} + \sin^2 \frac{q\pi}{2(M+1)}\right) : \tag{8.9.14}$$

Ինչպես ակնհայտորեն հետևում է (8.6.11)-ից,

$$16 < |\lambda_{pq}| < \frac{8}{h^2}, \quad p, q = 1, 2, \ldots, M :$$

- Լուծման մեթոդը. վերլուծություն ըստ Ֆուրիեի շարքի

Փնտրենք (8.9.9) տարբերական խնդրի լուծումը (8.9.11) տեսքով: Նշանակենք R_{pq}-ով եզրային հանգույցներում զրոներով լրացնումանված $r \in G_h^*$ աջ մասի Ֆուրիեի գործակիցները: Այդ դեպքում

$$r = \sum_{p,q=1}^{M} R_{pq} \Phi^{(p,q)} : \tag{8.9.15}$$

Տեղադրելով (8.9.11) և (8.9.15) վերլուծությունները (8.9.9) հավասարումների մեջ, կստանանք

$$-\sum_{p,q=1}^{M} c_{pq} \Delta_h \Phi^{(p,q)} = \sum_{p,q=1}^{M} R_{pq} \Phi^{(p,q)} :$$

Այնուհետև, օգտվելով (8.9.13)-ից, ունենք

$$-\sum_{p,q=1}^{M} c_{pq} \lambda_{pq} \Phi^{(p,q)} = \sum_{p,q=1}^{M} R_{pq} \Phi^{(p,q)} :$$

Քանի որ $\Phi^{(p,q)}$ ֆունկցիաները գծորեն անկախ են, ապա

$$c_{pq} = -\frac{R_{pq}}{\lambda_{pq}}, \quad p, q = 1, 2, \ldots, M : \tag{8.9.16}$$

Համաձայն Ֆուրիեի գործակիցների հաշվման բանաձևերի կստանանք.

$$R_{pq} = \left(r, \Phi^{(p,q)}\right) = h^2 \sum_{i,j=1}^{M} r(i, j)\Phi^{(p,q)}(i, j) = h \sum_{i=1}^{M} \left(h \sum_{j=1}^{M} r(i, j)\omega_j^{(q)}\right) \omega_i^{(p)} :$$

Իսկ (8.9.11)-ից ունենք

$$u(i,j) = \sum_{p,q=1}^{M} c_{pq}\Phi^{(p,q)}(i,j) = \sum_{p=1}^{M}\left(\sum_{q=1}^{M} c_{pq}\psi_j^{(q)}\right)\psi_i^{(p)} :$$

Այդ դեպքում հաշվողական ալգորիթմը կարելի է կազմավորել հետևյալ կերպ.

Pseudocode **POISSON/FOURIER**

input M, h, $\{r(i,j)\}$, $\{\lambda_{pq}\}$

for $i = 1, 2, \ldots, M$ do

  for $q = 1, 2, \ldots, M$ do

    $$s_{iq} = \sqrt{2}h\sum_{j=1}^{M} r(i,j)\sin\frac{q\pi j}{M+1}$$

  end

end

for $q = 1, 2, \ldots, M$ do

  for $p = 1, 2, \ldots, M$ do

    $$R_{pq} = \sqrt{2}h\sum_{i=1}^{M} s_{iq}\sin\frac{p\pi i}{M+1}$$

  end

end

for $p = 1, 2, \ldots, M$ do

  for $q = 1, 2, \ldots, M$ do

    $c_{pq} = -R_{pq}/\lambda_{pq}$

  end

end

for $p = 1, 2, \ldots, M$ do

  for $j = 1, 2, \ldots, M$ do

    $$t_{pj} = \sqrt{2}\sum_{q=1}^{M} c_{pq}\sin\frac{q\pi j}{M+1}$$

  end

end

for $j = 1, 2, \ldots, M$ do

  for $i = 1, 2, \ldots, M$ do

    $$u(i,j) = \sqrt{2}\sum_{p=1}^{M} t_{pj}\sin\frac{p\pi i}{M+1}$$

  end

end

output $\{u(i,j)\}$

Եթե հաշվենք գումարները *Ֆուրիեի արագ ձևափոխության ալգորիթմի* կիրառմամբ, որն արդեն հիշատակվել էր 8.6 պարագրաֆում, ապա (8.9.9) խնդրի լուծումը որոշելու համար կպահանջվի $O(M^2\log_2 M)$ թվաբանական գործողություն:

8.9.3 Իտերացիոն մեթոդներ

Էլիպտական եզրային խնդիրների համար կառուցված ցանցային հավասարումների համակարգեր լուծելիս հաճախ նախապատվություն տրվում է իտերացիոն մեթոդներին այն պատճառով, որ նրանք իրականացվում են էապես ավելի պարզ և կիրառելի են ինչպես փոփոխական գործակիցներով հավասարումների համար, այնպես էլ բարդ երկրաչափական ձևի տիրույթների համար: Բացի այս, իտերացիոն մեթոդները, որպես օրենք, պահանջում են համակարգչի հիշողության ավելի փոքր ծավալ, քան ուղիղ մեթոդները:

Պարզության համար դիտարկենք (8.9.1) ցանցային հավասարումների համակարգը: Այդ համակարգի լուծման համար կարելի է կիրառել, օրինակ, բավականին պարզ

$$v^{n+1}(i,j) = \frac{1}{4}\left(v^n(i-1,j) + v^n(i+1,j) + v^n(i,j-1) + v^n(i,j+1)\right) + \frac{h^2}{4} f(i,j),$$

$$i,j = 1,2,\ldots,M \tag{8.9.17}$$

Յակոբիի մեթոդը: Հիմք ընդունելով հանգույցների բառարանագրական կարգավորումը, կարելի է օգտվել նաև *Գաուս-Զեյդելի մեթոդից*՝

$$v^{n+1}(i,j) = \frac{1}{4}\left(v^{n+1}(i-1,j) + v^{n+1}(i,j-1) + v^n(i+1,j) + v^n(i,j+1)\right) + \frac{h^2}{4} f(i,j),$$

$$i,j = 1,2,\ldots,M \tag{8.9.18}$$

Ինչպես հեշտ է նկատել (8.9.2)-ից, (8.9.1) համակարգի մատրիցը ունի *ոչ խիստ* անկյունագծային գերիշխում: Ուստի այստեղ կիրառելի չեն Յակոբիի մեթոդի զուգամիտության մասին 3.11.2 և 3.11.3 թեորեմները: Սակայն ավելի խիստ հետազոտությունը ցույց է տալիս, որ մեթոդը զուգամետ է:

Դիցուք B_J-ն Յակոբիի (8.9.17) մեթոդի իտերացնող մատրիցն է: Որպես օպերատոր նրա համար ճիշտ է

$$B_J = \frac{h^2}{4}\Delta_h + I$$

ներկայացումը, որտեղ I-ն նույնական օպերատոր է: Օգտվելով (8.9.13)-ից, բոլոր $p,q = 1,2,\ldots,M$ արժեքների համար, ունենք

$$B_J\Phi^{(p,q)} = \frac{h^2}{4}\Delta_h\Phi^{(p,q)} + \Phi^{(p,q)} = \left(1 + \frac{h^2}{4}\lambda_{pq}\right)\Phi^{(p,q)}:$$

Ուստի

$$\mu_{pq} \equiv 1 + \frac{h^2}{4}\lambda_{pq}, \quad p,q = 1,2,\ldots,M$$

թվերը B_J մատրիցի սեփական արժեքներն են: Հաշվի առնելով նաև (8.9.14) բանաձևը, ստանում ենք հետևյալ արտահայտությունը B_J մատրիցի սպեկտրալ շառավիղի

համար

$$\rho(B_J) = \max_{1<p,q<M} |\mu_{pq}| = 1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{2(M+1)} = \cos\frac{\pi}{M+1} = \cos \pi h \approx 1 - \frac{(\pi h)^2}{2} :$$

Այսպիսով, $\rho(B_J) < 1$ և, հետևաբար, Յակոբիի մեթոդը զուգամիտում է: Սակայն փոքր h-երի դեպքում մատրիցի սպեկտրալ շառավիղը մոտ է մեկին: Ուստի մեթոդի զուգամիտության արագությունը քայլի փոքրացմանը զուգընթաց նկատելիորեն վատանում է: Այդ իսկ պատճառով մանր ցանցերի դեպքում մեթոդի կիրառումը աննպատակահարմար է:

Գաուս-Զեյդելի (8.9.18) մեթոդի զուգամիտությունը հետևում է 3.12.4 թեորեմից, քանի որ (8.9.1) համակարգի մատրիցը սիմետրիկ է և դրական որոշյալ (ապացուցել): Այստեղ, ինչպես և Յակոբիի մեթոդում, ցանցի քայլի փոքրացման հետ մեկտեղ նկատվում է զուգամիտության արագության վատացում: Կարելի է ցույց տալ, որ

$$\rho(B_{GS}) = \cos^2(\pi h) \approx 1 \quad (\pi h)^2$$

(տես, օրինակ, [51]):

Վերջում նշենք, որ բացի վերը դիտարկված մեթոդներից գոյություն ունեն ցանցային հավասարումների համակարգերի լուծման այլ՝ ավելի էֆեկտիվ իտերացիոն մեթոդներ: Այդպիսիք են, օրինակ, *հաջորդական վերին ռելաքսացիայի մեթոդը*, *փոփոխական ուղղությունների մեթոդը*, *համալուծ գրադիենտների մեթոդը* և այլն (տես [39],[47],[51]):

Խնդիրներ և վարժություններ - 8

1. Դիտարկվում է

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = xy$$

հավասարումը $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1,\ y > 0\}$ կիսաշրջանում Γ եզրով: Վերցնելով $h = 0.5$ քայլով քառակուսի ցանց, կառուցել տարբերական սխեմաներ հետևյալ եզրային պայմանների դեպքում.

ա) $u|_\Gamma = |x + y| - 1$

բ) $\left(u - \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\Big|_\Gamma = \begin{cases} y - \sin \pi x, & y > 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$ ($\mathbf{n}$ - արտաքին նորմալի վեկտորն է):

2. Արտածել $\partial^2 u/\partial x \partial y$ ածանցյալի տարբերական մոտարկումը բանաձևը ինքնետանի շաբլոնի վրա:

3. Որոշել

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

հավասարման համար գրված

$$\frac{1}{\tau}\left(v_m^{n+1} - \frac{v_{m-1}^n + v_{m+1}^n}{2}\right) + \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} = 0$$

տարբերական սխեմայի մոտարկման կարգը:

4. Դիտարկել տարբեր տիպի տարբերական սխեմաներ

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} - \dfrac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad , \; U(x,0) = U_0(x) \\ \dfrac{\partial V}{\partial t} - \dfrac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad , \; V(x,0) = V_0(x) \end{cases}$$

հավասարումների համակարգի համար և հետազոտել դրանց կայունությունը:

5. Նեյմանի սպեկտրալ հայտանիշի օգնությամբ հետազոտել

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + a\,\frac{v_{m+1}^{n+1} - v_m^{n+1}}{h} = 0, \quad \text{որտեղ} \quad a = const,$$

տարբերական սխեմայի կայունությունը:

6. Նեյմանի սպեկտրալ հայտանիշի օգնությամբ հետազոտել

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + a\,\frac{v_m^{n+1} - v_{m-1}^{n+1}}{h} = 0, \quad \text{որտեղ} \quad a = const,$$

տարբերական սխեմայի կայունությունը:

7. Նեյմանի սպեկտրալ հայտանիշի օգնությամբ հետազոտել

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + a\,\frac{v_{m+1}^{n+1} - v_{m-1}^{n+1}}{2h} = 0, \quad \text{որտեղ} \quad a = const,$$

տարբերական սխեմայի կայունությունը:

8. Նեյմանի սպեկտրալ հայտանիշի օգնությամբ հետազոտել

$$\frac{1}{\tau}\left(v_m^{n+1} - \frac{v_{m+1}^n + v_{m-1}^n}{2}\right) + a\,\frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} = 0, \quad \text{որտեղ} \quad a = const,$$

տարբերական սխեմայի կայունությունը:

9. Նեյմանի սպեկտրալ հայտանիշի օգնությամբ հետազոտել

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + a\,\frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} - \frac{h^2}{2\tau}\,\frac{v_{m-1}^n - 2v_m^n + v_{m+1}^n}{h^2} = 0, \quad \text{որտեղ} \quad a = const,$$

տարբերական սխեմայի կայունությունը:

10. Նեյմանի սպեկտրալ հայտանիշի օգնությամբ հետազոտել

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} + a\,\frac{v_{m+1}^n - v_m^n}{h} + (1-a)\,\frac{v_m^n - v_{m-1}^n}{h} = 0$$

տարբերական սխեմայի կայունությունը $a \in [0,1]$ դեպքում:

11. Գրված է

$$\frac{1}{\tau}\left(\frac{v_{m-1}^{n+1}+v_{m+1}^{n+1}}{2}-v_m^n\right)-(x_m^2+1)\frac{v_{m-1}^{n+1}-2v_m^{n+1}+v_{m+1}^{n+1}}{h^2}=f_m^{n+1}$$

տարբերական սխեման

$$\frac{\partial u}{\partial t}-(x^2+1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f$$

հավասարման համար: τ և h քայլերի ինչպիսի՞ հարաբերակցության դեպքում մոտարկման սխալանքը կլինի $O(h)$ կարգի մեծություն

12. θ-ի ինչպիսի՞ արժեքների դեպքում

$$\frac{v_m^{n+1}-v_m^n}{\tau}=\theta\,\frac{v_{m-1}^{n+1}-2v_m^{n+1}+v_{m+1}^{n+1}}{h^2}+(1-\theta)\,\frac{v_{m-1}^n-2v_m^n+v_{m+1}^n}{h^2}$$

տարբերական սխեման, գրված

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

հավասարման համար, կունենա $O(\tau^2+h^4)$ մոտարկման սխալանք:

13. Կառուցել

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left((1+x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right),\quad -1<x<1,\ t>0$$

հավասարման համար

$$u(x,0)=\sin\pi x,\quad -1\le x\le 1$$

սկզբնական պայմանով և համասեռ եզրային պայմաններով անբացահայտ տարբերական սխեմա այնպես, որ ամեն մի ժամանակային շերտում ցանցային հավասարումների համակարգի մատրիցը լինի սիմետրիկ:

14. Հետազոտել

$$\frac{v_m^{n+1}-v_m^{n-1}}{2\tau}=\frac{v_{m-1}^n-2v_m^n+v_{m+1}^n}{h^2}$$

տարբերական սխեմայի կայունությունը համասեռ եզրային պայմանների դեպքում:

15. Հետազոտել

$$\frac{v_m^{n+1}-v_m^{n-1}}{2\tau}=\frac{v_{m-1}^{n+1}-2v_m^{n+1}+v_{m+1}^{n+1}}{h^2}$$

տարբերական սխեմայի կայունությունը համասեռ եզրային պայմանների դեպքում:

16. Հետազոտել

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^{n-1}}{2\tau} = \frac{v_{m-1}^n - v_m^{n+1} - v_m^{n-1} + v_{m+1}^n}{h^2}$$

տարբերական սխեմայի կայունությունը համասեռ եզրային պայմանների դեպքում:

17. Կառուցել տարբերական սխեմա

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad a = const > 0$$

հավասարման համար ըստ ստորև բերված շաբլոնի: Ապա ապացուցել, որ սխեման կայուն է, եթե $2a\tau \geq h^2$:

18. Ապացուցել, որ (8.9.1) համակարգի մատրիցը դրական որոշյալ է:

19. Լապլասի $\Delta u = 0$ հավասարումը լուծվում է վերջավոր տարբերական մեթոդով մանրացվող քառակուսի ցանցերի հաջորդականության վրա: Ամեն մի ցանցի վրա լուծումը փնտրվում է որևէ իտերացիոն մեթոդի օգնությամբ: Ստորև նշված են ցանցային լուծման արժեքները h քայլով ցանցի վեց հանգույցներում: $h/2$ քայլով ցանցի վրա ցանցային լուծման սկզբնական մոտավորությունը տալու համար պետք է, մասնավորապես, որոշել a, b և c արժեքները, ինչպես ցույց է տրված ստորև.

81		83	89
	a	b	c
93		95	97

Պահանջվում է հաշվել այդ արժեքները $O(h^4)$ ճշտությամբ, անտեսելով տրված թվային արժեքների սխալանքները:

20. Հաշվել λ-ի մոտավոր փոքրագույն արժեքը, որի դեպքում

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

հավասարումը ունի ոչ տրիվիալ լուծում, որը հավասար է զրոյի $(0,0)$, $(0,1)$ և $(1,0)$ գագաթներով եռանկյան եզրի վրա: Հաշվարկները կատարել օգտվելով վերջավոր տարբերական մեթոդից $h = 1/5$ քայլով ցանցի վրա: Արդյունքը համեմատել $\lambda = 5\pi^2$ ճշգրիտ արժեքի հետ:

ՀԱՎԵԼՎԱԾ

ՀԱՄԱՌՈՏ ԿԵՆՍԱԳՐԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

- **Ադամս Ջոն Կաուչ (1819-1892)**

Անգլիացի աստղագետ և մաթեմատիկոս: Պետերբուրգի ԳԱ արտասահմանյան թղթակից անդամ (1864), Լոնդոնի Թագավորական ընկերության անդամ:

Ծնվել է Կորնուոլում: Սովորել է Քեմբրիջում: 1859-1892-ին՝ Քեմբրիջի համալսարանի աստղագիտության և երկրաչափության պրոֆեսոր: Իսկ 1861-ից՝ նաև Քեմբրիջի աստղադիտարանի տնօրեն:

Հիմնական աշխատությունները վերաբերում են երկնային մեխանիկային և մաթեմատիկական ֆիզիկային: Հետազոտել է երկնային մարմինների (Լուսնի, մոլորակների, գիսաստղերի, երկնաքարային հոսքերի) շարժումը: Ուրանի խոտորումների հետազոտման հիման վրա 1845-ին կանխագուշակել է Նեպտուն մոլորակի գոյությունը, հաշվարկելով նրա ուղեծիրը և կոորդինատները: Մեկ տարի անց, 1846-ին Նեպտունը հայտնաբերել է գերմանացի աստղագետ Յ. Հալլեն, ղեկավարվելով ֆրանսիացի աստղագետ Ու. Լեվերիեի հաշվարկված կոորդինատներով: Հաշվողական մաթեմատիկայում քաջ հայտնի է սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների թվային լուծման *Ադամսի մեթոդը*: Այդ մեթոդը Ջ. Ադամսը մշակել է 1855-ին անգլիացի հայտնի հրետանավոր Բաշֆորտի խնդրանքով: Հետագայում մեթոդը մոռացության է մատնվել և նոյից հայտնաբերվել է նախորդ դարի սկզբում նորվեգացի մաթեմատիկոս Ֆ. Շտերմերի կողմից:

- **Բեռնշտեյն Սերգեյ Նաթանովիչ (1880-1968)**

Խորհրդային մաթեմատիկոս: ԽՍՀՄ ԳԱ ակադեմիկոս (1929, թղթակից անդամ 1924-ից): Բելգիական ԳԱ (1911) և Փարիզի ԳԱ (1955) անդամ: ԽՍՀՄ Պետական մրցանակի դափնեկիր (1942): Պարգևատրվել է Լենինի երկու շքանշանով:

Ծնվել է Օդեսայում, բժշկագիտության դոկտորի ընտանիքում: Ավարտելով գիմնազիան (1898), սովորել է Սորբոնում (Փարիզ): Ավարտել է Փարիզի համալսարանը (1899), Փարիզի Պոլիտեխնիկական դպրոցը (1901): 1904-ին Փարիզում պաշտպանել է դոկտորական ատենախոսությունը: 1907-1908-ին դասավանդել է Պետերբուրգի Կանանց պոլիտեխնիկական դասընթացներում: 1908-1933-ին Խարկովի համալսարանի պրոֆեսոր էր, իսկ 1933-1941-ին՝ Լենինգրադի համալսարանի և պոլիտեխնիկական ինստիտուտի պրոֆեսոր: 1935-ից աշխատում էր ԽՍՀՄ ԳԱ Մաթեմատիկական ինստիտուտում: Կյանքի վերջին 25 տարիներին ապրում էր Մոսկվայում, դասավանդում էր Մոսկվայի պետական համալսարանում:

Հիմնական հետազոտությունները վերաբերում են դիֆերենցիալ հավասարումներին, ֆունկցիաների մոտարկման տեսությանը, հավանականությունների տեսությանը: Առաջարկել է ոչ գծային էլիպտական հավասարումների համար եզրային խնդիրների լուծման նոր մեթոդներ: Ստեղծել է ֆունկցիաների կոնստրուկտիվ տեսությունը: Հավանականությունների տեսության մեջ հետազոտել է սահմանային թեորեմներ, ստոխաստիկ դիֆերենցիալ հավասարումներ, ինչպես նաև հավանականային մեթոդների կիրառման հարցերը ֆիզիկայում, վիճակագրության և կենսաբանության մեջ: Կառուցել է հավանականությունների տեսության առաջին աքսիոմատիկ տեսությունը: Մի շարք աշխատանքներ վերաբերում են ֆունկցիոնալ անալիզին, վարիացիոն հաշվին, մաթեմատիկայի պատմությանը և դասավանդման մեթոդիկային:

• Բեսել Ֆրիդրիխ Վիլհելմ (1784-1846)

Գերմանացի աստղագետ և մաթեմատիկոս: Բեռլինի ԳԱ անդամ (1812), Պետերբուրգի ԴԱ պատվավոր անդամ (1814):

Ծնվել է Մինդենում: Մասնագիտական կրթություն չի ստացել և աստղագիտական ու մաթեմատիկական գիտելիքները ձեռք է բերել ինքնակրթությամբ: Հալլեյի գիսաստղի ուղեծրի ճշգրիտ հաշվարկը (1804) նրան հնարավորություն է տվել Լիլիենթալի մասնավոր աստղադիտարանում 1806-ից սանձնել դոկտոր-ասիստենտի պաշտոնը: 1810-ին նշանակվել է Քյոնիգսբերգի համալսարանի պրոֆեսոր և կառուցել է ժամանակի ամենակատարյալ գործիքներով սարքավորված աստղադիտարանը, որի տնօրենը եղել է մինչև կյանքի վերջը:

Հիմնական հետազոտությունները վերաբերում են աստղագիտությանը: Բեսելի աշխատանքները էապես ազդել են աստղագիտական դիտումների բնույթի և ընդհանրապես աստղագիտության հետագա զարգացման վրա: Մշակել է աստղագիտական գործիքների սխալանքների տեսությունը: Դիտումների արդյունքների մաթեմատիկական մշակումների ընթացքում կիրառել է հավանականությունների տեսությունը և փորձագույն բառակուսիների մեթոդը: Ստեղծել է Արեգակի խավարումների տեսությունը, որոշել մոլորակների զանգվածները: Մաթեմատիկայի բնագավառում մշակել է գլանային ֆունկցիաների տեսությունը (*բեսելյան ֆունկցիաներ*) և դիտարկել է այն դիֆերենցիալ հավասարումը, որին բավարարում են այդ ֆունկցիաները (*Բեսելի հավասարում*): Նրա անունն է կրում Ֆուրիեի շարքի գործակիցների համար հայտնի անհավասարությունը (*Բեսելի անհավասարություն*):

• Գրամ Յորգեն Պեդերսեն (1850-1916)

Դանիական մաթեմատիկոս:

Ծնվել է Նուստրուպ գյուղում (Հաղերսլևի մոտ): 1871-ին ավարտել է Կոպենհագենի համալսարանը: 1875-ից աշխատել է որպես մաթեմատիկոս «Հաֆնիա» ապահովագրական ընկերությունում: 1896-ից այդ ընկերության տնօրենը և Դանիական ապահովագրական խորհրդի նախագահ:

Հիմնական հետազոտությունները վերաբերում են մաթեմատիկական վիճակագրությանը և թվերի տեսությանը: Զբաղվել է նաև ֆունկցիաների մոտարկման հարցերով: Ներմուծել է սկալյար արտադրյալներից կազմված մատրիցներ և որոշիչներ (*Գրամի մատրից, Գրամի որոշիչ*), որոնք ունեն բազմազան կիրառություններ:

• Դիրիխլե Պետեր Գուստավ (1805-1859)

Գերմանացի մաթեմատիկոս: Բեռլինի ԳԱ անդամ (1837), Պետերբուրգի ԳԱ թղթակից անդամ (1837), Փարիզի ԳԱ անդամ (1854): Լոնդոնի թագավորական ընկերության անդամ (1855):

Ծնվել է Դյուրենում: Ստանալով միջնակարգ կրթությունը, 1822-1827-ին աշխատել է Փարիզում որպես տնային ուսուցիչ: Եղել է երիտասարդ գիտնականների խմբակի անդամ, որը ղեկավարել է Ժ.Ֆուրիեն: 1827-ին ստանձնել է դոցենտի պաշտոնը Բրեսլաուի համալսարանում: 1829-ից դասավանդել է Բեռլինում: 1831-1855-ին Բեռլինի համալսարանի, իսկ 1855-1859-ին՝ Գյոթինգենի համալսարանի պրոֆեսոր էր:

Հիմնական աշխատությունները վերաբերում են թվերի տեսությանը, մաթեմատիկական անալիզին, մաթեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումներին: Թվերի տեսությունն մեջ ստացել է մի շարք կարևոր արդյունքներ: Ապացուցել է Ֆերմայի մեծ թեորեմը հինգ ցուցիչի համար: Ճշգրիտ ձևակերպել և հետազոտել է շարքերի պայմանական զուգամիտության հասկացությունը և ստացել զուգամիտության կարևոր հայտանիշ (*Դիրիխլեի հայտանիշ*): Ստեղծել է *Դիրիխլեի շարքերի* տեսությունը, որը հետագայում զարգացել է որպես անալիտիկ ֆունկցիաների տեսության առանձին ճյուղ: Մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների տեսության մեջ լայն հայտնի է *Դիրիխլեի խնդիրը*:

• Էյլեր Լեոնարդ (1707-1783)

Շվեյցարացի մաթեմատիկոս, մեխանիկ, ֆիզիկոս և աստղագետ: 1726-1741-ին և 1766-ից՝ Պետերբուրգի ԳԱ անդամ, 1742-1766-ին՝ Պետերբուրգի ԳԱ արտասահմանյան պատվավոր անդամ: Փարիզի ԳԱ, Բեռլինի ԳԱ և Լոնդոնի թագավորական ընկերության անդամ:

Ծնվել է Բազելում, պաստորի ընտանիքում: 1724-ին ավարտել է Բազելի համալսարանը: 1726-ին հրավիրվել է Պետերբուրգի ԳԱ: 1726-ից՝ բնախոսության, ավելի ուշ՝ մաթեմատիկայի աղյունկտ: 1731-1741-ին՝ սկզբից ֆիզիկայի և տեսական մեխանիկայի, այնուհետև՝ մաթեմատիկայի պրոֆեսոր: 1741-ին տեղափոխվել է Բեռլին, որտեղ ապրել է 25 տարի: 1744-ից Բեռլինի ԳԱ Մաթեմատիկական դասարանի տնօրեն: 1766-ին վերադարձել է Պետերբուրգ: Շուտով համարյա ամբողջովին կորցնելով տեսողությունը, շարունակել է ստեղծագործել:

Էյլերի գիտական հետաքրքրությունների շրջանակը ընդգրկում էր իր ժամանակի մաթեմատիկայի և մեխանիկայի բոլոր բաժինները: 1727-1741-ին գրել է ավելի քան 80 աշխատանք նվիրված վարիացիոն հաշվին, դիֆերենցիալ հավասարումներին, աստիճանային շարքերին, հատուկ ֆունկցիաներին, դիֆերենցիալ երկրաչափությանը, թվերի տեսությանը, հիդրոդինամիկային, երկնային մեխանիկային, օպտիկային և այլն: Էյլերի, որպես մաթեմատիկոսի, գլխավոր գործը եղել է մաթեմատիկական անալիզի մշակումը: Ստեղծել է վարիացիոն հաշիվը, դիֆերենցիալ հավասարումների տեսական հիմունքները: Հետազոտել է պինդ մարմնի կինեմատիկան և դինամիկան, տվել անշարժ կետի շուրջը նրա պտտման հավասարումը, հիմնադրել գիրոսկոպի տեսությունը: Նշանակալի են Էյլերի հետազոտությունները երկնային մեխանիկայում: Նրա տեսական արդյունքները հիմք են ծառայել Լուսնի շարժման աղյուսակների ստեղծման համար: Զբաղվել է նաև սոսկ կիրառական խնդիրներով. հիմնադրել է տուրբինների տեսությունը, ներդրում կատարել նյութերի դիմադրության տեսությունում և օպտիկական տեխնիկայում: Էյլերի գիտական աշխատությունների ցուցակը պարունակում է 850-ից ավելի անվանումներ, այդ թվում մի շարք բազմահատոր մենագրություններ:

• Լայբնից Գոթֆրիդ Վիլհելմ (1646-1716)

Գերմանացի մաթեմատիկոս, ֆիզիկոս, փիլիսոփա, հանրագիտակ և հասարակական գործիչ: Բեռլինի ԳԱ հիմնադիրն է և առաջին նախագահը (1700): Եղել է Փարիզի ԳԱ (1700) և Լոնդոնի թագավորական ընկերության (1673) անդամ:

Ծնվել է Լայպցիգում: Ուսումնասիրել է փիլիսոփայություն և իրավունք Լայպցիգի համալսարանում (1661-1666), մաթեմատիկա Ենայի համալսարանում (1663): 1672-1676-ին դիվանագիտական հանձնարարություններով եղել է Փարիզում և Լոնդոնում, ուր միաժամանակ զբաղվել է գիտական աշխատանքով և դասավանդումով: 1676-1716-ին ծառայել է Հանովերի հերցոգի մոտ՝ նախ որպես գրադարանավար, պատմագիր, ապա նաև արտաքին գործերով քաղաքական խորհրդական: Նպաստել է Լայպցիգի, Վիեննայի և Պետերբուրգի ակադեմիաների ստեղծմանը:

Հիմնական մաթեմատիկական աշխատանքները նվիրված են դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշվի ստեղծմանը: Մասնակի և անջատ մեթոդներ Լայբնիցը միաբերել է մաթեմատիկական անալիզի հասկացությունների փոխկապակցված միասնական համակարգի: Տվել է *դիֆերենցիալի* և *ինտեգրալի* սահմանումները, ներմուծել է դիֆերենցիալի (d) և ինտեգրալի ($\int$) նշանակումները, արտածել է գումարի, տարբերության, արտադրյալի, քանորդի, աստիճանի, կարևորագույն տրանսցենդենտ ֆունկցիաների, բարդ ֆունկցիաների դիֆերենցման օրենքները: Բացահայտել է անալիզի հիմնական հասկացությունների՝ դիֆերենցման և ինտեգրման փոխհակադարձ բնույթը: Հիմք է դրել շարքերի տեսությանը և դիֆերենցիալ հավասարումների տեսությանը: Լայբնիցը առաջարկել է համընդհանուր օգտագործում ստացած տերմինները՝ *ֆունկցիա*, *դիֆերենցիալ հավասարում*, *ալգորիթմ*, *աբսցիս*, *օրդինատ* և այլն: Նյուտոնից անկախ Լայբնիցը մատեդծել է մաթեմատիկական անալիզի հիմունքները: Հետագայում նրանց միջև երկարատև վիճաբանություն է ծավալվել առաջնության հարցի շուրջը: Ավանդական ձևական տրամաբանության շրջանակներում Լայբնիցը մշակել և զարգացրել է մի շարք մեթոդներ ու գաղափարներ, որոնք հետագայում ընդգրկվել են մաթեմատիկական տրամաբանության մեջ: Զբաղվել է տեխնիկական հարցերով՝ առաջարկել է գլանի և մխոցի գաղափարը, կատարելագործել Պասկալի հաշվիչ մեքենան և այլն: Փիլիսոփայության մեջ Լայբնիցը ձգտել է կեցության էությունը բացահայտել սուբստանցի մասին ուսմունքի ձևով: Ի տարբերություն XVII դ. մեխանիստական պատկերացումների, փորձում էր բնության բազմազանությունը մեկնաբանել դինամիկ հիմքերով: Ըստ Լայբնիցի, սուբստանցների թիվը անվերջ է, որոնք բոլորն էլ նախատարրեր կամ կեցության միավորներն են *մոնադներ*: Աշխարհի բազմազանությունը պայմանավորված է տարբեր մոնադների ստորակարգությամբ, որի հիմքը բարձրագույն մոնադն է *աստվածը*: Լեզվաբանության բնագավառում հանդես է եկել լեզուների ծագման վերաբերյալ աստվածաշնչյան առասպելի դեմ, նշել մի շարք լեզուների պատմական ընդհանրություններ: Լայբնիցը մասնավորապես հետաքրքրվել է հայոց լեզվի հետ այլ լեզուների ունեցած փոխհարաբերության հարցով, հրատարակել Մ.Լ.ա Կրոգի հայագիտական աշխատանքները: Կապեր է ունեցել Ամստերդամում գործող հայ տպագրիչների (Ղուկաս Վանանդեցի և ուրիշներ) հետ: Լայբնիցի այլ աշխատանքներ վերաբերում են իրավունքին, կենսաբանությանը, հնէաբանությանը, քաղաքականությանը, մանկավարժությանը և այլն:

• Լապլաս Պիեռ Սիմոն (1749-1827)

Ֆրանսիացի մաթեմատիկոս, աստղագետ և ֆիզիկոս: Փարիզի ԳԱ (1783) և Ֆրանսիայի ազգային ինստիտուտի (1795) անդամ: Պետերբուրգի ԳԱ պատվավոր անդամ (1802):

Ծնվել է Բոմոն-ան-Օժում (Նորմանդիա), գյուղացու ընտանիքում: Ստացել է աստվածաբանական կրթություն՝ ավարտելով բենեդիկտյան վանականների միաբանության դպրոցը: Ուներ հիանալի հիշողություն, ինչի շնորհիվ արագ տիրապետել է մի քանի լեզուների: Դրսևորել է մեծ ընդունակություններ մաթեմատիկայի, աստղագիտության, գրականության և արվեստի ուսումնասիրման մեջ: 1766-ին տեղափոխվել է Փարիզ, որտեղ 1771-ին Ժ.Դ՝Ալամբերի միջնորդությամբ Թագավորական հրետանային դպրոցում պրոֆեսորի պաշտոն է ստացել: Ֆրանսիական Մեծ հեղափոխությունից հետո մասնակցել է Ֆրանսիայի կրթության վերակազմակերպման, ինչպես նաև Բարձրագույն նորմալ և Պոլիտեխնիկական դպրոցների ստեղծման աշխատանքներին: 1790-ին դարձել է Փարիզի Չափերի և կշիռների հանձնաժողովի նախագահ: Ղեկավարել է նոր մետրական համակարգի ներդրման աշխատանքը: 1795-ին եղել է Երկայնությունների բյուրոյի ղեկավարության կազմում: Քաղաքական ըմբռնումներով անկայուն էր: Յուրաքանչյուր քաղաքական հեղաշրջման դեպքում նա անցնում էր հաղթողների կողմը՝ նախ հանրապետական էր, Նապոլեոն Բոնապարտի իշխանության օրոք՝ ներքին գործերի նախարար, ապա սենատի անդամ և փոխնախագահ, կայսրության դրաքս: Այնուհետև միացել է Նապոլեոնի հակառակորդներին, ստորագրելով նրա արտաքսման դեկրետը: Բուրբոնների իշխանության վերականգնումով դարձել է պեր և ստացել մարկիզի տիտղոս:

Հիմնական աշխատանքները վերաբերում են մաթեմատիկային, երկնային մեխանիկային և մաթեմատիկական ֆիզիկային: Հավանականությունների տեսության ստեղծողներից մեկն է: Համակարգել և կատարելագործել է իրենից առաջ գոյություն ունեցող մեթոդները և տեսությունները: Ապացուցել է հավանականությունների բաշխման երկանդամային օրենքը: Իր ստեղծած տեսությունում կիրառել է ինտեգրալ ձևափոխություն, որը հայտնի է *Լապլասի ձևափոխություն* անունով: Հանրահաշվում ապացուցել է որոշիչը լուսացուցիչ մինորների արտադրյալների գումարի տեսքով ներկայացման մասին թեորեմը (*Լապլասի թեորեմ*): Զարգացրել է *սխալանքների տեսությունը* և փոքրագույն քառակուսիների մեթոդը: Լապլասի կարևորագույն գիտական աշխատանքը նրա հինգհատորյա *"Երկնային մեխանիկա"*-ն է (1798-1825), որում ավարտված է երկնային մեխանիկայի ստեղծումը՝ հիմնված Նյուտոնի տիեզերական ձգողության օրենքի հիման վրա: Այդ հիմնավոր մենագրության մեջ Լապլասը շարադրել է ոչ միայն սեփական արդյունքները, այլև հանրագումարի է բերել իր նախորդների՝ Նյուտոնի, Դ'Ալամբերի, Էյլերի, Լագրանժի և ուրիշների հետազոտությունները: Աշխատանքում կառուցվել են տարբեր տեսություններ, մասնավորապես, Երկրի պատկերի տեսությունը, Լուսնի տեսությունը, մոլորակների խոտորման տեսությունը, մակընթացությունների և տեղատվությունների տեսությունը, Յուպիտերի արբանյակների շարժման տեսությունը: Լապլասը ապացուցել է Արեգակնային համակարգի կայունությունը: Նա ստացել է Սատուրնի օղակի հավասարակշռության պայմանները և ապացուցել է, որ այն հոծ լինել չի կարող: Նրա անունն են կրում լեռնաշղթավորումները Լուսնի երևացող կողմի վրա: Լապլասը զարգացրել և հիմնավորել է միգամածությունից Արեգակնային համակարգի առաջացման տիեզերածնության տեսությունը, որը որպես վարկած առաջադրել էր գերմանացի փիլիսոփա Ի.Կանտը (1755):

- **Լաքս Պետեր (ծն. 1926)**

Ամերիկացի մաթեմատիկոս:

Ծնվել է Բուդապեշտում (Հունգարիա): 1944-ին ավարտել է Նյու-Յորքի համալսարանը: 1958-ից՝ Ռ.Կուրանտի անվան Մաթեմատիկական ինստիտուտի պրոֆեսոր, իսկ 1963-ից՝ Ամերիկյան էլեկտրական ընկերակցության հաշվողական և կիրառական կենտրոնի տնօրեն:

Հիմնական գիտական հետազոտությունները նվիրված են դիֆերենցիալ հավասարումների տեսությանը և կիրառական մաթեմատիկային: 1956-ին ձևակերպել է բավականաչափ ընդհանուր տեսքով թեորեմ, որը կապ է հաստատում տարբերական սխեմաների մոտարկման, կայունության և զուգամիտության միջև: Նման արդյունք է ստացել նաև խորհրդային գիտնական Ա.Ֆ.Ֆիլիպովը (1955):

- **Լեժանդր Ադրիեն Մարի (1752-1833)**

Ֆրանսիացի մաթեմատիկոս: Փարիզի ԳԱ անդամ (1783), Ֆրանսիայի ազգային ինստիտուտի անդամ (1797):

Ծնվել է Փարիզում: Ավարտել է Փարիզի Մազարինի Կոլեժը (1774): 1775-1780-ին՝ Փարիզի զինվորական դպրոցի պրոֆեսոր, 1816-ից՝ Պոլիտեխնիկական դպրոցի պրոֆեսոր: 1813-1833-ին՝ Երկայնությունների բյուրոյի անդամ:

Հիմնական հետազոտությունները նվիրված են մաթեմատիկական անալիզին, թվերի տեսությանը, վարիացիոն հաշվին, երկնային մեխանիկային: Մաթեմատիկական անալիզի բնագավառում ներմուծել է ոլորտային պարզագույն ֆունկցիաներ՝ *Լեժանդրի բազմանդամներ*: Էլիպտիկ ինտեգրալները բերել է կանոնական տեսքի, գտել է դրանց վերլուծումը շարքերի, կազմել դրանց արժեքների աղյուսակներ: Իր աշխատանքներով նպաստել է թվերի տեսության ստեղծմանը: Ձևակերպել է պարզ թվերի բաշխման օրենքը (1808), տվել է իր ժամանակի թվերի տեսության ամբողջական շարադրանքը: Վարիացիոն հաշվում ձևակերպել է էքստրեմումի գոյության հայտանիշը: Հիմնավորել և զարգացրել է գեոդեզիական չափումների տեսությունը, հայտնագործել է (1805-1806-ին, Կ.Գաուսից անկախ) *փոքրագույն քառակուսիների մեթոդը*: Աստղագետներ Ժ.Դ.Կասինի և Պ.Ֆ.Մեշենի հետ միասին գտել է Փարիզի և Գրինվիչի աստղադիտարանների երկայնությունների տարբերությունը (1787), մետրը որպես երկարության միավոր սահմանելու համար կատարել է Բարսելոնի (Իսպանիա) և Դյունկերկի (Ֆրանսիա) միջև միջօրեականի աղեղի երկարության բոլոր հաշվարկների ստուգումը:

- **Լիպշից Ռուդոլֆ Օտտո Սիգիզմունդ (1832-1903)**

Գերմանացի մաթեմատիկոս: Բեռլինի ԳԱ անդամ (1872), մի շարք ակադեմիաների և գիտական ընկերությունների անդամ:

Ծնվել է Քյոնիգսբերգում: 1853-ին ավարտել է Բեռլինի համալսարանը: Բրեսլաուի (այժմ Վրոցլավ, Լեհաստան) համալսարանի պրոֆեսոր (1862): 1864-ից Բոննի համալսարանի պրոֆեսոր, 1874-1875-ին՝ այդ համալսարանի ռեկտոր:

Հիմնական հետազոտությունները վերաբերում են դիֆերենցիալ հավասարումներին, թվերի տեսությանը, քառակուսային և երկակի ձևերի տեսությանը: Աշխատել է նաև հանրահաշվի, հիդրոդինամիկայի և վերլուծական մեխանիկայի բնագավառներում: Նրան է պատկանում դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումների գոյության պայմանների վերաբերյալ թեորեմի ձևակերպումը (*Կոշի-Լիպշիցի թեորեմ*): Ֆուրիեի շարքերի տեսության մեջ առաջարկել է

ամբողջ թվային առանցքի վրա շարքի հավասարաչափ զուգամիտության հայտանիշը (*Լիպշիցի հայտանիշ*):

- **Լոտկա Ալֆրեդ Ջեյմս (1880-1949)**

Ամերիկացի քիմիկոս, կենսաբան, դեմոգրաֆ և մաթեմատիկոս:

Ծնվել է Լեմբերգում (այժմ Լվով, Ուկրաինա): 1902-ին արտագաղթել է ԱՄՆ:

Հայտնի է որպես զոհ-գիշատիչ մաթեմատիկական մոդելի հեղինակ, որը նա առաջարկել է 1925-ին Վոլտերայից անկախ (*Լոտկա-Վոլտերայի մոդել*): Այս մոդելը հիմք էր դարձել բոլոր հետագա պոպուլյացիաների դինամիկան նկարագրող մոդելների համար: Հետագայում Լոտկան թողել է ակադեմիական գիտությունը և աշխատել է ապահովագրական ընկերակցությունում:

- **Կանտորովիչ Լեոնիդ Վիտալեվիչ (1912-1986)**

Խորհրդային մաթեմատիկոս և տնտեսագետ: ԽՍՀՄ ԳԱ ակադեմիկոս (1964, թղթակից անդամ 1958-ից): ԽՍՀՄ պետական (1949) և լենինյան (1965) մրցանակների դափնեկիր: Նոբելյան մրցանակի դափնեկիր (1975):

Ծնվել է Պետերբուրգում: Ավարտել է Լենինգրադի պետական համալսարանը (1930): 1932-1964-ին դասավանդել է Լենինգրադի համալսարանում (1934-ից՝ պրոֆեսոր): 1940-1964-ին աշխատել է ԽՍՀՄ ԳԱ Մաթեմատիկական ինստիտուտի Լենինգրադյան բաժանմունքում, 1964-1971-ին՝ ԽՍՀՄ ԳԱ սիբիրյան բաժանմունքի մաթեմատիկայի ինստիտուտում, 1971-1976-ին՝ ԽՍՀՄ Մինիստրների խորհրդի գիտության և տեխնիկայի պետական կոմիտեի ժողովրդական տնտեսության կառավարման ինստիտուտում: Կյանքի վերջին տարիներին աշխատել է ԽՍՀՄ ԳԱ համակարգային հետազոտությունների Համամիութենական ինստիտուտում:

Հիմնական հետազոտությունները վերաբերում են ֆունկցիոնալ անալիզին, բազմությունների տեսությանը, ֆունկցիաների տեսությանը, վարիացիոն հաշվին, թվային մեթոդներին, տնտեսագիտության մաթեմատիկական մեթոդներին: Ֆունկցիոնալ անալիզում ներմուծել և ուսումնասիրել է կիսակարգավորված տարածությունների դասը: Ստեղծել է էլիպտական հավասարումների համար եզրային խնդիրների լուծման նոր վարիացիոն մեթոդ: Մշակել օպերատորային հավասարումների լուծման արագագույն իջեցման մեթոդը, Նյուտոնի մեթոդի ընդհանրացումը ոչ գծային օպերատորային հավասարումների համար: 1939-1940-ին ստեղծել է սահմանափակումներով էքստրեմալ խնդիրների որոշ դասերի լուծման մեթոդներ և գծային ծրագրավորում տեսությունը: Մեծ ներդրում կատարեց տնտեսական մոդելների տեսության մեջ: Նրա հետազոտությունները նպաստել են տնտեսության օպտիմալ նախագծման և կառավարման տեսության ստեղծմանը:

- **Կոտս Ռոջեր (1682-1716)**

Անգլիացի մաթեմատիկոս: Լոնդոնի Թագավորական ընկերության անդամ (1711):

Ծնվել է Բերբեյջում: Սովորել է Լոնդոնում, այնուհետև՝ Քեմբրիջի համալսարանի Տրինիտի բոլեջում (1702): Ի.Նյուտոնի աշակերտն էր: 1706-ից՝ Քեմբրիջի համալսարանի պրոֆեսոր:

Հիմնական հետազոտությունները վերաբերում են սխալանքների տեսությանը, որը հետագայում օգտագործել է Պ.Լապլասը հավանականությունների տեսության և ֆունկցիաների

տեսության գաղափարների զարգացման ընթացքում: Զբաղվել է նաև ռացիոնալ հանրահաշվական ֆունկցիաների ինտեգրման հարցերով: Նրան են պատկանում $x'' - 1 = 0$ տեսքի հավասարման արմատների վերաբերյալ թեորեմը, տանգենսի և սեկանսի գրաֆիկները, առնչություններ եռանկյունաչափական և ցուցչային ֆունկցիաների միջև, դիֆերենցիալ երկրաչափության որոշ բանաձևեր:

- **Կռանկ Ջոն (ծն. 1916)**

Անգլիացի մաթեմատիկոս և ֆիզիկոս:

Ծնվել է Հինդլիում (Լանքաշիր): Սովորել է Մանչեստրի համալսարանում (1934-1938): Երկրորդ համաշխարհային պատերազմի տարիներին զբաղվել է հետազոտություններով բալիստիկայի բնագավառում: 1945-1957-ին աշխատել է գիտահետազոտական լաբորատորիայում: 1957-1981-ին՝ Բրյուսելի համալսարանի մաթեմատիկայի պրոֆեսոր:

Հիմնական գիտական հետազոտությունները նվիրված են մաթեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումների, մասնավորապես, ջերմահաղորդականության հավասարման թվային լուծման մեթոդներին: Մեծ ներդրում կատարեց պարաբոլական հավասարումների լուծման կայուն տարբերական մեթոդների ստեղծման մեջ: Իր գիտական գործունեությունում Ջ.Կռանկը սերտորեն համագործակցել է Ֆ.Նիկոլսոնի հետ: Նրանց կողմից առաջարկված մեթոդը *Կռանկ-Նիկոլսոնի սխեման*, պարաբոլական հավասարումների թվային լուծման առավել արդյունավետ ալգորիթմներից մեկն է:

- **Կուտա Մարտին Վիլհելմ (1867-1944)**

Գերմանացի ֆիզիկոս և մաթեմատիկոս:

Ծնվել է Վերին Սիլեզիայում (այժմ Լեհաստանի կազմում է): 1885-1890-ին սովորել է Բրեսլաու քաղաքում (այժմ Վրոցլավ, Լեհաստան): Շարունակել է ուսումը Մյունխենի Բարձրագույն տեխնիկական դպրոցում (1891-1894): Դասավանդել է Ենայում և Աախենում: 1911-1935-ին՝ Շտուտգարտի Բարձրագույն տեխնոլոգիական դպրոցի պրոֆեսոր:

Մաթեմատիկայում կատարելագործել է սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների Կոշու խնդրի թվային լուծման Կ.Ռունգեի մեթոդը (*Ռունգե-Կուտայի մեթոդ*):

- **Հերմիտ Շառլ (1822-1901)**

Ֆրանսիացի մաթեմատիկոս: Փարիզի ԳԱ անդամ (1856):

Ծնվել է Դեզեռում (Լոթարինգիա): 1845-ին ավարտել է Փարիզի Պոլիտեխնիկական դպրոցը: 1848-1869-ին՝ Պոլիտեխնիկական դպրոցի դասատուց, իսկ 1869-1876-ին՝ պրոֆեսոր: 1869-1897-ին՝ Փարիզյան գիտությունների ֆակուլտետի պրոֆեսոր:

Հիմնական գիտական աշխատանքները վերաբերում են մաթեմատիկական անալիզին, էլիպտական ֆունկցիաների տեսությանը և նրա կիրառություններին, հանրահաշվին և թվերի տեսությանը: Հետազոտել է օրթոգոնալ բազմանդամների իր անունը կրող դասը (*Հերմիտի բազմանդամներ*) և շատ փոփոխականների բազմանդամների համանման դասը: Ստացացրել է հանրահաշվական ձևերի և նրանց ինվարիանտների տեսությունը, նրա կիրառությունները թվերի տեսության մեջ: Այդ կապակցությամբ մտցրել է հատուկ երկգծային ձևեր (*Հերմիտի ձևեր*): Ապացուցել է e թվի տրանսցենդենտությունը:

- **Հիլբերտ Դավիդ (1862-1943)**

Գերմանացի մաթեմատիկոս: Բեռլինի ԳԱ թղթակից անդամ (1913), ԽՍՀՄ ԳԱ պատվավոր անդամ (1934, թղթակից անդամ 1922-ից):

Ծնվել է Վեսլաու քաղաքում (Քյոնիգսբերգի մոտ): 1884-ին ավարտել է Քյոնիգսբերգի համալսարանը: 1893-1895-ին՝ Քյոնիգսբերգի համալսարանի պրոֆեսոր: 1895-1943-ին՝ Գյոթինգենի համալսարանի պրոֆեսոր:

Հիմնական աշխատությունները վերաբերում են ինվարիանտների տեսությանը, թվերի տեսությանը, մաթեմատիկայի հիմունքներին, մաթեմատիկական տրամաբանությանը, վարիացիոն հաշվին, դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հավասարումներին, մաթեմատիկական ֆիզիկային: Ինվարիանտների տեսությունում ապացուցել է ինվարիանտների համակարգի վերջավոր բազիսի գոյության մասին հիմնական թեորեմը: Հանրահաշվական թվերի տեսությունում Հիլբերտի աշխատանքները վերափոխել են մաթեմատիկայի այդ բնագավառը ու ելակետ դարձել դրա հետագա զարգացման համար: Հիլբերտի *«Երկրաչափության հիմունքներ»* (1899) մենագրությունը մեծապես խթանեց երկրաչափության աքսիոմատիկ կառուցման հետագա աշխատանքները: Նրա անունն է կրում էվկլիդյան տարածության ընդհանրացումը անվերջ չափանի դեպքի համար (*հիլբերտյան տարածություն*): Հիլբերտի կառուցած սիմետրիկ կորիզով ինտեգրալ հավասարումների տեսությունը դարձավ արդի ֆունկցիոնալ անալիզի և հատկապես գծային օպերատորների սպեկտրալ տեսության հիմքերից մեկը: 1910-1922-ին նա հիմնականում զբաղվել է մաթեմատիկական ֆիզիկայի մեթոդների հետագա համակարգելով: Ռ. Կուրանտի հետ համահեղինակությամբ հրապարակել է *«Մաթեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումներ»* (1924) մենագրությունը: Կատարել է կարևոր հետազոտություններ մաթեմատիկայի տրամաբանական հիմունքների քննարկմանում: Ի. Բեռնայսի հետ համատեղ գրել է *«Մաթեմատիկայի հիմունքներ»* (1934) աշխատանքը: Հիլբերտի հետազոտությունները մեծապես նպաստել են մաթեմատիկայի բազմաբիվ բաժինների զարգացմանը: Գյոթինգենում նա հիմնել է խոշոր մաթեմատիկական կենտրոն: Մի քանի տարի "Mathematische Annalen" ամսագրի խմբագիրն էր: Երկրորդ Միջազգային մաթեմատիկական կոնգրեսում, որը կայացել է Փարիզում 1900-ին, իր զեկուցման մեջ ձևակերպել է 22 կարևորագույն խնդիրներ (*Հիլբերտի պրոբլեմներ*), որոնք կանխորոշեցին 20-րդ դարի մաթեմատիկայի զարգացման հիմնական ուղղությունները: Հիլբերտի ստեղծագործությանը հատուկ է հավատը մարդկային մտքի անսահմանափակության ու մաթեմատիկայի և բնագիտության միասնականության հանդեպ:

- **Հոյն Կարլ Լյուդվիգ Վիլհելմ (1859-1929)**

Գերմանացի մեխանիկ և մաթեմատիկոս:

Ծնվել է Վիսբադենում: Սովորել է Գյոթինգենի (1878-1880), Հալլեի (1880-1881) և Բեռլինի (1881-1882) համալսարաններում: 1886-1902-ին աշխատում էր Մյունխենի համալսարանում: 1902-1921-ին՝ Կարլսրուեի Պոլիտեխնիկական ինստիտուտի պրոֆեսոր, 1921-ից՝ Բեռլին-Շառլոտենբուրգի Բարձրագույն տեխնիկական դպրոցի ճարտարագետ-դոկտոր:

Հիմնական հետազոտությունները վերաբերում են գծային դիֆերենցիալ հավասարումների տեսությանը, ֆունկցիաների տեսությանը, տեսական կինեմատիկային: Մի շարք աշխատանքներ նվիրված են Լամեի ֆունկցիաների տեսությանը և վեկտորական հաշվին:

• Մինկովսկի Հերման (1864-1909)

Գերմանացի մաթեմատիկոս և ֆիզիկոս:

Ծնվել է Ալեքսոտներում (Կաունասի մոտ, Լիտվա), բարգավաճ առևտրականի ընտանիքում: Ավարտելով գիմնազիան, սովորել է Բեռլինի և Քյոնիգսբերգի համալսարաններում: 1883-ին՝ թիվը հինգ քառակուսիների գումարի տեսքով ներկայացնելու խնդրի լուծման համար ստացել էր Փարիզի ԳԱ մրցանակ, կիսելով այն անգլիացի հայտնի մաթեմատիկոս Գ.Սմիտի հետ: 1893-ին նշանակվել է Բոնների համալսարանի պրոֆեսոր: 1894-1896-ին՝ Քյոնիգսբերգի համալսարանի, իսկ 1896-1902-ին՝ Ցյուրիխի տեխնոլոգիական ինստիտուտի պրոֆեսոր էր: 1902-ից՝ Գյոթինգենի համալսարանի պրոֆեսոր:

Հիմնական աշխատությունները նվիրված են թվերի տեսությանը, երկրաչափությանը, հիդրոդինամիկային և մաթեմատիկական ֆիզիկային: Մշակել և զարգացրել է թվերի երկրաչափական տեսությունը: Հիմք է դրել ուռուցիկ մարմինների երկրաչափությանը. Նրա անունն է կրում ամենահաճախ կիրառվող անհավասարություններից մեկը (*Մինկովսկու անհավասարությունը*): Համաշխարհային ճանաչում է ստացել նրա *«Տարածություն և ժամանակ»* աշխատանքը (1909), որտեղ տրված է հարաբերականության հատուկ տեսության մաթեմատիկական հիմնավորումը: Մասնավորապես, մշակվել է հիպերբոլական մետրիկայով քառաչափ տարածության տեսությունը (*Մինկովսկու տարածությունը*), ինչը մոտեցրել է այդ տեսությունը Լոբաչևսկու երկրաչափության հետ: Ձևակերպել էր ֆիզիկական օրենքների Լորենցի ձևափոխությունների նկատմամբ ինվարիանտության մասին կանխադրույթը: Մինկովսկու անունով են կոչել խառնարան Լուսնի հակառակ կողմում:

• Նեյման Ջոն (Յանոշ) ֆոն (1903-1957)

Ամերիկացի մաթեմատիկոս, ազգությամբ հունգար: ԱՄՆ-ի ազգային ԳԱ անդամ (1937): Ամերիկյան մաթեմատիկական ընկերության պրեզիդենտ (1951-1952): Ա.Էյնշտեյնի անվ. (1956) և Է.Ֆերմիի անվ. (1957) մրցանակների դափնեկիր:

Ծնվել է Բուդապեշտում (Հունգարիա): 1921-1923-ին սովորել է Բեռլինի համալսարանում, 1923-1925-ին՝ Ցյուրիխի բարձրագույն պոլիտեխնիկական դպրոցում (Շվեյցարիա): 1926-ին ավարտել է Բուդապեշտի համալսարանը, ստանալով դոկտորի կոչում: Դասավանդել է Բեռլինի (1926-1929), Համբուրգի (1929-1930) և Պրինստոնի (ԱՄՆ) (1930-1933) համալսարաններում: 1933-ից՝ Պրինստոնի հետազոտական հետազոտությունների ինստիտուտի պրոֆեսոր, 1940-ից՝ բանակային և ծովային տարբեր հաստատությունների խորհրդական: Մասնակցել է առաջին ատոմային ռումբի ստեղծման աշխատանքներին: 1955-ից եղել է ԱՄՆ-ի ատոմային էներգիայի հանձնաժողովի անդամ: Մեծ ավանդ ունի առաջին ԷՀՄ-երի ստեղծման և օգտագործման մեթոդների մշակման գործում: 1945-1955-ին՝ ԷՀՄ-երի նախագծման բյուրոյի անդամ:

Հիմնական աշխատանքներ վերաբերում են ֆունկցիոնալ անալիզին, տոպոլոգիական խմբերի տեսությանը, հավանականությունների տեսությանը և մաթեմատիկական վիճակագրությանը, հաշվողական մաթեմատիկային և տնտեսագիտության մաթեմատիկական մեթոդներին: Կիրառել է ֆունկցիոնալ անալիզի մեթոդները ընդհանուր և քվանտային մեխանիկայի խնդիրներում: Ուսումնասիրություններ ունի մաթեմատիկական տրամաբանության, բազմությունների տեսության, անընդհատ խմբերի տեսության և պարբերական ֆունկցիաների տեսության բնագավառում: Տարբերական սխեմաների տեսության մեջ ներմուծել է

կայունության հասկացողությունը: Վերջին տարիներին զբաղվել է հիմնականում խաղերի տեսության և ավտոմատների տեսության հարցերով:

- **Նիկոլսոն Ֆիլիս (1917-1968)**

Անգլիացի ֆիզիկոս և մաթեմատիկոս:

Ծնվել է Մաքսֆիլդում (օրիորդական ազգանունը՝ Լոկետ): 1934-1939-ին սովորել է Մանչեստրի համալսարանում, որտեղ 1946-ին ստացել է ֆիզիկայից փիլիսոփայության դոկտորի գիտական աստիճանը: 1940-1945-ին Մանչեստրի համալսարանի գիտահետազոտական խմբի կազմում աշխատել է ռազմական խնդիրների վրա, զբաղվելով մագնետրոնների տեսությունով: 1945-1949-ին կատարել է գիտական հետազոտություններ Քեմբրիջում:

Ֆ.Նիկոլսոնը քաջ հայտնի է իր համատեղ գիտական աշխատանքներով Ջ.Կռանկի հետ: Նրանց կողմից առաջարկված մեթոդը՝ *Կռանկ-Նիկոլսոնի սխեման*, պարաբոլական հավասարումների թվային լուծման առավել արդյունավետ ալգորիթմներից մեկն է:

- **Շմիդտ Էրխարդ (1876-1959)**

Գերմանացի մաթեմատիկոս:

Ծնվել է Դերպտում (այժմ Տարտու, Էստոնիա): Սովորել է Բեռլինի և Գյոթինգենի համալսարաններում (1901-1905): Գ.Շվարցի և Դ.Հիլբերտի աշակերտն էր: 1906-1916-ին դասավանդել է Ցյուրիխի, Էրլանգենի և Բրեսլաուի համալսարաններում: 1917-ից Բեռլինի համալսարանի պրոֆեսոր: 1946-1958-ին՝ ԳԴՀ-ի ԳԱ Մաթեմատիկայի ինստիտուտի առաջին տնօրեն:

Հիմնական գիտական աշխատությունները վերաբերում են ֆունկցիաների տեսությանը, ինտեգրալ հավասարումներին, ֆունկցիոնալ անալիզին, տոպոլոգիային: Շարունակել և զարգացրել է Դ.Հիլբերտի հետազոտությունները ինտեգրալ հավասարումների բնագավառում: Լրիվ համանմանությամբ Էվկլիդեսի երկրաչափության հետ հետազոտել է հիլբերտյան տարածությունը: Հայտնի են *Հիլբերտ-Շմիդտի օպերատորը* և *Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացման ալգորիթմը*:

- **Պարսևալ Մարկ Անտուան (1755-1836)**

Ֆրանսիացի մաթեմատիկոս:

Ծնվել է Ռոզիեր-օ-Սալինում հարուստ ազնվական ընտանիքում: Իր քաղաքական համոզմունքներով միապետական էր: 1792-1793-ին, որպես Լյուդովիկոս XVI-ի կողմնակից, գտնվում էր բանտում: Նապոլեոն Բոնապարտի իշխանության հասնելուց հետո (1804), իր քաղաքական բանաստեղծությունների համար հետապնդումների ենթարկվեց և ստիպված էր հեռանալ Ֆրանսիայից: Հետագայում վերադարձել է Փարիզ: Չնայած որ հինգ անգամ առաջադրվել է Ֆրանսիական ԳԱ անդամ (1796,1799,1802,1813 և 1828), ոչ մի անգամ չի ընտրվել:

Գիտական աշխատությունները վերաբերում են դիֆերենցիալ հավասարումներին և իրական փոփոխականի ֆունկցիաների տեսությանը, որտեղ հայտնի է Ֆուրիեի շարքերի կոնտեքստում դիտարկվող *Պարսևալի հավասարությունը*:

- **Պիկար Շառլ Էմիլ (1856-1941)**

Ֆրանսիացի մաթեմատիկոս: Փարիզի ԳԱ անդամ (1889), նրա պրեզիդենտը 1910-ին: Լոնդոնի Թագավորական ընկերության անդամ (1909), Ֆրանսիական ԳԱ անդամ (1924): Պետերբուրգի ԳԱ թղթակից անդամ (1895), ԽՍՀՄ ԳԱ պատվավոր անդամ (1925):

Ծնվել է Փարիզում: Ավարտել է Բարձրագույն նորմալ դպրոցը (1877): 1878-1879-ին դասավանդել է Փարիզի, իսկ 1879-1881-ին՝ Թուլուզի համալսարաններում: 1881-1941-ին դասավանդել է Սորբոնում (1886-ից՝ պրոֆեսոր), 1893-ից՝ արվեստների և արհեստների կենտրոնական դպրոցում: 1917-ից՝ Փարիզի ԳԱ մաթեմատիկական գիտությունների բաժնի մշտական քարտուղար:

Հիմնական աշխատանքները վերաբերում են ֆունկցիաների տեսությանը, դիֆերենցիալ հավասարումներին, անվերջ խմբերի տեսությանը: Կառուցել է գծային դիֆերենցիալ հավասարումների տեսությունը համանման հանրահաշվական հավասարումների Գալուայի տեսությանը: Էական ներդրում է կատարել հանրահաշվական ֆունկցիաների և նրանց ինտեգրալների հետազոտության մեջ: Կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաների տեսության մեջ ստացել է մի կարևոր արդյունք, որը հայտնի է *Պիկարի թեորեմ* անունով: Զարգացրել է հաջորդական մոտարկումների մեթոդը սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման համար (*Պիկարի մեթոդ*): Զբաղվել է նաև պատմությամբ և մաթեմատիկայի փիլիսոփայությամբ:

- **Պուասոն Սիմոն Դենի (1781-1840)**

Ֆրանսիացի մաթեմատիկոս, մեխանիկ և ֆիզիկոս: Փարիզի ԳԱ անդամ (1812): Պետերբուրգի ԳԱ պատվավոր անդամ (1826):

Ծնվել է Պիտիվիե քաղաքում: Ավարտել է Փարիզի Պոլիտեխնիկական դպրոցը (1798), 1802-ից դասավանդել այդ դպրոցում (1806-ից՝ պրոֆեսոր): 1809-ից՝ Փարիզի համալսարանի պրոֆեսոր: 1812 ից՝ Ֆրանսիայի քոլեջներում մաթեմատիկայի դասավանդման դիտորդ:

Հիմնական աշխատանքները վերաբերում են մաթեմատիկական անալիզին, մաթեմատիկական ֆիզիկային, տեսական և երկնային մեխանիկային, հավանականությունների տեսությանը, վարիացիոն հաշվին: Հիդրոմեխանիկայում ընհանրացրել է Նավիե-Ստոքսի հավասարումը սեղմելի մածուցիկ հեղուկի շարժման համար՝ ջերմափոխանցման հաշվառումով: Լուծել է առաձգականության տեսության մի շարք խնդիրներ, ընդհանրացրել է այդ տեսության հավասարումները անիզոտրոպ մարմինների համար: Պոտենցիալի տեսության մեջ ներմուծել է *Պուասոնի հավասարումը* և կիրառել այն գրավիտացիայի և էլեկտրաստատիկայի խնդիրների լուծման համար: Երկնային մեխանիկայի բնագավառում ուսումնասիրել է Արեգակնային համակարգի մոլորակների շարժման կայունությունը, զբաղվել մոլորակային ուղեծրերի խոտորումների և ծանրության կենտրոնի շուրջը Երկրի շարժման խնդիրների լուծմամբ: Հավանականությունների տեսության մեջ ապացուցել է մեծ թվերի օրենքի մասնավոր դեպքը և սահմանային թեորեմներից մեկը: Ձևակերպել է պատահական մեծությունների բաշխման օրենքը (*Պուասոնի օրենք*):

- **Ռիչարդսոն Լյուիս Ֆրայ (1881-1953)**

Անգլիացի գեոֆիզիկոս և մաթեմատիկոս:

Ծնվել է Նյուքասլում՝ քվակերների ընտանիքում: 1903-ին հաջողությամբ ավարտել է Քեմբրիջի թագավորական քոլեջը: Աշխատել է բազմաթիվ հիմնարկություններում Ֆիզիկայի ազգային լաբորատորիայում (1903-1904, 1907-1909), Տորֆի ազգային ընկերակցությունում (1906-1907), Օդերևութաբանական ծառայությունում (1913-1916): Առաջին համաշխարհային պատերազմի տարիներին, իր կրոնական համոզմունքներով լինելով պացիֆիստ, հրաժարվել է

ծառայությունից գործող բանակում և աշխատել է դաշտային հոսպիտալում (1916-1919): 1920-1929-ին ղեկավարել է Վեստմինստերի մանկավարժական քոլեջի ֆիզիկայի դեպարտամենտը: 1929-1940-ին՝ Պեյսլի տեխնոլոգիական քոլեջի և Շոտլանդիայի արվեստի դպրոցի ռեկտոր: 1940-ին պաշտոնաթող է եղել, իրեն նվիրելով հետազոտական աշխատանքին:

Մաթեմատիկայում հիմնական աշխատությունները վերաբերում են մաթեմատիկական ֆիզիկային և հաշվողական մաթեմատիկային: Կիրառել է վերջավոր տարբերությունների մեթոդը տորֆում հեղուկի հոսանքը նկարագրող դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման համար: Այդ մեթոդը հետագա զարգացում ստացավ *մթնոլորտի դինամիկային* նվիրված նրա աշխատանքներում: Նրա հետազոտությունների արդյունքները ընկած են եղանակի նախագուշակման ժամանակակից մաթեմատիկական մեթոդների հիմքում: Մշակել է հաշվողական մաթեմատիկայում լայնորեն օգտագործվող մոտարկումների ճշտությունը լավացնող մեթոդ (*էքստրապոլյացիա ըստ Ռիչարդսոնի*): 1919-ից սկսած մշակել է համակված հակապատերազմական գաղափարախոսությամբ պատերազմների իր մաթեմատիկական տեսությունը:

- **Ռոդրիգ (Ռոդրիգես) Բենջամեն Օլինդե (1794-1851)**

Ֆրանսիացի մաթեմատիկոս և տնտեսագետ:

Ծնվել է Բորդոյում: Ավարտել է Փարիզի Բարձրագույն նորմալ դպրոցը: Աշխատել է Փարիզի Պոլիտեխնիկական դպրոցում որպես դասատուից, այնուհետև՝ վարկային բանկի տնօրեն:

Հիմնական աշխատանքները վերաբերում են մեխանիկային, երկրաչափությանը և թվերի տեսությանը: Մեխանիկայի բնագավառում ուսումնասիրում էր *փոքրագույն գործողության սկզբունքը*, որը զուգակցում էր *Լագրանժի բազմապատկիչների մեթոդի* հետ շարժման հավասարումները ստանալու համար: Մակերևույթների տեսության մեջ ստացել է նոր արտահայտություն Լեժանդրի բազմանդամների համար (*Ռոդրիգի բանաձև*):

- **Ռունգե Կարլ Դավիդ (1856–1927)**

Գերմանացի մաթեմատիկոս և ֆիզիկոս:

Ծնվել է Բրեմենում: Սովորել է Մյունխենի (1876–1877) և Բեռլինի (1878–1880) համալսարաններում: 1886–1904-ին՝ Հաննովերի Բարձրագույն տեխնիկական դպրոցի, իսկ 1904–1925-ին Գյոթինգենի համալսարանի պրոֆեսոր: Կիրառական մաթեմատիկայի առաջին պրոֆեսորն էր Գերմանիայում:

Հետազոտությունների հիմնական ուղղությունները եղել են կիրառական մաթեմատիկան և սպեկտրոսկոպիան: Դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման թվային մեթոդների հեղինակն է: Լայնորեն հայտնի է *Ռունգե-Կուտայի մեթոդը*: Առաջարկել է դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման երկրաչափական մեթոդ: Զբաղվել է նաև անալիտիկ ֆունկցիաների բազմանդամային մոտարկումներով:

- **Սիմպսոն Թոմաս (1710-1761)**

Անգլիացի մաթեմատիկոս: Լոնդոնի Թագավորական ընկերության անդամ (1746):

Ծնվել է Մարկետ-Վոստորթում: Մաթեմատիկան ուսումնասիրել է ինքնուրույն: Վարում էր մաթեմատիկայի մասնավոր դասեր, միաժամանակ զբաղվում էր մետաքսյա գործվածքների արտադրությամբ: 1743-ից՝ Վուլվիչի ռազմական ակադեմիայի պրոֆեսոր:

Աշխատանքները վերաբերում են մաթեմատիկական անալիզին: 1737-ին հրապարակել է *«Ֆլյուքսիաների մասին նոր տրակտատ»* աշխատությունը, որտեղ կիրառել է մաթեմատիկական անալիզի մեթոդները մեխանիկայի խնդիրների լուծման համար: Արտածել է մոտավոր ինտեգրման բանաձևը (*Սիմպսոնի բանաձև*): Սխալանքների տեսության հիմնադիրներից է: Բացահայտել է գնդային եռանկյունաչափության մի շարք բանաձևեր: Զբաղվել է նաև շարքերի տեսությամբ:

- **Վոլտերա Վիտո (1860-1940)**

Իտալացի մաթեմատիկոս: Հռոմի դեի Լինչեի ազգային ակադեմիայի անդամ (1899), նրա պրեզիդենտը (1921-1926): Պետերբուրգի ԳԱ արտասահմանյան թղթակից անդամ (1908), ԽՍՀՄ ԳԱ պատվավոր անդամ (1926):

Ծնվել է Անկոնայում, աղքատ ընտանիքում: Ավարտել է Պիզայի համալսարանը (1880): 1883-1892-ին՝ Պիզայի, 1893-1899-ին՝ Թուրինի, 1900-1931-ին՝ Հռոմի համալսարանների պրոֆեսոր: Առաջին համաշխարհային պատերազմի տարիներին ճարտարագիտական զորքերի սպա էր: Հրաժարվելով Իտալիայի ֆաշիստական կառավարության հետ համագործակցությունից, 1931-ին ստիպված էր թողնել Հռոմի համալսարանը: Հաջորդող տարիները ապրել է հիմնականում արտասահմանում՝ Ֆրանսիայում, Իսպանիայում և այլ երկրներում:

Հիմնական աշխատանքները վերաբերում են մաթեմատիկական անալիզին, ֆունկցիոնալ անալիզին և մաթեմատիկական ֆիզիկային: Մշակել է մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների ինտեգրման մեթոդներ: Զարգացրել է ինտեգրալ հավասարումների տեսությունը (*Վոլտերայի հավասարումները*): 1900-ին Հռոմի համալսարանում կատարած զեկույցում նշել է կենսաբանությունում և սոցիալական հետազոտություններում մաթեմատիկական մեթոդների կիրառման անհրաժեշտությունը: Մշակել է գոյության համար պայքարի և ժողովրդագրական դինամիկայի մաթեմատիկական տեսությունը (*Լոտկա-Վոլտերայի մոդելը*): Ստացել է կարևոր արդյունքներ կրկնակի բեկումով միջավայրերի օպտիկայում և պինդ մարմինների շարժման տեսության մեջ:

- **Ֆուրիե ժան Բապտիստ ժոզեֆ (1768-1830)**

Ֆրանսիացի մաթեմատիկոս: Փարիզի ԳԱ անդամ (1817, 1822-ից՝ մաթեմատիկայի բաժանմունքի մշտական քարտուղար): Ֆրանսիական ԳԱ անդամ (1826): Պետերբուրգի ԳԱ պատվավոր անդամ (1829), Լոնդոնի թագավորական ընկերության արտասահմանյան անդամ:

Ծնվել է Օսերում, աղքատ դերձակի ընտանիքում: Ուրբացել է ութամյա հասակում: Ավարտել է Օսերի ռազմական դպրոցը, որտեղ և անցել է դասախոսական աշխատանքի (1784-1793-ին դասավանդել է հռետորություն, պատմություն և փիլիսոփայություն): 1795-ին սովորելու է ուղարկվել Փարիզի Պոլիտեխնիկական դպրոցը, որտեղ շուտով դարձել է դասախոս, այնուհետև պրոֆեսոր: Մասնակցել է Նապոլեոնի Եգիպտական արշավանքին (1798-1801): 1798-ից՝ Եգիպտական ինստիտուտի մշտական քարտուղար: 1799-ին գլխավորում էր Վերին Նեղոսի հովտում գիտական արշավներից մեկը: Ղեկավարել է իրավաբանական վարչությունը, կատարել է ֆրանսիական իշխանությունների դիվանագիտական հանձնարարությունները: 1801-ից աշխատել է Ֆրանսիայի ժողովրդական լուսավորության գերատեսչությունում: 1802-ից՝ Իզեր դեպարտամենտի պրեֆեկտ: 1827-ից՝ Պոլիտեխնիկական դպրոցի կատարելագործման խորհրդի նախագահ: Ֆուրիեի ընտրությունը Փարիզի ԳԱ մաթեմատիկայի

բաժանմունքում (1816) թագավորի կողմից չի հաստատվել: Երկրորդ անգամ նա ընտրվել է ընդհանուր ֆիզիկայի բաժանմունքում (1817):

Հիմնական աշխատանքները վերաբերում են մաթեմատիկական ֆիզիկային, մասնավորապես պինդ մարմնում ջերմության տարածման տեսությանը, որտեղ նրա ստացած արդյունքները մեծ դեր են խաղացել մաթեմատիկայի հետագա զարգացման գործում: Ֆունկցիաները եռանկյունաչափական շարքերով ներկայացնելու տեսության հիմնադիրներից է (*Ֆուրիեի շարքեր*): Թեև ցանկացած ֆունկցիա եռանկյունաչափական շարքի վերածման հնարավորությունն ապացուցելու նրա փորձերն անհաջող էին, այնուամենայնիվ այդ աշխատանքները դարձան այդ խնդրի հետագա բազմաթիվ հետազոտությունների հիմնաքարը, որոնցով էլ նշանակալից չափով պայմանավորվեց բազմությունների տեսության և իրական փոփոխականի ֆունկցիաների տեսության սկզբնավորումը: Վաղ աշխատանքներում արտածել է որոշ սահմանափակումների դեպքում հանրահաշվական հավասարումների իրական արմատների քանակի մասին թեորեմը: Հրատարակել է մի շարք աշխատանքներ հավանականության տեսությունից և մաթեմատիկական վիճակագրությունից: Մեծ ներդրում է կատարել եգիպտաբանության մեջ:

Գրականություն

[1] **Бахвалов Н.С.** Численные методы. - М., Наука, 1975.

[2] **Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.** Численные методы. - М., БИНОМ: Лаборатория Знаний, 2004.

[3] **Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В.** Численные методы в задачах и упражнениях. - М., Высшая школа, 2000.

[4] **Березин И.С., Жидков Н.П.** Методы вычислений, т.1,2.- М., Физматгиз, 1962.

[5] **Боголюбов А.Н.** Математики, механики (биографический справочник). - Киев, Наукова думка, 1983.

[6] **Вержбицкий В.М.** Численные методы: математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения. - М., Высшая школа, 2001.

[7] **Вержбицкий В.М.** Основы численных методов. - М., Высшая школа, 2002.

[8] **Волков Е.А.** Численные методы. - М., Наука, 1982.

[9] **Вулих Б.З.** Введение в функциональный анализ. - М., Наука, 1967.

[10] **Гавурин М.К.** Лекции по методам вычислений. - М., Наука, 1971.

[11] **Годунов С.К., Рябенький В.С.** Разностные схемы. - М., Наука, 1977.

[12] **Демидович Б.П., Марон И.А.** Основы вычислительной математики. - М., Наука, 1970.

[13] **Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З.** Численные методы. - М., Наука, 1967.

[14] **Дзядык В.К.** Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. - М., Наука, 1977.

[15] **Дробышевич В.И., Дымников В.П., Ривин Г.С.** Задачи по вычислительной математике. - М., Наука, 1980.

[16] **Ильин В.П.** Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. - М., Наука, 1995.

[17] **Калиткин Н.Н.** Численные методы. - М., Наука, 1978.

[18] **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. - М., Наука, 1977.

[19] **Коллатц Л.** Функциональный анализ и вычислительная математика. - М., ИЛ, 1971.

[20] **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. - М., Наука, 1989.

[21] **Крылов В.И.** Приближенное вычисление интегралов. - М., Физматгиз, 1959.

[22] **Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И.** Вычислительные методы, т.1,2. - М., Наука, 1976,1977.

[23] **Курош А.Г.** Курс высшей алгебры. - М., Наука, 1971.

[24] **Малаховский В.С.** Избранные главы истории математики. - Калининград, ФГУИПП "Янтарный сказ", 2002.

[25] **Марчук Г.И.** Методы вычислительной математики. - М., Наука, 1989.

[26] **Матвеев Н.М.** Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. - М., Высшая школа, 1963.

[27] **Мысовских И.М.** Лекции по методам вычислений. - М., Физматгиз, 1962.

[28] **Мэтьюз Дж.Г., Финк К.Д.** Численные методы: Использование MATLAB. - М., Издательский дом "Вильямс", 2001.

[29] **Наймарк М.А.** Линейные дифференциальные операторы. - М., Наука, 1969.

[30] **Натансон И.П.** Теория функций вещественной переменной. - М., Наука, 1974.

[31] **Ортега Дж., Пул У.** Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. - М., Наука, 1986.

[32] **Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А.** Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. - М., Наука, 1984.

[33] **Петровский И.Г.** Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - М., Наука, 1964.

[34] **Положий Г.Н., Пахарева Н.А. и др.** Математический практикум. - М., Физматгиз, 1960.

[35] **Райс Дж.** Матричные вычисления и математическое обеспечение. - М., Мир, 1984.

[36] **Самарский А.А.** Теория разностных схем. - М., Наука, 1977.

[37] **Самарский А.А.** Введение в численные методы. - М., Наука, 1987.

[38] **Самарский А.А., Гулин А.В.** Численные методы. - М., Наука, 1986.

[39] **Самарский А.А., Николаев Е.С.** Методы решения сеточных уравнений. - М., Наука, 1978.

[40] **Степанов В.В.** Курс дифференциальных уравнений. - М., Физматгиз, 1959.

[41] **Стройк Д.Я.** Краткий очерк истории математики. - М., Наука, 1984.

[42] **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** Уравнения математичесой физики. - М., Наука, 1966.

[43] **Турчак Л.И.** Основы численных методов. - М., Наука, 1987.

[44] **Тыртышников Е.Е.** Краткий курс численного анализа. - М., ВИНИТИ, 1994.

[45] **Фихтенгольц Г.М.** Основы математического анализа. т.1,2. - М., Наука, 1968.

[46] **Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.** Машинные методы математических вычислений. - М., Мир, 1980.

[47] **Хейгеман Л., Янг Д.** Прикладные итерационные методы. - М., Мир, 1986.

[48] **Хемминг Р.В.** Численные методы. - М., Наука, 1972.

[49] **Բոնդարենկո Վ.Ս., Դաղայան Յու.Գ., Հակոբյան Յու.Ռ.** Հաշվման մեթոդներ, մաս 1 և 2: - Երևան, ԵՊՀ հրատ., 1982 և 1984.

[50] **Ղազարյան Հ.Գ., Հովհաննիսյան Ա.Հ., Հարությունյան Տ.Ն., Կարապետյան Գ.Ա.** Սովորական դիֆերենցիալ հավասարումներ: - Երևան, «Զանգակ - 97», 2002.

[51] **Dahlquist G. and Bjorck A.** Numerical Methods. - Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1974.

[52] **Isaacson E. and Keller H.B.** Analysis of Numerical Methods. - Dover Publications, 1994.

[53] **Kincaid D. and Cheney W.** Numerical Analysis. - Brooks/Cole, Pacific Grove, CA, 1991.

[54] **Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T. and Flannery B.P.** Numerical Recipes in C. - Cambridge Univ. Press, 1992.

Յուրի Ռուբենի Հակոբյան
Թվային մեթոդներ
մաս 2
դասագիրք
համալսարանների համար

Հանձնված է տպագրության 15.03.2007
Չափսը 60x84, 1/16: Ծավալը 15.5 տպ. մամուլ:
Թուղթը օֆսեթ: Տպաքանակ 300

Տպագրվել է «ՎՄՎ-ՊՐԻՆՏ» ՍՊԸ հրատարակչության տպարանում
Հասցեն՝ Ազատության 24, հեռ.՝ 28 54 28
E-mail: vmv_print@yahoo.com