УДК 517
ББК 22.16
Б90

Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. **Сборник задач по математической физике**. — 4-е изд., испр. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 688 с. — ISBN 5-9221-0311-3.

Сборник содержит задачи на вывод уравнений и граничных условий. Большое внимание уделяется различным методам решения краевых задач математической физики. Наряду с ответами к задачам приводятся указания, а для многих задач — решения, иллюстрирующие применение основных методов.

Третье издание — 1980 г.

Для студентов университетов.

Табл. 8. Ил. 59. Библиогр. 50 назв.

Учебное издание

БУДАК Борис Михайлович
САМАРСКИЙ Александр Андреевич
ТИХОНОВ Андрей Николаевич

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Редактор *Е.Ю. Ходан*
Корректор *Т.С. Вайсберг*
Оригинал-макет *Е.А. Королевой*
Оформление переплета *А.Ю. Алехиной*

ЛР №071930 от 06.07.99. Подписано в печать 16.12.02. Формат 60×90/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 43. Уч.-изд. л. 46,83. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997 Москва, Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru
http://www.fml.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ФГУП «Ивановская областная типография».
153008, г. Иваново, ул. Типографская, 6.
E-mail: 091-018adminet.ivanovo.ru

ISBN 5-9221-0311-3

© ФИЗМАТЛИТ, 2003, 2004

ОГЛАВЛЕНИЕ [1)]

Предисловие к первому изданию 7
Предисловие к третьему изданию 8

Глава I. **Классификация и приведение к каноническому виду уравнений в частных производных второго порядка** 9, *132*

§ 1. Уравнение для функции двух независимых переменных $a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f(x, y)$ ... 9, *132*
1. Уравнение с переменными коэффициентами (9, *132*). 2. Уравнение с постоянными коэффициентами (10, *137*).

§ 2. Уравнение с постоянными коэффициентами для функции n независимых переменных $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}u_{x_i}x_k + \sum_{i=1}^{n} b_iu_{x_i} + cu = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 10, *137*

Глава II. **Уравнения гиперболического типа** 11, *140*

§ 1. Физические задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа; постановка краевых задач 11, *140*
1. Свободные колебания в среде без сопротивления; уравнения с постоянными коэффициентами (12, *140*). 2. Вынужденные колебания и колебания в среде с сопротивлением; уравнения с постоянными коэффициентами (14, *153*). 3. Задачи о колебаниях, приводящие к уравнениям с непрерывными переменными коэффициентами (16, *156*). 4. Задачи, приводящие к уравнениям с разрывными коэффициентами, и родственные им (кусочно однородные среды, сосредоточенные факторы) (17, *158*). 5. Подобие краевых задач (20, *169*).

§ 2. Метод распространяющихся волн (метод Даламбера) ... 21, *175*
1. Задачи для бесконечной струны (23, *175*). 2. Задачи для полупрямой (23, *182*). 3. Задачи для бесконечной прямой, составленной из двух однородных полупрямых. Сосредоточенные факторы (27, *196*). 4. Задачи для конечного отрезка (28, *199*).

§ 3. Метод разделения переменных 29, *211*
1. Свободные колебания в среде без сопротивления (30, *211*). 2. Свободные колебания в среде с сопротивлением (32, *222*). 3. Вынужденные колебания под действием

[1)] Номера страниц, относящиеся к ответам и решениям, даны курсивом.

распределенных и сосредоточенных сил в среде без сопротивления и в среде с сопротивлением (32, *226*). 4. Колебания при неоднородности сред и других условиях, приводящих к уравнениям с переменными коэффициентами; учет сосредоточенных сил и масс (36, *249*).

§ 4. Метод интегральных представлений 37, *255*
1. Метод интеграла Фурье (37, *255*). 1*. Переход к конечному интервалу методом отражений (41, *276*). 2. Метод Римана (42, *268*).

Глава III. **Уравнения параболического типа** 43, *273*

§ 1. Физические задачи, приводящие к уравнениям параболического типа; постановка краевых задач 43, *273*
1. Однородные среды; уравнения с постоянными коэффициентами (44, *274*). 2. Неоднородные среды, сосредоточенные факторы; уравнения с переменными коэффициентами и условия сопряжения (45, *279*). 3. Подобие краевых задач (46, *281*).

§ 2. Метод разделения переменных 47, *285*
1. Однородные изотропные среды. Уравнения с постоянными коэффициентами (47, *285*). а) Задачи теплопроводности с постоянными граничными условиями и свободными членами (47, *285*). б) Задачи теплопроводности с переменными граничными условиями и свободными членами, зависящими от x и t (49, *295*). в) Задачи диффузии (50, *299*). г) Задачи электродинамики (55, *301*). 2. Неоднородные среды и сосредоточенные факторы. Уравнения с переменными коэффициентами и условия сопряжения (51, *302*).

§ 3. Метод интегральных представлений и функции источников 52, *304*
1. Однородные изотропные среды. Применение интегрального преобразования Фурье к задачам на прямой и полупрямой (52, *304*). 2. Однородные изотропные среды. Построение функций влияния сосредоточенных источников (54, *308*). а) Неограниченная прямая (54, *308*). б) Полупрямая (55, *311*). в) Конечный отрезок (59, *319*). 3. Неоднородные среды и сосредоточенные факторы; уравнения с кусочно постоянными коэффициентами и условия сопряжения (60, *328*).

Глава IV. **Уравнения эллиптического типа** 62, *332*

§ 1. Физические задачи, приводящие к уравнениям эллиптического типа, и постановка краевых задач 62, *332*
1. Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в однородной среде (62, *332*). 2. Краевые задачи для уравнения Лапласа в неоднородных средах (63, *337*).

§ 2. Простейшие задачи для уравнений Лапласа и Пуассона .. 64, *341*
1. Краевые задачи для уравнения Лапласа (64, *342*). 2. Краевые задачи для уравнения Пуассона (66, *347*).

§ 3. Функция источника 67, *348*
1. Функция источника для областей с плоскими границами (67, *350*). 2. Функция источника для областей со сферическими (круговыми) и плоскими границами (68, *360*). 3. Функция источника в неоднородных средах (69, *368*).

§ 4. Метод разделения переменных 70, *373*
1. Краевые задачи для круга, кольца и сектора (70, *373*). 2. Краевые задачи для полосы, прямоугольника, плоского слоя и параллелепипеда (73, *390*). 3. Задачи, требующие применения цилиндрических функций (74, *401*). 4. Задачи, требующие применения сферических и цилиндрических функций (76, *415*).

§ 5. Потенциалы и их применение 78, *429*

Глава V. **Уравнения параболического типа** 82, *443*

§ 1. Физические задачи, приводящие к уравнениям параболического типа; постановка краевых задач 82, *443*

§ 2. Метод разделения переменных 84, *448*
1. Краевые задачи, не требующие применения специальных функций (84, *448*). а) Однородные среды (84, *448*). б) Неоднородные среды; сосредоточенные факторы (86, *456*). 2. Краевые задачи, требующие применения специальных функций (86, *460*). а) Однородные среды (86, *460*). б) Неоднородные среды; сосредоточенные факторы (89, *476*).

§ 3. Метод интегральных представлений 90, *484*
1. Применение интеграла Фурье (90, *484*). 2. Построение и применение функций влияния мгновенных точечных источников тепла (93, *496*).

Глава VI. **Уравнения гиперболического типа** 97, *507*

§ 1. Физические задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа; постановка краевых задач 97, *507*

§ 2. Простейшие задачи; различные приемы решения 101, *516*

§ 3. Метод разделения переменных 105, *526*
1. Краевые задачи, не требующие применения специальных функций (105, *526*). а) Однородные среды (105, *526*). б) Неоднородные среды (107, *530*). 2. Краевые задачи, требующие применения специальных функций (107, *533*). а) Однородные среды (107, *533*). б) Неоднородные среды (111, *559*).

§ 4. Метод интегральных представлений 111, *560*
1. Применение интеграла Фурье (111, *560*). а) Преобразование Фурье (111, *560*). б) Преобразование Фурье–Бесселя (Ханкеля) (112, *565*). 2. Построение и применение функций влияния сосредоточенных источников (113, *569*). а) Функции влияния мгновенных сосредоточенных импульсов (113, *569*). б) Функции влияния непрерывно действующих сосредоточенных источников (114, *575*).

Глава VII. **Уравнения эллиптического типа $\Delta u + cu = -f$** 116, *581*

§ 1. Задачи для уравнения $\Delta u - \varkappa^2 u = -f$ 116, *581*

§ 2. Некоторые задачи о собственных колебаниях 117, *586*
1. Собственные колебания струн и стержней (118, *586*). 2. Собственные колебания объемов (119, *594*).

§ 3. Распространение и излучение звука 120, *610*
1. Точечный источник (121, *612*). 2. Излучение мембран, цилиндров и сфер (122, *618*). 3. Дифракция на цилиндре и сфере (124, *627*).

§ 4. Установившиеся электромагнитные колебания 124, *633*
1. Уравнения Максвелла. Потенциалы. Векторные формулы Грина–Остроградского (124, *633*). 2. Распространение электромагнитных волн и колебания в резонаторах (127, *640*). 3. Излучение электромагнитных волн (128, *651*). 4. Антенна на плоской земле (129, *658*).

Дополнение 669

I. Различные ортогональные системы координат 669
1. Прямоугольные координаты (669). 2. Цилиндрические координаты (670). 3. Сферические координаты (670). 4. Эллиптические координаты (671). 5. Параболические координаты (671). 6. Эллипсоидальные координаты (671). 7. Вырожденные эллипсоидальные координаты (672). 8. Тороидальные координаты (673). 9. Биполярные координаты (674). 10. Сфероидальные координаты (675). 11. Параболоидные координаты (676).

II. Некоторые формулы векторного анализа 676

III. Специальные функции 676
1. Тригонометрические функции (676). 2. Гиперболические функции (677). 3. Интеграл ошибок (677). 4. Гамма-функции (677). 5. Эллиптические функции (678). 6. Функции Бесселя (678). 7. Полиномы Лежандра (680). 8. Гипергеометрическая функция $F(\alpha, \beta, \gamma)$ (681).

IV. Таблицы 682

Список литературы 685

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящий задачник возник на основе практических занятий по уравнениям математической физики на физическом факультете и заочном секторе МГУ. Задачи, предлагавшиеся на этих занятиях, были использованы в курсе «Уравнений математической физики» А. Н. Тихонова и А. А. Самарского [7] и в стеклографированном «Сборнике задач по математической физике» Б. М. Будака [14]. Однако при составлении настоящего задачника круг рассматриваемых вопросов был значительно расширен, а число задач в несколько раз увеличено. Большое внимание уделено задачам на вывод уравнений и граничных условий. Значительное число задач снабжено подробными указаниями и решениями. Задачи, близкие по характеру, снабжены лишь ответами. В главах проведена разбивка на параграфы по методам решения. Все это направлено к тому, чтобы дать возможность учащимся путем самостоятельной проработки достигнуть элементарных технических навыков в решении задач по основным разделам уравнений математической физики.

При этом задачник не претендует на охват всех методов, используемых в математической физике. В нем, например, не рассматривается операционный метод, вариационные и разностные методы, применение интегральных уравнений.

Мы надеемся, однако, что эта книга будет полезна не только для учащихся, но также для инженеров и сотрудников научно-исследовательских учреждений.

Для удобства пользования книгой в конце ее помещен ряд справочных материалов. При литературных указаниях мы наиболее часто ссылаемся на книгу А. Н. Тихонова и А. А. Самарского «Уравнения математической физики» [7], поскольку обозначения и порядок расположения материала в данном задачнике наиболее соответствуют принятым в этой книге.

Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов

Москва
Февраль 1955 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Настоящее издание является исправленным. Выражаем благодарность всем товарищам, обнаружившим опечатки в предыдущих изданиях.

Авторы

Москва
1979 г.

Глава I

КЛАССИФИКАЦИЯ И ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В этой главе предлагаются задачи на определение типа и приведение к каноническому виду уравнения для функции двух и более независимых переменных.

В случае двух независимых переменных рассматриваются уравнения с постоянными и переменными коэффициентами; в случае трех и более независимых переменных — лишь уравнения с постоянными коэффициентами, так как при трех и более независимых переменных уравнение с переменными коэффициентами не может быть, вообще говоря, приведено к каноническому виду с помощью преобразования, общего для целой области, в которой уравнение принадлежит данному типу. В § 1 приведены задачи для уравнения относительно функции двух, а в § 2 — трех и более независимых переменных.

§ 1. Уравнение для функции двух независимых переменных $a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f(x, y)$

1. Уравнение с переменными коэффициентами.

1. Найти области гиперболичности, эллиптичности и параболичности уравнения

$$(l + x)\, u_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2u_{yy} = 0$$

и исследовать их зависимость от l, где l — числовой параметр.

В задачах 2–20 привести уравнение к каноническому виду в каждой из областей, где его тип сохраняется.

2. $u_{xx} + xu_{yy} = 0$. **3.** $u_{xx} + yu_{yy} = 0$. **4.** $u_{xx} + yu_{yy} + u_y/2 = 0$.

5. $yu_{xx} + xu_{yy} = 0$. **6.** $xu_{xx} + yu_{yy} = 0$. **7.** $u_{xx} + xyu_{yy} = 0$.

8. $u_{xx} \operatorname{sign} y + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$. **9.** $u_{xx} + 2u_{xy} + (1 - \operatorname{sign} y)\, u_{yy} = 0$.

10. $u_{xx} \operatorname{sign} y + 2u_{xy} + u_{yy} \operatorname{sign} x = 0$.

11. $y^2u_{xx} - x^2u_{yy} = 0$. **12.** $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0$. **13.** $x^2u_{xx} + y^2u_{yy} = 0$.

14. $y^2u_{xx} + x^2u_{yy} = 0$. **15.** $y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2u_{yy} = 0$.

16. $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2u_{yy} = 0$. **17.** $4y^2u_{xx} - e^{2x}u_{yy} - 4y^2u_x = 0$.

18. $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} - 3y^2u_{yy} - 2xu_x + 4yu_y + 16x^4u = 0$.

19. $(1 + x^2)\,u_{xx} + (1 + y^2)\,u_{yy} + xu_x + yu_y = 0$.

20. $u_{xx}\sin^2 x - 2yu_{xy}\sin x + y^2u_{yy} = 0$.

2. Уравнение с постоянными коэффициентами. С помощью замены искомой функции $u(x, y) = e^{\alpha x+\beta y}v(x,\, y)$ и приведения к каноническому виду упростите следующие уравнения с постоянными коэффициентами.

21. $au_{xx} + 4au_{xy} + au_{yy} + bu_x + cu_y + u = 0$.

22. $2au_{xx} + 2au_{xy} + au_{yy} + 2bu_x + 2cu_y + u = 0$.

23. $au_{xx} + 2au_{xy} + au_{yy} + bu_x + cu_y + u = 0$.

§ 2. Уравнение с постоянными коэффициентами для функции n независимых переменных

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}u_{x_ix_k} + \sum_{i=1}^{n} b_iu_{x_i} + cu = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Привести к каноническому виду уравнения 24–28.

24. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} + u_x + u_y = 0$.

25. $u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{xz} + 4u_{yy} + u_{zz} = 0$.

26. $u_{xx} + u_{tt} + u_{yy} + u_{zz} - 2u_{tx} + u_{xz} + u_{ty} - 2u_{yz} = 0$.

27. $u_{xy} + u_{xz} - u_{tx} - u_{yz} + u_{ty} + u_{tz} = 0$.

28. а) $\sum_{i=1}^{n} u_{x_ix_i} + \sum_{i<k}^{n} u_{x_ix_k} = 0$; б) $\sum_{i<k}^{n} u_{x_ix_k} = 0$.

29. Освободиться от членов с младшими производными в уравнении

$$\sum_{i=1}^{n} a_iu_{x_ix_i} + \sum_{i=1}^{n} b_iu_{x_i} + cv = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad a_i \neq 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Глава II

УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

К уравнениям гиперболического типа приводят задачи о колебаниях сплошных сред (струна, стержень[1]), мембрана, газ и др.) и задачи об электромагнитных колебаниях.

В настоящей главе рассматриваются постановка и решение краевых задач для уравнений гиперболического типа (см. сноску) в случае, когда изучаемые физические процессы могут быть охарактеризованы функциями двух независимых переменных: одной пространственной координаты и времени.

Уравнениям гиперболического типа для функций с большим числом независимых переменных посвящена гл. IV.

§ 1. Физические задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа; постановка краевых задач

В первой группе задач этого параграфа предполагается непрерывность и однородность сред, а также непрерывность распределения сил.

Во второй группе задач допускается неоднородность сред и разрывы как характеристик сред, так и плотности распределения сил.

Третья группа задач посвящена установлению подобия между различными колебательными процессами.

Поставить краевую задачу, соответствующую физической задаче, это значит, прежде всего, выбрать функцию, характеризующую

[1]) Поперечные колебания упругого стержня приводят к параболическому уравнению четвертого порядка, в то время как продольные колебания — к гиперболическому уравнению второго порядка. Однако краевые задачи для поперечных колебаний стержня весьма родственны краевым задачам для продольных колебаний стержня и поэтому рассматриваются в настоящей главе.

Можно указать также ряд важных физических задач, приводящих к уравнениям гиперболического типа для функций, не зависящих от времени; например, при стационарном обтекании тела сверхзвуковым потоком газа для потенциала скоростей получается уравнение гиперболического типа.

физический процесс[1]), а затем:
1) вывести дифференциальное уравнение для этой функции;
2) вывести для нее граничные условия;
3) сформулировать начальные условия[2]).

1. Свободные колебания в среде без сопротивления; уравнения с постоянными коэффициентами. При изучении малых колебаний в однородных средах[3]) мы приходим к дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами.

1. *Продольные колебания стержня.* Упругий прямолинейный стержень выведен из состояния покоя тем, что его поперечным сечениям в момент времени $t = 0$ сообщены малые продольные смещения и скорости. Предполагая, что поперечные сечения стержня все время остаются плоскими, поставить краевую задачу для определения смещений поперечных сечений стержня при $t > 0$. Рассмотреть случаи, когда концы стержня:

а) закреплены жестко;

а′) двигаются в продольном направлении по заданному закону;

б) свободны;

в) закреплены упруго, т. е. каждый из концов испытывает со стороны заделки продольную силу, пропорциональную смещению и направленную противоположно смещению.

2. *Малые колебания струны*[4]). Струна натянута с силой T_0 и находится в прямолинейном положении равновесия; ее концы неподвижно закреплены. В момент $t = 0$ точкам струны сообщаются начальные отклонения и скорости.

Поставить краевую задачу для определения малых отклонений точек струны при $t > 0$.

3. *Крутильные колебания упругого цилиндра.* Упругий неоднородный цилиндр выводится из состояния покоя тем, что в момент времени $t = 0$ его поперечные сечения получают малые повороты в своих плоскостях относительно оси цилиндра.

Поставить краевую задачу для определения углов поворота поперечных сечений цилиндра при $t > 0$; рассмотреть случаи свободных, жестко закрепленных и упруго закрепленных концов.

---

[1]) Как правило, эта функция будет нами указываться уже в условиях задачи.

[2]) Наличие начальных условий характерно для основных краевых задач гиперболического и параболического типа. По поводу понятий и определений, связанных с постановкой краевых задач для уравнений гиперболического типа, см. [7, с. 38–48 и с. 120–121].

[3]) Например, в однородных стержнях и струнах постоянного поперечного сечения.

[4]) Вывод уравнения малых поперечных и малых продольных колебаний струны подробно выполнен в [7, с. 23–28]. В предлагаемой задаче требуется вывести уравнение колебаний струны при смещении ее точек в произвольных направлениях.

4. *Продольные колебания газа в трубке.* Заключенный в цилиндрической трубке идеальный газ совершает малые продольные колебания; плоские поперечные сечения, состоящие из частиц газа, не деформируются, и все частицы газа двигаются параллельно оси цилиндра.

Поставить краевые задачи для определения:

1) плотности ρ; 2) давления p;

3) потенциала φ скоростей частиц газа;

4) скорости v;

5) смещения u частиц газа в случаях, когда концы трубки:

а) закрыты жесткими непроницаемыми перегородками;

б) открыты;

в) закрыты поршеньками с пренебрежимо малой массой, насаженными на пружинки с коэффициентом жесткости ν и скользящими без трения внутри трубки.

5. *Задача Жуковского о гидравлическом ударе.* Входное сечение прямой цилиндрической трубки длиной l соединено с резервуаром неограниченной емкости с жидкостью. По трубке на всем ее протяжении течет жидкость с постоянной скоростью v_0. В начальный момент времени $t = 0$ выходное сечение трубы $x = l$ мгновенно перекрывается.

Поставить краевую задачу для определения скорости частиц жидкости и давления жидкости в трубе.

6. На конце $x = l$ трубы предыдущей задачи стоит смягчающий воздушный колпак (рис. 1) и агрегат A, регулирующий расход жидкости $Q(t)$, вытекающей из колпака, так что $Q(t)$ является заданной функцией времени.

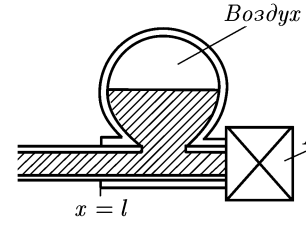


Рис. 1

Пусть Ω_0 и P_0 — средние объем и давление воздуха в колпаке; считая жидкость несжимаемой, а стенки колпака недеформируемыми и предполагая процесс сжатия и разрежения воздуха в колпаке изотермическим и изменение объема воздуха в колпаке малым по сравнению со средним объемом Ω_0, вывести граничное условие для конца $x = l$.

7. *Волны тяжелой жидкости в канале.* В неглубоком горизонтальном канале длины l с прямоугольным поперечным сечением находится вода, глубина которой, отсчитанная от свободной покоящейся поверхности, равна h. Концы канала закрыты плоскими жесткими перегородками, перпендикулярными к его образующим.

Направим ось x вдоль канала. При небольших возмущениях свободной поверхности в канале может возникнуть волновое движение воды, при котором поперечные сечения, состоящие из жидких частиц, будут, как целые, получать смещение $\xi(x, t)$ вдоль оси x, а их высота будет получать отклонение $\eta(x, t)$ от высоты h свободной покоящейся поверхности воды.

Пусть заданы начальные значения $\xi(x,t)$ и $\eta(x,\,t)$ в момент $t=0$.

Поставить краевую задачу для определения $\xi(x,t)$ и $\eta(x,\,t)$ при $t>0$.

8. *Поперечные колебания стержня.* Точкам упругого однородного прямоугольного стержня с шарнирно закрепленными концами

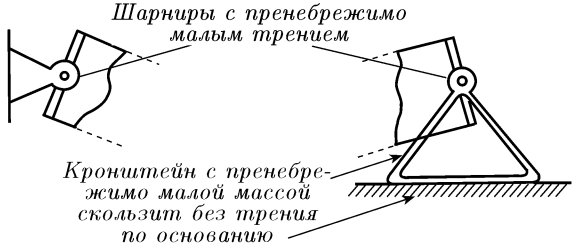


Рис. 2

(рис. 2) сообщены в начальный момент времени $t=0$ малые поперечные отклонения и скорости, параллельные продольной вертикальной плоскости симметрии стержня.

Поставить краевую задачу для определения поперечных отклонений точек стержня при $t>0$, предполагая, что стержень совершает малые поперечные колебания.

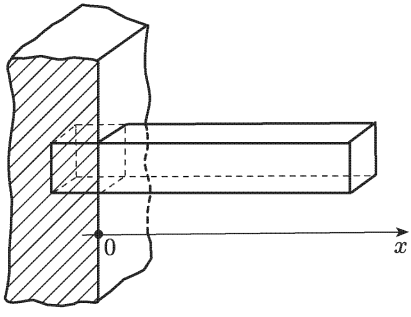


Рис. 3

9. Рассмотреть задачу 8 для случая, когда один конец стержня жестко закреплен, а другой свободен (рис. 3).

10. Рассмотреть задачу 8, предполагая, что стержень лежит на упругом основании, массой которого при изучении поперечных колебаний стержня можно пренебрегать. Коэффициент упругости основания, к которому прикреплен стержень, равен k, т. е. поперечная для стержня сила упругости, действующая со стороны упругого основания на единицу длины стержня в данной его точке x, равна $-ku(x,t)$.

2. Вынужденные колебания и колебания в среде с сопротивлением; уравнения с постоянными коэффициентами.

11. К струне, концы которой закреплены неподвижно, начиная с момента $t=0$, приложена непрерывно распределенная поперечная сила, линейная плотность которой равна $F(x,\,t)$.

Поставить краевую задачу для определения поперечных отклонений $u(x,t)$ точек струны при $t>0$.

12. По струне $0 \leqslant x \leqslant l$ с закрепленными неподвижно концами и пренебрежимо малым электрическим сопротивлением идет переменный ток силы $I = I(t)$ при $t > 0$, причем струна находится в постоянном магнитном поле напряженности H, перпендикулярном к струне. Поставить краевую задачу о поперечных колебаниях струны, вызываемых пондеромоторными силами, приложенными к струне[1]).

13. Начиная с момента $t = 0$, один конец прямолинейного упругого однородного стержня совершает продольные колебания по заданному закону, а к другому приложена сила $\Phi = \Phi(t)$, направленная по оси стержня. В момент времени $t = 0$ поперечные сечения стержня были неподвижны и находились в неотклоненном положении. Поставить краевую задачу для определения малых продольных отклонений $u(x, t)$ точек стержня при $t > 0$.

14. Верхний конец упругого однородного вертикально подвешенного тяжелого стержня жестко прикреплен к потолку свободно падающего лифта, который, достигнув скорости v_0, мгновенно останавливается. Поставить краевую задачу о продольных колебаниях этого стержня.

15. Поставить краевую задачу о малых поперечных колебаниях струны в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости, предполагая, что концы струны закреплены неподвижно.

16. Поставить краевую задачу о малых поперечных колебаниях прямоугольного однородного упругого стержня в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости, при наличии непрерывно распределенной вынуждающей поперечной силы; концы стержня предполагать жестко закрепленными.

17. Поставить краевую задачу о малых поперечных колебаниях прямоугольного однородного упругого стержня, один конец которого жестко закреплен, а к другому приложена поперечная («перерезывающая») сила, меняющаяся с течением времени по заданному закону.

18. Поставить краевую задачу о малых продольных колебаниях однородного упругого стержня, находящегося в среде без сопротивления, если один его конец закреплен жестко, а другой испытывает сопротивление, пропорциональное скорости.

19. *Электрические колебания в проводах.* Поставить краевую задачу для определения силы и напряжения переменного тока, идущего вдоль тонкого провода с непрерывно распределенными по длине: омическим сопротивлением R, емкостью C, самоиндукцией L и утечкой G [2]), если один конец провода заземлен, а к другому приложена э.д.с. $E(t)$ и если задан начальный ток $i(x, 0) = f(x)$ и начальное напряжение $v(x, 0) = F(x)$.

---

[1]) См. [17, с. 204].

[2]) Величины R, C, L, G рассчитаны на единицу длины; однородность провода означает, что R, C, L и G не зависят от того, в какой точке провода мы их рассматриваем.

3. Задачи о колебаниях, приводящие к уравнениям с непрерывными переменными коэффициентами. Если колеблющаяся среда неоднородна, причем функции, характеризующие ее свойства (плотность массы, модуль упругости и т.д.), являются непрерывными функциями точки, то, как известно, дифференциальное уравнение для функции, описывающей колебания, будет иметь непрерывные переменные коэффициенты. Однако могут представиться и другие случаи, приводящие к уравнениям с непрерывными переменными коэффициентами.

20. Поставить краевую задачу о продольных колебаниях упругого стержня $0 \leqslant x \leqslant l$ переменного поперечного сечения $S(x)$, если концы стержня закреплены неподвижно, плотность массы равна $\rho(x)$, модуль упругости равен $E(x)$, а колебания вызваны начальными продольными смещениями и скоростями. Деформацию поперечных сечений считать пренебрежимо малой.

21. Поставить краевую задачу о продольных колебаниях упругого стержня, имеющего форму усеченного конуса, если концы стержня закреплены неподвижно и стержень выведен из состояния покоя тем, что его точкам в $t = 0$ сообщены начальные продольные отклонения и скорости. Длина стержня равна l, радиус основания $R > r$, материал стержня однороден. Деформацией поперечных сечений пренебречь.

22. Поставить краевую задачу о малых поперечных колебаниях однородного упругого клинообразного стержня с прямоугольным поперечным сечением, если его больший торец жестко закреплен,

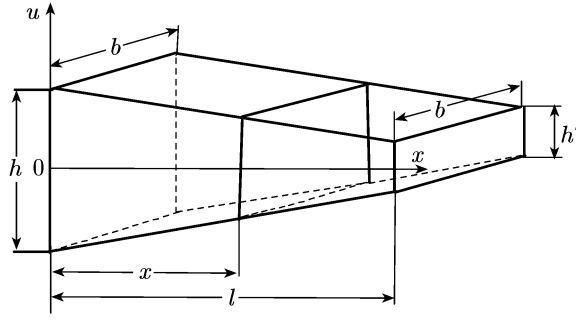


Рис. 4

а меньший свободен (рис. 4). Модуль упругости стержня равен E, плотность массы равна ρ.

Деформацией поперечных сечений пренебречь.

23. Поставить краевую задачу о поперечных колебаниях тяжелой струны относительно вертикального положения равновесия, если ее верхний конец жестко закреплен, а нижний свободен.

24. Рассмотреть задачу 23 в предположении, что струна вращается с угловой скоростью $\omega = \text{const}$ относительно вертикального положения равновесия.

25. Невесомая струна при вращении вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью находится в горизонтальной плоскости, причем один конец струны прикреплен к некоторой точке оси, а другой свободен. В начальный момент времени $t = 0$ точкам струны сообщаются малые отклонения и скорости по нормалям к этой плоскости.

Поставить краевую задачу для определения отклонений точек струны от плоскости равновесного движения.

4. Задачи, приводящие к уравнениям с разрывными коэффициентами, и родственные им (кусочно однородные среды, сосредоточенные факторы). Если плотность распределения массы колеблющегося упругого тела или плотность распределения приложенных к нему сил резко меняется в окрестности некоторых точек пространства, то часто оказывается целесообразным считать, что в этих точках происходит разрыв этих плотностей, и, в частности, переходить к сосредоточенным массам или силам, если в окрестности упомянутых точек плотность массы или плотность силы велика. Тогда при постановке краевых задач получаются дифференциальные уравнения с разрывными коэффициентами и разрывным вынуждающим членом. Если между точками разрыва коэффициенты уравнения остаются постоянными, то задача может быть сведена к уравнениям с постоянными коэффициентами и условиям сопряжения в точках разрыва. При этом мы имеем в виду внутренние точки среды; если же сосредоточенные массы или силы рассматриваются в граничных точках колеблющейся среды, то это должно быть отражено граничными условиями [1]).

26. Два полуограниченных однородных упругих стержня с одинаковыми поперечными сечениями соединены торцами и составляют один неограниченный стержень [2]). Пусть ρ_1, E_1 — плотность массы и модуль упругости одного из них и ρ_2, E_2 — другого.

Поставить краевую задачу для определения продольных отклонений поперечных сечений неограниченного стержня от их положений равновесия, если в начальный момент времени поперечным сечениям стержня сообщены некоторые продольные смещения и скорости.

27. Рассмотреть задачу 26 для случая поперечных колебаний составного неограниченного стержня.

---

[1]) Задачи с сосредоточенной силой на конце стержня и сосредоточенной электродвижущей силой на конце провода уже рассматривались в предыдущем пункте (см. задачи 13, 19).

[2]) Если один из концов стержня столь удален от рассматриваемой области, что можно в рассматриваемой области и в течение рассматриваемого промежутка времени пренебрегать возмущениями, распространяющимися от этого конца, тогда стержень можно считать полуограниченным ($x_0 \leqslant x < +\infty$ или $-\infty < x \leqslant x_0$); если же оба конца стержня находятся в таком положении, то стержень можно считать неограниченным ($-\infty < x < +\infty$). Это можно сказать о струне, о трубке, наполненной газом, и т.д.

28. Рассмотреть задачу, аналогичную задаче 26, для продольных колебаний газа в неограниченной цилиндрической трубке, если по одну сторону некоторого поперечного сечения находится газ с одними физическими характеристиками, а по другую — с другими.

29. Поставить краевую задачу о волновом движении жидкости в канале[1)] с прямоугольным поперечным сечением, если размеры поперечного сечения в некотором месте канала резко изменяются, т. е. канал «составлен» из двух полуограниченных каналов с различными поперечными сечениями.

30. Рассмотреть задачу 26, предполагая, что торцы составляющих стержней соединены не непосредственно, а между ними находится жесткая прокладка пренебрежимо малой толщины массы M.

31. Два полуограниченных однородных стержня с одинаковым прямоугольным поперечным сечением соединены торцами так, что составляют один неограниченный стержень постоянного поперечного сечения, причем торцы полуограниченных стержней соединены не непосредственно, а между ними находится жесткая прокладка пренебрежимо малой толщины с массой M.

Поставить краевую задачу о поперечных колебаниях такого стержня.

32. Поставить краевую задачу о продольных колебаниях однородного упругого вертикального стержня, пренебрегая действием поля силы тяжести на частицы стержня, если верхний конец стержня закреплен жестко, а к нижнему прикреплен груз Q, причем за положение равновесия принимается ненапряженное состояние стержня (например, в начальный момент времени из-под груза убирается подставка и груз начинает растягивать стержень).

33. Поставить краевую задачу о поперечных колебаниях в вертикальной плоскости упругого прямоугольного однородного стержня, расположенного в ненапряженном состоянии горизонтально, если один конец стержня жестко закреплен, а к другому прикреплен груз Q, момент инерции которого относительно средней горизонтальной линии примыкающего торца пренебрежимо мал, причем за положение равновесия принимается ненапряженное состояние стержня.

34. Поставить краевую задачу о продольных колебаниях упругого горизонтального стержня с грузом Q на конце, если другой конец стержня жестко прикреплен к вертикальной оси, которая вращается с угловой скоростью, меняющейся с течением времени по заданному закону. Изгибные колебания считать исключенными с помощью специальных направляющих, между которыми скользит стержень во время продольных колебаний.

35. Рассмотреть задачу 34, предполагая, что ось вращения расположена горизонтально.

[1)] См. задачу 7.

36. Поставить краевую задачу о крутильных колебаниях цилиндра длиной $2l$, составленного из двух цилиндров длиной l, если на концах составленного цилиндра и между торцами соединяемых цилиндров находятся жесткие шкивы (рис. 5) с заданными осевыми моментами инерции.

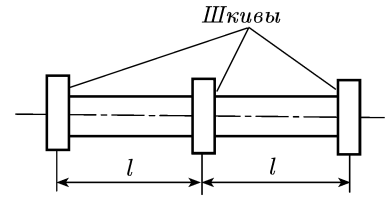


Рис. 5

37. Пусть неограниченная струна совершает малые поперечные колебания под действием поперечной силы, приложенной, начиная с момента $t = 0$, в некоторой заданной точке струны.

Поставить краевую задачу для определения отклонений точек струны от их положения равновесия. Рассмотреть также случай, когда точка приложения силы перемещается с течением времени вдоль струны по заданному закону.

38. Рассмотреть задачу 37 для поперечных колебаний стержня.

39. Конец полуограниченной цилиндрической трубки, заполненной идеальным газом, закрыт поршнем массы M, скользящим в трубке, причем сопротивление трения пропорционально скорости поршня с коэффициентом пропорциональности, равным k^*. Пусть поршень насажен на пружинку с коэффициентом упругости k^{**} и осью, направленной по оси трубки.

Поставить краевую задачу о продольных колебаниях газа в трубке.

40. В некоторой точке неограниченной струны прикреплен шарик массы M, а к нему прикреплена пружинка с коэффициентом упругости k и осью, перпендикулярной к равновесному положению струны (см. рис. 11).

Поставить краевую задачу о поперечных колебаниях струны. Рассмотреть также случай, когда шарик испытывает сопротивление пропорциональное скорости с коэффициентом пропорциональности k^*.

41. Поставить краевую задачу об электрических колебаниях в проводе с пренебрежимо малыми сопротивлением и утечкой, если концы провода заземлены: один — через сосредоточенное сопротивление R_0, а другой — через сосредоточенную емкость C_0.

42. Рассмотреть задачу 41, предполагая, что один конец провода заземлен через сосредоточенную самоиндукцию $L_0^{(1)}$, к другому приложена электродвижущая сила $E(t)$ через сосредоточенную самоиндукцию $L_0^{(2)}$.

43. Поставить краевую задачу об электрических колебаниях в проводе, если концы провода заземлены через сосредоточенные сопротивления.

44. Поставить краевую задачу об электрических колебаниях в проводе, если каждый из его концов заземлен через последовательно включенные сосредоточенное сопротивление и сосредоточенную самоиндукцию.

Найти соотношения, которым должны удовлетворять величины сосредоточенных самоиндукций и сопротивлений для того, чтобы для $v(x,t)$ имели место однородные граничные условия третьего рода.

45. Поставить краевую задачу об электрических колебаниях в неограниченном проводе, полученном соединением двух полуограниченных проводов через сосредоточенную емкость C_0.

Рассмотреть краевую задачу для определения силы тока в случае, когда утечки нет.

46. Рассмотреть задачу 45 для случая, когда полуограниченные провода соединяются не через сосредоточенную емкость, а через сосредоточенное сопротивление R_0.

47. Поставить краевую задачу об электрических колебаниях в проводе, один конец которого заземлен через параллельно включенные сосредоточенное сопротивление R_0 и сосредоточенную самоиндукцию $L^{(1)}$, а другой — через параллельно включенные сосредоточенную емкость C_0 и сосредоточенную самоиндукцию $L^{(2)}$.

48. Поставить краевую задачу об электрических колебаниях в проводе, концы которого замкнуты через:

а) сосредоточенную самоиндукцию L_0;

б) сосредоточенное сопротивление R_0;

в) сосредоточенную емкость C_0.

5. Подобие краевых задач. Пусть даны две краевые задачи (I) и (II), соответствующие физическим явлениям одинаковой или различной природы. Обозначим через x', t', $u'(x',t')$ пространственную координату, время и искомую функцию в одной задаче, а через x'', t'', $u''(x'',t'')$ — соответствующие величины в другой задаче. Если уравнение, начальные и граничные условия одной и другой задач имеют соответственно одинаковую форму, то задачи называются *аналогичными*.

Обозначим через D_{I} область изменения (x',t') в задаче (I), а через D_{II} — область изменения (x'',t'') в задаче (II). Если существуют такие константы k_x, k_t, k_u, «коэффициенты подобия», что

$$u'(x',t') = k_u u''(x'',t'') \quad \text{при} \quad x' = k_x x'', \quad t' = k_t t'', \tag{I}$$

причем (x',t') пробегает D_{I}, когда (x'',t'') пробегает D_{II}, то задача (I) называется подобной задаче (II) с коэффициентами подобия k_x, k_t, k_u [1]).

Нетрудно показать, что если задача (I) подобна задаче (II), то можно так выбрать единицы измерения x_0', t_0', u_0', x_0'', t_0'', u_0'' в зада-

[1]) Преобразование (1) является аффинным. (Таким образом, решение задачи (I) получается из решения задачи (II) с помощью аффинного преобразования.) Можно рассматривать более широкий класс аффинных отображений, включающий, кроме растяжений и сжатий, еще и параллельные переносы, т. е. изменения начал отсчетов величин x, t, u.

чах (I) и (II), что переход к безразмерным величинам

$$\xi = \frac{x'}{x'_0}; \quad \tau = \frac{t'}{t'_0}; \quad U = \frac{u'}{u'_0} \quad \text{и} \quad \xi = \frac{x''}{x''_0}; \quad \tau = \frac{t''}{t''_0}; \quad U = \frac{u''}{u''_0}$$

приводит к полному совпадению обеих краевых задач, а именно: область, пробегаемая (ξ, τ), в обеих задачах становится одинаковой, коэффициенты в уравнениях и граничных условиях становятся безразмерными и численно равными [1]), свободные члены и начальные значения становятся тождественно равными. Очевидно, справедливо и обратное утверждение: если существует преобразование единиц измерения, переводящее задачи (I) и (II) в тождественно совпадающие безразмерные задачи, то задачи (I) и (II) подобны.

49. Сформулировать задачу об электрических колебаниях в проводе, аналогичную задаче о продольных колебаниях однородного упругого стержня, один конец которого закреплен жестко, а другой свободен.

Установить необходимые и достаточные условия для того, чтобы первая задача была подобна второй с заданными коэффициентами подобия.

50. Сформулировать задачу об электрических колебаниях в проводе, аналогичную задаче о продольных колебаниях однородного упругого стержня, в следующих случаях:

а) один конец стержня закреплен жестко, а другой упруго;

б) один конец стержня свободен, а другой испытывает сопротивление, пропорциональное скорости;

в) один конец стержня закреплен упруго, а другой конец движется по заданному закону.

Установить необходимые и достаточные условия для того, чтобы первая задача была подобна второй.

51. Сформулировать задачу о крутильных колебаниях цилиндра, подобную задаче 41 об электрических колебаниях в проводе, взяв за функцию, характеризующую электрические колебания, сначала напряжение, а затем силу тока.

Установить необходимые и достаточные условия для того, чтобы первая задача была подобна второй.

§ 2. Метод распространяющихся волн (метод Даламбера)

Общее решение $u = u(x, t)$ уравнения колебаний струны

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \tag{1}$$

может быть представлено в виде [2])

$$u(x, t) = \varphi_1(x - at) + \varphi_2(x + at), \tag{2}$$

---

[1]) Эти безразмерные коэффициенты называются критериями подобия.

[2]) Иногда удобнее пользоваться другими эквивалентными формами представления решения в виде распространяющихся волн, например,

$$u(x, t) = \varphi_1(at - x) + \varphi_2(at + x)$$

или

$$u(x, t) = \varphi_1\left(t - \frac{x}{a}\right) + \varphi_2\left(t + \frac{x}{a}\right).$$

где $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ — произвольные функции, причем $\varphi_1(x-at)$ есть прямая волна, распространяющаяся вправо по оси x со скоростью a, в то время как $\varphi_2(x+at)$ есть обратная волна, распространяющаяся с той же скоростью влево по оси x [1]).

Решить краевую задачу для уравнения 1) методом распространяющихся волн — это значит определить функции $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ из начальных и граничных условий.

В первом пункте этого параграфа собраны задачи для неограниченной прямой $-\infty < x < +\infty$, во втором — для полупрямой с однородными и неоднородными граничными условиями, в третьем — для бесконечной прямой, составленной из двух полупрямых, отличающихся физическими характеристиками, в четвертом — задачи для конечного отрезка с однородными и неоднородными граничными условиями.

1. Задачи для бесконечной струны.

52. Неограниченная струна возбуждена локальным начальным отклонением, изображенным на рис. 6. Построить (начертить) положение струны для моментов времени [2])

$$t_k = \frac{kc}{4a},$$

где $k = 0, 1, 2, 3, 5$.

53. Неограниченная струна возбуждена локальным начальным отклонением, имеющим форму квадратичной параболы (рис. 7).

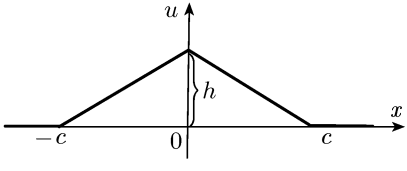


Рис. 6

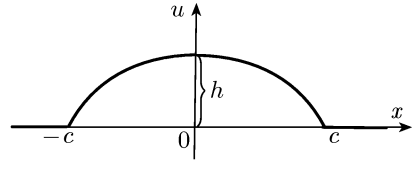


Рис. 7

Найти: а) формулы, представляющие профиль струны при $t > 0$, и б) формулы, представляющие закон движения точек страны с различными абсциссами при $t > 0$.

54. В момент $t = 0$ неограниченная струна возмущена начальным отклонением, имеющим форму, изображенную на рис. 8. В какой точке x и в какой момент времени $t > 0$ отклонение струны будет максимальным? Какова величина этого отклонения?

---

[1]) См. [7, с. 50–58 и 60–70]. Использование представления решения в виде (2) для стационарных задач, где t является геометрической координатой, будет дано в гл. V.

[2]) Здесь и в дальнейших задачах под a понимается параметр, входящий в уравнение (1) $u_{tt} = a^2 u_{xx}$.

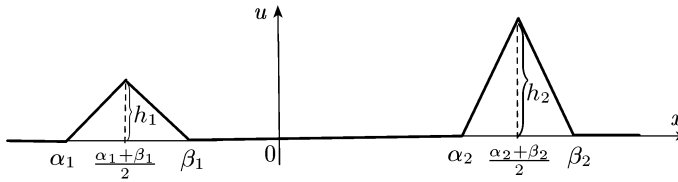


Рис. 8

55. Неограниченной струне сообщена на отрезке $-c \leqslant x \leqslant c$ поперечная начальная скорость $v_0 = \text{const}$; вне этого отрезка начальная скорость равна нулю. Найти формулы, представляющие закон движения точек струны с различными абсциссами при $t > 0$, и построить (начертить) положения струны для моментов времени

$$t_k = \frac{kc}{4a},$$

где $k = 0, 2, 4, 6$.

56. В начальный момент времени $t = 0$ неограниченная струна получает в точке $x = x_0$ поперечный удар, передающий струне импульс I.

Найти отклонение $u(x, t)$ точек струны от положения равновесия при $t > 0$, предполагая, что начальные отклонения точек струны и начальные скорости равны нулю.

57. По неограниченной струне бежит волна $\varphi(x - at)$. Приняв эту волну за начальное возмущение струны в момент $t = 0$, найти состояние струны при $t > 0$. Сравнить с результатом, полученным при решении задачи 52.

58. Решить задачу о распространении электрических колебаний в неограниченном проводе при условии, что

$$GL = CR, \tag{1}$$

где G, L, C, R — утечка, самоиндукция, емкость и сопротивление единицы длины провода[1]). Напряжение и сила тока в проводе в начальный момент заданы.

2. Задачи для полупрямой. Если только один из концов струны[2]) находится столь далеко от рассматриваемого ее участка, что отражение от удаленного конца не сказывается на колебаниях этого участка, по крайней мере в течение рассматриваемого промежутка времени, то мы приходим к задаче о колебаниях полуограниченной струны $0 < x < +\infty$, где $x = 0$ соответствует «близкому» концу

[1]) Это условие обеспечивает возможность прохождения по проводу волн без искажения их формы. (Подробнее см. [7, с. 73–75] и предыдущие.) В дальнейшем, если для провода выполняется это условие, то мы будем называть его кратко: провод линии без искажений.

[2]) Или стержня, или провода.

струны. В этом случае краевая задача содержит уравнение, граничное условие и начальные условия[1]):

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$\alpha_1 u_{tt}(0, t) + \alpha_2 u_t(0, t) + \alpha_3 u_x(0, t) + \alpha_4 u(0, t) = \Phi(t), \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < +\infty, \tag{3}$$

причем по крайней мере одна из констант α_1, α_2, α_3, α_4, входящих в граничное условие, должна быть отлична от нуля[2]); если $\Phi(t) = 0$, то граничное условие становится однородным.

59. Полуограниченная струна, закрепленная в конце, возбуждена начальным отклонением, изображенным на рис. 9. Начертить положение струны для моментов времени

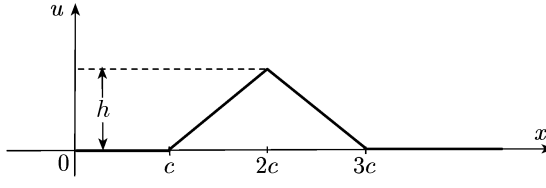


Рис. 9

$$t = \frac{c}{a}; \quad t = \frac{3c}{2a}; \quad t = \frac{2c}{a}; \quad t = \frac{7c}{2a}.$$

60. Полуограниченному упругому стержню $0 \leqslant x < +\infty$ со свободным концом $x = 0$ сообщена начальная осевая скорость, равная v_0 на отрезке $[c, 2c]$ и нулю вне этого отрезка.

Величину продольного смещения $u(x, t)$ поперечных сечений стержня можно откладывать для наглядности в направлении, перпендикулярном к оси x, т. е. поступать так же, как это делалось в случае струны. Пользуясь этим приемом изображения, начертить график $u = u(x, t)$ для моментов времени

$$t = 0; \quad \frac{c}{a}; \quad \frac{2c}{a}; \quad \frac{4c}{a}.$$

61. Полуограниченная струна $0 \leqslant x < +\infty$ с закрепленным концом $x = 0$ получает в момент $t = 0$ поперечный удар, передающий струне импульс I на участке $0 \leqslant x \leqslant 2l$, причем профиль распределения скорости, получаемый при ударе, имеет в момент $t = 0$ форму полуволны синусоиды с основанием $0 \leqslant x \leqslant 2l$. Найти формулы,

---

[1]) Возможно также задание двух граничных условий, если задано лишь одно начальное условие. (Подробнее см. [7, с. 78].)

[2]) Если граничное условие (2) принимает вид $u_t(0, t) + \alpha u(0, t) = \Phi(t)$, причем известно значение $u(0, 0)$, то тем самым становится известным $u(0, t)$ и мы приходим к граничному условию $u(0, t) = \Phi(t)$. Аналогичное утверждение справедливо для граничного условия вида

$$u_{tt}(0, t) + \alpha u_t(0, t) + \beta u(0, t) = \Phi(t).$$

представляющие закон движения точек струны с различными абсциссами x при $t > 0$.

62. Полуограниченный упругий стержень $0 \leqslant x < +\infty$ со свободным концом $x = 0$ возмущен в момент $t = 0$ продольными смещениями, профиль которых [1]) изображен на рис. 10. Найти, в каких точках

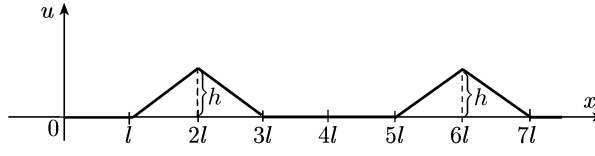


Рис. 10

и когда при $t > 0$ смещение достигает наибольшего значения. Какова величина этого наибольшего смещения?

63. Полуограниченной струне с закрепленным концом в начальный момент времени $t = 0$ с помощью поперечного удара передается импульс I в точке $x = x_0$. Найти отклонения $u(x, t)$ точек струны от положения равновесия при $t > 0$, если начальные отклонения $u(x, 0) = 0$, а начальные скорости в точках $x \neq x_0$ также равны нулю.

64. Решить задачу 63, предполагая, что начальный импульс I сообщается в точках $x_n > x_{n-1} > \ldots > x_2 > x_1 > 0$.

65. Полуограниченному стержню со свободным концом в начальный момент времени $t = 0$ с помощью продольного удара по концу передается осевой импульс I.

Найти отклонения $u(x, t)$ точек стержня от положения равновесия при $t > 0$, если начальные отклонения $u(x, 0) = 0$, а начальные скорости в точках $x > 0$ также равны нулю.

66. Груз $Q = Mg$, двигающийся с постоянной скоростью v_0 параллельно оси x, в момент времени $t = 0$ в результате удара прилипает к свободному концу полуограниченного стержня $0 \leqslant x < +\infty$ и продолжает двигаться вместе с ним. Найти отклонения $u(x, t)$ поперечных сечений стержня от положения равновесия при $t > 0$, если начальные отклонения $u(x, 0) = 0$, а начальные скорости равны нулю всюду, кроме сечения $x = 0$, где она равна v_0.

67. Поперечным сечениям полуограниченного упругого стержня с упруго закрепленным концом сообщены начальные продольные отклонения

$$u(x, 0) = \begin{cases} \sin \dfrac{\pi x}{l} & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \\ 0 & \text{при} \quad l \leqslant x < +\infty, \end{cases}$$

начальные же скорости $u_t(x, 0) = 0$. Найти продольные отклонения $u(x, t)$ поперечных сечений стержня при $t > 0$.

[1]) См. задачу 60.

68. Полуограниченный вертикальный круглый вал $0 \leqslant x < +\infty$ при $t < 0$ вращается с угловой скоростью $\omega = \text{const}$. С момента $t = 0$ его торец $x = 0$ соприкасается с горизонтальной опорной плоскостью и испытывает действие закручивающего момента сил трения, пропорционального угловой скорости торца. Найти углы поворота $\theta(x, t)$ поперечных сечений вала при $t > 0$, считая, что $\theta(x, 0) = 0$.

69. По полуограниченной струне $0 \leqslant x < +\infty$ бежит волна $u(x,t) = f(x+at)$ при $t < 0$. Найти колебания струны при $0 < t < +\infty$ для случаев, когда конец струны:

а) закреплен жестко;

б) свободен;

в) закреплен упруго;

г) испытывает сопротивление трения, пропорциональное скорости.

70. По полуограниченной цилиндрической трубке $0 < x < +\infty$, заполненной идеальным газом, бежит волна $u(x, t) = f(x + at)$ при $t < 0$, $f(0) = 0$. В конце трубки находится поршень с массой M_0, насаженный на пружинку с коэффициентом жесткости H_0 и пренебрежимо малой собственной массой. Поршень плотно закрывает трубку и при движении в трубке испытывает сопротивление, пропорциональное скорости. Найти $u(x, t)$ при $0 < t < +\infty$.

71. Найти при $t > 0$ электрические колебания в полуограниченном проводе (линии без искажений), если при $t < 0$ по проводу бежала волна

$$v(x,t) = e^{-\frac{R}{L}t} f(x + at),$$

$$i(x,t) = -e^{-\frac{R}{L}t} \sqrt{\frac{C}{L}} f(x + at).$$

Рассмотреть случаи, когда конец провода заземлен:

а) через сосредоточенное сопротивление R_0;

б) через сосредоточенную емкость C_0;

в) через сосредоточенную самоиндукцию L_0.

Установить, при каких условиях в случае а) отраженная волна отсутствует («полное поглощение») и при каких условиях амплитуда отраженной волны в два раза меньше амплитуды падающей волны.

72. К концу $x = 0$ полуограниченного провода линии без искажений была приложена постоянная э.д.с. E в течение достаточно длительного промежутка времени, так что в проводе установилось стационарное распределение напряжения и силы тока. Затем в момент времени $t = 0$ конец провода был заземлен через сосредоточенное сопротивление R_0.

Найти напряжение и ток в проводе при $t > 0$.

73. Конец полуограниченной струны $0 < x < +\infty$, начиная с момента $t = 0$, движется по закону

$$u(0, t) = \mu(t).$$

Найти отклонение $u(x, t)$ точек струны при $0 < t < +\infty$, если начальные скорости и отклонения равны нулю.

74. К концу полуограниченного стержня приложена продольная сила $F(t)$ с момента $t = 0$. Найти продольные колебания стержня при $t > 0$, если начальные скорости и начальные отклонения его точек равны нулю.

75. Полуограниченный горизонтальный трубопровод постоянного поперечного сечения заполнен при $t < 0$ покоящейся жидкостью. Начиная с момента $t = 0$, к его концу подключается нагнетательный насос с выравнивающим воздушным колпаком [1]). Найти давление и скорость жидкости в трубопроводе при $t > 0$.

76. Найти продольные колебания полуограниченного стержня при нулевых начальных условиях, если в момент времени

$$t_k = kT, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots,$$

стержню сообщаются продольные импульсы

$$I_k = I = \text{const}$$

и к концу стержня прикреплена сосредоточенная масса M.

77. К концу полуограниченного провода $0 < x < +\infty$ линии без искажений приложена э.д.с.

$$E(t) = E_0 \sin \omega t; \quad 0 < t < +\infty.$$

В момент $t = 0$ напряжение и ток в проводе были равны нулю. Найти напряжение и ток в проводе при $t > 0$, выделяя установившийся процесс распространения колебаний с частотой ω, и определить время, начиная с которого в точке x провода, $0 < x < +\infty$, амплитуда переходных колебаний будет составлять не более чем 10 % амплитуды установившихся колебаний.

3. Задачи для бесконечной прямой, составленной из двух однородных полупрямых. Сосредоточенные факторы.

78. Неограниченный упругий стержень получен соединением в точке $x = 0$ двух полуограниченных однородных стержней. При $x < 0$ плотность массы, модуль упругости стержня и скорость распространения малых продольных возмущений равны ρ_1, E_1, a_1, а при $x > 0$ они равны ρ_2, E_2, a_2. Пусть из области $x < 0$ по стержню бежит волна $u_1(x, t) = f(t - x/a_1)$, $t \leqslant 0$. Найти отраженную и преломленную волны. Исследовать решение при $E_2 \to 0$ и при $E_2 \to +\infty$.

79. В точке $x = 0$ неограниченной однородной струны прикреплена сосредоточенная масса M, поддерживаемая пружиной жесткости k с пренебрежимо малой собственной массой (рис. 11). Найти отклонение струны $u(x, t)$ при $t > 0$, если струна возбуждается в момент $t = 0$ поперечным импульсом $I = Mv_0$, сообщаемым массе M и направленным по оси пружины.

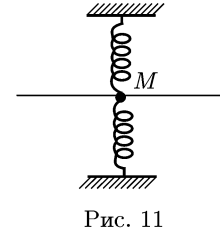


Рис. 11

[1]) См. задачи 5 и 6.

80. Масса M предыдущей задачи при колебаниях испытывает сопротивление трения, пропорциональное скорости. Найти отраженную и преломленную волны, взяв за начальное условие бегущую из области $x < 0$ волну $u_1(x, t) = f(x - at)$.

81. Плоский источник малых возмущений движется равномерно с дозвуковой скоростью вдоль цилиндрической неограниченной трубки с газом. Считая, что возмущение давления в том месте, где находится в момент $t > 0$ источник, является известной функцией времени, найти колебания газа слева и справа от источника, если в начальный момент времени газ был в невозмущенном состоянии, а источник находился в точке $x = 0$.

82. Решить задачу о колебаниях неограниченной струны под действием сосредоточенной поперечной силы $F(t)$ для $t > 0$, если точка приложения силы скользит вдоль струны с постоянной скоростью v_0 из положения $x = 0$, причем $v_0 < a$ и начальные условия нулевые.

4. Задачи для конечного отрезка.

83. Концы струны $x = 0$ и $x = l$ закреплены жестко; начальное отклонение задано равенством

$$u(x, 0) = A \sin \frac{\pi x}{l} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

начальные скорости равны нулю. Найти отклонения $u(x, t)$ при $t > 0$.

84. Решить задачу о продольных колебаниях стержня, один конец которого $(x = 0)$ закреплен жестко, а другой $(x = l)$ свободен, если стержень был подвергнут начальному растяжению

$$u(x, 0) = Ax, \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

и начальные скорости

$$u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

85. Решить задачу 84, если конец $x = l$ стержня закреплен упруго.

86. Один конец стержня $(x = 0)$ закреплен жестко, а другой $(x = l)$ свободен. В начальный момент времени свободному концу сообщается продольный ударный импульс I. Найти колебания стержня.

87. Один конец горизонтального стержня закреплен жестко, а другой свободен. В начальный момент времени $t = 0$ в свободный конец стержня ударяет груз $Q = Mg$ со скоростью v_0, направленной по оси стержня, причем в момент $t = 0$ торец груза плотно соприкасается с торцом стержня. Найти продольные колебания стержня при $t > 0$ в течение акта соударения.

88. Решить предыдущую задачу для стержня, у которого оба конца свободны.

89. Решить задачу 87, предполагая, что стержень имеет форму усеченного конуса.

90. Решить задачу 88 для стержня, имеющего форму усеченного конуса.

91. Найти продольные колебания стержня при нулевых начальных условиях, если один его конец закреплен или свободен, а другой двигается по данному закону; рассмотреть случаи, когда:

а) правый конец закреплен;

б) левый конец закреплен;

в) правый конец свободен.

92. Найти колебания возмущения давления в конце $x = 0$ трубопровода при $t > 0$, если в конце $x = l$ оно остается равным нулю, а расход жидкости в конце $x = 0$ является известной функцией времени. Сопротивление трубопровода пренебрежимо мало, а возмущения давления и скорость жидкости при $t = 0$ равны нулю.

93. Решить задачу об абсолютно упругом продольном ударе двух одинаковых стержней, движущихся в одном направлении по одной прямой со скоростями v_1 и v_2; $v_1 > v_2 > 0$ (рис. 12). Найти распределение скоростей и напряжений в стержнях в течение акта соударения.

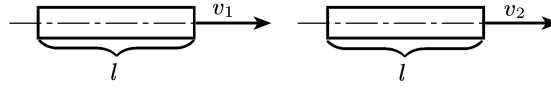


Рис. 12

94. К концу $x = 0$ провода линии без искажений[1], начиная с момента $t = 0$, приложена постоянная э.д.с. E; конец $x = l$ заземлен. Начальное напряжение и начальный ток в проводе равны нулю. Найти электрические колебания в проводе при $t > 0$ и установить, начиная с какого момента времени ток в проводе будет отличаться от предельного (при $t \to +\infty$) заведомо не более чем на 10 %.

95. Решить предыдущую задачу при условии, когда конец $x = l$ изолирован.

96. Один конец ($x = l$) провода с пренебрежимо малым сопротивлением и утечкой заземления через:

а) сосредоточенное сопротивление R_0;

б) сосредоточенную емкость C_0;

в) сосредоточенную самоиндукцию L_0, а к другому концу ($x = 0$) с момента $t = 0$ подключается э.д.с. $E = \text{const}$.

Найти напряжение $v(x, t)$ на конце $x = l$ при $t > 0$ для всех случаев.

§ 3. Метод разделения переменных

В настоящем параграфе рассматриваются задачи о колебаниях конечного отрезка струны при различных граничных условиях, а также аналогичные задачи о колебаниях из других областей физики и техники[2].

[1] См. сноску к задаче 58.

[2] Выборка материала по собственным значениям и нормам собственных функций из глав II, III, IV, V, VI помещена в § 2 гл. VII.

1. Свободные колебания в среде без сопротивления[1]**.**

97. Найти колебания струны с жестко закрепленными концами $x = 0$ и $x = l$, возбужденной начальным отклонением, и вычислить энергию отдельных гармоник. Начальные скорости равны нулю.

98. Струна $0 \leqslant x \leqslant l$ с жестко закрепленными концами до момента $t = 0$ находилась в состоянии равновесия под действием поперечной силы $F_0 = \text{const}$, приложенной к точке x_0 струны перпендикулярно к невозмущенному положению струны. В начальный момент времени $t = 0$ действие силы F_0 мгновенно прекращается. Найти колебания струны при $t > 0$.

99. Концы струны закреплены жестко, а начальное отклонение имеет форму квадратичной параболы, симметричной относительно перпендикуляра к середине струны. Найти колебания струны, если начальные скорости равны нулю.

100. Струна[2] с жестко закрепленными концами возбуждается ударом жесткого плоского молоточка, сообщающего ей следующее начальное распределение скоростей:

$$u_t(x,\,0) = \psi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant x_0 - \delta, \\ v_0, & x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \\ 0, & x_0 + \delta \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Найти колебания струны, если начальное отклонение равно нулю. Вычислить энергию отдельных гармоник.

101. Струна[3] с жестко закрепленными концами возбуждается ударом острого молоточка, передающего ей импульс I в точке x_0. Найти колебания струны, если начальное отклонение равно нулю. Вычислить энергию отдельных гармоник.

102. Струна с жестко закрепленными концами возбуждается ударом жесткого выпуклого молоточка[4], сообщающего ей начальное распределение скоростей

$$u_t = (x,\,0) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant x_0 - \delta, \\ v_0 \cos\left(\dfrac{\pi}{2} \cdot \dfrac{x - x_0}{\delta}\right), & x_0 - \delta \leqslant x \leqslant x_0 + \delta, \\ 0, & x_0 + \delta \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Найти колебания струны, если начальное отклонение равно нулю. Вычислить энергию отдельных гармоник.

103. Найти продольные колебания стержня, один конец которого ($x = 0$) закреплен жестко, а другой ($x = l$) свободен, при начальных условиях

$$u(x,\,0) = kx, \quad u_t(x,\,0) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

---

[1] В этом и следующих двух пунктах среды предполагаются однородными.

[2] См. [7, с. 140–143].

[3] То же.

[4] По поводу возбуждения струны мягким выпуклым молоточком см. задачу 152.

104. Стержень с жестко закрепленным концом $x = 0$ находится в состоянии равновесия под действием продольной силы $F_0 = \text{const}$, приложенной к концу $x = l$. В момент $t = 0$ действие силы F_0 мгновенно прекращается. Найти колебания стержня, если начальные скорости равны нулю.

105. Найти продольные колебания упругого стержня со свободными концами, если начальные скорости и начальные смещения в продольном направлении произвольны. Учесть возможность равномерного прямолинейного движения стержня.

106. Найти колебания упругого стержня со свободными концами, получившего в начальный момент времени продольный импульс I в один из концов.

107. Решить предыдущую задачу для случая, когда конец, которому не сообщается импульс, закреплен жестко.

108. Один конец стержня закреплен упруго, а другой свободен. Найти продольные колебания стержня при произвольных начальных условиях.

109. Один конец стержня ($x = l$) закреплен упруго, а к другому ($x = 0$) приложена продольная сила $F_0 = \text{const}$, под действием которой стержень находится в состоянии равновесия. Найти колебания стержня после того, как в начальный момент времени сила F_0 мгновенно исчезает, если начальные скорости равны нулю.

110. Один конец стержня ($x = l$) закреплен упруго, а другой ($x = 0$) получает в начальный момент времени продольный ударный импульс I. Найти продольные колебания стержня, если начальное отклонение стержня равно нулю.

111. Найти продольные колебания стержня с упруго закрепленными концами при одинаковых коэффициентах жесткости заделки концов, если начальные условия произвольны.

112. Решить предыдущую задачу, если коэффициенты жесткости заделки концов стержня различны.

113. Найти колебания уровня жидкости в кольцевом канале, ширина и глубина которого невелика по сравнению с его радиусом, если начальное отклонение уровня от равновесного состояния и начальная скорость изменения этого уровня заданы.

114. Доказать аддитивность энергии отдельных гармоник для процесса свободных колебаний струны в среде без сопротивления при однородных граничных условиях первого, второго и третьего рода.

115. Найти поперечные колебания стержня $0 \leqslant x \leqslant l$ при произвольных начальных условиях, если концы стержня:

а) закреплены шарнирно («свободно оперты»);

б) закреплены жестко;

в) свободны.

116. Решить предыдущую задачу, предполагая, что колебания вызваны поперечным ударом в точке $x = x_0$, передавшим стержню импульс I.

2. Свободные колебания в среде с сопротивлением. В задачах 97, 101, 103, 105, 108, 111 колебания струн и стержней рассматривались в среде без сопротивления. Предположим теперь, что в этих задачах среда оказывает сопротивление, пропорциональное скорости, тогда получим задачи **117**, **118**, **119**, **120**, **121** и **122** соответственно. Решить задачи 117–122, не вычисляя энергии отдельных гармоник.

123. Изолированный однородный электрический провод $0 \leqslant x \leqslant l$ заряжен до некоторого потенциала $v_0 = \text{const}$. В начальный момент времени конец $x = 0$ заземляется, а конец $x = l$ продолжает оставаться изолированным.

Найти распределение напряжения в проводе, если самоиндукция, сопротивление и емкость единицы длины провода известны [1]).

124. Найти электрические колебания в однородном проводе $0 \leqslant x \leqslant l$, если конец $x = 0$ заземлен, конец $x = l$ изолирован, начальный ток равен нулю, а начальный потенциал равен

$$v(x, 0) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a, \\ \dfrac{Q}{C(b-a)}, & a < x < b, \\ 0, & b < x < l. \end{cases}$$

Ограничиваясь случаем, когда $\dfrac{\pi}{l\sqrt{CL}} > \left|\dfrac{R}{L} - \dfrac{G}{C}\right|$, найти выражение для напряжения.

125. Найти напряжение в проводе с начальным током и начальным напряжением, равными нулю, если в начальный момент в точке $x = x_0$ этого провода помещается сосредоточенный заряд Q. Остальные условия такие же, как в предыдущей задаче.

3. Вынужденные колебания под действием распределенных и сосредоточенных сил в среде без сопротивления и в среде с сопротивлением. В этом пункте сначала рассматриваются задачи с постоянными вынуждающими силами, затем задачи с гармонически меняющимися во времени вынуждающими силами и, наконец, задачи с вынуждающими силами, изменяющимися во времени по произвольному закону.

126. Решить задачу 97 при условии, что колебания происходят в поле силы тяжести в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости, а концы страны закреплены на одинаковой высоте.

127. Упругий стержень $0 \leqslant x \leqslant l$ расположен вертикально и верхним концом ($x = 0$) жестко прикреплен к свободно падающему лифту, который, достигнув скорости v_0, мгновенно останавливается. Найти продольные колебания стержня, если его нижний конец ($x = l$) свободен.

128. Найти продольные колебания стержня $0 \leqslant x \leqslant l$, если один его конец закреплен жестко, а к другому с момента $t = 0$ приложена сила $F_0 = \text{const}$.

---

[1]) Утечка $G = 0$ согласно предположению об изолированности провода.

129. В конце $x = l$ трубопровода $0 \leqslant x \leqslant l$ расход жидкости изменяется в момент времени $t = 0$ скачком на величину $A = \text{const}$; конец $x = 0$ соединен с большим резервуаром, где давление жидкости остается неизменным.

Считая, что до изменения расхода в конце $x = l$ давление и расход в трубопроводе были постоянными, найти изменение расхода в трубопроводе при $t > 0$ и изменение давления в сечении $x = l$ при $t > 0$.

130. Найти напряжение в однородном электрическом проводе, сопротивление, самоиндукция, утечка и емкость единицы длины которого соответственно равны R, L, G и C, если начальные ток и напряжение равны нулю, конец $x = l$ изолирован, а к концу $x = 0$, начиная с момента $t = 0$, приложена постоянная э.д.с. E.

131. Решить предыдущую задачу, предполагая, что конец провода $x = l$ заземлен.

132. В точке x_0 струны $0 \leqslant x \leqslant l$ с момента $t = 0$ приложена постоянная поперечная сила F_0. Найти колебания струны, если ее концы закреплены жестко.

133. К струне $0 \leqslant x \leqslant l$ с жестко закрепленными концами с момента времени $t = 0$ приложена непрерывно распределенная сила с линейной плотностью

$$\Phi(x, t) = \Phi(x) \sin \omega t.$$

Найти колебания струны в среде без сопротивления; исследовать возможность резонанса и найти решение в случае резонанса.

134. Решить предыдущую задачу при условии, что линейная плотность силы равна $\Phi(x, t) = \Phi_0 \sin \omega t$, $0 < x < l$, $0 < t < +\infty$, где $\Phi_0 = \text{const}$.

135. Найти продольные колебания стержня $0 \leqslant x \leqslant l$, конец $x = 0$ которого закреплен жестко, а конец $x = l$, начиная с момента $t = 0$, движется по закону

$$u(l, t) = A \sin \omega t, \quad 0 < t < +\infty.$$

Среда не оказывает сопротивления колебаниям.

136. Найти продольные колебания стержня $0 \leqslant x \leqslant l$ в среде без сопротивления, если конец $x = 0$ стержня закреплен жестко, а к концу $x = l$, начиная с момента $t = 0$, приложена сила

$$F(t) = A \sin \omega t, \quad 0 < t < +\infty.$$

137. Решить задачу 35, предполагая, что в начальный момент времени $t = 0$ стержень находился в горизонтальном положении и что $Q = 0$, $\omega = \text{const}$. Рассмотреть случай без резонанса.

138. Найти колебания струны $0 \leqslant x \leqslant l$ с жестко закрепленными концами, если в точке $x = x_0$ этой струны с момента $t = 0$ приложена поперечная сила

$$F(t) = A \sin \omega t, \quad 0 < t < +\infty.$$

Ограничиться случаем, когда частота вынуждающей силы не совпадает ни с одной из собственных частот.

139. Решить предыдущую задачу, если

$$F(t) = A\cos\omega t, \quad 0 < t < +\infty.$$

140. Решить задачу 138, если $F(t)$ есть произвольная периодическая сила с периодом ω, т. е.

$$F(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n \cos n\omega t + \beta_n \sin n\omega t), \quad 0 < t < +\infty.$$

141. К струне $0 \leqslant x \leqslant l$ с жестко закрепленными концами с момента времени $t = 0$ приложена непрерывно распределенная сила с линейной плотностью $\Phi(x, t) = \Phi_0(x)\sin\omega t$. Найти колебания струны при нулевых начальных условиях, предполагая, что среда оказывает сопротивление, пропорциональное скорости. Найти установившиеся колебания, представляющие собой главную часть решения при $t \to +\infty$. (Ср. с задачей 133.)

Замечание. Установившиеся колебания имеют частоту вынуждающей силы; колебания с другими частотами затухают.

142. Решить задачу 136, предполагая, что колебания происходят в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости. Найти установившиеся колебания, представляющие собой главную часть решения при $t \to +\infty$.

143. Решить задачу 130, предполагая, что к концу $x = l$ провода приложена с момента $t = 0$ э.д.с. $E(t) = E_0 \sin\omega t$, $0 < t < +\infty$, $E_0 = \text{const}$, а конец $x = 0$ изолирован. Найти установившиеся колебания, представляющие главную часть решения при $t \to +\infty$.

144. Решить задачу 131, предполагая, что к концу $x = l$ провода приложена с момента $t = 0$ э.д.с. $E(t) = E_0 \sin\omega t$, $0 < t < +\infty$, $E_0 = \text{const}$, а конец $x = 0$ заземлен. Найти установившиеся колебания — главную часть решения при $t \to +\infty$.

145. Найти установившиеся колебания давления на конце $x = l$ трубопровода $0 \leqslant x \leqslant l$, если на этом конце находится смягчающий колпак, а расход поступающей извне жидкости меняется гармонически во времени, на другом же конце трубопровода давление остается постоянным.

146. Найти колебания струны $0 \leqslant x \leqslant l$ с жестко закрепленными концами под действием силы, приложенной с момента $t = 0$ и имеющей плотность

$$F(x, t) = \Phi(x)t, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 < t < +\infty,$$

предполагая, что среда не оказывает сопротивления колебаниям.

147. Найти продольные колебания стержня $0 \leqslant x \leqslant l$, левый конец которого закреплен жестко, а к правому с момента $t = 0$ приложена сила

$$F(t) = At, \quad 0 < t < +\infty, \quad A = \text{const},$$

предполагая, что среда не оказывает сопротивления колебаниям.

148. Найти колебания струны $0 \leqslant x \leqslant l$ с жестко закрепленными концами под действием распределенной силы, приложенной с момен-

та $t = 0$ и имеющей плотность

$$F(x, t) = \Phi(x)t^m, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 < t < +\infty, \quad m > -1,$$

предполагая, что среда не оказывает сопротивления колебаниям.

149. Найти продольные колебания стержня $0 \leqslant x \leqslant l$ в среде без сопротивления под действием силы

$$F(t) = At^m, \quad 0 < t < +\infty, \quad A = \text{const}, \quad m > -1,$$

приложенной с момента $t = 0$ к концу $x = l$, если конец $x = 0$ фиксирован жестко.

150. Решить задачу 133 методом, указанным для задачи 148.

151. Решить задачу 141 методом, указанным для задачи 148.

152. Найти колебания струны [1]) $0 \leqslant x \leqslant l$ с жестко закрепленными концами, вызванные ударом мягкого выпуклого молоточка, предполагая, что среда не оказывает сопротивления колебаниям. Молоточек действует на струну с силой, линейная плотность которой равна

$$F(x, t) = \begin{cases} A\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{x - x_0}{\delta}\right)\sin\dfrac{\pi t}{\tau}, & |x - x_0| < \delta, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ 0, & |x - x_0| < \delta, \quad t > \tau, \\ 0, & 0 \leqslant x \leqslant x_0 - \delta, \quad x_0 + \delta \leqslant x \leqslant l, \quad 0 < t < \infty. \end{cases}$$

153. Найти колебания струны $0 \leqslant x \leqslant l$ с жестко закрепленными концами в среде без сопротивления, вызванные поперечным ударом в точке x_0, $0 < x_0 < l$, в момент $t = 0$, передавшим струне импульс I, учитывая этот удар свободным членом уравнения [2]).

154. Решить задачу 146, предполагая, что среда оказывает сопротивление, пропорциональное скорости.

155. Решить задачу 153, предполагая, что среда оказывает сопротивление, пропорциональное скорости.

156. Найти поперечные колебания стержня с шарнирно закрепленными («свободно опертыми») концами под действием постоянной поперечной силы P, точка приложения которой движется по стержню, начиная с момента $t = 0$ от конца $x = 0$ к концу $x = l$ с постоянной скоростью v_0, предполагая, что колебания происходят в среде без сопротивления.

157. Решить предыдущую задачу, если $P = P_0 \sin \omega t$, $P_0 = \text{const}$.

158. Найти поперечные колебания стержня под действием поперечной сосредоточенной силы $P = P_0 \sin \omega t$, приложенной с момента $t = 0$ в точке x_0 стержня, если концы стержня закреплены шарнирно («свободно оперты»), а среда не оказывает сопротивления колебаниям.

[1]) См. [7, с. 140–143].

[2]) Ср. с решением задачи 101.

159. Решить предыдущую задачу, предполагая, что колебания происходят в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости.

160. Конец $x = 0$ стержня закреплен жестко, а к свободному концу $x = l$ с момента $t = 0$ приложена постоянная поперечная сила $F = F_0 = \text{const}$. Найти поперечные колебания стержня, вызванные силой F_0.

161. Решить предыдущую задачу в случае, когда действие силы $F = F_0$ продолжается лишь до момента $t = T > 0$.

162. Решить задачу 160 в случае, когда $F = F_0 \sin \omega t$.

163. Конец $x = l$ стержня закреплен жестко, а конец $x = 0$ шарнирно («свободно оперт»). Найти поперечные колебания стержней, вызываемые равномерно распределенной поперечной силой с линейной плотностью $f_0 \sin \omega t$, приложенной к стержню с момента $t = 0$.

4. Колебания при неоднородности сред и других условиях, приводящих к уравнениям с переменными коэффициентами; учет сосредоточенных сил и масс.

164. Найти продольные колебания неоднородного стержня $0 \leqslant x \leqslant l$ с постоянным поперечным сечением, полученного соединением в сечении $x = x_0$ двух однородных стержней, если:

а) плотность массы и коэффициент упругости соответственно равны

$$\rho(x) = \begin{cases} \overline{\rho}, & 0 < x < x_0, \\ \bar{\bar{\rho}}, & x_0 < x < l, \end{cases} \qquad E(x) = \begin{cases} \overline{E}, & 0 < x < x_0, \\ \bar{\bar{E}}, & x_0 < x < l, \end{cases}$$

где $\overline{\rho}$, $\bar{\bar{\rho}}$, $\overline{E}$, $\bar{\bar{E}}$ — константы;

б) начальные продольные смещения равны

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{h}{x_0}\, x, & 0 < x < x_0, \\ \dfrac{h(l - x)}{l - x_0}, & x_0 < x < l; \end{cases}$$

в) начальные скорости равны нулю:

$$u_t(x, 0) = \psi(x) = 0, \quad 0 < x < l;$$

г) концы стержня закреплены жестко:

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty.$$

165. Найти установившиеся продольные колебания составного стержня, описанного в предыдущей задаче, если его конец $x = 0$ закреплен жестко, а к концу $x = l$ с момента $t = 0$ приложена сила

$$F(t) = F_0 \sin \omega t, \quad 0 < t < +\infty.$$

166. Найти продольные колебания стержня, описанного в задаче 164, если один его конец ($x = 0$) закреплен жестко, другой конец ($x = 0$) — упруго, а начальные условия произвольны.

167. Найти колебания однородной струны $0 \leqslant x \leqslant l$ с неподвижно закрепленными концами и сосредоточенной массой M, прикрепленной в точке $x = x_0$ струны, вызываемые начальными отклонениями

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} h\dfrac{x}{x_0} & \text{при} \quad 0 < x < x_0, \\ h\dfrac{l-x}{l-x_0} & \text{при} \quad x_0 < x < l. \end{cases}$$

168. Поперечное сечение составного стержня, описанного в задаче 164, на участке $0 \leqslant x \leqslant x_0$ равно $\overline{S}$, а на участке $x_0 \leqslant x \leqslant l$ равно $\bar{\bar{S}}$; в сечении x_0 находится жесткая прокладка массы M; конец $x = 0$ закреплен неподвижно, а конец $x = l$ свободен. Найти крутильные колебания стержня при произвольных начальных условиях.

169. Один конец упругого однородного вала жестко закреплен, а на другой насажен шкив с осевым моментом инерции M. Найти крутильные колебания вала при произвольных начальных условиях, если модуль сдвига равен G, полярный момент инерции поперечного сечения вала равен K, а осевой момент инерции единицы длины вала равен J.

170. Найти установившиеся продольные колебания конического упругого стержня $0 \leqslant x \leqslant l$, вызываемые гармонической продольной силой $F = F_0 \sin \omega t$, приложенной к концу $x = l$, если конец $x = 0$ закреплен неподвижно (см. задачи 21 и 89).

171. Решить задачу 23, предполагая, что колебания струны вызваны начальными отклонениями, а начальные скорости равны нулю.

172. Решить задачу 24 при произвольных начальных условиях.

173. Решить задачу 25 при произвольных начальных условиях, поместив начало координат в закрепленный конец струны.

§ 4. Метод интегральных представлений

В настоящем параграфе рассматриваются задачи о колебаниях неограниченной, полуограниченной и конечной струны, а также аналогичные задачи из других областей физики, причем для их решения применяются нижеследующие методы: метод интеграла Фурье, переход к конечному интервалу методом отражений, метод Римана.

1. Метод интеграла Фурье.

174. Решить краевую задачу

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{2}$$

175. Решить краевую задачу [1)]

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + c^2 u, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

[1)] Напомним, что к такому виду приводится телеграфное уравнение с помощью замены искомой функции $v(x, t) = e^{-\mu t} u(x, t)$.

176. Решить краевую задачу

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + c^2 u + f(x,\, t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u(x,\, 0) = u_t(x,\, 0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty.$$

177. Решить краевую задачу

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x,\, t < +\infty,$$
$$u(0,\, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u(x,\, 0) = f(x), \quad u_t(x,\, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < +\infty.$$

178. Решить краевую задачу

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x,\, t < +\infty,$$
$$u_x(0,\, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u(x,\, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x,\, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < +\infty.$$

179. Решить краевую задачу

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x,\, t < +\infty,$$
$$u(0,\, t) = \mu(t), \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u(x,\, 0) = u_t(x,\, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty.$$

180. Решить краевую задачу

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x,\, t < +\infty,$$
$$u_x(0,\, t) = \nu(t), \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u(x,\, 0) = u_t(x,\, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty.$$

181. Решить краевые задачи для уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,\, t)$$

при нулевых начальных условиях и граничных условиях:
а) $u(0,\, t) = 0$; б) $u_x(0,\, t) = 0$.

182. Решить краевую задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + c^2 u, \quad 0 < x, \quad t < +\infty,$$
$$u_x(0,\, t) = \nu(t), \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u(x,\, 0) = u_t(x,\, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty.$$

183. Решить краевую задачу

$$v_{tt} = v_{xx} + c^2 v, \quad 0 < x,\, t < +\infty,$$
$$v(0,\, t) = \mu(t), \quad 0 < t < +\infty,$$
$$v(x,\, 0) = 0, \quad v_t(x,\, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty.$$

184. Решить краевую задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + c^2 u, \quad 0 < x,\, t < +\infty,$$
$$u_x(0,\, t) - hu(0,\, t) = \varkappa(t), \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u(x,\, 0) = 0, \quad u_t(x,\, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty.$$

185. Доказать[1], что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f}(\lambda)\overline{g}(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} g(s)f(x-s)\,ds,$$

где $\overline{f}(\lambda)$ и $\overline{g}(\lambda)$ — образы Фурье функций $f(x)$ и $g(x)$ с ядром $e^{i\lambda\xi}$.

186. Доказать, что

$$\int_0^{+\infty} \overline{f}^{(c)}(\lambda)\,\overline{g}^{(c)}(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} g(s)\big[f(|x-s|)+f(x+s)\big]ds,$$

где $\overline{f}^{(c)}(\lambda)$ и $\overline{g}^{(c)}(\lambda)$ — косинус-образы Фурье функций $f(x)$ и $g(x)$.

187. Доказать, что

$$\int_0^{+\infty} \overline{f}^{(s)}(\lambda)\,\overline{g}^{(c)}(\lambda)\sin\lambda x\,d\lambda = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} f(s)\big[g(|x-s|)-g(x+s)\big]ds,$$

где $\overline{f}^{(s)}(\lambda)$ и $\overline{g}^{(c)}(\lambda)$ — соответственно синус-образ[2] Фурье и косинус-образ Фурье функций $f(x)$ и $g(x)$.

188. Решить краевую задачу

$$u_{tt}+a^2u_{xxxx}=0, \quad -\infty<x<+\infty, \quad 0<t<+\infty,$$
$$u(x,\,0)=\varphi(x), \quad u_t(x,\,0)=a\psi''(x), \quad -\infty<x<+\infty.$$

Рассмотреть также частный случай, когда

$$\varphi(x)=Ae^{-\frac{x^2}{4k^2}}, \quad \psi(x)\equiv 0, \quad -\infty<x<+\infty.$$

189. Решить краевую задачу

$$u_{tt}+a^2u_{xxxx}=0, \quad 0<x,\,t<+\infty,$$
$$u(0,\,t)=\mu(t), \quad u_{xx}(0,\,t)=0, \quad 0<t<+\infty,$$
$$u(x,\,0)=u_t(x,\,0)=0, \quad 0<x<+\infty.$$

190. Доказать, что для представимости решения краевой задачи

$$u_{tt}=a^2u_{xx}, \quad 0<x<+\infty, \quad 0<t<+\infty,$$
$$\sum_{k=0}^{N} A_k\frac{\partial^k u}{\partial x^k}=0, \quad 0<t<+\infty, \quad x=0,$$
$$u(x,\,0)=\varphi(x), \quad u_t(x,\,0)=\psi(x), \quad 0<x<+\infty$$

в виде

$$u(x,\,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz$$

---

[1] Это соотношение часто называют теоремой о свертке.

[2] См. § 4 ответов и указаний к настоящей главе, вводную часть пункта 1.

достаточно продолжить $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на отрицательную полуось x так, чтобы функции

$$\Phi(x)=\sum_{k=0}^{N} A_k \frac{d^k\varphi(x)}{dx^k} \quad \text{и} \quad \Psi(x)=\sum_{k=0}^{N} A_k \frac{d^k\psi(x)}{dx^k}$$

были нечетными [1]).

191. Доказать, что для представимости решения краевой задачи

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,\,t), \quad 0<x,\,t<+\infty,$$
$$\sum_{k=0}^{N} A_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k}=0, \quad 0<t<+\infty, \quad x=0,$$
$$u(x,\,0)=0, \quad u_t(x,\,0)=0, \quad 0<x<+\infty$$

в виде

$$u(x,\,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi$$

достаточно функцию $f(x,\,t)$ продолжить так на отрицательную полуось x, чтобы функция

$$F(x,\,t)=\sum_{k=0}^{N} A_k \frac{\partial^k f(x,\,t)}{\partial x^k}$$

была нечетной по x [2]).

192. Доказать, что для представимости решения краевой задачи

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+c^2u, \quad 0<x,\,t<+\infty,$$
$$\sum_{k=0}^{N} A_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k}=0, \quad 0<t<+\infty, \quad x=0,$$
$$u(x,\,0)=\varphi(x), \quad u_t(x,\,0)=\psi(x), \quad 0<x<+\infty,$$

в виде

$$u(x,\,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{ct}{2}\int_{x-at}^{x+at}\frac{I_1\left(c\sqrt{t^2-\dfrac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right)}{\sqrt{t^2-\dfrac{(x-\xi)^2}{a^2}}}\varphi(\xi)\,d\xi+$$
$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} I_0\left(c\sqrt{t^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right)\Psi(\xi)\,d\xi$$

достаточно продолжить функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на отрицательную по-

[1]) Здесь и ниже мы не затрагиваем вопроса непрерывности и дифференцируемости.

[2]) То же.

луось x так, чтобы функции

$$\Phi(x)=\sum_{k=0}^{N}A_k\,\frac{d^k\varphi(x)}{dx^k}\quad\text{и}\quad\Psi(x)=\sum_{k=0}^{N}A_k\,\frac{d^k\psi(x)}{dx^k}$$

были нечетными.

193. Доказать, что для представимости решения краевой задачи

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+c^2u+f(x,\,t),\quad 0<x,\,t<+\infty,$$
$$\sum_{k=0}^{N}A_k\,\frac{\partial^k u}{\partial x^k}=0,\quad 0<t<+\infty,\quad x=0,$$
$$u(x,\,0)=0,\quad u_t(x,\,0)=0,\quad 0<x<+\infty$$

в виде

$$u(x,\,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}I_0\left(c\sqrt{(t-\tau)^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right)f(\xi,\tau)\,d\xi$$

достаточно продолжить $f(x,\,t)$ на отрицательную полуось x таким образом, чтобы функция

$$F(x,\,t)=\sum_{k=0}^{N}A_k\,\frac{\partial^k f(x,\,t)}{\partial x^k}$$

была нечетной по x.

1*. Переход к конечному интервалу методом отражений.

194. Решить краевую задачу

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+c^2u,\quad 0<x<l,\quad 0<t<+\infty,$$
$$u(0,\,t)=0,\quad u(l,\,t)=0,\quad 0<t<+\infty,$$
$$u(x,\,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,\,0)=\psi(x),\quad 0<x<l.$$

195. Решить краевую задачу

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+c^2u,\quad 0<x<l,\quad 0<t<+\infty,$$
$$u(0,\,t)=0,\quad u_x(l,\,t)=0,\quad 0<t<+\infty,$$
$$u(x,\,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,\,0)=\psi(x),\quad 0<x<l.$$

196. Решить краевую задачу

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+c^2u,\quad 0<x<l,\quad 0<t<+\infty,$$
$$u_x(0,\,t)=0,\quad u_x(l,\,t)=0,\quad 0<t<+\infty,$$
$$u(x,\,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,\,0)=\psi(x),\quad 0<x<l.$$

197. Решить краевую задачу

$$u_{tt}=u_{xx}+c^2u,\quad 0<x<l,\quad 0<t<+\infty,$$
$$u(0,\,t)=\mu_1(t),\quad u(l,\,t)=\mu_2(t),\quad 0<t<+\infty,$$
$$u(x,\,0)=0,\quad u_t(x,\,0)=0,\quad 0<x<l.$$

2. Метод Римана.

198. Найти функцию Римана для оператора

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a = \text{const},$$

и решить с ее помощью краевую задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < t < +\infty, \quad -\infty < x < +\infty,$$
$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

199. Найти функцию Римана для оператора

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \pm c^2 u, \quad a = \text{const},$$

и решить с ее помощью краевую задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \pm c^2 u + f(x, t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

200. Решить краевую задачу

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 1 < y < +\infty,$$
$$u\big|_{y=1} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=1} = \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

201. Решить краевую задачу

$$(l - x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad -\infty < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad l > 0,$$
$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x), \quad -\infty < x < l.$$

202. Решить краевую задачу

$$(l^2 - x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{4} u = 0, \quad -l < x < l, \quad 0 < y < +\infty,$$
$$u\big|_{y=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \psi(x), \quad -l < x < l.$$

Глава III

УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Уравнения параболического типа получаются при исследовании таких физических явлений, как теплопроводность, диффузия, распространение электромагнитных полей в проводящих средах, движение вязкой жидкости.

В настоящей главе рассматривается постановка и решение краевых задач для уравнений параболического типа в случае, когда изучаемые физические процессы могут быть охарактеризованы функциями двух независимых переменных: одной пространственной координаты и времени. В частности, всюду в настоящей главе начальные значения искомой функции будут предполагаться зависящими лишь от одной пространственной координаты.

Уравнениям параболического типа для функций с большим числом независимых переменных посвящена гл. V, которая является продолжением и развитием настоящей главы.

§ 1. Физические задачи, приводящие к уравнениям параболического типа; постановка краевых задач

В первой группе задач этого параграфа предполагается однородность сред, а во второй допускаются нарушения однородности сред и наличие сосредоточенных факторов. Третья группа посвящена установлению подобия между различными физическими явлениями, приводящими к уравнениям параболического типа.

Поставить краевую задачу, соответствующую данной физической задаче, — это значит выбрать функцию, характеризующую физический процесс, а затем:

1) вывести дифференциальное уравнение для этой функции;

2) установить для нее граничные условия;

3) сформулировать начальные условия.

Краткая сводка основных законов теплопроводности и диффузии, из которых выводятся дифференциальные уравнения и граничные условия, дается в гл. III, § 1, ответы и указания.

1. Однородные среды; уравнения с постоянными коэффициентами. Всюду в задачах этого пункта среды предполагаются однородными и изотропными, а их свойства — не зависящими от искомой функции и времени. Стержни, провода, трубы и т.п. здесь и всюду, где не оговорено противное, предполагаются имеющими постоянное поперечное сечение.

1. Поставить краевую задачу об определении температуры стержня $0 \leqslant x \leqslant l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если его начальная температура является произвольной функцией x; рассмотреть случаи, когда:

а) концы стержня поддерживаются при заданной температуре;

б) на концы стержня подается извне заданный тепловой поток;

в) на концах стержня происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой задана.

2. На боковой поверхности стержня происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой является заданной функцией времени. Пренебрегая деформацией изотермических поверхностей, поставить краевую задачу об определении температуры в стержне при начальных и граничных условиях предыдущей задачи.

3. Поставить краевую задачу об остывании тонкого кольца, на поверхности которого происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона с окружающей средой, имеющую заданную температуру. Неравномерностью распределения температуры по толщине кольца пренебречь.

4. Поставить краевую задачу о нагревании полуограниченного стержня, если конец стержня горит, причем фронт горения распространяется с постоянной скоростью v_0 и имеет известную температуру $\varphi(t)$.

5. Вывести уравнение для температуры тонкой проволоки, нагреваемой постоянным электрическим током, если на ее поверхности происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона с окружающим воздухом, имеющим известную температуру. Поставить краевую задачу об определении температуры в этом проводе, если его концы зажаты в массивные клеммы с заданной теплоемкостью и очень большой теплопроводностью.

6. Вывести уравнение диффузии в неподвижной среде, предполагая, что поверхностями равной концентрации в каждый момент времени t являются плоскости, перпендикулярные к оси x. Написать граничные условия, предполагая, что диффузия происходит в плоском слое $0 \leqslant x \leqslant l$; рассмотреть случаи, когда:

а) на граничных плоскостях концентрация диффундирующего вещества поддерживается равной нулю;

б) граничные плоскости непроницаемы;

в) граничные плоскости полунепроницаемы, причем диффузия че-

рез эти плоскости происходит по закону, подобному закону для конвективного теплообмена.

7. Вывести уравнение диффузии в среде, движущейся с постоянной скоростью в направлении оси x, если поверхностями равной концентрации в каждый момент времени t являются плоскости, перпендикулярные к оси x.

8. Вывести уравнение диффузии взвешенных частиц с учетом оседания, предполагая, что скорость частиц, вызываемая силой тяжести, постоянна, а концентрация частиц зависит только от одной геометрической координаты z (высоты) и времени t. Написать граничное условие, соответствующее непроницаемой перегородке.

9. Вывести уравнение диффузии при условиях задачи 6 для вещества, частицы которого:

а) распадаются (например, неустойчивый газ), причем скорость распада диффундирующего вещества в каждой точке пространства пропорциональна концентрации;

б) размножаются (например, диффузия нейтронов), причем скорость размножения диффундирующего вещества в каждой точке пространства пропорциональна концентрации.

10. Поставить краевую задачу о движении слоя вязкой жидкости между двумя параллельными плоскостями, если одна из них в момент времени $t = 0$ начинает двигаться параллельно другой с заданной скоростью, имеющей постоянное направление. Действием силы тяжести пренебречь.

11. Вывести уравнения для процесса распространения плоского электромагнитного поля в проводящей среде. (Среда называется проводящей, если токами смещения можно пренебречь по сравнению с токами проводимости.)

2. Неоднородные среды, сосредоточенные факторы; уравнения с переменными коэффициентами и условия сопряжения. В этом пункте сначала рассматриваются кусочно-однородные среды и сосредоточенные факторы, что приводит к уравнениям с кусочно-постоянными коэффициентами и к условиям сопряжения. Затем рассматриваются задачи, приводящие к уравнениям с непрерывно меняющимися коэффициентами.

12. Неограниченный стержень с постоянным поперечным сечением получен соединением двух полуограниченных однородных стержней с различными коэффициентами теплопроводности и температуропроводности.

Поставить краевую задачу об определении температуры в этом стержне, рассмотрев случаи, когда:

а) концы составляющих стержней соединены непосредственно (приварены торцом к торцу);

б) концы стержней соединены массивной муфтой с теплоемкостью C_0, причем материал муфты обладает очень большой теплопроводностью.

Поверхность стержня и внешнюю поверхность муфты (не прилегающую к стержню) считать теплоизолированными.

13. Замкнутый цилиндрический сосуд с непроницаемыми стенками получен соединением в начальный момент времени двух цилиндрических сосудов, каждый из которых заполнен однородной средой с равномерно распределенным веществом, причем концентрация этого вещества в обоих составляющих сосудах различна и свойства среды в одном и другом сосуде различны.

Поставить краевую задачу о диффузии упомянутого вещества в составном цилиндре, рассмотрев случаи, когда:

а) цилиндры соединены непосредственно;

б) цилиндры соединены через полунепроницаемую перегородку.

14. Поставить краевую задачу о нагревании тонкого стержня, по которому скользит с постоянной скоростью плотно прилегающая электропечь постоянной мощности, если внешняя поверхность печи, не прилегающая к стержню, теплоизолирована, а теплоемкость печи пренебрежимо мала.

15. Расплавленный металл заполняет вертикальный цилиндрический сосуд, стенки и дно которого теплонепроницаемы. С момента $t = 0$ свободная поверхность металла поддерживается при температуре $u_1 \equiv$ const, которая ниже температуры плавления. Поставить краевую задачу об остывании и затвердевании металла, если его начальная температура равна $u_0 = \text{const}$.

16. Поставить краевую задачу о движении под действием силы тяжести тонкой вертикальной бесконечной плоской пластины в слое вязкой жидкости между двумя неподвижными параллельными ей пластинами. Действием поля силы тяжести на жидкость пренебречь.

17. Поставить краевую задачу об остывании равномерно нагретого стержня, имеющего форму усеченного конуса, пренебрегая искривлением изотермических поверхностей, если концы стержня теплоизолированы, а на боковой поверхности происходит теплообмен со средой, температура которой равна нулю.

3. Подобие краевых задач [1]).

18. Сформулировать задачу теплопроводности, аналогичную задаче 10 о движении вязкой жидкости. Установить необходимые и достаточные условия для того, чтобы первая задача была подобна второй с заданными коэффициентами подобия k_x, k_t, k_u.

19. Сформулировать задачу теплопроводности 2 (задачу (I)), аналогичную задаче 9 (задаче (II)) о диффузии неустойчивого газа. Установить необходимые и достаточные условия подобия задачи (I) задаче (II) с заданными коэффициентами подобия.

20. Сформулировать задачу об определении электрического напряжения в проводе, аналогичную следующей задаче об определении

[1]) О понятии подобия краевых задач см. гл. II, § 1, с. 20 и 169.

температуры в стержне: «Найти температуру стержня, если на одном его конце и на боковой поверхности происходит теплообмен со средой, температура которой равна нулю, а температура другого конца меняется по заданному закону; начальная температура стержня равна нулю» (задача (II)). Установить необходимые и достаточные условия подобия задачи (I) задаче (II) с заданными коэффициентами подобия.

21. Сформулировать задачу теплопроводности (задачу (I)), аналогичную задаче о распространении плоского магнитного поля в проводящем слое $0 \leqslant x \leqslant l''$ (задаче (II)) при нулевых начальных условиях, предполагая, что всюду левее слоя мгновенно установилось постоянное однородное магнитное поле, параллельное слою, причем плоскость $x = l''$ является идеально проводящей.

§ 2. Метод разделения переменных

В первом пункте [1)] настоящего параграфа собраны задачи для однородных изотропных сред; они приводят к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами. Во втором пункте рассматриваются задачи для неоднородных сред, а также некоторые задачи с сосредоточенными факторами [2)].

1. Однородные изотропные среды. Уравнения с постоянными коэффициентами.

а) Задачи теплопроводности с постоянными граничными условиями и свободными членами.

22. а) Найти распределение температуры в стержне $0 \leqslant x \leqslant l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если температура его концов поддерживается равной нулю, а начальная температура равна произвольной функции $f(x)$.

б) Рассмотреть, в частности, случай, когда $f(x) \equiv U_0 = \text{const}$, и дать оценку погрешности, допускаемой при замене суммы ряда, представляющего решение в точке $x = l/2$, его частичной суммой, и установить, с какого момента времени отношение суммы всех его членов, начиная со второго, к первому члену будет заведомо меньше наперед заданного $\varepsilon > 0$.

Замечание. При этом мы будем говорить, что в рассматриваемой точке наступил регулярный режим [3)] с относительной точностью ε.

23. Начальная температура стержня $0 \leqslant x \leqslant l$ с теплоизолированной боковой поверхностью равна

$$U_0 = \text{const}, \tag{1}$$

[1)] Стержни, провода, цилиндры, встречающиеся в этом пункте, считаются имеющими постоянное поперечное сечение.

[2)] См. первую сноску на с. 32.

[3)] Подробнее о регулярном режиме см. [25].

а на концах его поддерживается постоянная температура

$$u(0,\,t) = U_1 = \text{const}, \quad u(l,\,t) = U_2 = \text{const}, \quad 0 < t < +\infty. \qquad (2)$$

Найти температуру $u(x,\,t)$ стержня при $t > 0$; найти также стационарную температуру

$$\overline{u}(x) = \lim_{t \to +\infty} u(x,\,t).$$

24. Начальная температура стержня $0 < x < l$ является произвольной функцией $f(x)$. Температуры концов постоянны:

$$u(0,\,t) = U_1 = \text{const}, \quad u(l,\,t) = U_2 = \text{const}, \quad 0 < t < +\infty.$$

На боковой поверхности происходит теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой равна $u_0 = \text{const}$. Найти температуру стержня. Рассмотреть, в частности, случай, когда $U_1 = U_2 = 0$, $f(x) = 0$.

25. Найти температуру стержня $0 \leqslant x \leqslant l$ с теплоизолированной боковой поверхностью и теплоизолированными концами, если его начальная температура является произвольной функцией x. Перейти затем к случаю, когда на боковой поверхности происходит конвективный теплообмен (по закону Ньютона) со средой, температура которой равна нулю.

26. Найти температуру стержня, на боковой поверхности которого происходит конвективный теплообмен со средой нулевой температуры, если на концы стержня подаются извне постоянные тепловые потоки, а начальная температура является произвольной функцией.

27. Найти температуру стержня $0 \leqslant x \leqslant l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если один его конец ($x = 0$) поддерживается при заданной фиксированной температуре, а на другой конец ($x = l$) подается извне заданный постоянный тепловой поток, причем начальная температура произвольна. Рассмотреть, в частности, случай, когда начальная температура равна нулю, а конец $x = l$ теплоизолирован, и оценить погрешность, допускаемую при замене суммы ряда, представляющего решение в точке $x = l$, его частичной суммой. Найти момент времени, с которого на конце $x = l$ заведомо наступит регулярный режим [1] с относительной точностью ε.

28. Найти температуру стержня $0 \leqslant x \leqslant l$ с теплоизолированной боковой поверхностью и теплоизолированным концом $x = 0$, если начальная температура стержня равна нулю и через конец $x = l$ в стержень подается постоянный тепловой поток. Дать оценку погрешности, допускаемой при замене суммы ряда, представляющего решение в точке $x = 0$, его частичной суммой.

[1] О регулярном режиме см. условие задачи 22 и соответствующее примечание. Здесь должно рассматриваться отношение суммы всех членов, зависящих экспоненциально от времени, начиная со второго, к первому члену, зависящему экспоненциально от времени; эти члены предполагаются занумерованными в порядке возрастания собственных значений.

29. Найти температуру стержня $0 \leqslant x \leqslant l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, один конец которого ($x = 0$) теплоизолирован, а на другом конце ($x = l$) происходит конвективный теплообмен со средой, температура которой равна $U_0 = \text{const}$. Начальная температура стержня равна нулю. Оценить погрешность, допускаемую при замене суммы ряда, представляющего решение в точке $x = 0$, его частичной суммой; найти момент времени, с которого на конце $x = 0$ заведомо будет иметь место регулярный режим [1]) с относительной точностью ε.

30. а) Найти температуру стержня $0 \leqslant x \leqslant l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если на каждом из его концов происходит конвективный теплообмен с внешней средой, имеющей постоянную температуру, а начальная температура произвольна.

б) Рассмотреть, в частности, случай, когда температура внешней среды на обоих концах одинакова, а начальная температура стержня равна нулю, и установить связь с решением задачи 29.

31. Решить задачу 30, а), предполагая, что на боковой поверхности стержня происходит конвективный теплообмен со средой, температура которой равна нулю.

32. Найти распределение температуры в тонком однородном кольце единичного радиуса, на поверхности которого происходит конвективный теплообмен с окружающей средой, имеющей постоянную температуру; начальная температура кольца произвольна [2]). Рассмотреть, в частности, случай, когда в начальный момент времени кольцо было равномерно нагретым.

б) Задачи теплопроводности с переменными граничными условиями и свободными членами, зависящими от x и t.

33. Найти распределение температуры в стержне $0 < x < l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если на его конце $x = 0$ поддерживается температура, равная нулю, а на конце $x = l$ температура меняется по закону

$$u(l, t) = At, \quad A = \text{const}, \quad 0 < t < +\infty.$$

Начальная температура стержня равна нулю.

34. Найти температуру стержня $0 \leqslant x \leqslant l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если по стержню непрерывно распределены тепловые источники, плотность которых равна $\Phi(t)\sin(\pi x/l)$, начальная температура стержня является произвольной функцией $f(x)$, а температура концов поддерживается равной нулю.

35. а) Найти температуру стержня $0 \leqslant x \leqslant l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если его начальная температура является произвольной функцией $f(x)$, температура концов поддерживается равной нулю, по стержню непрерывно распределены источники тепла, плотность которых равна $F(x, t)$.

---

[1]) См. задачу 22 и сноску к задаче 27.

[2]) См. задачу 3.

б) Рассмотреть, в частности, предельный случай, когда в стержне действует лишь один сосредоточенный источник постоянной мощности Q, находящийся в точке x_0, $0 < x_0 < l$, а начальная температура стержня равна нулю.

36. По стержню $0 \leqslant x \leqslant l$, на боковой поверхности которого происходит конвективный теплообмен со средой (температура среды равна нулю), движется печь с постоянной скоростью v_0. Поток тепла от печи к стержню равен $q(t) = Ae^{-ht}$, где h — коэффициент теплообмена, входящий в уравнение теплопроводности для стержня $u_t = a^2 u_{xx} - hu$. Найти температуру стержня, если его начальная температура равна нулю и температура концов все время поддерживается равной нулю.

37. Решить задачу 35, а) для стержня $0 \leqslant x \leqslant l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если на его концах происходит конвективный теплообмен со средой, температура которой меняется по заданному закону.

38. Найти температуру $u(x, t)$ стержня, решая краевую задачу

$$u_t = a^2 u_{xx} - Hu + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u_x(0, t) - hu(0, t) = \psi_1(t), \quad u_x(l, t) + hu(l, t) = \psi_2(t), \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

путем сведения к однородной краевой задаче.

39. Найти асимптотическое выражение при $t \to +\infty$ для температуры $u(x, t)$ в стержне с теплоизолированной боковой поверхностью, если на его концах выполняется одно из следующих граничных условий:

а) $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = A\cos\omega t$, $0 < t < +\infty$;

б) $u(0, t) = 0$, $u_x(l, t) = A\cos\omega t$, $0 < t < +\infty$;

в) $u(0, t) = 0$, $u_x(l, t) + hu(l, t) = A\cos\omega t$, $0 < t < +\infty$.

40. На поверхности тонкого кольца единичного радиуса проходит конвективный теплообмен со средой, температура которой равна нулю; начальная температура кольца равна нулю [1]. В некоторой фиксированной точке кольца в начальный момент времени выделилось Q единиц тепла. Найти температуру кольца. Рассмотреть точку кольца, диаметрально противоположную точке, в которой выделилось тепло, и оценить погрешность, допускаемую при замене суммы ряда, представляющего решение в этой точке, его частичной суммой.

в) Задачи диффузии.

41. Давление и температура воздуха в цилиндре $0 \leqslant x \leqslant l$ равны атмосферным; один конец цилиндра с момента $t = 0$ открыт, а другой остается все время закрытым. Концентрация некоторого газа в окружающей атмосфере равна $U_0 = \text{const}$. С момента $t = 0$ газ диффундирует в цилиндр через открытый конец. Найти количество газа,

[1] См. задачу 32, а также задачу 3.

продиффундировавшего в цилиндр, если его начальная концентрация в цилиндре равна нулю.

42. Решить предыдущую задачу, предполагая, что оба конца цилиндра закрыты полунепроницаемой перегородкой, через которую и происходит диффузия.

43. Решить задачу 41, предполагая, что диффундирующий газ распадается, причем скорость распада в каждой точке пропорциональна концентрации газа в этой же точке.

44. В цилиндре $0 \leqslant x \leqslant l$ находится диффундирующее вещество, частицы которого размножаются, причем скорость размножения в каждой точке пропорциональна концентрации вещества в этой же точке. Найти критическую длину цилиндра [1)] для случаев, когда:

а) на обоих концах цилиндра поддерживается концентрация, равная нулю;

б) на одном конце поддерживается концентрация, равная нулю, а другой закрыт наглухо;

в) оба конца цилиндра закрыты наглухо.

г) Задачи электродинамики.

45. Найти электрическое напряжение в проводе $0 \leqslant x \leqslant l$, один конец которого изолирован, а к другому приложена постоянная электродвижущая сила. Распределенная самоиндукция и утечка провода пренебрежимо малы, начальный потенциал равен $v_0 = \text{const}$, а начальный ток равен нулю.

46. Распределенная самоиндукция и утечка провода $0 \leqslant x \leqslant l$ равны нулю; начальный потенциал и начальный ток также равны нулю. Найти напряжение в проводе, если один его конец $(x = l)$ заземлен через сосредоточенную емкость C_0, а к другому $(x = 0)$ приложена постоянная электродвижущая сила E_0.

47. Найти электрическое напряжение в проводе $0 \leqslant x \leqslant l$ с пренебрежимо малой самоиндукцией и утечкой, если его конец $x = l$ заземлен, начальный ток и начальный потенциал равны нулю, а к концу $x = 0$ приложена постоянная электродвижущая сила E_0 через сосредоточенное сопротивление R_0.

48. Проводящий слой $0 \leqslant x \leqslant l$ был свободен от электромагнитных полей. В момент $t = 0$ всюду вне слоя возникло постоянное однородное магнитное поле H_0, параллельное слою. Найти магнитное поле в слое при $t > 0$. Найти момент времени, начиная с которого в середине слоя заведомо будет иметь место регулярный режим с относительной точностью ε.

2. Неоднородные среды и сосредоточенные факторы. Уравнения с переменными коэффициентами и условия сопряжения.

49. Стержень $0 \leqslant x \leqslant l$ с теплоизолированной боковой поверхностью и постоянным поперечным сечением составлен из двух одно-

[1)] О понятии критических размеров см. [7, с. 471, 472].

родных стержней $0 \leqslant x \leqslant x_0$, $x_0 \leqslant x \leqslant l$ с различными физическими свойствами. Найти температуру в стержне, если его концы поддерживаются при температуре, равной нулю, а начальная температура произвольна.

50. Найти температуру однородного стержня с теплоизолированной боковой поверхностью, в точке x_0 которого $(0 < x_0 < l)$ находится сосредоточенная теплоемкость C_0. Начальная температура стержня произвольна, а концы поддерживаются при температуре, равной нулю.

51. Найти температуру стержня $0 \leqslant x \leqslant l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, имеющего форму усеченного конуса (см. задачу 17), если температура концов стержня поддерживается равной нулю, а начальная температура стержня произвольна.

52. Решить предыдущую задачу для стержня, боковая поверхность которого получается вращением кривой $y = Ae^{-mx}$ вокруг оси x.

53. Тяжелая вертикальная плоскость находится в слое вязкой жидкости, заключенном между двумя неподвижными вертикальными плоскостями. В момент $t = 0$ плоскость начинает падать. Найти ее скорость и скорости частиц вязкой жидкости, если начальные скорости равны нулю и если падающая плоскость равноудалена от граничных плоскостей. Действием поля силы тяжести на жидкость пренебречь.

§ 3. Метод интегральных представлений и функции источников

В настоящем параграфе рассматривается применение интегральных представлений к решению краевых задач для уравнения $u_t = a^2 u_{xx} + bu + f(x, t)$ (где b и f могут быть тождественно равными нулю) в случае неограниченной прямой, полупрямой и конечного отрезка. Сначала даются задачи на применение интегрального преобразования Фурье. Затем идут задачи на построение функций источников (функций Грина) и применение их к решению краевых задач.

1. Однородные изотропные среды. Применение интегрального преобразования Фурье к задачам на прямой и полупрямой.

Применяя интегральное преобразование Фурье[1)], решить следующие краевые задачи.

54. $u_t = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$

$$u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

55. $u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$

$$u(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty.$$

[1)] См. ответы и указания, гл. II, § 4, с. 255.

56. $u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, \quad t < +\infty,$
$u(0, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty,$
$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < +\infty.$

57. $u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, t < +\infty,$
$u_x(0, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty,$
$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < +\infty.$

58. $u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, t < +\infty,$
$u(0, t) = \varphi(t), \quad 0 < t < +\infty,$
$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty.$

59. $u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, t < +\infty,$
$u_x(0, t) = \varphi(t), \quad 0 < t < +\infty,$
$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty.$

60. $u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x, t < +\infty,$
$u(0, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty,$
$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty.$

61. $u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x, t < +\infty,$
$u_x(0, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty,$
$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty.$

62. Воспользовавшись уравнением из задачи 186 гл. II, доказать, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha\lambda^2}\cos\lambda x}{\lambda^2 + h^2}\, d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{4h\sqrt{\alpha}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-h\xi}\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\alpha}}\right) d\xi.$$

63. Воспользовавшись уравнением из задачи 187 гл. II, доказать, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha\lambda^2}\lambda\sin\lambda x}{\lambda^2 + h^2}\, d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\alpha}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-h\xi}\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\alpha}}\right) d\xi.$$

64. Применяя преобразование Фурье с ядром $K(x, \lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\lambda\cos\lambda x + h\sin\lambda x}{\lambda^2 + h^2}$, решить краевую задачу

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, t < +\infty,$$
$$u_x(0, t) - hu(0, t) = -h\varphi(t),$$
$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty.$$

65. Применяя преобразование Фурье с таким же ядром, как в предыдущей задаче, решить краевую задачу

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, t < +\infty,$$
$$u_x(0, t) - hu(0, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < +\infty.$$

2. Однородные изотропные среды. Построение функций влияния сосредоточенных источников. В настоящем пункте собраны главным образом задачи на построение и применение функций влияния мгновенных точечных источников тепла («функций Грина» для уравнения теплопроводности). Сначала идут задачи для неограниченной прямой, затем для полупрямой, причем среда предполагается изотропной и однородной, затем рассматриваются задачи для неоднородной прямой, составленной из двух однородных полупрямых, и некоторые другие задачи с неоднородностями сред и сосредоточенными факторами для неограниченной прямой и полупрямой; наконец, идут задачи для конечного отрезка, причем рассматриваются два различных представления функций влияния мгновенных источников тепла: одно получается методом разделения переменных (методом Фурье), другое — методом отражений, и производится их сравнение.

а) Неограниченная прямая.

66. Поверхность неограниченного стержня $-\infty < x < +\infty$ теплоизолирована, начальная температура равна нулю. В начальный момент времени в точке $x = \xi$ стержня выделилось мгновенно Q единиц тепла. Найти температуру стержня. (Построение функции источника для уравнения $u_t = a^2 u_{xx}$ на прямой $-\infty < x < +\infty$.)

67. Решить предыдущую задачу для стержня, на поверхности которого происходит конвективный теплообмен со средой, температура которой равна нулю. (Построение функции источника для уравнения $u_t = a^2 u_{xx} - hu$ на прямой $-\infty < x < +\infty$.)

68. Используя функцию источника, полученную в решении задачи 66, решить краевую задачу

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

69. Используя функцию источника, полученную в решении задачи 67, решить краевую задачу

$$u_t = a^2 u_{xx} - hu + f(x, t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

70. При условиях задачи 66 найти тот момент времени, в который температура в точке x достигает максимума, и найти это максимальное значение температуры (задача о распространении теплового импульса).

71. На поверхности стержня $-\infty < x < +\infty$ происходит конвективный теплообмен со средой, температура которой равна нулю; начальная температура стержня равна нулю; в точке $x = 0$ непрерывно действует тепловой источник постоянной мощности Q. Найти температуру $u(x, t)$ стержня. Найти также стационарную температуру

$$\overline{u}(x) = \lim_{t \to +\infty} u(x, t).$$

Какова была бы стационарная температура, если бы поверхность стержня была бы теплоизолирована?

72. С помощью формулы, полученной в решении задачи 68, решить задачу

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -\infty < x < -l, \\ U_0 = \text{const} \neq 0 & \text{при} \quad -l < x < l, \\ 0 & \text{при} \quad l < x < +\infty. \end{cases}$$

73. С помощью формулы, полученной в решении задачи 68, решить задачу

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -\infty < x < 0, \\ Ae^{-\alpha x} & \text{при} \quad 0 < x < +\infty, \quad A = \text{const}, \quad \alpha = \text{const} > 0. \end{cases}$$

74. Решить краевую задачу

$$u_t = a^2 u_{xx} - hu, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -\infty < x < -l, \\ U_0 = \text{const} & \text{при} \quad -l < x < l, \\ 0 & \text{при} \quad -l < x < +\infty \end{cases}$$

(ср. с задачей 72).

75. Решить краевую задачу 14 о нагревании стержня подвижной печкой при нулевом начальном условии.

б) Полупрямая.

76. Построить функцию источника для уравнения $u_t = a^2 u_{xx}$ на полупрямой $0 < x < +\infty$, на конце которой задано граничное условие первого рода. Перейти затем к случаю уравнения $u_t = a^2 u_{xx} - hu$.

77. Решить предыдущую задачу, если на конце полупрямой $0 < x < +\infty$ задано граничное условие второго рода.

78. Решить задачу 76, если на конце полупрямой $0 < x < +\infty$ задано граничное условие третьего рода.

79. Пользуясь функцией источника, решить краевую задачу

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x, t < +\infty,$$
$$u(0, t) = \varphi(t), \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < +\infty.$$

80. Пользуясь функцией источника, решить краевую задачу

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x, t < +\infty,$$
$$u_x(0, t) = \varphi(t), \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < +\infty.$$

81. Пользуясь функцией источника, решить краевую задачу

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x, t < +\infty,$$
$$u_x(0, t) - hu(0, t) = -h\varphi(t), \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < +\infty.$$

82. Доказать справедливость следующего утверждения. Для того чтобы решение краевой задачи

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x,\, t < +\infty,$$
$$\sum_{k=0}^{N} A_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k} = 0, \quad x = 0, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u(x,\, 0) = f(x), \quad 0 < x < +\infty,$$

можно было представить в виде

$$u(x,\, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\, d\xi,$$

достаточно функцию $f(x)$ продолжить на отрицательную полуось x так, чтобы функция

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{N} A_k f^{(k)}(x)$$

была нечетной.

83. Доказать справедливость следующего утверждения. Для того чтобы решение краевой задачи

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,\, t), \quad 0 < x,\, t < +\infty,$$
$$\sum_{k=0}^{N} A_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k} = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad x = 0, \quad u(x,\, 0) = 0$$

можно было представить в виде

$$u(x,\, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int\limits_{0}^{t} \frac{f(\xi,\, \tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\, d\tau,$$

достаточно продолжить функцию $f(x,\, t)$ на отрицательную полуось x так, чтобы функция

$$F(x,\, t) = \sum_{k=0}^{N} A_k \frac{\partial^k f(x,\, t)}{\partial x^k}$$

была нечетной по x.

84. Решить краевую задачу

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x,\, t < +\infty,$$
$$u(0,\, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u(x,\, 0) = U_0, \quad 0 < x < +\infty.$$

Начертить графики распределения температуры в моменты времени $t = 1/(8a^2)$, $t = 1/(4a^2)$, $t = 1/(2a^2)$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 4$, а также графически изменения температуры в точках $x = 1/4$, $x = 1/2$, $x = 1$ на отрезке времени $0 \leqslant t \leqslant 1/a^2$.

Найти также скорость движения фронта температуры αU_0, где $0 < \alpha < 1$, $\alpha = \text{const}$.

85. Решить краевую задачу

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x,\, t < +\infty,$$
$$u(0,\, t) = U_0, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u(x,\, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty.$$

В какой момент времени t температура в точке достигнет значения αU_0, $0 < \alpha < 1$?

86. Решить краевую задачу

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x,\, t < +\infty,$$
$$u_x(0,\, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u(x,\, 0) = \psi(x) = \begin{cases} U_0, & 0 < x < 1, \\ 0, & 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

87. Решить краевую задачу

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, \quad t < +\infty, \tag{1}$$
$$u_x(0,\, t) - hu(0,\, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$
$$u(x,\, 0) = U_0 = \text{const}, \quad 0 < x < +\infty. \tag{3}$$

Получить асимптотическое представление для температуры конца стержня при больших значениях времени

$$u(0,\, t) \approx \frac{U_0}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 z^5} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-3)}{2^{n-1} z^{2n-1}} \right\}_{z = ah\sqrt{t}}. \tag{4}$$

Дать выражение для оценки погрешности при пользовании формулой (4) и найти, с какого момента времени вычисление $u(0, t)$ по формуле

$$u(0,\, t) \approx \frac{U_0}{ah\sqrt{\pi t}} \tag{5}$$

дает погрешность, заведомо не превышающую по абсолютной величине наперед заданного $\varepsilon > 0$.

88. Решить краевую задачу

$$u_t = a^2 u_{xx} - b^2 e^{-kx}, \quad k > 0, \quad 0 < x,\, t < +\infty,$$
$$u(0,\, t) = U_0 = \text{const}, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u(x,\, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty.$$

89. Решить краевую задачу

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x,\, t < +\infty,$$
$$-u_x(0,\, t) = q, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u(x,\, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty.$$

90. Решить краевую задачу

$$u_t = a^2 u_{xx} - h(u - U_2), \quad U_2 = \text{const}, \quad 0 < x,\, t < +\infty,$$
$$u(0,\, t) = U_1, \quad 0 < t < +\infty, \quad U_1 = \text{const},$$
$$u(x,\, 0) = U_0, \quad 0 < x < +\infty, \quad U_0 = \text{const}.$$

91. Начальный ток и начальное напряжение в полуограниченном однородном проводе $0 \leqslant x < +\infty$ равны нулю. Самоиндукция единицы

длины провода пренебрежимо мала. Начиная с момента $t = 0$, к концу провода приложена постоянная электродвижущая сила E_0. Найти напряжение в проводе.

92. Решить краевую задачу

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x,\, t < +\infty,$$
$$u_x(0,\, t) - hu(0,\, t) = -Ah\cos\omega t, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u(x,\, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty.$$

93. Найти установившиеся температурные волны в полуограниченном стержне $0 < x < +\infty$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если температура конца стержня меняется по закону

$$u(0,\, t) = A\cos\omega t.$$

Найти скорость распространения температурной волны с данной частотой ω (дисперсия температурных волн).

94. Начальный ток и начальное напряжение в однородном проводе $0 \leqslant x < +\infty$ равны нулю. Начиная с момента $t = 0$, в точке $x = 0$ приложена электродвижущая сила $E(t) = E_0\cos\omega t$. Найти напряжение в проводе, если самоиндукция и утечка единицы длины провода пренебрежимо малы.

95. Начальная температура полуограниченного стержня с теплоизолированной боковой поверхностью задана

$$u(x,\, 0) = f(x), \quad 0 < x < +\infty.$$

Какой тепловой поток должен подаваться в стержень через его конец, чтобы температура конца менялась по заданному закону

$$u(0,\, t) = \mu(t), \quad 0 < t < +\infty, \quad \mu(0) = f(0)?$$

Рассмотреть частный случай, когда $f(x) \equiv 0$.

96. Начальная температура полуограниченного стержня с теплоизолированной боковой поверхностью задана

$$u(x,\, 0) = f(x), \quad 0 < x < +\infty,$$

а на конце $x = 0$ происходит конвективный теплообмен с внешней средой. Как должна меняться температура внешней среды, чтобы температура конца стержня менялась по заданному закону

$$u(0,\, t) = \mu(t), \quad \mu(0) = f(0), \quad 0 < t < +\infty?$$

Рассмотреть частный случай, когда $f(x) \equiv 0$.

97. Решить задачу 95 при условии, что на боковой поверхности стержня происходит конвективный теплообмен со средой нулевой температуры.

98. Решить задачу 96 при условии, что на боковой поверхности стержня происходит конвективный теплообмен со средой, температура которой равна нулю.

99. Решить краевую задачу

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,\, t), \quad 0 < t < +\infty, \quad v_0 t < x < +\infty,$$
$$u(x,\, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty,$$
$$u(v_0 t,\, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty.$$

100. Решить краевую задачу

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < t < +\infty, \quad v_0 t < x < +\infty,$$
$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < +\infty,$$
$$u(v_0 t, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty.$$

101. Решить краевую задачу

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < t < +\infty, \quad v_0 t < x < +\infty,$$
$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty,$$
$$u(v_0 t, t) = \mu(t), \quad 0 < t < +\infty.$$

102. Решить краевую задачу

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < t < +\infty, \quad v_0 t < x < +\infty,$$
$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < +\infty,$$
$$u_x(v_0 t, t) = \mu(t), \quad 0 < t < +\infty.$$

в) Конечный отрезок. Задачи 103–105 на построение функций источника, предлагаемые в этом пункте, требуется решить двумя способами: методом отражений и методом разделения переменных; один из них дает хорошее представление для функции источника при малых значениях времени t, а другой — при больших.

103. Построить функцию влияния мгновенного точечного источника для конечного стержня с теплоизолированной боковой поверхностью, если его концы поддерживаются при температуре, равной нулю. Оценить остатки рядов, представляющих решение.

104. Построить функцию влияния мгновенного точечного источника тепла для конечного стержня с теплоизолированной боковой поверхностью, если его концы также теплоизолированы. Оценить остатки рядов, представляющих решение.

105. Построить функцию влияния мгновенного точечного источника тепла для конечного стержня с теплоизолированной боковой поверхностью, если один его конец ($x = 0$) теплоизолирован, а другой ($x = l$) поддерживается при нулевой температуре. Оценить остатки рядов, представляющих решение.

106. а) Найти N, начиная с которого для остатка ряда (2) решения задачи 103 выполняется неравенство

$$|R_N(x, \xi, t)| < \varepsilon \tag{1}$$

при $0 \leqslant x, \ \xi \leqslant l, \ 0 \leqslant t \leqslant t^*$.

б) Найти N, начиная с которого для остатка ряда (12) решения задачи 103 выполняется неравенство (1) при $0 \leqslant x, \ \xi \leqslant l, \ 0 \leqslant t \leqslant t^*$.

107. Решить предыдущую задачу для рядов (1) и (6) ответа к задаче 104.

108. Решить задачи 103–105 в случае, когда на боковой поверхности стержня происходит конвективный теплообмен со средой, температура которой равна нулю.

109. С помощью функции источника, найденной в решении задачи 103, решить краевую задачу

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,\, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u(0,\, t) = \varphi(t), \quad u(l,\, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u(x,\, 0) = f_0(x), \quad 0 < x < l.$$

110. С помощью функции источника, найденной в решении задачи 104, решить краевую задачу

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,\, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$
$$u_x(0,\, t) = \varphi(t), \quad u(l,\, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$
$$u(x,\, 0) = f_0(x), \quad 0 < x < l. \tag{3}$$

111. Температура одного конца стержня ($x = 0$) поддерживается постоянной и отличной от нуля, $u(0, t) = U_0 \neq 0$, а температура другого конца ($x = l$) все время равна нулю, $u(l,\, t) = 0$. Найти температуру стержня, если его боковая поверхность теплоизолирована, а начальная температура равна нулю; дать выражение температуры стержня через интеграл ошибок.

112. Один конец стержня ($x = l$) теплоизолирован, а на другой конец ($x = 0$) подается постоянный тепловой поток $[-\lambda u_x(0,\, t) = -\lambda q_0]$. Найти температуру стержня, если его начальная температура равна нулю, а боковая поверхность теплоизолирована; дать выражение температуры стержня через интеграл ошибок.

3. Неоднородные среды и сосредоточенные факторы; уравнения с кусочно постоянными коэффициентами и условия сопряжения.

113. Неограниченный стержень $-\infty < x < +\infty$ с теплоизолированной боковой поверхностью и постоянным поперечным сечением получен соединением в точке $x = 0$ двух однородных полуограниченных стержней $-\infty < x < 0$ и $0 < x < +\infty$; торцы стержней плотно примыкают друг к другу. Начальная температура, коэффициент температуропроводности и коэффициент теплопроводности левого и правого стержней соответственно равны $U_1 = \text{const}$, a_1, k_1, $U_2 = \text{const}$, a_2, k_2. Найти температуру составного стержня.

114. Решить предыдущую задачу, если начальная температура равна

$$u(x,\, 0) = \begin{cases} f_1(x), & -\infty < x < 0, \\ f_2(x), & 0 < x < +\infty. \end{cases}$$

115. Неограниченный стержень составлен из двух полуограниченных стержней, как указано в задаче 113. Найти температуру стержня при $t > 0$, если в момент времени $t = 0$ в его точке $\xi = 0$ выделилось мгновенно $Q = c_2\rho_2$ единиц тепла, а начальная температура стержня была равна нулю.

116. На конец полуограниченного стержня с теплоизолированной боковой поверхностью насажен шарик с теплоемкостью C_0 и очень большой теплопроводностью, так что в каждый момент времени шарик можно считать равномерно нагретым, а его температуру равной температуре конца стержня. Пусть поверхность шарика также теплоизолирована.

Найти температуру стержня, если его начальная температура равна

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < +\infty,$$

причем $f(+0)$ и $f'(+0)$ существуют.

117. Пусть полупространство $x > 0$ заполнено жидкостью с коэффициентами температуропроводности и теплопроводности k_2, a_2 и начальной температурой $U_2 = \text{const}$, а плоскость $x = 0$ поддерживается при постоянной температуре $U_1 < U_2$, причем U_1 ниже температуры замерзания жидкости.

Найти закон распространения фронта промерзания жидкости, а также температуру жидкости и твердого вещества, в которое жидкость превращается при промерзании.

Глава IV

УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

К уравнениям эллиптического типа приводит изучение стационарных, т. е. не меняющихся во времени, процессов различной физической природы. Сюда относятся стационарные электрические и магнитные поля (электростатика, магнитостатика, поля постоянного электрического тока), потенциальное движение несжимаемой жидкости, стационарные тепловые поля и др.

Простейшим уравнением эллиптического типа является уравнение Лапласа $\Delta u = 0$, которому в основном и посвящена настоящая глава. Ниже, в гл. VII, помещены задачи для других уравнений эллиптического типа.

§ 1. Физические задачи, приводящие к уравнениям эллиптического типа, и постановка краевых задач

1. Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в однородной среде. В отличие от уравнений гиперболического и параболического типов краевые задачи для эллиптического уравнения характеризуются отсутствием начальных условий. В зависимости от типа краевых условий для уравнения Лапласа различают: первую краевую задачу (задачу Дирихле), если $u\big|_\Sigma = f_1$, вторую краевую задачу (задачу Неймана), если $\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Sigma = f_2$, третью краевую задачу, если $\left(\dfrac{\partial u}{\partial n} + hu\right)_\Sigma = f_3$, где f_1, f_2, f_3 — некоторые функции, заданные на границе Σ области, в которой ищется решение уравнения Лапласа.

1. *Стационарное температурное поле.* Вывести уравнение, которому удовлетворяет температура стационарного теплового поля в однородной среде; при выводе уравнения учесть наличие распределенных источников тепла, не меняющихся во времени. Дать физическую интерпретацию краевых условий первого, второго и третьего рода. Установить необходимое условие существования стационарной температуры для второй краевой задачи.

2. *Уравнение стационарной диффузии.* Вывести уравнение стационарного процесса диффузии:

а) в покоящейся однородной изотропной среде;

б) в однородной изотропной среде, движущейся с заданной скоростью, например, вдоль оси x.

3. *Уравнение электростатики.* Показать, исходя из уравнений Максвелла, что потенциал электростатического поля удовлетворяет уравнению Пуассона с правой частью, пропорциональной объемной плотности зарядов $\rho(x, y, z)$. Дать физическую интерпретацию краевых условий первого и второго рода.

4. *Уравнение магнитостатики.* Показать, что потенциал стационарного магнитного поля при отсутствии электрических токов удовлетворяет уравнению Лапласа.

5. *Поле постоянного электрического тока.* Убедиться в том, что потенциал электрического поля постоянного электрического тока удовлетворяет уравнению Лапласа. Сформулировать граничные условия:

1) на заземленной идеально проводящей поверхности;

2) на границе с диэлектриком.

6. *Потенциальное движение несжимаемой жидкости.*

Показать, что потенциал скоростей стационарного потока несжимаемой жидкости удовлетворяет уравнению Лапласа. Написать краевое условие на поверхности твердого тела, покоящегося или движущегося с некоторой заданной скоростью.

7. *Основные задачи электростатики.* Электростатическое поле, создаваемое заряженным проводником конечных размеров, можно определить:

1) задавая значение потенциала проводника;

2) задавая значение заряда проводника.

Эти задачи называются первой и второй основными задачами электростатики. Дать математическую формулировку первой и второй задач электростатики.

2. Краевые задачи для уравнения Лапласа в неоднородных средах. В неоднородной, но изотропной среде основное уравнение стационарного поля имеет вид

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0,$$

где характеристики среды $k = k(x, y, z)$ — переменная величина. Если коэффициент k терпит разрыв на некоторой поверхности, то на этой поверхности выполняются условия сопряжения

$$u_1 = u_2, \tag{1}$$

$$k_1\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_1 = k_2\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_2, \tag{2}$$

где значки 1 и 2 означают соответственно левое и правое предельные значения на поверхности разрыва.

8. Решить задачу 1, считая, что коэффициент теплопроводности является переменной величиной $k = k(x, y, z)$. Поставить краевую задачу теплопроводности для случая кусочно однородной среды (для случая кусочно постоянного k), предварительно выведя условия сопряжения (1) и (2). Дать физическую интерпретацию этих условий.

9. Написать уравнение для потенциала электрического поля в неоднородном диэлектрике с диэлектрической постоянной

$$\varepsilon = \varepsilon(x, y, z).$$

Предполагая $\varepsilon(x, y, z)$ кусочно постоянной, вывести условия сопряжения на поверхностях разрыва функции $\varepsilon(x, y, z)$ и сформулировать соответствующую краевую задачу.

10. Решить задачу, аналогичную задачам 8 и 9, для стационарного магнитного поля.

11. Решить задачу, аналогичную задачам 8 и 9, для электрического поля постоянного тока.

12. *Подобие различных стационарных полей.* Установить подобие между полем постоянного электрического тока, с одной стороны, и термическим, электростатическим, магнитостатическим полями, полем концентраций стационарного процесса диффузии и полем скоростей потенциального течения несжимаемой жидкости, с другой стороны.

Сравнить условия сопряжения на границе разрыва физических констант.

§ 2. Простейшие задачи для уравнений Лапласа и Пуассона

В этом параграфе даны краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона, решения которых могут быть найдены непосредственно, простым подбором, без применения общих методов.

1. Краевые задачи для уравнения Лапласа.

13. Рассмотрим круг радиуса a с центром в начале координат. Пусть (ρ, φ) — полярные, а (x, y) — прямоугольные координаты. Найти решение первой внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа, если заданы следующие граничные условия:

а) $u\big|_{\rho=a} = A$; б) $u\big|_{\rho=a} = A\cos\varphi$; в) $u\big|_{\rho=a} = A + By$;

г) $u\big|_{\rho=a} = Axy$; д) $u\big|_{\rho=a} = A + B\sin\varphi$;

е) $u\big|_{\rho=a} = A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi$;

где A и B — постоянные.

14. Решить вторую внутреннюю краевую задачу

$$\Delta u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_C = f(\varphi)$$

для круга C радиуса a с центром в точке $\rho = 0$ для следующих част-

ных случаев:

а) $f = A$; б) $f = Ax$; в) $f = A(x^2 - y^2)$; г) $f = A\cos\varphi + B$;

д) $f = A\sin\varphi + B\sin^3\varphi$.

Отметить неправильно поставленные задачи.

15. Найти функции $u(\rho, \varphi)$, гармонические вне круга радиуса $\rho = a$ и удовлетворяющие граничным условиям а) – е) задачи 13 (первая внешняя краевая задача для круга).

16. Найти функции $u = u(\rho, \varphi)$, гармонические вне круга радиуса $\rho = a$ и удовлетворяющие граничным условиям задачи 14 (вторая внешняя краевая задача для круга).

17. Найти функцию $u = u(\rho, \varphi)$, гармоническую внутри кольца $a < \rho < b$ и удовлетворяющую граничным условиям

$$u\big|_{\rho=a} = u_1, \quad u\big|_{\rho=b} = u_2.$$

Пользуясь решением задачи, найти емкость цилиндрического конденсатора, рассчитанную на единицу длины.

18. Найти функцию, гармоническую внутри кругового сектора $0 < \rho < a$, $0 < \varphi < \alpha$, если

$$u\big|_{\rho=a} = \frac{u_0}{\alpha}\,\varphi, \quad u\big|_{\varphi=0} = 0, \quad u\big|_{\varphi=\alpha} = u_0.$$

19. Найти решение уравнения Лапласа в полуплоскости $y > 0$, принимающее при $y = 0$ граничные значения $u = \varphi_1$ при $x < 0$; $u = \varphi_2$ при $x > 0$, и сравнить его с решением задачи 18.

20. Определить функцию u, гармоническую:

а) внутри сферы радиуса $r = a$;

б) вне сферы $r = a$;

и принимающую на сфере значение u_0.

21. Определить стационарное распределение температуры внутри сферического слоя $a < r < b$, если сфера $r = a$ поддерживается при температуре u_1, сфера $r = b$ — при температуре u_2.

22. Пользуясь решением задачи 21, найти емкость сферического конденсатора, заполненного диэлектриком с диэлектрической постоянной $\varepsilon = \text{const}$ и ограниченного сферами $r = a$ и $r = b$.

23. Найти емкость сферического конденсатора, заполненного неоднородным диэлектриком с диэлектрической постоянной

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1 & \text{при} \quad a < r < c, \\ \varepsilon_2 & \text{при} \quad c < r < b. \end{cases}$$

24. Решить задачу, аналогичную предыдущей задаче, для цилиндрического конденсатора.

25. Найти потенциал электростатического поля сферы радиуса a, заряженной до потенциала u_0 и помещенной в неограниченную среду со следующим распределением диэлектрической постоянной:

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1 & \text{при} \quad a < r < c, \\ \varepsilon_2 & \text{при} \quad r > c. \end{cases}$$

Рассмотреть частные случаи:
а) $c = \infty$; б) $\varepsilon_2 = \infty$; в) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$.

26. Найти электростатическое поле бесконечного проводящего цилиндра радиуса $\rho = a$, заряженного до потенциала u_0 и окруженного диэлектрической обкладкой, ограниченной цилиндрической поверхностью радиуса $\rho = b$, на которой поддерживается нулевой потенциал.

27. Найти функцию u, гармоническую внутри слоя, ограниченного плоскостями $z = 0$ и $z = h$, если

$$u\big|_{z=0} = u_1, \quad u\big|_{z=h} = u_2.$$

28. Найти емкость плоского конденсатора, рассчитанную на единицу площади обкладок, если между обкладками конденсатора находится диэлектрик с диэлектрической постоянной ε. Рассмотреть два случая:

а) $\varepsilon = \text{const}$ при $0 < z < h$, б) $\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1 & \text{при} \quad 0 < z < h_1, \\ \varepsilon_2 & \text{при} \quad h_1 < z < h. \end{cases}$

Определить функцию $u = u(x, y)$, гармоническую внутри прямоугольника $0 < x < a$, $0 < y < b$ и удовлетворяющую условиям

$$u(x, 0) = u_1, \quad u(x, b) = u_2, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{\substack{x=0 \\ x=a}} = 0.$$

2. Краевые задачи для уравнения Пуассона.

30. Найти решение уравнения Пуассона $\Delta u = 1$ внутри круга радиуса $\rho = a$, если $u\big|_{\rho=a} = 0$.

31. Решить уравнение $\Delta u = A$ внутри круга радиуса $\rho = a$ при граничном условии $\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\rho=a} = B$, выбрав постоянную B так, чтобы задача имела решение.

32. Требуется определить решение уравнения $\Delta u = A$ внутри кольца $a < \rho < b$ при следующих граничных условиях:

а) $u\big|_{\rho=a} = u_1$, $u\big|_{\rho=b} = u_2$; б) $u\big|_{\rho=a} = u_1$, $\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\rho=b} = C$;

в) $\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\rho=a} = B_1$, $\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\rho=b} = C$.

Определить постоянные, при которых задачи имеют решения.

33. Найти решения:

а) уравнения $\Delta u = 1$; б) уравнения $\Delta u = Ar + B$;

внутри сферы $r < a$, если на сфере выполняется граничное условие $u\big|_{r=a} = 0$.

34. Найти внутри сферического слоя $a < r < b$ решения уравнений:

а) $\Delta u = 1$; б) $\Delta u = A + \dfrac{B}{r}$;

при граничных условиях $u\big|_{r=a} = 0$, $u\big|_{r=b} = 0$.

§ 3. Функция источника

Функция влияния точечного источника (функция Грина) является весьма мощным средством решения краевых задач для уравнения Лапласа и Пуассона.

Настоящий параграф содержит задачи на построение функции источника для ряда областей, допускающие применение метода зеркальных изображений (метода отражений); при этом исходной является функция источника в неограниченном пространстве, равная $\dfrac{e}{4\pi}\dfrac{1}{r}$, где $\dfrac{e}{4\pi}$ — мощность источника (заряд).

Возможны различные физические интерпретации функции источника (электростатическая, термическая и т.д.).

При формулировке задач мы обычно пользуемся электростатической интерпретацией функции источника, предполагая границы областей идеально проводящими и заземленными.

Задачи на построение функции источника методом разделения переменных даны в § 4.

1. Функция источника для областей с плоскими границами.

35. Найти потенциал поля точечного электрического заряда, помещенного над идеально проводящей заземленной плоскостью $z = 0$, и вычислить плотность поверхностных индуцированных зарядов. Написать решение первой краевой задачи для уравнения Лапласа в полупространстве $z \geqslant 0$.

36. Найти потенциал точечного заряда внутри слоя, ограниченного двумя идеально проводящими плоскостями $z = 0$ и $z = l$, которые поддерживаются при потенциале, равном нулю. Исследовать сходимость ряда, построенного методом отражений, и показать возможность двукратного почленного дифференцирования этого ряда.

37. Рассмотреть задачу о точечном источнике тока в проводящем слое $0 < z < l$, изолированном вдоль плоскостей $z = 0$ и $z = 1$.

Найти компоненты электрического поля и убедиться в том, что непосредственное применение метода отражений для нахождения потенциала дает расходящийся ряд.

38. Рассмотреть задачу 37, считая, что одна стенка изолирована, а на второй — потенциал поля равен нулю. Исследовать сходимость рядов для потенциала.

39. Построить функцию источника для уравнения $\Delta u = 0$ в полупространстве $z > 0$ при граничном условии третьего рода

$$\frac{\partial u}{\partial z} + hu = 0 \quad \text{при} \quad z = 0.$$

40. Найти потенциал точечного заряда внутри «полуслоя» $0 \leqslant z \leqslant l$, $x \geqslant 0$, ограниченного плоскостями $z = 0$, $z = l$ и $x = 0$, считая, что стенки идеально проводящие и имеют нулевой потенциал.

41. Внутри двугранного угла величиной $\alpha = \pi/n$ (n — натуральное число), ограниченного идеально проводящими стенками с нулевым потенциалом, точечный электрический заряд. Найти электрическое поле, порождаемое этим зарядом.

42. Двугранный угол задачи 41 пересекают две идеально проводящие плоскости $z = 0$ и $z = l$, перпендикулярные к ребру двугранного угла. Внутри области, ограниченной двугранным углом и этими плоскостями, помещен точечный заряд.

Потенциал всех плоскостей равен нулю.

Определить потенциал поля этого заряда. Рассмотреть частные случаи:

а) $\alpha = \pi$ (ср. с задачей 36); б) $l \to \infty$ (ср. с задачей 35).

43. Внутри двугранного угла задачи 41 помещен источник тепла мощностью Q.

Найти стационарное распределение температуры внутри этого угла, если его стенки теплоизолированы.

44. Решить с помощью функции источника первую краевую задачу внутри двугранного угла величиной $\alpha = \pi/n$, где n — натуральное число, если на его сторонах заданы граничные условия

$$u\big|_{\varphi=a} = 0, \quad u\big|_{\varphi=a} = V.$$

45. Решить с помощью функции источника первую краевую задачу для уравнения Лапласа в полуплоскости $y > 0$, если

$$u\big|_{y=0} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ V & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

46. Найти потенциал электростатического поля, создаваемого точечным зарядом внутри бесконечной цилиндрической полости, считая, что граница области идеально проводящая и имеет нулевой потенциал, а перпендикулярное сечение полости имеет форму прямоугольника со сторонами a и b.

47. Решить задачу 46, предполагая, что перпендикулярное сечение имеет форму равнобедренного прямоугольного треугольника.

48. Решить задачу 46 для полубесконечной цилиндрической полости $z > 0$.

49. Найти выражение для потенциала точечного заряда внутри прямоугольного параллелепипеда с идеально проводящими стенками, которые поддерживаются при нулевом потенциале.

2. Функция источника для областей со сферическими (круговыми) и плоскими границами.

50. Найти потенциал электростатического поля, создаваемого точечным зарядом e внутри заземленной сферы.

51. Пользуясь решением задачи 50, найти плотность поверхностных зарядов, индуцированных на сфере, и написать решение первой

внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа внутри сферы; получить отсюда формулу Пуассона, дающую решение первой краевой задачи для уравнения Лапласа (см. [7, гл. IV, с. 327]).

52. Найти потенциал электростатического поля, создаваемого точечным зарядом, находящимся вне заземленной сферы.

53. Пользуясь решением задачи 52, вычислить плотность поверхностных зарядов на сфере и написать решение первой внешней краевой задачи для сферы.

54. а) Внутри бесконечной цилиндрической полости кругового сечения электростатическое поле создается заряженной нитью, параллельной оси цилиндра. Найти потенциал этого поля.

б) Решить ту же задачу, если заряженная нить находится вне цилиндра.

в) Решения задач а) и б) использовать для построения решения задачи Дирихле внутри и вне круга.

55. Найти функцию источника для $\Delta u = 0$ внутри заземленного полушара, а также четвертой части шара.

56. Построить функцию источника для задачи Дирихле:

а) внутри полукруга; б) внутри четвертой части круга;

в) внутри сектора с углом раствора $\alpha = \pi/n$.

57. Найти потенциал поля, создаваемого точечным зарядом e внутри сферического слоя, ограниченного двумя концентрическими проводящими заземленными сферами с радиусами a и b. Исследовать сходимость построенного ряда, а также рядов, получающихся при двукратном почленном дифференцировании исходного ряда.

Рассмотреть предельные случаи $a \to 0$ и $b \to \infty$ и сравнить с решениями задач 50 и 52.

58. Построить внутри кольца $a \leqslant \rho \leqslant b$ функцию источника для задачи Дирихле.

Рассмотреть предельные случаи $a \to 0$ и $b \to \infty$ и сравнить с решением задачи 54.

59. Найти поле точечного заряда e в неограниченном пространстве в присутствии проводящей сферы, на которой распределен заряд величиной e_1. Вычислить плотность поверхностных зарядов, индуцированных на сфере.

3. Функция источника в неоднородных средах.

60. Найти поле точечного заряда в неограниченном пространстве, заполненном неоднородным диэлектриком с диэлектрической постоянной

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1 & \text{при} \quad z > 0, \\ \varepsilon_2 & \text{при} \quad z < 0. \end{cases}$$

Вычислить поверхностную плотность, а также величину заряда, индуцированного на границе раздела $z = 0$.

61. Полупространство $z > 0$ заполнено неоднородной проводящей средой, проводимость которой равна

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_1 & \text{при} \quad z > h, \\ \sigma_2 & \text{при} \quad 0 < z < h. \end{cases}$$

В точке $M(0, 0, \zeta)$ помещен точечный источник тока.

Определить электрическое поле на поверхности проводника (при $z = 0$). Рассмотреть случай $\zeta = 0$ (источник на поверхности).

62. Заземленный проводящий лист, лежащий в плоскости y, z, имеет сферическую выпуклость радиуса a с центром в начале координат; все полупространство $y < 0$, лежащее ниже плоскости x, z, заполнено диэлектриком с диэлектрической постоянной ε_2; среда, заполняющая полупространство $y > 0$ над плоскостью $y = 0$, имеет диэлектрическую постоянную ε_1. Найти потенциал точечного заряда, помещенного над плоскостью $y = 0$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, причем

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} > a.$$

63. Полупространство $z > 0$ заполнено неоднородной проводящей средой, проводимость которой равна

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_1 & \text{при} \quad y < 0, \\ \sigma_2 & \text{при} \quad y > 0. \end{cases}$$

В точке $M_0(0, -h, \zeta)$ помещен точечный источник тока мощностью I_0. Найти потенциал электрического поля, а также плотность тока при $y = 0$, $\zeta = 0$.

64. В бесконечном пространстве в точках $(0, \theta_0, \varphi_0)$ и (c, θ_0, φ_0) находятся две заземленные проводящие сферы с радиусами a и b. В точке $\rho = \rho_0$ на линии, соединяющей центры сфер, помещен заряд e. Найти потенциал поля вне сфер.

§ 4. Метод разделения переменных

1. Краевые задачи для круга, кольца и сектора.

65. Написать решение первой краевой задачи для уравнения Лапласа внутри круга.

66. Написать решение первой краевой задачи для уравнения Лапласа вне круга.

67. Написать решение второй краевой задачи для уравнения $\Delta u = 0$: а) внутри; б) вне круга.

68. а) Написать решение третьей внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа в круге, если граничное условие записывается в виде

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} + hu = f \quad \text{при} \quad \rho = a.$$

б) Найти также решение третьей внешней краевой задачи для круга.

69. Бесконечный проводящий цилиндр (цилиндрический кондуктор) заряжен до потенциала

$$V = \begin{cases} V_1 & \text{при} \quad 0 < \varphi < \pi, \\ V_2 & \text{при} \quad \pi < \varphi < 2\pi, \end{cases}$$

где V_1 и V_2 — постоянные.

Найти поле внутри и вне цилиндрической полости, а также плотность поверхностных зарядов и суммарный заряд.

70. Найти решение: а) внутренней; б) внешней краевых задач; для уравнения Лапласа, если на границе круга заданы условия:

1) $u\big|_{\rho=a} = A\sin\varphi$; 2) $u\big|_{\rho=a} = A\sin^3\varphi + B$;

3) $u\big|_{\rho=a} = \begin{cases} A\sin\varphi & \text{при} \quad 0 < \varphi < \pi, \\ \dfrac{1}{3}\,A\sin^3\varphi & \text{при} \quad \pi < \varphi < 2\pi. \end{cases}$

71. Найти распределение температуры в бесконечно длинном круглом цилиндре, если на его поверхности на единицу длины задан тепловой поток $Q = q\cos\varphi$.

72. Решить задачу 69, предполагая, что цилиндр заполнен неоднородным диэлектриком с диэлектрической постоянной

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1 & \text{при} \quad \rho < a, \\ \varepsilon_2 & \text{при} \quad a < \rho < b, \end{cases}$$

где b — радиус цилиндра.

73. Бесконечно длинный круглый цилиндр радиуса a движется с постоянной скоростью v_0 перпендикулярно к своей оси в неограниченной несжимаемой жидкости, которая на бесконечности находится в покое. Найти потенциал скоростей жидкости.

74. Решить задачу об обтекании неподвижного бесконечного цилиндра, если на бесконечности скорость жидкости равна v_0.

75. а) Твердый шар движется с постоянной скоростью v_0 в безграничной несжимаемой жидкости, покоящейся на бесконечности.

Найти потенциал скоростей.

б) Решить задачу об обтекании неподвижного твердого шара потоком жидкости, имеющим на бесконечности скорость v_0.

76. Диэлектрический шар с диэлектрической постоянной ε_1, помещенный в безграничный однородный диэлектрик с диэлектрической постоянной ε_2 ($\varepsilon_2 \neq \varepsilon_1$), находится в однородном параллельном внешнем поле с напряженностью $\boldsymbol{E_0}$. Найти величину поляризации шара и его дипольный момент.

77. Решить задачу 76 для бесконечного диэлектрического цилиндра кругового сечения ($\rho \leqslant a$), считая, что внешнее поле $\boldsymbol{E_0}$ направлено перпендикулярно к оси цилиндра.

78. Проводящий шар находится во внешнем электростатическом поле $\boldsymbol{E_0}$. Найти величину искажения внешнего поля.

79. Бесконечный проводящий цилиндр находится в однородном внешнем электрическом поле $\boldsymbol{E_0}$, направленном вдоль оси x; образующая цилиндра параллельна оси z. Найти плотность поверхностного заряда на цилиндре.

80. Решить внутреннюю задачу Дирихле для кольца $a \leqslant \rho \leqslant b$.

81. Найти распределение температуры в твердом теле, ограниченном бесконечными цилиндрическими поверхностями с радиусами a и b $(a < b)$, если на поверхности цилиндра $\rho = a$ поддерживается постоянная температура u_0, на поверхности $\rho = b$ при $0 < \varphi < \pi$ поддерживается температура u_0, а при $\pi < \varphi < 2\pi$ — температура, равная нулю.

82. По бесконечному коаксиальному цилиндрическому кабелю $a < \rho < b$ протекает постоянный ток силы I. Найти распределение температуры внутри провода, если поверхность $\rho = a$ поддерживается при температуре, равной нулю, а на внешней границе задан тепловой поток, равный $A\cos^2\varphi$, где φ — полярный угол.

83. На границе тонкой пластинки в форме кругового сектора $\rho \leqslant a$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha$ задана температура

$$u = \begin{cases} f(\varphi) & \text{при} \quad \rho = a, \\ 0 & \text{при} \quad \varphi = 0 \quad \text{и} \quad \varphi = \alpha. \end{cases}$$

Найти стационарное термическое поле в пластинке. Рассмотреть частный случай

$$f(\varphi) = \begin{cases} u_1 & \text{при} \quad 0 < \varphi < \alpha/2, \\ u_2 & \text{при} \quad \alpha/2 < \varphi < \alpha. \end{cases}$$

84. Найти стационарное распределение температуры в тонкой пластинке, имеющей форму кругового сектора, радиусы которого поддерживаются при температуре u_1, а дуга окружности — при температуре u_2.

85. Найти электростатическое поле внутри бесконечного цилиндра, перпендикулярное сечение которого имеет форму полукруга; поверхность цилиндра, соответствующая диаметру полукруга, заряжена до потенциала V_1, а остальная поверхность — до потенциала V_2.

86. Решить уравнение Лапласа внутри кольцевого сектора, ограниченного дугами окружностей $\rho = a$, $\rho = b$ и радиусами $\varphi = 0$, $\varphi = \alpha$, если заданы следующие условия на границах:

$$u = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = 0, \quad \varphi = \alpha,$$

$$u = \begin{cases} f(\varphi) & \text{при} \quad \rho = a, \\ F(\varphi) & \text{при} \quad \rho = b. \end{cases}$$

Рассмотреть предельные случаи $a \to 0$, $b \to \infty$, $\alpha = \pi$.

87. Решить задачу 86 для частного случая

$$f(\varphi) = u_0, \quad F(\varphi) = 0.$$

88. Определить магнитное поле токов, один из которых течет в длинном прямом проводе в одном направлении, а другой — в парал-

лельном проводе, находящемся от первого на расстоянии a, в обратном направлении.

89. Пусть в бесконечной круглой цилиндрической пленке течет ток параллельный оси z, с плотностью тока i. Найти вектор-потенциал магнитного поля, создаваемого этим током.

90. Цилиндр или провод круглого сечения с магнитной проницаемостью μ_1 помещен в среду с магнитной проницаемостью μ_2. По проводу протекает ток I. Внешнее магнитное поле направлено перпендикулярно к оси провода и всюду параллельно и однородно. Определить полное магнитное поле в точках внутри и вне цилиндра, считая цилиндр бесконечно длинным.

91. Вычислить величину магнитной индукции снаружи цилиндрического экрана с внутренним и внешним радиусами a и b, имеющего магнитную проницаемость μ_2 и окружающего два параллельных прямолинейных провода, расположенных симметрично относительно оси цилиндра и несущих противоположно направленные токи (магнитное экранирование двухпроводной линии); цилиндр следует считать бесконечно длинным; координаты проводов $\rho = c_0$, $\theta_0 = 0$ и $\theta_0 = \pi$.

92. Полый шар $0 < r < b$ помещен в однородное параллельное магнитное поле. Пусть μ — магнитная проницаемость шара, в то время как магнитная проницаемость внешней среды принята равной единице.

Найти искаженное магнитное поле во всем пространстве. Сравнить поле внутри шара с внешним полем для случая $\mu > 1$ и для случая $\mu < 1$.

2. Краевые задачи для полосы, прямоугольника, плоского слоя и параллелепипеда.

93. Найти решение общей первой краевой задачи для уравнения Лапласа внутри прямоугольника.

94. Решить смешанную краевую задачу для уравнения Лапласа внутри прямоугольника, если:

а) на двух соседних сторонах заданы краевые условия первого рода, а на двух других сторонах — условия второго рода;

б) на двух противоположных сторонах заданы условия первого рода, а на двух остальных — условия второго рода.

95. Найти электростатическое поле внутри области, ограниченной проводящими пластинами $y = 0$, $y = b$ и $x = 0$, если пластина $x = 0$ заряжена до потенциала V, пластины $y = 0$, $y = b$ заземлены, а заряды внутри рассматриваемой области отсутствуют.

96. Решить задачу 95, предполагая, что граница $y = b$ поддерживается при потенциале V_0. Рассмотреть предельный случай $b \to \infty$.

97. Решить уравнение $\Delta u = 0$ внутри прямоугольника $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$ при следующих краевых условиях: $u = V$ при $x = 0$, $u = 0$ при $x = a$ и $y = 0$, $u = V_0$ при $y = b$.

Совершая предельный переход $a \to \infty$, получить решение задачи 96.

98. Полуслой задачи 95 заполнен неоднородным диэлектриком с диэлектрической постоянной

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1 & \text{при} \quad 0 < y < h, \\ \varepsilon_2 & \text{при} \quad h < y < b. \end{cases}$$

Найти электростатическое поле в диэлектрике.

99. Найти электростатическое поле внутри бесконечной цилиндрической трубы прямоугольного сечения со сторонами a и b, заполненной неоднородным диэлектриком с диэлектрической постоянной

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1 & \text{при} \quad 0 < y < h, \\ \varepsilon_2 & \text{при} \quad h < y < b, \end{cases}$$

если стенка $x = 0$ заряжена до потенциала V, а остальные стенки заземлены. Рассмотреть случай, когда стенка $x = a$ удаляется в бесконечность.

100. Решить задачу 99 при условии, что заряжена стенка $y = b$, а остальные стенки заземлены.

101. Через грань $y = 0$ бесконечного цилиндра с прямоугольным сечением $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$ втекает, а через грань $x = 0$ вытекает количество тепла Q.

Найти распределение температуры внутри цилиндра, считая, что тепловой поток равномерно распределен по поверхности грани $x = 0$ и соответственно по поверхности грани $x = 0$, а остальные две грани тела теплоизолированы.

102. Найти распределение температуры внутри прямоугольной тонкой пластинки, если к одной из ее сторон подводится постоянный поток q_0, а остальные три стороны поддерживаются при постоянной температуре u_1.

103. Найти решение общей первой краевой задачи для уравнения Лапласа внутри прямоугольного параллелепипеда.

104. Найти электростатическое поле внутри прямоугольного параллелепипеда с проводящими стенками, если его боковые грани и верхнее основание заземлены, а нижнее основание заряжено до потенциала V. С помощью предельного перехода получить решения задач 95 и 96.

105. Решить задачу 104, если боковые грани заряжены до потенциала V, а оба основания заземлены.

3. Задачи, требующие применения цилиндрических функций [1]).

106. Решить первую краевую задачу для уравнения Лапласа внутри ограниченного цилиндра $\rho \leqslant a$, $0 \leqslant z \leqslant l$, если $u\big|_{\rho=a} = 0$, $u\big|_{z=0} = f(\rho, \varphi)$, $u\big|_{z=l} = F(\rho, \varphi)$.

[1]) В пунктах 3 и 4 даны задачи, решаемые методом разделения переменных, но требующие применения цилиндрических и сферических функций. Часть задач была решена в § 2 методом подбора решений.

107. Решить задачу 106, если

$$u\big|_{z=0} = f(\rho), \quad u\big|_{z=l} = F(\rho),$$

где f и F — функции, зависящие только от ρ.

108. Найти функцию $u(\rho, \varphi, z)$, гармоническую внутри ограниченного цилиндра, обращающуюся в нуль на его основаниях и принимающую заданные значения на поверхности $\rho = a$:

$$u\big|_{\rho=a} = f(z).$$

Рассмотреть частные случаи:

а) $f(z) = f_0 = \text{const}$; б) $f(z) = Az\left(1 - \dfrac{z}{l}\right)$.

109. Найти решение общей первой краевой задачи для уравнения Лапласа внутри ограниченного цилиндра.

110. Найти выражение для потенциала электростатического поля внутри цилиндрической коробки кругового сечения $\rho \leqslant a$, $0 \leqslant z \leqslant l$, оба основания которой заземлены, а боковая поверхность заряжена до потенциала V_0.

Определить напряженность поля на оси.

Рассмотреть предельный случай $l \to \infty$.

111. Решить задачу 110 при условии, что боковая поверхность и верхнее основание коробки заземлены, а нижнее основание поддерживается при постоянном потенциале V_0.

С помощью предельного перехода получить решение задачи для полубесконечного цилиндра.

112. Решить задачи 110, 111 для полубесконечного цилиндра, сравнив с результатами соответствующего предельного перехода в решениях задач 110 и 111.

113. Определить стационарное распределение температуры внутри твердого тела, имеющего форму ограниченного цилиндра, если к нижнему основанию $z = 0$ подводится постоянный тепловой поток q, боковая поверхность $\rho = a$ и верхнее основание $z = l$ поддерживаются при температуре, равной нулю.

114. Решить предыдущую задачу, предполагая, что на боковой поверхности происходит теплообмен со средой, температура которой равна нулю.

115. Решить задачи 113 и 114 для полуограниченного цилиндра ($l = \infty$) и сравнить полученный результат с пределом решений задач 113 и 114 при $l \to \infty$.

116. Найти напряженность электростатического поля внутри тороида $a < \rho < b$, $0 < z < l$, если его внешняя боковая поверхность $\rho = b$ заряжена до потенциала V_0, а остальная граница заземлена.

Рассмотреть предельные случаи: 1) $l \to \infty$; 2) $a \to 0$ (сравнить с решением задачи 110).

117. Основания тороида ($a < \rho < b$, $0 < z < l$) поддерживаются при постоянной температуре u_0, а боковая поверхность — при температуре u_1. Найти стационарное распределение температуры внутри тороида.

118. Найти стационарное распределение температуры внутри тороида прямоугольного сечения ($a < \rho < b$, $0 < z < l$), если:

1) боковая поверхность теплоизолирована, а основания поддерживаются при постоянной температуре u_0;

2) боковая поверхность теплоизолирована, температура нижнего основания $z = 0$ равна нулю, а верхнее основание поддерживается при температуре u_1.

119. Решить задачу 117, если на нижнем основании задана постоянная температура u_0, а остальная поверхность тороида поддерживается при нулевой температуре.

120. С помощью метода разделения переменных получить выражения для потенциала точечного заряда, помещенного внутри ограниченного цилиндра $\rho \leqslant a$, $0 < z < h$ с проводящими стенками.

Показать, что из решения с помощью предельных переходов получаются выражения для потенциала точечного заряда в слое $0 \leqslant z \leqslant h$, в полупространстве и неограниченном пространстве.

121. Решить предыдущую задачу для полубесконечного цилиндра $z > 0$; сравнить полученный результат с соответствующим пределом решения задачи 120.

122. Решить задачу 120 для бесконечного цилиндра методом разделения переменных, сравнить с пределом решения задачи 120.

4. Задачи, требующие применения сферических и цилиндрических функций.

123. Решить первую краевую задачу для уравнения Лапласа внутри сферы радиуса a.

124. Решить первую краевую задачу для уравнения Лапласа вне сферы радиуса a.

125. Найти решение второй краевой задачи для уравнения Лапласа:

а) внутри сферы; б) вне сферы.

Рассмотреть случай простейшего граничного условия: $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Sigma} = A\cos\theta$.

126. Найти напряженность электростатического поля внутри и вне сферы, верхняя половина которой заряжена до потенциала V_1, а нижняя — до потенциала V_2.

127. Найти разложение по сферическим функциям поверхностных зарядов, индуцированных на идеально проводящей заземленной сфере точечным зарядом, находящимся:

а) внутри сферы; б) вне сферы.

128. Решить предыдущую задачу для изолированной заряженной сферы, находящейся в поле точечного заряда.

129. а) Твердый шар движется с постоянной скоростью в безграничной несжимаемой жидкости, покоящейся на бесконечности. Найти потенциал скоростей.

б) Решить задачу об обтекании неподвижного твердого шара потоком жидкости, имеющим на бесконечности скорость v_0.

130. Диэлектрический шар с диэлектрической постоянной ε_1 находится во внешнем однородном поле $\boldsymbol{E_0}$, параллельном некоторой оси z.

Определить искажение внешнего поля, вызываемое шаром, если окружающая его среда — однородный диэлектрик с $\varepsilon = \varepsilon_2$.

131. Решить задачу о поляризации диэлектрического шара радиуса a в поле точечного заряда, если диэлектрическая постоянная

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1 & \text{при} \quad r < a, \\ \varepsilon_2 & \text{при} \quad r > a. \end{cases}$$

Рассмотреть два случая:

а) заряд находится вне шара; б) заряд помещен внутрь шара.

132. Проводящий шар с проводимостью σ_1 находится в среде с проводимостью σ_2.

Определить токи, создаваемые точечным источником тока силы I, помещенным:

а) внутри шара; б) вне шара.

133. Решить предыдущую задачу, считая шар идеально проводящим.

Сравнить с задачей 132.

134. Точечный источник тепла Q находится в присутствии непроводящего шара. Найти стационарное распределение температуры вне шара.

135. Внутри сферы, на поверхности которой происходит теплообмен со средой нулевой температуры, помещен точечный источник мощности Q_0. Найти стационарное распределение температуры внутри сферы.

136. Найти потенциал точечного заряда, помещенного между проводящими заземленными концентрическими сферами $r = a$ и $r = b$. Определить также плотность поверхностных зарядов.

137. Неоднородный диэлектрический шар радиуса b с диэлектрической постоянной

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1 & \text{при} \quad r < a, \\ \varepsilon_2 & \text{при} \quad a < r < b \end{cases}$$

находится в среде с диэлектрической постоянной ε_3.

Определить поле точечного заряда, помещенного:

1) вне шара $r > b$; 2) внутри шара $r < a$; 3) в области $a < r < b$.

Рассмотреть предельные случаи.

138. Найти поле внутри диэлектрической оболочки, ограниченной концентрическими сферами с радиусами a и b ($b > a$), помещенной в однородное параллельное электростатическое поле напряженности $\boldsymbol{E_0}$; диэлектрическая постоянная оболочки ε_1, диэлектрическая постоянная среды ε_2.

139. Вычислить приближенно распределение заряда на внутренней обкладке несимметричного сферического конденсатора, предполагая, что расстояние между центрами внутренней и внешней прокладок мало.

140. Найти потенциал заряженного тонкого кольца, полный заряд которого равен e.

141. Сферические координаты круглого кольца равны $r_0 = a$, $\theta_0 = \alpha$. Шар радиуса b из диэлектрика с диэлектрической постоянной ε_1 расположен так, что его центр находится в начале координат. Найти выражение для потенциала между кольцом и сферой, если линейная плотность заряда кольца равна $\varkappa$. Диэлектрическая постоянная среды равна ε_2.

142. Вычислить потенциал электростатического поля заряженного тонкого кольца, помещенного внутри сферы с проводящими стенками, если на сфере поддерживается потенциал, равный нулю. Центры сферы и колодца совпадают. Вычислить нормальную составляющую электрического поля на сфере $r = a$.

143. Вычислить потенциал во всех точках проводящего шара с проводимостью σ в том случае, когда ток I входит в один его полюс $\theta = 0$ и вытекает из полюса $\theta = \pi$.

144. Найти потенциал поля, создаваемого по одну сторону от бесконечной диэлектрической пластинки толщиной l точечным зарядом e, расположенным с противоположной стороны пластинки.

145. К поверхности земли $z = 0$ подводится ток I с помощью точечного электрода. Определить потенциал на поверхности земли, считая, что удельная проводимость земли до глубины $z = h$ равна σ_1, а на большей глубине она равна σ_2. Полученное решение применить для случая двух электродов, находящихся в точках

$$x = a \quad \text{и} \quad x = -a.$$

146. Сферический электрод радиуса a до половины погружен в землю, проводимость которой $\sigma_\text{г}$ в горизонтальном направлении больше, чем в вертикальном $\sigma_\text{в}$ (анизотропия). Найти распределение потенциала на поверхности земли, предполагая, что на поверхности электрода потенциал $V = V_0$.

Указание. Следует ввести вместо z новую переменную

$$t = \alpha z, \quad \alpha^2 = \frac{\sigma_\text{г}}{\sigma_\text{в}}.$$

При этом уравнение $\sigma_\text{г}(V_{xx} + V_{yy}) + \sigma_\text{в} V_{zz} = 0$ переходит в уравнение $V_{xx} + V_{yy} + V_{tt} = 0$.

§ 5. Потенциалы и их применение

В настоящем параграфе помещены задачи на вычисление объемного и поверхностных потенциалов для некоторых простейших случаев, а также краевые задачи, которые могут быть решены методами теории потенциалов.

147. Найти объемный потенциал V шара при постоянной плотности $\rho = \rho_0$, поставив краевую задачу для V и решая ее.

148. Решить задачу 147 прямым вычислением объемного интеграла.

149. Найти объемный потенциал:

а) масс, распределенных с постоянной плотностью в сферическом слое $a \leqslant r \leqslant b$;

б) масс, распределенных внутри шара радиуса a с постоянной плотностью ρ_1 и в сферическом слое $a < b < r < c$ с постоянной плотностью ρ_2;

в) масс, распределенных внутри сферы радиуса $r = c$ с переменной плотностью $\rho = \rho(r)$.

Получить отсюда решение задач 149, а) и 149, б).

150. Найти потенциал простого слоя, распределенного с постоянной плотностью $\nu = \nu_0$ на сфере.

151. Найти электростатическое поле объемных зарядов, равномерно распределенных внутри шара, расположенного над идеально проводящей плоскостью $z = 0$.

152. Найти логарифмический потенциал круга с постоянной плотностью заряда.

153. Найти логарифмический потенциал простого слоя отрезка с постоянной плотностью заряда.

154. Найти логарифмический потенциал двойного слоя отрезка с постоянной плотностью моментов.

155. Определить потенциал простого слоя, равномерно распределенного по круглому диску.

156. Найти вектор-потенциал кругового тока.

157. С помощью потенциала двойного слоя решить задачу Дирихле:

а) внутри круга, б) вне круга.

158. Найти решение задачи Неймана для круга, пользуясь потенциалом простого слоя.

159. Решить первую и вторую краевые задачи для уравнения Лапласа в полупространстве, пользуясь поверхностными потенциалами.

160. Найти решение задачи Дирихле в полуплоскости, пользуясь потенциалом простого слоя.

161. Рассмотрим поверхности Σ второго порядка, определяемые уравнением

$$\frac{x^2}{a^2+s} + \frac{y^2}{b^2+s} + \frac{z^2}{c^2+s} = 1,$$

где $a > b > c$. Если $-c^2 < s < \infty$, то поверхности суть эллипсоиды, при $-b^2 < s < -c^2$ — однополостные гиперболоиды, при $-a^2 < s < -b^2$ — двухполостные гиперболоиды. При $s = \infty$ мы имеем сферу с бесконечным радиусом, а при $s = -c^2$ эллипсоид сплющивается в эллиптический диск, лежащий в плоскости xy.

Показать, что поверхности рассматриваемого семейства могут быть эквипотенциальными, а их потенциал определяется по формуле

$$V = A \int\limits_{\Sigma} \frac{ds}{R(s)} + B, \quad R(s) = \sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)},$$

где A и B — постоянные, определяемые из условий на бесконечности и на поверхности Σ.

162. Пользуясь решением предыдущей задачи, найти выражение для потенциала заряженного проводящего эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, на котором распределен заряд e. (Диэлектрическая проницаемость среды ε.)

Определить емкость эллипсоида, а также поверхностную плотность заряда на эллипсоиде. Рассмотреть эллипсоид вращения.

163. Пользуясь решением задачи 162, вычислить поверхностную плотность заряда для эллиптического диска. Определить потенциал, емкость и плотность зарядов для круглого диска.

164. Показать, что гравитационный потенциал однородного эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

дается интегралами

$$V(x,\,y,\,z)=\rho_0\int\limits_0^\infty\frac{1-f(x,\,y,\,z;s)}{R(s)}\,ds\quad\text{внутри эллипсоида,}$$

$$V(x,\,y,\,z)=\rho_0\int\limits_\lambda^\infty\frac{1-f(x,\,y,\,z;s)}{R(s)}\,ds\quad\text{вне эллипсоида,}$$

где

$$f(x,\,y,\,z;s)=\frac{x^2}{a^2+s}+\frac{y^2}{b^2+s}+\frac{z^2}{c^2+s},$$

$$R(s)=\sqrt{(s+a^2)(s+b^2)(s+c^2)},$$

ρ_0 — объемная плотность потенциала, λ — эллипсоидальная координата — положительный корень $s=\lambda$ уравнения $f(x,\,y,\,z;s)=0$.

165. Вычислить гравитационный потенциал:

а) вытянутого эллипсоида вращения;

б) сплюснутого эллипсоида вращения (см. задачу 162).

Рассмотреть предельный переход к однородному шару.

166. Найти логарифмический потенциал эллиптической области с постоянной плотностью с помощью прямого вычисления интегралов.

167. Проводящий эллипс, определяемый уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a\geqslant b>0),$$

заряжен до потенциала V_0. Определить потенциал вне эллипса, а также плотность зарядов, распределенных на эллипсе.

168. Вычислить силу взаимодействия двух коаксиальных проволочных петель C_a и C_b с радиусами a и b, по которым протекают токи I и I'. Контуры расположены в параллельных плоскостях $z=0$ и $z=d$, центры их находятся в точках $x=y=z=0$ и $x=y=0$, $z=d$.

169. Вычислить коэффициент взаимной индукции двух коаксиальных проволочных колец 1 и 2, пользуясь формулой

$$M_{12} = \oint\limits_1 \boldsymbol{A_2} d\boldsymbol{s_1} = \mu \oint\limits_1 \oint\limits_2 \frac{ds_1\, ds_2}{r} = M_{21},$$

где $\boldsymbol{A_2}$ — вектор-потенциал поля, создаваемого током единичной силы, текущим по контуру 2; μ — магнитная проницаемость среды.

170. Показать, что выражение для потенциала, созданного заряженным кольцом радиуса a, имеет вид

$$V = \begin{cases} \dfrac{2e}{\pi\varepsilon} \displaystyle\int\limits_0^\infty K_0(\lambda a) I_0(\lambda\rho) \cos\lambda z\, d\lambda & \text{при} \quad \rho < a, \\ \dfrac{2e}{\pi\varepsilon} \displaystyle\int\limits_0^\infty I_0(\lambda a) K_0(\lambda\rho) \cos\lambda z\, d\lambda & \text{при} \quad \rho > a, \end{cases}$$

где e — заряд кольца.

171. Показать, что потенциал, созданный в окружающем пространстве диском радиуса a, несущим заряд e, равен

$$V(\rho, z) = \frac{e}{\varepsilon a} \int\limits_0^\infty e^{-\lambda|z|} J_0(\lambda\rho) \frac{\sin\lambda a}{\lambda}\, d\lambda.$$

Глава V

УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Уравнения параболического типа получаются при исследовании таких явлений, как теплопроводность, диффузия, распространение электромагнитного поля в проводящих средах, движение вязкой жидкости, движение грунтовых вод и др.

В настоящей главе рассматривается постановка и решение краевых задач для уравнений параболического типа в случае, когда изучаемые физические процессы характеризуются функциями двух, трех или четырех независимых переменных; она является продолжением главы третьей, в которой рассматриваются уравнения параболического типа для функций двух независимых переменных.

§ 1. Физические задачи, приводящие к уравнениям параболического типа; постановка краевых задач

1. Полупространство $z > 0$ заполнено жидкостью с коэффициентом теплопроводности λ, плотностью массы ρ и удельной теплоемкостью c.

Поставить краевую задачу о нагревании жидкости, если жидкость движется со скоростью $v_0 = \text{const}$ в направлении оси x, между нею и плоскостью $z = 0$ происходит теплообмен по закону Ньютона, температура граничной плоскости $y = 0$ равна u_0. Рассмотреть, в частности, случай стационарного распределения температуры при условии, что переносом тепла в направлении оси x за счет теплопроводности можно пренебречь по сравнению с переносом тепла движущейся массой жидкости.

2. Сформулировать диффузионную задачу, аналогичную задаче 1, предполагая плоскость $z = 0$ непроницаемой для частиц диффундирующего вещества; поставить соответствующие краевые задачи в нестационарном и стационарном случаях.

3. Вывести уравнение диффузии для вещества, частицы которого:

а) распадаются (например, неустойчивый газ, радон), причем скорость распада в каждой точке пространства пропорциональна концентрации;

б) размножаются (например, диффузия нейтронов при наличии деления ядер), причем скорость размножения в каждой точке пространства пропорциональна концентрации.

4. Поставить краевую задачу о распространении электромагнитного поля в неограниченном пространстве, заполненном проводящей средой с проводимостью $\sigma = \text{const}$, магнитной проницаемостью $\mu = \text{const}$ и диэлектрической постоянной $\varepsilon = \text{const}$.

5. Поставить краевую задачу об остывании неограниченной плоской пластины, если на ее поверхности происходит конвективный теплообмен с окружающей средой, температура которой равна нулю.

Рассмотреть, в частности, случай, когда изменение температуры по толщине пластины пренебрежимо мало.

6. Круглая цилиндрическая труба заполнена жидкостью с очень большой теплопроводностью[1]; вне трубы находится воздух с температурой $U_0 = \text{const}$. Поставить краевую задачу об определении температуры трубы, предполагая, что она не зависит от расстояния, отсчитываемого вдоль трубы.

7. Бесконечный круглый цилиндр радиуса r_0 с моментом инерции K на единицу длины находится в вязкой жидкости; при $t > 0$ он приводится во вращение действием момента M на единицу длины.

Пользуясь выражением в цилиндрических координатах уравнений движения вязкой жидкости и составляющих тензора напряжений[2], поставить краевую задачу о движении вязкой жидкости и цилиндра.

8. Слой грунта лежит на водонепроницаемом горизонтальном основании и содержит в себе грунтовые воды. Вектор $\boldsymbol{U}$ потока грунтовых вод связан с вектором $\boldsymbol{V}$ скорости движения частиц этих вод соотношением

$$\boldsymbol{U} = m\boldsymbol{V},$$

где коэффициент m называется пористостью грунта.

Сила сопротивления, приложенная к частице воды, отнесенная к удельному весу воды, согласно экспериментальному закону равна

$$\boldsymbol{f} = -\frac{1}{k}\boldsymbol{U},$$

где k есть так называемый коэффициент фильтрации[3].

Назовем избыточным давлением отнесенную к удельному весу воды разность между истинным и гидростатическим давлением в грунтовых водах.

Поставить краевую задачу о движении свободной поверхности грунтовых вод при следующих предположениях:

1) горизонтальная составляющая градиента избыточного давления пренебрежимо мала;

2) инерционные силы, действующие на частицы грунтовых вод, пренебрежимо малы.

---

[1] Речь идет о суммарной теплопроводности, включая перенос тепла конвективными токами жидкости.

[2] См. ответы и указания.

[3] По поводу терминологии см. [23].

§ 2. Метод разделения переменных [1])

1. Краевые задачи, не требующие применения специальных функций. В этом пункте рассматриваются такие краевые задачи для областей с плоскими и сферическими границами, решения которых выражаются в виде рядов по простейшим (элементарным) собственным функциям оператора Лапласа для этих областей.

а) Однородные среды.

9. Найти температуру параллелепипеда $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$, $0 \leqslant z \leqslant l_3$, если его начальная температура является произвольной функцией x, y z, а температура поверхности поддерживается равной нулю.

10. Решить предыдущую задачу для куба с ребром l, если в начальный момент он был равномерно нагретым. Найти момент времени, начиная с которого в центре куба заведомо будет иметь место регулярный режим с относительной точностью $\varepsilon > 0$ [2]).

11. Найти температуру параллелепипеда $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant$ $\leqslant l_2$, $0 \leqslant z \leqslant l_3$, на поверхности которого происходит конвективный теплообмен со средой нулевой температуры, если его начальная температура равна $f(x, y, z)$; рассмотреть, в частности, случай, когда $f(x, y, z) = U_0 \equiv \text{const}$.

12. На поверхности куба, равномерно нагретого в начальный момент времени, происходит конвективный теплообмен со средой, температура которой равна нулю. Найти выражение для температуры в центре куба и определить момент времени, начиная с которого в центре куба заведомо будет иметь место регулярный режим с относительной точностью $\varepsilon > 0$.

13. Стенки полуограниченной прямоугольной трубы $0 \leqslant x < +\infty$, $0 \leqslant y \leqslant l_1$, $0 \leqslant z \leqslant l_2$ поддерживаются при температуре, равной нулю. По трубе с постоянной скоростью v_0 в направлении оси x движется некоторая среда. Найти температуру движущейся среды, пренебрегая переносом тепла в направлении оси x за счет теплопроводности [3]) при следующих условиях:

1) процесс стационарен;

2) между средой и стенками трубы происходит теплообмен по закону Ньютона;

3) температура среды в сечении $x = 0$ равна $U_0 \equiv \text{const}$.

14. Пусть в кубе $0 \leqslant x, y, z \leqslant l$ происходит диффузия вещества, частицы которого размножаются со скоростью, пропорциональной концентрации (см. задачу 3). Найти критические размеры куба, т. е. найти длину ребра l, начиная с которой процесс размножения приобретает лавинный характер [4]). Рассмотреть случаи, когда:

---

[1]) См. вторую сноску на с. 29.

[2]) См. гл. III, § 2, задачу 22.

[3]) См. задачу 1.

[4]) Более подробно о понятии критических размеров см. [7, с. 471].

а) на всех гранях концентрация поддерживается равной нулю;
б) все грани непроницаемы;
в) все грани полупроницаемы.

15. Найти температуру шара радиуса r_0, поверхность которого поддерживается при температуре, равной нулю. В начальный момент времени температура шара была равна

$$u\big|_{t=0} = f(r), \quad 0 \leqslant r < r_0.$$

16. Начальная температура шара $0 \leqslant r \leqslant r_0$ равна

$$u\big|_{t=0} = U_0 \equiv \text{const},$$

а на поверхности шара поддерживается температура $U_1 \equiv \text{const}$. Найти температуру шара при $t > 0$. Определить момент времени, начиная с которого в центре шара заведомо будет иметь место регулярный режим с относительной точностью $\varepsilon > 0$.

17. Начальная температура шара $0 \leqslant r \leqslant r_0$ равна

$$u\big|_{t=0} = U_0 \equiv \text{const},$$

а внутрь шара через его поверхность подается постоянный тепловой поток плотности q. Найти температуру шара при $t > 0$.

18. Найти температуру шара радиуса r_0, на поверхности которого происходит конвективный теплообмен со средой, имеющей температуру, равную нулю. Начальная температура шара равна

$$u\big|_{t=0} = f(r), \quad 0 \leqslant r < r_0.$$

19. Начальная температура шара $0 \leqslant r \leqslant r_0$ равна

$$u\big|_{t=0} = U_0 \equiv \text{const},$$

а на его поверхности происходит конвективный теплообмен со средой постоянной температуры $U_1 \equiv \text{const}$. Найти температуру шара при $t > 0$.

Определить момент времени, начиная с которого в центре шара заведомо будет иметь место регулярный режим с относительной точностью $\varepsilon > 0$.

20. Начальная температура шара $0 \leqslant r < r_0$ равна

$$u\big|_{t=0} = U_0 \equiv \text{const},$$

а на его поверхности с момента $t = 0$ происходит конвективный теплообмен со средой, температура которой равна

$$U_0 + \alpha t, \quad 0 < t < +\infty, \quad U_0 = \text{const}, \quad \alpha = \text{const}.$$

Найти температуру шара при $t > 0$.

21. Решить задачу об остывании сферической оболочки $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, на внутренней и внешней поверхностях которой происходит конвективный теплообмен со средой, имеющей нулевую температуру. Начальная температура оболочки равна

$$u\big|_{t=0} = f(r), \quad r_1 < r < r_2.$$

22. В замкнутом сферическом сосуде $0 \leqslant r \leqslant R$ происходит диффузия вещества, частицы которого размножаются, причем скорость

размножения пропорциональна концентрации (см. задачу 14). Найти критические размеры сосуда. Рассмотреть случаи, когда:

а) на поверхности сосуда поддерживается концентрация, равная нулю;

б) стенка сосуда непроницаема;

в) стенка сосуда полупроницаема.

б) Неоднородные среды; сосредоточенные факторы.

23. Найти температуру балки прямоугольного поперечного сечения $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$, составленной из двух однородных балок (с различными физическими свойствами) с поперечными сечениями $0 \leqslant x \leqslant x_0$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$ и $x_0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$; торцы балки теплоизолированы, а боковая поверхность поддерживается при температуре, равной нулю. Начальная температура балки равна

$$u\big|_{t=0} = f(x, y), \quad 0 \leqslant x \leqslant l_1, \quad 0 \leqslant y \leqslant l_2.$$

24. Найти температуру прямоугольного параллелепипеда, составленного из двух однородных прямоугольных параллелепипедов $[0 \leqslant x \leqslant x_0,\ 0 \leqslant y \leqslant l_2,\ 0 \leqslant z \leqslant l_3]$ и $[x_0 \leqslant x \leqslant l_1,\ 0 \leqslant y \leqslant l_2,\ 0 \leqslant z \leqslant l_3]$, изготовленных из различных материалов. Поверхность составного параллелепипеда поддерживается при температуре, равной нулю, а его начальная температура равна

$$u\big|_{t=0} = f(x, y, z), \quad 0 \leqslant x \leqslant l_1, \quad 0 \leqslant y \leqslant l_2, \quad 0 \leqslant z \leqslant l_3.$$

25. Шар $0 \leqslant r \leqslant r_1$ составлен из однородного шара $0 \leqslant r \leqslant r_0$ и однородной сферической оболочки $r_0 \leqslant r \leqslant r_1$, изготовленных из различных материалов. Найти температуру шара, если его поверхность поддерживается при температуре, равной нулю, а начальная температура шара равна

$$u\big|_{t=0} = f(r), \quad 0 \leqslant r < r_1.$$

26. Во внутренней полости толстой сферической оболочки $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ содержится жидкость с очень большой теплопроводностью, т. е. такая, что ее температура все время равна температуре внутренней поверхности оболочки. Найти температуру оболочки, если ее внешняя поверхность поддерживается при температуре, равной нулю, а начальная температура равна

$$u\big|_{t=0} = f(r), \quad r_1 \leqslant r \leqslant r_2.$$

2. Краевые задачи, требующие применения специальных функций. В настоящем пункте рассматриваются такие краевые задачи для областей, ограниченных плоскостями, сферами и круговыми цилиндрами, решения которых выражаются рядами по общим собственным функциям оператора Лапласа для этих областей, т. е. таким собственным функциям, в состав которых входят цилиндрические или сферические функции.

а) Однородные среды.

27. Решить задачу о нагревании бесконечного круглого цилиндра $0 \leqslant r \leqslant r_0$, начальная температура которого равна нулю, а на его

поверхности поддерживается температура $U_0 = \text{const}$. Найти также в условиях регулярного режима приближенное выражение для температуры, средней по поперечному сечению цилиндра.

28. Найти температуру бесконечного круглого цилиндра при условии, что начальная температура равна

$$u\big|_{t=0} = U_0\left(1 - r^2/r_0^2\right),$$

а на его поверхности поддерживается температура, равная нулю. Найти в условиях регулярного режима приближенное выражение для температуры, средней по поперечному сечению цилиндра.

29. Найти температуру бесконечного круглого цилиндра $0 \leqslant r \leqslant r_0$, если его начальная температура равна

$$u\big|_{t=0} = U_0 \equiv \text{const},$$

а на его поверхность с момента $t = 0$ извне подается постоянный тепловой поток плотности q.

30. Найти температуру бесконечного круглого цилиндра радиуса r_0, если начальная температура равна

$$u\big|_{t=0} = f(r), \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0,$$

а на поверхности цилиндра происходит конвективный теплообмен со средой, температура которой равна нулю. Рассмотреть, в частности, случай, когда $f(r) = U_0 \equiv \text{const}$, и написать приближенное выражение для температуры в условиях регулярного режима.

31. Начальная температура неограниченного круглого цилиндра $0 \leqslant r \leqslant r_0$ равна

$$u\big|_{t=0} = U_0 \equiv \text{const},$$

а на поверхности цилиндра происходит конвективный теплообмен со средой, температура которой равна $U_1 = \text{const}$.

Найти температуру цилиндра при $t > 0$.

32. Решить предыдущую задачу, если температура среды равна $U_1 + \alpha t$, где U_1 и α — постоянные.

33. Вне бесконечного круглого проводящего цилиндра $0 \leqslant r \leqslant r_0$ в момент $t = 0$ мгновенно установилось постоянное магнитное поле H_0, параллельное оси цилиндра.

Найти напряженность магнитного поля внутри цилиндра при нулевых начальных условиях; найти затем поток магнитной индукции через поперечное сечение цилиндра.

34. Решить предыдущую задачу, если напряженность внешнего магнитного поля равна

$$H = H_0 \cos \omega t, \quad H_0 = \text{const}, \quad 0 < t < +\infty.$$

35. Начальная температура бесконечной круглой цилиндрической трубы $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ равна

$$u\big|_{t=0} = f(r), \quad r_1 \leqslant r \leqslant r_2.$$

Найти температуру трубы при $t > 0$, если на ее внутренней поверхности поддерживается температура $U_1 \equiv \text{const}$, а на наружной поверхности — температура $U_2 \equiv \text{const}$.

36. Температура бесконечной круглой цилиндрической трубы равна нулю при $t < 0$. С момента $t = 0$ через ее внешнюю поверхность подается снаружи постоянный тепловой поток плотности q, а внутренняя поверхность трубы поддерживается при температуре, равной нулю.

Найти температуру трубы при $t > 0$.

37. Решить задачу об остывании бесконечной круглой цилиндрической трубы, на внешней и внутренней поверхностях которой происходит конвективный теплообмен со средой нулевой температуры. В начальный момент времени труба была равномерно нагретой.

38. Между двумя концентрическими цилиндрами бесконечной длины находится вязкая жидкость. В момент $t = 0$ внешний цилиндр начинает вращаться с угловой скоростью $\omega = \text{const}$.

Определить скорость движения жидкости.

39. Найти температуру неограниченного круглого цилиндра $0 \leqslant r \leqslant r_0$, если его начальная температура равна

$$u\big|_{t=0} = f(r, \varphi), \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$

а на поверхности поддерживается температура, равная нулю.

40. Найти температуру неограниченного круглого цилиндра $0 \leqslant r \leqslant r_0$, если его начальная температура равна

$$u\big|_{t=0} = f(r, \varphi), \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$

а на поверхности происходит конвективный теплообмен со средой, температура которой равна нулю.

41. Найти температуру неограниченной круглой цилиндрической трубы $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, если ее начальная температура равна

$$u\big|_{t=0} = f(r, \varphi), \quad r_1 < r < r_2, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$

а на внешней и внутренней поверхностях поддерживается температура, равная нулю.

42. Найти температуру неограниченной круглой цилиндрической трубы $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, если ее начальная температура равна

$$u\big|_{t=0} = f(r, \varphi), \quad r_1 < r < r_2, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$

а на внешней и внутренней поверхностях происходит конвективный теплообмен со средой, температура которой равна нулю.

43. Найти температуру бесконечного цилиндрического сектора $0 \leqslant r \leqslant r_0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, если на поверхности $r = r_0$ и гранях $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_0$ поддерживается температура, равная нулю, а начальная температура равна

$$u\big|_{t=0} = f(r, \varphi), \quad 0 < r < r_0, \quad 0 < \varphi < \varphi_0.$$

44. Найти температуру бесконечного цилиндрического сектора $0 \leqslant r \leqslant r_0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, если на поверхности $r = r_0$ происходит конвективный теплообмен со средой, температура которой равна нулю, грани $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_0$ теплоизолированы, а начальная температура равна

$$u\big|_{t=0} = f(r, \varphi), \quad 0 < r < r_0, \quad 0 < \varphi < \varphi_0.$$

45. Найти температуру бесконечного цилиндрического сектора $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, если его поверхность поддерживается при температуре, равной нулю, а начальная температура равна

$$u\big|_{t=0} = f(r, \varphi), \quad r_1 < r < r_2, \quad 0 < \varphi < \varphi_0.$$

46. Найти температуру бесконечного цилиндрического сектора $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, если на поверхностях $r = r_1$ и $r = r_2$ происходит конвективный теплообмен со средой, температура которой равна нулю, грани $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_0$ теплоизолированы, а начальная температура равна

$$u\big|_{t=0} = f(r, \varphi), \quad r_1 < r < r_2, \quad 0 < \varphi < \varphi_0.$$

47. Найти температуру конечного круглого цилиндра $0 \leqslant r \leqslant r_0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant l$, поверхность которого поддерживается при температуре, равной нулю, если начальная температура равна

$$u\big|_{t=0} = f(r, \varphi, z), \quad 0 \leqslant r < r_0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 < z < l.$$

48. Найти температуру конечного круглого цилиндра $0 \leqslant r \leqslant r_0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant l$, на поверхности которого происходит конвективный теплообмен со средой, имеющей температуру, равную нулю, если начальная температура цилиндра равна

$$u\big|_{t=0} = f(r, \varphi, z), \quad 0 \leqslant r < r_0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 < z < l.$$

49. Решить задачу об остывании шара радиуса r_0, на поверхности которого поддерживается температура, равная нулю. Начальная температура шара равна

$$u\big|_{t=0} = f(r, \theta, \varphi), \quad 0 \leqslant r < r_0, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

50. Решить задачу об остывании шара радиуса r_0, если на его поверхности происходит конвективный теплообмен со средой, температура которой равна нулю. Начальная температура шара равна

$$u\big|_{t=0} = f(r, \theta, \varphi), \quad 0 \leqslant r < r_0, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

51. Решить задачу об остывании толстой сферической оболочки $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, на внешней и внутренней поверхностях которой поддерживается температура, равная нулю. Начальная температура оболочки равна

$$u\big|_{t=0} = f(r, \theta, \varphi), \quad r_1 < r < r_2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

52. Решить задачу об остывании толстой сферической оболочки $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, на внешней и внутренней поверхностях которой происходит конвективный теплообмен со средой, температура которой равна нулю. Начальная температура оболочки равна

$$u\big|_{t=0} = f(r, \theta, \varphi), \quad r_1 < r < r_2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

б) Неоднородные среды; сосредоточенные факторы.

53. Неоднородный круглый цилиндр $0 \leqslant r \leqslant r_1$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant l$ составлен из однородного цилиндра $0 \leqslant r \leqslant r_0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant l$ и однородной цилиндрической трубы $r_0 \leqslant r \leqslant r_1$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant l$, изготовленных из различных материалов.

Найти температуру составного цилиндра, если его поверхность поддерживается при температуре, равной нулю, а начальная температура равна

$$u\big|_{t=0} = f(r, \varphi, z), \quad 0 \leqslant r < r_1, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 < z < l.$$

54. Решить задачу об остывании бесконечной цилиндрической трубы $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, заполненной охлаждающей жидкостью, если температура охлаждающей жидкости все время равна температуре внутренней поверхности трубы, а внешняя поверхность теплоизолирована. Начальная температура трубы равна

$$u\big|_{t=0} = f(r), \quad r_1 < r < r_2.$$

55. Решить предыдущую задачу, предполагая, что на внешней поверхности трубы происходит конвективный теплообмен со средой, температура которой равна нулю.

56. Цилиндр радиуса r_1 с моментом инерции K на единицу длины погружен в жидкость и приводится во вращение моментом $M \equiv \text{const}$ на единицу длины.

Определить движение жидкости и цилиндра, если жидкость заполняет пространство между цилиндром и неподвижной коаксиальной трубой с внутренним радиусом $r_2 > r_1$. Цилиндр и трубу считать бесконечно длинными. В начальный момент времени цилиндр и жидкость покоились.

57. Вне полого цилиндрического проводника $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ бесконечной длины в момент $t = 0$ мгновенно установилось постоянное магнитное поле H_0, параллельное оси проводника.

Найти магнитное поле в проводнике при нулевых начальных условиях, предполагая, что во внутренней полости оно однородно, а также что вне и внутри трубы вакуум.

58. Неоднородный шар $0 \leqslant r \leqslant r_1$ составлен из однородного шара $0 \leqslant r \leqslant r_0$ и однородной сферической оболочки $r_0 \leqslant r \leqslant r_1$, изготовленных из различных материалов.

Найти температуру шара, если его поверхность поддерживается при температуре, равной нулю, а начальная температура равна

$$u\big|_{t=0} = f(r, \theta, \varphi), \quad 0 \leqslant r < r_1, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

§ 3. Метод интегральных представлений

В настоящем параграфе рассматривается применение интегральных представлений к решению краевых задач теории теплопроводности. Сначала идут задачи на применение интеграла Фурье, затем на построение и применение функций источников.

1. Применение интеграла Фурье.

59. Найти распределение температуры в неограниченном пространстве, начальная температура которого равна

$$u\big|_{t=0} = f(x, y, z), \quad -\infty < x, y, z < +\infty.$$

Рассмотреть также частный случай, когда $f(x, y, z)$ не зависит от z.

60. Найти температуру неограниченного пространства, вызванную непрерывно действующими источниками с плотностью $g(x, y, z, t)$; начальная температура пространства равна нулю. Рассмотреть также частные случаи, когда $g(x, y, z, t)$ не зависит от t и когда $g(x, y, z, t)$ не зависит от z.

61. Решить краевую задачу

$$u_t = a^2\Delta u, \quad -\infty < x, y < +\infty, \quad 0 < z < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u\big|_{z=0} = 0, \quad -\infty < x, y < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u\big|_{t=0} = f(x, y, z), \quad -\infty < x, y < +\infty, \quad 0 < z < +\infty.$$

Рассмотреть также частный случай, когда f не зависит от y.

62. Решить краевую задачу

$$u_t = a^2\Delta u, \quad -\infty < x, y < +\infty, \quad 0 < z < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u\big|_{z=0} = f(x, y, t), \quad -\infty < x, y < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u\big|_{t=0} = 0, \quad -\infty < x, y < +\infty, \quad 0 < z < +\infty.$$

Рассмотреть также частный случай, когда f не зависит от y.

63. Решить краевую задачу

$$u_t = a^2\Delta u, \quad -\infty < x, y < +\infty, \quad 0 < z, t < +\infty,$$
$$u_z\big|_{z=0} = 0, \quad -\infty < x, y < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u\big|_{t=0} = f(x, y, z), \quad -\infty < x, y < +\infty, \quad 0 < z < +\infty.$$

64. Решить краевую задачу

$$u_t = a^2\Delta u, \quad -\infty < x, y < +\infty, \quad 0 < z, t < +\infty,$$
$$u_z\big|_{z=0} = f(x, y, t), \quad -\infty < x, y < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u\big|_{t=0} = 0, \quad -\infty < x, y < +\infty, \quad 0 < z < +\infty.$$

65. Решить краевую задачу

$$u_t = a^2\Delta u, \quad -\infty < x, y < +\infty, \quad 0 < z, t < +\infty,$$
$$u_z - hu = 0, \quad -\infty < x, y < +\infty, \quad z = 0, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u\big|_{t=0} = f(x, y, t), \quad -\infty < x, y < +\infty, \quad 0 < z < +\infty.$$

Рассмотреть также частный случай, когда f не зависит от y.

66. Решить краевую задачу

$$u_t = a^2\Delta u, \quad -\infty < x, y < +\infty, \quad 0 < z, t < +\infty,$$
$$u_z = h[u - f(x, y, t)], \quad -\infty < x, y < +\infty, \quad z = 0, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u\big|_{t=0} = 0, \quad -\infty < x, y < +\infty, \quad 0 < z < +\infty.$$

67. Решить краевую задачу

$$u_t = a^2\Delta u + f(x, y, z, t), \quad -\infty < x, y < +\infty, \quad 0 < z, t < +\infty,$$
$$u\big|_{z=0} = 0, \quad -\infty < x, y < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u\big|_{t=0} = 0, \quad -\infty < x, y < +\infty, \quad 0 < z < +\infty.$$

68. Найти температуру неограниченной балки с прямоугольным поперечным сечением $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$, $-\infty < z < +\infty$, если ее начальная температура равна

$$u\big|_{t=0} = f(x, y, z), \quad 0 \leqslant x \leqslant l_1, \quad 0 \leqslant y \leqslant l_2, \quad -\infty \leqslant z \leqslant +\infty,$$

а на поверхности:

а) поддерживается температура, равная нулю;

б) имеет место тепловая изоляция;

в) происходит конвективный теплообмен со средой нулевой температуры.

69. Решить предыдущую задачу для полуограниченной балки с прямоугольным поперечным сечением: $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$, $0 < z < +\infty$; рассмотреть случаи, соответствующие граничным условиям а) и б).

70. Найти температуру бесконечно круглого цилиндра $0 \leqslant r \leqslant r_0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$, если его начальная температура равна

$$u\big|_{t=0} = f(r, \varphi, z), \quad 0 \leqslant r < r_0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty,$$

а на поверхности выполняется одно из следующих граничных условий:

а) температура поверхности поддерживается равной нулю;

б) поверхность теплоизолирована;

в) на поверхности происходит конвективный теплообмен с окружающей средой, температура которой равна нулю.

71. Найти температуру полуограниченного круглого цилиндра $0 \leqslant r \leqslant r_0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z < +\infty$, если его начальная температура равна

$$u\big|_{t=0} = f(r, \varphi, z), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0, \quad 0 < z < +\infty,$$

а на поверхности выполняется одно из следующих граничных условий:

а) температура поверхности поддерживается равной нулю;

б) поверхность теплоизолирована.

72. Найти температуру неограниченного цилиндрического сектора $0 \leqslant r \leqslant r_0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, $-\infty < z < +\infty$, если его начальная температура равна

$$u\big|_{t=0} = f(r, \varphi, z), \quad 0 < \varphi < \varphi_0, \quad 0 < r < r_0, \quad -\infty < z < +\infty,$$

а на поверхности выполняется одно из следующих граничных условий:

а) температура поверхности поддерживается равной нулю;

б) поверхность теплоизолирована.

73. Решить предыдущую задачу для полуограниченного цилиндрического сектора $0 \leqslant r \leqslant r_0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, $0 \leqslant z < +\infty$.

74. Найти температуру пластинки, имеющей форму неограниченного сектора $0 \leqslant r < +\infty$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, если ее начальная температура равна

$$u\big|_{t=0} = f(r, \varphi), \quad 0 < r < +\infty, \quad 0 < \varphi < \varphi_0,$$

а на краях пластинки:

а) поддерживается температура, равная нулю;

б) имеет место тепловая изоляция.

75. Решить предыдущую задачу, предполагая, что один край пластинки теплоизолирован, а температура другого поддерживается равной нулю.

76. Найти температуру неограниченного клина с углом раствора φ_0, если на его гранях:

а) поддерживается нулевая температура;

б) имеет место тепловая изоляция.

77. Найти температуру неограниченного пространства с бесконечной круглой цилиндрической полостью, если начальная температура равна нулю, а температура на поверхности полости поддерживается равной U_0.

2. Построение и применение функций влияния мгновенных точечных источников тепла.

78. Доказать, что решением краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Big\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big\}, \quad -\infty < x,\, y,\, z < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = f_1(x)f_2(y)f_3(z), \quad -\infty < x,\, y,\, z < +\infty \tag{2}$$

является произведение решений $u_1(x,t)$, $u_2(y,t)$, $u_3(z,t)$ краевых задач

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = a^2\,\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1'}$$

$$u_1\big|_{t=0} = f_1(x), \quad -\infty < x < +\infty, \tag{2'}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = a^2\,\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}, \quad -\infty < y < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1''}$$

$$u_2\big|_{t=0} = f_2(y), \quad -\infty < y < +\infty, \tag{2''}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} = a^2\,\frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2}, \quad -\infty < z < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1'''}$$

$$u_3\big|_{t=0} = f_3(z), \quad -\infty < z < +\infty. \tag{2'''}$$

79. Воспользовавшись выражением функций влияния мгновенных точечных источников тепла для прямых $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$, $-\infty < z < +\infty$ и предположением, сформулированным в задаче 78, написать выражение функции влияния мгновенного точечного источника тепла для пространства

$$-\infty < x,\, y,\, z < +\infty.$$

80. С помощью функции влияния, найденной в предыдущей задаче, решить краевую задачу

$$u_t = a^2\Delta u + F(x,\,y,\,z,t), \quad -\infty < x,\, y,\, z < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u\big|_{t=0} = f(x,\,y,\,z), \quad -\infty < x,\, y,\, z < +\infty.$$

81. Выразить функции влияния мгновенного точечного источника тепла для полупространства $-\infty < x,\, y < +\infty$, $0 < z < +\infty$, отвечающие граничным условиям:

а) $u\big|_{z=0} = 0$; б) $u_z\big|_{z=0} = 0$; в) $(u_z - hu)\big|_{z=0} = 0$;

через соответствующие одномерные функции влияния, аналогично тому, как это было сделано в решении задачи 79.

82. С помощью функций влияния, найденных в предыдущей задаче, решить краевые задачи:

а) $u_t = a^2\Delta u + F(x,\, y,\, z,\, t)$, $-\infty < x,\, y < +\infty$, $0 < z,\, t < +\infty$,
$u\big|_{z=0} = \Phi(x, y, t)$, $-\infty < x,\, y < +\infty$, $0 < t < +\infty$,
$u\big|_{t=0} = f(x, y, z)$, $-\infty < x,\, y < +\infty$, $0 < z < +\infty$;

б) $u_t = a^2\Delta u + F(x,\, y,\, z,\, t)$, $-\infty < x,\, y < +\infty$, $0 < z,\, t < +\infty$,
$u_z\big|_{z=0} = \Phi(x, y, t)$, $-\infty < x,\, y < +\infty$, $0 < t < +\infty$,
$u\big|_{t=0} = f(x, y, z)$, $-\infty < x,\, y < +\infty$, $0 < z < +\infty$;

в) $u_t = a^2\Delta u + F(x,\, y,\, z,\, t)$, $-\infty < x,\, y < +\infty$, $0 < z,\, t < +\infty$,
$(u_z - hu)\big|_{z=0} = h\Phi(x, y, t)$, $-\infty < x,\, y < +\infty$, $0 < t < +\infty$,
$u\big|_{t=0} = f(x, y, z)$, $-\infty < x,\, y < +\infty$, $0 < z < +\infty$.

83. Пусть D есть конечная, полубесконечная или бесконечная цилиндрическая область, параллельная оси z, и пусть ее пересечением с плоскостью xy является область D_{xy}. Пусть на поверхности области D заданы граничные условия первого, второго или третьего рода.

Доказать, что функцией влияния мгновенного точечного источника тепла для области D является соответственно произведение функций влияния мгновенного точечного источника тепла для конечного отрезка, полуоси или всей оси z на функцию влияния мгновенного точечного источника тепла для плоской области D_{xy}.

84. Воспользовавшись предложением, сформулированным в предыдущей задаче, написать выражение функции влияния мгновенного точечного источника тепла для плоского слоя $-\infty < x,\, y < +\infty$, $0 < z < l$. Рассмотреть случаи, когда на граничных плоскостях $z = 0$ и $z = l$:

а) поддерживается нулевая температура;

б) имеет место тепловая изоляция;

в) одна из граничных плоскостей ($z = 0$) теплоизолирована, а на другой ($z = l$) поддерживается нулевая температура;

г) на обеих граничных плоскостях происходит конвективный теплообмен со средой нулевой температуры.

85. Построить функцию влияния мгновенного точечного источника тепла для неограниченной балки с прямоугольным поперечным сечением $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$, $-\infty < z < +\infty$, если на поверхности балки:

а) поддерживается нулевая температура;

б) имеет место тепловая изоляция.

86. Построить функцию влияния мгновенного точечного источника тепла для прямоугольного параллелепипеда $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$, $0 \leqslant z \leqslant l_3$. Рассмотреть случаи, когда поверхность параллелепипеда:

а) поддерживается при нулевой температуре;

б) теплоизолирована.

87. Методом отражений построить функцию влияния мгновенного точечного источника тепла для неограниченного клина с углом раствора π/m, где m — натуральное число. Рассмотреть случаи, когда граничные плоскости $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/m$:

а) поддерживаются при температуре, равной нулю;

б) теплоизолированы.

88. Найти распределение температуры в неограниченном пространстве, вызванное тем, что в начальный момент времени на сферической поверхности радиуса r' выделилось мгновенно Q равномерно распределенных единиц тепла. (Построение функции влияния мгновенного сферического источника тепла.)

89. С помощью функции источника, найденной в предыдущей задаче, решить краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial t} \right) + f(r, t), \quad 0 < r, t < +\infty,$$
$$u(r, 0) = F(r), \quad 0 < r < +\infty,$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

90. Найти распределение температуры в неограниченном пространстве, вызванное тем, что в начальный момент времени на каждой единице длины бесконечной цилиндрической поверхности радиуса r' выделилось Q равномерно распределенных единиц тепла. (Построение функции влияния мгновенного цилиндрического источника тепла.)

91. С помощью функции влияния, найденной в предыдущей задаче, решить краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + f(r, t), \quad 0 < r, t < +\infty, \tag{1}$$
$$u(r, 0) = F(r), \quad 0 < r < +\infty, \tag{2}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

92. Найти функцию влияния мгновенного точечного источника для уравнения диффузии, если среда, в которой происходит диффузия, движется с постоянной скоростью $\boldsymbol{v}$ относительно рассматриваемой системы координат.

93. Найти функцию влияния неподвижного точечного источника постоянной мощности для уравнения диффузии в среде, движущейся с постоянной скоростью $\boldsymbol{v}$ в направлении оси x, если процесс диффузии стационарен и если переносом вещества в направлении оси x можно пренебречь по сравнению с переносом за счет движения среды (см. задачу 2).

94. Решить предыдущую задачу для полупространства $0 < z < +\infty$, рассмотрев случаи, когда:

а) плоскость $z = 0$ непроницаема;

б) на плоскости $z = 0$ поддерживается концентрация, равная нулю;

в) плоскость $z = 0$ полупроницаема, причем под ней (т. е. при $z < 0$) поддерживается концентрация, равная нулю.

95. Найти концентрацию диффундирующего вещества в неограниченном пространстве, выделяемого точечным источником мощности $f(t)$ с координатами $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \varkappa(t)$, если начальная концентрация этого вещества в пространстве равна нулю.

96. Найти концентрацию диффундирующего вещества в неограниченном пространстве, начальная концентрация которого равна

$$u\big|_{t=0} = \begin{cases} U_0 \equiv \text{const} & \text{при} \quad 0 \leqslant r < r_0, \\ 0 & \text{при} \quad r_0 < r < +\infty, \end{cases}$$

где r — радиус-вектор сферической системы координат.

97. Решить предыдущую задачу для полупространства $z > 0$, предполагая, что $z_0 < r_0$, $(0, 0, z_0)$ — координаты центра сферы, в которой начальная концентрация равна U_0. Рассмотреть случаи, когда:

а) плоскость $z = 0$ непроницаема для диффундирующего вещества;

б) на плоскости $z = 0$ поддерживается концентрация, равная нулю.

98. Найти концентрацию диффундирующего вещества в неограниченном пространстве, если его начальная концентрация равна

$$u\big|_{t=0} = \begin{cases} U_0 \equiv \text{const} & \text{при} \quad 0 \leqslant r < r_0, \\ 0 & \text{при} \quad r_0 < r < +\infty, \end{cases}$$

где r — радиус-вектор цилиндрической системы координат.

99. Решить предыдущую задачу для полупространства $x \geqslant 0$, предполагая, что цилиндр параллелен оси z и его ось пересекает плоскость $z = 0$ в точке $(x_0, 0)$, где $x_0 > r_0$. Рассмотреть случаи, когда:

а) плоскость $x = 0$ непроницаема для диффундирующего вещества;

б) на плоскости $x = 0$ поддерживается концентрация, равная нулю.

100. Канал с вертикальными стенками и непроницаемым дном внезапно заполняется водой так, что в одной его части, при $x < 0$, получается уровень воды $H_1 = \text{const}$, а в другой, при $x > 0$, уровень воды $H_2 = \text{const}$, и в дальнейшем эти уровни поддерживаются неизменными (см. рис. в ответе задачи, вертикальная ось H перпендикулярна к плоскости чертежа).

В начальный момент уровень грунтовых вод в грунтовом слое $y > 0$ равен $H_0 = \text{const}$.

Считая, что слой лежит на непроницаемом основании, являющемся продолжением дна канала, найти уровень грунтовых вод $H(x, y, t)$ при $t > 0$ $(y > 0)$.

101. На поверхности сферической полости $0 \leqslant r \leqslant r_0$ неограниченного пространства температура должна меняться по закону $u\big|_{r=r_0} = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — заданная функция времени; начальная температура пространства равна нулю.

Какой тепловой поток нужно подавать из сферической полости в пространство для обеспечения такого закона изменения температуры на поверхности полости?

Глава VI

УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

К уравнениям гиперболического типа приводят динамические задачи механики сплошных сред (акустики, гидродинамики, аэродинамики, теории упругости) и задачи электродинамики [1]. В настоящей главе рассматривается постановка и решение краевых задач гиперболического типа для функций двух или большего числа независимых переменных, так что эта глава является продолжением и развитием гл. II, в которой рассматриваются задачи гиперболического типа лишь для функций двух независимых переменных. Как и в гл. II, колебания сплошных сред всюду в этой главе считаются малыми в общепринятом смысле слова.

§ 1. Физические задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа; постановка краевых задач

В этом параграфе рассматривается постановка краевых задач для процессов механики сплошных сред. Постановка краевых задач электродинамики рассматривается в гл. IV [2].

1. Поставить краевую задачу о распространении малых возмущений в однородном идеальном газе, заполняющем неограниченное пространство, принимая за функцию, характеризующую процесс, одну из величин: плотность газа ρ, давление в газе p, потенциал скоростей частиц газа U, вектор скорости частиц газа $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}v^{(1)} + \boldsymbol{j}v^{(2)} + \boldsymbol{k}v^{(3)}$, потенциал смещений частиц газа Φ, или вектор смещения частиц газа $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i}u^{(1)} + \boldsymbol{j}u^{(2)} + \boldsymbol{k}u^{(3)}$. Показать, что через каждую из этих величин может быть выражена любая другая из этих же величин.

2. Вывести граничные условия для потенциала скоростей частиц газа U [3], потенциала смещений Φ, плотности ρ и давления p на плоскости, ограничивающей полупространство, заполненное этим газом.

[1] Уравнения релятивистской теории тяготения при известных пренебрежениях также принадлежат к гиперболическому типу.

[2] См. также [7, с. 440–451].

[3] По поводу обозначений см. ответ к задаче 1.

Рассмотреть случаи, когда эта плоскость:

а) неподвижна,

б) движется с дозвуковой скоростью в направлении своей нормали по заданному закону.

3. Пространство заполнено двумя различными идеальными газами, границей раздела которых является поверхность Σ [1]). Предполагая, что невозмущенные давления в обоих газах одинаковы, поставить краевую задачу о распространении малых возмущений в газе.

4. Поставить краевую задачу о поперечных колебаниях мембраны с неподвижно закрепленным краем, если в невозмущенном состоянии мембрана является плоской, а окружающая среда не оказывает сопротивления колебаниям мембраны.

Примечание. Задача о колебаниях мембраны является двумерным аналогом задачи о колебаниях струны [2]).

5. Поставить краевую задачу о колебаниях мембраны, натянутой на отверстие замкнутого сосуда, учитывая изменение давления в сосуде, вызываемое колебаниями мембраны, и считая скорость распространения малых возмущений в газе значительно большей скорости распространения волн в мембране (задача о колебаниях мембраны барабана).

6. Вывести уравнение распространения малых возмущений в газе, движущемся с постоянной скоростью относительно выбранной системы координат.

7. Поставить краевую задачу о сверхзвуковом стационарном обтекании неподвижного клина симметричным плоскопараллельным потоком идеального газа.

8. Поставить краевую задачу о сверхзвуковом стационарном обтекании круглого конуса идеальным газом в направлении оси конуса, считая невозмущенный поток однородным, а возмущения, вызванные конусом, малыми.

9. Пусть уровень идеальной жидкости в бассейне с горизонтальным дном и вертикальными стенками в невозмущенном состоянии равен $h = \text{const}$. При малых колебаниях свободной поверхности могут возникнуть движения, при которых частицы жидкости, лежащие на любой вертикали, движутся в горизонтальных направлениях одинаково. Пусть $\zeta(x, y, t)$ означает возвышение возмущенной поверхности над уровнем покоящейся жидкости. Считая давление p в возмущенной жидкости на глубине равным гидростатическому, поставить краевую задачу о распространении малых возмущений в слое, принимая за функцию, характеризующую процесс: 1) $\zeta(x, y, t)$; 2) потенциал (горизонтальных) скоростей частиц жидкости, если давление p_0 на поверхности жидкости остается постоянным (см. задачу 7 гл. II, § 1).

---

[1]) Геометрическая поверхность. Предполагается, что за рассматриваемое время границу раздела газов Σ можно считать бесконечно тонкой поверхностью.

[2]) См. гл. II, § 1, а также [7, с. 31–34].

10. Поставить краевую задачу 9 для случая, когда p_0 является заданной функцией x, y, t, принимая за функцию, характеризующую процесс, потенциал горизонтальных скоростей.

11. Вывести уравнения движения центра масс бесконечно малого элемента упругой среды, беря элемент в виде прямоугольного параллелепипеда с ребрами, параллельными осям координат.

12. Пользуясь законом Гука для однородной изотропной упругой среды, представить уравнения движения, найденные в предыдущей задаче, в форме, содержащей только составляющие вектора объемных сил и вектора смещения

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{i}u(x, y, z, t) + \boldsymbol{j}v(x, y, z, t) + \boldsymbol{k}w(x, y, z, t),$$

и доказать, что «всестороннее растяжение» $\Theta = \operatorname{div} \boldsymbol{U}$ и вихрь $\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{U}$ удовлетворяют, каждый в отдельности, волновому уравнению Даламбера $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 t} = a^2 \Delta \varphi$, причем для Θ константа $a^2 = \dfrac{\lambda + 2\mu}{\rho}$, а для $\boldsymbol{B}$ константа $a^2 = \dfrac{\mu}{\rho}$ [1]).

Примечания. 1. Всякий вектор $\boldsymbol{U}$ однозначно определяется по его расходимости $\operatorname{div} \boldsymbol{U}$ и вихрю $\operatorname{rot} \boldsymbol{U}$ (см. [14, с. 209]).

2. Форма элемента упругой среды, имеющего в недеформированном состоянии вид, описанный в задаче 11, в деформированном состоянии определяется величинами

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z},$$

образующими тензор деформации

$$(Д) = \begin{Vmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{Vmatrix}.$$

В случае, когда среда является однородной и изотропной, компоненты тензора напряжений (см. ответ к предыдущей задаче)

$$(H) = \begin{Vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Vmatrix}$$

связаны следующими соотношениями с компонентами тензора деформаций:

$$\sigma_x = \lambda\Theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_y = \lambda\Theta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \sigma_z = \lambda\Theta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right),$$

[1]) «Продольные» упругие волны распространяются быстрее «поперечных».

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

где $\Theta = \operatorname{div} \boldsymbol{U}$, а λ и μ — константы Ламэ, связанные следующим образом с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона m:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad m = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Коэффициент Пуассона m характеризует отношение к продольному растяжению соответствующего поперечного сжатия. Модуль сдвига

$$G = \mu.$$

13. Представляя вектор объемных сил в виде $\boldsymbol{F} = \operatorname{grad}\Phi + \operatorname{rot}\boldsymbol{B}$ (о возможности представления произвольного вектора в таком виде см. [14, с. 209]), доказать, что если $\rho\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu)\Delta\varphi + \Phi$, $\rho\dfrac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \mu\Delta\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$, то вектор $\boldsymbol{U} = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{rot}\boldsymbol{A}$ удовлетворяет уравнениям движения, полученным в задаче 12.

14. Задача о распространении возмущений в упругой среде называется плоской, если составляющая w вектора смещения $\boldsymbol{U}$ и составляющая Z вектора плотности объемных сил $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{i}X + \boldsymbol{j}Y + \boldsymbol{k}Z$ равны нулю, а остальные величины не зависят от z. Например, задача о распространении деформаций в тонкой пластинке, вызванных силами, действующими в ее плоскости, является плоской [1]).

Доказать, что в случае плоской задачи вектор смещения $\boldsymbol{U}$ выражается через два скалярных потенциала, каждый из которых удовлетворяет соответствующему волновому уравнению.

15. Выразить через компоненты вектора $\boldsymbol{U}$ и тензора (H) (см. задачу 12) граничные условия для распространения упругих возмущений в однородном изотропном полупространстве, если ограничивающая плоскость

а) свободна, б) фиксирована жестко.

Выразить для плоской задачи эти граничные условия через скалярные потенциалы (см. задачу 14).

16. Поставить краевую задачу о радиальных колебаниях круглой цилиндрической трубы под действием радиальной силы $F(r, t)$, где $F(r, t)$ — сила, приходящаяся на единицу массы, отстоящую на расстоянии r от оси трубы.

17. Поставить краевую задачу о радиальных колебаниях упругой сферической оболочки $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ под действием переменного давления $p(t)$ во внутренней полости.

18. Вывести дифференциальное уравнение для отклонения от невозмущенного состояния точек тонкой изотропной однородной пластинки, совершающей малые поперечные колебания. Рассмотреть, в частности, случай, когда пластинка лежит (и прикреплена) на упругом основании.

Примечание. Задача о поперечных колебаниях пластинки является двумерным аналогом задачи о поперечных колебаниях стержня (см. § 1 гл. II).

[1]) Более подробно см. [26, с. 92].

19. Переходя к полярным координатам, поставить краевую задачу о поперечных колебаниях круглой пластинки, если край пластинки защемлен жестко.

20. В начале координат неограниченного пространства x, y, z, представляющего собой вакуум, находится электрический диполь, параллельный оси z. Момент диполя меняется по закону

$$M = \begin{cases} M_0 = \text{const}, & -\infty < t \leqslant 0, \\ M_1 = M_0 \cos \omega t, & 0 < t < +\infty. \end{cases}$$

Поставить краевую задачу об определении электромагнитного поля, порожденного диполем, при $t > 0$.

§ 2. Простейшие задачи; различные приемы решения

21. а) Решить краевую задачу

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad -\infty < x, y, z < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(r), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(r), \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad 0 \leqslant r < +\infty. \tag{2}$$

б) Найти $\lim\limits_{x,y,z \to 0} u(x, y, z, t)$.

22. Решить краевую задачу

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(r, t), \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad 0 \leqslant r < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = 0. \tag{2}$$

23. Решить краевую задачу

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad -\infty < x, y, z < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

при начальных условиях:

а) $u\big|_{t=0} = \begin{cases} U_0 = \text{const} & \text{внутри сферы радиуса } r_0, \\ 0 & \text{вне этой сферы,} \end{cases}$

$u_t\big|_{t=0} = 0$ всюду;

б) $u_t\big|_{t=0} = \begin{cases} U_0 = \text{const} & \text{внутри сферы радиуса } r_0, \\ 0 & \text{вне этой сферы,} \end{cases}$

$u\big|_{t=0} = 0$ всюду.

24. В начальный момент времени $t = 0$ газ внутри сферического объема радиуса r_0 сжат так, что возмущение плотности $\widetilde{\rho} = \widetilde{\rho}_1$, а вне объема $\widetilde{\rho} \equiv 0$. Начальная скорость частиц газа равна нулю во всем пространстве. Найти движение газа при $t > 0$.

25. Решить задачу 23, б) для полупространства $z \geqslant 0$, если центр сферы находится в точке $(0, 0, z_0)$, $z_0 > r_0$; рассмотреть частные случаи, когда:

а) $u\big|_{z=0} = 0$; б) $u_z\big|_{z=0} = 0$.

26. Решить задачу 23, б) для двугранного угла $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, если центр сферы находится в точке $(0, y_0, z_0)$, $y_0 > r_0$, $z_0 > r_0$; рассмотреть случаи, когда:

а) $u\big|_{y=0} = 0$, $u_z\big|_{z=0} = 0$; б) $u_y\big|_{y=0} = 0$, $u\big|_{z=0} = 0$.

27. Неограниченное пространство заполнено покоящимся идеальным газом. В момент времени $t = 0$ в некоторой фиксированной точке этого пространства начинает непрерывно действовать сферически симметричный источник газа мощностью $q(t)$. Найти потенциал скоростей частиц газа при $t > 0$, предполагая возмущения, вызываемые источником, малыми.

28. Решить предыдущую задачу, если источник находится:

а) внутри двугранного угла $\dfrac{\pi}{n}$, где n — целое число, большее нуля;

б) внутри плоского слоя, $0 < z < l$, причем ограничивающие плоскости являются неподвижными.

29. Из решения краевой задачи

$$u_{tt} = a^2\Delta_3 u + f(x,y,z,t), \quad -\infty < x,y,z < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u\big|_{t=0} = \varphi(x,y,z), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x,y,z), \quad -\infty < x,y,z < +\infty,$$

методом «спуска» [1]) получить решение краевой задачи

$$u^*_{tt} = a^2\Delta_2 u^* + f^*(x,y,t), \quad -\infty < x,y < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u^*\big|_{t=0} = \varphi^*(x,y), \quad u^*_t\big|_{t=0} = \psi^*(x,y), \quad -\infty < x,y < +\infty.$$

30. Из решения краевой задачи

$$u_{tt} = a^2\Delta_3 u \pm cu + f(x,y,z,t), \quad -\infty < x,y,z < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u\big|_{t=0} = \varphi(x,y,z), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x,y,z), \quad -\infty < x,y,z < +\infty,$$

методом «спуска» [2]) получить решение краевой задачи

$$u^*_{tt} = a^2\Delta_2 u^* \pm c^2u^* + f^*(x,y,t), \quad -\infty < x,y < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u^*\big|_{t=0} = \varphi^*(x,y), \quad u^*_t\big|_{t=0} = \psi^*(x,y), \quad -\infty < x,y < +\infty.$$

31. На фиксированной прямой в неограниченном пространстве, заполненном покоящимся идеальным газом, непрерывно распределены источники газа, начинающие действовать в момент $t = 0$, причем мощность источников единицы длины этой прямой равна $q(t)$. Найти потенциал скоростей частиц газа при $t > 0$, предполагая, что возмущения, вызываемые источниками в окружающем газе, малы (вне бесконечно малой окрестности прямой, несущей на себе источники).

32. Решить предыдущую задачу для квадранта $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, ограниченного абсолютно твердыми плоскостями $x = 0$, $y = 0$, если прямая, на которой расположены источники, параллельна оси z и определяется координатами x_0, y_0, $x_0 > 0$, $y_0 > 0$.

---

[1]) См. [7, с. 408–410]; [2, т. II, с. 553–555].

[2]) То же.

33. В неограниченном пространстве, заполненном идеальным покоящимся газом, находится сферическая оболочка радиуса r_0 с центром в фиксированной точке. Начиная с момента $t = 0$, радиус сферической поверхности непрерывно меняется по заданному закону, причем радиальная скорость точек поверхности равна $\mu(t)$. Найти движение в случае, когда $\mu(t) = A \sin \omega t$.

34. Решить предыдущую задачу, если сфера находится в полупространстве, ограниченном неподвижной плоскостью.

35. В неограниченном пространстве, заполненном идеальным покоящимся газом, находится сфера фиксированного радиуса r_0. С момента $t = 0$ центр сферы совершает малые колебания со скоростью $\boldsymbol{V}(t)$, причем $|\boldsymbol{V}(t)| \ll a$, где a — скорость звука. Найти потенциал скоростей частиц газа.

36. Решить задачу о стационарном симметричном сверхзвуковом обтекании клина потоком идеального газа; найти потенциал скоростей в возмущенной области и возмущение давления на клине [1]).

37. Решить задачу о стационарном симметричном сверхзвуковом обтекании кругового конуса с небольшим углом раствора [2]).

38. Распространяющейся плоской волной для уравнения

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + cu, \tag{1}$$

где $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$, называется решение вида

$$u = f\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - bt\Big). \tag{2}$$

Плоская волна $u = f\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i - bt\Big)$ имеет одно и то же постоянное значение на каждой плоскости семейства

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - bt = \text{const}. \tag{3}$$

Расстояние от плоскости (3) до начала координат $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $\ldots$ $\ldots$, $x_n = 0$ равно

$$\frac{bt + \text{const}}{\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\Big)^{1/2}} \tag{4}$$

С изменением t плоскость (3) движется со скоростью

$$\frac{b}{\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\Big)^{1/2}}, \tag{5}$$

оставаясь параллельной своему начальному положению (при $t = 0$)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \text{const}; \tag{6}$$

[1]) См. задачу 7.

[2]) См. задачу 8.

иными словами, со скоростью (5) она удаляется от своего первоначального положения (6). Для упрощения выкладок будем в дальнейшем считать, что $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$, т. е. что a_i являются направляющими косинусами нормали к плоскости (3); $Q = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i - bt$ называется фазой волны (2), а f — формой волны.

Доказать, что:

1) для существования плоских волн произвольной формы у уравнения (1), распространяющихся со скоростью a в любых направлениях, необходимо и достаточно, чтобы было $c = 0$;

2) при $c \neq 0$ у уравнения (1) существуют плоские волны любых направлений распространения и любых скоростей, кроме скорости a, однако их форма не может быть произвольной, а является решением дифференциального уравнения

$$f''(Q)(a^2 - b^2) + f(Q)c = 0. \tag{7}$$

39. Решить задачу о стационарном обтекании волнообразной стенки $y = \varepsilon \sin \omega x$, где ε — мало, $-\infty < x < +\infty$, потоком идеального сжимаемого газа, невозмущенная скорость которого совпадает по направлению с осью x и равна $U = \text{const}$. Рассмотреть случаи:

а) дозвуковой скорости потока;

б) сверхзвуковой скорости потока.

40. Путем суперпозиции плоских волн с фронтом, параллельным оси z, $f(at - \alpha x - \beta y)$, где α и β — направляющие косинусы нормали к фронту волны, получить цилиндрические волны

$$\psi(r, t) = \int_{at-r}^{at+r} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\sqrt{r^2 - (at - \xi)^2}}, \tag{1}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Найти явное выражение для $\psi(r, t)$ при условии, что

$$f(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -\infty < \xi < -r_0, \\ U_0 = \text{const} & \text{при} \quad -r_0 < \xi < r_0, \\ 0 & \text{при} \quad r_0 < \xi < +\infty. \end{cases}$$

41. Путем суперпозиции сферически симметричных волн $\dfrac{f_1(at - r)}{r}$ и $\dfrac{f_2(at + r)}{r}$, где $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$ — произвольные функции, получить цилиндрические волны

$$\psi_1(\rho, t) = \int_{-\infty}^{at-\rho} \frac{2f_1(\xi)\, d\xi}{\sqrt{(at - \xi)^2 - \rho^2}}, \quad \psi_2(\rho, t) = \int_{at+\rho}^{+\infty} \frac{2f_2(\xi)\, d\xi}{\sqrt{(at - \xi)^2 - \rho^2}},$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2,$$

предполагая интегралы сходящимися.

42. Найти цилиндрически симметричные монохроматические волны в неограниченном пространстве, решая уравнение $u_{tt} = a^2 \Delta u$, а затем получить эти волны путем суперпозиции плоских монохроматических волн.

43. Путем суперпозиции плоских волн получить сферическую волну вида

$$\frac{\Phi\left(t + \frac{r}{a}\right) - \Phi\left(t - \frac{r}{a}\right)}{r}.$$

44. Решить задачу об отражении и преломлении плоской монохроматической волны на плоской границе раздела двух различных идеальных газов; найти соотношение между углами падения, отражения и преломления, а также между амплитудами падающей, отраженной и преломленной волн. Невозмущенные давления в обоих газах предполагаются одинаковыми.

45. Найти соотношение между углами падения, отражения и преломления плоской монохроматической электромагнитной волны на плоской границе двух однородных изотропных диэлектриков.

46. Рассматривая случай нормального падения плоской монохроматической электромагнитной линейно поляризованной волны на плоскость раздела двух однородных изотропных диэлектриков, найти соотношение между амплитудами падающей, отраженной и преломленной волн и дать выражение для этих волн.

§ 3. Метод разделения переменных [1])

1. Краевые задачи, не требующие применения специальных функций. В этом пункте рассматриваются также краевые задачи для областей с плоскими и сферическими границами, решения которых выражаются в виде рядов по простейшим (элементарным) собственным функциям оператора Лапласа для этих областей.

Сначала среды предполагаются изотропными и однородными, затем приводится несколько задач для неоднородных сред.

а) Однородные среды.

47. Найти поперечные колебания прямоугольной мембраны $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$ с закрепленным краем, вызванные начальным отклонением

$$u(x, y, 0) = Axy(l_1 - x)(l_2 - y),$$

если реакцией окружающей среды можно пренебречь.

48. Найти поперечные колебания прямоугольной мембраны $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$ с закрепленным краем, вызванные начальным распределением скоростей

$$u_t(x, y, 0) = Axy(l_1 - x)(l_2 - y),$$

если реакцией окружающей среды можно пренебречь.

[1]) См. вторую сноску на с. 29.

49. Найти поперечные колебания прямоугольной мембраны $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$ с закрепленным краем, вызванные поперечным сосредоточенным импульсом K, сообщенным мембране в точке (x_0, y_0), $0 < x_0 < l_1$, $0 < y_0 < l_2$, считая, что реакция окружающей среды пренебрежимо мала.

50. Найти поперечные колебания прямоугольной мембраны $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$ с закрепленным краем, вызванные непрерывно распределенной по мембране и перпендикулярной к ее поверхности силой с плотностью

$$F(x, y, t) = A(x, y) \sin \omega t, \quad 0 < t < +\infty,$$

считая, что реакция окружающей среды пренебрежимо мала.

51. Найти поперечные колебания прямоугольной мембраны $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$ с закрепленным краем, вызванные сосредоточенной поперечной силой

$$F(t) = A \sin \omega t, \quad A = \text{const}, \quad 0 < t < +\infty,$$

приложенной в точке (x_0, y_0), $0 < x_0 < l_1$, $0 < y_0 < l_2$, считая, что реакция окружающей среды пренебрежимо мала.

52. Найти колебания воды в прямоугольном резервуаре $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$ под действием переменного внешнего давления на свободной поверхности

$$p_0(x, y, t) = A \cos \frac{\pi x}{l_1} \cos \frac{\pi y}{l_2} f(t), \quad 0 < t < +\infty, \quad f(0) = 0,$$

если глубина воды в невозмущенном состоянии равна h. Функция $f(t)$ предполагается имеющей непрерывную производную [1]).

53. Решить задачу 49, предполагая, что окружающая среда оказывает сопротивление, пропорциональное скорости.

54. Найти установившиеся колебания прямоугольной мембраны $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$ в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости, под действием равномерно распределенной поперечной силы с плотностью

$$F = A \sin \omega t, \quad 0 < t < +\infty, \quad A = \text{const}.$$

Контур мембраны закреплен неподвижно.

55. Идеальный газ заключен между двумя концентрическими сферами S_{r_1} и S_{r_2}. Радиус внутренней сферы S_{r_1} меняется по закону $r(t) = r_1 + \varepsilon \sin \omega t, \quad -\infty < t < +\infty, \quad 0 < \varepsilon \ll r_2 - r_1,$

а внешняя сфера остается неизменной. Найти установившиеся колебания газа между сферами.

56. Идеальный газ заключен между двумя концентрическими сферами S_{r_1} и S_{r_2} с фиксированными радиусами r_1 и r_2. Найти колебания газа между сферами, вызванные начальным радиальным возмущением плотности

$$\widetilde{\rho}(r, 0) = f(r), \quad r_1 < r < r_2.$$

[1]) См. задачи 9 и 10.

б) Неоднородные среды.

57. Найти поперечные колебания прямоугольной мембраны $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$, составленной из двух однородных прямоугольных кусков $0 \leqslant x \leqslant x_0$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$ и $x_0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$, вызванные начальными поперечными возмущениями.

58. Сферическая полость фиксированного радиуса r_2 заполнена двумя различными идеальными газами, поверхностью раздела которых является сфера S_{r_1} $(0 < r_1 < r_2)$, концентрическая поверхности полости.

Найти колебания газов при следующих начальных условиях для потенциала скоростей $u(r,t)$ и давления $p(r,t)$:

$$u(r,0) = f(r), \quad p(r,0) = p_0, \quad 0 \leqslant r < r_2.$$

2. Краевые задачи, требующие применения специальных функций. Как и в предыдущем пункте, сначала идут задачи для однородных сред, затем для неоднородных.

а) Однородные среды.

59. Найти поперечные колебания круглой мембраны с закрепленным краем, вызванные радиально симметричным начальным распределением отклонений и скоростей, считая реакцию окружающей среды пренебрежимо малой.

60. Решить предыдущую задачу, предполагая, что начальное отклонение имеет форму параболоида вращения, а начальные скорости равны нулю.

61. Найти колебания воды в круглом вертикальном цилиндрическом сосуде с горизонтальным дном, если начальные условия обладают радиальной симметрией, а давление на свободной поверхности воды остается постоянным.

62. Найти колебания круглой мембраны с закрепленным краем в среде без сопротивления, вызванные равномерно распределенным постоянным давлением, действующим на одну сторону мембраны с момента $t = 0$, предполагая, что окружающая среда не оказывает какого-либо другого сопротивления колебаниям мембраны.

63. Найти колебания круглой мембраны $0 \leqslant r < r_0$ с закрепленным краем в среде без сопротивления, вызванные переменным давлением

$$p = f(r,t), \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0, \quad 0 < t < +\infty,$$

приложенным к одной стороне мембраны.

64. Найти колебания круглой мембраны $0 \leqslant r \leqslant r_0$ с закрепленным краем в среде без сопротивления, вызванные равномерно распределенным давлением

$$p = p_0 \sin \omega t, \quad 0 < t < +\infty,$$

приложенным к одной стороне мембраны.

65. Найти при нулевых начальных условиях колебания круглой мембраны $0 \leqslant r \leqslant r_0$ в среде без сопротивления, вызванные движением ее края по закону

$$u(r_0,t) = A \sin \omega t, \quad 0 < t < +\infty.$$

66. Решить задачу 59 в случае, когда окружающая среда оказывает сопротивление, пропорциональное скорости.

67. Найти установившиеся колебания круглой мембраны с закрепленным краем в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости, под действием равномерно распределенного (приложенного к одной стороне мембраны) давления:

а) $p = p_0 \sin \omega t, \quad 0 < t < +\infty, \quad p_0 = \text{const};$

б) $p = p_0 \cos \omega t, \quad 0 < t < +\infty, \quad p_0 = \text{const}.$

68. Найти установившиеся колебания круглой мембраны $0 \leqslant r \leqslant r_0$ в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости, вызываемые движением ее края по закону $u(r_0, t) = A \sin \omega t$ (ср. с задачей 65).

69. Найти колебания круглой мембраны барабана [1], вызванные радиально симметричными начальными возмущениями.

70. Найти колебания круглой мембраны барабана, вызванные равномерно распределенным давлением

$$p = \Pi_0 \sin \omega t; \quad 0 < t < +\infty, \quad \Pi_0 = \text{const},$$

приложенным к внешней стороне мембраны.

71. Найти поперечные колебания круглой пластинки с жестко закрепленным краем в среде без сопротивления, вызванные радиально симметричными начальными возмущениями.

72. Найти поперечные колебания пластинки предыдущей задачи, вызванные поперечным сосредоточенным ударом по центру пластинки, передавшим ей импульс I.

73. Найти поперечные колебания пластинки задачи 71, вызываемые равномерно распределенной поперечной силой с плотностью $p = p_0 \sin \omega t$, приложенной с момента $t = 0$.

74. Найти поперечные колебания пластинки задачи 71, вызываемые сосредоточенной поперечной силой $P = P_0 \sin \omega t$, приложенной в центре пластинки с момента $t = 0$ (колебания мембраны репродуктора).

75. Найти поперечные колебания круглой кольцевой мембраны с закрепленными краями, вызванные радиально симметричными начальными возмущениями.

76. Найти поперечные колебания описанной в предыдущей задаче мембраны, вызванные равномерно распределенным давлением

$$p = p_0 \sin \omega t, \quad 0 < t < +\infty, \quad p_0 = \text{const},$$

приложенным к одной стороне мембраны.

77. Найти колебания жидкости в сосуде с горизонтальным дном, стенками которого являются два коаксиальных круглых цилиндра, если глубина жидкости в невозмущенном состоянии равна $h = \text{const}$, а начальные возмущения радиально симметричны [2].

---

[1] См. задачу 5.

[2] См. задачу 9.

78. Найти колебания газа (потенциал скоростей) в круглом замкнутом цилиндрическом сосуде, вызванные радиальными колебаниями боковой стенки, начавшимися в момент $t = 0$, если скорости частиц стенки равны

$$f(z)\cos\omega t, \quad 0 \leqslant z \leqslant l \quad (l \text{ — длина цилиндра}), \quad 0 < t < +\infty.$$

Верхнее и нижнее донья неподвижны.

79. Найти колебания газа в круглом замкнутом цилиндре, вызванные поперечными колебаниями одного из его доньев, начавшимися в момент $t = 0$, если скорости частиц этого дна равны

$$f(z)\cos\omega t, \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0 \quad (r_0 \text{ — радиус цилиндра}), \quad 0 < t < +\infty.$$

Второе дно и боковая стенка сосуда неподвижны.

80. Найти колебания газа в замкнутом сосуде, образованном двумя коаксиальными круглыми цилиндрами и двумя поперечными плоскими доньями, вызванные радиальными колебаниями внешнего цилиндра, начавшимися в момент $t = 0$, если скорости частиц этого цилиндра равны $f(z)\cos\omega t$, $0 \leqslant z \leqslant l$, l — длина цилиндра. Донья и внутренний цилиндр неподвижны.

81. Найти колебания газа в сосуде, описанном в предыдущей задаче, вызванные поперечными колебаниями одного из доньев, начавшимися в момент $t = 0$, если скорости частиц этого дна равны $f(r)\cos\omega t$, $r^* \leqslant r \leqslant r^{**}$, r^* и r^{**} — радиусы внутреннего и внешнего цилиндров. Второе дно и цилиндры неподвижны.

82. Найти поперечные колебания круглой мембраны $0 \leqslant r \leqslant r_0$ с закрепленным краем, вызванные сосредоточенным ударом, нормальным к поверхности мембраны, передавшим мембране в точке (r_1, φ_1), $0 < r_1 < r_0$, импульс K.

Рассмотреть случай, когда окружающая среда не оказывает сопротивления движению мембраны.

83. Сосуд с водой, представляющий собой вертикальный круглый цилиндр с горизонтальным дном, длительное время движется со скоростью $v_0 = \text{const}$ в направлении, перпендикулярном к оси сосуда.

Найти колебания воды в сосуде при $t > 0$, если в момент $t = 0$ сосуд мгновенно останавливается и если при $t < 0$ вода относительно сосуда была неподвижной. Давление на свободной поверхности воды считать постоянным.

84. Найти колебания круглой мембраны $0 \leqslant r \leqslant r_0$ с закрепленным краем, вызванные непрерывно распределенным переменным давлением

$$p = f(r)\cos(\varphi - \omega t), \quad f(r_0) = 0, \quad 0 < t < +\infty,$$

приложенным к одной стороне мембраны.

85. Найти установившиеся колебания мембраны, описанной в предыдущей задаче, в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости.

86. Найти колебания круглой мембраны $0 \leqslant r \leqslant r_0$, вызванные колебаниями ее края по закону

$$u(r_0, \varphi, t) = f(t)\cos n\varphi, \quad f(0) = f'(0) = 0, \quad n \text{ — целое} > 0,$$
$$0 < t < +\infty.$$

87. Найти колебания круглой мембраны $0 \leqslant r \leqslant r_0$, вызванные колебаниями ее края по закону $u(r_0, \varphi, t) = F(\varphi)\sin \omega t$, $F(\varphi)$ — гладкая функция с периодом 2π.

88. Найти колебания газа в круглом замкнутом цилиндре $0 \leqslant r \leqslant r_0$, $0 \leqslant z \leqslant l$, вызванные радиальными колебаниями его боковой стенки со скоростью, меняющейся по закону

$$f(z)\cos n\varphi \cos \omega t, \quad n \text{ — целое} > 0, \quad 0 < t < +\infty.$$

Донья сосуда неподвижны.

89. Найти колебания газа в круглом замкнутом цилиндре $0 \leqslant r \leqslant r_0$, $0 \leqslant z \leqslant l$, вызванные поперечными колебаниями одного из доньев со скоростью, меняющейся по закону $f(r)\cos n\varphi \cos \omega t$, n — целое > 0, $0 < t < +\infty$.

90. Найти поперечные колебания мембраны с закрепленным краем, вызванные начальным сосредоточенным поперечным импульсом K, сообщенным мембране в некоторой ее внутренней точке, если мембрана имеет форму кругового сектора, а окружающая среда не оказывает сопротивления колебаниям.

91. Решить предыдущую задачу для мембраны, имеющей форму сектора кругового кольца.

92. Найти колебания газа в области, ограниченной двумя коаксиальными неподвижными круглыми цилиндрами, двумя плоскостями, перпендикулярными к оси цилиндров, и двумя плоскостями, проходящими через их ось, если эти колебания вызваны начальными возмущениями, не зависящими от z.

93. Сферический сосуд с газом в течение длительного времени двигался равномерно со скоростью v, а затем в момент $t = 0$ мгновенно остановился и остался неподвижным. Найти возникшие вследствие этого колебания газа в сосуде.

94. Сферический сосуд, наполненный газом, начиная с момента $t = 0$, совершает малые гармонические колебания в направлении одного из своих диаметров; смещение сосуда в направлении этого диаметра равно $A\sin \omega t$, $0 < t < +\infty$. Найти колебания газа в сосуде, предполагая, что при $t < 0$ газ покоился.

95. Найти колебания газа в сферическом сосуде $0 \leqslant r \leqslant r_0$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, вызванные малыми деформациями стенки сосуда, начавшимися с момента $t = 0$, если скорости частиц стенки сосуда направлены по его радиусам, а величина скоростей равна

$$AP_n(\cos\theta)\cos \omega t \ ^{1)}.$$

[1)] $P_n(\xi)$ — полином Лежандра.

96. Найти колебания газа в сферическом сосуде, вызванные малыми колебаниями его стенки, начавшимися с момента $t = 0$, если скорости частиц стенки направлены по радиусам сосуда, а величина скоростей равна

$$P_n(\cos\theta)f(t),$$

где $f(0) = f'(0) = 0$.

97. Найти колебания газа в сферическом сосуде, вызванные малыми колебаниями его стенки, начавшимися в момент $t = 0$, если скорости частиц стенки направлены по радиусам, а величина скоростей равна

$$f(\theta)\cos\omega t, \quad 0 < t < +\infty.$$

98. Решить предыдущую задачу при условии, что скорости частиц стенки равны

$$AP_{nm}(\cos\theta)\cos m\varphi\cos\omega t\ ^{1)}.$$

99. Решить задачу 98, если скорости частиц стенки равны

$$f(\theta)\cos m\varphi\cos\omega t.$$

100. Решить задачу 98, если скорости частиц стенки равны

$$f(t)P_n(\cos\theta)\cos m\varphi, \quad f(0) = f'(0) = 0.$$

101. Решить задачу 93 для газа, заключенного между двумя концентрическими сферами S_{r_1} и S_{r_2}, $r_1 < r_2$.

102. Решить задачу 94 для газа, заключенного между двумя концентрическими сферами S_{r_1} и S_{r_2}, $r_1 < r_2$.

б) Неоднородные среды.

103. Найти поперечные колебания неоднородной круглой мембраны $0 \leqslant r \leqslant r_2$ с закрепленным краем, полученной соединением однородной круглой мембраны $0 \leqslant r \leqslant r_1$ и однородной кольцевой мембраны $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, если начальные поперечные возмущения заданы.

§ 4. Метод интегральных представлений

В первом пункте этого параграфа собраны задачи на применение интеграла Фурье, во втором — на построение и применение функций влияния мгновенных сосредоточенных источников.

1. Применение интеграла Фурье.

а) Преобразование Фурье.

104. Решить краевую задачу

$$u_{tt} = a^2\Delta_2 u, \quad -\infty < x, y < +\infty, \quad 0 < t < +\infty\ ^{2)}, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = \Phi(x, y), \quad u_t\big|_{t=0} = \Psi(x, y), \quad -\infty < x, y < +\infty. \tag{2}$$

[1)] $P_{nm}(\xi)$ — присоединенная функция Лежандра, $m \leqslant n$.

[2)] $\Delta_2 = \operatorname{div}\operatorname{grad}$ — оператор Лапласа для плоскости; в декартовых координатах $\Delta_2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.

105. Решить краевую задачу

$$u_{tt} = a^2\Delta_3 u, \quad -\infty < x, y, z < +\infty, \quad 0 < t < +\infty \ ^{1)}, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = \Phi(x, y, z), \quad u_t\big|_{t=0} = \Psi(x, y, z), \quad -\infty < x, y, z < +\infty. \tag{2}$$

106. Решить краевую задачу

$$u_{tt} = a^2\Delta_2 u + f(x, y, t), \quad -\infty < x, y < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = 0, \quad -\infty < x, y < +\infty. \tag{2}$$

107. Решить краевую задачу

$$u_{tt} = a^2\Delta_3 u + f(x, y, z, t), \quad -\infty < x, y, z < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = 0, \quad -\infty < x, y, z < +\infty. \tag{2}$$

108. Решить краевую задачу

$$u_{tt} + b^2\Delta_2\Delta_2 u = 0, \quad -\infty < x, y < +\infty, \quad 0 < t < +\infty \ ^{2)}, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = \Phi(x, y), \quad u_t\big|_{t=0} = \Psi(x, y), \quad -\infty < x, y < +\infty. \tag{2}$$

б) Преобразование Фурье–Бесселя (Ханкеля).

109. Применяя преобразование Фурье–Бесселя, решить краевую задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad 0 \leqslant r < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(r, 0) = \frac{A}{\sqrt{1 + r^2/b^2}}, \quad u_t(r, 0) = 0, \quad 0 \leqslant r < +\infty. \tag{2}$$

110. Найти радиально симметричные поперечные колебания неограниченной пластинки, решив краевую задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 u = 0, \quad 0 \leqslant r < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(r, 0) = f(r), \quad u_t(r, 0) = 0, \quad 0 \leqslant r < +\infty. \tag{2}$$

Рассмотреть, в частности, случай, когда

$$f(r) = Ae^{-r^2/a^2}, \quad 0 \leqslant r < +\infty. \tag{2'}$$

111. Найти радиально симметричные поперечные отклонения точек неограниченной пластинки $0 \leqslant r < +\infty$, если точка $r = 0$ этой пластинки с момента $t = 0$ движется по заданному закону. Рассмотреть, в частности, случай, когда

$$u(0, t) = \begin{cases} A(t_0 - t), & 0 \leqslant t \leqslant t_0, \\ 0, & t_0 \leqslant t < +\infty. \end{cases} \tag{1}$$

---

[1]) $\Delta_3 = \operatorname{div}\operatorname{grad}$ — оператор Лапласа для пространства; в декартовых координатах $\Delta_3 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$.

[2]) Бигармонический оператор $\Delta_2\Delta_2$, означающий двукратное применение оператора Лапласа Δ_2.

112. Найти чисто вынужденные радиально симметричные поперечные отклонения точек неограниченной пластинки $0 \leqslant r < +\infty$ под действием распределенных поперечных сил с плотностью

$$p(r,t) = 16\rho hbf(r)\,\psi'(t), \quad -\infty < t < +\infty,$$

где $2h$ — толщина пластинки, ρ — плотность массы пластинки, b имеет тот же смысл, что и в предыдущих задачах[1]), $\psi'(t) = \dfrac{d\psi(t)}{dt}$, $\psi(t)$ зависит только от t, а $f(r)$ зависит только от r.

Рассмотреть, в частности, случаи, когда:

а) движение пластинки вынуждается сосредоточенной поперечной силой

$$16\rho hb\,\psi'(t), \quad -\infty < t < +\infty,$$

приложенной в точке $r = 0$;

б) движение пластинки вынуждается поперечной силой

$$16\rho hb\,\psi'(t), \quad -\infty < t < +\infty,$$

равномерно распределенной по кругу $0 \leqslant r \leqslant a$;

в) описанная в пункте б) сила действует в течение времени t_0, а именно

$$\psi'(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -\infty < t \leqslant 0, \\ \psi_0 = \text{const} & \text{при} \quad 0 < t < t_0, \\ 0 & \text{при} \quad t_0 < t < +\infty, \end{cases}$$

дать асимптотические формулы для представления решения при малых и больших значениях r;

г) $p(r,t) = \dfrac{4A\rho h}{c^2}\, e^{-r^2/c^2} f'(t), \quad -\infty < t < +\infty$;

д) найти поперечные скорости точек пластинки при

$$p(r,t) = \frac{4A\rho h}{c^2}\, e^{-r^2/c^2}\delta(t), \quad -\infty < t < +\infty,$$

где $\delta(t)$ — импульсная дельта-функция (т. е. в момент $t = 0$ пластинка получает поперечный удар с непрерывно распределенным импульсом $\dfrac{4A\rho h}{c^2}\, e^{-r^2/c^2}$).

2. Построение и применение функций влияния сосредоточенных источников.

а) Функции влияния мгновенных сосредоточенных импульсов.

113. Построить функцию влияния мгновенного сосредоточенного импульса единичной мощности для уравнения

$$u_{tt} = a^2\Delta_3 u$$

в неограниченном пространстве x, y, z, считая сначала, что импульс имел место в начале координат в момент $t = 0$; найти функцию влияния, решая краевую задачу

$$u_{tt} = a^2\Delta_3 u, \quad -\infty < x, y, z < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z), \quad -\infty < x, y, z < +\infty, \tag{2}$$

[1]) Подробнее см. задачу 18.

а затем перейти к случаю, когда импульс имел место в точке (ξ, η, ζ) в момент $t = \tau$.

114. Решить предыдущую задачу для уравнения

$$u_{tt} = a^2 \Delta_3 u \pm c^2 u.$$

115. Решить двумерный аналог задачи 113.

116. Решить двумерный аналог задачи 114.

117. Разделением переменных построить функцию влияния мгновенного сосредоточенного импульса для первой, второй и третьей краевых задач для уравнения $u_{tt} = a^2 \Delta_2 u$:

а) для прямоугольной мембраны $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$;

б) для круглой мембраны $0 \leqslant r \leqslant r_0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

118. Методом отражений построить функцию влияния мгновенного сосредоточенного импульса для уравнения $u_{tt} = a^2 \Delta_2 u \pm c^2 u$ для угла $0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{n}$, где n — целое число, большее нуля, если на граничных лучах $\varphi = 0$ и $\varphi = \dfrac{\pi}{n}$ выполняется граничное условие второго рода.

119. Пусть плоская область G ограничена кусочно гладким контуром Г. Предполагая возможным применение формулы Грина–Остроградского, связывающей криволинейный интеграл с двойным, найти решения а) первой, б) второй и в) третьей краевой задач для уравнения $u_{tt} = a^2 \Delta_2 u \pm c^2 u + f(x, y, t)$ при неоднородных начальных и граничных условиях, если известна функция влияния мгновенного сосредоточенного импульса для каждого из перечисленных случаев.

120. С помощью функции влияния мгновенного сосредоточенного импульса, найденной в решении задачи 113, вывести формулу Кирхгоффа [1)] для уравнения $u_{tt} = a^2 \Delta_3 u + f(x, y, z, t)$.

б) Функции влияния непрерывно действующих сосредоточенных источников.

121. Построить функцию влияния непрерывно действующего сосредоточенного источника переменной мощности $f(t)$ ($f(t) = 0$ при $t < 0$), находящегося в фиксированной точке пространства, для уравнения $u_{tt} = a^2 \Delta_3 u$, т. е. решить краевую задачу

$$u_{tt} = a^2 \Delta_3 u + \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0) f(t),$$

$$-\infty < x, y, z < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=0} = 0. \tag{2}$$

122. Построить функцию влияния непрерывно действующего сосредоточенного источника переменной мощности $f(t)$ ($f(t) = 0$ при $t < 0$), находящегося в фиксированной точке пространства, для урав-

[1)] См. [7, с. 414–417].

нения $u_{tt} = a^2\Delta_2 u$, т. е. решить краевую задачу

$$u_{tt} = a^2\Delta_2 u + \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)f(t),$$

$$-\infty < x, y < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = 0. \tag{2}$$

123. Построить функцию влияния непрерывно действующего сосредоточенного источника переменной мощности $f(t)$ ($f(t) = 0$ при $t < 0$), движущегося по произвольному закону, для уравнения $u_{tt} = a^2\Delta_3 u$, т. е. решить краевую задачу

$$u_{tt} = a^2\Delta_3 u + \delta(x - X(t))\delta(y - Y(t))\delta(z - Z(t))f(t),$$

$$-\infty < x, y, z < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

где $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ — координаты источника; $X(0) = Y(0) = Z(0) = 0$. В частности, найти функцию влияния сосредоточенного источника, движущегося прямолинейно с постоянной скоростью v; рассмотреть случаи, когда: а) $v < a$; б) $v > a$.

124. Учитывая, что если источник обладает постоянной мощностью q и движется прямолинейно с постоянной скоростью v, то в системе координат, движущейся вместе с источником, процесс будет стационарным, найти функции влияния такого источника: а) при $v < a$; б) при $v > a$; отбрасывая члены с производными по времени в уравнении колебаний, преобразованном в этой движущейся системе координат.

125. Найти электромагнитное поле, создаваемое электроном, движущимся в диэлектрике прямолинейно с постоянной скоростью, превышающей скорость света в этом диэлектрике (электрон Черенкова).

126. Решить краевую задачу 20.

127. Найти колебания упругой изотропной однородной среды, заполняющей все неограниченное пространство, вызванные непрерывно действующей силой $F(t)$ ($F(t) = 0$ при $t < 0$), приложенной к определенной точке среды и параллельной фиксированному направлению.

Глава VII

УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА $\Delta u + cu = -f$

§ 1. Задачи для уравнения $\Delta u - \varkappa^2 u = -f$

В настоящем параграфе мы рассмотрим некоторые задачи для уравнения эллиптического типа

$$\Delta u - \varkappa^2 u = 0 \quad (\varkappa^2 > 0), \tag{1}$$

к которому приводят, например, задачи о диффузии неустойчивого газа, распадающегося в процессе диффузии.

Уравнение (1) имеет фундаментальные решения:

а) $u_0(M) = \dfrac{e^{-\varkappa r}}{r}$ в трехмерном пространстве;

б) $u_0(M) = K_0(\varkappa r)$ на плоскости

(r — расстояние точки M от начала координат).

Функция $K_0(x)$, как известно, имеет при $x = 0$ логарифмическую особенность и экспоненциально убывает на бесконечности.

Метод разделения переменных при решении уравнения (1) часто приводит к уравнению Бесселя для мнимого аргумента

$$y'' + \frac{1}{x}\, y' - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$y = AI_\nu(x) + BK_\nu(x),$$

где $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ — цилиндрические функции мнимого аргумента первого и второго рода. Функция $I_\nu(x)$ ограничена при $x = 0$ и экспоненциально возрастает при $x \to \infty$.

1. Определить стационарное распределение концентрации неустойчивого газа в неограниченном пространстве, создаваемой точечным источником газа мощностью Q_0.

2. Точечный источник неустойчивого газа расположен на высоте ζ над газонепроницаемой плоскостью $z = 0$. Найти стационарное распределение концентрации.

3. Построить функцию точечного источника для уравнения $\Delta u - \varkappa^2 u = 0$ на плоскости и дать ей физическую интерпретацию.

4. Решить задачу 3, предполагая, что плоскость $y = 0$ газонепроницаема.

5. Построить функцию источника для уравнения диффузии неустойчивого газа, если источник находится внутри слоя $(0 \leqslant z \leqslant l)$, ограниченного газонепроницаемыми плоскостями $z = 0$ и $z = l$.

6. Решить аналог задачи 5 для двумерного случая.

7. Точечный источник неустойчивого газа помещен внутри бесконечной цилиндрической трубы с газонепроницаемыми стенками. Определить стационарное распределение концентрации газа, считая, что сечение трубы может иметь произвольную форму.

8. Построить функцию источника для уравнения $\Delta u - \varkappa^2 u = 0$ внутри сферы при граничном условии второго рода.

9. Точечный источник газа действует в неограниченной среде, движущейся с постоянной скоростью v_0. Найти стационарное распределение концентрации газа.

10. Найти стационарное распределение концентрации неустойчивого газа внутри бесконечного цилиндра кругового сечения, если на поверхности цилиндра поддерживается постоянная концентрация $u\big|_{\Sigma} = u_0$.

11. Решить задачу 10 для области, внешней к цилиндру.

12. Решить задачу 10 внутри сферы радиуса a, если:
а) $u\big|_{r=a} = u_0$; б) $u\big|_{r=a} = u_0 \cos\theta$.

13. Решить задачу 12 для области, внешней к сфере радиуса a.

14. На глубине h под поверхностью земли находится среда, в которой с постоянной плотностью распределено радиоактивное вещество. Найти:
а) распределение эманации в земле;
б) величину потока эманации через поверхность земли, считая, что концентрация ее на поверхности земли равна нулю.

15. На глубине h под поверхностью земли сосредоточено в некотором объеме радиоактивное вещество, выделяющее в единицу времени некоторое количество эманации (неустойчивого газа), равное Q_0. Найти:
а) распределение концентрации эманации в земле;
б) величину потока эманации через поверхность земли, считая, что источник эманации точечный, а концентрация ее на поверхности земли равна нулю.

16. Решить задачу, обратную задаче 15. Известно распределение потока через поверхность земли $q = q(\rho)$; требуется найти:
а) мощность источника Q_0;
б) положение источника, т. е. глубину залегания h радиоактивного вещества.

§ 2. Некоторые задачи о собственных колебаниях

Задачи о собственных колебаниях мембран и ограниченных объемов, как известно, приводят к однородному уравнению $L(v) + \lambda\rho v = 0$, $L(v) = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} v)$ $(k(x) > 0,\ \rho(x) > 0)$ внутри некоторой облас-

ти T при однородных условиях на ее границе. В гл. II, а затем в гл. V по мере надобности рассматривались некоторые задачи о собственных колебаниях струны и мембраны. В настоящем параграфе будет дан более полный список задач о собственных значениях, решаемых методом разделения переменных.

Выражение «найти собственные колебания» в дальнейшем будет означать, что требуется найти собственные значения и нормированные собственные функции для рассматриваемой области.

1. Собственные колебания струн и стержней.

17. Решить задачу о собственных поперечных колебаниях однородной струны $0 \leqslant x \leqslant l$, если:

а) концы струны жестко закреплены;

б) концы струны свободны[1]);

в) один конец струны свободен, а второй конец закреплен;

г) концы струны закреплены упруго;

д) один конец струны закреплен жестко, а второй конец закреплен упруго;

е) один конец струны закреплен упруго, а второй конец свободен.

18. Найти собственные продольные колебания стержня длиной l, составленного из двух стержней с длинами x_0 и $l - x_0$, обладающих разными плотностями (ρ_1 и ρ_2) и модулями упругости (E_1 и E_2), предполагая, что концы стержня:

а) жестко закреплены; б) свободны; в) упруго закреплены.

19. На одном конце стержня прикреплен груз массы M.

Найти собственные продольные упругие колебания стержня, считая, что второй конец стержня:

а) жестко закреплен; б) свободен; в) упруго закреплен.

Обратить внимание на условия ортогональности собственных функций.

Для задачи а) рассмотреть случаи малых и больших нагрузок, найдя соответствующие поправки к невозмущенным собственным значениям.

20. Решить задачу о собственных колебаниях струны, нагруженной сосредоточенной массой M, подвешенной в некоторой внутренней точке струны, предполагая, что концы струны:

а) закреплены жестко; б) свободны; в) упруго закреплены.

Вычислить поправки к собственным значениям для задачи а).

21. Найти поперечные собственные колебания однородного стержня, если:

а) оба конца стержня заделаны жестко;

б) оба конца стержня свободны;

---

[1]) Это значит, что $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ на концах струны равно нулю. Это имеет место, например, при закреплении концов струны на колечках (с пренебрежимо малой массой), скользящих без трения по параллельным стерженькам.

в) один конец стержня свободен, а второй жестко заделан.

Найти первый член асимптотического разложения собственных частот.

2. Собственные колебания объемов.

22. Найти собственные колебания прямоугольной мембраны:

а) с закрепленной жестко границей;

б) со свободной границей;

в) если две противоположные стороны закреплены, а две другие свободны;

г) если две соседние стороны закреплены, а две другие свободны;

д) с упруго закрепленной границей.

23. Решить задачу 22 для круглой мембраны (случай а), б), д)).

24. Определить собственные значения и нормированные собственные функции для прямоугольного параллелепипеда при:

а) граничных условиях первого рода;

б) граничных условиях второго рода;

в) граничных условиях третьего рода.

25. Найти собственные колебания сферы при:

а) граничных условиях первого рода;

б) граничных условиях второго рода;

в) граничных условиях третьего рода.

26. Решить задачу о собственных колебаниях круглого цилиндра конечной длины при граничных условиях:

а) первого рода; б) второго рода; в) третьего рода.

27. Определить собственные колебания мембраны, имеющей форму круглого кольца $a \leqslant \rho \leqslant b$, если ее граница:

а) жестко закреплена; б) свободна; в) упруго закреплена.

28. Определить собственные колебания мембраны, имеющей форму кругового сектора ($\rho \leqslant a,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$), если его граница:

а) жестко закреплена; б) свободна; в) упруго закреплена.

29. Найти собственные колебания мембраны, имеющей форму кольцевого сектора ($a \leqslant \rho \leqslant b,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$):

а) с жестко закрепленной границей;

б) со свободной границей;

в) с упруго закрепленной границей.

30. Определить собственные значения и собственные функции тороида с прямоугольным сечением ($a \leqslant \rho \leqslant b,\ 0 \leqslant z \leqslant l$) при граничных условиях:

а) первого рода; б) второго рода; в) третьего рода.

31. Плоская мембрана имеет форму кольца с внешним радиусом a и внутренним радиусом ε; граница мембраны закреплена жестко.

Сравнить первое собственное значение λ_1 такой мембраны с первым собственным значением λ_1^0 круглой мембраны радиуса a, для чего:

а) показать, что $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \lambda_1 = \lambda_1^0$;

б) вычислить поправку $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_1^0$ при малых ε.

32. Круглая мембрана радиуса a нагружена массой M, равномерно распределенной по абсолютно жесткому кругу радиуса ε ($r \leqslant \varepsilon$).

Сравнить собственные значения λ_n этой мембраны с собственными значениями λ_n^0 ненагруженной мембраны.

Рассмотреть два случая: M мало и M велико. Если $M \to 0$, то $\lambda_n \to \lambda_n^0$. Если $M \to \infty$, то $\lambda_n \to \lambda_{n-1}^0$, причем $\lambda_1 \to 0$.

33. Решить задачу 31, предполагая внешнюю границу свободной.

34. Сформулировать задачу о собственных колебаниях барабана, как задачу о колебаниях круглой мембраны с присоединенным воздушным объемом. Как зависит основная частота от размеров присоединенного объема (см. задачу 5 гл. VI)?

35. Круглая мембрана большого барабана имеет радиус

$$r_0 = 50 \text{ см}, \quad \rho = 0{,}1 \text{ г/см}^2, \quad T = 10^8 \text{ дин/см}.$$

Какова будет основная частота, если мембрана колеблется в свободном пространстве? Присоединение к мембране некоторого воздушного объема увеличивает основную частоту в 1,45 раза. Определить величину присоединенного объема.

§ 3. Распространение и излучение звука

В данном параграфе будут рассмотрены некоторые задачи о распространении, излучении и рассеянии звука на твердых телах, приводящие к волновому уравнению

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad (k^2 > 0). \tag{1}$$

При решении волнового уравнения для цилиндра и сферы появляются сферические функции $Y_n^{(k)} = P_n^{(k)}(\cos\vartheta)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} k\varphi$, $Y_n(\vartheta) = P_n(\cos\vartheta)$ и различные цилиндрические функции.

При решении внешних задач для цилиндра используются функции Ханкеля

$$H_n^{(2)}(\rho) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi\rho}}\, e^{-i(\rho - \pi n/2 - \pi/4)} + \dots & \text{при больших } \rho, \\ \left.\begin{array}{ll} \dfrac{i}{\pi}\left(\dfrac{2}{\rho}\right)^n (n-1)!, & n > 0, \\ \dfrac{2i}{\pi}\ln\dfrac{1}{\rho}, & n = 0 \end{array}\right\} & \text{при малых } \rho, \end{cases}$$

у нас $\rho = kr$. Функция $H_n^{(2)}(kr)$ удовлетворяет условию излучения

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + iku\right) = 0,$$

которое соответствует временно́й зависимости типа $e^{i\omega t}$. При решении задач излучения звука сферой и рассеяния на сфере применяются функции

$$\psi_n(\rho)=\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}\,J_{n+1/2}(\rho)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(\rho-\dfrac{\pi}{2}\,n\right)}{\rho}+\ldots & \text{при больших } \rho,\\[2ex] \dfrac{\rho^n}{1\cdot3\cdot5\ldots(2n+1)}+\ldots & \text{при малых } \rho,\end{cases}$$

$$\zeta_n^{(2)}(\rho)=\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}H_{n+1/2}^{(2)}(\rho)=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{e^{-i(\rho-\pi(n+1)/2)}}{\rho}+\ldots & \text{при больших } \rho,\\[2ex] i\dfrac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{\rho^{n+1}}+\dfrac{\rho^n}{1\cdot3\ldots(2n+1)}+\ldots & \text{при малых } \rho.\end{cases}$$

В дальнейшем мы будем пользоваться для малых ρ следующим представлением функции $\zeta_m^{(2)}(\rho)$:

$$\zeta_m^{(2)}(\rho)=\alpha_m e^{i\gamma_m}+\ldots,$$

где

$$\alpha_m=\frac{1\cdot3\ldots(2m-1)}{\rho^{m+1}},\quad \gamma_m=\frac{\rho^{2m+1}}{1^2\cdot3^2\ldots(2m-1)^2\,(2m+1)^2}.$$

Функция $\zeta_n^{(2)}(kr)$ удовлетворяет условию излучения

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial u}{\partial r}+iku\right)=0,$$

соответствующему зависимости от времени вида $e^{i\omega t}$.

Все необходимые теоретические сведения по материалу § 3 можно найти в гл. VII, а также в добавлениях I и II курса [7].

1. Точечный источник.

36. Найти функцию источника для полупространства $z>0$, если в плоскости $z=0$ решение уравнения $\Delta v+k^2v=0$:

а) удовлетворяет граничному условию первого рода $v\big|_{z=0}=f$;

б) удовлетворяет условию второго рода $\dfrac{\partial v}{\partial z}\Big|_{z=0}=f$.

37. Найти функцию источника для волнового уравнения в полуплоскости $y>0$:

а) для первой краевой задачи;

б) для второй краевой задачи.

38. Вычислить энергию, которая излучается в свободное пространство изолированным точечным источником звука, колеблющимся по гармоническому закону. Найти также величину удельного акустического импеданса.

39. Точечный источник звука помещен в полупространстве $z<0$ на расстоянии a от абсолютно жесткой стенки $z=0$.

Найти излучение источника, его интенсивность в волновой зоне и сравнить с решением задачи 38.

40. Решить задачу 39, считая, что полупространство заполнено жидкостью, ограниченной свободной поверхностью $z = 0$, на которой давление равно нулю. Сравнить с решениями задач 38 и 39.

41. Доказать принцип взаимности в акустике: «Если в заполненном воздухом пространстве, частично ограниченном простирающимися на конечное расстояние неподвижными телами, частично же неограниченном, в какой-либо точке M возбуждаются звуковые волны, то обусловленный ими в какой-либо другой точке P потенциал скорости и по величине, и по фазе совпадает с тем, который имел бы место в M, если бы в P находился источник звука» (см. [36]).

42. Показать, что в бесконечной цилиндрической трубе произвольного сечения с абсолютно жесткими стенками при некоторых условиях могут существовать бегущие звуковые волны. Найти фазовую скорость бегущих волн и вычислить поток энергии через бесконечно удаленное сечение трубы (волновода). Рассмотреть случаи прямоугольного и круглого сечения.

43. Построить функцию точечного источника, помещенного внутри цилиндрической трубы произвольного сечения, для волнового уравнения при граничных условиях:

а) первого рода; б) второго рода.

Рассмотреть частный случай круглого сечения.

44. Решить задачу 43 для полубесконечной трубы $z > 0$.

45. Построить функцию точечного источника для цилиндрического резонатора $0 \leqslant z \leqslant l$ с произвольным поперечным сечением. Стенки резонатора считать абсолютно жесткими.

2. Излучение мембран, цилиндров и сфер.

46. Пусть в сечении $z = 0$ трубы круглого сечения, рассмотренной в задаче 42, помещена мембрана, колеблющаяся со скоростью $v = v_0 e^{i\omega t}$ (поршень). Определить реакцию давления звуковых волн на мембрану.

47. Решить задачу 46, предполагая, чго скорость возбуждающего поршня меняется по закону

$$v = v_0(r) e^{i\omega t},$$

где $v_0(r)$ — заданная функция.

Рассмотреть частный случай

$$v_0(r) = A J_0\left(\frac{\mu_m}{a} r\right),$$

где A — константа, μ_m — корень уравнения $J_0(\mu) = 0$.

Найти величину вектора Умова и величину акустического импеданса на поршне.

48. Пусть цилиндр радиуса a пульсирует, т. е. сжимается и расширяется равномерно по гармоническому закону; его скорость на поверхности при $r = a$ равна

$$v_0 e^{i\omega t}.$$

Найти давление, радиальную скорость воздуха на больших расстояниях от оси цилиндра, а также поток энергии.

49. Решить задачу 48, предполагая, что радиус цилиндра мал по сравнению с длиной волны $\lambda = \dfrac{2\pi c}{\omega}$, т. е.

$$ka \ll 1.$$

50. Цилиндр радиуса a колеблется как целое перпендикулярно к его оси (вдоль оси x) со скоростью $v_0 e^{i\omega t}$. Найти давление и скорости частиц воздуха; для случая $ka \ll 1$ вычислить удельный акустический импеданс и полную мощность излучения для единицы длины.

51. Цилиндр радиуса a колеблется по гармоническому закону так, что скорость на его поверхности равна

$$f(\varphi)e^{i\omega t},$$

где $f(\varphi)$ — заданная функция. Найти давление и скорость воздуха, поток энергии $\left(\text{при малых } ka, \text{ где } k = \dfrac{\omega}{c}\right)$.

Получить из найденных формул решения задач 48–50.

52. Центр шара радиуса a колеблется вдоль полярной оси со скоростью $v_0 e^{i\omega t}$. Если $a \ll \lambda$ $(ka \ll 1)$, λ — длина волны, то такой акустический излучатель в форме малого колеблющегося шара называется акустическим диполем. Найти поток энергии и полную мощность, излучаемую акустическим диполем.

53. Поверхность шара конечного размера колеблется по гармоническому закону $f(\theta)e^{i\omega t}$. Найти полную реакцию среды на шар при $ka \ll 1$, где $k = \dfrac{\lambda}{2\pi}$. Рассмотреть частный случай

$$f(\theta) = v_0.$$

54. Исследовать звуковое поле поршня, вставленного заподлицо с поверхностью сферы и способного колебаться без трения. Распределение скоростей по сфере при наличии такого поршня можно представить таким образом:

$$v(\theta) = \begin{cases} v_0 & \text{при} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0, \\ 0 & \text{при} \quad \theta_0 < \theta \leqslant \pi. \end{cases}$$

Рассмотреть случай малого θ_0. Дать выражение для давления при низких частотах.

55. Поверхность шара колеблется так, что радиальная составляющая скорости на поверхности равна

$$v_a = \frac{v_0}{4}(1 + 3\cos 2\theta)e^{i\omega t}.$$

Такой источник звука называется излучателем второго порядка, или квадрупольным источником. Вычислить интенсивность и мощность его излучения. Начертить полярную диаграмму интенсивности излучения. Рассмотреть случай длинных волн.

56. Твердая круглая пластинка колеблется по простому гармоническому закону в равном ей по площади круглом отверстии, вырезан-

ном в твердой плоской пластинке, простирающейся в бесконечность. Найти давление и скорость частиц воздуха и мощность излучения.

57. Найти реакцию звукового поля на пластинку, рассматриваемую в задаче 56. Рассмотреть частный случай, когда радиус поршня мал по сравнению с длиной волны ($ka \ll 1$).

58. Решить задачу 56, если на поверхности поршня (пластинки) скорость переменна:

$$v = f(r)$$

(поршень «нежесткий»). Ограничиться представлением решения в волновой зоне.

3. Дифракция на цилиндре и сфере.

59. Плоская звуковая волна распространяется в направлении, перпендикулярном к оси бесконечного жесткого цилиндра радиуса a. Найти рассеянную волну. Рассмотреть случаи больших и малых расстояний от цилиндра.

60. Исходя из решения задачи 59, вычислить интенсивность рассеянной волны, а также исследовать зависимость характеристики направленности рассеянной волны от длины волны.

61. Вычислить полную мощность в звуковой волне, рассеянной на единице длины цилиндра, для предельных случаев коротких и длинных волн (см. задачу 59). Найти силу, действующую на цилиндр.

62. Построить решение задачи о рассеянии плоской звуковой волны на сферическом препятствии.

63. Пользуясь решением задачи 62, вычислить интенсивность рассеянной волны и полную рассеянную мощность для случая

$$ka \ll 1,$$

где $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{\omega}{c}$, λ — длина волны, a — радиус сферы.

Вычислить силу, действующую на шар.

64. Решить задачу о рассеянии плоской волны на шаре радиуса $\rho = a$, если шар совершенно свободен и движется под действием воздуха.

65. Решить задачу о движении шара радиуса a под действием падающей плоской волны, если шар закреплен упруго, т. е. возвращающая сила равна

$$X = -M\omega_0^2\xi,$$

где ξ — координата центра шара, M — масса шара.

Трением воздуха пренебречь.

§ 4. Установившиеся электромагнитные колебания

1. Уравнения Максвелла. Потенциалы. Векторные формулы Грина–Остроградского.

66. Написать уравнения Максвелла в ортогональной криволинейной системе координат (x_1, x_2, x_3), в которой квадрат элемента длины

дается формулой

$$ds^2 = h_1^2\,dx_1^2 + h_2^2\,dx_2^2 + h_3^2\,dx_3^2,$$

где h_1, h_2, h_3 — метрические коэффициенты.

67. Показать, что решение уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \quad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \quad (\mu = \text{const}),$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{D} = 4\pi\rho, \quad \boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \quad (\varepsilon = \text{const}),$$

можно представить в виде

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t},$$

где $\boldsymbol{A}$ — векторный потенциал, φ — скалярный потенциал, связанные между собой условием Лоренца

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

и удовлетворяющие уравнениям

$$\Delta\varphi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho, \quad a^2 = \frac{c^2}{\varepsilon\mu},$$

$$\Delta \boldsymbol{A} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mu \boldsymbol{j}.$$

Здесь $\Delta \boldsymbol{A}$ — оператор Лапласа, действующий на криволинейные компоненты вектора $\boldsymbol{A}$.

Найти выражение для $\Delta \boldsymbol{A}$ в криволинейных ортогональных координатах. Показать, что при $\rho = 0$, $\boldsymbol{j} = 0$ уравнения Максвелла допускают решение вида

$$\boldsymbol{D} = -\operatorname{rot} \boldsymbol{A'}, \quad \boldsymbol{H} = -\operatorname{grad}\varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A'}}{\partial t},$$

где $\boldsymbol{A'}$ и φ' — так называемые антипотенциалы.

Рассмотреть случай, когда зависимость от времени имеет вид $e^{-i\omega t}$.

68. Ввести скалярный и векторный потенциалы для уравнений Максвелла в однородной проводящей среде.

69. Ввести поляризованный потенциал $\boldsymbol{\Pi}$ (электрический вектор Герца) для уравнений Максвелла в вакууме, пользуясь соотношениями

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{\Pi}}{\partial t}, \quad \varphi = -\operatorname{div} \boldsymbol{\Pi},$$

где $\boldsymbol{A}$ — векторный потенциал, φ — скалярный потенциал.

Рассмотреть случай, когда зависимость от времени имеет вид $e^{-i\omega t}$. Аналогично ввести магнитный вектор Герца $\boldsymbol{\Pi'}$. Определить векторы Герца в проводящей среде.

70. Если метрические коэффициенты удовлетворяют условиям $h_1 = 1$, $\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{h_2}{h_3}\right) = 0$, а электромагнитное поле в вакууме зависит от времени как $e^{-i\omega t}$, то его можно представить с помощью двух скалярных функций U и U' (функций Боргниса):

а) для поля электрического типа ($H_1 = 0$) имеем

$$E_1 = k^2 U + \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}, \quad E_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad E_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_3} \quad \left(k = \frac{\omega}{c}\right),$$

$$H_1 = 0, \quad H_2 = -\frac{ik}{h_3}\frac{\partial U}{\partial x_3}, \quad H_3 = \frac{ik}{h_2}\frac{\partial U}{\partial x_2};$$

б) для поля магнитного типа ($E_1 = 0$) имеем

$$E_1' = 0, \quad E_2' = \frac{ik}{h_3}\frac{\partial U'}{\partial x_3}, \quad E_3' = -\frac{ik}{h_2}\frac{\partial U'}{\partial x_2},$$

$$H_1' = k^2 U' + \frac{\partial^2 U'}{\partial x_1^2}, \quad H_2' = \frac{1}{h_2}\frac{\partial^2 U'}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad H_3' = \frac{1}{h_3}\frac{\partial^2 U'}{\partial x_1 \partial x_3},$$

где U и U' — функции, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_3}{h_2}\frac{\partial U}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{h_2}{h_3}\frac{\partial U}{\partial x_3}\right)\right] + k^2 U = 0.$$

Доказать это утверждение.

Рассмотреть затем сферическую и цилиндрическую системы координат. Показать, что в цилиндрической системе координат функция U совпадает с z-составляющей вектора Герца $\boldsymbol{\Pi} = (0, 0, \boldsymbol{U})$.

71. Ввести функции U и U' для электромагнитного поля в проводящей среде, параметры которой суть ε, μ, σ (проводимость).

72. Шар радиуса a с проводимостью σ_1 и диэлектрической постоянной ε_1 помещен в неограниченную среду с проводимостью σ_2 и диэлектрической постоянной ε_2. Вводя функции U и U', сформулировать для них граничные условия на поверхности шара.

73. Доказать справедливость векторного аналога второй формулы Грина

$$\int\limits_T \left(\boldsymbol{W}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{U} - \boldsymbol{U}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{W}\right) d\tau = \int\limits_\Sigma \left\{[\boldsymbol{U}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{W}] - [\boldsymbol{W}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{U}]\right\} \boldsymbol{n}\, d\sigma,$$

где $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}(x, y, z)$, $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}(x, y, z)$ — произвольные, достаточно гладкие вектор-функции, T — некоторый объем, ограниченный поверхностью Σ, $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности Σ.

74. Доказать справедливость векторного аналога основной формулы Грина

$$\boldsymbol{U}(M_0) = \boldsymbol{U}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_T \left\{\varphi(\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{U} - k^2\boldsymbol{U}) + \mathrm{grad}\,\varphi\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{U}\right\} d\tau_P -$$

$$- \frac{1}{4\pi}\int\limits_\Sigma \left\{[\boldsymbol{n}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{U}]\varphi + [[\boldsymbol{n}\boldsymbol{U}]\,\mathrm{grad}\,\varphi] + (\boldsymbol{n}\boldsymbol{U})\,\mathrm{grad}\,\varphi\right\} d\sigma_P,$$

где $\boldsymbol{U}$ — произвольный вектор,

$$\varphi = \frac{e^{ikr}}{r}, \quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

— расстояние между точками $M_0(x, y, z)$ и $P(\xi, \eta, \zeta)$.

75. Пользуясь основной векторной формулой Грина, полученной в предыдущей задаче, непосредственно, не вводя потенциалов, написать выражение для $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ — решений уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = -ik_0\varepsilon\boldsymbol{E} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, \quad k_0 = \frac{\omega}{c}, \quad k = k_0\sqrt{\varepsilon\mu}, \quad \operatorname{rot}\boldsymbol{E} = ik_0\mu\boldsymbol{H_0},$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{E} = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$$

во внутренних точках некоторой области T через их значения на поверхности Σ, ограничивающей объем T.

2. Распространение электромагнитных волн и колебания в резонаторах.

76. Выяснить возможность распространения электромагнитных волн вдоль бесконечно длинного круглого цилиндра, проводимость которого бесконечно велика. Проводимость окружающей среды σ конечна.

77. Решить предыдущую задачу, предполагая, что проводимость цилиндра конечна и равна σ_1.

78. Показать, что внутри бесконечной полой цилиндрической трубы (волновода) произвольного сечения с идеально проводящими стенками может существовать конечное число бегущих электромагнитных волн. Найти выражение для фазовой скорости и потока энергии бегущей волны в волноводе.

79. Доказать существование бегущих электромагнитных волн внутри полости, ограниченной двумя коаксиальными цилиндрическими поверхностями $\rho = a$ и $\rho = b$. Стенки коаксиала считать идеально проводящими.

Вычислить поток энергии и написать выражение для составляющих поля для основной волны, соответствующей наибольшей длине волны.

80. Найти собственные частоты и соответствующие электромагнитные поля сферического резонатора с идеально проводящими стенками. Вычислить среднюю за период энергию в стоячей волне.

81. Найти собственные электромагнитные колебания цилиндрического резонатора, являющегося «отрезком» цилиндрического радиоволновода произвольного сечения с идеально проводящими стенками. Вычислить среднюю за период энергию в стоячей волне. Рассмотреть частные случаи резонаторов:

а) прямоугольного сечения;

б) круглого сечения.

82. Определить собственные частоты электромагнитных колебаний внутри тороидального резонатора прямоугольного сечения, считая стенки резонатора идеально проводящими.

83. *Дифракция на цилиндре.* Плоская электромагнитная волна падает на бесконечный круглый цилиндрический провод, ось которого перпендикулярна к направлению распространения волны. Найти дифрагированное поле, считая цилиндр проводящим. Цилиндр окру-

жен диэлектриком с диэлектрической постоянной ε_1 и проводимостью, равной нулю. Рассмотреть случай идеально проводящего цилиндра. Предполагая, что радиус цилиндра a мал по сравнению с длиной падающей волны $\left(ka \ll 1,\ k = \dfrac{\lambda}{2\pi}\right)$, вычислить полную рассеянную мощность.

84. *Дифракция на идеально проводящей сфере.* Рассмотреть задачу о рассеянии плоской электромагнитной волны на идеально проводящей сфере. Найти электромагнитное поле.

85. *Дифракция на проводящей сфере.* Плоская электромагнитная волна, распространяющаяся в среде с параметрами $\varepsilon = \varepsilon_1,\ \sigma = 0,$ $\mu = 1,$ встречает на своем пути проводящую сферу радиуса a с параметрами $\varepsilon = \varepsilon_2,\ \mu = \mu_2,\ \sigma = \sigma_2 \neq 0.$

Найти электромагнитное поле внутри и вне сферы (задача Ми о дифракции на сфере).

3. Излучение электромагнитных волн.

86. Найти поле излучения бесконечно малого электрического диполя, находящегося в неограниченном непроводящем пространстве. Вычислить среднюю за период мощность излучения.

87. Решить предыдущую задачу, пользуясь представлением составляющих электромагнитного поля с помощью функции Боргниса в сферической системе координат

$$E_r = \frac{d^2U}{dr^2} + k^2U, \quad E_\theta = \frac{1}{r}\,\frac{d^2U}{dr\,d\theta}, \quad E_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{d^2U}{dr\,d\varphi},$$

$$H_r = 0, \quad H_\theta = -\frac{ik}{r}\,\frac{dU}{d\varphi}, \quad H_\varphi = \frac{ik}{r}\,\frac{dU}{d\theta},$$

где функция U удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\,\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\,\frac{dU}{d\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,\frac{d^2U}{d\varphi^2} + k^2U = 0,$$

так что функция $u = \dfrac{U}{r}$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta u + k^2u = 0.$$

88. В центре сферического резонатора с идеально проводящими стенками помещен бесконечно малый электрический диполь, направленный по радиусу. Определить электромагнитное поле, возбуждаемое диполем внутри резонатора.

89. Однородный проводящий шар радиуса a с постоянным $\varepsilon_2,$ $\mu_2,\ \sigma_2$ помещен в среду с другими физическими константами $\varepsilon_1,\ \mu_1,$ σ_1. В центре шара находится электрический диполь, колеблющийся по гармоническому закону $e^{-i\omega t}$. Вычислить поле внутри шара, среднюю за период мощность излучения и рассмотреть предельный случай $\sigma_1 \to \infty$. Рассмотреть частный случай, когда $a \to \infty$.

90. Стенки сферического резонатора сделаны из однородного проводящего материала, обладающего проводимостью σ. Пусть $r = a$ и $r = b$ — радиусы стенок резонатора. В центре резонатора поме-

щен электрический диполь, колеблющийся по гармоническому закону $e^{-i\omega t}$. Найти вынужденные электромагнитные колебания резонатора, считая, что область $r > b$ непроводящая (воздух).

Рассмотреть предельные случаи $b \to \infty$ и $b \to a$.

91. Внутри сферы радиуса a помещен электрический диполь, ориентированный по радиусу и отстоящий от центра сферы на расстоянии $r = r'$. Определить электромагнитное поле излучения внутри сферы, предполагая, что сфера окружена однородной средой, обладающей конечной проводимостью σ. Рассмотреть предельный случай $\sigma \to \infty$.

Рассмотреть частные случаи: радиус сферы мал по сравнению с длиной волны и $a \to \infty$.

92. *Вертикальная электрическая антенна над сферической землей.* Найти электромагнитное поле, возбуждаемое электрической антенной, находящейся над поверхностью земли, которая рассматривается как шар радиуса a, имеющий конечную проводимость σ и диэлектрическую проницаемость ε. Антенну считать элементарным диполем, совершающим гармонические колебания вдоль направления диаметра земли. Атмосферу считать однородной и непроводящей ($\varepsilon = \mu = 1$, $\sigma = 0$).

93. *Вертикальная антенна на сферической земле.* Решить предыдущую задачу (92), считая, что антенна находится на поверхности земли и направлена по нормали к ней.

4. Антенна на плоской земле. В задачах 94–101 рассматривается распространение волн, излучаемых антеннами, находящимися на поверхности земли. При этом мы будем предполагать землю плоской, однородной и проводящей (иногда идеально проводящей, иногда обладающей конечной проводимостью), антенну мы трактуем как диполь, момент которого периодически меняется во времени с частотой ω: $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p_0} e^{-i\omega t}$, для простоты будем считать $|\boldsymbol{p_0}| = 1$.

Задачи 94–97 носят постановочный характер, здесь требуется ввести вектор Герца и поставить для его составляющих, отличных от нуля, краевую задачу.

При решении задач 98–101 требуется провести расчет электромагнитного поля, излучаемого антенной, а также среднюю за период мощность излучения.

Здесь существенным для метода решения является разложение в интеграл Фурье–Бесселя с использованием интеграла Зоммерфельда

$$\frac{e^{ikR}}{R} = \int\limits_0^\infty J_0(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k^2}\,|z|} \frac{\lambda\, d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}, \quad R = \sqrt{r^2 + z^2}.$$

94. *Вертикальная электрическая антенна.* На плоской поверхности земли, заполняющей полупространство $z < 0$, помещена вертикальная электрическая антенна, направленная вдоль оси z.

Ввести вектор Герца и сформулировать для него граничные условия на поверхности земли, а также выделить особенность в источнике. При решении считать $\mu = 1$.

95. *Вертикальная магнитная антенна.* На поверхности земли $z = 0$ находится вертикальная магнитная антенна (горизонтальная рамка).

Поставить краевую задачу для соответствующего вектора Герца, если земля обладает конечной проводимостью.

96. *Горизонтальная электрическая антенна.* Поставить краевую задачу для горизонтальной антенны, лежащей на поверхности земли, проводимость которой конечна.

97. *Горизонтальная магнитная антенна.* Элементарный магнитный диполь, расположенный на поверхности земли $z = 0$, ориентирован вдоль оси y, т. е. рамка с током находится в вертикальной плоскости xz. Сформулировать соответствующую краевую задачу для вектора Герца, считая землю проводящей.

98. Найти электромагнитное поле излучения вертикальной электрической антенны на поверхности плоской земли (см. задачу 94). Вычислить поток энергии излучения, полагая $\mu = 1$. Рассмотреть случаи, когда земля идеально проводящая и когда земля заменена воздухом.

99. Определить поле, излучаемое вертикальной магнитной антенной, находящейся на плоской земле (см. задачу 95).

100. Решить задачу о распространении волн, излучаемых горизонтальной электрической антенной, находящейся на поверхности земли (см. задачу 96).

101. Найти электромагнитное поле, создаваемое горизонтальной магнитной антенной, лежащей на поверхности плоской земли (см. задачу 97).

102. Вертикальный электрический диполь расположен в среде *1*, постоянная распространения которой равна k_1, в точке $z = z_0$, $r = 0$. Среда *2* имеет вид плоскопараллельной плиты с постоянной распространения k_2 и границами $z = a < z_0$ и $z = 0$. Полупространство $z < 0$ идеально проводящее. Найти поляризационный потенциал вторичного поля $\boldsymbol{\Pi}_{\text{втор}}$.

103. Найти электромагнитное поле, возбуждаемое линейным током в неограниченном пространстве, и вычислить поле в волновой зоне. Определить сопротивление излучения.

104. Определить сопротивление излучения полуволнового диполя в неограниченном пространстве, а также реактивную часть входного сопротивления (реактанц) полуволнового диполя.

105. Внутри цилиндрического волновода, рассмотренного в задаче 78, помещен точечный диполь, параллельный оси волновода и гармонически колеблющийся по закону $e^{-i\omega t}$.

Найти средний за период поток энергии, излучаемой диполем. Вычислить сопротивление излучения. Решение искать для волновода произвольного сечения и затем рассмотреть волновод круглого сечения, предполагая, что диполь находится на оси волновода.

106. Найти выражение для электромагнитного поля внутри волновода, возбуждаемого линейным током длиной $2l$, параллельным оси волновода, и вычислить поток энергии через поперечное сечение трубы для частного случая полуволнового диполя, лежащего на оси радиоволновода круглого сечения. Найти активную и реактивную составляющие входного сопротивления. Задачу решать в приближении заданных токов, пренебрегая влиянием вторичного поля на распределение тока в диполе.

107. Использовать решение задачи 106 для отыскания сопротивления излучения и реактанца полуволнового диполя, лежащего на оси волновода круглого сечения и направленного вдоль этой оси.

108. Вычислить поле, возбуждаемое внутри бесконечного прямоугольного радиоволновода с идеально проводящими стенками электрическим диполем, перпендикулярным к оси волновода и параллельным одной из сторон перпендикулярного сечения, и найти сопротивление излучения для:

а) бесконечно малого диполя; б) полуволнового диполя.

Глава I

КЛАССИФИКАЦИЯ И ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Уравнение для функции двух независимых переменных $a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f(x, y)$

1. Уравнение с переменными коэффициентами.

1. Дискриминант уравнения $(l+x)\,u_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2u_{yy} = 0$ равен $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = y^2(x^2 + x + l) = y^2(x - x_1)(x - x_2)$, где

$$x_1 = -\frac{1 - \sqrt{1 - 4l}}{2}, \quad x_2 = -\frac{1 + \sqrt{1 - 4l}}{2}.$$

Пусть $l < \frac{1}{4}$, тогда x_1 и x_2 действительны, и при $x < x_1$, а также при $x > x_2$ уравнение гиперболично, а при $x_1 < x < x_2$ оно эллиптично, прямые $x = x_1$ и $x = x_2$, $y = 0$ состоят из точек параболичности. При $l = \frac{1}{4}$ область эллиптичности исчезает, так как при этом $x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}$; прямая $x = -\frac{1}{2}$ состоит из точек параболичности. При $l > \frac{1}{4}$ уравнение гиперболично всюду.

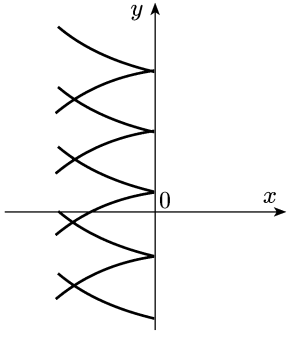


Рис. 13

2. Уравнение $u_{xx} + xu_{yy} = 0$ при $x < 0$ принадлежит к гиперболическому типу и заменой $\xi = \frac{3}{2}\,y + (\sqrt{-x})^3$, $\eta = \frac{3}{2}\,y - (\sqrt{-x})^3$ приводится к каноническому виду

$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{6(\xi - \eta)}(u_\xi - u_\eta) = 0, \quad \xi > \eta.$$

При $x > 0$ уравнение $u_{xx} + xu_{yy} = 0$ принадлежит эллиптическому типу и заменой $\xi' = \frac{3}{2}\,y$, $\eta' = -\sqrt{x^3}$ приводится к каноническому виду

$$u_{\xi'\xi'} + u_{\eta'\eta'} + \frac{1}{3\eta'}\,u_{\eta'} = 0, \quad \eta' < 0.$$

Характеристиками уравнения являются полукубические параболы (рис. 13)

$$y - c = \pm\frac{2}{3}\,(\sqrt{-x})^3,$$

причем ветви, направленные вниз, задаются уравнениями $\xi = \text{const}$, а ветви, направленные вверх, уравнениями $\eta = \text{const}$.

3. Уравнение $u_{xx} + yu_{yy} = 0$ при $y < 0$ гиперболично и заменой $\xi = x + 2\sqrt{-y}$, $\eta = x - 2\sqrt{-y}$ приводится к каноническому виду

$$u_{\xi\eta} + \frac{1}{2(\xi - \eta)}\,(u_\xi - u_\eta) = 0, \quad \xi > \eta.$$

При $y > 0$ уравнение эллиптично и заменой $\xi' = x$, $\eta' = 2\sqrt{y}$ приводится к каноническому виду

$$u_{\xi'\xi'} + u_{\eta'\eta'} - \frac{1}{\eta'}\,u_{\eta'} = 0, \quad \eta' > 0.$$

Характеристиками уравнения являются параболы (рис. 14)

$$y = -\frac{1}{4}\,(x - c)^2.$$

Ветви, идущие от оси x влево, задаются уравнением $\xi = \text{const}$, а идущие вправо — $\eta = \text{const}$.

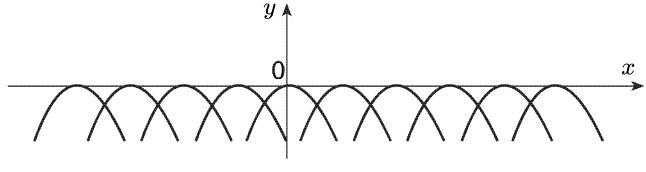


Рис. 14

4. Уравнение $u_{xx} + yu_{yy} + \frac{1}{2}\,u_y = 0$ имеет всюду такой же тип, как уравнение $u_{xx} + yu_{yy} = 0$, рассмотренное в предыдущей задаче. Теми же заменами, что и уравнение $u_{xx} + yu_{yy} = 0$, оно приводится к каноническому виду $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta} = 0$ в области гиперболичности ($y < 0$) и к каноническому виду $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} = 0$ в области эллиптичности ($y > 0$). Характеристики уравнений $u_{xx} + yu_{yy} + \frac{1}{2}\,u_y = 0$ и $u_{xx} + yu_{yy} = 0$ совпадают.

Замечание. Сопоставление уравнений $u_{xx} + yu_{yy} = 0$, $u_{xx} + yu_{yy} + \frac{1}{2}\,u_y = 0$ показывает, что наличие членов с младшими производными существенно сказывается на уравнении, так как в одном случае коэффициенты уравнения после приведения его к каноническому виду имеют особенности, а в другом — нет.

5. Уравнение $yu_{xx} + xu_{yy} = 0$ во второй и четвертой четверти гиперболично и приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + \frac{1}{3\xi}\,\frac{\partial u}{\partial\xi} - \frac{1}{3\eta}\,\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0$$

путем замены $\xi = (-x)^{3/2}$, $\eta = (y)^{3/2}$ во второй четверти, $\xi = x^{3/2}$, $\eta = (-y)^{3/2}$ в четвертой четверти. В первой и третьей четверти уравнение эллиптично и приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi'^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta'^2} + \frac{1}{3\xi'}\frac{\partial u}{\partial \xi'} + \frac{1}{3\eta'}\frac{\partial u}{\partial \eta'} = 0,$$

путем замены $\xi = x^{3/2}$, $\eta = y^{3/2}$ в первой четверти, $\xi = (-x)^{3/2}$, $\eta = (-y)^{3/2}$ в третьей четверти. Оси x и y состоят из точек параболичности. Как известно[1)], переход от одной канонической формы гиперболического уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} = f\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

к другой

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \overline{\xi}^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \overline{\eta}^2} = \overline{f}\left(\overline{\xi}, \overline{\eta}, u, \frac{\partial u}{\partial \overline{\xi}}, \frac{\partial u}{\partial \overline{\eta}}\right)$$

осуществляется с помощью подстановки

$$\overline{\xi} = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad \overline{\eta} = \frac{\xi - \eta}{2}.$$

6. Уравнение $xu_{xx} + yu_{yy} = 0$ в первой и третьей четвертях эллиптично и приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

подстановкой $\xi = x^{1/2}$, $\eta = y^{1/2}$ в первой четверти, $\xi = (-x)^{1/2}$, $\eta = (-y)^{1/2}$ в третьей четверти.

Уравнение гиперболично во второй и четвертой четвертях и приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

путем замены $\xi = (-x)^{1/2}$, $\eta = (y)^{1/2}$ во второй четверти, $\xi = (x)^{1/2}$, $\eta = (-y)^{1/2}$ в четвертой четверти. Оси x и y состоят из точек параболичности.

7. Уравнение $u_{xx} + xyu_{yy} = 0$ в первой и третьей четвертях эллиптично и приводится к каноническому виду

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{3\xi}u_\xi - \frac{1}{\eta}u_\eta = 0$$

заменой $\xi = \frac{2}{3}x^{3/2}$, $\eta = 2y^{1/2}$ в первой четверти, $\xi = \frac{2}{3}(-x)^{3/2}$, $\eta = 2(-y)^{1/2}$ в третьей четверти.

Уравнение гиперболично во второй и четвертой четвертях и приводится к каноническому виду

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \frac{1}{3\xi}u_\xi + \frac{1}{\eta}u_\eta = 0$$

[1)] См. [7, с. 16].

путем замены $\xi = \frac{2}{3}(-x)^{3/2}$, $\eta = 2y^{1/2}$ во второй четверти, $\xi = \frac{2}{3}x^{3/2}$, $\eta = 2(-y)^{1/2}$ в четвертой четверти. Оси x и y состоят из точек параболичности.

8. Уравнение $u_{xx}\operatorname{sign} y + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$ в первой и второй четвертях параболично и заменой

$$\xi = x + y, \quad \eta = x - y$$

приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0.$$

В третьей и четвертой четвертях оно гиперболично и заменой

$$\xi = (1 + \sqrt{2})x + y, \quad \eta = (1 - \sqrt{2})x + y$$

приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} = 0.$$

9. Уравнение $u_{xx} + 2u_{xy} + (1 - \operatorname{sign} y)\, u_{yy} = 0$ в первой и второй четвертях гиперболично и заменой $\xi = y - 2x$, $\eta = y$ приводится к каноническому виду $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} = 0$, а в третьей и четвертой четвертях оно эллиптично и заменой

$$\xi = x - y, \quad \eta = x$$

приводится к каноническому виду $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$.

10. Уравнение $u_{xx}\operatorname{sign} y + 2u_{xy} + u_{yy}\operatorname{sign} x = 0$ в первой и третьей четвертях параболично и заменой $\xi = x + y$, $\eta = x - y$ приводится к каноническому виду $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0$ в первой четверти и к $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$ в третьей четверти. Уравнение гиперболично во второй и четвертой четвертях и приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} = 0$$

путем замены $\xi = -(1 + \sqrt{2})x + y$, $\eta = -(1 - \sqrt{2})x + y$ во второй четверти, $\xi = (1 + \sqrt{2})x + y$, $\eta = (1 - \sqrt{2})x + y$ в четвертой четверти.

11. Уравнение $y^2 u_{xx} - x^2 u_{yy} = 0$ гиперболично всюду, кроме осей координат, состоящих из точек параболичности. Оно приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} + \frac{\eta}{2(\eta^2 - \xi^2)}\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\xi}{2(\eta^2 - \xi^2)}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

заменой $\xi = y^2 - x^2$, $\eta = y^2 + x^2$.

12. Уравнение $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$ гиперболично всюду, кроме осей координат, состоящих из точек параболичности. Оно приводится к

каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} - \frac{1}{2\xi}\,\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

заменой $\xi = xy,\ \eta = \dfrac{y}{x}$.

13. Уравнение $x^2 u_{xx} + y^2 u_{yy} = 0$ эллиптично всюду, кроме осей координат, состоящих из точек параболичности. Оно приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

заменой $\xi = \ln|x|,\ \eta = \ln|y|$.

14. Уравнение $y^2 u_{xx} + x^2 u_{yy} = 0$ эллиптично всюду, кроме осей координат, состоящих из точек параболичности. Оно приводится заменой $\xi = y^2,\ \eta = x^2$ к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2\xi}\,\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2\eta}\,\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

15. Уравнение $y^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$ параболично всюду; заменой $\xi = \dfrac{x^2 + y^2}{2};\ \eta = \dfrac{x^2 - y^2}{2}$ оно приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\xi}{2(\xi^2 - \eta^2)}\,\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\eta}{2(\xi^2 - \eta^2)}\,\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

16. Уравнение $x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$ параболично всюду. Заменой $\xi = \dfrac{y}{x},\ \eta = y$ оно приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$$

17. Уравнение $4y^2 u_{xx} - e^{2x} u_{yy} - 4y^2 u_x = 0$ гиперболично при $y \neq 0$. Заменой $\xi = e^x + y^2,\ \eta = -e^x + y^2$ оно приводится к каноническому виду

$$u_{\xi\eta} = \frac{-1}{8(\xi + \eta)^2}\,(u_\xi + u_\eta).$$

18. Уравнение $x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} - 3y^2 u_{yy} - 2xu_x + 4yu_y + 16x^4 u = 0$ гиперболично всюду, кроме осей x и y, состоящих из точек параболичности. Заменой $\xi = xy,\ \eta = \dfrac{x^3}{y}$ оно приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} + \frac{1}{4\eta}\,\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi}\,\frac{\partial u}{\partial \eta} + u = 0.$$

19. Уравнение $(1 + x^2)\,u_{xx} + (1 + y^2)\,u_{yy} + xu_x + yu_y = 0$ эллиптично всюду. Заменой $\xi = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}),\ \eta = \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$ оно приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$$

20. Уравнение $u_{xx}\sin^2 x - 2yu_{xy}\sin x + y^2u_{yy} = 0$ параболично всюду. Заменой $\xi = y\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, $\eta = y$ оно приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{2\xi}{\xi^2+\eta^2}\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$$

2. Уравнение с постоянными коэффициентами.

21. $\dfrac{\partial^2 v}{\partial \xi\,\partial \eta} + \dfrac{4bc - b^2 - c^2 - 12a}{144a^2}v = 0,$

$$\xi = y + (\sqrt{3}-2)x, \quad \eta = y - (\sqrt{3}+2)x, \quad u(\xi,\eta) = e^{\alpha\xi+\beta\eta}v(\xi,\eta),$$

$$\alpha = \frac{c-(\sqrt{3}+2)b}{12a}, \quad \beta = \frac{c+(\sqrt{3}-2)b}{12a}.$$

22. $\dfrac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \dfrac{2}{a}\left(\dfrac{2bc - b^2 - 2c^2}{a} + 1\right)v = 0,$

$$\xi = y - \frac{1}{2}x, \quad \eta = \frac{x}{2}, \quad u(\xi,\eta) = a^{\alpha\xi+\beta\eta}v(\xi,\eta),$$

$$\alpha = \frac{b-2c}{a}, \quad \beta = -\frac{b}{a}.$$

23. $\dfrac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \dfrac{c-b}{a}\dfrac{\partial v}{\partial \xi} = 0,$

$$\xi = y - x, \quad \eta = x, \quad u(\xi,\eta) = e^{\alpha\xi+\beta\eta}v(\xi,\eta),$$

$$\alpha = \frac{b^2-4a}{4a(c-b)}, \quad \beta = -\frac{b}{2a}.$$

§ 2. Уравнение с постоянными коэффициентами для функции n независимых переменных

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}u_{x_ix_k} + \sum_{i=1}^{n} b_iu_{x_i} + cu = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Уравнению

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}u_{x_ix_k} + \sum_{i=1}^{n} b_iu_{x_i} + cu = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1}$$

ставится в соответствие матрица коэффициентов при старших членах

$$\|a_{ik}\| \tag{2}$$

и квадратичная форма

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}z_iz_k. \tag{3}$$

Если в уравнении (1) перейти к новым независимым переменным по формулам

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} x_i, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

то матрица $\|\overline{a}_{ik}\|$ коэффициентов при старших членах в преобразованном уравнении

$$\sum_{j,\,k=1}^{n} \overline{a}_{ik} u_{\xi_i \xi_k} + \sum_{i=1}^{n} \overline{b}_i u_{\xi_i} + \overline{c} u = 0 \tag{5}$$

будет связана с матрицей $\|a_{ik}\|$ соотношением

$$\|\overline{a}_{ik}\| = \|\alpha_{ik}\| \cdot \|a_{ik}\| \cdot \|\alpha^*_{ik}\|. \tag{6}$$

Матрица $\|a_{ik}\|$ преобразуется так, как матрица квадратичной формы (3), если в этой квадратичной форме перейти к новым переменным по формулам

$$z_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha^*_{ik} s_k, \tag{7}$$

где $\alpha^*_{ik} = \alpha_{ki}$. Матрица перехода от новых переменных $s_1, \ldots, s_n$ к старым переменным $z_1, \ldots, z_n$ в квадратичной форме (3) получается транспонированием из матрицы перехода от старых независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$ к новым независимым переменным $\xi_1, \ldots, \xi_n$ в уравнении (1). Таким образом, чтобы найти преобразование (4), приводящее уравнение (1) к каноническому виду, нужно найти преобразование (7), приводящее квадратичную форму (3) к каноническому виду, содержащему лишь квадраты переменных $s_1, \ldots, s_n$ с коэффициентами $+1$, -1 или 0; матрица преобразования (4) получается из матрицы преобразования (7) транспонированием.

24. $u_{\xi_1\xi_1} + u_{\xi_2\xi_2} + u_{\xi_3\xi_3} + u_{\xi_1} = 0$,

$$\xi_1 = x, \quad \xi_2 = -x + y, \quad \xi_3 = 2x - 2y + z.$$

25. $u_{\xi_1\xi_1} = u_{\xi_2\xi_2} + u_{\xi_3\xi_3}$, $\quad \xi_1 = x + \dfrac{1}{2}\, y - z, \quad \xi_2 = -\dfrac{1}{2}\, y, \quad \xi_3 = z.$

26. $u_{t't'} = u_{x'x'} + u_{y'y'} + u_{z'z'}$,

$$t' = \frac{1}{2}\, t + \frac{1}{2}\, x - \frac{1}{2}\, y - \frac{1}{2}\, z, \quad x' = \frac{1}{2}\, t + \frac{1}{2}\, x + \frac{1}{2}\, y + \frac{1}{2}\, z,$$

$$y' = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\, t + \frac{1}{2\sqrt{3}}\, x + \frac{1}{2\sqrt{3}}\, y - \frac{1}{2\sqrt{3}}\, z,$$

$$z' = \frac{-1}{2\sqrt{5}}\, t + \frac{1}{2\sqrt{5}}\, x - \frac{1}{2\sqrt{5}}\, y + \frac{1}{2\sqrt{5}}\, z.$$

27. $u_{t't'} = u_{x'x'} + u_{y'y'} + u_{z'z'}$,

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}\, x + \frac{1}{\sqrt{2}}\, y, \quad y' = \frac{1}{\sqrt{2}}\, z + \frac{1}{\sqrt{2}}\, t,$$

$$z' = \frac{1}{2}\, x - \frac{1}{2}\, y - \frac{1}{2}\, z - \frac{1}{2}\, t,$$

$$t' = \frac{1}{2\sqrt{3}}\, x - \frac{1}{2\sqrt{3}}\, y - \frac{1}{2\sqrt{3}}\, z + \frac{1}{2\sqrt{3}}\, t.$$

28.

$$\left.\begin{aligned} &\text{а) } u_{x_1'x_1'} + \sum_{i=2}^{n} u_{x_i'x_i'} = 0, \\ &\quad x_1' = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\,(x_1 + \cdots + x_n), \\ &\text{б) } u_{x_1'x_1'} - \sum_{i=2}^{n} u_{x_i'x_i'} = 0, \\ &\quad x_1' = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}\,(x_1 + \cdots + x_n), \end{aligned}\right\} \quad x_i' = \alpha_{i1}x_1 + \ldots + \alpha_{in}x_n, \quad i = 2,\, 3,\, \ldots,\, n,$$

где $(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, — любая ортогональная нормированная система решений

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 0.$$

29. $$\sum_{i=1}^{n} a_i v_{x_i x_i} + \left(c - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^2}{a_i}\right)v = \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}\,x_i\right) f(x_1, \ldots, x_n),$$

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}\,x_i\right) v(x_1, \ldots, x_n).$$

Глава II

УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

§ 1. Физические задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа; постановка краевых задач

В большинстве задач настоящего параграфа (как, например, в задачах о колебаниях струн, стержней, газа) рассматриваются лишь малые колебания. Малыми колебаниями называются такие, при которых можно пренебрегать квадратами, произведениями и высшими степенями функций, характеризующих процесс колебаний, и их производных.

1. Свободные колебания в среде без сопротивления; уравнения с постоянными коэффициентами. В задачах этой группы влияние силы тяжести на колебания частиц считается пренебрежимо малым по сравнению с влиянием упругих сил, поэтому действием силы тяжести можно пренебрегать [1)].

1. Ось Ox направлена вдоль стержня; за характеризующую функцию принято смещение $u(x, t)$ вдоль оси x поперечного сечения, абсцисса которого в равновесном состоянии равна x; иными словами, в момент времени t абсцисса этого сечения равна $\overline{x} = x + u(x, t)$. Для определения функции $u(x, t)$ получаем следующие краевые задачи:

а) если концы стержня закреплены жестко, то

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad \text{при} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad \text{при} \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = F(x) \quad \text{при} \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

$$a^2 = \frac{E}{\rho_0},$$

где E — модуль упругости, а ρ_0 — плотность массы стержня в невозмущенном состоянии;

[1)] Заметим, что в более общем случае силу тяжести можно не включать в дифференциальное уравнение упругих колебаний, если за положение равновесия принять статическое напряженное состояние под действием силы тяжести (ср. с [7, с. 104–106]).

а′) если концы стержня двигаются по заданному закону, то граничные условия имеют вид

$$u(0,\,t)=\psi(t),\quad u(l,\,t)=\varphi(t)\quad\text{при}\quad 0<t<+\infty,\tag{2′}$$

где $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ — заданные функции t;

б) если концы стержня свободны, то граничные условия имеют вид

$$u_x(0,\,t)=u_x(l,\,t)=0\quad\text{при}\quad 0<t<+\infty;\tag{4}$$

в) если концы стержня закреплены упруго, то граничные условия имеют вид

$$u_x(0,\,t)-hu(0,\,t)=u_x(l,\,t)+hu(l,\,t)=0\quad\text{при}\quad 0<t<+\infty,\tag{5}$$

$$h=\frac{k}{ES},$$

где k — коэффициент упругости заделки (предполагается, что он одинаков для обоих концов, в противном случае значения константы h для правого и левого концов будут различны), а S — площадь поперечного сечения.

Указание[1]. Направим ось Ox вдоль стержня. Каждое поперечное сечение стержня можно характеризовать той абсциссой x, которую оно имело в положении равновесия[2]. Тогда сечение, отмеченное абсциссой x, в момент t будет иметь абсциссу $\overline{x}=x+u(x,\,t)$. Здесь $u(x,\,t)$ означает величину продольного смещения того поперечного сечения стержня, которое в положении равновесия имеет абсциссу x. Таким образом, функция $u(x,\,t)$ выражена в лагранжевых координатах[3].

Дифференциальное уравнение (1) может быть получено переходом к пределу при $\Delta x\to 0$ из уравнения движения, выражающего второй закон Ньютона для элемента $(x,\,x+\Delta x)$ стержня, т. е. для элемента, торцы которого в состоянии равновесия имеют абсциссы x и $x+\Delta x$. Для определения упругих сил, действующих на этот элемент, нужно воспользоваться законом Гука, который выражается равенством

$$X=ESu_x(x,\,t),$$

где X — проекция на ось x силы $\boldsymbol{F}$, с которой часть стержня, лежащая правее рассматриваемого сечения, действует на часть, лежащую левее этого сечения, S — площадь этого поперечного сечения[4], а $u_x(x,\,t)$ относительное удлинение стержня в том поперечном сечении, которое в положении равновесия имела абсциссу x[5].

Если концы стержня фиксированы неподвижно, то граничные условия очевидны. Если же концы стержня свободны или закреплены

---

[1] Ср. с выводом уравнения в [7, с. 27, 28].

[2] Равновесным может быть статическое напряженное состояние.

[3] См. [7, с. 27].

[4] Сила $\boldsymbol{F}$ перпендикулярна к поперечному сечению, а следовательно, ее направление либо совпадает с направлением оси Ox, либо противоположно направлению оси Ox.

[5] См. [7, с. 27].

упруго, то граничные условия могут быть получены из соотношений, выражающих второй закон Ньютона для граничных элементов.

Рассмотрим, например, случай, когда конец $x = l$ закреплен упруго. Слева на граничный элемент $(l - \Delta x,\ l)$, примыкающий к этому концу, действует остальная часть стержня с силой

$$-ESu_x(l - \Delta x,\ t),$$

справа — упругая опора с силой [1])

$$-ku(l,\ t).$$

Поэтому второй закон Ньютона для этого элемента выразится уравнением

$$S\rho_0\Delta x\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -ESu_x(l - \Delta x,\ t) - ku(l,\ t),$$

откуда, переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим граничное условие для конца $x = l$

$$ESu_x(l,\ t) + ku(l,\ t) = 0$$

или

$$u_x(l,t) + hu(l,t) = 0,$$

где

$$h = \frac{k}{ES}.$$

Для конца $x = 0$ знак при h в граничном условии будет иным. В самом деле, рассмотрим элемент $(0,\ \Delta x)$. К его левому концу приложена сила

$$-ku(0,\ t),$$

а к правому концу — сила

$$ESu_x(\Delta x,\ t),$$

поэтому уравнение, выражающее второй закон Ньютона для этого элемента, имеет вид

$$S\rho_0\Delta x\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ESu_x(\Delta x,\ t) - ku(0,\ t).$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем

$$u_x(0,\ t) - hu(0,\ t) = 0,$$

где h имеет прежнее значение, если стержень однороден, а коэффициент упругости заделки для обоих концов одинаков.

Примечание. Иногда для постановки краевой задачи о продольных колебаниях стержня целесообразно использовать не одно уравнение в частных производных второго порядка, а систему двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

Обозначим через $\hat{p}(x,\ t)$ напряжение в поперечном сечении с лагранжевой координатой x, определяя его соотношением

$$\hat{p}(x,\ t) = \frac{X(x,\ t)}{S},$$

[1]) См. пункт в) условия задачи.

где S — площадь поперечного сечения стержня, а $X(x,\,t)$ — проекция на ось x силы, с которой часть стержня, примыкающая к сечению x справа, действует на часть этого стержня, примыкающую к сечению слева. Через $u(x,t)$, как обычно, обозначим смещение из положения равновесия поперечного сечения с лагранжевой координатой x. В качестве функций, характеризующих процесс колебаний, возьмем

$$\hat{p}(x,\,t) \quad \text{и} \quad w(x,\,t) = u_t(x,\,t).$$

Рассмотрим, например, случай, когда левый конец стержня закреплен неподвижно, а правый свободен. Мы придем к краевой задаче

$$\left.\begin{aligned} w_x - \frac{1}{E}\,\hat{p}_t = 0,\\ -\hat{p}_x + \rho_0 w_t = 0, \end{aligned}\right\} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$w(0,\,t) = 0, \quad \hat{p}(l,\,t) = 0, \quad 0 < t < +\infty. \tag{2}$$

$$w(x,\,0) = \varphi(x), \quad \hat{p}(x,\,0) = \hat{\psi}(x), \quad 0 < x < l. \tag{3}$$

2. Ось Ox декартовой системы координат направлена вдоль положения равновесия струны. Пусть в положении равновесия точка имеет координаты $[x;\ 0;\ 0]$, а в отклоненном положении $[x+u_1(x,\,t);\ u_2(x,\,t);\ u_3(x,\,t)]$.

Для определения функций $u_1(x,\,t)$, $u_2(x,\,t)$, $u_3(x,\,t)$, характеризующих процесс колебаний струны, получаем краевые задачи

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = a_k^2 \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} \quad \text{при} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty,\\ u_k(0,\,t) = u_k(l,\,t) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t < +\infty,\\ u_k(x,\,0) = f_k(x), \quad \frac{\partial u_k(x,\,0)}{\partial t} = F_k(x) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \end{aligned}\right\} \quad k = 1, 2, 3,$$

где $a_1^2 = \dfrac{ES}{\rho}$, $a_2^2 = a_3^2 = \dfrac{T_0}{\rho}$, E — модуль упругости, S — площадь поперечного сечения, ρ — линейная плотность массы.

У к а з а н и е. Полная сила натяжения струны складывается из начальной силы натяжения T_0 и упругой силы, возникающей при относительном удлинении элементов струны. При малых колебаниях струну можно считать абсолютно гибкой, т. е. силу натяжения в каждой точке струны считать касательной к струне. Дифференциальные уравнения для функций $u_k(x,\,t)$ можно получить переходом к пределу при $\Delta x \to 0$ из уравнений движения, выражающих для элемента $(x,\,x+\Delta x)$ второй закон Ньютона в проекциях на оси координат. По поводу определения сил, действующих на концы элемента $(x,\,x+\Delta x)$ см. дополнительно [7, с. 23, 24], а также указание к предыдущей задаче.

3. Ось Ox направлена по продольной оси инерции цилиндра, а через $\theta(x,\,t)$ обозначен угол поворота поперечного сечения с абсциссой x, причем концы цилиндра определяются абсциссами $x = 0$ и $x = l$. Для функции $\theta(x,\,t)$ получаем краевые задачи:

а) в случае жестко закрепленных концов

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \quad \text{при} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$\theta(0,\,t) = \theta(l,\,t) = 0 \quad \text{при} \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$\theta(x,\,0) = f(x), \quad \theta_t(x,\,0) = F(x) \quad \text{при} \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

$a^2 = \dfrac{GJ}{K}$, где G — модуль сдвига, J — полярный (геометрический) момент инерции поперечного сечения цилиндра относительно точки, в которой ось цилиндра встречает это поперечное сечение, K — осевой момент инерции единицы длины стержня (относительно той же оси);

б) когда концы цилиндра свободны, то граничные условия имеют вид

$$\theta_x(0,\,t) = \theta_x(l,\,t) = 0; \tag{4}$$

в) когда концы цилиндра закреплены упруго, то граничные условия имеют вид

$$\theta_x(0,\,t) - h\theta(0,\,t) = 0, \quad \theta_x(l,\,t) + h\theta(l,\,t) = 0. \tag{5}$$

Указание. Установить, что момент M упругих сил, приложенных к поперечному сечению x цилиндра, может быть найден по формуле

$$M = GJ\,\frac{\partial\theta}{\partial x}. \tag{6}$$

Для этого рассмотреть (рис. 15) сдвиг параллельного оси цилиндра элементарного волокна AB с основанием $d\sigma$ на сечениях, вызываемый

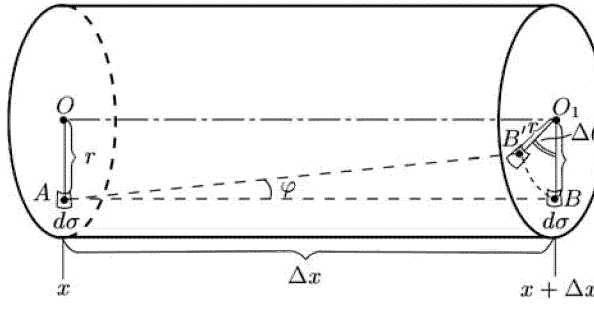


Рис. 15

поворотом сечения $x + \Delta x$ вокруг оси цилиндра на угол $\Delta\theta = \dfrac{\partial\theta}{\partial x}\,\Delta x$ относительно сечения x, и определить связь между углом сдвига φ и $\dfrac{\partial\theta}{\partial x}$. Напряжение сдвига τ на основании $d\sigma$ такого волокна, лежащего в сечении x, может быть определено по закону Гука для деформации сдвига

$$\tau = G\varphi. \tag{7}$$

Дифференциальное уравнение (1) можно получить предельным пе-

реходом при $\Delta x \to 0$ из уравнения вращательного движения[1)] для элемента $(x,\, x+\Delta x)$ цилиндра.

Граничные условия получаются аналогично тому, как это было сделано в случае продольных колебаний стержня.

4. Плотность ρ, давление p, потенциал скорости φ, скорость v частиц газа и продольное отклонение u частиц газа удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

с одной и той же константой

$$a^2 = k\,\frac{p_0}{\rho_0},$$

где $k = \dfrac{c_p}{c_v}$ — показатель адиабаты

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k,$$

равный отношению теплоемкости при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме, а p_0 и ρ_0 — давление и плотность в невозмущенном газе.

Если концы трубки закрыты, то граничные условия для каждой из функций u, v, φ, p, ρ имеют соответственно вид

$$u(0,\,t) = u(l,\,t) = 0, \quad v(0,\,t) = v(l,\,t) = 0,$$

$$\varphi_x(0,\,t) = \varphi_x(l,\,t) = 0, \quad p_x(0,\,t) = p_x(l,\,t) = 0, \quad \rho_x(0,\,t) = \rho_x(l,\,t) = 0.$$

Если концы трубки открыты, то

$$u_x(0,\,t) = u_x(l,\,t) = 0, \quad v_x(0,\,t) = v_x(l,\,t) = 0,$$

$$\varphi(0,\,t) = \varphi(l,\,t) = 0, \quad \widetilde{p}(0,\,t) = \widetilde{p}(l,\,t) = 0, \quad \widetilde{\rho}(0,\,t) = \widetilde{\rho}(l,\,t) = 0,$$

где $\widetilde{p}(x,t) = p(x,t) - p_0$ — «возмущение давления», а $\widetilde{\rho}(x,\,t) = \rho(x,\,t) - {}$ $- \rho_0$ — «возмущение плотности».

При наличии в конце $x = l$ трубки газонепроницаемого поршенька с пренебрежимо малой массой, насаженного на пружинку с коэффициентом жесткости ν[2)] и скользящего внутри трубки без трения, для $u(x,t)$ получаем граничное условие

$$u_x(l,\,t) + hu(l,\,t) = 0,$$

где $h = \dfrac{\nu}{Skp_0}$, а k — показатель адиабаты. Аналогично при наличии

[1)] Для вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси имеем: произведение момента инерции тела на угловое ускорение равно сумме моментов сил, приложенных к телу, относительно этой оси.

[2)] Пружинка будет действовать на поршенек с добавочной силой упругости, равной $-\nu u(l,\,t)$ при отклонении поршенька, равном u. Мы говорим о добавочной силе упругости, так как в положении равновесия на поршенек уже действует сила упругости, уравновешивающая невозмущенное давление p_0.

такого поршенька в конце $x = 0$ трубки получаем

$$u_x(0,t) - hu(0,t) = 0.$$

Для $v(x,t)$ при этих же условиях имеем

$$v_x(0,\,t) - hv(0,\,t) = 0, \quad v_x(l,\,t) + hv(l,\,t) = 0.$$

Для $\widetilde{p}(x,\,t)$ и $\widetilde{\rho}(x,\,t)$ получаем

$$\widetilde{p}_{tt}(0,t) - h^*\widetilde{p}_x(0,\,t) = \widetilde{p}_{tt}(l,\,t) + h^*\widetilde{p}_x(l,\,t) =$$
$$= \widetilde{\rho}_{tt}(0,\,t) - h^*\widetilde{\rho}_x(0,\,t) = \widetilde{\rho}_{tt}(l,\,t) + h^*\widetilde{\rho}_x(l,\,t) = 0,$$

где $h^* = \dfrac{\nu}{S\rho_0}$. Эти условия выполняются также и для

$$p(x,\,t), \quad \rho(x,\,t), \quad \varphi(x,\,t).$$

Указание. В лагранжевых координатах [1] уравнение неразрывности (1) и уравнение движения (2) («основные уравнения гидродинамики») имеют вид

$$\rho_0 = \rho(x,\,t)[1 + u_x(x,\,t)], \tag{1}$$

$$\rho_0 u_{tt}(x,\,t) = -p_x(x,\,t). \tag{2}$$

Вместе с уравнением адиабаты

$$p = f(\rho), \quad \text{где} \quad f(\rho) = \frac{p_0}{\rho_0^k}\,\rho^k, \quad k = \frac{c_p}{c_v}, \tag{3}$$

они составляют полную нелинейную систему уравнений для определения функций $\rho(x,\,t)$; $u(x,\,t)$; $p(x,\,t)$.

Уравнение (1) выражает закон сохранения массы элемента газа, заключенного между двумя поперечными сечениями, составленными из частиц газа, а уравнение (2) выражает второй закон Ньютона для этого элемента газа.

Отбрасывая квадраты, произведения и высшие степени величин

$$u(x,\,t), \quad \widetilde{p}(x,\,t) = p(x,\,t) - p_0, \quad \widetilde{\rho}(x,\,t) = \rho(x,\,t) - \rho_0$$

и их производных, нетрудно из уравнений (1), (2), (3) получить соответственно линейные уравнения

$$\widetilde{\rho}(x,\,t) + \rho_0 u_x(x,\,t) = 0, \tag{1'}$$

$$\rho_0 u_{tt}(x,\,t) = -\widetilde{p}_x(x,\,t), \tag{2'}$$

$$\widetilde{p}(x,t) = a^2\widetilde{\rho}(x,\,t), \quad a^2 = k\,\frac{p_0}{\rho_0}, \tag{3'}$$

a — скорость распространения малых возмущений в газе, «скорость звука» [2].

Этот переход от нелинейной системы (1), (2), (3) к линейной системе (1′), (2′), (3′) называется «линеаризацией». Уравнения $\widetilde{\rho}_{tt} = a^2\widetilde{\rho}_{xx}$ и $\widetilde{p}_{tt} = a^2\widetilde{p}_{xx}$ получаются из (1′), (2′), (3′) дифференцированием и исключением остальных функций. Потенциал $\varphi(x,\,t)$ определяется соотношением $\varphi_x(x,\,t) = v(x,\,t)$ с точностью до произвольной

[1] См. [7, с. 27].

[2] См. введение к § 2 (условиям) настоящей главы.

слагаемой функции времени; так как $u_t(x, t) = v(x, t)$, то из уравнения $(2')$ получим

$$\rho_0 \varphi_{xt} + \widetilde{p}_x = 0,$$

т. е.

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho_0 \varphi_t + \widetilde{p}) = 0,$$

поэтому в силу того, что потенциал скоростей $\varphi(x, t)$ определяется с точностью до произвольной слагаемой функции времени, можно написать:

$$\rho_0 \varphi_t + \widetilde{p} = 0. \tag{4}$$

Соотношение (4) дает возможность найти возмущение давления $\widetilde{p}$, если известен потенциал скоростей. Из уравнения $(1')$, дифференцируя по t, получим

$$\widetilde{\rho}_t + \rho_0 \varphi_{xx} = 0. \tag{5}$$

Из (4) и (5) получается уравнение

$$\varphi_{tt} = a^2 \varphi_{xx},$$

дифференцирование которого по x приводит к уравнению

$$v_{tt} = a^2 v_{xx}.$$

Аналогично получаются уравнения для потенциала смещений и для смещений.

Рассматривая движение граничного элемента газа и используя уравнения $(1')$, $(2')$, $(3')$, (4) и (5), нетрудно получить приведенные в ответе граничные условия.

5. Ось Ox направлена вдоль трубы, причем начало координат O лежит в плоскости входного сечения, p_0 — давление воды в резервуаре. Для определения осредненных (по внутреннему поперечному сечению трубы) значений скорости $v(x, t)$ и давления $p(x, t)$ получаем краевую задачу

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial(\rho_0 v)}{\partial t} + 2\alpha(\rho_0 v), \\ -\frac{\partial p}{\partial t} &= \lambda^2 \frac{\partial(\rho_0 v)}{\partial x}, \end{aligned}\right\} \quad 0 < x < l; \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$\tag{2}$$

$$p(0, t) \cong p_0, \quad v(l, t) = 0; \quad 0 < t < +\infty, \tag{3}$$

$$p(x, 0) \cong p_0, \quad v(x, 0) = v_0; \quad 0 \leqslant x < l, \tag{4}$$

где ρ_0 — плотность воды в резервуаре,

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{\rho_0}{k} + \dfrac{2R_0\rho_0}{E\delta}}}, \tag{5}$$

причем k есть модуль упругости воды, входящей в закон Гука для воды,

$$\widetilde{p} = k\,\frac{\widetilde{\rho}}{\rho_0} \quad (\widetilde{p} = p - p_0, \quad \widetilde{\rho} = \rho - \rho_0), \tag{6}$$

R_0 — внутренний радиус трубы в невозмущенном состоянии, E — модуль упругости материала трубы, δ — толщина трубы, α — опре-

деляемый экспериментально коэффициент сопротивления трения единицы длины трубы [1]).

При составлении уравнения движения можно, как показал Н.Е. Жуковский, для тонких труб при не слишком больших возмущениях давления пренебрегать радиальным движением их частиц [2]), в то время как при выводе уравнения неразрывности радиально симметричное растяжение трубы необходимо учитывать. Силу сопротивления трения, действующую на элемент воды, заключенный между поперечными сечениями x и $x + \Delta x$, можно определить по формуле, приведенной в сноске.

При выводе уравнений краевой задачи величины $\widetilde{p}$, $\widetilde{\rho}$, v будем считать малыми, а величину $\dfrac{p_0}{R_0 \cdot E\delta}$ — значительно меньшей единицы.

Установим связь между внутренним радиусом R трубы и давлением p в трубе. Для этого рассмотрим состояние половины элемента, отсекаемого от трубы близкими поперечными сечениями x и $x + \Delta x$, изображенного на рис. 16. Силы упругости, развивающиеся в сечениях I и II этого полукольца, равны сумме проекций сил давления жидкости на средний радиус полукольца, т. е.

$$2\delta \Delta x E \frac{R - R_0}{R_0} = 2R\Delta x(p - p_0)$$

или

$$\widetilde{p} = \frac{E\delta}{R_0^2}\,\widetilde{R}. \tag{7}$$

Следовательно, величина $\widetilde{R} = R - R_0$ также будет малой, равно как и величина

$$\widetilde{S} = S - S_0 \approx 2\pi \widetilde{R} R_0 = S_0 \frac{2R_0}{E\delta}\,\widetilde{p}. \tag{8}$$

Выведем уравнение неразрывности, выражающее закон сохранения массы вещества для объема, заключенного между плоскостями x и $x + \Delta x$ (рис. 16, *б*):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_x^{x+\Delta x} S\rho\, dx = (S\rho v)_x - (S\rho v)_{x+\Delta x},$$

т. е.

$$\int\limits_x^{x+\Delta x} \frac{\partial}{\partial t}\,(S\rho)\, dx = (S\rho v)_x - (S\rho v)_{x+\Delta x},$$

---

[1]) Пусть S — внутреннее поперечное сечение трубы, тогда сила сопротивления, приложенная к элементу жидкости, заключенному между сечениями x и $x + \Delta x$, равна

$$2\alpha \int\limits_x^{x+\Delta x} S\rho v\, dx.$$

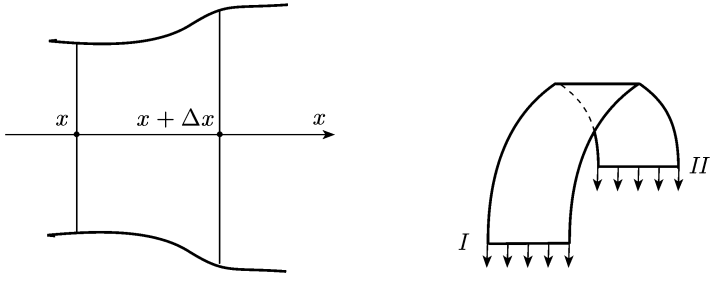
О более точной постанове задачи, где подробнее анализируется сила сопротивления, см., например, [44].

[2]) В этом случае произведение массы кольцевого элемента трубы на радиальное ускорение пренебрежимо мало.

откуда

$$\frac{\partial(S\rho)}{\partial t} = -\frac{\partial(S\rho v)}{\partial x}.$$

В силу малости величин $\widetilde{S}$, $\widetilde{\rho}$, v это уравнение преобразуется в уравнение (2).



а *б*

Рис. 16

Аналогично (рис. 16, *а*) составляем уравнение движения, выражающее второй закон Ньютона для элемента воды, заключенного в рассматриваемый момент времени между сечениями x и $x + \Delta x$:

$$\frac{d}{dt}\int_x^{x+\Delta x}(S\rho v)\,dx = (Sp)\Big|_x - (Sp)\Big|_{x+\Delta x} - 2\alpha\int_x^{x+\Delta x}(S\rho v)\,dx,$$

$$\alpha = \text{const}, \quad \alpha > 0,$$

$$\int_x^{x+\Delta x}\left\{\frac{d}{dt}(S\rho v)\right\}dx = (Sp)\Big|_x - (Sp)\Big|_{x+\Delta x} - 2\alpha\int_x^{x+\Delta x}(S\rho v)\,dx,$$

откуда

$$\frac{d(S\rho v)}{dt} = -\frac{\partial(Sp)}{\partial x} - 2\alpha S\rho v.$$

В силу малости $\widetilde{S}$, $\widetilde{\rho}$, $\widetilde{p}$ и в силу малости $\dfrac{2p_0R_0}{E\delta}$ по сравнению с единицей это уравнение (с помощью соотношений (6) и (8)) преобразуется в уравнение (1). Начальные условия (4) и граничные условия (3), приведенные в ответе, очевидны.

Вместо системы дифференциальных уравнений первого порядка можно получить одно гиперболическое уравнение второго порядка как для функции $v(x,\,t)$, так и для $p(x,\,t)$. Именно, дифференцируя (1) по x и (2) по t и исключая v, получим

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \lambda^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - 2\alpha\frac{\partial p}{\partial t} \quad \text{при} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$p(0,\,t) = p_0 \quad \text{при} \quad 0 < t < +\infty.$$

Второе граничное условие для $p(x,t)$ получаем из граничного условия $v(l,\,t) = 0$ при $0 < t < +\infty$ с помощью уравнения (1):

$$p_x(l,\,t) = 0 \quad \text{при} \quad 0 < t < +\infty.$$

Далее,

$$p(x,\,0) = p_0 \quad \text{при} \quad 0 < x < l.$$

Второе начальное условие для $p(x,\,t)$ получаем из $v(x,\,0) = v_0$ при $0 \leqslant x < l$ и уравнения (2):

$$p_t(x,\,0) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x < l.$$

Аналогично может быть получена краевая задача для определения $v(x,\,t)$.

6. Решение. Пусть ω означает приращение объема жидкости в колпаке, S — площадь внутреннего поперечного сечения трубы на конце $x = l$. Мы имеем

$$\frac{d\omega}{dt} = Sv\Big|_{x=l} - Q(t), \tag{1}$$

$$P_0\Omega_0 = P(\Omega_0 - \omega), \tag{2}$$

где v — скорость течения жидкости, а P — давление воздуха в колпаке, откуда

$$P = \frac{P_0\Omega_0}{\Omega_0 - \omega} \cong P_0\left(1 + \frac{\omega}{\Omega_0}\right), \tag{3}$$

следовательно,

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Omega_0}{P_0}\,\frac{\partial p}{\partial t}, \tag{4}$$

где $p = P$ — давление жидкости в колпаке. В силу уравнения (2) на с. 152

$$\frac{d\omega}{dt} = -\lambda^2\rho_0\,\frac{\Omega_0}{P_0}\,\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{5}$$

Подставляя (5) в (1), получаем искомое граничное условие

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{P_0 S}{\Omega_0\lambda^2\rho_0}\,v = \frac{P_0}{\Omega_0\lambda^2\rho_0}\,Q(t)\Big|_{x=l}. \tag{6}$$

7.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} &= c^2\,\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} &= c^2\,\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

(2)

где $c^2 = gh$, g — ускорение силы тяжести,

$$\left.\begin{aligned} \xi(0,\,t) &= \xi(l,\,t) = 0, \\ \eta_x(0,t) &= \eta_x(l,\,t) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad 0 < t < +\infty, \tag{3}$$

(4)

$$\left.\begin{aligned} \xi(x,\,0) &= f(x), \qquad \xi_t(x,\,0) = \varphi(x), \\ \eta(x,\,0) &= -hf'(x), \quad \eta_t(x,\,0) = -h\varphi'(x) \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad 0 < x < l. \tag{5}$$

(6)

Указание. Возмущение давления в воде при рассматриваемых волновых движениях можно считать пренебрежимо малым, т. е. давление p на глубине y, отсчитываемой от дна канала, можно считать близким к гидростатическому[1]). Слагающую v скорости частиц воды по направлению оси x можно считать малой, т. е. пренебрегать

[1]) Но нельзя пренебрегать его производной по x.

квадратами, произведениями и высшими степенями этой функции и ее производных. Жидкость можно считать несжимаемой.

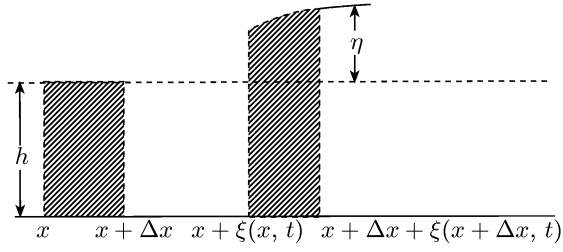


Рис. 17

Р е ш е н и е. На глубине y, отсчитываемой от дна канала, давление будет равно

$$p = p_0 + g\rho(h + \eta - y). \tag{7}$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial p}{\partial x} = g\rho\,\frac{\partial \eta}{\partial x}. \tag{8}$$

Составим уравнение движения для элемента $\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$ слоя $(x,\ x + \Delta x)$ воды в проекциях на ось x (рис. 17):

$$\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,\rho\,\frac{\partial v}{\partial t} = -\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,\frac{\partial p}{\partial x}\Big|_{x+\theta\Delta x},$$

где $0 < \theta < 1$, откуда после сокращения на $\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$ при $\Delta x \to 0$ получаем

$$\rho\,\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{9}$$

или, используя (8),

$$\rho\,\frac{\partial v}{\partial t} = -g\rho\,\frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -g\,\frac{\partial \eta}{\partial x}. \tag{10}$$

Далее, используя несжимаемость жидкости, получаем «уравнение неразрывности» (уравнение сохранения массы)

$$\rho\eta m = -\frac{\partial\,(\rho m h \xi)}{\partial x}, \tag{11}$$

где m — ширина канала, откуда

$$\eta = -h\,\frac{\partial \xi}{\partial x}. \tag{12}$$

Линеаризация уравнения (10) дает

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g\,\frac{\partial \eta}{\partial x}. \tag{13}$$

Но $\dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$, поэтому

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g\,\frac{\partial \eta}{\partial x}. \tag{14}$$

С другой стороны, из (12) получаем

$$-g\,\frac{\partial \eta}{\partial x} = gh\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \tag{15}$$

Сопоставляя (14) и (15), получим дифференциальное уравнение для функции $\xi(x,\,t)$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = gh\,\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} \quad \text{при} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty. \tag{16}$$

Теперь нетрудно получить остальные соотношения ответа, приведенного выше. Укажем лишь, что граничные условия (4) можно получить из граничных условий (3) дифференцированием по t и применением равенства (14).

В заключение необходимо отметить, что для определения $\xi(x,\,t)$ и $\eta(x,\,t)$ достаточно решить краевую задачу (1), (3), (5) и затем по найденному $\xi(x,\,t)$ найти $\eta(x,\,t)$ по формуле (12).

8. Ось Ox направлена по продольной оси симметрии стержня в его равновесном состоянии, а за характеристическую функцию принято поперечное отклонение $u(x,\,t)$ точек стержня от их положения равновесия. Для определения $u(x,\,t)$ получаем краевую задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2\,\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0\ ^{1)} \quad \text{при} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(0,\,t) = u_{xx}(0,\,t) = u(l,\,t) = u_{xx}(l,\,t) = 0 \quad \text{при} \quad 0 < l < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\,0) = f(x), \quad u_t(x,\,0) = F(x) \quad \text{при} \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

$$a^2 = \frac{EJ}{\rho S}, \tag{4}$$

где E — модуль упругости стержня, ρ — плотность массы стержня, S — площадь поперечного сечения стержня, J — геометрический момент инерции поперечного сечения относительно его средней линии, перпендикулярной к плоскости колебаний.

Указание. Вывод уравнения (1) изложен в [7, с. 142–144].

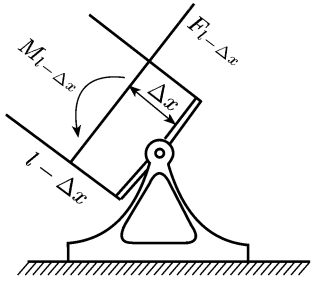


Рис. 18

Рассматривая движение концевых элементов стержня, можно получить граничные условия.

Выведем граничные условия в случае шарнирного закрепления конца.

Рассмотрим граничный элемент $(l-\Delta x,\,l)$ шарнирно закрепленного конца и составим для него уравнение вращательного движения относительно оси шарнира (рис. 18, см. также рис. 2)

$$J\rho\Delta x\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = F\Big|_{l-\Delta x}\Delta x + M\Big|_{l-\Delta x}. \tag{5}$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ в предположении, что нет бесконечных угловых ускорений $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$ и бесконечных перерезывающих сил F,

[1)] Это уравнение получено в предположении, что угловые ускорения поперечных сечений стержня отсутствуют, т. е. стержень должен быть достаточно тонким. Вывод более точного уравнения см. [26].

получим $M\big|_l = 0$, т. е.

$$u_{xx}(l,\, t) = 0. \tag{6}$$

Аналогично получаем второе граничное условие для левого конца $u_{xx}(0,\, t) = 0$. В левой части равенства (5) можно было бы сразу писать нуль по предположению о малости колебаний $\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \approx 0\right)$. Но граничные условия (5) и (6) годятся и в том случае, когда угловые ускорения $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$ элементов стержня не считаются пренебрежимо малыми. Второе граничное условие для рассматриваемого конца очевидно: $u(l,\, t) = 0$.

9. Ось Ox расположена так же, как в предыдущей задаче. Для определения $u(x,\, t)$ получаем краевую задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2\,\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(0,\, t) = u_x(0,\, t) = u_{xx}(l,\, t) = u_{xxx}(l,\, t) = 0 \quad \text{при} \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\, 0) = f(x), \quad u_t(x,\, 0) = F(x) \quad \text{при} \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

$$a^2 = \frac{EJ}{\rho S}.$$

Указание. Граничными условиями для жестко закрепленного конца $x = 0$ являются неподвижность конца и горизонтальность касательной. На свободном конце, что доказывается обычным образом, изгибающий момент и перерезывающая сила должны быть равны нулю.

10. Ось Ox расположена так же, как в ответе задачи 8. Для определения отклонения $u(x,\, t)$ получаем краевую задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2\,\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{k}{\rho S}\,u = 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(0,\, t) = u_{xx}(0,\, t) = u(l,\, t) = u_{xx}(l,\, t) = 0 \quad \text{при} \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\, 0) = f(x), \quad u_t(x,\, 0) = F(x) \quad \text{при} \quad 0 < x < l. \tag{3}$$

Указание. Уравнение (1) получается переходом к пределу при $\Delta x \to 0$ из уравнения, выражающего в проекциях на ось Ou второй закон Ньютона для элемента $(x,\, x + \Delta x)$ стержня. По поводу граничных условий см. решение задачи 8.

2. Вынужденные колебания и колебания в среде с сопротивлением; уравнения с постоянными коэффициентами.

11.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,\, t) \quad \text{при} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(0,\, t) = u(l,\, t) = 0 \quad \text{при} \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\, 0) = f(x), \quad u_t(x,\, 0) = F(x) \quad \text{при} \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

$f(x,\, t) = \dfrac{1}{\rho}\,F(x,\, t)$, где ρ — линейная плотность массы струны.

Указание. Дифференциальное уравнение (1) получается из уравнения движения для элемента $(x,\ x+\Delta x)$ струны при $\Delta x \to 0$.

12. Для отклонений $u(x,\ t)$ точек струны от положения равновесия получаем краевую задачу

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \frac{H}{c\rho}\, I(t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

где $a^2 = \dfrac{T}{\rho}$, T — натяжение струны, ρ — линейная плотность массы, c — скорость света,

$$u(0,\ t) = u(l,\ t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\ 0) = u_t(x,\ 0) = 0, \quad 0 < x < l. \tag{3}$$

13.
$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad \text{при} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(0,\ t) = \varphi(t), \quad u_x(l,\ t) = \frac{\Phi(t)}{ES} \quad \text{при} \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\ 0) = 0, \quad u_t(x,\ 0) = 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < l. \tag{3}$$

Указание. Граничное условие для конца $x = l$ получается переходом к пределу при $\Delta x \to 0$ из уравнения движения, выражающего второй закон Ньютона для элемента $(l - \Delta x,\ l)$ стержня.

14. Для определения предельных отклонений $u(x,\ t)$ поперечных сечений стержня получаем краевую задачу

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + g \quad \text{при} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(0,\ t) = u_x(l,\ t) = 0 \quad \text{при} \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\ 0) = 0, \quad u_t(x,\ 0) = v_0 \quad \text{при} \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

где g — ускорение силы тяжести, а v_0 — скорость, достигнутая лифтом к моменту остановки.

15. Для определения поперечных отклонений $u(x,\ t)$ точек струны от их положения равновесия получаем краевую задачу

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - 2\nu^2 u_t \quad \text{при} \quad 0 < t < +\infty, \quad 0 < x < l, \tag{1}$$

$$u(0,\ t) = u(l,\ t) = 0 \quad \text{при} \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\ 0) = f(x), \quad u_t(x,\ 0) = F(x) \quad \text{при} \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

где $2\nu^2 = \dfrac{k}{\rho}$, ρ — линейная плотность массы струны, k — «коэффициент трения», т. е. коэффициент пропорциональности в соотношении

$$\Phi = -k u_t,$$

определяющем силу трения, действующую на единицу длины струны.

Указание. Уравнение (1) получается переходом к пределу при $\Delta x \to 0$ из уравнения движения для элемента $(x,\ x+\Delta x)$ струны.

16. Для определения поперечного отклонения точек стержня от их положения равновесия получаем краевую задачу

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} + 2\nu^2 u_t = f(x,\ t) \quad \text{при} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(0,\,t)=u_x(0,\,t)=u(l,\,t)=u_x(l,\,t)=0 \quad \text{при} \quad 0<t<+\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\,0)=f(x), \quad u_t(x,\,0)=F(x) \quad \text{при} \quad 0<x<l; \tag{3}$$

здесь ν имеет такой же смысл, как и в предыдущей задаче.

17. Для определения поперечного отклонения $u(x,\,t)$ точек стержня от их положения равновесия получаем краевую задачу

$$u_{tt}+a^2u_{xxxx}=0 \quad \text{при} \quad 0<x<l, \quad 0<t<+\infty, \tag{1}$$

$$u(0,\,t)=u_x(0,\,t)=0, \quad u_{xx}(l,\,t)=0, \quad EJu_{xxx}(l,\,t)=-\Phi(t) \tag{2}$$

при $0<t<+\infty$, где $\Phi(t)$ — приложенная к концу $x=l$ поперечная сила (ее проекция на ось Ou, «совпадающая» с силой, так как сила параллельна оси Ou),

$$u(x,\,0)=f(x), \quad u_t(x,\,0)=F(x) \quad \text{при} \quad 0<x<l. \tag{3}$$

Указание. Последнее из граничных условий (2) может быть получено переходом к пределу при $\Delta x\to 0$ в уравнении, выражающем в проекции на ось Ou второй закон Ньютона для элемента $(l-\Delta x,\,l)$ стержня. По поводу условия $u_{xx}(l,\,t)=0$ см. решение задачи 8.

18. Для определения продольных отклонений $u(x,\,t)$ точек стержня от их положения равновесия получаем краевую задачу [1)]

$$u_{tt}=a^2u_{xx} \quad \text{при} \quad 0<x<l, \quad 0<t<+\infty, \tag{1}$$

$$u(0,\,t)=0, \quad ESu_x(l,\,t)=ku_t(l,\,t) \quad \text{при} \quad 0<t<+\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\,0)=f(x), \quad u_t(x,\,0)=F(x) \quad \text{при} \quad 0<x<l, \tag{3}$$

где k — коэффициент трения для конца $x=l$ стержня.

19. $v_{xx}=CLv_{tt}+(CR+GL)v_t+GRv$

$$\text{при} \quad 0<x<l, \quad 0<t<+\infty, \tag{1}$$

$$v(0,\,t)=0, \quad v(l,\,t)=E(t) \quad \text{при} \quad 0<t<+\infty, \tag{2}$$

$$v(x,\,0)=F(x), \quad v_t(x,\,0)=\frac{-GF(x)-f'(x)}{C} \quad \text{при} \quad 0<x<l, \tag{3}$$

где $E(t)$ — заданная электродвижущая сила, приложенная к концу $x=l$ провода, а L, C, G, R — соответственно коэффициент самоиндукции, емкость, утечка и сопротивление, рассчитанные на единицу длины провода.

Указание. Начальные условия записываются в форме (3), если воспользоваться вторым из системы телеграфных уравнений

$$\begin{aligned} &v_x+Li_t+Ri=0,\\ &i_x+Cv_t+Gv=0 \end{aligned} \tag{4}$$

при $t=0$. Система (4) выводится в [7, с. 30, 31].

[1)] По поводу вывода граничных условий см. указание к задаче 1.

3. Задачи о колебаниях, приводящие к уравнениям с непрерывными переменными коэффициентами.

20. $\rho(x)\,S(x)\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[E(x)\,S(x)\,\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]$

$$\text{при} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(0,\,t) = u(l,\,t) = 0 \quad \text{при} \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\,0) = f(x), \quad u_t(x,\,0) = F(x) \quad \text{при} \quad 0 < x < l. \tag{3}$$

21. Ось Ox направлена по оси конуса. Для определения продольных отклонений $u(x,\,t)$ точек стержня от их положения равновесия получаем краевую задачу

$$\left(1 - \frac{x}{H}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1 - \frac{x}{H}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial x}\right]$$

$$\text{при} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(0,\,t) = u(l,\,t) = 0 \quad \text{при} \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\,0) = f(x), \quad u_t(x,\,0) = F(x) \quad \text{при} \quad 0 < x < l. \tag{3}$$

Здесь $a^2 = \dfrac{E}{\rho}$, E — модуль упругости, ρ — плотность массы, $H = \dfrac{R}{R-r}\,l$ — высота полного конуса, частью которого является стержень.

22. Для определения поперечных отклонений $u(x,\,t)$ точек стержня от положения равновесия получаем краевую задачу

$$\left(1 - \frac{x}{H}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha^2\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\left(1 - \frac{x}{H}\right)^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = 0$$

$$\text{при} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

где $\alpha^2 = \dfrac{Eh^2}{12\rho}$, $H = \dfrac{h}{h-h'}\,l$ — высота полного клина, частью которого является стержень

$$u(0,\,t) = 0, \quad u_x(0,\,t) = 0, \quad u_{xx}(l,\,t) = u_{xxx}(l,\,t) = 0$$

$$\text{при} \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\,0) = f(x), \quad u_t(x,\,0) = F(x) \quad \text{при} \quad 0 < x < l. \tag{3}$$

Если для поперечного сечения с абсциссой x площадь и момент инерции (относительно горизонтальной средней линии поперечного сечения) равны соответственно $S(x)$ и $J(x)$, то уравнение поперечных колебаний стержня будет иметь вид

$$S(x)\rho\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EJ(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = 0. \tag{4}$$

Сначала нужно получить уравнение (4), аналогично тому как это делалось в решении задачи 8 настоящего параграфа, а затем, подставляя

значения $S(x)$ и $J(x)$ для рассматриваемого клинообразного стержня, получить из уравнения (4) уравнение (1). По поводу вывода граничных условий (2) см. также решение задачи 8.

23. Ось Ox направлена по струне в положении равновесия, при этом ее начало совмещается со свободным концом струны. Для определения поперечных отклонений $u(x,\, t)$ точек струны от их положения равновесия получаем краевую задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g\,\frac{\partial}{\partial x}\left(x\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) \quad \text{при} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(0,\, t) \quad \text{ограничено}^{1)}, \quad u(l,\, t) = 0 \quad \text{при} \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\, 0) = f(x), \quad u_t(x,\, 0) = F(x) \quad \text{при} \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

где g — ускорение силы тяжести.

24. В системе координат, выбранной так же, как в предыдущей задаче, для определения поперечных отклонений $u(x,\, t)$ точек струны от положения равновесия получаем краевую задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g\,\frac{\partial}{\partial x}\left(x\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \omega^2 u \quad \text{при} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(0,\, t) \quad \text{ограничено}, \quad u(l,\, t) = 0 \quad \text{при} \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\, 0) = f(x), \quad u_t(x,\, 0) = F(x) \quad \text{при} \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

где g — ускорение силы тяжести.

25. Используем прямоугольную систему координат xOu, ось Ox которой направлена по струне при ее равновесном движении, а ось Ou перпендикулярна к плоскости равновесного движения, причем начало координат совпадает со свободным концом струны. Для определения отклонения $u(x,\, t)$ точек струны от плоскости равновесного движения получаем краевую задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{2}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) \quad \text{при} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(0,\, t) \quad \text{ограничено}, \quad u(l,\, t) = 0 \quad \text{при} \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\, 0) = f(x), \quad u_t(x,\, 0) = F(x) \quad \text{при} \quad 0 < x < l. \tag{3}$$

По поводу граничного условия для конца $x = 0$ см. примечание к ответу задачи 23 настоящего параграфа.

[1)] Требование ограниченности $u(0,\, t)$ и отклонений свободного конца очевидно. Это требование является достаточным и с математической точки зрения, что обусловливается структурой уравнения (1). Именно, вычислив энергию колеблющейся струны, можно, как и в простейшем случае поперечных колебаний струны, доказать единственность решения краевой задачи (1), (2), (3).

4. Задачи, приводящие к уравнениям с разрывными коэффициентами, и родственные им (кусочно однородные среды, сосредоточенные факторы).

26. Ось Ox направлена вдоль стержня. В состоянии равновесия плоскость соединения торцов полуограниченных стержней проходит через начало координат; $u_1(x,\,t)$ — продольные отклонения точек первого полуограниченного стержня, $u_2(x,\,t)$ — второго. Для определения $u_1(x,\,t)$ и $u_2(x,\,t)$ получаем краевую задачу

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a_1^2\,\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \quad \text{при} \quad -\infty < x < 0,\\ &\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a_2^2\,\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \quad \text{при} \quad 0 < x < \infty \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad 0 < t < +\infty, \qquad (1)$$

$$u_1(0,\,t) = u_2(0,\,t), \quad E_1\,\frac{\partial u_1(0,\,t)}{\partial x} = E_2\,\frac{\partial u_2(0,\,t)}{\partial x} \quad \text{при} \quad 0 < t < +\infty, \qquad (2)$$

$$u_1(x,\,0) = f(x), \quad \frac{\partial u_1(x,\,0)}{\partial t} = F(x) \quad \text{при} \quad -\infty < x < 0, \qquad (3)$$

$$u_2(x,\,0) = f(x), \quad \frac{\partial u_2(x,\,0)}{\partial t} = F(x) \quad \text{при} \quad 0 < x < +\infty,$$

$$a_1^2 = \frac{E_1}{\rho_1}, \quad a_2^2 = \frac{E_2}{\rho_2}.$$

Указание. Первое из условий сопряжения (2) означает, что торцы полуограниченных стержней все время остаются соединенными вместе, второе же может быть получено при $\Delta x \to 0$ из уравнения движения, выражающего второй закон Ньютона для элемента $(-\Delta x,\,\Delta x)$ составного стержня.

27. Ось Ox выбрана так же, как и в предыдущей задаче. Для определения поперечных отклонений точек стержня получаем краевую задачу

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + a_1^2\,\frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} = 0 \quad \text{при} \quad -\infty < x < 0,\\ &\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + a_2^2\,\frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4} \quad \text{при} \quad 0 < x < +\infty \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} &u_1(0,\,t) = u_2(0,\,t), \quad u_{1x}(0,\,t) = u_{2x}(0,\,t),\\ &E_1 u_{1xx}(0,\,t) = E_2 u_{2xx}(0,\,t),\\ &E_1 u_{1xxx}(0,\,t) = E_2 u_{2xxx}(0,\,t) \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} &u_1(x,\,0) = f(x), \quad u_{1t}(x,\,0) = F(x) \quad \text{при} \quad -\infty < x < 0,\\ &u_2(x,\,0) = f(x), \quad u_{2t}(x,\,0) = F(x) \quad \text{при} \quad 0 < x < +\infty, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$a_1^2 = \frac{E_1 J}{\rho_1 S}, \quad a_2^2 = \frac{E_2 J}{\rho_2 S}.$$

28. Ось Ox и функции $u_1(x,\,t)$ и $u_2(x,\,t)$ выбраны так же, как в предыдущей задаче. Для определения $u_1(x,\,t)$ и $u_2(x,\,t)$ получаем

краевую задачу

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \quad \text{при} \quad -\infty < x < 0, \\ &\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \quad \text{при} \quad 0 < x < +\infty \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad 0 < t < +\infty, \qquad (1)$$

$$u_1(0, t) = u_2(0, t), \quad k_1 \frac{\partial u_1(0, t)}{\partial x} = k_2 \frac{\partial u_2(0, t)}{\partial x} \quad \text{при} \quad 0 < t < +\infty, \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} &u_1(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u_1(x, 0)}{\partial t} = F(x) \quad \text{при} \quad -\infty < x < 0, \\ &u_2(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u_2(x, 0)}{\partial t} = F(x) \quad \text{при} \quad 0 < x < +\infty, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$$a_1^2 = k_1 \frac{p_0^{(1)}}{\rho_0^{(1)}}, \quad a_2^2 = k_2 \frac{p_0^{(2)}}{\rho_0^{(2)}},$$

k_1 и k_2 — показатели адиабаты для первого и второго газов, $p_0^{(1)} = p_0^{(2)}$ и $\rho_0^{(1)}$, $\rho_0^{(2)}$ — давления и плотности первого и второго газов в невозмущенном состоянии.

Указание. Второе из граничных условий получается с помощью соотношений (1′) и (3′) решения задачи 4 из равенства возмущений давления

$$\widetilde{p}^{(1)}(0, t) = \widetilde{p}^{(2)}(0, t),$$

которое в свою очередь получается переходом к пределу из уравнения движения, выражающего второй закон Ньютона для элемента $(-\Delta x, \Delta x)$ газа, в силу равенства невозмущенных давлений $p_0^{(1)} = p_0^{(2)}$.

29. Ось Ox направлена вдоль канала, причем начало координат O помещено в плоскости, где поперечное сечение канала меняется скачком. Пусть ширина и глубина [1] левого полуограниченного канала равны m_1 и h_1, а для правого — равны m_2 и h_2. Тогда для определения продольных смещений частиц жидкости и вертикальных отклонений свободной поверхности жидкости от равновесного состояния получаем краевую задачу

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \xi_1(x, t)}{\partial t^2} = g h_1 \frac{\partial^2 \xi_1(x, t)}{\partial x^2}, \\ &\frac{\partial^2 \eta_1(x, t)}{\partial t^2} = g h_1 \frac{\partial^2 \eta_1(x, t)}{\partial x^2} \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad -\infty < x < 0, \quad 0 < t < +\infty, \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \xi_2(x, t)}{\partial t^2} = g h_2 \frac{\partial^2 \xi_2(x, t)}{\partial x^2}, \\ &\frac{\partial^2 \eta_2(x, t)}{\partial t^2} = g h_2 \frac{\partial^2 \eta_2(x, t)}{\partial x^2} \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad 0 < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \qquad (1')$$

[1] Глубина, отсчитанная от свободной невозмущенной поверхности жидкости.

$$\eta_1(0,\,t)=\eta_2(0,\,t),\quad m_1h_1\xi_{1t}(0,\,t)=m_2h_2\xi_{2t}(0,\,t)\quad\text{при}\quad 0<t<+\infty, \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}&\xi_1(x,\,0)=f(x),\ \xi_{1t}(x,\,0)=F(x),\\&\eta_1(x,\,0)=-h_1f'(x),\ \eta_{1t}(x,\,0)=-h_1F'(x)\end{aligned}\right\}\quad\text{при}\quad -\infty<x<0, \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned}&\xi_2(x,\,0)=f(x),\ \xi_{2t}(x,\,0)=F(x),\\&\eta_2(x,\,0)=-h_2f'(x),\ \eta_{2t}(x,\,0)=-h_2F'(x)\end{aligned}\right\}\quad\text{при}\quad 0<x<+\infty. \tag{3'}$$

Указание. Первое из условий сопряжения (2) следует из предположения о непрерывности давления в жидкости при переходе через поперечное сечение $x=0$, второе же выражает закон сохранения массы. Первое из условий (2) может быть заменено условием

$$h_1\xi_{1x}(0,\,t)=h_2\xi_{2x}(0,\,t) \tag{4}$$

с помощью соотношений

$$\eta_1(x,\,t)=-h_1\xi_{1x}(x,\,t),\quad \eta_2(x,\,t)=-h_2\xi_{2x}(x,\,t). \tag{5}$$

Тогда краевая задача для определения $\xi_1(x,\,t)$ и $\xi_2(x,\,t)$ становится независимой от краевой задачи для определения $\eta_1(x,\,t)$ и $\eta_2(x,\,t)$. Заметим, наконец, что условия сопряжения (2) [или второе из условий (2) и условие (4)] лишь приближенно описывают явление в окрестности поперечного сечения $x=0$, так как оба они базируются на предположении, что уровни поперечных сечений $-\Delta x$ и Δx при малом Δx отличаются мало.

30. Оси координат и характеризующие функции выбраны так же, как в задаче 26. Для определения $u_1(x,\,t)$ и $u_2(x,\,t)$ получаем краевую задачу

$$\frac{\partial^2u_1}{\partial t^2}=a_1^2\frac{\partial^2u_1}{\partial x^2}\quad\text{при}\quad -\infty<x<0,\quad 0<t<+\infty, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2u_2}{\partial t^2}=a_2^2\frac{\partial^2u_2}{\partial x^2}\quad\text{при}\quad 0<x<+\infty,\quad 0<t<+\infty, \tag{1'}$$

$$u_1(0,\,t)=u_2(0,\,t),\ M\frac{\partial^2u_1(0,\,t)}{\partial t^2}=M\frac{\partial^2u_2(0,\,t)}{\partial t^2}=$$

$$=E_2\frac{\partial u_2(0,\,t)}{\partial x}-E_1\frac{\partial u_1(0,\,t)}{\partial x}, \tag{2}$$

$$u_1(x,\,0)=f(x),\quad u_{1t}(x,\,0)=F(x)\quad\text{при}\quad -\infty<x<0, \tag{3}$$

$$u_2(x,\,0)=f(x),\quad u_{2t}(x,\,0)=F(x)\quad\text{при}\quad 0<x<+\infty. \tag{3'}$$

Указание. Второе из условий сопряжения (2) выражает второй закон Ньютона для жесткой прокладки массы M. См. также указание к задаче 26 и решение задачи 32.

31. Ось x направлена вдоль прямолинейного положения равновесия стержня, причем начало координат помещено в плоскости соединения торца полуограниченных стержней [1]. Для определения попереч-

[1] Напомним, что по условию задачи толщина жесткой прокладки между соединенными торцами пренебрежимо мала.

ных отклонений точек стержня от положения равновесия получаем краевую задачу

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + a_1^2 \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} = 0 \quad \text{при} \quad -\infty < x < 0, \\ &\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + a_2^2 \frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4} = 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < +\infty \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} &u_1(0, t) = u_2(0, t); \quad u_{1x}(0, t) = u_{2x}(0, t), \\ &E_1 u_{1xx}(0, t) = E_2 u_{2xx}(0, t)\ ^{1)}, \\ &M u_{1tt}(0, t) = M u_{2tt}(0, t) = \\ &\quad = E_1 J u_{1xxx}(0, t) - E_2 J u_{2xxx}(0, t) \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} &u_1(x, 0) = f(x), \quad u_{1t}(x, 0) = F(x) \quad \text{при} \quad -\infty < x < 0, \\ &u_2(x, 0) = f(x), \quad u_{2t}(x, 0) = F(x) \quad \text{при} \quad 0 < x < \infty, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$a_1^2 = \frac{E_1 J}{\rho_1 S}, \quad a_2^2 = \frac{E_2 J}{\rho_2 S}. \quad (4)$$

32. Ось Ox направлена вдоль стержня, так что его верхний конец имеет абсциссу $x = 0$. Для определения продольного отклонения $u(x, t)$ точек стержня получаем краевую задачу

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad \text{при} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{Q}{g} u_{tt}(l, t) = -ES u_x(l, t) + Q \quad \text{при} \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < l. \quad (3)$$

Решение. Остановимся на выводе второго из граничных условий (2). Составим уравнение, выражающее в проекциях на ось Ox второй закон Ньютона для тела, состоящего из груза Q и элемента $(l - \Delta x, l)$ стержня. Мы получим (рис. 19):

$$\left(\frac{Q}{g} + \rho S \Delta x\right) u_{tt}(x_c, t) = \\ = -ES u_x(l - \Delta x, t) + Q,$$

где x_c — абсцисса (лагранжева) центра масс рассматриваемого тела. Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим из этого уравнения граничное условие

$$\frac{Q}{g} u_{tt}(x_c, t) = -ES u_x(l, t) + Q.$$

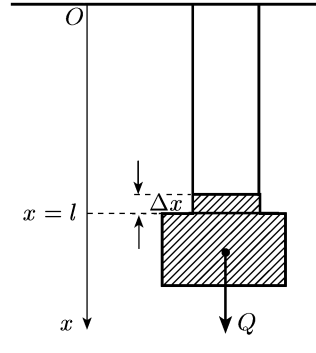


Рис. 19

[1)] Это условие сопряжения выражает равенство изгибающих моментов, вытекающее из предположения о том, что поперечные сечения стержня не вращаются. Более подробно об этом см. [26].

Но так как груз Q считается жестким (недеформируемым), то все его точки получают одинаковые продольные ускорения при продольных колебаниях стержня, поэтому в последнем соотношении можно заменить x_c на l, тогда и получится второе из граничных условий (2).

33. Ось Ox направлена горизонтально и, следовательно, параллельна ненапряженному положению стержня, принятому за положение равновесия. Для определения поперечных отклонений $u(x,\,t)$ точек стержня от их положения равновесия получаем краевую задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2\,\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(0,\,t) = u_x(0,\,t) = 0, \quad u_{xx}(l,\,t) = 0;$$

$$\frac{Q}{g}\,u_{tt}(l,\,t) = EJu_{xxx}(l,\,t) \quad \text{при} \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\,0) = f(x), \quad u_t(x,\,0) = F(x) \quad \text{при} \quad 0 < x < l.$$

Указание. Равенство $u_{xx}(l,\,t) = 0$ выражает равенство нулю изгибающего момента, вытекающее из предположения о том, что поперечные сечения стержня не вращаются[1)] (см. вывод граничных условий в решении задачи 9). Последнее же из граничных условий (2) выражает второй закон Ньютона в проекциях на ось Ou для груза Q, прикрепленного на конце стержня.

34. Ось Ox направлена вдоль стержня, ее начало находится на оси вращения и совпадает с началом стержня. Для определения продольных отклонений $u(x,\,t)$ точек стержня получаем краевую задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \omega^2(x + u) \quad \text{при} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

где $a^2 = \dfrac{E}{\rho}$, E — модуль упругости, а ρ — плотность массы стержня,

$$u(0,\,t) = 0, \quad \frac{Q}{g}\,u_{tt}(l,\,t) = \frac{Q}{g}\,\omega^2[l + u(l,\,t)] - ES u_x(l,\,t)$$
$$\text{при} \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\,0) = f(x), \quad u_t(x,\,0) = F(x) \quad \text{при} \quad 0 < x < l. \tag{3}$$

35. Ось Ox выбрана так же, как и в предыдущей задаче. Для определения продольных отклонений точек стержня получаем краевую задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \omega^2(x + u) + g\cos\left(\int\limits_0^t \omega\,dt + \varphi_0\right)$$
$$\text{при} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

где a^2 имеет такое же значение, как в предыдущей задаче, а φ_0 — угол между стержнем и вертикальным направлением вниз в момент времени $t = 0$,

[1)] См. также сноску к задаче 8.

$$u(0,\,t)=0,\quad \frac{Q}{g}\,u_{tt}(l,\,t)=\frac{Q}{g}\,\omega^2[l+u(l,\,t)]+Q\cos\left(\int\limits_0^t\omega\,dt+\varphi_0\right)-$$

$$-ES u_x(l,\,t)\quad\text{при}\quad 0<t<+\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\,0)=f(x),\quad u_t(x,\,0)=F(x)\quad\text{при}\quad 0<x<l. \tag{3}$$

36. Ось Ox направлена вдоль стержня; шкив с моментом инерции k_3 имеет абсциссу $x=0$, шкив с моментом инерции k_4, вставленный между двумя цилиндрами, имеет абсциссу $x=l$, наконец, шкив с моментом k_5 имеет абсциссу $x=2l$. Для определения углов поворота поперечных сечений цилиндров получаем краевую задачу

$$\frac{\partial^2\theta_1}{\partial t^2}=a_1^2\,\frac{\partial^2\theta_1}{\partial x^2}\quad\text{при}\quad 0<x<l,\quad 0<t<+\infty, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2\theta_2}{\partial t^2}=a_2^2\,\frac{\partial^2\theta_2}{\partial x^2}\quad\text{при}\quad l<x<2l,\quad 0<t<+\infty, \tag{1'}$$

$$\left.\begin{aligned}
&k_3\,\frac{\partial^2\theta_1(0,\,t)}{\partial t^2}=G_1J_1\,\frac{\partial\theta_1(0,\,t)}{\partial x},\\
&k_4\,\frac{\partial^2\theta_1(l,\,t)}{\partial t^2}=k_4\,\frac{\partial^2\theta_2(l,\,t)}{\partial t^2}=\\
&=G_2J_2\,\frac{\partial\theta_2(l,\,t)}{\partial x}-G_1J_1\,\frac{\partial\theta_1(l,\,t)}{\partial x},\\
&k_5\,\frac{\partial^2\theta_2(2l,\,t)}{\partial t^2}=G_2J_2\,\frac{\partial\theta_2(2l,\,t)}{\partial x}
\end{aligned}\right\}\quad\text{при}\quad 0<t<+\infty, \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\theta_1(x,\,0)=f(x),\quad \theta_{1t}(x,\,0)=F(x)\quad\text{при}\quad 0<x<l,\\
&\theta_2(x,\,0)=f(x),\quad \theta_{2t}(x,\,0)=F(x)\quad\text{при}\quad l<x<2l,
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$a_1^2=\frac{G_1J_1}{k_1},\quad a_2^2=\frac{G_2J_2}{k_2}, \tag{3'}$$

где G_1, J_1, k_1 и G_2, J_2, k_2 — модуль сдвига, «геометрический» полярный момент инерции поперечного сечения и момент инерции единицы длины для первого и соответственно для второго цилиндров [1]).

37. Ось Ox совмещена с положением равновесия струны. Для определения поперечных отклонений $u(x,\,l)$ точек струны получаем краевую задачу

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2u_1}{\partial t^2}=a^2\,\frac{\partial^2u_1}{\partial x^2}\quad\text{при}\quad -\infty<x<0,\\
&\frac{\partial^2u_2}{\partial t^2}=a^2\,\frac{\partial^2u_2}{\partial x^2}\quad\text{при}\quad 0<x<+\infty
\end{aligned}\right\}\quad\text{при}\quad 0<t<+\infty, \tag{1}$$

$$u_1(0,\,t)=u_2(0,t),\quad T_0u_{2x}(0,\,t)-T_0u_{1x}(0,\,t)+F(t)=0$$

$$\text{при}\quad 0<t<+\infty, \tag{2}$$

$$u_1(x,\,0)=f(x),\quad u_{1t}(x,\,0)=F(x)\quad\text{при}\quad -\infty<x<0, \tag{3}$$

$$u_2(x,\,0)=f(x),\quad u_{2t}(x,\,0)=F(x)\quad\text{при}\quad 0<x<+\infty. \tag{3'}$$

[1]) Ср. с ответом к задаче 3.

Если точка приложения силы перемещается вдоль струны по закону

$$x = \varphi(t) \quad \text{при} \quad 0 < t < +\infty, \quad \varphi(0) = 0, \tag{4}$$

то условия сопряжения принимают вид

$$u_1[\varphi(t),\, t] = u_2[\varphi(t),\, t], \quad T_0 u_{2x}[\varphi(t),\, t] - T_0 u_{1x}[\varphi(t),\, t] + F(t) = 0$$
$$\text{при} \quad 0 < t < +\infty.$$

38. Ось Ox располагается, как в предыдущей задаче:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} = 0 \quad \text{при} \quad -\infty < x < 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4} = 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1'}$$

$$\left.\begin{aligned} &u_1(0,\, t) = u_2(0,\, t), \quad u_{1x}(0,\, t) = u_{2x}(0,\, t), \quad u_{1xx}(0,\, t) = u_{2xx}(0,\, t), \\ &EJu_{1xxx}(0,\, t) - EJu_{2xxx}(0,\, t) + F(t) = 0 \quad \text{при} \quad 0 < t < +\infty, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$u_1(x,\, 0) = f(x), \quad u_{1t}(x,\, 0) = F(x) \quad \text{при} \quad -\infty < x < 0, \tag{3}$$

$$u_2(x,\, 0) = f(x), \quad u_{2t}(x,\, 0) = F(x) \quad \text{при} \quad 0 < x < +\infty. \tag{3'}$$

Если точка приложения силы перемещается вдоль стержня по закону

$$x = \varphi(t) \quad \text{при} \quad 0 < t < +\infty, \quad \varphi(0) = 0, \tag{4}$$

то условия сопряжения (2) принимают вид

$$u_1[\varphi(t),\, t] = u_2[\varphi(t),\, t], \quad u_{1x}[\varphi(t),\, t] = u_{2x}[\varphi(t),\, t],$$
$$u_{1xx}[\varphi(t),\, t] = u_{2xx}[\varphi(t),\, t],$$
$$EJu_{1xxx}[\varphi(t),\, t] - EJu_{2xxx}[\varphi(t),\, t] + F(t) = 0 \quad \text{при} \quad 0 < t < +\infty.$$

39. Ось Ox направлена вдоль трубки, причем начало ее помещено в начале трубки, где поставлен поршень. Для определения продольных отклонений $u(x, t)$ частиц газа получаем краевую задачу

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad \text{при} \quad 0 < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$Mu_{tt}(0,\, t) = -Skp_0 u_x(0,\, t) - k^* u_t(0,\, t) - k^{**} u(0,\, t), \tag{2}$$

$$u(x,\, 0) = f(x), \quad u_t(x,\, 0) = F(x) \quad \text{при} \quad 0 < x < +\infty. \tag{3}$$

Указание. Граничное условие (2) выражает второй закон Ньютона для поршня [1]).

40. Ось Ox совмещена с положением равновесия струны, шарик массы M имеет абсциссу $x = 0$. Для определения поперечных отклонений $u(x,\, t)$ точек струны от положения равновесия получаем краевую задачу

$$u_{1tt} = a^2 u_{1xx} \quad \text{при} \quad -\infty < x < 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u_{2tt} = a^2 u_{2xx} \quad \text{при} \quad 0 < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1'}$$

[1]) Ср. с рассуждениями при выводе третьего граничного условия в решении задачи 4.

$$u_1(0,\,t)=u_2(0,\,t),\quad Mu_{1tt}(0,\,t)=Mu_{2tt}(0,\,t)=T_0u_{2x}(0,\,t)-$$
$$-T_0u_{1x}(0,\,t)-ku_1(0,\,t)=T_0u_{2x}(0,\,t)-T_0u_{1x}(0,\,t)-ku_2(0,\,t), \qquad (2)$$
$$u_1(x,0)=f(x),\quad u_{1t}(x,\,0)=F(x)\quad\text{при}\quad -\infty<x<0, \qquad (3)$$
$$u_2(x,0)=f(x),\quad u_{2t}(x,\,0)=F(x)\quad\text{при}\quad 0<x<+\infty. \qquad (3')$$

Если шарик испытывает сопротивление, пропорциональное скорости, то вместо второго из условий сопряжения (2) получается условие сопряжения

$$Mu_{1tt}(0,\,t)=Mu_{2tt}(0,\,t)=T_0u_{2x}(0,\,t)-T_0u_{1x}(0,\,t)-ku_1(0,\,t)-$$
$$-k^*u_{1t}(0,\,t)=T_0u_{2x}(0,\,t)-T_0u_{1x}(0,\,t)-ku_2(0,\,t)-k^*u_{2t}(0,\,t)$$
$$\text{при}\quad 0<t<+\infty.$$

41. В качестве координаты x точки на проводе взято ее расстояние вдоль провода от конца, заземленного через сосредоточенное сопротивление. Для определения напряжения $v(x,\,t)$ и силы тока $i(x,\,t)$ в проводе получаем краевую задачу

$$v_x+Li_t=0,\quad i_x+Cv_t=0\quad\text{при}\quad 0<x<l,\quad 0<t<+\infty, \qquad (1)$$

$$-v(0,\,t)=R_0i(0,\,t),\quad C_0v_t(l,\,t)=i(l,\,t)\quad\text{при}\quad 0<t<+\infty, \qquad (2)$$
$$v(x,\,0)=f(x),\quad i(x,\,0)=\varphi(x)\quad\text{при}\quad 0<x<l \qquad (3)$$

или

$$v_{tt}=a^2v_{xx}\quad\text{при}\quad 0<x<l,\quad 0<t<+\infty, \qquad (1')$$

$$R_0v_x(0,\,t)=Lv_t(0,\,t),\quad LC_0v_{tt}(l,\,t)=-v_x(l,\,t)\quad\text{при}\quad 0<t<+\infty, \qquad (2')$$
$$v(x,\,0)=f(x),\quad v_t(x,\,0)=-\frac{1}{C}\,\varphi'(x)\quad\text{при}\quad 0<x<l \qquad (3')$$

и

$$i_{tt}=a^2i_{xx}\quad\text{при}\quad 0<x<l,\quad 0<t<+\infty, \qquad (1'')$$

$$i_x(0,\,t)=CR_0i_t(0,\,t),\quad C_0i_x(l,\,t)+Ci(l,\,t)=0\ \text{при}\quad 0<t<+\infty, \qquad (2'')$$
$$i(x,\,0)=\varphi(x),\quad i_t(x,\,0)=-\frac{1}{L}\,f'(x)\quad\text{при}\quad 0<x<l, \qquad (3'')$$
$$a^2=\frac{1}{CL}.$$

Указание. Дифференциальные уравнения (1) получаются из дифференциальных уравнений (1) и (2) ответа к задаче 19 при $R=G=0$. Граничные условия (2) получаются из соотношения

$$\Delta v=\widetilde{R}_0i+\widetilde{L}_0\frac{di}{dt}+\frac{1}{\widetilde{C}_0}\int i\,dt, \qquad (4)$$

с помощью которого определяется падение напряжения при переходе через последовательно включенные сосредоточенные сопротивление $\widetilde{R}_0$, самоиндукцию $\widetilde{L}_0$ и емкость $\widetilde{C}_0$. Так, например, для конца $x=0$ провода имеем

$$0-v(0,\,t)=R_0i(0,\,t)\quad\text{при}\quad 0<t<+\infty, \qquad (5)$$

где $0 - v(0,\,t)$ означает разность потенциалов земли и конца провода (потенциал земли принимается равным нулю).

Уравнения (1′) и (1″) получаются из уравнений (1) исключением соответственно функций $i(x,\,t)$ и $v(x,\,t)$. Граничные условия (2′) и (2″) получаются из граничных условий (2) с помощью уравнений (1). Начальные условия (3′) и (3″) получаются из начальных условий (3) с помощью уравнений (1).

42. В качестве координаты x точки на проводе взято ее расстояние вдоль провода от конца, заземленного через сосредоточенную самоиндукцию $L_0^{(1)}$. Для определения $v(x,\,t)$ и $i(x,\,t)$ получаем краевую задачу

$$v_x + Li_t = 0, \quad i_x + Cv_t = 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$-v(0,\,t) = L_0^{(1)} i_t(0,\,t), \quad v(l,\,t) - E(t) = L_0^{(2)} i_t(l,\,t) \quad \text{при} \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$v(x,\,0) = f(x), \quad i(x,\,0) = \varphi(x) \quad \text{при} \quad 0 < x < l \tag{3}$$

или

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} \quad \text{при} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1′}$$

$$L_0^{(1)} v_x(0,\,t) - Lv(0,\,t) = 0, \quad L_0^{(2)} v_x(l,\,t) + Lv(l,\,t) = LE(t) \quad \text{при} \quad 0 < t < +\infty, \tag{2′}$$

$$v(x,\,0) = f(x), \quad v_t(x,0) = -\frac{1}{C}\,\varphi'(x) \quad \text{при} \quad 0 < x < l, \tag{3′}$$

$$i_{tt} = a^2 i_{xx} \quad \text{при} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1″}$$

$$CL_0^{(1)} i_{tt}(0,\,t) = i_x(0,\,t), \quad CL_0^{(2)} i_{tt}(l,\,t) + i_x(l,\,t) = -CE'(t) \quad \text{при} \quad 0 < t < +\infty, \tag{2″}$$

$$i(x,\,0) = \varphi(x), \quad i_t(x,0) = -\frac{1}{L}\,f'(x) \quad \text{при} \quad 0 < x < l. \tag{3″}$$

Указание. См. указание к задаче 41.

43. В качестве координаты x точки на проводе взято расстояние вдоль провода от одного из концов провода до этой точки. Для определения $v(x,\,t)$ и $i(x,\,t)$ получаем краевую задачу

$$v_x + Li_t + Ri = 0, \quad i_x + Gv_t + Gv = 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$-v(0,\,t) = R_0^{(1)} i(0,\,t), \quad v(l,\,t) = R_0^{(2)} i(l,\,t) \quad \text{при} \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$v(x,\,0) = f(x), \quad i(x,\,0) = \varphi(x) \quad \text{при} \quad 0 < x < l \tag{3}$$

или

$$v_{xx} = CLv_{tt} + (CR + GL)v_t + GRv \quad \text{при} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1′}$$

$$\left.\begin{aligned} &v_x(0,\,t) - \frac{L}{R_0^{(1)}}\,v_t(0,\,t) - \frac{R}{R_0^{(1)}}\,v(0,\,t) = 0, \\ &v_x(l,\,t) + \frac{L}{R_0^{(2)}}\,v_t(l,\,t) + \frac{R}{R_0^{(2)}}\,v(l,\,t) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad 0 < t < +\infty, \tag{2′}$$

$$v(x,\,0)=f(x),\quad v_t(x,\,0)=\frac{-Gf(x)-\varphi'(x)}{C}\quad\text{при}\quad 0<x<l\qquad(3')$$

и

$$i_{xx}=CLi_{tt}+(CR+GL)i_t+GRi\quad\text{при}\quad 0<x<l,\quad 0<t<+\infty,\qquad(1'')$$

$$\left.\begin{aligned}&i_x(0,\,t)-CR_0^{(1)}i_t(0,\,t)-GR_0^{(1)}i(0,\,t)=0,\\&i_x(l,\,t)+CR_0^{(1)}i_t(l,\,t)+GR_0^{(2)}i(l,\,t)=0\end{aligned}\right\}\quad\text{при}\quad 0<t<+\infty,\qquad(2'')$$

$$i(x,\,0)=\varphi(x),\quad i_t(x,\,0)=\frac{-R\varphi(x)-f'(x)}{L}\quad\text{при}\quad 0<x<l.\qquad(3'')$$

44. Система координат выбрана так же, как в предыдущей задаче. Для определения $v(x,\,t)$ и $i(x,\,t)$ получаем краевую задачу

$$v_x+Li_t+Ri=0,\quad i_x+Cv_t+Gv=0\quad\text{при}\quad 0<x<l,\quad 0<t<+\infty,\qquad(1)$$

$$\left.\begin{aligned}-v(0,\,t)&=L_0^{(1)}i_t(0,\,t)+R_0^{(1)}i(0,\,t),\\v(l,\,t)&=L_0^{(2)}i_t(l,\,t)+R_0^{(2)}i(l,\,t)\end{aligned}\right\}\quad\text{при}\quad 0<t<+\infty,\qquad(2)$$

$$v(x,\,0)=f(x),\quad i(x,\,0)=\varphi(x)\quad\text{при}\quad 0<x<l.\qquad(3)$$

Для определения $v(x,\,t)$ при выполнении условий $R_0^{(1)}L-RL_0^{(1)}=0$ и $R_0^{(2)}L-RL_0^{(2)}=0$ получаем краевую задачу

$$v_{xx}=CLv_{tt}+(CR+GL)v_t+GRv\ \text{ при }\ 0<x<l,\quad 0<t<+\infty,\qquad(1')$$

$$\left.\begin{aligned}&L_0^{(1)}v_x(0,\,t)-Lv(0,\,t)=0,\\&L_0^{(2)}v_x(l,\,t)+Lv(l,\,t)=0\end{aligned}\right\}\quad\text{при}\quad 0<t<+\infty,\qquad(2')$$

$$v(x,\,0)=f(x),\quad v_t(x,\,0)=\frac{-Gf(x)-\varphi'(x)}{C}\quad\text{при}\quad 0<x<l.\qquad(3')$$

45. Начало координат O помещено в месте соединения полуограниченных проводов. В качестве координаты x точки на проводе принимается расстояние вдоль провода от начала координат O до этой точки.

Для определения $v(x,\,t)$ и $i(x,\,t)$ получаем краевую задачу

$$v_{1x}+L_1i_{1t}+R_1i_1=0,\quad i_{1x}+C_1v_{1t}+G_1v_1=0\quad\text{при}\quad -\infty<x<0,\quad 0<t<+\infty,$$

$$v_{2x}+L_2i_{2t}+R_2i_2=0,\quad i_{2x}+G_2v_{2t}+G_2v_2=0\quad\text{при}\quad 0<x<+\infty,\quad 0<t<+\infty,$$

$$\left.\begin{aligned}i_1(0,\,t)&=i_2(0,\,t),\\v_{2t}(0,\,t)-v_{1t}(0,\,t)&=\frac{1}{C_0}\,i_1(0,\,t)=\frac{1}{C_0}\,i_2(0,\,t)\end{aligned}\right\}\quad\text{при}\quad 0<t<+\infty,$$

$$v_1(x,\,0)=f(x),\quad i_1(x,\,0)=\varphi(x)\quad\text{при}\quad -\infty<x<0,$$
$$v_2(x,\,0)=f(x),\quad i_2(x,\,0)=\varphi(x)\quad\text{при}\quad 0<x<+\infty.$$

Для определения силы тока в предположении, что $G_1 = G_2 = 0$, получаем краевую задачу

$$i_{1xx} = C_1L_1i_{1tt} + C_1R_1i_{1t} \quad \text{при} \quad -\infty < x < 0, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$i_{2xx} = C_2L_2i_{2tt} + C_2R_2i_{2t} \quad \text{при} \quad 0 < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$i_1(0, t) = i_2(0, t), \quad \frac{1}{C_1}\, i_{1x}(0, t) - \frac{1}{C_2}\, i_{2x}(0, t) = \frac{1}{C_0}\, i_1(0, t) \quad \text{при} \quad 0 < t < +\infty,$$

$$i_1(x, 0) = \varphi(x), \quad i_{1t}(x, 0) = \frac{-R_1\varphi(x) - f'(x)}{L_1} \quad \text{при} \quad -\infty < x < 0,$$
$$i_2(x, 0) = \varphi(x), \quad i_{2t}(x, 0) = \frac{-R_2\varphi(x) - f'(x)}{L_2} \quad \text{при} \quad 0 < x < +\infty.$$

46. Система координат и дифференциальные уравнения такие же, как в задаче 45. Условия же сопряжения имеют вид

$$i_1(0, t) = i_2(0, t), \quad v_2(0, t) - v_1(0, t) = R_0i_1(0, t) = R_0i_2(0, t) \quad \text{при} \quad 0 < t < +\infty$$

и, если утечка существует,

$$i_1(0, t) = i_2(0, t), \quad \frac{1}{C_1}\, i_{1x}(0, t) - \frac{1}{C_2}\, i_{2x}(0, t) = R_0i_{1t}(0, t).$$

47. Система координат выбрана, как обычно. Для определения $v(x, t)$ и $i(x, t)$ получаем краевую задачу

$$v_x + Li_t + Ri = 0, \quad i_x + Cv_t + Cv = 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} -\frac{v_t(0, t)}{R_0} - \frac{v(0, t)}{L_0^{(1)}} &= i_t(0, t), \\ C_0v_{tt}(l, t) + \frac{v(l, t)}{L_0^{(2)}} &= i_t(l, t) \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$v(x, 0) = f(x), \quad i(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{при} \quad 0 < x < l. \tag{3}$$

48. В качестве координаты x точки на проводе возьмем расстояние от середины O провода до рассматриваемой точки, отсчитываемое вдоль провода, на котором установлено положительное и отрицательное направления движения. Система телеграфных уравнений и начальные условия записываются, как обычно. Условия же сопряжения имеют вид

$$v(-l, t) - v(l, t) = L_0i_t(-l, t) = L_0i_t(l, t), \tag{1}$$

$$v(-l, t) - v(l, t) = R_0i(-l, t) = R_0i(l, t), \tag{2}$$

$$v_t(-l, t) - v_t(l, t) = \frac{1}{C_0}\, i(l, t) = \frac{1}{C_0}\, i(-l, t). \tag{3}$$

5. Подобие краевых задач. Вместо ведения к решению задач этого пункта дается подробное решение задачи 49, которой этой пункт начинается.

49. Если за функцию, характеризующую продольные колебания стержня $0 \leqslant x'' \leqslant l''$ принять $\overline{p}(x'', t'') = -p(x'', t'')$, где $p(x'', t'')$ — напряжение в поперечном сечении, отмеченном абсциссой x'' (определяемое, как в задаче I настоящего параграфа), то задача (II) о продольных колебаниях стержня, один конец которого ($x'' = 0$) свободен, а другой ($x'' = l''$) закреплен неподвижно, формулируется следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\overline{p}_{t''t''} = a''^2 \overline{p}_{x''x''}, \quad 0 < x'' < l'', \quad 0 < t'' < +\infty, \quad a''^2 = \frac{E}{\rho}, \\ &\overline{p}(0, t'') = \overline{p}_{x''}(l'', t'') = 0, \quad 0 < t'' < +\infty, \\ &\overline{p}(x'', 0) = \varphi_p(x''), \quad \overline{p}_{t''}(x'', 0) = \psi_p(x''), \quad 0 < x'' < l''. \end{aligned}\right\} \quad \text{(II)}$$

Если за функцию, характеризующую электрические колебания в проводе $0 \leqslant x' \leqslant l'$ с пренебрежимо малой утечкой и сопротивлением, принять электрическое напряжение $v(x', t')$, то задача (I) об электрических колебаниях в проводе, один конец которого ($x' = 0$) заземлен, а другой ($x' = l'$) изолирован, формулируется следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &v_{t't'} = a'^2 v_{x'x'}, \quad 0 < x' < l', \quad 0 < t' < +\infty, \\ &v(0, t') = v_{x'}(l', t') = 0, \quad 0 < t' < +\infty, \\ &v(x', 0) = \varphi_v(x'), \quad v_{t'}(x', 0) = \psi_v(x'), \quad 0 < x' < l'. \end{aligned}\right\} \quad \text{(I)}$$

Задача (I) аналогична задаче (II). Для того чтобы задача (I) была подобна задаче (II) с заданными коэффициентами подобия k_x, k_t, k_u, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$k_x = \frac{l'}{l''}, \tag{1}$$

$$a'^2 = \frac{k_x^2}{k_t^2}\, a''^2, \tag{2}$$

$$\varphi_v(x') = k_u \varphi_p(x''), \quad \psi_v(x') = \frac{k_u}{k_t}\, \psi_p(x'') \quad \text{при} \quad x' = k_x x'', \quad 0 < x'' < l''. \tag{3}$$

Р е ш е н и е. Докажем необходимость и достаточность условий (1), (2) и (3).

Сначала докажем н е о б х о д и м о с т ь. Пусть

$$v(x', t') = k_u \overline{p}(x'', t'') \quad \text{при} \quad x' = k_x x'', \quad t' = k_t t'',$$

причем (x', t') пробегает $D_I[0 < x' < l',\ 0 < t' < +\infty]$, когда (x'', t'') пробегает $D_{II}[0 < x'' < l'',\ 0 < t'' < +\infty]$. Тогда сразу же получаем, что $l' = k_x l''$, т. е. условие (1) выполнено. Из равенства $v(x', t') = k_u \overline{p}(x'', t'')$, выполняя дифференцирование по t, получим $v_{t'}(x', t') =$

$= \dfrac{k_u}{k_t}\overline{p}_{t''}(x'',\, t'')$, поэтому при $t' = t'' = 0$ будут выполняться равенства

$$v(x',\, 0) = k_u\overline{p}(x'', 0), \quad v_{t'}(x',\, 0) = \frac{k_u}{k_t}\,\overline{p}_{t''}(x'',\, 0), \quad 0 < x'' < l'', \qquad (4)$$

т. е. условие (3) будет выполнено.

Дифференцируя равенство

$$v(x', t') = k_u\overline{p}(x'', t'')$$

по x'' и t'' и используя равенства $x' = k_x x''$, $t' = k_t t''$, получим

$$k_t^2\,\frac{\partial^2 v}{\partial t'^2} = k_u\,\frac{\partial^2\overline{p}}{\partial t''^2}, \quad k_x^2\,\frac{\partial^2 v}{\partial x'^2} = k_u\,\frac{\partial^2\overline{p}}{\partial x''^2}.$$

Так как функция $\overline{p}(x'',\, t'')$ должна удовлетворять уравнению $\dfrac{\partial^2\overline{p}}{\partial t''^2} = a''^2\,\dfrac{\partial^2\overline{p}}{\partial x''^2}$, то, следовательно, должно выполняться равенство

$$k_t^2\,\frac{\partial^2 v}{\partial t'^2} - k_x^2 a''^2\,\frac{\partial^2 v}{\partial x'^2} = k_u\left(\frac{\partial^2\overline{p}}{\partial t''^2} - a''^2\,\frac{\partial^2\overline{p}}{\partial x''^2}\right) = 0.$$

Следовательно, $v(x',\, t')$ является не только решением уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t'^2} = a'^2\,\frac{\partial^2 v}{\partial x'^2}, \qquad (5)$$

но и решением уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t'^2} = \frac{k_x^2}{k_t^2}\,a''^2\,\frac{\partial^2 v}{\partial x'^2}. \qquad (6)$$

Вычитывая (6) из (5), получим

$$\left(a'^2 - \frac{k_x^2}{k_t^2}\,a''^2\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x'^2} \equiv 0,$$

что возможно лишь при условии

$$a'^2 - \frac{k_x^2}{k_t^2}\,a''^2 = 0, \qquad (7)$$

ибо при условии

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x'^2} = 0 \qquad (8)$$

с помощью уравнения и граничных условий (I) получаем, что $v \equiv 0$, но это невозможно при $\varphi_v(x')$ и $\psi_v(x')$, отличных от тождественного нуля. Следовательно, (8) невозможно, значит, имеет место (7), т. е. условие (2) выполнено.

Рассмотрим теперь д о с т а т о ч н о с т ь. Перейдем к безразмерным величинам ξ, τ, U в краевых задачах (I) и (II) с помощью формул

$x' = l'\xi$, $t' = t'_0\tau$, $v = v_0 U(\xi,\, \tau)$, $x'' = l''\xi$, $t'' = t''_0\tau$, $\overline{p} = \overline{p}_0 U(\xi,\, \tau)$,

где константы t'_0 и t''_0 имеют размерность времени, а v_0 и $\overline{p}_0$ соответственно размерность v и p, причем эти константы выбраны так, что

$$\frac{t'_0}{t''_0} = k_t, \quad \frac{v_0}{\overline{p}_0} = k_u. \qquad (9)$$

Напомним, что, кроме того, выполняется соотношение

$$k_x = \frac{l'}{l''}. \tag{1}$$

Краевые задачи (I) и (II) принимают соответственно вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = \frac{t_0'^{\,2}}{l'^2}\, a'^2\, \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}, \quad 0 < \xi < 1, \quad 0 < \tau < +\infty, \\ &U(0,\tau) = 0, \quad U_\xi(1,\tau) = 0, \quad 0 < \tau < +\infty, \\ &U(\xi,0) = \frac{1}{v_0}\,\varphi_v(l'\xi), \quad U_\tau(\xi,0) = \frac{t_0'}{v_0}\,\psi_v(l'\xi), \quad 0 < \xi < 1, \end{aligned}\right\} \tag{I'}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = \frac{t_0''^{\,2}}{l''^2}\, a''^2\, \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}, \quad 0 < \xi < 1, \quad 0 < \tau < +\infty, \\ &U(0,\tau) = 0, \quad U_\xi(1,\tau) = 0, \quad 0 < \tau < +\infty, \\ &U(\xi,0) = \frac{1}{\overline{p}_0}\,\varphi_p(l''\xi), \quad U_\tau(\xi,0) = \frac{t_0''}{\overline{p}_0}\,\psi_p(l''\xi), \quad 0 < \xi < 1. \end{aligned}\right\} \tag{II'}$$

Из (1), (2) и (9) следует, что

$$\frac{t_0'^{\,2}}{t'^2}\, a'^2 = \frac{t_0''^{\,2}}{t''^2}\, a''^2.$$

Из (1), (9) и (3) следует, что

$$\frac{1}{v_0}\,\varphi_v(l'\xi) = \frac{1}{\overline{p}_0}\,\varphi_p(l''\xi), \quad \frac{t_0'}{v_0}\,\psi_v(l'\xi) = \frac{t_0''}{\overline{p}_0}\,\psi_p(l''\xi), \quad 0 < \xi < 1.$$

Таким образом, у задач (I') и (II') тождественно совпадают уравнения, начальные и граничные условия, следовательно (в силу теоремы единственности), совпадают и их решения.

Таким образом,

$$U(\xi,\tau) = \frac{1}{v_0}\,v(x',t') = \frac{1}{\overline{p}_0}\,\overline{p}(x'',t'') \quad \text{при} \quad x' = k_x x'', \quad t' = k_t t'',$$

т. е.

$$v(x',t') = k_u \overline{p}(x'',t'') \quad \text{при} \quad x' = k_x x'', \quad t' = k_t t'',$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Можно было бы иначе выбрать функции: 1) характеризующую продольные колебания упругого стержня; 2) характеризующую электрические колебания в проводе. Например, взять продольное смещение поперечных сечений стержня и силу электрического тока в проводе или только одну из этих функций выбрать иначе, а другую оставить прежней, т. е. один процесс можно по-разному моделировать другим, выбирая наиболее подходящие аналогии.

50. За функцию, характеризующую продольные колебания стержня $0 \leqslant x'' \leqslant l''$, принято продольное смещение поперечных сечений стержня $u(x'', t'')$.

а) Если один конец стержня ($x'' = 0$) закреплен жестко, а другой ($x'' = l''$) закреплен упруго, то для определения $u(x'', t'')$ получаем

краевую задачу

$$\left.\begin{aligned} &u_{t''t''} = a''^2 u_{x''x''}, \quad 0 < x'' < l'', \quad 0 < t'' < +\infty, \quad a''^2 = \frac{E}{\rho}, \\ &u(0,\, t'') = 0, \quad E u_{x''}(l'',\, t'') + k u(l'',\, t'') = 0, \quad 0 < t'' < +\infty, \\ &u(x'',\, 0) = \varphi_u(x''), \quad u_{t''}(x'',\, 0) = \psi_u(x''), \quad 0 < x'' < l''. \end{aligned}\right\} \quad \text{(IIа)}$$

Если за функцию, характеризующую электрические колебания в проводе $0 \leqslant x' \leqslant l'$ с пренебрежимо малым сопротивлением и утечкой, принять электрическое напряжение и если один конец провода ($x' = 0$) заземлен непосредственно, а другой ($x' = l'$) — через сосредоточенную самоиндукцию, то для определения напряжения $v(x',\, t')$ в проводе получается краевая задача

$$v_{t't'} = a'^2 v_{x'x'}, \quad 0 < x' < l', \quad 0 < t' < +\infty, \quad a'^2 = \frac{1}{CL},$$

где C — емкость единицы длины провода и L — самоиндукция единицы длины провода

$$\left.\begin{aligned} &v(0,\, t') = 0, \quad v_{x'}(l',\, t') + \frac{L}{L_0}\, v(l',\, t') = 0, \quad 0 < t' < +\infty, \\ &v(x',\, 0) = \varphi_v(x'), \quad v_{t'}(x',\, 0) = \psi_v(x'), \quad 0 < x' < l'. \end{aligned}\right\} \quad \text{(Iа)}$$

Задача (Iа) аналогична задаче (IIа). Для того чтобы задача (Iа) была подобна задаче (IIа) с коэффициентами подобия k_x, k_t, k_u, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$k_x = \frac{l'}{l''}, \quad (1)$$

$$a'^2 = \frac{k_x^2}{k_t^2}\, a''^2, \quad (2а)$$

$$k_x \frac{L}{L_0} = \frac{k}{E}, \quad (3а)$$

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_v(x') = k_u \varphi_u(x''), \\ &\psi_v(x') = \frac{k_u}{k_t}\, \psi_u(x''), \\ &x' = k_x x'', \\ &0 \leqslant x'' < l''. \end{aligned}\right\} \quad (4а)$$

б) Если конец стержня ($x'' = 0$) свободен, а другой ($x'' = l''$) испытывает сопротивление, пропорциональное скорости, то краевая задача для определения продольных смещений $u(x'',\, t'')$ точек стержня имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &u_{t''t''} = a''^2 u_{x''x''}, \quad 0 < x'' < l'', \quad 0 < t'' < +\infty, \\ &u_{x''}(0,\, t'') = 0, \quad E u_{x''}(l'',\, t'') + r u_{t''}(l'',\, t'') = 0, \quad 0 < t'' < +\infty, \\ &u(x'',\, 0) = \varphi_u(x''), \quad u_{t''}(x'',\, 0) = \psi_u(x''), \quad 0 < x'' < l''. \end{aligned}\right\} \quad \text{(IIб)}$$

Здесь r означает коэффициент сопротивления трения. Если один конец провода ($x' = 0$) заземлен непосредственно, а другой ($x' = l'$) заземлен через сосредоточенное сопротивление R_0, то, предполагая, что

сопротивление и утечка провода равны нулю, для определения силы тока $i(x', t')$ получим краевую задачу

$$\left.\begin{aligned} &i_{t't'} = a'^2 i_{x'x'}, \quad a'^2 = \frac{1}{CL}, \quad 0 < x' < l', \quad 0 < t' < +\infty, \\ &i_{x'}(0,\, t') = 0, \quad i_{x'}(l',\, t') + CR_0\, i_{t'}(l',\, t') = 0, \quad 0 < t' < +\infty, \\ &i(x',\, 0) = \varphi_i(x'), \quad i_{t'}(x',\, 0) = \psi_i(x'), \quad 0 < x' < l'. \end{aligned}\right\} \tag{Iб}$$

Задача (Iб) аналогична задаче (IIб). Для того чтобы задача (Iб) была подобна задаче (IIб) с коэффициентами подобия k_x, k_t, k_u, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$k_x = \frac{l'}{l''}, \tag{1б}$$

$$a'^2 = \frac{k_x^2}{k_t^2}\, a''^2, \tag{2б}$$

$$CR_0\, \frac{k_x}{k_t} = \frac{r}{E}, \tag{3б}$$

$$\varphi_i(x') = k_u \varphi_u(x''), \quad \psi_i(x') = \frac{k_u}{k_t}\, \psi_u(x''), \quad x' = k_x x'', \quad 0 < x'' < l''. \tag{4б}$$

в) Если один конец стержня ($x'' = 0$) закреплен упруго, а другой ($x'' = l''$) движется по заданному закону, то имеем

$$\left.\begin{aligned} &u_{t''t''} = a''^2 u_{x''x''}, \quad 0 < x'' < l'', \quad 0 < t'' < +\infty, \\ &Eu_{x''}(0,\, t'') - ku(0,\, t'') = 0, \quad u(l'',\, t'') = \omega_u(t''), \quad 0 < t'' < +\infty, \\ &u(x'',\, 0) = \varphi_u(x''), \quad u_{t''}(x'',\, 0) = \psi_u(x''), \quad 0 < x'' < l''. \end{aligned}\right\} \tag{IIв}$$

Если один конец провода ($x' = 0$) заземлен через сосредоточенную самоиндукцию L_0, а к другому ($x' = l'$) приложена электродвижущая сила $\omega_v(t')$, то для определения электрического напряжения в проводе получаем краевую задачу

$$\left.\begin{aligned} &u_{t't'} = a'^2 v_{x'x'}, \quad 0 < x' < l', \quad 0 < t' < +\infty, \\ &L_0 v_{x'}(0,\, t') - Lv(0,\, t') = 0, \quad v(l',\, t') = \omega_v(t'), \quad 0 < t' < +\infty, \\ &v(x',\, 0) = \varphi_v(x'), \quad v_{t'}(x',\, 0) = \psi_v(x'), \quad 0 < x' < l'. \end{aligned}\right\} \tag{Iв}$$

Задача (Iв) аналогична задаче (IIв). Для того чтобы задача (Iв) была подобна задаче (IIв) с коэффициентами подобия k_x, k_t, k_u, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (1а), (2а), (3а), (4а) (см. выше) и соотношение

$$\omega_v(t') = k_u \omega_u(t''), \quad t' = k_t t'', \quad 0 < t'' < +\infty.$$

Указание. Задача решается аналогично предыдущей.

51. Если один конец провода ($x'' = 0$) заземлен через сосредоточенное сопротивление R_0, а другой конец ($x'' = l''$) заземлен через сосредоточенную емкость C_0, то для определения напряжения в

проводе с пренебрежимо малыми утечками получаем краевую задачу

$$\left.\begin{aligned} &v_{t''t''} = a''^2 v_{x''x''}, \quad a''^2 = \frac{1}{CL}, \quad 0 < x'' < l'', \quad 0 < t'' < +\infty, \\ &R_0 v_{x''}(0,\, t'') - L v_{t''}(0,\, t'') = 0, \\ &LC_0 v_{t''t''}(l'',\, t'') + v_{x''}(l'',\, t'') = 0, \quad 0 < t'' < +\infty, \\ &v(x'',\, 0) = \varphi_v(x''), \quad v_{t''}(x'',\, 0) = \psi_v(x''), \quad 0 < x'' < l'', \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IIа)}$$

а для определения силы тока — краевую задачу

$$\left.\begin{aligned} &i_{t''t''} = a''^2 i_{x''x''}, \quad 0 < x'' < l'', \quad 0 < t'' < +\infty, \\ &i_{x''}(0,\, t'') - CR_0 i_{t''}(0,\, t'') = 0, \\ &C_0 i_{x''}(l'',\, t'') + Ci(l'',\, t'') = 0, \quad 0 < t'' < +\infty, \\ &i(x'',\, 0) = \varphi_i(x''), \quad i_{t''}(x'',\, 0) = \psi_i(x''), \quad 0 < x'' < l''. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IIб)}$$

Если к концу упругого цилиндра ($x' = 0$), совершающего крутильные колебания, приложен тормозящий крутильный момент силы трения, пропорциональный угловой скорости, а на другой ($x' = l'$) насажен шкив с осевым моментом инерции k_0, то для определения углов поворота $\theta(x',\, t')$ поперечных сечений стержня получаем краевую задачу

$$\left.\begin{aligned} &\theta_{t't'} = a'^2 \theta_{x'x'}, \quad 0 < x' < l', \quad 0 < t' < +\infty, \\ &GJ\theta_{x'}(0,\, t') - r_0 \theta_{t'}(0,\, t') = 0, \\ &k_0 \theta_{t't'}(l',\, t') + GJ\theta_{x'}(l',\, t') = 0, \quad 0 < t' < +\infty, \\ &\theta(x', 0) = \varphi_\theta(x'), \quad \theta_{x'}(x',\, 0) = \psi_\theta(x'), \quad 0 < x' < l', \end{aligned}\right\} \qquad \text{(Iа)}$$

где $a''^2 = \dfrac{GJ}{k}$, а величины G, J, k имеют тот же смысл, что и в ответе к задаче 3.

Если к концу цилиндра ($x' = 0$), совершающего крутильные колебания, приложен тормозящий крутильный момент, пропорциональный угловой скорости, а конец $x' = l'$ закреплен упруго, то для определения $\theta(x',\, t')$ получаем краевую задачу

$$\left.\begin{aligned} &\theta_{t't'} = a'^2 \theta_{x'x'}, \quad 0 < x' < l', \quad 0 < t' < +\infty, \\ &GJ\theta_{x'}(0,\, t') - r_0 \theta_{t'}(0,\, t') = 0, \\ &GJ\theta_{x'}(l',\, t') + H_0 \theta(l',\, t') = 0, \quad 0 < t' < +\infty, \\ &\theta(x', 0) = \varphi_\theta(x'), \quad \theta_{t'}(x',\, 0) = \psi_\theta(x'), \quad 0 < x' < l'. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(Iб)}$$

Задача (Iа) аналогична задаче (IIа). Задача (Iб) аналогична задаче (IIб). Для того чтобы задача (Iа) была подобна задаче (IIа) с коэффициентами подобия k_x, k_t, k_u, необходимо и достаточно, чтобы

выполнялись соотношения

$$k_x = \frac{l'}{l''}, \tag{1}$$

$$a'^2 = \frac{k_x^2}{k_t^2}\, a''^2, \tag{2}$$

$$\frac{R_0}{GJ} \cdot \frac{k_x}{k_t} = \frac{L}{r_0}, \tag{3}$$

$$\frac{GJ}{k_0} \cdot \frac{k_t^2}{k_x} = \frac{1}{LC_0}, \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_\theta(x') = k_u \varphi_v(x''), \\ &\psi_\theta(x') = \frac{k_u}{k_t}\, \psi_v(x''), \\ &x' = k_x x'', \quad 0 < x'' < l''. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Для того чтобы задача (Iб) была подобна задаче (IIб) с коэффициентами подобия k_x, k_t, k_u, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись аналоги соотношений (1), (2), (5) и соотношения

$$\frac{r_0}{GJ}\,\frac{k_x}{k_t} = CR_0, \quad k_x\,\frac{H_0}{GJ} = \frac{C}{C_0}.$$

Указание. См. решение 49.

§ 2. Метод распространяющихся волн (метод Даламбера)

1. Задачи для бесконечной струны. Решения краевых задач этого пункта, имеющих вид

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(x,\,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,\,0) = \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty, \tag{2}$$

находятся по формуле Даламбера

$$u(x,\,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(z)\,dz. \tag{3}$$

52. В рассматриваемой задаче $\psi(x) \equiv 0$, поэтому

$$u(x,\,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} = \frac{1}{2}\,\varphi(x-at) + \frac{1}{2}\,\varphi(x+at), \tag{1}$$

где $\varphi(x)$ задана графически в условии задачи.

Прямая и обратная волны $\frac{1}{2}\,\varphi(x-at)$ и $\frac{1}{2}\,\varphi(x+at)$ в начальный момент $t = 0$ совпадают, имея значение, равное $\frac{1}{2}\,\varphi(x)$.

За время t ($t > 0$) график прямой волны переместится без деформации вправо на расстояние at, а график обратной волны — влево на at. Складывая перемещенные графики прямой и обратной волн

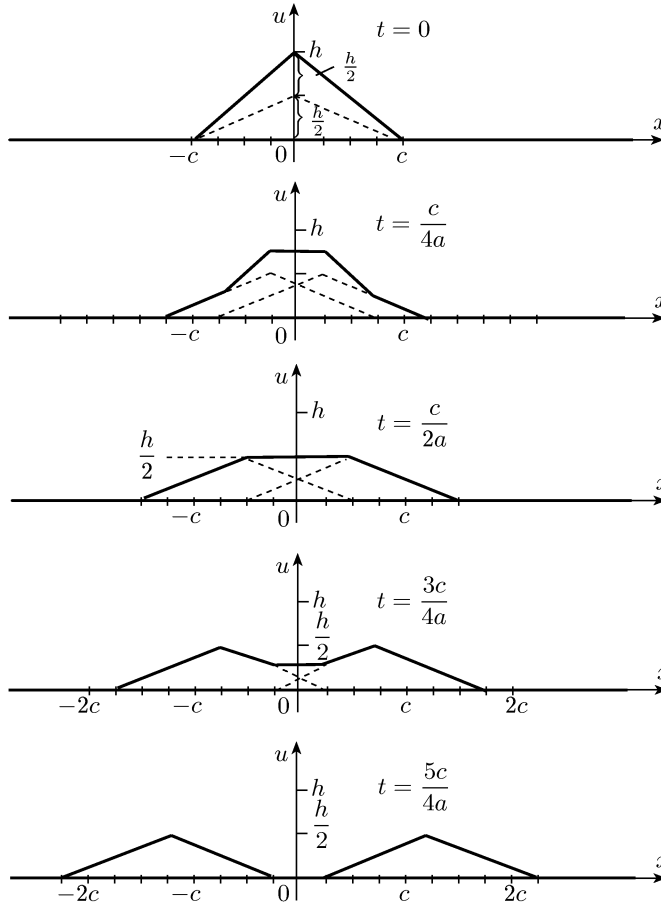


Рис. 20

в момент времени $t_1, t_2, \ldots$, получим профиль струны в эти моменты времени. Выше (рис. 20) приводится профиль струны для моментов $t_k = \dfrac{kc}{4a}$, $k = 0, 1, 2, 3, 5$.

53. а)
$$u(x,\,t) = \frac{\psi(x-at) + \psi(x+at)}{2}, \tag{1}$$
где
$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < -c, \\ h\left[1 - \dfrac{x^2}{c^2}\right], & -c < x < c, \\ 0, & c < x < +\infty. \end{cases} \tag{2}$$

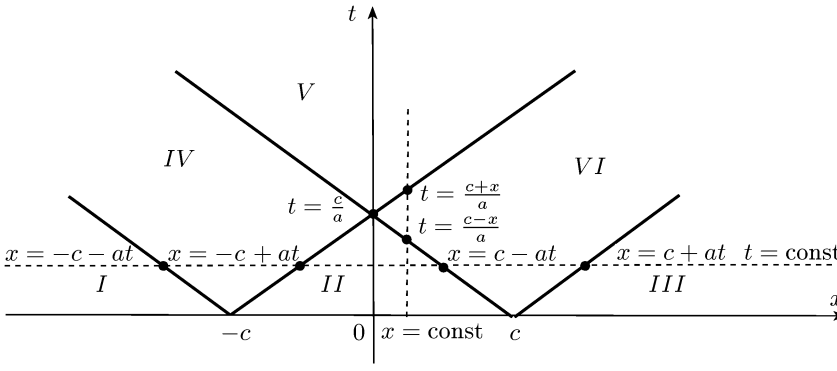


Рис. 21

Чтобы получить требуемые в условии задачи формулы, рассмотрим разбиение фазовой плоскости $(x,\ t)$ характеристиками уравнения (1), проведенными из концов интервала $(-c,\ c)$, на котором начальное отклонение отлично от нуля (рис. 21).

Дадим сначала формулы, определяющие профиль струны при $t = \text{const}$, ограничиваясь двумя характерными случаями:

$$0 < t < \frac{c}{a} \quad \text{и} \quad \frac{c}{a} < t < +\infty.$$

Если $t = \text{const},\ 0 < t < \dfrac{c}{a}$, то при x, изменяющемся монотонно от $-\infty$ до $+\infty$, точка $(x,\ t)$ фазовой плоскости последовательно проходит области *I*, *IV*, *II*, *VI*, *III*.

Таким образом при $0 < t < \dfrac{c}{a}$ профиль струны задается соотношениями

$$u(x,\ t) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < -c - at, \\ \dfrac{h}{2}\left[1 - \dfrac{(x+at)^2}{c^2}\right], & -c - at < x < -c + at, \\ h\left[1 - \dfrac{x^2 + a^2t^2}{c^2}\right], & -c + at < x < c - at, \\ \dfrac{h}{2}\left[1 - \dfrac{(x-at)^2}{c^2}\right], & c - at < x < c + at, \\ 0, & c + at < x + \infty. \end{cases}$$

Аналогично получается профиль струны при $\dfrac{c}{a} < t < +\infty$.

б) Дадим теперь формулы, определяющие $u(x,\ t)$ при $x = \text{const}$, представляющие закон движения точки струны с фиксированной абсциссой. Выберем по фиксированному значению x в каждом из интервалов $-\infty < x < -c,\ \ -c < x < 0,\ \ 0 < x < c,\ \ c < x < +\infty$ и изучим, как меняется выражение для решения при t, изменяющемся

от 0 до $+\infty$. Мы получим:

α)
$$u(x,\,t)=\left\{\begin{array}{cc} 0, & 0\leqslant t\leqslant -\dfrac{c+x}{a},\\ \dfrac{h}{2}\left[1-\dfrac{(x+at)^2}{c^2}\right], & -\dfrac{c+x}{a}\leqslant t\leqslant \dfrac{c-x}{a},\\ 0, & \dfrac{c-x}{a}\leqslant t<+\infty, \end{array}\right\}\quad -\infty<x<-c;$$

β)
$$u(x,\,t)=\left\{\begin{array}{cc} h\left[1-\dfrac{x^2+a^2t^2}{c^2}\right], & 0\leqslant t\leqslant \dfrac{c+x}{a},\\ \dfrac{h}{2}\left[1-\dfrac{(x+at)^2}{c^2}\right], & \dfrac{c+x}{a}\leqslant t\leqslant \dfrac{c-x}{a},\\ 0, & \dfrac{c-x}{a}\leqslant t<+\infty, \end{array}\right\}\quad -c<x<0;$$

γ)
$$u(x,\,t)=\left\{\begin{array}{cc} h\left[1-\dfrac{x^2+a^2t^2}{c^2}\right], & 0\leqslant t\leqslant \dfrac{c-x}{a},\\ \dfrac{h}{2}\left[1-\dfrac{(x-at)^2}{c^2}\right], & \dfrac{c-x}{a}\leqslant t\leqslant \dfrac{c+x}{a},\\ 0, & \dfrac{c+x}{a}\leqslant t<+\infty, \end{array}\right\}\quad 0<x<c;$$

δ)
$$u(x,\,t)=\left\{\begin{array}{cc} 0, & 0<t<\dfrac{-c+x}{a},\\ \dfrac{h}{2}\left[1-\dfrac{(x-at)^2}{c^2}\right], & \dfrac{-c+x}{a}\leqslant t\leqslant \dfrac{c+x}{a},\\ 0, & \dfrac{c+x}{a}<t<+\infty, \end{array}\right\}\quad c<x<+\infty.$$

Замечания. 1. α) и β) получаются из δ) и γ) простой заменой x на $-x$, так как $u(x,\,t)$ является четной функцией по x в силу четности $\varphi(x)$.

2. Геометрический метод нахождения профиля струны для различных моментов времени описан в решении задачи 52.

54. Отклонение $u(x,\,t)$ достигает наибольшего значения в точке с абсциссой
$$x=\frac{\alpha_2+\beta_2+\alpha_1+\beta_1}{4}$$
в момент времени
$$t=\frac{\alpha_2+\beta_2-(\alpha_1+\beta_1)}{4a};$$
это наибольшее значение равно $\dfrac{h_1+h_2}{2}$.

Указание. Рассмотреть интегральную поверхность, представляющую решение $u = u(x, t)$ краевой задачи.

55. Решение краевой задачи имеет вид

$$u(x, t) = \Psi(x + at) - \Psi(x - at),$$

где

$$\Psi(z) = \frac{1}{2a}\int_{z_0}^{z}\psi(\alpha)\,d\alpha = \begin{cases} 0, & -\infty < z < -c, \\ \dfrac{v_0(z+c)}{2a}, & -c \leqslant z \leqslant c, \quad z_0 = -c, \\ \dfrac{v_0 c}{a}, & c \leqslant z < +\infty, \end{cases}$$

поэтому закон движения точек струны с различными абсциссами представляется формулами

а)

$$u(x, t) = \left\{ \begin{array}{cc} 0, & 0 \leqslant t \leqslant -\dfrac{c+x}{a}, \\ \dfrac{v_0(x+at)}{2a} + \dfrac{v_0 c}{2a}, & -\dfrac{c+x}{a} \leqslant t \leqslant \dfrac{c-x}{a}, \\ \dfrac{v_0 c}{a}, & \dfrac{c-x}{a} \leqslant t < +\infty, \end{array} \right\} \quad -\infty < x < -c;$$

б)

$$u(x, t) = \left\{ \begin{array}{cc} v_0 t, & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{c+x}{a}, \\ \dfrac{v_0(x-at)}{2a} + \dfrac{v_0 c}{2a}, & \dfrac{c+x}{a} \leqslant t \leqslant \dfrac{c-x}{a}, \\ \dfrac{v_0 c}{a}, & \dfrac{c-x}{a} \leqslant t < +\infty, \end{array} \right\} \quad -c < x < 0;$$

в)

$$u(x, t) = \left\{ \begin{array}{cc} v_0 t, & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{c-x}{a}, \\ \dfrac{v_0(x-at)}{2a} + \dfrac{v_0 c}{2a}, & \dfrac{c-x}{a} \leqslant t \leqslant \dfrac{c+x}{a}, \\ \dfrac{v_0 c}{a}, & \dfrac{c+x}{a} \leqslant t < +\infty, \end{array} \right\} \quad 0 < x < c;$$

г)

$$u(x, t) = \left\{ \begin{array}{cc} 0, & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{-c+x}{a}, \\ \dfrac{v_0(x-at)}{2a} + \dfrac{v_0 c}{2a}, & \dfrac{-c+x}{a} \leqslant t \leqslant \dfrac{c+x}{a}, \\ \dfrac{v_0 c}{a}, & \dfrac{c+x}{a} < t < +\infty, \end{array} \right\} \quad c < x < +\infty.$$

Профиль струны для моментов времени $t_1, t_2, \ldots$ может быть получен вычитанием графика прямой волны $\Psi(x - at)$ из графика обратной

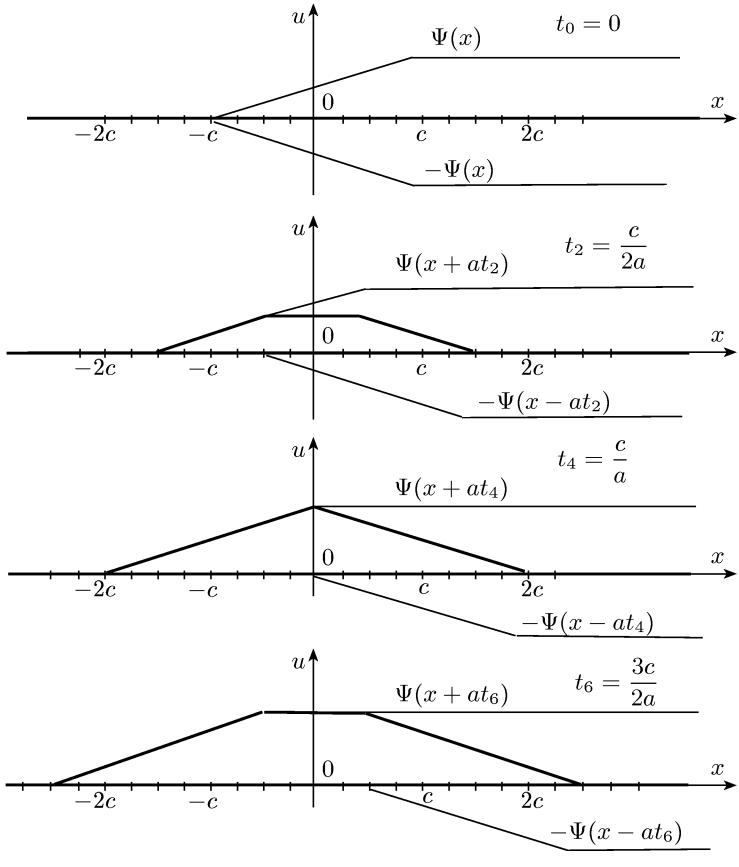


Рис. 22

волны $\Psi(x+at)$. Для моментов $t_k = \dfrac{kc}{4a}$, $k = 0, 2, 4, 6$, он имеет вид, изображенный на рис. 22.

56. Приведем два способа решения задачи.

Первый способ. Будем сначала считать импульс равномерно распределенным по отрезку $x_0 - \delta \leqslant x \leqslant x_0 + \delta$. Тогда краевая задача формулируется следующим образом:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(x,\,0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty,$$

$$u_t(x,\,0) = \varphi_\delta(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < x_0 - \delta, \\ \dfrac{I}{2\delta\rho}, & x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \\ 0, & x_0 + \delta < x < +\infty, \end{cases} \tag{2}$$

$$U_\delta(x,\,t) = \Psi_\delta(x+at) - \Psi_\delta(x-at), \tag{3}$$

где

$$\Psi_\delta(z) = \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0-\delta}^{z} \varphi_\delta(\alpha)\,d\alpha = \begin{cases} 0, & -\infty < z < x_0-\delta, \\ \dfrac{I}{4a\delta\rho}(z - x_0 + \delta), & x_0-\delta < z < x_0+\delta, \\ \dfrac{I}{2a\rho}, & x_0+\delta < z < +\infty. \end{cases} \tag{4}$$

Формальным переходом к пределу при $\delta \to 0$ в решении (3) получим решение исходной задачи

$$u(x,\,t) = \lim U_\delta(x,\,t) = \lim_{\delta\to 0} \Psi_\delta(x+at) - \\ - \lim_{\delta\to 0} \Psi_\delta(x-at) = \Psi(x+at) - \Psi(x-at),$$

где

$$\Psi(z) = \lim_{\delta\to 0} \Psi_\delta(z) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -\infty < x < x_0, \\ \dfrac{I}{2a\rho} & \text{при} \quad x_0 < x < +\infty. \end{cases}$$

Если ввести функцию $\sigma_0(z)$, определяемую соотношениями

$$\sigma_0(z) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -\infty < z < 0, \\ 1 & \text{при} \quad 0 < z < +\infty, \end{cases}$$

то

$$\Psi(z) = \frac{I}{2a\rho}\,\sigma_0(z - x_0),$$

$$u(x,\,t) = \frac{I}{2a\rho}\left\{\sigma_0(x+at-x_0) - \sigma_0(x-at-x_0)\right\}.$$

Второй способ. Используя дельта-функцию[1], можно сформулировать краевую задачу так:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u(x,\,0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty,$$
$$u_t(x,\,0) = \frac{I}{\rho}\,\delta(x - x_0)\ ^{2}), \quad -\infty < x < +\infty.$$

Тогда с помощью формулы Даламбера получаем

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\,\frac{I}{\rho}\int\limits_{x-at}^{x+at} \delta(z - x_0)\,dz = \frac{I}{2a\rho}\int\limits_{x-x_0-at}^{x-x_0+at} \delta(\xi)\,d\xi = \\ = \frac{I}{2a\rho}\left[\sigma_0(x+at-x_0) - \sigma_0(x-at-x_0)\right],$$

так как

$$\int\limits_{z_0}^{z} \delta(\xi)\,d\xi = \left\{\begin{matrix} 1, & z > 0, \\ 0, & z < 0 \end{matrix}\right\} \quad \text{при} \quad z_0 < 0,$$

и

$$\int\limits_{z_0}^{z} \delta(\xi)\,d\xi = \left\{\begin{matrix} 0, & z > 0, \\ 1, & z < 0 \end{matrix}\right\} \quad \text{при} \quad z_0 > 0.$$

---

[1]) См. [7, с. 270–275].

[2]) Коэффициент при дельта-функции $\delta(x - x_0)$ выбирается так, чтобы суммарный импульс, передаваемый струне в момент $t = 0$, т. е. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_t(x,\,0)\rho\,dx$, был равен I.

57. В задаче 52

$$u(x,\,0)=\varphi(x)\not\equiv 0,\quad u_t(x,\,0)=\psi(x)\equiv 0,$$

а в рассматриваемой задаче бегущая волна в момент $t=0$ характеризуется отличными от нуля «начальными» отклонениями и скоростями [1])

$$u(x,\,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,\,0)=-a\varphi'(x),\quad -\infty<x<+\infty.$$

В случае задачи 52 мы имели $u(x,\,t)=\frac{1}{2}\,\varphi(x-at)+\frac{1}{2}\,\varphi(x+at)$.

В рассматриваемой же задаче формула Даламбера дает

$$u(x,\,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}[-a\varphi'(z)]\,dz=\varphi(x-at).$$

58. Решение краевой задачи

$$\left.\begin{aligned}&v_x+Li_t+Ri=0,\\&i_x+Cv_t+Gv=0\end{aligned}\right\}\quad\text{при}\quad -\infty<x<+\infty,\quad 0<t<+\infty,\qquad(1)$$

$$v(x,\,0)=f(x),\quad i(x,\,0)=\sqrt{\frac{C}{L}}\,F(x)\quad\text{при}\quad -\infty<x<+\infty\qquad(2)$$

при условии $CR=GL$ имеет вид

$$\left.\begin{aligned}&v(x,\,t)=e^{-Rt/L}\left\{\varphi(x-at)+\psi(x+at)\right\},\\&i(x,\,t)=\sqrt{\frac{C}{L}}e^{-Rt/L}\left\{\varphi(x-at)-\psi(x+at)\right\},\end{aligned}\right\}\quad\begin{aligned}&-\infty<x<+\infty,\\&0<t<+\infty,\end{aligned}\qquad(3)$$

где

$$\varphi(z)=\frac{f(z)+F(z)}{2}\quad\text{и}\quad\psi(z)=\frac{f(z)-F(z)}{2}\quad\text{при}\quad -\infty<z<+\infty.\qquad(4)$$

Указание. Исключить из уравнений (1) силу тока; в полученном таким образом уравнении второго порядка для $v(x,\,t)$ освободиться от члена $v_t(x,\,t)$ (см. гл. I), тогда уравнение примет вид $u_{tt}=a^2u_{xx}$. Его решением будет: $u(x,\,t)=\varphi(x-at)+\psi(x+at)$. Возвращаясь к функции $v(x,\,t)$ и используя уравнения (1) и начальные условия (2), нетрудно получить ответ.

2. Задачи для полупрямой. Разыскиваем решение краевой задачи для полупрямой

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\quad 0<x<+\infty,\quad 0<t<+\infty,\qquad(1)$$

$$\alpha_1u_{tt}(0,\,t)+\alpha_2u_t(0,\,t)+\alpha_3u_x(0,\,t)+\alpha_4u(0,\,t)=\Phi(t),\quad 0<t<+\infty,\qquad(2)$$

$$u(x,\,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,\,0)=\psi(x),\quad 0<x<+\infty,\qquad(3)$$

в виде

$$u(x,\,t)=\varphi_1(x-at)+\varphi_2(x+at).\qquad(4)$$

Функции $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ можно определить из начальных условий лишь при $0<z<+\infty$. Для определения $\varphi_2(z)$ этого достаточно,

[1]) Предполагается, что волна уже существует при $t<0$.

так как $x + at > 0$ при $0 < x < +\infty$, $0 < t < +\infty$. Функция же $\varphi_1(x)$ должна быть определена и для $-\infty < z < 0$, что достигается с помощью граничного условия (2).

Решение краевой задачи (1), (2), (3) можно искать также с помощью формулы Даламбера

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(z)\, dz \tag{5}$$

для неограниченной струны. Для этого нужно фиктивно продолжить струну на отрицательную полуось $-\infty < x < 0$, а затем распространить на эту полуось начальные условия (3) так, чтобы для $u(x, t)$, вычисляемого по формуле (5), граничное условие (2) выполнялось [1]). При этом получается, что в случае фиксированного конца функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ должны быть продолжены на полуось $-\infty < x < 0$ нечетно, а в случае свободного конца — четно.

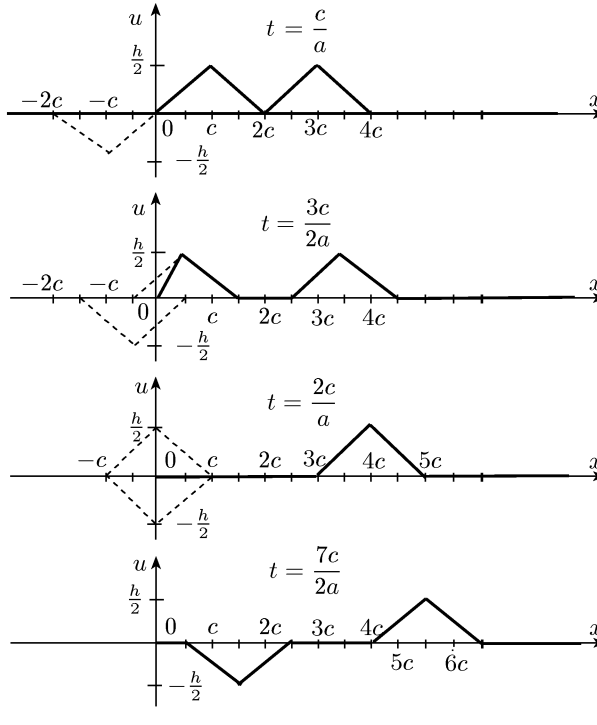


Рис. 23

59. Профиль струны в моменты времени $t = \dfrac{c}{a}$, $\dfrac{3c}{2a}$, $\dfrac{2c}{a}$, $\dfrac{7c}{2a}$ изображен на рис. 23.

[1]) См. [7, с. 64, 65].

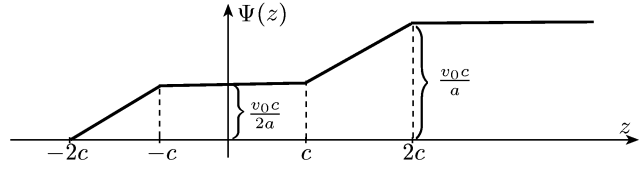

$\Psi(z)$
$\frac{v_0 c}{a}$
$\frac{v_0 c}{2a}$
z
$-2c$
$-c$
c
$2c$

Рис. 24

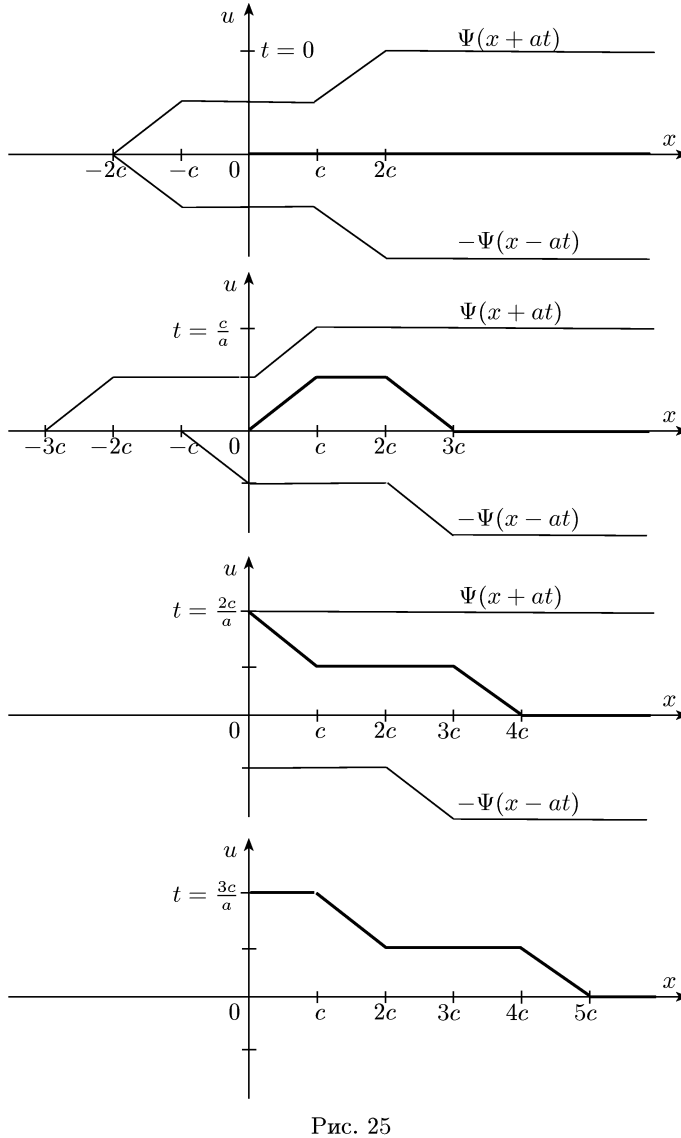

u
$t = 0$
$\Psi(x + at)$
x
$-2c$
$-c$
0
c
$2c$
$-\Psi(x - at)$
u
$t = \frac{c}{a}$
$\Psi(x + at)$
x
$-3c$
$-2c$
$-c$
0
c
$2c$
$3c$
$-\Psi(x - at)$
u
$t = \frac{2c}{a}$
$\Psi(x + at)$
x
0
c
$2c$
$3c$
$4c$
$-\Psi(x - at)$
u
$t = \frac{3c}{a}$
x
0
c
$2c$
$3c$
$4c$
$5c$

Рис. 25

60. Решение краевой задачи

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x,\, t < +\infty, \tag{1}$$

$$u_x(0,\, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty, \tag{3}$$

$$u_t(x,\, 0) = \begin{cases} 0, & 0 < x < c, \\ v_0, & c < x < 2c, \\ 0, & 2c < x < +\infty, \end{cases} \tag{4}$$

может быть найдено с помощью формулы Даламбера при четном [1] продолжении начальных условий

$$u(x,\, t) = \Psi(x + at) - \Psi(x - at), \tag{5}$$

где

$$\Psi(z) = \frac{1}{2a} \int\limits_{-2c}^{z} \varphi(\alpha)\, d\alpha, \tag{6}$$

$$\varphi(z) = \begin{cases} 0, & -\infty < z < -2c, \\ v_0, & -2c < z < -c, \\ 0, & -c < z < c, \\ v_0, & c < z < 2c, \\ 0, & 2c < z < +\infty. \end{cases} \tag{7}$$

График функции $\Psi(z)$ имеет вид, представленный на рис. 24. Профиль отклонений в любой момент времени получается вычитанием графика прямой волны из графика обратной волны.

При $t = 0;\ \frac{c}{a};\ \frac{2c}{a};\ \frac{3c}{a}$ профиль отклонений имеет вид, представленный на рис. 25.

61.

$$u(x,\, t) = \left\{ \begin{array}{ll} -\dfrac{2Al}{\pi a} \sin \dfrac{\pi x}{2l} \sin \dfrac{\pi a t}{2l}, & 0 < t < \dfrac{2l - x}{a}, \\ \dfrac{2Al}{\pi a} \cos^2 \dfrac{\pi}{4l}(x - at), & \dfrac{2l - x}{a} < t < \dfrac{2l + x}{a}, \\ 0, & \dfrac{2l + x}{a} < t < +\infty, \end{array} \right\} \quad 0 < x < 2l,$$

$$u(x,\, t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & 0 < t < \dfrac{-2l + x}{a}, \\ \dfrac{2Al}{\pi a} \cos^2 \dfrac{\pi a}{4l}(x - at), & \dfrac{-2l + x}{a} < t < \dfrac{2l + x}{a}, \\ 0, & \dfrac{2l + x}{a} < t < +\infty, \end{array} \right\}$$

$$2l < x < +\infty,$$

$$A = -\frac{\pi I}{4l}.$$

[1] См. [7, с. 64, 65].

62. $\max\limits_{\substack{0\leqslant x<+\infty\\ 0<t<+\infty}} u(x,\,t) = h = u\left(0,\,\dfrac{2l}{a}\right) = u\left(0,\,\dfrac{6l}{a}\right) = u\left(2l,\,\dfrac{4l}{a}\right) = u\left(4l,\,\dfrac{2l}{a}\right)$.

Указание. Рассмотреть интегральную поверхность, представляющую решение $u = u(x,\,t)$ краевой задачи.

63. Решение. Аналогично тому, как это делалось в случае задачи 56, решение настоящей задачи может быть выполнено такими двумя способами.

Первый способ. Считаем импульс I равномерно распределенным по отрезку $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \delta$. Тогда мы приходим к краевой задаче

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x,\, t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(0,t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\,0) = 0, \quad u_t(x,\,0) = \begin{cases} 0, & 0 < x < x_0, \\ \dfrac{I}{\delta\rho}, & x_0 < x < x_0 + \delta, \\ 0, & x_0 + \delta < x < \infty. \end{cases} \tag{3}$$

Ее решение получается по формуле Даламбера с помощью нечетного продолжения начальных условий. Переходя к пределу при $\delta \to 0$ в решении этой краевой задачи, получим решение исходной задачи

$$u(x,\,t) = \frac{I}{2a\rho}\big\{\sigma_0(x - x_0 + at) - \sigma_0(x - x_0 - at) - \\ - \sigma_0(x + x_0 + at) + \sigma_0(x + x_0 - at)\big\}.$$

Второй способ. Используя δ-функцию, можно сформулировать краевую задачу следующим образом:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, \quad t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(0,\,t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\,0) = 0, \quad 0 < x < +\infty, \tag{3}$$

$$u_t(x,\,0) = \frac{I}{\rho}\,\delta(x - x_0), \quad 0 < x < \infty. \tag{3'}$$

Ее решение получается с помощью нечетного продолжения начальных условий. Нечетное продолжение начального условия (3′) дает

$$u_t(x,\,0) = \frac{I}{\rho}\big\{\delta(x - x_0) - \delta(x + x_0)\big\},$$

$$u(x,\,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \frac{I}{\rho}\big\{\delta(\xi - x_0) - \delta(\xi + x_0)\big\}\,d\xi =$$

$$= \frac{I}{2a\rho}\big\{\sigma_0(x - x_0 + at) - \sigma_0(x - x_0 - at) - \sigma_0(x + x_0 + at) + \sigma_0(x + x_0 - at)\big\}.$$

64. С помощью δ-функции краевая задача формулируется следующим образом:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x,\, t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(0,\,t)=0,\quad 0<t<+\infty, \tag{2}$$
$$u(x,\,0)=0,\quad 0<x<+\infty, \tag{3}$$
$$u_t(x,\,0)=\frac{I}{\rho}\sum_{k=1}^{n}\delta(x-x_k). \tag{3'}$$

Продолжая нечетно начальное условие и применяя формулу Даламбера, получим

$$u(x,\,t)=\frac{I}{\rho}\sum_{k=1}^{n}\big\{\sigma_0(x-x_k+at)-\sigma_0(x-x_k-at)-$$
$$-\sigma_0(x+x_k+at)+\sigma_0(x+x_k-at)\big\}.$$

65. Решение исходной задачи может быть получено переходом к пределу при $x_0\to 0+0$ из решения краевой задачи

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\quad 0<x,\,t<+\infty, \tag{1}$$
$$u_x(0,\,t)=0,\quad 0<t<+\infty, \tag{2}$$
$$u(x,\,0)=0,\quad 0<x<+\infty, \tag{3}$$
$$u_t(x,\,0)=\frac{I}{\rho}\,\delta(x-x_0),\quad x_0>0,\quad 0<x<+\infty, \tag{3'}$$

$$u(x,\,t)=\frac{I}{2a\rho}\lim_{x_0\to 0+0}\big\{\sigma(x-x_0+at)-\sigma_0(x-x_0-at)+$$
$$+\sigma_0(x+x_0+at)-\sigma_0(x+x_0-at)\big\}=\frac{I}{a\rho}\big\{\sigma_0(x+at)-\sigma_0(x-at)\big\}.$$

Это решение может быть получено также переходом к пределу при $\delta\to 0$ из решения краевой задачи

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\quad 0<x,\,t<+\infty, \tag{1}$$
$$u_x(0,\,t)=0,\quad 0<t<+\infty, \tag{2}$$
$$u(x,\,0)=0,\quad 0<x<+\infty, \tag{3}$$
$$u_t(x,\,0)=\begin{cases}\dfrac{I}{\delta\rho}, & 0<x<\delta,\\ 0, & \delta<x<+\infty.\end{cases} \tag{3'}$$

66. Р е ш е н и е. Приведем два способа решения задачи.

П е р в ы й с п о с о б. Краевая задача формулируется так:

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\quad 0<x,\,t<+\infty, \tag{1}$$
$$Mu_{tt}(0,\,t)=ESu_x(0,\,t),\quad 0<t<+\infty,\quad M=\frac{Q}{g}, \tag{2}$$
$$u(x,\,0)=0,\quad 0<x<+\infty, \tag{3}$$
$$u_t(x,\,0)=\begin{cases}v_0, & x=0,\\ 0, & 0<x<+\infty.\end{cases} \tag{3'}$$

Решение краевой задачи (1), (2), (3), (3') ищем в виде

$$u(x,\,t)=\varphi\left(t-\frac{x}{a}\right)+\psi\left(t+\frac{x}{a}\right). \tag{4}$$

Из начальных условий находим:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(-z)+\psi(z)=0,\\ \varphi'(-z)+\psi'(z)=0,\end{aligned}\right\}\quad 0<z<+\infty. \tag{5}$$

(5′)

Интегрируя (5′), получим

$$-\varphi(-z)+\psi(z)=\text{const}.$$

Постоянную интегрирования можно положить равной нулю. Тогда

$$-\varphi(-z)+\psi(z)=0,\quad 0<z<+\infty. \tag{5''}$$

Из (5) и (5″) находим

$$\psi(z)=0,\quad \varphi(-z)=0,\quad 0<z<+\infty. \tag{6}$$

Следовательно,

$$u(x,\,t)=\begin{cases}\varphi\left(t-\dfrac{x}{a}\right), & t>\dfrac{x}{a},\\ 0, & 0<t<\dfrac{x}{a}.\end{cases} \tag{7}$$

Подставляя полученное выражение $u(x,\,t)$ в граничное условие (2), придем к дифференциальному уравнению для определения $\varphi(z)$ при $z>0$

$$\varphi''(z)+\frac{ES}{aM}\,\varphi'(z)=0,\quad 0<z<+\infty. \tag{8}$$

Из (6) находим первое начальное условие для уравнения (8)

$$\varphi(0)=0. \tag{9}$$

Из начального условия (3′) $u_t(0,\,0)=v_0$ и выражения (7) для $u(x,\,t)$ находим второе начальное условие для уравнения (8)

$$\varphi'(0)=v_0. \tag{10}$$

Интегрирование уравнения (8) при начальных условиях (9) и (10) дает

$$\varphi(z)=\frac{aMv_0}{ES}\left[1-\exp\left\{-\frac{ES}{aM}\,z\right\}\right],\quad 0<z<+\infty. \tag{11}$$

Следовательно,

$$u(x,\,t)=\begin{cases}\dfrac{aMv_0}{ES}\left[1-\exp\left\{-\dfrac{ES}{aM}\left(t-\dfrac{x}{a}\right)\right\}\right], & t>\dfrac{x}{a},\\ 0, & 0<t<\dfrac{x}{a}.\end{cases} \tag{12}$$

Второй способ. Краевая задача формулируется с помощью односторонней δ-функции [1] следующим образом:

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\quad 0<x,\,t<+\infty, \tag{1}$$

$$Mu_{tt}(0,\,t)=ESu_x(0,\,t)+I\delta(t),\quad 0\leqslant t<+\infty,\quad I=Mv_0, \tag{2'}$$

$$u(x,\,0)=0,\quad 0\leqslant x<+\infty, \tag{3}$$

---

[1] Односторонняя δ-функция $\delta(t)$ определяется при $-\infty<t<+\infty$ как предел в смысле слабой сходимости последовательности функций

$$f_n(t)=\begin{cases}0 & \text{при}\quad -\infty<t<0,\\ n & \text{при}\quad 0<t<1/n,\\ 0 & \text{при}\quad 1/n<t<+\infty.\end{cases}$$

$$u_t(x,\,0)=0,\qquad 0\leqslant x<+\infty. \tag{3'}$$

Решение краевой задачи (1), (2'), (3), (3') ищем в виде

$$u(x,\,t)=\varphi\left(t-\frac{x}{a}\right)+\psi\left(t+\frac{x}{a}\right). \tag{4}$$

Как и раньше, из начальных условий находим:

$$\varphi(-z)=\psi(z)=0\quad\text{при}\quad 0\leqslant z<+\infty. \tag{6}$$

Следовательно,

$$u(x,\,t)=\begin{cases}\varphi\left(t-\dfrac{x}{a}\right), & t>\dfrac{x}{a},\\ 0, & 0<t<\dfrac{x}{a}.\end{cases} \tag{7}$$

Подставляя это выражение $u(x,\,t)$ в граничное условие (2') и начальные условия (3) и (3'), получим для определения $\varphi(z)$ при $z>0$ дифференциальное уравнение

$$\varphi''(z)+\frac{ES}{aM}\,\varphi'(z)=v_0\delta(z),\quad 0\leqslant z<+\infty, \tag{13}$$

и начальные условия

$$\varphi(0)=\varphi'(0)=0. \tag{14}$$

Интегрирование уравнения (13) при начальных условиях (14) дает

$$\varphi(z)=\frac{aMv_0}{ES}\left[1-\exp\left\{-\frac{ES}{aM}\,z\right\}\right],\quad 0<z<+\infty, \tag{11}$$

и мы снова приходим к выражению (12) для $u(x,\,t)$.

67. Решением краевой задачи

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\quad 0<x,\,t<+\infty, \tag{1}$$

$$u_x(0,\,t)-hu(0,\,t)=0,\quad 0<t<+\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\,0)=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi x}{l}, & 0<x<l,\\ 0, & l<x<+\infty,\end{cases} \tag{3}$$

$$u_t(x,\,0)=0,\quad 0\leqslant x<+\infty, \tag{3'}$$

является

$$u(x,\,t)=\varphi\left(t-\frac{x}{a}\right)+\psi\left(t+\frac{x}{a}\right), \tag{4}$$

где

$$-\varphi(-z)=\psi(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi az}{l}, & 0\leqslant z\leqslant\dfrac{l}{a},\\ 0, & \dfrac{l}{a}\leqslant z<+\infty,\end{cases} \tag{5}$$

$$\varphi(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi^2+h^2l^2}\left[\dfrac{\pi^2-h^2l^2}{2}\sin\dfrac{\pi az}{l}+\pi hl\left(\cos\dfrac{\pi az}{l}-e^{-ahz}\right)\right], & \\ & 0\leqslant z\leqslant\dfrac{l}{a},\\ -\dfrac{\pi hl}{\pi^2+h^2l^2}\,(1+e^{hl})e^{-ahz}, & \dfrac{l}{a}\leqslant z<+\infty.\end{cases}$$

68. Решение краевой задачи

$$\theta_{tt} = a^2\theta_{xx}, \quad 0 < x,\, t < +\infty, \tag{1}$$

$$\theta_x(0,\, t) + \alpha\theta_t(0,\, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$\theta(x,\, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty, \tag{3}$$

$$\theta_t(x,\, 0) = \omega, \quad 0 < x < +\infty \tag{3'}$$

имеет вид

$$\theta(x,\, t) = \begin{cases} \omega t, & 0 < at < x, \\ \dfrac{\omega(t - \alpha x)}{1 - a\alpha}, & x < at < +\infty. \end{cases} \tag{4}$$

69. Имеем краевые задачи

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x,\, t < +\infty; \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{а) либо} & u(0,\, t) = 0, \\ \text{б) либо} & u_x(0,\, t) = 0, \\ \text{в) либо} & u_x(0,\, t) - hu(0,\, t) = 0, \\ \text{г) либо} & u_x(0,\, t) + \alpha u_t(0,\, t) = 0, \end{array}\right\} \quad 0 \leqslant t < +\infty; \tag{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} u(x,\, 0) = f(x), \\ u_t(x,\, 0) = af'(x), \end{array}\right\} \quad 0 < x < +\infty. \tag{3}$$

$$\tag{3'}$$

В случае граничного условия а)

$$u(x,\, t) = \begin{cases} f(x + at), & 0 < at < x, \\ f(x + at) - f(at - x), & x < at < +\infty. \end{cases}$$

В случае граничного условия б)

$$u(x,\, t) = \begin{cases} f(x + at), & 0 < at < x, \\ f(x + at) + f(at - x), & x \leqslant at < +\infty. \end{cases}$$

В случае граничного условия в)

$$u(x,\, t) = \begin{cases} f(at + x), & 0 < at < x, \\ f(x + at) + f(at - x) + 2he^{h(x-at)} \displaystyle\int_0^{x-at} e^{-hs} f(-s)\, ds, & \\ & x < at < +\infty. \end{cases}$$

В случае граничного условия г)

$$u(x,\, t) = \begin{cases} f(x + at), & 0 < at < x, \\ f(x + at) + \dfrac{1 + a\alpha}{1 - a\alpha} f(at - x), & x < at < +\infty. \end{cases}$$

70. Имеем краевую задачу

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x,\, t < +\infty, \tag{1}$$

$$M_0 u_{tt}(0,\, t) = -H_0 u(0,\, t) - R_0 u_t(0,\, t) - kp_0 S u_x(0,\, t), \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\, 0) = f(x), \quad 0 < x < +\infty, \tag{3}$$

$$u_t(x,\, 0) = af'(x), \quad 0 < x < +\infty. \tag{3'}$$

Ее решение может быть представлено следующим образом:

$$u(x,\, t) = \begin{cases} f(x + at), & 0 < at < x, \\ f(x + at) + \Phi(at - x), & x < at < +\infty, \end{cases}$$

где $\Phi(z)$ есть решение дифференциального уравнения

$$a^2M_0\varphi''(z) - (aR_0 - kp_0S)\varphi'(z) + H_0\varphi(z) = \\ = -[a^2M_0f''(+z) + (aR_0 + kp_0S)f'(+z) + H_0f(+z)]$$

при начальных условиях

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0.$$

Примечание. В граничном условии (2) S обозначает площадь поршня, а R_0 означает коэффициент трения. Мы пренебрегаем изменением давления на внешней стороне поршня. Избыточное давление на поршень («возмущение давления») равно $p - p_0 = k\,\dfrac{p_0}{\rho_0}\,(\rho - \rho_0)$. Но в силу уравнения неразрывности (см. решение задачи 4 гл. II) имеем $\rho - \rho_0 \approx -\rho_0 u_x$. Поэтому $p - p_0 = -kp_0u_x$.

71. Решение [1]). Имеем краевые задачи а), б), в) соответственно граничным условиям (3), (3′), (3″), приведенным ниже,

$$\left.\begin{aligned} v_x + Li_t + Ri = 0, \\ i_x + Cv_t + Gv = 0, \end{aligned}\right\} \quad 0 < x,\ t < +\infty, \quad CR = GL, \tag{1}$$

(1′)

$$\left.\begin{aligned} v(x,\,0) = f(x), \\ i(x,\,0) = -\sqrt{\frac{C}{L}}\,f(x), \end{aligned}\right\} \quad 0 < x < +\infty, \tag{2}$$

(2′)

$$\left.\begin{aligned} -v(0,\,t) = R_0i(0,\,t), \\ -v_t(0,\,t) = \frac{1}{C_0}\,i(0,\,t), \\ -v(0,\,t) = L_0i_t(0,\,t), \end{aligned}\right\} \quad 0 < t < +\infty. \tag{3}$$

(3′)

(3″)

Решения этих краевых задач ищем в виде [2])

$$v(x,\,t) = e^{-Rt/L}\left\{\varphi(x - at) + \psi(x + at)\right\}, \quad a = \frac{1}{\sqrt{CL}}, \tag{4}$$

$$i(x,\,t) = e^{-Rt/L}\sqrt{\frac{C}{L}}\left\{\varphi(x - at) - \psi(x + at)\right\}. \tag{4′}$$

Из начальных условий (2), (2′) для краевых задач (3), (3′) получаем

$$\varphi(z) = 0, \quad \psi(z) = f(z), \quad 0 < z < +\infty. \tag{5}$$

В зависимости от граничных условий получаем различные представления для $\varphi(z)$ при $-\infty < z < 0$.

В случае граничного условия (3)

$$\varphi(z) = \frac{R_0\sqrt{C} - \sqrt{L}}{R_0\sqrt{C} + \sqrt{L}}\,f(-z), \quad -\infty < z < 0. \tag{6}$$

---

[1]) См. решение задачи 58.

[2]) См. сноску на с. 188.

В случае граничного условия (3′)

$$\varphi(z)=\exp\Big\{\Big(\frac{C}{C_0}-aCR\Big)z\Big\}\int\limits_0^z\exp\Big\{\Big(acR-\frac{C}{C_0}\Big)\zeta\Big\}\times$$

$$\times\Big[f'(-\zeta)-\Big(aCR+\frac{C}{C_0}\Big)f(-\zeta)\Big]d\zeta,\quad -\infty<z<0.\quad (6')$$

В случае граничного условия (3″)

$$\varphi(z)=\exp\Big\{\Big(\frac{L}{L_0}-\frac{R}{aL}\Big)z\Big\}\int\limits_0^z\exp\Big\{\Big(\frac{R}{a_L}-\frac{L}{L_0}\Big)\zeta\Big\}\times$$

$$\times\Big[-f'(-\zeta)+\Big(\frac{L}{L_0}+\frac{R}{aL}\Big)f(-\zeta)\Big]d\zeta,\quad -\infty<z<0.$$

Замечание. В случае граничного условия (3) отраженная волна напряжения

$$\varphi(z)=\frac{R_0\sqrt{C}-\sqrt{L}}{R_0\sqrt{C}+\sqrt{L}}f(-z),\quad -\infty<z<0$$

может вовсе отсутствовать при $R_0=\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ (случай полного поглощения падающей волны). Если $R_0>\sqrt{\dfrac{L}{C}}$, то отраженная волна имеет тот же знак, что и падающая; если $R_0<\sqrt{\dfrac{L}{C}}$, то противоположный (сохранение фазы и изменение фазы на противоположную). Если $R_0=0$ (непосредственно заземленный конец), то отраженная волна напряжения меняет знак, причем ее амплитуда равна (в точке $x=0$) амплитуде падающей волны. Если $R_0\to+\infty$ (изолированный конец), то отраженная волна напряжения имеет знак и величину падающей волны. Амплитуда отраженной волны в два раза меньше амплитуды падающей волны при выполнении условия

$$\frac{R_0\sqrt{C}-\sqrt{L}}{R_0\sqrt{C}+\sqrt{L}}=\frac{1}{2}$$

либо условия

$$\frac{R_0\sqrt{C}-\sqrt{L}}{R_0\sqrt{C}+\sqrt{L}}=-\frac{1}{2}.$$

72. Решение. Для определения предельного стационарного состояния в проводе ищем решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2v}{\partial x^2}-CL\frac{\partial^2v}{\partial t^2}-2CR\frac{\partial v}{\partial t}-GRv=0,\quad 0<x,\,t<+\infty,\quad CR=GL,\quad (1)$$

в виде функции, зависящей только от x и не зависящей от t,

$$v=v_0(x),\quad 0<x<+\infty,\quad (2)$$

при граничном условии

$$v(0)=E.\quad (3)$$

Подстановка $v_0(x)$ в (1) дает

$$\frac{d^2v_0}{dx^2} - GRv_0 = 0,$$

откуда получаем

$$v_0(x) = C_1e^{-\sqrt{GR}\,x} + C_2e^{\sqrt{GR}\,x}.$$

Так как при $x \to +\infty$ функция $v_0(x)$ должна быть ограниченной, то $C_2 = 0$. Из граничного условия (3) находим $C_1 = E$. Следовательно,

$$v_0(x) = Ee^{-\sqrt{GR}\,x}. \tag{4}$$

Соответствующее стационарное распределение тока

$$i = i_0(x) \tag{5}$$

получим, подставляя (4) и (5) в дифференциальное уравнение

$$v_x + Li_t + Ri = 0. \tag{6}$$

Мы находим

$$i_0(x) = E\sqrt{\frac{C}{L}}\,e^{-\sqrt{GR}\,x}. \tag{7}$$

После того как конец провода $x = 0$ заземлен (в момент $t = 0$) через сосредоточенное сопротивление, для напряжения и силы тока в проводе получаем краевую задачу

$$\left.\begin{aligned} v_x + Li_t + Ri = 0, \\ i_x + Cv_t + Gv = 0, \end{aligned}\right\} \quad 0 < x,\, t < +\infty, \tag{8}$$

$$-v(0,\,t) = R_0i(0,\,t), \quad 0 < t < +\infty, \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} v(x,\,0) = Ee^{-\sqrt{GR}\,x}, \\ i(x,\,0) = E\sqrt{\frac{C}{L}}\,e^{-\sqrt{GR}\,x}, \end{aligned}\right\} \quad 0 < x < +\infty. \tag{11}$$

$$\tag{12}$$

Решение краевой задачи (8), (9), (10), (11), (12) ищем в виде

$$v(x,\,t) = e^{-Rt/L}\left[\varphi(x - at) + \psi(x + at)\right],$$

$$i(x,\,t) = e^{-Rt/L}\sqrt{\frac{C}{L}}\left[\varphi(x - at) - \psi(x + at)\right].$$

Для $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ из начальных условий (11), (12) находим выражение

$$\varphi(z) = Ee^{-\sqrt{GR}\,z}, \quad 0 < z < +\infty, \tag{13}$$

$$\psi(z) = 0, \quad 0 < z < +\infty. \tag{14}$$

Из граничного условия (10)

$$\varphi(-z) = \frac{R_0\sqrt{C} - \sqrt{L}}{R_0\sqrt{C} + \sqrt{L}}\,\psi(z) = 0, \quad 0 < z < +\infty. \tag{15}$$

Следовательно,

$$v(x,\,t) = Ee^{-\sqrt{GR}\,x}\sigma_0(x - at), \quad 0 < x,\, t < +\infty, \tag{16}$$

$$i(x,\,t) = E\sqrt{\frac{C}{L}}\,e^{-\sqrt{GR}\,x}\sigma_0(x - at), \quad 0 < x,\, t < +\infty. \tag{17}$$

73. Решением краевой задачи

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x,\, t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(0,\, t) = \mu(t), \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\, 0) = u_t(x,\, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty, \tag{3}$$

является

$$u(x,\, t) = \begin{cases} \mu\left(t - \dfrac{x}{a}\right), & \dfrac{x}{a} < t < +\infty, \\ 0, & 0 < t < \dfrac{x}{a}. \end{cases} \tag{4}$$

Указание. Решение краевой задачи (1), (2), (3) можно искать в виде

$$u(x,\, t) = \varphi\left(t - \frac{x}{a}\right) + \psi\left(t + \frac{x}{a}\right).$$

74. Решением краевой задачи

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x,\, t < +\infty, \quad a^2 = \frac{E}{\rho}, \tag{1}$$

$$ESu_x(0,\, t) = -F(t), \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\, 0) = u_t(x,\, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty, \tag{3}$$

является

$$u(x,\, t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \dfrac{x}{a}, \\ \dfrac{1}{S\sqrt{E\rho}} \displaystyle\int_0^{t - x/a} F(\xi)\, d\xi, & \dfrac{x}{a} < t < +\infty. \end{cases} \tag{4}$$

75. Решением краевой задачи

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial t}, \\ -\frac{\partial p}{\partial t} &= \lambda^2 \frac{\partial w}{\partial x}, \end{aligned}\right\} \quad 0 < x,\, t < +\infty, \tag{1}$$

(1′)

$$w_x(0,\, t) + \frac{P_0 S}{\lambda^2 \Omega_0 \rho_0} w(0,\, t) + \frac{P_0}{\lambda^2 \Omega_0 \rho_0} q(t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$w(x,\, 0) = 0, \quad p(x,\, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty, \tag{3}$$

является

$$w(x,\, t) = \begin{cases} 0, & 0 < \lambda t < x, \\ e^{h(x - \lambda t)} \displaystyle\int_0^{x - \lambda t} \Phi\left(-\frac{\zeta}{\lambda}\right) e^{h\zeta}\, d\zeta, & x < \lambda t < +\infty, \end{cases} \tag{4}$$

где

$$h = \frac{P_0 S}{\lambda^2 \Omega_0 \rho_0}, \quad \Phi(z) = -\frac{P_0}{\lambda^2 \Omega_0 \rho_0} q(z), \quad 0 < z < +\infty, \tag{5}$$

$p(x,\, t)$ получается из $w(x,\, t)$ с помощью соотношения (1) или (1′), $w(x,\, t) = \rho \cdot v(x,\, t)$, где ρ — плотность, а v — скорость жидкости.

76. Решение краевой задачи

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x,\, t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(x,\,0) = u_t(x,\,0) = 0, \quad 0 < x < +\infty, \tag{2}$$

$$Mu_{tt}(0,\,t) = ESu_x(0,\,t) + I\sum_{n=0}^{+\infty}\delta(t - nT), \tag{3}$$

где $\delta(t)$ — односторонняя δ-функция, имеет вид

$$u(x,\,t) = \frac{aI}{ES}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[1 - \exp\left\{-\frac{ES}{aM}\left(t - \frac{x}{a} - nT\right)\right\}\right]\sigma_0\left(t - \frac{x}{a} - nT\right), \quad 0 < x,\, t < +\infty. \tag{4}$$

77. Решение краевой задачи

$$\left.\begin{aligned} v_x + Li_t + Ri = 0,\\ i_x + Cv_t + Gv = 0,\end{aligned}\right\}\ 0 < x,\, t < +\infty, \quad CR = GL, \tag{1}$$

(1′)

$$v(0,\,t) = E\sin\omega t, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$v(x,\,0) = i(x,\,0) = 0, \quad 0 < x < +\infty, \tag{3}$$

имеет вид

$$v(x,\,t) = v_0(x,\,t) + v^*(x,\,t), \tag{4}$$

$$i(x,\,t) = i_0(x,\,t) + i^*(x,\,t), \tag{4′}$$

где

$$v_0(x,\,t) = Ee^{-\alpha x}\sin(\omega t - \beta x) \tag{5}$$

— напряжение установившихся колебаний,

$$i_0(x,\,t) = Ee^{-\alpha x}\frac{1}{R^2 + \omega^2 L^2}\left[(\alpha R + \beta\omega L)\sin(\omega t - \beta x) + (\beta R - \alpha\omega L)\cos(\omega t - \beta x)\right] \tag{6}$$

— сила тока установившихся колебаний,

$$\alpha = \sqrt{\frac{GR + \omega^2 CL + 2\omega CR}{2}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{GR + \omega^2 CL - 2\omega CR}{2}}, \tag{7}$$

а

$$v^*(x,\,t) = e^{-Rt/L}[\varphi(x - at) + \psi(x + at)] \tag{8}$$

— напряжение затухающих колебаний,

$$i^*(x,\,t) = \sqrt{\frac{C}{L}}\,e^{-Rt/L}[\varphi(x - at) - \psi(x + at)] \tag{9}$$

— сила тока затухающих колебаний,

$$\varphi(z) = -\frac{v_0(z,\,0) + i_0(z,\,0)\sqrt{L/C}}{2}, \quad \psi(z) = -\frac{v_0(z,\,0) - i_0(z,\,0)\sqrt{L/C}}{2}, \quad 0 < z < \infty, \tag{10}$$

$$\varphi(z) = -\psi(-z), \quad -\infty < z < 0. \tag{11}$$

При
$$t > \frac{1}{R/L+\alpha a}\left\{\ln 10\left[1+\frac{(|\beta-\alpha\omega|+\alpha R+\beta\omega L)\sqrt{L}}{(R^2+\omega^2L^2)\sqrt{C}}\right]\right\} \qquad (12)$$
амплитуда напряжения затухающих колебаний будет меньше 10 % амплитуды напряжения установившихся колебаний.

Указание. Исключить из (1) и (1′) силу тока и найти установившиеся колебания напряжения, подставляя которые в (1′), найти установившиеся колебания тока. Установившиеся колебания напряжения и тока целесообразно сначала искать в комплексной форме $\widetilde{v}(x,\,t)=v(x)e^{j\omega t}$, $\widetilde{i}(x,\,t)=i(x)e^{j\omega t}$, где $j=\sqrt{-1}$, требуя ограниченности при $x\to+\infty$, а затем вернуться к действительным переменным и удовлетворить граничному условию (2).

3. Задачи для бесконечной прямой, составленной из двух однородных полупрямых. Сосредоточенные факторы. Если неограниченная струна (стержень) получена соединением двух полуограниченных однородных струн (стержней), то, принимая точку соединения за $x=0$, можно написать для отклонения точек струны уравнения
$$u_{1tt}=a_1^2u_{1xx},\quad -\infty<x<0,\quad 0<t<+\infty, \qquad (1)$$
$$u_{2tt}=a_2^2u_{2xx},\quad 0<x<+\infty,\quad 0<t<+\infty \qquad (1')$$
и начальные условия
$$u_1(x,\,0)=f_1(x),\quad u_{1t}(x,\,0)=F(x),\quad -\infty<x<0, \qquad (2)$$
$$u_2(x,\,0)=f_2(x),\quad u_{2t}(x,\,0)=F_2(x),\quad 0<x<+\infty. \qquad (2')$$
К этим уравнениям и начальным условиям нужно еще добавить условия сопряжения в точке $x=0$.

Если, например, струны соединены непосредственно (без каких-либо сосредоточенных включений), то условия сопряжения имеют вид
$$u_1(0,\,t)=u_2(0,\,t), \qquad (3)$$
$$E_1u_{1x}(0,\,t)=E_2u_{2x}(0,\,t). \qquad (4)$$
Решение краевой задачи (1), (1′), (2), (2′), (3), (4) можно искать в виде
$$u_1(x,\,t)=\varphi_1(x-a_1t)+\psi_1(x+a_1t),\quad -\infty<x<0,\quad 0<t<+\infty, \qquad (5)$$
$$u_2(x,\,t)=\varphi_2(x-a_2t)+\psi_2(x+a_2t),\quad 0<x<+\infty,\quad 0<t<+\infty. \qquad (6)$$
Функции $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, $\psi_2(z)$ определяются из начальных условий (2), (2′) и условий сопряжения (3) и (4).

78. Решением краевой задачи [1)]
$$\left.\begin{aligned}u_{1tt}&=a_1^2u_{1xx},\quad -\infty<x<0,\\ u_{2tt}&=a_2^2u_{2xx},\quad 0<x<+\infty,\end{aligned}\right\}\quad 0<t<+\infty, \qquad \begin{matrix}(1)\\(1')\end{matrix}$$
$$u_1(0,\,t)=u_2(0,\,t),\quad E_1\frac{\partial u_1(0,\,t)}{\partial x}=E_2\frac{\partial u_2(0,\,t)}{\partial x},\quad 0<t<+\infty, \qquad (2)$$

[1)] См. задачу 26.

$$u_1(x,\,0)=f\left(-\frac{x}{a_1}\right),\quad \frac{\partial u_1(x,\,0)}{\partial t}=f'\left(-\frac{x}{a_1}\right),\quad -\infty<x<0, \tag{3}$$

$$u_2(x,\,0)=0,\quad \frac{\partial u_2(x,\,0)}{\partial t}=0,\quad 0<x<+\infty, \tag{3'}$$

является

$$u_1(x,\,t)=f\left(t-\frac{x}{a_1}\right)+\frac{\sqrt{E_1\rho_1}-\sqrt{E_2\rho_2}}{\sqrt{E_1\rho_1}+\sqrt{E_2\rho_2}}\,f\left(t+\frac{x}{a_1}\right);$$
$$-\infty<x<0,\quad -\frac{x}{a_1}<t<+\infty;\quad x<0,\quad 0<t<-\frac{x}{a_1}; \tag{4}$$

$$u_2(x,\,t)=\frac{2\sqrt{E_1\rho_1}}{\sqrt{E_1\rho_1}+\sqrt{E_2\rho_2}}\,f\left(t-\frac{x}{a_2}\right),$$
$$a_2^{-1}x<t<+\infty,\quad x>0,\quad 0<t<a_2^{-1}x,\quad 0<t<+\infty. \tag{5}$$

Отраженная волна $\dfrac{\sqrt{E_1\rho_1}-\sqrt{E_2\rho_2}}{\sqrt{E_1\rho_1}+\sqrt{E_2\rho_2}}\,f\left(t+\dfrac{x}{a_1}\right)$ отсутствует при $\sqrt{E_1\rho_1}=\sqrt{E_2\rho_2}$. При $E_2\rho_2\to 0$ отражение будет происходить как от свободного конца, при $E_2\rho_2\to\infty$ — как от закрепленного жестко.

Преломленная волна. При $E_2\rho_2\to 0$ имеет амплитуду в два раза больше, чем падающая волна; при $E_2\rho_2\to+\infty$ преломленная волна исчезает.

Следует особо отметить, что при $E_2\rho_2\to 0$ отражение происходит, как от свободного конца, но преломленная волна существует и даже имеет амплитуду, в два раза бóльшую амплитуды падающей волны.

79. а) при $Mk>T_0\rho$ (и $0<x<+\infty$)

$$\left.\begin{aligned} u(x,\,t)=\frac{Mv_0}{\sqrt{Mk-T_0\rho}}\,\exp\left\{-\frac{\rho}{M}(at-x)\right\}\operatorname{sh}\left[\left(t-\frac{x}{a}\right)\frac{\sqrt{Mk-T_0\rho}}{M}\right],\\ \text{когда}\quad x<at<+\infty,\\ u(x,\,t)=0,\quad \text{когда}\quad 0<at<x;\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

б) при $Mk=T_0\rho$ (и $0<x<+\infty$)

$$u(x,\,t)=v_0\exp\left\{-\frac{k}{M}\left(t-\frac{x}{a}\right)\right\}\left(t-\frac{x}{a}\right)\sigma_0\left(t-\frac{x}{a}\right),\quad 0<t<+\infty; \tag{2}$$

в) при $Mk<T_0\rho$ (и $0<x<+\infty$)

$$\left.\begin{aligned} u(x,\,t)=\frac{Mv_0}{\sqrt{T_0\rho-Mk}}\,\exp\left\{-\frac{\rho}{M}(at-x)\right\}\operatorname{sh}\left[\left(t-\frac{x}{a}\right)\frac{\sqrt{T_0\rho-Mk}}{M}\right],\\ \text{когда}\quad x<at<+\infty,\\ u(x,\,t)=0,\quad \text{когда}\quad 0<at<x.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

При $-\infty<x<0$ решение $u(x,\,t)$ получается из (1), (2), (3) заменой x на $-x$.

80. Решение краевой задачи

$$\left.\begin{aligned} u_{1tt} &= a^2 u_{1xx}, \quad -\infty < x < 0, \\ u_{2tt} &= a^2 u_{2xx}, \quad 0 < x < +\infty, \end{aligned}\right\} \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$T_0[u_{2x}(0,\,t) - u_{1x}(0,\,t)] = ku_1(0,\,t) + Mu_{1tt}(0,\,t) + ru_t(0,\,t) = \tag{1'}$$

$$= ku_2(0,\,t) + Mu_{2tt}(0,\,t) + ru_{2t}(0,\,t), \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u_1(0,\,t) = u_2(0,\,t),$$

$$u_1(x,\,0) = f(x), \quad u_{1t}(x,\,0) = -af'(x), \quad -\infty < x < 0, \tag{3}$$

$$u_2(x,0) = 0, \quad u_{2t}(x,\,0) = 0, \quad 0 < x < +\infty, \tag{3'}$$

может быть представлено в виде

$$u_1(x,\,t) = f(x - at) + \varphi(x + at), \tag{4}$$

$$u_2(x,\,t) = \varphi(x - at), \tag{4'}$$

где $\varphi(z)$ есть решение дифференциального уравнения

$$a^2 M\varphi''(z) + [2T_0 - ar]\varphi'(z) + k\varphi(z) = 2T_0 f'(z) \quad \text{при} \quad -\infty < z < 0 \tag{5}$$

при нулевых начальных условиях, а

$$\varphi(z) = \varphi(-z) - f(z) \quad \text{при} \quad 0 < z < +\infty. \tag{6}$$

81. Решение краевой задачи

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < v_0 t, \quad v_0 t < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

где

$$u = u_1(x,\,t), \quad -\infty < x < v_0 t, \quad u = u_2(x,\,t), \quad v_0 t < x < +\infty,$$

$$u_{1x}(v_0 t,\,t) = u_{2x}(v_0 t,\,t) = -\frac{1}{kp_0}\,\widetilde{p}(t), \tag{2}$$

$$u(x,\,0) = u_t(x,\,0) = 0, \quad -\infty < x < 0, \quad 0 < x < +\infty, \tag{3}$$

имеет вид

$$u_1(x,\,t) = \begin{cases} -\dfrac{a + v_0}{kp_0} \displaystyle\int_0^{(x+at)/(a+v_0)} \widetilde{p}(\xi)\,d\xi, & -at < x < v_0 t, \\ 0, & -\infty < x < -at, \end{cases} \tag{4}$$

$$u_2(x,\,t) = \begin{cases} \dfrac{a - v_0}{kp_0} \displaystyle\int_0^{(at-x)/(a-v_0)} \widetilde{p}(\xi)\,d\xi, & v_0 t < x < at, \\ 0, & at < x < +\infty. \end{cases} \tag{4'}$$

В частности, если $\widetilde{p}(t) = A\cos\omega t$,

$$u_1(x,\,t) = \begin{cases} -\dfrac{a + v_0}{kp_0\omega}\,A \sin\left[\dfrac{\omega}{a + v_0}(x + at)\right], & -at < x < v_0 t, \\ 0, & -\infty < x < -at, \end{cases}$$

$$u_2(x,\,t) = \begin{cases} \dfrac{a - v_0}{kp_0\omega}\,A \sin\left[\dfrac{\omega}{a - v_0}(x - at)\right], & v_0 t < x < at, \\ 0, & at < x < +\infty. \end{cases}$$

Таким образом, в случае $\widetilde{p}(t) = A\cos\omega t$ в направлении, обратном направлению движения источника, распространяется волна с частотой, меньшей частоты источника,

$$\omega_1 = \frac{a}{a+v_0}\,\omega,$$

а в направлении движения источника — волна с частотой, большей частоты источника,

$$\omega_2 = \frac{a}{a-v_0}\,\omega$$

(эффект Допплера).

82. Решением краевой задачи

$$\left.\begin{aligned} &u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < v_0 t, \quad v_0 t < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \\ &u = u_1(x,\,t), \quad -\infty < x < v_0 t, \quad u = u_2(x,\,t), \quad v_0 t < x < +\infty, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$u_1(v_0 t,\,t) = u_2(v_0 t,\,t), \quad T_0\left[\frac{\partial u_2(v_0 t,\,t)}{\partial x} - \frac{\partial u_1(v_0 t,\,t)}{\partial x}\right] = -F(t), \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} &u_1(x,\,0) = u_{1t}(x,\,0) = 0, \quad -\infty < x < 0, \\ &u_2(x,\,0) = u_{2t}(x,\,0) = 0, \quad 0 < x < +\infty, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

является

$$u_1(x,\,t) = \begin{cases} \dfrac{a^2 - v_0^2}{2aT_0} \displaystyle\int_0^{(x+at)/(a+v_0)} F(\xi)\,d\xi, & -at < x < v_0 t, \\ 0, & -\infty < x < -at, \end{cases} \tag{4}$$

$$u_2(x,\,t) = \begin{cases} \dfrac{a^2 - v_0^2}{2aT_0} \displaystyle\int_0^{(at-x)/(a-v_0)} F(\xi)\,d\xi, & v_0 t < x < at, \\ 0, & at < x < +\infty. \end{cases} \tag{4'}$$

4. Задачи для конечного отрезка. В случае конечного однородного отрезка длины l решение краевой задачи

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \tag{1}$$

$$u(x,\,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,\,0) = \psi(x), \quad 0 < x < l, \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 u_{tt} + \alpha_2 u_t + \alpha_3 u_x + \alpha_4 u = \mu(t), \quad x = 0, \\ &\beta_1 u_{tt} + \beta_2 u_t + \beta_3 u_x + \beta_4 u = \mu^*(t), \quad x = l, \end{aligned}\right\} \quad 0 < t < +\infty, \tag{3}$$

можно искать в виде

$$u(x,\,t) = \varphi_1(x - at) + \varphi_2(x + at), \tag{4}$$

причем функции $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ при $0 < z < l$ определяются из начальных условий (2), а для других необходимых значений продолжаются с помощью граничных условий (3).

Можно также искать решение краевой задачи (1), (2), (3) с помощью формулы Даламбера

$$u(x,\,t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,d\xi$$

для неограниченной прямой, продолжая $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ на всю прямую $-\infty < z < +\infty$ с помощью граничных условий (3).

83. $u(x,\,t) = A\sin\dfrac{\pi x}{l}\cos\dfrac{\pi at}{l}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty.$

Указание. Решение получается с помощью формулы Даламбера при нечетном и периодическом с периодом $2l$ продолжении начальных условий.

84. $u(x,\,t) = \dfrac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty,$

где

$$\varphi(z) = \begin{cases} Az, & -l < z < l, \\ A(2l - z), & l < z < 3l, \end{cases}$$

$$\varphi(z) = \varphi(z + 4l), \quad -\infty < z < +\infty.$$

85. $u(x,\,t) = \dfrac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty,$

где

$$\varphi(z) = \varphi_n(z), \quad -l + 2nl < z < l + 2nl, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots,$$

причем

$$\varphi_{-n}(z) = -\varphi_n(-z), \quad \varphi_0(z) = Az,$$

$$\varphi_1(z) = Ale^{-h(z-l)} - e^{-hz}\int\limits_{-l}^{z-2l}\left[\varphi_0'(-\zeta) + h\varphi_0(-\zeta)\right]e^{h(\zeta+2l)}\,d\zeta,$$

$$\varphi_2(z) = Ale^{-h(z-l)} - e^{-hz}\left\{\int\limits_{-l}^{l}\left[\varphi_0'(-\zeta) + h\varphi_0(-\zeta)\right]e^{h(\zeta+2l)}\,d\zeta + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{l}^{z-2l}\left[\varphi_{-1}'(-\zeta) + h\varphi_{-1}(-\zeta)\right]e^{h(\zeta+2l)}\,d\zeta\right\},$$

$$\varphi_n(z) = Ale^{-h(z-l)} - e^{-hz}\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\int\limits_{(2k-3)l}^{(2k-1)l}\left[\varphi_{-k+1}'(-\zeta) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + h\varphi_{-k+1}(\zeta)\right]e^{h(\zeta+2l)}\,d\zeta + \int\limits_{(2n-3)l}^{z-2l}\left[\varphi_{-n+1}'(-\zeta) + h\varphi_{-n+1}(-\zeta)\right]e^{h(\zeta+2l)}\,d\zeta\right\}.$$

86. Решение. Сначала решаем краевую задачу

$$u_{tt} = a^2u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(l,\,t) = 0, \quad 0 < t < +\infty. \tag{2}$$

$$u(x,\,0) = 0, \quad u_t(x,\,0) = \frac{I}{\rho}\,\delta(x - x_0), \quad 0 < x_0 < l, \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

где $\delta(x)$ — односторонняя δ-функция [1]). Ее решением является

[1]) См. сноску к решению задачи 66.

$$u(x,\,t)=\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\frac{I}{\rho}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k\big\{\delta(\xi-x_0+2kl)-\delta(\xi+x_0+2kl)\big\}\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{2a\rho}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k\big\{\sigma_0(x+at-x_0+2kl)-\sigma_0(x+at+x_0+2kl)-$$

$$-\sigma_0(x-at-x_0+2kl)+\sigma_0(x-at+x_0+2kl)\big\}.$$

Переходя к пределу при $x_0\to l$ в полученном решении, найдем решение исходной задачи

$$u(x,\,t)=\frac{I}{2a\rho}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k\big\{\sigma_0[x+at+(2k-1)l]-\sigma_0[x+at+(2k+1)l]-$$

$$-\sigma_0[x-at+(2k-1)l]+\sigma_0[x-at+(2k+1)l]\big\}.$$

87. Р е ш е н и е. В течение акта соударения для продольных смещений $u(x,\,t)$ точек стержня имеем краевую задачу

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\quad 0<x<l,\quad 0<t<+\infty,\tag{1}$$

$$u(0,\,t)=0,\quad 0<t<+\infty,\tag{2}$$

$$Mu_{tt}(l,\,t)=-ESu_x(l,\,t),\quad 0<t<t_0,\tag{2'}$$

где t_0 — момент окончания акта соударения,

$$u(x,\,0)=0,\quad 0<x<l,\tag{3}$$

$$u_t(x,\,0)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<l,\\ -v_0, & x=l.\end{cases}\tag{3'}$$

Момент t_0 окончания акта соударения характеризуется тем, что при $0<t<t_0$ должно быть $u_x(l,\,t)<0$, а при $t=t_0$ $u_x(l,\,t_0)=0$, причем, если бы мы предположили, что груз M и для дальнейших значений времени t оставался бы прикрепленным к концу стержня, то при значениях $t>t_0$, мало отличающихся от t_0, должно быть $u_x(l,\,t)>0$.

Решением краевой задачи (1), (2), (2'), (3), (3') является

$$u(x,\,t)=\varphi(at-x)+\varphi(at+x),\tag{4}$$

где функция $\varphi(z)$ определяется следующим образом:

$$\varphi'(z)=0,\quad -l<z<l,\tag{5}$$

$$\varphi(z)=0,\quad -l<z<l,\tag{6}$$

$$\varphi''(z)+\frac{1}{\alpha l}\,\varphi'(z)=\varphi''(z-2l)-\frac{1}{\alpha l}\,\varphi'(z-2l),\quad l<z<+\infty,\tag{7}$$

$\alpha=\dfrac{M}{\rho Sl}$ — отношение массы груза к массе стержня. С помощью дифференциального уравнения (7) и второго начального условия (3') определяется функция $\varphi'(z)$ на отрезке $l<z<3l$. Затем с помощью этого же дифференциального уравнения $\varphi'(z)$ определяется последовательно на интервалах $3l<z<5l$, $5l<z<7l$, ..., причем константа интегрирования каждый раз определяется из условия непрерывности изменения скорости конца $u_t(l,\,t)$ при $t>0$ и, в частности, при $t=\dfrac{2l}{a}$,

$\frac{4l}{a}$, $\frac{6l}{a}$, ... Так получаются выражения

$$\varphi'(z) = \frac{v_0}{a} e^{-(z-l)/(\alpha l)}, \quad l < z < 3l, \tag{5'}$$

$$\varphi'(z) = \frac{v_0}{a} e^{-(z-l)/(\alpha l)} + \frac{v_0}{a}\left[1 - \frac{2}{\alpha l}(z-3l)\right] e^{-(z-3l)/(\alpha l)}, \quad 3l < z < 5l, \tag{5''}$$

$$\varphi'(z) = \frac{v_0}{a} e^{-(z-l)/(\alpha l)} + \frac{v_0}{a}\left[1 - \frac{2}{\alpha l}(z-3l)\right] e^{-(z-3l)/(\alpha l)} + \\ + \frac{v_0}{a}\left[1 - \frac{4}{\alpha l}(z-3l) + \frac{2}{\alpha^2 l^2}(z-5l)^2\right] e^{-(z-5l)/(\alpha l)}, \quad 5l < z < 7l. \tag{5'''}$$

Функция $\varphi(z)$ получается интегрированием $\varphi'(z)$ на интервалах $l < z < 3l$, $3l < z < 5l$, $5l < z < 7l$, ... с учетом непрерывности изменения $u(l, t)$ с течением времени.

Так получаются выражения

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(z) = \frac{\alpha l v_0}{a}\left[1 - e^{-(z-l)/(\alpha l)}\right], \quad l < z < 3l, \\ &\varphi(z) = -\frac{\alpha l v_0}{a} e^{-(z-l)/(\alpha l)} + \frac{\alpha l v_0}{a}\left[1 + \frac{2}{\alpha l}(z-3l)\right] e^{-(z-3l)/(\alpha l)}, \\ &\qquad\qquad 3l < z < 5l, \\ &\varphi(z) = \frac{\alpha l v_0}{a}\left[e^{-(z-l)/(\alpha l)} - 1\right] + \frac{\alpha l v_0}{a}\left[1 + \frac{2}{\alpha l}(z-3l)\right] e^{-(z-3l)/(\alpha l)} - \\ &\qquad - \frac{\alpha l v_0}{a}\left[1 + \frac{2}{\alpha^2 l^2}(z-5l)^2\right] e^{-(z-5l)/(\alpha l)}, \quad 5l < z < 7l. \end{aligned}\right\} \tag{6'}$$

При $0 < t < \frac{l}{a}$ в силу (6) $\varphi(at - x) = 0$, поэтому согласно (4)

$$u(x, t) = \varphi(at + x) \quad \text{при} \quad 0 < t < \frac{l}{a}, \tag{8}$$

т. е. по стержню распространяется только «обратная» волна $\varphi(at + x)$, идущая от конца $x = l$, подвергнувшегося удару; при $t = \frac{l}{a}$ она достигнет закрепленного конца и при $\frac{l}{a} < t < \frac{2l}{a}$ к ней прибавится отраженная волна $\varphi(at - x)$, т. е. решение будет иметь вид

$$u(x, t) = \varphi(at - x) + \varphi(at + x), \quad \frac{l}{a} < t < \frac{2l}{a}. \tag{9}$$

При $t = \frac{2l}{a}$ волна $\varphi(at - x)$ отразится от конца $x = l$, так что слагаемое $\varphi(at + x)$ в решении (4) на интервале $\frac{2l}{a} < t < \frac{3l}{a}$ будет иметь уже другое выражение.

Таким образом, $u(x, t)$ имеет различные выражения на интервалах

$$0 < t < \frac{l}{a}, \quad \frac{l}{a} < t < \frac{2l}{a}, \quad \ldots, \quad n\frac{l}{a} < t < (n+1)\frac{l}{a}, \quad \ldots, \tag{10}$$

$u_x(l,\,t)$ — различные выражения на интервалах

$$0 < t < \frac{2l}{a}, \quad \frac{2l}{a} < t < \frac{4l}{a}, \quad \ldots, \quad 2n\,\frac{l}{a} < t < (2n+2)\,\frac{l}{a}, \quad \ldots \tag{11}$$

Акт соударения не может закончиться при $0 < t < \dfrac{2l}{a}$, так как при этих значениях t будет $u_x(l,\,t) < 0$.

Для того чтобы акт соударения закончился в момент t, принадлежащий интервалу $\dfrac{2l}{a} < t < \dfrac{4l}{a}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$2 + e^{-2/\alpha} < \frac{4}{\alpha},$$

т. е.

$$\alpha < 1,73.$$

Примечание. Так как реальные поверхности могут обладать неровностями, то для приложимости этого решения к реальным случаям удара необходимо, чтобы время, в течение которого достигается плотное соприкосновение торца ударяющего груза со свободным торцом стержня, было пренебрежимо мало по сравнению со временем пробега волны возмущения по стержню. Деформации, возникающие в грузе, должны быть пренебрежимо малы по сравнению с деформациями в стержне.

88. В течение акта соударения для продольных смещений $u(x,\,t)$ точек стержня имеем краевую задачу

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u_x(0,\,t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$Mu_{tt}(l,\,t) = -ESu_x(l,\,t), \quad 0 < t < t_0, \tag{2'}$$

где t_0 — момент окончания акта соударения,

$$u(x,\,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{3}$$

$$u_t(x,\,0) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < l, \\ -v_0, & x = l. \end{cases} \tag{3'}$$

Момент окончания акта соударения определяется так же, как и в предыдущей задаче.

Решение краевой задачи (1), (2), (2′), (3), (3′) имеет вид

$$u(x,\,t) = \varphi(at - x) + \varphi(at + x), \tag{4}$$

где $\varphi(z)$ определяется следующим образом:

$$\varphi'(z) = 0, \quad -l < z < l, \tag{5}$$

$$\varphi(z) = 0, \quad -l < z < l, \tag{6}$$

$$\varphi''(z) + \frac{1}{\alpha l}\,\varphi'(z) = -\varphi''(z - 2l) + \frac{1}{\alpha l}\,\varphi'(z - 2l), \quad l < z < +\infty, \tag{7}$$

где $\alpha = \dfrac{M}{\rho S l}$ — отношение массы груза к массе стержня.

Сначала с помощью дифференциального уравнения (7) определяется $\varphi'(z)$ последовательно на интервалах $l < z < 3l$, $3l < z < 5l$ и

т. д. с учетом начального условия (3′) и непрерывности $u_t(l,\,t)$ при $0 < t < +\infty$:

$$\varphi'(z) = -\frac{v_0}{a}\,e^{-(z-l)/(\alpha l)}, \quad l < z < 3l, \tag{5′}$$

$$\varphi'(z) = -\frac{v_0}{a}e^{-(z-l)/(\alpha l)} + \frac{v_0}{a}\left[1 - \frac{2}{\alpha l}(z-3l)\right]e^{-(z-3l)/(\alpha l)}, \quad 3l < z < 5l, \tag{5″}$$

. . . . . .

Затем интегрированием $\varphi'(z)$ с учетом непрерывности при $t > 0$ получается выражение для $\varphi(z)$ на этих интегралах:

$$\varphi(z) = -\frac{v_0\alpha l}{a}\left[1 - e^{-(z-l)/(\alpha l)}\right], \quad l < z < 3l. \tag{6′}$$

. . . . . .

89. Решение краевой задачи[1)]

$$\left(1-\frac{x}{H}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1-\frac{x}{H}\right)^2\frac{\partial u}{\partial x}\right], \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(0,\,t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$Mu_{tt}(l,\,t) = -ESu_x(l,\,t), \quad 0 < t < t_0, \tag{2′}$$

где t_0 — момент окончания акта соударения,

$$u(x,\,0) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

$$u_t(x,\,0) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < l, \\ -v_0, & x = l, \end{cases} \tag{3′}$$

имеет вид

$$u(x,\,t) = \frac{\varphi(at-x) - \varphi(at+x)}{H-x}. \tag{4}$$

Функция $\varphi(x)$ определяется следующим образом:

$$\varphi(z) = 0, \quad -l < z < l, \tag{5}$$

$$\alpha\varphi''(z) + \varphi'(z) + \frac{\varphi(z)}{H-l} = \alpha\varphi''(z-2l) - \\ - \varphi'(z-2l) + \frac{\varphi(z-2l)}{H-l}, \quad l < z < +\infty, \tag{6}$$

где $\alpha = \dfrac{Ma^2}{ES}$.

С помощью этого дифференциального уравнения, начального условия (3′) и условий непрерывности $u_t(l,\,t)$ при $0 < t < +\infty$ и непрерывности $u(l,\,t)$ при $0 \leqslant t < +\infty$ функция определяется последовательно на интервалах $l < z < 3l$, $3l < z < 5l$ и т. д.

$$\varphi(z) = \frac{v_0}{a}(H-l)\,\frac{e^{\lambda_1(z-l)} - e^{\lambda_2(z-l)}}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad l < z < 3l, \tag{5′}$$

и т. д., где λ_1 и λ_2 — корни уравнения

$$\lambda^2 + \frac{\lambda}{\alpha} + \frac{1}{\alpha(H-l)} = 0.$$

[1)] См. задачу 21.

90. Решение задачи аналогично решению задач 87, 88, 89.

91. Решения краевых задач

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l; \tag{2}$$

а) $$u(0, t) = \mu(t), \quad u(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{3}$$

б) $$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = \mu(t), \quad 0 < t < +\infty, \tag{3'}$$

в) $$u(0, t) = \mu(t), \quad u_x(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{3''}$$

имеют соответственно вид [1])

а) $$u(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \widetilde{\mu}\left(t - \frac{x + 2nl}{a}\right) - \sum_{n=1}^{+\infty} \widetilde{\mu}\left(t - \frac{2nl - x}{a}\right), \tag{4}$$

б) $$u(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\widetilde{\mu}\left(t - \frac{x - (2n+1)l}{a}\right) - \widetilde{\mu}\left(t - \frac{x + (2n+1)l}{a}\right)\right], \tag{4'}$$

в) $$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\widetilde{\mu}\left(t - \frac{x + 2nl}{a}\right) - \widetilde{\mu}\left(t + \frac{x - 2nl}{a}\right)\right](-1)^n + \widetilde{\mu}\left(t - \frac{x}{a}\right), \tag{4''}$$

где

$$\widetilde{\mu}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t < 0, \\ \mu(t) & \text{при} \quad t \geqslant 0. \end{cases} \tag{5}$$

92. Решение краевой задачи

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial t}, \\ -\frac{\partial p}{\partial t} &= \lambda^2 \frac{\partial w}{\partial x}, \end{aligned}\right\} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty \text{ [2])}, \tag{1'}$$

$$w(0, t) = \varphi(t), \quad p(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$w(x, 0) = 0, \quad p(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

имеет вид [3])

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\widetilde{\varphi}\left(t - \frac{x + 2nl}{\lambda}\right) - \widetilde{\varphi}\left(t + \frac{x - 2nl}{\lambda}\right)\right](-1)^n + \widetilde{\varphi}\left(t - \frac{x}{\lambda}\right), \tag{4}$$

где

$$\widetilde{\varphi}(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < 0, \\ \varphi(t), & 0 < t < +\infty, \end{cases} \tag{5}$$

$$p(x, t) = \lambda \widetilde{\varphi}\left(t - \frac{x}{\lambda}\right) + \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left\{\widetilde{\varphi}\left(t - \frac{x + 2nl}{\lambda}\right) + \widetilde{\varphi}\left(t + \frac{x - 2nl}{\lambda}\right)\right\}. \tag{6}$$

---

[1]) См. [7, с. 70–73].

[2]) См. ответ к задаче 5.

[3]) См. решение предыдущей задачи.

Таким образом,

$$p(0,\,t)=\lambda\widetilde{\varphi}(t)+2\lambda\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\widetilde{\varphi}\left(t-\frac{2nl}{\lambda}\right).$$

93. Р е ш е н и е. Началом акта соударения является момент, когда левый стержень достигает правого; этот момент принимаем за $t=0$, а точку, в которой в этот момент находятся соприкасающиеся торцы, принимаем за $x=0$. Концом акта соударения называют момент, начиная с которого скорость ударяющегося торца становится меньше скорости ударяемого торца.

Обозначим через $u_1(x,\,t)$ и $u_2(x,\,t)$ смещения поперечных сечений ударяющего и ударяемого стержней. Тогда $u_1(x,\,t)$ и $u_2(x,\,t)$ являются решениями краевой задачи (в течение акта соударения).

$$\left.\begin{aligned}&u_{1tt}=a^2u_{1xx},\quad -l<x<0,\\&u_{2tt}=a^2u_{2xx},\quad 0<x<l,\end{aligned}\right\}\quad 0<t<+\infty,\tag{1}$$

$$u_{1x}(-l,\,t)=0,\quad u_1(0,\,t)=u_2(0,\,t),\quad u_{1x}(0,\,t)=u_{2x}(0,\,t),$$
$$u_{2x}(l,\,t)=0,\quad 0<t<+\infty\ ^{1)},\tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}&u_1(x,\,0)=0,\quad u_{1t}(x,\,0)=v_1,\quad -l<x<0,\\&u_2(x,\,0)=0,\quad u_{2t}(x,\,0)=v_2,\quad 0<x<l.\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

Решение краевой задачи (1), (2), (3) ищем в виде

$$u_1(x,\,t)=\varphi_1(x-at)+\psi_1(x+at),\quad u_2(x,\,t)=\varphi_2(x-at)+\psi_2(x+at).\tag{4}$$

Подставляя (4) в (2) и (3), получим

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_1'(-l-at)+\psi_1'(-l+at)=0,\\&\varphi_2'(l-at)+\psi_2'(l+at)=0,\\&\varphi_1'(-at)+\psi_1'(at)=\varphi_2'(-at)+\psi_2'(at),\end{aligned}\right\}\quad 0<t<+\infty,\tag{5}$$

$$\varphi_1(-at)+\psi_1(at)=\varphi_2(-at)+\psi_2(at),\quad 0<t<+\infty,\tag{6}$$

$$\varphi_1(x)+\psi_1(x)=0,\quad -l<x<0,\tag{7}$$

$$-\varphi_1'(x)+\psi_1'(x)=\frac{v_1}{a},\quad -l<x<0,\tag{8}$$

$$\varphi_2(x)+\psi_2(x)=0,\quad 0<x<l,\tag{9}$$

$$-\varphi_2'(x)+\psi_2'(x)=\frac{v_2}{a},\quad 0<x<l.\tag{10}$$

Из соотношений (7)–(10) находим

$$-\varphi_1'(z)=\psi_1'(z)=\frac{v_1}{2a},\quad -l<z<0,\tag{11}$$

$$-\varphi_2'(z)=\psi_2'(z)=\frac{v_2}{2a},\quad 0<z<l.\tag{12}$$

Соотношения (5), (6) дают

$$\varphi_1'(-l-z)=-\psi_1'(-l+z),\tag{13}$$

[1)] Часть из граничных условий (2) выполняется только при $0<t<t_0$, где t_0 — момент конца акта соударения.

$$\psi_2'(l+z) = -\varphi_2'(l-z), \tag{14}$$

$$\varphi_1'(-z) = \varphi_2'(-z), \tag{15}$$

$$\psi_1'(z) = \psi_2'(z). \tag{16}$$

Из соотношений (13)–(16) следует, что функции $\varphi_1'(z)$, $\psi_1'(z)$, $\varphi_2'(z)$, $\psi_2'(z)$ являются периодическими с периодом $4l$; поэтому каждую из них достаточно определить на интервале $0 \leqslant z \leqslant 4l$; дальнейшее построение осуществляется периодическим продолжением. Такое определение функций $\varphi_1'(z)$, $\psi_1'(z)$, $\varphi_2'(z)$, $\psi_2'(z)$ с помощью соотношений (11)–(16) дает для них значения, изображенные графически на рис. 26.

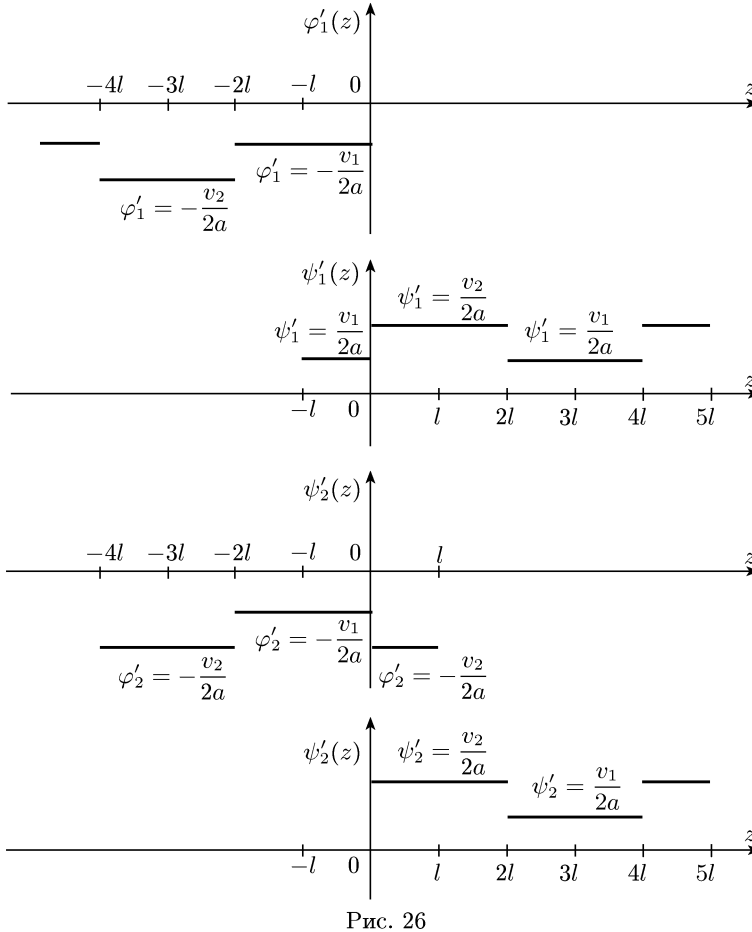


Рис. 26

Используя найденные функции $\varphi_1'(z)$, $\psi_1'(z)$, $\varphi_2'(z)$, $\psi_2'(z)$, находим выражение для

$$u_{1t}(x,\,t), \quad u_{2t}(x,\,t), \quad u_{1x}(x,\,t), \quad u_{2x}(x,\,t).$$

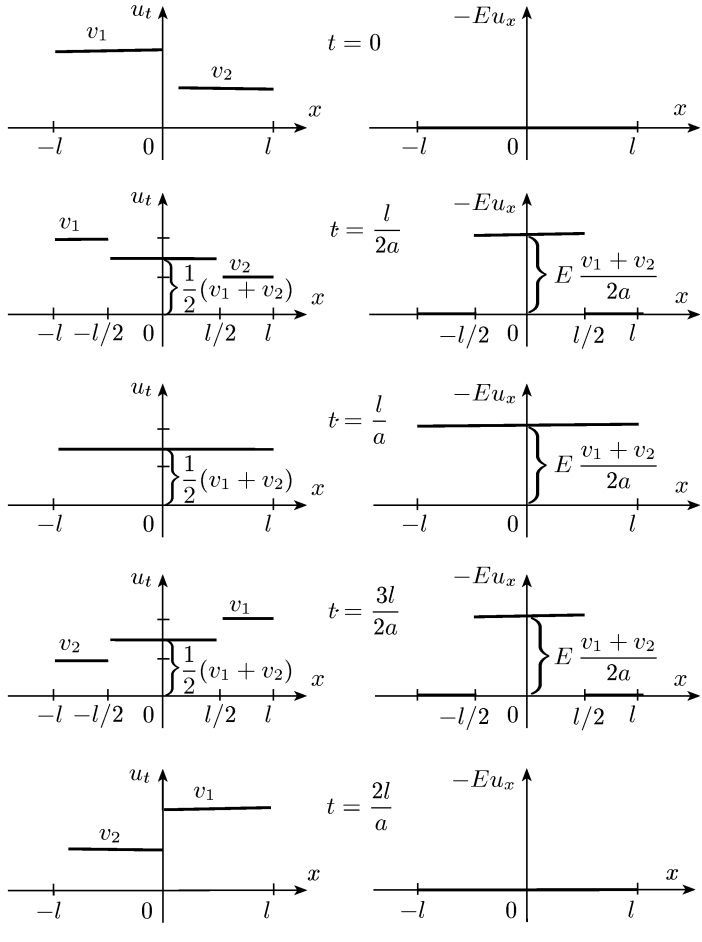


Рис. 27

На рис. 27 изображено графически распределение скоростей и напряжений для моментов времени $t = 0,\ t = \dfrac{l}{2a},\ t = \dfrac{l}{a},\ t = \dfrac{3l}{2a},\ t = \dfrac{2l}{a}$.

94. Решение краевой задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial x} + L\frac{\partial i}{\partial t} + Ri = 0,\\ &\frac{\partial i}{\partial x} + C\frac{\partial v}{\partial t} + Gv = 0, \end{aligned}\right\} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$CR = GL, \tag{1'}$$

$$v(0,\, t) = E, \quad v(l,\, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$v(x,\, 0) = 0, \quad i(x,\, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

ищем в виде

$$v(x,\, t) = v_0(x) + v^*(x,\, t), \tag{4}$$

$$i(x,\,t) = i_0(x) + i^*(x,\,t), \tag{4'}$$

где $v_0(x)$ и $i_0(x)$ — стационарное решение системы (1), (1′), удовлетворяющее граничным условиям (2), которое служит пределом для решения (4), (4′) краевой задачи (1), (1′), (2), (3) при $t \to +\infty$, а $v^*(x,\,t)$ и $i^*(x,\,t)$ — решение системы (1), (1′) при граничных условиях

$$v^*(0,\,t) = 0, \quad v^*(l,\,t) = 0 \tag{2'}$$

и начальных условиях

$$v^*(x,\,0) = -v_0(x), \quad i^*(x,\,0) = -i_0(x). \tag{3'}$$

Мы получаем [1])

$$v_0(x) = E\,\frac{\operatorname{sh}\sqrt{GR}\,(l-x)}{\operatorname{sh}\sqrt{GR}\,l}, \tag{5}$$

$$i_0(x) = E\sqrt{\frac{C}{L}}\,\frac{\operatorname{ch}\sqrt{GR}\,(l-x)}{\operatorname{sh}\sqrt{GR}\,l}, \tag{5'}$$

$$v^*(x,\,t) = e^{-Rt/L}\big[\varphi(x-at) + \psi(x+at)\big], \tag{6}$$

$$i^*(x,\,t) = e^{-Rt/L}\sqrt{\frac{C}{L}}\big[\varphi(x-at) - \psi(x+at)\big], \tag{6'}$$

где

$$\varphi(x) = \frac{f(x)+F(x)}{2}, \quad \psi(x) = \frac{f(x)-F(x)}{2}, \quad 0 < x < l, \tag{7}$$

$$f(x) = -v_0(x), \quad F(x) = -\sqrt{\frac{L}{C}}\,i_0(x), \quad 0 < x < l, \tag{8}$$

с помощью граничных условий (2′) функции $f(x)$ и $F(x)$ продолжаются, как четная и нечетная функции с периодом $2l$.

При t, удовлетворяющем неравенству

$$t > \frac{L}{R}\ln\Big\{10\big[1 + \operatorname{th}\sqrt{GR}\,(l-x)\big]\Big\}, \tag{9}$$

будет выполняться соотношение

$$|i^*(x,\,t)| < 0,1 i_0(x), \tag{10}$$

т. е. сила тока в точке x провода будет отличаться от своего предельного значения при $t \to \infty$ заведомо не более чем на 10 %.

95. Решение краевой задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial x} + L\frac{\partial i}{\partial t} + Ri = 0, \\ &\frac{\partial i}{\partial x} + C\,\frac{\partial v}{\partial t} + Gv = 0, \end{aligned}\right\} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$CR = GL, \tag{1'}$$

$$v(0,\,t) = E, \quad i(l,\,t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$v(x,\,0) = 0, \quad i(x,\,0) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

имеет вид

$$v(x,\,t) = v_0(x) + v^*(x,\,t), \quad i(x,\,t) = i_0(x) + i^*(x,\,t), \tag{4}$$

[1]) См. решение задачи 72.

где $v_0(x)$ и $i_0(x)$ — стационарное решение системы (1), (1′), удовлетворяющее граничным условиям (2),

$$v_0(x) = E\,\frac{\operatorname{ch}\sqrt{GR}(l-x)}{\operatorname{ch}\sqrt{GR}\,l}, \quad i_0(x) = E\sqrt{\frac{C}{L}}\,\frac{\operatorname{sh}\sqrt{GR}\,(l-x)}{\operatorname{ch}\sqrt{GR}\,l}, \tag{5}$$

а $v^*(x,\,t)$ и $i^*(x,\,t)$ — решение системы (1), (1′) при граничных условиях

$$v^*(0,\,t) = 0, \quad i^*(l,\,t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{6}$$

и начальных условиях

$$v^*(x,\,0) = -v_0(x), \quad i^*(x,\,0) = -i_0(x), \quad 0 < x < l, \tag{7}$$

$$v^*(x,\,t) = e^{-Rt/L}\big[\varphi(x-at) + \psi(x+at)\big], \tag{8}$$

$$i^*(x,\,t) = e^{-Rt/L}\sqrt{\frac{C}{L}}\,\big[\varphi(x-at) - \psi(x+at)\big], \tag{9}$$

$$\varphi(x) = \frac{f(x)+F(x)}{2}, \quad \psi(x) = \frac{f(x)-F(x)}{2}, \quad 0 < x < l, \tag{10}$$

$$f(x) = -v_0(x), \quad F(x) = -\sqrt{\frac{L}{C}}\,i_0(x), \quad 0 < x < l. \tag{11}$$

Из граничных условий (6) следует, что функции $f(x)$ и $F(x)$ продолжаются, соответственно, нечетно и четно относительно $x = 0$, четно и нечетно относительно $x = l$ и периодически с периодом $4l$.

При t, удовлетворяющем неравенству

$$t > \frac{L}{R}\ln\left\{10[1 + \operatorname{th}\sqrt{GR}\,(l-x)]\right\}, \tag{12}$$

напряжение в точке x провода будет отличаться от своего предельного значения при $t \to +\infty$ заведомо не более чем на 10 %.

96. а)

$$v(l,\,t) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad 0 < t < T, \\ E\left\{1 - \left(\dfrac{Z-R_0}{Z+R_0}\right)^n\right\} \quad \text{при} \quad (2n-1)T < t < (2n+1)T, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n = 1,\,2,\,3,\,\ldots, \end{cases}$$

где $Z = \sqrt{\dfrac{L}{C}}$ — волновое сопротивление, $T = \dfrac{l}{a}$, $a = \dfrac{l}{\sqrt{LC}}$ — скорость распространения электромагнитных возмущений по проводу;

б)

$$v(l,\,t) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad 0 < t < T, \\ 2E\left\{1 - \exp\left[-\varkappa\left(\dfrac{t}{T} - 1\right)\right]\right\} \quad \text{при} \quad T < t < 3T, \\ -2E\exp\left\{-\varkappa\left(\dfrac{t}{T} - 1\right)\right\} + 2E\left\{1 - 2\varkappa\left(\dfrac{t}{T} - 2\right)\right\}\times \\ \qquad\qquad \times \exp\left\{-\varkappa\left(\dfrac{t}{T} - 3\right)\right\} \quad \text{при} \quad 3T < t < 5T, \end{cases}$$

и т. д., $\varkappa = \dfrac{lC}{C_0}$;

в)

$$v(l,\,t)=\begin{cases}0 \quad \text{при} \quad 0<t<T,\\ 2E\exp\left\{-\varepsilon\left(\dfrac{t}{T}-1\right)\right\} \quad \text{при} \quad T<t<3T,\\ 2E\exp\left\{-\varepsilon\left(\dfrac{t}{T}-1\right)\right\}-2E\left\{1-2\varepsilon\left(\dfrac{t}{T}-3\right)\right\}\times\\ \qquad\qquad \times\exp\left\{-\varepsilon\left(\dfrac{t}{T}-3\right)\right\} \quad \text{при} \quad 3T<t<5T,\end{cases}$$

и т. д., $\varepsilon=\dfrac{lL}{L_0}$.

Указание. По поводу законов отражения от конца $x=l$ см. решение задачи 71.

§ 3. Метод разделения переменных

1. Свободные колебания в среде без сопротивления.

97. Решением краевой задачи

$$u_{tt}=a^2u_{xx}, \quad 0<x<l, \quad 0<t<+\infty, \tag{1}$$

$$u(0,\,t)=u(l,\,t)=0, \quad 0<t<+\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\,0)=\begin{cases}\dfrac{h}{x_0}\,x, & 0<x\leqslant x_0,\\ \dfrac{h(l-x)}{l-x_0}, & x_0<x<l,\end{cases} \tag{3}$$

$$u_t(x,\,0)=0, \quad 0<x<l, \tag{3'}$$

является

$$u(x,\,t)=\frac{2hl^2}{\pi^2x_0(l-x_0)}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi x_0}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi at}{l}. \tag{4}$$

В выражении $u(x,\,t)$ исчезают слагаемые, для которых $\sin\dfrac{n\pi x_0}{l}=0$, т. е. отсутствуют обертоны, для которых точка $x=x_0$ является узлом. Энергия n-й гармоники равна $E_n=Mh^2\,\dfrac{a^2l^2}{\pi^2n^2x_0^2(l-x_0)^2}\sin^2\dfrac{n\pi x_0}{l}$, $M=\rho l$.

98. Решение. Находим начальное отклонение струны (рис. 28);

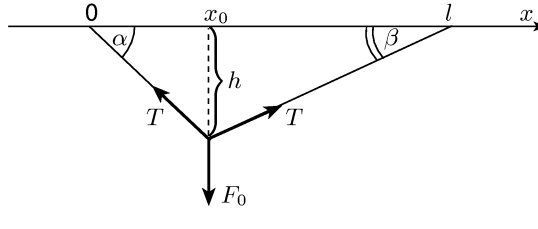


Рис. 28

для этого достаточно определить величину h. Из условия равновесия (в проекциях на вертикальную ось) находим

$$T(\sin\alpha+\sin\beta)=F_0.$$

В силу малости отклонений $\sin\alpha\approx\operatorname{tg}\alpha$, $\sin\beta\approx\operatorname{tg}\beta$ [1], но

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{h}{x_0},\quad \operatorname{tg}\beta=\frac{h}{l-x_0}.$$

Таким образом,

$$h=\frac{F_0x_0(l-x_0)}{lT}\ \text{[2]},\tag{1}$$

$$u(x,\,t)=-\frac{2hl^2}{\pi^2x_0(l-x_0)}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi x_0}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi at}{l},$$

где h определяется по формуле (1).

99. $u(x,\,t)=\dfrac{32h}{\pi^3}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{l}$, где h — максимальное начальное отклонение струны.

100. $$u(x,\,t)=\frac{4v_0l}{\pi^2a}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi x_0}{l}\sin\frac{n\pi\delta}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi at}{l}.$$

Энергия n-й гармоники равна

$$E_n=\frac{4Mv_0^2}{\pi^2n^2}\sin^2\frac{n\pi x_0}{l}\sin^2\frac{n\pi\delta}{l},\quad M=\rho l.$$

101. Указание. Сначала считаем импульс I равномерно распределенным по отрезку $x_0-\delta\leqslant x\leqslant x_0+\delta$ струны. Тогда мы приходим к выражению для $u(x,\,t)$, приведенному в ответе к предыдущей задаче, причем

$$v_0=\frac{1}{2\delta\rho},$$

где ρ — линейная плотность массы струны. Переходя к пределу при $\delta\to0$, получим для решения исходной задачи выражение

$$u(x,\,t)=\frac{2I}{\pi a\rho}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x_0}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi at}{l}.$$

Энергия n-й гармоники равна

$$E_n=\frac{I^2}{M}\sin^2\frac{n\pi x_0}{l},\quad M=\rho l.$$

---

[1] В силу малости отклонения, T не зависит от отклонения. См. [7, с. 24].

[2] Начальное отклонение можно было бы определить, решая задачу: $u''(x)=0$, $T(u'(x_0+0)-u'(x_0-0))=F_0$, $u(x_0-0)=u(x_0+0)$, $u(0)=u(l)=0$.

Решение задачи можно получить также, полагая

$$u_t(x,\,0) = \frac{I}{\rho}\,\delta(x - x_0),$$

где $\delta(x)$ есть дельта-функция[1]).

102. $$u(x,\,t) = \frac{8v_0\delta}{\pi^2 a}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\,\frac{\cos\dfrac{n\pi\delta}{l}\sin\dfrac{n\pi x_0}{l}}{1-\dfrac{(2\delta n)^2}{l^2}}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi a t}{l}.$$

Энергия n-й гармоники равна

$$E_n = \frac{16v_0^2\delta^2\rho}{l\pi^2}\,\frac{1}{\left[1-\dfrac{(2\delta n)^2}{l^2}\right]^2}\cos^2\frac{n\pi\delta}{l}\sin^2\frac{n\pi\delta}{l}.$$

103. $$u(x,\,t) = \frac{8kl}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2n+1)\pi a t}{2l}.$$

104. Ответ получается из ответа предыдущей задачи, если положить

$$k = \frac{F_0}{ES},$$

где E — модуль упругости, а S — площадь поперечного сечения стержня.

105. Решением краевой задачи

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(x,\,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,\,0) = \psi(x), \quad 0 < x < l, \tag{2}$$

$$u_x(0,\,t) = u_x(l,\,t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{3}$$

является

$$u(x,\,t) = \frac{1}{l}\int_0^l [\varphi(z) + t\psi(z)]\,dz + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\cos\frac{ak\pi t}{l} + b_k\sin\frac{ak\pi t}{l}\right)\cos\frac{k\pi x}{l},$$

где

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(z)\cos\frac{k\pi z}{l}\,dz, \quad b_k = \frac{2}{a\pi k}\int_0^l \psi(z)\cos\frac{k\pi z}{l}\,dz. \tag{4}$$

106. Решение задачи может быть получено из решения предыдущей задачи, если положить $\varphi(x) = 0$,

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant l - \delta, \\ -\dfrac{l}{\delta\rho}, & l - \delta < x \leqslant l, \end{cases}$$

а затем перейти к пределу при $\delta \to 0$, либо положить $\varphi(x) = 0$, а

$$\psi(x) = -\frac{I}{\rho}\,\delta(x - x_0)\ ^{2}), \quad 0 < x_0 < l,$$

---

[1]) См. сноску к решению задачи 56.

[2]) По поводу выбора коэффициента при $\delta(x - x_0)$ см. вторую сноску на с. 181.

где $\delta(x)$ есть дельта-функция, а затем перейти к пределу при $x_0 \to l$

$$u(x,\,t) = -\frac{I}{\rho l}\,t - \frac{2I}{\pi a\rho}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\cos\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k\pi at}{l}.$$

107. $u(x,\,t) = -\dfrac{4I}{\pi a\rho}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi at}{2l}.$

108. Решение краевой задачи

$$u_{tt} = a^2u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u_x(0,\,t) = 0, \quad u_x(l,\,t) + hu(l,\,t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,\,0) = \psi(x), \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

имеет вид

$$u(x,\,t) = \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos\lambda_n at + b_n\sin\lambda_n at)\cos\lambda_n x, \tag{4}$$

где λ_n — собственные значения краевой задачи

$$\left.\begin{aligned} &X''(x) + \lambda^2X(x) = 0, \quad 0 < x < l,\\ &X'(0) = 0, \quad X'(l) + hX(l) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

причем λ_n являются положительными корнями уравнения

$$\lambda\operatorname{tg}\lambda l = h, \tag{6}$$

$X_n(x) = \cos\lambda_n x$ — собственные функции краевой задачи (5).

Квадрат нормы n-й собственной функции находим с помощью (6)

$$\|X_n\|^2 = \int_0^l X_n^2(x)\,dx = \frac{l}{2}\left[1 + hl\left(\frac{\cos\lambda_n l}{\lambda_n l}\right)^2\right] = \frac{l}{2}\left[1 + \frac{h}{l(\lambda_n^2 + h^2)}\right], \tag{7}$$

$$a_n = \frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^l\varphi(z)\cos\lambda_n z\,dz, \quad b_n = \frac{1}{\|X_n\|^2 a\lambda_n}\int_0^l\psi(z)\cos\lambda_n a\,dz. \tag{8}$$

109. Решение краевой задачи

$$u_{tt} = a^2u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,\,t) + hu(l,\,t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\,0) = \frac{F_0}{ES}\,x, \quad u_t(x,\,0) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

получается из решения предыдущей краевой задачи при

$$\varphi(x) = \frac{F_0}{ES}\,x, \quad \psi(x) = 0,$$

$$u(x,\,t)=\frac{2F_0}{ElS}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1+hl)\cos\lambda_n l-1}{\lambda_n^2\left\{1+hl\left(\dfrac{\cos\lambda_n l}{\lambda_n l}\right)^2\right\}}\cos\lambda_n x\cos\lambda_n at=$$

$$=\frac{2F_0}{ElS}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1+hl)-\sqrt{1+\dfrac{h^2}{\lambda_n^2}}}{\lambda_n^2\sqrt{1+\dfrac{h^2}{\lambda_n^2}}\left\{1+\dfrac{h}{l(\lambda_n^2+h^2)}\right\}}\cos\lambda_n x\cos\lambda_n t,\qquad(4)$$

где λ_n — положительные корни уравнения $\lambda\operatorname{tg}\lambda l=h$.

110.

$$u(x,\,t)=\frac{2I}{al\rho}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos\lambda_n x\sin a\lambda_n t}{\lambda_n\left\{1+hl\left(\dfrac{\cos\lambda_n l}{\lambda_n l}\right)^2\right\}}=\frac{2I}{al\rho}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos\lambda_n x\sin\lambda_n at}{\lambda_n\left\{1+\dfrac{h}{l(\lambda_n^2+h^2)}\right\}},$$

где λ_n — положительные корни уравнения $\lambda\operatorname{tg}\lambda l=h$.

111. Решением краевой задачи

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\quad 0<x<l,\quad 0<t<+\infty,\qquad(1)$$

$$u_x(0,t)-hu(0,\,t)=0,\quad u_x(l,\,t)+hu(l,\,t)=0,\quad 0<t<+\infty,\qquad(2)$$

$$u(x,\,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,\,0)=\psi(x),\quad 0<x<l,\qquad(3)$$

является

$$u(x,\,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos a\lambda_n t+b_n\sin a\lambda_n t)\sin(\lambda_n x+\varphi_n),\qquad(4)$$

где λ_n — собственные значения краевой задачи

$$X''(x)+\lambda^2X(x)=0,\quad 0<x<l,\qquad(5)$$

$$X'(0)-hX(0)=0,\qquad(6)$$

$$X'(l)+hX(l)=0,\qquad(6')$$

а $X_n(x)=\sin(\lambda_n x+\varphi_n)$ — собственные функции этой краевой задачи; λ_n являются корнями уравнения

$$\operatorname{ctg}\lambda l=\frac12\left(\frac{\lambda}{h}-\frac{h}{\lambda}\right),\qquad(7)$$

а

$$\varphi_n=\operatorname{arctg}\frac{\lambda_n}{h}.\qquad(8)$$

Квадрат нормы собственной функции $X_n(x)$ равен

$$\|X_n\|^2=\int_0^l\sin^2(\lambda_n x+\varphi_n)\,dx=\frac{(\lambda_n^2+h^2)l+2h}{2(h^2+\lambda_n^2)},\qquad(9)$$

поэтому

$$a_n=\frac{2(\lambda_n^2+h^2)}{(\lambda_n^2+h^2)l+2h}\int_0^l\varphi(z)\sin(\lambda_n z+\varphi_n)\,dz,\qquad(10)$$

$$b_n=\frac{2(\lambda_n^2+h^2)}{a\lambda_n(\lambda_n^2+h^2)l+2a\lambda_n h}\int_0^l\psi(z)\sin(\lambda_n z+\varphi_n)\,dz.\qquad(11)$$

Указание. 1) Уравнение (7) может быть получено следующим образом. Из общего решения уравнения (5)

$$X_n(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x,$$

удовлетворяя граничному условию (6), получим

$$X(x, \lambda) = C_2 \left\{ \frac{\lambda}{h} \cos \lambda x + \sin \lambda x \right\} = C_2 \overline{X}(x, \lambda). \tag{12}$$

Подставляя (12) в граничное условие (6′), получим

$$\left\{ \frac{\partial X(x, \lambda)}{\partial x} + hX(x, \lambda) \right\}_{x=l} = C_2 \left(\frac{\partial \overline{X}(x, \lambda)}{\partial x} + h\overline{X}(x, \lambda) \right\}_{x=l} = 0,$$

так как $C_2 \neq 0$, иначе (12) было бы тривиальным решением, то

$$\left\{ \frac{\partial \overline{X}(x, \lambda)}{\partial x} + h\overline{X}(x, \lambda) \right\}_{x=l} = 0. \tag{13}$$

После подстановки явного выражения

$$\overline{X}(x, \lambda) = \frac{\lambda}{h} \cos \lambda x + \sin \lambda x \tag{13′}$$

(13) преобразуется в уравнение (7)

$$\operatorname{ctg} \lambda l = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{h} - \frac{h}{\lambda} \right). \tag{7}$$

Это уравнение приблизительно можно решать графически [1]).

Подставляя в (12) вместо λ собственное значение λ_n, получим соответствующую собственную функцию

$$X_n(x) = C_2 X(x, \lambda_n).$$

Таким образом собственная функция определяется с точностью до постоянного множителя C_2. Этот множитель можно выбрать так, чтобы функция $X_n(x)$ имела вид

$$X_n(x) = X(x, \lambda_n) = \sin(\lambda_n x + \varphi_n), \tag{14}$$

где

$$\varphi_n = \operatorname{arctg} \frac{\lambda_n}{h}. \tag{14′}$$

Полагая $\lambda l = \xi$, получим

$$\operatorname{ctg} \xi = \frac{1}{2} \left(\frac{\xi}{lh} - \frac{lh}{\xi} \right). \tag{15}$$

Обозначая через $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ абсциссы точек пересечения котан-

[1]) О решении трансцендентного уравнения с любой степенью точности см. [1, с. 204].

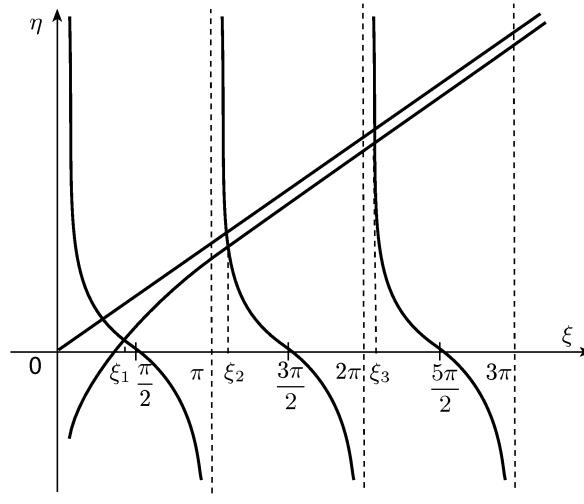


Рис. 29

генсоиды $\eta = \operatorname{ctg}\xi$ и гиперболы $\eta = \frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{lh} - \frac{lh}{\xi}\right)$, получим $\lambda_n = \frac{\xi_n}{l}$ (рис. 29).

2) Квадрат нормы собственной функции (9) может быть найден непосредственным интегрированием

$$\|X_n\|^2 = \int_0^l \sin^2(\lambda_n x + \varphi_n)\,dx \tag{16}$$

либо переходом к пределу при $\lambda \to \lambda_n$ в равенстве

$$\int_0^l X(x,\,\lambda)X(x,\,\lambda_n)\,dx = \frac{X'_x(l,\,\lambda_n)X(l,\,\lambda) - X'_x(l,\,\lambda)X(l,\,\lambda_n)}{\lambda^2 - \lambda_n^2}. \tag{17}$$

Раскрывая неопределенность в правой части (17) при $\lambda \to \lambda_n$, получим

$$\int_0^l X^2(x,\,\lambda_n)\,dx = \frac{X'_x(l,\,\lambda_n)X'_\lambda(l,\,\lambda_n) - X''_{x\lambda}(l,\,\lambda_n)X(l,\,\lambda_n)}{2\lambda_n}. \tag{18}$$

Равенство (17) получается из равенств

$$X''(x,\,\lambda) + \lambda^2 X(x,\lambda) = 0,$$
$$X''(x,\,\lambda_n) + \lambda_n^2 X(x,\lambda_n) = 0$$

умножением первого из них на $X(x,\,\lambda_n)$, второго — на $X(x,\,\lambda)$, вычитанием результатов и последующим интегрированием по частям.

При вычислении интеграла (16) или правой части равенства (18) необходимо воспользоваться граничным условием (6).

Замечание. Уравнение (7) может быть переписано в виде

$$\operatorname{tg}\lambda_n l = \frac{2\lambda_n h}{\lambda_n^2 - h^2}. \tag{19}$$

При $h \to 0$ (свободные концы) из (19) получим

$$\lim_{h\to 0} \operatorname{tg}\lambda_n l = 0.$$

Из (14′) и (14) найдем $\lim\limits_{h\to 0} \varphi_n = \dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{h\to 0} X_n(x) = \sin\left(\lambda_n x + \dfrac{\pi}{2}\right)$, следовательно,

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 0,\ 1,\ 2, \ldots,$$

$$X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{l}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Этот результат был получен непосредственно при решении задачи 105. При $h \to \infty$ (концы фиксированы) из (19) получим

$$\lim_{h\to\infty} \operatorname{tg}\lambda_n l = 0.$$

Из (14′) и (14) найдем

$$\lim_{h\to\infty} \varphi_n = 0, \quad \lim_{h\to\infty} \sin(\lambda_n x + \varphi_n) = \sin\lambda_n x.$$

Следовательно,

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1,\ 2,\ 3, \ldots,$$

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Этот результат был также получен непосредственно при решении задачи 97.

112. Решением краевой задачи

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u_x(0,t) - h_1 u(0,\ t) = 0, \quad u_x(l,\ t) + h_2 u(l,\ t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\ 0) = \varphi(x), \quad u_t(x,\ 0) = \psi(x), \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

является

$$u(x,\ t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos a\lambda_n t + b_n \sin a\lambda_n t)\sin(\lambda_n x + \varphi_n), \tag{4}$$

где λ_n — собственные значения краевой задачи

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{5}$$

$$X'(0) - h_1 X(0) = 0, \quad X'(t) + h_2 X(l) = 0. \tag{6}$$

Собственные значения являются корнями уравнения

$$\operatorname{ctg}\lambda l = \frac{\lambda^2 - h_1 h_2}{\lambda(h_1 + h_2)}, \tag{7}$$

а $X_n(x) = \sin(\lambda_n x + \varphi_n)$ — соответствующие собственные функции, где

$$\varphi_n = \operatorname{arctg}\frac{\lambda_n}{h_1}. \tag{8}$$

Квадрат нормы собственной функции равен

$$\|X_n\|^2 = \int_0^l X_n^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\left\{ l + \frac{(\lambda_n^2 + h_1 h_2)(h_1 + h_2)}{(\lambda_n^2 + h_1^2)(\lambda_n^2 + h_2^2)} \right\}. \tag{9}$$

113. Решением краевой задачи

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad l = 2\pi R, \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(l,\,t), \qquad u_x(0,\,t) = u_x(l,\,t), \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,\,0) = \psi(x), \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

является

$$u(x,\,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a'_n \cos\frac{2\pi nat}{l} + b'_n \sin\frac{2\pi nat}{l} \right) \cos\frac{2\pi nx}{l} + \\ + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a''_n \cos\frac{2\pi nat}{l} + b''_n \sin\frac{2\pi nat}{l} \right) \sin\frac{2\pi nx}{l},$$

$$a'_0 = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(z)\cos\frac{2\pi nz}{l}\,dz, \quad a''_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(z)\sin\frac{2\pi nz}{l}\,dz, \quad n = 1,\,2,\,3,\,\ldots,$$

$$a'_0 = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(z)\,dz,$$

$$b'_n = \frac{1}{n\pi a}\int_0^l \psi(z)\cos\frac{2\pi nz}{l}\,dz,$$

$$b''_n = \frac{1}{n\pi a}\int_0^l \psi(z)\sin\frac{2\pi nz}{l}\,dz, \quad n = 1,\,2,\,3,\ldots,$$

$$b'_0 = \frac{1}{2n\pi a}\int_0^l \psi(z)\,dz.$$

У к а з а н и е. Подставляя общее решение $X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$ уравнения

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

в граничные условия

$$X(0) = X(l), \quad X'(0) = X'(l)$$

и приравнивая нулю определитель полученной системы уравнений относительно A и B, найдем трансцендентное уравнение для определения собственных значений. Собственными значениями оказываются $\lambda_n = \dfrac{2\pi n}{l}$, причем подстановка в уравнения для определения A и B значения λ_n обращает эти уравнения в тождества при любых A и B. Следовательно, каждому собственному значению λ_n соответствуют две линейно независимые собственные функции $\cos\lambda_n x$ и $\sin\lambda_n x$; так как $\lambda_n = \dfrac{2\pi n}{l}$, то все собственные функции ортогональны на от-

резке $0 \leqslant x \leqslant l$ [1]). В случае, когда одному и тому же собственному значению соответствуют k линейно независимых собственных функций, это собственное значение называется k-кратным. Таким образом все собственные значения рассматриваемой задачи двукратны.

114. Указание. Полная энергия струны $0 \leqslant x \leqslant l$ в случае граничных условий третьего рода $u_x(0, t) - hu(0, t) = 0$, $u_x(l, t) + hu(l, t) = 0$ выражается следующим образом (проверьте это):

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \left\{T_0 u_x^2(z, t) + \rho u_t^2(z, t)\right\} dz + \frac{T_0 h}{2}\left\{u^2(l, t) + u^2(0, t)\right\}.$$

В случае граничных условий первого и второго рода

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \left\{T_0 u_x^2(z, t) + \rho u_t^2(z, t)\right\} dz$$

(см. [7, с. 28]).

Выражая энергию полного колебания струны

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} T_n(t) X_n(x),$$

где $X_n(x)$ — собственные функции соответствующей краевой задачи, используя ортоногональность собственных функций, а также граничные условия, нетрудно показать, что в случае граничных условий первого, второго и третьего рода

$$E(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} E_n(t),$$

где в случае граничных условий первого и второго рода

$$E_n(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \{T_0 U_{nx}^2(z, t) + \rho U_{nt}^2(z, t)\}\, dz,$$

а в случае граничных условий третьего рода

$$E_n(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \left\{T_0 U_{nx}^2(z, t) + \rho U_{n_t}^2(z, t)\right\} dz + \frac{T_0 h}{2}\left\{U_n^2(l, t) + U_n^2(0, t)\right\}.$$

115. Решениями краевых задач

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(0, t) = u(l, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xx}(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{3а}$$

$$u(0, t) = u(l, t) = u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{3б}$$

[1]) Ортогональность собственных функций, соответствующих различным собственным значениям, вытекает из общей теории, а ортогональность $\cos\dfrac{2\pi n x}{l}$ и $\sin\dfrac{2\pi n x}{l}$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$ проверяется непосредственным вычислением интеграла.

$$u_{xx}(0,\,t)=u_{xx}(l,\,t)=u_{xxx}(0,\,t)=u_{xxx}(l,\,t)=0,\quad 0<t<+\infty \quad \text{(3в)}$$

соответственно являются:

а) $u(x,\,t)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\dfrac{n^2\pi^2at}{l^2}+b_n\sin\dfrac{n^2\pi^2at}{l^2}\right)\sin\dfrac{n\pi x}{l}$, где

$$a_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\varphi(z)\sin\frac{\pi nz}{l}\,dz,\quad b_n=\frac{2l}{n^2\pi^2a}\int\limits_0^l\psi(z)\sin\frac{n\pi z}{l}\,dz,\quad n=1,\,2,\,3,\,\ldots,$$

б) $u(x,\,t)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos a\lambda_n^2t+b_n\sin a\lambda_n^2t)X_n(x)$, где

$$X_n(x)=(\operatorname{sh}\lambda_nl-\sin\lambda_nl)(\operatorname{ch}\lambda_nx-\cos\lambda_nx)-$$
$$-(\operatorname{ch}\lambda_nl-\cos\lambda_nl)(\operatorname{sh}\lambda_nx-\sin\lambda_nx),$$

а λ_n являются неотрицательными корнями уравнения $\operatorname{ch}\lambda l\cos\lambda l=1$;

в) $u(x,\,t)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos a\lambda_n^2t+b_n\sin a\lambda_n^2t)X_n(x)$, где

$$X_n(x)=(\operatorname{sh}\lambda_nl-\sin\lambda_nl)(\operatorname{ch}\lambda_nx+\cos\lambda_nx)-$$
$$-(\operatorname{ch}\lambda_nl-\cos\lambda_nl)(\operatorname{sh}\lambda_nx+\sin\lambda_nx),$$

а λ_n являются неотрицательными корнями трансцендентного уравнения

$$\operatorname{ch}\lambda l\cos\lambda l=1.$$

Замечание. 1) Ортогональность собственных функций устанавливается следующим образом. Умножая уравнение $X_n'''(x)-\lambda_n^4X_n(x)=0$ на $X_m(x)$, а уравнение $X_m'''(x)-\lambda_m^4X_m(x)=0$ на $X_n(x)$, вычитая результаты и интегрируя по частям, получим

$$\int\limits_0^l X_m(x)X_n(x)\,dx=$$
$$=\frac{\{X_m'''(x)X_n(x)-X_n'''(x)X_m(x)-X_m''(x)X_n'(x)+X_n''(x)X_m'(x)\}\,\big|_{x=0}^{x=l}}{\lambda_m^4-\lambda_n^4},$$

откуда непосредственно следует равенство

$$\int\limits_0^l X_m(x)X_n(x)\,dx=0,\quad m\neq n,$$

при граничных условиях (3а), (3б), (3в) или получающихся комбинированием (3а) на одном конце и (3б) на другом и т. д.

2) Для вычисления квадрата нормы собственной функции $X_n(x)$ можно поступать аналогично тому, как это было сделано в указании к задаче 111; тогда получится следующая формула[1)] (аналогичная

[1)] См.: *Крылов А.Н.* Собрание трудов. Т. III, ч. 2. — М.: Изд. АН СССР, 1949. — С. 202–203.

формуле (18) решения задачи 111):

$$\int_0^l X_n^2(x)\,dx = \frac{l}{4}\left\{X_n^2(l) - 2X_n'''(l)X_n'(l) + X_n''^2(l)\right\},$$

откуда в случае (3б)

$$\int_0^l X_n^2(x)\,dx = \frac{l}{4}X_n''^2(l)$$

и в случае (3в)

$$\int_0^l X_n^2(x)\,dx = \frac{l}{4}X_n^2(l).$$

116. Если колебания стержня вызваны ударным импульсом I в точке $x = x_0$, то в ответе предыдущей задачи будем иметь:

а) $a_n = 0, \quad b_n = \dfrac{2lI\sin\dfrac{n\pi x_0}{l}}{n^2\pi^2 a\rho}$; б) $a_n = 0, \quad b_n = \dfrac{4IX_n(x_0)}{a\lambda_n^2 X_n''^2(l)l\rho}$;

в) $a_n = 0, \quad b_n = \dfrac{4IX_n(x_0)}{a\lambda_n^2 X_n^2(l)l\rho}$.

2. Свободные колебания в среде с сопротивлением. Если колебания струны или продольные колебания стержня происходят в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости, то уравнение колебаний имеет вид [1])

$$u_{tt} = a^2u_{xx} - 2\nu u_t, \quad \nu > 0, \tag{1}$$

а граничные условия записываются так же, как и в случае колебаний в среде без сопротивления. Записывая граничные условия в виде

$$\alpha_1 u_x(0,\,t) + \beta_1 u(0,\,t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$\alpha_2 u_x(l,\,t) + \beta_2 u(l,\,t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2'}$$

мы учтем возможность граничных условий первого, второго и третьего рода. Пусть заданы также начальные условия

$$u(x,\,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,\,0) = \psi(x). \tag{3}$$

Разделяя переменные, приходим к такой же краевой задаче

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{4}$$

$$\alpha_1 X'(0) + \beta_1 X(0) = 0, \tag{5}$$

$$\alpha_2 X'(l) + \beta_2 X(l) = 0 \tag{5'}$$

для определения собственных чисел, как и в случае, когда колебания происходят в среде без сопротивления. Пусть λ_n и $X_n(x)$ — собственные значения и собственные функции задачи (4), (5), (5'). Для определения $T_n(t)$ получим дифференциальное уравнение

$$T_n''(t) + 2\nu T_n'(t) + a^2\lambda_n^2 T_n(t) = 0, \tag{6}$$

[1]) См. задачу 15.

отличающееся членом $2\nu T_n'(t)$ от соответствующего уравнения в случае колебаний в среде без сопротивления. Его общее решение имеет вид

$$\left.\begin{aligned} T_n(t) &= (a_n \operatorname{ch}\omega_n t + b_n \operatorname{sh}\omega_n t)e^{-\nu t}, \\ \omega_n &= \sqrt{\nu^2 - a^2\lambda_n^2}, \end{aligned}\right\} \quad \nu^2 > a^2\lambda_n^2, \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} T_n(t) &= (a_n \cos\omega_n t + b_n \sin\omega_n t)e^{-\nu t}, \\ \omega_n &= \sqrt{a^2\lambda_n^2 - \nu^2}, \end{aligned}\right\} \quad \nu^2 < a^2\lambda_n^2, \tag{7'}$$

$$T_n(t) = (a_n + b_n t)e^{-\nu t}, \quad \nu = a\lambda_n. \tag{7''}$$

Решение же краевой задачи (1), (2), (2′), (3) имеет вид

$$u(x,\,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} T_n(t)X_n(x). \tag{8}$$

Легко видеть, что

$$\lim_{t\to+\infty} T_n(t) = 0$$

в каждом из случаев (7), (7′) и (7″).

Коэффициенты a_n и b_n определяются через начальные условия следующим образом:

$$a_n = \frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^l \varphi(z)X_n(z)\,dz, \quad b_n\omega_n - \nu a_n = \frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^l \psi(z)X_n(z)\,dz, \tag{9}$$

причем

$$\omega_n = 1 \quad \text{при} \quad \nu = a\lambda_n.$$

117. $u(x,\,t) = \dfrac{2l^2 h e^{-\nu t}}{\pi^2 x_0(l-x_0)} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sin\frac{n\pi x_0}{l} \sin\frac{n\pi x}{l}\,\Theta_n(t)$, где

$$\Theta_n(t) = \operatorname{ch}\omega_n t + \frac{\nu}{\omega_n}\operatorname{sh}\omega_n t, \quad \omega_n = \sqrt{\nu^2 - \frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}}, \quad \frac{n\pi a}{l} < \nu,$$

$$\Theta_n(t) = 1 + \nu t, \quad \frac{n\pi a}{l} = \nu,$$

$$\Theta_n(t) = \cos\omega_n t + \frac{\nu}{\omega_n}\sin\omega_n t, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2} - \nu^2}, \quad \frac{n\pi a}{l} > \nu.$$

118. $u(x,\,t) = \dfrac{2Ie^{-\nu t}}{l\rho} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\omega_n} \sin\frac{n\pi x_0}{l} \sin\frac{n\pi x}{l}\,\Theta_n(t)$, где

$$\Theta_n(t) = \operatorname{sh}\omega_n t, \quad \omega_n = \sqrt{\nu^2 - \frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}} \quad \text{при} \quad \frac{n\pi a}{l} < \nu,$$

$$\Theta_n(t) = t \quad \text{при} \quad \frac{n\pi a}{l} = \nu,$$

$$\Theta_n(t) = \cos\omega_n t, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2} - \nu^2} \quad \text{при} \quad \frac{n\pi a}{l} > \nu.$$

119. $u(x,\,t)=\dfrac{8kl}{\pi^2}\,e^{-\nu t}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{2l}\,\Theta_n(t)$, где $\Theta_n(t)$ имеет такие же значения, как в ответе к задаче 117.

120.
$$u(x,\,t)=a_0+b_0e^{-2\nu t}+e^{-\nu t}\sum_{n=1}^{+\infty}\Theta_n(t)\cos\frac{n\pi x}{l}, \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\Theta_n(t)=a_n+b_nt, && \frac{n\pi a}{l}=\nu,\\
&\Theta_n(t)=a_n\operatorname{ch}\omega_nt+b_n\operatorname{sh}\omega_nt, && \frac{n\pi a}{l}<\nu,\\
&\Theta_n(t)=a_n\cos\omega_nt+b_n\sin\omega_nt, && \frac{n\pi a}{l}>\nu,
\end{aligned}\right\}\quad n=1,\,2,\,\ldots, \tag{2}$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(z)\cos\frac{n\pi z}{l}\,dz,\quad b_n\omega_n-\nu a_n=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(z)\cos\frac{n\pi z}{l}\,dz,\quad n=1,\,2,\,\ldots,$$

$$b_0=\frac{-1}{2\nu l}\int_0^l\psi(\xi)\,d\xi,\quad a_0=\frac{1}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\,d\xi+\frac{1}{2\nu l}\int_0^l\psi(\xi)\,d\xi,$$

$$\omega_n=\sqrt{\nu^2-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}}\quad\text{при}\quad\frac{n\pi a}{l}<\nu,\quad\omega_n=1\quad\text{при}\quad\frac{n\pi a}{l}=\nu,$$

$$\omega_n=\sqrt{\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}-\nu^2}\quad\text{при}\quad\frac{n\pi a}{l}>\nu.$$

121.
$$u(x,\,t)=e^{-\nu t}\sum_{n=1}^{+\infty}\Theta_n(t)\cos\lambda_nx, \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\Theta_n(t)=a_n\operatorname{ch}\omega_nt+b_n\operatorname{sh}\omega_nt, && \omega_n=\sqrt{\nu^2-\lambda_n^2a^2}\quad\text{при}\quad a\lambda_n<\nu,\\
&\Theta_n(t)=a_n+b_nt, && \omega_n=1\quad\text{при}\quad a\lambda_n=\nu,\\
&\Theta_n(t)=a_n\cos\omega_nt+b_n\sin\omega_nt, && \omega_n=\sqrt{a^2\lambda_n^2-\nu^2}\quad\text{при}\quad a\lambda_n>\nu,
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

λ_n — положительные корни уравнения $\lambda\operatorname{tg}\lambda l=h$,

$$a_n=\frac{2}{l\left\{1+\dfrac{h}{l(\lambda_n^2+h^2)}\right\}}\int_0^l\varphi(z)\cos\lambda_nz\,dz,$$

$$b_n\omega_n-\nu a_n=\frac{2}{l\left\{1+\dfrac{h}{l(\lambda_n^2+h^2)}\right\}}\int_0^l\psi(z)\cos\lambda_nz\,dz.$$

122 [1]**.**
$$u(x,\,t)=e^{-\nu t}\sum_{n=1}^{+\infty}\Theta_n(t)\sin(\lambda_nx+\varphi_n), \tag{1}$$

где $\Theta_n(t)$ и ω_n определяются по формулам (2) ответа предыдущей

[1] См. ответ к задачам 111 и 112.

задачи, λ_n — положительные корни уравнения

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{ctg}\lambda l &= \frac{\lambda^2 - h_1h_2}{\lambda(h_1+h_2)}, \\ \varphi_n &= \operatorname{arctg}\frac{\lambda_n}{h_1}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$a_n = \frac{2}{\left\{l + \dfrac{(\lambda_n^2 + h_1h_2)(h_1+h_2)}{(\lambda_n^2+h_1^2)(\lambda_n^2+h_2^2)}\right\}} \int_0^l \varphi(z)\sin(\lambda_n z+\varphi_n)\,dz, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$b_n\omega_n - \nu a_n = \frac{2}{\left\{l + \dfrac{(\lambda_n^2 + h_1h_2)(h_1+h_2)}{(\lambda_n^2+h_1^2)(\lambda_n^2+h_2^2)}\right\}} \int_0^l \psi(z)\sin(\lambda_n z+\varphi_n)\,dz,$$
$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

123. Решение краевой задачи

$$v_{xx} = CLv_{tt} + CRv_t, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$v(0, t) = v_x(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$v(x, 0) = v_0, \quad v_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

имеет вид

$$v(x, t) = e^{-Rt/(2L)} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\sin(\omega_n t + \varphi_n), \tag{4}$$

где

$$\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{2l\sqrt{CL}}\sqrt{1 - \frac{CR^2l^2}{L\pi^2(2n+1)^2}}\ ^{1}),$$

$$a_n = \frac{4v_0}{\pi(2n+1)\sin\varphi_n}, \quad \operatorname{tg}\varphi_n = 2\omega_n\frac{L}{R}.$$

124. $v(x,t) = -\dfrac{2Q\pi}{LC^2l^2(b-a)}e^{-\nu t}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n+1)\cos(\omega_n t - \varphi_n)}{\omega_n\sqrt{\omega_n^2+\sigma^2}} \times$

$$\times \sin\frac{(2n+1)\pi(a+b)}{4l}\sin\frac{(2n+1)\pi(a-b)}{4l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$$
при $0 < x < a$,

$$\nu = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right), \quad \sigma = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C}\right), \quad \omega_n = \sqrt{\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4l^2CL} - \sigma^2},$$

$$\operatorname{tg}\varphi_n = \frac{\sigma}{\omega_n}.$$

---

[1]) Предполагается, что $L > \dfrac{CR^2l^2}{\pi^2}$.

125. $v(x,\,t)=\dfrac{\pi^2 Q}{2LC^2l^3}\,e^{-\nu t}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(2n+1)^2}{\omega_n\sqrt{\omega_n^2+\sigma^2}}\times$

$$\times\sin\frac{(2n+1)\pi x_0}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\cos(\omega_n t-\varphi_n)\quad\text{при}\quad 0<x<x_0,$$

где величины ν, σ, ω_n, φ_n определяются так же, как в ответе к предыдущей задаче.

3. Вынужденные колебания под действием распределенных и сосредоточенных сил в среде без сопротивления и в среде с сопротивлением. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний струны под действием непрерывно распределенной силы в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости, имеет вид

$$u_{tt}=a^2u_{xx}-2\nu u_t+f(x,\,t),$$

причем

$$F(x,\,t)=\rho f(x,\,t)$$

есть вынуждающая сила, приходящаяся на единицу длины, ρ — линейная плотность массы струны, $f(x,\,t)$ — ускорение, которое получила бы точка струны с абсциссой x в момент t, если бы на нее не действовали никакие другие силы, кроме вынуждающей. Член $-2\nu u_t$, представляющий собой сопротивление, пропорциональное скорости, исчезает, если колебания происходят в среде без сопротивления.

Краевая задача

$$u_{tt}=a^2u_{xx}-2\nu u_t+f(x,\,t),\quad 0<x<l,\quad 0<t<+\infty,\tag{1}$$

$$\alpha_1u_x(0,\,t)+\beta_1u(0,\,t)=0,\quad \alpha_2u_x(l,\,t)+\beta_2u(l,\,t)=0,\quad 0<t<+\infty,\tag{2}$$

$$u(x,\,0)=\varphi(x),\quad u(x,\,0)=\psi(x),\quad 0<x<l,\tag{3}$$

может быть сведена к более простым [1] задачам.

Если удается найти какое-либо частное решение $w(x,\,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям (2), то решение краевой задачи можно будет представить в виде

$$u(x,\,t)=v(x,\,t)+w(x,\,t),\tag{4}$$

где $v(x,\,t)$ есть решение краевой задачи

$$v_{tt}=a^2v_{xx}-2\nu v_t,\quad 0<x<l,\quad 0<t<+\infty,\tag{5}$$

$$\alpha_1v_x(0,\,t)+\beta_1v(0,\,t)=0,\quad \alpha_2v_x(l,\,t)+\beta_2v(l,\,t)=0,\quad 0<t<+\infty,\tag{6}$$

$$v(x,\,0)=\varphi(x)-w(x,\,0),\quad v_t(x,\,0)=\psi(x)-w_t(x,\,0),\quad 0<x<l,\tag{7}$$

которое рассмотрено в предыдущих параграфах.

Аналогично обстоит дело в случае вынужденных колебаний под действием сосредоточенных сил, приложенных к концам или внутренним точкам струны.

[1] См. [7, с. 103]; сведение рассматриваемой задачи к более простым может быть выполнено аналогично.

126. Р е ш е н и е. Имеем краевую задачу

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - 2\nu u_t + g, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(0,\, t) = u(l,\, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\, 0) = \begin{cases} \dfrac{h}{x_0}\, x, & 0 < x < x_0, \\ \dfrac{h(l-x)}{l-x_0}, & x_0 < x < l, \end{cases} \tag{3}$$

$$u_t(x,\, 0) = 0, \quad 0 < x < l. \tag{3'}$$

Ищем сначала стационарное решение $w(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям (2).

Подставляя $w(x)$ в (1), получаем

$$0 = a^2\, \frac{d^2 w}{dx^2} + g, \quad 0 < x < l,$$

откуда

$$w(x) = -\frac{g}{2a^2}\, x^2 + C_1 x + C_2. \tag{4}$$

Из граничных условий (2) находим

$$C_2 = 0, \quad C_1 = +\frac{gl}{2a^2}. \tag{5}$$

Следовательно,

$$w(x) = -\frac{g}{2a^2}\, x^2 + \frac{gl}{2a^2}\, x. \tag{6}$$

Теперь остается решить краевую задачу

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} - 2\nu v_t, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{7}$$

$$v(0,\, t) = v(l,\, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{8}$$

$$v(x,\, 0) = \begin{cases} \dfrac{h}{x_0}\, x + \dfrac{g}{2a^2}\, (x^2 - lx), & 0 < x < x_0, \\ \dfrac{h(l-x)}{l-x_0} + \dfrac{g}{2a^2}\, (x^2 - lx), & x_0 < x < l, \end{cases} \tag{9}$$

$$v_t(x,\, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{10}$$

$u(x,\, t)$ представится в виде

$$u(x,\, t) = v(x,\, t) + w(x). \tag{11}$$

Выражение для $v(x,\, t)$ получается по формулам (7), (7'), (7''), (8), (9) введения к предыдущему пункту ответов и указаний настоящего параграфа.

Заметим, что если бы член $-2\nu u_t$ в уравнении (1) отсутствовал, то стационарное частное решение краевой задачи (1), (2) и, следовательно, начальные условия (9) и (10) для нахождения функции $v(x,\, t)$ остались бы прежними. В этом случае уравнение (7) не содержит члена $-2\nu v_t$ и $v(x,\, t)$ находится без труда.

При отыскании $v(x,\,t)$ можно не пользоваться явным выражением для $w(x)$ [1]. Пусть $w(x)$ есть стационарное решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям (2). Тогда решение краевой задачи (1), (2), (3) может быть найдено в виде (11), причем $v(x,\,t)$ является решением краевой задачи

$$u_{tt} = a^2 v_{xx} - 2\nu v_t, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{7'}$$

$$v(0,\,t) = v(l,\,t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{8'}$$

$$v(x,\,0) = \varphi(x) - w(x), \quad 0 < x < l, \quad \varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{h}{x_0}\,x, & 0 < x < x_0, \\ \dfrac{h(l-x)}{l-x_0}, & x_0 < x < l, \end{cases} \tag{9}$$

$$v_t(x,\,0) = 0, \quad 0 < x < l. \tag{10}$$

Пусть $a\lambda_n > \nu$, $n = 1,\,2,\,3,\ldots$ Тогда

$$v(x,\,t) = e^{-\nu t} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) X_n(t),$$

где

$$\omega_n = \sqrt{\frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2} - \nu^2}, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{l}.$$

Мы имеем

$$b_n = \frac{\nu}{\omega_n}\,a_n, \quad a_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l v(z,\,0) X_n(z)\,dz =$$

$$= \frac{2}{l} \int_0^l [\varphi(z) - w(z)] X_n(z)\,dz = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(z) X_n(z)\,dz - \frac{2}{l} \int_0^l w(z) X_n(z)\,dz.$$

Первый интеграл в последней разности равен

$$\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(z) X_n(z)\,dz = \frac{2l^2 h \sin \dfrac{n\pi x_0}{l}}{n^2\pi^2 v_0 (l - x_0)}.$$

Второй интеграл может быть вычислен с помощью уравнения

$$X_n''(x) + \lambda_n^2 X_n(x) = 0$$

и интегрирования по частям

$$-\frac{2}{l} \int_0^l w(z) X_n(z)\,dz = \frac{2}{l\lambda_n^2} \int_0^l w(z) X_n''(z)\,dz =$$

$$= \frac{2}{l\lambda_n^2} \left[w(z) X_n'(z) \Big|_0^l - w'(z) X_n(z) \Big|_0^l + \int_0^l w'' X_n\,dz \right].$$

[1] См. [7, с. 104–106].

Так как $X_n(0) = X_n(l) = 0$, $w(0) = w(l) = 0$, $a^2 w''(x) + g = 0$, то

$$-\frac{2}{l}\int_0^l w(z)X_n(z)\,dz = -\frac{2g}{\lambda_n^2 a^2 l}\int_0^l X_n(z)\,dz = -\frac{2g}{\pi n \lambda_n^2 a^2}[1-(-1)^n].$$

Таким образом,

$$v(x,\,t) = \frac{2l^2}{\pi^2}e^{-\nu t}\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\frac{h\sin\dfrac{n\pi x_0}{l}}{n^2 x_0(l-x_0)} + \frac{g[-1+(-1)^n]}{\pi n^3 a^2}\right\}\times$$

$$\times\left(\cos\omega_n t + \frac{\nu}{\omega_n}\sin\omega_n t\right)\sin\frac{n\pi x}{l}. \quad (12)$$

Воспользовавшись найденным ранее явным выражением (6) для $w(x)$, можно теперь написать выражение для решения задачи (1), (2), (3), (3′)

$$u(x,\,t) = -\frac{g}{2a^2}(x^2 - lx) +$$

$$+\frac{2l^2}{\pi^2}e^{-\nu t}\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\frac{h}{n^2 x_0(l-x_0)}\sin\frac{n\pi x_0}{l} + \frac{g}{\pi n^3 a^2}[-1+(-1)^n]\right\}\times$$

$$\times\left(\cos\omega_n t + \frac{\nu}{\omega_n}\sin\omega_n t\right)\sin\frac{n\pi x}{l}. \quad (13)$$

Мы видим, что при $t \to +\infty$ $u(x,\,t) \to w(x)$, где

$$w(x) = -\frac{g}{2a^2}(x^2 - lx),$$

есть положение равновесия под действием силы тяжести.

При $\nu \to 0$ из (13) получим решение задачи для случая, когда колебания происходят в среде без сопротивления.

127. Решением краевой задачи

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + g, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(x,\,0) = 0, \quad u_t(x,\,0) = v_0, \quad 0 < x < l, \quad (2)$$

$$u(0,\,t) = 0, \quad u_x(l,\,t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (3)$$

является

$$u(x,\,t) = \frac{gx}{a^2}\left(l - \frac{x}{2}\right) + \sum_{n=0}^{+\infty}\left\{\frac{16l^2}{(2n+1)^3\pi^3}\cos\frac{(2n+1)\pi a t}{2l} + \right.$$

$$\left. + \frac{8v_0 l^2}{(2n+1)^2\pi^2 a}\sin\frac{(2n+1)\pi a t}{2l}\right\}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}.$$

128. Решением краевой задачи

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0,\,t) = 0, \quad u_x(l,\,t) = \frac{F_0}{ES}, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x,\,0) = 0, \quad u_t(x,\,0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

является

$$u(x,\,t) = \frac{F_0}{ES}x - \frac{8F_0 l}{ES\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2n+1)\pi a t}{2l}.$$

129. Решение. Из краевой задачи [1])

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial t} + 2\nu w, \\ -\frac{\partial p}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial w}{\partial x}, \end{aligned}\right\} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$(1')$$

$$p(0,\, t) = 0, \quad w(l,\, t) = A, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$w(x,\, 0) = 0, \quad p(x,\, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

исключая $p(x,\, t)$, получаем краевую задачу

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2\nu \frac{\partial w}{\partial t}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1''}$$

$$w_x(0,\, t) = 0, \quad w(l,\, t) = A, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2'}$$

$$w(x,\, 0) = w_t(x,\, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{3'}$$

откуда находим

$$w(x,\, t) = A - \frac{4A}{\pi}\, e^{-\nu t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos \widetilde{\omega}_n t + \dfrac{\nu}{\widetilde{\omega}_n} \sin \widetilde{\omega}_n t}{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi(l-x)}{2l}, \tag{4}$$

где

$$\widetilde{\omega}_n = \sqrt{\left[\frac{(2n+1)\pi a}{2l}\right]^2 - \nu^2}.$$

Давление p в сечении $x = l$ находим с помощью (1)

$$p(l,\, t) = p(0,\, t) - \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial t} - 2\nu w\right) dx =$$

$$= -\left\{2\nu l A + \frac{4aA}{\pi}\, e^{-\nu t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(\widetilde{\omega}_n t - 2\varphi_n)}{(2n+1)\cos\varphi_n}\right\}, \tag{5}$$

где

$$\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{\nu}{\widetilde{\omega}_n}. \tag{6}$$

130. $v(x,\, t) = E\, \dfrac{\operatorname{ch}(x-l)\sqrt{GR}}{\operatorname{ch} l\sqrt{GR}} -$

$$- \frac{\pi E}{LCl^2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)e^{-\nu t}}{\widetilde{\omega}_n \sqrt{\widetilde{\omega}_n^2 + \nu^2}} \cos(\widetilde{\omega}_n t - \varphi_n) \cos \frac{(2n+1)\,\pi\,(l-x)}{2l},$$

$$\nu = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right), \quad \widetilde{\omega}_n = \sqrt{\frac{(2n+1)^2\pi^2 a^2}{4l^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C}\right)^2},$$

$\operatorname{tg} \varphi_n = \dfrac{\nu}{\widetilde{\omega}_n}$, причем предполагается, что $\dfrac{\pi a}{l} > \left|\dfrac{R}{L} - \dfrac{G}{C}\right|$.

[1]) См. задачу 5.

131. $v(x,\,t) = E\,\dfrac{\operatorname{sh}(x-l)\sqrt{GR}}{\operatorname{sh} l\sqrt{GR}} -$

$$- 2Ee^{-\nu t}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\pi}{n^2\pi^2 + RGl^2}\left\{\operatorname{ch}\widetilde{\omega}_n t + \frac{\nu}{\widetilde{\omega}_n}\operatorname{sh}\widetilde{\omega}_n t\right\}\sin\frac{n\pi x}{l},$$

$$\widetilde{\omega}_n = \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C}\right)^2 - \frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2}}, \quad \nu = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right),$$

$\widetilde{\omega}_n$ могут быть как действительными, так и мнимыми.

132. Решением краевой задачи

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < x_0, \quad x_0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$\left.\begin{gathered} u(0,\,t) = 0, \quad u(x_0 - 0,\,t) = u(x_0 + 0,\,t), \\ T_0[u'_x(x_0 + 0,\,t) - u'_x(x_0 - 0,\,t)] = -F_0, \\ u(l,\,t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \end{gathered}\right\} \tag{2}$$

$$u(x,\,0) = 0, \quad u_t(x,\,0) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

является

$$u(x,\,t) = \varphi(x) - \frac{2lF_0}{\pi^2 T_0}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi x_0}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi a t}{l}, \tag{4}$$

где

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{F_0(l - x_0)}{T_0 l}\,x, & 0 < x \leqslant x_0, \\ \dfrac{F_0 x_0}{T_0 l}\,(l - x), & x_0 < x < l. \end{cases} \tag{5}$$

Указание. Стационарное решение уравнения (1) имеет вид

$$w(x) = C_1 x + C_2,$$

причем константы C_1 и C_2 определяются по-разному на интервалах

$$0 < x < x_0 \quad \text{и} \quad x_0 < x < l.$$

Их значения C'_1, C'_2, C''_1, C''_2 на первом и втором интервалах находятся из условий (2).

Замечания к решениям задач 133–143.

1) Если неоднородное дифференциальное уравнение имеет вид

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + c^2 u + b\,\frac{\partial u}{\partial x} + \Phi(x)\sin\omega t$$

или

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + c^2 u + b\,\frac{\partial u}{\partial x} + \Phi(x)\cos\omega t,$$

то его частное решение можно искать в виде [1])

$$w(x,\,t) = X(x)\sin\omega t$$

или соответственно в виде

$$w(x,\,t) = X(x)\cos\omega t.$$

[1]) См. также решение задачи 133, где это положение уточняется.

Когда одна из собственных частот струны совпадает с частотой ω вынуждающей силы $\Phi(x)\sin\omega t$ или $\Phi(x)\cos\omega t$, то при $b=0$ может наступить явление резонанса, при котором амплитуда колебаний с частотой вынуждающей силы возрастает неограниченно пропорционально времени.

2) Если же неоднородное дифференциальное уравнение содержит член $-2\nu u_t$, т. е. имеет вид

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+b\frac{\partial u}{\partial x}+cu-2\nu\frac{\partial u}{\partial t}+\Phi(x)\sin\omega t \tag{6}$$

либо вид

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+b\frac{\partial u}{\partial x}-2\nu u_t+cu+\Phi(x)\cos\omega t, \tag{7}$$

т. е. колебания происходят в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости, то частное решение указанного вида уже не существует. В этом случае целесообразно перейти к комплексному представлению вынуждающего члена; точнее, можно искать частное решение уравнения

$$U_{tt}=a^2U_{xx}+bU_x-2\nu U_t+cU+\Phi(x)e^{i\omega t}$$

в виде

$$U(x,\,t)=X(x)e^{i\omega t}. \tag{8}$$

Действительная часть (8) будет частным решением уравнения (7), а мнимая часть — частным решением уравнения (6).

Если частное решение (8) удовлетворяет граничным условиям задачи, то оно представляет собой вынужденные колебания, составляющие главную часть решения краевой задачи при $t\to+\infty$, так как вынужденные колебания с другими частотами и собственные колебания, возникшие за счет начальных отклонений и скоростей, будут затухать.

133. Решение краевой задачи

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+\frac{\Phi(x)}{\rho}\sin\omega t,\quad 0<x<l,\quad 0<t<+\infty, \tag{1}$$

$$u(0,\,t)=u(l,\,t)=0,\quad 0<t<+\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\,0)=u_t(x,\,0)=0,\quad 0<x<l, \tag{3}$$

сводится к решению задачи о свободных колебаниях струны с фиксированными концами при заданных начальных условиях, если известно какое-либо частное решение неоднородного уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям (2) (см. введение к настоящему пункту).

Остановимся поэтому на разыскании частного решения уравнения (1), удовлетворяющего граничным условиям (2).

а) Пусть $\omega\ne\dfrac{n\pi a}{l}$, $n=1,\,2,\,3,\,\ldots$ Будем искать частное решение в виде

$$U(x,\,t)=X(x)\sin\omega t. \tag{4}$$

Подстановка (4) в (1) и (2) дает

$$X''+\frac{\omega^2}{a^2}X=-\frac{\Phi(x)}{T_0},\quad 0<x<l, \tag{5}$$

$$X(0)=X(l)=0, \tag{6}$$

откуда находим

$$X(x)=\left\{\frac{a}{\omega T_0}\int\limits_0^l \Phi(\xi)\sin\frac{\omega}{a}(l-\xi)\,d\xi\right\}\frac{\sin\dfrac{\omega}{a}x}{\sin\dfrac{\omega}{a}l}-$$

$$-\frac{a}{\omega T_0}\int\limits_0^x \Phi(\xi)\sin\frac{\omega}{a}(x-\xi)\,d\xi, \qquad (7)$$

где T_0 — натяжение струны.

б) Пусть $\omega=\dfrac{n_0\pi a}{l}$.

В этом случае частное решение краевой задачи (1) и (2) можно искать в виде (4) лишь при условии, что $\Phi(x)$ и $\sin\dfrac{n_0\pi x}{l}$ ортогональны на отрезке $0<x<l$. Действительно, умножая обе части уравнения (5) на $\sin\dfrac{n_0\pi x}{l}$ и интегрируя по частям с использованием граничных условий (6), получим

$$-\frac{1}{T_0}\int\limits_0^l \Phi(z)\sin\frac{n_0\pi z}{l}\,dz=0.$$

б$_1$) Допустим сначала, что $\Phi(x)$ и $\sin\dfrac{n_0\pi x}{l}$ ортогональны на отрезке $0<x<l$. Тогда общее решение уравнения (5) имеет вид

$$X(x)=-\frac{a}{\omega T_0}\int\limits_0^x \Phi(z)\sin\frac{\omega}{a}(x-z)\,dz+C_1\sin\frac{\omega}{a}x+C_2\cos\frac{\omega}{a}x.$$

Из граничного условия $X(0)=0$ находим $C_2=0$. Так как $\dfrac{\omega}{a}=\dfrac{n_0\pi}{l}$, то $\sin\dfrac{\omega}{a}x$ обращается в нуль на концах отрезка $0\leqslant x\leqslant l$, поэтому константу C_1 можно брать какой угодно. Легко видеть, что в этом случае выражение

$$X(x)=-\frac{a}{\omega T_0}\int\limits_0^x \Phi(z)\sin\frac{\omega}{a}(x-z)\,dz \qquad (8)$$

является решением уравнения (5), удовлетворяющим граничным условиям (6).

б$_2$) Остановится теперь на случае, когда $\omega=\dfrac{n_0\pi a}{l}$, а $\Phi(x)$ и $\sin\dfrac{n\pi x}{l}$ не ортогональны на отрезке $0<x<l$. В этом случае частное решение краевой задачи (1), (2) уже нельзя искать в виде (4).

Положим

$$\psi(x)=-\frac{\Phi(x)}{T_0}+A_{n_0}\sin\frac{n_0\pi x}{l}, \qquad (9)$$

где

$$A_{n_0}=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\frac{\Phi(\xi)}{T_0}\sin\frac{n_0\pi\xi}{l}\,d\xi. \qquad (10)$$

Функция $\psi(x)$ уже ортогональна $\sin\dfrac{n_0\pi x}{l}$ на отрезке $0\leqslant x\leqslant l$.

Теперь уравнение (1) можно переписать в виде

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - \frac{T_0}{\rho}\,\psi(x)\sin\omega t + \frac{T_0}{\rho}\,A_{n_0}\sin\frac{n_0\pi x}{l}\sin\omega t. \qquad (1')$$

Сумма частных решений $v(x,\,t)$ и $w(x,\,t)$ уравнений

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + \frac{T_0}{\rho}A_{n_0}\sin\frac{n_0\pi x}{l}\sin\omega t, \qquad (1'')$$

$$w_{tt} = a^2 w_{xx} - \frac{T_0}{\rho}\,\psi(x)\sin\omega t, \qquad (1''')$$

удовлетворяющих граничным условиям (2), будет частным решением уравнения (1), удовлетворяющим граничным условиям (2).

Так как $\sin\dfrac{n_0\pi x}{l}$ и $-\dfrac{T_0}{\rho}\,\psi(x)$ ортогональны на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$, то согласно (8)

$$w(x,\,t) = \left\{\frac{a}{\omega}\int\limits_0^x \psi(z)\sin\frac{\omega}{a}\,(x-z)\,dz\right\}\sin\omega t \qquad (11)$$

будет частным решением уравнения (1'''), удовлетворяющим граничным условиям (2).

Если теперь искать частное решение уравнения (1'') в виде

$$v(x,\,t) = T(t)\sin\frac{n_0\pi x}{l}, \qquad (12)$$

то граничные условия (2) будут удовлетворяться при любом $T(t)$. Подставляя (12) в (1'') и принимая во внимание равенство $\omega = \dfrac{n_0\pi a}{l}$, получим уравнение

$$T''(t) + \omega^2 T(t) = \frac{T_0}{\rho}\,A_{n_0}\sin\omega t. \qquad (13)$$

Его частное решение, как это известно из теории обыкновенных дифференциальных уравнений, имеет вид

$$T(t) = t(A\cos\omega t + B\sin\omega t). \qquad (14)$$

Подстановка (14) в (13) дает

$$A = -\frac{T_0 A_{n_0}}{2\omega\rho}, \quad B = 0. \qquad (15)$$

Поэтому

$$T(t) = -\frac{T_0 A_{n_0}}{2\omega\rho}\,t\cos\omega t \qquad (16)$$

и

$$w(x,\,t) = -\frac{T_0 A_{n_0}}{2\omega\rho}\,t\cos\omega t\sin\frac{n_0\pi x}{l}. \qquad (17)$$

Таким образом, если $\omega = \dfrac{n_0\pi a}{l}$ и функции $\Phi(x)$ и $\sin\dfrac{n_0\pi x}{l}$ не ортогональны на отрезке $0 < x < l$, то частное решение уравнения (1),

удовлетворяющее граничным условиям (2), имеет вид

$$U(x,\,t)=\left\{\frac{a}{\omega}\int\limits_0^x\psi(z)\sin\frac{\omega}{a}\,(x-a)\,dz\right\}\sin\omega t-\\ -\frac{T_0A_{n_0}}{2\omega\rho}t\cos\omega t\sin\frac{n_0\pi x}{l}. \quad (18)$$

В этом случае наступает явление резонанса: амплитуда колебаний с частотой вынуждающей силы возрастает неограниченно пропорционально времени.

134. Решением краевой задачи

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+\frac{\Phi_0}{\rho}\sin\omega t,\quad 0<x<l,\quad 0<t<+\infty, \quad (1)$$

$$u(0,\,t)=u(l,\,t)=0,\quad 0<t<+\infty, \quad (2)$$

$$u(x,\,0)=u_t(x,\,0)=0,\quad 0<x<l, \quad (3)$$

является:

а) при $\omega\ne\dfrac{n\pi a}{l}$, $n=1,\,2,\,3,\,\ldots$,

$$u(x,\,t)=\frac{2\Phi_0}{\omega^2\rho}\left\{\frac{\sin\dfrac{\omega}{a}x}{\sin\dfrac{\omega}{a}l}\sin^2\frac{\omega l}{2a}-\sin^2\frac{\omega}{2a}x\right\}\sin\omega t+\\ +\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi at}{l},$$

где

$$b_n=-\frac{4\Phi_0}{n\pi a\omega\rho}\int\limits_0^l\left\{\frac{\sin\dfrac{\omega}{a}z}{\sin\dfrac{\omega}{a}l}\sin^2\frac{\omega l}{2a}-\sin^2\frac{\omega}{2a}z\right\}\sin\frac{n\pi z}{l}\,dz;$$

б$_1$) при $\omega=\dfrac{n_0\pi a}{l}$, где n_0 четно,

$$u(x,\,t)=-\frac{2\Phi_0}{\omega^2\rho}\sin^2\frac{\omega}{2a}x\sin\omega t+\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi at}{l},$$

где

$$b_n=\frac{4\Phi_0}{n\pi a\rho\omega}\int\limits_0^l\sin^2\frac{\omega}{2a}a\sin\frac{n\pi z}{l}\,dz;$$

б$_2$) при $\omega=\dfrac{n_0\pi a}{l}$, n_0 нечетно,

$$u(x,\,t)=\\ =\left\{-\frac{\Phi_0}{\omega^2\rho}\sin^2\frac{\omega}{2a}x+\frac{4a\Phi_0}{n_0\pi\omega T_0}\int\limits_0^x\sin\frac{n_0\pi z}{l}\sin\frac{n_0\pi(x-z)}{l}\,dz\right\}\sin\omega t+\\ +\frac{2\Phi_0\sin\dfrac{n_0\pi x}{l}}{n_0\pi\omega\rho}t\cos\omega t+\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi at}{l},$$

где

$$b_n = \frac{2}{n\pi a}\int\limits_0^l \left\{ -\frac{2\Phi}{\omega\rho}\sin^2\frac{\omega}{2a}\,\xi + \frac{4a\Phi_0}{n_0\pi T_0}\int\limits_0^\xi \sin\frac{n_0\pi z}{l}\sin\frac{n_0\pi(x-z)}{l}\,dz + \right.$$
$$\left. + \frac{2\Phi_0}{n_0\pi\omega\rho}\sin\frac{n_0\pi\xi}{l}\right\}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi,$$

а T_0 — натяжение струны.

В этом случае наступает явление резонанса: амплитуда колебаний с частотой вынуждающей силы ω возрастает неограниченно пропорционально t.

135. Решением краевой задачи

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$
$$u(0,\,t) = 0, \quad u(l,\,t) = A\sin\omega t, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$
$$u(x,\,0) = u_t(x,\,0) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

является:

а) при $\omega \neq \dfrac{n\pi a}{l}$, $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$, (4)

$$u(x,\,t) = A\,\frac{\sin\dfrac{\omega}{a}x}{\sin\dfrac{\omega}{a}l}\sin\omega t + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi a t}{l}, \tag{5}$$

где

$$b_n = -\frac{2A\omega}{n\pi a}\int\limits_0^l \frac{\sin\dfrac{\omega}{a}z}{\sin\dfrac{\omega}{a}l}\sin\frac{n\pi z}{l}\,dz, \quad n = 1, 2, 3, \ldots; \tag{6}$$

б) при $\omega = \dfrac{n_0\pi a}{l}$

$$u(x,\,t) = \left\{\frac{A\omega}{al}\int\limits_0^x \left(z - A^*_{n_0}\sin\frac{n\pi z}{l}\right)\sin\frac{n_0\pi(x-z)}{l}\,dz\right\}\sin\omega t -$$
$$- \frac{AA^*_{n_0}}{2l}\,t\cos\omega t\sin\frac{n_0\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi a t}{l}, \tag{8}$$

где

$$b_n = -\frac{2}{n\pi a}\int\limits_0^l U_t(z,\,0)\sin\frac{n\pi z}{l}\,dz, \quad A^*_{n_0} = \int\limits_0^l z\sin\frac{n_0\pi z}{l}\,dz,$$

$U(z,\,t)$ — сумма первых двух членов в правой части равенства (8).

Указание. 1) При $\omega \neq \dfrac{n\pi a}{l}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, частное решение краевой задачи (1), (2) ищем в виде $U(x,\,t) = X(x)\sin\omega t$ и решение задачи (1), (2), (3) представляем в виде $u(x,\,t) = v(x,\,t) + U(x,\,t)$.

2) При $\omega = \dfrac{n_0\pi a}{l}$ полезно освободиться от неоднородности в граничном условии, переведя ее в уравнение. Для этого находим стационарное решение $\varphi(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям $\varphi(0) = 0$, $\varphi(l) = A$, затем решение краевой задачи (1), (2), (3) ищем в виде

$$u(x,\,t) = v(x,\,t) + \varphi(x)\sin\omega t.$$

136. Решением краевой задачи

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(0,\, t) = 0, \quad u_x(l,\, t) = \frac{A}{ES}\sin \omega t, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\, 0) = 0, \quad u_t(x,\, 0) = 0, \tag{3}$$

является:

а) при $\omega \neq \dfrac{(2n+1)\pi a}{2l}$, $n = 0,\, 1,\, 2,\, 3,\, \ldots$, (4)

$$u(x,\, t) = U(x,\, t) + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \sin \frac{(2n+1)\pi a t}{2l}, \tag{5}$$

где

$$U(x,\, t) = \frac{aA}{ES\omega} \frac{\sin \dfrac{\omega}{a} x}{\cos \dfrac{\omega}{a} l} \sin \omega t,$$

$$b_n = -\frac{4}{(2n+1)\pi a} \int_0^l U_t(z,\, 0) \sin \frac{(2n+1)\pi z}{2l}\, dz; \tag{6}$$

б) при $\omega = \dfrac{(2n_0+1)\pi a}{2l}$

$$u(x,\, t) = U(x,\, t) + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq n_0}}^{+\infty} b_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \sin \frac{(2n+1)\pi a t}{2l}, \tag{8}$$

где

$$U(x,\, t) = -\left\{ \frac{Aa}{ES\omega} \int_0^x \left(z - A^*_{n_0} \sin \frac{(2n_0+1)\pi z}{2l} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \sin \frac{(2n_0+1)\pi (x-z)}{2l}\, dz \right\} \sin \omega t - \frac{AA^*_{n_0}}{2ES}\, t \cos \omega t \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}, \tag{9}$$

$$b_n = -\frac{4}{(2n+1)\pi a} \int_0^l U_t(z,\, 0) \sin \frac{(2n+1)\pi z}{2l}\, dz,$$

$$A^*_{n_0} = \int_0^l z \sin \frac{(2n_0+1)\pi z}{2l}\, dz.$$

Указание. См. указание к предыдущей задаче.

137. Решением краевой задачи

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \omega^2 (x+u) + g \sin \omega t, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(0,\, t) = u_x(l,\, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\, 0) = u_t(x,\, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

является

$$u(x,\,t) = v(x) + w(x,\,t) + U(x,\,t),$$

где

$$v(x) = \frac{k\sin kx}{\cos kl}\int\limits_0^l \xi\cos k(l-\xi)\,d\xi - k\int\limits_0^x \xi\sin k(x-\xi)\,d\xi,$$

$$w(x,\,t) = X(x)\sin\omega t = \frac{g}{2\omega^2}\left\{\frac{\cos\left[\dfrac{\omega}{a}(l-x)\sqrt{2}\right]}{\cos\left(\dfrac{\omega}{a}l\sqrt{2}\right)} - 1\right\}\sin\omega t,$$

$$U(x,\,t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[A_n\cos\left(\sqrt{\omega^2 - \frac{(2n+1)\pi^2a^2}{4l^2}}\right)t + \right.$$

$$\left. + B_n\sin\left(\sqrt{\omega^2 - \frac{(2n+1)^2\pi^2a^2}{4l^2}}\right)t\right]\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}\,x,$$

$$A_n = -\frac{2}{l}\int\limits_0^l v(\xi)\sin\frac{(2n+l)\pi\xi}{2l}\,d\xi,$$

$$B_n = -\frac{2}{l\sqrt{\omega^2 - \dfrac{(2n+1)^2\pi^2a^2}{4l^2}}}\int\limits_0^l X(\xi)\sin\frac{(2n+1)\pi\xi}{2l}\,d\xi.$$

Указание. Найти сначала стационарное решение, потом вынужденные гармонические колебания с частотой вынуждающей силы, а затем свободные колебания.

138. Решением краевой задачи

$$u_{tt} = a^2u_{xx},\quad 0 < x < x_0,\quad x_0 < x < l,\quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(0,\,t) = 0,\quad u(x_0 - 0,\,t) = u(x_0 + 0,\,t),$$

$$T_0\left[u_x(x_0 + 0,\,t) - u_x(x_0 - 0,\,t)\right] = A\sin\omega t,\quad u(l,\,t) = 0,\quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\,0) = u_t(x,\,0) = 0,\quad 0 < x < l, \tag{3}$$

является[1)]

$$u(x,\,t) = U(x,t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi at}{l}, \tag{4}$$

где

$$b_n = -\frac{2}{n\pi a}\int\limits_0^l U_t(z,\,0)\sin\frac{n\pi z}{l}\,dz, \tag{5}$$

[1)] Ср. [7, с. 111, 112].

$$U(x,\,t)=\begin{cases}\dfrac{Aa}{T_0\omega}\dfrac{\sin\dfrac{\omega(l-x_0)}{a}}{\sin\dfrac{\omega l}{a}}\sin\dfrac{\omega x}{a}\sin\omega t, & 0\leqslant x\leqslant x_0, \qquad (6)\\[2ex] \dfrac{Aa}{T_0\omega}\dfrac{\sin\dfrac{\omega x_0}{a}}{\sin\dfrac{\omega l}{a}}\sin\dfrac{\omega(l-x)}{a}\sin\omega t, & x_0\leqslant x\leqslant l. \qquad (6')\end{cases}$$

139. Решением краевой задачи

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\quad 0<x<x_0,\quad x_0<x<l,\quad 0<t<+\infty, \qquad (1)$$

$$u(0,\,t)=0,\quad u(x_0-0,\,t)=u(x_0+0,\,t),$$

$$T_0\left[u_x(x_0+0,\,t)-u_x(x_0-0,\,t)\right]=A\cos\omega t,\quad u(l,\,t)=0,\quad 0<t<+\infty, \qquad (2)$$

$$u(x,\,0)=0,\,u_t(x,\,0)=0,\quad 0<x<l, \qquad (3)$$

является

$$u(x,\,t)=U(x,t)+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi at}{l}, \qquad (4)$$

где

$$a_n=-\frac{2}{l}\int_0^l U(z,\,0)\sin\frac{n\pi z}{l}\,dz \qquad (5)$$

и

$$U(x,\,t)=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{Aa}{T_0\omega}\dfrac{\sin\dfrac{\omega}{a}(l-x_0)}{\sin\dfrac{\omega}{a}l}\sin\dfrac{\omega x}{a}\cos\omega t,\\[2ex] \qquad\qquad 0\leqslant x\leqslant x_0, \qquad (6)\\[2ex] \dfrac{Aa}{T_0\omega}\dfrac{\sin\dfrac{\omega}{a}x_0}{\sin\dfrac{\omega}{a}l}\sin\dfrac{\omega}{a}(l-x)\cos\omega t,\\[2ex] \qquad\qquad x_0\leqslant x\leqslant l, \qquad (6')\end{array}\right\}\quad\begin{array}{l}\omega\neq\dfrac{n\pi a}{l},\\ n=1,\,2,\,3,\,\ldots\ {}^{1}).\end{array}$$

.

140. Решением краевой задачи является

$$u(x,\,t)=U(x,\,t)+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi at}{l}+b_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad (1)$$

где

$$a_n=-\frac{2}{l}\int_0^l U(z,\,0)\sin\frac{n\pi z}{l}\,dz,$$

$$b_n=-\frac{2}{n\pi a}\int_0^l U_t(z,\,0)\sin\frac{n\pi z}{l}\,dz \qquad (2)$$

[1]) Переходя к пределу при $\omega\to 0$, получим при $A=F_0$ стационарное отклонение, найденное в решении задачи 132.

и при $m\omega \neq \dfrac{n\pi a}{l}$, $m, n = 1, 2, 3, \ldots$,

$$U(x, t) = \begin{cases} \dfrac{1}{T_0}\left\{ \dfrac{\alpha_0 x}{2}\left(1 - \dfrac{x_0}{l}\right) + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a \sin \dfrac{n\omega}{a}(l - x_0)}{n\omega \sin \dfrac{n\omega}{a} l} \times \right. \\ \left. \times \sin \dfrac{n\omega x}{a}(\alpha_n \cos n\omega t + \beta_n \sin n\omega t) \right\}, \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0, \qquad (3) \\ \dfrac{1}{T_0}\left\{ \dfrac{\alpha_0 x_0}{2}\left(1 - \dfrac{x}{l}\right) + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a \sin \dfrac{n\omega}{a} x_0}{n\omega \sin \dfrac{n\omega}{a} l} \times \right. \\ \left. \times \sin \dfrac{n\omega(l - x)}{a}(\alpha_n \cos n\omega t + \beta_n \sin n\omega t) \right\}, \quad x_0 \leqslant x \leqslant l. \qquad (3') \end{cases}$$

Замечание. Первые слагаемые суммы (3) и (3′) соответствуют стационарному прогибу под действием силы, равной $\dfrac{\alpha_0}{2}$ и приложенной к точке x_0; именно эта сила вызывает прогиб

$$U(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{T_0}\dfrac{\alpha_0}{2} x\left(1 - \dfrac{x_0}{l}\right), & 0 \leqslant x \leqslant x_0, \\ \dfrac{1}{T_0}\dfrac{\alpha_0}{2} x_0\left(1 - \dfrac{x}{l}\right), & x_0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

141. Решением краевой задачи [1]

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - 2\nu u_t + (\Phi(x)/\rho)\sin \omega t, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \qquad (1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \qquad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \qquad (3)$$

является

$$u(x, t) = U(x, t) + e^{-\nu t} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi a t}{l} + b_n \sin \frac{n\pi a t}{l}\right) \sin \frac{n\pi x}{l}, \qquad (4)$$

где

$$a_n = -\frac{2}{l} \int_0^l U(z, 0) \sin \frac{n\pi z}{l}\, dz,$$

$$b_n = \frac{\nu l}{n\pi a}\, a_n - \frac{2}{n\pi a} \int_0^l U_t(z, 0) \sin \frac{n\pi z}{l}\, dz, \qquad (5)$$

$$U(x, t) = \operatorname{Im}\left[\frac{\alpha - \beta i}{(\alpha^2 + \beta^2)\alpha^2} \left\{ \left(\int_0^l \frac{1}{\rho}\, \Phi_0(\xi) \overset{\circ}{X}(l - \xi)\, d\xi \right) \frac{\overset{\circ}{X}(x)}{\overset{\circ}{X}(l)} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - e^{i\omega t} \int_0^x \frac{1}{\rho}\, \Phi_0(\xi) \overset{\circ}{X}(x - \xi)\, d\xi \right\} \right] \text{ [2]}; \qquad (6)$$

[1] См. введение к ответам настоящего пункта.

[2] Символ Im означает мнимую часть комплексного числа.

$U(x,\,t)$ — установившиеся колебания,

$$\overset{\circ}{X}(x) = e^{(\alpha+\beta i)x} - e^{-(\alpha+\beta i)x}, \quad \alpha+\beta i = \frac{\sqrt{\omega^2 - 2\omega\nu i}}{a} =$$

$$= \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\sqrt{\omega^4+4\nu^2\omega^2}+\omega^2}{2}} - \frac{i}{a}\sqrt{\frac{\sqrt{\omega^4+4\nu^2\omega^2}-\omega^2}{2}}. \quad (7)$$

Замечание. Пусть $\overset{\circ}{Y}(x)$ есть решение дифференциального уравнения

$$y'' + Ay' + By = 0, \quad A = \text{const}, \quad B = \text{const},$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$$

тогда

$$y = \int_0^x f(\xi)\,\overset{\circ}{Y}(x-\xi)\,d\xi$$

является решением уравнения

$$y'' + Ay' + By = f(x),$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

142. Решением краевой задачи

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - 2\nu u_t, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0,\,t) = 0, \quad u_x(l,\,t) = \frac{A}{ES}\sin\omega t, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x,\,0) = 0, \quad u_t(x,\,0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

является

$$u(x,\,t) = U(x,\,t) +$$

$$+ e^{-\nu t}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(a_n\cos\frac{(2n+1)\pi a t}{2l} + b_n\sin\frac{(2n+1)\pi a t}{2l}\right)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}, \quad (4)$$

$$a_n = -\frac{2}{l}\int_0^l U(z,\,0)\sin\frac{(2n+1)\pi z}{2l}\,dz,$$

$$b_n = -\frac{4\nu}{(2n+1)\pi a}\int_0^l U_t(z,\,0)\sin\frac{(2n+1)\pi z}{2l}\,dz. \quad (5)$$

Установившиеся колебания определяются формулой

$$U(x,\,t) = \operatorname{Im}\left\{\frac{A(\alpha-\beta i)}{ES(\alpha^2+\beta^2)} - \frac{e^{(\alpha+\beta i)x} - e^{-(\alpha+\beta i)x}}{e^{(\alpha+\beta i)l} - e^{-(\alpha+\beta i)l}}\,e^{i\omega t}\right\}, \quad (6)$$

где α и β имеют те же значения, что и в предыдущей задаче.

143. Решением краевой задачи

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - LC\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - (RC+GL)\,\frac{\partial v}{\partial t} - GRv = 0, \qquad 0<x<l, \quad 0<t<+\infty, \tag{1}$$

$$v_x(0,\,t) = 0, \quad v(l,\,t) = E_0 \sin\omega t, \quad 0<t<+\infty, \tag{2}$$

$$v(x,\,0) = 0, \quad v_t(x,\,0) = 0, \quad 0<x<l, \tag{3}$$

является

$$v(x,\,t) = V(x,\,t) + \\ + e^{-\nu t}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(a_n \cos\frac{(2n+1)\pi a t}{2l} + b_n \sin\frac{(2n+1)\pi a t}{2l}\right)\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}, \tag{4}$$

$$a_n = -\frac{2}{l}\int\limits_0^l V(z,\,0)\cos\frac{(2n+1)\pi z}{2l}\,dz,$$

$$b_n = \frac{2\nu l}{(2n+1)\pi a}\,a_n - \frac{4}{(2n+1)\pi a}\int\limits_0^l V_t(z,\,0)\cos\frac{(2n+1)\pi z}{2l}\,dz, \tag{5}$$

$$V(x,\,t) = \operatorname{Im}\left\{E_0\,\frac{e^{(\alpha+\beta i)x} + e^{-(\alpha+\beta i)x}}{e^{(\alpha+\beta i)l} + e^{-(\alpha+\beta i)l}}\,e^{i\omega t}\right\}, \tag{6}$$

$$\alpha+\beta i = \pm\sqrt{p\omega^2 - r - 2q\omega i}, \quad p = LC, \quad 2q = RC+GL, \quad r = GR,$$

$$\nu = \frac{GL+CR}{2CL}.$$

144. Решением краевой задачи

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - CL\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - (CR+GL)\,\frac{\partial v}{\partial t} - GRv = 0, \qquad 0<x<l, \quad 0<t<+\infty, \tag{1}$$

$$v(0,\,t) = 0, \quad v(l,\,t) = E\sin\omega t, \quad 0<t<+\infty, \tag{2}$$

$$v(x,\,0) = 0, \quad v_t(x,\,0) = 0, \quad 0<x<l, \tag{3}$$

является

$$v(x,\,t) = V(x,\,t) + e^{-\nu t}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos\mu_n t + b_n \sin\mu_n t)\sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{4}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\mu_n = \sqrt{\frac{p(r+\lambda_n^2) - q^2}{p^2}}, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{l}, \\ &a_n = -\frac{2}{l}\int\limits_0^l V(z,\,0)\sin\frac{n\pi z}{2l}\,dz, \\ &b_n = \frac{\nu l}{n\pi a}\,a_n - \frac{2}{n\pi a}\int\limits_0^l V_t(z,\,0)\sin\frac{n\pi z}{l}\,dz, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$V(x,\,t)=\operatorname{Im}\left\{E\,\frac{e^{(\alpha+\beta i)x}-e^{-(\alpha+\beta i)x}}{e^{(\alpha+\beta i)l}-e^{-(\alpha+\beta i)l}}\,e^{i\omega t}\right\},\tag{6}$$

$$\pm(\alpha+\beta i)=\sqrt{p\omega^2-r-2q\omega i},\quad p=CL,\quad 2q=CR+GL,\quad r=GR,\tag{7}$$

$$\nu=\frac{CR+GL}{2CL}.\tag{8}$$

145. Из краевой задачи

$$\left.\begin{aligned}-\frac{\partial p}{\partial x}&=\left(\frac{\partial w}{\partial t}+2\alpha w\right),\\ -\frac{\partial p}{\partial t}&=\lambda^2\frac{\partial w}{\partial x},\end{aligned}\right\}\quad 0<x<l,\quad 0<t<+\infty,\tag{1}$$

$$p(0,\,t)=0,\quad w(l,\,t)+h\frac{\partial w(l,\,t)}{\partial x}=Ae^{i\omega t},\quad 0<t<+\infty,\tag{2}$$

находим установившиеся колебания давления с частотой ω в сечении $x=l$:

$$p(l,\,t)=A\lambda r(\omega)R(\omega)e^{i(\omega t+\delta)},\tag{3}$$

$$r(\omega)=\sqrt[4]{1+4\,\frac{\alpha^2}{\omega^2}},\tag{4}$$

$$R(\omega)=\frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\sin 2\varphi}{\operatorname{ch}2\psi-\cos 2\varphi}-\beta\varphi\right)^2+\left(\dfrac{\operatorname{sh}2\psi}{\operatorname{ch}2\psi-\cos 2\varphi}+\beta\psi\right)^2}},\tag{5}$$

$$\varphi=\frac{l}{\lambda}\sqrt{\frac{\sqrt{\omega^4+2\alpha^2\omega^2}+\omega^2}{2}},\quad \psi=\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{\sqrt{\omega^4+2\alpha^2\omega^2}-\omega^2}{2}},$$

$$\delta=\frac{\pi}{2}-\theta_1-\theta_2,\quad \operatorname{tg}\theta_1=\frac{\psi}{\varphi},\quad \operatorname{tg}\theta_2=\frac{\dfrac{\operatorname{sh}2\psi}{\operatorname{ch}2\psi-\cos 2\varphi}+\beta\psi}{\dfrac{\sin 2\varphi}{\operatorname{ch}2\psi-\cos 2\varphi}-\beta\varphi},\quad \beta=\frac{h}{\lambda}.$$

146. Решением краевой задачи

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+\frac{1}{\rho}\,\Phi(x)t,\quad 0<x<l,\quad 0<t<+\infty,\tag{1}$$

$$u(0,\,t)=u(l,\,t)=0,\quad 0<t<+\infty,\tag{2}$$

$$u(x,\,0)=u_t(x,\,0)=0,\quad 0<x<l,\tag{3}$$

является

$$u(x,\,t)=\frac{1}{T_0l}\left\{l\int_0^x d\xi\int_0^\xi\Phi(z)\,dz-x\int_0^l d\xi\int_0^\xi\Phi(z)\,dz\right\}t+$$

$$+\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi at}{l},\tag{4}$$

где

$$b_n = -\frac{2}{n\pi a T_0 l}\int\limits_0^l \left\{ l\int\limits_0^x d\xi \int\limits_0^\xi \Phi(z)\,dz - x\int\limits_0^l d\xi\int\limits_0^\xi \Phi(z)\,dz \right\} \sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \quad (5)$$

147. Решением краевой задачи

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0,\,t) = 0, \quad u_x(l,\,t) = \frac{A}{ES}\,t, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x,\,0) = 0, \quad u_t(x,\,0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

является

$$u(x,\,t) = \frac{A}{ES}\,xt + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi a t}{2l}, \quad (4)$$

$$b_n = -\frac{4}{(2n+1)\pi a}\int\limits_0^l \frac{Az}{ES}\sin\frac{(2n+1)\pi z}{2l}\,dz. \quad (5)$$

148. Решением краевой задачи

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \frac{1}{\rho}\,\Phi(x)t^m, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad m > -1, \quad (1)$$

$$u(0,\,t) = u(l,\,t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x,\,0) = 0, \quad u_t(x,\,0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

является[1)]

$$u(x,\,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}, \quad (4)$$

$$u_n(t) = \frac{\alpha_n}{\omega_n}\int\limits_0^t \tau^m \sin\omega_n(t-\tau)\,\tau, \quad \omega_n = \frac{n\pi a}{l},$$

$$\alpha_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \frac{\Phi(z)}{\rho}\sin\frac{n\pi z}{l}\,dz. \quad (5)$$

149. Решение краевой задачи

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0,\,t) = 0, \quad u_x(l,\,t) = \frac{A}{ES}t^m, \quad 0 < t < +\infty, \quad m > -1, \quad (2)$$

$$u(x,\,0) = 0, \quad u_t(x,\,0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

является

$$u(x,\,t) = \frac{Axt^m}{ES} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}, \quad (4)$$

где

$$u_n(t) = \frac{\alpha_n}{\omega_n}\int\limits_0^t \tau^{m-2}\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau, \quad \omega_n = \frac{(2n+1)\pi a}{l}, \quad (5)$$

[1)] См. указание к следующей задаче.

$$\alpha_n = -\frac{2Am(m-1)}{ESl}\int\limits_0^l z\sin\frac{(2n+1)\pi z}{2l}\,dz. \tag{6}$$

У к а з а н и е. Чтобы освободиться от неоднородности в граничном условии, ищем решение краевой задачи (1), (2), (3) в виде

$$u(x,\,t) = v(x,\,t) + \frac{Axt^m}{ES}, \tag{7}$$

что приводит к краевой задаче

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} - \frac{Axt^{m-2}m(m-1)}{ES}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{8}$$

$$v(0,\,t) = 0, \quad v_x(l,\,t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{9}$$

$$v(x,\,0) = 0, \quad v_t(x,\,0) = 0, \quad 0 < x < l. \tag{10}$$

Частное решение краевой задачи

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,\,t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1'}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 u_x(0,\,t) + \beta_1 u(0,\,t) = 0,\\ \alpha_2 u_x(l,\,t) + \beta_2 u(l,\,t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

можно искать в виде

$$u(x,\,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)X_n(x), \tag{3'}$$

где $u_n(t)$ — функции, подлежащие определению, а $X_n(t)$ — собственные функции краевой задачи

$$\left.\begin{aligned} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \qquad 0 < x < l,\\ \alpha_1 X'(0) + \beta_1 X(0) = 0, \quad \alpha_2 X'(l) + \beta_2 X(l) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

При этом вынуждающий член $f(x,\,t)$ также нужно разложить в ряд по собственным функциям этой задачи, т. е. представить в виде

$$f(x,\,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)X_n(x), \tag{12}$$

где

$$f_n(t) = \frac{1}{\|X_n\|^2}\int\limits_0^l f(z,\,t)X_n(z)\,dz. \tag{13}$$

150. а) При $\omega \neq \omega_n = \dfrac{n\pi a}{l}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$,

$$u(x,\,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{(\omega_n^2 - \omega^2)\omega_n}(\omega_n \sin\omega t - \omega\sin\omega_n t)\sin\frac{n\pi x}{l}; \tag{1}$$

б) при $\omega = \omega_{n_0} = \dfrac{n_0\pi a}{l}$

$$u(x,\,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{(\omega_n^2 - \omega^2)\omega_n}(\omega_n \sin\omega t - \omega\sin\omega_n t)\sin\frac{n\pi x}{l} + \\ + \frac{\alpha_{n_0}}{2\omega_{n_0}}(\sin\omega_{n_0} t - \omega_{n_0} t\cos\omega_{n_0} t)\sin\frac{n_0\pi x}{l}, \tag{2}$$

$$\alpha_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \frac{\Phi(z)}{\rho}\sin\frac{n\pi z}{l}\,dz. \tag{3}$$

Замечание. Здесь в отличие от решения задачи 133 колебания с частотой вынуждающей силы даны не в замкнутой форме, а в виде ряда.

151.
$$u(x,\,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{1}$$

где

$$u_n(t) = \frac{\alpha_n}{\widetilde{\omega}_n}\int\limits_0^t e^{-\nu(t-\tau)}\sin\omega\tau\sin\widetilde{\omega}_n(t-\tau)\,d\tau, \tag{2}$$

$$\alpha_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \frac{\Phi(x)}{\rho}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx,$$

$$\widetilde{\omega}_n = \sqrt{\omega_n^2 - \nu^2}. \tag{3}$$

Здесь предполагается, что $\omega_n > \nu$. Нахождение выражения $u_n(t)$ для $\omega_n \leqslant \nu$ не представляет затруднений.

152. $u(x,\,t) = \dfrac{16F_0\tau\delta}{\pi^3\rho a}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}\dfrac{\cos\dfrac{n\pi\delta}{l}\cos\dfrac{\omega_n\tau}{2}\sin\dfrac{n\pi x_0}{l}}{\left[1-\left(\dfrac{2n\delta}{l}\right)^2\right]\left[1-\left(\dfrac{na\tau}{l}\right)^2\right]}\times$

$$\times\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\omega_n\left(t-\frac{\tau}{2}\right),$$

где

$$\omega_n = \frac{n\pi a}{l}.$$

153. Решением краевой задачи

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + \frac{I}{\rho}\delta(x-x_0)\delta(t)\,^{1)},\quad 0<x<l,\quad 0<t<+\infty, \tag{1}$$

$$u(0,\,t) = u(l,\,t) = 0,\quad 0<t<+\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\,0) = u_t(x,\,0) = 0,\quad 0<x<l, \tag{3}$$

является:

$$u(x,\,t) = \frac{2I}{\rho l}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\omega_n}\sin\omega_n t\sin\frac{n\pi x_0}{l}\sin\frac{n\pi x}{l},\quad \omega_n = \frac{n\pi a}{l}. \tag{4}$$

154. Решением краевой задачи

$$u_{tt} = a^2u_{xx} - 2\nu u_t + \frac{1}{\rho}\Phi(x)t,\quad 0<x<l,\quad 0<t<+\infty, \tag{1}$$

$$u(0,\,t) = u(l,\,t) = 0,\quad 0<t<+\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\,0) = u_t(x,\,0) = 0,\quad 0<t<+\infty, \tag{3}$$

$^{1)}$ $\delta(t)$ — односторонняя дельта-функция

$$\delta(t) = \lim_{n\to 0}\varphi_n(t),\quad \varphi_n(t) = \begin{cases} 0, & -\infty<t<0,\\ n, & 0<t<1/n,\\ 0, & 1/n<t<+\infty; \end{cases}$$

подробнее о дельта-функции см. [7, с. 267–272].

является

$$u(x,\,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l},\tag{4}$$

где

$$u_n(t)=\frac{\alpha_n}{\omega_n}\int\limits_0^t\tau e^{-\nu(t-\tau)}\sin\widetilde{\omega}_n(t-\tau)\,d\tau,\quad \widetilde{\omega}_n=\sqrt{\omega_n^2-\nu^2}\ ^{1)},\tag{5}$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\frac{\Phi(z)}{\rho}\sin\frac{n\pi z}{l}\,dz,\quad \omega_n=\frac{n\pi a}{l}.\tag{6}$$

155. Решением краевой задачи

$$u_{tt}=a^2u_{xx}-2\nu u_t+\frac{I}{\rho}\delta(x-x_0)\delta(t),\quad 0<x<l,\quad 0<t<+\infty,\tag{1}$$

$$u(0,\,t)=u(l,\,t)=0,\quad 0<t<+\infty,\tag{2}$$

$$u(x,\,0)=u_t(x,\,0)=0,\quad 0<x<l,\tag{3}$$

является

$$u(x,\,t)=\frac{2I}{\rho l}e^{-\nu t}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\widetilde{\omega}_n}\sin\widetilde{\omega}_nt\sin\frac{n\pi x_0}{l}\sin\frac{n\pi x}{l},\tag{4}$$

где

$$\widetilde{\omega}_n=\sqrt{\omega_n^2-\nu^2},\quad \omega_n=\frac{n\pi a}{l}.\tag{5}$$

156. $u(x,\,t)=-\dfrac{2Pl^4v_0}{\rho Sa\pi^4}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}\,\frac{1}{a^2\pi^2n^2-v_0^2l^2}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n^2\pi^2at}{l^2}+$

$$+\frac{2Pl^3}{\rho S\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\,\frac{1}{a^2\pi^2n^2-v_0^2l^2}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi v_0l}{l},\quad 0<t<\frac{l}{v_0},$$

$$u(x,\,t)=-\frac{2Pl^4v_0}{\rho Sa\pi^4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}\,\frac{1}{a^2\pi^2n^2-v_0^2l^2}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n^2\pi^2at}{l^2},\quad \frac{l}{v_0}<t<+\infty.$$

Указание. Воспользоваться импульсной дельта-функцией.

157. $u(x,\,t)=\dfrac{P_0}{\rho Sl\omega^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\frac{\cos\dfrac{n^2\pi^2a^2}{l^2}\,t-\cos\left(1+\dfrac{n\pi v_0}{\omega l}\right)\omega t}{\left(\dfrac{n^2\pi^2a^2}{\omega l^2}\right)^2-\left(1+\dfrac{n\pi v_0}{\omega l}\right)^2}-\right.$

$$\left.-\frac{\cos\dfrac{n^2\pi^2a^2}{l^2}\,t-\cos\left(1-\dfrac{n\pi v_0}{\omega l}\right)\omega t}{\left(\dfrac{n^2\pi^2a^2}{\omega l^2}\right)^2-\left(1-\dfrac{n\pi v_0}{\omega l}\right)^2}\right\}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

[1)] Предполагается, что $\omega_n>\nu$ при $n=1,\,2,\,3,\,\ldots$ Если $\omega_n\leqslant\nu$ при достаточно малых значениях n, то решение будет содержать члены с множителями $\operatorname{sh}\widetilde{\omega}_nt$ и член с множителем t.

158. а) При $\omega \neq \dfrac{n^2\pi^2 a}{l^2}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$,

$$u(x,\,t) = -\frac{2\omega P_0 l^5}{a\pi^2\rho S}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin\dfrac{n\pi x_0}{l}}{n^2(n^4\pi^4a^2-\omega^2l^4)}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n^2\pi^2 at}{l^2} + \\ + \frac{2P_0l^3}{\rho S}\sin\omega t\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin\dfrac{n\pi x_0}{l}}{n^4\pi^4a^2-\omega^2l^4}\sin\frac{n\pi x}{l};$$

б) при $\omega = \dfrac{n_0^2\pi^2 a}{l^2}$

$$u(x,\,t) = -\frac{2\omega P_0 l^5}{a\pi^2\rho S}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin\dfrac{n\pi x_0}{l}}{n^2(n^4\pi^4a^2-\omega^2l^4)}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n^2\pi^2 at}{l^2} + \\ + \frac{2P_0l^3}{\rho S}\sin\omega t\sum_{\substack{n=1\\ n\neq n_0}}^{+\infty}\frac{\sin\dfrac{n\pi x_0}{l}}{n^4\pi^4a^2-\omega^2l^4}\sin\frac{n\pi x}{l} + \\ + \frac{P_0}{\rho Sl\omega^2}\sin\frac{n_0\pi x_0}{l}\sin\omega t\sin\frac{n_0\pi x}{l} - \frac{P_0}{\rho Sl\omega}\,t\cos\omega t\sin\frac{n_0\pi x_0}{l}\sin\frac{n_0\pi x}{l}.$$

Неограниченное возрастание амплитуды вынужденных колебаний с частотой $\omega = \dfrac{n_0^2\pi^2 a}{l^2}$ будет иметь место лишь в том случае, когда $\sin\dfrac{n_0\pi x_0}{l} \neq 0$, т. е. точка приложения силы не совпадает ни с одним из узлов гармоники, соответствующей числу $\lambda_{n_0} = \dfrac{n_0\pi}{l}$.

Указание. См. указание к задаче 149.

Замечание. Вынужденные колебания с частотой ω могут быть найдены в замкнутой форме, аналогично тому, как это было сделано в решении задач 134 и 139.

При $\omega \neq \dfrac{n^2\pi^2 a}{l}$, $n = 1, 2, \ldots$, для колебаний с частотой ω, таким образом, получается следующее выражение:

$$U(x,\,t) = \frac{2Pl^3}{a^2\pi^4\rho S}\times\begin{cases} -\dfrac{\pi^4}{2\beta^3l^3}\dfrac{\operatorname{sh}\beta(l-x_0)}{\operatorname{sh}\beta l}\operatorname{sh}\beta x + \\ \qquad + \dfrac{\pi^4}{2\beta^3l^3}\dfrac{\sin\beta(l-x_0)}{\sin\beta l}\sin\beta x, \quad 0 < x \leqslant x_0, \\ -\dfrac{\pi^4}{2\beta^3l^3}\dfrac{\operatorname{sh}\beta x_0}{\operatorname{sh}\beta l}\operatorname{sh}\beta(l-x) + \\ \qquad + \dfrac{\pi^4}{2\beta^3l^3}\dfrac{\sin\beta x_0}{\sin\beta l}\sin\beta(l-x), \\ \qquad\qquad x_0 < x < l, \quad \beta^2 = \dfrac{\omega}{a}. \end{cases}$$

159. $u(x,\,t) = \dfrac{2Pl^3}{\rho S}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin\dfrac{n\pi x_0}{l}\sin(\omega t+\varphi_n)}{\sqrt{(n^4\pi^4a^2-\omega^{2/4})^2+4\nu^2\omega^2l^8}}\sin\frac{n\pi x}{l}$, где $\operatorname{tg}\varphi_n = -\dfrac{2\nu\omega}{a^2\pi^4n^4-\omega^2l^4}$, а ν — «коэффициент трения», входящий в

уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\nu \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

160. $$u(x,\, t) = \frac{2F_0 l^3}{EJ} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \cos \dfrac{\mu_n^2 a^2}{l^2}\, t}{\mu_n^4 (\operatorname{sh} \mu_n + \sin \mu_n)}\, X_n(x), \tag{1}$$

где

$$X_n(x) = (\operatorname{ch} \mu_n + \cos \mu_n) \left(\operatorname{sh} \mu_n \frac{x}{l} - \sin \mu_n \frac{x}{l}\right) - \\ - (\operatorname{sh} \mu_n + \sin \mu_n) \left(\operatorname{ch} \mu_n \frac{x}{l} - \cos \mu_n \frac{x}{l}\right), \tag{2}$$

μ_n — положительные корни уравнения

$$\operatorname{ch} \mu \cos \mu = -1. \tag{3}$$

161. Для $t < T$ ответ совпадает с ответом предыдущей задачи. Для $t > T$

$$u(x,\, t) = \frac{2F_0 l^3}{EJ} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \dfrac{\mu_n^2 a^2}{l^2}(t - T) - \cos \dfrac{\mu_n^2 a^2 t}{l^2}}{\mu_n^4 (\operatorname{sh} \mu_n + \sin \mu_n)}\, X_n(x),$$

где μ_n и $X_n(x)$ имеют тот же смысл, что и в предыдущей задаче.

162. $$u(x,\, t) = \frac{2F_0 l a^2}{\omega EJ} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{X_n(x)}{\mu_n^2 (\operatorname{sh} \mu_n + \sin \mu_n)} \frac{\sin \dfrac{\mu_n^2 a^2}{l^2}\, t - \dfrac{\mu_n^2 a^2}{\omega l^2} \sin \omega t}{1 - \left(\dfrac{\mu_n^2 a^2}{\omega l^2}\right)^2},$$

где μ_n и $X_n(x)$ имеют тот же смысл, что и в задаче 160.

163. $u(x,\, t) =$

$$= \frac{f_0 l^2 a^2}{\omega EJ} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} \mu_n - 2 \operatorname{ch} \mu_n \sin \mu_n + \sin \mu_n}{\mu_n^3 \operatorname{sh}^2 \mu_n \sin^2 \mu_n} \frac{\sin \dfrac{\mu_n^2 a^2}{l^2}\, t - \dfrac{\mu_n^2 a^2}{\omega l^2} \sin \omega t}{1 - \left(\dfrac{\mu_n^2 a^2}{\omega l^2}\right)^2} X_n(x),$$

где

$$X_n(x) = \operatorname{sh} \mu_n \sin \frac{\mu_n x}{l} - \sin \mu_n \operatorname{sh} \frac{\mu_n x}{l},$$

μ_n — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} \mu = \operatorname{th} \mu$ $(\mu_1 < \mu_2 < \ldots)$.

4. Колебания при неоднородности сред и других условиях, приводящих к уравнениям с переменными коэффициентами; учет сосредоточенных сил и масс.

164. Р е ш е н и е. Продольное смещение $u(x,\, t)$ точек стержня является решением краевой задачи

$$\rho(x) u_{tt} = (E(x) u_x)_x, \quad 0 < x < x_0, \quad x_0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(0,\, t) = u(l,\, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x_0 - 0,\, t) = u(x_0 + 0,\, t), \quad E(x_0 - 0) u_x(x_0 - 0,\, t) = E(x_0 + 0) u_x(x_0 + 0,\, t), \tag{2'}$$

$$u(x,\,0)=\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{h}{x_0}\,x, & 0<x<x_0,\\[2mm] \dfrac{h(l-x)}{l-x_0}, & x_0<x<l,\end{cases}\tag{3}$$

$$u_t(x,\,0)=\psi(x)\equiv 0,\quad 0<x<l,\tag{3'}$$

$$E(x)=\begin{cases}\overline{E}, & 0<x<x_0,\\ \overline{\overline{E}}, & x_0<x<l,\end{cases}\qquad \rho(x)=\begin{cases}\overline{\rho}, & 0<x<x_0,\\ \overline{\overline{\rho}}, & x_0<x<l,\end{cases}\tag{4}$$

$\overline{\rho}$, $\overline{\overline{\rho}}$, $\overline{E}$, $\overline{\overline{E}}$ — константы.

Частные решения краевой задачи (1), (2), (4) ищем в виде

$$u(x,\,t)=X(x)T(t).\tag{5}$$

Подставляя (5) в (1), (2) после разделения переменных, получим

$$T''(t)+\omega^2T(t)=0,\quad 0<t<+\infty,\tag{6}$$

$$(E(x)X'(x))'+\omega^2\rho(x)X(x)=0,\quad 0<x<l,\tag{7}$$

$$X(0)=X(l)=0,\quad X(x_0-0)=X(x_0+0),\tag{7'}$$

$$\overline{E}X'(x_0-0)=\overline{\overline{E}}X'(x_0+0).\tag{7''}$$

Из общей теории известно[1)], что краевая задача (7'), (7'') имеет бесконечную последовательность собственных частот

$$\omega_1<\omega_2<\ldots<\omega_n<\ldots$$

и соответствующих им собственных функций

$$X_1(x),\,X_2(x),\,\ldots,\,X_n(t),\,\ldots,$$

ортогональных с весом $\rho(x)$ на отрезке $0\leqslant x\leqslant l$. Решение уравнения (7), удовлетворяющее условиям (7'), имеет вид

$$X(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin\dfrac{\omega}{\overline{a}}\,x}{\sin\dfrac{\omega}{\overline{a}}\,x_0} & \text{при}\quad 0<x<x_0,\quad \overline{a}=\sqrt{\dfrac{\overline{E}}{\overline{\rho}}},\\[3mm] \dfrac{\sin\dfrac{\omega}{\overline{\overline{a}}}\,(l-x)}{\sin\dfrac{\omega}{\overline{\overline{a}}}\,(l-x_0)} & \text{при}\quad x_0<x<l,\quad \overline{\overline{a}}=\sqrt{\dfrac{\overline{\overline{E}}}{\overline{\overline{\rho}}}},\end{cases}\tag{8}$$

Удовлетворяя условию (7''), получим трансцендентное уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{\overline{E}\,\overline{\rho}}}\operatorname{tg}\frac{\omega}{\overline{a}}\,x_0=\frac{1}{\sqrt{\overline{\overline{E}}\,\overline{\overline{\rho}}}}\operatorname{tg}\frac{\omega}{\overline{\overline{a}}}\,(x_0-l)\tag{9}$$

для определения собственных частот ω_n.

Полагая в (8) $\omega=\omega_n$, получим собственные функции нашей краевой задачи

[1)] См. [7, с. 422, 423].

$$X_n(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin\dfrac{\omega_n}{\overline{a}}x}{\sin\dfrac{\omega_n}{\overline{a}}x_0} & \text{при}\quad 0<x<x_0,\\[2ex] \dfrac{\sin\dfrac{\omega_n}{\overline{\overline{a}}}(l-x)}{\sin\dfrac{\omega_n}{\overline{\overline{a}}}(l-x_0)} & \text{при}\quad x_0<x<l.\end{cases}\tag{10}$$

Квадрат нормы собственной функции равен

$$\|X_n\|^2=\int_0^l\rho(x)X_n^2(x)\,dx=\overline{\rho}\int_0^{x_0}\frac{\sin^2\dfrac{\omega_n}{\overline{a}}x}{\sin^2\dfrac{\omega_n}{\overline{a}}x_0}\,dx+\overline{\overline{\rho}}\int_{x_0}^{l}\frac{\sin^2\dfrac{\omega_n}{\overline{\overline{a}}}(l-x)}{\sin^2\dfrac{\omega_n}{\overline{\overline{a}}}(l-x_0)}\,dx=$$

$$=\frac{\overline{\rho}x_0}{2\sin^2\dfrac{\omega_n}{\overline{a}}x_0}+\frac{\overline{\overline{\rho}}(l-x_0)}{2\sin^2\dfrac{\omega_n}{\overline{\overline{a}}}(x_0-l)},\tag{11}$$

$$u(x,\,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_nX_n(x)\cos\omega_nt,\tag{12}$$

$$a_n=\frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^l\rho(x)\,\varphi(x)\,X_n(x)\,dx=\frac{h}{\omega_n^2\|X_n\|^2}\left(\frac{\overline{E}}{x_0}+\frac{\overline{\overline{E}}}{l-x_0}\right).\tag{13}$$

165. $u(x,\,t)=X(x)\sin\omega t$,

$$X(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin\dfrac{\omega}{\overline{a}}x}{\sin\dfrac{\omega}{\overline{a}}x_0} & \text{при}\quad 0<x<x_0,\\[2ex] \dfrac{\dfrac{\omega}{\overline{\overline{a}}}\cos\dfrac{\omega}{\overline{\overline{a}}}(l-x)+F_0\sin\dfrac{\omega}{\overline{\overline{a}}}(x-x_0)}{\dfrac{\omega}{\overline{\overline{a}}}\cos\dfrac{\omega}{\overline{\overline{a}}}(l-x_0)} & \text{при}\quad x_0<x<l.\end{cases}$$

166. $u(x,\,t)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos\omega_nt+b_n\sin\omega_nt)X_n(x)$,

$$a_n=\frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^l\rho(x)\varphi(x)X_n(x)\,dx,\quad b_n=\frac{1}{\omega_n\|X_n\|^2}\int_0^l\rho(x)\psi(x)X_n(x)\,dx,$$

$$X_n(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin\dfrac{\omega_n}{\overline{a}}x}{\sin\dfrac{\omega_n}{\overline{a}}x_0} & \text{при}\quad 0<x<x_0,\\[2ex] \dfrac{\dfrac{\omega_n}{\overline{\overline{a}}}\cos\dfrac{\omega_n}{\overline{\overline{a}}}(l-x)+h\sin\dfrac{\omega_n}{\overline{\overline{a}}}(l-x)}{\dfrac{\omega_n}{\overline{\overline{a}}}\cos\dfrac{\omega_n}{\overline{\overline{a}}}(l-x_0)+h\sin\dfrac{\omega_n}{\overline{\overline{a}}}(l-x_0)} & \text{при}\quad x_0<x<l,\end{cases}$$

ω_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$p\omega=-\operatorname{tg}q\omega,$$

где

$$p=\frac{1}{h\overline{\overline{a}}},\quad q=\frac{l-x_0}{\bar{a}}+\frac{x_0}{\overline{a}}.$$

167.

$$u(x,\,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_nX_n(x)\cos a\lambda_n t,\quad 0<x<l,\quad 0<t<+\infty, \tag{1}$$

$$a^2=\frac{T_0}{\rho}$$

$$X_n(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin\lambda_n x}{\sin\lambda_n x_0}, & 0<x<x_0,\\[2ex] \dfrac{\sin\lambda_n(l-x)}{\sin\lambda_n(l-x_0)}, & x_0<x<l,\end{cases} \tag{3}$$

λ_n — собственные значения краевой задачи, являющиеся корнями уравнения

$$\operatorname{ctg}\lambda_n x_0-\operatorname{ctg}\lambda_n(l-x_0)=\frac{M}{\rho}\,\lambda_n. \tag{4}$$

Собственные функции $X_n(x)$ ортогональны на отрезке $0<x<l$ с весом $\rho(x)=\rho+M\delta(x-x_0)$, где ρ — линейная плотность массы струны, а $\delta(x-x_0)$ — импульсная дельта-функция; таким образом,

$$\int_0^l\rho(x)X_m(x)X_n(x)\,dx=\rho\int_0^l X_m(x)X_n(x)\,dx+MX_m(x_0)X_n(x_0)=0$$

при $m\ne n$, (5)

квадрат нормы собственной функции равен

$$\|X_n\|^2=\int_0^l\rho(x)X_n^2(x)\,dx=\frac{\rho x_0}{2\sin^2\lambda_n x_0}+\frac{\rho(l-x_0)}{2\sin^2\lambda_n(l-x_0)}+\frac{M}{2}, \tag{6}$$

$$a_n=\frac{\displaystyle\int_0^l\rho(x)\varphi(x)X_n(x)\,dx}{\|X_n\|^2}=\frac{\displaystyle\rho\int_0^l\varphi(x)X_n(x)\,dx+M\varphi(x_0)X_n(x_0)}{\|X_n\|^2}, \tag{7}$$

откуда получаем

$$a_n=\frac{\dfrac{\rho h}{\lambda_n^2}\left(\dfrac{1}{x_0}+\dfrac{1}{l-x_0}\right)}{\|X_n\|^2}. \tag{8}$$

Указание. При вычислении (6) и (8) нужно воспользоваться (4). Формулы (6) и (7) могут быть получены и без применения дельта-функции, как это сделано в [7, с. 147–150].

168.

$$u(x,\,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\{a_n\cos\omega_n t+b_n\sin\omega_n t\}X_n(x),$$

$$X_n(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin\dfrac{\omega_n}{a}x}{\sin\dfrac{\omega_n}{a}x_0}, & 0\leqslant x\leqslant x_0,\\[2ex] \dfrac{\cos\dfrac{\omega_n}{a}(l-x)}{\cos\dfrac{\omega_n}{a}(l-x_0)}, & x_0\leqslant x\leqslant l,\end{cases}$$

ω_n — корни уравнения

$$\overline{S}\sqrt{\overline{E}\,\overline{\rho}}\ \operatorname{ctg}\frac{\omega_n}{\overline{a}}\,x_0-\overline{\overline{S}}\sqrt{\overline{\overline{E}}\,\overline{\overline{\rho}}}\ \operatorname{tg}\frac{\omega_n}{\overline{\overline{a}}}\,(l-x_0)=M\omega_n,$$

$$a_n=\frac{\dfrac{\overline{S}\,\overline{\rho}}{\sin^2\dfrac{\omega_n}{\overline{a}}x_0}\displaystyle\int_0^{x_0}\varphi(x)\sin^2\frac{\omega_n}{\overline{a}}\,x\,dx+\frac{\overline{\overline{S}}\,\overline{\overline{\rho}}}{\cos^2\dfrac{\omega_n}{\overline{\overline{a}}}(l-x_0)}\displaystyle\int_{x_0}^{l}\varphi(x)\cos^2\frac{\omega_n}{\overline{\overline{a}}}\,(l-x)\,dx}{\|X_n\|^2},$$

$$b_n=\frac{\dfrac{\overline{S}\,\overline{\rho}}{\sin^2\dfrac{\omega_n}{\overline{a}}x_0}\displaystyle\int_0^{x_0}\psi(x)\sin^2\frac{\omega_n}{\overline{a}}\,x\,dx+\frac{\overline{\overline{S}}\,\overline{\overline{\rho}}}{\cos^2\dfrac{\omega_n}{\overline{\overline{a}}}(l-x_0)}\displaystyle\int_{x_0}^{l}\psi(x)\cos^2\frac{\omega_n}{\overline{\overline{a}}}\,(l-x)\,dx}{\omega_n\|X_n\|^2},$$

$$\|X_n\|^2=\frac{\overline{S}\,\overline{\rho}}{2\sin^2\dfrac{\omega_n}{\overline{a}}\,x_0}+\frac{\overline{\overline{S}}\,\overline{\overline{\rho}}}{2\cos^2\dfrac{\omega_n}{\overline{\overline{a}}}\,(l-x_0)}+\frac{M}{2}.$$

169. Решением краевой задачи

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\quad 0<x<l,\quad 0<t<+\infty, \tag{1}$$

$$u(0,\,t)=0,\quad u_{tt}(l,\,t)=-c^2u_x(l,\,t),\quad 0<t<+\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,\,0)=\psi(x),\quad 0<x<l, \tag{3}$$

где

$$c^2=\frac{KG}{M},\quad a^2=\frac{KG}{J},$$

является

$$u(x,\,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos a\lambda_nt+b_n\sin a\lambda_nt)\sin\lambda_nx; \tag{4}$$

λ_n — собственные значения краевой задачи — являются корнями уравнения

$$\operatorname{ctg}\lambda_nl=\frac{M}{J}\,\lambda_n, \tag{5}$$

а собственные функции $X_n(x)=\sin\lambda_nx$ удовлетворяют условию ортогональности[1])

$$MX_m(l)X_n(l)+\int_0^l JX_m(x)X_n(x)\,dx=0,\quad m\neq n, \tag{6}$$

$$a_n=\frac{M\varphi(l)X_n(l)+\displaystyle\int_0^l J\varphi(x)X_n(x)\,dx}{MX_n^2(l)+\displaystyle\int_0^l JX_n^2(x)\,dx}, \tag{7}$$

[1]) См. указание к задаче 167.

$$b_n = \frac{M\psi(l)X_n(l) + \int\limits_0^l J\psi(x)X_n(x)\,dx}{\left[MX_n^2(l) + \int\limits_0^l JX_n^2(x)\,dx\right]a\lambda_n}. \tag{8}$$

170. $u(x,\,t) = \dfrac{H-l}{H-x}\,\dfrac{A}{\dfrac{\omega}{a}\cos\dfrac{\omega}{a}\,l + \dfrac{1}{H-l}\sin\dfrac{\omega}{a}\,l}\sin\dfrac{\omega}{a}\,x\,\sin\omega t.$

171. $u(x,\,t) = \dfrac{1}{l}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{J_0\left(\mu_n\sqrt{\dfrac{x}{l}}\right)}{J_1^2(\mu_n)}\cos\dfrac{a\mu_n t}{2\sqrt{l}}\int\limits_0^l\varphi(\xi)J_0\left(\mu_n\sqrt{\dfrac{\xi}{l}}\right)d\xi,$

$\varphi(x) = u(x,\,0)$, $J_0(x)$, $J_1(x)$ — функции Бесселя нулевого и первого порядка первого рода, μ_n — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

172. $$u(x,\,t) = \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos a\lambda_n t + b_n\sin a\lambda_n t)J_0\left(\mu_n\sqrt{\frac{x}{l}}\right),$$

$$a_n = \frac{1}{lJ_1^2(\mu_n)}\int_0^l\varphi(\xi)J_0\left(\mu_n\sqrt{\frac{\xi}{l}}\right)d\xi,$$

$$b_n = \frac{1}{al\lambda_n J_1^2(\mu_n)}\int_0^l\psi(\xi)J_0\left(\mu_n\sqrt{\frac{\xi}{l}}\right)d\xi,$$

$$\varphi(x) = u(x,\,0), \quad \psi(x) = u_t(x,\,0), \quad \lambda_n = \sqrt{\frac{\mu_n^2}{4l} - \frac{\omega^2}{a^2}};$$

μ_n имеют те же значения, что и в ответе к предыдущей задаче.

173. $u(x,\,t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[a_n\cos\sqrt{2n(2n-1)}\,at + b_n\sin\sqrt{2n(2n-1)}\,at\right]P_{2n-1}\left(\dfrac{x}{l}\right),$

где

$$a_n = \frac{4n-1}{l}\int_0^l\varphi(\xi)P_{2n-1}\left(\frac{\xi}{l}\right)d\xi,$$

$$b_n = \frac{4n-1}{\sqrt{2n(2n-1)}\,al}\int_0^l\psi(\xi)P_{2n-1}\left(\frac{\xi}{l}\right)d\xi,$$

$P_n(x) = \dfrac{1}{2^n\,n!}\dfrac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$ — полиномы Лежандра,

$$\varphi(x) = u(x,\,0), \quad \psi(x) = u_t(x,\,0).$$

§ 4. Метод интегральных представлений

1. Метод интеграла Фурье. Напомним, что при известных ограничениях на $f(x)$ справедлива интегральная формула Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{i\lambda(x-\xi)}\, d\xi, \tag{1}$$

причем

$$f'(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} i\lambda\, d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{i\lambda(x-\xi)}\, d\xi, \tag{2}$$

т. е. возможно дифференцирование интеграла по параметру под знаком интеграла, и

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{i\lambda} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{i\lambda(x-\xi)}\, d\xi\ ^{1}), \tag{3}$$

где $F(x)$ — первообразная для $f(x)$.

Решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{4}$$

можно искать в виде

$$u(x,\, t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} U(\xi,\, t) e^{i\lambda(x-\xi)} d\xi. \tag{5}$$

Подстановка (5) в (4) дает

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + a^2\lambda^2 U \right\} e^{i\lambda(x-\xi)} d\xi = 0. \tag{6}$$

Для выполнения равенства (6) достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + a^2\lambda^2 U = 0, \tag{7}$$

откуда находим

$$U(\xi,\, t) = A(\xi) e^{ia\lambda t} + B(\xi) e^{-ia\lambda t}, \tag{8}$$

где $A(\xi)$ и $B(\xi)$ — произвольные функции параметра ξ.

Подстановка полученного выражения в (5) согласно (1) дает известное решение в виде суммы распространяющихся волн

$$u(x,\, t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\{ A(\xi) e^{i\lambda(x+at-\xi)} + B(\xi) e^{i\lambda(x-at-\xi)} \right\} d\xi = \\ = A(x+at) + B(x-at). \tag{9}$$

Аналогично интеграл Фурье может быть использован для решения других задач, связанных с уравнением колебаний.

Более широко распространена следующая схема применения интеграла Фурье к решению краевых задач на прямой $-\infty < x < +\infty$ и полупрямой $0 < x < +\infty$.

---

[1]) Здесь интеграл понимается в смысле главного значения.

Образом Фурье функции $f(x)$ на прямой $-\infty < x < +\infty$ с ядром $e^{-i\lambda\xi}$ называется функция

$$\overline{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi. \tag{10}$$

В силу формулы (1) «оригинал», т. е. функция $f(x)$, может быть восстановлен по своему образу с помощью формулы

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \overline{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda. \tag{10'}$$

Переход от $f(x)$ к $\overline{f}(\lambda)$ по формуле (10) называется интегральным преобразованием Фурье; очевидно, преобразования (10) и (10′) являются взаимно обратными.

На полупрямой $0 < x < +\infty$ можно рассматривать косинус-образ Фурье [1] для функции $f(x)$

$$\overline{f}^{(c)}(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda\xi \, d\xi, \tag{11}$$

переход от которого к оригиналу осуществляется по формуле

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} \overline{f}^{(c)}(\lambda) \cos \lambda x \, d\lambda, \tag{11'}$$

и синус-образ [2]

$$\overline{f}^{(s)}(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda\xi \, d\xi, \tag{12}$$

переход от которого к оригиналу выполняется по формуле

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} \overline{f}^{(s)}(\lambda) \sin \lambda x \, d\lambda. \tag{12'}$$

Можно рассматривать преобразования Фурье с другими ядрами. За подробностями отсылаем к специальной литературе.

Чтобы решить краевую задачу для $u(x, t)$ с помощью интегрального преобразования Фурье, по переменному x переходят к задаче для образа Фурье этой функции, находят этот образ. После этого с помощью обратного преобразования Фурье «восстанавливают оригинал», т. е. находят функцию $u(x, t)$ по ее образу Фурье. В качестве ядра интегрального преобразования Фурье для задач на полупрямой нужно брать такое частное решение $X(x, t)$ уравнения, получающегося разделением переменных из основного уравнения заданной краевой задачи, которое удовлетворяет граничному условию задачи, если это условие однородно, или соответствующему однородному граничному условию, если граничное условие задачи неоднородно.

[1] Интегральное преобразование Фурье с ядром $\cos \lambda\xi$.

[2] Интегральное преобразование Фурье с ядром $\sin \lambda\xi$.

174.
$$u(x,\,t)=\frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\,\tau)\,d\xi. \tag{1}$$

Указание. Подставляя в уравнение (1) условия задачи
$$u(x,\,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}U(\xi,\,t)e^{i\lambda(x-\xi)}d\xi,$$
$$f(x,\,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\,t)e^{i\lambda(x-\xi)}d\xi,$$
приходим к уравнению
$$\frac{d^2U}{dt^2}+a^2\lambda^2U=f(\xi,\,t).$$
Решая его при начальных условиях $U(\xi,\,0)=0,\quad \dfrac{dU(\xi,\,0)}{dt}=0$, получаем
$$U(\xi,\,t)=\frac{1}{a\lambda}\int\limits_0^t f(\xi,\,\tau)\sin a(t-\tau)\,d\tau.$$

Подставляя $\sin a(t-\tau)$ в комплексной форме[1)] и подставляя полученное выражение $U(\xi,\,t)$ в интеграл
$$u(x,\,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}U(\xi,\,t)e^{i\lambda(x-\xi)}d\xi$$
в силу (3) введения к настоящему пункту, получаем формулу (1).

175. $u(x,\,t)=\dfrac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+$
$$+\frac{ct}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\frac{I_1\left(c\sqrt{t^2-\dfrac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right)}{\sqrt{t^2-\dfrac{(x-\xi)^2}{a^2}}}\varphi(\xi)\,d\xi+$$
$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}I_0\left(c\sqrt{t^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right)\psi(\xi)\,d\xi, \tag{1}$$
где $I_0(z)$ и $I_1(z)$ — «видоизмененные» функции Бесселя нулевого и первого порядков; они могут быть представлены рядами
$$I_0(z)=J_0(iz)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1}, \tag{2}$$
$$I_1(z)=-iJ_1(iz)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!(k+1)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1}, \tag{3}$$

[1)] $\sin\varphi=\dfrac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$.

причем

$$I_0'(z) = I_1(z). \tag{4}$$

Видоизмененная функция Бесселя ν-го порядка

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \tag{5}$$

является ограниченным при $x \to 0$ решением дифференциального уравнения

$$y'' + \frac{1}{x}\, y' - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0\,^{1)}. \tag{6}$$

Р е ш е н и е. Решение краевой задачи

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + c^2 u, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{7}$$

$$u(x,\, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x,\, 0) = \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty, \tag{8}$$

ищем в виде

$$u(x,\, t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} U(\xi,\, t) e^{i\lambda(x-\xi)} d\xi. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (7), получаем уравнение

$$\frac{d^2 U(\xi,\, t)}{dt^2} + (a^2\lambda^2 - c^2)\, U(\xi,\, t) = 0. \tag{10}$$

Его решение, удовлетворяющее в силу (8) и (9) начальным условиям

$$U(\xi,\, 0) = \varphi(\xi), \quad U_t(\xi,\, 0) = \psi(\xi), \tag{11}$$

имеет вид

$$U(\xi,\, t) = \varphi(\xi) \cos t\sqrt{a^2\lambda^2 - c^2} + \psi(\xi)\, \frac{\sin t\sqrt{a^2\lambda^2 - c^2}}{\sqrt{a^2\lambda^2 - c^2}}. \tag{12}$$

Подставляя (12) в (9), получим

$$u(x,\, t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cos t\sqrt{a^2\lambda^2 - c^2}\, e^{i\lambda(x-\xi)} d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi)\, \frac{\sin t\sqrt{a^2\lambda^2 - c^2}}{\sqrt{a^2\lambda^2 - c^2}} e^{i\lambda(x-\xi)} d\xi = u_1(x,\, t) + u_2(x,\, t). \tag{13}$$

Из теории цилиндрических функций известно, что

$$\frac{\sin r}{r} = \frac{1}{2} \int\limits_0^\pi J_0(r \sin\varphi \sin\theta) e^{ir\cos\varphi\cos\theta} \sin\theta\, d\theta. \tag{14}$$

Сделаем в этом равенстве замену

$$r\cos\varphi = -a\lambda t, \quad r\sin\varphi = ict, \quad r^2 = t^2(a^2\lambda^2 - c^2). \tag{15}$$

[1)] Подробнее см. [7, с. 649–651].

Тогда получится равенство

$$\frac{\sin t\sqrt{a^2\lambda^2-c^2}}{t\sqrt{a^2\lambda^2-c^2}}=\frac{1}{2}\int\limits_{-at}^{+at}J_0\left(ict\sqrt{1-\frac{\beta^2}{a^2t^2}}\right)e^{-i\lambda\beta}\frac{d\beta}{at}=$$
$$=\frac{1}{2a}\int\limits_{-at}^{+at}I_0\left(c\sqrt{t^2-\frac{\beta^2}{a^2}}\right)e^{-i\lambda\beta}\,\frac{d\beta}{t}.$$

Следовательно,

$$u_2=\frac{1}{4\pi a}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\{\psi(\xi)\int\limits_{-at}^{+at}I_0\left(c\sqrt{t^2-\frac{\beta^2}{a^2}}\right)e^{i\lambda(x-\xi-\beta)}d\beta\right\}d\xi. \quad (15')$$

Положим

$$\Phi(\beta)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad \left|\dfrac{\beta}{a}\right|>|t|,\\ I_0\left(c\sqrt{t^2-\dfrac{\beta^2}{a^2}}\right) & \text{при} \quad \left|\dfrac{\beta}{a}\right|<|t|.\end{cases} \quad (16)$$

Тогда

$$\int\limits_{-at}^{at}I_0\left(c\sqrt{t^2-\frac{\beta^2}{a^2}}\right)e^{i\lambda(x-\beta)}\,d\beta=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\beta)e^{i\lambda(x-\beta)}\,d\beta. \quad (17)$$

Выполним в правой части равенства (15′) сначала интегрирование по λ и β. По интегральной формуле Фурье [1] получим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\beta)e^{i\lambda(z-\beta)}d\beta=\varphi(z)$$

в точках непрерывности $\varphi(z)$. В нашем случае $z=x-\xi$.

В силу (17)

$$\varphi(x-\xi)=\begin{cases}I_0\left(c\sqrt{t^2-\dfrac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right) & \text{при} \quad x-at<\xi<x+at,\\ 0 \quad \text{при} \quad -\infty<\xi<x-at, & \text{при} \quad x+at<\xi<+\infty.\end{cases}$$

Поэтому

$$u_2(x,\,t)=\frac{1}{2a}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi(\xi)\Phi(x-\xi)d\xi=$$
$$=\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)I_0\left(c\sqrt{t^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right)d\xi. \quad (18)$$

Напомним первоначальные выражения для

$$u_2(x,\,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi(\xi)\,\frac{\sin t\sqrt{a^2\lambda^2-c^2}}{\sqrt{a^2\lambda^2-c^2}}\,e^{i\lambda(x-\xi)}d\xi, \quad (19)$$

$$u_1(x,\,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cos t\sqrt{a^2\lambda^2-c^2}e^{i\lambda(x-\xi)}d\xi. \quad (20)$$

[1] См. введение к решениям задач настоящего пункта.

Сопоставляя выражения (19) и (18) для $u_2(x,\,t)$, мы получим, интегрируя (20) по t,

$$\int\limits_0^t u_1(x,\,\tau)d\tau = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\,\frac{\sin t\sqrt{a^2\lambda^2-c^2}}{\sqrt{a^2\lambda^2-c^2}}\,e^{i\lambda(x-\xi)}d\xi = \\ = \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi)\,I_0\left(c\sqrt{t^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\,\right)d\xi.$$

Дифференцирование последнего равенства по t дает:

$$u_1(x,\,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \\ + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi)\,\frac{\partial}{\partial t}\,I_0\left(c\sqrt{t^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\,\right)d\xi = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \\ + \frac{ct}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi)\,\frac{I_1\left(c\sqrt{t^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\,\right)}{\sqrt{t^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}}\,d\xi. \quad (21)$$

Складывая (18) и (21), получим формулу (1) ответа.

176.

$$u(x,\,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\,\tau)\,I_0\left(c\sqrt{(t-\tau)^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\,\right)d\xi. \quad (1)$$

Указание. Для получения формулы (1) ответа можно воспользоваться методом решения задачи 175.

177. $u(x,\,t) = \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(|x-at|)\,\operatorname{sign}(x-at)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{|x-at|}^{x+at} \psi(z)\,dz.$

Решение. Умножим уравнение $u_{tt} = a^2u_{\xi\xi}$ на $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sin\lambda\xi$, проинтегрируем по ξ от 0 до $+\infty$, проделаем то же с начальными условиями; это и приведет к уравнению

$$\frac{d^2\overline{u}^{(s)}(\lambda,\,t)}{dt^2} + a^2\lambda^2\overline{u}^{(s)}(\lambda,\,t) = 0 \quad (1)$$

с начальными условиями

$$\overline{u}^{(s)}(\lambda,\,0) = \overline{f}^{(s)}(\lambda), \quad \overline{u}_t^{(s)}(\lambda,\,0) = \overline{\psi}^{(s)}(\lambda), \quad (2)$$

где

$$\overline{u}^{(s)}(\lambda,\,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} u(\xi,\,t)\sin\lambda\xi\,d\xi,$$

$$\overline{f}^{(s)}(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi, \quad \overline{\psi}^{(s)}(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} \psi(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi.$$

Решая уравнение (1) при начальных условиях (2), получим

$$\overline{u}^{(s)}(\lambda,\, t) = \overline{f}^{(s)}(\lambda)\cos a\lambda t + \overline{\psi}^{(s)}(\lambda)\,\frac{\sin a\lambda t}{a\lambda}. \tag{3}$$

Умножая обе части (3) на $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\sin\lambda x$ и интегрируя по λ от 0 до $+\infty$, получим

$$u(x,\, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\overline{u}^{(s)}(\lambda,\, t)\sin\lambda x\,d\lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\overline{f}^{(s)}\cos(a\lambda t)\sin\lambda x\,d\lambda +$$

$$+\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\overline{\psi}^{(s)}(\lambda)\frac{\sin(a\lambda t)\sin(\lambda x)\,d\lambda}{\lambda} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\overline{f}^{(s)}(\lambda)[\sin\lambda(x+at)+\sin\lambda(x-at)]d\lambda +$$

$$+\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\overline{\psi}^{(s)}(\lambda)\frac{[\cos\lambda(x-at)-\cos\lambda(x+at)]}{\lambda}\,d\lambda,$$

если $x > at$.

Учитывая, что

$$\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(s)\,ds = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\overline{\psi}^{(s)}(\lambda)\,d\lambda\int\limits_{x-at}^{x+at}\sin\lambda s\,ds =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\overline{\psi}^{(s)}(\lambda)\frac{\cos\lambda(x-at)-\cos\lambda(x+at)}{\lambda}\,d\lambda,$$

получим

$$u(x,\, t) = \frac{f(x+at)+f(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(s)\,ds \quad \text{при} \quad x > at. \tag{4}$$

Если же $x < at$, то под знаком синуса и косинуса нужно заменить $x-at$ на $at-x$, что приведет к изменению знака перед синусом и для $u(x,\, t)$ получится выражение

$$u(x,\, t) = \frac{f(at+x)-(at-x)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{at-x}^{at+x}\psi(s)\,ds \quad \text{при} \quad x < at. \tag{5}$$

Объединяя (4) и (5) в одну формулу, получим приведенный выше ответ.

178. $u(x,\, t) = \dfrac{\varphi(at+x)+\varphi(|x-at|)}{2} +$

$$+\frac{1}{2a}\left\{\int\limits_0^{x+at}\psi(z)\,dz - \operatorname{sign}(x-at)\int\limits_0^{|x-at|}\psi(z)\,dz\right\}.$$

Указание. Применить косинус-преобразование Фурье.

179. $u(x,\,t)=\begin{cases}0 & \text{при}\quad 0<t<\dfrac{x}{a},\\ \mu\left(t-\dfrac{x}{a}\right) & \text{при}\quad t>\dfrac{x}{a}.\end{cases}$

Указание. Применить синус-преобразование Фурье.

Решение. Умножим обе части уравнения $u_{tt}=a^2u_{\xi\xi}$ [1] на $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sin\lambda\xi$ и проинтегрируем по ξ от 0 до $+\infty$, применяя интегрирование по частям [2] и используя граничное условие $u(0,\,t)=\mu(t)$; это дает:

$$\frac{d^2\overline{u}^{(s)}(\lambda,\,t)}{dt^2}=a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}\sin\lambda\xi\,d\xi=a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\partial u}{\partial\xi}\sin\lambda\xi\,\Big|_{\xi=0}^{\xi=+\infty}-$$

$$-\,a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\lambda(\cos\lambda\xi)u\,\Big|_{\xi=0}^{\xi=+\infty}-a^2\lambda^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}u\sin\lambda\xi\,d\xi=$$

$$=-a^2\lambda^2\overline{u}^{(s)}(\lambda,\,t)+a^2\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mu(t).$$

При этом мы пользуемся тем обстоятельством, что $u(\xi,\,t)$ и $\dfrac{\partial u(\xi,\,t)}{\partial\xi}$ стремятся к нулю при $\xi\to+\infty$. Так мы приходим к уравнению

$$\frac{d^2\overline{u}^{(s)}(\lambda,\,t)}{dt^2}+a^2\lambda^2\overline{u}^{(s)}(\lambda,\,t)=a^2\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mu(t). \tag{1}$$

Так как искомое решение

$$u(x,\,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\overline{u}^{(s)}(\lambda,\,t)\sin\lambda x\,d\lambda$$

должно удовлетворять нулевым начальным условиям

$$u(x,\,0)=u_t(x,\,0)=0,\quad 0<x<+\infty,$$

то, решая уравнение (1), для $\overline{u}^{(s)}(\lambda,\,t)$ следует взять нулевые начальные условия

$$\overline{u}^{(s)}(\lambda,\,0)=\frac{d\overline{u}^{(s)}(\lambda,\,0)}{dt}=0. \tag{2}$$

Решение уравнения (1) при начальных условиях (2) записывается в виде

$$\overline{u}^{(s)}(\lambda,\,t)=a\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^t\mu(t)\sin a\lambda(t-\tau)\,d\tau,$$

следовательно,

$$u(x,\,t)=a\,\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}d\lambda\int\limits_0^t\mu(\tau)\sin\lambda x\sin a\lambda(t-\tau)\,d\tau.$$

---

[1] В $u(x,\,t)$ заменим x на ξ.

[2] Ср. с решением методом распространяющихся волн, задача 73.

Меняя порядок интегрирования, вычислим сначала интеграл

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin\lambda x\sin a\lambda(t-\tau)d\lambda=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos\lambda[x-a(t-\tau)]\,d\lambda-$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos\lambda[x+a(t-\tau)]\,d\lambda=\delta(x-a[t-\tau])-\delta(x+a[t-\tau]).$$

Так как $0\leqslant\tau<t$, то $\delta(x+a[t-\tau])\equiv 0$ при $x>0$; следовательно,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin\lambda x\cos a\lambda(t-\tau)d\lambda=\delta(x-a[t-\tau])$$
$$\text{при}\quad 0<\tau<t,\quad 0<x<+\infty.$$

Поэтому

$$u(x,\,t)=a\int_0^t\mu(\tau)\delta(x-a[t-\tau])d\tau=\int_0^{at}\mu\left(t-\frac{s}{a}\right)\delta(x-s)ds=$$
$$=\begin{cases}0 & \text{при}\quad t<\dfrac{x}{a},\\ \mu\left(t-\dfrac{x}{a}\right) & \text{при}\quad t>\dfrac{x}{a}.\end{cases}$$

180. $u(x,\,t)=-a\displaystyle\int_0^{t-x/a}\nu(s)\,ds.$

Указание. Применить косинус-преобразование Фурье; см. точное решение предыдущей задачи (ср. с решением задачи 74).

181. а) $u(x,\,t)=\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^t d\tau\int_{|x-a(t-\tau)|}^{x+a(t-\tau)}f(s,\,\tau)\,ds;$

б) $u(x,\,t)=\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^t d\tau\left\{\int_0^{x+a(t-\tau)}f(s,\,\tau)ds-\right.$
$$\left.-\operatorname{sign}[x-a(t-\tau)]\int_0^{|x-a(t-\tau)|}f(s,\,\tau)\,ds\right\}.$$

Указание. В случае а) применить синус-преобразование Фурье и в случае б) — косинус-преобразование Фурье. Воспользоваться в случае а) также равенством

$$\frac{2\sin a\lambda(t-\tau)\sin\lambda x}{\lambda}=\frac{\cos\lambda[x-a(t-\tau)]-\cos[x+a(t-\tau)]}{\lambda}=$$
$$=\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\sin\lambda s\,ds=\frac{\cos\lambda[a(t-\tau)-x]-\cos[a(t-\tau)+x]}{\lambda}=$$
$$=\int_{a(t-\tau)-x}^{a(t-\tau)+x}\sin\lambda s\,ds$$

и аналогичными соотношениями воспользоваться в случае б).

182.
$$u(x,\,t) = -\int\limits_0^{t-x} \nu(\tau)\, I_0\left(c\sqrt{(t-\tau)^2 - x^2}\right) d\tau. \qquad (1)$$

Указание. Можно искать решение краевой задачи в виде
$$u(x,\,t) = \int\limits_0^{t-x} \varphi(\tau)\, I_0\left(c\sqrt{(t-\tau)^2 - x^2}\right) d\tau, \qquad (2)$$
где $\varphi(\tau)$ есть функция, подлежащая определению из граничного условия.

183. $u(x,\,t) = \mu(t-x) - cx \int\limits_0^{t-x} \mu(\tau)\, \dfrac{I_1(c\sqrt{(t-\tau)^2 - x^2})}{\sqrt{(t-\tau)^2 - x^2}}\, d\tau.$

Указание. Воспользоваться решением предыдущей задачи.

184. Решение $u(x,\,t)$ краевой задачи удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению
$$\frac{du(x,\,t)}{dx} - hu(x,\,t) = \varkappa(t-x) - cx \int\limits_0^{t-x} \varkappa(\tau)\, \frac{I_1(c\sqrt{(t-\tau)^2 - x^2})}{\sqrt{(t-\tau)^2 - x^2}}\, d\tau.$$

185.
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \overline{f}(\lambda)\, \overline{g}(\lambda)\, e^{-i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \overline{f}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(s) e^{i\lambda s} ds =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(s)\, ds \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \overline{f}(\lambda) \overline{e}^{\,i\lambda(x-s)} d\lambda = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(s) f(x-s)\, ds.$$

186.
$$\int\limits_0^{+\infty} \overline{f}^{(c)}(\lambda) \overline{g}^{(c)}(\lambda) \cos\lambda x\, d\lambda =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \overline{f}^{(c)}(\lambda) \cos\lambda x\, d\lambda \int\limits_0^{+\infty} g(s) \cos\lambda s\, ds =$$
$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} g(s) ds \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \overline{f}^{(c)}(\lambda) [\cos\lambda(x-s) + \cos\lambda(x+s)] d\lambda =$$
$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} g(s) [f(|x-s|) + f(x+s)]\, ds.$$

187. Указание. См. решение задачи 186.

188.
$$u(x,\,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x - 2\lambda\sqrt{at})(\sin\lambda^2 + \cos\lambda^2)\, d\lambda -$$
$$- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(x - 2\lambda\sqrt{at})(\sin\lambda^2 - \cos\lambda^2)\, d\lambda. \qquad (1)$$

При $\varphi(x) = Ae^{-x^2/(4k^2)}$, $\psi(x) \equiv 0$ получим
$$u(x,\,t) = \frac{Ak}{\sqrt{R}} \exp\left\{-x^2\, \frac{\cos\theta}{4R}\right\} \cos\left(\frac{x^2 \sin\theta}{4R} - \frac{1}{2}\,\theta\right), \qquad (2)$$

где

$$R\cos\theta = k^2, \quad R\sin\theta = at.$$

Указание. Применить преобразование Фурье с ядром $e^{i\lambda\xi}$ на прямой $-\infty < x < +\infty$. Воспользоваться соотношениями

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos(\alpha\xi)^2 e^{-i\xi x}\,d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\left(\cos\frac{x^2}{4\alpha}+\sin\frac{x^2}{4\alpha}\right), \qquad \text{(I)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin(\alpha\xi)^2 e^{-i\xi x}\,d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\left(\cos\frac{x^2}{4\alpha}-\sin\frac{x^2}{4\alpha}\right), \qquad \text{(II)}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos(at\xi)^2\varphi(\xi)e^{-i\xi x}\,d\xi = \\ = \frac{1}{2\sqrt{at}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x-s)\left(\cos\frac{s^2}{4at}+\sin\frac{s^2}{4at}\right)ds, \qquad \text{(III)}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin(at\xi)^2\overline{\psi}(\xi)e^{-i\xi x}\,d\xi = \\ = \frac{1}{2\sqrt{at}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi(x-s)\left(\cos\frac{s^2}{4at}+\sin\frac{s^2}{4at}\right)ds. \qquad \text{(IV)}$$

Соотношения (III) и (IV) получаются с помощью соотношений (I) и (II) и теоремы о свертке, доказываемой в решении задачи 185. Соотношения же (I) и (II) могут быть получены из известных интегралов (см. [1])

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos x^2\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{и} \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin x^2\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \qquad (3)$$

А именно, подстановка $x = y - l$ дает

$$\cos x^2 = \cos(y^2+l^2)\cos 2ly + \sin(y^2+l^2)\sin 2ly,$$
$$\sin x^2 = \sin(y^2+l^2)\cos 2ly - \cos(y^2+l^2)\sin 2ly.$$

Подставляя cos и sin от y^2+l^2 через cos и sin от y^2 и l^2, получим два уравнения (из (3)) для разыскания интегралов

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos y^2\cos 2ly\,dy \quad \text{и} \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin y^2\cos 2ly\,dy. \qquad (4)$$

Так как

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos y^2\sin 2ly\,dy = 0 \quad \text{и} \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin y^2\sin 2ly\,dy = 0, \qquad (5)$$

то мнимая часть искомых интегралов (I) и (II) равна нулю.

Для получения формулы (2) при начальных условиях

$$\varphi(x) = Ae^{-x^2/(4k^2)}, \quad \psi(x) \equiv 0$$

не стоит пользоваться общей формулой (1); лучше воспользоваться формулой обращения

$$u(x,\,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\overline{u}(\lambda,\,t)e^{-i\lambda x}\,d\lambda,$$

подставив в нее значение

$$\overline{u}(\lambda,\,t)=\overline{\varphi}(\lambda)\cos a\lambda^2 t=\overline{\varphi}(\lambda)\,\frac{e^{ia\lambda^2 t}+e^{-ia\lambda^2 t}}{2},$$

где

$$\overline{\varphi}(\lambda)=\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\Big\{-\frac{\xi^2}{4k^2}+i\lambda\xi\Big\}\,d\xi=Ak\sqrt{2}\,e^{-k^2\lambda^2}.$$

Следует заметить, что последнее равенство имеет место как при действительном, так и при комплексном k.

189. $$u(x,\,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{x}{\sqrt{2at}}}^{+\infty}\mu\Big(t-\frac{x^2}{2ax^2}\Big)\Big[\sin\frac{\lambda^2}{2}+\cos\frac{\lambda^2}{2}\Big]\,d\lambda.$$

Указание. См. решение предыдущей задачи. Следует заметить также, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\xi\sin(a\xi)^2\sin(\xi x)\,d\xi$ получается дифференцированием по x интеграла

$$\int\limits_0^{+\infty}\sin(a\xi)^2\cos(\xi x)\,d\xi.$$

190. Указание. Воспользоваться тем, что:

1) если $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ — функции нечетные, то функция

$$U(x,\,t)=\frac{\Phi(x-at)+\Phi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\Psi(z)\,dz$$

равна нулю при $x=0$;

2) если $u(x,\,t)$ есть решение уравнения $u_{tt}=a^2u_{xx}$, то и

$$U(x,\,t)=\sum_{k=0}^{N}A_k\,\frac{\partial^k u(x,\,t)}{\partial x^k}$$

также является решением этого уравнения.

191. Указание. Воспользоваться тем, что:

1) если $F(x,\,t)$ есть функция нечетная по x, то функция

$$U(x,\,t)=\frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}F(\xi,\tau)\,d\xi$$

равна нулю при $x=0$;

2) если $u(x,\,t)$ есть решение уравнения $u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,\,t)$, то

$$U(x,\,t)=\sum_{k=0}^{N}\frac{\partial^k u(x,\,t)}{\partial x^k}$$

является решением уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sum_{k=0}^{N} A_k \frac{\partial^k f(x, t)}{\partial x^k}.$$

192. Указание. Доказательство проводится аналогично тому, как это делается в решении задачи 190.

193. Указание. Доказательство проводится аналогично тому, как это делается в решении задачи 191.

1*. Переход к конечному интервалу методом отражений.

194. $u(x, t) = \dfrac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} +$

$$+ \frac{ct}{2} \int_{x-at}^{x+at} \frac{I_1\left(c\sqrt{t^2 - \dfrac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right)}{\sqrt{t^2 - \dfrac{(x-\xi)^2}{a^2}}} \varphi(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} I_0\left(c\sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right) \psi(\xi)\, d\xi, \quad (1)$$

где $\varphi(\xi)$ и $\psi(\xi)$ получаются нечетным продолжением относительно нуля и далее периодическим продолжением в периодом $2l$.

195. Решение получается по формуле (1) ответа предыдущей задачи, но $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ продолжаются нечетно относительно $x = 0$, четно относительно $x = l$ и далее периодически с периодом $4l$.

196. Решение получается по формуле (1) ответа к задаче 194; $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ продолжаются четно относительно $x = 0$ и $x = l$ и далее с периодом $2l$.

197. Будем искать решение краевой задачи

$$u_{tt} = u_{xx} + c^2 u, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

в виде

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{t-x} \varphi(\tau) I_0\left(c\sqrt{(t-\tau)^2 - x^2}\right) d\tau +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{t-(l-x)} \psi(\tau)\, I_0\left(c\sqrt{(t-\tau)^2 - (l-x)^2}\right) d\tau, \quad (4)$$

где функции $\varphi(\tau)$ и $\psi(\tau)$ подлежат определению из граничных условий (2). Нетрудно убедиться, что $u(x, t)$, определяемое по формуле (4), является решение (1) при любых $\varphi(\tau)$ и $\psi(\tau)$. Будем считать $\varphi(\tau) \equiv \psi(\tau) = 0$ при $\tau < 0$. Выполняя дифференцирование в (4) и ис-

пользуя граничные условия (2), получим

$$-\varphi(t)+\psi(t-l)+\int\limits_0^{t-l}\psi(\tau)\,\frac{clI_1\bigl(c\sqrt{(t-\tau)^2-l^2}\,\bigr)}{\sqrt{(t-\tau)^2-l^2}}\,d\tau=\mu_1(t), \qquad (5)$$

$$-\varphi(t-l)+\psi(t)-\int\limits_0^{t-l}\varphi(\tau)\,\frac{clI_1\bigl(c\sqrt{(t-\tau)^2-l^2}\,\bigr)}{\sqrt{(t-\tau)^2-l^2}}\,d\tau=\mu_2(t). \qquad (6)$$

Положим

$$\varphi_1(t)=\psi(t)-\varphi(t),\quad \psi_1(t)=\psi(t)+\varphi(t). \qquad (7)$$

Из (5) и (6) найдем

$$\varphi_1(t)+\varphi_2(t-l)+cl\int\limits_0^{t-l}\varphi_1(\tau)\,\frac{I_1\bigl(c\sqrt{(t-\tau)^2-l^2}\,\bigr)}{\sqrt{(t-\tau)^2-l^2}}\,d\tau=\mu_1(t)+\mu_2(t), \qquad (8)$$

$$-\psi_1(t)+\psi_1(t-l)+cl\int\limits_0^{t-l}\psi_1(\tau)\,\frac{I_1\bigl(c\sqrt{(t-\tau)^2-l^2}\,\bigr)}{\sqrt{(t-\tau)^2-l^2}}\,d\tau=\mu_1(t)-\mu_2(t). \qquad (9)$$

Из (8) и (9) в силу равенства $\varphi(\tau)\equiv\psi(\tau)=0$ при $\tau<0$ находим

$$\varphi_1(t)+\mu_1(t)=\mu_2(t),\quad \psi_1(t)=\mu_2(t)-\mu_1(t),\quad 0\leqslant t\leqslant l, \qquad (10)$$

затем

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(t)&=\mu_1(t)+\mu_2(t)-\varphi_1(t-l)-cl\int\limits_0^{t-l}\varphi_1(\tau)\,\frac{I_1\bigl(c\sqrt{(t-\tau)^2-l^2}\,\bigr)}{\sqrt{(t-\tau)^2-l^2}}\,d\tau,\\ \psi_1(t)&=\mu_1(t)-\mu_2(t)+\psi_1(t-l)+cl\int\limits_0^{t-l}\psi_1(\tau)\,\frac{I_1\bigl(c\sqrt{(t-\tau)^2-l^2}\,\bigr)}{\sqrt{(t-\tau)^2-l^2}}\,d\tau.\end{aligned}\right\} \qquad (10')$$

2. Метод Римана. Пусть требуется найти решение уравнения

$$L(u)\equiv u_{xx}-u_{yy}+a_1(x,\,y)u_x+b_1(x,\,y)u_y+c_1(x,\,y)u=f(x,\,y), \qquad (1)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u\Big|_c=\varphi(x),\quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_c=\psi(x) \qquad (2)$$

на кривой c, где $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ — производная по нормали к этой кривой. Предполагается, что кривая c задана уравнением $y=f(x)$, где $f(x)$ — дифференцируемая функция, причем $|f'(x)|<1$.

Тогда значение u в точке M (рис. 30) находится с помощью формулы

$$u(M)=\frac{(uv)_P+(uv)_Q}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_P^Q\bigl[v(u_\xi\,d\eta+u_\eta\,d\xi)-u(v_\xi\,d\eta+v_\eta\,d\xi)+$$

$$+uv(a\,d\eta-b\,d\xi)\bigr]+\iint\limits_{MPQ}v(M,\,M')\,f(M')\,d\sigma_{M'},\quad d\sigma_{M'}=d\xi\,d\eta, \qquad (3)$$

причем

$$u\big|_c=\varphi(x),$$

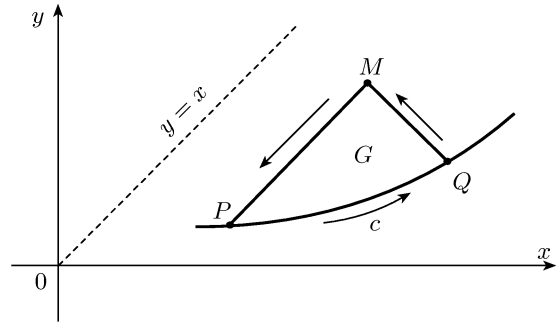


Рис. 30

$$u_\xi\big|_c = \frac{\partial u}{\partial s}\cos(x,\, s) + \frac{\partial u}{\partial n}\cos(x,\, n) = \frac{\varphi'(x) + \psi(x)f'(x)}{\sqrt{1 + f'^2(x)}},$$

$$u_\eta\big|_c = \frac{\partial u}{\partial s}\cos(y,\, s) + \frac{\partial u}{\partial n}\cos(y,\, n) = \frac{\varphi'(x)f'(x) + \psi(x)}{\sqrt{1 + f'^2(x)}},$$

а функция $v(M,\, M') = v(x,\, y,\, \xi,\, \eta)$ — функция Римана для оператора $L(u)$, определяемая из соотношений

$$N(v) \equiv v_{xx} - v_{yy} - (a_1 v)_x - (b_1 v)_y + c_1 v = 0 \quad \text{в области } PQM, \tag{4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{b_1 - a_1}{2\sqrt{2}}\, v \quad \text{на характеристике } MP, \tag{5}$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{b_1 + a_1}{2\sqrt{2}}\, v \quad \text{на характеристике } MQ, \tag{6}$$

$$v(M,\, M) = 1. \tag{7}$$

Операторы $L(u)$ и $N(v)$ называются сопряженными.

Если исходить из другого канонического вида для гиперболического уравнения

$$L^*(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + a_2\frac{\partial u}{\partial x} + b_2\frac{\partial u}{\partial y} + c_2 u = f(x,\, y), \tag{8}$$

то решение уравнения (8), удовлетворяющее начальным условиям

$$u\Big|_c = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_c = \psi(x) \tag{9}$$

на кривой

$$y = f(x), \quad f'(x) < 0, \tag{10}$$

находится с помощью формулы (рис. 31)

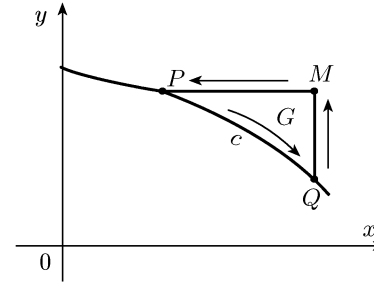


Рис. 31

$$u(M)=\frac{(uv)_P+(uv)_Q}{2}+\int\limits_P^Q\left\{\left[\frac{1}{2}\left(u\,\frac{\partial v}{\partial x}-v\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)-b_2uv\right]d\xi-\right.$$

$$\left.-\left[\frac{1}{2}\left(u\,\frac{\partial v}{\partial y}-v\,\frac{\partial u}{\partial y}\right)-a_2uv\right]d\eta\right\}+\iint\limits_{QM}v(M,\,M')f(M')\,d\sigma_{M'},\quad(11)$$

где функция v — функция Римана для оператора $L^*(u)$ — определяется из соотношений

$$N^*(v)\equiv\frac{\partial^2v}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial(a_2v)}{\partial x}-\frac{\partial(b_2v)}{\partial y}+c_2v=0,\quad(12)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=b_2v\quad\text{на характеристике }PM,\quad(13)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=a_2v\quad\text{на характеристике }QM,\quad(14)$$

$$v(M,\,M)=1.\quad(15)$$

Таким образом, если функция Римана для гиперболического оператора L или $L^*(u)$ найдена, то можно сразу написать в интегральной форме решение широкого класса краевых задач, связанных с этим гиперболическим оператором.

198. Функция Римана $v\equiv1$.

Решение краевой задачи имеет вид

$$u(x,\,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(z,\,\tau)\,dz.$$

199. Функцией Римана:

а) для оператора

$$L(u)\equiv\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-a^2\,\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+c^2u$$

является

$$v=J_0\left(c\sqrt{(t-\tau)^2+\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right);$$

б) для оператора

$$L(u)\equiv\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-a^2\,\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-c^2u$$

является

$$v=I_0\left(c\sqrt{(t-\tau)^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right),$$

где $I_0(z)=J_0(iz)$ — видоизмененная функция Бесселя нулевого порядка.

Решение краевой задачи соответственно принимает вид:

а) $u(x,\,t)=\dfrac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}-$

$$-\frac{ct}{2}\int\limits_{x-at}^{x+at}\frac{J_1\left(c\sqrt{t^2-\dfrac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right)}{\sqrt{t^2-\dfrac{(x-\xi)^2}{a^2}}}\psi(\xi)\,d\xi+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} J_0\left(c\sqrt{(t-\tau)^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right) f(\xi,\tau)\,d\xi;$$

б) $$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+$$

$$+\frac{ct}{2}\int_{x-at}^{x+at}\frac{I_1\left(c\sqrt{t^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right)}{\sqrt{t^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}}\psi(\xi)\,d\xi+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} I_0\left(c\sqrt{(t-\tau)^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right) f(\xi,\tau)\,d\xi.$$

200. $$u(x,y)=\frac{1}{2}\varphi(xy)+\frac{y}{2}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)+$$

$$+\frac{\sqrt{xy}}{4}\int_{xy}^{y/x}\frac{\varphi(z)}{z^{3/2}}\,dz-\frac{\sqrt{xy}}{2}\int_{yx}^{x/y}\frac{\psi(z)}{z^{3/2}}\,dz.$$

201. $$u(x,t)=\frac{\sqrt{\sqrt{l-x}-\frac{at}{2}}\,\varphi\left(x+\sqrt{l-x}\,at-\frac{a^2t^2}{4}\right)}{2\sqrt[4]{l-x}}+$$

$$+\frac{\sqrt{\sqrt{l-x}+\frac{at}{2}}\,\varphi\left(x+\sqrt{l-x}\,at-\frac{a^2t^2}{4}\right)}{2\sqrt[4]{l-x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{l-x}}\int_{\sqrt{l-x}-at/2}^{\sqrt{l-x}+at/2}\Phi(x,t,z)\,dz,$$

$$\Phi(x,t,z)=\frac{\sqrt{z}}{a}\psi(l-z^2)F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,\frac{\frac{a^2t^2}{4}-(z-\sqrt{l-x})^2}{4z\sqrt{l-x}}\right)+$$

$$+\frac{at}{8\sqrt{(l-x)z}}\varphi(l-z^2)F'\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,\frac{\frac{a^2t^2}{4}-(z-\sqrt{l-x})^2}{4z\sqrt{l-x}}\right),$$

где

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\ldots$$

есть гипергеометрический ряд [1]).

Указание. Воспользоваться для гиперболического оператора канонической формой со смешанной производной. В характеристических координатах функция Римана имеет вид

$$G(\overline{x},\overline{y},\overline{x}_0,\overline{y}_0)=F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,\frac{(\overline{x}-\overline{x}_0)(\overline{y}-\overline{y}_0)}{(\overline{x}_0-\overline{y}_0)(\overline{x}-\overline{y})}\right).$$

[1]) См. справочные таблицы в конце книги.

202. $u(x,\,y) =$

$$= \frac{\sqrt{\sin(\omega-y)}\,\varphi[l\cos(\omega-y)] + \sqrt{\sin(\omega+y)}\,\varphi[l\cos(\omega+y)]}{2\sqrt{\sin\omega}} + \\ + \frac{1}{2\sqrt{\sin\omega}} \int\limits_{\omega-y}^{\omega+y} \Phi(\omega,\,y,\,z)\,dz,$$

где

$$\Phi(x,\,y,\,z) = \psi(l\cos z)\sqrt{\sin z}\,F\left(\frac{1}{2},\,\frac{1}{2},\,1,\,\frac{\cos(\omega-z)-\cos y}{2\sin\omega\cdot\sin z}\right) + \\ + \frac{1}{2}\,\varphi(l\cos z)\,\frac{\sin y}{\sin\omega\sqrt{\sin z}}\,F'\left(\frac{1}{2},\,\frac{1}{2},\,1,\,\frac{\cos(\omega-z)-\cos y}{2\sin\omega\cdot\sin z}\right),$$

$\omega = \arccos\dfrac{x}{l}$.

Указание. Воспользоваться для гиперболического оператора канонической формой со смешанной производной. Функция Римана в характеристических координатах имеет вид

$$v(\overline{x},\,\overline{y},\,\overline{x}_0,\,\overline{y}_0) = F\left(\frac{1}{2},\,\frac{1}{2},\,1,\,\frac{\sin(\overline{x}-\overline{x}_0)\sin(\overline{y}-\overline{y}_0)}{\sin(\overline{x}_0-\overline{y}_0)\sin(\overline{x}-\overline{y})}\right).$$

Глава III

УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

§ 1. Физические задачи, приводящие к уравнениям параболического типа; постановка краевых задач

Уравнения и граничные условия рассматриваемых здесь краевых задач теории теплопроводности являются следствием: а) закона сохранения энергии; б) закона внутренней теплопроводности в твердых телах (закона Фурье); в) закона конвективного теплообмена между поверхностью твердого тела и окружающей жидкой или газообразной средой (закона Ньютона).

Закон Фурье в одномерном случае выражается формулой

$$q = -\sigma\lambda\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{1}$$

где q — количество тепла, протекающее в единицу времени в направлении оси x через площадку σ, перпендикулярную к оси x, u — температура в рассматриваемом месте тела; λ — коэффициент теплопроводности[1]).

Закон Ньютона выражается формулой

$$q = \sigma\alpha(u - u_0), \tag{2}$$

где q — количество тепла, протекающее в единицу времени через площадку σ поверхности тела в окружающую среду, u — температура поверхности тела, u_0 — температура окружающей среды, α — коэффициент теплообмена[2]).

В краевых задачах диффузии количество диффундирующего вещества и его концентрация играют такую же роль, как количество тепла и температура в краевых задачах теории теплопроводности.

В частности, если под u понимать концентрацию, под λ — коэффициент диффузии, а под q — количество вещества, диффундирующее в единицу времени в направлении оси x через площадку σ, перпендикулярную к оси x, то закон диффузии (закон Нернста) выразится

[1]) λ зависит от физических свойств тела и от температуры u, но в достаточно широких пределах зависимостью λ от температуры пренебрегают, беря λ для среднего значения температуры.

[2]) Все, что сказано в предыдущей сноске о зависимости λ от температуры, в известных пределах распространяется и на α; подробнее см. [41, с. 21].

формулой (1), а формулой (2) выразится закон диффузии через полунепроницаемую перегородку.

О параболических краевых задачах движения вязкой жидкости и электродинамики будут сделаны соответствующие замечания непосредственно при их рассмотрении.

1. Однородные среды; уравнения с постоянными коэффициентами.

1. Температура точек стержня является решением краевой задачи

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < l, \tag{2}$$

$$u(0, t) = \varphi_1(t), \quad u(l, t) = \varphi_2(t), \quad 0 < t < +\infty, \tag{3}$$

$$-\lambda\sigma u_x(0, t) = q_1(t), \quad \lambda\sigma u_x(l, t) = q_2(t), \quad 0 < t < +\infty, \tag{3'}$$

$$u_x(0, t) = h[u(0, t) - \varphi_1(t)], \quad u_x(l, t) = -h[u(l, t) - \varphi_2(t)], \quad 0 < t < +\infty, \tag{3''}$$

где a^2 — коэффициент температуропроводности, $a^2 = \dfrac{\lambda}{c\rho}$, λ — коэффициент теплопроводности материала стержня, c — удельная теплоемкость, ρ — плотность массы, σ — площадь поперечного сечения, $h = \dfrac{\alpha}{\lambda}$, где α — коэффициент теплообмена, $f(x)$ — начальные значения температуры, $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ в случае (3) — температуры концов стержня, а в случае (3′) — значения температуры окружающей среды у концов стержня; $q_1(t)$ и $q_2(t)$ — тепловые потоки, поступающие в стержень через его концы (т. е. количества тепла, поступающие в единицу времени).

Указание. Если боковая поверхность однородного изотропного цилиндрического стержня теплоизолирована, а изотермические поверхности в начальный момент времени совпадают с его поперечными сечениями, причем торцы стержня все время остаются изотермическими поверхностями, то изотермические поверхности в стержне будут все время совпадать с поперечными сечениями, т. е. температура в стержне все время будет зависеть лишь от одной пространственной координаты x.

Уравнение (1) можно получить, приравнивая приращение за единицу времени количества тепла в элементе $(x, x + \Delta x)$ стержня, равное

$$c\rho\sigma\Delta x \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{4}$$

сумме количеств тепла, поступивших в этот элемент за единицу времени через сечения x и $x + \Delta x$,

$$-\sigma\lambda \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_x + \sigma\lambda \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x+\Delta x}, \tag{5}$$

а затем деля полученное равенство на Δx и переходя к пределу при $\Delta x \to 0$. Остановимся более подробно на выборе знака у членов сум-

мы (5). Мы считаем $x+\Delta x > x$, что, очевидно, не нарушает общности рассуждений. Если на торце x элемента $(x,\ x+\Delta x)$ будет $\dfrac{\partial u}{\partial x} > 0$, то в точках, лежащих правее торца (т. е. внутри элемента), температура будет больше, чем в точках, лежащих левее торца (т. е. вне элемента), значит, тепло будет вытекать из элемента и, следовательно, первый член суммы (5) нужно брать со знаком минус. Если же $\dfrac{\partial u}{\partial x} < 0$, то температура левее торца больше, чем температура правее торца, поэтому тепло будет втекать в стержень, первый член суммы (5) должен быть положительным и, следовательно, перед ним снова нужно взять знак минус. Аналогично проверяется выбор знака при втором члене.

Для получения граничных условий $(3')$ и $(3'')$ нужно провести такие же рассуждения для граничных элементов $(0,\ \Delta x)$ и $(l-\Delta x,\ l)$, используя в случае $(3'')$ закон конвективного теплообмена Ньютона.

Замечание. Если коэффициент теплообмена α значительно больше коэффициента внутренней теплопроводности λ $(\alpha \to \infty)$, то граничные условия $(3'')$ переходят в граничные условия (3). Если же, наоборот, α пренебрежимо мало $(\alpha \to 0)$, то граничные условия $(3'')$ превращаются в граничные условия $(3')$, где $q_1(t) = q_2(t) = 0$, т. е. мы приходим к случаю тепловой изоляции концов стержня.

2. Уравнение теплопроводности в данном случае имеет вид

$$u_t = \frac{\lambda}{c\rho}\, u_{xx} - \frac{\alpha p}{c\rho\sigma}\,(u - u_0),$$

где p — периметр поперечного сечения стержня, α — коэффициент теплообмена между поверхностью стержня и окружающей средой, температура которой равна u_0; остальные величины имеют те же значения, что и в предыдущей задаче; начальные и граничные условия записываются так же, как и в предыдущей задаче.

Указание. Рассматривая элемент $(x,\ x+\Delta x)$ стержня, учесть в тепловом балансе не только потоки тепла через торцы элемента, но и потоки тепла через его боковую поверхность.

3. Для определения температуры в кольце получаем краевую задачу

$$u_t = \frac{\lambda}{c\rho}\, u_{xx} - \frac{\alpha p}{c\rho\sigma}\,(u - u_0), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(0,\ t) = u(l,\ t), \quad u_x(0,\ t) = u_x(l,\ t), \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\ 0) = f(x), \quad 0 < x < l. \tag{3}$$

Здесь λ, c, ρ, σ, α, p имеют тот же смысл, что и в предыдущей задаче. Координата x — длина дуги, отсчитываемая вдоль кольца. Если радиус кольца равен R, то $x = R\theta$, где θ — угловая координата; следовательно, $l = 2\pi R$, $\dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial}{\partial \theta}$ и, переходя к независимым переменным θ, t, краевую задачу (1), (2), (3) можно преобразовать к виду

$$u_t = \frac{\lambda}{c\rho R^2}\, u_{\theta\theta} - \frac{\alpha p}{c\rho\sigma}\,(u - u_0), \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1'}$$

$$u(0,\,t)=u(2\pi,\,t),\quad u_\theta(0,\,t)=u_\theta(2\pi,\,t),\quad 0<t<+\infty, \tag{2'}$$

$$u(\theta,\,0)=F(\theta),\quad 0<\theta<2\pi. \tag{3'}$$

4.
$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad v_0t<x<+\infty,\quad 0<t<+\infty, \tag{1}$$

$$u(v_0t,\,t)=\varphi(t),\quad 0<t<+\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\,0)=0,\quad 0<x<+\infty. \tag{3}$$

5. Для определения температуры $u(x,\,t)$ в проволоке получаем краевую задачу

$$u_t=\frac{\lambda}{c\rho}\,u_{xx}-\frac{\alpha p}{c\rho\sigma}\,(u-u_0)+\frac{\beta I^2R}{c\rho\sigma},\quad 0<x<l,\quad 0<t<+\infty, \tag{1}$$

$$c_1u_t(0,\,t)=-\lambda\sigma u_x(0,\,t),\quad c_2u_t(l,\,t)=\lambda\sigma u_x(l,\,t),\quad 0<t<+\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\,0)=f(x),\quad 0<x<l, \tag{3}$$

где c_1 и c_2 — теплоемкости клемм, I — сила тока, R — сопротивление единицы длины провода, β — коэффициент пропорциональности в формуле

$$q=\beta I^2R\Delta x, \tag{4}$$

выражающей количество тепла, выделяемое током I в единицу времени в элементе $(x,\,x+\Delta x)$ провода. Коэффициенты λ, c, ρ, σ, p, α имеют тот же смысл, что и в задаче 2.

Указание. При выводе уравнения (1) нужно воспользоваться соотношением (4).

6. Для определения концентрации $u(x,\,t)$ получаем то же уравнение и те же граничные условия, что и в задаче 1 для определения температуры, с той, однако, разницей, что в случае диффузии

$$a^2=\lambda=D,$$

где D — коэффициент диффузии, а α — коэффициент проницаемости каждой из граничных плоскостей.

7. Для определения концентрации u диффундирующего вещества получаем уравнение

$$u_t=Du_{xx}-vu_x, \tag{1}$$

где D — коэффициент диффузии, а v — скорость движения среды.

Указание. Для получения уравнения (1) нужно выделить элемент с постоянной площадью поперечного сечения, параллельный

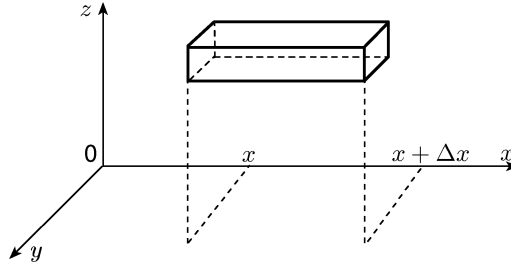


Рис. 32

оси x (рис. 32), и рассмотреть количества вещества, проходящие через сечения x и $x + \Delta x$ за счет диффузии и за счет переноса движущейся средой.

8. Для определения концентрации взвешенных частиц получаем уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - v\,\frac{\partial u}{\partial z},$$

где D — коэффициент диффузии, а v — скорость оседания частиц, причем ось z направлена вниз. Условие непроницаемости плоскости $z = z_0$ имеет вид

$$D\,\frac{\partial u}{\partial z} - vu = 0 \quad \text{при} \quad z = z_0.$$

Указание. См. указание к предыдущей задаче. Вместо потока диффундирующего вещества за счет движения среды нужно учесть поток вещества за счет оседания частиц.

9. а) $u_t = Du_{xx} - \beta_1 u, \quad \beta_1 > 0;$ б) $u_t = Du_{xx} + \beta_2 u, \quad \beta_2 > 0,$ где D — коэффициент диффузии, β_1 — коэффициент распада, а β_2 — коэффициент размножения.

Указание. В случае а) в единице объема в единицу времени разрушается количество диффундирующего вещества, равное $\beta_1 u$, а в случае б) возникает количество диффундирующего вещества, равное $\beta_2 u$.

10. Если скорость подвижной плоскости сохраняет постоянное направление, то скорости частиц жидкости будут, очевидно, параллельны этому направлению. Направляя ось по толщине слоя и помещая начало координат на неподвижной плоскости, для определения скорости частиц жидкости получим краевую задачу

$$v_t = \nu u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$v(0,\,t) = 0, \quad v(l,\,t) = v_0(t), \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$v(x,\,0) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

где l — толщина слоя, $v_0(t)$ — скорость движения граничной плоскости, $\nu = \dfrac{\mu}{\rho}$ — кинематический коэффициент вязкости, ρ — плотность массы, μ — динамический коэффициент вязкости, входящий в закон Ньютона для определения напряжения трения между слоями вязкой жидкости

$$\tau = \mu\,\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Указание. При выводе уравнения (1) нужно пренебрегать градиентом давления по сравнению с градиентом сил трения, что можно сделать, если жидкость обладает большой вязкостью.

11.

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma\mu}\,\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial \zeta^2}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma\mu}\,\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial \zeta^2}. \tag{2}$$

Р е ш е н и е. Напишем систему уравнений Максвелла[1] при условии, что в рассматриваемой области отсутствуют объемные заряды и сторонние электродвижущие силы:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0, \tag{I}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, \tag{II}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \tag{III}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 0, \tag{IV}$$

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}, \tag{V}$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \tag{VI}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}. \tag{VII}$$

Пренебрегая токами смещения $\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ в уравнении (II) (среда проводящая) и используя (V) и (VII), перепишем уравнения (I) и (II) в виде

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \frac{\mu}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = 0, \tag{I$'$}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi\sigma}{c}\boldsymbol{E}. \tag{II$'$}$$

Возьмем rot от обеих частей равенства (I$'$), продифференцируем по t равенство (II$'$), исключим из полученных результатов $\boldsymbol{H}$, воспользуемся соотношениями (IV) и (VI) и известным равенством векторного анализа

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{a} - \operatorname{div}\operatorname{grad} \boldsymbol{a}\ ^{2});$$

это приведет к уравнению

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma\mu}\operatorname{div}\operatorname{grad} \boldsymbol{E}. \tag{3}$$

Аналогично получается уравнение

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma\mu}\operatorname{div}\operatorname{grad} \boldsymbol{H}. \tag{4}$$

По условию $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(\zeta, t)$, $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}(\zeta, t)$, где ζ — расстояние, отсчитываемое от некоторой фиксированной плоскости. В прямоугольной декартовой системе координат (ξ, η, ζ) оператор Лапласа записывается в виде

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2},$$

а следовательно,

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} \boldsymbol{E} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial \zeta^2}, \quad \operatorname{div}\operatorname{grad} \boldsymbol{H} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial \zeta^2}.$$

Поэтому уравнения (3) и (4) преобразуются в (1) и (2).

[1] См. [7, с. 444].

[2] Это равенство справедливо для любого дважды непрерывно дифференцируемого вектора $\boldsymbol{a}$.

2. Неоднородные среды, сосредоточенные факторы; уравнения с переменными коэффициентами и условия сопряжения.

12. Если ось x направить по стержню, поместив начало координат в месте соединения стержней, то краевая задача об определении температуры в составном стержне может быть записана в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \quad 0 < x < +\infty, \end{aligned}\right\} \; 0 < t < +\infty;$$

а) $u_1(0,\, t) = u_2(0,\, t), \quad \lambda_1 u_{1x}(0,\, t) = \lambda_2 u_{2x}(0,\, t), \quad 0 < t < +\infty;$

б) $u_1(0,\, t) = u_2(0,\, t), \quad \lambda_2 u_{2x}(0,\, t) - \lambda_1 u_{1x}(0,\, t) =$
$= C_0 u_{1t}(0,\, t) = C_0 u_{2t}(0,\, t), \quad 0 < t < +\infty,$

$$u_1(x,\, 0) = f(x), \quad -\infty < x < 0,$$
$$u_2(x,\, 0) = f(x), \quad 0 < x < +\infty.$$

13. Направляя ось x по оси цилиндров и помещая начало координат в месте соединения цилиндров, получим краевую задачу

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= D_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad -l_1 < x < 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= D_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l_2, \end{aligned}\right\} \; 0 < t < +\infty,$$
$$u_{1x}(-l_1,\, t) = 0, \quad u_{2x}(l_2,\, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty;$$

а) $u_1(0,\, t) = u_2(0,\, t), \quad D_1 u_{1x}(0,\, t) = D_2 u_{2x}(0,\, t), \quad 0 < t < +\infty;$

б) $$\left.\begin{aligned} -D_1 u_{1x}(0,\, t) &= \alpha[u_1(0,\, t) - u_2(0,\, t)], \\ -D_2 u_{2x}(0,\, t) &= \alpha[u_1(0,\, t) - u_2(0,\, t)], \end{aligned}\right\} \; 0 < t < +\infty,$$

$$u_1(x,\, 0) = f(x), \quad -l_1 < x < 0,$$
$$u_2(x,\, 0) = f(x), \quad 0 < x < l_2.$$

14. Если в момент $t = 0$ печь находилась в точке $x = 0$ стержня, то краевая задача об определении температуры в стержне может быть записана в виде

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < v_0 t,$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \quad v_0 t < x < +\infty,$$
$$u_1(v_0 t,\, t) = u_2(v_0 t,\, t), \quad \lambda\sigma[u_{1x}(v_0 t,\, t) - u_{2x}(v_0 t,\, t)] = Q, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u_1(x,\, 0) = f(x), \quad -\infty < x < 0,$$
$$u_2(x,\, 0) = f(x), \quad 0 < x < +\infty,$$

где Q — количество тепла, выделяемое электропечью в единицу времени, λ — коэффициент теплопроводности, σ — площадь поперечного сечения стержня.

С помощью импульсной дельта-функции краевая задача может быть сформулирована более компактно:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{Q}{c\rho}\,\delta(x - v_0 t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

15. Помещая начало координат на поверхности металла и обозначая через $\xi(t)$ глубину, на которую распространилось затвердевание к моменту t, получим краевую задачу

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \xi(t), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \quad \xi(t) < x < l, \end{aligned}\right\} \; 0 < t < t_l, \tag{1}$$
$$u_1(0, t) = U_1 = \text{const},$$
$$\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}\bigg|_{x=\xi(t)} - \lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}\bigg|_{x=\xi(t)} = \varkappa\rho_2 \frac{d\xi}{dt}, \quad 0 < t < t_l,$$
$$u_1(\xi(t), t) = u_2(\xi(t), t) = 0, \quad 0 < t < t_l,$$
$$u_{2x}(l, t) = 0, \quad 0 < t < t_l,$$
$$u_2(x, 0) = U_0, \quad 0 < x < l.$$

Здесь за нуль температуры принята температура плавления (температура затвердевания) металла. λ_1 и λ_2 — коэффициенты теплопроводности твердого и жидкого металла, a_1^2 и a_2^2 — их коэффициенты температуропроводности; $\varkappa$ — скрытая теплота плавления, ρ_2 — плотность массы расплавленного металла, t_l — время, при котором $\xi(t_l) = l$.

Если температура меняется в очень широких пределах и нельзя пренебречь зависимостью коэффициентов теплопроводности, теплоемкостей и плотностей масс от температуры, то уравнения (I) должны быть заменены уравнениями

$$\left.\begin{aligned} c_1\rho_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}\right), \quad 0 < x < \xi(t), \\ c_2\rho_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}\right), \quad \xi(t) < x < l, \end{aligned}\right\} \; 0 < t < t_l. \tag{1'}$$

16. Помещая начало координат в плоскости пластины, направляя ось x перпендикулярно к слою, а ось u вертикально вниз, для определения скорости частиц жидкости получаем краевую задачу

$$\left.\begin{aligned} u_t &= \nu u_{xx}, \quad -l_1 < x < 0, \\ u_t &= \nu u_{xx}, \quad 0 < x < l_2, \end{aligned}\right\} \; 0 < t < +\infty,$$
$$\left.\begin{aligned} u(-l_1, t) &= 0, \quad u(l_2, t) = 0, \\ u(0 - 0, t) &= u(0 + 0, t) = w, \end{aligned}\right\} \; 0 < t < +\infty,$$

где w — скорость движения пластины,

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\rho\nu}{\gamma}\left[u_x(0 + 0, t) - u_x(0 - 0, t)\right] + g, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$w(0) = 0,$$
$$u(x, 0) = 0, \quad -l_1 < x < 0, \quad 0 < x < l_2.$$

Здесь γ — масса единицы площади пластины, ρ — плотность массы жидкости.

17. Для определения температуры в стержне получаем краевую задачу

$$\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial x}\right] - \frac{2\alpha\left(1 - \frac{x}{L}\right)}{c\rho r_0 \cos\gamma} u, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty,$$
$$u(x, 0) = U_0, \quad 0 < x < l,$$
$$a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}.$$

Здесь L — высота полного конуса, получающегося продолжением данного стержня, γ — половина угла раствора конуса, r_0 — радиус большего основания усеченного конуса, l — его высота, λ, c, ρ — коэффициент теплопроводности, удельная теплоемкость и плотность массы материала конуса, α — коэффициент конвективного теплообмена между поверхностью конуса и окружающей средой.

3. Подобие краевых задач.

18. Краевая задача о нагревании стержня с теплоизолированной боковой поверхностью — задача (I)

$$\frac{\partial u'}{\partial t''} = a^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}, \quad a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}, \quad 0 < x' < l', \quad 0 < t' < +\infty, \tag{1}$$
$$u'(0, t) = \varphi'(t) \not\equiv 0, \quad u'(l', t') = 0, \quad 0 < t' < +\infty, \tag{2}$$
$$u'(x', 0) = 0, \quad 0 < x' < l', \tag{3}$$

аналогична краевой задаче 10 — задаче (II) о движении слоя вязкой жидкости

$$\frac{\partial u''}{\partial t''} = \nu \frac{\partial^2 u''}{\partial x''^2}, \quad 0 < x'' < l'', \quad 0 < t'' < +\infty, \tag{1'}$$
$$u''(0, t'') = \varphi''(t'') \not\equiv 0, \quad u''(l'', t'') = 0, \quad 0 < t'' < +\infty, \tag{2'}$$
$$u''(x'', 0) = 0, \quad 0 < x'' < l''. \tag{3'}$$

Для того чтобы задача (I) была подобна задаче (II) с коэффициентами подобия k_x, k_l, k_u, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$\varphi'(t') = k_u \varphi''(t'') \quad \text{при} \quad 0 < t'' < +\infty, \tag{4}$$

где $t' = k_t t''$, и

$$a^2 = \frac{k_x^2}{k_t}\nu, \quad k_x = \frac{l'}{l''}. \tag{5}$$

Р е ш е н и е. Установление аналогии является очевидным. Докажем необходимость и достаточность условий (4) и (5).

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть

$$u'(x', t') = k_u u''(x'', t'') \quad \text{при} \quad x' = k_x x'', \quad t' = k_t t'',$$

причем (x', t') пробегает D_{I} $[0 < x' < l',\ 0 < t' < +\infty]$, когда (x'', t'') пробегает

$$D_{\mathrm{II}}\ [0 < x'' < l'',\ 0 < t'' < +\infty]. \tag{6}$$

Тогда должно выполняться равенство $u'(0, t') = k_u u''(0, t'')$ при $0 < t'' < +\infty$, т. е. в силу (2) и (2′) должно выполняться равенство (4). Дифференцируя равенство $u'(x', t') = k_u u''(x'', t'')$ по x'' и t'' и используя равенства $x' = k_x x''$, $t' = k_t t''$, получим

$$k_t \frac{\partial u'}{\partial t'} = k_u \frac{\partial u''}{\partial t''}, \quad k_x^2 \frac{p^2 u''}{\partial x'^2} = k_u \frac{\partial^2 u''}{\partial x''^2}.$$

Так как $u''(x'', t'')$ должно удовлетворять уравнению (1′), то, следовательно, должно выполняться равенство

$$k_u \left(\frac{\partial u''}{\partial t''} - \nu \frac{\partial^2 u''}{\partial x''^2} \right) = k_t \frac{\partial u'}{\partial t'} - \nu k_x^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} = 0,$$

т. е. для $u'(x', t')$ должно выполняться уравнение

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} = \nu \frac{k_x^2}{k_t} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}, \quad 0 < x' < l', \quad 0 < t' < +\infty.$$

Таким образом, $u'(x, t')$ должно быть не только решением краевой задачи (1), (2), (3), но и решением краевой задачи

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} = \nu \frac{k_x^2}{k_t} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}, \quad 0 < x' < l', \quad 0 < t' < +\infty, \tag{1''}$$

$$u'(0, t') = \varphi'(t'), \quad 0 < t' < +\infty, \tag{2''}$$

$$u'(x', t) = 0, \quad 0 < x' < l'. \tag{3''}$$

Отсюда заключаем, что выполняется соотношение

$$a^2 = \nu \frac{k_x^2}{k_t}.$$

Действительно, вычитая (1″) из (1), получим:

$$0 \equiv \left(a^2 - \nu \frac{k_x^2}{k_t} \right) \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}.$$

Если бы мы предположили, что $\dfrac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} \equiv 0$, то в силу уравнения (1″) (или (1)) было бы $\dfrac{\partial u'}{\partial t'} \equiv 0$, но это невозможно, так как $u(0, t') = \varphi'(t')$, причем $\varphi'(t') \not\equiv 0$. Следовательно,

$$a^2 - \nu \frac{k_x^2}{k_t} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Достаточность. Перейдем к безразмерным величинам ξ, τ, U в краевых задачах (I) и (II) с помощью формул

$$x' = l'\xi, \quad t' = t'_0 \tau, \quad u' = u'_0 U(\xi, \tau),$$
$$x'' = l''\xi, \quad t'' = t''_0 \tau, \quad u'' = u''_0 U(\xi, \tau),$$

где константы t'_0 и t''_0 имеют размерность времени, а u'_0 и u''_0 имеют соответственно размерности u' и u'', причем эти константы выбраны так, что

$$\frac{t'_0}{t''_0} = k_t, \quad \frac{u'_0}{u''_0} = k_u.$$

Напомним, что, кроме того, выполняется соотношение

$$k_x = \frac{l'}{l''}.$$

Краевые задачи (I) и (II) примут вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau} &= \frac{t'_0}{l'^2}\, a^2\, \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}, && 0 < \xi < 1, \quad 0 < \tau < +\infty, \\ U(0,\, \tau) &= \frac{1}{u'_0}\, \varphi'(t'_0,\, \tau), && 0 < \tau < +\infty, \\ U(\xi,\, 0) &= 0, && 0 < \xi < 1, \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{I}')$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau} &= \frac{t''_0}{l''^2}\, \nu\, \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}, && 0 < \xi < 1, \quad 0 < \tau < +\infty, \\ U(0,\, \tau) &= \frac{1}{u''_0}\, \varphi''(t''_0,\, \tau), && 0 < \tau < +\infty, \\ U(\xi,\, 0) &= 0, && 0 < \xi < 1. \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{II}')$$

Из (4) следует, что

$$\frac{1}{u'_0}\, \varphi'(t'_0 \tau) = \frac{1}{u''_0}\, \varphi''(t''_0 \tau), \quad 0 < \tau < +\infty.$$

Из (5) следует, что

$$\frac{t'_0}{t'^2}\, a^2 = \frac{t''_0}{l''^2}\, \nu,$$

т. е. у задач (I′) и (II′) тождественно совпадают уравнения, начальные и граничные условия; следовательно (в силу теоремы единственности), совпадают и их решения.

Таким образом,

$$U(\xi,\, \tau) = \frac{1}{u'_0}\, u'(x',\, t') = \frac{1}{u''_0}\, (x'', t''),$$

т. е.

$$u'(x',\, t') = k_u u''(x'',\, t''),$$

что и требовалось доказать.

19. Краевая задача об определении температуры в стержне, на боковой поверхности которого происходит конвективный теплообмен со средой, температура которой равна нулю,

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} = a^2\, \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} - \frac{\alpha p}{c\rho\sigma}\, u', \quad a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}, \quad 0 < x' < l', \quad 0 < t' < +\infty, \qquad (1)$$

$$u'(0,\, t') = \varphi'(t'), \quad 0 < t' < +\infty, \quad \left.\frac{\partial u'}{\partial x'}\right|_{x'=l'} = 0, \qquad (2)$$

$$u'(x',\, 0) = 0, \quad 0 < x' < l' \qquad (3)$$

аналогична краевой задаче об определении концентрации диффундирующего вещества, скорость распада которого пропорциональна концентрации,

$$\frac{\partial u''}{\partial t''} = D\,\frac{\partial^2 u''}{\partial x''^2} - \beta u'', \quad 0 < x'' < l'', \quad 0 < t'' < +\infty, \tag{1'}$$

$$u''(0,\, t'') = \varphi''(t''), \quad 0 < t'' < +\infty, \quad \left.\frac{\partial u''}{\partial x''}\right|_{x''=l''} = 0, \tag{2'}$$

$$u''(x'',\, 0) = 0, \quad 0 < x'' < l''. \tag{3'}$$

Для того чтобы первая задача была подобна второй с заданными коэффициентами подобия k_x, k_t, k_u, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$\varphi'(t') = k_u \varphi''(t'') \quad \text{при} \quad 0 < t'' < +\infty, \quad \text{где} \quad t' = k_t t'', \tag{4}$$

$$a^2 = \frac{k_x^2}{k_t}\, D, \quad k_x = \frac{l'}{l''}, \tag{5}$$

$$\frac{\alpha p}{c\rho\sigma} = \frac{1}{k_t}\,\beta. \tag{6}$$

Указание. Доказательство необходимости и достаточности условий (4), (5), (6) проводится аналогично тому, как это делалось для условий (4) и (5) в решении предыдущей задачи.

20. Задача (I) «Найти напряжение электрического тока в проводе конечной длины с пренебрежимо малой самоиндукцией, если к одному его концу приложена электродвижущая сила, меняющаяся по заданному закону, а другой конец заземлен через сосредоточенное сопротивление R_0» аналогична сформулированной выше (см. условие задачи) задаче (II) об определении температуры в стержне, так как задача (I) может быть записана в виде [1])

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} = \frac{1}{RC}\,\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} - \frac{G}{C}\,u', \quad 0 < x' < l', \quad 0 < t' < +\infty, \tag{1}$$

$$u'(0,\, t') = \varphi'(t'), \quad \left[\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{R}{R_0}\,u'\right]_{x'=l'} = 0, \quad 0 < t' < +\infty, \tag{2}$$

$$u'(x',\, 0) = 0, \quad 0 < x' < l', \tag{3}$$

а задача (II) — в виде

$$\frac{\partial u''}{\partial t''} = a^2\,\frac{\partial^2 u''}{\partial x''^2} - \frac{\alpha p}{c\rho\sigma}\,u'', \quad a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}, \quad 0 < x'' < l'', \quad 0 < t'' < +\infty, \tag{1'}$$

$$u''(0,\, t'') = \varphi''(t''), \quad \left[\frac{\partial u''}{\partial x''} + \frac{\alpha}{\lambda}\,u''\right]_{x''=l''} = 0, \quad 0 < t'' < +\infty, \tag{2'}$$

$$u''(x'',\, 0) = 0, \quad 0 < x'' < l''. \tag{3'}$$

Для того чтобы задача (I) была подобна задаче (II) с коэффициентами подобия k_x, k_t, k_u, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись

[1]) По поводу обозначений см. задачу 2 гл. III и задачу 19 гл. II.

соотношения

$$\varphi'(t') = k_u \varphi''(t''), \quad 0 < t'' < +\infty, \quad \text{где} \quad t' = k_t t'', \tag{4}$$

$$\frac{1}{RC} = \frac{k_x^2}{k_t}\, a^2, \quad k_x = \frac{l'}{l''}, \tag{5}$$

$$\frac{G}{C} = \frac{1}{k_t}\,\frac{\alpha p}{c\rho\sigma}, \tag{6}$$

$$\frac{R}{R_0} = \frac{1}{k_x}\,\frac{\alpha}{\lambda}. \tag{7}$$

21. Краевая задача о нагревании стержня $0 \leqslant x \leqslant l'$ с теплоизолированной боковой поверхностью (задача I)

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} = a^2\,\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}, \quad a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}, \quad 0 < x' < l', \quad 0 < t' < +\infty, \tag{1}$$

$$u'(0,\, t') = U_0, \quad u'_{x'}(l',\, t') = 0, \quad 0 < t' < +\infty, \tag{2}$$

$$u'(x',\, 0) = 0, \quad 0 < x' < l', \tag{3}$$

аналогична сформулированной в условии краевой задачи о распространении плоского электромагнитного поля в проводящем слое $0 \leqslant x'' \leqslant l''$ (задаче II)

$$\frac{\partial u''}{\partial t''} = \frac{c^2}{4\pi\sigma\mu}\,\frac{\partial^2 u''}{\partial x''^2}, \quad 0 < x'' < l'', \quad 0 < t'' < +\infty, \tag{1'}$$

$$u''(0,\, t'') = H_0, \quad u''_{x''}(l'',\, t'') = 0, \quad 0 < t'' < +\infty, \tag{2'}$$

$$u''(x'',\, 0) = 0, \quad 0 < x'' < l''. \tag{3'}$$

Для того чтобы первая задача была подобна второй с заданными коэффициентами подобия k_x, k_t, k_u, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$U_0 = k_u H_0, \tag{4}$$

$$a^2 = \frac{k_x^2}{k_t}\,\frac{c^2}{4\pi\sigma\mu}, \tag{5}$$

$$k_x = \frac{l'}{l''}. \tag{6}$$

§ 2. Метод разделения переменных

1. Однородные изотропные среды. Уравнения с постоянными коэффициентами.

а) Задачи теплопроводности с постоянными граничными условиями и свободными членами.

22. а) Решением краевой задачи

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(0,\, t) = u(l,\, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\, 0) = f(x), \quad 0 < x < +\infty, \tag{3}$$

является

$$u(x,\,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\exp\Big\{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}\,t\Big\}\sin\frac{n\pi x}{l},\quad 0<x<l,\quad 0<t<+\infty,$$

где

$$a_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi.$$

б) Если $f(x)\equiv U_0=\text{const}$, то

$$u(x,\,t)=\frac{4U_0}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2k+1}\exp\Big\{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{l^2}\Big\}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l},$$
$$0<x<l,\quad 0<t<+\infty. \quad (4)$$

В точке $x=\dfrac{l}{2}$ имеем

$$u\Big(\frac{l}{2},\,t\Big)=\frac{4U_0}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\exp\Big\{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{l^2}\,t\Big\}. \quad (5)$$

Так как ряд, стоящий в правой части последнего равенства, удовлетворяет условиям теоремы Лейбница о знакопеременных рядах, то остаток ряда (5) не превосходит по абсолютной величине первого из отброшенных членов, т. е.

$$\Big|R_n\Big(\frac{l}{2},\,t\Big)\Big|=\left|\frac{4U_0}{\pi}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\exp\Big\{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{l^2}\,t\Big\}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{4U_0}{\pi}\,\frac{\exp\Big\{-\dfrac{(2n+3)^2\pi^2a^2}{l^2}\,t\Big\}}{2n+3}. \quad (6)$$

Оценим, наконец, отношение суммы всех членов ряда (5), начиная со второго, к первому члену этого ряда. В силу (6) имеем

$$\frac{\Big|R_0\Big(\dfrac{l}{2},\,t\Big)\Big|}{\dfrac{4U_0}{\pi}\exp\Big\{-\dfrac{\pi^2a^2t}{l^2}\Big\}}\leqslant\frac{1}{3}\exp\Big\{-\frac{8\pi^2a^2}{l^2}\,t\Big\}\leqslant\varepsilon$$
$$\text{при}\quad t\geqslant t^*=-\frac{l^2}{8\pi^2a^2}\ln 3\varepsilon_1, \quad (7)$$

где $\varepsilon>0$ — произвольное, наперед заданное положительное число.

Замечание. Для оценки погрешности, допускаемой при замене суммы ряда (4) его частичной суммой в других точках $x\neq l/2$, можно воспользоваться признаком Абеля. Однако оценка остатка ряда по признаку Абеля при приближении к концам интервала $0\leqslant x\leqslant l$ становится негодной. Можно указать способ, дающий равномерную оценку остатка ряда на всем интервале $0\leqslant x\leqslant l$:

$$|R_n(x,t)|=\left|\frac{4U_0}{\pi}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{2k+1}\exp\Big\{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{l^2}\,t\Big\}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}\right|\leqslant$$

$$\leqslant \frac{4U_0}{\pi} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \exp\Big\{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{l^2}\, t\Big\} <$$

$$< \frac{4U_0}{\pi} \int_n^{+\infty} \frac{1}{2z+1} \exp\Big\{-\frac{(2z+1)^2\pi^2a^2}{l^2}\, t\Big\}\, dz = \frac{2U_0}{\pi} \int_{A_n}^{+\infty} \frac{e^{-\zeta^2}}{\zeta}\, d\zeta,$$

где $A_n = \dfrac{(2n+1)\pi a\sqrt{t}}{l}$.

Интегрируя по частям, получаем

$$\int_{A_n}^{+\infty} \frac{e^{-\zeta^2}}{\zeta}\, d\zeta = \frac{1}{2A_n^2}\, e^{-A_n^2} + \int_{A_n}^{+\infty} \frac{e^{-\zeta^2}}{\zeta^3}\, d\zeta.$$

Но

$$\int_{A_n}^{+\infty} \frac{e^{-\zeta^2}}{\zeta^3}\, d\zeta < e^{-A_n^2} \int_{A_n}^{+\infty} \frac{d\zeta}{\zeta^3} = \frac{e^{-A_n^2}}{2A_n^2}.$$

Поэтому

$$|R_n(x,\, t)| < \frac{2U_0}{\pi}\, \frac{e^{-A_n^2}}{A_n^2}, \quad \text{где} \quad A_n = \frac{(2n+1)\pi a\sqrt{t}}{l}.$$

23. Решением уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < \infty, \tag{3}$$

при начальном условии (1) и граничных условиях (2) (см. условие задачи) является

$$u(x,\, t) = U_1 + (U_2 - U_1)\frac{x}{l} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \Big\{(U_0 - U_1)[1 - (-1)^n] +$$

$$+ (-1)^{n+1}(U_1 - U_2)\Big\} \exp\Big\{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}\, t\Big\} \sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{4}$$

Установившаяся температура в стержне равна

$$\overline{u}(x) = \lim_{t\to\infty} u(x,\, t) = U_1 + (U_2 - U_1)\frac{x}{l}. \tag{5}$$

Указание. Решение уравнения (3) при начальном условии (1) и граничных условиях (2) можно искать в виде

$$u(x,\, t) = v(x,\, t) + \overline{u}(x), \tag{6}$$

где функция $\overline{u}(x)$ определяется как стационарное решение уравнения (3), удовлетворяющее граничным условиям (2), т. е.

$$\frac{d^2\overline{u}(x)}{dx^2} = 0, \quad 0 < x < l,$$

$$\overline{u}(0) = U_1, \quad \overline{u}(l) = U_2,$$

откуда

$$\overline{u}(x) = U_1 + (U_2 - U_1)\frac{x}{l},$$

т. е. $\overline{u}(x)$ есть предел, к которому стремится температура в стержне при $t \to +\infty$.

Функция $v(x,\, t)$ будет удовлетворять уравнению (3) и условиям

$$v(x,\, 0) = U_0 - \overline{u}(x), \tag{7}$$

$$v(0,\, t) = v(l,\, t) = 0, \tag{8}$$

т. е. $v(x,\, t)$ является решением первой краевой задачи с нулевыми граничными условиями. Такая задача была уже рассмотрена (см. задачу 22).

24. Решением краевой задачи

$$u_t = a^2 u_{xx} - h(u - u_0), \quad a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}, \quad h = \frac{\alpha p}{c\rho\sigma},$$

$$0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(0,\, t) = U_1, \quad u(l,\, t) = U_2, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\, 0) = f(x), \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

является

$$u(x,\, t) = u_0 + w(x) + v(x,\, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{4}$$

где

$$w(x) = \frac{(U_1 - u_0)\operatorname{sh}\dfrac{\sqrt{h}}{a}(l - x) + (U_2 - u_0)\operatorname{sh}\dfrac{\sqrt{h}}{a}x}{\operatorname{sh}\dfrac{l\sqrt{h}}{a}}, \quad 0 < x < l, \tag{5}$$

$$v(x,\, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \exp\left\{-\left(\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2} + h\right)t\right\} \sin\frac{n\pi x}{l},$$

$$0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{6}$$

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \left[f(\xi) - w(\xi) - u_0\right] \sin\frac{n\pi\xi}{l}\, d\xi. \tag{7}$$

В частности, если $U_1 = U_2 = 0$ и $f(x) \equiv 0$, то

$$w(x) = -u_0\,\frac{\operatorname{sh}\dfrac{\sqrt{h}}{a}(l - x) + \operatorname{sh}\dfrac{\sqrt{h}}{a}x}{\operatorname{sh}\dfrac{l\sqrt{h}}{a}}, \quad 0 < x < l, \tag{5'}$$

$$v(x,\, t) = -\frac{4hl^2u_0}{\pi a^2}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin\dfrac{(2k-1)\pi x}{l}}{(2k-1)[(2k-1)^2\pi^2a^2 + hl^2]} \times$$

$$\times \exp\left\{-\left[\frac{(2k-1)^2\pi^2a^2}{l^2} + h\right]t\right\}. \tag{6'}$$

25. Решением краевой задачи

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u_x(0,\, t) = u_x(l,\, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\, 0) = f(x), \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

является

$$u(x,\, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \exp\Big\{-\frac{\pi^2 a^2 n^2}{l^2}\, t\Big\} \cos\frac{n\pi x}{l}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{4}$$

где

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(z) \cos\frac{n\pi z}{l}\, dz, \quad n = 0,\, 1,\, 2,\, 3, \ldots \tag{5}$$

Чтобы получить температуру в случае теплообмена на боковой поверхности, нужно умножить правую часть (4) на e^{-ht}, где h имеет тот же смысл, что и в предыдущей задаче.

26. Решением краевой задачи

$$u_t = a^2 u_{xx} - hu, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$-\lambda\sigma u_x(0,\, t) = q_1, \quad \lambda\sigma u_x(l,\, t) = q_2, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\, 0) = f(x), \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

является

$$u(x,\, t) = w(x) + v(x,\, t), \tag{4}$$

где

$$w(x) = \frac{a}{\sqrt{h}}\, Q_1 \operatorname{sh}\frac{\sqrt{h}}{a}\, x + \frac{Q_2 - Q_1 \operatorname{ch}\dfrac{\sqrt{h}}{a}\, l}{\dfrac{\sqrt{h}}{a}\operatorname{sh}\dfrac{\sqrt{h}}{a}\, l} \operatorname{ch}\frac{\sqrt{h}}{a}\, x, \quad 0 < x < l, \tag{5}$$

$$Q_1 = -\frac{q_1}{\lambda\sigma}, \quad Q_2 = \frac{q_2}{\lambda\sigma}, \tag{6}$$

$$v(x,\, t) = \frac{a_0}{2}\, e^{-ht} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \exp\Big\{-\Big(\frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2} + h\Big)t\Big\} \cos\frac{n\pi x}{l}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{7}$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l [f(z) - w(z)] \cos\frac{n\pi z}{l}\, dz, \quad n = 0,\, 1,\, 2,\, 3, \ldots \tag{8}$$

Указание. См. решение задачи 23.

27. Решением краевой задачи

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(0,\, t) = U_0, \quad \lambda\sigma u_x(l,\, t) = q_0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\, 0) = f(x), \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

является

$$u(x,\,t)=Q_0x+U_0+\sum_{n=0}^{+\infty}\left\{a_n-\frac{4}{\pi^2}\,\frac{(2n+1)\pi U_0+(-1)^n2lQ_0}{(2n+1)^2}\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2}{4l^2}\,t\right\}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l},\quad(4)$$

где

$$Q_0=\frac{q_0}{\lambda\sigma},\quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(z)\sin\frac{(2n+1)\pi z}{2l}\,dz,\quad(5)$$

а σ — площадь поперечного сечения стержня.

Если $Q_0=0$, $f(x)\equiv0$, то

$$u(x,\,t)=U_0-\frac{4U_0}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2k+1}\exp\left\{-\frac{(2k_1)^2\pi^2a^2}{4l^2}\,t\right\}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l},$$
$$0<x<l,\quad 0<t<+\infty.\quad(6)$$

В точке $x=l$ имеем

$$u(l,\,t)=U_0-\frac{4U_0}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\exp\left\{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{4l^2}\,t\right\},\quad 0<t<+\infty.\quad(7)$$

По теореме Лейбница о знакопеременных рядах получаем оценку для остатка ряда (7)

$$|R_n(l,\,t)|=\left|\frac{4U_0}{\pi}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\exp\left\{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{4l^2}\,t\right\}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{4U_0}{\pi(2n+3)}\exp\left\{-\frac{(2n+3)^2\pi^2a^2}{4l^2}\,t\right\},\quad 0<t<+\infty.\quad(8)$$

Оценим, наконец, отношение $R_0(l,\,t)$ к $\dfrac{4U_0}{\pi}\exp\left\{-\dfrac{\pi^2a^2}{4l^2}\,t\right\}$. В силу (8)

$$\frac{|R_0(l,\,t)|}{\dfrac{4U_0}{\pi}\exp\left\{-\dfrac{\pi^2a^2}{4l^2}\,t\right\}}\leqslant\frac{1}{3}\exp\left\{-\frac{2\pi^2a^2}{l^2}\,t\right\}\leqslant\varepsilon$$
$$\text{при}\quad t\geqslant t^*=-\frac{l^2}{2\pi^2a^2}\ln3\varepsilon.\quad(9)$$

Замечание. Нетрудно получить равномерную оценку для остатка $R_n(x,\,t)$ ряда на отрезке $0\leqslant x\leqslant l$ способом, указанным в замечании к ответу задачи 22 настоящего параграфа.

28. Решением краевой задачи

$$u_t=a^2u_{xx},\quad 0<x<l,\quad 0<t<+\infty,\quad(1)$$
$$u_x(0,\,t)=0,\quad u_x(l,\,t)=\frac{q}{\lambda\sigma}=Q,\quad 0<t<+\infty,\quad(2)$$

где λ — коэффициент теплопроводности, σ — площадь поперечного сечения,

$$u(x,\,0)=0,\quad 0<x<l,\quad(3)$$

является

$$u(x,\,t)=Q\left[\frac{a^2t}{l}+\frac{3x^2-l^2}{6l}+\frac{2l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\,\frac{\exp\left\{-\dfrac{k^2\pi^2a^2}{l^2}\,t\right\}}{k^2}\cos\frac{k\pi x}{l}\right]. \tag{4}$$

В точке $x=0$ имеем

$$u(0,\,t)=Q\left[\frac{a^2t}{l}-\frac{l}{6l}+\frac{2l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}\,\exp\left\{-\frac{k^2\pi^2a^2}{l^2}\,t\right\}\right],\quad 0<t<+\infty. \tag{5}$$

По признаку Лейбница для остатка ряда получаем оценку

$$|R_n(0,\,t)|=\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{2Ql}{\pi^2}\,\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}\,\exp\left\{-\frac{k^2\pi^2a^2}{l^2}\,t\right\}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2Ql}{\pi^2(n+1)^2}\,\exp\left\{-\frac{(n+1)^2\pi^2a^2}{l^2}\,t\right\},\quad 0<t<+\infty. \tag{6}$$

Указание. Чтобы получить (4), можно свести краевую задачу (1), (2), (3) к первой краевой задаче путем замены $v(x,\,t)=\dfrac{\partial u(x,\,t)}{\partial x}$, решить краевую задачу для v, а затем проинтегрировать v по x; при этом появится произвольная слагаемая функция времени. Вычисляя количество тепла в стержне двумя способами (см. указание к ответу задачи настоящей главы), можно определить эту функцию.

Замечание. По поводу равномерной оценки остатка $R_n(x,\,t)$ на отрезке $0\leqslant x\leqslant l$ см. замечание к ответу предыдущей задачи.

29.

$$u(x,\,t)=U_0\left[1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{2hl\,\sqrt{(hl)^2+\mu_n^2}}{\mu_n[(hl)^2+(hl)+\mu_n^2]}\,\exp\left\{-\frac{\mu_n^2a^2t}{l^2}\right\}\cos\frac{\mu_nx}{l}\right], \tag{1}$$

где h — коэффициент теплообмена, входящий в граничное условие $u_x(l,\,t)+h[u(l,\,t)-U_0]=0$, а μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\operatorname{ctg}\mu=\frac{1}{hl}\,\mu, \tag{2}$$

образующие последовательность, монотонно стремящуюся к $+\infty$.

В точке $x=0$ имеем

$$u(0,\,t)=U_0\left[1+\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\,\frac{2hl\,\sqrt{(hl)^2+\mu_k^2}}{\mu_k[(hl)^2+(hl)+\mu_k^2]}\,\exp\left\{-\frac{\mu_k^2a^2}{l^2}\,t\right\}\right]. \tag{2}$$

Нетрудно проверить, что ряд (3) удовлетворяет условиям теоремы Лейбница о знакопеременных рядах; поэтому для остатка ряда (3) получаем оценку

$$|R_n(0,\,t)| = \left| U_0 \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \frac{2hl\sqrt{(hl)^2+\mu_k^2}}{\mu_k[(hl)^2+(hl)+\mu_k^2]} \exp\Big\{-\frac{\mu_k^2 a^2}{l^2}\,t\Big\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2U_0 hl\sqrt{(hl)^2+\mu_{n+1}^2}}{\mu_{n+1}[(hl)^2+(hl)+\mu_{n+1}^2]} \exp\Big\{-\frac{\mu_{n+1}^2 a^2}{l^2}\,t\Big\}. \quad (4)$$

В силу (4) имеем

$$\frac{|R_1(0,\,t)|}{\dfrac{2U_0 hl\sqrt{(hl)^2+\mu_1^2}}{\mu_1[(hl)^2+(hl)+\mu_1^2]} \exp\Big\{-\dfrac{\mu_1^2 a^2}{l^2}\,t\Big\}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(hl)^2+hl+\mu_1^2}{(hl)^2+hl+\mu_2^2} \sqrt{\frac{1+\left(\dfrac{hl}{\mu_2}\right)^2}{1+\left(\dfrac{hl}{\mu_1}\right)^2}} \exp\Big\{-\frac{(\mu_2^2-\mu_1^2)a^2}{l^2}\,t\Big\} \leqslant \varepsilon \quad (5)$$

при

$$t \geqslant t^* = -\frac{l^2}{(\mu_2^2-\mu_1^2)a^2} \ln\left[\varepsilon \frac{(hl)^2+hl+\mu_2^2}{(hl)^2+hl+\mu_1^2} \sqrt{\frac{1+\left(\dfrac{hl}{\mu_1}\right)^2}{1+\left(\dfrac{hl}{\mu_2}\right)^2}}\right].$$

Замечание. Равномерная оценка остатка ряда $R_n(x,\,t)$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$ может быть выполнена аналогично тому, как это было сделано в замечании на с. 286.

Учитывая, что для корней $\mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_n < \mu_{n+1} < \ldots$ трансцендентного уравнения (2) будет иметь место неравенство

$$\frac{\pi}{2} < \mu_{n+1} - \mu_n < \pi,$$

получим

$$|R_n(x,\,t)| \leqslant 2U_0 hl \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\sqrt{(hl)^2+\mu_k^2}\,\exp\Big\{-\dfrac{\mu_k^2 a^2}{l^2}\,t\Big\}}{\mu_k[(hl)^2+(hl)+\mu_k^2]} <$$

$$< \frac{4U_0 hl}{\pi} \int_{\mu_n}^{+\infty} \left[\left(\frac{hl}{\mu}\right)^2+1\right]^{1/2} \frac{\exp\Big\{-\dfrac{\mu^2 a^2 t}{l^2}\Big\}}{(hl)^2+hl+\mu^2}\,d\mu <$$

$$< \frac{4U_0 hl}{\pi} \left[\left(\frac{hl}{\mu_n}\right)^2+1\right]^{1/2} \int_{\mu_n}^{+\infty} \frac{\exp\Big\{-\dfrac{\mu^2 a^2 t}{l^2}\Big\}}{\mu^2}\,d\mu <$$

$$< \frac{2U_0 ah\sqrt{t}}{\pi} \left[\left(\frac{hl}{\mu_n}\right)^2+1\right]^{1/2} \frac{e^{-A_n^2}}{A_n^3},$$

где

$$A_n = \frac{\mu_n a\sqrt{t}}{l}.$$

30. а) Решением краевой задачи

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u_x(0,\, t) - H[u(0,\, t) - U_1] = 0,$$

$$u_x(l,\, t) + H[u(l,\, t) - U_2] = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\, 0) = f(x), \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

является

$$u(x,\, t) = w(x) + v(x,\, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{4}$$

где

$$w(x) = H\,\frac{U_2 - U_1}{2 + lH}\,x + \frac{U_2 + (1 + lH)U_1}{2 + lH}, \quad 0 < x < l, \tag{5}$$

и

$$v(x,\, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-a^2\lambda_n^2 t}\left(\cos\lambda_n x + \frac{H}{\lambda_n}\sin\lambda_n x\right),$$

$$0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{6}$$

$\lambda_n = \dfrac{z_n}{l}$, z_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{lH} - \frac{lH}{z}\right). \tag{7}$$

Собственные функции [1)]

$$X_n(x) = \cos\lambda_n x + \frac{H}{\lambda_n}\sin\lambda_n x, \quad n = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots, \tag{8}$$

ортогональны на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$; квадрат нормы собственной функции $X_n(x)$ равен

$$\|X_n\|^2 = \int_0^l X_n^2(x)\,dx = \frac{(\lambda_n^2 + H^2)l + 2H}{2\lambda_n^2}, \tag{9}$$

$$a_n = \frac{2\lambda_n^2}{(\lambda_n^2 + H^2)l + 2H}\int_0^l [f(z) - w(z)]\left(\cos\lambda_n z + \frac{H}{\lambda_n}\sin\lambda_n z\right)dz. \tag{10}$$

б) Если температура среды на обоих концах одинакова, а начальная температура стержня равна нулю, то, принимая середину стержня за начало координат, мы получим, что температура в стержне является четной функцией x, т. е. при $x = 0$ будет $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$. Таким образом, можно рассматривать вместо всего стержня лишь его половину, причем для определения температуры получится краевая задача 29 (при этом l нужно заменить на $\dfrac{l}{2}$).

[1)] Подробнее см. решение задачи 111 гл. II; рассматриваемые там собственные функции получаются умножением собственных функций (8) на $\dfrac{\lambda_n}{\sqrt{\lambda_n^2 + h^2}}$, поэтому, зная квадрат нормы собственных функций, рассматриваемых в задаче 111 гл. II, нетрудно получить квадрат нормы собственных функций (8).

31. Решением краевой задачи

$$u_t = a^2 u_{xx} - hu, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u_x(0,\, t) - H[u(0,\, t) - U_1] = 0, \quad u_x(l,\, t) + H[u(l,\, t) - U_2] = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\, 0) = f(x), \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

является

$$u(x,\, t) = w(x) + v(x,\, t) \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{4}$$

где

$$w(x) = H\,\frac{\left[U_2\,\dfrac{\sqrt{h}}{a} - U_1\left(H\,\mathrm{sh}\,\dfrac{\sqrt{h}}{a}\,l - \dfrac{\sqrt{h}}{a}\,\mathrm{ch}\,\dfrac{\sqrt{h}}{a}\,l\right)\right]\mathrm{ch}\,\dfrac{\sqrt{h}}{a}\,x}{\left(H^2 + \dfrac{h}{a^2}\right)\mathrm{sh}\,\dfrac{\sqrt{h}}{a}\,l} +$$

$$+\,H\,\frac{\left[U_1\left(H\,\mathrm{ch}\,\dfrac{\sqrt{h}}{a}\,l + \dfrac{\sqrt{h}}{a}\,\mathrm{sh}\,\dfrac{\sqrt{h}}{a}\,l\right) + U_2 H\right]\mathrm{sh}\,\dfrac{\sqrt{h}}{a}\,x}{\left(H^2 + \dfrac{h}{a^2}\right)\mathrm{sh}\,\dfrac{\sqrt{h}}{a}\,l}, \tag{5}$$

$$v(x,\, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-(a^2\lambda_n^2 + h)t}\left(\cos\lambda_n x + \frac{H}{\lambda_n}\sin\lambda_n x\right), \tag{6}$$

λ_n, $X_n(x) = \cos\lambda_n x + \dfrac{H}{\lambda_n}\sin\lambda_n x$ и a_n определяются так же, как в ответе предыдущей задачи.

32. Решением краевой задачи

$$u_t = a^2 u_{xx} - h[u - u_0], \quad -\pi < x < \pi, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(x,\, 0) = f(x), \quad -\pi < x < \pi, \tag{2}$$

$$u(-\pi,\, t) = u(\pi,\, t), \quad u_x(-\pi,\, t) = u_x(\pi,\, t), \quad 0 < t < +\infty, \tag{3}$$

является

$$u(x,\, t) = u_0 + e^{-ht} v(x,\, t), \tag{4}$$

$$v(x,\, t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)e^{-n^2 a^2 t}, \tag{5}$$

где

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - u_0]\,dx, \tag{6}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - u_0]\cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - u_0]\sin nx\,dx. \tag{7}$$

Если начальная температура кольца $f(x) \equiv u_1 = \mathrm{const}$, то

$$u(x,\, t) = u_0 + e^{-ht}[u_1 - u_0].$$

б) Задачи теплопроводности с переменными граничными условиями и свободными членами, зависящими от x и t.

33. Решением краевой задачи

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(0,\, t) = 0, \quad u(l,\, t) = At, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

является

$$u(x,\, t) = \frac{A}{l}\, xt + \frac{Ax}{6a^2 l}\,(x^2 - l^2) + v(x,\, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{4}$$

$$v(x,\, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \exp\Big\{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2}\, t\Big\} \sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{5}$$

где

$$a_n = -\frac{A}{3a^2 l^2} \int_0^l z(z^2 - l^2) \sin\frac{n\pi z}{l}\, dz. \tag{6}$$

34. $u(x,\, t) = \left\{ \int_0^t \Phi(\tau) \exp\Big\{-\frac{\pi^2 a^2}{l^2}\,(t-\tau)\Big\}\, d\tau \right\} \sin\frac{\pi x}{l} +$

$$+ \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \exp\Big\{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2}\, t\Big\} \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

где

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(z) \sin\frac{n\pi z}{l}\, dz. \tag{2}$$

Указание. Частное решение уравнения, удовлетворяющее граничным условиям (см. условие задачи), можно искать в виде

$$w(x,\, t) = \varphi(t) \sin\frac{\pi x}{l}, \tag{3}$$

где $\varphi(t)$ — функция, подлежащая определению.

35. а) Решением краевой задачи

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,\, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(0,\, t) = u(l,\, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

где $f(x,\, t) = \dfrac{F(x,\, t)}{c\rho}$, является

$$u(x,\, t) = \int_0^l \varphi(\xi) \left\{ \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\Big\{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2}\, t\Big\} \sin\frac{n\pi x}{l} \sin\frac{n\pi\xi}{l} \right\} d\xi +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_0^l f(\xi,\, \tau) \left\{ \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\Big\{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2}\,(t-\tau)\Big\} \sin\frac{n\pi x}{l} \sin\frac{n\pi\xi}{l} \right\} d\xi.$$

б) Решением краевой задачи

$$u_t = a^2 u_{xx} + \frac{Q}{c\rho}\,\delta(x - x_0), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(0,\, t) = u(l,\, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

является

$$u(x,\, t) = \frac{2Ql}{c\rho\pi^2 a^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \left(1 - \exp\left\{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2}\, t\right\}\right) \sin\frac{n\pi x}{l} \sin\frac{n\pi x_0}{l}. \tag{4}$$

36. Решением краевой задачи

$$u_t = a^2 u_{xx} - hu + \frac{A}{c\rho\sigma}\, e^{-ht}\delta(x - v_0 t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < \frac{l}{v_0},$$

$$u(0,\, t) = u(l,\, t) = 0, \quad 0 < t < \frac{l}{v_0},$$

$$u(x,\, 0) = 0, \quad 0 < x < l,$$

является

$$u(x,\, t) = \frac{2A}{c\rho\sigma l}\, e^{-ht} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\dfrac{n\pi x}{l}}{v_0^2 + \dfrac{n^2\pi^2 a^2}{l^2}} \left(\sin\frac{n\pi v_0 t}{l} - \frac{v_0 l}{n\pi}\cos\frac{n\pi v_0 t}{l} + \frac{v_0 l}{n\pi}\right).$$

37. Нужно решить краевую задачу

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,\, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u_x(0,\, t) - hu(0,\, t) = \psi_1(t), \quad u_x(l,\, t) + hu(l,\, t) = \psi_2(t), \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,\, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < l. \tag{3}$$

Если потребовать, чтобы функция

$$\psi(x,\, t) = (\alpha_1 x + \beta_1)\psi_1(t) + (\alpha_2 x + \beta_2)\psi_2(t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{4}$$

удовлетворяла граничным условиям (2) краевой задачи (1), (2), (3), то коэффициенты α_1, β_1, α_2, β_2 определяются однозначно:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2 + hl}, \quad \beta_1 = \frac{1 + hl}{(2 + hl)h}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2 + hl}, \quad \beta_2 = \frac{1}{h(2 + hl)}. \tag{5}$$

Решение краевой задачи (1), (2), (3) можно искать в виде

$$u(x,\, t) = v(x,\, t) + \psi(x,\, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{6}$$

где $v(x,\, t)$ — новая искомая функция, а $\psi(x,\, t)$ уже определена. Для функции $v(x,\, t)$ получаем краевую задачу

$$v_t = a^2 v_{xx} + f^*(x,\, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{7}$$

$$v_x(0,\, t) - hv(0,\, t) = 0, \quad v_x(l,\, t) + hv(l,\, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{8}$$

$$v(x,\, 0) = \varphi^*(x), \quad 0 < x < l, \tag{9}$$

где

$$f^*(x,\,t) = f(x,\,t) - (\alpha_1 x + \beta_1)\psi'(t) - (\alpha_2 x + \beta_2)\psi_2'(t), \tag{10}$$

$$\varphi^*(x) = \varphi(x) - (\alpha_1 x + \beta_1)\psi_1(0) - (\alpha_2 x + \beta_2)\psi_2(0). \tag{11}$$

Решение краевой задачи (7), (8), (9) будем искать в виде

$$v(x,\,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(t) X_n(x), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{12}$$

где $X_n(x)$ — собственные функции краевой задачи

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{13}$$

$$X'(0) - hX(0) = 0, \quad X'(l) + hX(l) = 0\,^{1)}. \tag{14}$$

Функции же $v_n(t)$ подлежат определению. Функция $v(x,\,t)$ уже удовлетворяет граничным условиям (8). Если потребовать, чтобы $v(x,\,t)$ удовлетворяла также уравнению (7) и начальному условию (9), то отсюда определятся функции $v_n(t)$. Для этого разложим в ряд по собственным функциям $X_n(x)$ правую часть уравнения (7) и $\varphi^*(x)$:

$$f^*(x,\,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Theta_n(t) X_n(x), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{15}$$

где

$$\Theta_n(t) = \frac{2\lambda_n^2}{(\lambda_n^2 + h^2)l + 2h} \int_0^l f^*(z,\,t) X_n(z)\,dz, \tag{16}$$

и

$$\varphi^*(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n X_n(x), \quad 0 < x < l, \tag{17}$$

где

$$a_n = \frac{2\lambda_n^2}{(\lambda_n^2 + h^2)l + 2h} \int_0^l \varphi^*(z) X_n(z)\,dz. \tag{18}$$

Подставляя (12) и (15) в уравнение (7) и предполагая равномерную сходимость получающихся производных рядов, получим

$$\sum_{n=1}^{+\infty} [v_n'(t) + a^2\lambda_n^2 v_n(t) - \Theta_n(t)] X_n(x) = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty. \tag{19}$$

Для выполнения равенства (19) достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$v_n'(t) + a^2\lambda_n^2 v_n(t) = \Theta_n(t), \quad 0 < t < +\infty, \quad n = 1,\,2,\,3,\ldots \tag{20}$$

Так мы получаем дифференциальные уравнения для определения функций $v_n(t)$.

Полагая в (12) $t = 0$ и сравнивая с (17), мы в силу (9) получим

$$\sum_{n=1}^{+\infty} [v_n(0) - a_n] X_n(x) = 0, \quad 0 < x < l. \tag{21}$$

[1)] По поводу определения собственных значений λ_n и нормы собственных функций X_n см. ответ к задаче 30.

Для выполнения равенства (21) достаточно выполнения равенств

$$v_n(0) = a_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{22}$$

Решая дифференциальные уравнения (20) при начальных условиях (22), получим

$$v_n(t) = \int_0^t e^{-a^2\lambda_n^2(t-\tau)}\Theta_n(\tau)d\tau + a_n e^{-a^2\lambda_n^2 t}. \tag{23}$$

Этим решение задачи заканчивается.

38. Решением краевой задачи (1), (2), (3) (см. условие) является

$$u(x, t) = v(x, t) + \psi(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{4}$$

где $\psi(x, t)$ имеет то же значение, что и в ответе к предыдущей задаче, а

$$v(x, t) = \int_0^t d\tau \int_0^l f^*(z, \tau)G(x, z, t-\tau)\,dz + \int_0^l \varphi^*(z)G(x, z, t)\,dz, \tag{5}$$

$$G(x, z, t-\tau) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-(a^2\lambda_n^2+h)(t-\tau)}\,\frac{X_n(x)X_n(z)}{\|X_n\|^2}, \tag{6}$$

$\|X_n\|^2$ и λ_n имеют те же значения, что и в ответе к задаче 30,

$$f^*(x, t) = f(x, t) - H\psi(x, t) - \psi_t(x, t), \tag{7}$$

$$\varphi^*(x) = \varphi(x) - \psi(x, 0). \tag{8}$$

39.

а) $$u(x, t) \approx \frac{A}{2}\left\{\frac{e^{k(x+l)}\cos[k(x-l)+\omega t] + e^{-k(x+l)}\cos[k(x-l)-\omega t]}{\operatorname{ch} 2kl - \cos 2kl} - \right.$$
$$\left. - \frac{e^{k(l-x)}\cos[k(x+l)+\omega t] + e^{-k(x+l)}\cos[k(x+l)-\omega t]}{\operatorname{ch} 2kl - \cos 2kl}\right\};$$

б) $$u(x, t) \approx \frac{A}{4k}\operatorname{Re}\left\{(1-i)\frac{e^{k(1+i)x+i\omega t} - e^{-k(1+i)x+i\omega t}}{e^{k(1+i)l} + e^{-k(1+i)l}} + \right.$$
$$\left. + (1+i)\frac{e^{k(1-i)x-i\omega t} - e^{-k(1-i)x-i\omega t}}{e^{k(1-i)l} + e^{-k(1-i)l}}\right\};$$

в) $$u(x, t) \approx \frac{A}{2}\operatorname{Re}\left\{\frac{e^{k(1+i)x+i\omega t} - e^{-k(1+i)x+i\omega t}}{[k(1+i)-h]e^{k(1+i)l} + [k(1+i)+h]e^{-k(1+i)l}} + \right.$$
$$\left. + \frac{e^{k(1-i)x-i\omega t} - e^{-k(1-i)x-i\omega t}}{[k(1-i)-h]e^{k(1-i)l} + [k(1-i)+h]e^{-k(1-i)l}}\right\},$$

где $k = \dfrac{1}{a}\sqrt{\dfrac{\omega}{2}}$.

Указание. Решение краевой задачи в случае граничных условий а) при произвольном начальном условии, т. е. решение задачи

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(0,\,t)=0,\quad u(l,\,t)=A\cos\omega t,\quad 0<t<+\infty, \tag{2}$$
$$u(x,\,0)=\varphi(x),\quad 0<x<l, \tag{3}$$

можно искать в виде

$$u(x,\,t)=v(x,\,t)+w(x,\,t),\quad 0<x<l,\quad 0<t<+\infty, \tag{4}$$

где $v(x,\,t)$ — частное решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям (2), а $\omega(x,\,t)$ есть решение краевой задачи

$$w_t=a^2w_{xx},\quad 0<x<l,\quad 0<t<+\infty, \tag{1'}$$
$$w(0,\,t)=w(l,\,t)=0,\quad 0<t<+\infty, \tag{2'}$$
$$w(x,\,0)=\varphi(x)-v(x,\,0),\quad 0<x<l. \tag{3'}$$

Функция $v(x,\,t)$ может быть найдена как действительная часть частного решения краевой задачи

$$U_t=a^2U_{xx}, \tag{5}$$
$$U(0,\,t)=0,\quad U(l,\,t)=Ae^{i\omega t}, \tag{6}$$

которое без затруднений может быть найдено в виде

$$U(x,\,t)=X(x)e^{i\omega t}. \tag{7}$$

Таким образом,

$$v(x,\,t)=\frac{1}{2}\left\{X(x)e^{i\omega t}+\overline{X}(x)e^{-i\omega t}\right\}, \tag{8}$$

где черта над $X(x)$ является символом комплексного сопряжения.

Согласно (8) $v(x,\,t)$ не содержит членов, стремящихся к нулю или к бесконечности при $t\to+\infty$, и так как $\lim\limits_{t\to+\infty}w(x,\,t)=0$, то $v(x,\,t)$ представляет асимптотические значения температуры при $t\to\infty$.

В случае граничных условий б) или в) задача решается аналогично.

40. $$u(x,\,t)=\frac{Q}{\pi c\rho\sigma}\,e^{-ht}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-n^2a^2t}\cos nx\right].$$

В точке, диаметрально противоположной источнику [1]),

$$u(\pi,\,t)=\frac{Q}{\pi c\rho\sigma}\,e^{-ht}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-n^2a^2t}(-1)^n\right].$$

Ряд, стоящий в правой части последнего равенства, удовлетворяет условиям теоремы Лейбница о знакопеременных рядах; поэтому погрешность, допускаемая при замене его суммы частичной суммой, не превосходит по абсолютной величине первого из отброшенных членов.

в) Задачи диффузии.

41. $$Q(t)=l\sigma U_0\left\{1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\exp\left\{-\dfrac{(2n+1)^2\pi^2a^2}{4l^2}\right\}}{(2n+1)^2}\right\}.$$

[1]) По поводу обозначений см. задачи 3 и 32.

Указание.
$$Q(t) = \sigma \int_0^l u(x,\, t)\, dx,$$
где $u(x,\, t)$ — концентрация диффундирующего вещества в цилиндре в момент времени t.

Заметим, что $Q(t)$ можно определить также с помощью потока диффундирующего вещества через открытый конец:
$$Q(t) = -a^2\sigma \int_0^t \frac{\partial u(0,\, \tau)}{\partial x}\, d\tau.$$
Эквивалентность этих двух выражений легко проверяется с помощью интегрирования обеих частей основного уравнения
$$\int_0^l d\xi \int_0^t u_t(\xi,\, \tau) d\tau = a^2 \int_0^t d\tau \int_0^l u_{xx}(\xi,\, \tau) d\xi$$
с использованием граничных условий.

Выражение для $u(x,\, t)$ может быть получено как частный случай решения задачи 27.

42. $Q(t) = U_0\sigma \left\{ l - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\left[\int\limits_0^l \left(\cos\lambda_n x + \dfrac{H}{\lambda_n}\sin\lambda_n x\right) dx\right]^2}{\int\limits_0^l \left(\cos\lambda_n x + \dfrac{H}{\lambda_n}\sin\lambda_n x\right)^2 dx} e^{-a^2\lambda_n^2 t} \right\},$
где λ_n — корни трансцендентного уравнения
$$\operatorname{ctg}\lambda_n l = \frac{\lambda_n}{H},$$
а H — коэффициент, входящий в граничное условие
$$u_x = H(u - U_0) \quad \text{при} \quad x = 0.$$

Указание. См. указание к предыдущей задаче. Выражение для $u(x,\, t)$ может быть получено из решения задачи 30.

43.
$$Q(t) = U_0\sigma \left\{ \frac{\dfrac{a}{\sqrt{\beta}}\operatorname{sh}\dfrac{l\sqrt{\beta}}{a}}{\operatorname{ch}\dfrac{l\sqrt{\beta}}{a}} - \frac{8l}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp\left\{-\left(\dfrac{(2n+1)^2\pi^2a^2}{4l^2} + \beta\right)t\right\}}{(2n+1)^2\left(1 + \dfrac{4l^2\beta}{(2n+1)^2\pi^2a^2}\right)} \right\}.$$

Указание. См. указание к задаче 41.

44. а) $l_{\text{кр}} = \dfrac{\pi a}{\sqrt{\beta}}$; б) $l_{\text{кр}} = \dfrac{\pi a}{2\sqrt{\beta}}$;

в) при любой длине цилиндра процесс нарастания концентрации имеет лавинный характер; здесь β — коэффициент размножения, входящий в уравнение
$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta u, \quad \beta > 0.$$

г) Задачи электродинамики.

45. $v(x,\,t) = E_0 + \dfrac{4(E_0 - v_0)}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n-1} \times$

$$\times \exp\Big\{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4l^2RC}\,t\Big\} \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty,$$

где E_0 — постоянная электродвижущая сила, приложенная к концу $x = l$, а R и C — сопротивление и емкость единицы длины провода.

46. $v(x,\,t) =$

$$= E_0 + 2lE_0C \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\Big\{-\frac{\alpha_n^2 t}{l^2RC}\Big\} \frac{C_0\alpha_n \sin\alpha_n \left(1 - \dfrac{x}{l}\right) - Cl\cos\alpha_n \left(1 - \dfrac{x}{l}\right)}{(lCC_0 + l^2C^2 + C_0^2\alpha_n^2)\,\alpha_n \sin\alpha_n},$$

где α_n — корни уравнения

$$a \operatorname{tg}\alpha = \frac{Cl}{C_0},$$

а E_0 — постоянная электродвижущая сила, приложенная к концу $x = 0$ провода.

47. $v(x,\,t) =$

$$= \frac{E_0R(l-x)}{R_0 + Rl} + 2E_0R^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\Big\{-\frac{\alpha_n^2}{RC}\,t\Big\} \frac{\sin\alpha_n(l-x)}{\alpha_n[R(R_0 + Rl) + lR_0^2\alpha_n^2]\cos\alpha_n l},$$

где R и C — сопротивление и емкость единицы длины провода, а α_n — положительные корни уравнения

$$R \operatorname{tg}\alpha l + \alpha R_0 = 0.$$

48. Решением краевой задачи

$$H_t = a^2 H_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad a^2 = \frac{c^2}{4\pi\sigma\mu}, \tag{1}$$

$$H(0,\,t) = H(l,\,t) = H_0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$H(x,\,0) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{3}$$

является

$$H(x,\,t) = H_0 - \frac{4H_0}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\exp\Big\{-\dfrac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{l^2}\,t\Big\}}{2k+1} \sin\frac{(2k+1)\pi x}{l},$$

$$0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty. \tag{4}$$

В точке $x = \dfrac{l}{2}$ имеем

$$H\left(\frac{l}{2},\,t\right) = H_0 - \frac{4H_0}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \exp\Big\{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{l^2}\,t\Big\}, \quad 0 < t < +\infty. \tag{5}$$

Остаток ряда (5) можно оценить по признаку Лейбница:

$$\left|R_n\left(\frac{l}{2},\,t\right)\right| = \left|\frac{4H_0}{\pi}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\exp\left\{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{l^2}\,t\right\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4H_0}{\pi(2n+3)}\exp\left\{-\frac{(2n+3)^2\pi^2a^2}{l^2}\,t\right\}, \quad 0<t<+\infty. \quad (6)$$

В силу (6) имеем

$$\frac{\left|R_0\left(\frac{l}{2},\,t\right)\right|}{\frac{4H_0}{\pi}\exp\left\{-\frac{\pi^2a^2}{l^2}\,t\right\}} \leqslant \frac{1}{3}\exp\left\{-\frac{8\pi^2a^2}{l^2}\,t\right\} \leqslant \varepsilon$$

$$\text{при} \quad t \geqslant t^* = -\frac{l^2}{8\pi^2a^2}\ln 3\varepsilon. \quad (7)$$

2. Неоднородные среды и сосредоточенные факторы. Уравнения с переменными коэффициентами и условия сопряжения.

49. Температура в стержне является решением краевой задачи

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right], \quad 0<x<l, \quad 0<t<+\infty, \quad (1)$$

$$u(0,\,t) = u(l,\,t) = 0, \quad 0<t<+\infty, \quad (2)$$

$$u(x,\,0) = \varphi(x), \quad 0<x<l, \quad (3)$$

где

$$c(x) = \begin{cases}\overline{c}, & 0<x<x_0,\\ \overline{\overline{c}}, & x_0<x<l,\end{cases} \qquad \rho(x) = \begin{cases}\overline{\rho}, & 0<x<x_0,\\ \overline{\overline{\rho}}, & x_0<x<l,\end{cases}$$

$$\lambda(x) = \begin{cases}\overline{\lambda}, & 0<x<x_0,\\ \overline{\overline{\lambda}}, & x_0<x<l,\end{cases} \quad (4)$$

$\overline{c}$, $\overline{\overline{c}}$, $\overline{\rho}$, $\overline{\overline{\rho}}$, $\overline{\lambda}$, $\overline{\overline{\lambda}}$ — константы, характеризующие свойства стержней,

$$u(x,\,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\omega_n^2 t}X_n(x), \quad 0<x<l, \quad 0<t<+\infty, \quad (5)$$

где

$$X_n(x) = \begin{cases}\dfrac{\sin\frac{\omega_n}{\overline{a}}\,x}{\sin\frac{\omega_n}{\overline{a}}\,x_0}, & 0<x<x_0,\\[2ex] \dfrac{\sin\frac{\omega_n}{\overline{\overline{a}}}\,(l-x)}{\sin\frac{\omega_n}{\overline{\overline{a}}}\,(l-x_0)}, & x_0<x<l,\end{cases} \quad (6)$$

$$\overline{a} = \sqrt{\frac{\overline{\lambda}}{\overline{c\rho}}}, \quad \overline{\overline{a}} = \sqrt{\frac{\overline{\overline{\lambda}}}{\overline{\overline{c\rho}}}}, \quad (7)$$

ω_n — корни уравнения

$$\frac{\overline{\lambda}}{\overline{a}}\operatorname{ctg}\frac{\omega}{\overline{a}}\,x_0 = \frac{\overline{\overline{\lambda}}}{\overline{\overline{a}}}\operatorname{ctg}\frac{\omega}{\overline{\overline{a}}}\,(x_0-l), \quad (8)$$

$$a_n = \frac{\int\limits_0^l c(x)\rho(x)\varphi(x)X_n(x)\,dx}{\|X_n\|^2}, \tag{9}$$

$$\|X_n\|^2 = \int\limits_0^l c(x)\rho(x)X_n^2(x)\,dx = \frac{\overline{c\rho}x_0}{2\sin^2\dfrac{\omega_n}{\overline{a}}x_0} + \frac{\overline{\overline{c\rho}}(l-x_0)}{2\sin^2\dfrac{\omega_n}{\overline{\overline{a}}}(l-x_0)}. \tag{10}$$

Указание. См. решение задачи 164 § 3 гл. II.

50. $u(x,\,t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-a^2\lambda_n^2 t}X_n(x), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty,$ (1)

$a^2 = \dfrac{\lambda}{c\rho}$, где λ — коэффициент теплопроводности, c — теплоемкость и ρ — плотность массы материала стержня;

$$X_n(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\sin\lambda_n x}{\sin\lambda_n x_0}, & 0 < x < x_0, \\ \dfrac{\sin\lambda_n(l-x)}{\sin\lambda_n(l-x_0)}, & x_0 < x < x_l, \end{array} \right\} \quad n = 1,\,2,\,3,\,\ldots, \tag{2}$$

λ_n — собственные значения краевой задачи — являются корнями уравнения

$$\operatorname{ctg}\lambda_n x_0 - \operatorname{ctg}\lambda_n(l-x_0) = \frac{C_0}{c\rho}\lambda_n, \tag{3}$$

$$a_n = \frac{c\rho\int\limits_0^l \varphi(x)X_n(x)\,dx + C_0\varphi(x_0)X_n(x_0)}{\dfrac{c\rho x_0}{2\sin^2\lambda_n x_0} + \dfrac{c\rho(l-x_0)}{2\sin^2\lambda_n(l-x_0)} + \dfrac{C_0}{2}}, \tag{4}$$

где $u(x,\,0) = \varphi(x)$ — начальные значения температуры.

Указание. См. решение задачи 167 § 3 гл. II.

51. $u(x,\,t) = \dfrac{1}{L-x}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \exp\Big\{-\dfrac{n^2\pi^2a^2}{l^2}\,t\Big\}\sin\dfrac{n\pi x}{l},$

$$0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l (L-z)\varphi(z)\sin\frac{n\pi z}{l}\,dz, \quad n = 1,\,2,\,3,\,\ldots, \tag{2}$$

где через L обозначена длина полного конуса, усечением которого получается рассматриваемый стержень длины l.

52. $u(x,\,t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \exp\Big\{-\Big(\dfrac{n^2\pi^2}{l^2} + \dfrac{2m}{c\rho}\Big)a^2t\Big\}\sin\dfrac{n\pi x}{l},$

$$0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty,$$

где

$$a_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(z)e^{-mz}\sin\frac{n\pi z}{l}\,dz.$$

53. Для скорости частиц жидкости $u(x,\,t)$ и скорости движения пластины $v(t)$ получаем выражения

$$u(x,\,t)=\frac{gl\sigma}{2\rho\nu}\cdot\frac{l-x}{l}-\frac{4g\rho l^3}{\sigma\nu}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\exp\left\{-\dfrac{\lambda_n^2\nu t}{l^2}\right\}}{\lambda_n^2\left(\lambda_n^2+2\dfrac{\rho l}{\sigma}+\dfrac{4\rho^2l^2}{\sigma^2}\right)}\,\frac{\sin\lambda_n\,\dfrac{l-x}{l}}{\sin\lambda_n},$$

$$0<x<l, \quad (1)$$

$$v(t)=\frac{gl\sigma}{2\rho\nu}-\frac{4g\rho l^3}{\sigma\nu}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\exp\left\{-\dfrac{\lambda_n^2\nu t}{l^2}\right\}}{\lambda_n^2\left(\lambda_n^2+2\,\dfrac{\rho l}{\sigma}+4\,\dfrac{\rho^2l^2}{\sigma^2}\right)}, \quad (2)$$

где l — половина расстояния между граничными пластинами, ρ — плотность жидкости, ν — кинематический коэффициент вязкости, σ — поверхностная плотность пластины, g — ускорение силы тяжести, λ_n — положительные корни уравнения

$$\lambda\operatorname{tg}\lambda=\frac{2\rho l}{\sigma} \quad (3)$$

(λ — собственные значения краевой задачи, умноженные на l).

Указание. Для $u(x,\,t)$ имеем краевую задачу

$$u_t=\nu u_{xx}, \quad -l<x<0, \quad 0<x<l, \quad 0<t<+\infty, \quad (4)$$

$$u(-l,\,t)=u(l,\,t)=0, \quad u(0,\,t)=v(t), \quad 0<t<+\infty, \quad (5)$$

$$u(x,\,0)=0, \quad 0<x<l. \quad (6)$$

Для скорости движения пластины имеем

$$\frac{dv}{dt}=g+\frac{2\rho\nu}{\sigma}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=0}, \quad (7)$$

$$v(0)=0. \quad (8)$$

Так как распределение скоростей частиц жидкости симметрично относительно движущейся пластины, то достаточно определить $u(x,\,t)$ на интервале $0<x<l$. Функции

$$X_n(x)=\sin\lambda_n\,\frac{l-x}{l}$$

обобщенно ортогональны на отрезке $0<x<l$. (См. решение задачи 167 § 3 гл. II.)

§ 3. Метод интегральных представлений и функции источников

1. Однородные изотропные среды. Применение интегрального преобразования Фурье к задачам на прямой и полупрямой. Определение интегрального преобразования Фурье и общая схема применения к решению краевых задач даны в гл. II (с. 255, 256).

54. Р е ш е н и е. Умножим обе части уравнения

$$\frac{\partial u(\xi,\,t)}{\partial t} = a^2\,\frac{\partial^2 u(\xi,\,t)}{\partial \xi^2} \quad \text{на} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-i\lambda\xi}$$

и проинтегрируем по ξ от $-\infty$ до $+\infty$, предполагая, например, что функция u и ее производные достаточно быстро стремятся к нулю при $\xi \to \pm\infty$. Применяя интегрирование по частям, мы получим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial u}{\partial t}\,e^{-i\lambda\xi}\,d\xi = \frac{\partial}{\partial t}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}ue^{-i\lambda\xi}\,d\xi =$$

$$= \frac{d\overline{u}(\lambda,\,t)}{dt} = a^2\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\,e^{-i\lambda\xi}\,d\xi = a^2\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\partial u}{\partial\xi}\,e^{-i\lambda\xi}\Big|_{\xi=-\infty}^{\xi=+\infty} +$$

$$+ a^2\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,i\lambda u e^{-i\lambda\xi}\Big|_{\xi=-\infty}^{\xi=+\infty} - a^2\lambda^2\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}ue^{-i\lambda\xi}\,d\xi = -a^2\lambda^2\overline{u}(\lambda,\,t),$$

т. е.

$$\frac{d\overline{u}}{dt} + a^2\lambda^2\overline{u} = 0. \tag{1}$$

Из равенства

$$\overline{u}(\lambda,\,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u(\xi,\,t)e^{-i\lambda\xi}\,d\xi$$

при $t = 0$ получаем

$$\overline{u}(\lambda,\,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u(\xi,\,0)e^{-i\lambda\xi}\,d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{-i\lambda\xi}\,d\xi = \overline{f}(\lambda). \tag{2}$$

Решение уравнения (1) при начальном условии (2) имеет вид

$$\overline{u}(\lambda,\,t) = \overline{f}(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t}.$$

Применение обратного преобразования Фурье дает

$$u(x,\,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\overline{u}(\lambda,\,t)e^{i\lambda x}\,d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\,d\xi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}e^{i\lambda(x-\xi)}\,d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\,d\xi\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(x-\xi)\,d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\exp\Big\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\Big\}\,d\xi, \tag{3}$$

так как

$$\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-\alpha^2\lambda^2}\cos\beta\lambda\,d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}\,\exp\Big\{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}\Big\}. \tag{4}$$

Последний интеграл легко вычисляется дифференцированием по параметру.

55. $$u(x,\,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\,\tau)\,\frac{\exp\left\{-\dfrac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}}{\sqrt{t-\tau}}\,d\xi. \qquad (1)$$

56. Р е ш е н и е. Умножая обе части уравнения

$$\frac{\partial u(\xi,\,t)}{\partial t}=a^2\,\frac{\partial^2 u(\xi,\,t)}{\partial\xi^2} \quad \text{на} \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sin\lambda\xi$$

и интегрируя по ξ от 0 до $+\infty$, мы получим синус-образ Фурье функции $u(x,\,t)$,

$$\overline{u}^{(s)}(\lambda,\,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}u(\xi,\,t)\sin\lambda\xi\,d\xi, \qquad (1)$$

уравнение

$$\frac{d\overline{u}^{(s)}(\lambda,\,t)}{dt}+a^2\lambda^2\overline{u}^{(s)}(\lambda,\,t)=0, \quad 0<t<+\infty. \qquad (2)$$

Из (1) найдем начальное условие

$$\overline{u}^{(s)}(\lambda,\,0)=\overline{f}^{(s)}(\lambda). \qquad (3)$$

Решение уравнения (2) при начальном условии (3) имеет вид

$$\overline{u}^{(s)}(\lambda,\,t)=\overline{f}^{(s)}(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t}.$$

Применяя к нему обратное синус-преобразование Фурье, найдем в силу известного равенства (4), приведенного в решении предыдущей задачи,

$$u(x,\,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\overline{u}^{(s)}(\lambda,\,t)\sin\lambda x\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}f(\xi)\,d\xi\int\limits_0^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}\sin\lambda\xi\sin\lambda x\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}f(\xi)\,d\xi\int\limits_0^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}[\cos\lambda(x-\xi)-\cos\lambda(x+\xi)]\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^{+\infty}f(\xi)\left[\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right\}-\exp\left\{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\right\}\right]d\xi.$$

57. $$u(x,\,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^{+\infty}f(\xi)\left[\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right\}+\exp\left\{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\right\}\right]d\xi.$$

У к а з а н и е. Применить косинус-преобразование Фурье.

58. $$u(x,\,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{\exp\left\{-\dfrac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}}{(t-\tau)^{3/2}}\,\varphi(\tau)\,d\tau.$$

У к а з а н и е. Применить синус-преобразование Фурье; см. также решение следующей задачи.

59. Применяя косинус-преобразование Фурье[1)] и используя граничное условие $u_x(0, t) = \varphi(t)$, получим

$$\frac{d\overline{u}^{(c)}(\lambda, t)}{dt} = a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cos \lambda\xi \, d\xi =$$

$$= a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\partial u}{\partial \xi} \cos \lambda\xi \Big|_{\xi=0}^{\xi=+\infty} + a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda \int_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial \xi} \sin \lambda\xi \, d\xi = -a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \varphi(t) +$$

$$+ a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} u\lambda \sin \lambda\xi \Big|_{\xi=0}^{\xi=+\infty} - a^2\lambda^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} u(\xi, t) \cos \lambda\xi \, d\xi =$$

$$= -a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \varphi(t) - a^2\lambda^2 \overline{u}^{(c)}(\lambda, t),$$

т. е.

$$\frac{d\overline{u}^{(c)}(\lambda, t)}{dt} + a^2\lambda^2 \overline{u}^{(c)}(\lambda, t) = -a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \varphi(t), \tag{1}$$

где

$$\overline{u}^{(c)}(\lambda, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} u(\xi, t) \cos \lambda\xi \, d\xi. \tag{2}$$

Из (2) находим

$$\overline{u}^{(c)}(\lambda, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} u(\xi, 0) \cos \lambda\xi \, d\xi. \tag{3}$$

Решение уравнения (1) при начальном условии (3) имеет вид

$$\overline{u}^{(c)}(\lambda, t) = -a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)} \varphi(\tau) \, d\tau.$$

Применяя обратное косинус-преобразование Фурье (в силу равенства (4) из решения задачи 54), получим

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \overline{u}^{(c)}(\lambda, t) \cos \lambda x \, d\lambda =$$

$$= -\frac{2a^2}{\pi} \int_0^t \varphi(\tau) \, d\tau \int_0^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)} \cos \lambda x \, d\lambda =$$

$$= -\frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\Big\{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\Big\} \, d\tau.$$

60. $u(x, t) =$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_0^{+\infty} f(\xi, \tau) \frac{\exp\Big\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\Big\} - \exp\Big\{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\Big\}}{\sqrt{t-\tau}} \, d\xi.$$

[1)] При этом предполагается, что u и производные u по ξ стремятся достаточно быстро к нулю при $\xi \to +\infty$.

61. $u(x,\,t) =$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_0^{+\infty} f(\xi,\,\tau)\, \frac{\exp\Big\{-\dfrac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\Big\} + \exp\Big\{-\dfrac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\Big\}}{\sqrt{t-\tau}}\, d\xi.$$

62. Указание. Установить сначала, что для косинус-образов $\overline{f}^{(c)}(\lambda) = e^{-\alpha\lambda^2}$, $\overline{g}^{(c)}(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda^2+h^2}$ оригиналами являются

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\, \exp\Big\{-\frac{x^2}{4\alpha}\Big\}, \quad g(x) = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-h_x}.$$

63. Указание. Установить сначала, что для косинус-образов $\overline{f}^{(c)}(\lambda) = e^{-\alpha\lambda^2}$, $\overline{g}^{(c)}(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda^2+h^2}$ оригиналами являются

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\, \exp\Big\{-\frac{x^2}{4\alpha}\Big\}, \quad g(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-h_x}.$$

64. $u(x,\,t) =$

$$= \frac{ah}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \left[\exp\Big\{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\Big\} - h\int_0^{+\infty} \exp\Big\{-h\xi - \frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\Big\}\, d\xi\right] d\tau =$$

$$= \frac{ah}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\varphi(t-\zeta)}{\sqrt{\zeta}} \left[\exp\Big\{-\frac{x^2}{4a^2\zeta}\Big\} - h\int_0^{+\infty} \exp\Big\{-h\xi - \frac{(x+\xi)^2}{4a^2\zeta}\Big\}\, d\xi\right] d\zeta.$$

Указание. Воспользоваться результатами задач 62 и 63.

65. $u(x,\,t) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \displaystyle\int_0^{+\infty} f(\xi) \left[\exp\Big\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\Big\} + \exp\Big\{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\Big\} - \right.$

$$\left. - 2h\int_0^{+\infty} \exp\Big\{-\frac{(x+\xi+\eta)^2}{4a^2t} - h\eta\Big\}\, d\eta\right] d\xi.$$

Указание. Воспользоваться результатами задач 62 и 63.

2. Однородные изотропные среды. Построение функций влияния сосредоточенных источников.

а) Неограниченная прямая.

66. $u(x,\,t) = \dfrac{Q}{c\rho\sigma}\, G(x,\,\xi,\,t), \quad -\infty < x,\,\xi < +\infty,$

$$0 < t < +\infty, \quad x \neq \xi,$$

где

$$G(x,\,\xi,\,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\, \exp\Big\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\Big\}$$

есть так называемая функция источника для уравнения $u_t = a^2 u_{xx}$ в случае неограниченной прямой или «функция влияния мгновенного точечного источника тепла для неограниченного стержня с теплоизолированной боковой поверхностью».

Указание. Можно предположить, что количество тепла Q, мгновенно выделившееся в точке ξ в момент $t = 0$, мгновенно же равномерно распределяется по малому интервалу $(\xi - \delta, \xi + \delta)$; тогда начальная температура стержня будет равна

$$u(x, 0) = f_\delta(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < \xi - \delta, \\ \dfrac{Q}{2\delta c\rho\sigma}, & \xi - \delta < x < \xi + \delta, \\ 0, & \xi + \delta < x < +\infty. \end{cases}$$

Решая задачу

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(x, 0) = f_\delta(x), \quad -\infty < x < +\infty, \tag{2}$$

с помощью формулы (3) из решения задачи 54 и переходя в полученном решении к пределу при $\delta \to 0$, получим ответ.

Для разыскания температуры в стержне можно воспользоваться также дельта-функцией [1]), решая либо задачу

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x + \infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{3}$$

$$u(x, 0) = \frac{Q}{c\rho\sigma}\,\delta(x - \xi), \quad -\infty < x, \xi < +\infty, \tag{4}$$

с помощью упомянутой формулы (3) из задачи 54, либо задачу

$$u_t = a^2 u_{xx} + \frac{Q}{c\rho\sigma}\,\delta(x - \xi)\delta(t), \quad -\infty < x, \xi < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{5}$$

$$u(x, 0) = 0, \quad -\infty < x + \infty, \tag{6}$$

с помощью формулы (1), приведенной в ответе к задаче 55.

Для решения краевых задач (3), (4) и (5), (6) можно не прибегать к формулам (3) и (1), а воспользоваться интегральным представлением для дельта-функции (см. [7, с. 268–275]).

Функции источника для уравнения $u_t = a^2 u_{xx}$ на прямой $-\infty < x < +i$ может быть также получена на основании соображений подобия (см. [7, с. 268–275]) или с помощью предельного перехода в выражении функции источника для отрезка $0 \leqslant x \leqslant l$ при $l \to +\infty$ (см. [7, с. 268–275]).

Примечание. Если мгновенное выделение тепла в точке $x = \xi$ произошло не в момент времени $t = 0$, а в момент времени $t = \tau$, то

$$u(x, t) = \frac{Q}{c\rho\sigma}\,G(x, \xi, t - \tau), \quad -\infty < x, \xi < +\infty, \quad x \neq \xi, \quad \tau < t < +\infty,$$

$$G(x, \xi, t - \tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t - \tau)}}\,\exp\Big\{-\frac{(x - \xi)^2}{4a^2(t - \tau)}\Big\}.$$

[1]) См. ответы и указания к задачам 56 и 63 § 2 гл. II и к задаче 153 § 3 гл. II.

67. $u(x,\,t)=\dfrac{Q}{c\rho\sigma}\,G(x,\,\xi,\,t),\quad -\infty<x,\,\xi<+\infty,\quad x\neq\xi,\quad 0<t<+\infty,\quad (1)$

где

$$G(x,\,\xi,\,t)=\frac{e^{-ht}}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\Big\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\Big\}\qquad (2)$$

есть функция источника для уравнения $u_t=a^2u_{xx}-hu$ в случае неограниченной прямой.

Примечание. Если мгновенное выделение количества тепла Q произошло не в момент времени $t=0$, а в момент времени $t=\tau$, то

$$u(x,\,t)=\frac{Q}{c\rho\sigma}\,G(x,\,\xi,\,t-\tau),\quad -\infty<x,\,\xi<+\infty,\quad x\neq\xi,\quad \tau<t<+\infty,\qquad (3)$$

где

$$G(x,\,\xi,\,t-\tau)=\frac{e^{-h(t-\tau)}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\Big\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\Big\}.\qquad (4)$$

68. Решение. Заменим в решении $u(x,\,t)$ уравнения

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,\,t)$$

x и t на ξ и τ; заменим, далее, в функции источника $G(x,\,\xi,\,t)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\Big\{-\dfrac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\Big\}$ t на $t-\tau$, $0<\tau<t$. Функции $u(\xi,\,\tau)$ и $G(x,\,\xi,\,t-\tau)$ удовлетворяют уравнениям

$$u_\tau=a^2u_{\xi\xi}+f(\xi,\,\tau),\quad G_\tau=-a^2G_{\xi\xi},$$

поэтому

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(Gu)=a^2\left[G\,\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}-u\,\frac{\partial^2G}{\partial\xi^2}\right]+Gf.\qquad (1)$$

Интегрируя последнее равенство по ξ от $-\infty$ до $+\infty$ и по τ от 0 до $t-\alpha$, $0<\alpha<t$, получим (если предположить, что u и ее производные по ξ ограничены при $\xi\to\pm\infty$ или стремятся к ∞, но не слишком быстро):

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(Gu)_{\tau=t-\alpha}\,d\xi=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(Gu)_{\tau=0}\,d\xi+\int\limits_0^{t-\alpha}d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Gf\,d\xi.\qquad (2)$$

Переходя к пределу в равенстве при $\alpha\to0$, получим [1])

$$u(x,\,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)G(x,\,\xi,\,t)d\xi+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\,\tau)G(x,\,\xi,\,t-\tau)\,d\xi.\qquad (3)$$

69. Ответ дается формулой (3) решения предыдущей задачи, где под $G(x,\,\xi,\,t)$ нужно понимать функцию источника, найденную в решении задачи 67.

[1]) Переход к пределу в левой части равенства (2) при $\alpha\to0$ выполняется аналогично тому, как это сделано в [7, с. 230–233].

Указание. Задачу 69 можно решать либо непосредственно, либо сведением к задаче 68 путем замены искомой функции $u(x,\,t) = e^{-ht}v(x,\,t)$.

70. $t = \dfrac{(x-\xi)^2}{2a^2}$, $\quad u_{\max}(x) = \dfrac{Q}{c\rho\sqrt{2\pi e}\,|x-\xi|}\,e^{-1/2}$.

71. $u(x,\,t) = \dfrac{Q}{c\rho}\,\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^t \exp\Big\{-h\tau - \frac{x^2}{4a^2\tau}\Big\}\,\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}$,

$$\overline{u}(x) = \frac{Q}{2c\rho ah}\,\exp\Big\{-\frac{h}{a}|x|\Big\}.$$

Если поверхность стержня теплоизолирована, то $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,\,t) = \infty$.

72. $u(x,\,t) = U_0\left[\Phi\left(\dfrac{x+l}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\dfrac{x-l}{2a\sqrt{t}}\right)\right]$, где $\Phi(z) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^z e^{-\xi^2}\,d\xi$ есть так называемый интеграл ошибок, значения которого можно найти в [7], а также в табл. 1 приложений настоящей книги.

73. $u(x,\,t) = \dfrac{A}{2}\,e^{-\alpha x + a^2\alpha^2 t}\left[1 - \Phi\left(-\dfrac{x}{2a\sqrt{t}} + a\alpha\sqrt{t}\right)\right]$.

74. $u(x,\,t) = U_0 e^{-ht}\left[\Phi\left(\dfrac{x+l}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\dfrac{x-l}{2a\sqrt{t}}\right)\right]$.

Указание. Воспользоваться решением задачи 69, либо заменой искомой функции $u(x,\,t) = e^{-ht}v(x,\,t)$ свести к задаче 72.

75. $u(x,\,t) = \dfrac{Q}{2ac\rho\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^t \frac{\exp\Big\{-\dfrac{(x-v_0\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\Big\}}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau =$

$$= \frac{Q}{2ac\rho\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\exp\Big\{-\dfrac{(x-v_0t+v_0\zeta^2}{4a^2\zeta}\Big\}}{\sqrt{\zeta}}\,d\zeta,$$

в частности, температура стержня под печкой равна

$$u(v_0t,\,t) = \frac{Q}{c\rho v_0}\,\Phi\left(\frac{v_0\sqrt{t}}{2a}\right).$$

Замечание. Выражение для $u(x,\,t)$ получено при условии, что теплообмен на поверхности стержня, не соприкасающейся с печкой, пренебрежимо мал.

б) Полупрямая.

76. $G(x,\,\xi,\,t-\tau) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left[\exp\Big\{-\dfrac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\Big\} - \right.$

$$\left. - \exp\Big\{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\Big\}\right], \quad 0 < x,\,\xi < +\infty, \quad x \neq \xi, \quad 0 < t < +\infty. \quad (1)$$

В случае, если на поверхности стержня происходит конвективный теплообмен со средой, температура которой равна нулю, то выражение

для функции источника получается из (1) умножением на

$$e^{-H(t-\tau)}, \tag{2}$$

где H — коэффициент теплообмена, входящий в уравнение $u_t = a^2 u_{xx} - Hu$.

Указание. Выражение для температуры $u(x, t)$ и для $G(x, \xi, t-\tau)$ можно получить, рассматривая неограниченный стержень $-\infty < x < +\infty$ и предполагая, что в момент времени $t = \tau$ в точке $x = \xi$ выделилось мгновенно Q единиц тепла, а в точке $x = -\xi$ выделилось мгновенно $-Q$ единиц тепла, т. е., как иногда говорят, помещая в точку $x = \xi$ мгновенный положительный источник мощности Q, а в точку $x = -\xi$ — мгновенный отрицательный источник мощности $-Q$ [1]).

77. $G(x, \xi, t-\tau) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left[\exp\left\{-\dfrac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} + \right.$

$\left. + \exp\left\{-\dfrac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\right], \quad 0 < x, \xi < +\infty, \quad \tau < t < +\infty, \quad x \neq \xi.$

При наличии конвективного теплообмена на поверхности стержня функция источника получается из только что найденной умножением на $e^{-H(t-\tau)}$.

Указание. См. указание к предыдущей задаче; настоящая задача решается аналогично.

78. $G(x, \xi, t-\tau) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left\{\left[\exp\left\{-\dfrac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} + \right.\right.$

$\left.\left. + \exp\left\{-\dfrac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\right] - 2h\int\limits_0^{+\infty} \exp\left\{-\dfrac{(x+\xi+\eta)^2}{4a^2(t-\tau)} - h\eta\right\} d\eta\right\},$

$0 < x, \xi < +\infty, \quad x \neq \xi, \quad \tau < t < +\infty,$

где h есть коэффициент, входящий в граничное условие

$$u_x(0, t) - hu(0, t) = 0.$$

При наличии конвективного теплообмена на поверхности стержня функция источника получается из только что найденной умножением на $e^{-H(t-\tau)}$, где H — коэффициент теплообмена, входящий в уравнение $u_t = a^2 u_{xx} - Hu$.

Указание. Использовать предложение, сформулированное в задаче 82.

79. $u(x, t) =$

$= \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^{+\infty} \psi(\xi)\left[\exp\left\{-\dfrac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right\} - \exp\left\{-\dfrac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}\right\}\right] d\xi +$

[1]) Функция источника для полупрямой определяется аналогично функции источника для конечного отрезка; см. введение к решениям задач подпункта в) настоящего пункта.

$$+\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\varphi(\tau)\exp\left\{-\dfrac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}}{(t-\tau)^{3/2}}\,d\tau +$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\tau)\left[\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}-\exp\left\{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\right]d\xi.$$

Указание. Пусть $u(\xi, \tau)$ есть решение уравнения $u_\tau = a^2 u_{\xi\xi} + f(\xi, \tau)$, а $G(x, \xi, t-\tau)$ — функция источника, найденная в решении задачи 76.

Интегрируя равенство

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(Gu) = G\frac{\partial u}{\partial\tau} + u\frac{\partial G}{\partial\tau} = a^2\left[G\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} - u\frac{\partial^2 G}{\partial\xi^2}\right] + Gf\ ^{1)}$$

по ξ от 0 до $+\infty$ и по τ от 0 до $t-\alpha$, где $0<\alpha<t$, получим

$$\int_0^{+\infty}(Gu)_{\tau=t-\alpha}d\xi - \int_0^{+\infty}(Gu)_{\tau=0}\,d\xi =$$

$$= a^2\int_0^{t-\alpha}d\tau\int_0^{+\infty}\left[G\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} - u\frac{\partial^2 G}{\partial\xi^2}\right]d\xi + \int_0^{t-\alpha}d\tau\int_0^{+\infty}Gf\,d\xi =$$

$$= a^2\int_0^{t-\alpha}\left\{\left(G\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)_{\xi=0}^{\xi=+\infty} - \left(u\frac{\partial G}{\partial\xi}\right)_{\xi=0}^{\xi=+\infty} - \right.$$

$$\left. - \int_0^{+\infty}\left[\frac{\partial G}{\partial\xi}\frac{\partial u}{\partial\xi} - \frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial G}{\partial\xi}\right]d\xi\right\}d\tau + \int_0^{t-\alpha}d\tau\int_0^{+\infty}Gf\,d\xi.$$

Налагая надлежащие ограничения на порядок роста u и $\dfrac{\partial u}{\partial\xi}$ при $\xi\to+\infty$, получим

$$\int_0^{+\infty}(Gu)_{\tau=t-a}\,d\xi = \int_0^{+\infty}(Gu)_{\tau=0}\,d\xi - a^2\int_0^{t-\alpha}\left(u\frac{\partial G}{\partial\xi}\right)_{\xi=0}d\tau + \int_0^{t-\alpha}d\tau\int_0^{+\infty}Gf\,d\xi.$$

Переходя к пределу при $\alpha\to 0$, получаем [2)]

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^{+\infty}(Gu)_{\tau=t-\alpha}\,d\xi = u(x,t).$$

80. $u(x,t) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\displaystyle\int_0^{+\infty}\psi(\xi)\left[\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right\}+\right.$

[1)] Это равенство получается так же, как равенство (1) в решении задачи 68.

[2)] Переход к пределу выполняется аналогично тому, как это сделано в [7, с. 230–233].

$$+\exp\Big\{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\Big\}\Big]d\xi-\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\exp\Big\{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\Big\}d\tau+$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\tau)\Big[\exp\Big\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\Big\}+\exp\Big\{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\Big\}\Big]d\xi.$$

Указание. Задача может быть решена аналогично предыдущей (см. указание к предыдущей задаче).

81. $u(x,\,t)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\psi(\xi)\Big[\exp\Big\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\Big\}+$

$$+\exp\Big\{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\Big\}-2h\int\limits_0^{+\infty}\exp\Big\{-\frac{(x+\xi+\eta)^2}{4a^2t}-h\eta\Big\}d\eta\Big]d\xi+$$

$$+\frac{ha}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\Big[\exp\Big\{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\Big\}-h\int\limits_0^{+\infty}\exp\Big\{-\frac{(x+\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}-h\eta\Big\}d\eta\Big]d\tau+$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_0^{+\infty}f(\xi,\tau)\Big[\exp\Big\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\Big\}+\exp\Big\{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\Big\}-$$

$$-2h\int\limits_0^{+\infty}\exp\Big\{-\frac{(x+\xi+\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}-h\eta\Big\}d\eta\Big]d\xi.$$

Указание. См. указание к задаче 79. Задача 81 может быть решена аналогично.

82. Указание. Воспользоваться тем, что:

1) если $F(x)$ есть функция нечетная, то функция

$$u(x,\,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(\xi)\exp\Big\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\Big\}d\xi$$

равна нулю при $x=0$;

2) если $u(x,\,t)$ есть решение уравнения $u_t=a^2u_{xx}$, то

$$U(x,\,t)=\sum_{k=0}^{N}A_k\frac{\partial^k u(x,\,t)}{\partial x^k}$$

также является решением этого уравнения.

83. Указание. Воспользоваться тем, что:

1) если $F(x,\,t)$ есть функция нечетная по x, то функция

$$u(x,\,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(\xi,\,\tau)\exp\Big\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\Big\}d\xi$$

равна нулю при $x=0$;

2) если $u(x,\,t)$ есть решение уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,\,t),$$

то

$$U(x,\,t) = \sum_{k=0}^{N} A_k \frac{\partial^k u(x,\,t)}{\partial x^k}$$

является решением уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx} + \sum_{k=0}^{N} A_k \frac{\partial^k f(x,\,t)}{\partial x^k}.$$

84. $$u(x,\,t) = U_0 \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right).$$

Скорость движения фронта температуры αU_0, $\alpha = \text{const}$, $0 < \alpha < 1$,

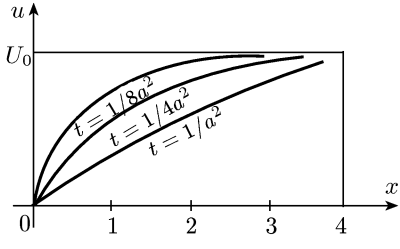


Рис. 33

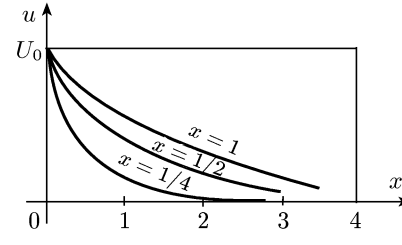


Рис. 34

равна $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{ak}{\sqrt{t}}$, где k — корень уравнения $\Phi(z) = \alpha$. Графики изображены соответственно на рис. 33 и рис. 34.

85. $$u(x,\,t) = U_0\left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right], \qquad T = \frac{x_0^2}{4a^2k^2},$$

где k — корень уравнения $\Phi(z) = 1 - \alpha$.

Указание. С помощью подстановки $u(x,\,t) = v(x,\,t) + U_0$ задача сводится к предыдущей.

86. $$u(x,\,t) = \frac{U_0}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{x-1}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{x+1}{2a\sqrt{t}}} e^{-z^2}\,dz = \frac{U_0}{2}\left[\Phi\left(\frac{x+1}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-1}{2a\sqrt{t}}\right)\right].$$

87.

$$u(x,\,t) = U_0\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) + e^{hx+h^2a^2t}U_0\left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} + ah\sqrt{t}\right)\right]. \quad (1)$$

Погрешность, допускаемая при пользовании формулой (4) условия, не превышает

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2^n}\cdot\frac{1}{z^{2n-1}}. \quad (2)$$

Чтобы погрешность, допускаемая при пользовании формулой (5) условия, не превышала $\varepsilon > 0$, достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$t^3 > \frac{U_0^2}{4\pi a^6 h^6 \varepsilon^2}. \tag{3}$$

Указание. Интегрируя последовательно по частям, можно получить равенство

$$\int_z^{+\infty} e^{-\xi^2}\,d\xi = \frac{e^{-z^2}}{2}\left\{\frac{1}{z} - \frac{1}{2z^3} + \frac{1\cdot 3}{2^2 z^5} - \ldots + (-1)^{n-1}\,\frac{1\cdot 3\ldots(2n-3)}{2^{n-1}z^{2n-1}}\right\} + \\ + (-1)^n\,\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2^n}\int_z^{+\infty}\frac{e^{-\xi^2}}{\xi^{2n}}\,d\xi, \tag{4}$$

причем, очевидно,

$$\int_z^{+\infty} e^{-\xi^2}\,\frac{d\xi}{\xi^{2n}} < e^{-z^2}\int_z^{+\infty}\frac{d\xi}{\xi^{2n}}. \tag{5}$$

Замечание. Если частичную сумму, стоящую в фигурной скобке формулы (4), заменить бесконечным рядом, то получится расходящийся ряд, называемый асимптотическим. Оценка (5) показывает, что погрешность, которая допускается при отбрасывании в формуле (4) остаточного члена

$$(-1)^n\,\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2^n}\int_z^{+\infty}\frac{e^{-\xi^2}}{\xi^{2n}}\,d\xi,$$

стремится к нулю при каждом фиксированном n и $z \to +\infty$.

88. $u(x,\,t) = \left(U_0 - \dfrac{b^2}{a^2k^2}\right)\left[1 - \Phi\left(\dfrac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right] + \dfrac{b^2}{a^2k^2}\,e^{-kx} +$

$$+ \frac{b^2}{2a^2k^2}\left\{e^{a^2k^2t-kx}\left[1 - \Phi\left(\frac{-x}{2a\sqrt{t}} + ak\sqrt{t}\right)\right] - \right.$$

$$\left. - e^{a^2k^2t+kx}\left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} + ak\sqrt{t}\right)\right]\right\}.$$

89. $u(x,\,t) = 2aq\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}\,\exp\left\{-\dfrac{x^2}{4a^2t}\right\} - qx\left[1 - \Phi\left(\dfrac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right].$

90. $u(x,\,t) = U_2 + (U_0 - U_2)e^{-ht}\Phi\left(\dfrac{x}{2a\sqrt{t}}\right) +$

$$+ \frac{U_1 - U_2}{2}\left\{\exp\left\{-\frac{x\sqrt{h}}{a}\right\}\left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} - \sqrt{ht}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \exp\left\{\frac{x\sqrt{t}}{a}\right\}\left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} + \sqrt{ht}\right)\right]\right\}.$$

91. $v(x,\,t)=\dfrac{E_0}{2}\,e^{-x\sqrt{RG}}\left\{1-\Phi\left(\dfrac{x}{2}\sqrt{\dfrac{RC}{t}}-\sqrt{\dfrac{Gt}{C}}\right)\right\}+$

$$+\frac{E_0}{2}\,e^{x\sqrt{RG}}\left\{1-\Phi\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{RC}{t}}+\sqrt{\frac{Gt}{C}}\right)\right\},$$

где R, C, G — сопротивление, емкость и утечка единицы длины провода.

92. $v(x,\,t)=$

$$=\frac{Ah}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{a}\sqrt{\dfrac{\omega}{2}}\right)^2+\left(\dfrac{1}{a}\sqrt{\dfrac{\omega}{2}}+h\right)^2}}\exp\left\{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\omega}{2}}\right\}\cos\left(\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\omega}{2}}-\omega t-\gamma\right)+$$

$$+\frac{2Ah}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}e^{-h\eta}\,d\eta\int\limits_0^{\frac{x+\eta}{2a\sqrt{t}}}e^{-z^2}\cos\omega\left[t-\frac{(x+\eta)^2}{4a^2z^2}\right]dz,\qquad(1)$$

$$\operatorname{tg}\gamma=\frac{\dfrac{1}{a}\sqrt{\dfrac{\omega}{2}}}{\dfrac{1}{a}\sqrt{\dfrac{\omega}{2}}+h}.\qquad(2)$$

Первое слагаемое в правой части равенства (1) представляет собой затухающую с ростом x температурную волну, периодическую по t. Второе же слагаемое бесконечно мало при $t\to+\infty$.

93. $$u(x,\,t)=A\exp\left\{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\omega}{2}}\right\}\cos\left(\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\omega}{2}}-\omega t\right).$$

Скорость распространения температурной волны с частотой ω равна

$$\frac{dx}{dt}=a\sqrt{2\omega}.$$

Указание[1]. Можно найти установившиеся температурные волны как действительную часть комплексного решения задачи

$$U_t=a^2U_{xx},\quad 0<x,\quad t<+\infty,\quad U(0,\,t)=Ae^{i\omega t},$$

стремящегося к нулю при $x\to+\infty$. Это комплексное решение имеет вид

$$U(x,\,t)=X(x)e^{i\omega t}.$$

94. $v(x,\,t)=E_0e^{-x\sqrt{RC\omega/2}}\cos\left(\omega t-x\sqrt{RC\omega/2}\right)-$

$$-\frac{E_0}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\xi t}\sin\sqrt{RC\xi}\,\frac{\xi\,d\xi}{\xi^2+\omega^2},$$

где R и C — сопротивление и емкость единицы длины провода.

Указание. См. указание к предыдущей задаче.

[1] Подробнее о решении задач без начальных условий см. [7, с. 241–245].

95. $$-\lambda u_x(0,\,t) = q(t) = \frac{\lambda}{\pi a}\,\frac{d}{dt}\int\limits_0^t \frac{\mu(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}}.$$

Указание. Задача сводится к интегральному уравнению Абеля [1]).

96. $$\varphi(t) = \frac{1}{2ah\sqrt{\pi}}\,\frac{d}{dt}\int\limits_0^t \frac{\mu(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}},$$

где h — коэффициент теплообмена, входящий в граничное условие

$$u_x(0,\,t) = h[u(0,\,t) - \varphi(t)].$$

97. $$\varphi(t) = \frac{\lambda}{\pi a}\,\frac{d}{dt}\int\limits_0^t \mu(\tau)\,\frac{e^{-h^*(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau,$$

где h^* — коэффициент теплообмена, входящий в уравнение

$$u_t = a^2 u_{xx} - h^* u.$$

98. $$\varphi(t) = \frac{1}{2ah\sqrt{\pi}}\,\frac{d}{dt}\int\limits_0^t \mu(\tau)\,\frac{e^{-h^*(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau,$$

где коэффициенты h и h^* имеют тот же смысл, что и в задачах 96 и 97.

99. $$u(x,\,t) = \frac{\exp\Big\{-\dfrac{v_0}{2a^2}(x - v_0 t) - \dfrac{v_0^2}{4a^2}\,t\Big\}}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t d\tau \times$$

$$\times \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(\xi + v_0\tau,\,\tau)\exp\Big\{\dfrac{v_0}{2a^2}\,\xi + \dfrac{v_0^2}{4a^2}\,\tau\Big\}}{\sqrt{t-\tau}} \times$$

$$\times \left[\exp\left\{-\frac{(x - v_0 t - \xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} - \exp\left\{-\frac{(x - v_0 t + \xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\right] d\xi,$$

$$v_0 t < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty.$$

Указание. Перейти к новым независимым переменным $\xi = x - v_0 t$, $t = t$ (это соответствует переходу к подвижной системе координат с началом в точке $x_0 = v_0 t$) и новой искомой функции по формуле $u(x,\,t) = e^{\alpha\xi + \beta t} v(\xi,\,t)$.

100. $$u(x,\,t) = \frac{\exp\Big\{-\dfrac{v_0}{2a^2}(x - v_0 t) - \dfrac{v_0^2}{4a^2}\,t\Big\}}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \exp\Big\{\frac{v_0}{2a^2}\,\xi\Big\} f(\xi) \times$$

$$\times \left[\exp\left\{-\frac{(x - v_0 t - \xi)^2}{4a^2 t}\right\} - \exp\left\{-\frac{(x - v_0 t + \xi)^2}{4a^2 t}\right\}\right] d\xi.$$

Указание. См. указание к предыдущей задаче.

[1]) Об интегральном уравнении Абеля см. [2, том II, § 79], а также указание к задаче 114.

101. $u(x,\,t)=\dfrac{\exp\Big\{-\dfrac{v_0}{2a^2}(x-v_0t)-\dfrac{v_0^2}{4a^2}\,t\Big\}(x-v_0t)}{2a\sqrt{\pi}}\times$

$$\times\int\limits_0^t\frac{\exp\Big\{-\dfrac{v_0^2}{4a^2}\,\tau\Big\}\mu(\tau)\exp\Big\{-\dfrac{(x-v_0t)^2}{4a^2(t-\tau)}\Big\}}{(t-\tau)^{3/2}}\,d\tau.$$

Указание. См. указание к задаче 99.

102. $u(x,\,t)=$

$$=\exp\Big\{-\frac{v_0}{2a^2}(x-v_0t)-\frac{v_0^2}{4a^2}\,t\Big\}\Bigg\{\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^{+\infty}\exp\Big\{\frac{v_0}{2a^2}\,\xi\Big\}\,f(\xi)\times$$

$$\times\Bigg[\exp\Big\{-\frac{(x-v_0t-\xi)^2}{4a^2t}\Big\}+\exp\Big\{-\frac{(x-v_0t+\xi)^2}{4a^2t}\Big\}-$$

$$-\frac{v_0}{2a^2}\int\limits_0^{+\infty}\exp\Big\{-\frac{(x-v_0t+\xi+\eta)^2}{4a^2t}-\frac{v_0}{3a^2}\,\eta\Big\}\,d\eta\Bigg]d\xi-$$

$$-\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{\exp\Big\{\dfrac{v_0^2}{4a^2}\,\tau\Big\}\mu(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\Bigg[\exp\Big\{-\frac{(x-v_0t)^2}{4a^2(t-\tau)}\Big\}-$$

$$-\frac{v_0}{2a^2}\int\limits_0^{+\infty}\exp\Big\{-\frac{(x-v_0t)^2}{4a^2(t-\tau)}-\frac{v_0}{2a^2}\,\eta\Big\}\,d\eta\Bigg]d\tau+$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(\xi+v_0\tau,\,\tau)\exp\Big\{\dfrac{v_0}{2a^2}\,\xi+\dfrac{v_0^2}{4a^2}\,\tau\Big\}}{\sqrt{t-\tau}}\times$$

$$\times\Bigg[\exp\Big\{-\frac{(x-v_0t-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\Big\}+\exp\Big\{-\frac{(x-v_0t+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\Big\}-$$

$$-\frac{v_0}{2a^2}\int\limits_0^{+\infty}\exp\Big\{-\frac{(x-v_0t+\xi+\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}-\frac{v_0}{2a^2}\,\eta\Big\}\,d\eta\Bigg]d\xi\Bigg\}.$$

Указание. См. указание к задаче 99.

в) Конечный отрезок. Функцией влияния мгновенного точечного источника тепла («функцией источника») для конечного отрезка $0<x<l$, соответствующей данным граничным условиям, называется температура $G(x,\,\xi,\,t)$ в произвольной точке x, $0<x<l$, в произвольный момент времени $t>0$, вызванная выделением $Q=c\rho$ [1]) единиц тепла в точке ξ, $0<\xi<l$, $\xi\neq x$ этого отрезка в момент времени $t=0$, если концы отрезка поддерживаются при соответствующих однородных граничных условиях.

[1]) Здесь c — удельная теплоемкость, а ρ — линейная плотность массы.

Таким образом функция источника $G(x, \xi, t)$ должна быть: 1) решением уравнения теплопроводности; 2) удовлетворять соответствующим однородным граничным условиям; 3) обращаться в нуль при $t \to 0$ и $x \neq \xi$; 4) удовлетворять предельному соотношению

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \int_{\xi-\lambda}^{\xi+\lambda} G(x, \xi, t) c\rho \, dx = Q,$$

или, что то же самое,

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \int_{\xi-\lambda}^{\xi+\lambda} G(x, \xi, t) \, dx = 1$$

при любом $\lambda > 0$ [1]).

Функция источника

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right\} \tag{1}$$

для уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx} \tag{2}$$

на неограниченной прямой удовлетворяет требованиям 1), 3) и 4).

Если к (1) прибавить такое непрерывное решение $g(x, \xi, t)$ уравнения (2), обращающееся в нуль при $t = 0$, чтобы сумма

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right\} + g(x, \xi, t) \tag{3}$$

удовлетворяла граничным условиям 2), то (3) будет удовлетворять всем требованиям 1), 2), 3), 4), т. е. будет функцией источника для уравнения (2) на конечном отрезке, соответствующей граничным условиям 2).

Слагаемое $g(x, \xi, t)$ может быть построено для некоторых типов граничных условий методом отражений; этим методом решаются задачи 103–106.

103. Решение. Продолжим стержень $0 < x < l$ в обе стороны неограниченно и будем считать его поверхность всюду теплоизолированной. Пусть в точке ξ, $0 < \xi < l$, в момент $t = 0$ выделилось $Q = c\rho$ единиц тепла. Повышение температуры

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right\}, \tag{1}$$

вызванное в неограниченном стержне $-\infty < x < +\infty$ действием этого мгновенного источника, не равно нулю при $x = 0$ и $x = l$. Если же, кроме того, и в точках $-\xi, \pm\xi \pm 2nl$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ [2]), в момент $t = 0$ подействовали мгновенные тепловые источники мощностью $\pm Q$, распределенные, как указано на рис. 35, то температура

---

[1]) Предполагается, что $0 < \xi - \lambda < \xi + \lambda < l$.

[2]) Точки $-\xi$, $\pm\xi$, $\pm 2nl$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, получаются из точки ξ последовательными симметричными отражениями относительно $x = 0$ и $x = l$.

$$G(x,\,\xi,\,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\exp\left\{-\frac{(x-\xi+2nl)^2}{4a^2t}\right\}-\right.$$
$$\left.-\exp\left\{-\frac{(x+\xi+2nl)^2}{4a^2t}\right\}\right),\qquad(2)$$

вызванная в неограниченном стержне $-\infty<x<+\infty$ действием всех этих источников, будет равна все время нулю как в точке $x=0$, так и в точке $x=l$. Действительно, каждому источнику мощностью $+Q$ согласно рис. 35 соответствует симметричный относительно $x=0$

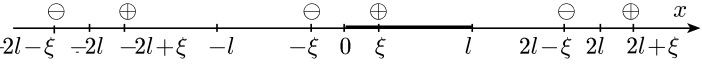


Рис. 35

источник мощностью $-Q$, и обратно, каждому источнику мощностью $-Q$ соответствует симметричный относительно $x=0$ источник мощностью $+Q$, так что их действия в точке $x=0$ взаимно уничтожаются. То же самое можно сказать и о точке $x=l$.

Представим $G(x,\,\xi,\,t)$ в виде

$$G(x,\,\xi,\,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right\}+g(x,\,\xi,\,t),\qquad(3)$$

где

$$g(x,\,\xi,\,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\exp\left\{-\frac{(x-\xi+2nl)^2}{4a^2t}\right\}-\right.$$
$$\left.-\exp\left\{-\frac{(x+\xi+2nl)^2}{4a^2t}\right\}\right).\qquad(4)$$

Символом $\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(\ )$ обозначен ряд (2) за вычетом члена (1). Члены ряда (4) имеют производные всех порядков по x и t всюду при $0\leqslant x\leqslant l,\ \ 0\leqslant t<+\infty$. Ряд (4) сходится абсолютно и равномерно при $0\leqslant x\leqslant l,\ \ 0\leqslant t\leqslant t^*$, где t^* — произвольное положительное число; так же ведут себя и ряды, получающиеся из (4) почленным дифференцированием. При $t\to 0,\ \ t>0$ каждый член ряда (4) стремится к нулю.

Таким образом, $G(x,\,\xi,\,t)$ удовлетворяет всем требованиям 1), 2), 3), 4) определения функции источника.

Оценим погрешность, допускаемую при замене суммы ряда (4) его частичной суммой $\sum_{n=-N}^{N}{}'$ при $0\leqslant x\leqslant l,\ \ 0\leqslant t\leqslant t^*$. Рассмотрим сначала ряд из членов с положительными n. Если раскрыть скобки, то он станет знакопеременным рядом, удовлетворяющим условиям теоремы Лейбница. Поэтому для остатка ряда получаем оценку $|R_N^+(x,\,\xi,\,t)|=$

$$=\left|\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\sum_{n=N}^{+\infty}\left(\exp\left\{-\frac{(x-\xi+2nl)^2}{4a^2t}\right\}-\exp\left\{-\frac{(x+\xi+2nl)^2}{4a^2t}\right\}\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left\{-\frac{(x-\xi+2Nl)^2}{4a^2l}\right\} \leqslant \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left\{-\frac{(N-1)^2l^2}{a^2t}\right\}$$
при $0<x<l, \quad 0<\xi<l.$ (5)

Аналогично для остатка ряда из членов с отрицательными n получаем оценку

$$|R_N^-(x,\xi,t)| \leqslant \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left\{-\frac{(N-1)^2l^2}{a^2t}\right\}. \tag{5'}$$

Таким образом, для остатка ряда (4) имеет место оценка

$$|R_N(x,\xi,t)| \leqslant \frac{1}{a\sqrt{\pi t}}\exp\left\{-\frac{(N-1)^2l^2}{a^2t}\right\}, \quad 0<x,\xi<l, \quad 0<t<+\infty. \tag{6}$$

Нетрудно установить, что при

$$N \geqslant \frac{a}{l}\sqrt{\frac{t^*}{2}}+1 \tag{7}$$

будет выполняться неравенство[1)]

$$\frac{1}{a\sqrt{\pi t}}\exp\left\{-\frac{(N-1)^2l^2}{a^2t}\right\} \leqslant \frac{1}{a\sqrt{\pi t^*}}\exp\left\{-\frac{(N-1)^2l^2}{a^2t^*}\right\} \quad \text{при} \quad 0\leqslant t\leqslant t^*. \tag{8}$$

Следовательно, при N, удовлетворяющих неравенству (7), будет удовлетворяться неравенство

$$|R_N(x,\xi,t)| \leqslant \frac{1}{a\sqrt{\pi t^*}}\exp\left\{-\frac{(N-1)^2l^2}{a^2t^*}\right\}$$
при $0\leqslant t\leqslant t^*, \quad 0\leqslant x, \quad \xi\leqslant l.$ (6')

Решая методом разделения переменных краевую задачу

$$u_t = a^2u_{xx}, \quad 0<x<l, \quad 0<t<+\infty, \tag{9}$$

[1)] Для этого в функции $\varphi(t)=\dfrac{1}{a\sqrt{\pi t}}\exp\left\{-\dfrac{(N-1)^2l^2}{a^2t}\right\}$ перейдем к новому независимому переменному $\tau=\dfrac{(N-1)l}{a\sqrt{t}}$. Мы получим

$$\varphi(t)=\frac{1}{(N-1)l\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\tau}{e^{\tau^2}}=\frac{1}{(N-1)l\sqrt{\pi}}\,\psi(\tau),$$

где

$$\psi(\tau)=\frac{\tau}{e^{\tau^2}}.$$

Так как

$$\psi'(\tau)=\frac{1-2\tau^2}{e^{\tau^2}}<0 \quad \text{при} \quad \tau>\frac{1}{\sqrt{2}},$$

то $\psi(\tau)$ монотонно убывает на отрезке $\dfrac{1}{\sqrt{2}}<\tau<+\infty$; следовательно, $\varphi(t)$ монотонно возрастает при $0<t<\dfrac{2(N-1)^2l^2}{a^2}$. Значит, при всех N, удовлетворяющих неравенству $2\dfrac{(N-1)^2}{a^2}l^2\geqslant t^*$ (т. е. неравенству (7)), будет выполняться неравенство (8).

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{10}$$

$$u(x, 0) = \delta(x), \quad 0 < x < l, \tag{11}$$

получим для функции источника выражение

$$G(x, \xi, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}\, t\right\} \sin\frac{n\pi x}{l} \sin\frac{n\pi\xi}{l}. \tag{12}$$

Хотя ряды (12) и (4) формально преобразуются друг в друга [1], однако их роль в представлении функции источника различна; если ряд (4) сходится тем быстрее, чем меньше t, то ряд (12), наоборот, сходится тем быстрее, чем больше t.

Нетрудно получить оценку погрешности, допускаемой при замене суммы ряда (12) его частичной суммой.

Мы имеем

$$|R_N(x, \xi, t)| = \left|\frac{2}{l} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}\, t\right\} \sin\frac{n\pi x}{l} \sin\frac{n\pi\xi}{l}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{l} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}\, t\right\} < \frac{2}{l} \sum_{N}^{+\infty} \exp\left\{-z^2\, \frac{\pi^2a^2}{l^2}\, t\right\} dz =$$

$$= \frac{2}{\pi a\sqrt{t}} \int\limits_{\frac{N\pi a\sqrt{t}}{l}}^{+\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi = \frac{1}{a\sqrt{\pi t}} \left[1 - \Phi\left(\frac{N\pi a\sqrt{t}}{l}\right)\right],$$

$$0 \leqslant x, \quad \xi \leqslant l, \quad 0 < t < +\infty. \tag{13}$$

Выгоднее, однако, выполнять оценку не остатка ряда, представляющего функцию влияния, а оценку остатка ряда, представляющего решение краевой задачи, полученное с помощью этой функции, так как интегрирование, вообще говоря, улучшает сходимость ряда [2].

104. Методом отражений получаем

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{\exp\left\{-\frac{(x - \xi + 2nl)^2}{4a^2t}\right\} + \right.$$

$$\left. + \exp\left\{-\frac{(x + \xi - 2nl)^2}{4a^2t}\right\}\right\}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 < t + \infty. \tag{1}$$

Схема соответствующего расположения мгновенных источников тепла мощностью $Q = c\rho$ изображена на рис. 36.

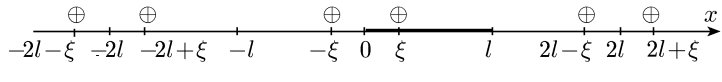


Рис. 36

[1] См. [7, с. 474–476].

[2] См. оценки, выполненные при решении задач 22, 27, 28, 29, 48 настоящей главы.

В силу соотношений (7) и (8) решения предыдущей задачи для членов ряда (1) имеем

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left\{-\frac{(x\pm\xi\pm 2nl)^2}{4a^2t}\right\}\leqslant\frac{1}{2a\sqrt{\pi t^*}}\exp\left\{-\frac{(n-1)^2l^2}{a^2t^*}\right\},\qquad(2)$$

$$0\leqslant x,\,\xi\leqslant l,\quad 0\leqslant t\leqslant t^*,\quad n\geqslant\frac{a}{l}\sqrt{\frac{t^*}{2}}+1.\qquad(3)$$

Таким образом, для остатка ряда (1) имеет место оценка

$$|R_N(x,\,\xi,\,t)|\leqslant\frac{2}{a\sqrt{\pi t^*}}\sum_{n=N+1}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{(n-1)^2l^2}{a^2t^*}\right\}<$$

$$<\frac{2}{a\sqrt{\pi t^*}}\int_N^{+\infty}\exp\left\{-\frac{l^2z^2}{a^2t^*}\right\}dz=\frac{1}{l}\left[1-\Phi\left(\frac{lN}{a\sqrt{t^*}}\right)\right],\qquad(4)$$

$$0\leqslant x,\,\xi\leqslant l,\quad 0\leqslant t\leqslant t^*,\quad N\geqslant\frac{a}{l}\sqrt{\frac{t^*}{2}}+1.\qquad(5)$$

Методом разделения переменных для этой же функции источника получается выражение

$$G(x,\,\xi,\,t)=\frac{1}{l}+\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}\,t\right\}\cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi\xi}{l}.\qquad(6)$$

Для остатка ряда (6) получается оценка

$$|R_N(x,\,\xi,\,t)|\leqslant\frac{1}{a\sqrt{\pi t}}\left\{1-\Phi\left[\frac{N\pi a\sqrt{t}}{l}\right]\right\},\qquad(7)$$

$$0\leqslant x,\,\xi\leqslant l,\quad 0<t<+\infty.\qquad(8)$$

105. Методом отражений получаем

$$G(x,\,\xi,\,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\left(\exp\left\{-\frac{(x-\xi+2nl)^2}{4a^2t}\right\}-\right.$$

$$\left.-\exp\left\{-\frac{(x+\xi+2nl)^2}{4a^2t}\right\}\right).\qquad(1)$$

Соответствующее распределение мгновенных точечных источников мощностью $Q=c\rho$ и $-Q$ изображено на рис. 37.

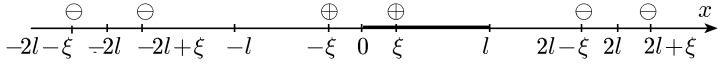


Рис. 37

Метод разделения переменных дает

$$G(x,\,\xi,\,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=0}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2}{4l^2}\,t\right\}\cos\frac{(2n+1)\pi\xi}{2l}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}.\qquad(2)$$

Оценка погрешности, допускаемой при замене суммы ряда (1) его частичной суммой, выполняется либо с помощью неравенств, аналогич-

ных неравенствам (4) и (5) из решения предыдущей задачи (грубая оценка), либо аналогично тому, как это было сделано в решении задачи 103 (более точная оценка). Для остатка ряда (2) получаем оценку

$$|R_N(x,\,\xi,\,t)| \leqslant \frac{1}{a\sqrt{\pi t}}\left\{1-\Phi\left[\frac{(2N+1)\pi a\sqrt{t}}{2l}\right]\right\}.$$

106. а) Если N удовлетворяет неравенствам

$$N \geqslant \frac{a}{l}\sqrt{\frac{t^*}{2}}+1, \tag{1}$$

$$N > \frac{a}{l}\sqrt{t^*\ln[2\varepsilon a\sqrt{\pi t^*}]}+1, \tag{2}$$

то для остатка ряда (2) решения задачи 103 будет выполняться неравенство

$$|R_N(x,\,\xi,\,t)| \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x,\,\xi \leqslant l, \quad 0 \leqslant t \leqslant t^*. \tag{3}$$

б) Если N удовлетворяет неравенству

$$\Phi\left(\frac{N\pi a\sqrt{t^*}}{l}\right) \geqslant 1-\varepsilon\pi a\sqrt{t^*}, \tag{4}$$

то для остатка ряда (12) решения задачи 103 будет выполняться неравенство

$$|R_N(x,\,\xi,\,t)| \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x,\,\xi \leqslant l, \quad t^* \leqslant t < +\infty. \tag{5}$$

Замечание. Неравенства (1), (2), (4) позволяют при заданном N найти такое t^*, чтобы выполнялись соотношения (3) и (5).

107. а) Если N удовлетворяет неравенствам

$$N \geqslant \frac{a}{l}\sqrt{\frac{t^*}{2}}+1, \tag{1}$$

$$\Phi\left(\frac{lN}{a\sqrt{t^*}}\right) \geqslant 1-\varepsilon l, \tag{2}$$

то для остатка ряда (1) задачи 104 выполняется неравенство

$$|R_N(x,\,\xi,\,t)| \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x,\,\xi \leqslant l, \quad 0 \leqslant t \leqslant t^*.$$

б) Если N удовлетворяет неравенству

$$\Phi\left(\frac{N\pi a\sqrt{t^*}}{l}\right) \geqslant 1-\varepsilon\pi a\sqrt{t^*},$$

то для остатка ряда (6) задачи 104 выполняется неравенство

$$|R_N(x,\,\xi,\,t)| \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x,\,\xi \leqslant l, \quad t^* \leqslant t < +\infty.$$

108. Представления для функций источника получаются из представлений, найденных в решении задач 103, 104, 105, умножением на e^{-ht}, где h — коэффициент теплообмена, входящий в уравнение $u_t = a^2u_{xx} - hu$.

109. Р е ш е н и е. Заменим в решении $u(x,\,t)$ уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,\,t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

x и t на ξ и τ; заменим, далее, в функции источника $G(x,\,\xi,\,t)$ t на $t-\tau$, $0<\tau<t$.

Интегрируя равенство

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(Gu) = G\frac{\partial u}{\partial\tau} + u\frac{\partial G}{\partial\tau} = a^2\left[G\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} - u\frac{\partial^2 G}{\partial\xi^2}\right] + Gf\ ^{1)}$$

по ξ от нуля до l и по τ от нуля до $t-\alpha$, $0<\alpha<t$, получим

$$\int_0^l (Gu)_{\tau=t-\alpha}\,d\xi = \int_0^l (Gu)_{\tau=0}\,d\xi + \\ + a^2\int_0^{t-\alpha}\left\{\left(G\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)_{\xi=0}^{\xi=l} - \left(u\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)_{\xi=0}^{\xi=l}\right\}d\tau + \int_0^{t-\alpha}d\tau\int_0^l Gf\,d\xi. \tag{2}$$

Переходя в равенстве (2) к пределу при $\alpha\to 0$ [2)], получим интегральную формулу

$$u(x,\,t) = \int_0^l (Gu)_{\tau=0}\,d\xi + a^2\int_0^l\left\{\left(G\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)_{\xi=0}^{\xi=l} - \left(u\frac{\partial G}{\partial\xi}\right)_{\xi=0}^{\xi=l}\right\}d\tau + \\ + \int_0^t d\tau\int_0^l Gf(\xi,\,\tau)\,d\xi. \tag{3}$$

Эта интегральная формула имеет общее значение для функций источника, удовлетворяющих различным условиям. Если теперь воспользоваться начальными и граничными условиями для u

$$u(0,\,\tau) = \varphi(\tau), \quad u(l,\,\tau) = 0, \quad 0<\tau<+\infty, \tag{4}$$

$$u(\xi,\,0) = f(\xi), \quad 0<\xi<l, \tag{5}$$

и граничными условиями для $G(x,\,\xi,\,t-\tau)$

$$G(x,\,0,\,t-\tau) = 0, \quad G(x,\,l,\,t-\tau) = 0, \quad 0<x<l, \quad 0<\tau<t, \tag{6}$$

то из интегральной формулы (6) получится следующее представление решения краевой задачи с помощью функции источника

$$u(x,\,t) = \int_0^l f(\xi)G(x,\,\xi,\,t)\,d\xi + a^2\int_0^l\varphi(\tau)\,\frac{\partial G(x,\,0,\,t-\tau)}{\partial\xi}\,d\tau + \\ + \int_0^t d\tau\int_0^l f(\xi,\,\tau)G(x,\,\xi,\,t-\tau)\,d\xi.$$

[1)] Это равенство получается так же, как равенство (1) решения задачи 68.

[2)] Предельный переход в левой части равенства (2) может быть выполнен с помощью рассуждений, аналогичных приведенным в [7, с. 230–233].

Используя два различных представления для функции источника $G(x,\,\xi,\,t-\tau)$ (см. решение задачи 103), получим два различных представления для решения нашей краевой задачи:

а) $$u(x,\,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\times$$

$$\times\int_0^l f(\xi)\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\exp\left\{-\frac{(x-\xi+2nl)^2}{4a^2t}\right\}-\exp\left\{-\frac{(x+\xi+2nl)^2}{4a^2t}\right\}\right)\right\}d\xi+$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{(x+2nl)\exp\left\{-\frac{(x+2nl)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\right\}d\tau+$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_0^l f(\xi,\,\tau)\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\exp\left\{-\frac{(x-\xi+2nl)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\exp\left\{-\frac{(x+\xi+2nl)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\right)\right\}d\xi;$$

б) $$u(x,\,t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\left\{\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}\,t\right\}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,\sin\frac{n\pi x}{l}\right\}d\xi+$$

$$+\frac{2\pi a^2}{l^2}\sum_{n=1}^{+\infty}n\left\{\int_0^t\varphi(\tau)\exp\left\{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}\,(t-\tau)\right\}d\tau\right\}\sin\frac{n\pi x}{l}+$$

$$+\frac{2}{l}\int_0^t d\tau\int_0^l f(\xi,\,\tau)\left\{\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}\,(t-\tau)\right\}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,\sin\frac{n\pi x}{l}\right\}d\xi.$$

Представление а), вообще говоря, выгоднее при малых t, представление б) — при больших t.

110. $$u(x,\,t)=\int_0^l f(\xi)G(x,\,\xi,\,t)d\xi-a^2\int_0^l\varphi(\tau)G(x,\,0,\,t-\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^l f(\xi,\,\tau)G(x,\,\xi,\,t-\tau)d\xi,\qquad(1)$$

где $G(x,\,\xi,\,t-\tau)$ — функция источника, полученная в решении задачи 104. Если в равенство (1) подставить два различных представления для функции источника, то получается два различных представления для решения нашей краевой задачи.

111. $$u(x,\,t)=U_0\sum_{a=-\infty}^{+\infty}\left\{\left[1-\Phi\left(\frac{|x+2nl|}{2a\sqrt{t}}\right)\right]\operatorname{sign}(x+2nl)\right\}.$$

112. $$u(x,\,t)=$$

$$=q_0\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{2a\sqrt{\frac{t}{\pi}}\,\exp\left\{-\frac{(x+2nl)^2}{4a^2l}\right\}-|x+2nl|\cdot\left[1-\Phi\left(\frac{|x+2nl|}{2a\sqrt{t}}\right)\right]\right\}.$$

3. Неоднородные среды и сосредоточенные факторы; уравнения с кусочно постоянными коэффициентами и условия сопряжения.

113.
$$u(x,\,t)=\begin{cases}U_0+(U_0-U_1)\Phi\left(\dfrac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right), & -\infty<x\leqslant 0,\\[2ex] U_0+(U_0-U_2)\Phi\left(\dfrac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right), & 0\leqslant x<+\infty,\end{cases}\qquad 0<t<+\infty;$$

$$U_0=\frac{U_1\dfrac{k_1}{a_1}+U_2\dfrac{k_2}{a_2}}{\dfrac{k_1}{a_1}+\dfrac{k_2}{a_2}}.$$

Указание. Задачу можно решить с помощью следующего искусственного приема.

Нужно продолжить левый стержень неограниченно вправо так, чтобы получился неограниченный однородный стержень из того же материала, что и левый полуограниченный стержень. Затем нужно найти температуру полученного неограниченного стержня при условии, что его начальная температура равна U_1 при $-\infty<x<0$ и U_1^* при $0<x<+\infty$, где U_1^* — пока неопределенная константа. Аналогично нужно поступить с правым полуограниченным стержнем. Константы U_1^* и U_2^* находятся из граничных условий (условий сопряжения) в точке $x=0$.

114. $u(x,\,t)=\begin{cases}u_1(x,\,t), & -\infty<x<0,\\ u_2(x,\,t), & 0<x<+\infty,\end{cases}\qquad 0<t<+\infty,$

$$u_1(x,\,t)=\frac{1}{2a_1\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{0}f_1(\xi)\left\{\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a_1^2t}\right\}+\exp\left\{-\frac{(x+\xi)^2}{4a_1^2t}\right\}\right\}d\xi+$$
$$+\frac{a_1}{k_1\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4a_1^2(t-\tau)}\right\}d\tau,$$

$$u_2(x,\,t)=\frac{1}{2a_2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{0}^{+\infty}f_2(\xi)\left\{\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a_2^2t}\right\}+\exp\left\{-\frac{(x+\xi)^2}{4a_2^2t}\right\}\right\}d\xi-$$
$$-\frac{a_2}{k_2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4a_2^2(t-\tau)}\right\}d\tau,$$

$$\varphi(\tau)=\frac{1}{\pi}\frac{d}{d\tau}\int\limits_0^\tau\frac{\Phi(z)}{\sqrt{\tau-z}}\,dz,$$

$$\Phi(z)=\left[\frac{1}{a_2\sqrt{z}}\int\limits_0^{+\infty}f_2(\xi)\exp\left\{-\frac{\xi^2}{4a_2^2z}\right\}d\xi-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{a_1\sqrt{z}}\int\limits_{-\infty}^{0}f_1(\xi)\exp\left\{-\frac{\xi^2}{4a_1^2z}\right\}d\xi\right]\frac{1}{\dfrac{k_1}{a_1}+\dfrac{k_2}{a_2}}.$$

Указание. Функции $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ должны быть соответственно решениями уравнений теплопроводности $u_{1t} = a_1^2 u_{1xx}$ и $u_{2t} = a_2^2 u_{2xx}$ и удовлетворять условиям сопряжения

$$u_1(0, t) = u_2(0, t), \quad k_1 u_{1x}(0, t) = k_2 u_{2x}(0, t).$$

Полагая

$$\varphi(t) = k_1 u_{1x}(0, t) = k_2 u_{2x}(0, t)$$

и решая задачу теплопроводности с заданным граничным условием второго рода для полуограниченного стержня $-\infty < x < 0$ и для полуограниченного стержня $0 < x < +\infty$, мы выразим $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ через начальные условия и через пока еще неизвестную функцию $\varphi(t)$. Используя первое условие сопряжения $u_1(0, t) = u_2(0, t)$, мы получим интегральное уравнение Абеля для определения функции $\varphi(t)$:

$$\int_0^z \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\sqrt{t - \tau}} = \Phi(z).$$

Решением этого уравнения является[1)]

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{d\tau} \int_0^\tau \frac{\Phi(z)}{\sqrt{\tau - z}}\, dz.$$

Если $\Phi'(z)$ существует и непрерывна[2)] при $0 \leqslant z < +\infty$, то, выполняя в правой части последнего равенства сначала интегрирование по частям, а затем дифференцирование, получим

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\tau \frac{\Phi'(z)}{\sqrt{\tau - z}}\, dz + \frac{\Phi(+0)}{\pi \sqrt{\tau}}.$$

Эта формула может быть применена, в частности, если

$$\Phi(z) \equiv \text{const}.$$

В этом случае $\Phi'(z) \equiv 0$ и $\varphi(\tau) = \dfrac{\Phi(+0)}{\pi \sqrt{\tau}}$.

115. Решением краевой задачи

$$\frac{\partial G_1}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2}, \quad 0 < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1'}$$

$$G_1 = G_2, \quad \lambda_1 \frac{\partial G_1}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial G_2}{\partial x} \quad \text{при} \quad x = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$\lim_{t \to \infty} G_1 = 0, \quad -\infty < x < 0, \tag{3}$$

$\lim\limits_{t \to 0} G_2 = 0$, $0 < x < +\infty$, $x \neq \xi$; в точке $x = \xi$ при $t \to 0$ G_2 имеет

[1)] См., например, [2, т. II, § 79].

[2)] При надлежащих ограничениях на f_1 и f_2 это будет выполнено.

особенность

$$\frac{1}{2a_2\sqrt{\pi t}}\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a_2^2t}\right\}, \tag{3'}$$

является

$$G_1(x,\xi,t)=\frac{2\dfrac{\lambda_2}{a_2}}{\dfrac{\lambda_1}{a_1}+\dfrac{\lambda_2}{a_2}}\,\frac{1}{2a_2\sqrt{\pi t}}\exp\left\{-\frac{\left(x-\dfrac{a_1}{a_2}\,\xi\right)^2}{4a_2^2t}\right\} \quad \text{при} \quad -\infty<x<0, \tag{4}$$

$$G_2(x,\xi,t)=\frac{1}{2a_2\sqrt{\pi t}}\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a_2^2t}\right\}+\frac{\dfrac{\lambda_2}{a_2}-\dfrac{\lambda_1}{a_1}}{\dfrac{\lambda_2}{a_2}+\dfrac{\lambda_1}{a_1}}\,\frac{\exp\left\{-\dfrac{(x+\xi)^2}{4a_2^2t}\right\}}{2a_2\sqrt{\pi t}} \quad \text{при} \quad 0<x<+\infty. \tag{4'}$$

Р е ш е н и е. Перейдем к безразмерным величинам (см. решение задачи 18 настоящей главы), причем так, чтобы уравнение теплопроводности для правого и левого стержней имело вид $u_t=a^2u_{\xi\xi}$. Мы имеем $x=l'\xi$, $-\infty<\xi<0$,

$$x=l''\xi, \quad 0<\xi<+\infty, \quad t=\tau, \quad l'=a_1, \quad l''=a_2\ ^{1}).$$

Граничные условия (2) принимают вид

$$u_1(0,\tau)=u_2(0,\tau), \tag{5}$$

$$\frac{\lambda_1}{a_1}\,\frac{\partial u_1(0,\tau)}{\partial\xi}=\frac{\lambda_2}{a_2}\,\frac{\partial u_2(0,\tau)}{\partial\xi}. \tag{6}$$

Будем искать решение при $-\infty<\xi<0$ как «преломленную» на границе раздела $\xi=0$ функцию $\dfrac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\exp\left\{-\dfrac{(\xi-\xi_0)^2}{4\tau}\right\}$, т. е. как функцию, имеющую вид

$$\alpha_1\,\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\exp\left\{-\frac{(\xi-\xi_0)^2}{4\tau}\right\}, \tag{7}$$

а решение при $0<\xi<+\infty$ — как сумму $\dfrac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\exp\left\{-\dfrac{(\xi-\xi_0)^2}{4\tau}\right\}$ и слагаемого, представляющего собой результат «отражения» на границе раздела $\xi=0$ функции $\dfrac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\exp\left\{-\dfrac{(\xi-\xi_0)^2}{4\tau}\right\}$, т. е. в виде

$$u_2(\xi,\tau)=\alpha_2\,\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\exp\left\{-\frac{(\xi-\xi_0)^2}{4\tau}\right\}+\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\exp\left\{-\frac{(\xi-\xi_0)^2}{4\tau}\right\}. \tag{8}$$

Подставляя (7) и (8) в (5) и (6), найдем α_1 и α_2, что и приведет к ответу (если вернуться к прежним единицам измерения).

116. Решением краевой задачи

$$u_t=a^2u_{xx}, \quad 0<x, \quad t<+\infty, \tag{1}$$

$$c_0u_t(0,t)=\lambda Su_x(0,t), \quad 0<t<+\infty, \tag{2}$$

$$u(x,0)=f(x), \quad 0<x<+\infty, \tag{3}$$

[1]) Речь идет о численном равенстве, а не о совпадении размерностей.

является

$$u(x,\,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(\xi)\exp\Big\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\Big\}\,d\xi,$$

где

$$F(x)=\begin{cases}\overline{f}(x) & \text{при}\quad -\infty<x<0,\\ f(x) & \text{при}\quad 0<x<+\infty,\end{cases}$$

$$\overline{f}(x)=\frac{e^{\alpha^2x}-1}{\alpha^2}\,f'(+0)+f(+0)+\int\limits_0^x dz\int\limits_0^z\big\{f''(-\xi)+\alpha^2f'(-\xi)\big\}e^{-\alpha^2(\xi-z)}d\xi,$$

$$\alpha^2=\frac{\lambda S}{a^2C_0},$$

λ — коэффициент теплопроводности стержня, S — площадь поперечного сечения, a^2 — коэффициент температуропроводности стержня.

У к а з а н и е. Воспользоваться утверждением, сформулированным в задаче 82.

117. Решением краевой задачи

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u_1}{\partial t}=a_1^2\,\frac{\partial^2u_1}{\partial x^2},\quad 0<x<\xi(t),\\ &\frac{\partial u_2}{\partial t}=a_2^2\,\frac{\partial^2u_2}{\partial x^2},\quad \xi(t)<x<+\infty,\end{aligned}\right\}\quad 0<t<+\infty,\tag{1}$$

$$u_1(\xi(t),\,t)=u_2(\xi(t),\,t),\quad u_1(0,\,t)=U_1,\quad u_2(+\infty,\,t)=U_2,\tag{2}$$

где температура замерзания принята за нуль, $x=\xi(t)$ — координаты фронта промерзания

$$\Big(k_1\,\frac{\partial u_1}{\partial x}-k_2\,\frac{\partial u_2}{\partial x}\Big)_{x=\xi(t)}=Q\rho\,\frac{d\xi}{dt},\quad 0<t<+\infty,\tag{2'}$$

Q — скрытая теплота плавления, ρ — плотность массы жидкости,

$$u_2(x,\,0)=U_2,\quad 0<x<+\infty,\tag{3}$$

является

$$u_1(x,\,t)=A_1+B_1\Phi\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right),\tag{4}$$

$$u_2(x,\,t)=A_2+B_2\Phi\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right),\tag{4'}$$

где

$$A_1=U_1,\quad B_1=-\frac{U_1}{\Phi\Big(\dfrac{\alpha}{2a_1}\Big)},\quad A_2=-\frac{U_2\Phi\Big(\dfrac{\alpha}{2a_2}\Big)}{1-\Phi\Big(\dfrac{\alpha}{2a_2}\Big)},\quad B_2=\frac{U_2}{1-\Phi\Big(\dfrac{\alpha}{2a_2}\Big)},\tag{5}$$

α — корень трансцендентного уравнения

$$\frac{k_1U_1\exp\Big\{-\dfrac{\alpha^2}{4a_1^2}\Big\}}{a_1\Phi\Big(\dfrac{\alpha}{2a_1}\Big)}+\frac{k_2U_2\exp\Big\{-\dfrac{\alpha^2}{4a_2^2}\Big\}}{a_2\left[1-\Phi\Big(\dfrac{\alpha}{2a_2}\Big)\right]}=-Q\rho\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\alpha.\tag{6}$$

Глава IV

УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

§ 1. Физические задачи, приводящие к уравнениям эллиптического типа, и постановка краевых задач

1. Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в однородной среде.

1. Уравнение для температуры стационарного теплового поля в однородной изотропной среде имеет вид

$$\Delta u = -f(x, y, z), \tag{1}$$

где $f = \dfrac{F}{k}$, F — плотность источников тепла, т. е. количество тепла, выделяющегося в единице объема в единицу времени, k — коэффициент теплопроводности.

Краевое условие первого рода

$$u\big|_{\Sigma} = f_1$$

означает, что на поверхности Σ задана температура $\overline{f}_1$; условие второго рода

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Sigma} = f_2, \quad \text{или} \quad -k\,\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Sigma} = f_2 \quad (\overline{f}_2 = -f_2 k),$$

— на Σ задан тепловой поток величины $\overline{f}_2$; краевое условие третьего рода

$$\frac{\partial u}{\partial n} + hu\Big|_{\Sigma} = f_3, \quad \text{или} \quad -k\,\frac{\partial u}{\partial n} = \overline{h}(u - \overline{f}_3), \quad \overline{h} = kh, \quad \overline{f}_3 = \frac{f_3}{\overline{h}},$$

— на Σ происходит теплообмен по закону Ньютона со средой температуры $\overline{f}_3$.

Необходимым условием существования стационарной температуры для второй краевой задачи является выполнение равенства $\int\limits_{\Sigma} f_2 d\sigma = 0$, т. е. суммарный поток тепла через поверхность Σ должен быть равен нулю. Неравномерное распределение температуры вызывает тепловой поток, величина которого по закону Фурье равна $\boldsymbol{Q} = -k \operatorname{grad} u$. Проекция его на направление n, очевидно, равна $Q_n = -k\,\dfrac{\partial u}{\partial n}$.

Р е ш е н и е. При выводе уравнения (1) следует написать условие теплового баланса для произвольного объема и затем воспользоваться формулой Остроградского.

Уравнение теплового баланса для объема T с границей Σ, очевидно, имеет вид

$$\int\limits_{\Sigma} \left(-k\,\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma = \int\limits_{T} F\,d\tau; \tag{2}$$

слева — суммарный поток через Σ, справа — количество тепла, выделяющегося в объеме T.

Формула Остроградского дает

$$\int\limits_{T} \operatorname{div}(k\operatorname{grad} u)\,d\tau = -\int\limits_{T} F\,d\tau, \tag{3}$$

откуда в силу произвольности объема T и постоянства k получаем уравнение (1).

2. а) Уравнение диффузии в покоящейся среде есть

$$\Delta u = 0, \tag{1}$$

где $u(x,\,y,\,z)$ — концентрация.

б) Если среда движется со скоростью $\boldsymbol{v} = (v_x,\,v_y,\,v_z)$, причем $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$, то уравнение диффузии принимает вид

$$D\Delta u - v_x\,\frac{\partial u}{\partial x} - v_y\,\frac{\partial u}{\partial y} - v_z\,\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \tag{2}$$

где D — коэффициент диффузии, $v_x,\ v_y,\ v_z$ — проекции скорости $\boldsymbol{v}$ на координатные оси.

Если $v_x = v$, $v_y = v_z = 0$, то уравнение (2) принимает вид

$$\Delta u - \frac{v}{D}\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{3}$$

или

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - \frac{v}{D}\,u_x = 0$$

(уравнение газовой атаки).

У к а з а н и е. Диффузионный поток вещества при неравномерном распределении концентрации равен

$$\boldsymbol{Q} = -D\operatorname{grad} u. \tag{4}$$

Кроме диффузионного потока надо учесть поток переноса (трансляционный поток), равный

$$u\boldsymbol{v},$$

так что суммарный поток равен

$$-D\operatorname{grad} u + u\boldsymbol{v}.$$

Для вывода уравнений (1) и (2) следует воспользоваться законом сохранения вещества для произвольного объема и затем применить формулу Остроградского (см. решение задачи 1).

Закон сохранения вещества для неподвижной поверхности Σ запишется так:

$$\int\limits_{\Sigma} \left(-D\,\frac{\partial u}{\partial n} + v_n u\right) d\sigma = 0,$$

или

$$\int\limits_{T} [\operatorname{div}(D \operatorname{grad} u) - \operatorname{div}(\boldsymbol{v}u)]\, d\tau = 0,$$

откуда ввиду произвольности объема T, а также условия $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$ и следует уравнение (2).

3. Уравнение для потенциала u электрического поля в пустоте имеет вид

$$\Delta u = -4\pi\rho,$$

где ρ — объемная плотность зарядов.

Физический смысл краевых условий первого и второго рода: $u\big|_{\Sigma} = f$ — задан потенциал на поверхности Σ, $\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Sigma} = f$ — задана плотность поверхностных зарядов.

Р е ш е н и е. Уравнения, которым удовлетворяет поле стационарных распределенных зарядов, получаются из уравнений Максвелла, если все производные по времени положить равными нулю. Для электростатического поля в непроводящей среде получаем

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 4\pi\rho, \quad \boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \tag{2}$$

где ε — диэлектрическая постоянная среды, $\rho = \rho(M)$ — объемная плотность зарядов в точке M.

Из уравнения $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0$ следует, что $\boldsymbol{E}$ — потенциальный вектор, представимый в виде

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} u,$$

где $u = u(M)$ — потенциал поля.

Уравнение (2) дает

$$\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} u) = -4\pi\rho.$$

Если $\varepsilon = \text{const}$, то для u получаем уравнение

$$\Delta u = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon};$$

в пустоте $\varepsilon = 1$, и мы будем иметь

$$\Delta u = -4\pi\rho.$$

Если имеются проводящие поверхности, то на них тангенциальная составляющая электрического поля должна быть равна нулю:

$$E_s = -\frac{\partial u}{\partial s} = 0,$$

где $\dfrac{\partial}{\partial s}$ означает дифференцирование по тангенциальному направлению на поверхности. Отсюда следует, что на поверхности проводника потенциал постоянен:

$$u = \text{const};$$

внутри проводника $u = \text{const}$ и $\boldsymbol{E} \equiv 0$.

Если проводник заземлен, то потенциал

$$u = 0.$$

Плотность поверхностных зарядов вычисляется по формуле

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} D_n = -\frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial u}{\partial n}, \tag{3}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial n}$ означает дифференцирование по нормали к поверхности. Задавая распределение поверхностных зарядов на проводнике, мы получаем условие

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Sigma} = f, \quad f = -\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}.$$

Однако такая постановка задачи является неестественной для электростатики; обычно известен полный заряд e на поверхности. Поэтому ищется решение уравнения $\Delta u = -4\pi\rho$ при краевом условии $u\big|_{\Sigma} = u_0$, где u_0 определяется из условия нормировки решения по заряду

$$-\int\limits_{\Sigma} \varepsilon \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma = 4\pi e, \quad \text{где} \quad e = \int\limits_{\Sigma} \rho\, d\tau \quad \text{(см. задачу 7)}.$$

4. Вектор напряженности магнитного поля равен $\boldsymbol{H} = -\operatorname{grad}\varphi$, потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0.$$

Р е ш е н и е. Если магнитное поле не меняется во времени и токи отсутствуют, то оно должно определяться уравнениями

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = 0, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0. \tag{2}$$

Из уравнения (1) следует

$$\boldsymbol{H} = -\operatorname{grad}\varphi;$$

подставляя это выражение в формулу (2) и учитывая однородность и изотропность среды ($\mu = \text{const}$), получаем уравнение Лапласа.

5. Поскольку вектор электрического поля $\boldsymbol{E}$ потенциален, то

$$\Delta u = 0,$$

а на заземленной идеально проводящей поверхности

$$u\big|_{\Sigma} = 0,$$

на границе с диэлектриком

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Sigma} = 0.$$

Р е ш е н и е. Будем исходить из уравнений Максвелла в проводящей среде в стационарном случае

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, \\ &\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0, \\ &\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\rho, \\ &\operatorname{div} \mu\boldsymbol{H} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Применяя операцию div к первому уравнению, для плотности тока j получаем уравнение

$$\operatorname{div} j = 0. \tag{2}$$

Из уравнений $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0$ следует потенциальность вектора $\boldsymbol{E}$,

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} u,$$

где $u = u(M)$ — скалярный потенциал.

Так как в силу дифференциального закона Ома

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E} \quad (\sigma \text{ — проводимость}) \tag{3}$$

или

$$\boldsymbol{j} = -\sigma \operatorname{grad} u,$$

то для однородной изотропной среды ($\sigma = \text{const}$) условие (2) дает

$$\Delta u = 0.$$

Из уравнений (1) и (3) следует, что $\rho = 0$ внутри проводника.

1) На заземленной идеально проводящей поверхности потенциал $u = 0$ (граничное условие первого рода).

2) Если проводник граничит с диэлектриком, то на границе раздела нормальная составляющая плотности тока должна быть равна нулю:

$$j_n = -\sigma \frac{\partial u}{\partial n} = 0,$$

т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

(граничное условие второго рода).

6. Если φ — потенциал скоростей стационарного потока несжимаемой жидкости, так что

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \varphi,$$

то потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi = 0.$$

На поверхности твердого тела, движущегося с некоторой скоростью $\boldsymbol{v}_0$, должно выполняться условие

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_{\Sigma} = v_{0n}.$$

Если тело покоится, то

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_{\Sigma} = 0.$$

Если среда простирается неограниченно, то на бесконечности при $r \to \infty$ потенциал φ должен удовлетворять обычному условию регулярности.

Р е ш е н и е. Если жидкость несжимаема, то ее плотность $\rho = \text{const}$. Из уравнения непрерывности (сохранения вещества)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0$$

получаем условие несжимаемости

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0.$$

Так как по условию скорость жидкости имеет потенциал

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\varphi,$$

то $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = 0$ или $\Delta\varphi = 0$.

7. Первая основная задача электростатики ставится как первая внешняя краевая задача.

Требуется найти функцию φ, удовлетворяющую уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$ всюду вне заданной системы проводников, обращающуюся в нуль на бесконечности и принимающую заданные значения φ_i на поверхностях проводников:

$$\varphi\big|_{\Sigma_i} = \varphi_i.$$

Вторая основная задача электростатики ставится так.

Требуется найти функцию φ, удовлетворяющую уравнению Лапласа $\Delta\varphi_0 = 0$ вне заданной системы проводников, обращающуюся в нуль на бесконечности, принимающую на поверхностях проводников некоторые постоянные значения

$$\varphi\big|_{\Sigma_i} = \varphi_i$$

и удовлетворяющую интегральным соотношениям на поверхностях проводников

$$\oint\limits_{\Sigma_i} \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\sigma = -4\pi e_i,$$

где e_i — полный заряд i-го проводника.

Если задан один проводник T_0 с поверхностью Σ_0, то решение второй задачи электростатики может быть представлено в виде

$$\varphi = \varphi_0 V(x,\, y,\, z),$$

где $V(x,\, y,\, z)$ — решение первой внешней краевой задачи для области, внешней к проводнику T_0, при условии $V = 1$ на Σ_0; множитель φ_0 определяется из условия нормировки

$$\oint\limits_{\Sigma_0} \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\sigma = -4\pi e_0$$

и равен

$$\varphi_0 = -\frac{e_0}{\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int\limits_{\Sigma_0} \frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma} = \frac{e_0}{C},$$

где $C = -\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int\limits_{\Sigma_0} \frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma$ — емкость проводника.

2. Краевые задачи для уравнения Лапласа в неоднородных средах.

8. Стационарное распределение температуры удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = -F(M),$$

где $k = k(M)$ — коэффициент теплопроводности, $F(M)$ — плотность источников тепла в точке M.

Пусть T — некоторый объем с границей Σ, на которой задана, например, температура

$$u\big|_{\Sigma} = f.$$

Если коэффициент $k(x, y, z)$ кусочно-постоянен и терпит разрывы на некоторой поверхности Σ_1, так что

$$k = k_1 = \text{const} \quad \text{в} \quad T_1,$$
$$k = k_2 = \text{const} \quad \text{в} \quad T_2 \quad (T = T_1 + T_2),$$

то на Σ_1 должны выполняться условия сопряжения

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= u_2, \\ k_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} &= k_2 \frac{\partial u_2}{\partial n}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

первое из которых означает непрерывность температуры, а второе — непрерывность теплового потока на поверхности разрыва.

Задача в этом случае ставится так:

$$\Delta u_1 = -\frac{F}{k_1} \quad \text{в} \quad T_1,$$
$$\Delta u_2 = -\frac{F}{k_2} \quad \text{в} \quad T_2,$$
$$u\big|_{\Sigma} = f,$$

и на Σ_1 имеют место условия сопряжения для u_1 и u_2.

Р е ш е н и е. Уравнение выводится так же, как и в задаче 1.

Первое условие сопряжения $u_1 = u_2$ очевидно; второе условие $k_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial n} = k_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial n}$ можно получить, применяя уравнение баланса к бесконечно малому цилиндру T_ε высоты $2h$, построенному на элементе $d\sigma$ поверхности Σ_1 по обе стороны от нее, и переходя затем к пределу при $h \to 0$.

Как уже отмечалось в решении задачи 1, уравнение теплового баланса имеет вид

$$\int\limits_{\Sigma} \left(-k \frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma = \int\limits_{T} F \, d\tau, \tag{2}$$

откуда в силу произвольности объема T и следует уравнение $\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = F$. Применяя (2) к цилиндру T_ε, получим (рис. 38)

$$-\left(-k \frac{\partial u}{\partial n}\right)_{S_1} d\sigma + \left(-k \frac{\partial u}{\partial n}\right)_{S_2} d\sigma + \int\limits_{S_3} \left(-k \frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma = \int\limits_{T} F \, d\tau,$$

где S_1 — левое, а S_2 — правое основание цилиндра, S_3 — его боковая поверхность. При предельном переходе $h \to 0$ интегралы исчезают,

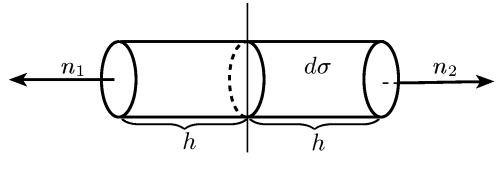


Рис. 38

так как $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ и F ограничены всюду. Предполагая существование левого и правого предельных значений $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ на Σ_1, получаем

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} + k_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_2} = 0;$$

выбирая одно направление нормали $\boldsymbol{n}_2 = -\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{n}$, можно написать

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \quad \text{на} \quad \Sigma_1.$$

9. В неоднородном диэлектрике для потенциала электростатического поля имеем

$$\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} u) = -4\pi\rho. \tag{1}$$

Если на поверхности разрыва $\varepsilon(x, y, z)$ нет поверхностных зарядов, то можно написать

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= u_2, \\ \varepsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} &= \varepsilon_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \end{aligned}\right\} \quad \text{на поверхности разрыва } \varepsilon,$$

где цифры 1 и 2 соответствуют значениям величин по разные стороны поверхности разрыва.

Если

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \text{const} \quad \text{в} \quad T_1, \\ \varepsilon_2 &= \text{const} \quad \text{в} \quad T_2, \end{aligned}$$

где T_1 и T_2 — области, разделенные поверхностью Σ_1, то для потенциала

$$u = \begin{cases} u_1 & \text{в} \quad T_1, \\ u_2 & \text{в} \quad T_2 \end{cases}$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta u_1 &= -4\pi\rho \quad \text{в} \quad T_1, \\ \Delta u_2 &= -4\pi\rho \quad \text{в} \quad T_2, \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= u_2, \\ \varepsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} &= \varepsilon_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \end{aligned}\right\} \quad \text{на} \quad \Sigma_1.$$

Второе условие сопряжения означает непрерывность нормальной составляющей вектора электрической индукции

$$\boldsymbol{D} = -\varepsilon \operatorname{grad} u, \quad D_n = -\varepsilon \frac{\partial u}{\partial n}.$$

Указание. Для вывода уравнения следует исходить из уравнений Максвелла (см. решение задачи 3), считая там ε функцией пространственных переменных. Вывод условий сопряжения см. в задаче 8.

При решении задачи 3 мы имеем

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= -\operatorname{grad} u, \\ \operatorname{div} \varepsilon \boldsymbol{E} &= 4\pi\rho. \end{aligned}$$

Отсюда и следует уравнение (1).

Условия сопряжения выводятся так же, как и в задаче 8. Отметим лишь, что при наличии поверхностных зарядов на Σ_1

$$D_{1n} - D_{2n} = 4\pi\sigma,$$

или

$$\varepsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} = 4\pi\sigma,$$

где σ — плотность поверхностных зарядов на Σ_1.

10. Если $\boldsymbol{H} = -\operatorname{grad}\varphi$, то в стационарном случае

$$\operatorname{div}(\mu \operatorname{grad}\varphi) = 0,$$

где $\varphi = \varphi(P)$ — скалярный потенциал, $\mu = \mu(P)$ — магнитная проницаемость среды в точке P.

Условия сопряжения на поверхности разрыва коэффициента магнитной проницаемости имеют вид

$$u_1 = u_2, \quad \mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \quad \text{на} \quad \Sigma_1,$$

где цифры 1 и 2 соответствуют значениям величин на разных сторонах поверхности разрыва Σ_1.

Второе условие означает непрерывность нормальной составляющей вектора магнитной индукции на Σ_1:

$$B_{1n} = B_{2n}.$$

Краевая задача для кусочно постоянного

$$\mu = \begin{cases} \mu_1 & \text{в} \quad T_1, \\ \mu_2 & \text{в} \quad T_2 \end{cases}$$

ставится по аналогии с задачами 8 и 9:

$$\Delta u_1 = 0 \quad \text{в} \quad T_1,$$
$$\Delta u_2 = 0 \quad \text{в} \quad T_2,$$

а на Σ_1 — условие сопряжения.

Указание. См. задачу 9.

11. В среде с переменной проводимостью $\sigma = \sigma(x, y, z)$ для потенциала электрического поля постоянного тока имеет место уравнение

$$\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} u) = 0.$$

Если Σ — поверхность разрыва σ, то

$$u_1 = u_2, \quad \sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \quad \text{на} \quad \Sigma;$$

второе условие означает непрерывность нормальной составляющей плотности тока на поверхности Σ: $j_{1n} = j_{2n}$, поскольку

$$\boldsymbol{j} = -\sigma \operatorname{grad} u.$$

Указание. См. задачи 5, 8, 9, 10.

Учитывая соотношения

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} u,$$
$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E},$$
$$\operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0,$$

получаем

$$\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} u) = 0.$$

Условия сопряжения выводятся по аналогии с задачей 9.

12. Подобие перечисленных в условии полей устанавливает следующая таблица:

Электрическое поле постоянного тока	Потенциал u	Коэффициент электропроводности σ	Плотность тока $\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{grad}\,u$
Теплопроводность	Температура u	Коэффициент теплопроводности k	Поток тепла $\boldsymbol{Q} = -k\,\mathrm{grad}\,u$
Диффузия	Концентрация u	Коэффициент диффузии D	Поток вещества $\boldsymbol{j} = -D\,\mathrm{grad}\,u$
Электростатика	Потенциал электрического поля u	Диэлектрическая постоянная ε	Вектор электрической индукции $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E} = -\varepsilon\,\mathrm{grad}\,u$
Магнитостатика	Потенциал магнитного поля u	Магнитная проницаемость μ	Вектор магнитной индукции $\boldsymbol{B} = -\mu\,\mathrm{grad}\,u$
Потенциальное течение несжимаемой жидкости	Потенциал скоростей u	1	$\boldsymbol{v} = \mathrm{grad}\,u$

Во всех случаях функция u удовлетворяет уравнению Лапласа.

Указание. См. предыдущие задачи этого параграфа и также § 1 гл. II, задачу 49.

Замечание. Если на некоторой поверхности Σ_1 константы σ, k, D, ε или μ терпят разрыв, то на Σ_1 выполняются условия сопряжения, которые можно представить в виде

$$u_1 = u_2, \quad p_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = p_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \quad \text{на} \quad \Sigma_1,$$

где u — искомая функция, а p — один из параметров σ, k, D, ε, μ; цифры 1 и 2 соответствуют предельным значениям рассматриваемых величин на разных сторонах поверхности Σ_1; при этом $\mathrm{div}(p\,\mathrm{grad}\,u) = 0$.

§ 2. Простейшие задачи для уравнений Лапласа и Пуассона

Значительная часть решений задач этого параграфа либо обладает круговой или сферической симметрией, либо просто зависит от угловых координат.

Напомним выражения для оператора Лапласа:

1) в полярной системе координат

$$\Delta_2 u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2};$$

2) в сферической системе координат

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2};$$

3) в цилиндрической системе координат

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta_2 u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

При решении некоторых задач следует принять во внимание, что уравнению Лапласа $\Delta_2 u = 0$ удовлетворяет полином

$$u = A(x^2 - y^2) + Bxy + Cx + Dy,$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные.

1. Краевые задачи для уравнения Лапласа.

13. а) $u = A$; б) $u = \dfrac{A}{a}x$ или $u = \dfrac{A}{a}\rho\cos\varphi$;

в) $u = A + By$ или $u = A + B\rho\sin\varphi$;

г) $u = Axy$ или $u = \dfrac{A}{2}\rho^2\sin 2\varphi$;

д) $u = A + \dfrac{B}{a}y$ или $u = A + \dfrac{B}{a}\rho\sin\varphi$;

е) $u = \dfrac{A+B}{2} + \dfrac{B-A}{2a^2}(x^2 - y^2)$ или

$$u = \frac{A}{2}\left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\cos 2\varphi\right) + \frac{B}{2}\left(1 + \frac{\rho^2}{a^2}\cos 2\varphi\right).$$

Указание. При построении решения следует учесть, что x, y, xy, $x^2 - y^2$ и их линейная комбинация являются гармоническими функциями. В правильности решения следует убеждаться непосредственной подстановкой найденного выражения для u в уравнение

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

и в граничное условие.

Проиллюстрируем приемы отыскания решения на примере 13, б). Переходя от переменных (ρ, φ) к переменным (x, y), перепишем граничное условие в виде

$$u = \frac{A}{a}x.$$

Отсюда видно, что искомым решением является гармоническая функция

$$u(x, y) = \frac{A}{a}x \quad \text{или} \quad u(\rho, \varphi) = \frac{A}{a}\rho\cos\varphi.$$

14. Задачи а) и г) поставлены неправильно, так как в случае второй краевой задачи

$$\Delta u = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_C = f$$

должно выполняться условие

$$\int_C f\, ds = 0;$$

б) $u(x, y) = Aax + C$ или $u(\rho, \varphi) = Aa\rho\cos\varphi + C$;

в) $u = \dfrac{A}{2}a(x^2 - y^2) + C$ или $u(\rho, \varphi) = \dfrac{A}{2}a\rho^2\cos 2\varphi + C$;

д) $u = (A + 0,75B)y - \dfrac{0,25}{3a^2}\,[3(x^2+y^2)y - 4y^3] + C$

или

$$u(\rho,\,\varphi) = (A + 0,75\,B)\rho\sin\varphi - \frac{B}{12a^2}\,\rho^3\sin 3\varphi + C.$$

Решение второй краевой задачи, как известно, определяется с точностью до произвольной постоянной C.

У к а з а н и е. Остановимся лишь на решении одного примера, например 14, б), в котором дано

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\rho=a} = Ax.$$

Функция $u = Dx$ или $u = D\rho\cos\varphi$ является гармонической. Дифференцирование по нормали совпадает с дифференцированием по ρ. Требуя, чтобы она удовлетворяла краевому условию при $\rho = a$, находим $D = Aa$, так что $u(x,\,y) = Aax$ или $u(\rho,\,\varphi) = Aa\rho\cos\varphi$.

В примере д) следует разбить f на два слагаемых: $f = f_1(\varphi) + f_2(\varphi)$, $f_1 = \alpha\sin\varphi$, $f_2 = \beta\sin 3\varphi$, и искать решение в виде

$$u = R_1(\rho)f_1(\varphi) + R_2(\rho)f_2(\varphi).$$

15. а) $u(\rho,\,\varphi) = A$; б) $u(\rho,\,\varphi) = \dfrac{Aa}{\rho}\,\cos\varphi$;

в) $u(\rho,\,\varphi) = A + \dfrac{Ba^2}{\rho}\,\sin\varphi$; г) $u(\rho,\,\varphi) = \dfrac{1}{2}\,A\,\dfrac{a^4}{\rho^2}\,\sin 2\varphi$;

д) $u(\rho,\,\varphi) = A + B\,\dfrac{a}{\rho}\,\sin\varphi$;

е) $u(\rho,\,\varphi) = \dfrac{A+B}{2} - \dfrac{A-B}{2}\cdot\dfrac{a^2}{\rho^2}\,\cos 2\varphi$.

У к а з а н и е. Перейти всюду к полярным координатам. Если граничное условие при $\rho = a$ имеет вид

$$u\big|_{\rho=a} = A_k\cos k\varphi,$$

то искать решение в виде

$$u(\rho,\,\varphi) = R(\rho)\cos k\varphi,$$

где $R(\rho)$ — функция, удовлетворяющая уравнению

$$\rho^2R'' + \rho R' - k^2R = 0$$

и следующим граничным условиям:

$$R(a) = A_k, \quad |R(\infty)| < \infty.$$

16. Задачи а) и г) не имеют решения, так как не выполняется условие

$$\int\limits_C \frac{\partial u}{\partial n}\,ds = 0;$$

б) $u(\rho,\,\varphi) = -\dfrac{Aa^3}{\rho}\,\cos\varphi + \text{const}$;

в) $u(\rho,\,\varphi)=-\dfrac{Aa^5}{2\rho^2}\cos 2\varphi+\text{const}$;

д) $u(\rho,\,\varphi)=-(A+0,75B)\,\dfrac{a^2}{\rho}\sin\varphi+0,25B\,\dfrac{a^3}{3\rho^3}\sin 3\varphi+C$.

17. $$u=u(\rho)=u_1+(u_2-u_1)\,\frac{\ln(\rho/a)}{\ln(b/a)}.$$

Емкость единицы длины цилиндрического конденсатора равна

$$C=\frac{1}{\ln(b/a)}.$$

Указание. Так как граничные условия не зависят от φ, то и решение должно обладать цилиндрической симметрией, $u=u(\rho)$.

Емкость C проводника, ограниченного поверхностью Σ, определяется выражением

$$C=-\frac{1}{4\pi u_0}\int\limits_{\Sigma}\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma\quad\text{для трех измерений}$$

и

$$C=-\frac{1}{2\pi u_0}\oint\limits_{L}\frac{\partial u}{\partial n}\,ds\quad\text{для двух измерений,}$$

где u_0 — потенциал проводника, L — контур,

$$-\frac{\partial u}{\partial n}=E_n$$

— нормальная составляющая вектора электрического поля.

18. $$u(\rho,\,\varphi)=\frac{u_0}{\alpha}\,\varphi$$

или

$$u(x,\,y)=\frac{u_0}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}.\qquad(1)$$

Указание. Записывая уравнение Лапласа в полярных координатах:

$$\Delta_2 u=\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0,$$

видим, что функция, линейная относительно φ, является гармонической функцией.

19. $$u(x,\,y)=\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}+\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}.\qquad(1)$$

Сравнение (1) с решением задачи 18 показывает, что (1) соответствует частному случаю $\alpha=\pi$ формулы (1) в задаче 18.

20. а) $u=u_0$; б) $u=u(r)=\dfrac{a}{r}\,u_0$.

21. $$u=u(r)=u_2+\frac{u_1-u_2}{1/a-1/b}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{b}\right).$$

Указание. Решение уравнения $\Delta u = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{du}{dr}\right) = 0$ имеет вид $u = u(r) = \alpha + \dfrac{\beta}{r}$, где α и β определяются из условий $u(a) = u_1$, $u(b) = u_2$.

22.
$$C = \frac{\varepsilon}{1/a - 1/b}.$$

Указание. Учесть, что в присутствии диэлектрика плотность поверхностных зарядов равна
$$\sigma = \frac{1}{4\pi} D_n = -\frac{1}{4\pi}\varepsilon\frac{\partial u}{\partial n}.$$

23. Емкость сферического конденсатора равна
$$C = \frac{\varepsilon_1}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c} - \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{c}\right)}.$$

Решение. Требуется решить краевую задачу
$$\Delta u_1 = 0 \quad \text{при} \quad a < r < c,$$
$$\Delta u_2 = 0 \quad \text{при} \quad c < r < b,$$
где u_1 и u_2 удовлетворяют при $r = a$ и $r = b$ граничным условиям
$$u_1\big|_{r=a} = 1, \quad u_2\big|_{r=b} = 0$$
и при $r = c$ — условиям сопряжения
$$u_1 = u_2,$$
$$\varepsilon_1\frac{\partial u_1}{\partial r} = \varepsilon_2\frac{\partial u_2}{\partial r}.$$
Общее решение имеет вид
$$u(r) = \begin{cases} u_1 = \dfrac{A_1}{r} + A_2 & \text{при} \quad a < r < c, \\ u_2 = \dfrac{B_1}{r} + B_2 & \text{при} \quad c < r < b. \end{cases}$$
Четыре коэффициента A_1, A_2, B_1, B_2 определяются из двух граничных условий при $r = a$ и $r = b$ и двух условий сопряжения при $r = c$. В результате получаем
$$u_1 = 1 + A_1\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right), \quad u_2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}A_1\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right),$$
где
$$A_1 = \frac{1}{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{c} - \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{c}\right)}.$$
Емкость вычисляется по формуле
$$C = -\frac{\varepsilon_1}{4\pi}\iint\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{r=a} a^2\,d\Omega = -\varepsilon_1 a^2\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=a} = A_1\varepsilon_1.$$

24. Требуется найти решение краевой задачи
$$\Delta_2 u_1 = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{du_1}{d\rho}\right) = 0 \quad \text{при} \quad a < \rho < c,$$

$$\Delta_2 u_2 = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{du_2}{d\rho}\right) = 0 \quad \text{при} \quad c < \rho < b,$$

$$u_1 = 1 \quad \text{при} \quad \rho = a, \quad u_2 = 0 \quad \text{при} \quad \rho = b,$$

$$u_1 = u_2, \quad \varepsilon_1\frac{\partial u_1}{\partial\rho} = \varepsilon_2\frac{\partial u_2}{\partial\rho} \quad \text{при} \quad \rho = c.$$

Для емкости получаем выражение

$$C = \frac{\varepsilon_1}{\ln\dfrac{c}{a} + \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\ln\dfrac{b}{c}}.$$

При $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ имеем

$$C = \frac{\varepsilon}{\ln(b/a)}.$$

Указание. Решение ищется в виде

$$u_1 = A\ln\rho + E, \quad u_2 = B\ln\rho + D.$$

25. Потенциал поля равен

$$u = u_0\,\frac{\dfrac{1}{r} + \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2}\dfrac{1}{c}}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2}\dfrac{1}{c}} \quad \text{при} \quad a < r < c,$$

$$u = u_0\,\frac{\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\dfrac{1}{r}}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2}\dfrac{1}{c}} \quad \text{при} \quad r > c.$$

Частные случаи:

1) при $c \to \infty$ получаем $u = u_0\dfrac{a}{r}$ при $r > a$ — потенциал поля сферы радиуса a, заряженной до потенциала u_0 и находящейся в бесконечной однородной среде;

2) при $\varepsilon_2 \to \infty$ (среда 2 идеально проводящая)

$$u = \begin{cases} u_0\,\dfrac{1/r - 1/c}{1/a - 1/c}, & \text{если} \quad a < r < c, \\ 0, & \text{если} \quad r > c; \end{cases}$$

3) если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, то

$$u = u_0\frac{a}{r} \quad (r > a) \quad (\text{ср. со случаем 1)}).$$

Указание. См. задачу 22. Учесть, что на бесконечности функция u должна обращаться в нуль.

26. Электростатическое поле

$$E = -\operatorname{grad} u,$$

где u — потенциал, равный

$$u = u(\rho) = u_0\,\frac{\ln(b/\rho)}{\ln(b/a)}.$$

27. Решение зависит только от переменной z и дается формулой

$$u = u(z) = u_1 + (u_2 - u_1)\frac{z}{h}.$$

28. Для емкости единицы площади плоского конденсатора получаем выражения:

а) $C = \dfrac{\varepsilon}{4\pi h}$; б) $C = \dfrac{\varepsilon_1}{4\pi\left[h_1 + \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}(h - h_1)\right]}$.

29. Искомая гармоническая функция зависит только от переменной y:

$$u = u_1 + (u_2 - u_1)\frac{y}{b}.$$

Указание. Решение искать в виде гармонического полинома.

2. Краевые задачи для уравнения Пуассона.

30. $$u = \frac{1}{4}(\rho^2 - a^2).$$

Указание. Искомая функция $u = u(\rho)$ обладает круговой симметрией и определяется из уравнения

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{du}{d\rho}\right) = 1$$

при условии $u(a) = 0$.

31. Решение существует, если выбрать

$$B = \frac{aA}{2},$$

и определено с точностью до произвольной постоянной:

$$u = u(\rho) = \frac{A\rho^2}{4} + \text{const}.$$

32. а) $u(\rho) = u_2 + \dfrac{A}{4}(\rho^2 - b^2) + \dfrac{u_1 - u_2 + \dfrac{A}{4}(b^2 - a^2)}{\ln\dfrac{b}{4}}\ln\dfrac{b}{\rho}$;

б) $u(\rho) = u_1 + \dfrac{A}{4}(\rho^2 - a^2) + b\left(C - \dfrac{Ab}{2}\right)\ln\dfrac{\rho}{a}$;

в) $u(\rho) = \dfrac{A\rho^2}{4} - a\left(\dfrac{aA}{2} - B\right)\ln\rho + \text{const}$.

Задача в) имеет решения лишь при

$$C = \frac{A(b^2 - a^2) + 2aB}{2b},$$

причем решение задачи в) определено с точностью до аддитивной постоянной.

33. а) Если $\Delta u = 1$, $u(a) = 0$, то

$$u = u(r) = \frac{1}{6}(r^2 - a^2);$$

б) если $\Delta u = Ar + B$, $u(a) = 0$, то

$$u(r) = \frac{A}{12}(r^3 - a^3) + \frac{B}{6}(r^2 - a^2).$$

Указание. Искомая функция обладает сферической симметрией, $u = u(r)$ и удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению с правой частью

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(ru) = f(r).$$

34. а) $u = u(r) = \frac{1}{6}(r^2 - a^2) - \frac{1}{6}ab(a+b)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right)$;

б) $u = u(r) = \frac{A}{6}(r^2 - a^2) + \frac{B}{2}(r - a) - ab\left[\frac{A}{6}(b + a) + \frac{B}{2}\right]\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right)$,

при $A = 1$, $B = 0$ получаем первое выражение.

Указание. Решение обладает сферической симметрией $u = u(r)$.

§ 3. Функция источника

Функция влияния точечного источника или просто функция источника $G(M, P)$ первой краевой задачи для уравнения $\Delta u = -4\pi\rho$ определяется в трехмерном случае [1] следующими условиями:

$$G(M, P) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r_{MP}} + v(M, P), \tag{1}$$

где $r_{MP} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$ — расстояние между точкой наблюдения $M(x, y, z)$ и источником в точке $P(\xi, \eta, \zeta)$, а $v(M, P)$ — функция, регулярная и гармоническая всюду в рассматриваемой области T с границей Σ. На границе Σ функция G удовлетворяет условию

$$G\big|_\Sigma = 0. \tag{2}$$

Таким образом построение функции источника G в некоторой области T сводится к решению первой краевой задачи для уравнения Лапласа

$$\Delta v = 0 \quad \text{в} \quad T$$

при специальном граничном условии

$$v\big|_\Sigma = -\frac{1}{4\pi r_{MP}}. \tag{3}$$

Электростатическая интерпретация функции источника $G(M, P)$ очевидна; это — потенциал в точке M электростатического поля, создаваемого внутри объема T зарядом величины $e = \frac{1}{4\pi}$, сосредоточенным в точке P, если граничная поверхность Σ области T является идеально проводящей и поддерживается при нулевом потенциале, т. е. заземлена; здесь $\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}$ — потенциал заряда в неограниченном пространстве, а v — потенциал поля, индуцированного зарядами на Σ.

[1] См. [7, гл. IV, § 4].

Для ряда простых областей (полупространство, слой, сфера и др.) индуцированное поле может быть найдено с помощью так называемого метода отражений, сущность которого заключается в том, что вне рассматриваемой области по определенному закону помещаются заряды. Эти заряды называются изображениями, или «образами», исходного заряда относительно данной границы. В случае плоской границы «образы» являются зеркальными изображениями оригинала в плоскости или плоскостях, если область ограничена несколькими плоскостями. В случае сферических границ для построения изображения применяется преобразование обратных радиусов (инверсия) [1)].

В настоящем параграфе помещены лишь те задачи, которые могут быть решены методом изображения.

Если функция источника $G(M,\, P)$ известна, то решение первой краевой задачи для уравнения

$$\Delta u = -F \quad \text{в} \quad T \tag{4}$$

при условии на границе

$$u\big|_{\Sigma} = f \tag{5}$$

может быть найдено в интегральной форме

$$u(M) = -\int\limits_{\Sigma} f(P)\,\frac{\partial G}{\partial n_P}\,d\sigma_P + \int\limits_{T} G(M,\, P)F(P)d\tau_P, \tag{6}$$

где $\dfrac{\partial G}{\partial n}$ — производная функции G на границе Σ, взятая по направлению внешней нормали к Σ.

Большинство задач настоящего параграфа взято из электростатики. Обычно помимо потенциала поля интересуются поверхностной плотностью зарядов, индуцированных на проводниках, а также емкостью проводников. Введем необходимые понятия.

Поверхностная плотность зарядов на проводнике с поверхностью S, помещенном в среду с диэлектрической постоянной ε, равна

$$\sigma = -\frac{\varepsilon}{4\pi}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_S,$$

где n — внешняя нормаль к поверхности S.

Полный заряд, распределенный на S, дается интегралом

$$e' = \iint\limits_S \sigma\, dS.$$

Емкость проводника S определяется по формуле

$$C = \frac{e'}{V'},$$

где V' — потенциал проводника S.

Для двумерной области D с границей L функция источника $G(M,\, P)$ определяется аналогично

$$G(M,\, P) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MP}} + v(M,\, P), \tag{7}$$

[1)] См. [7, гл. IV, § 4].

$$G\big|_L = 0, \tag{8}$$

где $v(M, P)$ — регулярная в D гармоническая функция, т. е. в этом случае функция G имеет логарифмическую особенность в источнике.

1. Функция источника для областей с плоскими границами.

35. Потенциал точечного заряда e равен

$$u = e\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}\right), \tag{1}$$

где

$$r_0 = MP = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$
$$r_1 = MP_1 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2},$$

$M(x, y, z)$ — точка наблюдения, $P(\xi, \eta, \zeta)$ — точка, в которой находится заряд, а $P_1(\xi, \eta, -\xi)$ — его изображение в плоскости $z = 0$.

Плотность поверхностных зарядов

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0} = -\frac{e}{2\pi}\,\frac{\zeta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + \zeta^2]^{3/2}}.$$

Полный заряд, распределенный на плоскости $z = 0$, равен

$$e' = \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int \sigma\, dx\, dy = -e.$$

Функция источника первой краевой задачи для уравнения Лапласа в полупространстве, очевидно, равна

$$G(M, P) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}\right), \tag{2}$$

а решение первой краевой задачи в полупространстве $z > 0$ дается формулой

$$u(M) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int \frac{2z}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{3/2}}\, f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{3}$$

Р е ш е н и е. Отражая зеркально в плоскости $z = 0$ заряд e, помещенный в точке $P(\xi, \eta, \zeta)$, получим в точке $P_1(\xi, \eta, -\zeta)$ заряд величиной $-e$; его потенциал в неограниченном пространстве равен $-\dfrac{e}{r_1}$. Нетрудно заметить, что

$$\frac{1}{r_0}\Big|_{z=0} = \frac{1}{r_1}\Big|_{z=0} = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + \zeta^2}}$$

и

$$\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}\right)_{z=0} = 0,$$

т. е. заряды $e(P)$ и $-e(P_1)$ компенсируют друг друга на плоскости $z = 0$. Поэтому, пользуясь принципом суперпозиции, для искомого потенциала будем иметь

$$u = e\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Функция источника $G(M,\,P)$ соответствует $e=\dfrac{1}{4\pi}$. Вычисляя затем нормальную производную

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \zeta}\right)_{\zeta=0}=\frac{2z}{4\pi[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2]^{3/2}}$$

и пользуясь формулой (6), на с. 357, получаем решение первой краевой задачи

$$\Delta u=0\quad (z>0),\quad u\big|_{z=0}=f(x,\,y).$$

36. Потенциал заряда $e(P_0)$ равен

$$u=4\pi eG,\quad G(M,\,P)=\frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{r_n}-\frac{1}{r'_n}\right), \tag{1}$$

где

$$r_n=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+[z-(2nl+\zeta)]^2},$$
$$r'_n=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+[z-(2nl-\zeta)]^2},$$

заряд находится в точке $P_0(\xi,\,\eta,\,\zeta)$, $M(x,\,y,\,z)$ — точка наблюдения.

Ряд (1), а также ряды, получающиеся почленным дифференцированием ряда (1), сходятся равномерно и абсолютно в области $0<z<l$.

Р е ш е н и е. Для построения ряда (1) надо производить последовательные отражения в плоскостях $z=0$ и $z=l$ (рис. 39) и найти

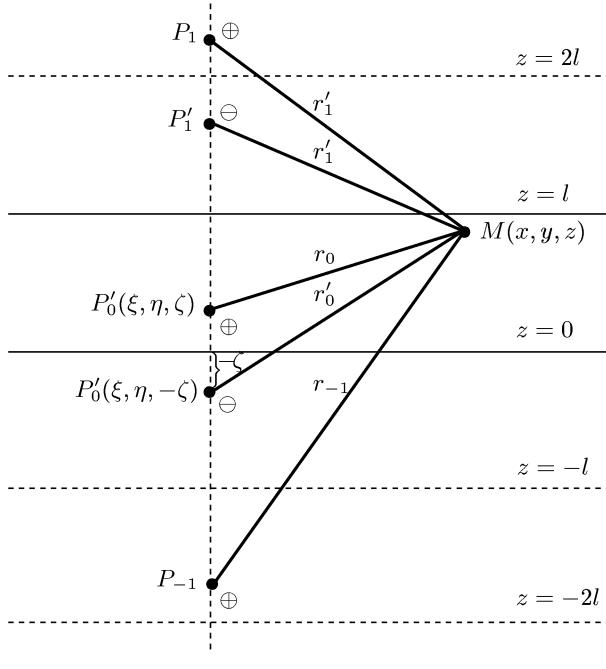


Рис. 39

положение изображений — «источников» и «стоков». Произведя отражение в плоскости $z = 0$, получим функцию

$$u_0 = e\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0'}\right),$$

которая удовлетворяет граничному условию $u = 0$ при $z = 0$ и не удовлетворяет условию $u = 0$ при $z = l$; производя затем отражение в плоскости $z = l$, получим

$$u_1 = e\left[\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0'}\right) + \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right)\right],$$

так что $u_1 = 0$ при $z = l$ и $u_1 \neq 0$ при $z = 0$. Продолжая этот процесс поочередного отражения в плоскостях $z = 0$ и $z = l$, мы приходим к ряду (1).

Имея в виду, что при каждом отражении заряд e переходит в заряд $-e$ и обратно, нетрудно установить, что координаты изображений выражаются формулой

$$\begin{aligned} &+e \qquad \zeta_n = 2nl + \zeta, \\ &-e \qquad \zeta_n' = 2nl - \zeta, \end{aligned}$$

где n — целые числа, принимающие значения в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Пользуясь принципом суперпозиции и суммируя действие всех изображений $e(P_n)$ и $-e(P_n')$ и реального заряда $e(P)$, получаем ряд (1).

Докажем, что этот ряд равномерно сходится. Для этого рассмотрим его n-й член

$$a_n = \frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_n'}.$$

Пользуясь теоремой о среднем значении, будем иметь

$$a_n = 2\zeta\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{r_n}\right)\right]_{\zeta=\zeta^*} = \frac{2\zeta[z - (2nl + \zeta^*)]}{r_n^{*\,2} r_n^*} \quad (0 < \zeta^* < l),$$

откуда следует

$$|a_n| < \frac{2l}{(r_n^*)^2} < \frac{2}{(2n-1)^2 l} = b_n,$$

так как $\zeta^* < l |z - \zeta^*| < l$ и, следовательно,

$$r_n^* = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + [z - (2nl + \zeta^*)]^2} > (2n-1)l.$$

Полученная оценка показывает, что ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ сходится равномерно и абсолютно, так как мажорантный ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} b_n$ сходится.

Докажем теперь равномерную сходимость в слое $0 < z < l$ рядов, полученных одно- и двукратным почленным дифференцированием ряда (1).

Оценим производные:

$$\left|\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r_n}\right)\right| \leqslant \left|-\frac{1}{r_n^2}\,\frac{z - (2nl + \zeta)}{r_n}\right| < \frac{1}{r_n^2}, \quad \text{так как} \quad \left|\frac{z - (2nl + \zeta)}{r_n}\right| < 1,$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r'_n}\right)\right| \leqslant \left|-\frac{1}{r'^2_n}\,\frac{z-(2nl-\zeta)}{r'^2_n}\right| < \frac{1}{r'^2_n}, \quad \text{так как} \quad \left|\frac{z-(2nl-\zeta)}{r'_n}\right| < 1,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r_n}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left\{-\frac{1}{r_n^2}\,\frac{z-(2nl+\zeta)}{r_n}\right\} = \frac{3[z-(2nl+\zeta)]^2}{r_n^5} - \frac{1}{r_n^3},$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r_n}\right)\right| < \frac{3}{r_n^3} + \frac{1}{r_n^3} = \frac{4}{r_n^3}.$$

Учитывая, далее, неравенства $r_n > |n|\,l$, $r'_n > |n|\,l$, получаем

$$\left|\frac{\partial a_n}{\partial z}\right| < \frac{2}{n^2 l^2} = b_n^{(1)}, \quad \left|\frac{\partial^2 a_n}{\partial z^2}\right| < \frac{8}{n^3 l^3} = b_n^{(2)},$$

откуда и следует абсолютная и равномерная сходимость рядов $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\partial a_n}{\partial z}$ и $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 a_n}{\partial z^2}$, поскольку ряды $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} b_n^{(1)}$ и $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} b_n^{(2)}$ сходятся. Аналогично доказывается равномерная сходимость рядов

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{\partial a_n}{\partial x}, \quad \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{\partial a_n}{\partial y}, \quad \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{\partial^2 a_n}{\partial x^2}, \quad \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{\partial^2 a_n}{\partial y^2}.$$

Таким образом ряд (1) можно дифференцировать дважды.

Поэтому ряд (1) без члена $\frac{1}{r_0}$ всюду в слое $0 < z < l$ удовлетворяет уравнению Лапласа, поскольку все его слагаемые удовлетворяют этому уравнению. Первый член $\frac{1}{r_0}$ дает нужную особенность в источнике.

37. Прямоугольные составляющие электрического поля равны

$$\left.\begin{aligned} E_x &= -\frac{I}{4\pi\sigma}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r_n}+\frac{1}{r'_n}\right),\\ E_y &= -\frac{I}{4\pi\sigma}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r_n}+\frac{1}{r'_n}\right),\\ E_z &= -\frac{I}{4\pi\sigma}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r_n}+\frac{1}{r'_n}\right), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где σ — проводимость среды, I — мощность источника тока,

$$\left.\begin{aligned} r_n &= \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+[z-(2nl+\zeta)]^2},\\ r'_n &= \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+[z-(2nl-\zeta)]^2}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Ряды для компонент поля E_x, E_y, E_z сходятся равномерно и абсолютно и представляют функции дважды дифференцируемые, следовательно, удовлетворяющие уравнению $\Delta u = 0$ всюду, кроме точки $r_0 = 0$ ($x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$), в которой они имеют нужную особенность

$$E_x = -\frac{I}{4\pi\sigma}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r_0}\right) + \ldots, \quad E_y = -\frac{I}{4\pi\sigma}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r_0}\right) + \ldots,$$

$$E_z = -\frac{I}{4\pi\sigma}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r_0}\right) + \ldots \tag{3}$$

Указание. Каждая из компонент поля E_x, E_y, E_z удовлетворяет уравнению Лапласа, так что $\Delta \boldsymbol{E} = 0$, и имеет требуемую особенность (3) в источнике.

При $z = 0$ должно выполняться условие

$$E_z = 0. \tag{4}$$

Помещая источники мощности I в точках $\zeta_n = 2nl - \zeta$ и $\zeta'_n = 2nl + \zeta$, суммируя поля от этих источников

$$\boldsymbol{E} = -\frac{I}{4\pi\sigma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{grad}\left(\frac{1}{r_n} + \frac{1}{r'_n}\right). \tag{5}$$

Граничное условие (4) будет выполнено, так как

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r_n}\right)\Big|_{z=0} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r'_n}\right)\Big|_{z=0} = \frac{-(2nl+\zeta)}{\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (2nl+\zeta)^2\}^{3/2}}.$$

Равномерная и абсолютная сходимость ряда (5) не вызывает сомнения, поскольку

$$\left|\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r_n}\right)\right| = \left|\frac{z-(2nl+\zeta)}{r_n^3}\right| \leqslant \frac{1}{r_n^2} < \frac{A}{n^2},$$

где A — некоторая постоянная.

Если суммировать не поля отдельных источников, а их потенциалы, то получается ряд

$$\frac{I}{4\pi\sigma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{r_n} + \frac{1}{r'_n}\right), \tag{6}$$

который расходится, так как его члены положительны и имеют порядок $1/n$.

Почленное дифференцирование ряда (6) возможно, так как при этом получаются равномерно и абсолютно сходящиеся ряды.

38. Ищется решение краевой задачи

$$\Delta u = 0 \quad \text{внутри слоя} \quad 0 < z < l,$$

$$u\big|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=l} = 0$$

при условии, что в точке $P(z = \zeta,\, x = \xi,\, y = \eta)$ потенциал u имеет особенность

$$u \approx \frac{I}{4\pi\sigma}\frac{1}{r_0},$$

$$r_0 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}.$$

Метод изображений дает

$$u(M,\, P) = \frac{I}{4\pi\sigma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r'_n}\right), \tag{1}$$

где

$$r_n = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + [z-(2nl+(-1)^n\zeta)]^2},$$

$$r'_n = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + [z-(2nl-(-1)^n\zeta)]^2}.$$

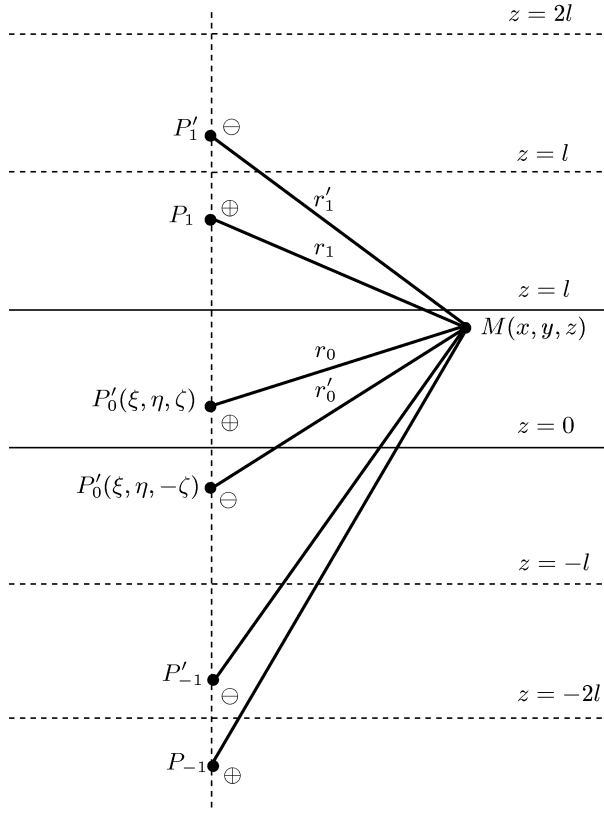


Рис. 40

Указание. Источники I и стоки $-I$ находятся соответственно в точках (рис. 40)

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta_n = 2nl + (-1)^n \zeta,$$
$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta'_n = 2nl - (-1)^n \zeta.$$

Сходимость и дифференцируемость ряда (1) доказывается по аналогии с задачей 36.

39. Функция точечного источника, помещенного в точке $P_0(\xi, \eta, \zeta)$ при граничном условии

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} + hu\right)_{z=0} = 0, \tag{1}$$

дается формулой

$$G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r'_0} - 2\int_{\zeta}^{\infty} e^{-h(\zeta - s)} \frac{ds}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+s)^2}}\right],$$

где

$$r_0 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$
$$r_0' = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2}.$$

Р е ш е н и е. Источник $e(P_0)$ и сток $-e(P_0')$ дают на плоскости $z = 0$ условие $\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$ при $z = 0$. В нашей задаче $\dfrac{\partial u}{\partial z} = -hu$ при $z = 0$. Поэтому мы ищем решение в виде суммы членов, соответствующих $e(P_0)$ и $-e(P_0')$, и добавки вида $v(x-\xi, y-\eta, z+\zeta)$, полагая

$$G = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_0'}\right) + v(x-\xi, y-\eta, z+\zeta). \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1) и учитывая, что $\dfrac{\partial v}{\partial z} = \dfrac{\partial v}{\partial \zeta}$, получаем

$$\left(\frac{\partial v}{\partial \zeta} + hv\right)_{z=0} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{\sqrt{\rho^2+\zeta^2}}, \quad \rho^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2.$$

Решая это уравнение и заменяя ζ на $z+\zeta$, получаем

$$v(x-\xi, y-\eta, z+\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\zeta+z}^{\infty} e^{-n(\zeta-s)}\,\frac{ds}{\sqrt{\rho^2+(z+s)^2}}, \tag{3}$$

или

$$v = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\zeta+z}^{\infty} e^{-n(\zeta+z-s)}\,\frac{ds}{\sqrt{\rho^2+s^2}}. \tag{4}$$

40. $u = u_{36}(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) - u_{36}(x, y, z; -\xi, \eta, \zeta)$, где u_{36} — решение задачи 36, или в развернутом виде

$$u = e\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_n'} - \frac{1}{\overline{r}_n} + \frac{1}{\overline{r}_n'}\right), \tag{1}$$

где

$$\begin{aligned} r_n &= \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + [z-(2nl+\zeta)]^2},\\ r_n' &= \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + [z-(2nl-\zeta)]^2},\\ \overline{r}_n &= \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + [z-(2nl+\zeta)]^2},\\ \overline{r}_n' &= \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + [z-(2nl-\zeta)]^2}. \end{aligned} \tag{2}$$

41. Электрическое поле $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} u$, где $u = u(\rho, \varphi, z)$ — потенциал, определяемый формулой

$$u = e\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{r_k} - \frac{1}{r_k'}\right),$$

где

$$r_k = MP_k = \sqrt{\rho^2 + s^2 - 2\rho s\cos[\varphi - (\psi + 2\alpha k)] + (z-\zeta)^2},$$
$$r_k' = MP_k' = \sqrt{\rho^2 + s^2 - 2\rho s\cos[\varphi - (2\alpha k - \psi)] + (z-\zeta)^2},$$
$$\alpha = \frac{\pi}{n},$$

$M = M(\rho, \varphi, z)$ — точка наблюдения, $P = P(s, \psi, \zeta)$ — точка, в которой расположен источник.

Указание. Перейти к цилиндрическим координатам ρ, φ, z, направив ось z вдоль ребра двугранного угла; при зеркальном отражении источник повторится $2n-1$ раз, поэтому искомый потенциал может быть получен путем суммирования потенциалов $2n$ зарядов.

При отражении заряда в сторонах двугранного угла все его изображения будут находиться на окружности радиуса s, лежащей в плоскости $z = \zeta$, по абсолютной величине они равны исходному заряду и чередуются по знакам.

Заряды $+e$ находятся в точках $P_k(s, 2\alpha k + \psi, \zeta)$; заряды $-e$ находятся в точках $P'_k(s, 2\alpha k - \psi, \zeta)$, где k меняются в пределах от нуля до $n-1$.

Нетрудно видеть, что заряды противоположных знаков симметрично расположены относительно плоскостей $\varphi = 0$ и $\varphi = \alpha$. В самом деле, заряду P_k $(\varphi = 2\alpha k + \psi)$ соответствует заряд P'_{n-k} $(\varphi = 2\alpha(n-k) - \psi)$, симметричный относительно плоскости $\varphi = 0$; аналогично, заряду P_k $(\varphi = 2\alpha k - \psi)$ соответствует заряд P'_{n-k+1} $(\varphi = 2\alpha(n-k+1) - \psi)$, симметричный относительно плоскости $\varphi = \alpha$.

Заметим, что при $\alpha = \pi$ формула (1) дает решение задачи 35.

42. Потенциал заряда e дается суммой

$$u = \sum_{k=0}^{n-1} [u_{36}(\rho, \varphi, z; s, 2\alpha k + \psi, \zeta) - u_{36}(\rho, \varphi, z; s, 2\alpha k - \psi, \zeta)], \quad \alpha = \frac{\pi}{n},$$

где u_{36} — решение задачи 36, выражение для которого в цилиндрической системе координат имеет вид

$$u_{36}(M, P) = u_{36}(\rho, \varphi, z; s, \psi, \zeta) = e \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r'_n} \right),$$

причем

$$r_n = \sqrt{\rho^2 + s^2 - 2\rho s \cos(\varphi - \psi) + [z - (2nl + \zeta)]^2},$$
$$r'_n = \sqrt{\rho^2 + s^2 - 2\rho s \cos(\varphi - \psi) + [z - (2nl - \zeta)]^2}.$$

При $\alpha = \pi$ получаем решение задачи 36, при $l \to \infty$ имеем

$$u = \sum_{k=0}^{n-1} [u_{35}(\rho, \varphi, z; s, 2\alpha k + \psi, \zeta) - u_{35}(\rho, \varphi, z; s, 2\alpha k - \psi)],$$

где u_{35} — решение задачи 35.

Указание. Отражая заряд в плоскостях $z = 0$ и $z = l$, мы найдем потенциал заряда в слое $0 \leqslant z \leqslant l$, после чего в соответствии с решением задачи 41 производим отражение в гранях угла.

43. Стационарное распределение температуры в полярной системе координат дается формулой

$$u = \frac{Q}{c\rho_0} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{r_k} + \frac{1}{r'_k} \right),$$

где

$$r_k = \sqrt{\rho^2 + s^2 - 2\rho s\cos[\varphi - (2\alpha k + \psi)] + (z-\zeta)^2},$$
$$r'_k = \sqrt{\rho^2 + s^2 - 2\rho s\cos[\varphi - (2\alpha k - \psi)] + (z-\zeta)^2},$$

Q — мощность теплового источника, помещенного в точку $M_0(s, \psi, \zeta)$, $M = M(\rho, \varphi, z)$ — точка наблюдений, $c\rho_0$ — теплоемкость единицы объема.

Указание. Решение ищется в виде

$$u = \frac{Q}{c\rho}\,\frac{1}{r_0} + v, \quad r_0 = r_{MM_0} = \sqrt{\rho^2 + s^2 - 2\rho s\cos(\varphi - \psi) + (z-\zeta)^2},$$

где v — всюду регулярная гармоническая функция; функция u удовлетворяет граничным условиям второго рода

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=0,\,\alpha} = 0.$$

Функция v ищется методом изображения по аналогии с задачей 41.

44. $u(\rho, \varphi) = V\left(1 - \dfrac{\varphi}{\alpha}\right)$.

Указание. Следует найти функцию источника внутри угла

$$G_1(\rho, \varphi; s, \psi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{n-1} \ln\frac{r'_k}{r_k}$$

(см. задачи 41–43) и воспользоваться формулой Грина

$$u(\rho, \varphi) = -V\int_0^\infty \left(\frac{\partial G}{\partial \psi}\right)_{\psi=\alpha} ds.$$

45. $u(x, y) = V\left(1 - \dfrac{1}{2\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\right)$.

Указание. Построить функцию $G(M, P)$ для полуплоскости

$$G(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{r'_0}{r_0}.$$

Решение можно также получить из решения задачи 44, положив там $\alpha = \pi$ и перейдя к декартовым координатам x, y.

46. Если ось z направлена вдоль одного из ребер, так что перпендикулярное сечение лежит в плоскости (x, y), то потенциал равен

$$u = e\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{r_{mn}} - \frac{1}{r'_{mn}} + \frac{1}{\overline{r}_{mn}} - \frac{1}{\overline{r}'_{mn}}\right),$$

где

$$r_{mn} = \sqrt{[x - (2ma + \xi)]^2 + [y - (2nb + \eta)]^2 + (z-\zeta)^2},$$
$$r'_{mn} = \sqrt{[x - (2ma - \xi)]^2 + [y - (2nb - \eta)]^2 + (z-\zeta)^2},$$
$$\overline{r}_{mn} = \sqrt{[x - (2ma + \xi)]^2 + [y - (2nb - \eta)]^2 + (z-\zeta)^2},$$
$$\overline{r}'_{mn} = \sqrt{[x - (2ma - \xi)]^2 + [y - (2nb + \eta)]^2 + (z-\zeta)^2},$$

где a и b — стороны прямоугольника.

Указание. Покрыть всю плоскость (x, y) прямоугольниками, получающимися из сечения данного цилиндра путем сдвига на величину bn вдоль оси y и на величину am вдоль оси x. Объединяя четыре подобных прямоугольника, лежащих внутри области $-a \leqslant x \leqslant a$, $-b \leqslant y \leqslant b$, в одну группу и беря нечетные отражения во всех сторонах, мы получаем первое слагаемое суммы ряда. Перемещая затем всю группу по осям x и y на $2am$ и $2bn$, получим остальные члены ряда.

47. Направим ось x вдоль одного из катетов, поместив начало координат в вершину прямого угла. Тогда решение задачи можно записать в виде

$$u(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = u_{46}(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) - u_{46}(x, y, z; \eta, \xi, \zeta)$$
$$(0 \leqslant x \leqslant a, \quad y \leqslant x),$$

где u_{46} — решение задачи 46 для цилиндра с квадратным сечением, причем сторона квадрата равна a.

Указание. Плоскость $x = y$ делит цилиндр с квадратным сечением на два симметричных цилиндра с сечениями в виде прямоугольных равнобедренных треугольников. Точке (ξ, η, ζ) $(\eta < \xi)$ одного цилиндра соответствует симметричная точка (η, ξ, ζ) другого цилиндра. Беря решение задачи для цилиндра с квадратным сечением с полюсами в симметричных точках, мы получаем искомое решение задачи.

48. Решение $u = u(x, y, z)$ имеет вид

$$u = u_{46}(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) - u_{46}(x, y, z; \xi, \eta, -\zeta),$$

где $u_{46}(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ — решение задачи 46.

Указание. На плоскости $z = 0$ выполняется граничное условие $u = 0$, т. е. отражение в этой плоскости должно быть нечетным.

49. Потенциал в точке $M(x, y, z)$ точечного заряда, помещенного в точке $P(\xi, \eta, \zeta)$ внутри параллелепипеда со сторонами a, b и c, равен

$$u = e \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{r^{(1)}_{kmn}} - \frac{1}{r^{(2)}_{kmn}} + \frac{1}{r^{(3)}_{kmn}} - \frac{1}{r^{(4)}_{kmn}} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{k^{(5)}_{kmn}} - \frac{1}{k^{(6)}_{kmn}} + \frac{1}{k^{(7)}_{kmn}} - \frac{1}{k^{(8)}_{kmn}} \right],$$

где

$$r^{(1)}_{kmn} = \sqrt{[x - (2ak + \xi)]^2 + [y - (2bm + \eta)]^2 + [z - (2cn + \zeta)]^2},$$
$$r^{(2)}_{kmn} = \sqrt{[x - (2ak + \xi)]^2 + [y - (2bm + \eta)]^2 + [z - (2cn - \zeta)]^2},$$
$$r^{(3)}_{kmn} = \sqrt{[x - (2ak + \xi)]^2 + [y - (2bm - \eta)]^2 + [z - (2cn - \zeta)]^2},$$
$$r^{(4)}_{kmn} = \sqrt{[x - (2ak + \xi)]^2 + [y - (2bm - \eta)]^2 + [z - (2cn + \zeta)]^2},$$
$$r^{(5)}_{kmn} = \sqrt{[x - (2ak - \xi)]^2 + [y - (2bm - \eta)]^2 + [z - (2cn + \zeta)]^2},$$
$$r^{(6)}_{kmn} = \sqrt{[x - (2ak - \xi)]^2 + [y - (2bm + \eta)]^2 + [z - (2cn + \zeta)]^2},$$
$$r^{(7)}_{kmn} = \sqrt{[x - (2ak - \xi)]^2 + [y - (2bm + \eta)]^2 + [z - (2cn - \zeta)]^2},$$

$$r^{(8)}_{kmn} = \sqrt{[x-(2ak-\xi)]^2+[y-(2bm-\eta)]^2+[z-(2cn-\zeta)]^2},$$

a, b, c — измерения параллелепипеда, $M(x, y, z)$ — точка наблюдения, $P(\xi, \eta, \zeta)$ — точка, в которой находится заряд.

Указание. Выберем систему координат так, чтобы начало ее помещалось в одной из вершин параллелепипеда, а оси были направлены вдоль ребер. Покроем это пространство параллелепипедами, подобными данному, при помощи сдвигов по осям x, y и z на ak, bm и cn соответственно, где a, b, c — длины ребер вдоль осей x, y и z. Объединяя восемь подобных параллелепипедов, лежащих внутри области $-a \leqslant x \leqslant a$, $-b \leqslant y \leqslant b$, $-c \leqslant z \leqslant c$, в одну группу и беря нечетные отражения во всех гранях, мы получим одно слагаемое суммы, представляющей ответ. Перемещая затем всю группу по осям x, y, z на расстояния $2ak$, $2bm$, $2cn$, получим остальные слагаемые суммы.

Решение этой задачи сходно с решением задачи 46.

2. Функция источника для областей со сферическими (круговыми) и плоскими границами.

50. Если обозначить a-радиус сферы, e — величину заряда, O — центр сферы, M — точку наблюдения, M_0 — положение заряда (рис. 41), то решение можно написать в виде

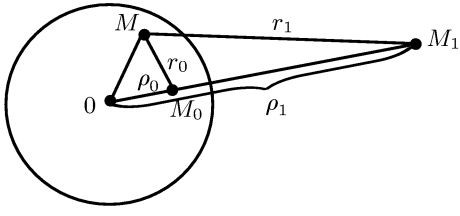


Рис. 41

$$u = e\left(\frac{1}{r_0} - \frac{a}{\rho_0}\frac{1}{r_1}\right),$$

где

$$r_0 = r_{MM_0}, \quad \rho_0 = OM_0,$$
$$r_1 = MM_1,$$

M_1 — точка, лежащая на продолжении OM_0 и полученная из M_0 при помощи преобразования обратных радиусов-векторов.

Решение. Задача состоит в отыскании функции, гармонической во всех внутренних точках сферы, кроме точки M_0, в окрестности которой она представима в виде

$$u = \frac{e}{r_0} + v(M),$$

где v —потенциал индуцированного поля, причем на поверхности сферы

$$u = 0.$$

Для отыскания v следует использовать преобразование обратных радиусов

$$OM_0 \cdot OM_1 = a^2.$$

Помещая в точку M_1 изображение заряда M_0, напишем

$$u = \frac{e}{r_0} + \frac{e_1}{r_1},$$

где e_1 — величина заряда в точке M_1. Условие $u = 0$ на Σ дает

$$e_1 = \frac{-r}{r_0}\, e.$$

В самом деле, рассмотрим треугольники OMM_0 и OMM_1. Они подобны, так как имеют общий угол MOM_0 и пропорциональные стороны $\dfrac{OM_0}{OM} = \dfrac{OM}{OM_1}$ $(OM = a)$.

Отсюда следует, что

$$\frac{OM_0}{OM} = \frac{OM}{OM_1} = \frac{MM_0}{MM_1}, \quad \text{или} \quad \frac{\rho_0}{a} = \frac{a}{\rho_1} = \frac{r_0}{r_1}.$$

Таким образом, на сфере

$$\frac{r_1}{r_0} = \frac{a}{\rho_0}.$$

Поэтому функция

$$u = \left(\frac{1}{r_0} - \frac{a}{\rho_0}\,\frac{1}{r_1}\right)$$

обращается в нуль на сфере; отсюда следует также, что $e_1 = -\dfrac{a}{\rho_0}\, e$.

51. Плотность поверхностных зарядов на сфере равна

$$\sigma = -e\,\frac{a^2 - \rho_0^2}{4\pi a r_0^3}, \quad r_0 = r_{MM_0}, \quad \rho_0 = r_{OM_0},$$

где O — начало координат, M — точка наблюдения, M_0 — положение заряда, a — радиус сферы.

Решение первой краевой задачи $\Delta u = 0$ и $u\big|_{\rho=a} = f(\vartheta, \varphi)$ дается формулой

$$u = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\Sigma} \frac{a^2 - \rho_0^2}{a r_0^3}\, f\, dS,$$

где интегрирование проводится по сфере, или

$$u(\rho_0, \vartheta_0, \varphi_0) = \frac{a}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \frac{a^2 - \rho_0^2}{(a^2 - 2a\rho_0 \cos\gamma + \rho_0^2)^{3/2}}\, f(\vartheta, \varphi) \sin\vartheta\, d\vartheta,$$

где $\cos\gamma = \cos\vartheta_0 \cos\vartheta_0 + \sin\vartheta \sin\vartheta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$.

Указание. Плотность поверхностных зарядов

$$\sigma = D_n\big|_{\Sigma},$$

где D_n — проекция вектора индукции $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$ на направление внутренней нормали; так как в данном случае $\varepsilon = 1$ (пустота), то

$$4\pi\sigma = E_n\big|_{\Sigma} \quad \text{или} \quad 4\pi\sigma = -\frac{\partial u}{\partial n_{\text{вн}}}\bigg|_{\rho=a} = \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\rho=a},$$

где $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ — производная по направлению внешней нормали. Вычисления дают

$$\frac{1}{4\pi}\,\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\rho=a} = -e\,\frac{a^2 - \rho_0^2}{4\pi a r_0^3}.$$

Для решения первой краевой задачи надо воспользоваться формулой

$$u(M) = -\iint\limits_{\Sigma} u(P)\,\frac{\partial G}{\partial n_P}\,dS_p,$$

учитывая, что функция источника G есть потенциал точечного заряда величиной $\dfrac{1}{4\pi}$, получаем

$$u(M) = -\iint\limits_{\Sigma} u(P)\,[\sigma(M,\,P)]_{e=1}\,dS_p.$$

Найдем плотность поверхностных зарядов

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\rho=a}.$$

Производная $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ по направлению $\boldsymbol{n}$ равна

$$\frac{\partial u}{\partial n} = e\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_0}\right) - \frac{a}{\rho_0}\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_1}\right)\right].$$

Вычислим:

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_0}\right) = -\frac{1}{r_0^2}\,\frac{\partial r_0}{\partial n} = -\frac{1}{r_0^2}\cos(\widehat{\boldsymbol{r}_0,\,\boldsymbol{n}}),$$
$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_1}\right) = -\frac{1}{r_1^2}\,\frac{\partial r_1}{\partial n} = -\frac{1}{r_1^2}\cos(\widehat{\boldsymbol{r}_1,\,\boldsymbol{n}}).$$

Из ΔOMM_0 и ΔOMM_1 (см. рис. 41) находим

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{r}_0,\,\boldsymbol{n}}) = \frac{a^2 + r_0^2 - \rho_0^2}{2ar_0}, \quad \cos(\widehat{\boldsymbol{r}_1,\,\boldsymbol{n}}) = \frac{a^2 + r_1^2 - \rho_1^2}{2ar_1}.$$

Учитывая пропорцию $\dfrac{r_1}{r_0} = \dfrac{a}{\rho_0}$, после преобразований получим формулу для σ.

52.
$$u = e\left(\frac{1}{r_1} - \frac{a}{\rho_1}\,\frac{1}{r_0}\right)$$

(при этом сохранены обозначения задачи 50), а

$$\rho_1 = r_{OM_1}.$$

Указание. Если заряд находится вне сферы в точке $M(\rho_1,\,\vartheta_1,\,\varphi_1)$, то его изображение в силу преобразования обратных радиусов $OM_0 \cdot OM_1 = a^2$ окажется в точке $M_0(\rho_0,\,\vartheta_0,\,\varphi_0)$. Поэтому

$$u = \frac{e}{r_1} + \frac{C_1}{r_0}.$$

Определение C_1 проводится по аналогии с задачей 50.

53. Плотность поверхностных зарядов равна

$$\sigma = -e\,\frac{\rho_1^2 - a^2}{4\pi a r_1^3}.$$

Решение первой внешней краевой задачи для сферы имеет вид

$$u = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma} \frac{\rho_1^2 - a^2}{a r_1^3}\,f\,dS$$

или

$$u(\rho_1,\,\vartheta_1,\,\varphi_1)=\frac{a}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}\frac{\rho_1^2-a^2}{[a^2-2a\rho_1\cos\gamma+\rho_1^2]^{3/2}}\,f(\vartheta,\,\varphi)\sin\vartheta\,d\vartheta,$$

где

$$\cos\gamma=\cos\vartheta_1\cos\vartheta_1+\sin\vartheta\sin\vartheta_1\cos(\varphi-\varphi_1).$$

Указание. Ср. с задачами 50 и 51.

54. а) $u=e\Big(\ln\dfrac{1}{r_0}-\ln\dfrac{a}{\rho_0}\,\dfrac{1}{r_1}\Big)$; б) $u=e\Big(\ln\dfrac{1}{r_1}-\ln\dfrac{a}{\rho_1}\,\dfrac{1}{r_0}\Big)$;

в) решение первой краевой задачи внутри круга имеет вид

$$u_1(\rho_0,\,\varphi_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{a^2-\rho_0^2}{a^2+\rho_0^2-2a\rho_0\cos(\varphi-\varphi_0)}\,f(\varphi)\,d\varphi,$$

вне круга

$$u_2(\rho_1,\,\varphi_1)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\rho_1^2-a^2}{a^2+\rho_1^2-2a\rho_1\cos(\varphi-\varphi_1)}\,f(\varphi)\,d\varphi,$$

где

$$f=u\big|_{\rho=a}.$$

Здесь приняты следующие обозначения: a — радиус круга с центром в начале координат (точка O), $r_0=MM_0$, $r_1=MM_1$, $\rho_0=OM_0$, $\rho_1=OM_1$, $M_0(\rho_0,\,\varphi_0)$ — положение заряда, $M_1(\rho_1,\,\varphi_1)$ — положение его изображения.

Указание. Для нахождения решения задач а) и б), очевидно надо поступить так же, как и в задаче 50, учитывая, однако, что в плоском случае потенциал вблизи заряда имеет логарифмическую особенность.

Полагая $e=\dfrac{1}{2\pi}$, получим функцию источника G. Вычисление нормальных производных $\dfrac{\partial G}{\partial n}$ приводит к выражениям

$$\frac{\partial G_1}{\partial n}\bigg|_{\rho=a}=-\frac{1}{2\pi a}\,\frac{a^2-\rho_0^2}{r_0^2}\quad\text{(заряд внутри круга)},$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial n}\bigg|_{\rho=a}=-\frac{1}{2\pi a}\,\frac{\rho_1^2-a^2}{r_1^2}\quad\text{(заряд вне круга)}.$$

55. а) Для полусферы, лежащей на плоскости $z=0$ (в области $z\geqslant 0$) функция источника имеет вид

$$G=G_{50}(M,\,M_0)-G_{50}(M,\,M_0'),\tag{1}$$

где

$$G_{50}=\frac{1}{4\pi}\Big(\frac{1}{r_0}-\frac{a}{\rho_0}\,\frac{1}{r_1}\Big)$$

(см. задачу 50), $M_0'(\rho_0,\,\pi-\vartheta_0,\,\varphi_0)$ — точка, симметричная токе $M_0(\rho_0,\,\vartheta_0,\,\varphi_0)$ относительно плоскости $z=0$ (рис. 42).

б) Для одной четвертой части сферы (рис. 43), ограниченной плоскостями $z=0$, $x=0$ и поверхностью сферы, имеем

$$G=G_{50}(M,\,M_0)-G_{50}(M,\,M_0')+G_{50}(M,\,M_0'')-G_{50}(M,\,M_0'''),\tag{2}$$

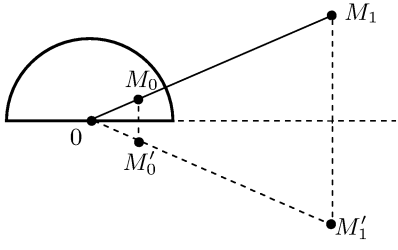


Рис. 42

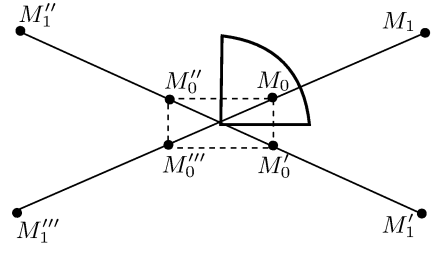


Рис. 43

где $M_0(\rho_0,\, \vartheta_0,\, \varphi_0)$, $M_0'(\rho_0,\, \pi-\vartheta_0,\, \varphi_0)$, $M_0''(\rho_0,\, \pi-\vartheta_0,\, \pi+\varphi_0)$, $M_0'''(\rho_0,\, \vartheta_0,\, \pi+\varphi_0)$ — место нахождения источника и его изображений.

Указание. а) Требуя выполнения граничного условия $u=0$ на сфере, мы получаем $G_{50}(M,\, M_0)$; чтобы удовлетворить условию $u=0$ при $z=0$, необходимо поместить в точку M_0' заряд $-\dfrac{1}{4\pi}$ и соответственно в точку M_1' — заряд $+\dfrac{1}{4\pi}$, что дает нам $-G_{50}(M,\, M_0')$.

б) Чтобы удовлетворить условиям $u=0$ при $x=0$ и $z=0$ (на сторонах двугранного угла величиной $\dfrac{\pi}{2}$), необходимо поместить на сфере радиуса ρ_0 источники в точках M_0', M_0'', M_0'''. Отражение в сфере дает заряды в M_1, M_1', M_1'', M_1''', группируя которые мы и получим формулу (2).

56. а) Функция источника первой внутренней краевой задачи для полукруга $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ равна

$$G(\rho,\, \varphi;\, \rho_0,\, \varphi_0) = G_{54}(\rho,\, \varphi;\, \rho_0,\, \varphi_0) - G_{54}(\rho,\, \varphi;\, \rho_0,\, 2\pi-\varphi_0), \qquad (1)$$

где

$$G_{54} = \frac{1}{2\pi}\,\ln\frac{\rho_0 r_1}{a r_0}$$

(см. задачу 54).

б) Для четвертой части круга $0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ имеем

$$G(\rho,\, \varphi;\, \rho_0,\, \varphi_0) = G_{54}(\rho,\, \varphi;\, \rho_0,\, \varphi_0) - G_{54}(\rho,\, \varphi;\, \rho_0,\, 2\pi-\varphi_0) - \\ - G_{54}(\rho,\, \varphi;\, \rho_0,\, \pi-\varphi_0) - G_{54}(\rho,\, \varphi;\, \rho_0,\, \pi+\varphi_0). \qquad (2)$$

в) Функция источника сектора $\rho \leqslant a$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha = \dfrac{\pi}{n}$ имеет вид

$$G(\rho,\, \varphi;\, \rho_0,\, \varphi_0) = \sum_{k=0}^{n-1}[G_{54}(\rho,\, \varphi;\, \rho_0,\, 2k\alpha+\varphi_0) - \\ - G_{54}(\rho,\, \varphi;\, \rho_0,\, 2k\alpha-\varphi_0)]. \qquad (3)$$

Отсюда, в частности, сразу получаются формулы (1) (при $n=1$) и (2) (при $n=2$).

Решение. в) Чтобы удовлетворить условию $G=0$ при $\varphi=0$ и $\varphi=\alpha$, помещаем $2n-1$ зарядов на окружности $\rho=\rho_0$ — в точ-

ках $\varphi_k = 2k\alpha + \varphi_0$ положительные заряды и в точках $\varphi'_k = 2k\alpha - \varphi_0$ отрицательные заряды, после чего производим отражение всей системы $2n$ зарядов в сфере $\rho = a$, т. е. помещаем заряды противоположных знаков в точках $\rho = \rho_1 = \dfrac{a^2}{\rho_0}$, $\varphi = \varphi'_k$ (заряды отрицательные) и $\rho = \rho_1$, $\varphi = \varphi_k$ (заряды положительные). Группируя попарно заряды в $M_0^{(k)}(\rho_0, \varphi_k)$ и $M_1^{(k)}(\rho_1, \varphi_k)$ и суммируя их действие, получаем формулу (3).

57. Потенциал поля, создаваемого точечным зарядом e, помещенным внутри сферического слоя $a \leqslant \rho \leqslant b$, равен

$$u(M, M_0) = e \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e_n}{r_n} - \frac{e'_n}{r'_n} \right), \tag{1}$$

где $M(\rho, \vartheta, \varphi)$ — точка наблюдения, $M_0(\rho_0, \vartheta_0, \varphi_0)$ — точка, в которой находится исходный заряд, $r_n = MM_n$, $r'_n = MM'_n$, $M_n(\rho_n, \vartheta_0, \varphi_0)$ и $M'_n(\rho'_n, \vartheta_0, \varphi_0)$ — точки, в которых помещены положительные заряды e_n и отрицательные заряды — e'_n, причем

$$e_n = \begin{cases} \left(\dfrac{a}{b}\right)^k & \text{при } n = 2k, \\ \left(\dfrac{b}{a}\right)^{k+1} & \text{при } n = 2k+1, \end{cases} \qquad e'_n = \begin{cases} \left(\dfrac{a}{b}\right)^k \dfrac{a}{\rho_0} & \text{при } n = 2k, \\ \left(\dfrac{b}{a}\right)^k \dfrac{b}{\rho_0} & \text{при } n = 2k+1, \end{cases} \tag{2}$$

$$\rho_n = \begin{cases} \left(\dfrac{a^2}{b^2}\right)^k \rho_0 & \text{при } n = 2k, \\ \left(\dfrac{b^2}{a^2}\right)^{k+1} \rho_0 & \text{при } n = 2k+1, \end{cases} \qquad \rho'_n = \begin{cases} \left(\dfrac{a^2}{b^2}\right)^k \dfrac{a^2}{\rho_0} & \text{при } n = 2k, \\ \left(\dfrac{b^2}{a^2}\right)^k \dfrac{b^2}{\rho_0} & \text{при } n = 2k+1. \end{cases} \tag{3}$$

Ряд (1) сходится равномерно и абсолютно.

Р е ш е н и е. Все заряды e_n и e'_n будут, очевидно, находиться на луче $\varphi = \varphi_0$, $\vartheta = \vartheta_0$, их положение на луче определяется расстояниями от центра ρ_n и ρ'_n. При определении e_n, e'_n, ρ_n и ρ'_n учтем, что: 1) положение заряда определяется в результате последовательного отражения в сферах $\rho = a$ и $\rho = b$ с помощью преобразований обратных радиусов, при которых $\rho_n \rho'_n = a^2$ или $\rho_n \rho'_n = b^2$; 2) при каждом отражении величина заряда меняется в $-\dfrac{a}{\rho_0}$ или в $-\dfrac{b}{\rho_0}$ раз.

Пусть $e_0 = 1$ — заряд в точке M_0. При первом отражении в сферах $\rho = a$ и $\rho = b$ получаем заряды $e'_0 = \dfrac{a}{\rho_0}$ и $e'_1 = \dfrac{b}{\rho_0}$ в точках $\rho'_0 = \dfrac{a^2}{\rho_0}$ и $\rho'_1 = \dfrac{b^2}{\rho_0}$. Строя затем их изображения, находим $e_1 = \dfrac{b}{\rho'_0} e'_0 = \dfrac{b}{a}$ и $e_2 = \dfrac{a}{\rho'_1} e'_1 = \dfrac{a}{b}$ в точках $\rho_1 = \dfrac{b^2}{\rho'_0} = \dfrac{b^2}{a^2} \rho_0$ и $\rho_2 = \dfrac{a^2}{\rho'_1} = \dfrac{a^2}{b^2} \rho_0$.

Продолжая рассуждения, видим, что четные заряды находятся внутри сферы $\rho = a$, а нечетные — вне сферы $\rho = b$. Нетрудно поэтому написать рекуррентные формулы

$$e_{2k+1} = \frac{b}{a}\, e_{2k-1}, \quad e_{2k} = \frac{a}{b}\, e_{2k-2}, \tag{4}$$

$$\rho_{2k+1} = \frac{b^2}{a^2}\, \rho_{2k-1}, \quad \rho_{2k} = \frac{a^2}{b^2}\, \rho_{2k-2} \tag{5}$$

и аналогичные формулы для e'_{2k}, ρ'_{2k}, e'_{2k+1}, ρ'_{2k+1}. Отсюда и находим выражения (2), (3) для e_n, e'_n и ρ_n и ρ'_n. Суммируя потенциалы

$$\frac{e_n}{r_n} \quad \text{и} \quad -\frac{e'_n}{r'_n},$$

получаем ряд (1).

Рассмотрим общий член ряда

$$g_n = \frac{e_n}{r_n} - \frac{e'_n}{r'_n}$$

при достаточно больших n. Через точки OM_1M_n проводим плоскость; пусть $n = 2k$. Из ΔOMM_{2k} находим

$$r_{2k} = \sqrt{\rho^2 + \rho_{2k}^2 - 2\rho\rho_{2k}\cos\gamma},$$

где

$$\cos\gamma = \frac{\rho^2 + \rho_0^2 - r_0^2}{2\rho\rho_0}.$$

Аналогично находим

$$r'_{2k} = \sqrt{\rho^2 + (\rho'_{2k})^2 - 2\rho\rho'_{2k}\cos\gamma}.$$

Так как $\rho_{2k} = \left(\frac{a}{b}\right)^{2k} \rho_0 \to 0$ при $k \to \infty$, то

$$\lim_{k\to\infty} r_{2k} = \rho, \quad \lim_{k\to\infty} r'_{2k} = \rho.$$

С другой стороны, $e_{2k} = \left(\frac{a}{b}\right)^k \to 0$, $e'_{2k} = e_{2k}\,\frac{a}{\rho_0} \to 0$ при $k \to \infty$. Поэтому

$$|g_{2k}| < C_k = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{a}{\rho_0}\right)\left(\frac{a}{b}\right)^k. \tag{6}$$

Пусть $n = 2k+1$. Так как $\rho_{2k+1} > b$, $\rho'_{2k+1} > b$ и при $k \to \infty$ неограниченно возрастают, то

$$\frac{1}{r_{2k+1}} < \frac{1}{2\rho_{2k+1}} = \frac{1}{2\rho_0}\left(\frac{a}{b}\right)^{2k+2}, \quad \frac{1}{r'_{2k+1}} < \frac{1}{2\rho'_{2k+1}} = \frac{\rho_0}{2a^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{2k+2},$$

с другой стороны,

$$e_{2k+1} = \left(\frac{b}{a}\right)^{k+1}, \quad e'_{2k+1} = \left(\frac{b}{a}\right)^{k+1}\frac{a}{\rho_0},$$

так что

$$|g_{2k+1}| < \frac{e_{2k+1}}{r_{2k+1}} + \frac{e'_{2k+1}}{r'_{2k+1}} \leqslant \frac{1}{b}\left(1 + \frac{a}{\rho_0}\right)\left(\frac{a}{b}\right)^k = C_k. \tag{7}$$

Из мажорантных оценок (6) и (7) следует равномерная абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n$. Его дифференцируемость доказывается аналогично.

Предельные случаи:

а) при $a \to 0$ все члены ряда (1) обращаются в нуль, кроме двух,

$$\frac{e_0}{r_0} - \frac{e_1'}{r_1'},$$

в результате чего мы получаем решение внутренней краевой задачи для сферы

$$u = u_{50} = e\left(\frac{1}{r_0} - \frac{b}{\rho_0}\,\frac{1}{r_1'}\right)$$

(см. задачу 50);

б) при $b \to \infty$ получаем

$$u = u_{52} = e\left(\frac{1}{r_0} - \frac{a}{\rho_0}\,\frac{1}{r_0'}\right)$$

— решение внешней задачи для сферы (см. задачу 52).

58. Функция источника внутри кольца дается формулой

$$G(M,\, M_0) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \ln\frac{e_n r_n'}{r_n e_n'} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\ln\frac{e_n}{r_n} - \ln\frac{e_n'}{r_n'}\right), \qquad (1)$$

где

$$M = M(\rho,\, \varphi), \quad M_0 = M(\rho_0,\, \varphi_0), \quad r_n = MM_n,$$
$$r_n' = MM_n', \quad M_n = M(\rho_n,\, \varphi_0), \quad M_n' = M(\rho_n',\, \varphi_0),$$

величины e_n, e_n', ρ_n и ρ_n' определяются по формулам (2), (3) задачи 57.

Ряд (1) сходится равномерно и абсолютно, так же как и ряды, получаемые из него почленным дифференцированием.

Предельные случаи:

а) $a = 0$, $u = u_{54\text{а}} = e\left(\ln\dfrac{1}{r_0} - \ln\dfrac{b}{\rho_0}\,\dfrac{1}{r_1'}\right)$ (см. задачу 54, а));

б) $b = \infty$, $u = u_{54\text{б}} = e\left(\ln\dfrac{1}{r_0} - \ln\dfrac{a}{\rho_0}\,\dfrac{1}{r_0'}\right)$ (см. задачу 54, б)).

59. Если заряд помещен в точке $M_1(\rho_1,\, \vartheta_0,\, \varphi_0)$, то потенциал в присутствии заряженной сферы

$$u(M,\, M_0) = \frac{e_1}{r} + \frac{ea}{\rho_1}\,\frac{1}{r} + u_{52},$$

где $u_{52} = e\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{a}{\rho_1}\,\dfrac{1}{r_0}\right)$ — потенциал точечного заряда в присутствии заземленной сферы (см. задачу 52), $M = M(r,\, \vartheta,\, \varphi)$ — точка наблюдения, $M_0(\rho_0,\, \vartheta_0,\, \varphi_0)$ — точка, в которой находится изображение заряда,

$$\rho_0 = \frac{a^2}{\rho_1}, \quad r_0 = MM_0, \quad r_1 = MM_1, \quad r = OM.$$

Плотность поверхностных зарядов

$$\sigma = \frac{1}{4\pi a^2}\left(e_1 + \frac{ea}{\rho_1}\right) - \frac{e}{4\pi}\,\frac{\rho_1^2 - a^2}{ar_1^3} = \sigma_0 + \sigma_{\text{инд}},$$

где $\sigma_{\text{инд}} = \dfrac{e}{4\pi a}\left(\dfrac{1}{\rho_1} - \dfrac{\rho_1^2 - a^2}{r_1^3}\right)$ — плотность индуцированных зарядов.

Указание. Решение следует искать в виде

$$u = U + u_{52}, \tag{1}$$

где $U = \dfrac{aV}{r}$ — потенциал поля, создаваемого сферой, заряженной до потенциала V. Для определения V используется равенство

$$4\pi e_1 = -\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial r}\,dS = 4\pi aV - \iint\limits_S \frac{\partial u_{52}}{\partial r}\,dS. \tag{2}$$

С помощью формулы Грина

$$v(\rho_1,\, \vartheta_0,\, \varphi_0) = \iint\limits_S \frac{\partial G_{52}}{\partial r}\,dS$$

и соотношения

$$u_{52} = 4\pi e G_{52}$$

получаем

$$4\pi e v(\rho_1,\, \vartheta_0,\, \varphi_0) = \iint\limits_S \frac{\partial u_{52}}{\partial r}\,dS,$$

где v — решение внешней краевой задачи для сферы S при условии

$$v\big|_S = 1,$$

равное

$$v(\rho_1,\, \vartheta_0,\, \varphi_0) = \frac{a}{\rho_1}.$$

Формула (2) дает

$$e_1 = aV - \frac{ae}{\rho_1}. \tag{3}$$

Отсюда находим

$$V = \frac{e_1}{a} + \frac{2}{\rho_1}.$$

3. Функция источника в неоднородных средах.

Если характеристики среды (ε, μ, k и т. д.) терпят разрыв на некоторой поверхности, то на этой поверхности должны выполняться условия сопряжения. В электростатическом случае имеем:

$$u_1 = u_2,$$

$$\varepsilon_1\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_1 - \varepsilon_2\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_2 = 4\pi\eta,$$

где η —поверхностная плотность свободных зарядов, цифры 1 и 2 соответствуют предельным значениям с внешней и с внутренней сторон поверхности S, $\dfrac{\partial}{\partial n}$ обозначают дифференцирование по направлению

нормали. Если $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$ — вектор электрической индукции и $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} u$, то второе условие означает, что

$$D_{n_2} - D_{n_1} = 4\pi\eta.$$

Если свободных зарядов нет ($\eta = 0$), то

$$\varepsilon_1 \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_1 = \varepsilon_2 \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_2.$$

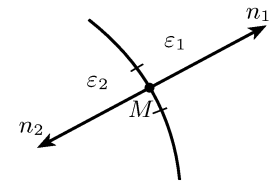


Рис. 44

Выведем формулу для поверхностной плотности зарядов на границе раздела двух сред с диэлектрической постоянными ε_1 и ε_2 (рис. 44).

Из уравнений Максвелла следует

$$E^{(1)}_{n_1} - E^{(2)}_{n_2} = 4\pi\sigma.$$

Рассматривая бесконечно малый элемент dS, мы будем иметь

$$E^{(1)}_{n_1} = 2\pi\sigma + E^{(0)}_{n_1},$$
$$E^{(2)}_{n_2} = -E^{(2)}_{n_1} = 2\pi\sigma - E^{(0)}_{n_1},$$

где $E^{(1)}_{n_1}$ и $E^{(2)}_{n_2}$ — предельные значения в точке M границы S проекций векторов $\boldsymbol{E}^{(1)}$ и $\boldsymbol{E}^{(2)}$ на направления внутренних нормалей $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$, а $E^{(0)}_{n_1}$ — значение $E^{(1)}_{n_1}$ в точке M, т. е. на самой поверхности.

Из второго условия сопряжения

$$\varepsilon_1(2\pi\sigma + E^{(0)}_{n_1}) + \varepsilon_2(2\pi\sigma - E^{(0)}_{n_1}) = 4\pi\eta$$

получаем

$$\sigma = \frac{2\eta}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} E^{(0)}_{n_1}.$$

Если истинного заряда на поверхности нет, то

$$\sigma = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} E^{(0)}_{n_1}.$$

Подставляя сюда значение $E^{(0)}_{n_1}$ на поверхности S, можно определить σ.

60. Если заряд находится в точке $M_0(\xi, \eta, \zeta)$ полупространства $z > 0$ ($\zeta > 0$), то

$$u = \begin{cases} u_1 = \dfrac{e}{\varepsilon_1}\left(\dfrac{1}{r_0} + \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\dfrac{1}{r'_0}\right) & \text{при} \quad z > 0 \ (\varepsilon = \varepsilon_1), \\ u_2 = \dfrac{2e}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\dfrac{1}{r_0} & \text{при} \quad z < 0 \ (\varepsilon = \varepsilon_2), \end{cases} \tag{1}$$

где

$$r_0 = MM_0 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$
$$r'_0 = MM'_0 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2}.$$

Из формулы (1) видно, что поле в области с диэлектрической постоянной ε_1 такое, как будто все пространство заполнено диэлектриком ε_1, а в отраженной точке $M'_0(\xi, \eta, -\zeta)$ находится добавочный

заряд

$$e' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\, e.$$

Поле в области ε_2 совпадает с полем заряда

$$e'' = \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\, e,$$

находящегося в точке M_0, если среда однородна и $\varepsilon = \varepsilon_1$.

Плотность поверхностных зарядов, индуцированных на границе $z = 0$, равна $\sigma = \varepsilon_0 \dfrac{\zeta}{2\pi \overline{r}_0^3}$.

Указание. Решение следует искать в виде

$$u_1 = \frac{e}{\varepsilon_1}\frac{1}{r_0} + \frac{e'_0}{\varepsilon_1}\frac{1}{r'_0}, \tag{2}$$

$$u_2 = \frac{e_1}{\varepsilon_1}\frac{1}{r_0}, \tag{3}$$

где e'_0 и e_1 — постоянные, подлежащие определению.

Условия сопряжения

$$u_1 = u_2, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} = \varepsilon_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} \quad \text{при} \quad z = 0$$

дают

$$e_1 = \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\, e, \quad e'_0 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\, e.$$

Плотность поверхностных зарядов равна

$$\sigma = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}\, E^{(0)}_{n_1}, \tag{4}$$

где $E^{(0)}_{n_1}$ — первичное поле заряда e при $z = 0$, находящегося в M_0, равное

$$E^{(0)}_{n_1} = -\frac{e}{\varepsilon_1}\frac{\zeta}{\overline{r}_0^3}, \tag{5}$$

где

$$\overline{r}_0 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + \zeta^2}.$$

Из формул (4) и (5) следует

$$\sigma = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}\, e\, \frac{\zeta}{2\pi \overline{r}_0^3} = e_0 \frac{\zeta}{2\pi \overline{r}_0^3}.$$

Суммарный заряд, индуцированный на плоскости $z = 0$, равен

$$e_0 = 2\pi \int_0^\infty \sigma \rho\, d\rho = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}\, e.$$

61. Потенциал электрического поля, создаваемого источником тока I, помещенным в точку $M_0(0,\, 0,\, \zeta)$, равен

$$u = \frac{I}{4\pi\sigma_2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} \frac{I_n}{4\pi\sigma_2}\left(\frac{1}{r_n} + \frac{1}{r'_n}\right) \tag{1}$$

(всюду в слое $0 < z < h$), где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-\zeta)^2}, \quad r_n = \sqrt{x^2 + y^2 + [z - (2nh + \zeta)]^2},$$

$$r'_n = \sqrt{x^2 + y^2 + [z - (2nh - \zeta)]^2}, \quad I_n = \varkappa^n I,$$
$$r' = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + \zeta)^2},$$
$$\varkappa = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \quad |\varkappa| < 1.$$

Если $\zeta = 0$, т. е. источник находится на плоскости $z = 0$, то $r_n = r'_n$ и потенциал равен

$$u = \frac{I}{2\pi\sigma_2 r} + \frac{I}{2\pi\sigma_2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} \frac{I_n}{r_n},$$

где

$$r_n = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - 2nh)^2}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Плотность тока при $z = 0$ равна

$$j_x = \frac{xI}{2\pi\rho^3} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{xI_n}{[\rho^2 + 4n^2h^2]^{3/2}},$$

$$j_y = \frac{yI}{2\pi\rho^3} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{yl_n}{[\rho^2 + 4n^2h^2]^{3/2}}, \quad j_z = 0.$$

Указание. Требуется решить задачу

$$\Delta u_1 = 0 \quad \text{при} \quad 0 < z < h,$$
$$\Delta u_2 = 0 \quad \text{при} \quad z > h,$$
$$\left.\begin{aligned} &u_1 = u_2, \\ &\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad z = h, u \approx \frac{I}{4\pi\sigma_2} \frac{1}{r} \quad \text{при} \quad r \to 0,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \quad x \neq 0, \quad y \neq 0 \quad (r \neq 0).$$

Последнее условие означает, что отражение в плоскости $z = 0$ будет четным. При отражении в плоскости $z = h$ надо воспользоваться методом решения задачи 60. Следует учесть также, что для построения решения в слое $0 < z < h$ нет необходимости вычислять решение в области $z > h$.

Чтобы удовлетворить краевому условию $\left(\left.\frac{\partial u_1}{\partial z}\right|_{z=0} = 0\right)$, необходимо поместить в точке $M(0, 0, -\zeta)$ источник тока I. Чтобы удовлетворить условиям сопряжения при $z = h$, теперь необходимо поместить в точки $M(0, 0, 2h - \zeta)$ и $M(0, 0, 2h + \zeta)$ источники $I_1 = \varkappa I$. Но этим мы нарушили условия при $z = 0$. Чтобы удовлетворить условию при $z = 0$, необходимо в точки $M(0, 0, 2h + \zeta)$ и $M(0, 0, -2h - \zeta)$ поместить источники тока I_1. Но этим мы нарушили условия сопряжения при $z = h$. Продолжая этот процесс, мы сможем удовлетворить всем граничным условиям лишь с помощью ряда (1).

Абсолютная и равномерная сходимость этого ряда, а также и производных рядов, обеспечивается условием

$$|\varkappa| < 1.$$

Пользуясь формулой $j = -\sigma \operatorname{grad} u$, нетрудно найти составляющие плотности тока $j_x,\ j_y,\ j_z$ при $z = 0$.

62. Потенциал над плоскостью x, z ($y > 0$) равен сумме потенциалов самого заряда e и его семи изображений, расположенных следующим образом (рис. 45):

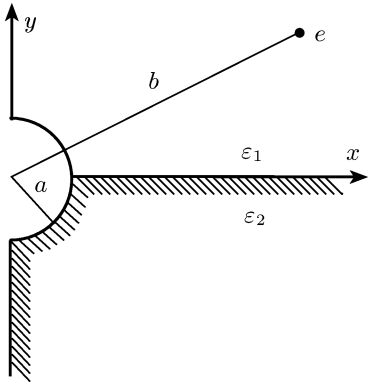


Рис. 45

e в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$,
$-e$ в точке $M_1(-x_0, y_0, z_0)$,
e' в точке $M_0'(x_0, -y_0, z_0)$,
$-e'$ в точке $M_1'(-x_0, -y_0, z_0)$,
$-ce$ в точке $M_2(c^2x_0, c^2y_0, c^2z_0)$,
$-ce'$ в точке $M_2'(c^2x_0, -c^2y_0, c^2z_0)$,
ce в точке $M_3(-c^2x_0, c^2y_0, c^2z_0)$,
ce' в точке $M_3'(-c^2x_0, -c^2y_0, c^2z_0)$,

где

$$c = \frac{a}{b}, \quad e' = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}\, e.$$

Потенциал в диэлектрике при $y < 0$ можно получить, используя только изображения в области $y > 0$ и подставляя вместо e заряд

$$e'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}.$$

63. Потенциал электрического поля, создаваемого точечным источником тока, находящимся в точке $M_0(0, -h, \zeta)$, мощностью I_0, равен

$$u_1 = \frac{I_0}{4\pi\sigma_1}\left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_0'}\right) + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}\,\frac{I_0}{4\pi\sigma_1}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1'}\right) \quad \text{при} \quad y < 0,$$

где

$$r_0 = \sqrt{x^2 + (y+h)^2 + (z-\zeta)^2}, \quad r_0' = \sqrt{x^2 + (y+h)^2 + (z+\zeta)^2},$$
$$r_1 = \sqrt{x^2 + (y-h)^2 + (z-\zeta)^2}, \quad r_1' = \sqrt{x^2 + (y-h)^2 + (z+\zeta)^2}.$$

Плотность тока при $y = 0,\ \zeta = 0$

$$j_x = \frac{\sigma_1\sigma_2 I_0}{(\sigma_1 + \sigma_2)\pi}\,\frac{x}{R^3}, \quad j_y = 0, \quad j_z = \frac{\sigma_1\sigma_2 I_0}{(\sigma_1 + \sigma_2)\pi}\,\frac{z}{R^3},$$

так что

$$|j| = \frac{\sigma_1\sigma_2 I_0}{(\sigma_1 + \sigma_2)\pi}\,\frac{\rho}{R^3}, \quad R = \sqrt{\rho^2 + h^2}, \quad \rho^2 = x^2 + z^2.$$

64. Потенциал поля вне сфер равен

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{e_n}{r_n} - \frac{e_n'}{r_n'}\right),$$

где e_n и e_n' — заряды, величина которых определяется по рекуррентным формулам

$$e_{2k+1} = \frac{a}{b}\,\frac{c - \rho_{2k+1}}{\rho_{2k-1}}\,e_{2k-1}, \quad e_{2k+2} = \frac{a}{b}\,\frac{c - \rho_{2k+1}'}{\rho_{2k+1}'}\,e_{2k},$$

$$e'_{2k+1} = \frac{a}{b}\,\frac{c-\rho'_{2k+1}}{\rho'_{2k-1}}\,e'_{2k-1}, \quad e'_{2k+2} = \frac{a}{b}\,\frac{c-\rho_{2k+1}}{\rho_{2k+1}}\,e'_{2k}.$$

Эти заряды находятся в точках (рис. 46) $M_n(\rho_n, \vartheta_0, \varphi_0)$ и $M'_n(\rho'_n,$

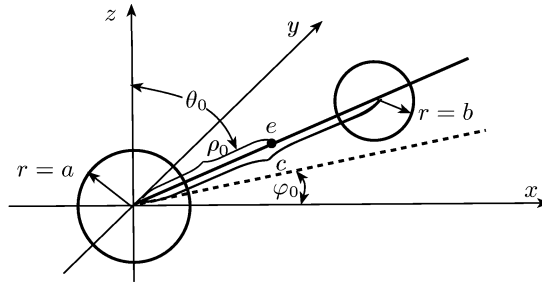


Рис. 46

$\vartheta_0, \varphi_0)$, где ρ_n и ρ'_n определяются рекуррентными формулами

$$\rho_{2k+1} = \frac{(c^2-b^2)\rho_{2k-1} - a^2c}{c\rho_{2k-1} - a^2}, \quad \rho'_{2k+1} = \frac{(c^2-b^2)\rho'_{2k-1} - a^2c}{c\rho'_{2k-1} - a^2},$$

$$\rho_{2k+2} = \frac{a^2(c-\rho_{2k})}{c(c-\rho_{2k}) - b^2}, \quad \rho'_{2k+2} = \frac{a^2(c-\rho'_{2k})}{c(x-\rho'_{2k}) - b^2},$$

причем

$$\rho'_0 = \frac{a^2}{\rho_0}, \quad \rho'_1 = \frac{c(c-\rho_0)-b^2}{c-\rho_0}, \quad \rho_1 = \frac{c(c-\rho'_0)-b^2}{c-\rho'_0},$$

$$e_0 = e, \quad e'_0 = \frac{a}{\rho_0}\,e, \quad e'_1 = \frac{b}{c-\rho_0}\,e, \quad e_1 = \frac{ab}{c\rho_0 - a^2}\,e,$$

$$r_n = \sqrt{\rho^2 + \rho_n^2 - 2\rho\rho_n\cos\alpha_n}, \quad r'_n = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2_n - 2\rho\rho'_n\cos\alpha'_n},$$

где α_n — угол между $OM_{\text{и}}$ и $OM_{\text{н}}$, O — начало координат, $M_{\text{и}}$ — место источника, $M_{\text{н}}$ — точка наблюдения.

§ 4. Метод разделения переменных

1. Краевые задачи для круга, кольца и сектора.

65. Если на границе круга радиуса a искомая функция $u|_{\rho=a} = f(\varphi)$, то

$$u(\rho, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n (A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi) \quad \text{при} \quad \rho < a, \qquad (1)$$

где A_n, B_n — коэффициенты Фурье функции $f(\varphi)$, равные

$$\left.\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ B_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Из формулы (1) можно получить интегральное представление для решения первой внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа внутри круга (формулу Пуассона)

$$u(\rho,\,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{a^2-\rho^2}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\varphi-\psi)}\,f(\psi)\,d\psi. \tag{3}$$

Р е ш е н и е. Требуется найти функцию $u(\rho,\,\varphi)$, непрерывную в круге $0\leqslant\rho\leqslant a$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\,\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0 \tag{4}$$

внутри этого круга и граничному условию

$$u|_{\rho=a}=f(\varphi), \tag{5}$$

где f — заданная непрерывная функция.

Задача решается методом разделения переменных (см. [7, гл. IV, § 3]). Решение ищется в виде суммы

$$u(\rho,\,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(\rho,\,\varphi),$$

где

$$u_n(\rho,\,\varphi)=R_n(\rho)\Phi_n(\varphi),$$

$$\Phi_n(\varphi)=\begin{cases}\cos n\varphi,\\ \sin n\varphi,\end{cases}\qquad R_n(\rho)=\begin{cases}\rho^n,\\ \rho^{-n}.\end{cases} \tag{6}$$

66. $$u(\rho,\,\varphi)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{\rho}\right)^n(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi), \tag{1}$$

где a — радиус круга, A_n и B_n определяются по формулам (2) задачи 65.

У к а з а н и е. Требуется найти функцию $u(\rho,\,\varphi)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\,\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0\quad\text{вне круга,}$$

краевому условию $u\,|_{\rho=a}=f(\varphi)$ и условию ограниченности при $\rho\to\infty$.

Решение ищется методом разделения переменных. Из условия ограниченности на бесконечности следует, что $C_n=0$, и мы получаем частное решение в виде

$$u_n(\rho,\,\varphi)=\left(\frac{a}{\rho}\right)^n(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi).$$

Общее же решение дается рядом

$$u(\rho,\,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(\rho,\,\varphi).$$

Пользуясь краевым условием при $\rho=a$, приходим к (1).

67. а) Решение второй внутренней краевой задачи для круга

$$u(\rho,\,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^n}{na^{n-1}}(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)+C_1; \tag{1}$$

б) решение внешней задачи

$$u(\rho,\,\varphi)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n+1}}{n\rho^n}(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)+C_2; \tag{2}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, a — радиус круга, A_n и B_n — коэффициенты Фурье функции $f(\varphi)=\dfrac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\rho=a}$, ν — направление внешней нормали к рассматриваемой области.

Указание. а) Требуется найти функцию $u(\rho,\,\varphi)$, непрерывную в круге $0\leqslant\rho\leqslant a$, удовлетворяющую уравнению $\Delta u=0$ внутри этого круга и граничному условию

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\rho=a}=f(\varphi)$$

на его границе при $\rho=a$, а также условию $\displaystyle\int_0^{2\pi}f(\varphi)\,d\varphi=0$.

б) Требуется найти функцию $u(\rho,\,\varphi)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа вне круга радиуса $\rho=a$, краевому условию

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\rho=a}=f(\varphi)$$

и условию ограниченности при $\rho\to\infty$.

Решение обеих задач ищется методом разделения переменных аналогично задаче 65.

68. а) $\displaystyle u(\rho,\,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^n}{a^{n-1}(n+ah)}\,(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)+\frac{A_0}{2h}$, (1)

б) $\displaystyle u(\rho,\,\varphi)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n+1}}{(n-ah)\rho^n}\,(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)+\frac{A_0}{2h}$, (2)

где A_n и B_n — коэффициенты Фурье функции $f(\varphi)$, определяемые по формулам (2) задачи 65.

69. Потенциал электростатического поля равен

$$u=\begin{cases}\dfrac{V_1+V_2}{2}+\dfrac{V_1-V_2}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{2a\rho\sin\varphi}{a^2-\rho^2}\\[2ex] \qquad\qquad\text{при}\quad \rho<a\ \text{(внутри цилиндра)},\\[2ex] \dfrac{V_1+V_2}{2}+\dfrac{V_1-V_2}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{2a\rho\sin\varphi}{\rho^2-a^2}\\[2ex] \qquad\qquad\text{при}\quad \rho>a\ \text{(вне цилиндра)}.\end{cases} \tag{1}$$

Составляющие поля E_ρ и E_φ вычисляются по формулам

$$E_\rho = -\frac{\partial u}{\partial \rho}, \quad E_\varphi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Плотность поверхностных зарядов

$$\sigma = -\frac{V_1 - V_2}{a\pi^2 \sin\varphi}.$$

Указание. Метод разделения переменных дает решение в виде рядов

$$u = \begin{cases} \dfrac{V_1+V_2}{2} + \dfrac{2(V_1-V_2)}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{2k+1}\frac{\sin(2k+1)\varphi}{2k+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{внутри цилиндра } (\rho < a), \\ \dfrac{V_1+V_2}{2} + \dfrac{2(V_1-V_2)}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a}{\rho}\right)^{2k+1}\frac{\sin(2k+1)\varphi}{2k+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{вне цилиндра } (\rho > a). \end{cases} \tag{2}$$

Ряды, стоящие справа, могут быть просуммированы, если воспользоваться формулой

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{2k+1} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}. \tag{3}$$

В самом деле,

$$J = \sum_{k=0}^{\infty}\xi^{2k+1}\frac{\sin(2k+1)\varphi}{2k+1} = \frac{1}{2i}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\xi^{2k+1}e^{i(2k+1)\varphi}}{2k+1} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\xi^{2k+1}e^{-i(2k+1)\varphi}}{2k+1}\right\}.$$

Обозначая

$$z = \xi e^{i\varphi} = \xi\cos\varphi + i\xi\sin\varphi, \quad z^* = \xi e^{-i\varphi} = \xi\cos\varphi - i\xi\sin\varphi$$

и пользуясь формулой (3), получаем

$$J = \frac{1}{4i}\ln\frac{(1+z)(1-z^*)}{(1-z)(1+z^*)} = \frac{1}{4i}\ln\frac{1-\xi^2+i2\xi\sin\varphi}{1-\xi^2-i2\xi\sin\varphi} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\xi\sin\varphi}{1-\xi^2}.$$

Отсюда в силу (2) и следует формула (1) $\left(\xi = \dfrac{\rho}{a}\right.$ при $\rho < a$ или $\left.\xi = \dfrac{a}{\rho}\right.$ при $\rho > a\big)$.

70. а) Решения внутренних краевых задач имеют вид:

1) $u(\rho, \varphi) = A\dfrac{\rho}{a}\sin\varphi$;

2) $u(\rho, \varphi) = B + \dfrac{3A}{a}\rho\sin\varphi - 4A\left(\dfrac{\rho}{a}\right)^3\sin 3\varphi$;

3) $u(\rho, \varphi) = A\dfrac{\rho}{a}\sin\varphi - \dfrac{8A}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{2k}\frac{\cos 2k\varphi}{4k^2-9}$.

б) Решения внешних краевых задач даются выражениями:

1′) $u(\rho, \varphi) = A\dfrac{a}{\rho}\sin\varphi$;

$2')\ u(\rho,\varphi) = B + \dfrac{3Aa}{\rho}\sin\varphi - 4A\left(\dfrac{a}{\rho}\right)^3 \sin 3\varphi;$

$3')\ u(\rho,\varphi) = A\dfrac{a}{\rho}\sin\varphi - \dfrac{8A}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{a}{\rho}\right)^{2k}\dfrac{\cos 2k\varphi}{4k^2-9}.$

Указание. В задачах 2) и 3) использовать тригонометрическую формулу

$$\sin^3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin 3\varphi.$$

71. Предполагая, что поток движется в отрицательном направлении оси x, введем цилиндрическую систему координат (ρ, φ, z) с осью z вдоль оси цилиндра и полярной осью вдоль оси x; тогда распределение температуры в цилиндре дается формулой

$$u(\rho,\varphi) = -\frac{q}{k}\rho\cos\varphi + \text{const}.$$

Условие $\int\limits_0^{2\pi} Q d\varphi = 0$ выполнено; задача имеет решение.

72.

$$u(\rho,\varphi) = \begin{cases} u_1(\rho,\varphi) = \dfrac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)V_1 + (3\varepsilon_1-\varepsilon_2)V_2}{4\varepsilon_1} + \\ \quad + \dfrac{4(V_1-V_2)}{\pi}\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_2 b^{2m+1}\rho^{2m+1}}{(\varepsilon_2+\varepsilon_1)b^{4m+2}+(\varepsilon_2-\varepsilon_1)a^{4m+2}} \times \\ \qquad\qquad \times \dfrac{\sin(2m+1)\varphi}{2m+1} \quad \text{при} \quad \rho < a, \\ u_2(\rho,\varphi) = \dfrac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(V_1-V_2)+4\varepsilon_1 V_2}{4\varepsilon_1} + \\ \quad + \dfrac{2(V_1-V_2)}{\pi}\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\rho^{4m+2}+(\varepsilon_2-\varepsilon_1)a^{4m+2}]}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)b^{4m+2}+(\varepsilon_2-\varepsilon_1)a^{4m+2}}\frac{b^{2m+1}}{\rho^{2m+1}} \times \\ \qquad\qquad \times \dfrac{\sin(2m+1)\varphi}{2m+1} \quad \text{при} \quad a < \rho < b. \end{cases}$$

Указание. Требуется найти решения уравнения Лапласа в круге радиуса a ($u = u_1$) и кольце $a \leqslant \rho \leqslant b$ ($u = u_2$) при граничном условии

$$u_2(b,\varphi) = \begin{cases} V_1 & \text{при} \quad 0 < \varphi < \pi, \\ V_2 & \text{при} \quad \pi < \varphi < 2\pi \end{cases}$$

и условиях сопряжения

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= u_2, \\ \varepsilon_1\frac{\partial u_1}{\partial\rho} &= \varepsilon_2\frac{\partial u_2}{\partial\rho} \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad \rho = a.$$

Решение. Будем искать решение $u = \begin{cases} u_1 \\ u_2 \end{cases}$ в виде суммы

$$u_1 = V_2 + \hat{u}_1, \quad u_2 = V_2 + \hat{u}_2,$$

где функция $\hat{u} = \begin{cases} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{cases}$ является гармонической, удовлетворяет при $\rho = b$ краевому условию

$$\hat{u}_2 = \begin{cases} V_1 - V_2 & \text{при} \quad 0 < \varphi < \pi, \\ 0 & \text{при} \quad \pi < \varphi < 2\pi \end{cases}$$

и условиям сопряжения при $\rho = a$.

Полагая затем

$$\hat{u}_1 = R_1(\rho)\Phi(\varphi), \quad \hat{u}_2 = R_2(\rho)\Phi(\varphi),$$

находим, как обычно, функцию $\Phi(\varphi)$:

$$\Phi_n(\varphi) = \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi, \end{cases}$$

и для R_1 и R_2 получаем уравнения

$$\rho \frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dR_1}{d\rho}\right) - n^2 R_1 = 0 \quad \text{при} \quad 0 < \rho < a,$$

$$\rho \frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dR_2}{d\rho}\right) - n^2 R_2 = 0 \quad \text{при} \quad a < \rho < b$$

с условиями сопряжения

$$R_{1n}(a) = R_{2n}(a), \quad \varepsilon_1 R'_{1n}(a) = \varepsilon_2 R'_{2n}(a)$$

и условием ограниченности $R_{1n}(0)$.

Отсюда находим

$$R_{1n} = A_n \rho^n, \quad R_{2n} = B_n \rho^n + \frac{C_n}{\rho^n}.$$

Условия сопряжения дают

$$A_n = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} B_n, \quad C_n = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} a^{2n} B_n.$$

Общее решение задачи, очевидно, можно написать в виде

$$\hat{u}_2(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\rho^n + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{a^{2n}}{\rho^n}\right)(B_n \cos n\varphi + \overline{B}_n \sin n\varphi),$$

$$\hat{u}_1(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \rho^n (B_n \cos n\varphi + \overline{B}_n \sin n\varphi),$$

где B_n и $\overline{B}_n$ — коэффициенты, определяющиеся из краевого условия при $\rho = b$.

73. $$u = u(\rho, \varphi) = \frac{a^2 v_0}{\rho} \cos\varphi.$$

Указание. Вводя систему координат (ρ, φ, z), связанную с осью цилиндра и осью z вдоль его оси, получаем для потенциала скоростей $u = u(\rho, \varphi)$ краевую задачу

$$\Delta u = 0 \quad \text{при} \quad \rho > a,$$

$$-\frac{\partial u}{\partial \rho}\bigg|_{\rho=a} = v_0 \cos\varphi.$$

74. $$u = u(\rho, \varphi) = -v_0 \left(\rho + \frac{a^2}{\rho}\right) \cos\varphi.$$

Указание. Если поток движется вдоль оси x, то потенциал невозмущенного движения жидкости равен

$$u_0 = -v_0 x = -v_0 \rho \cos\varphi.$$

Полагая

$$u = u_0 + \hat{u},$$

получим для $\hat{u}$ вторую внешнюю краевую задачу

$$\Delta\hat{u} = 0 \quad \text{при} \quad \rho > a,$$
$$\left.\frac{\partial\hat{u}}{\partial\rho}\right|_{\rho=a} = v_0 \cos\varphi.$$

75. а) Если шар движется в направлении оси z, то в системе координат $(\rho, \vartheta, \varphi)$ с началом в центре шара потенциал скоростей жидкости равен

$$u = u(r, \vartheta) = \frac{1}{2} v_0 \frac{a^3}{r^2} \cos\vartheta.$$

б) Если жидкость движется в отрицательном направлении оси z, то

$$u = u(r, \vartheta) = v_0 \left(r + \frac{a^3}{2r^2}\right) \cos\vartheta.$$

Указание. а) Требуется найти решение уравнения

$$\Delta u = 0 \quad \text{при} \quad r > a$$

с граничным условием

$$-\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = v_0 \cos\vartheta$$

и условием регулярности на бесконечности.

б) Полагая

$$u = v_0 + \hat{u},$$

где

$$u_0 = v_0 z = v_0 r \cos\vartheta,$$

получим для $\hat{u}$ краевую задачу пункта а).

Решение. а) Поскольку граничное условие не зависит от φ, то и потенциал не будет зависеть от φ, т. е. $u = u(r, \vartheta)$.

Уравнение Лапласа для функции $u(r, \vartheta)$ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right) = 0.$$

Решение будем искать в виде

$$u(r, \vartheta) = R(r) \cos\vartheta,$$

что для $R(r)$ дает

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) - 2R = 0, \quad R'(a) = -v_0.$$

Полагая $R(r) = r^\sigma$, найдем

$$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = -2,$$

т. е. общее решение уравнения имеет вид $R(r) = Ar + \dfrac{B}{r^2}$, где A и B — постоянные.

Из условий при $r = a$ и на бесконечности $\left(|R(r)| < \dfrac{M}{r}\right)$ получаем

$$A = 0, \quad B = \frac{v_0 a^3}{2},$$

так что

$$R(r) = v_0 \frac{a^3}{2r^2}.$$

Задача б) после учета указания к ней решается аналогично.

76. Вводя сферическую систему координат (r, ϑ, φ) с началом в центре шара и полярной осью, направленной вдоль внешнего поля, для потенциала электростатического поля $E = -\operatorname{grad} u$ получаем

$$u_1 = -E_0 \frac{3\varepsilon_2}{2\varepsilon_2 + \varepsilon_1} r\cos\vartheta \quad \text{при} \quad r < a,$$

$$u_2 = -E_0 \left(r - \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)a^3}{2\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \frac{1}{r^2}\right)\cos\vartheta \quad \text{при} \quad r > a,$$

где a — радиус шара.

Поляризация шара равна

$$\boldsymbol{P}_1 = \frac{3}{4\pi} \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0,$$

а его дипольный момент

$$p = \frac{4}{3}\pi a^3, \quad \boldsymbol{P}_1 = a^3 \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0, \quad \varepsilon_1 = 1 + 4\pi\varkappa_1.$$

Р е ш е н и е. Чтобы определить поле внутри и вне шара, надо решить для потенциала следующую задачу.

Положим

$$u_2 = u_0 + \hat{u}_2,$$

где

$$u_0 = -E_0 z = -Er\cos\vartheta.$$

Для определения u_1 и $\hat{u}_2$ надо решить уравнения

$$\Delta u_1 = 0 \quad \text{при} \quad r < a,$$
$$\Delta \hat{u}_2 = 0 \quad \text{при} \quad r > a$$

с краевыми условиями

$$\left.\begin{aligned} u_1 - \hat{u}_2 &= -E_0 a\cos\theta, \\ \varepsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial r} - \varepsilon_2 \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial r} &= -\varepsilon_2 E_0 \cos\theta \end{aligned}\right\} \text{при} \quad r = a$$

и условием регулярности для $\hat{u}_2$ на бесконечности.

Решение этой задачи естественно искать в виде

$$u_1(r, \theta) = R_1(r)\cos\theta, \quad \hat{u}_2(r, \theta) = R_2(r)\cos\theta.$$

Подстановка в уравнения и краевые условия дает

$$r^2 R_1'' + 2rR_1' - 2R_1 = 0, \quad r^2 R_2'' + 2rR_2' - 2R_2 = 0,$$
$$R_1(a) - R_2(a) = -aE_0,$$
$$\varepsilon_1 R_1'(a) - \varepsilon_2 R_2'(a) = -\varepsilon_2 E_0, \quad |R_2| < \frac{M}{r} \quad \text{при} \quad r \to \infty,$$

где M — некоторая постоянная. Отсюда уже нетрудно найти R_1 и R_2. Зная потенциалы, нетрудно найти поля $\boldsymbol{E}_1 = -\operatorname{grad} u_1$, $\boldsymbol{E}_2 = -\operatorname{grad} u_2$.

Вектор электрической поляризации $\boldsymbol{R}_1$ шара определяется следующим равенством:

$$\boldsymbol{P}_1 = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\boldsymbol{E}_1}{4\pi}.$$

Внутри шара отлична от нуля лишь компонента E_z:

$$E_z = -\frac{\partial u_1}{\partial z} = \frac{3\varepsilon_2}{2\varepsilon_2 + \varepsilon_1} E_0,$$

так что

$$E = E_z = \frac{3\varepsilon_2}{2\varepsilon_2 + \varepsilon_1} E_0.$$

Поэтому поляризация шара равна

$$\boldsymbol{P}_1 = \frac{3\varepsilon_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{4\pi(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)} E_0.$$

77. Выбираем систему координат так, чтобы ось z была направлена вдоль оси цилиндра, а поле E_0 — вдоль оси x.

Потенциал поля внутри и вне цилиндра дается формулами

$$u_1(\rho, \varphi) = -\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0 \rho \cos\varphi \quad \text{при} \quad \rho < a,$$

$$u_2(\rho, \varphi) = -E_0 \left(\rho + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{a^2}{\rho}\right) \cos\varphi \quad \text{при} \quad \rho > a,$$

где a — радиус цилиндра.

Поле внутри цилиндра равно

$$E_1 = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0$$

и направлено вдоль оси x.

Поляризация

$$\boldsymbol{P}_1 = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\varepsilon_2}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} E_0,$$

дипольный момент на единицу длины

$$\boldsymbol{p} = \pi a^2 \boldsymbol{P}_1 = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\varepsilon_2}{2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} a^2 E_0.$$

Указание. См. задачу 76.

78. Потенциал поля вне шара равен

$$u(\boldsymbol{r}, \varphi) = -E_0 \left(\boldsymbol{r} - \frac{a^3}{r^2}\right) \cos\theta \quad \text{при} \quad \boldsymbol{r} > a,$$

если начало сферической системы координат поместить в центре шара, а полярную ось z направить вдоль внешнего поля $\boldsymbol{E}_0$.

Указание. Потенциал следует представить в виде суммы $u = u_0 + \hat{u}$, где $u_0 = -E_0 \boldsymbol{z} = -E_0 \boldsymbol{r} \cos\theta$ — потенциал внешнего поля. Для потенциала искаженной части поля $\hat{u}$ получается следующая краевая задача:

$$\Delta\hat{u} = 0 \qquad \text{при} \quad \boldsymbol{r} > a,$$
$$\hat{u} = E_0 a\cos\theta \quad \text{при} \quad \boldsymbol{r} = a.$$

79. Потенциал поля

$$u = u(\rho,\,\varphi) = -E_0\left(\rho - \frac{a^2}{\rho}\right)\cos\varphi.$$

Плотность поверхностных зарядов равна $\sigma = 2E_0\cos\varphi$.

Указание. См. задачу 78.

80. Если

$$u\,|_{\rho=a} = f(\varphi), \quad u\,|_{\rho=b} = F(\varphi),$$

то

$$u(\rho,\,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(A_n\rho^n + \frac{B_n}{\rho^n}\right)\cos n\varphi + \left(C_n\rho^n + \frac{D_n}{\rho^n}\right)\sin n\varphi\right] + \\ + B_0\ln\rho + A_0, \quad (1)$$

где

$$A_n = \frac{b^n F_n^{(1)} - a^n f_n^{(1)}}{b^{2n} - a^{2n}}, \quad B_n = \frac{[b^n f_n^{(1)} - a^n F_n^{(1)}]a^n b^n}{b^{2n} - a^{2n}}, \quad A_0 = \frac{f_0^{(1)} - F_0^{(1)}}{\ln\dfrac{a}{b}},$$

$$C_n = \frac{b^n F_n^{(2)} - a^n f_n^{(2)}}{b^{2n} - a^{2n}}, \quad D_n = \frac{[b^n f_n^{(2)} - a^n F_n^{(2)}]a^n b^n}{b^{2n} - a^{2n}},$$

$$B_0 = \frac{F_0^{(1)}\ln a - f_0^{(1)}\ln b}{\ln\dfrac{a}{b}},$$

причем $f_n^{(1)}$, $f_n^{(2)}$ и $F_n^{(1)}$, $F_n^{(2)}$ — коэффициенты Фурье функций $f(\varphi)$ и $F(\varphi)$, равные

$$f_0^{(1)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi, \quad f_n^{(1)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi \quad (n = 1,\,2,\,\ldots),$$

$$f_n^{(2)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,\sin n\varphi\,d\varphi.$$

Аналогичные выражения имеют место для F_n.

Решение. Требуется найти решение уравнения Лапласа внутри кольца $a \leqslant \rho \leqslant b$ при краевых условиях $u\,\big|_{\rho=a} = f(\varphi)$, $u\,\big|_{\rho=b} = F(\varphi)$ на его границе. Действуя методом разделения переменных и полагая

$$u(\rho,\,\varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi),$$

получим

$$R_n(\rho) = A_n\rho^n + \frac{B_n}{\rho^n}, \quad R_0(\rho) = A_0 + B_0\ln\rho.$$

В отличие от задачи для круга здесь следует сохранить оба слагаемых, так как точка $\rho = 0$ находится вне кольца.

В результате мы получим частные решения вида

$$u_0(\rho,\,\varphi) = A_0 + B_0\ln\rho,$$

$$u_n(\rho,\,\varphi) = \left(A_n\rho^n + \frac{B_n}{\rho^n}\right)\cos n\varphi + \left(C_n\rho^n + \frac{D_n}{\rho^n}\right)\sin n\varphi.$$

Составляя затем общее решение и требуя удовлетворения краевым условиям при $\rho = a$ и $\rho = b$, будем иметь

$$A_0 + B_0 \ln a + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(A_n a^n + \frac{B_n}{a^n} \right) \cos n\varphi + \left(C_n a^n + \frac{D_n}{a^n} \right) \sin n\varphi \right] = f(\varphi),$$

$$A_0 + B_0 \ln b + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(A_n b^n + \frac{B_n}{b^n} \right) \cos n\varphi + \left(C_n b^n + \frac{D_n}{b^n} \right) \sin n\varphi \right] = F(\varphi),$$

откуда и получаем уравнения для определения A_n, B_n, C_n и D_n

$$A_n a^n + \frac{B_n}{a^n} = f_n^{(1)}, \quad C_n a^n + \frac{D_n}{a^n} = f_n^{(2)}, \quad A_0 + B_0 \ln a = f_0^{(1)},$$

$$A_n b^n + \frac{B_n}{b^n} = F_n^{(1)}, \quad C_n b^n + \frac{D_n}{b^n} = F_n^{(2)}, \quad A_0 + B_0 \ln b = F_0^{(1)}.$$

81. $u(\rho, \varphi) = u_0 - \dfrac{2u_0}{\pi} \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{b^{2m+1}}{b^{4m+2} - a^{4m+2}} \left(\rho^{2m+1} - \frac{a^{4m+2}}{\rho^{2m+1}} \right) \times$

$$\times \frac{\sin(2m+1)\varphi}{2m+1} - \frac{u_0}{2} \frac{\ln \dfrac{a}{\rho}}{\ln \dfrac{a}{b}}. \quad (1)$$

Указание. Решение удобно представить в виде суммы

$$u = u_0 + v,$$

где функция v удовлетворяет условию

$$v\,\big|_{\rho=a} = 0, \quad v\,\big|_{\rho=b} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 < \varphi < \pi, \\ -u_0 & \text{при} \quad \pi < \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

82. Распределение температуры в кабеле дается выражением

$$u(\rho, \varphi) = \frac{q}{4}(\rho^2 - a^2) - \frac{2\varkappa_0 b + qb^2}{2} \ln \frac{\rho}{a} + \frac{0,5b^3\varkappa_0}{a^4 + b^4} \left(\rho^2 - \frac{a^4}{\rho^2} \right) \cos 2\varphi,$$

где $q = -\dfrac{q_0}{k}$, $q_0 = 0,24I^2R$ — количество тепла, выделяющееся при прохождении тока в единицу времени на единицу длины цилиндра, R — сопротивление единицы длины цилиндра, $\varkappa_0 = \dfrac{A}{2k}$, k — коэффициент теплопроводности.

Указание. Требуется найти решение уравнения $\Delta u = q$ внутри кольца $a < \rho < b$ при краевых условиях

$$u\,\big|_{\rho=a} = 0,$$

$$-k \left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=b} = A\cos^2\varphi \quad \text{или} \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=b} = -\varkappa_0 - \varkappa_0 \cos 2\varphi.$$

Функцию u удобно представить в виде суммы $u = u_1 + u_2$, где u_1 — решение задачи

$$\Delta u_1 = q, \quad u_1\,\big|_{\rho=a} = 0, \quad \left.\frac{\partial u_1}{\partial \rho}\right|_{\rho=b} = -\varkappa_0.$$

83. Температура в точке (ρ, φ) равна

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(\frac{\rho}{a}\right)^{\pi n/\alpha} \sin \frac{\pi n}{\alpha} \varphi, \tag{1}$$

где

$$f_n = \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} f(\varphi) \sin \frac{\pi n}{\alpha} \varphi \, d\varphi.$$

В частном случае

$$f(\varphi) = \begin{cases} u_1 & \text{при} \quad 0 < \varphi < \dfrac{\alpha}{2}, \\ u_2 & \text{при} \quad \dfrac{\alpha}{2} < \varphi < \alpha \end{cases}$$

ряд суммируется (см. указание к задаче 69) и дает

$$u(\rho, \varphi) = \frac{u_1 + u_2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2\rho^{\pi/\alpha} a^{\pi/\alpha} \sin \dfrac{\pi}{\alpha} \varphi}{a^{2\pi/\alpha} - \rho^{2\pi/\alpha}} + \\ + \frac{u_1 - u_2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2\rho^{2\pi/\alpha} a^{2\pi/\alpha} \sin \dfrac{2\pi}{\alpha} \varphi}{a^{4\pi/\alpha} - \rho^{4\pi/\alpha}}.$$

Р е ш е н и е. Нахождение стационарной температуры сводится к решению первой краевой задачи для уравнения Лапласа внутри сектора при краевых условиях

$$u\big|_{\rho=a} = f(\varphi), \quad u = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = 0 \quad \text{и} \quad \varphi = \alpha.$$

Полагая

$$u = R(\rho)\Phi(\varphi)$$

и производя разделение переменных, получаем

$$\rho^2 R'' + \rho R' - \lambda R = 0,$$
$$\Phi' + \lambda \Phi = 0, \quad \Phi(0) = 0, \quad \Phi(\alpha) = 0.$$

Отсюда находим:

$$\Phi = A \sin \sqrt{\lambda}\, \varphi + B \cos \sqrt{\lambda}\, \varphi.$$

Условия при $\varphi = 0$ и $\varphi = \alpha$ дают

$$B = 0, \quad \sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{\alpha},$$

т. е.

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)^2.$$

Таким образом,

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \sin \frac{\pi n}{\alpha} \varphi.$$

Система функций $\Phi_n = \sin \dfrac{\pi n}{\alpha} \varphi$ ортогональна на интервале $0 < \varphi < \alpha$,

$$\int_0^{\alpha} \sin \frac{\pi n}{\alpha} \varphi \sin \frac{\pi m}{\alpha} \varphi \, d\varphi = 0, \quad m \neq n,$$

и имеет норму

$$\sqrt{\int_0^{\alpha} \sin^2 \frac{\pi n}{\alpha} \varphi \, d\varphi} = \sqrt{\frac{\alpha}{2}},$$

так что коэффициент f_n разложения некоторой функции $f(\varphi)$ в ряд по функциям $\Phi_n(\varphi)$,

$$f(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{\pi n}{\alpha} \varphi,$$

определяется формулой

$$f_n = \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} f(\varphi) \sin \frac{\pi n}{\alpha} \varphi \, d\varphi.$$

Решая уравнение для R и учитывая ограниченность функции R, получаем частное решение нашей задачи в виде

$$u_n(\rho, \varphi) = A_n \rho^{\pi n/\alpha} \sin \frac{\pi n}{\alpha} \varphi.$$

Общее решение естественно искать в виде ряда

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \rho^{\pi n/\alpha} \sin \frac{\pi n}{\alpha} \varphi.$$

Полагая $\rho = a$ и учитывая условие при $\rho = a$, получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n a^{\pi n/\alpha} \sin \frac{\pi n}{\alpha} \varphi = f(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{\pi n}{\alpha} \varphi,$$

откуда следует, что

$$A_n = \frac{f_n}{a^{\pi n/\alpha}},$$

где f_n — коэффициент разложения функции $f(\varphi)$.

84. Температура в точке (ρ, φ) равна

$$u(\rho, \varphi) = u_1 + \frac{4(u_2 - u_1)}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{(2m+1)\pi/\alpha} \frac{\sin(2m+1)\dfrac{\pi}{\alpha}\varphi}{2m+1} \qquad (1)$$

или

$$u(\rho, \varphi) = \frac{2u_1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\rho^{2\pi/\alpha} - a^{2\pi/\alpha}}{2a^{\pi/\alpha}\rho^{\pi/\alpha} \sin \dfrac{\pi\varphi}{\alpha}} + \frac{2u_2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2a^{\pi/\alpha}\rho^{\pi/\alpha} \sin \dfrac{\pi\varphi}{\alpha}}{\rho^{2\pi/\alpha} - a^{2\pi/\alpha}}. \qquad (2)$$

Указание. См. указание к задаче 69. См. также задачу 83.

85. Потенциал электростатического поля равен

$$u = u(\rho, \varphi) = V_1 + \frac{4(V_2 - V_1)}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{2m+1} \frac{\sin(2m+1)\varphi}{2m+1}$$

или

$$u(\rho, \varphi) = V_1 + \frac{2}{\pi}(V_2 - V_1) \operatorname{arctg} \frac{a\rho \sin \varphi}{\rho^2 - a^2}.$$

Вектор электрического поля равен

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} u.$$

Указание. См. задачи 69 и 84. При $\alpha = \pi$ имеем $u_{84} = u_{85}$.

86. $$u(\rho,\,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\rho^{\pi n/\alpha}+B_n\rho^{-\pi n/\alpha}\right)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\,\varphi, \qquad (1)$$

где

$$A_n=\frac{b^{\pi n/\alpha}F_n-a^{\pi n/\alpha}f_n}{b^{2\pi n/\alpha}-a^{2\pi n/\alpha}},\quad B_n=\frac{b^{\pi n/\alpha}f_n-a^{\pi n/\alpha}F_n}{b^{2\pi n/\alpha}-a^{2\pi n/\alpha}}\,a^{\pi n/\alpha}b^{\pi n/\alpha},$$

$$f_n=\frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha}f(\varphi)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\,\varphi\,d\varphi,\quad F_n=\frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha}F(\varphi)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\,\varphi\,d\varphi.$$

Частные случаи:

при $a\to 0$

$$B_n=0,\quad A_n=F_n\frac{1}{b^{\pi n/\alpha}},$$

и получаем решение задачи 83 для кругового сектора;

при $b\to\infty$

$$A_n=0,\quad B_n=f_n a^{\pi n/\alpha},$$

и мы получаем

$$u(\rho,\,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n\left(\frac{a}{\rho}\right)^{\pi n/\alpha}\sin\frac{\pi n}{\alpha}\,\varphi\quad\text{в области}\quad\rho>a,\quad 0<\varphi<\alpha,$$

при $\alpha=\pi$ получается решение для полукругового кольца.

Р е ш е н и е. Требуется найти гармоническую функцию внутри «кольцевого сектора» $a<\rho<b$, $0<\varphi<\alpha$, удовлетворяющую краевым условиям

$$u=0\quad\text{при}\quad\varphi=0,\quad\varphi=\alpha,\quad u\,\big|_{\rho=a}=f(\varphi),\quad u\,\big|_{\rho=b}=F(\varphi).$$

Пользуясь методом разделения переменных, получаем частные решения вида (см. задачу 83)

$$u_n(\rho,\,\varphi)=R_n(\rho)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\,\varphi,$$

где $R_n(\rho)$ определяется из уравнения

$$\rho^2R_n''+\rho R_n'-\left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)^2R=0$$

и имеет вид

$$R_n=A_n\rho^{\pi n/\alpha}-B_n\rho^{-\pi n/\alpha}.$$

Составляя ряд

$$u(\rho,\,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\rho^{\pi n/\alpha}-B_n\rho^{-\pi n/\alpha}\right)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\,\varphi$$

и удовлетворяя краевым условиям при $\rho=a$ и $\rho=b$, найдем коэффициенты A_n и B_n.

87. $$u(\rho,\,\varphi)=\frac{4u_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n}\,\frac{(ab)^{\pi n/\alpha}}{b^{2\pi n/\alpha}-a^{2\pi n/\alpha}}\left[\left(\frac{b}{\rho}\right)^{\pi n/\alpha}-\left(\frac{\rho}{b}\right)^{\pi n/\alpha}\right]\sin\frac{\pi n}{\alpha}\,\varphi,$$

где $n=2k+1$.

88. Пусть ось x направлена вдоль проводов и проходит посередине между ними, а плоскость $z = 0$ перпендикулярна к плоскости, проходящей через параллельные провода.

Отлична от нуля только x-компонента вектора-потенциала $\boldsymbol{A}$, удовлетворяющая уравнению Лапласа вне проводов и равная

$$A_x = \frac{2I\mu}{c} \ln \frac{R_2}{R_1}, \quad A_y = A_z = 0,$$

где c — скорость света в пустоте, μ — магнитная проницаемость среды, I — сила тока, протекающего через сечение каждого провода,

$$R_1 = \sqrt{(y - 0,5a)^2 + z^2}, \quad R_2 = \sqrt{(y + 0,5a)^2 + z^2},$$

a — расстояние между проводами.

Составляющие вектора индукции $\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$, определяемые формулами

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0, \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z}, \quad B_z = -\frac{\partial A_x}{\partial y},$$

равны

$$B_x = 0, \quad B_y = \frac{2\mu I z}{c} \left(\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_1^2} \right), \quad B_z = -\frac{2\mu I}{c} \left[\frac{y + 0,5a}{R_2^2} - \frac{y - 0,5a}{R_1^2} \right].$$

Указание. Воспользоваться формулой для вектора-потенциала линейного тока $\boldsymbol{I}$

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu}{c} \oint\limits_L \frac{\boldsymbol{I}\, ds}{r},$$

где интегрирование производится по контуру тока L. Каждая из составляющих A_x, A_y, A_z удовлетворяет вне L уравнению Лапласа.

Вектор магнитной индукции

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \frac{\mu I}{c} \oint\limits_L \frac{[ds\, r]}{r^3}.$$

89. Отличная от нуля z-составляющая вектора-потенциала равна

$$A_z = \frac{4\pi}{c} \left\{ \mu a C_0 \ln a + \frac{\mu a}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a} \right)^n (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi) \right\},$$

где a — радиус цилиндра, C_0, C_n, D_n — коэффициенты разложения поверхностного тока i_z по круговым гармоникам,

$$i_z(a, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi).$$

Указание. Вектор-потенциал в точке $M(r, \varphi)$, находящейся на расстоянии R от бесконечного провода, несущего ток $I = i_z a\, d\alpha$, параллелен ему и равен $\dfrac{2\mu i_z a\, d\alpha}{c} \ln R$. Поэтому вектор-потенциал от всей пленки равен

$$A_z = \frac{2\mu a}{c} \int\limits_0^{2\pi} i_z \ln R\, d\alpha, \quad R^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos(\varphi - \alpha).$$

Разлагая $\ln R$ в ряд по степеням $\dfrac{r}{a}$, получаем нужное выражение для A_z.

90. Пусть вектор индукции внешнего магнитного поля равен $\boldsymbol{B}_0$ и направлен вдоль оси x, а ось z направлена вдоль тока.

Составляющие вектора напряженности магнитного поля определяются по формулам:

внутри цилиндра

$$\left.\begin{aligned} H_r^{(1)} &= \frac{2}{\mu_1+\mu_2}\,B_0\cos\varphi, \\ H_\varphi^{(1)} &= \frac{I}{2\pi a^2}\,r - \frac{2}{\mu_1+\mu_2}\,B_0\sin\varphi \end{aligned}\right\} \text{ при } \quad r<a;$$

вне цилиндра

$$\left.\begin{aligned} H_r^{(2)} &= \left(1+\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\,\frac{a^2}{r^2}\right)H_0\cos\varphi, \\ H_\varphi^{(2)} &= \frac{I}{2\pi r} - \left(1-\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\,\frac{a^2}{r^2}\right)H_0\sin\varphi \end{aligned}\right\} \text{ при } \quad r>a.$$

Указание. Результирующее поле ищется в виде суммы

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_1,$$

где $\boldsymbol{B}_1$ — вторичное поле, или

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1,$$

где $\boldsymbol{A}$ — векторный потенциал, $\boldsymbol{A}_1$ — векторный потенциал вторичного поля, причем $A_0 = z^0 B_0 r\sin\varphi$ (z^0 — единичный вектор по оси z). На поверхности цилиндра должно выполняться условие непрерывности векторного потенциала и тангенциальных составляющих вектора $\boldsymbol{H}$, так что

$$A^{(1)} = A^{(2)}, \quad \frac{1}{\mu_2}\,\frac{\partial A^{(2)}}{\partial r} = \frac{1}{\mu_1}\,\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r} \quad \text{при} \quad r=a,$$

$$\Delta A^{(1)} = 0 \quad \text{при} \quad r<a, \quad \Delta A^{(2)} = 0 \quad \text{при} \quad r>a.$$

91. Отлична от нуля только z-составляющая вектора-потенциала

$$A_z = \begin{cases} A^{(1)} & \text{при} \quad r<a, \\ A^{(2)} & \text{при} \quad a<r<b, \\ A^{(3)} & \text{при} \quad r>b, \end{cases}$$

где

$$A^{(1)} = \frac{4\mu_1 I}{c}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\alpha_{2n+1}r^{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\left(\frac{c_0}{r}\right)^{2n+1}\right]\cos(2n+1)\varphi,$$

$$A^{(2)} = \frac{4\mu_2 I}{c}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\beta_{2n+1}r^{2n+1} + \gamma_{2n+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1}\right]\cos(2n+1)\varphi,$$

$$A^{(3)} = \frac{4\mu_1 I}{c}\sum_{n=0}^{\infty}\delta_{2n+1}r^{-(2n+1)}\cos(2n+1)\varphi,$$

где α_n, β_n, γ_n, δ_n — коэффициенты, определяемые из условий со-

пряжения при $r = a$ и $r = b$. В частности,

$$\delta_{2n+1} = \frac{4\mu_2}{\mu_1}\,\frac{c_0^{2n+1}}{2n+1}\,\frac{1}{\left(\dfrac{\mu_1}{\mu_2}+1\right)^2 - \left(\dfrac{\mu_1}{\mu_2}-1\right)^2\left(\dfrac{a}{b}\right)^{4n+2}},$$

где μ_1 — магнитная проницаемость среды. Следовательно,

$$A^{(3)} = \frac{16\mu_2 I}{c}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\,\frac{1}{\left(\dfrac{\mu_1}{\mu_2}+1\right)^2 - \left(\dfrac{\mu_1}{\mu_2}-1\right)^2\left(\dfrac{a}{b}\right)^{4n+2}}\left(\frac{c_0}{r}\right)^{2n+1}\times$$

$$\times\cos(2n+1)\varphi.$$

Составляющие вектора $\boldsymbol{B}$ определяются по формулам

$$B_r = \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial\varphi},\quad B_\varphi = -\frac{\partial A}{\partial r}.$$

Указание. Использовать выражение для вектора-потенциала двухпроводной линии

$$A_z = \frac{2\mu_1 I}{c}\ln\frac{R_2}{R_1},$$

где R_1 и R_2 — расстояние точки наблюдения (r, φ) от проводов, а также использовать разложение $\ln R_1$ и $\ln R_2$ в следующие ряды при $r > c_0$:

$$\ln R_1 = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{c_0}{r}\right)^n\cos n\varphi + \ln r,$$

$$\ln R_2 = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{c_0}{r}\right)^n(-1)^n\cos n\varphi + \ln r.$$

92. Вектор напряженности результирующего магнитного поля

$$\boldsymbol{H} = -\operatorname{grad} V;$$

V — скалярный потенциал поля,

$$V = \begin{cases} V_0+\varphi & \text{во внешнем пространстве} \quad \text{при} \quad r > a,\\ V_0+\psi & \text{в сечении шара} \quad \text{при} \quad b < r < a,\\ V_0+w & \text{во внутреннем пространстве} \quad \text{при} \quad r < b. \end{cases}$$

Здесь

$$V_0 = -H_0 x = -H_0 r\cos\theta,\quad \varphi = C_1\frac{a^3}{r^2}\cos\theta,$$

$$\psi = \left(C_2 r + C_3\frac{a^2}{r}\right)\cos\theta,\quad w = C_4 r\cos\theta,$$

где

$$C_1 = \frac{(2\mu+1)(\mu-1)(1-\lambda)}{\Delta}H_0,\quad C_2 = \frac{2\mu(1-\lambda)-(2+\lambda)}{\Delta}(\mu-1)H_0,$$

$$C_3 = \frac{3(\mu-1)}{\Delta}H_0,\quad C_4 = \frac{2(1-\lambda)(\mu-1)^2}{\Delta}H_0,$$

$$\lambda = \frac{a^3}{b^3},\quad \Delta = 2(1-\lambda)(\mu-1)^2 - 9\mu\lambda.$$

Напряженность поля внутри шара равна

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{1+\dfrac{2}{9}\left[1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^3\right]\left(\sqrt{\mu}-\dfrac{1}{\sqrt{\mu}}\right)^2}\,\boldsymbol{H}_0 \quad \text{при} \quad r<b.$$

Отсюда видно, что $\boldsymbol{H}$ всегда меньше $\boldsymbol{H}_0$, т. е. экранирование имеет место как при $\mu<1$, так и при $\mu>1$ (для диа- и парамагнетиков).

Указание. Коэффициенты C_i должны определяться из условий сопряжения при $r=a$ и при $r=b$.

2. Краевые задачи для полосы, прямоугольника, плоского слоя и параллелепипеда.

93. Если на сторонах прямоугольника заданы функции

$$u\big|_{y=0}=f(x), \quad u\big|_{y=b}=\varphi(x), \quad u\big|_{x=0}=\psi(y), \quad u\big|_{x=a}=\chi(y),$$

удовлетворяющие условиям $f(0)=\psi(0)$, $f(a)=\chi(0)$, $\chi(b)=\varphi(a)$, $\varphi(0)=\psi(b)$, то

$$u(x,\,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\overline{\varphi}_n\frac{\operatorname{sh}\dfrac{\pi n}{a}y}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi n}{a}b}+\overline{f}_n\,\frac{\operatorname{sh}\dfrac{\pi n}{a}(b-y)}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi n}{a}b}\right]\sin\frac{\pi n}{a}x+\right.$$

$$\left.+\left[\overline{\chi}_n\frac{\operatorname{sh}\dfrac{\pi n}{b}x}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi n}{b}a}+\overline{\psi}_n\,\frac{\operatorname{sh}\dfrac{\pi n}{b}(a-x)}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi n}{b}a}\right]\sin\frac{\pi n}{b}y\right\}+u_0(x,\,y),$$

где $\overline{\varphi}_n$, $\overline{f}_n$, $\overline{\chi}_n$, $\overline{\psi}_n$ — коэффициенты фурье-функций

$$\overline{\varphi}(x)=\varphi(x)-u_0(x,\,b), \quad \overline{f}(x)=f(x)-u_0(x,\,0),$$
$$\overline{\psi}(y)=\psi(y)-u_0(0,\,y), \quad \overline{\chi}(y)=\chi(y)-u_0(a,\,y),$$

равные

$$\overline{f}_n=\frac{2}{a}\int_0^a\overline{f}(x)\sin\frac{\pi n}{a}x\,dx, \quad \overline{\varphi}_n=\frac{2}{a}\int_0^b\overline{\varphi}(x)\sin\frac{\pi n}{a}x\,dx,$$

$$\overline{\psi}_n=\frac{2}{b}\int_0^b\overline{\psi}(y)\sin\frac{\pi n}{b}y\,dy, \quad \overline{\chi}_n=\frac{2}{b}\int_0^b\overline{\chi}(y)\sin\frac{\pi n}{b}y\,dy.$$

Функция

$$u_0(x,\,y)=A+Bx+Cy+Dxy,$$

где

$$A=f(0), \quad B=\frac{f(a)-f(0)}{a}, \quad C=\frac{\psi(b)-\psi(0)}{b},$$
$$D=\frac{[\varphi(a)-\varphi(0)]-[f(a)-f(0)]}{ab}.$$

Решение. Требуется найти решение уравнения $u_{xx}+u_{yy}=0$ внутри прямоугольника $0<x<a$, $0<y<b$, удовлетворяющее краевым условиям, причем в силу условий краевые значения функции $u(x,\,y)$ непрерывны.

Представим искомую функцию $u(x, y)$ в виде суммы

$$u(x, y) = u_0(x, y) + v(x, y),$$

где $u_0(x, y)$ — гармоническая функция, выбираемая так, чтобы функция $v(x, y)$ во всех вершинах прямоугольника обращалась в нуль, а в остальном была совершенно произвольна. Полагая

$$u_0(x, y) = A + Bx + Cy + Dxy,$$

мы видим, что эта функция гармоническая; коэффициенты A, B, C и D выберем в соответствии с указанным выше условием для $v(x, y)$.

Гармоническая функция $v(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$v\,\big|_{y=0} = \overline{f}(x), \quad v\,\big|_{y=b} = \overline{\varphi}(x), \quad v\,\big|_{x=0} = \overline{\psi}(y), \quad v\,\big|_{x=a} = \overline{\chi}(y),$$

причем функции $\overline{f}$, $\overline{\varphi}$, $\overline{\psi}$, $\overline{\chi}$ обращаются в нуль в вершинах прямоугольника.

Функцию $v(x, y)$ можно представить в виде суммы четырех гармонических функций, каждая из которых принимает заданное значение на одной из сторон и обращается в нуль на остальных трех сторонах. Найдем одну из таких функций $v(x, y)$ из уравнения

$$v_{1xx} + v_{1yy} = 0$$

при краевых условиях

$$v_1\,\big|_{y=0} = 0, \quad v_1\,\big|_{y=b} = \overline{\varphi}(x), \quad v_1\,\big|_{x=0,\,a} = 0.$$

Полагая

$$v_1(x, y) = X(x)Y(y)$$

и подставляя это выражение в уравнение, будем иметь

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda,$$

или

$$Y'' - \lambda Y = 0, \quad X'' + \lambda X = 0.$$

К последнему уравнению следует присоединить условия

$$X(0) = 0, \quad X(a) = 0.$$

Решая эту краевую задачу для $X(x)$, находим собственные функции

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{a}\,x,$$

соответствующие собственным значениям

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2.$$

Из уравнения и условия

$$Y'' - \lambda Y = 0, \quad Y(0) = 0,$$

являющегося следствием условия $v_1(x, 0) = X(x)Y(0) = 0$, находим

$$Y_n(y) = A_n \operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}\,y.$$

Решение задачи ищем, как обычно, в виде ряда

$$v_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}\,y \sin\frac{\pi n}{a}\,x.$$

Условие при $y = b$ дает

$$A_n = \frac{\overline{\varphi}_n}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi n}{a}\,b},$$

так что

$$v_1(x,\,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\varphi}_n \frac{\operatorname{sh}\dfrac{\pi n}{a}\,y}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi n}{a}\,b} \sin\frac{\pi n}{a}\,x.$$

Теперь уже нетрудно написать общее решение нашей задачи.

94. а) Если заданы граничные условия

$$u\,|_{y=0} = f(x), \quad u\,|_{x=0} = \varphi(y), \quad u_x\,|_{x=a} = \psi(y), \quad u_y\,|_{y=b} = \chi(x),$$

причем $f(0) = \varphi(0)$,

$$u(x,\,y) = f(0) + \sum_{n=0}^{\infty}\Bigg\{ \frac{1}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi}{2a}(2n+1)b}\Big[\overline{f}_n \operatorname{ch}\frac{\pi}{2a}(2n+1)(b-y) + \frac{2\pi\chi_n}{h(2n+1)} \operatorname{sh}\frac{\pi}{2a}(2n+1)y\Big] \cdot \sin\frac{\pi}{2a}(2n+1)x + \frac{1}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi}{2b}(2n+1)a}\Big[\varphi_n \operatorname{ch}\frac{\pi}{2b}(2n+1)(a-x) + \frac{2\pi\psi n}{a(2n+1)} \operatorname{sh}\frac{\pi}{2b}(2n+1)x\Big] \sin\frac{\pi}{2b}(2n+1)y\Bigg\},$$

где $\overline{f}_n$, $\overline{\varphi}_n$, ψ_n, χ_n — коэффициенты Фурье соответствующих функций, причем

$$\overline{f}(x) = f(x) - f(0), \quad \overline{\varphi}(x) = \varphi(x) - f(0), \quad \overline{\varphi}(0) = \overline{f}(0) = 0.$$

б) Если заданы граничные условия

$$u\,|_{y=0} = f(x), \quad u\,|_{y=b} = \varphi(x), \quad u_x\,|_{x=0} = \psi(y), \quad u_x\,|_{x=a} = \chi(y),$$

то решение уравнения $\Delta u = 0$ имеет вид

$$u(x,\,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg\{ \frac{1}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi n}{a}\,b}\Big[f_n \operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}(b-y) + \varphi_n \operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}\,y\Big] \cos\frac{\pi n}{a}\,x + \frac{b}{\pi n \operatorname{sh}\dfrac{\pi n}{b}\,a}\Big[\chi_n \operatorname{ch}\frac{\pi n}{b}\,x - \psi_n \operatorname{ch}\frac{\pi n}{b}(a-x)\Big] \sin\frac{\pi n}{b}\,y\Bigg\}.$$

95.

$$u(x,\,y) = \frac{2V}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\dfrac{\pi y}{b}}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi x}{b}}\right). \tag{1}$$

Р е ш е н и е. Метод разделения переменных приводит к частным решениям

$$u_n(x,\,y) = \left(A_n \exp\Big\{-\frac{\pi n}{b}\,x\Big\} + B_n \exp\Big\{\frac{\pi n}{b}\,x\Big\}\right) \sin\frac{\pi n}{b}\,y.$$

Из ограниченности решения при $x \to \infty$ следует, что $B_n = 0$. Составляя ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и удовлетворяя краевому условию при $x = 0$, получим

$$u(x,\,y)=\frac{4V}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\exp\Big\{-\frac{(2m+1)\pi}{b}\,x\Big\}\frac{\sin\dfrac{(2m+1)\pi}{b}\,y}{2m+1}. \tag{2}$$

Этот ряд нетрудно просуммировать. В самом деле,

$$H\equiv\sum_{m=0}^{\infty}\exp\Big\{-\frac{(2m+1)\pi}{b}\,x\Big\}\frac{\sin\dfrac{2m+1}{b}\,\pi y}{2m+1}=$$

$$=\operatorname{Im}\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Big(\exp\Big\{-\dfrac{\pi x}{b}\Big\}\exp\Big\{i\dfrac{\pi y}{b}\Big\}\Big)^{2m+1}}{2m+1}\right\}.$$

Полагая

$$Z=\exp\Big\{-\frac{\pi x}{b}\Big\}\exp\Big\{i\frac{\pi y}{b}\Big\}$$

и учитывая, что

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{Z^{2m+1}}{2m+1}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+Z}{1-Z}, \tag{3}$$

будем иметь

$$H=\operatorname{Im}\frac{1}{2}\ln\frac{\Big(1-\exp\Big\{-\dfrac{2\pi x}{b}\Big\}\Big)+i2\exp\Big\{-\dfrac{\pi x}{b}\Big\}\sin\dfrac{\pi y}{b}}{1-2\exp\Big\{-\dfrac{\pi x}{b}\Big\}\cos\dfrac{\pi y}{b}+\exp\Big\{-\dfrac{2\pi x}{b}\Big\}}=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\exp\Big\{-\dfrac{\pi x}{b}\Big\}\sin\dfrac{\pi y}{b}}{1-\exp\Big\{-\dfrac{2\pi x}{b}\Big\}}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\dfrac{\pi y}{b}}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi x}{b}}\right),$$

откуда и следует формула (1).

Заметим, что с помощью предельного перехода $b\to\infty$ из (1) сразу получается решение уравнения Лапласа для четверти плоскости при краевых условиях

$$u\,|_{x=0}=V,\quad u\,|_{y=0}=0.$$

В этом случае

$$u(x,\,y)=\frac{2V}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

96. $u(x,\,y)=\dfrac{2V}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sin\dfrac{\pi y}{b}}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi x}{b}}\right)+\dfrac{V_0y}{b}-\dfrac{2V_0}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{\sin\dfrac{\pi y}{b}}{e^{\pi x/b}+\cos\dfrac{\pi y}{b}}.$ (1)

Предельный переход при $b\to\infty$ дает

$$u(x,\,y)=\frac{2V}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\quad(x\geqslant 0,\quad y\geqslant 0).$$

Указание. Искомый потенциал удобно представить в виде суммы

$$u(x,\,y)=\frac{V_0y}{b}+u_1(x,\,y)+u_2(x,\,y), \tag{2}$$

где $u_1(x,\,y)$ — решение задачи 95, а $u_2(x,\,y)$ удовлетворяет уравнению

$\Delta u_2 = 0$ в области $x > 0,\ \ 0 < y < b$ и условиям

$$u_2\,\big|_{x=0} = -\frac{V_0 y}{b}, \quad u_2\,\big|_{y=0,\,b} = 0.$$

Первое слагаемое в (2) означает потенциал поля в плоском конденсаторе.

Определяя отсюда $u_2(x,\,y)$, мы приходим к ряду

$$y_2(x,\,y) = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{e^{-\frac{\pi n}{b}x}\sin\frac{\pi n}{b}y}{n},$$

который суммируется аналогично ряду (2) задачи 95.

97. $$u = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{\pi(2m+1)}{a}x}{2m+1}\,\frac{\operatorname{sh}\dfrac{\pi(2m+1)}{a}y}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi(2m+1)}{a}b} +$$

$$+\frac{4V}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{\pi(2m+1)}{b}y}{2m+1}\,\frac{\operatorname{sh}\dfrac{\pi(2m+1)}{b}(a-x)}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi(2m+1)}{b}a}. \qquad (1)$$

Предельный случай

$$u \to u_{96} \quad \text{при} \quad a \to \infty.$$

98. $$u(x,\,y) = \begin{cases} u_1(x,\,y) & \text{при} \quad y < h, \\ u_2(x,\,y) & \text{при} \quad h < y < b, \end{cases}$$

где

$$\left.\begin{aligned} u_1(x,\,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\sqrt{\lambda_n}\,x}\overline{Y}_n(y), \quad \overline{Y}_n(y) = \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}\,y}{\sin\sqrt{\lambda_n}\,h}, \\ u_2(x,\,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\sqrt{\lambda_n}\,x}\overline{Y}_n(y), \quad \overline{Y}_n(y) = \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}\,(b-y)}{\sin\sqrt{\lambda_n}\,(b-h)}, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$A_n = \frac{V}{\|Y\|^2\sqrt{\lambda_n}}\left[\frac{\varepsilon_1}{\sin\sqrt{\lambda_n}\,h} + \frac{\varepsilon_2}{\sin\sqrt{\lambda_n}\,(b-h)}\right],$$

$$\|Y\|^2 = \frac{\varepsilon_1 h}{2\sin^2\sqrt{\lambda_n}\,h} + \frac{\varepsilon_2(b-h)}{2\sin^2\sqrt{\lambda_n}\,(b-h)},$$

λ_n — n-й корень трансцендентного уравнения

$$\varepsilon_1 \operatorname{ctg}\sqrt{\lambda}\,h + \varepsilon_2 \operatorname{ctg}\sqrt{\lambda}(b-h) = 0. \qquad (2)$$

Р е ш е н и е. Требуется найти функцию $u = \begin{cases} u_1 & \text{при} \quad y < h, \\ u_2 & \text{при} \quad h < y < b, \end{cases}$ непрерывную в области $x \geqslant 0,\ \ 0 \leqslant y \leqslant b$, удовлетворяющую внутри области $x > 0,\ 0 < y < b$ уравнению

$$\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} u) = 0,$$

где

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1 & \text{при} \quad y < h, \\ \varepsilon_2 & \text{при} \quad h < y < b, \end{cases}$$

и граничным условиям $u_1 = 0$ при $y = 0$, $u_2 = 0$ при $y = b$, $u_1 = V$ при $x = 0$.

Если учесть, что ε кусочно постоянно, то для u_1 и u_2 получаем уравнения $\Delta u_1 = 0$, $\Delta u_2 = 0$, а на границе разрыва $y = h$ u_1 и u_2 должны удовлетворять условиям сопряжения

$$u_1 = u_2, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} = \varepsilon_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} \quad \text{при} \quad y = h.$$

Полагая

$$u(x, y) = X(x)Y(y),$$

из уравнения $(\varepsilon u_x)_x + (\varepsilon u_y)_y = 0$ получаем после разделения переменных

$$\frac{d}{dy}\left(\varepsilon \frac{dY}{dy}\right) + \varepsilon\lambda Y = 0, \quad X'' - \lambda X = 0, \tag{3}$$

$$Y(0) = 0, \quad Y(b) = 0.$$

Учитывая разрывность ε, будем иметь для

$$Y(y) = \begin{cases} \overline{Y}(y) & \text{при} \quad y < h, \\ \overline{\overline{Y}}(y) & \text{при} \quad h < y < b \end{cases}$$

условия

$$\overline{Y}'' + \lambda\overline{Y} = 0, \quad \overline{\overline{Y}}'' + \lambda\overline{\overline{Y}} = 0, \quad \overline{Y}(0) = 0, \quad \overline{\overline{Y}}(b) = 0,$$

$$\overline{Y}(h) = \overline{\overline{Y}}(h), \quad \varepsilon_1\overline{\overline{Y}}'(h) = \varepsilon_2\overline{\overline{Y}}'(h).$$

Решение этой задачи ищется в виде

$$\overline{Y}(y) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}\, y}{\sin\sqrt{\lambda}\, h}, \quad \overline{\overline{Y}}(y) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}\,(b - y)}{\sin\sqrt{\lambda}\,(b - h)}.$$

Подставляя эти выражения во второе условие сопряжения, получаем характеристическое уравнение для определения λ:

$$\varepsilon_1 \operatorname{ctg}\sqrt{\lambda}\, h + \varepsilon_2 \operatorname{ctg}\sqrt{\lambda}\,(b - h) = 0. \tag{4}$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — корни этого уравнения, $Y_1, Y_2, \ldots$ $\ldots, Y_n(y)$ — соответствующие собственные функции. Из общей теории задач на собственные значения[1]) следует существование счетного множества собственных значений $\{\lambda_n\}$, которым соответствуют собственные функции $\{Y_n(y)\}$, образующие ортогональную с весом $\varepsilon(y)$ систему функций

$$\int_0^b Y_m(y)Y_n(y)\varepsilon(y)\, dy = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n,$$

или

$$\varepsilon_1 \int_0^h \overline{Y}_m(y)\overline{Y}_n(y)\, dy + \varepsilon_2 \int_h^b \overline{\overline{Y}}_m(y)\overline{\overline{Y}}_n(y)\, dy = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n.$$

[1]) См. [7, гл. II, § 3, п. 9].

Для нормы собственной функции $\|Y_n\|$ получаем:

$$\|Y_n\|^2 = \int_0^b Y_n^2(y)\varepsilon(y)\,dy = \varepsilon_1 \int_0^h \overline{Y}_n^2(y)\,dy + \varepsilon_2 \int_h^b \overline{\overline{Y}}_n^2(y)\,dy.$$

Вычисляя эти интегралы и учитывая уравнение (4) для λ_n, находим:

$$\|Y_n\|^2 = \frac{\varepsilon_1 h}{2\sin^2\sqrt{\lambda_n}\,h} + \frac{\varepsilon_2(b-h)}{2\sin^2\sqrt{\lambda_n}\,(b-h)}. \tag{5}$$

Коэффициенты разложения некоторой функции $f(y)$ в ряд по собственным функциям $Y_n(y)$ определяются по формуле

$$f_n = \frac{1}{\|Y_n\|^2}\int_0^b f(y)Y_n(y)\varepsilon(y)\,dy.$$

Из уравнения (3) находим:

$$X_n(x) = A_n e^{-\sqrt{\lambda_n}\,x}.$$

Общее решение задачи имеет вид

$$u(x,\,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\sqrt{\lambda_n}\,x} Y_n(y).$$

Для определения A_n используем условие при $x = 0$

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} A_n Y_n(y).$$

Отсюда

$$A_n = \frac{V}{\|Y_n\|^2}\int_0^b V_n(y)\varepsilon(y)\,dy = \frac{V}{\sqrt{\lambda_n}\,\|Y_n\|^2}\left[\frac{\varepsilon_1}{\sin\sqrt{\lambda_n}\,h} + \frac{\varepsilon_2}{\sin\sqrt{\lambda_n}\,(b-h)}\right].$$

99. Потенциал электростатического поля равен

$$u(x,\,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}(a-x)}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}\,a}\,Y_n(y), \tag{1}$$

где

$$Y_n(y) = \begin{cases} \overline{Y}_n(y) & \text{при} \quad y < h, \\ \overline{\overline{Y}}_n(y) & \text{при} \quad h < y < b, \end{cases}$$

выражения для $Y_n(y)$, A_n и квадрата нормы даны в ответе к предыдущей задаче 98, λ_n — корень уравнения

$$\varepsilon_1 \operatorname{tg}\sqrt{\lambda}\,(b-h) + \varepsilon_2 \operatorname{tg}\sqrt{\lambda}\,h = 0.$$

Предельный переход при $a \to \infty$ дает решение задачи 98

$$u_{99}\,|_{a=\infty} = u_{98},$$

так как

$$\lim_{a\to\infty} \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}\,(a-x)}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_n}\,a} = e^{-\sqrt{\lambda_n}\,x}.$$

Указание. См. решение задачи 98.

100. Напряженность электростатического поля $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} u$, где u — потенциал, равный

$$u(x, y) = \begin{cases} u_1(x, y) & \text{при} \quad y < h, \\ u_2(x, y) & \text{при} \quad h < y < b, \end{cases}$$

$$u_1(x, y) = \frac{4V}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_2 \left[\operatorname{th} \dfrac{\pi(2k+1)}{a} h + \operatorname{th} \dfrac{\pi(2k+1)}{a} (b-h) \right]}{\varepsilon_1 \operatorname{th} \dfrac{\pi(2k+1)}{a} (b-h) + \varepsilon_2 \operatorname{th} \dfrac{\pi(2k+1)}{a} h} \times$$

$$\times \frac{\operatorname{sh} \dfrac{\pi(2k+1)}{a} y}{(2k+1) \operatorname{sh} \dfrac{\pi(2k+1)}{a} b} \sin \frac{\pi(2k+1)}{a} x,$$

$$u_2(x, y) = \frac{4V}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \operatorname{sh} \frac{\pi(2k+1)}{a} y + \right.$$

$$\left. + \frac{\left[\varepsilon_2 \operatorname{th} \dfrac{\pi(2k+1)}{a} h - \varepsilon_1 \operatorname{th} \dfrac{\pi(2k+1)}{a} (b-h) \right] \operatorname{sh} \dfrac{\pi(2k+1)}{a} (b-y)}{\varepsilon_1 \operatorname{th} \dfrac{\pi(2k+1)}{a} (b-h) + \varepsilon_2 \operatorname{th} \dfrac{\pi(2k+1)}{a} h} \right\} \times$$

$$\times \frac{\sin \dfrac{\pi(2k+1)x}{a}}{(2k+1) \operatorname{sh} \dfrac{\pi(2k+1)b}{a}}.$$

Указание. Решение ищется в виде $u(x, y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) Y_n(y)$, где $X_n(x)$ — собственная функция краевой задачи

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(a) = 0,$$

а

$$Y_n(y) = \begin{cases} \overline{Y}_n(y) & \text{при} \quad y < h, \\ \overline{\overline{Y}}_n(y) & \text{при} \quad h < y < b \end{cases}$$

— решение задачи

$$\overline{Y}_n'' - \lambda_n Y_n = 0, \quad \overline{\overline{Y}}_n'' - \lambda_n \overline{\overline{Y}}_n = 0, \quad \overline{Y}_n(0) = 0, \quad \overline{Y}_n(h) = \overline{\overline{Y}}_n(h),$$

$$\varepsilon_1 Y_n'(h) = \varepsilon_2 \overline{\overline{Y}}_n'(h),$$

определяемое с точностью до постоянного множителя.

101. $u(x, y) = \dfrac{Q}{2abk} [(y-b)^2 - (x-a)^2] + \text{const}$, где k — коэффициент теплопроводности.

Указание. Требуется решить вторую краевую задачу для уравнения $u_{xx} + u_{yy} = 0$ внутри прямоугольника при краевых условиях

$$k u_y(x, 0) = -\frac{Q}{a}, \quad k u_x(0, y) = -\frac{Q}{b}, \quad u_x(a, y) = 0, \quad u_y(x, b) = 0.$$

В этом случае сведение этой задачи к двум задачам, у каждой из которых на трех сторонах взяты нулевые краевые условия, невозможно, так как при этом нарушится необходимое условие разрешимости второй краевой задачи

$$\oint_c \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = 0.$$

Р е ш е н и е. Так как граничные значения не меняются вдоль сторон, то можно искать решение в виде гармонического полинома

$$u(x,\, y) = A + Bx + Cy + Dxy + E(x^2 - y^2).$$

Удовлетворяя краевым условиям, находим соответствующие значения коэффициентов и в результате приходим к формуле ответа.

Решение можно также найти методом разделения переменных, полагая

$$u(x,\, y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) Y_n(y),$$

где $Y_n(y) = \cos\sqrt{\lambda_n}\, y$ — собственная функция краевой задачи

$$Y'' + \lambda Y = 0, \quad Y'(0) = Y'(b) = 0,$$

соответствующая собственному значению $\lambda_n = \left(\dfrac{\pi n}{b}\right)^2$.

Найдем:

$$u_n(x) = \frac{2}{b} \int_0^b u(x,\, y) Y_n(y)\, dy \quad \text{для} \quad n > 0.$$

Подставляя сюда

$$Y_n = -\frac{1}{\lambda_n}\, Y_n''$$

и интегрируя дважды по частям, получаем

$$u_n(x) = -\frac{2}{b}\,\frac{2}{\lambda_n} \left\{ [uY_n']_0^b - [u_y Y_n]_0^b + \int_0^b u_{yy} Y_{nn}\, dy \right\}.$$

Учитывая краевые условия и уравнение $u_{xx} + u_{yy} = 0$, будем иметь

$$u_n(x) = -\frac{2Q}{kab\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_n}\, u_n''(x),$$

или

$$u_n''(x) - \lambda_n u_n(x) = \frac{2Q}{abk}.$$

Интегрируя краевые условия при $x = 0$ и $x = a$, получим условия для $u_n(x)$

$$u_n'(0) = 0, \quad u_n'(a) = 0.$$

Отсюда находим

$$u_n(x) = -\frac{2Q}{kab\lambda_n} \quad \text{при} \quad n > 0.$$

Чтобы найти

$$u_0(x) = \frac{1}{b} \int_0^b u(x,\, y)\, dy,$$

проинтегрируем уравнение $\Delta u = 0$ по частям, что дает

$$u_0''(x) = \frac{Q}{abk}, \quad u_0'(0) = \frac{Q}{bk}, \quad u'(a) = 0,$$

откуда

$$u_0(x) = -\frac{Q}{2abk}(x-a)^2 + \text{const}.$$

Таким образом, мы получаем

$$u(x,\, y) = -\frac{Q}{2abk}(x-a)^2 + \frac{2Q}{ka\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\dfrac{\pi n}{b}\,y}{n^2} + \text{const},$$

или

$$u(x,\, y) = \frac{Q}{2abk}[(y-b)^2 - (x-a)^2] + \text{const},$$

так как

$$\frac{4b}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\dfrac{\pi n}{b}\,y}{n^2} = (y-b)^2.$$

102. Если поток q задан на стороне $y = b$, то

$$u(x,\, y) = u_1 - \frac{4qa}{k\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\dfrac{(2m+1)\pi}{a}\,y}{\operatorname{ch}\dfrac{(2m+1)\pi}{a}\,b}\,\frac{\sin\dfrac{\pi(2m+1)}{a}\,x}{(2m+1)^2}.$$

Указание. Удобно представить решение в виде суммы

$$u(x,\, y) = u_1 + v(x,\, y),$$

где $v(x,\, y)$ — решение уравнения $\Delta u = 0$, удовлетворяющее краевым условиям

$$v = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = a, \quad y = 0,$$
$$-kv_y(x,\, b) = q.$$

103. Решение уравнения $\Delta u = 0$ внутри прямоугольного параллелепипеда при краевых условиях

$$u\,\big|_{x=0} = f_1(y,\, z), \quad u\,\big|_{x=a} = f_2(y,\, z),$$
$$u\,\big|_{y=0} = f_3(x,\, z), \quad u\,\big|_{y=b} = f_4(x,\, z),$$
$$u\,\big|_{z=0} = f_5(x,\, y), \quad u\,\big|_{z=c} = f_6(x,\, y)$$

имеет вид

$$u(x,\, y,\, z) = u_1(x,\, y,\, z) + u_2(x,\, y,\, z) + u_3(x,\, y,\, z),$$

где

$$u_1(x,\, y,\, z) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(f_2)_{mn}\operatorname{sh}\nu_{mn}^{(1)}x + (f_1)_{mn}\operatorname{sh}\nu_{mn}^{(1)}(a-x)}{\operatorname{sh}\nu_{mn}^{(1)}a}\times$$
$$\times\sin\frac{\pi m}{b}\,y\sin\frac{\pi n}{c}\,z,$$

$$\nu_{mn}^{(1)} = \pi\sqrt{\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}},$$

$$f_{imn} = \frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^c f_i(y,\, z)\sin\frac{\pi m}{b}\,y\sin\frac{\pi n}{c}\,z\,dy\,dz \quad (i = 1,\, 2).$$

Функция $u_2(x, y, z)$ и $u_3(x, y, z)$ определяются аналогичными формулами.

Р е ш е н и е. Искомую функцию $u(x, y, z)$ можно представить в виде суммы трех гармонических функций u_1, u_2, u_3, удовлетворяющих краевым условиям

$$u_1\big|_{x=0} = f_1(y, z); \quad u_1\big|_{x=a} = f_2(y, z); \quad u_1 = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, b; \quad z = 0, c,$$

$$u_2\big|_{y=0} = f_3(x, z); \quad u_2\big|_{y=b} = f_4(x, z); \quad u_2 = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, a; \quad z = 0, c,$$

$$u_3\big|_{z=0} = f_5(x, y); \quad u_3\big|_{z=c} = f_6(x, y); \quad u_3 = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, a; \quad y = 0, b.$$

Остановимся на определении $u_1(x, y, z)$. Полагая $u_1(x, y, z) = X(x)v(y, z)$, после разделения переменных получим для $v(y, z)$ краевую задачу о собственных колебаниях прямоугольной мембраны с закрепленной границей

$$v_{yy} + v_{zz} + \lambda v = 0, \quad v = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, b; \quad z = 0, c,$$

нормированные собственные функции которой имеют вид

$$v_{m,n}(y, z) = \sqrt{\frac{4}{bc}} \sin\frac{\pi m}{b} y \sin\frac{\pi n}{c} z \quad (m, n = 1, 2, \dots),$$

а собственные значения равны $\lambda_{mn} = \pi^2 \left(\dfrac{m^2}{b^2} + \dfrac{n^2}{c^2}\right)$. Определяя затем из уравнения $X'' - \lambda_{mn} X = 0$ функцию $X_{mn}(x)$, получаем

$$u_1(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_{mn} \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{mn}}\, x + B_{mn} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{mn}}\, x) v_{mn}(y, z).$$

Коэффициенты разложения A_{mn} и B_{mn} определяются из условий при $x = 0$ и $x = a$. Аналогично находим функции $u_2(x, y, z)$ и $u_3(x, y\, z)$.

Заметим, что при решении первой краевой задачи для прямоугольника мы ввели вспомогательный гармонический полином, с помощью которого значения граничных функций в углах стали равными нулю. В задаче для параллелепипеда построение такого полинома значительно сложнее и это сделано не было. Построенные ряды поэтому сходятся неравномерно в окрестностях углов параллелепипеда.

104. Потенциал электростатического поля равен

$$u(x, y, z) = \frac{16V}{\pi^2} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\dfrac{(2m+1)\pi}{a} x \sin\dfrac{(2n+1)\pi}{b} y \operatorname{sh} \pi \sqrt{\dfrac{(2m+1)^2}{a^2} + \dfrac{(2n+1)^2}{b^2}} (c - z)}{(2m+1)(2n+1) \operatorname{sh} \pi \sqrt{\dfrac{(2m+1)^2}{a^2} + \dfrac{(2n+1)^2}{b^2}}\, c}. \tag{1}$$

При $c \to \infty$ получим решение для полубесконечной трубы

$$u(x,\,y,\,z) = \frac{16V}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{(2m+1)\pi}{a}\,x\sin\dfrac{(2n+1)\pi}{b}\,y}{(2m+1)(2n+1)}\times$$

$$\times\exp\left\{-\pi\sqrt{\frac{(2m+1)^2}{a^2}+\frac{(2n+1)^2}{b^2}}\right\}z. \quad (2)$$

105. $u(x,\,y,\,z) =$

$$= V - \frac{16V}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{ch}\nu_{mn}\left(\dfrac{c}{2}-z\right)}{\operatorname{ch}\dfrac{\nu_{mn}c}{2}}\frac{\sin\dfrac{(2m+1)\pi}{a}\,x\sin\dfrac{(2n+1)\pi}{b}\,y}{(2m+1)(2n+1)},$$

где

$$\nu_{mn} = \pi\sqrt{\frac{(2m+1)^2}{a^2}+\frac{(2n+1)^2}{b^2}}.$$

Предельный переход при $c \to \infty$ дает

$$u(x,\,y,\,z) = V - u_{104\,\text{б}},$$

где $u_{104\,\text{б}}$ определяется формулой (2) задачи 104.

Решение можно также представить в виде суммы

$$u(x,\,y,\,z) = \frac{16V}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{ch}\mu_{mn}\left(\dfrac{a}{2}-x\right)}{\operatorname{ch}\overline{\mu}_{mn}\dfrac{a}{2}}\frac{\sin\dfrac{\pi(2m+1)}{b}\,y\sin\dfrac{\pi(2n+1)}{c}\,z}{(2m+1)(2n+1)} +$$

$$+\frac{16V}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{ch}\overline{\overline{\mu}}_{mn}\left(\dfrac{b}{2}-y\right)}{\operatorname{ch}\overline{\overline{\mu}}_{mn}\dfrac{b}{2}}\frac{\sin\dfrac{\pi(2m+1)x}{a}\sin\dfrac{\pi(2a+1)}{c}\,z}{(2m+1)(2n+1)},$$

$$\overline{\mu}_{mn} = \pi\sqrt{\frac{(2m+1)^2}{b^2}+\frac{(2n+1)^2}{c^2}},\quad \overline{\overline{\mu}}_{mn} = \pi\sqrt{\frac{(2m+1)^2}{a^2}+\frac{(2n+1)^2}{c^2}}.$$

3. Задачи, требующие применение цилиндрических функций.

106. $u(\rho,\,\varphi,\,z) =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(A_{m,\,n}\cos n\varphi + B_{m,\,n}\sin n\varphi)J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\rho\right)\frac{\operatorname{sh}\dfrac{\mu_m^{(n)}}{a}(l-z)}{\operatorname{sh}\dfrac{\mu_m^{(n)}}{a}l} +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(C_{m,\,n}\cos n\varphi + D_{m,\,n}\sin n\varphi)J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\rho\right)\frac{\operatorname{sh}\dfrac{\mu_m^{(n)}}{a}z}{\operatorname{sh}\dfrac{\mu_m^{(n)}}{a}l}, \quad (1)$$

где $\mu_m^{(n)}$ — m-й корень уравнения

$$J_n(\mu) = 0,$$

$A_{m,n}$, $B_{m,n}$, $C_{m,n}$, $D_{m,n}$ — коэффициенты разложения функций $f(\rho, \varphi)$ и $F(\rho, \varphi)$, равные

$$A_{m,n} = \frac{2}{a^2\pi\varepsilon_n \left[J_n'(\mu_m^{(n)})\right]^2} \int_0^{2\pi}\int_0^a f(\rho, \varphi)\cos n\varphi J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\rho\right)\rho\, d\rho\, d\varphi,$$

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 2, & n = 0, \\ 1, & n \neq 0, \end{cases} \tag{2}$$

$$B_{m,n} = \frac{2}{a^2\pi \left[J_n'(\mu_m^{(n)}\right]^2} \int_0^{2\pi}\int_0^a f(\rho, \varphi)\sin n\varphi\, J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\rho\right)\rho\, d\rho\, d\varphi \qquad \text{и т. д.}$$

Р е ш е н и е. Задача решается методом разделения переменных. Подставляя выражение

$$u(\rho, \varphi, z) = V(\rho, \varphi)Z(z)$$

в уравнение

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{3}$$

и разделяя переменные, получаем для $V(\rho, \varphi)$ уравнение

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} + \lambda V = 0 \tag{4}$$

с граничным условием

$$V(a, \varphi) = 0$$

и для $Z(z)$ — уравнение

$$Z'' - \lambda Z = 0. \tag{5}$$

Полагая, далее,

$$V(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi),$$

будем иметь

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + \left(\lambda - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right)R = 0, \tag{6}$$

$$\Phi'' + \nu^2\Phi = 0, \tag{7}$$

где ν — постоянная разделения. Из условия периодичности функции Φ по углу φ находим $\nu^2 = n^2$.

Для $R(\rho)$ мы имеем уравнение Бесселя

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + \left(\lambda - \frac{n^2}{\rho^2}\right)R = 0$$

с граничным условием

$$R(a) = 0$$

и естественным условием ограниченности в нуле [1)]

$$|R(0)| < \infty.$$

Отсюда находим

$$R(\rho) = J_n(\sqrt{\lambda}\,\rho).$$

[1)] См. [7, добавление I].

Граничное условие при $\rho = a$ дает:

$$J_n(\mu) = 0, \quad \text{где} \quad \mu = \sqrt{\lambda}\, a.$$

Обозначим $\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, \ldots, \mu_m^{(n)}$ корни этого уравнения. Таким образом, краевая задача для $V(\rho, \varphi)$ имеет собственные значения $\lambda_{mn} = \left(\dfrac{\mu_m^{(n)}}{a}\right)^2$, которым соответствуют собственные функции

$$\overline{V}_{n,\,m} = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\,\rho\right)\cos n\varphi, \quad \overline{\overline{V}}_{n,\,m} = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\,\rho\right)\sin n\varphi,$$

образующие две ортогональные системы функций, для которых

$$\|\overline{V}_{n,\,m}\|^2 = \frac{a^2}{2}[J_n'(\mu_m^{(n)})]^2\pi\varepsilon_n, \quad \|\overline{\overline{V}}_{n,\,m}\|^2 = \frac{a^2}{2}[J_n'(\mu_m^{(n)})]^2\pi,$$

где

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 2 & \text{при} \quad n = 0, \\ 1 & \text{при} \quad n \neq 0. \end{cases}$$

Общее решение нашей задачи представится в виде ряда

$$u(\rho, \varphi, z) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(A_{n,\,m}\overline{V}_{m,\,n}(\rho, \varphi) + B_{n,\,m}\overline{\overline{V}}_{m,\,n}(\rho, \varphi))Z_{n,\,m}(z),$$

где $Z_{n,\,m}(z)$ — решение уравнения (5).

Поскольку искомую функцию $u(\rho, \varphi, z)$ можно представить в виде суммы

$$u(\rho, \varphi, z) = u_1(\rho, \varphi, z) + u_2(\rho, \varphi, z),$$

где $u_1(\rho, \varphi, z)$ и $u_2(\rho, \varphi, z)$ — гармонические функции, удовлетворяющие условию

$$u_1\big|_{\rho=a} = 0, \quad u_1\big|_{z=0} = f(\rho, \varphi), \quad u_1\big|_{z=l} = 0,$$
$$u_2\big|_{\rho=a} = 0, \quad u_2\big|_{z=0} = 0, \quad u_2\big|_{z=l} = F(\rho, \varphi),$$

то достаточно ограничиться отысканием функции $u_1(\rho, \varphi, z)$. В этом случае

$$Z_{m,\,n}(z) = \operatorname{sh}\,\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\,(l - z).$$

Удовлетворяя краевому условию при $z = 0$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(A_{m,\,n}\overline{V}_{m,\,n} + B_{m,\,n}\overline{\overline{V}}_{m,\,n})\operatorname{sh}\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\,l = f(\rho, \varphi),$$

мы найдем

$$A_{m,\,n} = \frac{\overline{f}_{m,\,n}}{\operatorname{sh}\dfrac{\mu_m^{(n)}}{a}\,l}, \quad B_{m,\,n} = \frac{\overline{\overline{f}}_{m,\,n}}{\operatorname{sh}\dfrac{\mu_m^{(n)}l}{a}},$$

где

$$\overline{f}_{m,\,n} = \frac{1}{\|\overline{V}_{m,\,n}\|^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{a} f(\rho, \varphi)\overline{V}_{m,\,n}(\rho, \varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi,$$

$$\overline{\overline{f}}_{m,\,n} = \frac{1}{\|\overline{\overline{V}}_{m,\,n}\|^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{a} f(\rho, \varphi)\overline{\overline{V}}_{m,\,n}(\rho, \varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi.$$

107. $u = u(\rho,\, z) = \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m \operatorname{sh} \dfrac{\mu_m^{(0)}(l-z)}{a} + B_m \operatorname{sh} \dfrac{\mu_m^{(0)} z}{a}}{\operatorname{sh} \dfrac{\mu_m^{(0)}}{a} l} J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{a}\rho\right),$

где $\mu_m^{(0)}$ — m-й корень уравнения

$$J_0(\mu) = 0,$$

а коэффициенты A_m и B_m даются формулами

$$A_m = \frac{2}{a^2 J_1^2(\mu_m^{(0)})} \int_0^a f(\rho) J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{a}\rho\right)\rho\, d\rho,$$

$$B_m = \frac{2}{a^2 J_1^2(\mu_m^{(0)})} \int_0^a F(\rho) J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{a}\rho\right)\rho\, d\rho.$$

108. $u = u(\rho,\, z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{I_0\left(\dfrac{\pi n}{l}\rho\right)}{I_0\left(\dfrac{\pi n}{l} a\right)} \sin\frac{\pi n}{l} z,$

где $f_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^b f(z)\sin\frac{\pi n}{l} z\, dz$ — коэффициенты Фурье, $I_0(x) = J_0(ix)$ — функция Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента, удовлетворяющая уравнению

$$I_0''(x) + \frac{1}{x} I_0'(x) - I_0(x) = 0.$$

Частные случаи:

а) $f_n = \dfrac{2f_0}{\pi n}[1 - (-1)^n]$,

$$u = \frac{4f_0}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{I_0\left(\dfrac{\pi(2m+1)}{l}\rho\right)}{I_0\left(\dfrac{\pi(2m+1)}{l} a\right)} \frac{\sin\dfrac{\pi(2m+1)z}{l}}{2m+1};$$

б) $f_n = \dfrac{4Al}{(\pi n)^3}[1 - (-1)^n]$,

$$u = \frac{8Al}{\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{I_0\left(\dfrac{\pi(2m+1)}{l}\rho\right)}{I_0\left(\dfrac{\pi(2m+1)}{l} a\right)} \frac{\sin\dfrac{\pi(2m+1)}{l} z}{(2m+1)^3}.$$

109. Решение общей первой внутренней краевой задачи для ограниченного цилиндра $0 \leqslant \rho \leqslant a,\ \ 0 \leqslant z \leqslant l$

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

$$u\,\big|_{\rho=a} = f(\varphi,\, z), \quad u\,\big|_{z=0} = \psi_1(\rho,\varphi), \quad u\,\big|_{z=l} = \psi_2(\rho,\varphi),$$

представляется в виде суммы трех решений

$$u = u_1 + u_2 + u_3,$$

где u_1, u_2 и u_3 — решения краевых задач

$$\Delta u_1 = 0, \quad u_1\big|_{\rho=a} = f(\varphi, z), \quad u_1\big|_{z=0} = u_1\big|_{z=l} = 0,$$
$$\Delta u_2 = 0, \quad u_2\big|_{\rho=a} = 0, \quad u_2\big|_{z=0} = \psi_1(\rho, \varphi), \quad |u_2|_{z=l} = 0,$$
$$\Delta u_3 = 0, \quad u_3\big|_{\rho=a} = 0, \quad u_3\big|_{z=0} = 0, \quad |u_3|_{z=l} = \psi_2(\rho, \varphi),$$

определяемые с помощью следующих рядов:

$$u_1(\rho, \varphi, z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(A^{(1)}_{n,m}\cos n\varphi + B^{(1)}_{n,m}\sin n\varphi)\frac{I_n\left(\frac{\pi m}{l}\rho\right)}{I_n\left(\frac{\pi m}{l}a\right)}\sin\frac{\pi m}{l}z,$$

где

$$A^{(1)}_{n,m} = \frac{2}{\pi\varepsilon_n l}\int_0^{2\pi}\int_0^{l} f(\varphi, z)\cos n\varphi\sin\frac{\pi m}{l}z\,d\varphi\,dz,$$

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 2 & \text{при} \quad n = 0, \\ 1 & \text{при} \quad n \neq 0, \end{cases}$$

$$B^{(1)}_{n,m} = \frac{2}{\pi l}\int_0^{2\pi}\int_0^{l} f(\varphi, z)\sin n\varphi\sin\frac{\pi m}{l}z\,d\varphi\,dz,$$

$$u_2(\rho, \varphi, z) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(A^{(2)}_{n,m}\cos n\varphi + B^{(2)}_{n,m}\sin n\varphi)\frac{\operatorname{sh}\frac{\mu^{(n)}_m(l-z)}{a}}{\operatorname{sh}\frac{\mu^{(n)}_m}{a}l}J_n\left(\frac{\mu^{(n)}_m}{a}\rho\right),$$

а

$$A^{(2)}_{n,m} = \frac{2}{\pi\varepsilon_n a^2[J'_n(\mu^{(n)}_m)]^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\psi_1(\rho, \varphi)\cos n\varphi J_n\left(\frac{\mu^{(n)}_m}{a}\rho\right)\rho\,d\rho\,d\varphi,$$

$$B^{(2)}_{n,m} = \frac{2}{\pi a^2[J'_n(\mu^{(n)}_m)]^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\psi_1(\rho, \varphi)\cos n\varphi J_n\left(\frac{\mu^{(n)}_m}{a}\rho\right)\rho\,d\rho\,d\varphi,$$

$$u_3(\rho, \varphi, z) = u_2(\rho, \varphi, l - z),$$

если в выражении для $A^{(2)}_{n,m}$ и $B^{(2)}_{n,m}$ заменить $\psi_1(\rho, \varphi)$ функцией $\psi_2(\rho, \varphi)$.

Указание. Следует искать частные решения для u_1 в виде

$$u_1(\rho, \varphi, z) = V(\rho, \varphi)Z(z).$$

Для $Z(z)$ получается краевая задача

$$Z'' + \lambda Z = 0, \quad Z(0) = Z(l) = 0, \quad \lambda_m = \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2, \quad Z_m = \sin\frac{\pi m}{l}z,$$

а для $V(\rho, \varphi)$ уравнение

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} - \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2 V = 0,$$

откуда находим

$$V_{m,n}(\rho, \varphi) = I_n\left(\frac{\pi m}{l}\rho\right)\begin{cases}\cos n\varphi, \\ \sin n\varphi.\end{cases}$$

Полагая

$$u_2(\rho, \varphi, z) = V(\rho, \varphi)Z(z),$$

будем иметь

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} + \lambda V = 0, \quad V(a, \varphi) = 0,$$

так что

$$\lambda_{m,n} = \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\right)^2, \quad V_{m,n} = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\rho\right)\begin{cases}\cos n\varphi,\\ \sin n\varphi\end{cases}$$

и

$$Z'' - \left(\frac{u_m^{(n)}}{a}\right)^2 Z = 0, \quad Z(l) = 0,$$

откуда находим

$$Z_{m,n} = C_{m,n}\operatorname{sh}\frac{\mu_m^{(n)}}{a}(l - z).$$

110. Потенциал электростатического поля внутри цилиндрической коробки равен

$$u(\rho, z) = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{I_0\left[\dfrac{(2k+1)\pi}{l}\rho\right]}{I_0\left[\dfrac{(2k+1)\pi}{l}a\right]}\frac{\sin\dfrac{(2k+1)\pi}{l}z}{2k+1}.$$

Поле на оси цилиндра

$$E_z(0, z) = -\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{\rho=0} = -\frac{4V_0}{l}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{l}z}{I_0\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{l}a\right)},$$

$$E_z(0, 0) = -\frac{4V_0}{l}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{l}{I_0\left(\dfrac{(2k+1)\pi a}{l}\right)}$$

(см. решение задачи 108).

В предельном случае при $l \to \infty$ имеем

$$u(\rho, z) = \frac{2V_0}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{I_0(\xi, \rho)}{I_0(\xi a)}\frac{\sin\xi z}{\xi}\,d\xi.$$

Поле на оси цилиндра ($\rho = 0$) равно

$$E_z = -\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{\rho=0} = -\frac{2V_0}{\pi a}\int_0^{\infty}\frac{\cos\dfrac{z}{a}\,s\,ds}{I_0(s)}.$$

В частности,

$$E_z(0, 0) = -\frac{2V_0}{\pi a}\int_0^{\infty}\frac{ds}{I_0(s)}.$$

111. $u(\rho, z) = 2V_0\sum_{m=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sh}\dfrac{\mu_m^{(0)}}{a}(l - z)}{\operatorname{sh}\dfrac{\mu_m^{(0)}}{a}l}\dfrac{J_0\left(\dfrac{\mu_m^{(0)}\rho}{a}\right)}{\mu_m^{(0)}J_1(\mu_m^{(0)})}$, где $\mu_m^{(0)}$ — корни уравнения $J_0(\mu_m^{(0)}) = 0$.

Замечая, что

$$\lim_{l\to\infty}\frac{\operatorname{sh}\frac{\mu_m^{(0)}}{a}(l-z)}{\operatorname{sh}\frac{\mu_m^{(0)}}{a}l}=\exp\Big\{-\frac{\mu_m^{(0)}}{a}z\Big\},$$

получаем решение задачи для полубесконечного цилиндра

$$u(\rho,z)=2V_0\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\exp\Big\{-\frac{\mu_m^{(0)}}{a}z\Big\}}{\mu_m^{(0)}J_1(\mu_m^{(0)})}J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{a}\rho\right).$$

112. Решение задачи

$$\Delta u=0\quad(\rho<a,\quad 0<z<\infty),\quad u\Big|_{\rho=a}=0,\quad u\Big|_{z=0}=V_0$$

имеет вид

$$u_{111}(\rho,z)=2V_0\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\exp\Big\{-\frac{\mu_m^{(0)}}{a}z\Big\}}{\mu_m^{(0)}J_1(\mu_m^{(0)})}J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{a}\rho\right),$$

а решение задачи

$$\Delta u=0\quad(\rho<a,\quad 0<z<\infty),\quad u\Big|_{\rho=a}=V_0,\quad u\Big|_{z=0}=0$$

дается формулой

$$u(\rho,z)=V_0-u_{111}(\rho,z).$$

113. Распределение температуры внутри цилиндра дается формулой

$$u(\rho,z)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m\frac{\operatorname{sh}\frac{\mu_m}{a}(l-z)}{\operatorname{ch}\frac{\mu_m}{a}l}J_0\left(\frac{\mu_m}{a}\rho\right),$$

где

$$A_m=\frac{2aq}{k\mu_m^2J_1(\mu_m)},$$

μ_m — корень уравнения

$$J_0(\mu)=0,$$

k — коэффициент теплопроводности.

Указание. Задача сводится к решению уравнения Лапласа $\Delta u=0$ при граничных условиях

$$-k\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0}=q,\quad u\Big|_{\rho=a}=0,\quad u\Big|_{z=l}=0.$$

114.

$$u(\rho,z)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m\frac{\operatorname{sh}\frac{\nu_m(l-z)}{a}}{\operatorname{ch}\frac{\nu_m}{a}l}J_0\left(\frac{\nu_m}{a}\rho\right),\tag{1}$$

$$A_m=\frac{2h^2a^3q}{k(a^2h^2+\nu_m^2)\nu_m^2J_1(\nu_m)},\tag{2}$$

где ν_m — m-й корень трансцендентного уравнения

$$J_1(\nu)=\frac{ah}{\nu}J_0(\nu),\tag{9}$$

h — коэффициент теплообмена. Переходя к пределу при $h\to\infty$, получим отсюда решение задачи 113.

Указание. Требуется решить краевую задачу

$$\Delta u = 0 \quad (0 < \rho < a, \quad 0 < z < l),$$
$$-k\,\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = q, \quad \frac{\partial u}{\partial \rho}\Big|_{\rho=a} + hu\Big|_{\rho=a} = 0, \quad u\,|_{z=l} = 0.$$

115. а) Решение задачи 113 для полуограниченного цилиндра ($l = \infty$) имеет вид

$$u(\rho,\, z) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \exp\left\{-\frac{\mu_m}{a}\, z\right\} J_0\left(\frac{\mu_m}{a}\,\rho\right), \tag{1}$$

где μ_m — корень уравнения $J_0(\mu) = 0$,

$$A_m = \frac{2aq}{k\mu_m^2 J_1(\mu_m)}. \tag{2}$$

б) Решение задачи 114 при $l = \infty$

$$u(\rho,\, z) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \exp\left\{-\frac{\nu_{m^2}}{a}\right\} J_0\left(\frac{\nu_m}{a}\,\rho\right), \tag{3}$$

где ν_m — корень уравнения (3) задачи 114, A_m определяется формулой (2) задачи 114.

Указание. Решение ищется в виде

$$u(\rho,\, z) = \sum_{m=1}^{\infty} Z_m(z) R_m(\rho),$$

где $R_m(\rho)$ совпадает с соответствующими функциями задач 113 и 114, $Z_m(z)$ определяется из уравнения $Z'' - \lambda_m Z = 0$ и условия $Z(\infty) = 0$, так что $Z_m = A_m e^{-\sqrt{\lambda_m}\, Z}$.

116. Напряженность электростатического поля $E = -\operatorname{grad} u$, где u — потенциал, равный

$$u(\rho,\, z) = \frac{4V_0}{\pi} \times$$
$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{I_0\left[\frac{\pi(2m+1)}{l}\,\rho\right] K_0\left[\frac{\pi(2m+1)}{l}\,a\right] - I_0\left[\frac{\pi(2m+1)}{l}\,a\right] K_0\left[\frac{\pi(2m+1)}{l}\,\rho\right]}{I_0\left[\frac{\pi(2m+1)}{l}\,b\right] K_0\left[\frac{\pi(2m+1)}{l}\,a\right] - I_0\left[\frac{\pi(2m+1)}{l}\,a\right] K_0\left[\frac{\pi(2m+1)}{l}\,b\right]} \times$$
$$\times \frac{\sin\frac{\pi(2m+1)}{l}\, z}{2m+1}. \tag{1}$$

Здесь I_0 и K_0 — функции Бесселя нулевого порядка мнимого аргумента первого и второго рода соответственно.

Предельные случаи:

1) если $l = \infty$, то

$$u(\rho,\, z) = \frac{2V_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{I_0(\rho s) K_0(as) - I_0(as) K_0(\rho s)}{I_0(bs) K_0(as) - I_0(as) K_0(bs)}\, \frac{\sin sz}{s}\, ds \tag{2}$$

— потенциал внутри полубесконечной трубы;

2) при $a = 0$ имеем

$$u(\rho, z) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{I_0\left[\dfrac{\pi(2m+1)}{l}\,\rho\right]}{I_0\left[\dfrac{\pi(2m+1)}{l}\,b\right]} \frac{\sin\dfrac{\pi(2m+1)}{l}\,z}{2m+1} = u_{110} \qquad (3)$$

— потенциал внутри цилиндрической коробки.

Указание. Решение ищется в виде $u = \Sigma R(\rho)Z(z)$, для $R(\rho)$ получается задача

$$R'' + \frac{1}{\rho}\,R' - \lambda R = 0, \quad R(a) = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$R(\rho) = AI_0(\sqrt{\lambda}\,\rho) + BK_0(\sqrt{\lambda}\,\rho).$$

Условие $R(a) = 0$ дает $B = -AI_0(\sqrt{\lambda}\,a)/K_0(\sqrt{\lambda}\,a)$. Для $Z(z)$ имеем

$$Z'' + \lambda Z = 0, \quad Z(0) = Z(l) = 0, \quad \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad Z_n(z) = \sin\frac{\pi n}{l}\,z.$$

При предельном переходе $l \to \infty$ вводим переменную $s_m = \dfrac{\pi(2m+1)}{l}$, так что $\Delta s = \dfrac{2\pi}{l}$ и наш ряд преобразуется в интеграл.

117. Температура в точке (ρ, z) внутри тороида равна

$$u(\rho, z) = u_0 + (u_1 - u_0)v(\rho, z),$$

где $v(\rho, z) = v_{116}(\rho, z) + v_{116}(\rho, l-z)$, $v_{116}(\rho, z)$ — решение задачи 116 при $V_0 = 1$.

118. Если обозначить $u(\rho, \varphi, z)$ стационарную температуру в точке (ρ, φ, z), то:

1) $u(\rho, \varphi, z) = u_0 = \text{const}$; 2) $u(\rho, \varphi, z) = u(z) = u_1\,\dfrac{z}{l}$.

119. $u(\rho, z) =$

$$= \pi u_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\sqrt{\lambda_m}\,b)}{\lambda_m[J_0(\sqrt{\lambda_m}\,a) + J_1(\sqrt{\lambda_m}\,b)]} \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_m}\,(l-z)}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_m}\,l}\,R_m(\rho),$$

где

$$R_m(\rho) = J_0(\sqrt{\lambda_m}\,\rho)N_0(\sqrt{\lambda_m}\,a) - J_0(\sqrt{\lambda_m}\,a)N_0(\sqrt{\lambda_m}\,\rho),$$

λ_m — m-й корень уравнения

$$\frac{J_0(\sqrt{\lambda_m}\,a)}{N_0(\sqrt{\lambda_m}\,a)} = \frac{J_0(\sqrt{\lambda_m}\,b)}{N_0(\sqrt{\lambda_m}\,b)}.$$

Решение. Искомое решение краевой задачи

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\,\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

$$u\,\big|_{\rho=a} = u\,\big|_{\rho=b} = 0, \quad u\,\big|_{z=b} = 0, \quad u\,\big|_{z=0} = u_0$$

представляем в виде $u(\rho, z) = \Sigma R(\rho)Z(z)$, где $R(\rho)$ определяется из уравнения Бесселя

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{d}{d\rho}\left(\rho\,\frac{dR}{d\rho}\right) + \lambda R = 0 \qquad (1)$$

с граничными условиями $R(a) = 0$, $R(b) = 0$, а $Z(z)$ удовлетворяет уравнению $Z'' - \lambda Z = 0$ и условию

$$Z(l) = 0. \tag{2}$$

Из (1) находим

$$R(\rho) = CJ_0(\sqrt{\lambda}\,\rho) + DN_0(\sqrt{\lambda}\,\rho).$$

Пользуясь условиями при $\rho = a$ и $\rho = b$, будем иметь:

$$R_m(\rho) = J_0(\sqrt{\lambda_m}\,\rho)N_0(\sqrt{\lambda_m}\,a) - J_0(\sqrt{\lambda_m}\,a)N_0(\sqrt{\lambda_m}\,\rho),$$

где λ_m определяется из уравнения

$$\frac{J_0(\sqrt{\lambda_m}\,a)}{N_0(\sqrt{\lambda_m}\,a)} = \frac{J_0(\sqrt{\lambda_m}\,b)}{N_0(\sqrt{\lambda_m}\,b)}.$$

Вычисляя, как обычно, норму собственной функции $R_m(\rho)$

$$\|R_m\|^2 = \int_a^b \rho R_m^2(\rho)\,d\rho,$$

получаем

$$\|R_m\|^2 = \frac{2}{\pi^2}\,\frac{J_0^2(\sqrt{\lambda_m}\,a) - J_0^2(\sqrt{\lambda_m}\,b)}{J_0^2(\sqrt{\lambda_m}\,b)}\ ^{1)}.$$

Из уравнения (2) находим

$$Z_m(z) = A_m\,\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_m}(l-z)}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_m}\,l}.$$

Функцию $u(\rho,\,z)$ ищем в виде

$$u(\rho,\,z) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m R_m(\rho)\,\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_m}\,(l-z)}{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda_m}\,l}.$$

Коэффициент A_m определяется из граничного условия

$$u(\rho,\,0) = u_0 = \sum_{m=1}^{\infty} A_m R_m(\rho).$$

Отсюда

$$A_m = \frac{u_0}{\|R_m\|^2}\int_a^b \rho R_m(\rho)\,d\rho.$$

Заменяя $R_m(\rho)$ из уравнения

$$R_m(\rho) = -\frac{1}{\lambda_m\rho}\,\frac{d}{d\rho}\left[\rho\cdot\frac{dR_m}{d\rho}\right],$$

получаем

$$A_m = -\frac{u_0}{\lambda_m\|R_m\|^2}\int_a^b \frac{d}{d\rho}\left(\rho\,\frac{dR_m}{d\rho}\right)d\rho = -\left[\frac{u_0}{\lambda_m\|R_m\|^2}\left(\rho\,\frac{dR_m}{d\rho}\right)\right]_{\rho=a}^{\rho=b} =$$

$$= \frac{u_0}{\lambda_m\|R_m\|^2}\,[aR_m'(a) - bR_m'(b)].$$

[1)] См. гл. VII, § 2, задачу 57.

Вычислим:

$$R'_m(a) = \sqrt{\lambda_m}[J'_0(\sqrt{\lambda_m}\,a)N_0(\sqrt{\lambda_m}\,a) - J_0(\sqrt{\lambda_m}\,a)N'_0(\sqrt{\lambda_m}\,a) = -\frac{2}{\pi a},$$

$$R'_m(b) = \sqrt{\lambda_m}[J'_0(\sqrt{\lambda_m}\,b)N_0(\sqrt{\lambda_m}\,a) - J_0(\sqrt{\lambda_m}\,a)N'_0(\sqrt{\lambda_m}\,b)] =$$

$$= \sqrt{\lambda_m}\,\frac{N_0(\sqrt{\lambda_m}\,a)}{N_0(\sqrt{\lambda_m}\,b)}[J'_0(\sqrt{\lambda_m}\,b)N_0(\sqrt{\lambda_m}\,b) - J_0(\sqrt{\lambda_m}\,b)N'_0(\sqrt{\lambda_m}\,b)] =$$

$$= -\frac{2}{\pi b}\,\frac{N_0(\sqrt{\lambda_m}\,a)}{N_0(\sqrt{\lambda_m}\,b)} = -\frac{2}{\pi b}\,\frac{J_0(\sqrt{\lambda_m}\,a)}{J_0(\sqrt{\lambda_m}\,b)};$$

при этом мы воспользовались выражением для вронскиана

$$J_0(x)N'_0(x) - J'_0(x)N_0(x) = \frac{2}{\pi x}.$$

Подставив выражения для $R'_m(a)$, $R'_m(b)$ и $\|R_m\|^2$, находим

$$A_m = \frac{\pi u_0}{\lambda_m}\,\frac{J_0(\sqrt{\lambda_m}\,b)}{J_0(\sqrt{\lambda_m}\,a) + J_0(\sqrt{\lambda_m}\,b)}.$$

120. Решение. Требуется найти решение уравнения

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\,\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -4\pi f,$$

где $f(\rho,\,z) = \dfrac{e}{2\pi\rho}\,\delta(\rho)\,\delta(z-\zeta)$ [1] — объемная плотность, соответствующая точечному заряду, расположенному в точке $\rho = 0$, $z = \zeta$, так что

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \int\limits_0^h f(\rho,\,z)\rho\,d\rho\,dz = e.$$

При $z = 0$, $z = h$, $\rho = a$ должны выполняться граничные условия

$$u = 0.$$

Решение ищется в виде ряда

$$u(\rho,\,z) = \sum_{m=1}^{\infty} R_m(\rho)\sin\frac{\pi m}{h}\,z.$$

Для $R_m(\rho)$ получается уравнение

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{d}{d\rho}\left(\rho\,\frac{dR_m}{d\rho}\right) - \mu_m^2 R_m = -\frac{4e}{h\rho}\,\delta(\rho)\sin\mu_m\zeta = -f_m,$$

где $\mu_m = \dfrac{\pi m}{h}$, причем $R_m(a) = 0$. Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$R_m(\rho) = A_m I_0(\mu_m\rho) + B_m K_0(\mu_m\rho).$$

Варьируя произвольные постоянные A_m и B_m из неоднородного уравнения для R_m, получаем

$$A'_m I_0(\mu_m\rho) + B'_m K_0(\mu_m\rho) = 0, \quad A'_m I'_0(\mu_m\rho) + B'_m K'_0(\mu_m\rho) = -\frac{f_m}{\mu_m}.$$

[1] $\delta(\rho)$ и $\delta(z-\zeta)$ есть δ-функция. См. [7, гл. III, приложения].

Отсюда находим

$$B'_m = \frac{f_m I_0(\mu_m \rho)}{\mu_m W_m}, \quad W_m = I'_0(x)K_0(x) - I_0(x)K'_0(x)$$

— определитель Вронского, равный $W = \dfrac{1}{x}$ $(x = \mu_m \rho)$, так что

$$B'_m = \rho f_m I_0(\mu_m \rho), \quad A'_m = -\rho f_m K_0(\mu_m \rho).$$

Определяя отсюда интегрированием A_m и B_m, будем иметь

$$R_m(\rho) = A^0_m I_0(\mu_m \rho) + B^0_m K_0(\mu_m \rho) + \\ + \int_0^\rho s[I_0(\mu_m s)K_0(\mu_m \rho) - I_0(\mu_m \rho)K_0(\mu_m s)]f_m(s)\,ds,$$

где A^0_m и B^0_m — постоянные.

Из условия $|R_m(0)| < \infty$ следует $B^0_m = 0$. Условие при $\rho = a$ дает

$$A^0_m = -\frac{1}{I_0(a\mu_m)} \int_0^a [I_0(s\mu_m)K_0(a\mu_m) - I_0(a\mu_m)K_0(s\mu_m)]sf_m(s)\,ds,$$

так что

$$R_m(\rho) = -\frac{K_0(a\mu_m)I_0(\rho\mu_m)}{I_0(a\mu_m)} \int_0^a I_0(s\mu_m)sf_m(s)\,ds + \\ + K_0(\rho\mu_m) \int_0^\rho I_0(s\mu_m)sf_m(s)\,ds + I_0(\rho\mu_m) \int_\rho^a K_0(s\mu_m)sf_m(s)\,ds,$$

или

$$R_m(\rho) = \frac{4e}{h} \frac{I_0(a\mu_m)K_0(\rho\mu_m) - K_0(a\mu_m)I_0(\rho\mu_m)}{I_0(a\mu_m)} \sin \mu_m \zeta,$$

так как

$$\int_\rho^a K_0(s\mu_m)sf_m(s)\,ds = \frac{4e}{h} \sin \mu_m \zeta \int_\rho^a K_0(s\mu_m)\delta(s)\,ds = 0,$$

ибо точка $s = 0$ лежит вне области интегрирования

$$\int_0^\rho I_0(s\mu_m)sf_m(s)\,ds = \int_0^a I_0(s\mu_m)sf_m(s)\,ds = \\ = \frac{4e}{h} \sin \mu_m \zeta \int_0^a \delta(s)\,ds = \frac{4e}{h} \sin \mu_m \zeta.$$

Таким образом потенциал точечного заряда e, помещенного на оси цилиндра $\rho \leqslant a$, $0 \leqslant z \leqslant h$ с проводящими стенками, представляется с помощью ряда

$$u(\rho, z) = \frac{4e}{h} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{I_0\left(\frac{\pi m}{h} a\right) K_0\left(\frac{\pi m}{h} \rho\right) - K_0\left(\frac{\pi m}{h} a\right) I_0\left(\frac{\pi m}{h} \rho\right)}{I_0\left(\frac{\pi m}{h} a\right)} \times \\ \times \sin \frac{\pi m}{h} \zeta \sin \frac{\pi m}{h} z.$$

В пределе при $a \to \infty$ получаем выражение для потенциала точечного заряда в слое между проводящими плоскостями $z = 0$ и $z = h$

$$u(\rho, z) = \frac{4e}{h} \sum_{m=1}^{\infty} K_0\left(\frac{\pi m}{h}\rho\right) \sin\frac{\pi m}{h}\zeta \sin\frac{\pi m}{h} z.$$

Совершим теперь предельный переход при $h \to \infty$. При этом получаем

$$u = \frac{4e}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} K_0(\mu_m \rho) \sin\mu_m\zeta \sin\mu_m z \Delta\mu \to$$

$$\to \frac{4e}{\pi} \int_0^{\infty} K_0(\mu\rho) \sin\mu\zeta \sin\mu z \, d\mu =$$

$$= \frac{2e}{\pi} \int_0^{\infty} K_0(\mu\rho)[\cos\mu(z-\zeta) - \cos\mu(z+\zeta)] \, d\mu. \quad (1)$$

Принимая во внимание формулу

$$\int_0^{\infty} K_0(\mu\rho) \cos\mu z \, d\mu = \frac{\pi}{2(\rho^2 + z^2)^{1/2}},$$

получаем для потенциала следующее выражение:

$$u = \frac{e}{\sqrt{\rho^2 + (z-\zeta)^2}} - \frac{e}{\sqrt{\rho^2 + (z+\zeta)^2}},$$

что совпадает с известным выражением для потенциала точечного заряда в полупространстве. Чтобы получить из (1) потенциал заряда в неограниченном пространстве, введем новую переменную

$$z' = z - \zeta,$$

что дает

$$u = \frac{2e}{\pi} \int_0^{\infty} K_0(\mu\rho) \cos\mu z' \, d\mu - \frac{2e}{\pi} \int_0^{\infty} K_0(\mu\rho) \cos\mu(z' + 2\zeta) \, d\mu =$$

$$= \frac{e}{\sqrt{\rho^2 + (z')^2}} - \frac{e}{\sqrt{\rho^2 + (z'+2\zeta)^2}} \to \frac{e}{\sqrt{\rho^2 + (z')^2}} \quad \text{при} \quad \zeta \to \infty.$$

121. Потенциал точечного заряда, помещенного в точке $(0, \zeta)$ внутри полубесконечной трубы $\rho \leqslant a$, $z \geqslant 0$ с проводящими стенками, на которых поддерживается потенциал, равный нулю, определяется выражением

$$u(\rho, z) = \frac{e}{\sqrt{\rho^2 + (z-\zeta)^2}} - \frac{e}{\sqrt{\rho^2 + (z+\zeta)^2}} -$$

$$- \frac{4e}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K_0(a\mu) I_0(\rho\mu)}{I_0(a\mu)} \sin\mu\zeta \sin\mu z \, d\mu.$$

122. Пусть заряд e находится в точке (r', φ', ζ) внутри бесконечного кругового цилиндра с проводящими стенками; потенциал электрического поля, создаваемого этим зарядом, дается рядом

$$u(r,\,\varphi,\,z)=\frac{4e}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_n\left(\dfrac{\mu_m^{(n)}}{a}\,r\right)J_n\left(\dfrac{\mu_m^{(n)}}{a}\,r'\right)}{\mu_m^{(n)}[J_n'(\mu_m^{(n)})]^2}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{\mu_m^{(n)}|z-\zeta|}{a}\right\}\cos n(\varphi-\varphi'),\qquad(1)$$

где $\mu_m^{(n)}$ — корень уравнения $J_n(\mu)=0$, a — радиус цилиндра.

Если заряд находится на оси цилиндра ($r'=0$), то

$$u(r,\,\varphi,\,z)=\frac{4e}{a}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\dfrac{\mu_m^{(0)}}{a}\,r\right)}{\mu_m^{(0)}J_1^2(\mu_m^{(0)})}\exp\left\{-\frac{\mu_m^{(0)}}{a}\,|z-\zeta|\right\}.$$

Р е ш е н и е. Для построения функции источника решим методом разделения переменных неоднородное уравнение

$$\Delta u=-4\pi\rho\qquad(2)$$

с граничным условием

$$u\,\big|_{\Sigma}=0,$$

где Σ — поверхность цилиндра. При этом мы будем считать, что поперечное сечение цилиндра — произвольная область S с границей C.

Пусть $\{\psi_n(M)\}$ и $\{\lambda_n\}$ — собственные функции и собственные значения задачи

$$\Delta_2\psi+\lambda\psi=0\quad\text{в}\quad S,\quad\psi=0\quad\text{на}\quad C.$$

Будем искать решение в виде

$$u(M,\,z)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z)\psi_n(M).\qquad(3)$$

Разлагая при этом $\rho(M)$ также в ряд, получаем

$$\rho(M,\,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n(z)\psi_n(M),$$

где

$$u_n(z)=\frac{1}{\|\psi_n\|^2}\int\limits_S u(M',\,z)\psi_n(M')d\sigma_{M'},$$

$$\rho_n(z)=\frac{1}{\|\psi_n\|^2}\int\limits_S \rho(M',\,z)\psi_n(M')d\sigma_{M'},$$

где

$$\|\psi_n\|^2=\int\limits_S\psi_n^2(M')d\sigma_{M'}.$$

Из уравнения (2) следует уравнение для $u_n(z)$

$$u_n''-\lambda_n u_n=-4\pi\rho_n\quad(\lambda_n>0),$$

причем $u_n\to 0$ при $z\to\pm\infty$.

Отсюда находим

$$u_n(z) = 4\pi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{\lambda_n}\,|z-\zeta|}}{2\sqrt{\lambda_n}}\,\rho_n(\zeta)\,d\zeta,$$

или

$$u_n(z) = 4\pi \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{S} \rho(M',\,\zeta) e^{-\sqrt{\lambda_n}\,|z-\zeta|}\,\frac{\psi_n(M')}{2\sqrt{\lambda_n}}\,d\sigma_{M'}\,d\zeta.$$

Подставляя это выражение в формулу (3) и формально меняя порядок суммирования и интегрирования, получаем

$$u(M,\,z) = 4\pi \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{S} \rho(M',\,\zeta)\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(M)\psi_n(M')}{2\sqrt{\lambda_n}\|\psi_n\|^2}\,e^{-\sqrt{\lambda_n}\,|z-\zeta|}\right\} d\sigma_{M'}\,d\zeta.$$

Отсюда следует, что функция точечного источника равна

$$G(M,\,M',\,z,\,\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(M)\psi_n(M')}{2\sqrt{\lambda_n}\|\psi_n\|^2}\,e^{-\sqrt{\lambda_n}\,|z-\zeta|}.$$

Потенциал заряда e, очевидно, равен $u = 4\pi eG$. Если цилиндр круглый (S — круг), то

$$\psi_n = \psi_{m,\,n}(r,\,\varphi) = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\,r\right)\begin{cases}\cos n\varphi,\\ \sin n\varphi,\end{cases}$$

$$\lambda_n = \lambda_{m,\,n} = \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\right)^2,$$

$$\|\psi_n\|^2 = \|\psi_{m,\,n}\|^2 = \frac{\pi}{2}\,\varepsilon_n a^2 [J_n'(\mu_m^{(n)})]^2,$$

где

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 2 & \text{при} \quad n = 0,\\ 1 & \text{при} \quad n \neq 0.\end{cases}$$

Подставляя эти выражения в формулу для G, получим решение задачи в форме (1). Аналогичным методом может быть найдено решение задачи о точечном заряде внутри цилиндра.

4. Задачи, требующие применения сферических и цилиндрических функций.

123. Решение первой внутренней краевой задачи для сферы

$$\Delta u = 0 \quad \text{при} \quad r < a, \quad u\,\big|_{r=a} = f(\theta,\,\varphi)$$

может быть представлено в виде ряда

$$u(r,\,\theta,\,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n Y_n(\theta,\,\varphi), \tag{1}$$

где

$$Y_n = \sum_{k=0}^{n} (A_{nk}\cos k\varphi + B_{nk}\sin k\varphi) P_n^{(k)}(\cos\theta), \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} A_{0,0} &= \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} f(\theta,\,\varphi)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi, \\ A_{n,k} &= \frac{(2n+1)(n-k)!}{2\pi(n+k)!}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} f(\theta,\,\varphi)P_n^{(k)}(\cos\theta)\cos k\varphi\sin\theta\,d\theta\,d\varphi, \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n>0, \\ B_{nk} &= \frac{(2n+1)(n-k)!}{2\pi(n+k)!}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} f(\theta,\,\varphi)P_n^{(k)}(\cos\theta)\sin k\varphi\sin\theta\,d\theta\,d\varphi. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

124. Решение первой внешней краевой задачи для сферы

$$\Delta u = 0 \quad \text{при} \quad r > a, \quad u\,\big|_{r=a} = f(\theta,\,\varphi)$$

представляется рядом

$$u(r,\,\theta,\,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} Y_n(\theta,\,\varphi) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}(A_{nk}\cos k\varphi + B_{nk}\sin k\varphi)P_n^{(k)}(\cos\theta),$$

где A_{nk} и B_{nk} — коэффициенты, определяемые формулами (3) задачи 123.

125. а) Решение второй внутренней краевой задачи для сферы

$$\Delta u = 0 \quad \text{при} \quad r < a, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{r=a} = f(\theta,\,\varphi);$$

$f(\theta,\,\varphi)$ — функция, удовлетворяющая условию

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} f(\theta,\,\varphi)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi = 0,$$

имеет вид

$$u(r,\,\theta,\,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{na^{n-1}}\,Y_n(\theta,\,\varphi) + \text{const} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{r^n}{na^{n-1}}\,(A_{nk}\cos k\varphi + B_{nk}\sin k\varphi)P_n^{(k)}(\cos\theta) + \text{const},$$

где A_{nk} и B_{nk} — коэффициенты, определяемые формулами (3) задачи 123.

б) Решение второй внешней краевой задачи для сферы

$$\Delta u = 0 \quad \text{при} \quad r > a, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{r=a} = f(\theta,\,\varphi) \quad \text{или} \quad -\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=a} = f(\theta,\,\varphi)$$

(n — внешняя нормаль) имеет вид

$$u(r,\,\theta,\,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n+2}}{(n+1)r^{n+1}}\,Y_n(\theta,\,\varphi) + \text{const}.$$

Для частного случая

$$f(\theta,\,\varphi) = A\cos\theta$$

получим

$$Y_n(\theta,\,\varphi) = 0 \quad \text{при} \quad n > 1,$$

$$Y_1(\theta,\,\varphi) = A\cos\theta,$$

$$u(r,\,\theta) = Ar\cos\theta \quad (r < a),$$

$$u(r,\,\theta) = \frac{Aa^3}{2r^2}\cos\theta \quad (r > a).$$

126. Напряженность электростатического поля, как обычно, выражается через потенциал u,

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} u,$$

равный

$$u = V_2 + \frac{V_1 - V_2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n \frac{2n+1}{n+1}\,P_{n-1}(0)P_n(\cos\theta), \quad r < a,$$

где a — радиус сферы, P_n — полином Лежандра n-го порядка,

$$P_n(0) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^\nu\,1\cdot 3\cdot 5\ldots(2\nu-1)}{\nu!\,2^\nu} & \text{при} \quad n = 2\nu, \\ 0 & \text{при} \quad n = 2\nu+1. \end{cases}$$

Указание. При вычислении интеграла

$$\int_0^1 P_n(x)\,dx$$

воспользоваться:

1) рекуррентной формулой

$$P_n(x) = \frac{1}{2n+1}\,[P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)];$$

2) формулами

$$P_{n-1}(0) - P_{n+1}(0) = P_{n-1}(0)\,\frac{2n+1}{n+1},$$

$$P_{2\nu}(0) = (-1)^\nu\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2\nu-1)}{\nu!\,2^\nu},$$

$$P_{2\nu+1}(0) = 0.$$

127. Заряд находится в точке $r = r_0$, $\theta = 0$, где r, θ — сферические координаты, начало координат в точке $r = 0$.

а) Если $r_0 < a$, где a — радиус сферы, то потенциал

$$u(r,\,\theta) = \begin{cases} e\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r^n}{r_0^{n+1}} - \frac{r_0^n r^n}{a^{2n+1}}\right)P_n(\cos\theta) & \text{при} \quad r < r_0, \\ e\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_0^n}{r^{n+1}} - \frac{r_0^n r^n}{a^{2n+1}}\right)P_n(\cos\theta) & \text{при} \quad r > r_0, \end{cases}$$

а плотность поверхностных зарядов на сфере

$$\sigma = -\frac{e}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,\frac{r_0^n}{a^{n+2}}\,P_n(\cos\theta).$$

б) Если $r_0 > a$, то потенциал

$$u(r,\,\theta) = \begin{cases} e\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r^n}{r_0^{n+1}} - \frac{a^{2n+1}}{r^{n+1}r_0^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta) & \text{при} \quad r < r_0, \\ e\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_0^n}{r^{n+1}} - \frac{a^{2n+1}}{r^{n+1}r_0^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta) & \text{при} \quad r > r_0, \end{cases}$$

а плотность поверхностных зарядов на сфере равна

$$\sigma = -\frac{e}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,\frac{a^{n-1}}{r_0^{n+1}}\,P_n(\cos\theta).$$

Указание. Следует воспользоваться разложением

$$\frac{1}{R} = \begin{cases} \dfrac{1}{r_0}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\cos\theta) & \text{при} \quad r < r_0, \\ \dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\cos\theta) & \text{при} \quad r > r_0, \end{cases}$$

где R — расстояние точки наблюдения $(r,\,\theta)$ от заряда $(r_0,\,0)$.

Потенциал точечного заряда ищется в виде суммы

$$u(r,\,\theta) = \frac{e}{R} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n\left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos\theta) \quad \text{при} \quad r < a, \tag{1}$$

$$u(r,\,\theta) = \frac{e}{R} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta) \quad \text{при} \quad r > a. \tag{2}$$

Коэффициенты A_n и B_n определяются из граничного условия $u\,\big|_{r=a} = 0$:

$$A_n = -e\,\frac{r_0^n}{a^{n+1}}, \quad B_n = -e\,\frac{a^n}{r_0^{n+1}}.$$

Плотность поверхностных зарядов находится по формуле

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{r=a}. \tag{3}$$

При этом в случае а) надо пользоваться формулой (2), в случае б) — формулой (1).

128. Пусть сфера радиуса a, на которой распределен заряд e_1, помещена в поле точечного заряда e, находящегося в точке $(r_0,\,0)$.

Потенциал поля равен

$$u = \frac{e}{R} + \frac{aV_0}{r} - e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{2n+1}}{r_0^{n+1}r^{n+1}}\,P_n(\cos\theta),$$

а поверхностная плотность индуцированных на сфере зарядов дается выражением

$$\sigma = -\frac{e}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,\frac{a^{n-1}}{r_0^{n+1}}\,P_n(\cos\theta) + \frac{V_0}{4\pi a},$$

$$V_0 = \frac{e_1}{a} + \frac{e}{r_0}.$$

Указание. Решение по-прежнему ищется в виде

$$u(r,\,\theta) = \frac{e}{R} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta).$$

Граничное условие $u\,\big|_{r=a} = V_0$ дает

$$u(a,\,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{e\,\frac{a^n}{r_0^{n+1}} + B_n\right\} P_n(\cos\theta) = V_0 = \text{const}.$$

Отсюда находим

$$B_0 = V_0 - e\,\frac{1}{r_0}, \quad B_n = -e\,\frac{a^n}{r_0^{n+1}}.$$

Пользуясь разложением

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\cos\theta),$$

найдем

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{r=a}.$$

Для определения V_0 служит условие нормировки

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sigma a^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi = e_1.$$

129. Пусть $(r,\,\theta,\,\varphi)$ — сферические координаты, $r = 0$ — центр шара, a — его радиус, $u = u(r,\,\theta,\,\varphi)$ — потенциал скорости:

а) $u = u(r,\,\theta) = \dfrac{v_0 a^3}{2r^2}\,P_1(\cos\theta) = \dfrac{v_0 a^3}{2r^2}\,\cos\theta$;

б) $u = u(r,\,\theta) = -v_0\left(r + \dfrac{a^3}{2r^2}\right)P_1(\cos\theta)$.

Указание. Решение ищется в виде

$$u = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{n+2}}{(n+1)r^{n+1}}\,Y_n(\theta,\,\varphi),$$

где $Y_n(\theta,\,\varphi)$ — сферическая функция. Из граничного условия при $r = a$ находим

$$Y_n(\theta,\,\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n \neq 1, \\ \dfrac{v_0}{2}\,P_1(\cos\theta). \end{cases}$$

Ср. решение задач 74 и 75 этой главы.

130. Потенциал искаженного поля равен

$$u = \begin{cases} u_1 = -E_0 \dfrac{3\varepsilon_2}{2\varepsilon_2 + \varepsilon_1} r\cos\theta & \text{внутри шара} \quad (r < a), \\ u_2 = -E_0 \left[1 + \dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \left(\dfrac{a}{r}\right)^3\right] r\cos\theta & \text{вне шара,} \end{cases}$$

где a — радиус шара, $u = u_0 = -E_0 z = -E_0 r\cos\theta$ — потенциал внешнего поля в отсутствие шара. Поле $\boldsymbol{E} = (0,\, 0,\, E_z)$, где

$$E_z = -\frac{\partial u}{\partial z} = \begin{cases} -\dfrac{3\varepsilon_2}{2\varepsilon_2 + \varepsilon_1} E_0 & \text{внутри шара,} \\ \left[1 - \dfrac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \dfrac{2a^3}{r^3}\right] E_0 & \text{вне шара.} \end{cases}$$

Указание. См. [7, дополнение, часть II, § 3].

131. а) Если заряд находится вне сферы в точке $(r_0,\, 0)$, $r_0 > a$, то потенциал электрического поля равен

$$u(r,\, \theta) = \begin{cases} u_1(r,\, \theta) & \text{при} \quad r < a, \\ u_2(r,\, \theta) & \text{при} \quad r > a, \end{cases}$$

где

$$u_1(r,\, \theta) = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon_2} \frac{r^n}{r_0^{n+1}} P_n(\cos\theta),$$

$$u_2(r,\, \theta) = e\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon_2} \frac{a^{2n+1}}{r_0^{n+1} r^{n+1}} P_n(\cos\theta) + \frac{e}{\varepsilon_2} \frac{1}{R}.$$

Указание. Решение ищется в виде

$$u_1(r,\, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos\theta) \quad (r < a),$$

$$u_2(r,\, \theta) = \frac{e}{\varepsilon_2} \frac{1}{R} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta) \quad (r > a),$$

где A_n и B_n — коэффициенты, определяемые из условия сопряжения

$$u_1 = u_2, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial r} = \varepsilon_2 \frac{\partial u_2}{\partial r} \quad \text{при} \quad r = a.$$

б) Если $r_0 < a$, то

$$u_1(r,\, \theta) = e\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon_2} \frac{r_0^n r^n}{a^{2n+1}} P_n(\cos\theta) + \frac{e}{\varepsilon_1 R}$$

при $r < a$,

$$u_2(r,\, \theta) = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon_2} \frac{r_0^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta) \quad \text{при} \quad r > a.$$

Указание. См. задачу 131, а).

132. Плотность тока

$$j_1 = -\sigma_1 \operatorname{grad} u_1 \quad \text{при} \quad r < a,$$
$$j_2 = -\sigma_2 \operatorname{grad} u_2 \quad \text{при} \quad r > a.$$

Источник тока находится в точке $(r_0,\,0)$.

а) Если $r_0 < a$, то

$$u_1 = \frac{I}{4\pi}\,\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n\sigma_1+(n+1)\sigma_2}\,\frac{r_0^n r^n}{a^{2n+1}}\,P_n(\cos\theta)+\frac{I}{4\pi\sigma_1 R}\quad (r<a),$$

$$u_2 = \frac{I}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n\sigma_1+(n+1)\sigma_2}\,\frac{r_0^n}{a^{2n+1}}\,P_n(\cos\theta)\quad (r>a).$$

б) Если $r_0 > a$, то

$$u_1(r,\,\theta) = \frac{I}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n\sigma_1+(n+1)\sigma_2}\,\frac{r^n}{r_0^{n+1}}\,P_n(\cos\theta)\quad (r<a),$$

$$u_2(r,\,\theta) = \frac{I}{4\pi}\,\frac{\sigma_2-\sigma_1}{\sigma_2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n\sigma_1+(n+1)\sigma_2}\,\frac{a^{2n+1}}{r_0^{n+1}r^{n+1}}\,P_n(\cos\theta)+\frac{I}{4\pi\sigma_2 R}$$

$$(r>a).$$

133. Если шар идеально проводящий ($\sigma_1=\infty$), и источник тока мощностью I находится в точке $(r_0,\,0)$, $r_0>a$, среды, обладающей проводимостью σ_2, то

$$j_1 = 0,\quad j_2 = -\sigma_2\,\mathrm{grad}\,u_2,$$

где

$$u_2(r,\,\theta) = -\frac{I}{4\pi\sigma_2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{2n+1}}{r_0^{n+1}r^{n+1}}\,P_n(\cos\theta)+\frac{I}{4\pi\sigma_2 R}\quad (r>a).$$

134. Температура $u(r,\,\theta)$ вне шара равна (источник — в точке $(r_0,\,0)$)

$$u(r,\,\theta) = \frac{Q_0}{4\pi kR}+\frac{Q_0}{4\pi k}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}-\frac{a^{2n+1}}{r_0^{n+1}r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta),$$

где k — коэффициент теплопроводности среды, $R=\sqrt{r^2+r_0^2-2r_0r\cos\theta}$, a — радиус шара.

135. Температура внутри шара $r<a$ равна

$$u(r,\,\theta) = \frac{Q_0}{4\pi kR}+\frac{Q_0}{4\pi k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)-ah}{n+ah}\,\frac{r_0^n r^n}{a^{2n+1}}\,P_n(\cos\theta),$$

где h — коэффициент теплообмена, источник в точке $(r_0,\,0)$.

Указание. При $r=a$ имеет место условие

$$k\,\frac{\partial u}{\partial r}+hu=0.$$

Решение следует, как обычно, искать в виде

$$u(r,\,\theta) = \frac{Q_0}{4\pi kR}+\sum_{n=0}^{\infty}A_n\left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos\theta);$$

воспользоваться разложением $\dfrac{1}{R}$ и определить A_n из граничного условия.

136. Потенциал точечного заряда e между концентрическими сферами ($a \leqslant r \leqslant b$) равен

$$u(r,\,\theta) = \frac{e}{R} - e\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{r_0^{2n+1}-a^{2n+1}}{b^{2n+1}-a^{2n+1}}\,\frac{r^n}{r_0^{n+1}} + \frac{b^{2n+1}-r_0^{2n+1}}{b^{2n+1}-a^{2n+1}}\,\frac{a^{2n+1}}{r_0^{n+1}r^{n+1}}\right]P_n(\cos\theta).$$

При $a \to 0$ отсюда получаем решение задачи 127, а), при $b \to \infty$ — решение задачи 127, б).

Плотность индуцированных зарядов

$$\sigma_1 = \sigma\,\big|_{r=a} = -\frac{e}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)(b^{2n+1}-r_0^{2n+1})}{b^{2n+1}-a^{2n+1}}\,\frac{a^{n-1}}{r_0^{n+1}}\,P_n(\cos\theta),$$

$$\sigma_2 = \sigma\,\big|_{r=b} = \frac{e}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)(r_0^{2n+1}-a^{2n+1})}{b^{2n+1}-a^{2n+1}}\,\frac{b^{n-1}}{r_0^{n+1}}\,P_n(\cos\theta).$$

Указание. Решение следует искать в виде

$$u(r,\,\theta) = \frac{e}{R} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta),$$

A_n и B_n определяются из условий $u = 0$ при $r = a$ и $r = b$.

137. 1) Напряженность поля точечного заряда e, помещенного в точке $r = r_0$, $\theta = 0$ вне шара $r_0 > b$, $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} u$, где потенциал

$$u = \begin{cases} u_1 & \text{при} \quad r < a, \\ u_2 & \text{при} \quad a < r < b, \\ u_3 & \text{при} \quad r > b, \end{cases}$$

определяется формулами

$$u_1(r,\,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos\theta) \quad \text{при} \quad r < a,$$

$$u_2(r,\,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[B_n\left(\frac{r}{a}\right)^n + C_n\left(\frac{b}{r}\right)^{n+1}\right]P_n(\cos\theta) \quad \text{при} \quad a < r < b,$$

$$u_3(r,\,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n\left(\frac{b}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta) + \frac{e}{\varepsilon_3 R} \quad \text{при} \quad r > b,$$

где $R = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\theta}$ — расстояние между точкой наблюдения $(r,\,\theta)$ и зарядом, а

$$B_n = \frac{ea^n\delta_{23}[n\varepsilon_3 + (n+1)]}{r_0^{n+1}[1 + n(n+1)]\left(\dfrac{a}{b}\right)^{2n+1}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)\delta_{12}\delta_{23}},$$

$$C_n = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\delta_{12}nB_n, \quad D_n = \left(\frac{b}{a}\right)^n B_n + C_n - \frac{eb^n}{\varepsilon_3 r_0^{n+1}},$$

$$\delta_{i,\,i+1} = \frac{1}{n\varepsilon_i + (n+1)\varepsilon_{i+1}} \quad (i = 1,\,2).$$

Аналогично решается задача, если точечный заряд помещен внутри шара $r_0 < a$ или $a < r_0 < b$. Соответствующие выражения для потенциала мы не приводим.

138. Если внешнее поле $\boldsymbol{E}_0$ направлено вдоль полярной оси z, так что его потенциал

$$V_0 = -E_0 z = -E_0 r P_1(\cos\theta) \quad [P_1(x) = x],$$

то решение задачи имеет вид

$$V = V_1 = Ar P_1(\cos\theta) \quad \text{при} \quad r \leqslant a,$$

$$V = V_2 = \left(Br + \frac{C}{r^2}\right) P_1(\cos\theta) \quad \text{при} \quad a \leqslant r \leqslant b \quad \text{(внутри оболочки)},$$

$$V = V_3 = \left(-E_0 r + \frac{A}{r^2}\right) P_1(\cos\theta) \quad \text{при} \quad r \geqslant b,$$

где A, B, C, D — коэффициенты, равные

$$A = -\frac{9E_0 H}{\Delta}, \quad B = -\frac{3(2H+1)}{\Delta} E_0, \quad C = -\frac{3(H-1)E_0}{\Delta} a^3,$$

$$D = E_0 b^3 + \left[1 + \frac{(2H+1)b^3}{(H-1)a^3}\right], \quad H = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1},$$

$$\Delta = 9H - 2(H-1)^2 \left[\left(\frac{a}{b}\right)^3 - 1\right].$$

139. Вводя обозначения: a — радиус внутренней обкладки, b — радиус внешней обкладки сферического конденсатора, δ — расстояние между центрами сфер, и пренебрегая членами δ^2, δ^3, δ^4 и т. д., получим для плотности поверхностных зарядов на внутренней обкладке

$$\sigma = -\frac{\varepsilon}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=a} = \frac{\varepsilon ab(V_1 - V_2)}{4\pi(b-a)}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{3\delta}{b^3 - a^3}\cos\theta\right),$$

где $V_1 - V_2$ — разность потенциалов между обкладками. При этом предполагается, что центр сферической системы координат находится в центре внутренней сферы.

Указание. Воспользоваться разложением обратного расстояния между точками по полиномам Лежандра. Если $r = a$ — внутренняя обкладка, то приближенное (с разностью до членов порядка δ^2 и выше) уравнение внешней обкладки может быть записано в виде

$$r = b + \delta P_1(\cos\theta).$$

140. Если точки кольца имеют сферические координаты $r = c$, $\theta = \alpha$, то потенциал в точке (r, θ) равен

$$V = \frac{e}{\varepsilon c}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{c}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\alpha)P_n(\cos\theta) \quad \text{при} \quad r > c \quad \text{или} \quad \theta \neq \alpha, \quad r = c,$$

$$V = \frac{e}{\varepsilon c}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{c}\right)^{n} P_n(\cos\alpha)P_n(\cos\theta) \quad \text{при} \quad r < c \quad \text{или} \quad \theta \neq \alpha, \quad r = c.$$

Указание. Сначала ищется потенциал в точке $(r_0,\,0)$ на полярной оси z

$$V(r_0,\,0)=\frac{e}{\varepsilon}\,\frac{1}{\sqrt{r_0^2+c^2-2r_0c\cos\alpha}}=\begin{cases}\dfrac{e}{\varepsilon c}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{c}{r_0}\right)^{n+1}P_n(\cos\alpha), & \\ & r_0>c,\\ \dfrac{e}{\varepsilon c}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_0}{c}\right)^{n}P_n(\cos\alpha), & r_0<c.\end{cases}$$

141. Если $a\cos\alpha>b$, то потенциал между кольцом и сферой, точнее, в области $b<r<a$, дается формулой

$$V(r,\,\theta)=$$
$$=\frac{2\pi\varkappa}{\varepsilon_1}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\alpha)\sin\alpha\left\{\left(\frac{r}{a}\right)^n-\frac{n(\varepsilon_2-\varepsilon_1)b^{2n+1}}{a^n[n(\varepsilon_2+\varepsilon_1)+\varepsilon_1]r^{n+1}}\right\}P_n(\cos\theta),$$

где $\varkappa=\dfrac{e}{2\pi a\sin\alpha}$, e — полный заряд кольца. Начало координат находится в центре сферы.

Указание. Воспользоваться решением задачи 140 о потенциале заряженного кольца, точки которого имеют сферические координаты $r=a,\ \theta=\alpha$.

Решение ищется в виде суммы

$$V(r,\,\theta)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}A_n\left(\frac{r}{b}\right)^n P_n(\cos\theta) & \text{при}\quad r<b,\\ V_{\text{к}}+\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}B_n\left(\frac{b}{r}\right)^{n+1}P_n(\cos\theta) & \text{при}\quad r>b,\end{cases}$$

где A_n и B_n — коэффициенты, определяемые из условий сопряжения при $r=b$, а $V_{\text{к}}$ — потенциал кольца из задачи 140.

142. Пусть начало координат находится в центре кольца и сферы, полярная ось направлена перпендикулярно к плоскости кольца. Тогда будем иметь для потенциала выражения (a — радиус кольца)

$$V(r,\,\theta)=\begin{cases}V_1(r,\,\theta) & \text{при}\quad r<b\quad\text{или}\quad r=a,\quad\theta\neq\dfrac{\pi}{2},\\ V_2(r,\,\theta) & \text{при}\quad b>r>a\quad\text{или}\quad r=a,\quad\theta\neq\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$$

где

$$V_1(r,\,\theta)=\frac{e}{\varepsilon a}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^{2n}-\left(\frac{a}{b}\right)^{2n+1}\left(\frac{r}{b}\right)^{2n}\right]P_{2n}(\cos\theta),$$

$$V_2(r,\,\theta)=\frac{e}{\varepsilon a}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left[\left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1}-\left(\frac{a}{b}\right)^{2n+1}\left(\frac{r}{b}\right)^{2n}\right]P_{2n}(\cos\theta).$$

Нормальная составляющая напряженности электрического поля на сфере $r=b$ равна

$$E_r=-\frac{\partial V_2}{\partial r}\Big|_{r=b}=\frac{e}{ab\varepsilon}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,(4n+1)P_{2n}(\cos\theta).$$

Здесь ε — диэлектрическая постоянная вещества, заполняющего сферу,

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \ldots (2n-2) \cdot 2n, \quad (2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1).$$

Указание. Следует воспользоваться решением задачи 140 о потенциале заряженного кольца, а именно: если начало сферической системы координат находится в центре кольца, на котором распределен заряд e, то потенциал в любой точке (r, θ) равен (см. задачу 140 при $\alpha = \frac{\pi}{2}$)

$$V_{\text{к}}(r, \theta) = \begin{cases} \dfrac{e}{\varepsilon a} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n(0) P_n(\cos\theta) & \text{при} \quad r > a \\ & \text{или} \quad r = a, \quad \theta \neq \dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{e}{\varepsilon a} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{n} P_n(0) P_n(\cos\theta) & \text{при} \quad r < a \\ & \text{или} \quad r = a, \quad \theta \neq \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

причем

$$P_n(0) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ нечетно}, \\ (-1)^{n/2} \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (n-1)}{2 \cdot 4 \ldots n}, & \text{если } n \text{ четно}. \end{cases}$$

Решение поставленной задачи нужно искать в виде суммы

$$V = V_{\text{к}} + V_{\text{и}},$$

где $V_{\text{и}}$ — потенциал зарядов, индуцированных на сфере, равный

$$V_{\text{и}} = \frac{e}{\varepsilon a} \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} \left(\frac{r}{b}\right)^{2n} P_{2n}(\cos\theta),$$

A_{2n} находится из условия $V = 0$ при $r = b$.

143. Если a — радиус шара, в центре которого помещено начало сферической системы координат, то потенциал тока во всех внутренних точках шара выражается формулой

$$V(r, \theta) = \frac{I}{2\pi a \sigma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n+3}{2n+1} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1} P_{2n+1}(\cos\theta).$$

Указание. В силу симметрии задачи $V = 0$ при $\theta = \frac{\pi}{2}$, и поэтому можно решать задачу для $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, полагая

$$V(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1} P_{2n+1}(\cos\theta).$$

Коэффициенты A_{2n+1} следует определить из условия

$$\lim_{\delta \to 0} \sigma \int_0^{\delta} \left(-\frac{\partial V_\delta}{\partial r}\right) 2\pi a^2 \sin\theta \, d\theta = I, \quad \left.\frac{\partial V_\delta}{\partial r}\right|_{\substack{r=a \\ \theta > \delta}} = 0.$$

144. Предположим, что точечный заряд находится в начале координат, а $z = a$ и $z = b$ — плоскости, ограничивающие пластинку, ε_2 — диэлектрическая постоянная пластинки, ε_1 — диэлектрическая постоянная пространства.

Потенциал поля в области $z > b$ равен

$$V(\rho,\, z) = \frac{e(1-\beta^2)}{\varepsilon_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^{2n}}{\sqrt{(z+2nh)^2+\rho^2}},$$

где

$$\beta = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}, \quad \rho^2 = x^2 + y^2, \quad h = b - a.$$

Р е ш е н и е. Требуется найти функцию

$$V(\rho,\, z) = \begin{cases} V_1(\rho,\, z) & \text{при} \quad -\infty < z < a \quad \text{(под пластинкой)}, \\ V_2(\rho,\, z) & \text{при} \quad a < z < b \quad \text{(в пластинке)}, \\ V_3(\rho,\, z) & \text{при} \quad b < z < \infty \quad \text{(над пластинкой)}, \end{cases}$$

гармоническую всюду, кроме точки $\rho = 0$, $z = 0$, в которой V_1 имеет особенность вида $\dfrac{e}{\varepsilon_1 r}$, и удовлетворяющую при $z = a$ и $z = b$ обычным условиям сопряжения

$$V_1 = V_2, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial z} = \varepsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial z} \quad \text{при} \quad z = a;$$

$$V_2 = V_3, \quad \varepsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial z} = \varepsilon_1 \frac{\partial V_3}{\partial z} \quad \text{при} \quad z = b.$$

Так как область неограниченная, то решение надо искать в интегральной форме, исходя из разложения

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2}} = \int_0^{\infty} J_0(\lambda\rho) e^{-\lambda|z|}\, d\lambda \ ^{1)}, \tag{1}$$

полагая

$$V_1(\rho,\, z) = \frac{e}{\varepsilon_1}\left[\int_0^{\infty} J_0(\lambda\rho) e^{-\lambda|z|}\, d\lambda + \int_0^{\infty} A(\lambda) J_0(\lambda\rho) e^{\lambda z}\, d\lambda\right],$$

$$V_2(\rho,\, z) = \frac{e}{\varepsilon_1}\left[\int_0^{\infty} B(\lambda) J_0(\lambda\rho) e^{-\lambda z}\, d\lambda + \int_0^{\infty} C(\lambda) J_0(\lambda\rho) e^{\lambda z}\, d\lambda\right],$$

$$V_3(\rho,\, z) = \frac{e}{\varepsilon_1} \int_0^{\infty} D(\lambda) J_0(\lambda\rho) e^{-\lambda z}\, d\lambda.$$

Все интегралы, кроме первого, должны оставаться конечными при $\rho \to 0$ и $z \to 0$; кроме того,

$$\lim_{z\to-\infty} V_1 = 0, \quad \lim_{z\to\infty} V_3 = 0.$$

Условия сопряжения при $z = a$ и $z = b$ дают:

$$A(\lambda) = (\beta+1)C(\lambda) - \beta e^{-2a\lambda}, \quad B(\lambda) = \beta e^{2a\lambda} C(\lambda) + \beta - 1,$$

[1)] См. [7, с. 607].

$$C(\lambda)=\frac{\beta e^{-2\lambda b}}{1+\beta}\,D(\lambda),\quad D(\lambda)=\frac{1-\beta^2}{1-\beta^2e^{-2h\lambda}},$$

так что

$$V_3=\frac{e(1-\beta^2)}{\varepsilon_1}\int\limits_0^\infty\frac{J_0(\lambda\rho)e^{-\lambda z}}{1-\beta^2e^{-2\lambda h}}\,d\lambda.$$

Для вычисления этого интеграла разложим $\dfrac{1}{1-\beta^2e^{-2\lambda h}}$ в ряд по степеням $\beta^2e^{-2\lambda h}$:

$$V_3=\frac{e(1-\beta^2)}{\varepsilon_1}\left\{\int\limits_0^\infty J_0(\lambda\rho)e^{-\lambda z}\,d\lambda+\beta^2\int\limits_0^\infty J_0(\lambda\rho)e^{-\lambda(z+2h)}\,d\lambda+\ldots\right\},$$

откуда, пользуясь формулой (1), и получаем результат в виде ряда, приведенного выше.

145. Потенциал на поверхности земли при $z=0$ может быть представлен в двух формах:

$$V(\rho,\,0)=\frac{I}{2\pi\sigma_1}\int\limits_0^\infty\frac{1-\beta e^{-2\lambda h}}{1+\beta e^{-2\lambda h}}\,J_0(\lambda\rho)\,d\lambda$$

или

$$V(\rho,\,0)=\frac{I}{2\pi\sigma_1}\left[\frac{1}{\rho}+2\int\limits_{n=1}^\infty\frac{(-1)^n\beta^n}{\sqrt{4h^2n^2+\rho^2}}\right],\qquad(1)$$

где

$$\beta=\frac{\sigma_2-\sigma_1}{\sigma_2+\sigma_1}.$$

Если в точках $x=a$ и $z=-a$ помещены два электрода, причем через первый электрод вытекает ток I, а через второй вытекает ток $-I$, то

$$V(\rho,\,0)=\frac{I}{2\pi\sigma_1}\left\{\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}+2\sum_{n=1}^\infty(-\beta)^n\left[\frac{1}{\sqrt{4h^2n^2+R_1^2}}-\frac{1}{\sqrt{4h^2n^2+R_2^2}}\right]\right\},\qquad(2)$$

где

$$R_1=\sqrt{(x-a)^2+y^2},\quad R_2=\sqrt{(x+a)^2+y^2}.$$

Указание. Решение ищется в виде

$$V_1=\frac{I}{2\pi\sigma_1}\left[\int\limits_0^\infty J_0(\lambda\rho)e^{-\lambda z}\,d\lambda+\int\limits_0^\infty A(\lambda)J_0(\lambda\rho)e^{-\lambda z}\,d\lambda+\int\limits_0^\infty B(\lambda)J_0(\lambda\rho)e^{\lambda z}\,d\lambda\right]$$

в области $0\leqslant z\leqslant h$,

$$V_2=\frac{I}{2\pi\sigma_2}\int\limits_0^\infty C(\lambda)J_0(\lambda\rho)e^{-\lambda z}\,d\lambda\quad\text{в области}\quad z\geqslant a.$$

Коэффициенты разложения $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ и $C(\lambda)$ определяются из двух условий сопряжения при $z=h$ и условия $\dfrac{\partial V}{\partial z}=0$ при $z=0$, $\rho\neq0$. Переход от интеграла к сумме производится по аналогии с задачей 144.

Формула (2) получается из формулы (1) с помощью принципа суперпозиции.

146. На поверхности земли потенциал равен

$$V(x,\,y,\,0) = V_0\,\frac{\operatorname{arcsh} a\,\sqrt{\dfrac{\alpha^2-1}{x^2+y^2}}}{\operatorname{arcch}\alpha}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{\sigma_\text{г}}{\sigma_\text{в}}} > 1.$$

Р е ш е н и е. Требуется решить уравнение

$$\sigma_\text{г}(V_{xx} + V_{yy}) + \sigma_\text{в} V_{zz} = 0$$

в полупространстве $z \geqslant h$ при граничном условии

$$V = V_0 \quad \text{на сфере} \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Полагая $t = \alpha z$, получим $V_{xx} + V_{yy} + V_{tt} = 0$ и $V = V_0$ на поверхности эллипсоида вращения

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{t^2}{c^2} = 1,$$

где $a^2 = b^2$, $c^2 = \alpha^2 a^2$. Вне эллипсоида на плоскости $z = 0$, очевидно, $\dfrac{\partial V}{\partial z} = 0$. Поэтому задача сводится к вычислению потенциала поля заряженного эллипсоида вращения. Ее решение (см. задачу 164) имеет вид

$$V = V_0\,\frac{\displaystyle\int_\lambda^\infty \frac{ds}{(a^2+s)\sqrt{c^2+s}}}{\displaystyle\int_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)\sqrt{c^2+s}}},$$

где λ — эллиптическая координата. В данном случае эллипсоид вытянутый, поэтому имеют место соотношения

$$c^2 + \lambda = (c^2-a^2)\eta^2, \quad 1 < \eta^2 < \infty,$$
$$c^2 + \lambda = (c^2-a^2)\xi^2, \quad 0 < \xi^2 < 1,$$
$$\frac{\rho^2}{(c^2-a^2)(\eta^2-1)} + \frac{t^2}{(c^2-a^2)\eta^2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{\rho^2}{-(c^2-a^2)(1-\xi^2)} + \frac{t^2}{(c^2-a^2)\xi^2} = 1,$$

отсюда

$$t = \sqrt{c^2-b^2}\,\eta\xi, \quad \rho = \sqrt{(c^2-a^2)(1-\xi^2)(\eta^2-1)}.$$

Вычисляя интегралы, получим

$$V = V_0\,\frac{\operatorname{arcth}\sqrt{(c^2-a^2)(c^2+\lambda)^{-2}}}{\operatorname{arcth}\sqrt{(c^2-a^2)c^{-2}}},$$

или

$$V = V_0\,\frac{\operatorname{arcth}\dfrac{1}{\eta}}{\operatorname{arcth}\sqrt{\dfrac{\alpha^2-1}{\alpha^2}}} = V_0\,\frac{\operatorname{arcth}\dfrac{1}{\sqrt{\eta^2-1}}}{\operatorname{arcch}\alpha}.$$

Из уравнений

$$t = \alpha z = a\sqrt{\alpha^2-1}\,\xi\eta, \quad \rho^2 = a^2(\alpha^2-1)(1-\xi^2)(\eta^2-1),$$

исключая ξ, получаем

$$\frac{\rho^2}{\eta^2-1}+\frac{\alpha^2 z^2}{\eta^2}=a^2(\alpha^2-1).$$

При $z=0$ отсюда следует

$$\eta^2-1=\frac{\rho^2}{a^2(\alpha^2-1)},$$

так что

$$V(\rho,\,0)=V_0\,\frac{\operatorname{arcsh}\dfrac{a\sqrt{\alpha^2-1}}{\rho}}{\operatorname{arcch}\alpha}.$$

§ 5. Потенциалы и их применение

147. Объемный потенциал однородного шара

$$V=u(r)=\begin{cases}2\pi\rho_0\left(a^2-\dfrac{r^2}{3}\right) & \text{при} \quad r<a,\\[2ex] \dfrac{M}{r} & \text{при} \quad r>a,\end{cases} \tag{1}$$

где a — радиус шара, $M=\dfrac{4\pi}{3}\,\rho_0 a^3$ — его масса.

Указание. Объемный потенциал

$$V(M)=\int\limits_T \frac{\rho_0}{r_{MP}}\,d\tau_P, \tag{2}$$

где T — объем шара, является функцией, гармонической вне сферы (при $r>a$), удовлетворяющей уравнению

$$\Delta V=-4\pi\rho \tag{3}$$

внутри шара и непрерывной вместе с нормальной производной на его границе. Так как $\rho_0=\text{const}$, то потенциал обладает сферической симметрией.

148. Решение. Задача сводится к вычислению объемного интеграла

$$V(r)=2\pi\rho_0\int\limits_0^a\int\limits_0^\pi \frac{\xi^2\,d\xi\sin\theta\,d\theta}{R},$$

где

$$R^2=\xi^2+r^2-3\xi r\cos\theta.$$

Вводя новую переменную интегрирования R вместо θ и учитывая, что

$$R\,dR=r\xi\sin\theta\,d\theta,$$

получаем

$$V(r)=\frac{2\pi\rho_0}{r}\int\limits_0^a \xi\left[\int\limits_{|r-\xi|}^{r+\xi} dR\right]d\xi.$$

Если $r > a$, то $r > \xi$ всегда и

$$V(r) = \frac{2\pi\rho_0}{r}\int\limits_0^a \xi\left[\int\limits_{r-\xi}^{r+\xi} dR\right]d\xi = \frac{4\pi\rho_0 a^3}{3r} = \frac{M}{r}.$$

Если $r < a$, то

$$V(r) = \frac{2\pi\rho_0}{r}\left[\int\limits_0^r \xi(r+\xi-r+\xi)\,d\xi + \int\limits_r^a \xi(r+\xi+r-\xi)\,d\xi\right] = 2\pi\rho_0\left(a^2 - \frac{r^2}{3}\right).$$

149. а)

$$V = \begin{cases} 2\pi\rho_0(b^2 - a^2) & \text{при} \quad r < a, \\ 2\pi\rho_0 b^2 - \dfrac{2\pi\rho_0}{3}\left(r^2 + \dfrac{2a^3}{r}\right) & \text{при} \quad a < r < b, \\ \dfrac{4\pi_0\rho_0}{3}(b^3 - a^3)\dfrac{1}{r} & \text{при} \quad r > b; \end{cases}$$

б)

$$V = \begin{cases} 2\pi\left[\rho_1\left(a^2 - \dfrac{r^2}{3}\right) + \rho_2(c^2 - b^2)\right] & \text{при} \quad r < a, \\ 2\pi\rho_2(c^2 - b^2) + \dfrac{4\pi}{3}\rho_1 a^3\dfrac{1}{r} & \text{при} \quad a < r < b, \\ \dfrac{4\pi}{3}\rho_1\dfrac{a^3}{r} + 2\pi\rho_0 c^2 - \dfrac{2\pi\rho_0}{3}\left(r^2 + \dfrac{2b^3}{r}\right) & \text{при} \quad b < r < c, \\ \dfrac{4\pi[\rho_2(c^3 - b^3) + a^3\rho_1]}{3r} = \dfrac{M_1 + M_2}{r} & \text{при} \quad r > c. \end{cases}$$

Указание. В силу принципа суперпозиции решений линейного уравнения искомый потенциал представится в виде суммы

$$V = V_{147} + V_{149\,\text{а}},$$

где V_{147} и $V_{149\,\text{а}}$ — решения задач 147 и 149, а);

в) потенциал

$$V = \begin{cases} \dfrac{M(c)}{r} & \text{при} \quad r > c, \\ \dfrac{M(r)}{r} + 4\pi\displaystyle\int\limits_r^c \xi\rho(\xi)\,d\xi & \text{при} \quad r < c, \end{cases}$$

где

$$M(c) = 4\pi\int\limits_0^c \rho(\xi)\xi^2\,d\xi, \quad M(r) = 4\pi\int\limits_0^r \rho(\xi)\xi^2\,d\xi$$

— масса, распределенная с объемной плотностью $\rho(r)$ внутри сферы радиуса c (или радиуса r).

Если

$$\rho = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad r < a, \\ \rho_0 & \text{при} \quad a < r < b, \end{cases}$$

то отсюда мы сразу получаем решение задачи 149, а)

$$V=\begin{cases}\dfrac{M}{r} & \text{при} \quad r>b,\\ \dfrac{4\pi\rho_0}{3r}(r^3-a^3)+2\pi\rho_0(b^2-r^2) & \text{при} \quad a<r<b,\end{cases}$$

где

$$M=\frac{4\pi}{3}(b^3-a^3)\rho_0.$$

При $\rho=\rho_0$ внутри сферы радиуса a $(c=a)$ из общей формулы получим

$$V=\begin{cases}\dfrac{M}{r} & \text{при} \quad r>a,\\ 2\pi\rho_0\left(a^2-\dfrac{r^2}{3}\right) & \text{при} \quad r<a,\end{cases}$$

где $M=\dfrac{4\pi}{3}a^3\rho_0$ и т. д.

150. Потенциал однородного сферического простого слоя равен

$$u=\begin{cases}4\pi a\nu_0 & \text{при} \quad r<a,\\ \dfrac{M}{r} & \text{при} \quad r>a,\end{cases}$$

где $M=4\pi a^2\nu_0$ — полная масса простого слоя, распределенного на сфере.

Указание. Потенциал простого слоя

$$u(r)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\nu_0}{R}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi,$$

где $R=\sqrt{r^2+a^2-2ra\cos\theta}$, помимо непосредственного вычисления, которое в данном случае просто, удобно искать как решение уравнения

$$\Delta u=0 \quad \text{при} \quad r\neq a,$$

всюду непрерывное, а при $r=a$ имеет разрывные нормальные производные

$$\left.\frac{du_2}{dr}\right|_{r=a}-\left.\frac{du_1}{dr}\right|_{r=a}=4\pi\nu_0,$$

где u_1 — решение уравнения $\Delta u=0$ вне сферы $(r>a)$, u_2 — решение внутри сферы $(r<a)$.

151. Пусть центр шара радиуса a помещен в точке $x=0$, $y=0$, $z=b$ и $\rho=\rho_0$ есть плотность объемных зарядов. Потенциал электростатического поля будет равен

$$V=\begin{cases}2\pi\rho_0\left(a^2-\dfrac{r^2}{3}\right)-\dfrac{M}{r_1} & \text{при} \quad r<a,\\ M\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r_1}\right) & \text{при} \quad r>a,\end{cases}$$

где

$$M=\frac{4\pi}{3}\rho_0a^3, \quad r=\sqrt{x^2+y^2+(z-b)^2}, \quad r_1=\sqrt{x^2+y^2+(z+b)^2}.$$

Указание. Для вычисления влияния идеально проводящей плоскости $z = 0$ следует зеркально отразить исходную сферу с центром в точке $(0, 0, b)$ относительно плоскости $z = 0$. Решение в этом случае представится в виде суммы

$$V = \begin{cases} C_1 - \dfrac{2}{3}\pi\rho_0 r^2 - \dfrac{M}{r_1} & \text{при} \quad r < a, \\ M\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_1}\right) & \text{при} \quad r > a. \end{cases}$$

Постоянная C_1 определяется из условия сопряжения решений при $r = a$.

152. Логарифмический потенциал круга в точке (r, φ)

$$V = V(r) = \rho_0 \int_0^{2\pi}\int_0^{a} \ln \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + r^2 - 2\lambda r\cos\psi}}\,\lambda\,d\lambda\,d\psi$$

вычисляется непосредственно и равен

$$V(r) = \begin{cases} M\left(\dfrac{1}{2} - \ln a - \dfrac{1}{2}\dfrac{r^2}{a^2}\right) & \text{при} \quad r < a, \\ M\ln\dfrac{1}{r} & \text{при} \quad r > a. \end{cases}$$

Указание. При вычислении интегралов следует разложить подынтегральную функцию

$$\ln\frac{1}{R} = \ln\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + r^2 - 2\lambda r\cos\psi}}$$

в ряд

$$\ln\frac{1}{R} = \begin{cases} \ln\dfrac{1}{r} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\lambda}{r}\right)^n\cos n\psi & \text{вне круга} \quad r > a, \\ \ln\dfrac{1}{r} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\lambda}{r}\right)^n\cos n\psi & \text{при} \quad \lambda < r < a, \\ \ln\dfrac{1}{\lambda} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\lambda}{r}\right)^n\cos n\psi & \text{при} \quad r < \lambda < a. \end{cases}$$

153. Логарифмический потенциал простого слоя отрезка $-a \leqslant x \leqslant a$ с постоянной плотностью $\rho = \rho_0$

$$V(x, y) = \rho_0 \int_{-a}^{+a} \ln\frac{1}{\sqrt{(\xi - x)^2 + y^2}}\,d\xi$$

вычисляется непосредственно и равен

$$V = \rho_0\Big\{2a - y\operatorname{arctg}\frac{2ay}{y^2 + x^2 - a^2} - \frac{a - x}{2}\ln[y^2 + (a - x)^2] - \\ - \frac{a + x}{2}\ln[y^2 + (a + x)^2]\Big\}.$$

Указание. Проинтегрировать по частям.

154. Пусть $M(x, y)$ — точка наблюдения, φ — угол, под которым отрезок $(-a, a)$ виден из точки M.

Логарифмический потенциал двойного слоя отрезка

$$W(M) = \nu \int_{-a}^{+a} \frac{\cos\theta_{MP}}{R_{MP}}\, d\xi_P = \nu y \int_{-a}^{+a} \frac{d\xi}{R^2}$$

(R — расстояние между M и точкой интегрирования P) равен

$$W(M) = \nu \left[\operatorname{arctg}\frac{x+a}{y} - \operatorname{arctg}\frac{x-a}{y}\right] = \pm\nu\varphi,$$

причем

$$W = \begin{cases} \nu\varphi, & \text{если} \quad y > 0, \\ -\nu\varphi, & \text{если} \quad y < 0. \end{cases}$$

155. Потенциал простого слоя, равномерно распределенного по круглому диску, имеет два аналитических представления:

1) представление потенциала в виде разложения по сферическим функциям

$$V(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} \dfrac{2e}{a}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n [P_n(0) + P_{n-2}(0)]P_n(\cos\theta) - \\ \qquad\qquad - \dfrac{2er}{a^2}\, P_1(\cos\theta) \quad \text{при} \quad r < a, \\ \dfrac{2e}{a}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} [P_n(0) + P_{n-2}(0)]P_n(\cos\theta) \\ \qquad\qquad \text{при} \quad r > a; \end{cases} \tag{1}$$

2) представление потенциала в виде эллиптического интеграла

$$V = \frac{\dfrac{2e}{\pi}}{\sqrt{r^2 - 2ar\sin\theta + a^2}}\, K\left(\sqrt{\frac{4ar\sin\theta}{r^2 - 2ar\sin\theta + a^2}}\right), \tag{2}$$

где $K(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - x^2\cos^2\alpha}}$ — эллиптический интеграл. Здесь $e = \pi a^2\sigma$ — суммарный заряд.

Указание. При выводе формул (1) вычисляется значение потенциала на оси z, перпендикулярной к плоскости, в которой лежит диск,

$$V(0, 0, z) = \frac{2e}{a^2}[\sqrt{z^2 + a^2} - z],$$

и затем находится его разложение по зональным сферическим функциям. Дальнейшие рассуждения проводятся по аналогии с задачей 140.

156. Выбираем систему координат (ρ, φ, z) с началом в центре круга и осью z, перпендикулярной к плоскости, в которой лежит круговая петля с током. Вектор-потенциал имеет только одну составляющую A_φ:

$$A_\varphi = \frac{\mu I}{c}\oint \frac{ds}{R} = \frac{2\mu I}{c}\int_0^{\pi} \frac{a\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{a^2 + \rho^2 + z^2 - 2a\rho\cos\varphi}},$$

которая равна

$$A_\varphi = \frac{4\mu I}{ck}\sqrt{\frac{a}{\rho}}\left[\left(1-\frac{1}{2}\,k^2\right)K - E\right],$$

где μ — магнитная проницаемость среды, I — полный ток, текущий по петле,

$$k^2 = \frac{4a\rho}{(a+\rho)^2+z^2},$$

K и E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода:

$$K(k) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}, \quad E(k) = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta.$$

На больших расстояниях от тока ($k \ll 1$) имеем

$$A_\varphi = \frac{\pi\mu I}{8c}\sqrt{\frac{a}{\rho}}\,k^3\left(1+\frac{3}{4}\,k^2+\frac{75}{128}\,k^4+\ldots\right).$$

Для очень маленькой петли $\sqrt{\rho^2+z^2} \gg a$ имеем

$$A_\varphi = \frac{\pi a^2\mu I\sin\theta}{cr^2}.$$

157. В полярных координатах $(\rho,\,\varphi)$ находим:

а) решение внутренней первой краевой задачи для круга

$$u = W(\rho,\,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{(a^2-\rho^2)f(\psi)\,d\psi}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\varphi-\psi)},$$

б) решение внешней задачи

$$u = W(\rho,\,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{(\rho^2-a^2)f(\psi)\,d\psi}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\varphi-\psi)},$$

где a — радиус круга.

Решения соответствующих интегральных уравнений имеют вид:

а) $$\nu(s) = \frac{1}{\pi}\,f(s) - \frac{1}{4\pi^2 a}\int\limits_C f(s)\,ds,$$

где C — окружность радиуса a;

б) $$\nu(s) = -\frac{1}{\pi}\,f(s) + \frac{1}{4\pi^2 a}\int\limits_C f(s)\,ds.$$

Указание. а) Если контур C — окружность радиуса a, то

$$\frac{\cos\varphi_{PP_0}}{r_{PP_0}} = \frac{1}{2a}$$

и уравнение для $\nu(s_0)$ принимает вид

$$\nu(s_0) + \frac{1}{2\pi a}\int\limits_C \nu(s)\,ds = \frac{1}{\pi}\,f(s_0), \tag{1}$$

т. е.

$$\nu(s) = \frac{1}{\pi}\,f(s) + A.$$

Подставляя (2) в (1), находим

$$A = -\frac{1}{4\pi^2 a}\int\limits_C f(s)\,ds.$$

Зная $\nu(s)$, после несложных преобразований приходим к интегралу Пуассона.

б) Для внешней краевой задачи

$$\nu(s) = -\frac{1}{\pi}\,f(s) + A,$$

где

$$A = \frac{1}{4\pi^2 a}\int\limits_C f(s)\,ds.$$

158. Решение второй краевой задачи

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0 \quad \text{при} \quad \rho < a$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|_{\rho=a} = f(\varphi)$$

ищется в виде выражения потенциала простого слоя

$$u = V(\rho,\,\varphi) = a\int\limits_0^{2\pi} \ln\frac{1}{\sqrt{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\varphi-\psi)}}\,\nu(\psi)d\psi + \text{const}.$$

Решение интегрального уравнения для $\nu(\varphi)$ дает

$$\nu(\varphi) = \frac{1}{\pi}\,f(\varphi).$$

159. а) Решение первой краевой задачи $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ в полупространстве $z > 0$, $\left.u\right|_{z=0} = f$ ищется в виде потенциала двойного слоя

$$u(x,\,y,\,z) = W = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\varphi}{r^2}\,\nu(\xi,\,\eta)\,d\xi\,d\eta, \quad r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2$$

и дается формулой

$$u(x,\,y,\,z) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{z f(\xi,\,\eta)\,d\xi\,d\eta}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2]^{3/2}} \qquad \left(\nu = \frac{1}{2\pi}\,f\right).$$

б) Решение второй краевой задачи

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \quad \text{при} \quad z > 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = f$$

ищется в виде потенциала простого слоя

$$u(x,\,y,\,z) = V(x,\,y,\,z) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu(\xi,\,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}}$$

и дается формулой

$$u(x,\,y,\,z) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi,\,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}} + \text{const} \qquad \left(\mu = \frac{1}{2\pi}\,f\right).$$

160. Первая краевая задача

$$\Delta_2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{при} \quad y > 0, \quad u\big|_{\nu=0} = f(x)$$

имеет решение

$$u(x,\, y) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{y f(\xi)\, d\xi}{(x-\xi)^2 + y^2}.$$

Указание. Решение ищется в виде потенциала двойного слоя

$$u = W(M) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \nu(\xi)\, \frac{\cos \varphi_{MP}}{r_{MP}}\, d\xi_P,$$

для плотности ν которого получается интегральное уравнение с ядром, тождественно равным нулю, так что

$$\nu(\xi) = \frac{1}{\pi}\, f(\xi).$$

161. Решение. Если поверхность Σ эквипотенциальна, то каждому значению параметра s должен соответствовать определенный потенциал

$$V = f(s),$$

удовлетворяющий уравнению Лапласа. Дифференцирование дает

$$V_x = f'(x) s_x, \quad V_{xx} = f''(s)(s_x)^2 + f'(s) s_{xx}, \quad \ldots,$$

так что

$$\Delta V = V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = f''(s)(\operatorname{grad} s)^2 + f'(s)\Delta s.$$

Отсюда следует

$$\frac{\Delta s}{(\operatorname{grad} s)^2} = -\frac{f''(s)}{f'(s)} = \varphi(s),$$

т. е. поверхность Σ эквипотенциальна, если отношение $\Delta s/(\operatorname{grad} s)^2$ является функцией только s.

Обозначая

$$q_n = \frac{x^2}{(a^2+s)^n} + \frac{y^2}{(b^2+s)^n} + \frac{z^2}{(c^2+s)^n}, \quad p = \frac{1}{a^2+s} + \frac{1}{b^2+s} + \frac{1}{c^2+s},$$

видим, что уравнение

$$\frac{x^2}{a^2+s} + \frac{y^2}{b^2+s} + \frac{z^2}{c^2+s} = 1 \tag{1}$$

сводится к $q_1 = 1$. Дифференцируя его по x, получаем

$$s_x = \frac{2x}{(s+a^2)q_2}, \quad s_y = \frac{2y}{(s+b^2)q_2}, \quad s_z = \frac{2z}{(s+c^2)q_2}, \quad (\operatorname{grad} s)^2 = \frac{4}{q_2}.$$

Вычисления дают

$$s_{xx} = \frac{2}{q_2(a^2+s)} - \frac{8x^2}{q_2^2(a^2+s)^3} - \frac{8x^2 q_3}{q_2^3(a^2+s)^2}, \ \ldots,$$

$\Delta s = \dfrac{2p}{q_2}$ и, следовательно, $\varphi(s) = \dfrac{p}{2}$. Проинтегрировав уравнение

$$\frac{f''(s)}{f'(s)} = -\varphi(s) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+a^2} + \frac{1}{s+b^2} + \frac{1}{s+c^2}\right),$$

получим

$$V = f(s) = A\int_0^s \frac{ds}{R(s)} + B,$$

где

$$R(s) = \sqrt{(s+a^2)(s+b^2)(s+c^2)}.$$

На бесконечности при $s \to \infty$ потенциал должен быть равен нулю; отсюда следует, что

$$V = -A\int_s^\infty \frac{ds}{R(s)}.$$

162. Если эллипсоид, заданный уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

является проводящим и несет на себе заряд e, то

$$V = \frac{e}{2\varepsilon}\int_s^\infty \frac{ds}{R(s)}.$$

На поверхности эллипсоида $s = 0$ потенциал V равен

$$V_0 = \frac{e}{2\varepsilon}\int_0^\infty \frac{ds}{R(s)}.$$

Емкость эллипсоида равна

$$C = \frac{e}{V_0} = 2\varepsilon\left[\int_0^\infty \frac{ds}{R(s)}\right]^{-1}.$$

Поверхностная плотность заряда дается выражением

$$\sigma = -\frac{\varepsilon}{4\pi}\,|\operatorname{grad} V|_{s=0} = -\frac{\varepsilon}{4\pi}(V_s|\operatorname{grad} s|)_{s=0},$$

откуда в силу равенств $(V_s)_{s=0} = -\dfrac{\varepsilon}{2\varepsilon abc}$, $|\operatorname{grad} s| = \dfrac{2}{\sqrt{q_2}}$ следует

$$\sigma = \frac{e}{4\pi abc}\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{-1/2}.$$

Если $a = b > c$ (сплюснутый сфероид или сплюснутый эллипсоид вращения), то получаем

$$V = \frac{e}{2\varepsilon}\int_\lambda^\infty \frac{ds}{(s+a^2)\sqrt{s+c^2}} = \frac{e}{\varepsilon\sqrt{a^2-c^2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a^2-c^2}{\lambda+c^2}}.$$

Если $a > b = c$ (вытянутый сфероид или вытянутый эллипсоид вращения), то получаем

$$V = \frac{e}{2\varepsilon}\,\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\,\ln\frac{\sqrt{\lambda+a^2}+\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{\lambda+a^2}-\sqrt{b^2-a^2}}.$$

Здесь λ — положительный корень уравнения (1).

163. Поверхностная плотность заряда на эллиптическом диске

$$\sigma = \frac{e}{4\pi bc}\left(1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)^{-1/2},$$

где e — полный заряд диска.

Емкость круглого диска ($a = 0$, $b = c$)

$$C = 8\varepsilon b.$$

Плотность заряда на каждой из сторон круглого диска

$$\sigma = \frac{e}{4\pi b\sqrt{b^2 - \rho^2}}.$$

Потенциал, создаваемый круглым диском, выражается формулой

$$V = 4V_0 \operatorname{arctg}\frac{b}{\sqrt{\lambda}},$$

или

$$V = 4V_0 \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}b}{\sqrt{r^2 - b^2 + \sqrt{(r^2 - b^2)^2 + 4b^2x^2}}} \quad (x^2 + y^2 + z^2 = r^2).$$

Указание. При вычислении σ для эллиптического диска воспользоваться формулой для σ из решения задачи 162

$$\sigma = \frac{e}{4\pi bc}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2y^2}{b^4} + \frac{a^2z^2}{c^4}\right)^{-1/2}.$$

Исключив $\dfrac{x^2}{a^2}$ из уравнения $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, получим

$$\sigma = \frac{e}{4\pi bc}\left(1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + \frac{a^2y^2}{b^4} + \frac{a^2z^2}{c^4}\right)^{-1/2}.$$

Предельный переход при $a \to 0$ дает нужную формулу для σ.

Для круглого диска $a = 0$, $c^2 = b^2$, $\rho^2 = y^2 + z^2$. Параметр λ определяется как положительный корень уравнения

$$\frac{x^2}{s} + \frac{y^2 + z^2}{b^2 + s} = 1,$$

равный

$$\lambda = \frac{1}{2}[r^2 - b^2 + \sqrt{(r^2 - b^2)^2 + 4b^2x^2}].$$

164. Указание. Требуется доказать, что

$$\Delta V = -4\pi\rho_0 \quad \text{внутри эллипсоида,}$$

$$\Delta V = 0 \quad \text{вне эллипсоида.}$$

Доказательство первого равенства не представляет труда. При доказательстве второго равенства следует использовать соотношения $\operatorname{grad}\lambda \cdot \operatorname{grad} f = 4$, $\operatorname{div}\operatorname{grad} f = \dfrac{4R'(s)}{R(s)}$.

165. а) Гравитационный потенциал вытянутого эллипсоида вращения ($b = c < a$)

$$V(x,\,y,\,z) = 2\pi(1-\varepsilon^2)\rho_0\left\{\frac{a^2}{2\varepsilon}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon^3}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} - \varepsilon\right)x^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\varepsilon^3}\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2} - \frac{1}{2}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)(y^2+z^2)\right\} \quad \text{внутри эллипсоида,}$$

$$V(x,\,y,\,z) = 2\pi(1-\varepsilon^2)\rho_0\left\{\frac{a^2}{2\varepsilon}\ln\frac{\sqrt{a^2+\lambda}+\varepsilon a}{\sqrt{a^2+\lambda}-\varepsilon a} - \right.$$

$$- \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{a^2+\lambda}+\varepsilon a}{\sqrt{a^2+\lambda}-\varepsilon a} - \frac{\varepsilon a}{\sqrt{a^2+\lambda}}\right)x^2 -$$

$$\left. - \frac{1}{2\varepsilon^3}\left[\frac{\varepsilon a\sqrt{a^2+\lambda}}{(1-\varepsilon^2)a^2+\lambda} - \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{a^2+\lambda}+\varepsilon a}{\sqrt{a^2+\lambda}-\varepsilon a}\right](y^2+z^2)\right\} \quad \text{вне эллипсоида,}$$

где $\varepsilon^2 = 1 - \dfrac{c^2}{a^2}$, λ — положительный корень уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+s} + \frac{y^2+z^2}{c^2+s} = 1.$$

б) Гравитационный потенциал сплюснутого эллипсоида вращения ($b = a > c$)

$$V(x,\,y,\,z) = 2\pi(1+\varepsilon^2)\rho_0\left\{\frac{c^2}{\varepsilon}\operatorname{arctg}\varepsilon - \frac{1}{2\varepsilon^3}\left(\operatorname{arctg}\varepsilon - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2}\right)(x^2+y^2) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\varepsilon^3}(\varepsilon - \operatorname{arctg}\varepsilon)z^2\right\} \quad \text{внутри эллипсоида,}$$

$$V(x,\,y,\,z) = 2\pi(1+\varepsilon^2)\rho_0\left\{\frac{c^2}{\varepsilon}\operatorname{arctg}\frac{\varepsilon c}{\sqrt{c^2+\lambda}} - \right.$$

$$- \frac{1}{2\varepsilon^3}\left[\operatorname{arctg}\frac{\varepsilon c}{\sqrt{c^2+\lambda}} - \frac{\varepsilon c\sqrt{c^2+\lambda}}{(1+\varepsilon^2)c^2+\lambda}\right](x^2+y^2) -$$

$$\left. - \frac{1}{\varepsilon^3}\left(\frac{\varepsilon c}{\sqrt{c^2+\lambda}} - \operatorname{arctg}\frac{\varepsilon c}{\sqrt{c^2+\lambda}}\right)z^2\right\} \quad \text{вне эллипсоида,}$$

где $\varepsilon^2 = \dfrac{a^2}{c^2} - 1$, а λ — положительный корень уравнения

$$\frac{x^2+y^2}{a^2+s} + \frac{z^2}{c^2+s} = 1.$$

Предельный переход при $\varepsilon \to 0$ приводит к потенциалу однородного шара радиуса a:

$$V = \begin{cases} 2\pi\rho_0\left(a^2 - \dfrac{1}{3}r^2\right) & \text{при} \quad r < a, \\ \dfrac{M}{r} & \text{при} \quad r > a \quad \left(M = \dfrac{4\pi}{3}a^3\rho_0\right). \end{cases}$$

166. Логарифмический потенциал однородной эллиптической области

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\leqslant 0$$

дается формулами

$$V(x,\,y)=\pi ab\rho_0\left(\frac{1}{2}-\ln\frac{a+b}{2}\right)-\frac{\pi ab\rho_0}{a+b}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\quad\text{внутри эллипса,}$$

$$V(x,\,y)=\pi ab\rho_0\left(\frac{1}{2}-\ln\frac{a+b}{2}\right)-\pi ab\rho_0\,\frac{\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2+\lambda}}+\dfrac{y^2}{\sqrt{b^2+\lambda}}}{\sqrt{a^2+\lambda}+\sqrt{b^2+\lambda}}-$$

$$-\pi ab\rho_0\ln\frac{\sqrt{a^2+\lambda}+\sqrt{b^2+\lambda}}{a+b}\quad\text{вне эллипса,}$$

где λ — положительный корень уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+s}+\frac{y^2}{b^2+s}=1.$$

167. Потенциал вне эллипса равен

$$V(x,\,y)=V_0\left[1-\frac{1}{2\ln\dfrac{2}{a+b}}\int\limits_0^{\lambda}\frac{ds}{\sqrt{(s+a^2)(s+b^2)}}\right]\quad(a\geqslant b>0),$$

или

$$V(x,\,y)=V_0\left[1-\frac{1}{2\ln\dfrac{2}{a+b}}\ln\frac{2\lambda+a^2+b^2+\sqrt{(\lambda+a^2)(\lambda+b^2)}}{(a+b)^2}\right],$$

где λ — положительный корень уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+s}+\frac{y^2}{b^2+s}=1.$$

Плотность заряда, распределенного на эллипсе, равна

$$\sigma=\frac{V_0}{2\pi ab\ln\dfrac{2}{a+b}}\,\frac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}}}.$$

Предельный переход при $b\to 0$ дает потенциал отрезка $0\leqslant x\leqslant a$ на плоскости $(x,\,y)$

$$V(x,\,y)=V_0\left[1-\frac{1}{2\ln\dfrac{2}{a}}\times\right.$$

$$\left.\times\ln\frac{\rho^2+\sqrt{(\rho^2-a^2)^2+4a^2y^2}+\sqrt{0,5\rho^2[\rho^2-a^2+\sqrt{(\rho^2-a^2)^2+4a^2y^2}]+a^2y^2}}{a^2}\right],$$

где $\rho^2=x^2+y^2$.

Указание. Вывод формулы для $V(x,\,y)$ совершенно аналогичен выводу, приведенному в решении задачи 163.

На бесконечности мы ставим условие

$$u = V - A\ln\frac{1}{\rho} \to 0 \quad \text{при} \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2} \to \infty, \quad |\operatorname{grad} u| < \frac{B}{\rho^2},$$

где A и $B > 0$ — некоторые постоянные.

168. Пусть I — ток, протекающий по петле C_a с центром в точке $z = 0$, $\rho = 0$ и радиуса a, I' — ток, текущий по петле C_b радиуса b с центром в точке $z = d$, $\rho = 0$.

Для силы взаимодействия между C_a и C_b возможно одно из представлений:

1) $$F = \frac{2\pi\mu II'\,dk}{c^2\sqrt{ab}}\left[-K(k) + \frac{a^2+b^2+d^2}{(a-b)^2+d^2}\,E(k)\right],$$

где

$$k^2 = \frac{4ab}{(a+b)^2+d^2}, \quad K(k) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

$$E(k) = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2}\,\varphi\,d\varphi$$

— эллиптические интегралы первого и второго рода;

2) $$F = \frac{\pi\mu II'\sin\alpha}{c^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^2}{b^2+d^2}\right)^{n/2} P_n^1(\cos\alpha)P_n(0) \quad (d^2+b^2 > a^2),$$

где $\alpha = \theta_b$ — координата точек кольца C_b, если начало координат находится в центре кольца C_a;

3) $$F = -\frac{\pi\mu II'\sin^2\beta}{c^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} P_{n+1}^1(\cos\beta)P_n^1(\cos\beta) \quad (b > a);$$

при этом начало координат помещено в вершине кругового конуса, проходящего через C_a и C_b ($a \neq b$) и имеющего угол раствора β; если $a < b$, то ряд, стоящий справа, быстро сходится.

Указание. Сила, действующая на контур, по которому протекает ток IO, помещенный в магнитное поле, равна

$$\boldsymbol{F} = \frac{I}{c}\oint[d\boldsymbol{s}\,\boldsymbol{B}],$$

где $\boldsymbol{B}$ — магнитная индукция внешнего поля, а интегрирование производится по данному контуру. В нашем случае

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu I'}{c}\oint\limits_2 \frac{[d\boldsymbol{s}\boldsymbol{r}]}{r^3}.$$

Для вычисления величины B на контуре C_b следует использовать решение задачи 156.

169. Пусть кольца C_a радиуса a и C_b радиуса b лежат в параллельных плоскостях Σ_a и Σ_b, а их центры расположены на одной прямой, перпендикулярной к плоскостям Σ_a и Σ_b; коэффициент взаимной индукции может быть представлен следующим образом:

1) $M_{12} = \dfrac{8\mu\sqrt{ab}}{k}\left[\left(1-\dfrac{1}{2}\,k^2\right)K - E\right]$, где $k^2 = \dfrac{4ab}{(a+b)^2+d^2}$, $K(k)$ и $E(k)$ — эллиптические интегралы, d — расстояние между центрами колец;

2) если начало координат поместить в центр C_a, то кольцо C_b будет иметь координаты $r_b = \sqrt{b^2+d^2}$, $\theta_b = \beta$, и

$$M_{12} = \pi\mu b \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(2m-1)!!}{(2m-1)(2m)!!}\left(\frac{b^2+d^2}{a^2}\right)^{(2m-1)/2} P^1_{2m-1}(\cos\beta),$$

$$\left[\frac{b^2+d^2}{a^2} < 1\right];$$

если же $\dfrac{b^2+d^2}{a^2} > 1$, то вместо $\left[\dfrac{b^2+d^2}{a^2}\right]^{(2m-1)/2}$ надо писать $\left[\dfrac{a^2}{b^2+d^2}\right]^m$.

Аналогичную форму имеет выражение для взаимной индукции двух произвольно ориентированных колец, если их оси пересекаются.

Указание. Коэффициент взаимной индукции контуров 1 и 2 определяется формулой

$$M_{12} = \oint_1 \boldsymbol{A}_2\, ds_1,$$

где $\boldsymbol{A}_2$ — вектор-потенциал поля, созданного единичным током в контуре 2.

В нашем случае

$$M_{ba} = \oint_{C_b} \boldsymbol{A}_a\, ds_b = 2\pi b\, |\boldsymbol{A}_a|^{z=d}_{\rho=b},$$

где $|\boldsymbol{A}_a|$ вычисляется на основе решения задачи 156.

Глава V

УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

§ 1. Физические задачи, приводящие к уравнениям параболического типа; постановка краевых задач

1. Для температуры жидкости в нестационарном случае имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) - v_0\frac{\partial u}{\partial x},$$
$$-\infty < x,\, y < +\infty, \quad 0 < z,\, t < +\infty, \quad (1)$$

a^2 — коэффициент температуропроводности,

$$\lambda\frac{\partial u}{\partial z} = \alpha(u - f) \quad \text{при} \quad z = 0, \quad (2)$$

где $f(x,\, y,\, t)$ — температура плоскости $z = 0$,

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x,\, y,\, z), \quad -\infty < x,\, y < +\infty, \quad 0 < z < +\infty. \quad (3)$$

В стационарном случае (с «пренебрежимо малой» теплопроводностью в направлении оси x)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a^2}{v_0}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \quad -\infty < y < +\infty, \quad 0 < x,\, z < +\infty, \quad (1')$$

$$\lambda\frac{\partial u}{\partial z} = \alpha(u - f) \quad \text{при} \quad z = 0, \quad (2')$$

где $f(x,\, y)$ — температура плоскости $z = 0$,

$$u\big|_{x=0} = \varphi(y,\, z), \quad -\infty < y < +\infty, \quad 0 < z < +\infty. \quad (3')$$

2. Для концентрации вещества, диффундирующего в подвижной среде, заполняющей полупространство $z > 0$ и движущейся с постоянной скоростью в направлении оси x, при условии, что плоскость $z = 0$ непроницаема, в нестационарном случае имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) - v_0\frac{\partial u}{\partial x},$$
$$-\infty < x,\, y < +\infty, \quad 0 < z,\, t < +\infty, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \quad (2)$$

D — коэффициент диффузии.

В стационарном случае (при условиях задачи)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{D}{v_0}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \quad -\infty < y < +\infty, \quad 0 < x,\, z < +\infty, \qquad (1')$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad (2')$$

$$u\big|_{x=0} = \varphi(y,\, z), \quad -\infty < y < +\infty, \quad 0 < z < +\infty. \qquad (3')$$

3. а) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = D\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) - \beta u, \quad \beta > 0,$

$$-\infty < x,\, y,\, z < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \qquad (1)$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x,\, y,\, z), \quad -\infty < x,\, y,\, y,\, z < +\infty, \qquad (2)$$

б) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = D\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \beta u, \quad \beta > 0,$

$$-\infty < x,\, y,\, z < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \qquad (1')$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x,\, y,\, z), \quad -\infty < x,\, y,\, z < +\infty. \qquad (2')$$

4.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} &= \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma}\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial z^2}\right), \\ \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} &= \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma}\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial z^2}\right), \end{aligned}\right\} \quad -\infty < x,\, y,\, z < +\infty, \quad (1)$$

$$0 < t < +\infty, \qquad (1')$$

где $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ — векторы электрической и магнитной напряженностей, c — скорость света в вакууме, μ — магнитная проницаемость, σ — проводимость,

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}\big|_{t=0} &= \boldsymbol{i}\varphi_1(x,\, y,\, z) + \boldsymbol{j}\varphi_2(x,\, y,\, z) + \\ &\quad + \boldsymbol{k}\varphi_3(x,\, y,\, z), \\ \boldsymbol{H}\big|_{t=0} &= \boldsymbol{i}\psi_1(x,\, y,\, z) + \boldsymbol{j}\psi_2(x,\, y,\, z) + \\ &\quad + \boldsymbol{k}\varphi_3(x,\, y,\, z), \end{aligned}\right\} - \infty < x,\, y,\, z < +\infty, \quad (2)$$

$$(2')$$

где $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — единичные векторы по осям x, y, z, а φ_1, φ_2, φ_3, ψ_1, ψ_2, ψ_3 — заданные функции.

Указание. Рассмотрим систему уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, \qquad (3)$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \qquad (4)$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \qquad (5)$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 0, \qquad (6)$$

написанную в предположении, что в рассматриваемой области нет объемных зарядов и сторонних электродвижущих сил.

Используя так называемые материальные уравнения поля

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}, \quad \boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{7}$$

и условие постоянства ε, μ, σ и пренебрегая токами смещения $\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ по сравнению с токами проводимости $\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} = \frac{4\pi\sigma}{c}\boldsymbol{E}$, получим уравнения

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \tag{8}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi\sigma}{c}\boldsymbol{E}. \tag{9}$$

Если от обеих частей уравнения (8) взять rot и воспользоваться известным равенством векторного анализа

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{a} - \operatorname{div}\operatorname{grad}\boldsymbol{a},$$

то с помощью уравнений (6), (7) и (9) можно получить уравнение (1). Аналогично получается уравнение (1′).

5. $$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

$$-\infty < y, z < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$\lambda u_x(0, y, z, t) - h u(0, y, z, t) = 0, \quad \lambda u_x(l, y, z, t) + h u(l, y, z, t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x, y, z, 0) = f(x, y, z),$$

где l — толщина пластины, λ — коэффициент теплопроводности. Если температура меняется по толщине пренебрежимо мало, то

$$u = u(y, z, t)$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) - 2h_1 u, \quad -\infty < y, z < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{3}$$

$$h_1 = \frac{h}{c\rho_1},$$

где ρ_1 — масса единицы площади пластины.

6. $$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right\}, \quad r_1 \leqslant r \leqslant r_2,$$

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$\lambda u_r(r_1, \varphi, t) - h[u(r_1, \varphi, t) - U(t)] = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$\lambda u_r(r_2, \varphi, t) + h[u(r_2, \varphi, t) - U_0] = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2′}$$

$$\pi r_1 c^* \rho^* \frac{dU(t)}{dt} = -h\left[2\pi U(t) - \int_0^{2\pi} u(r_1, \varphi, t)\,d\varphi\right], \quad 0 < t < +\infty, \tag{2″}$$

где $U(t)$, ρ^*, c^* — температура, плотность массы и удельная теплоемкость жидкости внутри трубы,

$$u(r, \varphi, 0) = f(r, \varphi), \quad r_1 \leqslant r \leqslant r_2, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \tag{3}$$

7. Для определения скорости $v(r,\,t)$ частиц жидкости[1)] и угловой скорости $\omega(t)$ цилиндра получим краевую задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\nu\left\{\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r^2}\right\},\quad r_0\leqslant r\leqslant\infty,\quad 0<t<+\infty, \tag{1}$$

$$v\big|_{r=r_0}=r_0\omega(t),\quad v\to 0\quad\text{при}\quad r\to+\infty,\quad 0<t<+\infty, \tag{2}$$

$$K\,\frac{d\omega}{dt}=M+2\pi r_0^2\rho\nu\left[\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}\right]_{r=r_0}. \tag{3}$$

Указание. В цилиндрических координатах:

1) уравнения движения несжимаемой вязкой жидкости

$$\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\,\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\varphi}{r}\,\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}+v_z\,\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{v_\varphi^2}{r}=$$

$$=-\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 v_r}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial v_r}{\partial r}-\frac{2}{r^2}\,\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}-\frac{v_r}{r^2}\right),$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t}+v_r\,\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}+\frac{v_\varphi}{r}\,\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}+v_z\,\frac{\partial v_\varphi}{\partial z}+\frac{v_r v_\varphi}{r}=$$

$$=-\frac{1}{\rho r}\,\frac{\partial p}{\partial\varphi}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}+\frac{2}{r^2}\,\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}-\frac{v_\varphi}{r^2}\right),$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\,\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\varphi}{r}\,\frac{\partial v_z}{\partial\varphi}+v_z\,\frac{\partial v_z}{\partial z}=$$

$$=-\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 v_z}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial v_z}{\partial r}\right);$$

2) уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{v_r}{r}=0,$$

v_r, v_φ, v_z — составляющие векторы скорости по направлению единичных координатных векторов цилиндрической системы координат;

3) компоненты тензора напряжений

$$\sigma_r=-p+2\nu\,\frac{\partial v_r}{\partial r},\qquad \tau_{r\varphi}=\nu\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}+\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}-\frac{v_\varphi}{r}\right),$$

$$\sigma_\varphi=-p+2\nu\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{v_r}{r}\right),\qquad \tau_{\varphi z}=\nu\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial v_z}{\partial\varphi}\right),$$

$$\sigma_z=-p+2\nu\,\frac{\partial v_z}{\partial z},\qquad \tau_{zr}=\nu\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{\partial v_r}{\partial z}\right).$$

Компоненты тензора напряжений в цилиндрических координатах определяются аналогично тому, как это делается в декартовых координатах при выводе уравнений движения упругой среды в задаче 11 § 1 гл. VI.

[1)] $v(r,\,t)=v_\varphi(r,\,t)$; см. указание к настоящей задаче.

8. Р е ш е н и е. Поместим начало координат на водонепроницаемом основании и направим ось z вертикально вверх. Пусть в проекциях на оси координат векторы $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{U}$ записываются в виде $\boldsymbol{f} = \{f_x,\ f_y,\ f_z\}$, $\boldsymbol{V} = \{V_x, V_y, V_z\}$, $\boldsymbol{U} = \{u, v, w\}$. Тогда уравнение движения частиц грунтовых вод можно записать в виде

$$\rho\frac{dV_x}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + g\rho f_x, \quad \rho\frac{dV_y}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + g\rho f_y, \quad \rho\frac{dV_z}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + g\rho f_z - g\rho,$$

где p — давление в грунтовых водах. Пренебрегая (в силу предположения 2) условия задачи) инерционными силами и используя $\boldsymbol{f} = -\frac{1}{k}\boldsymbol{U}$, получим из этих уравнений приближенные уравнения

$$u = -\frac{k}{g\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad v = -\frac{k}{g\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad w = -k\left(\frac{1}{g\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + 1\right), \tag{1}$$

которые можно записать в векторной форме следующим образом:

$$U = -k\operatorname{grad} H, \tag{2}$$

где

$$H(x, y, z, t) = \frac{p - p_0}{g\rho} + z, \tag{3}$$

p_0 — давление на свободной поверхности грунтовых вод (не зависящее от x, y, z).

Пусть p_1 означает гидростатическое давление в точке, лежащей на высоте z над водонепроницаемым основанием, а $z = H_0(x, y, t)$ — уравнение свободной поверхности грунтовых вод; тогда для гидростатического давления получаем следующее выражение:

$$p_1 - p_0 = g\rho[H^0(x, y, t) - z], \quad 0 \leqslant z \leqslant H_0(x, y, t),$$

т. е.

$$\frac{p_1 - p_0}{g\rho} + z = H_0(x, y, t). \tag{4}$$

Из (3) и (4) находим для избыточного давления следующее выражение:

$$\frac{p - p_1}{g\rho} = H(x, y, z, t) - H_0(x, y, t). \tag{5}$$

В силу предположения 1) условия задачи из (2), (3) и (5) следует

$$u = -k\frac{\partial H_0}{\partial x}, \quad v = -k\frac{\partial H_0}{\partial y}, \tag{6}$$

т. е. частицы грунтовых вод, лежащие на одной вертикали, имеют одинаковые горизонтальные скорости.

Рассматривая тонкую вертикальную призму с основанием $\Delta x\,\Delta y$ и высотой $H_0(x, y, t)$ и используя соотношение (6), уравнение неразрывности можно записать в виде

$$\frac{\partial H_0}{\partial t} = \frac{k}{m}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(H_0\frac{\partial H_0}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(H_0\frac{\partial H_0}{\partial y}\right)\right\}. \tag{7}$$

Если грунтовый слой и слой грунтовых вод над водонепроницаемым основанием простираются «неограниченно», то краевую задачу для определения движения свободной поверхности грунтовых вод можно

сформулировать следующим образом:

$$\frac{\partial H_0}{\partial t} = \frac{k}{m}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(H_0\frac{\partial H_0}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(H_0\frac{\partial H_0}{\partial y}\right)\right\},$$

$$-\infty < x,\, y < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \quad (8)$$

$$H_0(x,\, y,\, 0) = \varphi(x,\, y), \quad -\infty < x,\, y < +\infty. \quad (9)$$

Замечание. Часто от нелинейного уравнения (7) переходят к линейному уравнению

$$\frac{\partial H_0}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_0}{\partial y^2}\right), \quad a^2 = \frac{kh_0}{m}, \quad (7')$$

заменяя множитель H_0 в круглых скобках, стоящих в правой части уравнения (7), осредненной высотой $h_0 = \text{const}$ свободной поверхности грунтовых вод.

§ 2. Метод разделения переменных

1. Краевые задачи, не требующие применения специальных функций.

а) Однородные среды.

9. Решением краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right\}, \quad 0 < x < l_1, \quad 0 < y < l_2,$$

$$0 < z < l_3, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l_1} = u\big|_{y=0} = u\big|_{y=l_2} = u\big|_{z=0} = u\big|_{z=l_3} = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u\big|_{t=0} = f(x,\, y,\, z), \quad 0 < x < l_1, \quad 0 < y < l_3, \quad 0 < z < l_3, \quad (3)$$

является

$$u(x,\, y,\, z,\, t) = \sum_{k,\,m,\,n=1}^{+\infty} A_{k,\,m,\,n}\exp\left\{-a^2\pi^2\left(\frac{k^2}{l_1^2}+\frac{m^2}{l_2^2}+\frac{n^2}{l_3^2}\right)t\right\}\times$$

$$\times \sin\frac{k\pi x}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{l_2}\sin\frac{n\pi z}{l_3}, \quad (4)$$

где

$$A_{k,\,m,\,n} = \frac{8}{l_1 l_2 l_3}\int_0^{l_1} d\xi \int_0^{l_2} d\eta \int_0^{l_3} f(\xi,\, \eta,\, \zeta)\sin\frac{k\pi\xi}{l_1}\sin\frac{m\pi\eta}{l_2}\sin\frac{n\pi\zeta}{l_3}\, d\zeta. \quad (5)$$

10. $u(x,\, y,\, z,\, t) =$

$$= \left(\frac{4}{\pi}\right)^3 U_0 \sum_{k,\,m,\,n=0}^{+\infty} \frac{\exp\left\{-\frac{a^2\pi^2}{l^2}\left[(2k+1)^2+(2m+1)^2+(2n+1)^2\right]t\right\}}{(2k+1)(2m+1)(2n+1)}\times$$

$$\times \sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}\sin\frac{(2m+1)\pi y}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi z}{l}. \quad (1)$$

В центре куба

$$u\left(\frac{l}{2},\,\frac{l}{2},\,\frac{l}{2},\,t\right)=U_0\left(\frac{4}{\pi}\right)^3\left\{\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\,\frac{\exp\left\{-\dfrac{a^2\pi^2(2k+1)^2}{l^2}t\right\}}{2k+1}\right\}^3. \quad (2)$$

При всех t, удовлетворяющих неравенству

$$t\geqslant t^*=-\frac{l^2}{8\pi^2a^2}\ln 3\widetilde{\varepsilon}, \quad (3)$$

где $\widetilde{\varepsilon}$ меньше наименьшего из чисел 1 и $\dfrac{\varepsilon}{9}$, в центре куба заведомо будет иметь место регулярный режим с относительной точностью ε.

Указание. Обозначим первый член ряда, стоящего в фигурной скобке равенства (2), через α, а сумму всех остальных его членов через S. При всех t, удовлетворяющих неравенству (3), будет[1])

$$\left|\frac{S}{\alpha}\right|<\widetilde{\varepsilon}; \quad (4)$$

так как $\widetilde{\varepsilon}<1$ и $\widetilde{\varepsilon}<\dfrac{\varepsilon}{9}$, то при этом будет

$$\left|\frac{3\alpha^2S+3\alpha S^2+S^3}{\alpha^3}\right|\leqslant 3\left|\frac{S}{\alpha}\right|\left\{1+\left|\frac{S}{\alpha}\right|+\frac{1}{3}\left|\frac{S}{\alpha}\right|^2\right\}<9\left|\frac{S}{\alpha}\right|<\varepsilon, \quad (5)$$

т. е. в центре куба будет иметь место регулярный режим с относительной точностью ε.

11. Решением краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left\{\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\right\},\quad 0<x<l_1,\quad 0<y<l_2,$$
$$0<z<l_3,\quad 0<t<+\infty, \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}-hu\right)\Big|_{x=0}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+hu\right)\Big|_{x=l_1}=\left(\frac{\partial u}{\partial y}-hu\right)\Big|_{y=0}=$$
$$=\left(\frac{\partial u}{\partial y}+hu\right)\Big|_{y=l_2}=\left(\frac{\partial u}{\partial z}-hu\right)\Big|_{z=0}=\left(\frac{\partial u}{\partial z}+hu\right)\Big|_{z=l_3}=0,$$
$$0<t<+\infty, \quad (2)$$

$$u(x,\,y,\,z,\,0)=f(x,\,y,\,z),\quad 0<x<l_1,\quad 0<y<l_2,\quad 0<z<l_3, \quad (3)$$

является

$$u(x,\,y,\,z,\,t)=$$
$$=\sum_{k,\,m,\,n=1}^{+\infty}A_{k,\,m,\,n}\exp\left\{-a^2(\lambda_k^2+\mu_m^2+\nu_n^2)t\right\}X_k(x)Y_m(y)Z_n(z), \quad (4)$$

где

[1]) Подробнее см. гл. III, § 2, ответ к задаче 22.

$$A_{k,\,m,\,n}=\frac{8\lambda_k^2\mu_m^2\nu_n^2\int\limits_0^{l_1}\int\limits_0^{l_2}\int\limits_0^{l_3}f(x,\,y,\,z)X_k(x)Y_m(y)Z_n(z)\,dx\,dy\,dz}{[l_1(\lambda_k^2+h^2)+2h]\cdot[l_2(\mu_m^2+h^2)+2h]\cdot[l_3(\nu_n^2+h^2)+2h]},\qquad(5)$$

$\lambda_1,\,\lambda_2,\,\ldots;\ \mu_1,\,\mu_2,\,\ldots;\ \nu_1,\,\nu_2,\,\ldots$ являются соответственно положительными корнями уравнений

$$\operatorname{ctg} l_1\lambda=\frac12\left(\frac{\lambda}{h}-\frac{h}{\lambda}\right),\quad \operatorname{ctg} l_2\mu=\frac12\left(\frac{\mu}{h}-\frac{h}{\mu}\right),\quad \operatorname{ctg} l_3\nu=\frac12\left(\frac{\nu}{h}-\frac{h}{\nu}\right),\qquad(6)$$

$$X_k(x)=\cos\lambda_k x+\frac{h}{\lambda_k}\sin\lambda_k x,\quad Y_m(y)=\cos\mu_m y+\frac{h}{\mu_m}\sin\mu_m y,$$

$$Z_n(z)=\cos\nu_n z+\frac{h}{\nu_n}\sin\nu_n z.\qquad(7)$$

В частности, если $f(x,\,y,\,z)=U_0\equiv\text{const}$, то

$$u(x,\,y,\,z,\,t)=4^3h^3U_0\sum_{k,\,m,\,n=0}^{+\infty}\exp\Big\{-a^2(\lambda_{2k+1}^2+\mu_{2m+1}^2+\nu_{2n+1}^2)t\Big\}\times$$

$$\times\frac{X_{2k+1}(x)Y_{2m+1}(y)Z_{2n+1}(z)}{[l_1(\lambda_{2k+1}^2+h^2)+2h]\cdot[l_2(\mu_{2m+1}^2+h^2)+2h]\cdot[l_3(\nu_{2n+1}^2+h^2)+2h]}.\qquad(8)$$

У к а з а н и е. Корни λ_k уравнения $\operatorname{ctg} l_1\lambda=\frac12\left(\frac{\lambda}{h}-\frac{h}{\lambda}\right)$ удовлетворяют неравенствам $0<\lambda_1l_1<\pi,\ \pi<\lambda_2l_1<2\pi,\ 2\pi<\lambda_3l_1<3\pi,\ \ldots$, т. е. неравенствам

$$0<\frac{\lambda_1l_1}{2}<\frac{\pi}{2},\quad \frac{\pi}{2}<\frac{\lambda_2l_1}{2}<\pi,\quad \pi<\frac{\lambda_3l_1}{2}<\frac{3\pi}{2},\quad\ldots\qquad(9)$$

Подставляя λ_k в уравнение $\operatorname{ctg} l_1\lambda=\frac12\left(\frac{\lambda}{h}-\frac{h}{\lambda}\right)$, перепишем результат в виде

$$\operatorname{tg}\lambda_kl_1=\frac{2\lambda_kh}{\lambda_k^2-h^2}=\frac{2\,\dfrac{h}{\lambda_k}}{1-\dfrac{h^2}{\lambda_k^2}}=-\frac{2\,\dfrac{\lambda_k}{h}}{1-\dfrac{\lambda_k^2}{h^2}}.\qquad(10)$$

В силу (9) $\operatorname{tg}\dfrac{\lambda_kl_1}{2}>0$ при k нечетном и меньше нуля при k четном. Но

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{2\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\beta}{2}},$$

поэтому из (10) следует, что

$$\operatorname{tg}\frac{\lambda_kl_1}{2}=\begin{cases}\dfrac{h}{\lambda_k} & \text{при}\quad k\quad\text{нечетном},\\[2mm] -\dfrac{\lambda_k}{h} & \text{при}\quad k\quad\text{четном}.\end{cases}$$

Следовательно,

$$\int_0^{l_1} X_k(x)\,dx = \frac{1}{\lambda_k}\left[\sin\lambda_k l_1 + \frac{h}{\lambda_k}(1-\cos\lambda_k l_1)\right] =$$

$$= \frac{1}{\lambda_k} 2\sin\frac{\lambda_k l_1}{2}\cos\frac{\lambda_k l_1}{2}\left[1+\frac{h}{\lambda_k}\operatorname{tg}\frac{\lambda_k l_1}{2}\right] +$$

$$+\frac{2}{\lambda_k}\cdot\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\lambda_k l_1}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\lambda_k l_1}{2}}\left[1+\frac{h}{\lambda_k}\operatorname{tg}\frac{\lambda_k l_1}{2}\right] = \begin{cases} 0 & \text{при } k \text{ четном,} \\ \dfrac{2h}{\lambda_k^2} & \text{при } k \text{ нечетном.}\end{cases}$$

Аналогично вычисляются $\displaystyle\int_0^{l_2} Y_m(y)\,dy$, $\displaystyle\int_0^{l_3} Z_n(z)\,dz$.

Замечание. Если параллелепипед в начальный момент времени равномерно нагрет (т. е. $f(x, y, z) = U_0 \equiv \text{const}$), то, очевидно, распределение температуры в нем будет симметричным относительно плоскостей $x = \dfrac{l_1}{2}$, $y = \dfrac{l_2}{2}$, $z = \dfrac{l_3}{2}$, поэтому можно ограничиться определением температуры в одном из восьми параллелепипедов, на которые этими плоскостями разбивается первоначальный параллелепипед.

12. Температура в центре куба $-l \leqslant x, y, z \leqslant l$ равна

$$U = 8U_0h^3\left\{\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-a^2\lambda_k^2 t}(-1)^k\frac{\sqrt{1+\dfrac{h^2}{\lambda_k^2}}}{l(\lambda_k^2+h^2)+h}\right\}^3, \tag{1}$$

где λ_0, λ_1, λ_2, ... — положительные корни уравнения

$$\operatorname{tg}\lambda l = \frac{h}{\lambda}. \tag{2}$$

При всех значениях времени t, удовлетворяющих неравенству

$$t \geqslant t^* = -\frac{1}{a^2(\lambda_1^2-\lambda_0^2)}\ln\left[\widetilde{\varepsilon}\,\frac{(hl)^2+hl+(l\lambda_1)^2}{(hl)^2+hl+(l\lambda_0)^2}\sqrt{\frac{1+\left(\dfrac{h}{\lambda_0}\right)^2}{1+\left(\dfrac{h}{\lambda_1}\right)^2}}\right], \tag{3}$$

где $\widetilde{\varepsilon}$ равно меньшему из чисел 1 и $\dfrac{\varepsilon}{9}$, в центре куба заведомо будет иметь место регулярный режим с точностью до ε.

Указание. Чтобы получить выражение (1) для температуры в центре куба $-l \leqslant x, y, z \leqslant l$ достаточно согласно замечанию к предыдущей задаче сначала найти температуру части $0 \leqslant x, y, z \leqslant l$ этого куба, считая плоскости $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ теплоизолированными.

По поводу определения момента, с которого заведомо будет иметь место регулярный режим с точностью до $\varepsilon > 0$, см. ответ и указание к задаче 10 настоящей главы и ответ и указание к задаче 29 гл. III.

13. Решением краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a^2}{v_0}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \quad 0 < x < +\infty, \quad 0 < y < l_1, \quad 0 < z < l_2, \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} - hu\right)\Big|_{y=0} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + hu\right)\Big|_{y=l_1} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} - hu\right)\Big|_{z=0} =$$

$$= \left(\frac{du}{dz} + hu\right)\Big|_{z=l_2} = 0, \quad 0 < x < +\infty, \quad (2)$$

$$u\big|_{x=0} = U_0, \quad 0 \leqslant y \leqslant l_1, \quad 0 \leqslant z \leqslant l_2, \quad (3)$$

является

$$u(x, y, z) = 16U_0h^2 \sum_{m,\,n=0}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{a^2}{v_0^2}(\mu_{2m+1}^2 + \nu_{2n+1}^2)x\right\} \times$$

$$\times \frac{\left(\cos\mu_{2m+1}y + \dfrac{h}{\mu_{2m+1}}\sin\mu_{2m+1}y\right)\left(\cos\nu_{2n+1}z + \dfrac{h}{\nu_{2n+1}}\sin\nu_{2n+1}z\right)}{[l_1(\mu_{2m+1}^2 + h^2) + 2h]\cdot[l_2(\nu_{2n+1}^2 + h^2) + 2h]},$$

где $\mu_1, \mu_2, \ldots$; $\nu_1, \nu_2, \ldots$ — соответственно корни уравнений

$$\operatorname{ctg} l_1\mu = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{h} - \frac{h}{\mu}\right), \quad \operatorname{ctg} l_2\nu = \frac{1}{2}\left(\frac{\nu}{h} - \frac{h}{\nu}\right).$$

Указание. См. указание к задаче 11.

14. а) $l_{\text{кр}} = a\pi\sqrt{\dfrac{3}{\beta}}$;

б) лавинный процесс размножения частиц будет иметь место при любых размерах куба;

в) $l_{\text{кр}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\beta}\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{\beta}}{ah\sqrt{3}} - \dfrac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{\beta}}\right)$, если $\beta > 3a^2h^2$; лавинный процесс будет при любых размерах, если $\beta \leqslant 3a^2h^2$; β — коэффициент размножения, входящий в уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \beta u.$$

15.
$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \exp\left\{-\frac{n^2\pi^2a^2}{r_0^2}\,t\right\}\frac{\sin\dfrac{n\pi r}{r_0}}{r}, \quad (1)$$

$$A_n = \frac{2}{r_0}\int_0^{r_0} rf(r)\sin\frac{n\pi r}{r_0}\,dr. \quad (2)$$

Указание. Уравнение теплопроводности в силу радиальной симметрии записывается в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right\}.$$

Переход к новой неизвестной функции $v(r,\,t) = ru(r,\,t)$ приводит к краевой задаче об остывании стержня

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}, \quad 0 < r < r_0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{3}$$

$$v(0,\,t) = 0, \quad v(r_0,\,t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{4}$$

$$v(r,\,0) = rf(r), \quad 0 < r < r_0. \tag{5}$$

Первое из граничных условий (4) является следствием ограниченности температуры $u(r,\,t)$ в центре шара

$$v(+0,\,t) = \lim_{r\to+0} ru(r,\,t) = 0.$$

16. $u(r,\,t) = U_1 + 2\,\dfrac{r_0}{\pi}(U_0 - U_1)\,\times$

$$\times\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,\exp\left\{-\frac{n^2\pi^2a^2}{r_0^2}\,t\right\}\,\frac{\sin\dfrac{n\pi r}{r_0}}{r}.$$

При всех значениях времени t, удовлетворяющих неравенству

$$t \geqslant t^* = -\frac{r_0^2}{3\pi^2a^2}\ln\varepsilon,$$

в центре шара заведомо будет иметь место регулярный режим с относительной точностью $\varepsilon > 0$.

Указание. См. решение задачи 22 § 2 гл. III.

17. Решением краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r}\right\}, \quad 0 \leqslant r < r_0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$\lambda\,\frac{\partial u}{\partial r} = q, \quad r = r_0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(r,\,0) = U_0, \quad 0 \leqslant r < r_0, \tag{3}$$

является

$$u(r,\,t) = U_0 + \frac{qr_0}{\lambda}\left\{\frac{3a^2t}{r_0^2} - \frac{3r_0^2 - 5r^2}{10r_0^2} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2r_0\exp\left\{-\dfrac{a^2\mu_n^2t}{r_0^2}\right\}}{\mu_n^2\cos\mu_n}\cdot\frac{\sin\dfrac{\mu_n r}{r_0}}{r}\right\}, \tag{4}$$

где μ_n — положительные корни уравнения

$$\operatorname{tg}\mu = \mu. \tag{5}$$

18. Решением краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r}\right\}, \quad 0 \leqslant r < r_0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + hu = 0 \quad \text{при} \quad r = r_0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(r,\,0) = f(r), \quad 0 \leqslant r < r_0, \tag{3}$$

является

$$u(r,\,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n\exp\left\{-a^2\lambda_n^2t\right\}\,\frac{\sin\lambda_n r}{r}, \tag{4}$$

где

$$A_n = \frac{2}{r_0} \cdot \frac{r_0^2\lambda_n^2 + (r_0h-1)^2}{r_0^2\lambda_n^2 + (r_0h-1)r_0h} \int\limits_0^{r_0} r f(r) \sin \lambda_n r \, dr, \tag{5}$$

λ_n — положительные корни уравнения

$$\operatorname{tg} \lambda_n r_0 = \frac{\lambda_n r_0}{1 - r_0 h}. \tag{6}$$

19. $u(r, t) = U_1 + 2(U_1 - U_0)hr_0^2 \times$

$$\times \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{\mu_n^2 + (hr_0-1)^2}}{\mu_n(\mu_n^2 + h^2r_0^2 - hr_0)} \exp\left\{-\frac{a^2\mu_n^2 t}{r_0^2}\right\} \frac{\sin \dfrac{\mu_n r}{r_0}}{r}, \tag{1}$$

где μ_n — положительные корни уравнения

$$\operatorname{tg} \mu = -\frac{\mu}{r_0 h - 1}, \tag{2}$$

а h — коэффициент теплообмена, входящий в граничное условие

$$\frac{\partial u}{\partial r} = h[U_1 - u] \quad \text{при} \quad r = r_0, \quad 0 < t < +\infty. \tag{3}$$

В центре шара

$$u(0, t) = U_1 + 2(U_1 - U_0)hr_0 \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{\mu_n^2 + (hr_0-1)^2}}{\mu_n^2 + h^2r_0^2 - hr_0} \exp\left\{-\frac{a^2\mu_n^2 t}{r_0^2}\right\}. \tag{4}$$

Если $hr_0 < 1$, то, очевидно, ряд (4) удовлетворяет условиям теоремы Лейбница о знакопеременных рядах. Воспользовавшись этим, найдем, что при всех значениях времени t, удовлетворяющих неравенству

$$t \geqslant t^* = -\frac{r_0^2}{a^2(\mu_1^2 - \mu_2^2)} \ln\left\{\varepsilon \frac{\mu_2^2 + h^2r_0^2 - hr_0}{\mu_1^2 + h^2r_0^2 - hr_0} \sqrt{\frac{\mu_1^2 + (hr_0-1)^2}{\mu_2^2 + (hr_0-1)^2}}\right\}, \tag{5}$$

в центре шара заведомо будет иметь место регулярный режим с относительной точностью $\varepsilon > 0$.

20. Решением краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right\}, \quad 0 \leqslant r < r_0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_0} = h[U_1 + \alpha t - u]\Big|_{r=r_0}, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(r, 0) = U_0, \quad 0 \leqslant r < r_0, \tag{3}$$

является

$$u(r, t) = U_0 + \alpha\left[t + \frac{r^2 - r_0^2 - 2\dfrac{r_0}{h}}{6a^2}\right] +$$

$$+ \frac{2hr_0^4\alpha}{a^2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{\mu_n^2 + (hr_0-1)^2}}{\mu_n^3(\mu^2 + h^2r_0^2 - hr_0)} \exp\left\{-\frac{a^2\mu_n^2 t}{r_0^2}\right\} \frac{\sin \dfrac{\mu_n r}{r_0}}{r}, \tag{4}$$

где μ_n — положительные корни уравнения

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\mu}{hr_0 - 1}. \tag{5}$$

Указание. Сначала следует найти частное решение уравнения (1), удовлетворяющее неоднородному граничному условию (2). Такое частное решение можно искать в виде $U(r,\,t) = U_1 + \alpha t + F(r)$, где $F(r)$ — неизвестная функция.

21. Решением краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r}\right\}, \quad r_1 < r < r_2, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} - h_1 u\right)\Big|_{r=r_1} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial r} + h_2 u\right)\Big|_{r=r_2} = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(r,\,0) = f(r), \quad r_1 < r < r_2, \tag{3}$$

является

$$u(r,\,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n e^{-a^2\lambda_n^2 t}\,\frac{\sin[\lambda_n(r - r_1) + \nu_n]}{r}, \tag{4}$$

где

$$A_n = \frac{2\displaystyle\int_{r_1}^{r_2} r f(r)\sin[\lambda_n(r - r_1) + \nu_n]\,dr}{r_2 - r_1 + \dfrac{\left[\left(h_1 + \dfrac{1}{r_1}\right)\left(h_2 - \dfrac{1}{r_2}\right) + \lambda_n^2\right]\left[h_1 + h_2 + \dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right]}{\left[\left(h_1 + \dfrac{1}{r_1}\right)^2 + \lambda_n^2\right]\cdot\left[\left(h_2 - \dfrac{1}{r_2}\right)^2 + \lambda_n^2\right]}}, \tag{5}$$

λ_n — положительные корни уравнения

$$\operatorname{ctg}\lambda_n(r_2 - r_1) = \frac{\lambda_n^2 - \left(h_1 + \dfrac{1}{r_1}\right)\left(h_2 - \dfrac{1}{r_2}\right)}{\lambda_n\left(h_1 + h_2 + \dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right)}, \tag{6}$$

$$\nu_n = \operatorname{arctg}\frac{\lambda_n}{h_1 + \dfrac{1}{r_1}}. \tag{7}$$

22. а) $R_{\text{кр}} = \dfrac{\pi a}{\sqrt{\beta}}$;

б) процесс будет иметь лавинный характер при любых размерах шара;

в) $R_{\text{кр}}$ является наименьшим положительным корнем уравнения

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{\beta}}{a}\,R\right) = \frac{\dfrac{\sqrt{\beta}}{a}\,R}{1 - hR}.$$

б) Неоднородные среды; сосредоточенные факторы.

23. Решением краевой задачи

$$c_1\rho_1\frac{\partial u}{\partial t}=k_1\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right\},\quad 0<x<x_0,\quad 0<y<l_2,\quad 0<t<+\infty,\tag{1}$$

$$c_2\rho_2\frac{\partial u}{\partial t}=k_2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right\},\quad x_0<x<l_1,\quad 0<y<l_2,\quad 0<t<+\infty,\tag{1'}$$

$$u(x_0-0,\,y,\,t)=u(x_0+0,\,y,\,t),\quad 0<y<l_2,\quad 0<t<+\infty,\tag{2}$$

$$k_1u_x(x_0-0,\,y,\,t)=k_2u_x(x_0+0,\,y,\,t),\quad 0<y<l_2,\quad 0<t<+\infty,\tag{2'}$$

$$u\big|_{x=0}=u\big|_{x=l_1}=u\big|_{y=0}=y\big|_{y=l_2}=0,\tag{2''}$$

$$u(x,\,y,\,0)=f(x,\,y),\quad 0\leqslant x\leqslant l_1,\quad 0\leqslant y\leqslant l_2,\tag{3}$$

является

$$u(x,\,y,\,t)=\sum_{m,\,n=1}^{+\infty}A_{m,\,n}e^{-\lambda^2_{m,\,n}t}v_{m,\,n}(x,\,y),\tag{4}$$

где

$$v_{m,\,n}(x,\,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin\overline{\omega}_{mn}x}{\sin\overline{\omega}_{mn}x_0}\sin\dfrac{n\pi y}{l_2}, & 0\leqslant x\leqslant x_0,\quad 0\leqslant y\leqslant l_2,\\[2ex] \dfrac{\sin\overline{\overline{\omega}}_{mn}(l_1-x)}{\sin\overline{\overline{\omega}}_{mn}(l_1-x_0)}\sin\dfrac{n\pi y}{l_2}, & x_0\leqslant x\leqslant l_1,\quad 0\leqslant y\leqslant l_2,\end{cases}\tag{5}$$

$$\overline{\omega}^2_{mn}=\frac{c_1\rho_1}{k_1}\lambda^2_{mn}-\frac{n^2\pi^2}{l_2^2},\quad \overline{\overline{\omega}}^2_{mn}=\frac{c_2\rho_2}{k_2}\lambda^2_{mn}-\frac{n^2\pi^2}{l_2^2},\tag{6}$$

λ_{mn} $(m=1,\,2,\,3,\,\ldots;\quad n=1,\,2,\,3,\ldots)$ — корни трансцендентного уравнения

$$k_1\sqrt{\frac{c_1\rho_1}{k_1}\lambda^2_{mn}-\frac{n^2\pi^2}{l_2^2}}\operatorname{ctg}\left\{x_0\sqrt{\frac{c_1\rho_1}{k_1}\lambda^2_{mn}-\frac{n^2\pi^2}{l_2^2}}\right\}=$$
$$=k_2\sqrt{\frac{c_2\rho_2}{k_2}\lambda^2_{mn}-\frac{n^2\pi^2}{l_2^2}}\operatorname{ctg}\left\{(x_0-l_1)\sqrt{\frac{c_2\rho_2}{k_2}\lambda^2_{mn}-\frac{n^2\pi^2}{l_2^2}}\right\},\tag{7}$$

$$A_{m,\,n}=\frac{\int\limits_0^{l_1}\int\limits_0^{l_2}\mu(x,\,y)f(x,\,y)v_{m,\,n}(x,\,y)\,dx\,dy}{\|v_{m,\,n}\|^2},\tag{8}$$

$$\mu(x,\,y)=\begin{cases}c_1\rho_1 & \text{при}\quad 0\leqslant x<x_0,\quad 0\leqslant y\leqslant l_2,\\ c_2\rho_2 & \text{при}\quad x_0<x\leqslant l_1,\quad 0\leqslant y\leqslant l_2,\end{cases}\tag{9}$$

$$\|v_{m,n}\|^2 = \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \mu(x,y) v_{m,n}^2(x,y)\,dx\,dy = \\ = \frac{l_2}{4}\left\{\frac{c_1\rho_1 x_0}{\sin^2 \overline{\omega}_{mn} x_0} + \frac{c_2\rho_2(l_1-x_0)}{\sin^2 \overline{\overline{\omega}}_{mn}(l_1-x_0)}\right\}. \quad (10)$$

Функции $v_{m,n}$ ортогональны с весом $\mu(x,y)$ на прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant l_1,\ 0 \leqslant y \leqslant l_2$.

24. Решением краевой задачи

$$c_1\rho_1 \frac{\partial u}{\partial t} = k_1\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right\}, \quad 0 < x < x_0, \quad 0 < y < l_2, \\ 0 < z < l_3, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$c_2\rho_2 \frac{\partial u}{\partial t} = k_2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right\}, \quad x_0 < x < l_1, \quad 0 < y < l_2, \\ 0 < z < l_3, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1')$$

$$u(x_0-0,y,z,t) = u(x_0+0,y,z,t), \quad 0 \leqslant y \leqslant l_2, \\ 0 < z < l_3, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$k_1 u_x(x_0-0,y,z,t) = k_2 u_x(x_0+0,y,z,t), \quad 0 \leqslant y \leqslant l_2, \\ 0 \leqslant z \leqslant l_3, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2')$$

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l_1} = u\big|_{y=0} = u\big|_{y=l_2} = u\big|_{z=0} = u\big|_{z=l^3} = 0, \quad (2'')$$

$$u\big|_{t=0} = f(x,y,z), \quad 0 \leqslant x \leqslant l_1, \quad 0 \leqslant y \leqslant l_2, \quad 0 \leqslant z \leqslant l_3, \quad (3)$$

является

$$u(x,y,z,t) = \sum_{m,n,p=1}^{+\infty} A_{m,n,p} e^{-\lambda^2_{m,n,p^l}} v_{m,n,p}(x,y,z), \quad (4)$$

где

$$v_{mnp}(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{\sin \overline{\omega}_{mnp} x}{\sin \overline{\omega}_{mnp} x_0} \sin\dfrac{n\pi y}{l_2} \sin\dfrac{p\pi z}{l_3}, \\ \qquad 0 \leqslant x \leqslant x_0, \quad 0 \leqslant y \leqslant l_2, \quad 0 \leqslant z \leqslant l_3, \\ \dfrac{\sin \overline{\overline{\omega}}_{mnp}(l_1-x)}{\sin \overline{\overline{\omega}}_{mnp}(l_1-x_0)} \sin\dfrac{n\pi y}{l_2} \sin\dfrac{p\pi z}{l_3}, \\ \qquad x_0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant y \leqslant l_2, \quad 0 \leqslant z \leqslant l_3, \end{cases} \quad (5)$$

$$\overline{\omega}^2_{m,n,r} = \frac{c_1\rho_1}{k_1}\lambda^2_{m,n,p} - \frac{n^2\pi^2}{l_2^2} - \frac{p^2\pi^2}{l_3^2}, \\ \overline{\overline{\omega}}^2_{m,n,p} = \frac{c_2\rho_2}{k_2}\lambda^2_{m,n,p} - \frac{n^2\pi^2}{l_2^2} - \frac{p^2\pi^2}{l_3^2}, \quad (6)$$

$\lambda_{m,n,p}$ ($m = 1, 2, 3, \ldots$; $n = 1, 2, 3, \ldots$; $p = 1, 2, 3, \ldots$) — корни трансцендентного уравнения

$$k_1\sqrt{\frac{c_1\rho_1}{k_1}\lambda_{mnp}^2 - \frac{n^2\pi^2}{l_2^2} - \frac{p^2\pi^2}{l_3^2}} \times \\ \times \operatorname{ctg}\left\{x_0\sqrt{\frac{c_1\rho_1}{k_1}\lambda_{mnp}^2 - \frac{n^2\pi^2}{l_2^2} - \frac{p^2\pi^2}{l_3^2}}\right\} = \\ = k_2\sqrt{\frac{c_2\rho_2}{k_2}\lambda_{mnp}^2 - \frac{n^2\pi^2}{l_2^2} - \frac{p^2\pi^2}{l_3^2}} \times \\ \times \operatorname{ctg}\left\{(x_0 - l_1)\sqrt{\frac{c_2\rho_2}{k_2}\lambda_{mnp}^2 - \frac{n^2\pi^2}{l_2^2} - \frac{p^2\pi^2}{l_3^2}}\right\}, \quad (7)$$

$$A_{m,n,p} = \frac{\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\int_0^{l_3}\mu(x, y, z)f(x, y, z)v_{m,n,p}(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}{\|v_{m,n,p}\|^2}, \quad (8)$$

$$\mu(x, y, z) = \begin{cases} c_1\rho_1 \text{ при } 0 \leqslant x < x_0,\ 0 \leqslant y \leqslant l_2,\ 0 \leqslant z \leqslant l_3, \\ c_2\rho_2 \text{ при } x_0 < x \leqslant l_1,\ 0 \leqslant x \leqslant l_2,\ 0 \leqslant z \leqslant l_3, \end{cases} \quad (9)$$

$$\|v_{m,n,p}\|^2 = \int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\int_0^{l_3}\mu(x, y, z)v_{m,n,p}^2(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \\ = \frac{l_2 l_3}{8}\left\{\frac{c_1\rho_1 x_0}{\sin^2\overline{\omega}_{mnp}x_0} + \frac{c_2\rho_2(l_1 - x_0)}{\sin^2\overline{\overline{\omega}}_{mnp}(l_1 - x_0)}\right\}. \quad (10)$$

Функции $v_{m,n,p}(x, y, z)$ ортогональны с весом $\mu(x, y, z)$ на параллелепипеде $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$, $0 \leqslant z \leqslant l_3$.

25. Решением краевой задачи

$$c_1\rho_1\frac{\partial u}{\partial t} = k_1\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right\}, \quad 0 \leqslant r < r_0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$c_2\rho_2\frac{\partial u}{\partial t} = k_2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right\}, \quad r_0 < r \leqslant r_1, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1')$$

$$u(r_0 - 0, t) = u(r_0 + 0, t), \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$k_1 u_r(r_0 - 0, t) = k_2 u_r(r_0 + 0, t), \quad 0 < t < +\infty, \quad (2')$$

$$u(r_1, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2'')$$

$$u(r, 0) = f(r), \quad 0 \leqslant r < r_1, \quad (3)$$

является

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n e^{-\lambda_n^2 t}v_n(r), \quad (4)$$

где λ_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) — корни трансцендентного уравнения;

$$\sqrt{k_1c_1\rho_1}\,\operatorname{ctg}\left\{r_0\lambda_n\sqrt{\frac{c_1\rho_1}{k_1}}\right\}-\sqrt{k_2c_2\rho_2}\,\operatorname{ctg}\left\{(r_0-r_1)\lambda_n\sqrt{\frac{c_2\rho_2}{k_2}}\right\}=$$

$$=\frac{k_1-k_2}{\lambda_n r_0}, \quad (5)$$

$$v_n(r)=\begin{cases}\dfrac{\sin\overline{\omega}_n r}{r\sin\overline{\omega}_n r_0}, & 0\leqslant r\leqslant r_0,\\ \dfrac{\sin\overline{\overline{\omega}}_n(r_1-r)}{r\sin\overline{\overline{\omega}}_n(r_1-r_0)}, & r_0\leqslant r\leqslant r_1,\end{cases} \quad (6)$$

$$\overline{\omega}=\lambda_n\sqrt{\frac{c_1\rho_1}{k_1}}, \quad \overline{\overline{\omega}}_n=\lambda_n\sqrt{\frac{c_2\rho_2}{k_2}}, \quad (7)$$

$$A_n=\frac{\int\limits_0^{r_1}\mu(r)\,f(r)\,v_n(r)\,dr}{\|v_n\|^2}, \quad (8)$$

$$\mu(r)=\begin{cases}c_1\rho_1r^2 & \text{при} \quad 0\leqslant r<r_0,\\ c_2\rho_2r^2 & \text{при} \quad r_0<r\leqslant r_1,\end{cases} \quad (9)$$

$$\|v_n\|^2=\int\limits_0^{r_1}\mu(r)v_n^2(r)\,dr=\frac{c_1\rho_1r_0}{2\sin^2\overline{\omega}_nr_0}+\frac{c_2\rho_2(r_1-r_0)}{2\sin^2\overline{\overline{\omega}}_n(r_1-r_0)}+\frac{k_2-k_1}{\lambda_nr_0}.$$

Функции $v_n(r)$ ортогональны на отрезке $0\leqslant r\leqslant r_1$ с весом $\mu(r)$.

26. Решением краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left\{\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r}\right\}, \quad r_1<r<r_2, \quad 0<t<+\infty, \quad (1)$$

$$\frac{4}{3}\,\pi r_1^3\rho^*c^*\,\frac{dU}{dt}=4\pi r_1^2\lambda\,\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=r_1}, \quad u\big|_{r=r_1}=U(t), \quad u\big|_{r=r_2}=0,$$

$$0<t<+\infty, \quad (2)$$

$$u(r,\,0)=f(r), \quad r_1<r<r_2, \quad (3)$$

где ρ^* и c^* — плотность массы и удельная теплоемкость жидкости, является

$$u(r,\,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}A_ne^{-a^2\lambda_n^2t}\,\frac{\sin\lambda_n(r-r_2)}{r}, \quad r_1<r<r_2, \quad 0<t<+\infty, \quad (4)$$

где λ_n — положительные корни уравнения

$$\operatorname{ctg}\lambda_n(r_2-r_1)=\frac{a^2r_1\lambda_n^2-3\lambda}{3\lambda\lambda_n}, \quad (5)$$

$$A_n=\frac{2\int\limits_{r_1}^{r_2}rf(r)\sin\lambda_n(r-r_2)\,dr}{r_2-\left[r_1\left(\dfrac{a^2\lambda_nr_1\rho^*c^*}{3\lambda}-\dfrac{1}{\lambda_nr_1}\right)^2+\lambda_n^2+\dfrac{2a^2r_1\rho^*c^*}{3\lambda}\right]\sin^2\lambda_n(r_1-r_2)}. \quad (6)$$

Указание. С помощью подстановки $v(r,\,t)=ru(r,\,t)$ задача (1), (2), (3) сводится к задаче об остывании отрезка с сосредоточенной теплоемкостью на конце, которая решается аналогично тому, как это делалось в гл. III (см. задачу 50).

2. Краевые задачи, требующие применения специальных функций.

а) Однородные среды.

27. $u(r,t)=U_0\left[1-2\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\exp\left\{-\dfrac{\mu_n^2a^2}{r_0^2}\,t\right\}\dfrac{J_0\left(\dfrac{\mu_n r}{r_0}\right)}{\mu_n J_1(\mu_n)}\right],$

$$0\leqslant r\leqslant r_0,\quad 0<t<+\infty, \qquad (1)$$

где r_0 — радиус цилиндра, а μ_n — положительные корни уравнения $J_0(\mu)=0$.

В условиях регулярного режима, т. е. при столь больших значениях t, что сумма членов ряда (1), соответствующих μ_2, μ_3, ..., пренебрежимо мала по сравнению с первым членом [1)]

$$u(r,t)\approx U_0\left[1-\frac{2J_0\left(\dfrac{\mu_1 r}{r_0}\right)}{\mu_1 J_1(\mu_1)}\exp\left\{-\frac{\mu_1^2a^2}{r_0^2}\,t\right\}\right],\quad 0\leqslant r\leqslant r_0, \qquad (2)$$

средняя по поперечному сечению температура

$$U(t)\approx U_0\left[1-\frac{4}{\mu_1^2}\exp\left\{-\frac{\mu_1^2a^2}{r_0^2}\,t\right\}\right]. \qquad (3)$$

Замечание. В точках с координатой $r_1=\dfrac{\mu_1}{\mu_2}$ регулярный режим наступает раньше, так как в этих точках обращается в нуль член ряда (1), соответствующий μ_2.

28. $u(r,t)=8U_0\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\exp\left\{-\dfrac{\mu_n^2a^2}{r_0^2}\,t\right\}\dfrac{J_0\left(\dfrac{\mu_n r}{r_0}\right)}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)}$, где μ_n — положительные корни уравнения $J_0(\mu)=0$. В условиях регулярного режима

$$u(r,\,t)\approx 8U_0\frac{J_0\left(\dfrac{\mu_1 r}{r_0}\right)}{\mu_1^3 J_1(\mu_1)}\exp\left\{-\frac{\mu_1^2a^2}{r_0^2}\,t\right\}$$

средняя по поперечному сечению температура

$$U(t)\approx\frac{16U_0}{\mu_1^4}\exp\left\{-\frac{\mu_1^2a^2}{r_0^2}\,t\right\}.$$

[1)] Напомним, что для корней уравнения $J_0(\mu)=0$ имеет место представление

$$\mu_n=\pi\left(n-\frac{1}{4}+\frac{0,05661}{4n-1}-\frac{0,053041}{(4n-1)^2}+\ldots\right),$$

так что $\mu_1\approx 2,4048$, $\mu_2\approx 5,5201$, $\mu_3\approx 8,6537$, ...

Значения $J_1(\mu_n)$ см. [7, с. 679].

Замечание. Регулярный режим наступает раньше в тех же точках, что и в предыдущей задаче (см. замечание к ответу предыдущей задачи).

29. Решением краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right\}, \quad 0 \leqslant r < r_0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$\lambda\frac{\partial u}{\partial r} = q \quad \text{при} \quad r = r_0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(r,\,0) = U_0, \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0, \tag{3}$$

является

$$u(r,\,t) = U_0 + \frac{qr_0}{\lambda}\left[2\,\frac{a^2 t}{r_0^2} - \frac{1}{4}\left(1 - 2\,\frac{r^2}{r_0^2}\right) - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\exp\left\{-\dfrac{a^2\mu_n^2}{r_0^2}\,t\right\}}{\mu_n^2 J_0(\mu_n)}\,J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)\right], \tag{4}$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$J_0'(\mu) = 0. \tag{5}$$

30. Решением краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right\}, \quad 0 \leqslant r < r_0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = f(r), \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0, \tag{2}$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial r} + hu\right]_{r=r_0} = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{3}$$

является

$$u(r,\,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \exp\left\{-\frac{\mu_n^2 a^2 t}{r_0^2}\right\} J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right), \tag{4}$$

где

$$A_n = \frac{2\mu_n^2}{r_0^2[\mu_n^2 + h^2 r_0^2]\cdot J_0^2(\mu_n)}\int_0^{r_0} r f(r) J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) dr, \tag{5}$$

μ_n — положительные корни уравнения

$$\mu J_0'(\mu) + hr_0 J_0(\mu) = 0. \tag{6}$$

В условиях регулярного режима

$$u(r,\,t) \approx \frac{2\mu_1^2\displaystyle\int_0^{r_0} r f(r)\,J_0\left(\frac{\mu_1 r}{r_0}\right) dr}{r_0^2[\mu_1^2 + h^2 r_0^2]J_0^2(\mu_1)}\,J_0\left(\frac{\mu_1 r}{r_0}\right)\exp\left\{-\frac{\mu_1^2 a^2}{r_0^2}\,t\right\}.$$

31. Решение краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right\}, \quad 0 \leqslant r < r_0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = h[U_1 - u] \quad \text{при} \quad r = r_0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(r,\,0) = U_0, \quad 0 \leqslant r < r_0, \tag{3}$$

является

$$u(r,\,t) = U_1 + 2(U_1 - U_0)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{J_1(\mu_n)\exp\left\{-\dfrac{a^2\mu_n^2 t}{r_0^2}\right\}}{\mu_n[J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)]}\, J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right), \qquad (4)$$

где μ_n — положительные корни уравнения

$$\mu J_0'(\mu) + hr_0 J_0(\mu) = 0. \qquad (5)$$

Замечание. В силу (5)

$$\frac{J_1(\mu_n)}{\mu_n[J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)]} = \frac{hr_0}{J_0(\mu_n)[\mu_n^2 + h^2 r_0^2]}.$$

Таким образом, выражение (4) для $u(r,\,t)$ может быть записано в виде

$$u(r,\,t) = U_1 + 2(U_1 - U_0)hr_0 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\exp\left\{-\dfrac{a^2\mu_n^2 t}{r_0^2}\right\}}{J_0(\mu_n)[\mu_n^2 + h^2 r_0^2]}\, J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right). \qquad (6)$$

32. $u(r,\,t) = U_0 + \alpha\left[t + \dfrac{r^2 - r_0^2 - 2\dfrac{r_0}{h}}{4a^2}\right] +$

$$+ \frac{2hr_0^3\alpha}{a^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\exp\left\{-\dfrac{a^2\mu_n^2 t}{r_0^2}\right\} J_0\left(\dfrac{\mu_n r}{r_0}\right)}{\mu_n^2 J_0(\mu_n)[\mu_n^2 + h^2 r_0^2]}, \qquad (1)$$

где μ_n имеют те же значения, что и в ответе к предыдущей задаче.

33. Напряженность магнитного поля

$$H = H_0\left\{1 - 2\sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{\mu_n^2 a^2}{r_0^2}\, t\right\} \frac{J_0\left(\dfrac{\mu_n r}{r_0}\right)}{\mu_n J_1(\mu_n)}\right\},$$

где μ_n — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$. Поток магнитной индукции через поперечное сечение цилиндра

$$\Phi = \int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} Br\,dr\,d\varphi =$$

$$= \mu \int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} H_0\left\{1 - 2\sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{\mu_n^2 a^2}{r_0^2}\, t\right\} \frac{J_0\left(\dfrac{\mu_n r}{r_0}\right)}{\mu_n J_1(\mu_n)}\right\} r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \pi r_0^2 \mu H_0\left\{1 - 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\exp\left\{-\dfrac{\mu_n^2 a^2}{r_0^2}\, t\right\}}{\mu_n^2}\right\}.$$

Указание. В уравнении для вектора магнитной напряженности[1)]

$$\Delta \boldsymbol{H} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\,\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\,\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

для проводящей среды с большой проводимостью можно пренебречь

[1)] См. [7, с. 440–444].

членом $\dfrac{\varepsilon\mu}{c^2}\dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t^2}$ по сравнению с членом $\dfrac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$, что приводит к уравнению

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = a^2\Delta \boldsymbol{H}, \quad a^2 = \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma}.$$

Разложим вектор $\boldsymbol{H}$ по единичным векторам $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\varphi$, $\boldsymbol{e}_z$ цилиндрической системы, ось которой совпадает с осью цилиндра,

$$\boldsymbol{H} = H_r\boldsymbol{e}_r + H_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + H_z\boldsymbol{e}_z.$$

Так как внешнее поле не зависит от φ и параллельно оси $\boldsymbol{z}$, то естественно предположить, что $H_r = H_\varphi = 0$, а $H_z = H(r, t)$. Эта гипотеза оправдывается в силу теоремы о единственности решения краевой задачи. Для $H(r, t)$ получаем краевую задачу

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a^2\left\{\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r}\right\}, \quad 0 \leqslant r < r_0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$H(r, 0) = 0, \quad 0 < r < r_0, \tag{2}$$

$$H(r_0, t) = H_0, \quad 0 < t < +\infty.$$

34. В цилиндрической системе координат, ось z которой совмещена с осью цилиндра,

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{e}_r H_r + \boldsymbol{e}_\varphi H_\varphi + \boldsymbol{e}_z H_z, \quad H_r = H_\varphi \equiv 0, \quad H_z = H(r, t),$$

$$H(r, t) = H_0\frac{\operatorname{ber}\omega' r\operatorname{bei}\omega' r_0 - \operatorname{bei}\omega' r\operatorname{ber}\omega' a}{\operatorname{ber}^2\omega' r_0 + \operatorname{bei}^2\omega' r_0}\cos\omega t +$$

$$+ H_0\frac{\operatorname{ber}\omega' r\operatorname{bei}\omega' r_0 - \operatorname{bei}\omega' r\operatorname{ber}\omega' r_0}{\operatorname{ber}^2\omega' r_0 + \operatorname{bei}^2\omega' r_0}\sin\omega t +$$

$$+ 2H_0\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{a^2\mu_n^2 t}{r_0^2}\right\}\frac{\mu_n^3}{\mu_n^4 + \omega'^4 r_0^4}\cdot\frac{J_0\left(\dfrac{\mu_n r}{r_0}\right)}{J_1(\mu_n)},$$

где μ_n — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, а $\omega' = \dfrac{\sqrt{\omega}}{a}$.

Р е ш е н и е. Решение краевой задачи

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a^2\left\{\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r}\right\}, \quad 0 \leqslant r < r_0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$H(r, 0) = 0, \quad 0 \leqslant r < r_0, \tag{2}$$

$$H(r_0, t) = H_0\cos\omega t, \quad 0 < t < +\infty, \tag{3}$$

находим как действительную часть решения краевой задачи

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\right\}, \quad 0 \leqslant r < r_0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1'}$$

$$U(r, 0) = 0, \quad 0 \leqslant r < r_0, \tag{2'}$$

$$U(r_0, t) = H_0 e^{i\omega t}, \quad 0 < t < +\infty. \tag{3'}$$

Решение краевой задачи (1'), (2'), (3') ищем в виде

$$U(r, t) = V(r, t) + W(r, t), \tag{4}$$

где $V(r,\,t)$ — частное решение уравнения (1′), удовлетворяющее граничному условию (3′) и имеющее вид

$$V(r,\,t)=R(r)e^{i\omega t}, \tag{5}$$

а $W(r,\,t)$ есть решение уравнения (1′), удовлетворяющее начальному условию

$$W(r,\,0)=-V(r,\,0)=-R(r) \tag{6}$$

и граничному условию

$$W(r_0,\,t)=0. \tag{7}$$

Подставляя (5) в (1′) и (3′), найдем

$$V(r,\,t)=H_0\,\frac{I_0(r\omega'\sqrt{i})}{I_0(r_0\omega'\sqrt{i})}\,e^{i\omega t}=H_0\,\frac{\operatorname{ber}\omega' r+i\operatorname{bei}\omega' r}{\operatorname{ber}\omega' r_0+i\operatorname{bei}\omega' r_0}\,e^{i\omega t}\ ^{1)}, \tag{8}$$

где

$$\omega'=\frac{\sqrt{\omega}}{a},$$

$$R(r)=H_0\,\frac{I_0(r\omega'\sqrt{i})}{I_0(r_0\omega'\sqrt{i})}, \tag{9}$$

$$W(r,\,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\exp\left\{-\frac{a^2\mu_n^2}{r_0^2}\,t\right\}J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right), \tag{10}$$

$$A_n=\frac{\displaystyle\int_0^{r_0}rR(r)J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)dr}{\dfrac{r_0^2}{2}[J_1(\mu_n)]^2}=2H_0\,\frac{\mu_n^3\omega'^2r_0^2i}{(\mu_n^4+\omega'^4r_0^4)J_1(\mu_n)}. \tag{11}$$

Вычисление интеграла, стоящего в числителе равенства (11), выполняется с помощью следующего общего приема.

Пусть $Z_\nu(\lambda^*x)$ и $Z_\nu(\lambda x)$ — произвольные цилиндрические функции ν-го порядка, λ и λ^* — действительные или комплексные числа. Мы имеем

$$\frac{d}{dx}\left[x\,\frac{dZ_\nu(\lambda x)}{dx}\right]+\left(\lambda^2x-\frac{\nu^2}{x}\right)Z_\nu(\lambda x)=0, \tag{12}$$

$$\frac{d}{dx}\left[x\,\frac{dZ_\nu(\lambda^* x)}{dx}\right]+\left(\lambda^{*2}x-\frac{\nu^2}{x}\right)Z_\nu(\lambda^* x)=0. \tag{13}$$

Умножая первое из них на $Z_\nu(\lambda^*x)$, а второе на $Z_\nu(\lambda x)$, вычитая результаты и выполняя интегрирование, получим

$$\int xZ_\nu(\lambda^*x)Z_\nu(\lambda x)\,dx=\frac{x[\lambda Z_\nu(\lambda^*x)Z'_\nu(\lambda x)-\lambda^*Z_\nu(\lambda x)Z'_\nu(\lambda^*x)]}{\lambda^{*2}-\lambda^2}. \tag{14}$$

[1)] Напомним, что $J_0(xi\sqrt{i})=I_0(x\sqrt{i})=\operatorname{ber}x+i\operatorname{bei}x$, где

$$\operatorname{ber}x=1-\frac{x^4}{2^24^2}+\frac{x^8}{2^24^26^28^2}-\ldots;\quad \operatorname{bei}x=\frac{x^2}{2^2}-\frac{x^6}{2^24^26^2}+\frac{x^{10}}{2^24^26^28^210^2}-\ldots$$

Полагая $\lambda^* = \omega' \sqrt{i}$, $\lambda = \dfrac{\mu_n}{r_0}$, получим

$$\int_0^{r_0} r I_0(r\omega' \sqrt{i}) J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) dr = H_0 \frac{r_0^2 \mu_n J_1(\mu_n)}{\mu_n^2 - \omega'^2 r_0^2 i}, \tag{15}$$

откуда сразу же следует (11).

Выделяя действительную часть $V(r, t)$ и $W(r, t)$ и складывая, получим равенство (1), приведенное в ответе.

Замечание. Переходя к пределу в (14) при $\lambda^* \to \lambda$ и используя уравнение (12), нетрудно получить соотношение, важное для вычисления норм собственных функций,

$$\int x Z_\nu^2(\lambda x)\, dx = \frac{(\lambda x)^2 [Z'_\nu(\lambda x)^2 + [(\lambda x)^2 - \nu^2][Z_\nu(\lambda x)]^2}{2\lambda^2}. \tag{16}$$

35. $u(r, t) = \dfrac{\pi^2}{2r_0^2} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu_n^2 J_0^2(\mu_n) \int_{r_1}^{r_2} r f(r) Z_0\left(\frac{\mu_n r}{r_1}\right) dr}{J_0^2(\mu_n) - J_0^2(\mu_n k)} \times$

$$\times \exp\left\{-\frac{\mu_n^2 a^2 t}{r_1^2}\right\} Z_0\left(\frac{\mu_n r}{r_1}\right) - \pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{U_2 J_0(\mu_n) - U_1 J_0(\mu_n k)}{J_0^2(\mu_n) - J_0^2(\mu_n k)} \times$$

$$\times J_0(\mu_n) Z_0\left(\frac{\mu_n r}{r_1}\right) \exp\left\{-\frac{\mu_n^2 a^2 t}{r_1^2}\right\} + \left[U_1 \ln\frac{r_2}{r} + U_2 \ln\frac{r}{r_1}\right] \ln k,$$

где $k = \dfrac{r_2}{r_1}$, μ_n — положительные корни уравнения

$$J_0(\mu) N_0(\mu k) - J_0(\mu k) N_0(\mu) = 0,$$

а

$$Z_0\left(\frac{\mu_n r}{r_1}\right) = N_0(\mu_n k) J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_1}\right) - J_0(\mu_n k) N_0\left(\frac{\mu_n r}{r_1}\right).$$

При $U_1 = U_2 = U^* = \text{const}$, $f(r) = U_0 = \text{const}$

$$u(r, t) = U^* + \pi(U_0 - U^*) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{J_0(\mu_n) Z_0\left(\frac{\mu_n r}{r_1}\right)}{J_0(\mu_n) + J_0(\mu_n k)} \exp\left\{-\frac{\mu_n^2 a^2 t}{r_0^2}\right\}.$$

Указание. Для вычисления нормы собственных функций

$$Z_1(\lambda_k r) = J_1(\lambda_k r_1) N_1(\lambda_k r) - N_1(\lambda_k r_1) J_1(\lambda_k r)$$

нужно воспользоваться равенством (16) из замечания к решению задачи 34 и выражением для вронскиана цилиндрических функций $J_\nu(z)$, $N_\nu(z)$

$$\begin{vmatrix} J_\nu(z) & N_\nu(z) \\ J'_\nu(z) & N'_\nu(z) \end{vmatrix} = \frac{2}{\pi z}.$$

36. Решением краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right\}, \quad r_1 < r < r_2, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(r_1,\,t)=0,\quad u_r(r_2,\,t)=\frac{q_0}{\lambda},\quad 0<t<+\infty, \tag{2}$$

$$u(r,\,0)=0,\quad r_1<r<r_2, \tag{3}$$

является

$$u(r,\,t)=U(r)+\sum_{k=1}^{+\infty}A_k e^{-a^2\lambda_k^2 t}[J_0(\lambda_k r_1)N_0(\lambda_k r)-N_0(\lambda_k r_1)J_0(\lambda_k r)], \tag{4}$$

где $U(r)=\dfrac{q_0 r_2}{\lambda}\ln\dfrac{r}{r_1}$ — стационарное решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям (2) (предел, к которому стремится температура при $t\to+\infty$), а коэффициенты A_k находятся по формулам

$$A_k=\frac{\pi^2\lambda_k^2}{2}\cdot\frac{J_1^2(\lambda_k r_2)}{J_0^2(\lambda_k r_1)-J_1^2(\lambda_k r_2)}\int\limits_{r_1}^{r_2} rU(r)[J_0(\lambda_k r_1)N_0(\lambda_k r)-$$

$$-N_0(\lambda_k r_1)J_0(\lambda_k r)]\,dr, \tag{5}$$

λ_k — положительные корни уравнения

$$J_0(\lambda r_1)N_0'(\lambda r_2)-N_0(\lambda r_1)J_0'(\lambda r_2)=0. \tag{6}$$

37. Решением краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right\},\quad r_1<r<r_2,\quad 0<t<+\infty, \tag{1}$$

$$u_r(r_1,\,t)-h_1u(r_1,\,t)=0,\quad u_r(r_2,\,t)+h_2u(r_2,\,t)=0,\quad 0<t<+\infty, \tag{2}$$

$$u(r,\,0)=U_0,\quad r_1<r<r_2, \tag{3}$$

является

$$u(r,\,t)=\sum_{k=1}^{+\infty}A_k e^{-a^2\lambda_k^2 t}\big\{[\lambda_k J_0'(\lambda_k r_1)-h_1J_0(\lambda_k r_1)]N_0(\lambda_k r)-$$

$$-[\lambda_k N_0'(\lambda_k r_1)-h_1N_0(\lambda_k r_1)]J_0(\lambda_k r)\big\}, \tag{4}$$

где

$$A_k=\frac{\pi^2\lambda_k^2}{2}\times$$

$$\times\frac{[\lambda_k J_0'(\lambda_k r_2)+h_2J_0(\lambda_k r_2)]^2}{(h_2^2+\lambda_k^2)[\lambda_k J_0'(\lambda_k r_1)-h_1J_0(\lambda_k r_1)]^2-(h_1^2+\lambda_k^2)[\lambda_k J_0'(\lambda_k r_2)+h_2J_0(\lambda_k r_2)]^2}\times$$

$$\times U_0\frac{1}{\lambda_k}\big\{[\lambda_k J_0'(\lambda_k r_1)-h_1J_0(\lambda_k r_1)][r_2N_1(\lambda_k r_2)-r_1N_1(\lambda_k r_1)]-$$

$$-[\lambda_k N_0'(\lambda_k r_1)-h_1N_0(\lambda_k r_1)]\cdot[r_2J_1(\lambda_k r_2)-r_1J_1(\lambda_k r_1)]\big\},$$

λ_k — положительные корни уравнения

$$\begin{vmatrix}\lambda J_0'(\lambda r_1)-h_1J_0(\lambda r_1) & \lambda N_0'(\lambda r_1)-h_1N_0(\lambda r_1)\\ \lambda J_0'(\lambda r_2)+h_2J_0(\lambda r_2) & \lambda N_0'(\lambda r_2)+h_2N_0(\lambda r_2)\end{vmatrix}=0.$$

38. Решением краевой задачи

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu\left\{\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2}\right\}, \quad r_1 < r < r_2, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$v(r_1,\, t) = 0, \quad v(r_2,\, t) = \omega r_2, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$v(r,\, 0) = 0, \quad r_1 < r < r_2, \tag{3}$$

причем $v(r,\, t) = v_\varphi(r,\, t)$ [1]), является

$$v(r,\, t) = \frac{\omega r^2}{r}\,\frac{r^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \pi\omega r_2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{J_1(\lambda_k r_1) J_1(\lambda_k r_2) e^{-\nu\lambda_k^2 t}}{J_1^2(\lambda_k r_2) - J_1^2(\lambda_k r_1)}\, v_k(r), \tag{4}$$

$$v_k(r) = J_1(\lambda_k r_1) N_1(\lambda_k r) - N_1(\lambda_k r_1) J_1(\lambda_k r), \tag{5}$$

где λ_k — положительные корни уравнения

$$J_1(\lambda_k r_1) N_1(\lambda_2 r_2) - N_1(\lambda_k r_1) J_1(\lambda_k r_2) = 0. \tag{6}$$

39. $u(r,\, \varphi,\, t) = \sum\limits_{n,\,k=0}^{+\infty} J_n\Big(\frac{\mu_k^{(n)} r}{r_0}\Big)\,[A_{n,k}\cos n\varphi +$

$$+\, B_{n,\,k}\sin n\varphi]\exp\left\{-\frac{a^2 {\mu_k^{(n)}}^2}{r_0^2}\, t\right\}, \tag{1}$$

где

$$A_{n,\,k} = \frac{\varepsilon_n}{\pi r_0^2\left[J_n'(\mu_k^{(n)})\right]^2}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} f(r,\, \varphi) J_n\Big(\frac{\mu_k^{(n)} r}{r_0}\Big)\cos n\varphi\, r\, dr\, d\varphi, \tag{2}$$

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad n = 0, \\ 2 & \text{при} \quad n \neq 0, \end{cases} \tag{3}$$

$$B_{n,\,k} = \frac{2}{\pi r_0^2\left[J_n'(\mu_k^{(n)})\right]^2}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} f(r,\, \varphi) J_n\Big(\frac{\mu_k^{(n)} r}{r_0}\Big)\sin n\varphi\, r\, dr\, d\varphi, \tag{4}$$

$\mu_k^{(n)}$ — положительные корни уравнения

$$J_n(\mu) = 0. \tag{5}$$

40. $u(r,\, \varphi,\, t) = \sum\limits_{n,\,k=0}^{+\infty} J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)} r}{r_0}\right)\,[A_{n,k}\cos n\varphi +$

$$+\, B_{n,\,k}\sin n\varphi]\exp\left\{-\frac{a^2 {\mu_k^{(n)}}^2}{r_0^2}\, t\right\}, \tag{1}$$

$$A_{n,\,k} = \frac{\varepsilon_n}{\pi r_0^2 J_n^2(\mu_k^{(n)})\left[1 + \dfrac{r_0^2 h^2 - n^2}{{\mu_k^{(n)}}^2}\right]}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} f(r,\, \varphi) J_n\Big(\frac{\mu_k^{(n)} r}{r_0}\Big)\cos n\varphi r\, dr\, d\varphi, \tag{2}$$

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad n = 0, \\ 2 & \text{при} \quad n \neq 0, \end{cases} \tag{3}$$

[1]) См. указание к ответу задачи 7.

$$B_{n,k}=\frac{2}{\pi r_0^2 J^2(\mu_k^{(n)})\left[1+\dfrac{r_0^2h^2-n^2}{\mu_k^{(n)2}}\right]}\int\limits_0^{r_0}\int\limits_0^{2\pi} f(r,\varphi)J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right)\sin n\varphi r\,dr\,d\varphi, \tag{4}$$

$\mu_k^{(n)}$ — положительные корни уравнения

$$\mu J_n'(\mu)+r_0hJ_n(\mu)=0, \tag{5}$$

h — коэффициент теплообмена, входящий в граничное условие

$$\left[\frac{\partial u}{\partial r}+hu\right]_{r-r_0}=0,\quad 0<t<+\infty. \tag{6}$$

41. $$u(r,\varphi,t)=\sum_{n,k=0}^{+\infty} e^{-a^2\lambda_k^{(n)2}t}Z_n(\lambda_k^{(n)}r)\times$$
$$\times\{A_{n,k}\cos n\varphi+B_{n,k}\sin n\varphi\}, \tag{1}$$

$$Z_n(\lambda_k^{(n)}r)=J_n(\lambda_k^{(n)}r_1)N_n(\lambda_k^{(n)}r)-N_n(\lambda_k^{(n)}r_1)J_n(\lambda_k^{(n)}r), \tag{2}$$

где $\lambda_k^{(n)}$ — положительные корни уравнения

$$J_n(\lambda_k^{(n)}r_1)N_n(\lambda_k^{(n)}r_2)-N_n(\lambda_k^{(n)}r_1)J_n(\lambda_k^{(n)}r_2)=0, \tag{3}$$

$$A_{n,k}=\frac{\pi\lambda_k^{(n)2}}{2\varepsilon_n}\,\frac{J_n^2(\lambda_k^{(n)}r_2)}{J_n^2(\lambda_k^{(n)}r_1)-J_n^2(\lambda_k^{(n)}r_2)}\times$$
$$\times\int\limits_0^{r_0}\int\limits_0^{2\pi} f(r,\varphi)Z_n(\lambda_k^{(n)}r)\cos n\varphi r\,dr\,d\varphi, \tag{4}$$

$$\varepsilon_n=\begin{cases}2 & \text{при}\quad n=0,\\ 1 & \text{при}\quad n\neq 0,\end{cases} \tag{5}$$

$$B_{n,k}=\frac{\pi\lambda_k^{(n)2}}{2}\,\frac{J_n^2(\lambda_k^{(n)}r_2)}{J_n^2(\lambda_k^{(n)}r_1)-J_n^2(\lambda_k^{(n)}r_2)}\times$$
$$\times\int\limits_0^{r_0}\int\limits_0^{2\pi} f(r,\varphi)Z_n(\lambda_k^{(n)}r)\sin n\varphi r\,dr\,d\varphi. \tag{6}$$

Замечание. Если представить решение с помощью собственных функций

$$\widetilde{Z}_n(\lambda_k^{(n)}r)=J_n(\lambda_k^{(n)}r_2)N_n(\lambda_k^{(n)}r)-N_n(\lambda_k^{(n)}r_2)J_n(\lambda_k^{(n)}r)=$$
$$=\frac{J_n(\lambda_k^{(n)}r_2)}{J_n(\lambda_k^{(n)}r_1)}\,Z_n(\lambda_k^{(n)}r) \tag{7}$$

(эта связь между $\widetilde{Z}_n$ и Z_n устанавливается с помощью (3)), то

$$u(r,\varphi,t)=\sum_{n,k=0}^{+\infty} e^{-a^2\lambda_k^{(n)2}t}\,\widetilde{Z}_n(\lambda_k^{(n)}r)\{\widetilde{A}_{n,k}\cos n\varphi+\widetilde{B}_{n,k}\sin n\varphi\}. \tag{8}$$

Формулы для $\widetilde{A}_{n,\,k}$ и $\widetilde{B}_{n,\,k}$ получаются из формул (4) и (6), если дробь $\dfrac{J_n^2(\lambda_k^{(n)}r_2)}{J_n^2(\lambda_k^{(n)}r_1)-J_n^2(\lambda_k^{(n)}r_2)}$ заменить дробью

$$\frac{J_n^2(\lambda_k^{(n)}r_1)}{J_n^2(\lambda_k^{(n)}r_1)-J_n^2(\lambda_k^{(n)}r_2)}.$$

42. Решением краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right\},\quad r_1<r<r_2,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,$$

$$0<t<+\infty, \tag{1}$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial r}-h_1u\right]_{r=r_1}=0,\quad \left[\frac{\partial u}{\partial r}+h_2u\right]_{r=r_2}=0,\quad 0<t<+\infty, \tag{2}$$

$$u\big|_{t=0}=f(r,\,\varphi),\quad r_1<r<r_2,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, \tag{3}$$

является

$$u(r,\,\varphi,\,t)=\sum_{n,\,k=0}^{+\infty}e^{-a^2\lambda_k^{(n)^2}t}\,Z_n(\lambda_k^{(n)}r)\{A_{n,\,k}\cos n\varphi+B_{n,\,k}\sin n\varphi\}, \tag{4}$$

где

$$Z_n(\lambda_k^{(n)}r)=\left[\lambda_k^{(n)}J_n'(\lambda_k^{(n)}r_1)-h_1J_n(\lambda_k^{(n)}r_1)\right]N_n(\lambda_k^{(n)}r)-$$
$$-\left[\lambda_k^{(n)}N_n'(\lambda_k^{(n)}r_1)-h_1N_n(\lambda_k^{(n)}r_1)\right]J_n(\lambda_k^{(n)}r), \tag{5}$$

где $\lambda_k^{(n)}$ — положительные корни уравнения

$$\begin{vmatrix}\lambda_k^{(n)}J_n'(\lambda_k^{(n)}r_1)-h_1J_n(\lambda_k^{(n)}r_1) & \lambda_k^{(n)}N_n'(\lambda_k^{(n)}r_1)-h_1N_n(\lambda_k^{(n)}r_1)\\ \lambda_k^{(n)}J_n'(\lambda_k^{(n)}r_2)+h_2J_n(\lambda_k^{(n)}r_2) & \lambda_k^{(n)}N_n'(\lambda_k^{(n)}r_2)+h_2N_n(\lambda_k^{(n)}r_2)\end{vmatrix}=0, \tag{6}$$

$$A_{n,\,k}=\frac{2\lambda_k^{(n)^2}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}f(r,\,\varphi)Z_n(\lambda_k^{(n)}r)\cos n\varphi r\,dr\,d\varphi}{\pi\varepsilon_n\left[h_2^2r_2^2+\lambda_k^{(n)^2}r_2^2-n^2\right]Z_n^2(\lambda_k^{(n)}r_2)-\left[h_1^2r_1^2+\lambda_k^{(n)^2}r_1^2-n^2\right]Z_n^2(\lambda_k^{(n)}r_1)}, \tag{7}$$

$$\varepsilon_n=\begin{cases}2 & \text{при}\quad n=0,\\ 1 & \text{при}\quad n\neq 0,\end{cases} \tag{8}$$

$$B_{n,\,k}=\frac{2\lambda_k^{(n)^2}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}f(r,\,\varphi)Z_n(\lambda_k^{(n)}r)\sin n\varphi r\,dr\,d\varphi}{\pi\left[h_2^2r_2^2+\lambda_k^{(n)^2}r_2^2-n^2\right]Z_n^2(\lambda_k^{(n)}r_2)-\left[h_1^2r_1^2+\lambda_k^{(n)^2}r_1^2-n^2\right]Z_n^2(\lambda_k^{(n)}r_1)}. \tag{9}$$

Замечание. Можно представить решение с помощью собственных функций

$$\widetilde{Z}_n(\lambda_k^{(n)}r) = \left[\lambda_k^{(n)}J_n'(\lambda_k^{(n)}r_2) + h_2J_n(\lambda_k^{(n)}r_2)\right]N_n(\lambda_k^{(n)}r) - \\ - \left[\lambda_k^{(n)}N_n'(\lambda_k^{(n)}r_2) + h_2N_n(\lambda_k^{(n)}r_2)\right]J_n(\lambda_k^{(n)}r), \quad (10)$$

связанных с функциями $Z_n(\lambda_k^{(n)}r)$ соотношениями

$$\widetilde{Z}_n(\lambda_k^{(n)}r) = \frac{\lambda_k^{(n)}J_n'(\lambda_k^{(n)}r_2) + h_2J_n(\lambda_k^{(n)}r_2)}{\lambda_k^{(n)}J_n'(\lambda_k^{(n)}r_1) - h_1J_n(\lambda_k^{(n)}r_1)} \cdot Z_n(\lambda_k^{(n)}r), \quad (11)$$

$$u(r,\,\varphi,\,t) = \sum_{n,\,k=0}^{+\infty} e^{-a^2{\lambda_k^{(n)}}^2t}\,\widetilde{Z}_n(\lambda_k^{(n)}r)\{\widetilde{A}_{n,\,k}\cos n\varphi + \widetilde{B}_{n,\,k}\sin n\varphi\}. \quad (12)$$

Формулы для $\widetilde{A}_{n,\,k}$ и $\widetilde{B}_{n,\,k}$ получаются из формул (7) и (9) заменой Z_n на $\widetilde{Z}_n$.

43. $$u(r,\,\varphi,\,t) = \sum_{n,\,k=1}^{+\infty} A_{n,\,k}e^{-a^2{\lambda_k^{(n)}}^2t}\,J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r)\sin\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}, \quad (1)$$

где $\lambda_k^{(n)}$ — положительные корни уравнения

$$J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r_0) = 0, \quad (2)$$

$$A_{n,\,k} = \frac{4}{r_0^2\varphi_0\left[J'_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r_0)\right]^2}\int_0^{r_0}\int_0^{\varphi_0} f(r,\,\varphi)J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r)\sin\frac{\pi n\varphi}{\varphi_0}\,r\,dr\,d\varphi. \quad (3)$$

44. $$u(r,\,\varphi,\,t) = \sum_{n,\,k=0}^{+\infty} A_{n,\,k}e^{-a^2{\lambda_k^{(n)}}^2t}\,J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r)\cos\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}, \quad (1)$$

где $\lambda_k^{(n)}$ — положительные корни уравнения

$$\lambda_k^{(n)}J'_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r_0) + r_0hJ_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r_0) = 0, \quad (2)$$

$$A_{n,\,k} = \frac{4{\lambda_k^{(n)}}^2}{\varphi_0r_0^2\left({\lambda_k^{(n)}}^2 + h^2 - \dfrac{n^2\pi^2}{\varphi_0^2r_0^2}\right)J^2_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r_0)} \times \\ \times\int_0^{r_0}\int_0^{\varphi_0} f(r,\,\varphi)J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r)\cos\frac{\pi n\varphi}{\varphi_0}\,r\,dr\,d\varphi. \quad (3)$$

45. $$u(r,\,\varphi,\,t) = \sum_{n,\,k=1}^{+\infty} A_{n,\,k}e^{-a^2{\lambda_k^{(n)}}^2t}\,Z_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r)\sin\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}, \quad (1)$$

$$Z_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r) = J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r_1)N_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r) - N_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r_1)J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r), \quad (2)$$

$\lambda_k^{(n)}$ — положительные корни уравнения

$$J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)} r_1) N_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)} r_2) - N_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)} r_1) J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)} r_2) = 0, \tag{3}$$

$$A_{n,\,k} = \frac{\pi^2 \lambda_k^{(n)^2}}{\varphi_0} \frac{J^2_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)} r_2)}{J^2_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)} r_1) - J^2_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)} r_2)} \times$$

$$\times \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{\varphi_0} f(r,\,\varphi) Z_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)} r) \sin \frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\, r\, dr\, d\varphi. \tag{4}$$

46. Решением краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right\}, \quad r_1 < r < r_2, \quad 0 < \varphi < \varphi_0, \tag{1}$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial r} - h_1 u\right]_{r=r_1} = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial r} + h_2 u\right]_{r=r_2} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0} = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u\big|_{t=0} = f(r,\,\varphi), \quad r_1 < r < r_2, \quad 0 < \varphi < \varphi_0, \tag{3}$$

является

$$u(r,\,\varphi,\,t) = \sum_{n,\,k=0}^{+\infty} A_{n,\,k} e^{-a^2 \lambda_k^{(n)^2} t} Z_n(\lambda_k^{(n)} r) \cos \frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}, \tag{1'}$$

где

$$Z_n(\lambda_k^{(n)} r) = \left[\lambda_k^{(n)} J'_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)} r_1) - h_1 J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)} r_1)\right] N_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)} r) -$$

$$- \left[\lambda_k^{(n)} N'_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)} r_1) - h_1 N_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)} r_1)\right] J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)} r), \tag{2'}$$

$\lambda_k^{(n)}$ — положительные корни уравнения

$$\begin{vmatrix} \lambda_k^{(n)} J'_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)} r_1) - h_1 J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)} r_1) \lambda_k^{(n)} & N'_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)} r_1) - h_1 N_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)} r_1) \\ \lambda_k^{(n)} J'_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)} r_2) + h_2 J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)} r_2) \lambda_k^{(n)} & N'_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)} r_2) + h_2 N_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)} r_2) \end{vmatrix} = 0, \tag{3'}$$

$$A_{n,\,k} = \frac{4\lambda_k^{(n)^2}}{\varphi_0} \times$$

$$\times \frac{\int_0^{\varphi_0} \int_0^{r_0} f(r,\,\varphi) Z_n(\lambda_k^{(n)} r) \cos \frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\, r\, dr\, d\varphi}{\left[h_2^2 r_2^2 + \lambda_k^{(n)^2} r_2^2 - \frac{n^2\pi^2}{\varphi_0^2}\right] Z_n^2(\lambda_k^{(n)} r_2) - \left[h_1^2 r_1^2 + \lambda_k^{(n)^2} r_1^2 - \frac{n^2\pi^2}{\varphi_0^2}\right] Z_n^2(\lambda_k^{(n)} r_1)}. \tag{4}$$

47. $$u(r,\varphi,z,t)=\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n,k=0}^{+\infty}\exp\left\{-a^2\left(\frac{\mu_k^{(n)^2}}{r_0^2}+\frac{m^2\pi^2}{l^2}\right)t\right\}\times$$

$$\times J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right)[A_{k,m,n}\cos\varphi+B_{k,m,n}\sin n\varphi]\sin\frac{m\pi z}{l}, \quad (1)$$

$$A_{k,m,n}=\frac{4\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{l}rf(r,\varphi,z)J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right)\cos n\varphi\sin\frac{m\pi z}{l}\,dr\,d\varphi\,dz}{\varepsilon_n\pi r_0^2 l\left[J_n'(\mu_k^{(n)})\right]^2}, \quad (2)$$

где $\mu_k^{(n)}$ — положительные корни уравнения

$$J_n(\mu_k^{(n)})=0; \quad (3)$$

$$\varepsilon_n=\begin{cases}2 & \text{при} \quad n=0,\\ 1 & \text{при} \quad n\neq 0,\end{cases}$$

$$B_{k,m,n}=\frac{4\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{l}rf(r,\varphi,z)J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right)\sin n\varphi\sin\frac{m\pi z}{l}\,dr\,d\varphi\,dz}{\pi r_0^2 l\left[J_n'(\mu_k^{(n)})\right]^2}. \quad (4)$$

48. Решением краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right\},$$

$$0\leqslant r<r_0, \quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, \quad 0<z<l, \quad 0<t<+\infty, \quad (1)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial z}-h_1u\right]_{z=0}=0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial z}+h_2u\right]_{z=l}=0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial r}+h_3u\right]_{r=r_0}=0,$$

$$0<t<+\infty, \quad (2)$$

$$u\big|_{t=0}=f(r,\varphi,z), \quad 0\leqslant r<r_0, \quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, \quad 0<z<l, \quad (3)$$

является

$$u(r,\varphi,z,t)=\sum_{k,m,n=0}^{+\infty}\exp\left\{-a^2\left(\frac{\mu_k^{(n)^2}}{r_0^2}+\nu_m^2\right)t\right\}J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right)\times$$

$$\times\{A_{k,m,n}\cos n\varphi+B_{k,m,n}\sin n\varphi\}\sin(\nu_m z+z_m), \quad (4)$$

где $\mu_k^{(n)}$ — положительные корни уравнения

$$\mu_k^{(n)}J_n'(\mu_k^{(n)})+r_0h_3J_n(\mu_k^{(n)})=0, \quad (5)$$

ν_m — положительные корни уравнения

$$\operatorname{ctg}\nu_m l=\frac{\nu_m^2-h_1h_2}{\nu_m(h_1+h_2)}, \quad (6)$$

$$z_m=\operatorname{arctg}\frac{\nu_m}{h_3}, \quad (7)$$

$$A_{k,m,n}=\frac{4\int\limits_0^{r_0}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{l} rf(r,\varphi,z)J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right)\cos n\varphi\sin(\nu_m z+z_m)dr\,d\varphi\,dz}{\pi r_0^2\varepsilon_n\left[l+\frac{(h_1h_2+\nu_m^2)(h_1+h_2)}{(h_1^2+\nu_m^2)(h_2^2+\nu_m^2)}\right]J_n^2(\mu_k^{(n)})\left[1+\frac{r_0^2h^2-n^2}{\mu_k^{(n)2}}\right]},\quad(8)$$

$$\varepsilon_n=\begin{cases}2 & \text{при}\quad n=0,\\ 1 & \text{при}\quad n\neq 0,\end{cases}$$

$$B_{k,m,n}=\frac{4\int\limits_0^{r_0}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{l} rf(r,\varphi,z)J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right)\sin n\varphi\sin(\nu_m z+z_m)dr\,d\varphi\,dz}{\pi r_0^2\left[l+\frac{(h_1h_2+\nu_m^2)(h_1+h_2)}{(h_1^2+\nu_m^2)(h_2^2+\nu_m^2)}\right]J_n^2(\mu_k^{(n)})\left[1+\frac{r_0^2h^2-n^2}{\mu_k^{(n)2}}\right]}.\quad(9)$$

49. Решением краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left\{\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}\right\},\quad(1)$$

$$u\big|_{r=r_0}=0,\quad(2)$$

$$u\big|_{t=0}=f(r,\theta,\varphi)\quad(3)$$

является

$$u(r,\theta,\varphi,t)=\sum_{m,n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\exp\left\{-\left(\frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0}\right)^2t\right\}\frac{J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{r_0}\right)}{\sqrt{r}}\times$$
$$\times P_{n,k}(\cos\theta)\{A_{m,n,k}\cos k\varphi+B_{m,n,k}\sin k\varphi\},\quad(4)$$

где $\mu_m^{(n)}$ — положительные корни уравнения

$$J_{n+1/2}(\mu_m^{(n)})=0,\quad(5)$$

$$A_{m,n,k}=$$
$$=\frac{\int\limits_0^{r_0}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(r,\theta,\varphi)r^{3/2}J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{r_0}\right)\sin\theta P_{n,k}(\cos\theta)\cos k\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi}{\varepsilon_k\frac{\pi r_0^2(n+k)!}{(2n+1)(n-k)!}\left[J'_{n+1/2}(\mu_m^{(n)})\right]^2},\quad(6)$$

$$\varepsilon_n=\begin{cases}2 & \text{при}\quad k=0,\\ 1 & \text{при}\quad k\neq 0,\end{cases}$$

$$B_{m,n,k}=$$
$$=\frac{\int\limits_0^{r_0}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(r,\theta,\varphi)r^{3/2}J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{r_0}\right)\sin\theta P_{n,k}(\cos\theta)\sin k\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi}{\frac{\pi r_0^2(n+k)!}{(2n+1)(n-k)!}\left[J'_{n+1/2}(\mu_m^{(n)})\right]^2},\quad(7)$$

50. Решением краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right\}, \quad (1)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial r} + hu\right]_{r=r_0} = 0, \quad (2)$$

$$u\big|_{t=0} = f(r, \theta, \varphi), \quad (3)$$

является

$$u(r, \theta, \varphi, t) = \sum_{m,n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \exp\left\{ -\left(\frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0}\right)^2 t \right\} \frac{J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_m^{(n)} r}{r_0}\right)}{\sqrt{r}} \times$$
$$\times P_{n,k}(\cos\theta)\{A_{m,n,k}\cos k\varphi + B_{m,n,k}\sin k\varphi\}, \quad (4)$$

где $\mu_m^{(n)}$ — положительные корни уравнения

$$\mu_m^{(n)} J'_{n+1/2}(\mu_m^{(n)}) + \left(r_0 h - \frac{1}{2}\right) J_{n+1/2}(\mu_m^{(n)}) = 0, \quad (5)$$

$A_{m,n,k} =$

$$= \frac{\int_0^{r_0}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(r, \theta, \varphi) r^{3/2} J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_m^{(n)} r}{r_0}\right) \sin\theta P_{n,k}(\cos\theta)\cos k\varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi}{\varepsilon_k \frac{\pi r_0^2 (n+k)!}{(2n+1)(n-k)!}\left[1 + \frac{(r_0 h + n)(r_0 h - n - 1)}{(\mu_m^{(n)})^2}\right] J^2_{n+1/2}(\mu_m^{(n)})}. \quad (6)$$

$$\varepsilon_k = \begin{cases} 2 & \text{при} \quad k = 0, \\ 1 & \text{при} \quad k \neq 0, \end{cases} \quad (7)$$

$B_{m,n,k} =$

$$= \frac{\int_0^{r_0}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(r, \theta, \varphi) r^{3/2} J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_m^{(n)} r}{r_0}\right) \sin\theta P_{n,k}(\cos\theta)\sin k\varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi}{\frac{\pi r_0^2 (n+k)!}{(2n+1)(n-k)!}\left[1 + \frac{(r_0 h + n)(r_0 h - n - 1)}{(\mu_m^{(n)})^2}\right] J^2_{n+1/2}(\mu_m^{(n)})}. \quad (8)$$

51. $u(r, \theta, \varphi, t) = \sum_{m,n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} e^{-a^2 \lambda_m^{(n)2} t} \frac{Z_{n+1/2}(\lambda_m^{(n)} r)}{\sqrt{r}} P_{n,k}(\cos\theta) \times$
$$\times \{A_{m,n,k}\cos k\varphi + B_{m,n,k}\sin k\varphi\}, \quad (1)$$

где

$$Z_{n+1/2}(\lambda_m^{(n)} r) = J_{n+1/2}(\lambda_m^{(n)} r_1) N_{n+1/2}(\lambda_m^{(n)} r) -$$
$$- N_{n+1/2}(\lambda_m^{(n)} r_1) J_{n+1/2}(\lambda_m^{(n)} r), \quad (2)$$

$\lambda_m^{(n)}$ — положительные корни уравнения

$$Z_{n+1/2}(\lambda_m^{(n)} r_2) = 0, \quad (3)$$

$$A_{m,n,k} = \int_{r_1}^{r_2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\theta,\varphi) r^{3/2} Z_{n+1/2}(\lambda_m^{(n)} r) \sin\theta P_{n,k}(\cos\theta) \cos k\varphi \, dr\, d\theta\, d\varphi$$
$$= \frac{\int_{r_1}^{r_2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\theta,\varphi) r^{3/2} Z_{n+1/2}(\lambda_m^{(n)} r) \sin\theta P_{n,k}(\cos\theta) \cos k\varphi \, dr\, d\theta\, d\varphi}{\varepsilon_k \dfrac{4\pi(n+k)!}{(2n+1)(n-k)!\,\pi^2 \lambda_m^{(n)^2}} \dfrac{J_{n+1/2}^2(\lambda_m^{(n)} r_1) - J_{n+1/2}^2(\lambda_m^{(n)} r_2)}{J_{n+1/2}^2(\lambda_m^{(n)} r_2)}}, \quad (4)$$

$$\varepsilon_k = \begin{cases} 2 & \text{при} \quad k = 0, \\ 1 & \text{при} \quad k \neq 0, \end{cases} \quad (5)$$

$$B_{m,n,k} = \int_{r_1}^{r_2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\theta,\varphi) r^{3/2} Z_{n+1/2}(\lambda_m^{(n)} r) \sin\theta P_{n,k}(\cos\theta) \sin k\varphi \, dr\, d\theta\, d\varphi$$
$$= \frac{\int_{r_1}^{r_2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\theta,\varphi) r^{3/2} Z_{n+1/2}(\lambda_m^{(n)} r) \sin\theta P_{n,k}(\cos\theta) \sin k\varphi \, dr\, d\theta\, d\varphi}{\dfrac{4\pi(n+k)!}{(2n+1)(n-k)!\,\pi^2 \lambda_m^{(n)^2}} \dfrac{J_{n+1/2}^2(\lambda_m^{(n)} r_1) - J_{n+1/2}^2(\lambda_m^{(n)} r_2)}{J_{n+1/2}^2(\lambda_m^{(n)} r_2)}}. \quad (6)$$

52. Решением краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} \right\},$$
$$r_1 < r < r_2, \quad (1)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial r} - h_1 u\right]_{r=r_1} = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial r} + h_2 u\right]_{r=r_2} = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u\big|_{t=0} = f(r,\theta,\varphi), \quad r_1 < r < r_2, \quad (3)$$

является

$$u(r,\theta,\varphi,t) = \sum_{m,n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-a^2\lambda_m^{(n)^2} t} \frac{Z_{n+1/2}(\lambda_m^{(n)} r)}{\sqrt{r}} P_{n,k}(\cos\theta) \times$$
$$\times \{A_{m,n,k}\cos k\varphi + B_{m,n,k}\sin k\varphi\}, \quad (1')$$

$$Z_{n+1/2}(\lambda_m^{(n)} r) =$$
$$= \left[\lambda_m^{(n)} J'_{n+1/2}(\lambda_m^{(n)} r_1) - \left(h_1 + \frac{1}{2r_1}\right) J_{n+1/2}(\lambda_m^{(n)} r_1)\right] N_{n+1/2}(\lambda_m^{(n)} r) -$$
$$- \left[\lambda_m^{(n)} N'_{n+1/2}(\lambda_m^{(n)} r_1) - \left(h_1 + \frac{1}{2r_1}\right) N_{n+1/2}(\lambda_m^{(n)} r_1)\right] J_{n+1/2}(\lambda_m^{(n)} r), \quad (2')$$

$$A_{m,n,k} = \int_{r_1}^{r_2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\theta,\varphi) r^{3/2} Z_{n+1/2}(\lambda_m^{(n)} r) \sin\theta P_{n,k}(\cos\theta) \cos k\varphi \, dr\, d\theta\, d\varphi$$
$$= \frac{\int_{r_1}^{r_2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\theta,\varphi) r^{3/2} Z_{n+1/2}(\lambda_m^{(n)} r) \sin\theta P_{n,k}(\cos\theta) \cos k\varphi \, dr\, d\theta\, d\varphi}{\varepsilon_k \dfrac{2\pi}{2n+1} \cdot \dfrac{(n+k)!}{(n-k)!} \int_{r_1}^{r_2} r Z_{n+1/2}^2(\lambda_m^{(n)} r)\, dr}, \quad (3')$$

$$\varepsilon_k = \begin{cases} 2 & \text{при} \quad k = 0, \\ 1 & \text{при} \quad k \neq 0, \end{cases}$$

$$B_{m,\,n,\,k} = \frac{\int\limits_0^{r_0}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(r,\,\theta,\,\varphi) r^{3/2} Z_{n+1/2}(\lambda_m^{(n)} r) \sin\theta P_{n,\,k}(\cos\theta) \sin k\varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi}{\dfrac{2\pi}{2n+1} \cdot \dfrac{(n+k)!}{(n-k)!} \int\limits_{r_1}^{r_2} r Z_{n+1/2}^2(\lambda_m^{(n)} r) \, dr}, \quad (4)$$

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} r Z_{n+1/2}^2(\lambda_m^{(n)} r) \, dr =$$

$$= \frac{2}{\pi^2 (\lambda_m^{(n)})^2 \left[\lambda_m^{(n)} J'_{n+1/2}(\lambda_m^{(n)} r_2) + \left(h_2 - \dfrac{1}{2r_2}\right) J_{n+1/2}(\lambda_m^{(n)} r_2)\right]^2} \times$$

$$\times \left\{ \left[\left(h_2 - \frac{1}{2r_2}\right)^2 + (\lambda_m^{(n)})^2 - \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{r_2^2} \right] \times \right.$$

$$\times \left[\lambda_m^{(n)} J'_{n+1/2}(\lambda_m^{(n)} r_1) - \left(h_1 + \frac{1}{2r_1}\right) J_{n+1/2}(\lambda_m^{(n)} r_1)\right] -$$

$$- \left[\left(h_1 + \frac{1}{2r_1}\right)^2 + (\lambda_m^{(n)})^2 - \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{r_1^2} \right] \times$$

$$\left. \times \left[\lambda_m^{(n)} J'_{n+1/2}(\lambda_m^{(n)} r_2) - \left(h_2 - \frac{1}{2r_2}\right) J_{n+1/2}(\lambda_m^{(n)} r_2)\right] \right\},$$

где $\lambda_m^{(n)}$ — положительные корни уравнения

$$\lambda_m^{(n)} Z_{n+1/2}(\lambda_m^{(n)} r_2) + \left(h_2 - \frac{1}{2r_2}\right) Z_{n+1/2}(\lambda_m^{(n)} r_2) = 0. \quad (6)$$

б) Неоднородные среды; сосредоточенные факторы.

53. Решением краевой задачи

$$\left.\begin{aligned} c_1\rho_1 \frac{\partial u}{\partial t} &= k_1 \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\}, \\ & \qquad 0 \leqslant r < r_0, \\ c_2\rho_2 \frac{\partial u}{\partial t} &= k_2 \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\}, \\ & \qquad r_0 < r < r_1, \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad (1) \\ &0 < z < l, \\ &0 < t < +\infty, \quad (1') \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} u(r_0 - 0,\, \varphi,\, z,\, t) &= u(r_0 + 0,\, \varphi,\, z,\, t), \\ k_1 u_r(r_0 - 0,\, \varphi,\, z,\, t) &= k_2 u_r(r_0 + 0,\, \varphi,\, z,\, t), \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad (2) \\ &0 < z < l, \\ &0 < l < +\infty, \quad (2') \end{aligned}$$

$$u(r_1,\,\varphi,\,z,\,t)=0, \tag{2''}$$

$$u(r,\,\varphi,\,z,\,0)=f(r,\,\varphi,\,z) \tag{3}$$

является

$$u(r,\,\varphi,\,z,\,t)=\sum_{m,\,n,\,p=0}^{+\infty} R_{m,\,n,\,p}(r)e^{-\lambda^2_{m,\,n,\,p}t}\times$$
$$\times\{A_{m,\,n,\,p}\cos n\varphi+B_{m,\,n,\,p}\sin n\varphi\}\sin\frac{m\pi z}{l}, \tag{4}$$

где $\lambda_{m,\,n,\,p}$ — корни трансцендентного уравнения

$$\begin{vmatrix} J_n(\overline{\omega}r_0) & -N_n(\overline{\overline{\omega}}r_0) & -J_n(\overline{\overline{\omega}}r_0)\\ k_1\overline{\omega}J_n'(\overline{\omega}r_0) & k_2\overline{\overline{\omega}}N_n'(\overline{\overline{\omega}}r_0) & k_2\overline{\overline{\omega}}J_n'(\overline{\overline{\omega}}r_0)\\ 0 & N_n(\overline{\overline{\omega}}r_1) & J_n(\overline{\overline{\omega}}r_1)\end{vmatrix}=0, \tag{5}$$

$$\overline{\omega}=\sqrt{\frac{c_1p_1}{k_1}\,\lambda^2-\frac{m^2\pi^2}{l^2}},\quad \overline{\overline{\omega}}=\sqrt{\frac{c_2\rho_2}{k_2}\,\lambda^2-\frac{m^2\pi^2}{l^2}}, \tag{6}$$

$$R_{m,\,n,\,p}(r)=\begin{cases}[J_n(\overline{\overline{\omega}}_{mnp}r_0)N_n(\overline{\overline{\omega}}_{mnp}r_1)-\\ \quad -N_n(\overline{\overline{\omega}}_{mnp}r_0)J_n(\overline{\overline{\omega}}_{mnp}r_1)]J_n(\overline{\omega}_{mnp}r), & 0\leqslant r\leqslant r_0,\\ [J_n(\overline{\overline{\omega}}_{mnp}r)N_n(\overline{\overline{\omega}}_{mnp}r_1)-\\ \quad -N_n(\overline{\overline{\omega}}_{mnp}r)J_n(\overline{\overline{\omega}}_{mnp}r_1)]J_n(\overline{\omega}_{mnp}r_0), & r_0\leqslant r\leqslant r_1,\end{cases} \tag{7}$$

$$A_{mnp}=\frac{\int\limits_0^{r_1}r\mu\,dr\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{l}f(r,\,\varphi,\,z)R_{mnp}(r)\cos n\varphi\sin\dfrac{m\pi z}{l}\,dz}{\varepsilon_n\dfrac{\pi l}{2}\displaystyle\int\limits_0^{r_1}r\mu R^2_{mnp}(r)\,dr},$$

$$\varepsilon_n=\begin{cases}1, & n\neq 0,\\ 2, & n=0,\end{cases} \tag{8}$$

$$B_{mnp}=\frac{\int\limits_0^{r_1}r\mu\,dr\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{l}f(r,\,\varphi,\,z)R_{mnp}(r)\sin n\varphi\sin\dfrac{m\pi z}{l}\,dz}{\dfrac{\pi l}{2}\displaystyle\int\limits_0^{r_1}r\mu R^2_{mnp}(r)\,dr}, \tag{9}$$

$$\mu=\begin{cases}c_1\rho_1 & \text{при}\quad 0\leqslant r<r_0,\\ c_2\rho_2 & \text{при}\quad r_0<r<r_1.\end{cases} \tag{10}$$

Функции $R_{mnp_1}(r)$ и $R_{mnp_2}(r)$ при различных p_1 и p_2 ортогональны на отрезке $0\leqslant r\leqslant r_1$ с весом $r\mu$.

54. Решением краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \right\}, \quad r_1 < r < r_2, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$\pi r_1^2 c^* \rho^* \frac{dU}{dt} = 2\pi r_1 \lambda \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_1}, \quad U(t) = \left.u\right|_{r=r_1}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_2} = 0,$$

$$0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(r, 0) = f(r), \quad r_1 < r < r_2, \tag{3}$$

где λ — теплопроводность материала трубы, c^* и ρ^* — удельная теплоемкость и плотность массы жидкости, является

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} Z_0(\lambda_n r), \tag{4}$$

где

$$Z_0(\lambda_n r) = J_0'(\lambda_n r_2) N_0(\lambda_n r) - N_0'(\lambda_n r_2) J_0(\lambda_n r), \tag{5}$$

λ_n — корни трансцендентного уравнения

$$Z_0'(\lambda_n r_1) = -\lambda_n \frac{a^2 r_1 c^* \rho^*}{2\lambda} Z_0(\lambda_n r_1), \tag{6}$$

$$A_n = \frac{\int_{r_1}^{r_2} r f(r) Z_0(\lambda_n r)\, dr - \dfrac{a^2 r_1^2 c^* \rho^*}{2\lambda} f(r_1) Z_0(\lambda_n r_1)}{\int_{r_1}^{r_2} r [Z_0(\lambda_n r)]^2\, dr - \dfrac{a^2 r_1^2 c^* \rho^*}{2\lambda} [Z_0(\lambda_n r_1)]^2} \text{ [1]}. \tag{7}$$

55. Решением краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \right\}, \quad r_1 < r < r_2, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$\pi r_1^2 c^* \rho^* \frac{dU}{dt} = 2\pi r_1 \lambda \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_1}, \quad U(t) = \left.u\right|_{r=r_1}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_2} = -h\left.u\right|_{r=r_2},$$

$$0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(r, 0) = f(r), \quad r_1 < r < r_2, \tag{3}$$

получается из решения предыдущей задачи, если положить

$$Z_0(\lambda_k r) = [\lambda_k J_0'(\lambda_k r_2) + h J_0(\lambda_k r_2)] N_0(\lambda_k r) -$$

$$- [\lambda_k N_0'(\lambda_k r_2) + h N_0(\lambda_k r_2)] J_0(\lambda_k r). \tag{4}$$

56. Для определения скорости $v(r, t)$ частиц жидкости [2] и угловой скорости $\omega(t)$ цилиндра получаем краевую задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right\}, \quad r_1 < r < r_2, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

[1] См. (21) и (27) в задаче 57.

[2] $v(r, t) = v_\varphi(r, t)$ (см. решение задачи 7).

$$v\big|_{r=r_1} = r_1\omega(t), \quad v\big|_{r=r_2} = 0, \quad K\frac{d\omega}{dt} = M + 2\pi r_1^2\rho\nu\left[\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right]_{r=r_1},$$

$$0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$v(r,\,0) = 0, \quad r_1 < r < r_2. \tag{3}$$

Исключая $\omega(t)$ из граничных условий (2), получим

$$\frac{1}{r_1}K\frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{r=r_1} = M + 2\pi r_1^2\rho\nu\left[\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right]_{r=r_1}, \quad v\big|_{r=r_2} = 0, \quad 0 < t < +\infty. \tag{2'}$$

Ищем стационарное частное решение уравнения (1)

$$V = V(r), \tag{4}$$

удовлетворяющее неоднородным граничным условиям (2′) [1]. Если затем положить

$$v(r,\,t) = u(r,\,t) + V(r), \tag{5}$$

то для $u(r,\,t)$ получаем краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2}\right\}, \quad r_1 < r < r_2, \quad 0 < t < +\infty, \tag{6}$$

$$K\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{r=r_1} = 2\pi r_1^2\rho\nu\left[\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right]_{r=r_1}, \quad u\big|_{r=r_2} = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{7}$$

$$u(r,\,0) = -V(r), \quad r_1 < r < r_2. \tag{8}$$

Решив краевую задачу (6), (7), (8) и определив с помощью (5) $v(r,\,t)$, из граничного условия $v\big|_{r=r_1} = k_1\omega(t)$ найдем также $\omega(t)$.

Решение краевой задачи (6), (7), (8) может быть выполнено аналогично тому, как решалась предыдущая задача. Частные решения уравнения (6), удовлетворяющие граничным условиям (7), ищем в виде

$$U_k(r,\,t) = e^{-\nu\lambda_k^2 t}R_k(r). \tag{9}$$

Для $R_k(r)$ получаем уравнение

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(\lambda_k^2 - \frac{1}{r^2}\right)R = 0, \tag{10}$$

$R_k(r) = Z_1(\lambda_k r)$, где $Z_1(z)$ — общее решение уравнения цилиндрических функций первого порядка, в котором неопределенные константы выбраны так, чтобы граничное условие $R_k(r_2) = 0$ выполнялось при любых λ_k:

$$Z_1(\lambda_k r) = N_1(\lambda_k r_2)J_1(\lambda_k r) - J_1(\lambda_k r_2)N_1(\lambda_k r). \tag{11}$$

Требуя выполнения первого из граничных условий (7), получим уравнение для определения собственных значений

$$-\lambda_k^2 K Z_1(\lambda_k r_1) = 2\pi r_1^2\rho\nu\left[\lambda_k Z_1'(\lambda_k r_1) - \frac{Z_1(\lambda_k r_1)}{r_1}\right]. \tag{12}$$

[1] $V(r)$ — предел, к которому стремится скорость частиц жидкости при $t \to +\infty$.

С помощью соотношения (14) задачи 34 и равенства (12) находим соотношение, выражающее обобщенную ортогональность собственных функций $Z_1(\lambda_k r)$,

$$\int_{r_1}^{r_2} rZ_1(\lambda_k r)Z_1(\lambda_n r)dr + \frac{K}{2\pi r_1 \rho\nu} Z_1(\lambda_k r_1)Z_1(\lambda_n r_1) = 0 \ ^{1)} \qquad (13)$$

при $k \neq n$

$$u(r,\, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n e^{-a^2\lambda_n^2 t} Z_1(\lambda_n r), \qquad (14)$$

где

$$A_n = -\frac{\displaystyle\int_{r_1}^{r_2} rV(r)Z_1(\lambda_n r)\, dr + \frac{K}{2\pi r_1\rho\nu} V(r_1)Z_1(\lambda_n r_1)}{\displaystyle\int_{r_1}^{r_2} r[Z_1(\lambda_n r)]^2\, dr + \frac{K}{2\pi r_1\rho\nu}[Z_1(\lambda_n r_1)]^2}. \qquad (15)$$

57. Решение. Как и в задаче 33, получаем

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a^2\left\{\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r}\right\}, \quad r_1 < r < r_2, \quad 0 < t < +\infty, \quad a^2 = \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma}, \qquad (1)$$

$$H(r,\, 0) = 0, \quad r_1 < r < r_2, \qquad (2)$$

$$H(r_2,\, t) = H_0, \quad 0 < t < +\infty, \qquad (3)$$

где H — составляющая магнитного поля по оси z, которая совпадает с осью цилиндра (другие составляющие вектора напряженности магнитного поля равны нулю).

Найдем граничное условие при $r = r_1$. Запишем уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi\sigma}{c}\boldsymbol{E} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \qquad (4)$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}; \qquad (5)$$

в цилиндрических координатах:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = \left(\frac{4\pi\sigma}{c} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)E_r, \qquad (6)$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = \left(\frac{4\pi\sigma}{c} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)E_\varphi, \qquad (6')$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (rH_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = \left(\frac{4\pi\sigma}{c} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)E_z, \qquad (6'')$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial H_r}{\partial t}, \qquad (7)$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial H_\varphi}{\partial t}, \qquad (7')$$

[1)] См. (21) и (27) в задаче 57.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rE_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial \varphi} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t}. \qquad (7'')$$

Так как мы пренебрегаем токами смещения и так как $H_r = H_\varphi = 0$ (см. решение задачи 33), то из (6′) получим

$$-\frac{\partial H_z}{\partial r} = \frac{4\pi\sigma}{c} E_\varphi. \qquad (8)$$

Интегрируя (5) по поперечному сечению внутренней полости, применяя при этом формулу Стокса и используя условие, гласящее, что всюду в полости $\boldsymbol{H}$ равно значению $\boldsymbol{H}$ на внутренней поверхности трубы, получим

$$2E_\varphi\Big|_{r=r_1} = -\frac{r_1}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t}\Big|_{r=r_1}. \qquad (9)$$

Из (8) и (9) получаем, наконец, искомое граничное условие

$$\frac{\partial H_z}{\partial t}\Big|_{r=r_1} = \frac{\mu}{r_1}a^2\frac{\partial H_z}{\partial r}\Big|_{r=r_1},$$

т. е.

$$\frac{\partial H}{\partial t}\Big|_{r=r_1} = \frac{2\mu}{r_1}a^2\frac{\partial H}{\partial r}\Big|_{r=r_1}, \quad 0 < t < +\infty. \qquad (3')$$

Чтобы освободиться от неоднородности в граничном условии (3), ищем решение краевой задачи (1), (2), (3), (3′) в виде

$$H(r, t) = H_0 + u(r, t). \qquad (10)$$

Для $u(r, t)$ получаем краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right\}, \quad r_1 < r < r_2, \quad 0 < t < +\infty, \qquad (11)$$

$$u(r, 0) = -H_0, \quad r_1 < r < r_2, \qquad (12)$$

$$u(r_2, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \qquad (13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{r=r_1} = \frac{\mu}{r_1}a^2\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=r_1}. \qquad (13')$$

Частные решения уравнения (11), удовлетворяющие граничным условиям (13), ищем в виде

$$U_k(r, t) = e^{-a^2\lambda_k^2 t}R_k(r). \qquad (14)$$

Подставляя (14) в (11), получим

$$\frac{d^2R_k}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR_k}{dr} + \lambda_k^2 R_k = 0. \qquad (15)$$

Следовательно,

$$R_k(r) = Z_0(\lambda_k r), \qquad (15')$$

где $Z_0(z) = AN_0(z) + BJ_0(z)$ — общее решение уравнения цилиндрических функций нулевого порядка. Выберем константы A и B так, чтобы условие (13) для $Z_0(\lambda_k r)$ выполнялось при любых значениях λ_k; например, положим

$$Z_0(\lambda_k r) = N_0(\lambda_k r_2)J_0(\lambda_k r) - J_0(\lambda_k k_2)N_0(\lambda_k r). \qquad (16)$$

Подставляя (14) в (13′), найдем

$$\frac{dR_k(r)}{dr}\Big|_{r=r_1} = -\lambda_k^2 \frac{r_1}{\mu} R_k(r)\Big|_{r=r_1}, \tag{17}$$

или

$$Z_0'(\lambda_k r_1) = -\lambda_k \frac{r_1}{\mu} Z_0(\lambda_k r_1). \tag{18}$$

Таково уравнение, из которого находятся собственные значения λ_1, λ_2, λ_3, ... краевой задачи. Из уравнения (15) и из уравнения, которое получается заменой в (15) k на n, получим, умножая их соответственно на $R_n(r)$ и на $R_k(r)$, вычитая результаты и интегрируя,

$$(\lambda_k^2 - \lambda_n^2) \int_{r_1}^{r_2} r R_k(r) R_n(r)\, dr = \left\{ r \left[R_k(r) \frac{dR_n(r)}{dr} - R_n(r) \frac{dR_k(r)}{dr} \right] \right\}_{r=r_1}^{r=r_2}. \tag{19}$$

В силу граничного условия (13) и (17) получаем

$$(\lambda_k^2 - \lambda_n^2) \left\{ \int_{r_1}^{r_2} r R_k(r) R_n(r)\, dr - \frac{r_1^2}{2\mu} R_k(r_1) R_n(r_1) \right\} = 0, \tag{20}$$

откуда при $n \neq k$ находим

$$\int_{r_1}^{r_2} r R_k(r) R_n(r)\, dr - \frac{r_1^2}{2\mu} R_k(r_1) R_n(r_1) = 0. \tag{21}$$

Таким образом функции $R_k(r)$ и $R_n(r)$ обобщенно ортогональны (соотношение (21) является выражением обобщенной ортогональности).

Решение краевой задачи (11), (12), (13) ищем в виде суммы ряда

$$u(r,\, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{-a^2 \lambda_k^2 t} R_k(r), \tag{22}$$

$u(r,\, t)$ удовлетворяет уравнению (11) (если ряд сходится достаточно хорошо) и граничным условиям (13), (13′). Потребуем выполнения начальных условий, предположив сначала для общности, что $u(r,\, 0) = f(r)$. Полагая в (22) $t = 0$, получим

$$f(r) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k R_k(r); \tag{23}$$

при $r = r_1$

$$f(r_1) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k R_k(r_1). \tag{24}$$

Умножим (23) на $rR_n(r)$ и проинтегрируем по r от r_1 до r_2:

$$\int_{r_1}^{r_2} r f(r) R_n(r)\, dr = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \int_{r_1}^{r_2} r R_k(r) R_n(r)\, dr. \tag{25}$$

Умножим (24) на $\frac{r_1^2}{\mu} R_n(r_1)$:

$$\frac{r_1^2}{2\mu} f(r_1)R_n(r_1) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \frac{r_1^2}{2\mu} R_k(r_1)R_n(r_1). \tag{26}$$

Складывая (25) и (26), получим в силу (21)

$$\int_{r_1}^{r_2} rf(r)R_n(r)\,dr - \frac{r_1^2}{2\mu} f(r_1)R_n(r_1) = A_n \left\{ \int_{r_1}^{r_2} rR_n^2(r)\,dr - \frac{r_1^2}{2\mu} R_n^2(r_1) \right\}. \tag{27}$$

Следовательно,

$$A_n = \frac{\displaystyle\int_{r_1}^{r_2} rf(r)R_n(r)\,dr - \frac{r_1^2}{2\mu} f(r_1)R_n(r_1)}{\displaystyle\int_{r_1}^{r_2} rR_n^2(r)\,dr - \frac{r_1^2}{2\mu} R_n^2(r_1)}. \tag{28}$$

С помощью равенства (16) задачи 34, вронскиана цилиндрических функций и граничного условия (18) получаем

$$\int_{r_1}^{r_2} rR_n^2(r)\,dr = \frac{2}{\pi^2\lambda_n^2} - \frac{r_1^2}{2}\left(1 + \frac{r_1^2\lambda_n^2}{2\mu}\right) Z_0^2(\lambda_n r_1). \tag{29}$$

Подставляя в числитель (28) $f(r) = -H_0$ и используя вронскиан цилиндрических функций, получим для указанного числителя значение

$$H_0 \left\{ \left(\frac{2\mu}{\lambda_n^2} + \frac{r_1^2}{2\mu}\right) Z_0(\lambda_n r_1) - \frac{2}{\pi\lambda_n^2} \right\}. \tag{30}$$

В силу (29) и (30) равенство (28) принимает вид

$$A_n = H_0 \frac{\left(\frac{2\mu}{\lambda_n^2} + \frac{r_1^2}{2\mu}\right) Z_0(\lambda_n r_1) - \frac{2}{\pi\lambda_n^2}}{\frac{2}{\pi^2\lambda_n^2} - \frac{r_1^2}{2}\left(\frac{1}{2\mu} + 1 + \frac{r_1^2\lambda_n^2}{2\mu^2}\right) Z_0^2(\lambda_n r_1)}, \tag{31}$$

где

$$Z_0(\lambda_n r_1) = N_0(\lambda_n r_2)J_0(\lambda_n r_1) - J_0(\lambda_n r_2)N_0(\lambda_n r_1). \tag{32}$$

58. Решением краевой задачи

$$c_1\rho_1 \frac{\partial u}{\partial t} = k_1 \left\{ \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right\}, \quad 0 \leqslant r < r_0, \tag{1}$$

$$c_2\rho_2 \frac{\partial u}{\partial t} = k_2 \left\{ \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right\}, \quad r_0 < r \leqslant r_1, \tag{1'}$$

$$\left.\begin{aligned} u(r_0-0,\,\theta,\,\varphi,\,t) &= u(r_0+0,\,\theta,\,\varphi,\,t), \\ k_1 u_r(r_0-0,\,\theta,\,\varphi,\,t) &= k_2 u_r(r_0+0,\,\theta,\,\varphi,\,t), \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \\ &0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \\ &0 < t < +\infty, \end{aligned} \tag{2}$$

$$u(r_1, \theta, \varphi, t) = 0, \tag{2''}$$

$$u(r,\,\theta,\,\varphi,\,0) = f(r,\,\theta,\,\varphi) \tag{3}$$

является

$$u(r,\,\theta,\,\varphi,\,t) = \sum_{n,\,p=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} R_{mnp}(r) P_n^{(m)}(\cos\theta) e^{-\lambda_{mnp}^2 t} \times$$
$$\times \{A_{mnp} \cos m\varphi + B_{mnp} \sin m\varphi\},$$

где собственные значения λ_{mnp} и собственные функции $R_{mnp}(r)$ находятся аналогично тому, как это делалось в задачах 53 и 54.

§ 3. Метод интегральных представлений

1. Применение интеграла Фурье.

59. Решением краевой задачи

$$u_t = a^2 \Delta_3 u, \quad -\infty < x,\, y,\, z < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = f(x,\,y,\,z), \quad -\infty < x,\, y,\, z < +\infty, \tag{2}$$

где $\Delta_3 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$, является

$$u(x,\,y,\,z,\,t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\,\eta,\,\zeta) \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4a^2 t}\right\} d\xi\, d\eta\, d\zeta. \tag{3}$$

Если f не зависит от z, то

$$u(x,\,y,\,t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\,\eta) \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4a^2 t}\right\} d\xi\, d\eta. \tag{3'}$$

Указание. Образом Фурье произвольной[1]) функции $F(x,\,y,\,z)$, определенной при $-\infty < x,\, y,\, z < +\infty$, называется

$$\overline{F}(\lambda,\,\mu,\,\nu) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_{-\infty}^{+\infty} F(\xi,\,\eta,\,\zeta)\, e^{i[\lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta]}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \tag{4}$$

Переход от F к $\overline{F}$ по формуле (4) называется преобразованием Фурье с ядром $e^{i[\lambda\xi+\mu\eta+\nu\zeta]}$. Переход от образа $\overline{F}$ к оригиналу F осуществля-

[1]) Мы не останавливаемся на ограничениях на $F(x, y, z)$, при которых заведомо существует $\overline{F}(\lambda,\,\mu,\,\nu)$ и имеет место формула обращения (5), отсылая по этому поводу к специальной литературе.

ется по формуле

$$F(x,\,y,\,z)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\overline{F}(\lambda,\,\mu,\,\nu)\,e^{-i[\lambda x+\mu y+\nu z]}\,d\lambda\,d\mu\,d\nu. \qquad (5)$$

Умножая обе части равенств (1) и (2) на $e^{i[\lambda\xi+\mu\eta+\nu\zeta]}$ и интегрируя по ξ, η, ζ от $-\infty$ до $+\infty$, получим обыкновенное дифференциальное уравнение и начальное условие для образа Фурье $\overline{u}$ решения $\overline{\overline{u}}$ краевой задачи (1), (2). Находя $\overline{u}$ и применяя обратное преобразование Фурье, получим u.

В случае, когда f не зависит от z, краевая задача (1), (2) превращается в краевую задачу

$$u_t=a^2\Delta_2 u,\quad -\infty<x,\,y<+\infty,\quad 0<t<+\infty, \qquad (1')$$

$$u\big|_{t=0}=f(x,\,y),\quad -\infty<x,\,y<+\infty, \qquad (2')$$

где

$$\Delta_2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Для решения задачи $(1')$ и $(2')$ нужно применить преобразование Фурье для функции двух переменных

$$F(\lambda,\,\mu)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}F(\xi,\,\eta)\,e^{i[\lambda\xi+\mu\eta]}\,d\xi\,d\eta. \qquad (4')$$

При этом формула обращения имеет вид

$$F(x,\,y)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda,\,\mu)\,e^{-i[\lambda x+\mu y]}\,d\lambda\,d\mu. \qquad (5')$$

60. Решением краевой задачи

$$u_t=a^2\Delta_3 u+g(x,\,y,\,z,\,t),\quad -\infty<x,\,y,\,z<+\infty,\quad 0<t<+\infty, \qquad (1)$$

$$u\big|_{t-0}=0,\quad -\infty<x,\,y,\,z<+\infty \qquad (2)$$

является

$$u(x,\,y,\,z,\,t)=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi})^3}\int\limits_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\times$$

$$\times\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}g(\xi,\,\eta,\,\zeta,\,\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta. \qquad (3)$$

Если $g(x,\,y,\,z,\,t)$ не зависит от t, т. е. $g=g(x,\,y,\,z)$, то выражение (3) для решения можно преобразовать к виду

$$u(x,\,y,\,z,\,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(\xi,\,\eta,\,\zeta)}{r}\left\{1-\Phi\left(\frac{r}{2a\sqrt{t}}\right)\right\}d\xi\,d\eta\,d\zeta, \qquad (4)$$

где $\Phi(\alpha)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int\limits_0^{\alpha}e^{-\omega^2}d\omega$, а $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$. Ес-

ли $g(x, y, z, t)$ не зависит от z, то

$$u(x, y, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int\limits_0^t g(\xi, \eta, \tau) \frac{\exp\left\{ -\dfrac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)} \right\}}{t-\tau} d\tau \right\} d\xi\, d\eta.$$

Указание. При $g = g(x, y, z)$ выражение (3) преобразуется в (4) путем замены

$$\mu = \frac{r}{2a\sqrt{t-\tau}}.$$

61. $u(x, y, z, t) = \dfrac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\eta \int\limits_0^{+\infty} f(\xi, \eta, \zeta) \times$

$$\times \left[\exp\left\{ -\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4a^2 t} \right\} - \right.$$

$$\left. - \exp\left\{ -\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2}{4a^2 t} \right\} \right] d\zeta. \quad (1)$$

Если $f(x, y, z)$ не зависит от y, то

$$u(x, z, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int\limits_0^{+\infty} \left[\exp\left\{ -\frac{(x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2}{4a^2 t} \right\} - \right.$$

$$\left. - \exp\left\{ -\frac{(x-\xi)^2 + (z+\zeta)^2}{4a^2 t} \right\} \right] f(\xi, \zeta)\, d\zeta. \quad (2)$$

Указание. Применить преобразование Фурье с ядром

$$\frac{1}{2^{1/2}\pi^{3/2}} e^{i[\lambda\xi + \mu\eta]} \sin \nu\zeta$$

в полупространстве $-\infty < \xi, \eta < +\infty$, $0 < \zeta < +\infty$. Если же f не зависит от y, то нужно применить преобразование Фурье с ядром

$$\frac{1}{\pi} e^{i\lambda\xi} \sin \nu\zeta$$

при $-\infty < \xi < +\infty$, $0 < \zeta < +\infty$.

Указание. См. также решение задачи 59 гл. III.

62. $u(x, y, z, t) = \dfrac{z}{(2a\sqrt{\pi})^3} \times$

$$\times \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{5/2}} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{ -\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} f(\xi, \eta, \tau)\, d\xi\, d\eta. \quad (1)$$

Если $f(x, y, t)$ не зависит от y, то

$$u(x, z, t) = \frac{z}{4\pi a^2} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{ -\frac{(x-\xi)^2 + z^2}{4a^2(t-\tau)} \right\} f(\xi, \tau)\, d\xi. \quad (2)$$

Указание. Применить преобразование Фурье, предлагаемое в указании к предыдущей задаче.

63. $u(x,\,y,\,z,\,t)=\dfrac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}d\eta\int_{0}^{+\infty}f(\xi,\,\eta,\,\zeta)\times$

$$\times\left[\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}\right\}+\right.$$

$$\left.+\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\xi)^2}{4a^2t}\right\}\right]d\zeta.$$

Указание. Применить преобразование Фурье с ядром

$$\frac{1}{2^{1/3}\pi^{3/2}}e^{i[\nu\xi+\mu\eta]}\cos\nu\zeta$$

в полупространстве $-\infty<\xi,\,\eta<+\infty,\ \ 0<\zeta<+\infty$.

64. $u(x,\,y,\,z,\,t)=\dfrac{1}{(2a\sqrt{\pi})^3}\times$

$$\times\int_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\iint_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}f(\xi,\,\eta,\,\tau)\,d\xi\,d\eta.$$

Указание. Применить преобразование Фурье, предложенное в указании к предыдущей задаче.

65. $u(x,\,y,\,z,\,t)=$

$$=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}d\eta\int_{0}^{+\infty}\left[\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2(z-\zeta)^2}{4a^2t}\right\}+\right.$$

$$+\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}{4a^2t}\right\}-$$

$$\left.-2h\int_0^{+\infty}\exp\left\{-h\omega-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta+\omega)^2}{4a^2t}\right\}d\omega\right]f(\xi,\,\eta,\,\zeta)\,d\zeta.$$

Если f не зависит от y, то

$$u(x,\,z,\,t)=\frac{1}{4\pi a^2t}\times$$

$$\times\iint_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\,\zeta)\left[\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}\right\}+\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2+(z+\zeta)^2}{4a^2t}\right\}-\right.$$

$$\left.-2h\int_0^{+\infty}\exp\left\{-h\omega-\frac{(x-\xi)^2+(z+\zeta+\omega)^2}{4a^2t}\right\}d\omega\right]d\xi\,d\zeta.$$

Указание. Воспользоваться преобразованием Фурье с ядром

$$\frac{1}{2^{1/2}\pi^{3/2}}\,e^{i[\lambda\xi+\mu\eta]}\,\frac{\nu\cos\nu\zeta+h\sin\nu\zeta}{\nu^2+h^2}$$

в полупространстве $-\infty < \xi,\ \eta < +\infty,\ 0 < \zeta < +\infty$. Если f не зависит от y, то нужно воспользоваться преобразованием Фурье с ядром

$$\frac{1}{\pi}\, e^{i\lambda\xi}\, \frac{\nu\cos\nu\zeta + h\sin\nu\zeta}{\nu^2 + h^2}$$

при $-\infty < \xi < +\infty,\ \ 0 < \zeta < +\infty$.

См. также решение задачи 65 гл. III.

66. $u(x,\, y,\, z,\, t) =$

$$= \frac{h}{(2a\sqrt{\pi})^3} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{5/2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\eta \int\limits_0^{+\infty} (z+\zeta)\, f(\xi,\, \eta,\, \tau) \times$$

$$\times \exp\left\{-h\zeta - \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} d\zeta.$$

Если f не зависит от y, то

$$u(x,\, z,\, t) = \frac{h}{4\pi a^2} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int\limits_0^{+\infty} (z+\zeta)\, f(\xi,\, \tau) \times$$

$$\times \exp\left\{-h\zeta - \frac{(x-\xi)^2 + (z+\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} d\zeta.$$

Указание. Воспользоваться преобразованием Фурье, предложенным в предыдущей задаче.

67. $u(x,\, y,\, z,\, t) = \dfrac{1}{(2a\sqrt{\pi})^3} \displaystyle\int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}} \int\limits_0^{+\infty} d\zeta \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\, \eta,\, \zeta,\, \tau) \times$

$$\times \left[\exp\left\{-\tfrac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} - \exp\left\{-\tfrac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\right] d\xi\, d\eta.$$

68. $u(x,\, y,\, z,\, t) =$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\zeta \int\limits_0^{l_2} d\eta \int\limits_0^{l_1} (\xi,\, \eta,\, \zeta)\, G_i(x,\, y,\, z,\, \xi,\, \eta,\, \zeta,\, t)\, d\xi, \quad i = 1,\, 2,\, 3,$$

причем в случае а) под интегралом стоит G_1, а в случае б) — G_2, в случае в) — G_3, где

$$G_1(x,\, y,\, z,\, \xi,\, \eta,\, \zeta,\, t) = \frac{2}{l_1 l_2 a\sqrt{\pi t}} \exp\left\{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2 t}\right\} \times$$

$$\times \sum_{k,\, n=1}^{+\infty} \exp\left\{-\pi^2 a^2 \left(\frac{k^2}{l_1^2} + \frac{n^2}{l_2^2}\right) t\right\} \sin\frac{k\pi x}{l_1} \sin\frac{k\pi\xi}{l_1} \sin\frac{n\pi y}{l_2} \sin\frac{n\pi\eta}{l_2},$$

$$G_2(x,\, y,\, z,\, \xi,\, \eta,\, \zeta,\, t) = \frac{2}{l_1 l_2 a\sqrt{\pi t}} \exp\left\{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2 t}\right\} \times$$

$$\times \sum_{k,\, n=0}^{+\infty} \exp\left\{-a^2\pi^2 \left(\frac{k^2}{l_1^2} + \frac{n^2}{l_2^2}\right) t\right\} \varepsilon_k \varepsilon_n \cos\frac{k\pi x}{l_1} \cos\frac{k\pi\xi}{l_1} \cos\frac{n\pi y}{l_2} \cos\frac{n\pi\eta}{l_2},$$

$$\varepsilon_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{при} \quad k = 0, \\ 1 & \text{при} \quad k \neq 0, \end{cases} \qquad \varepsilon_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{при} \quad n = 0, \\ 1 & \text{при} \quad n \neq 0, \end{cases}$$

$$G_3(x,\, y,\, z,\, \xi,\, \eta,\, \zeta, t) = \frac{2\exp\left\{-\dfrac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}\right\}}{a\sqrt{\pi t}} \times$$

$$\times \sum_{k,\, n=1}^{+\infty} \frac{e^{-a^2(\lambda_k^2+\mu_n^2)t}}{[(\lambda_k^2+h^2)l_1+2h][(\mu_n^2+h^2)l_2+2h]} (\lambda_k \cos\lambda_k x + h\sin\lambda_k x) \times$$

$$\times (\lambda_k \cos\lambda_k \xi + h\sin\lambda_k \xi)(\mu_n \cos\mu_n y + h\sin\mu_n y)(\mu_n \cos\mu_n \eta + h\sin\mu_n \eta) =$$

$$= \frac{2\exp\left\{-\dfrac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}\right\}}{a\sqrt{\pi t}} \sum_{k,\, n=1}^{+\infty} \frac{(\lambda_k^2+h^2)(\mu_n^2+h^2)e^{-a^2(\lambda_k^2+\mu_n^2)t}}{[(\lambda_k^2+h^2)l_1+2h][(\mu_n^2+h^2)l_2+2h]} \times$$

$$\times \sin(\lambda_k x + \varphi_k)\sin(\lambda_k \xi + \varphi_k)\sin(\mu_n y + \psi_n)\sin(\mu_n \eta + \psi_n),$$

где λ_k и μ_n — соответственно положительные корни уравнений

$$\operatorname{ctg} l_1\lambda = \frac{\lambda^2 - h^2}{2\lambda h} \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg} l_2\mu = \frac{\mu^2 - h^2}{2\mu h},$$

$$\varphi_k = \operatorname{arctg}\frac{\lambda_k}{l_1}, \quad \psi_n = \operatorname{arctg}\frac{\mu_n}{l_2},$$

h — коэффициент теплообмена.

Указание. Применяя преобразование Фурье по z

$$\overline{u}(x,\, y,\, \nu,\, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,\, y,\, \zeta,\, t) e^{i\nu\zeta}\, d\zeta, \tag{1}$$

$$\overline{f}(x,\, y,\, \nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,\, y,\, \zeta) e^{i\nu\zeta}\, d\zeta, \tag{2}$$

мы придем к уравнению

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} = a^2 \left\{ \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2} - \lambda^2 \overline{u} \right\} \tag{3}$$

и начальному условию

$$\overline{u}\big|_{t=0} = f(x,\, y,\, \nu). \tag{4}$$

Замена

$$\overline{u} = e^{-a^2\lambda^2 t}\overline{v}(x,\, y,\, \nu,\, t)$$

приводит к уравнению

$$\frac{\partial \overline{v}}{\partial t} = a^2 \left\{ \frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial y^2} \right\} \tag{3'}$$

и начальному условию

$$\overline{v}\big|_{t=0} = f(x,\, y,\, \nu). \tag{4'}$$

Граничные условия для $\overline{v}$ будут те же, что и для u. $\overline{v}$ находим методом разделения переменных, а затем, подставив его выражение в (5), применяем к $\overline{u}$ обратное преобразование Фурье, при этом после выполнения интегрирования по ν получатся выражения, приведенные в ответе.

69. $u(x, y, z, t) = \int\limits_0^{+\infty} d\zeta \int\limits_0^{l_2} d\eta \int\limits_0^{l_1} f(\xi, \eta, \zeta)\, G_i(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t)\, d\xi,$

$i = 1, 2$, причем граничным условиям а) соответствует функция $\widetilde{G}_1$, получающаяся из функции G_1 ответа предыдущей задачи заменой множителя $\exp\left\{-\dfrac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}\right\}$ на множитель

$$\left[\exp\left\{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}\right\} - \exp\left\{-\frac{(z+\zeta)^2}{4a^2t}\right\}\right];$$

аналогично в случае б) $\widetilde{G}_2$ получается из G_2 заменой $\exp\left\{-\dfrac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}\right\}$ на

$$\left[\exp\left\{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}\right\} + \exp\left\{-\frac{(z+\zeta)^2}{4a^2t}\right\}\right].$$

Указание. В случае а) следует применить синус-преобразование Фурье по z, а в случае б) — косинус-преобразование по z. Далее задача решается аналогично предыдущей.

70. $u(r, \varphi, z, t) =$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\zeta \int\limits_0^{r_0} r'\, dr' \int\limits_0^{2\pi} f(r', \varphi', \zeta)\, G_i(r, \varphi, z, r', \varphi', \zeta, t)\, d\varphi', \quad i = 1, 2, 3.$$

В случае а) $i = 1$,

$G_1(r, \varphi, z, r', \varphi', \zeta, t) =$

$$= \frac{\exp\left\{-\dfrac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}\right\}}{ar_0^2\pi\sqrt{\pi t}} \sum_{n,\,k=0}^{+\infty} \frac{J_n\left(\dfrac{\mu_k^{(n)} r}{r_0}\right) J_n\left(\dfrac{\mu_k^{(n)} r'}{r_0}\right)}{\varepsilon_n [J_n'(\mu_k^{(n)})]^2} \cos n(\varphi - \varphi'),$$

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 2 & \text{при} \quad n = 0, \\ 1 & \text{при} \quad n \neq 0, \end{cases}$$

$\mu_k^{(n)}$ — положительные корни уравнения $J_n(\mu) = 0$.

В случае б) $i = 2$,

$G_2(r, \varphi, z, r', \varphi', \zeta, t) =$

$$= \frac{\exp\left\{-\dfrac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}\right\}}{ar_0^2\pi\sqrt{\pi t}} \sum_{k,\,n=0}^{+\infty} \frac{J_n\left(\dfrac{\mu_k^{(n)} r}{r_0}\right) J_n\left(\dfrac{\mu_k^{(n)} r'}{r_0}\right)}{\varepsilon_n J_n^2(\mu_k^{(n)}) \left[1 - \dfrac{n^2}{\mu_k^{(n)2}}\right]} \cos n(\varphi - \varphi'),$$

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 2 & \text{при} \quad n = 0, \\ 1 & \text{при} \quad n \neq 0, \end{cases}$$

$\mu_k^{(n)}$ — корни уравнения $J_n'(\mu) = 0$, $\mu_k^{(0)} \geqslant 0$, $\mu_k^{(n)} > 0$ при $n \neq 0$.

В случае в) $i = 3$,

$$G_3(r, \varphi, z, r', \varphi', \zeta, t) =$$

$$= \frac{\exp\left\{-\dfrac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}\right\}}{ar_0^2\pi\sqrt{\pi t}} \sum_{k,\,n=0}^{+\infty} \frac{J_n\left(\dfrac{\mu_k^{(n)} r}{r_0}\right) J_n\left(\dfrac{\mu_k^{(n)} r'}{r_0}\right)}{\varepsilon_n J_n^2(\mu_k^{(n)}) \left[1 + \dfrac{r_0^2 h^2 - n^2}{\mu_k^{(n)^2}}\right]} \cos n(\varphi - \varphi'),$$

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 2 & \text{при} \quad n = 0, \\ 1 & \text{при} \quad n \neq 0, \end{cases}$$

$\mu_k^{(n)}$ — положительные корни уравнения $\dfrac{\mu}{r_0} J_n'(\mu) + hJ_n(\mu) = 0$.

Замечание. В случае б) корню $\mu_0^{(0)} = 0$ соответствует собственная функция, равная тождественно константе.

Указание. Задача решается аналогично задаче 68.

71. $u(r, \varphi, z, t) =$

$$= \int_0^{+\infty} d\zeta \int_0^{r_0} r'\,dr' \int_0^{2\pi} f(r', \varphi', \zeta)\, \widetilde{G}_i(r, \varphi, z, r', \varphi', \zeta, t)\, d\varphi', \quad i = 1, 2.$$

В случае а) $i = 1$, $\widetilde{G}_1$ получается из G_1 предыдущей задачи заменой множителя $\exp\left\{-\dfrac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}\right\}$ на множитель

$$\left[\exp\left\{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}\right\} - \exp\left\{-\frac{(z+\zeta)^2}{4a^2t}\right\}\right].$$

В случае б) $i = 2$, $\widetilde{G}_2$ получается из G_2 предыдущей задачи заменой множителя $\exp\left\{-\dfrac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}\right\}$ на множитель

$$\left[\exp\left\{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}\right\} + \exp\left\{-\frac{(z+\zeta)^2}{4a^2t}\right\}\right].$$

72. $u(r, \varphi, z, t) =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta \int_0^{r_0} r'\,dr' \int_0^{\varphi_0} f(r', \varphi', \zeta)\, G_i(r, \varphi, z, r', \varphi', \zeta, t)\, d\varphi', \quad i = 1, 2.$$

В случае а) $i = 1$,

$$G_1(r, \varphi, z, r', \varphi', \zeta, t) = \frac{\exp\left\{-\dfrac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}\right\}}{ar_0^2\varphi_0\sqrt{\pi t}} \times$$

$$\times \sum_{k,\,n=1}^{+\infty} e^{-a^2\mu_k^{(n)2}t}\, \frac{J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}\left(\dfrac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right) J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}\left(\dfrac{\mu_k^{(n)}r'}{r_0}\right)}{\left[J'_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\mu_k^{(n)})\right]^2} \sin\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0} \sin\frac{n\pi\varphi'}{\varphi_0},$$

$\mu_k^{(n)}$ — положительные корни уравнения $J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\mu) = 0$.

В случае б) $i = 2$,

$$G_2(r, \varphi, z, r', \varphi', \zeta, t) = \frac{\exp\left\{-\dfrac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}\right\}}{ar_0^2\varphi_0\sqrt{\pi t}} \times$$

$$\times \sum_{k,\,n=0}^{+\infty} e^{-a^2\mu_k^{(n)2}t}\, \frac{J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}\left(\dfrac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right) J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}\left(\dfrac{\mu_k^{(n)}r'}{r_0}\right)}{\varepsilon_n\left[1 - \dfrac{n^2\pi^2}{\varphi_0^2\mu_k^{(n)2}}\right] J^2_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\mu_k^{(n)})} \cos\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0} \cos\frac{n\pi\varphi'}{\varphi_0},$$

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad n \neq 0, \\ 2 & \text{при} \quad n = 0, \end{cases}$$

$\mu_k^{(n)} > 0$ при $n \neq 0$, $\mu_k^{(0)} \geqslant 0$, $\mu_k^{(n)}$ — корни уравнения

$$J'_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\mu) = 0.$$

Корню $\mu_0^{(0)}$ соответствует собственная функция, тождественно равная константе.

73. $u(r, \varphi, z, t) =$

$$= \int_0^{+\infty} d\zeta \int_0^{r_0} r'\,dr' \int_0^{\varphi_0} f(r', \varphi', \zeta, t)\, \widetilde{G}_i(r, \varphi, z, r', \varphi', \zeta, t)\, d\varphi', \quad i = 1, 2.$$

В случае а) $i = 1$, $\widetilde{G}_1$ получается из G_1 предыдущей задачи заменой множителя $\exp\left\{-\dfrac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}\right\}$ на множитель

$$\left[\exp\left\{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}\right\} - \exp\left\{-\frac{(z+\zeta)^2}{4a^2t}\right\}\right].$$

В случае б) $i = 2$, $\widetilde{G}_2$ получается из G_2 предыдущей задачи заменой множителя $\exp\left\{-\dfrac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}\right\}$ на множитель

$$\left[\exp\left\{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}\right\} + \exp\left\{-\frac{(z+\zeta)^2}{4a^2t}\right\}\right].$$

74. $u(r,\varphi,t)=\int\limits_0^{+\infty}\rho\,d\rho\int\limits_0^{\varphi_0}f(\rho,\varphi')\,G_i(r,\varphi,\rho,\varphi',t)\,d\varphi',\quad i=1,2.$

В случае а) $i=1$,

$$G_1(r,\varphi,\rho,\varphi',t)=$$

$$=\frac{2}{\varphi_0}\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\int\limits_0^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2t}J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda\rho)J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda r)\lambda\,d\lambda\right\}\sin\frac{n\pi\varphi'}{\varphi_0}\sin\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}.$$

В случае б) $i=2$,

$$G_2(r,\varphi,\rho,\varphi',t)=$$

$$=\frac{2}{\varphi_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon_n\left\{\int\limits_0^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2t}J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda\rho)J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda r)\lambda\,d\lambda\right\}\cos\frac{n\pi\varphi'}{\varphi_0}\cos\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0};$$

$$\varepsilon_n=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & \text{при}\quad n\neq0,\\ 1 & \text{при}\quad n=0.\end{cases}$$

Если воспользоваться известным соотношением для функций Бесселя

$$\int\limits_0^{+\infty}e^{-\beta^2\tau^2}J_\nu(\alpha\tau)J_\nu(\gamma\tau)\tau\,d\tau=\frac{1}{2\beta^2}\exp\left\{-\frac{\alpha^2+\gamma^2}{4\beta^2}\right\}I_\nu\left(\frac{\alpha\gamma}{2\beta^2}\right),$$

$$\operatorname{Re}(\nu)>-1,\quad|\operatorname{Arg}\beta|<\frac{\pi}{2},$$

получим

$$\int\limits_0^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2t}J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda\rho)J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda r)\lambda\,d\lambda=\frac{1}{2a^2t}\exp\left\{-\frac{\rho^2+r^2}{4a^2t}\right\}I_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}\left(\frac{\rho r}{2a^2t}\right).$$

Поэтому G_1 и G_2 можно представить в виде

$$G_1(r,\varphi,\rho,\varphi',t)=\frac{\exp\left\{-\dfrac{r^2+\rho^2}{4a^2t}\right\}}{a^2\varphi_0t}\sum_{n=1}^{+\infty}I_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}\left(\frac{r\rho}{2a^2t}\right)\sin\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\sin\frac{n\pi\varphi'}{\varphi_0},$$

$$G_2(r,\varphi,\rho,\varphi',t)=\frac{\exp\left\{-\dfrac{r^2+\rho^2}{4a^2t}\right\}}{a^2\varphi_0t}\sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon_nI_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}\left(\frac{r\rho}{2a^2t}\right)\cos\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\cos\frac{n\pi\varphi'}{\varphi_0},$$

$$\varepsilon_n=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & \text{при}\quad n=0,\\ 1 & \text{при}\quad n\neq0.\end{cases}$$

Указание. Частные решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left\{\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}\right\}$$

ищем в виде $U(r,\varphi,t)=W(r,t)\Phi(\varphi)$, требуя, чтобы в случае а) и б) выполнялись соответствующие граничные условия.

В случае а) это приводит к частным решениям $u_n(r,\,t)\sin\dfrac{n\pi\varphi}{\varphi_0}$, $n=1,2,3,\ldots$, а в случае б) — к частным решениям $u_n(r,\,t)\cos\dfrac{n\pi\varphi}{\varphi_0}$, $n=0,1,2,3,\ldots$ В обоих случаях $u_n(r,\,t)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial u_n}{\partial t}=a^2\left\{\frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial u_n}{\partial r}-\frac{\left(\dfrac{n\pi}{\varphi_0}\right)^2}{r^2}\,u_n\right\},\quad 0<r,\,t<+\infty. \tag{1}$$

Решение исходной краевой задачи ищем в виде суммы этих частных решений:

в случае а)

$$u(r,\,\varphi,\,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(r,\,t)\sin\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}; \tag{2}$$

в случае б)

$$u(r,\,\varphi,\,t)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(r,\,t)\cos\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}. \tag{3}$$

Разлагая $f(r,\,\varphi)=u\big|_{t=0}$ в ряд по $\sin\dfrac{n\pi\varphi}{\varphi_0}$ в первом случае и в ряд по $\cos\dfrac{n\pi\varphi}{\varphi_0}$ во втором, найдем начальные условия для $u_n(r,\,t)$:

в случае а)

$$u_n(r,\,0)=f_n(r)=\frac{2}{\varphi_0}\int\limits_0^{\varphi_0}f(r,\,\varphi')\sin\frac{n\pi\varphi'}{\varphi_0}\,d\varphi'; \tag{4}$$

в случае б)

$$\left.\begin{aligned}u_n(r,\,0)&=f_n(r)=\frac{2}{\varphi_0}\int\limits_0^{\varphi_0}f(r,\,\varphi')\cos\frac{n\pi\varphi'}{\varphi_0}\,d\varphi',\quad n\neq 0,\\ u_0(r,\,0)&=f_0(r)=\frac{1}{\varphi_0}\int\limits_0^{\varphi_0}f(r,\,\varphi')\,d\varphi'.\end{aligned}\right\} \tag{4'}$$

Решение уравнения (1) при начальном условии (4) или (4′), ограниченное при $r\to 0$, ищем в виде

$$u_n(r,\,t)=\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}U_n(\rho,t)J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda\rho)J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda r)\,\lambda\,d\lambda\,\rho\,d\rho,$$

используя интеграл Фурье – Бесселя – Ханкеля [1])

$$F(r)=\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}F(\rho)J_\nu(\lambda\rho)J_\nu(\lambda r)\lambda\,d\lambda\,\rho\,d\rho,\quad \nu\geqslant-\frac{1}{2}.$$

[1]) См. [42, с. 459–500].

75. Решением краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right\}, \quad 0 < \varphi < \varphi_0,$$
$$0 \leqslant r < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(r,\, 0,\, t) = 0, \quad \frac{\partial u(r,\, \varphi_0,\, t)}{\partial \varphi} = 0, \quad 0 < r < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(r,\, \varphi,\, 0) = f(r,\, \varphi), \quad 0 < \varphi < \varphi_0, \quad 0 < r < +\infty, \tag{3}$$

является

$$u(r,\, \varphi,\, t) = \int\limits_0^{\varphi_0} d\varphi' \int\limits_0^{+\infty} f(\rho,\, \varphi') G(\rho,\, r,\, \varphi', \varphi,\, t)\, \rho\, d\rho, \tag{4}$$

где

$$G(\rho,\, r,\, \varphi',\, \varphi,\, t) =$$
$$= \frac{2}{\varphi_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\left\{\int\limits_0^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} J_{\frac{(2n+1)\pi}{2\varphi_0}}(\lambda\rho) J_{\frac{(2n+1)\pi}{2\varphi_0}}(\lambda r)\, \lambda\, d\lambda\right\} \times$$
$$\times \sin\frac{(2n+1)\pi\varphi'}{2\varphi_0} \sin\frac{(2n+1)\pi\varphi}{2\varphi_0}.$$

76. $u(r,\, \varphi,\, z,\, t) =$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\zeta \int\limits_0^{r_0} r'\, dr' \int\limits_0^{\varphi_0} f(r',\, \varphi',\, \zeta)\, \widetilde{G}_i(r,\, \varphi,\, z,\, r',\, \varphi',\, \zeta,\, t)\, d\varphi', \quad i = 1, 2.$$

В случае а) $i = 1$,

$$\widetilde{G}_1 = \frac{\exp\left\{-\dfrac{(z-\zeta)^2}{4a^2 t}\right\}}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot G_1,$$

где G_1 найдено в задаче 74.

В случае б) $i = 2$,

$$\widetilde{G}_2 = \frac{\exp\left\{-\dfrac{(z-\zeta)^2}{4a^2 t}\right\}}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot G_2,$$

где G_2 найдено в задаче 74.

Указание. Если применить преобразование Фурье по z, то задача сводится к задаче 74.

77. Решением краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right\}, \quad r_0 \leqslant r < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(r_0,\, t) = U_0 = \text{const}, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(r,\, 0) = 0, \quad r_0 < r < +\infty, \tag{3}$$

является

$$u(r,\, t) = \frac{2U_0}{\pi}\int\limits_{r_0}^{+\infty} \frac{[1 - e^{-a^2\lambda^2 t}]K(r,\, \lambda)}{J_0^2(r_0\lambda) + N_0^2(r_0\lambda)}\, \frac{d\lambda}{\lambda}, \tag{4}$$

где

$$K(r,\,\lambda) = J_0(r_0\lambda)N_0(r\lambda) - N_0(r_0\lambda)J_0(r\lambda). \tag{5}$$

Указание. Воспользоваться интегральным преобразованием Вебера с ядром $rK(r,\,\lambda)$ на интервале $r_0 \leqslant r < +\infty$, а именно: сначала, применяя это преобразование к уравнению (1), получить уравнение для образа Вебера искомой функции

$$u(\lambda,\,t) = \int\limits_{r_0}^{+\infty} u(r,\,t)\,rK(r,\,\lambda)\,dr, \tag{6}$$

а затем, найдя $\overline{u}(\lambda,\,t)$, применить формулу обращения Вебера

$$u(r,\,t) = \int\limits_{r_0}^{+\infty} \frac{\overline{u}(\lambda,\,t)\,\lambda K(r,\,\lambda)\,d\lambda}{J_0^2(r_0\lambda) + N_0^2(r_0\lambda)}. \tag{7}$$

2. Построение и применение функций влияния мгновенных точечных источников тепла.

78. Указание. Справедливость утверждения проверяется непосредственной подстановкой функции

$$u(x,\,y,\,z,\,t) = u_1(x,\,t)u_2(y,\,t)u_3(z,\,t)$$

в уравнение (1) и начальное условие (2).

79. $G(x,\,y,\,z) = \dfrac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\,\exp\left\{-\dfrac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4a^2t}\right\}$.

Указание. Если в задаче 78 положить $f_1(x) = \delta(x)$, $f_2(y) = \delta(y)$, $f_3(z) = \delta(z)$, то сразу же получится, что функцией влияния мгновенного точечного источника тепла для пространства $-\infty < x,\,y,\,z < +\infty$ является произведение функций влияния мгновенных точечных источников тепла для прямых $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$, $-\infty < z < +\infty$.

80. $u(x,\,y,\,z,\,t) = \dfrac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \times$

$$\times \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4a^2t}\right\} f(\xi,\,\eta,\,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta +$$

$$+ \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}} \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} \times$$

$$\times F(\xi,\,\eta,\,\zeta,\,\tau)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta. \tag{1}$$

Указание. Формулу (1) можно получить совершенно элементарно, но не строго, используя физический смысл функции влияния, полученный в решении задачи 79, и рассматривая искомую температуру $u(x,\,y,\,z,\,t)$ как результат сложения действий мгновенных элементарных источников, распределенных в начальный момент с плотностью $f(x,\,y,\,z)$, и непрерывно действующих источников, распределенных с плотностью $F(x,\,y,\,z,\,t)$.

Формула (1) может быть получена также с помощью формулы Грина, аналогично тому, как это было сделано в решении задачи 68 гл. III.

81. а) $G_1(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t) =$

$$= \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\left[\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}\right\} - \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}{4a^2t}\right\}\right];$$

б) $G_2(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t) =$

$$= \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\left[\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}\right\} + \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}{4a^2t}\right\}\right];$$

в) $G_3(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t) =$

$$= \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\left[\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}\right\} + \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}{4a^2t}\right\} - 2h\int_0^{+\infty} e^{-h\omega}\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta+\omega)^2}{4a^2t}\right\}d\omega\right].$$

82. а) $u(x, y, z, t) =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}d\eta\int_0^{+\infty} f(\xi, \eta, \zeta)G_1(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t)\,d\zeta + a^2\int_0^t d\tau\iint_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\xi, \eta, \tau)\,G_1(x, y, z, \xi, \eta, 0, t-\tau)\,d\xi\,d\eta + \int_0^t d\tau\int_0^{+\infty}d\zeta\iint_{-\infty}^{+\infty}F(\xi, \eta, \zeta, \tau)\,G_1(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t-\tau)\,d\xi\,d\eta;$$

б) $u(x, y, z, t) = \int_0^{+\infty}d\zeta\iint_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta, \zeta)\,G_2(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t)\,d\xi\,d\eta -$

$$- a^2\int_0^t d\tau\iint_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\xi, \eta, \tau)\,G_2(x, y, z, \xi, \eta, 0, t-\tau)\,d\xi\,d\eta + \int_0^t d\tau\int_0^{+\infty}d\zeta\iint_{-\infty}^{+\infty}F(\xi, \eta, \zeta, \tau)\,G_2(\xi, \eta, \zeta, x, y, z, t-\tau)d\xi\,d\eta;$$

в) $u(x,\,y,\,z,\,t)=\int\limits_0^{+\infty}d\zeta\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\,\eta,\,\zeta)\,G_3(x,\,y,\,z,\,\xi,\,\eta,\,\zeta,\,t)d\xi\,d\eta+$

$+a^2\int\limits_0^t d\tau\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\xi,\,\eta,\,\tau)\,G_3(x,\,y,\,z,\,\xi,\,\eta,\,0,\,t-\tau)\,d\xi\,d\eta+$

$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^{+\infty}d\zeta\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}F(\xi,\,\eta,\,\zeta,\,\tau)\,G_3(x,\,y,\,z,\,\xi,\,\eta,\,\zeta,\,t-\tau)d\xi\,d\eta.$

83. Указание. Воспользоваться методом, предложенным в указании к задаче 79.

84. а) $G(x,\,y,\,z,\,\xi,\,\eta,\,\zeta,\,t)=$

$=\dfrac{\exp\left\{-\dfrac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}\right\}}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\exp\left\{-\dfrac{(z-\zeta+2nl)^2}{4a^2t}\right\}-\right.$

$\left.-\exp\left\{-\dfrac{(z+\zeta+2nl)^2}{4a^2t}\right\}\right)=\dfrac{\exp\left\{-\dfrac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}\right\}}{(2a\sqrt{\pi t})^2}\times$

$\times\dfrac{2}{l}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\exp\left\{-\dfrac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t\right\}\sin\dfrac{n\pi z}{l}\sin\dfrac{n\pi\zeta}{l};$

б) $G(x,\,y,\,z,\,\xi,\,\eta,\,\zeta,\,t)=$

$=\dfrac{\exp\left\{-\dfrac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}\right\}}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\exp\left\{-\dfrac{(z-\zeta+2nl)^2}{4a^2t}\right\}+\right.$

$\left.+\exp\left\{-\dfrac{(z+\zeta+2nl)^2}{4a^2t}\right\}\right)=\dfrac{\exp\left\{-\dfrac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}\right\}}{(2a\sqrt{\pi t})^2}\times$

$\times\dfrac{2}{l}\left\{\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\exp\left\{-\dfrac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t\right\}\cos\dfrac{n\pi z}{l}\cos\dfrac{n\pi\zeta}{l}\right\};$

в) $G(x,\,y,\,z,\,\xi,\,\eta,\,\zeta,\,t)=$

$=\dfrac{\exp\left\{-\dfrac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}\right\}}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\left(\exp\left\{-\dfrac{(z-\zeta+2nl)^2}{4a^2t}\right\}-\right.$

$\left.-\exp\left\{-\dfrac{(z+\zeta+2nl)^2}{4a^2t}\right\}\right)=\dfrac{\exp\left\{-\dfrac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}\right\}}{(2a\sqrt{\pi t})^2}\times$

$\times\dfrac{2}{l}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\exp\left\{-\dfrac{(2n+1)^2\pi^2a^2}{4l^2}t\right\}\cos\dfrac{(2n+1)\pi z}{2l}\cos\dfrac{(2n+1)\pi\zeta}{2l};$

г) $G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t) =$

$$= \frac{\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}\right\}}{(2a\sqrt{\pi t})^2}\, 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-a^2\lambda_n^2 t}}{(\lambda_n^2+h^2)l+2h}\times$$

$$\times(\lambda_n\cos\lambda_n x + h\sin\lambda_n x)(\lambda_n\cos\lambda_n\xi + h\sin\lambda_n\xi),$$

λ_n — положительные корни уравнения $\operatorname{ctg} l\lambda = \dfrac{\lambda^2-h^2}{2\lambda h}$.

85. α) $G_1(x, y, z, x', y', z', t) =$

$$= \frac{\exp\left\{-\frac{(z-z')^2}{4a^2t}\right\}}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\sum_{n,\,k=-\infty}^{+\infty}\left(\exp\left\{-\frac{(x-x'+2nl_1)^2}{4a^2t}\right\}-\right.$$

$$\left.-\exp\left\{-\frac{(x+x'+2nl_1)^2}{4a^2t}\right\}\right)\left(\exp\left\{-\frac{(y-y'+2kl_2)^2}{4a^2t}\right\}-\right.$$

$$\left.-\exp\left\{-\frac{(y+y'+2kl_2)^2}{4a^2t}\right\}\right);$$

β) $G_2(x, y, z, x', y', z', t) =$

$$= \frac{\exp\left\{-\frac{(z-z')^2}{4a^2t}\right\}}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\sum_{n,\,k=-\infty}^{+\infty}\left(\exp\left\{-\frac{(x-x'+2nl_1)^2}{4a^2t}\right\}+\right.$$

$$\left.+\exp\left\{-\frac{(x+x'+2nl_1)^2}{4a^2t}\right\}\right)\left(\exp\left\{-\frac{(y-y'+2kl_2)^2}{4a^2t}\right\}+\right.$$

$$\left.+\exp\left\{-\frac{(y+y'+2kl_2)^2}{4a^2t}\right\}\right).$$

Указание. Воспользоваться предложением, сформулированным в задаче 79.

86. а) $G_1 = \dfrac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\times$

$$\times\sum_{k,\,m,\,n=-\infty}^{+\infty}\left(\exp\left\{-\frac{(x-x'+2kl_1)^2}{4a^2t}\right\}-\exp\left\{-\frac{(x+x'+2kl_1)^2}{4a^2t}\right\}\right)\times$$

$$\times\left(\exp\left\{-\frac{(y-y'+2ml_2)^2}{4a^2t}\right\}-\exp\left\{-\frac{(y+y'+2ml_2)^2}{4a^2t}\right\}\right)\times$$

$$\times\left(\exp\left\{-\frac{(z-z'+2nl_3)^2}{4a^2t}\right\}-\exp\left\{-\frac{(z+z'+2nl_3)^2}{4a^2t}\right\}\right);$$

б) G_2 получается из G_1, если всюду в скобках перед e поставить знак плюс.

Указание. См. указание к предыдущей задаче.

87. а) $G(r,\,\varphi,\,z,\,r',\,\varphi',\,z',\,t) =$

$$= \frac{\exp\left\{-\dfrac{(z-z')^2+r^2+r'^2}{4a^2t}\right\}}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\sum_{k=0}^{m-1}\left(\exp\left\{\frac{2rr'\cos\left(\varphi-\varphi'-2k\dfrac{\pi}{m}\right)}{4a^2t}\right\}-\right.$$

$$\left.-\exp\left\{\frac{2rr'\cos\left(\varphi+\varphi'+2k\dfrac{\pi}{m}\right)}{4a^2t}\right\}\right);$$

б) $G(r,\,\varphi,\,z,\,r',\,\varphi',\,z',\,t) =$

$$= \frac{\exp\left\{-\dfrac{(z-z')^2+r^2+r'^2}{4a^2t}\right\}}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\sum_{k=0}^{m-1}\left(\exp\left\{\frac{2rr'\cos\left(\varphi-\varphi'-2k\frac{\pi}{m}\right)}{4a^2t}\right\}+\right.$$

$$\left.+\exp\left\{\frac{2rr'\cos\left(\varphi+\varphi'+2k\dfrac{\pi}{m}\right)}{4a^2t}\right\}\right).$$

Указание. Пусть мгновенный источник находится в точке P_0 с координатами $(r',\,\varphi',\,z')$ (рис. 47). Строим последовательно: симметричное отражение P_1 точки P_0 относительно плоскости I, затем

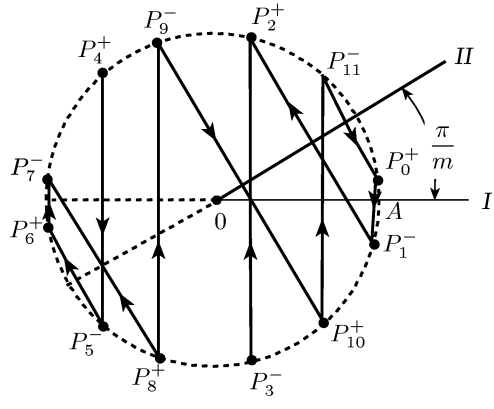


Рис. 47

симметричное отражение P_2 точки P_1 относительно плоскости II, затем симметричное отражение P_3 точки P_2 относительно плоскости I и т. д., помещая в случае а) в точках с четными номерами мгновенные источники положительной единичной мощности, а в точках с нечетными номерами — отрицательной; в случае же б) во всех этих точках помещаются мгновенные источники положительной единичной мощности. Мы имеем

$$\angle AOP_1^- = -\varphi', \quad \angle AOP_2^+ = \varphi' + 2\frac{\pi}{m}, \quad \angle AOP_3^- = -\left(\varphi' + 2\frac{\pi}{m}\right),$$

$$\angle AOP_4^+ = \varphi' + 4\frac{\pi}{m}, \quad \angle AOP_5^- = -\left(\varphi' + 4\frac{\pi}{m}\right),$$

$$\angle AOP_6^+ = \varphi' + 6\,\frac{\pi}{m}, \quad \ldots, \quad \angle AOP_{2m-1}^- = -\left[\varphi' + 2(m-1)\,\frac{\pi}{m}\right].$$

Точки P_{2m-1} и P_0 симметричны относительно плоскости II; действительно, $\angle AOP_{2m-1} - 2\left(\frac{\pi}{m} - \varphi'\right) = \varphi' - 2\pi$. Легко видеть, что при указанном размещении источников в случае а) и б) граничные условия на плоскостях I и II будут выполнены.

Замечание. Метод отражений неприменим уже к клину с углом раствора $\frac{n\pi}{m}$, где n и m — натуральные простые числа [1]). В случае клина с произвольным углом раствора φ_0 выражения для функций влияния при граничных условиях а) и б) были получены в решении задачи 76 настоящего параграфа (см. также задачу 74). Если $\varphi_0 = \frac{\pi}{m}$, где m — натуральное число, то выражение для функций влияния, полученное методом отражений, может быть преобразовано в выражение, полученное в решении задачи 76 [2]).

88. Помещая начало сферической системы координат в центр сферы, получим

$$u = \frac{Q}{c\rho}\,G(r, r', t), \tag{1}$$

где

$$G(r, r', t) = \frac{1}{8\pi a r r' \sqrt{\pi t}}\left[\exp\left\{-\frac{(r-r')^2}{4a^2 t}\right\} - \exp\left\{-\frac{(r+r')^2}{4a^2 t}\right\}\right] \tag{2}$$

называется функцией влияния мгновенного сферического источника тепла.

Указание. Решаем уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r}\right\}, \quad 0 < r < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{3}$$

при начальном условии

$$u(r, 0) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 < r < r', \\ \dfrac{Q}{c\rho 4\pi r'^2 dr'} & \text{при} \quad r' < r < r' + dr', \\ 0 & \text{при} \quad r' + dr' < r < +\infty, \end{cases} \tag{4}$$

а затем в полученном решении переходим к пределу при $dr' \to 0$. Решение уравнения (3) при начальном условии (4) заменой $v(r, t) = ru(r, t)$ сводится к одномерному случаю, причем $v(0, t) = 0$, так как $u(0, t)$ — величина ограниченная.

89. $u(r, t) =$

$$= \frac{1}{2ar\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty} \xi^2 F(\xi)\left[\exp\left\{-\frac{(r-\xi)^2}{4a^2 t}\right\} - \exp\left\{-\frac{(r+\xi)^2}{4a^2 t}\right\}\right] d\xi +$$

[1]) Подробнее см. [41, с. 185].

[2]) См. [41, с. 184].

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_0^{+\infty}\xi^2 f(\xi,\tau)\left[\exp\left\{-\frac{(r-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}-\right.$$

$$\left.-\exp\left\{-\frac{(r+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\right]d\xi.$$

90.
$$u=\frac{Q}{c\rho}\,G(r,\,r',\,t), \tag{1}$$

где

$$G(r,\,r',\,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}J_0(\lambda r)J_0(\lambda r')\lambda\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{4\pi a^2 t}\exp\left\{-\frac{r^2+r'^2}{4a^2t}\right\}I_0\left(\frac{rr'}{2a^2t}\right) \tag{2}$$

называется функцией влияния мгновенного цилиндрического источника тепла.

Указание. Решаем уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r}\right\},\quad 0<r<+\infty,\quad 0<t<+\infty, \tag{3}$$

при начальном условии

$$u(r,\,0)=\begin{cases}0 & \text{при}\quad 0<r<r',\\ \dfrac{Q}{2\pi r'\,dr'\,c\rho} & \text{при}\quad r'<r<r'+dr',\\ 0 & \text{при}\quad r'+dr'<r<+\infty,\end{cases} \tag{4}$$

а затем в полученном решении переходим к пределу при $dr'\to 0$. При $r=0$ $u(r,\,t)$ должно быть ограниченным. Решение уравнения (3), удовлетворяющее начальному условию (4) и ограниченное при $r=0$, ищем в виде

$$u(r,\,t)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}U(\rho,\,t)J_0(\lambda\rho)J_0(\lambda r)\lambda\,d\lambda\,\rho\,d\rho. \tag{5}$$

См. также указание к задаче 74.

91. $u(r,\,t)=$

$$=\frac{1}{2a^2t}\exp\left\{-\frac{r^2}{4a^2t}\right\}\int_0^{+\infty}\xi F(\xi)\exp\left\{-\frac{\xi^2}{4a^2t}\right\}I_0\left(\frac{r\xi}{2a^2t}\right)d\xi+$$

$$+\int_0^t\frac{\exp\left\{-\dfrac{r^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}}{2a^2(t-\tau)}\,d\tau\int_0^{+\infty}\xi f(\xi,\,\tau)\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{\xi^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}I_0\left(\frac{r\xi}{2a^2(t-\tau)}\right)d\xi.$$

92. Функцией влияния для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=D\Delta u-\boldsymbol{v}\,\operatorname{grad}u,$$

является

$$G(x,\,y,\,z,\,x',\,y',\,z',\,t)=\frac{1}{(2\sqrt{Dt})^3}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{(x-v_1t-x')^2+(y-v_2t-y')^2+(z-v_3t-z')^2}{4Dt}\right\},\quad(1)$$

где v_1, v_2, v_3 — составляющие вектора $\boldsymbol{v}$ по осям x, y, z, а x', y', z' — координатные точки, в которой подействовал источник в момент $t=0$.

У к а з а н и е. В системе координат, движущейся вместе со средой, уравнение диффузии принимает вид $\dfrac{\partial u}{\partial t}=D\,\Delta u$. Записав выражение для функции влияния в подвижной системе координат и возвращаясь к неподвижной системе, получим (1).

93. Для источника с координатами $(0,\,y',\,z')$ имеем

$$G(x,\,y,\,z,\,y',\,z')=\frac{v}{4D\pi x}\,\exp\left\{-\frac{(y-y')^2+(z-z')^2}{4\,\dfrac{D}{v}\,x}\right\}.$$

94. а) $G(x,\,y,\,z,\,y',\,z')=$

$$=\frac{v}{4D\pi x}\left[\exp\left\{-\frac{(y-y')^2+(z-z')^2}{4\,\dfrac{D}{v}\,x}\right\}+\exp\left\{-\frac{(y-y')^2+(z+z')^2}{4\,\dfrac{D}{v}\,x}\right\}\right];$$

б) $G(x,\,y,\,z,\,y',\,z')=$

$$=\frac{v}{4D\pi x}\left[\exp\left\{-\frac{(y-y')^2+(z-z')^2}{4\,\dfrac{D}{v}\,x}\right\}-\exp\left\{-\frac{(y-y')^2+(z+z')^2}{4\,\dfrac{D}{v}\,x}\right\}\right];$$

в) $G(x,\,y,\,z,y',\,z')=$

$$=\frac{v}{4D\pi x}\left[\exp\left\{-\frac{(y-y')^2+(z-z')^2}{4\,\dfrac{D}{v}\,x}\right\}+\exp\left\{-\frac{(y-y')^2+(z+z')^2}{4\,\dfrac{D}{v}\,x}\right\}-\right.$$

$$\left.-\,2h\int\limits_0^{+\infty}\exp\left\{-h\omega\,-\frac{(z+z'+\omega)^2}{4\,\dfrac{D}{v}\,x}\right\}d\omega\right].$$

95. $u(x,\,y,\,z,\,t)=\dfrac{1}{(2\,\sqrt{\pi D})^3}\times$

$$\times\int\limits_0^t\frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\,\exp\left\{-\frac{[x-\varphi(\tau)]^2+[y-\psi(\tau)]^2+[z-\varkappa(\tau)]^2}{4D(t-\tau)}\right\}d\tau.$$

У к а з а н и е. Ищем решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left\{\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\right\}+f(t)\delta(x-\varphi(t))\,\delta(y-\psi(t))\,\delta(z-\varkappa(t))\quad(1)$$

при начальном условии

$$u\big|_{t=0}=0,\quad(2)$$

δ — символ импульсной дельта-функции.

96. $u(r,\,t)=\dfrac{U_0}{2}\left[\Phi\left(\dfrac{r+r_0}{2\sqrt{Dt}}\right)-\Phi\left(\dfrac{r-r_0}{2\sqrt{Dt}}\right)\right]+$

$$+\frac{U_0}{r}\sqrt{\frac{Dt}{\pi}}\left(\exp\left\{-\frac{(r-r_0)^2}{4a^2t}\right\}-\exp\left\{-\frac{(r+r_0)^2}{4a^2t}\right\}\right),\quad(1)$$

где

$$\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^z e^{-\zeta^2}d\zeta.\quad(2)$$

Указание. Если воспользоваться функцией влияния мгновенного сферического источника, найденной в решении задачи 88, имея в виду подобие тепловой и диффузионной задач, то решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=D\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right\},\quad 0<r,\quad t<+\infty,\quad(3)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(r,\,0)=f(r),\quad 0<r<+\infty,\quad(4)$$

может быть представлено в виде

$$u(r,\,t)=\int\limits_0^{+\infty}f(r')G(r,\,r',\,t)4\pi r'^2\,dr',\quad(5)$$

где

$$G(r,\,r',\,t)=\frac{1}{8\pi rr'\sqrt{\pi Dt}}\left[\exp\left\{-\frac{(r-r')^2}{4Dt}\right\}-\exp\left\{-\frac{(r+r')^2}{4Dt}\right\}\right].\quad(6)$$

Задачу можно решать также сведением к полуограниченному стержню с помощью замены $v(r,\,t)=ru(r,\,t)$.

97. а) $u(x,\,y,\,z,\,t)=u(\sqrt{x^2+y^2+(z-z_0)^2},\,t)+$

$$+u(\sqrt{x^2+y^2+(z+z_0)^2},\,t);$$

б) $u(x,\,y,\,z,\,t)=u(\sqrt{x^2+y^2+(z-z_0)^2},\,t)-$

$$-u(\sqrt{x^2+y^2+(z+z_0)^2},\,t),$$

где $u(r,\,t)$ — решение предыдущей задачи.

98. $$u(r,\,t)=\frac{U_0}{2Dt}\int\limits_0^{r_0}\exp\left\{-\frac{r^2+r'^2}{4Dt}\right\}I_0\left(\frac{rr'}{2Dt}\right)r'\,dr'.\quad(1)$$

Указание. Если воспользоваться функцией влияния мгновенного цилиндрического источника, полученной в решении задачи 90, имея в виду подобие тепловой и диффузионной задач, то решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=D\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right\},\quad 0\leqslant r<\infty,\quad 0<t<+\infty,\quad(2)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(r,\,0)=f(r),\quad 0<r<+\infty,\quad(3)$$

можно представить в виде

$$u(r,\,t)=\int\limits_0^{+\infty} f(r')G(r,\,r',\,t)2\pi r'\,dr', \tag{4}$$

где

$$G(r,\,r',\,t)=\frac{1}{4\pi Dt}\,\exp\left\{-\frac{r^2+r'^2}{4Dt}\right\}I_0\left(\frac{rr'}{2Dt}\right). \tag{5}$$

99. а) $u(x,\,y,\,t)=u(\sqrt{(x-x_0)^2+y^2},\,t)+u(\sqrt{(x+x_0)^2+y^2},\,t)$;

б) $u(x,\,y,\,t)=u(\sqrt{(x-x_0)^2+y^2},\,t)-u(\sqrt{(x+x_0)^2+y^2},\,t)$;

здесь $u(r,\,t)$ — решение предыдущей задачи.

100. Решением краевой задачи (рис. 48)

$$\frac{\partial H}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right),\quad a^2=\frac{kh}{m}\ ^{1});\quad -\infty<x<+\infty,\quad 0<y,\,t<+\infty, \tag{1}$$

$$H(x,\,y,\,0)=H_0=\text{const},\quad -\infty<x<+\infty,\quad 0<y<+\infty, \tag{2}$$

$$H(x,\,0,\,t)=\left\{\begin{matrix}H_1, & -\infty<x<0,\\ H_2, & 0<x<+\infty,\end{matrix}\right\}\ 0<t<+\infty, \tag{3}$$

является

$$H(x,\,y,\,t)=H_0\Phi\left(\frac{y}{2a\sqrt{t}}\right)+\frac{H_1+H_2}{2}\left[1-\Phi\left(\frac{y}{2a\sqrt{t}}\right)\right]-$$

$$-\frac{(H_1-H_2)y}{\pi}\int\limits_0^x\exp\left\{-\frac{\eta^2+y^2}{4a^2t}\right\}\frac{d\eta}{\eta^2+y^2}.$$

Указание. Построить функцию влияния мгновенного точечного источника для полуплоскости $y\geqslant 0$ при однородном граничном

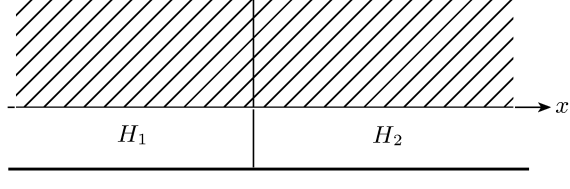


Рис. 48

условии первого рода для уравнения (1), а затем представить решение задачи (1), (2), (3) с помощью этой функции источника.

[1]) См. решение задачи 8.

101. Для искомого потока $q(t)$ получаем выражение

$$-\lambda u_r(r_0,\, t) = q(t) = \frac{\lambda}{\pi}\,\frac{d}{dt}\int\limits_0^t \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{a}\,\varphi(\tau) + \frac{1}{r_0}\int\limits_0^t \frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{\sqrt{\tau-\xi}} \right\} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}.$$

Указание. С помощью замены $v(r,\, t) = ru(r,\, t)$, где $u(r,\, t)$ — температура пространства, приходим к задаче:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2\,\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}, \quad r_0 \leqslant r < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$v(r,\, 0) = 0, \quad r_0 < r < +\infty,$$

$$v(r_0,\, t) = r_0\varphi(t), \quad 0 < t < +\infty,$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=r_0} = -\frac{r_0}{\lambda}\,q(t) + \varphi(t), \quad 0 < t < +\infty,$$

где $q(t)$ — искомая функция. Затем, как в задачах 95 и 96 из § 2 гл. III, решая интегральное уравнение Абеля, находим $q(t)$.

Глава VI

УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

§ 1. Физические задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа; постановка краевых задач

1. За лагранжевы координаты[1] частицы примем ее декартовы координаты x, y, z в невозмущенном состоянии. Пусть декартовы координаты частицы в возмущенном состоянии равны

$$\xi = x + u^{(1)}(x, y, z, t),$$
$$\eta = y + u^{(2)}(x, y, z, t),$$
$$\zeta = z + u^{(3)}(x, y, z, t).$$

Вектор $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i}u^{(1)} + \boldsymbol{j}u^{(2)} + \boldsymbol{k}u^{(3)}$ характеризует смещение частицы из невозмущенного состояния x, y, z. Вектор скорости частицы равен

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \boldsymbol{i}\dot{u}^{(1)} + \boldsymbol{j}\dot{u}^{(2)} + \boldsymbol{k}\dot{u}^{(3)} = \boldsymbol{i}v^{(1)} + \boldsymbol{j}v^{(2)} + \boldsymbol{k}v^{(3)},$$

где точка сверху означает производную по времени. Потенциал скоростей и потенциал смещений определяются равенствами

$$\operatorname{grad} U = \boldsymbol{v}, \quad \operatorname{grad} \Phi = \boldsymbol{u},$$

каждый с точностью до произвольной слагаемой функции времени. Возмущение плотности $\widetilde{\rho}$ и возмущение давления p определяются, как и раньше[2]. Каждая из величин

$$\widetilde{\rho},\ \widetilde{p},\ \rho,\ p,\ U,\ \Phi,\ u^{(i)},\ v^{(i)}, \quad i = 1, 2, 3,$$

в предположении малости возмущений удовлетворяет уравнению

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \tag{1}$$

где $a^2 = k\dfrac{p_0}{\rho_0}$, $k = \dfrac{c_p}{c_v}$ — отношение удельной теплоемкости при постоянном давлении к удельной теплоемкости при постоянном объеме; $p_0 = \text{const}$ и $\rho_0 = \text{const}$ — невозмущенное давление и невозмущенная плотность. Начальные условия записываются в виде

---

[1] Подробнее о лагранжевых координатах см. задачу 4 § 1 гл. II.

[2] См. задачу 4 § 1 гл. II.

$$u(x, y, z, 0) = f(x, y, z), \quad u_t(x, y, z, 0) = F(x, y, z),$$
$$-\infty < x, y, z < +\infty. \quad (2)$$

Каждая из величин $\rho, \widetilde{p}, U, \Phi, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}$ может быть выражена через любую другую из этих величин с помощью соотношений

$$\widetilde{p} = a^2\widetilde{\rho}, \quad (3)$$

$$\rho_0 U_t + \widetilde{p} = 0, \quad (4)$$

$$\rho_0 \Phi_{tt} + \widetilde{p} = 0, \quad (5)$$

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} U, \quad (6)$$

$$\boldsymbol{u} = \operatorname{grad} \Phi, \quad (7)$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{u}}{dt}. \quad (8)$$

Указание. Уравнение неразрывности в лагранжевых координатах можно получить, рассматривая деформацию элементарного объема $\Delta x\, \Delta y\, \Delta z$ и учитывая, что его масса остается неизменной; коэффициентом деформации объема является определитель Остроградского («якобиана»). Линеаризованное уравнение адиабаты и уравнения (4) и (5) выводятся так же, как соответствующие уравнения в решении задачи 4 § 1 гл. II.

2. На плоскости, ограничивающей рассматриваемое полупространство, должны выполняться граничные условия:

а) $\dfrac{\partial \rho}{\partial n} = \dfrac{\partial p}{\partial n} = \dfrac{\partial U}{\partial n} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$, где $\dfrac{\partial}{\partial n}$ — производная по нормали к плоскости;

б) $\dfrac{\partial U}{\partial n} = V$, $\dfrac{\partial \Phi}{\partial n} = \displaystyle\int_0^t V dt$, $\dfrac{\partial \widetilde{p}}{\partial n} = -\rho_0 \dot{V}$, $\dfrac{\partial \rho}{\partial n} = -\dfrac{\rho_0}{a^2}\dot{V}$, где $V(t)$ — проекция скорости плоскости на выбранное направление нормали, которому соответствует производная $\dfrac{\partial}{\partial n}$.

3. Величины по одну сторону от поверхности Σ отмечены индексом 1, а по другую — индексом 2. На поверхности Σ должны выполняться граничные условия

$$\rho_{01} U_1 = \rho_{02} U_2, \quad (1)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial n} = \frac{\partial U_2}{\partial n}, \quad (2)$$

где $\dfrac{\partial}{\partial n}$ означает производную по нормали к поверхности Σ, а ρ_{01} и ρ_{02} — невозмущенные плотности газов.

Указание. Граничное условие (1) получается с помощью равенства (4) из ответа к задаче 1. Граничное условие (2) выражает сохранение границы раздела газов (равенство нормальных составляющих скорости частиц обоих газов, примыкающих в одном и том же месте к поверхности раздела Σ).

4. Для отклонения $u(x, y, t)$ частиц мембраны от плоскости невозмущенного состояния (плоскости XOY) получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad 0 < t < +\infty, \quad (x, y) \in G, \tag{1}$$

где G — область в плоскости (x, y), ограниченная контуром Γ,

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = F(x, y), \quad (x, y) \in G, \tag{2}$$

$$u\big|_\Gamma = 0, \quad 0 < t < +\infty \text{ [1]}. \tag{3}$$

5. Уравнение (1) в ответе к предыдущей задаче нужно заменить уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_1^2 \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\} - \frac{\rho_0 a_0^2}{\Omega_0 \rho_1} \iint\limits_G u \, dx \, dy, \tag{1}$$

где a_1 — скорость распространения поперечных волн в мембране, ρ_1 — поверхностная плотность мембраны, Ω_0 — объем сосуда, ρ_0 — невозмущенная плотность воздуха, a_0 — скорость распространения малых возмущений в воздухе.

Указание. В силу условия $a_0 \gg a_1$ давление воздуха, заключенного в сосуде, при подсчете сил, действующих на элемент мембраны, можно считать не зависящим от координат рассматриваемого элемента мембраны, а определяющимся общим изменением объема сосуда за счет прогиба мембраны.

Замечание. Если скорость распространения малых возмущений в окружающей среде значительно меньше скорости распространения возмущений в мембране, т. е. если $a_0 \ll a_1$, то реакция среды на каждый элемент мембраны определяется состоянием среды в непосредственной близости к этому элементу. В этом случае уравнение колебаний мембраны [1] может быть записано в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_1^2 \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\} - \frac{\rho_0}{\rho_1} \frac{\partial u}{\partial t}.$$

6.

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{\nabla}) \right\}^2 U = a^2 \Delta U, \tag{1}$$

где U — потенциал скоростей частиц газа, вызванных малыми возмущениями $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{i} v_1^{(0)} + \boldsymbol{j} v_2^{(0)} + \boldsymbol{k} v_3^{(0)}$ — вектор скорости движения среды, оператор $(\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{\nabla})$ определяется соотношением

$$(\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{\nabla}) = v_1^{(0)} \frac{\partial}{\partial x} + v_2^{(0)} \frac{\partial}{\partial y} + v_3^{(0)} \frac{\partial}{\partial z}, \tag{2}$$

причем потенциал U рассматривается как функция координат (x, y, z) геометрической точки и времени t в неподвижной системе координат, относительно которой среда движется со скоростью $\boldsymbol{v}_0$; иными словами, U изучается в эйлеровых координатах [3].

---

[1] Подробный вывод уравнения (1) см. в [7, с. 31–34].

[2] См. [38, с. 224].

[3] Подробнее о лагранжевых и эйлеровых координатах см. задачу 4 § 1 гл. II.

Если ось x совпадает по направлению с вектором $\boldsymbol{v}_0$, то

$$(\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{\nabla}) = \boldsymbol{v}_0 \frac{\partial}{\partial x}$$

и уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2v_0 \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial t} + v_0^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = a^2 \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right\}. \qquad (1')$$

Такие же уравнения имеют место для плотности и для давления.

У к а з а н и е. Сначала нужно вывести основные уравнения гидродинамики в эйлеровых координатах

$$\frac{\partial v^*}{\partial t} + (v^*, \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v}^* = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v^*) = 0, \qquad (4)$$

$$p = f(\rho), \quad f(\rho) = p_0 \frac{\rho^k}{\rho_0^k}, \quad k = \frac{c_p}{c_v}, \qquad (5)$$

$\boldsymbol{v}^* = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{\rho} = \rho_0 + \widetilde{\rho}$, $p = p_0 + \widetilde{p}$, где v^* — полная («абсолютная») скорость частиц, v_0 — переносная скорость, $\boldsymbol{v}$ — относительная скорость, а величины ρ_0, p_0, $\widetilde{\rho}$, $\widetilde{p}$ определяются, как и в задаче 1. Линеаризация уравнения (3), (4), (5) и исключение p и ρ приведут к уравнению (1) ответа.

Уравнение (1) может быть получено также следующим путем. В системе координат (O', x', y', z'), движущейся вместе со средой и совпадающей в момент $t = 0$ с неподвижной системой (O, x, y, z), для потенциала $U = U(x', y', z', t)$ будет иметь место уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right). \qquad (6)$$

Переход от эйлеровых координат (x', y', z', t) к эйлеровым координатам (x, y, z, t) преобразует уравнение (6) в уравнение (1) ответа.

7. Совместим ось Oz декартовой прямоугольной системы с ребром клина так, чтобы клин был симметричен относительно плоскости xOz и чтобы направление скорости набегающего потока v_0 совпадало с направлением оси Ox (рис. 49). Угол раствора клина обозначим через 2ε.

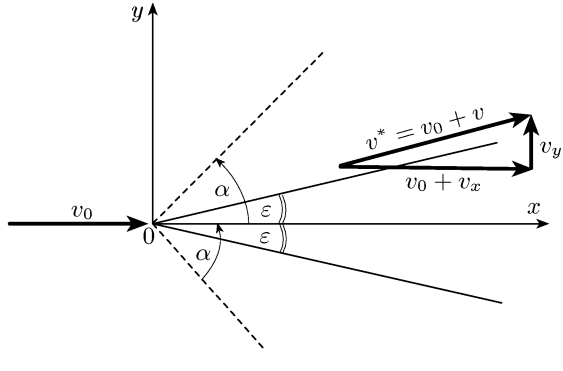


Рис. 49

Так как в данном случае потенциал скоростей U, $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} U$, не будет зависеть от z и t, то уравнение (1′) ответа к предыдущей задаче преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{M^2 - 1} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \tag{1}$$

где $M = \dfrac{\boldsymbol{v}_0}{a} > 1$ в силу условия задачи (скорость набегающего потока больше скорости звука). Уравнение (1) имеет место между поверхностью клина и волной слабого разрыва[1]. На поверхности клина имеем

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \left(v_0 + \frac{\partial U}{\partial x}\right) \operatorname{tg} \varepsilon \quad \text{при} \quad y = x \operatorname{tg} \varepsilon. \tag{2}$$

На волне слабого разрыва

$$U = 0 \quad \text{при} \quad y = x \operatorname{tg} \alpha, \tag{3}$$

где $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}$.

8. В цилиндрической системе координат, ось Oz которой совпадает с осью конуса (рис. 50), для потенциала скоростей $U = U(r, z)$ получим краевую задачу

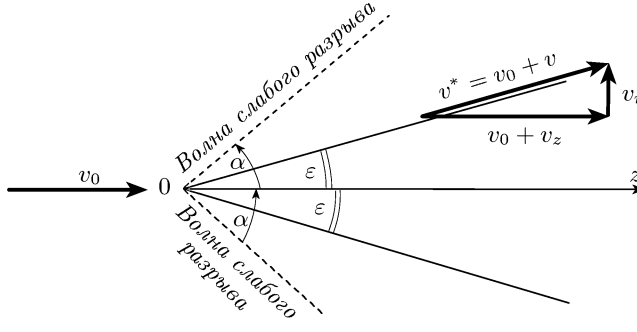


Рис. 50

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{M^2 - 1} \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right\} \tag{1}$$

между поверхностью конуса и поверхностью волны слабого разрыва

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \left\{ v_0 + \frac{\partial U}{\partial z} \right\} \operatorname{tg} \varepsilon \tag{2}$$

на поверхности конуса, т. е. при $r = z \operatorname{tg} \alpha$; на поверхности волны слабого разрыва

$$U = 0. \tag{3}$$

[1] Волна слабого разрыва отделяет возмущенную область от невозмущенной; на поверхности волны слабого разрыва потенциал U и его производные первого порядка непрерывны. Подробнее см. [15].

9. Для $\zeta(x, y, t)$ получаем краевую задачу

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right), \tag{1}$$

$a^2 = gh$, g — ускорение силы тяжести;

$$\zeta(x, y, 0) = f(x, y), \quad \zeta_t(x, y, 0) = F(x, y), \tag{2}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial n} = 0 \quad \text{на стенке бассейна}, \tag{3}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial n}$ — производная по нормали к стенке. Для потенциала горизонтальных скоростей $U(x, y, t)$ получаем краевую задачу

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right), \quad a^2 = gh, \tag{1'}$$

$$U(x, y, 0) = f_1(x, y), \quad U_t(x, y, 0) = F_1(x, y), \tag{2'}$$

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0 \quad \text{на стенке бассейна}. \tag{3'}$$

Указание. Получить сначала:

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -\operatorname{div}\boldsymbol{w},$$

где $\boldsymbol{w}$ — вектор горизонтальной скорости;

уравнение движения

$$\rho\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t} = -\operatorname{grad}_{xy} p = -\boldsymbol{i}\frac{\partial p}{\partial x} - \boldsymbol{j}\frac{\partial p}{\partial y};$$

уравнение, выражающее давление в жидкости на расстоянии z от дна бассейна,

$$p - p_0 = g\rho(h + \zeta - z),$$

а затем произвести надлежащие исключения (см. также решение задачи 1).

10. Уравнение для потенциала горизонтальных скоростей принимает вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right\} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p_0}{\partial t}, \quad a^2 = gh. \tag{1}$$

Начальные и граничные условия формулируются, как в ответе к предыдущей задаче.

11.

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} + X,$$

$$\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} + Y,$$

$$\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + Z,$$

где σ_x, τ_{xy}, τ_{xz} — проекции на оси координат вектора напряжения, действующего на площадку, перпендикулярную к оси x; аналогично

определяются τ_{yx}, σ_y, τ_{yz} и τ_{zx}, τ_{zy}, σ_z; при этом σ_x, σ_y, σ_z называются нормальными напряжениями, а τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz} — касательными или скалывающими напряжениями; X, Y, Z — проекции на оси координат вектора плотности объемных сил.

12. Указание. Из уравнений движения, полученных в ответе к задаче 11, и закона Гука, приведенного в примечании 2 к настоящей задаче, нетрудно вывести следующие уравнения для составляющих вектора $\boldsymbol{U}$:

$$\boldsymbol{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mu\Delta u + (\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial x} + X,$$
$$\boldsymbol{\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \mu\Delta v + (\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial y} + Y,$$
$$\boldsymbol{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \mu\Delta w + (\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial z} + Z,$$

где $\Theta = \operatorname{div}\boldsymbol{U}$.

14. $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{i}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\right) + \boldsymbol{j}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} - \dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)$,

$$\varphi = \varphi(x,\, y,\, t), \quad \psi = \psi(x,\, y,\, t),$$

$$\rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = (\lambda+2\mu)\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right\} + F_1(x,\, y,\, t),$$

$$\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \mu\left\{\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right\} + F_2(x,\, y,\, t),$$

$F_1(x,\, y,\, t)$ и $F_2(x,\, y,\, t)$ — свободные члены, получающиеся из вектора плотности объемных сил.

15. а)
$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_x\cos(n,\, x) + \tau_{xy}\cos(n,\, y) + \tau_{xz}\cos(n,\, z) = 0,\\
&\tau_{yx}\cos(n,\, x) + \sigma_y\cos(n,\, y) + \tau_{yz}\cos(n,\, z) = 0,\\
&\tau_{zx}\cos(n,\, x) + \tau_{zy}\cos(n,\, y) + \sigma_z\cos(n,\, z) = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $\cos(n,\, x)$, $\cos(n,\, y)$, $\cos(n,\, z)$ — направляющие косинусы нормали к рассматриваемому элементу границы.

б) $$\boldsymbol{U} = 0, \quad \text{т. е.} \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0. \tag{2}$$

Принимая плоскость xz за граничную и направляя ось y внутрь тела, в случае плоской задачи [1]) получим следующее выражение граничных условий:

а′) $$\left[a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + (a^2-2b^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - 2b^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\right]_{y=0} = 0,$$

$$\left[2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right]_{y=0} = 0; \tag{1′}$$

б′) $$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\right]_{y=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\right]_{y=0} = 0,$$

[1]) См. задачу 14.

где φ и ψ — потенциалы, фигурирующие в ответе к предыдущей задаче.

Указание. Левые части равенства (1) являются проекциями на оси координат вектора напряжения, приложенного к площадке с нормалью n [1]).

16. Для радиального смещения $u(r,\,t)$ частицы трубы, отстоящей от оси трубы на расстоянии r, получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2}\right) + F(r,\,t), \quad r_1 \leqslant r \leqslant r_2, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

где r_1 и r_2 — внутренний и внешний радиусы трубы, $a^2 = \dfrac{\lambda + 2\mu}{\rho}$, a — скорость распространения продольных деформаций,

$$\left[r\,\frac{\partial u}{\partial r} + hu\right]_{r=r_1} = 0, \quad \left[r\,\frac{\partial u}{\partial r} + hu\right]_{r=r_2} = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

где $h = \dfrac{\lambda}{\lambda + 2\mu}$,

$$\left.\begin{aligned} u(r,\,0) &= \varphi(r), \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0, \\ u_t(r,\,0) &= \psi(r), \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

17. Для радиального смещения $u(r,\,t)$ частиц сферической оболочки при условиях задачи получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r^2}\right\}, \quad r_1 \leqslant r \leqslant r_2, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

a^2 имеет тот же смысл, что и в предыдущей задаче,

$$(\lambda + 2\mu)\,\frac{\partial u}{\partial r} + \lambda\,\frac{u}{r} = \begin{cases} -p(t) & \text{при} \quad r = r_1, \\ 0 & \text{при} \quad r = r_2, \end{cases} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} u(r,\,0) &= 0, \\ u_t(r,\,0) &= 0, \end{aligned}\right\} \; r_1 \leqslant r \leqslant r_2. \tag{3}$$

18. Для поперечных отклонений от невозмущенного положения точек пластинки получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right) = \frac{1}{2\rho h}\,p(x,\,y,\,t), \tag{1}$$

где $c^2 = \dfrac{Eh^2}{3\rho(1 - m^2)}$, E — модуль Юнга, m — коэффициент Пуассона, $2h$ — толщина пластинки, ρ — плотность массы пластинки, $p(x,\,y,\,t)$ — поперечная сила, действующая на единицу площади пластинки.

[1]) Подробнее см. [26, с. 17–18].

Если же пластинка лежит на упругом основании, то

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right) + \frac{k}{2h\rho}\,u = \frac{1}{2h\rho}\,p(x,\,y,\,t), \qquad (1')$$

k — коэффициент упругости основания[1]).

Примечание. Совокупность членов в круглых скобках удобно записывать в виде $\Delta_2\Delta_2 u$, где $\Delta_2 = \operatorname{div}\operatorname{grad}$ — оператор Лапласа на плоскости.

19. $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)^2 u = 0, \quad 0 \leqslant r < r_0,$$

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 < t < +\infty, \qquad (1)$$

$$u(r,\,\varphi,\,0) = f(r,\,\varphi), \quad u_t(r,\,\varphi,\,0) = F(r,\,\varphi),$$

$$0 \leqslant r \leqslant r_0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \qquad (2)$$

$$u(r_0,\,\varphi,\,t) = u_r(r_0,\,\varphi,\,t) = 0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 < t < +\infty. \qquad (3)$$

20. В сферических координатах с полюсом в диполе с осью $\theta = 0$, направленной по диполю, получаем краевую задачу

$$\frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial t^2} = a^2\left\{\frac{1}{r}\,\frac{\partial^2 (rH_\varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta H_\varphi)\right]\right\}, \quad r > 0, \quad t > 0, \qquad (1)$$

$$H_\varphi\big|_{t=0} = 0 \quad \text{при} \quad r > 0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial H_\varphi}{\partial t}\bigg|_{t\to 0} = -\frac{3aM_0\sin\theta}{r^4} \quad \text{при} \quad r > 0, \qquad (2')$$

$$H_\varphi\big|_{r\to 0} = -\frac{\omega M_0}{ar^2}\,\sin\omega t\sin\theta \quad \text{при} \quad t > 0. \qquad (3)$$

Указание. Воспользоваться системой уравнений Максвелла в сферических координатах. В силу цилиндрической симметрии и в силу элементарных электродинамических соображений $H_r = H_\theta = E_\varphi = 0$ при $t \geqslant 0$.

При $t = 0$ имеется электростатическое поле, порожденное электростатическим диполем, так что $H_\varphi\big|_{t=0} = 0$ и

$$E_r\big|_{t=0} = \frac{2M_0\cos\theta}{r^3}, \quad E_\theta\big|_{t=0} = \frac{M_0\sin\theta}{r^3}.$$

Начальное условие (2′) получаем из этих соотношений с помощью максвелловского уравнения

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \theta}\right] = -\frac{1}{a}\,\frac{\partial H_\varphi}{\partial t}.$$

Наконец, граничное условие (3) выражает напряженность магнитного поля в точках, столь близких к диполю, что можно пренебречь временем распространения возмущений (см. [17]).

[1]) См. задачу 10 § 1 гл. II.

§ 2. Простейшие задачи; различные приемы решения

21. а) $u(r,\,t) =$

$$= \frac{(r-at)\varphi(r-at)+(r+at)\varphi(r+at)}{2r} + \frac{1}{2ar}\int\limits_{r-at}^{r+at} \xi\psi(\xi)\,d\xi, \quad (1)$$

где функции $\varphi(\xi)$ и $\psi(\xi)$ продолжены четно для отрицательных ξ;

б) $$\lim_{r\to 0} u(r,\,t) = at\varphi'(at) + \varphi(at) + t\psi(at). \quad (2)$$

Указание. Формула (1) получается в предположении, что $u(r,\,t)$ остается ограниченным при $r \to 0$.

22. $$u(r,\,t) = \frac{1}{2ar}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{r-a(t-\tau)}^{r+a(t-\tau)} \xi f(\xi,\,\tau)\,d\xi,$$

где $f(\xi,\,\tau)$ продолжена четно для отрицательных значений ξ.

23. При начальных условиях а)

$$u(r,\,t) = \left\{\begin{array}{lll} U_0 & \text{при} & 0 \leqslant t < \dfrac{r_0-r}{a}, \\ U_0\,\dfrac{r-at}{2r} & \text{при} & \dfrac{r_0-r}{a} < t < \dfrac{r_0+r}{a}, \\ 0 & \text{при} & \dfrac{r_0+r}{a} < t < +\infty, \end{array}\right\} \quad \text{при} \quad 0 < r < r_0,$$

$$u(r,\,t) = \left\{\begin{array}{lll} 0 & \text{при} & 0 \leqslant t < \dfrac{r-r_0}{a}, \\ U_0\,\dfrac{r-at}{2r} & \text{при} & \dfrac{r-r_0}{a} < t < \dfrac{r+r_0}{a}, \\ 0 & \text{при} & \dfrac{r+r_0}{a} < t < +\infty, \end{array}\right\} \quad \text{при} \quad r_0 < r < \infty.$$

При начальных условиях б)

$$u(r,\,t) = \left\{\begin{array}{lll} U_0 t & \text{при} & 0 \leqslant t < \dfrac{r_0-r}{a}, \\ U_0\,\dfrac{r_0^2-(r-at)^2}{4ar} & \text{при} & \dfrac{r_0-r}{a} < t < \dfrac{r_0+r}{a}, \\ 0 & \text{при} & \dfrac{r_0+r}{a} < t < +\infty, \end{array}\right\} \quad \text{при} \quad 0 < r < r_0,$$

$$u(r,\,t) = \left\{\begin{array}{lll} 0 & \text{при} & 0 \leqslant t < \dfrac{r-r_0}{a}, \\ U_0\,\dfrac{r_0^2-(r-at)^2}{4ar} & \text{при} & \dfrac{r-r_0}{a} < t < \dfrac{r_0+r}{a}, \\ 0 & \text{при} & \dfrac{r_0+r}{a} < t < +\infty, \end{array}\right\} \quad \text{при} \quad r_0 < r < +\infty.$$

24. Потенциал скоростей частиц газа равен $u(r,t)$ из ответа к предыдущей задаче при начальных условиях б), если положить $U_0 = -a^2\dfrac{\rho_1}{\rho_0}$, где $a^2 = k\dfrac{p_0}{\rho_0}$.

25. Пусть $U(r,\,t)$ означает решение задачи 23, б) для неограниченного пространства (см. ответ к задаче 23, б)); тогда:

а) $u(x,\,y,\,z,\,t) = U(\widetilde{r},\,t) - U(\widetilde{\widetilde{r}},\,t)$;

б) $u(x,\,y,\,z,\,t) = U(\widetilde{r},\,t) + U(\widetilde{\widetilde{r}},\,t)$;

здесь $\widetilde{r} = \sqrt{x^2+y^2+(z-z_0)^2}$, $\widetilde{\widetilde{r}} = \sqrt{x^2+y^2+(z+z_0)^2}$.

26. Пусть $U(r,\,t)$ означает ту же функцию, что и в ответе к предыдущей задаче; тогда:

а) $u(x,\,y,\,z,\,t) = U(r_1,\,t) - U(r_2,\,t) + U(r_3,\,t) - U(r_4,\,t)$;

б) $u(x,\,y,\,z,\,t) = U(r_1,\,t) + U(r_2,\,t) - U(r_3,\,t) - U(r_4,\,t)$;

здесь

$$r_1 = \sqrt{x^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}, \quad r_2 = \sqrt{x^2+(y+y_0)^2+(z-z_0)^2},$$
$$r_3 = \sqrt{x^2+(y+y_0)^2+(z+z_0)^2}, \quad r_4 = \sqrt{x^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}.$$

27. $$\varphi(r,t) = \frac{-q\left(t-\dfrac{r}{a}\right)}{4\pi r}, \quad q(t) = 0 \quad \text{при} \quad t<0.$$

Указание. $\varphi(r,t)$ является решением краевой задачи

$$\varphi_{tt} = a^2\Delta\varphi, \tag{1}$$
$$\varphi\big|_{t=0} = \varphi_t\big|_{t=0} = 0, \tag{2}$$
$$\lim_{r\to 0} 4\pi r^2\varphi_r = q(t). \tag{3}$$

28. а) Пусть источник лежит в плоскости $z = z_0$ и имеет полярные координаты r_0, θ_0, $0 < \theta_0 < \dfrac{\pi}{n}$. Тогда, обозначая через $\varphi(r,\,t)$ решение предыдущей задачи, получим

$$\varphi(x,\,y,\,z,\,t) = \sum_{k=0}^{n-1}\left\{\varphi(r_k^+,\,t) + \varphi(r_k^-,\,t)\right\}, \tag{1}$$

где

$$r_k^+ = \sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\left(\theta+\theta_0+\frac{2k\pi}{n}\right)+(z-z_0)^2}, \tag{2}$$

$$r_k^- = \sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\left(\theta-\theta_0-\frac{2k\pi}{n}\right)+(z-z_0)^2}. \tag{3}$$

б) Пусть источник лежит в слое $0 \leqslant z \leqslant l$ и имеет координаты x_0, y_0, z_0, $0 < z_0 < l$. Обозначая через $\varphi(r,\,t)$ решение задачи 27, получим

$$\varphi(x,\,y,\,z,\,t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left\{\varphi(r_k^+,\,t) + \varphi(r_k^-,\,t)\right\}, \tag{1'}$$

где

$$r_k^+ = \sqrt{r^2 + (z + z_0 - 2kl)^2}, \tag{2'}$$

$$r_k^- = \sqrt{r^2 + (z - z_0 - 2kl)^2}, \tag{3'}$$

здесь $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

Заметим, что при каждом значении $t > 0$ формально бесконечный ряд $(1')$ фактически сводится всякий раз к сумме конечного числа членов, так как

$$\varphi(r_k^+, t) = 0 \quad \text{при} \quad t < \frac{r_k^+}{a}, \quad \varphi(r_k^-, t) = 0 \quad \text{при} \quad t < \frac{r_k^-}{a}.$$

29. $u^*(x, y, t) = \dfrac{1}{2\pi a}\left\{\dfrac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{\rho \leqslant at} \dfrac{\varphi^*(\xi, \eta)d\xi\, d\eta}{\sqrt{a^2t^2 - \rho^2}} + \iint\limits_{\rho \leqslant at} \dfrac{\psi^*(\xi, \eta)d\xi\, d\eta}{\sqrt{a^2t^2 - \rho^2}} + \right.$

$$\left. + \int\limits_0^t d\tau \iint\limits_{\rho \leqslant a(t-\tau)} \frac{f^*(\xi, \eta, \tau)d\xi\, d\eta}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - \rho^2}}\right\},$$

где $\rho = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$.

30. $u^*(x, y, t) = \dfrac{1}{2\pi a}\left\{\dfrac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{\rho \leqslant at} \varphi^*(\xi, \eta)\, \dfrac{\operatorname{ch} c\sqrt{a^2t^2 - \rho^2}}{\sqrt{a^2t^2 - \rho^2}}\, d\xi\, d\eta + \right.$

$$+ \iint\limits_{\rho \leqslant at} \psi^*(\xi, \eta)\, \frac{\operatorname{ch} c\sqrt{a^2t^2 - \rho^2}}{\sqrt{a^2t^2 - \rho^2}}\, d\xi\, d\eta +$$

$$\left. + \int\limits_0^t d\tau \iint\limits_{\rho \leqslant a(t-\tau)} f^*(\xi, \eta, \tau)\, \frac{\operatorname{ch} c\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - \rho^2}}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - \rho^2}}\, d\xi\, d\eta\right\},$$

где $\rho = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$, если в уравнении перед c^2u стоит знак плюс; если же в уравнении перед этим членом стоит знак минус, то в приведенном ответе всюду ch нужно заменить на cos.

Указание. Решение уравнения

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \tag{1}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = F(x, y)e^{cz}, \tag{2}$$

связано соотношением

$$u(x, y, z, t) = e^{cz}u^*(x, y, t)$$

с решением уравнения

$$u^*_{tt} = a^2(u^*_{xx} + u^*_{yy}) + c^2u^*,$$

удовлетворяющим начальным условиям

$$u^*\big|_{t=0} = 0, \quad u^*_t\big|_{t=0} = F(x, y),$$

что нетрудно получить с помощью представления решения задачи (1), (2) через интеграл Пуассона[1]). Если же в уравнении перед c^2u стоит знак минус, то нужно произвести замену $u(x, y, z, t) = e^{icz}u^*(x, y, t)$.

[1]) См. [2, т. II, с. 553–554].

31. Для потенциала скоростей $u(r,\,t)$ получаем выражение

$$u(\rho,\,t)=\begin{cases}0 & \text{при}\quad t\leqslant\dfrac{\rho}{a},\\[2ex] -\dfrac{1}{2\pi a}\displaystyle\int_0^{t-\frac{\rho}{a}}\frac{q(\tau)\,d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-\rho^2}} & \text{при}\quad t>\dfrac{\rho}{a},\end{cases}\tag{1}$$

или эквивалентное выражение

$$u(\rho,\,t)=\begin{cases}0 & \text{при}\quad t\leqslant\dfrac{\rho}{a},\\[2ex] -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\operatorname{Arcch}\frac{at}{\rho}} q\left(t-\frac{\rho}{a}\operatorname{ch}\zeta\right)d\zeta & \text{при}\quad t>\dfrac{\rho}{a},\end{cases}\tag{2}$$

или, если под интегралом считать $q(t)=0$ при $t<0$,

$$u(\rho,\,t)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} q\left(t-\frac{\rho}{a}\operatorname{ch}\zeta\right)d\zeta,\tag{3}$$

где $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, если прямая, на которой расположены источники, принята за ось z.

Указание. $u(\rho,\,t)$ является решением краевой задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}\right),\quad 0\leqslant\rho<+\infty,\quad 0<t<+\infty,$$

$$\lim_{\rho\to 0}\left(2\pi\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)=q(t),\quad 0<t<+\infty,$$

$$u(\rho,\,0)=u_t(\rho,\,0)=0,\quad 0<\rho<+\infty.$$

Формально $u(\rho,\,t)$ в форме (3) может быть получено методом «спуска» (интегрированием по z от $-\infty$ до $+\infty$) из решения задачи 27; затем нетрудно проверить, что при условии ограниченности $q'(t)$ полученная таким образом функция удовлетворяет всем условиям задачи.

Замечание. В начале координат $u(\rho,\,t)$ имеет логарифмическую особенность относительно $\boldsymbol{\rho}$. Используя форму (1) для $u(\rho,\,t)$ и применяя интегрирование по частям и формулу Тейлора, можно представить $u(\rho,\,t)$ в виде

$$u(\rho,\,t)=\frac{1}{a^2}\,q\left(t-\frac{\rho}{a}\right)\ln\rho-\frac{1}{a^2}\,q(0)\ln 2t-\frac{1}{a^2}\int_0^t q'(\tau)\ln 2(t-\tau)d\tau+\varepsilon(\rho,\,t),$$

где $\varepsilon(\rho,\,t)\to 0$ при $\rho\to 0$.

32.
$$u(x,\,y,\,t)=-\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{4}\int_0^{+\infty} q\left(t-\frac{\rho_k}{a}\operatorname{ch}\zeta\right)d\zeta,$$

где

$$\rho_1=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},\quad \rho_2=\sqrt{(x+x_0)^2+(y-y_0)^2},$$
$$\rho_3=\sqrt{(x+x_0)^2+(y+y_0)^2},\quad \rho_4=\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}.$$

33. Для потенциала скоростей частиц газа вне сферы получаем выражение

$$U(r,\,t)=\left\{\begin{array}{ll} -a\,\dfrac{r_0}{r}\,\exp\Big\{-\dfrac{a}{r_0}\,\Big(t-\dfrac{r-r_0}{a}\Big)\Big\}\displaystyle\int_0^t\mu(\tau)\exp\Big\{\dfrac{a\tau}{r_0}\Big\}\,d\tau, & t>\dfrac{r-r_0}{a},\\[2ex] 0, \quad t<\dfrac{r-r_0}{a}, & \end{array}\right\}\quad r_0<r<+\infty,$$

а внутри сферы выражение

$$U(r,\,t)=-\frac{r_0A}{\dfrac{\omega}{a}\cos\dfrac{\omega}{a}\,r_0+\dfrac{a}{r_0}\sin\dfrac{\omega}{a}\,r_0}\,\frac{\sin\dfrac{\omega}{a}\,r}{r}\sin\omega t\,+$$

$$+\sum_{n=1}^{+\infty}B_n\,\frac{\sin\lambda_n r}{r}\sin a\lambda_n t,\quad 0\leqslant r<r_0,\quad 0<t<+\infty,$$

где λ_n — положительные корни уравнения

$$\operatorname{tg}(r_0\lambda)=-\frac{r_0\lambda}{a},$$

а

$$B_n=\frac{\displaystyle\int_0^{r_0}f(r)\sin(\lambda_n r)\,dr}{\displaystyle\int_0^{r_0}\sin^2(\lambda_n r)\,dr},\qquad f(r)=\frac{\omega r_0A}{\dfrac{\omega}{a}\cos\dfrac{\omega}{a}\,r_0+\dfrac{a}{r_0}\sin\dfrac{\omega}{a}\,r_0}\,\sin\frac{\omega}{a}\,r.$$

Замечание. Выражение для $U(r,\,t)$ при $0\leqslant r\leqslant r_0$ получено в предположении, что нет резонанса, т. е. что $\widetilde{\lambda}=\dfrac{\omega}{a}$ не совпадает ни с одним из собственных значений λ_n [1]).

34. Пусть центр сферы лежит на оси Oz в точке $z_0>r_0>0$, а плоскость $z=0$ является граничной для рассматриваемого полупространства. Тогда, обозначая через $U(r,\,t)$ решение предыдущей задачи, получим решение задачи 34 в виде

$$u(x,\,y,\,z,\,t)=U(r_1,\,t)+U(r_2,\,t)\quad\text{при}\quad r_1>r_0\quad\text{и}\quad z>0,$$

$$u(x,\,y,\,z,\,t)=U(r_1,\,t)\qquad\text{при}\quad 0<r_1<r_0,$$

где $r_1=\sqrt{x^2+y^2+(z-z_0)^2}$, $r_2=\sqrt{x^2+y^2+(z+z_0)^2}$.

35. Для потенциала скоростей получаем выражение

$$U=\left\{\begin{array}{ll}\operatorname{div}\dfrac{\boldsymbol{f}\Big(t-\dfrac{r-r_0}{a}\Big)}{r} & \text{при}\quad t>\dfrac{r-r_0}{a},\\[2ex] 0 & \text{при}\quad t<\dfrac{r-r_0}{a},\end{array}\right.$$

где вектор

[1]) О разыскании решения в случае резонанса см. задачу 134 § 3 гл. II.

$$\boldsymbol{f}(t) = ar_0^2 \exp\left\{-\frac{at}{r_0}\right\} \int\limits_0^t \boldsymbol{V}(\tau) \sin\frac{a(t-\tau)}{r_0} \exp\left\{\frac{a\tau}{r_0}\right\} d\boldsymbol{\tau}.$$

Указание. Решение задачи можно искать в виде

$$U = \operatorname{div} \frac{\boldsymbol{f}\left(t - \frac{r-r_0}{a}\right)}{r}.$$

Скорость частиц газа

$$u = \operatorname{grad} U = \frac{3(\boldsymbol{fn})\boldsymbol{n} - \boldsymbol{f}}{r^3} + \frac{3(\boldsymbol{f'n})\boldsymbol{n} - \boldsymbol{f'}}{ar^2} + \frac{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{nf''})}{a^2 r}$$

($\boldsymbol{n}$ — единичный вектор в направлении $\boldsymbol{r}$; штрих означает дифференцирование $\boldsymbol{f}$ по его аргументу) удовлетворяет граничному условию $v_r = \boldsymbol{Vn}$ при $r = r_0$, откуда для $\boldsymbol{f}$ получаем уравнение

$$\boldsymbol{f''}(t) + \frac{2a}{r_0}\boldsymbol{f'}(t) + \frac{2a^2}{r_0^2}\boldsymbol{f}(t) = r_0 a^2 \boldsymbol{V}(t).$$

36. Для потенциала скоростей U, вызванных малым возмущением, и для возмущения давления $\widetilde{p}$ получим выражения

$$U(x, y) = \frac{v_0(y - x\operatorname{tg}\alpha)}{\operatorname{ctg}\varepsilon + \operatorname{tg}\alpha}, \quad 0 < x < +\infty, \quad x\operatorname{tg}\varepsilon \leqslant y \leqslant x\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\widetilde{p} = \rho_0 v_0^2 \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\varepsilon + \operatorname{tg}\alpha}.$$

Указание. Для определения $\widetilde{p}$ нужно воспользоваться соотношением (4) ответа к задаче 1 [1]).

37. $U(r, x) =$

$$= -v_0 r \frac{-\sqrt{\frac{x^2}{r^2}\,tg^2\alpha - 1} + \frac{1}{2}\frac{x}{r}\operatorname{tg}\alpha \ln\dfrac{\frac{x}{r}\operatorname{tg}\alpha + \sqrt{\frac{x^2}{r^2}\operatorname{tg}^2\alpha - 1}}{\frac{x}{r}\operatorname{tg}\alpha - \sqrt{\frac{x^2}{r^2}\operatorname{tg}^2\alpha - 1}}}{\sqrt{\nu^2-1} + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varepsilon\operatorname{tg}\alpha\ln\dfrac{\nu+\sqrt{\nu^2-1}}{\nu-\sqrt{\nu^2-1}}}\operatorname{tg}\varepsilon,$$

$$0 < x < +\infty, \quad \nu\operatorname{ctg}\alpha \leqslant \frac{x}{r} \leqslant \operatorname{ctg}\alpha, \quad \nu = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\varepsilon} > 1,$$

$$\widetilde{p}\,\big|_{r=x\operatorname{tg}\varepsilon} - \rho_0 v_0^2 \frac{\ln\dfrac{\nu+\sqrt{\nu^2-1}}{\nu-\sqrt{\nu^2-1}}}{\sqrt{\nu^2-1} + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varepsilon\ln\dfrac{\nu+\sqrt{\nu^2-1}}{\nu-\sqrt{\nu^2-1}}}\operatorname{tg}\alpha.$$

[1]) Нужно перейти в указанном соотношении к эйлеровым координатам и воспользоваться стационарностью процесса и малостью возмущений. По поводу обозначений см. ответ к задаче 7.

Указание. См. ответ к задаче 8; решение уравнения (1) с краевыми условиями (2) и (3) можно искать в виде

$$U(r,\,x)=r\psi\left(\frac{x}{r}\right)=r\psi(\zeta),\quad \zeta=\frac{x}{r}.$$

Для определения $\widetilde{p}$ нужно воспользоваться соотношением (4) ответа к задаче 1.

39. Для определения потенциала возмущенных скоростей, вызванных влиянием стенки, получаем краевую задачу (в лагранжевых координатах)

$$(1-M^2)u_{xx}+u_{yy}=0,\quad -\infty<x<+\infty,\quad 0<y<+\infty,\quad M=\frac{U}{a},\ (1)$$

где a — скорость звука в газе,

$$u_y(x,\,0)=U\varepsilon\omega\cos\omega x,\quad -\infty<x<+\infty. \qquad (2)$$

а) В случае дозвуковой скорости потока $1-M^2>0$ уравнение (1) является эллиптическим,

$$u(x,\,y)=-\frac{U\varepsilon}{\sqrt{1-M^2}}\,e^{-\omega y\sqrt{1-M^2}}\cos\omega x.$$

б) В случае сверхзвуковой скорости потока $1-M^2<0$

$$u(x,\,y)=-\frac{U\varepsilon}{\sqrt{M^2-1}}\sin\omega\,(x-y\,\sqrt{M^2-1}).$$

Указание. В эллиптическом случае решение следует искать в виде

$$u(x,\,y)=u_1(x)\,u_2(y),$$

а в гиперболическом — в виде распространяющихся волн, учитывая, что в гиперболическом (сверхзвуковом) случае малые возмущения распространяются вправо от источников возмущения. Граничное условие (2) получается из точного граничного условия

$$\left(\frac{u_y}{u+u_x}\right)_{\text{гран}}=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{гран}}$$

пренебрежением малых величин высшего порядка.

Замечание. Сопоставляя решения в эллиптическом и гиперболическом случае, мы видим, что возмущения, вызванные волнообразной стенкой по мере удаления от нее (роста y), в эллиптическом случае быстро затухают, а в гиперболическом случае сохраняют свою амплитуду.

40.

$$\psi(r,\,t)=\left\{\begin{array}{ccc}\pi U_0 & \text{при} & 0<t<\dfrac{r_0-r}{a},\\ U_0\left(\dfrac{\pi}{2}+\arcsin\dfrac{r_0-at}{r}\right) & \text{при} & \dfrac{r_0-r}{a}<t<\dfrac{r_0+r}{a},\\ 0 & \text{при} & \dfrac{r_0+r}{a}<t<+\infty,\end{array}\right\}$$

$$0<r<r_0,$$

$$\psi(r,\,t)=\left\{\begin{array}{ccc} 0 & \text{при} & 0<t<\dfrac{r-r_0}{a}, \\ U_0\left(\dfrac{\pi}{2}+\arcsin\dfrac{r_0-at}{r}\right) & \text{при} & \dfrac{r-r_0}{a}<t<\dfrac{r+r_0}{a}, \\ 0 & \text{при} & \dfrac{r+r_0}{a}<t<+\infty, \end{array}\right\}$$

$$r_0<r<+\infty.$$

Указание. Полагая $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $\alpha=\cos\theta$, $\beta=\sin\theta$, выполнить сначала интегрирование по θ от 0 до 2π, а затем сделать надлежащую замену переменного интегрирования; это приведет к выражению (1) условия задачи.

41. Указание. Выполнить интегрирование сферически симметричных волн $\dfrac{f_1(at-r)}{r}$ и $\dfrac{f_2(at+r)}{r}$ по z от $-\infty$ до $+\infty$, а затем сделать надлежащую замену переменного интегрирования.

42. Решение. Ищем решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r}\right),\quad r^2=x^2+y^2$$

в виде $u(r,\,t)=e^{-i\omega t}f(r)$; это дает

$$u(r,\,t)=Ae^{-i\omega t}J_0(kr)+BH_0^{(1)}(kr)e^{-i\omega t},\quad k=\frac{\omega}{a},$$

A и B — произвольные константы[1]), $u_1(r,\,t)=Ae^{-i\omega t}J_0(kr)$ — стоячая монохроматическая цилиндрическая волна, не имеющая особенности при $r=0$, при больших r

$$u_1(r,\,t)\approx A\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\cos\left(kr-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{kr}}\,e^{-i\omega t},$$

$u_2(r,\,t)=Be^{-i\omega t}H_0^{(1)}(kr)$ — распространяющаяся, «расходящаяся» монохроматическая цилиндрическая волна, имеющая особенность при $r=0$. При малых r

$$u_2(r,\,t)\approx B\,\frac{2i}{\pi}\ln(kr)e^{-i\omega t},$$

при больших r

$$u_2(r,\,t)\approx B\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{e^{i\left(kr-\omega t-\dfrac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{kr}}.$$

Интегрируя плоскую монохроматическую волну

$$\exp\left\{-i\omega\left(t-\frac{x\cos\theta+y\sin\theta}{a}\right)\right\}$$

по углу θ от 0 до π, получим

$$\widetilde{u}_1(r,\,t)=e^{-i\omega t}\int\limits_0^{\pi}e^{ikr\cos(\theta-\varphi)}d\theta=2\pi e^{-i\omega t}J_0(kr),\quad k=\frac{\omega}{a}.$$

[1]) О функциях J_0 и $H_0^{(1)}$ см. [7, с. 510, 636, 645, 719] и др.

Если же выполнить интегрирование в плоскости комплексного переменного θ по пути L (рис. 51), то мы получим

$$\widetilde{u}_2(r,\,t) = e^{-i\omega t}\int\limits_L e^{ikr\cos\theta}d\theta = \pi e^{-i\omega t}H_0^{(1)}(kr).$$

44. Р е ш е н и е. Примем за плоскость раздела двух сред плоскость $z = 0$ (рис. 52). Величины, относящиеся к полупространству $z < 0$,

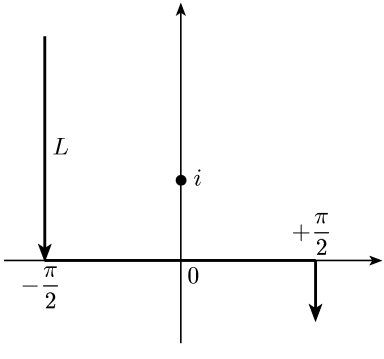


Рис. 51

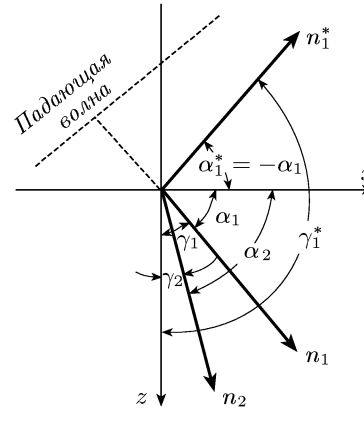


Рис. 52

отметим индексом 1, а относящиеся к полупространству $z > 0$ — индексом 2. Обозначим падающую, отраженную и преломленную волны соответственно через

$$\varphi_1 = A_1 e^{i(\omega_1 t - k_1 \boldsymbol{n}_1 \boldsymbol{r})},$$
$$\varphi_1^* = A_1^* e^{i(\omega_1^* t - k_1^* \boldsymbol{n}_1^* \boldsymbol{r})},$$
$$\varphi_2 = A_2 e^{i(\omega_2 t - k_1 \boldsymbol{n}_2 \boldsymbol{r})}.$$

Здесь $k_1 = \dfrac{\omega_1}{a_1}$, $k_1^* = \dfrac{\omega_1^*}{a_1^*}$ и $k_2^* = \dfrac{\omega_2}{a_2}$ — волновые числа, ω_1, ω_1^*, ω_2 — частоты падающей, отраженной и преломленной волн, a_1 и a_2 — скорость распространения волны в первой и во второй средах; $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_1^*$, $\boldsymbol{n}_2$ — единичные векторы в направлении распространения соответствующих волн; вектор $\boldsymbol{r} = \{x, y, z\}$. На плоскости $z = 0$ должны выполняться граничные условия[1])

$$\rho_1\{\varphi_1 + \varphi_1^*\} = \rho_2\varphi_2 \quad \text{при} \quad z = 0, \tag{1}$$
$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial\varphi_1^*}{\partial z} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} \quad \text{при} \quad z = 0. \tag{2}$$

Будем считать вектор $\boldsymbol{n}_1$ параллельным плоскости xOz, т. е.

$$\boldsymbol{n}_1 = \{\cos\alpha_1,\, 0,\, \cos\gamma_1\}.$$

[1]) См. ответ к задаче 3.

Запишем теперь в координатной форме векторы $\boldsymbol{n}_1^*$ и $\boldsymbol{n}_2$:

$$\boldsymbol{n}_1^* = \{\cos\alpha_1^*,\ \cos\beta_1^*,\ \cos\gamma_1^*\},\quad \boldsymbol{n}_2^* = \{\cos\alpha_2,\ \cos\beta_2,\ \cos\gamma_2\}.$$

Так как функции τ: $e^{\boldsymbol{\nu_1\tau}}$, $e^{\boldsymbol{\nu_2\tau}}$, $e^{\boldsymbol{\nu_3\tau}}$, при условии, что ν_1, ν_2, ν_3 различны, линейно независимы, то подстановка φ_1, φ_1^*, φ_2 в граничные условия (1) и (2) приводит к равенствам

$$\left.\begin{aligned} &\omega_1^* = \omega_2 = \omega_1,\\ &k_1^* = \frac{\omega_1^*}{a_1} = k_1 = \frac{\omega_1}{a_1}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\cos\beta_1^* = \cos\beta_2 = 0, \tag{4}$$

т. е. единичные векторы $\boldsymbol{n}_1^*$ и $\boldsymbol{n}_2$ также параллельны плоскости xOz,

$$k_1\cos\alpha_1 = k_2\cos\alpha_1^* = k_2\cos\alpha_2, \tag{5}$$

откуда получаются известные соотношения между углами падения, отражения и преломления: $\alpha_1 = -\alpha_1^*$, поскольку отраженная волна, как и падающая, лежит в полупространстве $z < 0$, и

$$\frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{\dfrac{\omega}{a_2}}{\dfrac{\omega}{a_1}} = \frac{a_1}{a_2}.$$

Если равенства, получающиеся в результате подстановки φ, φ_1^* и φ_2 в граничные условия (1) и (2), сократить на общий переменный множитель, то получаются соотношения для определения амплитуд отраженной и преломленной волн

$$\rho_1 A_1 + \rho_1 A_1^* = \rho_2 A_2,$$
$$k_1\cos\gamma_1 A_1 + k_1\cos\gamma_1^* A_1^* = k_2\cos\gamma_2 A_2;$$

из этих уравнений, используя равенство $\cos\gamma_1^* = -\cos\gamma_1$, получаем

$$A_1^* = \frac{\rho_2 k_1\cos\gamma_1 - \rho_1 k_2\cos\gamma_2}{\rho_2 k_1\cos\gamma_1 + \rho_1 k_2\cos\gamma_2}\,A_1,$$
$$A_2 = \frac{2\rho_1 k_1\cos\gamma_1}{\rho_2 k_1\cos\gamma_1 + \rho_1 k_2\cos\gamma_2}\,A_1.$$

45. Обозначая через $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_1^*$, $\boldsymbol{n}_2$, как и в предыдущей задаче, единичные векторы в направлении падающей, отраженной и преломленной волн, получим (рис. 53)

$$\alpha_1^* = -\alpha_1,\quad \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} = \frac{v_1}{v_2} = \nu_{12} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}},\quad v_1 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}},\quad v_2 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2}},$$

где c — скорость света в вакууме, ε_1 и ε_2 — диэлектрические постоянные первой и второй сред (мы считаем $\mu_1 = \mu_2 = 1$).

Указание. Плоскую электромагнитную монохроматическую волну можно представить в виде

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^{(0)}e^{i(\omega t - k\boldsymbol{nr})},\quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}^{(0)}e^{i(\omega t - k\boldsymbol{nr})}.$$

Затем нужно воспользоваться условиями на границе раздела двух диэлектриков [1]).

[1]) См. [7, с. 441–442].

46. Представляя падающую волну в виде [1])

$$\boldsymbol{E}_1 = \{E_1 e^{i(\omega t - k_1 z)};\ 0;\ 0\}, \quad \boldsymbol{H}_1^* = \{0;\ \sqrt{\varepsilon_1}\, E_1 e^{i(\omega t - k_1 z)};\ 0\},$$

получим

$$\boldsymbol{E}_1^* = \{E_1^* e^{i(\omega t - k_1 z)};\ 0;\ 0\}; \quad \boldsymbol{H}_1^* = \{0;\ -\sqrt{\varepsilon_1}\, E_1^* e^{i(\omega t + k_1 z)};\ 0\},$$
$$\boldsymbol{E}_2 = \{E_2 e^{i(\omega t - k_2 z)};\ 0;\ 0\}; \quad \boldsymbol{H}_2 = \{0;\ -\sqrt{\varepsilon_2}\, E_2 e^{i(\omega t - k_2 z)};\ 0\},$$

где

$$\boldsymbol{E}_1^* = \frac{1-\nu_{12}}{1+\nu_{12}}\, E_1, \quad \boldsymbol{E}_2 = \frac{2}{1+\nu_{12}}\, E_1, \quad \nu_{12} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}.$$

§ 3. Метод разделения переменных

1. Краевые задачи, не требующие применения специальных функций.

а) Однородные среды.

47. Решением краевой задачи

$$u_{tt} = a^2\{u_{xx} + u_{yy}\}, \quad 0 < x < l_1, \quad 0 < y < l_2, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$
$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l_1} = u\big|_{y=0} = u\big|_{y=l_2} = 0, \tag{2}$$
$$u(x, y, 0) = Axy(l_1 - x)(l_2 - y), \quad u_t(x, y, 0) = 0, \quad 0 < x < l_1, \quad 0 < y < l_2, \tag{3}$$

является

$$u(x, y, t) = \frac{64 A l_1^2 l_2^2}{\pi^6} \times$$
$$\times \sum_{m,\,n=0}^{+\infty} \frac{\sin\dfrac{(2m+1)\pi x}{l_1} \sin\dfrac{(2n+1)\pi y}{l_2}}{(2m+1)^3(2n+1)^3} \cos\left\{\pi a t \sqrt{\frac{(2m+1)^2}{l_1^2} + \frac{(2n+1)^2}{l_2^2}}\right\}.$$

48. Решением краевой задачи

$$u_{tt} = a^2\{u_{xx} + u_{yy}\}, \quad 0 < x < l_1, \quad 0 < y < l_2, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$
$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l_1} = u\big|_{y=0} = u\big|_{y=l_2} = 0, \tag{2}$$
$$u(x, y, 0) = 0, \quad u_t(x, y, 0) = Axy(l_1 - x)(l_2 - y), \quad 0 < x < l_1, \quad 0 < y < l_2, \tag{3}$$

является

$$u(x, y, t) = \frac{16 A l_1^2 l_2^2}{\pi^7 a} \times$$
$$\times \sum_{m,\,n=0}^{+\infty} \frac{\sin\dfrac{(2m+1)\pi x}{l_1} \sin\dfrac{(2n+1)\pi y}{l_2} \sin\left\{\pi a t \sqrt{\dfrac{(2m+1)^2}{l_1^2} + \dfrac{(2n+1)^2}{l_2^2}}\right\}}{(2m+1)^3(2n+1)^3 \sqrt{\dfrac{(2m+1)^2}{l_1^2} + \dfrac{(2n+1)^2}{l_2^2}}}.$$

[1]) См. [7, с. 499–509].

49. $u(x, y, t) = \dfrac{4K}{\pi a \rho l_1 l_2} \times$

$$\times \sum_{m,\,n=1}^{+\infty} \frac{\sin\dfrac{m\pi x_0}{l_1} \sin\dfrac{m\pi x}{l_1} \sin\dfrac{n\pi y_0}{l_2} \sin\dfrac{n\pi y}{l_2}}{\sqrt{\dfrac{m^2}{l_1^2} + \dfrac{n^2}{l_2^2}}} \sin\left\{\pi a t \sqrt{\frac{m^2}{l_1^2} + \frac{n^2}{l_2^2}}\right\},$$

где ρ — поверхностная плотность массы.

Указание. Можно найти сначала решение, предполагая импульс K равномерно распределенным по окрестности $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$, $y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon$ точки (x_0, y_0), а затем перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$ [1]).

Можно также воспользоваться импульсной дельта-функцией Дирака и сформулировать начальные условия следующим образом:

$$u(x, y, 0) = 0, \quad u_t(x, y, 0) = \frac{K}{\rho}\,\delta(x - x_0)\delta(y - y_0), \qquad 0 < x < l_1, \quad 0 < y < l_2.$$

Второй путь гораздо быстрее приведет к цели. Пользуясь дельта-функциями, мы выбираем множитель при произведении дельта-функций так, чтобы суммарный импульс, передаваемый мембране, был равен заданному.

50. Решением краевой задачи

$$u_{tt} = a^2\{u_{xx} + u_{yy}\} + A^{(0)}(x, y)\sin\omega t, \quad A^{(0)}(x, y) = \frac{1}{\rho}A(x, y), \tag{1}$$

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l_1} = u\big|_{y=0} = u\big|_{y=l_2} = 0, \tag{2}$$

$$u(x, y, 0) = 0, \quad u_t(x, y, 0) = 0, \qquad 0 < x < l_1, \quad 0 < y < l_2, \tag{3}$$

является

$$u(x, y, t) = \sum_{m,\,n=1}^{+\infty} A_{mn}\left(\sin\omega t - \frac{\omega}{\omega_{mn}}\sin\omega_{mn}t\right)\sin\frac{m\pi x}{l_1}\sin\frac{n\pi y}{l_2}, \tag{4}$$

где

$$A_{mn} = \frac{4}{l_1 l_2(\omega_{mn}^2 - \omega^2)}\int_0^{l_1} dx \int_0^{l_2} A^{(0)}(x, y)\sin\frac{m\pi x}{l_1}\sin\frac{n\pi y}{l_2}\,dy, \tag{5}$$

$$\omega_{mn} = \pi a\sqrt{\frac{m^2}{l_1^2} + \frac{n^2}{l_2^2}}, \tag{6}$$

при условии, что частота вынуждающей силы не совпадает ни с одной из собственных частот $\omega \neq \omega_{mn}$. Если же $\omega = \omega_{m_0 n_0}$ (резонанс), то

$$u(x, y, t) = \sum_{\substack{m,\,n=1\\ m\neq m_0,\ n\neq n_0}}^{+\infty} A_{mn}\left(\sin\omega t - \frac{\omega}{\omega_{mn}}\sin\omega_{mn}t\right)\sin\frac{m\pi x}{l_1}\sin\frac{n\pi y}{l_2} +$$

$$+ A_{m_0 n_0}(\sin\omega t - \omega t\cos\omega t)\sin\frac{m_0\pi x}{l_1}\sin\frac{n_0\pi y}{l_2}, \tag{7}$$

[1]) См. решение задачи 101 § 3 гл. II.

где A_{mn} определяется по формулам (5), а

$$A_{m_0n_0} = \frac{2}{l_1 l_2 \omega} \int\limits_0^{l_1} dx \int\limits_0^{l_2} A^{(0)}(x,\, y) \sin \frac{m_0 \pi x}{l_1} \sin \frac{n_0 \pi y}{l_2}\, dy. \tag{8}$$

Замечание. Если частота $\omega_{m_0n_0}$ является кратной, т.е. соответствует кратному собственному значению, то вместо одного резонансного члена появится группа резонансных членов указанного вида.

51. Если частота вынуждающей силы не совпадает ни с одной из собственных частот мембраны, т.е. $\omega \neq \omega_{mn}$, $m,\, n = 1,\, 2,\, 3, \ldots$, то

$$u(x,\, y,\, t) = \\ = \frac{4A}{\rho l_1 l_2} \sum_{m,\, n=1}^{+\infty} \frac{\sin \omega t - \dfrac{\omega}{\omega_{mn}} \sin \omega_{mn} t}{\omega_{mn}^2 - \omega^2} \sin \frac{m\pi x_0}{l_1} \sin \frac{n\pi y_0}{l_2} \sin \frac{m\pi x}{l_1} \sin \frac{n\pi y}{l_2}.$$

Если же $\omega = \omega_{m_0n_0}$ (резонанс), то

$$u(x,\, y,\, t) = \frac{4A}{\rho l_1 l_2} \times \\ \times \sum_{\substack{m,\, n=1 \\ m \neq m_0;\ n \neq n_0}}^{+\infty} \frac{\sin \omega t - \dfrac{\omega}{\omega_{mn}} \sin \omega_{mn} t}{\omega_{mn}^2 - \omega^2} \sin \frac{m\pi x_0}{l_1} \sin \frac{n\pi y_0}{l_2} \sin \frac{m\pi x}{l_1} \sin \frac{n\pi y}{l_2} + \\ + \frac{2A}{\rho l_1 l_2 \omega} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t) \sin \frac{m_0 \pi x_0}{l_1} \sin \frac{n_0 \pi y_0}{l_2} \sin \frac{m_0 \pi x}{l_1} \sin \frac{n_0 \pi y}{l_2}.$$

Замечание. Если частота $\omega_{m_0n_0}$ является кратной, то вместо одного резонансного члена появится группа резонансных членов указанного вида.

52. Потенциал горизонтальных скоростей частиц воды является решением краевой задачи

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right\} + \frac{A}{\rho} \cos \frac{\pi x}{l_1} \cos \frac{\pi y}{l_2} f'(t),$$

$$0 < t < +\infty, \quad a^2 = gh, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=l_1} = \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=l_2} = 0, \tag{2}$$

$$U(x,\, y,\, 0) = 0, \quad U_t(x,\, y,\, 0) = 0. \tag{3}$$

Он может быть представлен в виде

$$U(x,\, y,\, t) = \frac{A}{k_0 \rho} \left\{ \int\limits_0^t f'(\tau) \sin k(t-\tau) d\tau \right\} \cos \frac{\pi x}{l_1} \cos \frac{\pi y}{l_2}. \tag{4}$$

53. $u(x,\, y,\, t) =$

$$= \frac{4K}{\rho l_1 l_2} e^{-\nu^2 t} \sum_{m,\, n=1}^{+\infty} \frac{\sin \dfrac{m\pi x_0}{l_1} \sin \dfrac{n\pi y_0}{l_2} \sin \dfrac{m\pi x}{l_1} \sin \dfrac{n\pi y}{l_2}}{\widetilde{\omega}_{mn}} \sin \widetilde{\omega}_{mn} t,$$

где

$$\widetilde{\omega}_{mn}^2 = \pi^2 a^2 \left(\frac{m^2}{l_1^2} + \frac{n^2}{l_2^2} \right) - \nu^4,$$

а ν^2 — коэффициент сопротивления, входящий в уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\} - 2\nu^2 \frac{\partial u}{\partial t}.$$

54. $u(x, y, t) =$

$$= -\frac{16A}{\pi^2 \rho} \sum_{m,\, n=1}^{+\infty} \frac{(\omega^2 - \omega_{mn}^2) \sin \omega t + 2\nu^2 \omega \cos \omega t}{(2m+1)(2n+1)[(\omega^2 - \omega_{mn}^2)^2 + 4\omega^2 \nu^4]} \sin \frac{m\pi x}{l_1} \sin \frac{n\pi y}{l_2},$$

$$\omega_{mn} = \pi a \sqrt{\frac{m^2}{l_1^2} + \frac{n^2}{l_2^2}}.$$

Указание. Ищем решение уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \left\{ \frac{\partial U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right\} - 2\nu^2 \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{A}{\rho} e^{i\omega t},$$

обращающееся в нуль при $x = 0,\ x = l_1,\ y = 0,\ y = l_2$, в виде

$$U(x, y, t) = V(x, y) e^{i\omega t};$$

тогда $u(x, y, t) = \operatorname{Im}(U(x, y, t))$. Для определения $V(x, y)$ получаем краевую задачу

$$\Delta V + \frac{\omega^2 - 2\nu^2 \omega i}{a^2} V = -\frac{A}{\rho a^2},$$

$$V\big|_{x=0} = V\big|_{x=l_1} = V\big|_{y=0} = V\big|_{y=l_2} = 0.$$

Ее решение ищем в виде

$$V(x, y) = \sum_{m,\, n=0}^{+\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l_1} \sin \frac{n\pi y}{l_2}.$$

55. Решением краевой задачи

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right), \quad r_1 < r < r_2, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$\frac{\partial U}{\partial r}\bigg|_{r=r_1} = \varepsilon \omega \cos \omega t, \quad \frac{\partial U}{\partial r}\bigg|_{r=r_2} = 0, \quad 0 < t < +\infty$$

($U(r, t)$ — потенциал скоростей частиц газа), представляющим установившиеся гармонические колебания с частотой ω, является

$$U(r, t) = \frac{\varepsilon \omega r}{\Delta} \left(\cos k(r_2 - r) - \frac{1}{r_2} \sin k(r_2 - r) \right) \cos \omega t, \quad k = \frac{\omega}{a},$$

$$\Delta = \left(k^2 + \frac{1}{r_1 r_2} \sin k(r_2 - r_1) - k \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \cos k(r_2 - r_a) \right).$$

Указание. Искать решение в форме

$$U(r, t) = R(r) \cos \omega t.$$

56. Решением краевой задачи [1])

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right), \quad r_1 < r < r_2, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{r=r_1} = 0, \quad \left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{r=r_2} = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$U(r, 0) = 0, \quad U_t(r, 0) = -\frac{a^2}{\mu_0} f(r), \quad r_1 < r < r_2, \tag{3}$$

является

$$U(r, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \frac{\cos \lambda_n r + \gamma_n \sin \lambda_n r}{r} \sin a\lambda_n t,$$

$$\lambda_n = (2n+1) \frac{\pi}{2(r_2 - r_1)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\gamma_n = \frac{\lambda_n \sin \lambda_n r_2 + \dfrac{1}{r_2} \cos \lambda_n r_2}{\lambda_n \cos \lambda_n r_2 - \dfrac{1}{r_2} \sin \lambda_n r_2},$$

$$A_n = -\frac{a^2}{\rho_0} \int_{r_1}^{r_2} r f(r) [\cos \lambda_n r + \gamma_n \sin \lambda_n r] \, dr.$$

Указание. Перейти к новой искомой функции

$$V(r, t) = rU(r, t).$$

б) Неоднородные среды.

57. Решением краевой задачи

$$\left.\begin{aligned} \rho_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= T_0 \left\{ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right\}, \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0, \quad 0 \leqslant y \leqslant l_2, \\ \rho_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= T_0 \left\{ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right\}, \quad x_0 \leqslant x \leqslant l_1, \quad 0 \leqslant y \leqslant l_2, \end{aligned} \right\} \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} &u(x_0 - 0, y, t) = u(x_0 + 0, y, t), \\ &u_x(x_0 - 0, y, t) = u_x(x_0 + 0, y, t), \\ &u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l_1} = u\big|_{y=0} = u\big|_{y=l_2} = 0, \end{aligned} \right\} \quad 0 \leqslant y \leqslant l_2, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = F(x, y), \quad 0 \leqslant x \leqslant l_1, \quad 0 \leqslant y \leqslant l_2, \tag{3}$$

является

$$u(x, y, t) = \sum_{m, n=1}^{+\infty} (A_{mn} \cos \lambda_{mn} t + B_{mn} \sin \lambda_{mn} t) v_{mn}(x, y), \tag{4}$$

[1]) $U(r, t)$ — потенциал скоростей частиц газа.

где

$$v_{mn}(x,\,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin\overline{\omega}_{mn}x}{\sin\overline{\omega}_{mn}x_0}\sin\dfrac{n\pi y}{l_2}, & 0\leqslant x\leqslant x_0,\quad 0\leqslant y\leqslant l_2,\\[2ex] \dfrac{\sin\overline{\overline{\omega}}_{mn}(l_1-x)}{\sin\overline{\overline{\omega}}_{mn}(l_1-x_0)}\sin\dfrac{n\pi y}{l_2}, & x_0\leqslant x\leqslant l_1,\quad 0\leqslant y\leqslant l_2,\end{cases}\tag{5}$$

$$\overline{\omega}_m^2=\frac{\rho_1}{T_0}\,\lambda_{mn}^2-\frac{n^2\pi^2}{l_2^2},\quad \overline{\overline{\omega}}_{mn}^2=\frac{\rho_2}{T_0}\,\lambda_{mn}^2-\frac{n^2\pi^2}{l_2^2},\tag{6}$$

где λ_{mn} $(m,\,n=1,\,2,\,3,\,\ldots)$ — корни трансцендентного уравнения

$$\sqrt{\frac{\rho_1}{T_0}\,\lambda_{mn}^2-\frac{n^2\pi^2}{l_2^2}}\operatorname{ctg}\left\{x_0\sqrt{\frac{\rho_1}{T_0}\,\lambda_{mn}^2-\frac{n^2\pi^2}{l_2^2}}\right\}=$$

$$=\sqrt{\frac{\rho_2}{T_0}\,\lambda_{mn}^2-\frac{n^2\pi^2}{l_2^2}}\operatorname{ctg}\left\{(x_0-l_1)\sqrt{\frac{\rho_2}{T_0}\,\lambda_{mn}^2-\frac{n^2\pi^2}{l_2^2}}\right\},\tag{7}$$

$$A_{mn}=\frac{\int\limits_0^{l_1}\int\limits_0^{l_2}\mu(x,\,y)f(x,\,y)v_{mn}(x,\,y)\,dx\,dy}{\|v_{mn}\|^2},\tag{8}$$

$$B_{mn}=\frac{\int\limits_0^{l_1}\int\limits_0^{l_2}\mu(x,\,y)F(x,\,y)v_{mn}(x,\,y)\,dx\,dy}{\lambda_{mn}\|v_{mn}\|^2},\tag{9}$$

$$\mu(x,\,y)=\begin{cases}\rho_1, & 0\leqslant x<x_0,\quad 0\leqslant y\leqslant l_2,\\ \rho_2, & x_0<x\leqslant l_1,\quad 0\leqslant y\leqslant l_2,\end{cases}\tag{10}$$

$$\|v_{mn}\|^2=\int\limits_0^{l_1}\int\limits_0^{l_2}\mu(x,\,y)v_{mn}^2(x,\,y)\,dx\,dy=$$

$$=\frac{l_2}{4}\left\{\frac{\rho_1x_0}{\sin^2\overline{\omega}_{mn}x_0}+\frac{\rho_2(l_1-x_0)}{\sin^2\overline{\overline{\omega}}_{mn}(l_1-x_0)}\right\}.\tag{11}$$

58. Решением краевой задачи

$$\left.\begin{aligned}\rho_{01}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}&=K_1p_0\left\{\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r}\right\},\quad 0\leqslant r\leqslant r_1,\quad 0<t<+\infty,\\ \rho_{02}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}&=K_2p_0\left\{\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r}\right\},\quad r_1<r<r_2,\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_2}=0,\quad \rho_{01}u\big|_{r=r_1-0}=\rho_{02}u\big|_{r=r_1+0},\quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_1-0}=\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_1+0},$$

$$0<t<+\infty,\tag{2}$$

$$u(r,\,0)=f(r),\quad u_t(r,\,0)=0,\quad 0\leqslant r\leqslant r_2,\tag{3}$$

является

$$u(r,\,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\,\frac{v_n(r)}{r}\cos\lambda_n t,\quad 0\leqslant r<r_2,\quad 0<t<+\infty,\qquad(4)$$

где λ_n $(n=1,\,2,\,3,\,\dots)$ — корни трансцендентного уравнения

$$\begin{vmatrix}\rho_{01}\sin\frac{\lambda r_1}{a_1} & -\rho_{02}\cos\frac{\lambda}{a_2}\,r_1 & -\rho_{02}\sin\frac{\lambda}{a_2}\,r_1\\ \frac{\lambda}{a_1}\cos\frac{\lambda}{a_1}\,r_1-\frac{1}{r_1}\sin\frac{\lambda}{a_1}\,r_1 & \frac{\lambda}{a_2}\sin\frac{\lambda}{a_2}\,r_1+\frac{1}{r_1}\cos\frac{\lambda}{a_2}\,r_1 & -\frac{\lambda}{a_2}\cos\frac{\lambda}{a_2}\,r_1+\frac{1}{r_1}\sin\frac{\lambda}{a_2}\,r_1\\ & \frac{\lambda}{a_2}\sin\frac{\lambda}{a_2}\,r_2+\frac{1}{r_2}\cos\frac{\lambda}{a_2}\,r_2 & -\frac{\lambda}{a_2}\cos\frac{\lambda}{a_2}\,r_2+\frac{1}{r_2}\sin\frac{\lambda}{a_2}\,r_2\end{vmatrix}=$$

$$=0,\qquad(5)$$

$$v_n(r)=\begin{cases}\alpha_n\sin\dfrac{\lambda_n}{a_1}\,r, & 0\leqslant r\leqslant r_1,\\ \beta_n\cos\dfrac{\lambda_n}{a_2}\,r+\gamma_n\sin\dfrac{\lambda_n}{a_2}\,r, & r_1\leqslant r\leqslant r_2.\end{cases}\qquad(6)$$

Константы α_n, β_n и γ_n определяются с точностью до общего постоянного множителя из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned}&\Big(\rho_{01}\sin\frac{\lambda_n}{a_1}\,r_1\Big)\,\alpha_n-\Big(\rho_{02}\cos\frac{\lambda_n}{a_2}\,r_1\Big)\,\beta_n-\Big(\rho_{02}\sin\frac{\lambda_n}{a_2}\,r_1\Big)\,\gamma_n=0,\\ &\Big(\frac{\lambda_n}{a_1}\cos\frac{\lambda_n}{a_1}\,r_1-\frac{1}{r_1}\sin\frac{\lambda_n}{a_1}\,r_1\Big)\,\alpha_n+\Big(\frac{\lambda_n}{a_2}\sin\frac{\lambda_n}{a_2}\,r_1+\\ &\qquad+\frac{1}{r_1}\cos\frac{\lambda_n}{a_2}\,r_1\Big)\,\beta_n+\Big(-\frac{\lambda_n}{a_2}\cos\frac{\lambda_n}{a_2}\,r_1+\frac{1}{r_1}\sin\frac{\lambda_n}{a_2}\,r_1\Big)\,\gamma_n=0,\\ &\Big(\frac{1}{r_2}\cos\frac{\lambda_n}{a_2}\,r_2+\frac{\lambda_n}{a_2}\sin\frac{\lambda_n}{a_2}\,r_2\Big)\,\beta_n+\Big(\frac{1}{r_2}\sin\frac{\lambda_n}{a_2}\,r_2-\\ &\qquad-\frac{\lambda_n}{a_2}\cos\frac{\lambda_n}{a_2}\,r_2\Big)\,\gamma_n=0,\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

$$A_n=\frac{\int\limits_0^{r_2}r\mu(r)f(r)v_n(r)\,dr}{\|v_n\|^2},\quad n=1,\,2,\,3,\,\dots,\qquad(8)$$

$$\mu(r)=\begin{cases}\dfrac{\rho_{01}}{k_1p_0}, & 0\leqslant r<r_1,\\ \dfrac{\rho_{02}}{k_2p_0}, & r_1<r\leqslant r_2,\end{cases}\qquad(9)$$

$$\|v_n\|^2=\int\limits_0^{r_2}\mu(r)v_n^2(r)\,dr.\qquad(10)$$

2. Краевые задачи, требующие применения специальных функций.

а) Однородные среды.

59. Решением краевой задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad 0 \leqslant r < r_0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(r_0, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(r, 0) = \varphi(r), \quad u_t(r, 0) = \psi(r), \quad 0 < r < r_0, \tag{3}$$

является

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left\{A_n \cos\left(a\frac{\mu_n}{r_0}t\right) + B_n \sin\left(a\frac{\mu_n}{r_0}t\right)\right\} J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right), \tag{4}$$

где

$$\left.\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{r_0^2[J_1(\mu_n)]^2}\int_0^{r_0} r\varphi(r)J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)\,dr, \\ B_n &= \frac{2}{a\mu_n r_0[J_1(\mu_n)]^2}\int_0^{r_0} r\psi(r)J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)\,dr, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

μ_n — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

60. Решением краевой задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right\}, \quad 0 \leqslant r < r_0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(r_0, t) = 0, \tag{2}$$

$$u(r, 0) = A\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right), \quad u_t(r, 0) = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0, \tag{3}$$

является

$$u(r, t) = 8A\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_0\left(\dfrac{\mu_n r}{r_0}\right)}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)}\cos\frac{a\mu_n t}{r_0}, \tag{4}$$

μ_n — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

Указание. Для вычисления коэффициентов ряда (4) воспользоваться формулой $\int_0^x xJ_0(x)\,dx = xJ_1(x)$, установить сначала справедливость формулы

$$\int_0^x x^3 J_0(x)\,dx = 2x^2 J_0(x) + (x^3 - 4x)J_1(x). \tag{5}$$

61. Потенциал горизонтальных скоростей частиц воды является решением краевой задачи

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\right\}, \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$|U(0,\,t)| < +\infty, \quad \frac{\partial U(r_0,\,t)}{\partial r} = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$U(r,\,0) = \varphi(r), \quad U_t(r,\,0) = \psi(r), \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0. \tag{3}$$

Для него получается представление

$$U(r,\,t) = \frac{2}{r_0^2}\int\limits_0^{r_0} r\{\varphi(r) + t\psi(r)\}\,dr + \\ + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(A_n\cos\frac{a\mu_n t}{r_0} + B_n\sin\frac{a\mu_n t}{r_0}\right)J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right), \tag{4}$$

где

$$\left.\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{r_0^2[J_0(\mu_n)]^2}\int\limits_0^{r_0} r\varphi(r)J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)\,dr, \\ B_n &= \frac{2}{a\mu_n r_0[J_1(\mu_n)]^2}\int\limits_0^{r_0} r\psi(r)J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)\,dr, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

μ_n — положительные корни уравнения $J_1(\mu) = 0$.

62. Решением краевой задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right\} + \frac{p_0}{\rho}, \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(r_0,\,t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(r,\,0) = 0, \quad u_t(r,\,0) = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0, \tag{3}$$

является

$$u(r,\,t) = \frac{p_0}{\rho a^2}\left\{\frac{r_0^2 - r^2}{4} - 2r_0^2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{J_0\left(\dfrac{\mu_k r}{r_0}\right)}{\mu_k^2 J_1(\mu_k)}\cos\frac{a\mu_k t}{r_0}\right\}, \tag{4}$$

где μ_k — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, ρ — поверхностная плотность мембраны.

63. Решением краевой задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right\} + \frac{1}{\rho}f(r,\,t), \quad 0 \leqslant r < r_0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(r_0,\,t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(r,\,0) = 0, \quad u_t(r,\,0) = 0, \quad 0 \leqslant r < r_0, \tag{3}$$

является

$$u(r,\,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n(t)J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right),$$

$$A_n(t) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^{r_0} f(\xi,\,\tau)J_0\left(\frac{\mu_n\xi}{r_0}\right)\sin\omega_n(t-\tau)\,d\xi, \tag{4}$$

где $\omega_n = \dfrac{a\mu_n}{r_0}$, а μ_n — корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

64. Решением краевой задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \right\} + \frac{p_0}{\rho}\sin \omega t, \quad 0 \leqslant r < r_0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(r_0,\, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(r,\, 0) = 0, \quad u_t(r,\, 0) = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0, \tag{3}$$

является

$$u(r,\, t) = \frac{p_0}{\omega^2 \rho}\left\{ \frac{J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{J_0\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)} - 1 \right\} \sin \omega t + \\ + \frac{2p_0 \omega r_0^3}{a\rho} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) \sin \frac{a\mu_n t}{r_0}}{\mu_n^2(\omega^2 r_0^2 - a^2\mu_n^2) J_1(\mu_n)}, \tag{4}$$

где μ_n — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, если только частота ω вынуждающей силы не совпадает ни с одной из собственных частот мембраны $\omega_n = \dfrac{a\mu_n}{r_0}$ (нет резонанса). В случае резонанса решение разыскивается аналогично тому, как это было сделано в решении задачи 133 § 3 гл. II.

65. $$u(r,\, t) = A\frac{J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{J_0\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)} \sin \omega t - \sum_{n=1}^{+\infty} A_n J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) \sin \frac{a\mu_n t}{r_0},$$

где

$$A_n = \frac{2A\omega}{a\mu_n r_0 J_0\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)[J_1(\mu_n)]^2} \int_0^{r_0} r J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right) J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) dr,$$

μ_n — корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

Указание. Сначала нужно найти вынужденные колебания с частотой вынуждающей силы в виде $U(r,\, t) = R(r)\sin \omega t$.

Замечание. Решение написано в предположении, что нет резонанса, т. е. что $\omega \neq \omega_n = \dfrac{a\mu_n}{r_0}$, $n = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots$

66. Решением краевой задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) - 2\nu^2 \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 \leqslant r < r_0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(r_0,\, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(r,\, 0) = \varphi(r), \quad u_t(r,\, 0) = \psi(r), \quad 0 < r < r_0, \tag{3}$$

является

$$u(r,\, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\nu^2 t}\{A_n \cos \widetilde{\omega}_n t + B_n \sin \widetilde{\omega}_n t\} J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right), \tag{4}$$

где

$$A_n = \frac{2}{r_0^2 [J_1(\mu_n)]^2} \int_0^{r_0} r\varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) dr, \tag{5}$$

$$B_n = \frac{\nu^2}{\widetilde{\omega}_n} A_n + \frac{2}{\widetilde{\omega}_n r_0^2 [J_1(\mu_n)]^2} \int_0^{r_0} r\psi(r) J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) dr, \qquad (6)$$

μ_n — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$,

$$\widetilde{\omega}_n = \sqrt{\frac{a^2\mu_n^2}{r_0^2} - \nu^4}\ ^{1)}.$$

67. а) $u(r, t) = 2\frac{p_0}{\rho} r_0^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)}{\mu_n J_1(\mu_n)} \times$

$$\times \frac{[(a^2\mu_n^2 - r_0^2\omega^2)\sin\omega t - 2\nu^2\omega\cos\omega t]}{[(a^2\mu_n^2 - r_0^2\omega^2)^2 + 4\nu^2\omega^2]},$$

б) $u(r, t) = 2\frac{p_0}{\rho} r_0^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)}{\mu_n J_1(\mu_n)} \frac{[(a^2\mu_n^2 - r_0^2\omega^2)\cos\omega t + 2\nu^2\omega\sin\omega t]}{[(a^2\mu_n^2 - r_0^2\omega^2)^2 + 4\nu^4\omega^2]},$

где μ_n — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

Указание. См. указание к задаче 50.

68. Нужно найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\right) - 2\nu^2\frac{\partial U}{\partial t},$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$|U(0, t)| < +\infty, \quad U(r_0, t) = Ae^{i\omega t},$$

а затем взять его мнимую часть. Для этой цели освободимся от неоднородности в граничном условии, переведя ее в правую часть дифференциального уравнения; именно, будем искать решение задачи в виде

$$U(r, t) = v(r, t) + A\frac{r^2}{r_0^2} e^{i\omega t},$$

где

$$v(r, t) = R(r)e^{i\omega t}, \quad |R(0)| < +\infty, \quad R(r_0) = 0. \qquad (1)$$

Для $R(r)$ получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \frac{\omega^2 - 2\nu^2\omega i}{a^2} R = -A\left[\frac{\omega^2 - 2i\nu^2\omega}{a^2}\frac{r^2}{r_0^2} + \frac{4}{r_0^2}\right],$$

решение которого, удовлетворяющее граничным условиям (1), ищем в виде

$$R(r) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right),$$

где μ_n — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

---

[1]) Мы предполагаем $\widetilde{\omega}_n$ действительным при $n = 1, 2, 3, \ldots$; в случае, если для $n = 1, 2, \ldots$, $\widetilde{\omega}_n$ является мнимым, в соответствующих членах cos и sin заменяются на ch и sh и знак перед первым слагаемым в формуле (6) заменяется на противоположный.

69. Решением краевой задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_1^2 \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r} \right\} - \alpha^2 \int_0^{r_0} r u(r,\, t)\, dr,$$

$$0 < r < r_0, \quad 0 < t < +\infty, \quad \alpha^2 = \frac{2\pi\rho_0 a_0^2}{\Omega_0 \rho_1}, \tag{1}$$

$$u(r_0,\, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(r,\, 0) = \varphi(r), \quad u_t(r,\, 0) = \psi(r), \quad 0 < r < r_0, \tag{3}$$

является

$$u(r,\, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ A_n \cos \frac{a_1 \mu_n t}{r_0} + B_n \sin \frac{a_1 \mu_n t}{r_0} \right\} \left\{ J_0\left(\mu_n \frac{r}{r_0}\right) - J_0(\mu_n) \right\}, \tag{4}$$

где μ_n — положительные корни уравнения

$$J_0(\mu) + \varkappa J_2(\mu) = 0, \quad \varkappa = \frac{\pi\rho_0 a_0^2}{\Omega_0 \rho_1 a_1^2}\, r_0^2 \ ^{1)}, \tag{5}$$

$$A_n = \frac{2}{r_0^2 \left[J_1^2(\mu_n) + \dfrac{2\varkappa}{\mu_n^2} J_2^2(\mu_n) \right]} \int_0^{r_0} r\varphi(r) \left[J_0\left(\mu_n \frac{r}{r_0}\right) - J_0(\mu_n) \right] dr,$$

$$B_n = \frac{2}{a_1 \mu_n r_0 \left[J_1^2(\mu_n) + \dfrac{2\varkappa}{\mu_n^2} J_2^2(\mu_n) \right]} \int_0^{r_0} r\psi(r) \left[J_0\left(\mu_n \frac{r}{r_0}\right) - J_0(\mu_n) \right] dr.$$

Указание. Частные решения уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_1^2 \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r} \right\} - \frac{\rho_0 a_0^2}{\rho_1 \Omega_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_0} r u(r,\, t)\, dr,$$

удовлетворяющие условиям

$$|u(0,\, t)| < +\infty, \quad u(r_0,\, t) = 0,$$

ищем в виде

$$U(r,\, t) = R(r) T(t).$$

После разделения переменных это приводит к уравнениям

$$T'' + a_1^2 \lambda^2 T = 0, \quad \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{dR}{dr} + \lambda^2 R = 2\pi\, \frac{\rho_0 a_0^2}{\rho_1 a_1^2} \cdot \frac{1}{\Omega_0} \int_0^{r_0} r R(r)\, dr.$$

Прежде чем искать решения последнего уравнения, удовлетворяющие условиям

$$|R(0)| < +\infty, \quad R(r_0) = 0, \tag{1'}$$

выполним в нем замену переменных: $\lambda r = x$, $R(r) = R\left(\dfrac{x}{\lambda}\right) = y(x)$;

[1)] По поводу обозначений см. задачу 5.

это приведет к уравнению

$$y'' + \frac{1}{x}\,y' + y(x) = \frac{2\pi}{\Omega_0}\,\frac{\rho_0 a_0^2}{\rho_1 a_1^2}\cdot\frac{r_0^2}{\mu^2}\int\limits_0^{\mu} xy(x)\,dx, \tag{2'}$$

где $\mu = \lambda r_0$.

При этом условия (1) примут вид

$$|y(0)| < +\infty, \quad y(\mu) = 0. \tag{3'}$$

Решения уравнения (2'), удовлетворяющие граничным условиям (3'), ищем в виде

$$y(x) = J_0(x) - J_0(\mu). \tag{4'}$$

Подстановка (4') в (2') дает

$$-J_0(\mu) = \frac{2\pi}{\Omega_0}\,\frac{\rho_0 a_0^2}{\rho_1 a_1^2}\,\frac{r_0^2}{\mu^2}\int\limits_0^{\mu} x\{J_0(x) - J_0(\mu)\}\,dx, \tag{5'}$$

что приводит к следующему уравнению для определения значений μ, соответствующих собственным значениям $\lambda = \dfrac{\mu}{r_0}$ рассматриваемой краевой задачи

$$J_0(\mu) + \varkappa J_2(\mu) = 0\,^{1)}, \tag{6}$$

где

$$\varkappa = \pi\,\frac{\rho_0 a_0^2}{\rho_1 a_1^2}\,\frac{r_0^2}{\Omega_0}.$$

Полагая

$$R_n(r) = J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) - J_0(\mu_n),$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения (6), нетрудно установить следующие соотношения ортогональности[2)] для собственных функций $R_n(r)$ рассматриваемой краевой задачи

$$\int\limits_0^{r_0} rR_n(r)R_m(r)\,dr = \begin{cases} \dfrac{r_0^2}{2}\left[J_1^2(\mu_n) + \dfrac{2\varkappa}{\mu_n^2}\,J_2^2(\mu_n)\right] & \text{при} \quad m = n, \\ 0 & \text{при} \quad m \neq n. \end{cases} \tag{7}$$

70. $u(r,\,t) = \dfrac{\dfrac{\Pi_0}{T_0}\left\{J_0\left(\dfrac{\omega r_0}{a_1}\right) - J_0\left(\dfrac{\omega r}{a_1}\right)\right\}}{\varkappa J_2\left(\dfrac{\omega r_0}{a_1}\right) + \dfrac{\omega^2}{a_1^2}\,J_0\left(\dfrac{\omega r_0}{a_1}\right)}\sin\omega t +$

$$+ \sum_{n=1}^{+\infty} A_n B_n(r)\sin\frac{a_1\mu_n t}{r_0}, \tag{1}$$

[1)] Для этого после выполнения интегрирования в правой части (5) с помощью соотношения (2) [7, с. 638], нужно воспользоваться первым из соотношений (21) [7, с. 637, 638], положив $\nu = 1$.

[2)] См. [38].

где $\varkappa$ и $R_n(r)$ имеют тот же смысл, что и в предыдущей задаче,

$$A_n = \frac{2}{a\mu_n r_0 \left[J_1^2(\mu_n) + \dfrac{2\varkappa}{\mu_n^2} J_2^2(\mu_n)\right]} \int_0^{r_0} r\psi(r) R_n(r)\, dr, \tag{2}$$

где

$$\psi(r) = \frac{\dfrac{\Pi_0}{T_0}\left\{J_0\left(\dfrac{\omega r_0}{a_1}\right) - J_0\left(\dfrac{\omega r}{a_1}\right)\right\}}{\varkappa J_2\left(\dfrac{\omega r_0}{a_1}\right) + \dfrac{\omega^2}{a_1^2} J_0\left(\dfrac{\omega r_0}{a_1}\right)}, \tag{3}$$

T_0 — натяжение мембраны.

Указание. См. указание к предыдущей задаче.

71. Решение краевой задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^4 \Delta_2 \Delta_2 u = 0, \quad 0 \leqslant r < r_0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(r_0, t) = u_r(r_0, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(r, 0) = f(r), \quad u_t(r, 0) = F(r), \quad 0 \leqslant r < r_0, \tag{3}$$

будем искать методом разделения переменных. Заметим, что в условиях радиальной симметрии

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}. \tag{4}$$

Частные решения уравнения (2) ищем в виде

$$U(r, t) = R(r)T(t). \tag{5}$$

Мы получим

$$T'' + \omega^4 T = 0, \quad T(t) = A\cos\omega^2 t + B\sin\omega^2 t, \tag{6}$$

$$\Delta\Delta R - k^4 R = 0, \quad k^4 = \frac{\omega^4}{c^4}, \quad \Delta = \Delta_2. \tag{7}$$

Последнее уравнение можно записать так:

$$(\Delta + k^2)(\Delta - k^2)R(r) = 0. \tag{8}$$

Таким образом, $R(r)$ может быть решением уравнения

$$(\Delta + k^2)R(r) = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + k^2 R = 0, \tag{9}$$

либо уравнения

$$(\Delta - k^2)R(r) = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} - k^2 R = 0. \tag{9'}$$

Так как нас интересуют лишь ограниченные при $r = 0$ решения уравнения (8), то

$$R(r) = CJ_0(kr) + DI_0(kr). \tag{10}$$

Чтобы удовлетворить граничным условиям (2), $R(r)$ должно удовлетворять граничным условиям

$$R(r_0) = R'(r_0) = 0. \tag{11}$$

Подставляя (10) в (11), получаем уравнения

$$\left.\begin{aligned} CJ_0(kr_0) + DI_0(kr_0) = 0,\\ CJ_0'(kr_0) + DI_0'(kr_0) = 0.\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Мы разыскиваем нетривиальные решения уравнения (8), удовлетворяющие граничным условиям (11), поэтому константы C и D не должны одновременно обращаться в нуль, следовательно, определитель системы (12) должен быть равным нулю. Так мы приходим к трансцендентному уравнению

$$J_0(kr_0)I_0'(kr_0) - I_0(kr_0)J_0'(kr_0) = 0 \tag{13}$$

для определения собственных значений нашей краевой задачи k_1, $k_2, \ldots, k_n, \ldots$ В качестве собственных функций можно взять

$$R_n(r) = R(k_n r) = I_0(k_n r_0)J_0(k_n r) - J_0(k_n r_0)I_0(k_n r). \tag{14}$$

Эти функции ортогональны[1)] на отрезке $0 \leqslant r < r_0$ с весом r. Для доказательства этого утверждения заметим, что уравнение (7) можно переписать в виде

$$\frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\left\{r\,\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{dR}{dr}\right)\right]\right\} - k^4 R = 0. \tag{15}$$

Положим в уравнении (15) $R = R_n(r)$, $k = k_n$, а затем $R = R_m(r)$ и $k = k_m$, умножим первое из полученных равенств на $rR_m(r)$, а второе на $rR_n(r)$, вычтем результаты и проинтегрируем по r от нуля до r_0;

[1)] Ортогональность R_n и R_m может быть доказана и без подробного исследования их поведения при $r = 0$. Возьмем уравнения

$$\Delta\Delta R_n(r) - k_n^4 R_n(r) = 0, \quad \Delta\Delta R_m(r) - k_m^4 R_m(r) = 0, \quad \Delta = \Delta_2,$$

умножим первое на $R_m(r)$, а второе на $R_n(r)$ и вычтем; мы придем к равенству

$$R_m\Delta\Delta R_n - R_n\Delta\Delta R_m = (k_n^4 - k_m^4)R_m R_n.$$

Проинтегрируем это равенство по кругу K с границей Γ, $0 \leqslant r < r_0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ и воспользуемся формулой Грина

$$(k_n^4 - k_m^4)\iint\limits_K R_m R_n\,d\sigma = \iint\limits_K [R_m\Delta\Delta R_n - R_n\Delta\Delta R_m]\,d\sigma = \int\limits_\Gamma \left(R_m\,\frac{d\,\Delta R_n}{dr} - R_n\,\frac{d\,\Delta R_m}{dr}\right)ds + \int\limits_\Gamma \left(\frac{dR_n}{dr}\,\Delta R_m - \frac{dR_m}{dr}\,\Delta R_n\right)ds = 0, \tag{17}$$

так как на окружности Γ, $r = r_0$, имеет место

$$R_m(r_0) = R_n(r_0) = 0, \quad R_m'(r_0) = R_n'(r_0) = 0.$$

Если $k_m \neq k_n$ $(k_m, k_n \geqslant 0)$, то из равенства

$$(k_n^4 - k_m^4)\iint\limits_K R_m R_n\,d\sigma = 0$$

следует равенство

$$\iint\limits_K R_m R_n\,d\sigma = 0, \quad \text{т. е.} \quad \int\limits_0^{r_0} rR_m(r)R_n(r)\,dr = 0,$$

это даст

$$(k_m^4 - k_n^4)\int_0^{r_0} rR_mR_n\,dr = \left\{R_n\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR_m}{dr}\right)\right] - \right.$$

$$\left. - R_m\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR_n}{dr}\right)\right] + R_m'R_n'' - R_n'R_m''\right\}_{r=0}^{r=r_0}. \quad (16)$$

Подстановка в правой части последнего равенства обращается в нуль тождественно при $r = 0$, что вытекает из структуры рядов для функций Бесселя $J_0(x)$ и $I_0(x)$, а при $r = r_0$ эта подстановка обращается в нуль в силу граничных условий (11). Поэтому при $k_m \neq k_n$, $k_m \geqslant 0$, $k_n \geqslant 0$ будет

$$\int_0^{r_0} rR_mR_n\,dr = 0. \quad (16')$$

Если в равенстве (16) заменить k_m на k и перейти к пределу при $k \to k_n$, то, раскрывая неопределенность по правилу Лопиталя, найдем [1])

$$\|R_n\|^2 = \int_0^{r_0} rR_n^2(r)\,dr =$$

$$= \frac{r_0^6}{4}\left\{R_n''^2 - R_n'\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR_n}{dr}\right)\right] - \frac{R_n'R_n''}{k_n^4r_0^4} - R_n'R_n'''\right\}_{r=r_0} =$$

$$= \frac{r_0^6}{4}R_n''^2(r_0) = r_0^2J_0^2(k_nr_0)I_0^2(k_0r_n). \quad (18)$$

Решение краевой задачи (1), (2), (3) получаем в виде суммы ряда

$$u(r,\,t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\{A_n\cos(c^2k_n^2t) + B_n\sin(c^2k_n^2t)\}R_n(r),$$

где

$$A_n = \frac{\int_0^{r_0} rf(r)R_n(r)\,dr}{\|R_n\|^2}, \quad B_n = \frac{\int_0^{r_0} rF(r)R_n(r)\,dr}{c^2k_n^2\|R_n\|^2}.$$

72. $$u(r,\,t) = \frac{c^2J}{2\pi D}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{[I_0(k_nr_0) - J_0(k_nr_0)]\cdot R_n(r)}{k_n^2r_0^2I_0^2(k_nr_0)J_0^2(k_nr_0)}\sin(k_n^2c^2t),$$

где цилиндрическая жесткость D равна

$$D = \frac{2Eh^3}{3(1-m^2)}\ ^{2}),$$

а $R_n(r)$ имеет тот же смысл, что и в предыдущей задаче.

[1]) Можно было бы воспользоваться аналогичным образом соотношением (17), полученным в предыдущей сноске.

[2]) См. решение задачи 18 настоящей главы.

73. $u(r,\,t)=\dfrac{2p_0c^2r_0^2}{\omega D}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(k_n^2c^2t)-\dfrac{k_n^2c^2}{\omega}\sin\omega t}{1-\left(\dfrac{k_n^2c^2}{\omega}\right)^2}\times$

$$\times\frac{J_1(k_nr_0)R_n(r)}{k_n^2r_0^2J_0^2(k_nr)I_0^2(k_nr)},$$

где R_n и D имеют тот же смысл, что и в предыдущей задаче.

74. $u(r,\,t)=$

$$=\frac{c^2p_0}{2\pi D}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(k_n^2c^2t)-\dfrac{k_n^2c^2}{\omega}\sin\omega t}{1-\left(\dfrac{k_n^2c^2}{\omega}\right)^2}\cdot\frac{[I_0(k_nr_0)-J_0(k_nr_0)]R_n(r)}{k_n^2r_0^2J_0^2(k_nr_0)I_0^2(k_nr_0)}.$$

75. Решением краевой задачи

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\left\{\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right\},\quad r^*<r<r^{**},\quad 0<t<+\infty,\tag{1}$$

$$u(r^*,\,t)=u(r^{**},\,t)=0,\quad 0<t<+\infty,\tag{2}$$

$$u(r,\,0)=\varphi(r),\quad u_t(r,\,0)=\psi(r),\quad r^*\leqslant r\leqslant r^{**},\tag{3}$$

является

$$u(r,\,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\{A_n\cos(a\lambda_nt)+B_n\sin(a\lambda_nt)\}R_n(r),\tag{4}$$

где

$$R_n(r)=J_0(r\lambda_n)H_0^{(1)}(r^{**}\lambda_n)-J_0(r^{**}\lambda_n)H_0^{(1)}(r\lambda_n),\tag{5}$$

λ_n — положительные корни уравнения

$$J_0(r^*\lambda)H_0^{(1)}(r^{**}\lambda)-J_0(r^{**}\lambda)H_0^{(1)}(r^*\lambda)=0,\tag{6}$$

$$A_n=\frac{\pi^2\lambda_n^2}{2}\cdot\frac{J_0^2(\lambda_nr^*)}{J_0^2(\lambda_nr^{**})-J_0^2(\lambda_nr^*)}\int\limits_{r^*}^{r^{**}}r\varphi(r)R_n(r)\,dr,\tag{7}$$

$$B_n=\frac{\pi^2\lambda_n}{2a}\cdot\frac{J_0^2(\lambda_nr^*)}{J_0^2(\lambda_nr^{**})-J_0^2(\lambda_nr^*)}\int\limits_{r^*}^{r^{**}}r\psi(r)R_n(r)\,dr.\tag{7'}$$

76.
$$u(r,t)=R(r)\sin\omega t+\sum_{n=1}^{+\infty}B_nR_n(r)\sin a\lambda_nt,\tag{1}$$

$R(r)=\dfrac{p_0}{\omega^2\rho}\times$

$$\times\left\{\frac{\left[H_0^{(1)}\left(\frac{\omega r^{**}}{a}\right)-H_0^{(1)}\left(\frac{\omega r^*}{a}\right)\right]J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)+\left[J_0\left(\frac{\omega r^*}{a}\right)-J_0\left(\frac{\omega r^{**}}{a}\right)\right]H_0^{(1)}\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{J_0\left(\frac{\omega r^*}{a}\right)H_0^{(1)}\left(\frac{\omega r^{**}}{a}\right)-H_0^{(1)}\left(\frac{\omega r^*}{a}\right)J_0\left(\frac{\omega r^{**}}{a}\right)}-\right.$$

$$\left.-1\right\},\tag{2}$$

$$B_n = \frac{\pi^2\lambda_n}{2a}\cdot\frac{J_0^2(\lambda_n r^*)}{J_0^2(\lambda_n r^{**}) - J_0^2(\lambda_n r^*)}\int\limits_{r^*}^{r^{**}} rR(r)R_n(r)\,dr, \tag{3}$$

$$R_n(r) = J_0(\lambda_n r)H_0^{(1)}(\lambda_n r^{**}) - J_0(\lambda_n r^{**})H_0^{(1)}(\lambda_n r), \tag{4}$$

λ_n — положительные корни уравнения

$$J_0(\lambda r^*)H_0^{(1)}(\lambda r^{**}) - J_0(\lambda r^{**})H_0^{(1)}(\lambda r^*) = 0. \tag{5}$$

77.
$$u(r,\,t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\{A_n\cos a\lambda_n t + B_n\sin a\lambda_n t\}R_n^*(r), \tag{1}$$

$$R_n^* = J_0(\lambda_n r)H_0^{(1)\prime}(\lambda_n r^{**}) - J_0'(\lambda_n r^{**})H_0^{(1)}(\lambda_n r), \tag{2}$$

λ_n — положительные корни уравнения

$$J_0'(\lambda r^*)H_0^{(1)'}(\lambda r^{**}) - J_0'(\lambda r^{**})H_0^{(1)'}(\lambda r^*) = 0, \tag{3}$$

$$A_n = \frac{\displaystyle\int\limits_{r^*}^{r^{**}} r\varphi(r)R_n^*(r)\,dr}{\displaystyle\int\limits_{r^*}^{r^{**}} rR_n^{*2}(r)\,dr}, \quad B_n = \frac{\displaystyle\int\limits_{r^*}^{r^{**}} r\psi(r)R_n^*(r)\,dr}{a\lambda_n\displaystyle\int\limits_{r^*}^{r^{**}} rR_n^{*2}(r)\,dr}.$$

78.
$$u(r,\,z,\,t) = \left\{\sum_{n=1}^{+\infty} A_n I_0\left(r\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{l^2} - \frac{\omega^2}{a^2}}\right)\cos\frac{n\pi z}{l}\right\}\cos\omega t\,+$$
$$+\sum_{m,\,n=0}^{+\infty} B_{mn}J_0\left(\frac{\mu_m r}{r_0}\right)\cos\frac{n\pi z}{l}\cos ta\sqrt{\frac{\mu_m^2}{r_0^2} + \frac{n^2\pi^2}{l^2}}, \tag{1}$$

$$A_n = -\frac{2}{l\sqrt{\dfrac{n^2\pi^2}{l^2} - \dfrac{\omega^2}{a^2}}\,I_1\left(r_0\sqrt{\dfrac{n^2\pi^2}{l^2} - \dfrac{\omega^2}{a^2}}\right)}\int_0^l f(z)\cos\frac{n\pi z}{l}\,dz,$$
$$n = 1,\,2,\,3,\,\ldots, \tag{2}$$

$$A_0 = \frac{a^2}{l\omega^2 J_1\left(\dfrac{\omega r_0}{a}\right)}\int_0^l f(z)\,dz, \tag{2'}$$

$$B_{nm} = -\frac{2A_n}{r_0^2J_0^2(\mu_m)}\int_0^{r_0} rI_0\left(r\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{l^2} - \frac{\omega^2}{a^2}}\right)J_0\left(\frac{\mu_m r}{r_0}\right)dr,$$
$$n = 1,\,2,\,3,\,\ldots, \tag{3}$$

$$B_{0m} = -\frac{2A_0}{r_0^2J_0^2(\mu_m)}\int_0^{r_0} rJ_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)J_0\left(\frac{\mu_m r}{r_0}\right)dr, \tag{3'}$$

$\mu_m,\ m = 0,\,1,\,2,\,3,\,\ldots,$ — положительные корни уравнения $J_1(\mu) = 0$.

Замечание. Член с множителем $\cos\omega t$ в равенстве (1) является частным решением уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right\},$$

удовлетворяющим неоднородным граничным условиям задачи.

79. Потенциал скоростей равен

$$u(r,\,z,\,t) = \left\{\sum_{m=0}^{+\infty} A_m \operatorname{ch} z\sqrt{\frac{\mu_m^2}{r_0^2} - \frac{\omega^2}{a^2}}\, J_0\left(\frac{\mu_m r}{r_0}\right)\right\}\cos\omega t + \\ + \sum_{n,\,m=0}^{+\infty} B_{nm}\cos\frac{n\pi z}{l}\, J_0\left(\frac{\mu_m r}{r_0}\right)\cos ta\sqrt{\frac{\mu_m^2}{r^2} + \frac{n^2\pi^2}{l^2}},$$

$$A_m = \frac{2}{r_0^2 J_0^2(\mu_m)\sqrt{\dfrac{\mu_m^2}{r_0^2} - \dfrac{\omega^2}{a^2}}\operatorname{sh} l\sqrt{\dfrac{\mu_m^2}{r_0^2} - \dfrac{\omega^2}{a^2}}}\int_0^{r_0} r f(r) J_0\left(\frac{\mu_m r}{r_0}\right) dr,$$

$$B_{nm} = -\frac{2A_m}{l}\int_0^l \operatorname{ch} z\sqrt{\frac{\mu_m^2}{r_0^2} - \frac{\omega^2}{a^2}}\cos\frac{n\pi z}{l}\, dz, \quad n = 1,\,2,\,\ldots,$$

$$B_{0m} = -\frac{A_m}{l}\int_0^l \operatorname{ch} z\sqrt{\frac{\mu_m^2}{r_0^2} - \frac{\omega^2}{a^2}}\, dz,$$

μ_m, $m = 0,\,1,\,2,\,\ldots$, — положительные корни уравнения $J_1(\mu) = 0$.

80. Потенциал скоростей равен

$$u(r,\,z,\,t) = \left\{\sum_{n=0}^{+\infty} A_n R_n(r)\cos\frac{n\pi z}{l}\right\}\cos\omega t + \\ + \sum_{n,\,m=0}^{+\infty} B_{nm} R_m^*(r)\cos\frac{n\pi z}{l}\cos ta\sqrt{\lambda_m^2 + \frac{n^2\pi^2}{l^2}}, \quad (1)$$

$$R_n(r) = K_0'(\varkappa_n r^*) I_0(\varkappa_n r) - K_0(\varkappa_n r) I_0'(\varkappa_n r^*),$$

$$\varkappa_n = \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{l^2} - \frac{\omega^2}{a^2}}, \quad n = 1,\,2,\,\ldots\ ^{1)}, \quad (2)$$

$$R_0(r) = N_0'\left(\frac{\omega r^*}{a}\right) J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right) - N_0\left(\frac{\omega r}{a}\right) J_0'\left(\frac{\omega r^*}{a}\right), \quad (3)$$

$$A_n = \frac{2}{l R_n'(r^{**})}\int_0^l f(z)\cos\frac{n\pi z}{l}\, dz, \quad n = 1,\,2,\,\ldots,$$

[1)] Здесь предполагается, что $\varkappa_n$ действительное; в противном случае K_0 и I_0 заменятся на N_0 и J_0.

$$A_0 = \frac{1}{lR_0'(r^{**})}\int\limits_0^l f(z)\,dz, \tag{4}$$

$$R_m^*(r) = J_0(\lambda_m r)H_0^{(1)'}(\lambda_m r^{**}) - J_0'(\lambda_m r^{**})H_0^{(1)}(\lambda_m r),$$

λ_m — положительные корни уравнения

$$J_0'(\lambda r^*)H_0^{(1)'}(\lambda r^{**}) - J_0'(\lambda_m r^{**})H_0^{(1)'}(\lambda r^*) = 0,$$

$$B_{nm} = -\frac{A_n\int\limits_{r^*}^{r^{**}} rR_n(r)R_m^*(r)\,dr}{\int\limits_{r^*}^{r^{**}} rR_m^{*2}(r)\,dr}.$$

81. Потенциал скоростей равен

$$u(r,\,z,\,t) = \left\{\sum_{n=0}^{+\infty} A_n R_n^*(r)\operatorname{ch} z\sqrt{\lambda_n^2 - \frac{\omega^2}{a^2}}\right\}\cos\omega t + \\ + \sum_{n,\,m=0}^{+\infty} B_{nm}R_n^*(r)\cos\frac{m\pi z}{l}\cos ta\sqrt{\lambda_n^2 + \frac{m^2n^2}{l^2}},$$

$$R_n^*(r) = J_0(\lambda_n r)H_0^{(1)'}(\lambda_n r^{**}) - J_0'(\lambda_m r^{**})H_0^{(1)}(\lambda_n r),$$

λ_n $(n = 0,\,1,\,2,\,\ldots)$ — положительные корни уравнения

$$J_0'(\lambda r^*)H_0^{(1)'}(\lambda r^{**}) - J_0'(\lambda_n r^{**})H_0^{(1)'}(\lambda r^*) = 0\ ^{1}),$$

$$A_n = \frac{\int\limits_{r^*}^{r^{**}} rf(r)R_n^*(r)\,dr}{\sqrt{\lambda_n^2 - \frac{\omega^2}{a^2}}\operatorname{sh} l\sqrt{\lambda_n^2 - \frac{\omega^2}{a^2}}\int\limits_{r^*}^{r^{**}} rR_n^{*2}(r)\,dr},$$

$$B_{nm} = -\frac{2A_n}{l}\int\limits_0^l \operatorname{ch} z\sqrt{\lambda_n^2 - \frac{\omega^2}{a^2}}\cos\frac{m\pi z}{l}\,dz, \quad m = 1,\,2,\,3,\,\ldots,$$

$$B_{n0} = -\frac{A_n}{l}\int\limits_0^l \operatorname{ch} z\sqrt{\lambda_n^2 - \frac{\omega^2}{a^2}}\,dz.$$

[1]) Здесь предполагается, что $\lambda_n > \dfrac{\omega}{a}$ для всех $n = 0,\,1,\,2,\,\ldots$

82. $u(r,\varphi,t)=$

$$=\frac{2K}{\pi a r_0}\sum_{n,k=0}^{+\infty}\frac{J_n\left(\dfrac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right)J_n\left(\dfrac{\mu_k^{(n)}r_1}{r_0}\right)}{\varepsilon_n\mu_k^{(n)}J_n'^2(\mu_k^{(n)})}\cos n(\varphi-\varphi_1)\sin\frac{a\mu_k^{(n)}t}{r_0},$$

где $\mu_k^{(n)}$ — положительные корни уравнения $J_n(\mu)=0$,

$$\varepsilon_n=\begin{cases}2 & \text{при} \quad n=0,\\ 1 & \text{при} \quad n\neq 0,\end{cases}$$

r_0 — радиус мембраны, (r_1,φ_1) — точка удара.

Указание. Можно сначала считать, что импульс K равномерно распределяется в момент $t=0$ по элементарной площадке $\varphi_1\leqslant\varphi\leqslant\varphi_1+\Delta\varphi$, $r_1\leqslant r\leqslant r_1+\Delta r$, т. е. что начальные условия имеют вид

$$u(r,\varphi,0)=0,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0,\quad 0\leqslant r\leqslant r_0,$$

$$u_t(r,\varphi,0)=\begin{cases}\dfrac{K}{\rho r_1\Delta\varphi\Delta r} & \text{на указанной площадке,}\\ 0 & \text{вне указанной площадки,}\end{cases}$$

а затем в решении, полученном при этих начальных условиях, перейти к пределу при $\Delta\varphi\to 0$ и $\Delta r\to 0$.

Можно воспользоваться также импульсными дельта-функциями для формулирования начальных условий, полагая

$$u(r,\varphi,0)=0,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0,\quad 0\leqslant r\leqslant r_0,$$

$$u_t(r,\varphi,0)=\frac{K}{\rho}\,\delta^*(r-r_1)\delta(\varphi-\varphi_1),$$

где дельта-функция $\delta(\varphi-\varphi_1)$ определяется обычным образом, а функция $\delta^*(r-r_1)$ определяется равенствами

$$\int_{r_0'}^{r_0''}r\delta^*(r-r_1)f(r)\,dr=f(r_1),\quad \text{если}\quad r_0'<r_1<r_0'',$$

$$\int_{r_0'}^{r_0''}r\delta^*(r-r_1)f(r)\,dr=0,\quad \text{если } r_1 \text{ лежит вне отрезка } [r_0',\,r_0''],$$

какова бы ни была непрерывная функция $f(r)$. Таким образом, произведение $\delta^*(r-r_1)\delta(\varphi-\varphi_1)$ является обычной дельта-функцией для плоской области; умножая ее на элемент площади в полярных координатах $r\,dr\,d\varphi$ и интегрируя по рассматриваемой области, мы получим 1 или 0, смотря по тому, принадлежит точка (r_1,φ_1) этой области или нет [1]).

[1]) См. также [7, с. 270].

83. Потенциал горизонтальных скоростей частиц воды является решением краевой задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right\}, \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u_r(r_0, \varphi, t) = 0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(r, \varphi, 0) = v_0 r \cos\varphi, \quad u_t(r, \varphi, 0) = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \tag{3}$$

для него получается выражение

$$u(r, \varphi, t) = v_0 \cos\varphi \sum_{n=1}^{+\infty} A_n J_1\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) \cos\frac{a\mu_n t}{r_0}, \tag{4}$$

где μ_n — положительные корни уравнения $J_1'(\mu) = 0$, а

$$A_n = \frac{2\mu_n^2 \int\limits_0^{r_0} r^2 J_1\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) dr}{r_0[\mu_n^2 - 1]J_1^2(\mu_n)}. \tag{5}$$

84. $u(r, \varphi, t) =$

$$= \frac{r_0}{a\rho} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_n}{\mu_n} J_1\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) \int\limits_0^t \cos(\varphi - \omega\tau) \sin\frac{a\mu_n}{r_0}(t - \tau)\, d\tau, \tag{1}$$

где μ_n — положительные корни уравнения $J_1(\mu) = 0$,

$$A_n = \frac{\int\limits_0^{r_0} r f(r) J_1\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) dr}{\int\limits_0^{r_0} r J_1^2\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) dr} = \frac{2\int\limits_0^{r_0} r f(r) J_1\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) dr}{r_0^2 J_1'^2(\mu_n)}. \tag{2}$$

Замечание. Можно получить решение и в другой форме. Для этого сначала нужно, не заботясь о начальных условиях, найти частное решение неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right\} + \frac{f(r)}{\rho} \cos(\varphi - \omega t),$$

обращающееся в нуль при $r = r_0$ в виде

$$U(r, \varphi, t) = R(r) \cos(\varphi - \omega t).$$

Применяя метод вариации постоянных с использованием вронскиана цилиндрических функций $W\{J_1(z), N_1(z)\} = \frac{2}{\pi z}$, для $R(r)$ нетрудно получить выражение

$$R(r)=\frac{\pi\omega}{2a\rho}\,\frac{J_1\left(\dfrac{\omega r}{a}\right)}{J_1\left(\dfrac{\omega r_0}{a}\right)}\times$$

$$\times\left\{J_1\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)\int\limits_0^{r_0} rf(r)N_1\left(\frac{\omega r}{a}\right)dr-N_1\left(\frac{\omega r_0}{a}\right)\int\limits_0^{r_0} rf(r)J_1\left(\frac{\omega r}{a}\right)dr\right\}-$$

$$-\frac{\pi\omega}{2a\rho}J_1\left(\frac{\omega r}{a}\right)\int\limits_0^{t} rf(r)N_1\left(\frac{\omega r}{a}\right)dr+\frac{\pi\omega}{2a\rho}N_1\left(\frac{\omega r}{a}\right)\int\limits_0^{r} rf(r)J_1\left(\frac{\omega r}{a}\right)dr.$$

Затем нужно найти решение однородного уравнения с соответствующими неоднородными начальными условиями.

85. $$u(r,\,\varphi,\,t)=\left\{\sum_{n=1}^{+\infty}C_n(a^2\mu_n^2-r_0^2\omega^2)J_1\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)\right\}\cos(\varphi-\omega t)-$$

$$-2r_0^2\varkappa\omega\left\{\sum_{n=1}^{+\infty}C_nJ_1\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)\right\}\sin(\varphi-\omega t),$$

$$C_n=\frac{2\displaystyle\int\limits_0^{r_0} rf(r)J_1\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)dr}{\rho J_1'^{\,2}(\mu_n)[(r_0^2\omega^2-a^2\mu_n^2)^2+4r_0^4\varkappa^2\omega^2]},$$

μ_n — положительные корни уравнения $J_1(\mu)=0$.

Указание. Решение задачи может быть получено как действительная часть решения уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right\}-2\varkappa\,\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{f(r)}{\rho}\,e^{i(\varphi-\omega t)},\qquad(1)$$

обращающегося в нуль при $r=r_0$. Такое решение уравнения (1) можно искать в виде

$$U(r,\,\varphi,\,t)=R(r)e^{i(\varphi-\omega t)}.$$

Решение дифференциального уравнения, получающегося для $R(r)$, можно искать в виде

$$R(r)=\sum_{n=1}^{+\infty}A_nJ_1\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right).$$

86. $$u(r,\,\varphi,\,t)=\left\{v(r,\,t)+\frac{r^2}{r_0^2}\,f(t)\right\}\cos n\varphi,$$

$$v(r,\,t)=\frac{r_0}{a}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{J_n\left(\dfrac{\mu_m r}{r_0}\right)}{\mu_m}\int\limits_0^{t}\psi_m(\tau)\sin\frac{a\mu_m}{r_0}\,(t-\tau)\,d\tau,$$

$$\psi_m(t)=\frac{2\displaystyle\int\limits_0^{r_0} r[3a^2f(t)-r^2f''(t)]\,J_m\left(\frac{\mu_m r}{r_0}\right)dr}{r_0^4J_n'^{\,2}(\mu_m)},$$

μ_m — положительные корни уравнения $J_n(\mu)=0$.

87. $u(r,\,\varphi,\,t)=\sin\omega t\sum\limits_{n=0}^{+\infty}J_n\left(\dfrac{\omega r}{a}\right)(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)+$

$$+\sum_{n,\,m=0}^{+\infty}J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{r_0}\right)(A_{nm}\cos n\varphi+B_{nm}\sin n\varphi)\sin\frac{a\mu_m^{(n)}t}{r_0},$$

$\mu_m^{(n)}$ — положительные корни уравнения $J_n(\mu)=0$,

$$A_0=\frac{1}{2\pi J_0\left(\dfrac{\omega r_0}{a}\right)}\int\limits_0^{2\pi}F(\varphi)\,d\varphi,\quad A_n=\frac{1}{\pi J_n\left(\dfrac{\omega r_0}{a}\right)}\int\limits_0^{2\pi}F(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi,$$

$n=1,\,2,\,3,\,\ldots,$

$$B_n=\frac{1}{\pi J_n\left(\dfrac{\omega r_0}{a}\right)}\int\limits_0^{2\pi}F(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi,\quad n=1,\,2,\,3,\,\ldots,$$

$$A_{nm}=\frac{2\omega A_n\displaystyle\int\limits_0^{r_0}rJ_n\left(\frac{\omega r}{a}\right)J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{r_0}\right)dr}{ar_0\mu_m^{(n)}J_n'^{\,2}(\mu_m^{(n)})},\quad n,\,m=0,\,1,\,2,\,3,\,\ldots,$$

$$B_{nm}=\frac{2\omega B_n\displaystyle\int\limits_0^{r_0}rJ_n\left(\frac{\omega r}{a}\right)J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}\,r\right)dr}{ar_0\mu_m^{(n)}J_n'^{\,2}(\mu_m^{(n)})},\quad n=1,\,2,\,3,\,\ldots,$$

$m=0,\,1,\,2,\,\ldots$

Указание. Сначала целесообразно найти частное решение уравнения

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\left\{\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}\right\},$$

удовлетворяющее граничному условию

$$u(r_0,\,\varphi,\,t)=F(\varphi)\sin\omega t.$$

Это частное решение естественно искать в виде

$$U(r,\,\varphi,\,t)=V(r,\,\varphi)\sin\omega t.$$

88. $u(r,\,\varphi,\,z,\,t)=$

$$=\left\{\sum_{m=0}^{+\infty}A_mI_n\left(r\sqrt{\frac{m^2\pi^2}{l^2}-\frac{\omega^2}{a^2}}\right)\cos\frac{m\pi z}{l}\right\}\cos n\varphi\cos\omega t+$$

$$+\sum_{m,\,k=0}^{+\infty}A_{mk}J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right)\cos\frac{m\pi z}{l}\cos n\varphi\cos at\sqrt{\frac{m^2\pi^2}{l^2}+\frac{\mu_k^{(n)^2}}{r_0^2}},$$

$\mu_k^{(n)}$ — положительные корни уравнения $J_n'(\mu)=0$,

$$A_m = \frac{2\int\limits_0^l f(z)\cos\dfrac{m\pi z}{l}\,dz}{l\sqrt{\dfrac{m^2\pi^2}{l^2}-\dfrac{\omega^2}{a^2}}\,I_n'\left(r_0\sqrt{\dfrac{m^2\pi^2}{l^2}-\dfrac{\omega^2}{a^2}}\right)}, \qquad A_0 = \frac{\int\limits_0^l f(z)\,dz}{\dfrac{l\omega}{a}\,J_n'\left(\dfrac{\omega r_0}{a}\right)},$$

$$A_{mk} = \frac{-2A_m\int\limits_0^{r_0} rI_n\left(r\sqrt{\dfrac{m^2\pi^2}{l^2}-\dfrac{\omega^2}{a^2}}\right)J_n\left(\dfrac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right)dr}{r_0^2\left[1-\dfrac{n^2}{\mu_k^{(n)^2}}\right]J_n^2(\mu_k^{(n)})}, \quad m = 1, 2, \ldots, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

$$A_{0k} = \frac{-2A_0\int\limits_0^{r_0} rJ_n\left(\dfrac{\omega r}{a}\right)J_n\left(\dfrac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right)dr}{r_0^2\left[1-\dfrac{n^2}{\mu_k^{(n)^2}}\right]J_n^2(\mu_k^{(n)})}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

89. $u(r, \varphi, z, t) =$

$$= \left\{\sum_{k=0}^{+\infty} A_k J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right)\operatorname{ch} z\sqrt{\frac{\mu_k^{(n)^2}}{r_0^2}-\frac{\omega^2}{a^2}}\right\}\cos n\varphi\cos\omega t +$$

$$+ \sum_{m,\,k=0}^{+\infty} A_{mk}J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right)\cos\frac{m\pi z}{l}\cos n\varphi\cos at\sqrt{\frac{m^2\pi^2}{l^2}+\frac{\mu_k^{(n)^2}}{r_0^2}},$$

$\mu_k^{(n)}$ — положительные корни уравнения $J_n'(\mu) = 0$,

$$A_k = \frac{2\int\limits_0^{r_0} rf(r)J_n\left(\dfrac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right)dr}{r_0^2\left[1-\dfrac{n^2}{\mu_k^{(n)^2}}\right]J_n^2(\mu_k^{(n)})\sqrt{\dfrac{\mu_k^{(n)^2}}{r_0^2}-\dfrac{\omega^2}{a^2}}\operatorname{sh} l\sqrt{\dfrac{\mu_k^{(n)^2}}{r_0^2}-\dfrac{\omega^2}{a^2}}},$$

$$A_{mk} = -\frac{2}{l}A_k\int\limits_0^l \operatorname{ch} z\sqrt{\frac{\mu_k^{(n)^2}}{r_0^2}-\frac{\omega^2}{a^2}}\cos\frac{m\pi z}{l}\,dz, \quad m = 1, 2, \ldots, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$A_{0k} = -\frac{1}{l}\,A_k\int\limits_0^l \operatorname{ch} z\sqrt{\frac{\mu_k^{(n)^2}}{r_0^2}-\frac{\omega^2}{a^2}}\,dz, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

90. $u(r,\varphi,t)=$

$$=\frac{4K}{r_0\varphi_0\rho}\sum_{k,\,n=1}^{+\infty}\frac{J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}\left(\frac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right)J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}\left(\frac{\mu_k^{(n)}r_1}{r_0}\right)}{\mu_k^{(n)}J'^2_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\mu_k^{(n)})}\sin\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\sin\frac{n\pi\varphi_1}{\varphi_0}\sin\frac{\mu_k^{(n)}at}{r_0},\tag{1}$$

где (r_1,φ_1) — точка, в которой сообщен импульс K, $\mu_k^{(n)}$ — корни уравнения $J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\mu_k^{(n)})=0$.

91. $u(r,\varphi,t)=$

$$=\frac{\pi^2K}{a\rho\varphi_0}\sum_{n,\,k=1}^{+\infty}\frac{\lambda_k^{(n)}J^2_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r_1)R_{nk}(\widetilde{r})R_{nk}(r)}{J^2_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r_2)-J^2_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r_1)}\sin\frac{n\pi\widetilde{\varphi}}{\varphi_0}\sin\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\sin\lambda_k^{(n)}at,$$

где $R_{nk}(r)=Z_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r)$ и $\lambda_k^{(n)}$ имеют тот же смысл, что и в задаче 45 гл. V, а $(\widetilde{r},\widetilde{\varphi})$ — точка, в которой сообщен мембране импульс K, ρ — поверхностная плотность массы мембраны (массы единицы площади).

92. Потенциал скоростей частиц газа является решением краевой задачи

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\left\{\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}\right\},\quad r_1\leqslant r\leqslant r_2,$$

$$0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0,\quad 0\leqslant t<+\infty,\tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{r=r_1}=\left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{r=r_2}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=0}=\left.\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0}=0,\tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}u(r,\varphi,0)&=f(r,\varphi),\\ u_t(r,\varphi,0)&=F(r,\varphi),\end{aligned}\right\}\ r_1\leqslant r\leqslant r_2,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0.\tag{3}$$

Решение краевой задачи (1), (2), (3) может быть представлено в виде

$$u(r,\varphi,t)=\sum_{n,\,k=0}^{+\infty}\{A_{nk}\cos a\lambda_k^{(n)}t+B_{nk}\sin a\lambda_k^{(n)}t\}R_{nk}(r)\cos\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0},\tag{4}$$

где

$$R_{nk}(r)=N'_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r_1)J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r)-J'_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r_1)N'_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda_k^{(n)}r),\tag{5}$$

$\lambda_k^{(n)}$ — положительные корни уравнения

$$N'_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda r_1)J'_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda r_2)-J'_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda r_1)N'_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}(\lambda r_2)=0,\tag{6}$$

$$A_{nk}=\frac{2}{\varphi_0\int\limits_{r_1}^{r_2}rR_{nk}^2(r)\,dr}\int\limits_{r_1}^{r_2}\int\limits_{0}^{\varphi_0}f(r,\varphi)R_{nk}(r)\cos\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\,r\,dr\,d\varphi,\quad n>0,\tag{7}$$

$$A_{0k} = \frac{1}{\varphi_0 \int\limits_{r_1}^{r_2} r R_{0k}^2(r)\,dr} \int\limits_{r_1}^{r_2}\int\limits_{0}^{\varphi_0} f(r,\,\varphi) R_{0k}(r) r\,dr\,d\varphi, \tag{8}$$

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} r R_{nk}^2(r)\,dr = \frac{2}{\pi^2 \lambda_k^{(n)2}} \cdot \frac{J_n'^2(\lambda_k^{(n)} r_2) - J_n'^2(\lambda_k^{(n)} r_1)}{J_n'^2(\lambda_k^{(n)} r_2)}. \tag{9}$$

93. Решение. Поместим начало сферической системы координат в центр сосуда и направим ось $\theta = 0$ по скорости движения сосуда при $t < 0$. Тогда потенциал u скоростей частиц газа не будет зависеть от угла φ и для u мы получим краевую задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \right\},$$

$$0 \leqslant r \leqslant r_0, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant t < +\infty, \tag{1}$$

$$u_r(r_0,\,\theta,\,t) = 0, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(r,\,\theta,\,0) = vr\cos\theta, \quad u_t(r,\,\theta,\,0) = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi. \tag{3}$$

Естественно попытаться искать решение краевой задачи (1), (2), (3) в виде

$$u(r,\,\theta,\,t) = w(r,\,t)\cos\theta. \tag{4}$$

Это приводит к следующей краевой задаче для w:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial w}{\partial r} \right) - \frac{2w}{r^2} \right\}, \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{5}$$

$$w_r(r_0,\,t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \tag{6}$$

$$w(r,\,0) = vr, \quad w_t(r,\,0) = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0, \tag{7}$$

которая решается методом разделения переменных, причем для $w(r,\,t)$ получается выражение

$$w(r,\,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \frac{J_{3/2}\left(\dfrac{\mu_k r}{r_0} \right)}{\sqrt{r}} \cos\frac{a\mu_k t}{r_0}, \tag{8}$$

где μ_k — положительные корни уравнения

$$\mu J_{3/2}'(\mu) - \frac{1}{2} J_{3/2}(\mu) = 0, \tag{9}$$

$$A_k = \frac{v \int\limits_0^{r_0} r^{5/2} J_{3/2}\left(\dfrac{\mu_k r}{r_0} \right) dr}{\dfrac{r_0^2}{2} J_{3/2}^2(\mu_k) \left[1 - \dfrac{2}{\mu_k^2} \right]}, \quad k = 1,\,2,\,3,\,\ldots \tag{10}$$

94. Потенциал u скоростей частиц газа является решением краевой задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \right\},$$

$$0 \leqslant r \leqslant r_0, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=r_0} = \omega A \cos\theta \cos\omega t, \tag{2}$$

$$u(r, \theta, 0) = 0, \quad u_t(r, \theta, 0) = 0. \tag{3}$$

Решение краевой задачи (1), (2), (3) может быть представлено в виде

$$u(r, \theta, t) = \left\{ \omega A_r + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \frac{J_{3/2}\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)}{\sqrt{r}} \right\} \cos\theta \cos\omega t + \\ + \sum_{k=1}^{+\infty} C_k \frac{J_{3/2}\left(\frac{\mu_k r}{r_0}\right)}{\sqrt{r}} \cos\theta \cos\frac{a\mu_k t}{r_0}, \tag{4}$$

где μ_n — положительные корни уравнения

$$\mu J'_{3/2}(\mu) - \frac{1}{2} J_{3/2}(\mu) = 0, \tag{5}$$

$$A_k = \frac{\dfrac{\omega^3 A}{a^2} \displaystyle\int_0^{r_0} r^{5/2} J_{3/2}\left(\frac{\mu_k r}{r_0}\right) dr}{\left(\dfrac{\mu_k^2}{r_0^2} - \dfrac{\omega^2}{a^2}\right) \dfrac{r_0^2}{a^2} J_{3/2}^2(\mu_k) \left[1 - \dfrac{2}{\mu_k^2}\right]}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{6}$$

$$C_k = \frac{-\displaystyle\int_0^{r_0} \left\{ \omega A r + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \frac{J_{3/2}\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)}{\sqrt{r}} \right\} r^{3/2} J_{3/2}\left(\frac{\mu_k r}{r_0}\right) dr}{\dfrac{r_0^2}{2} J_{3/2}^2(\mu_k) \left[1 - \dfrac{2}{\mu_k^2}\right]} = \\ = -\omega A \frac{\displaystyle\int_0^{r_0} r^{5/2} J_{3/2}\left(\frac{\mu_k r}{r_0}\right) dr}{\dfrac{r_0^2}{2} J_{3/2}^2(\mu_k) \left[1 - \dfrac{2}{\mu_k^2}\right]} - A_k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{7}$$

Замечание. Слагаемое

$$\left\{ \omega A r + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \frac{J_{3/2}\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right)}{\sqrt{r}} \right\} \cos\theta \cos\omega t, \tag{8}$$

входящее в (4), является решением уравнения (1), удовлетворяющим граничному условию (2), но не удовлетворяющим начальным условиям (3).

Функция

$$\omega A r \cos\theta \cos\omega t$$

удовлетворяет граничному условию (2), но не удовлетворяет уравнению (1).

95. $$u(r,\,\theta,\,t) = \left\{ \frac{Ar^n}{nr_0^{n-1}} + \sum_{i=1}^{+\infty} A_i \frac{J_{n+1/2}\left(\dfrac{\mu_i^{(n)} r}{r_0}\right)}{\sqrt{r}} \right\} \times$$

$$\times P_n(\cos\theta)\cos\omega t + \sum_{k=1}^{+\infty} C_k \frac{J_{n+1/2}\left(\dfrac{\mu_k^{(n)} r}{r_0}\right)}{\sqrt{r}} P_n(\cos\theta)\cos\frac{a\mu_k^{(n)} t}{r_0}, \quad (1)$$

где $\mu_k^{(n)}$ — положительные корни уравнения

$$\mu J'_{n+1/2}(\mu) - \frac{1}{2} J_{n+1/2}(\mu) = 0, \quad (2)$$

$$A_k = -\frac{\dfrac{\omega^2}{a^2}\dfrac{A}{nr_0^{n-1}}\displaystyle\int_0^{r_0} r^{n+3/2} J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_k^{(n)} r}{r_0}\right) dr}{\dfrac{r_0^2}{2} J^2_{n+1/2}(\mu_k^{(n)})\left[1 - \dfrac{n(n+1)}{\mu_k^{(n)2}}\right]}, \quad (3)$$

$$C_k = -\frac{\displaystyle\int_0^{r_0} \left\{ \frac{Ar^n}{nr_0^{n-1}} + \sum_{i=1}^{+\infty} A_i \frac{J_{n+1/2}\left(\dfrac{\mu_i^{(n)} r}{r_0}\right)}{\sqrt{r}} \right\} r^{3/2} J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_k^{(n)} r}{r_0}\right) dr}{\dfrac{r_0^2}{2} J^2_{n+1/2}\left(\mu_k^{(n)}\right)\left[1 - \dfrac{n(n+1)}{\mu_k^{(n)2}}\right]} =$$

$$= -\frac{A}{nr_0^{n-1}} \frac{\displaystyle\int_0^{r_0} r^{n+3/2} J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_k^{(n)} r}{r_0}\right) dr}{\dfrac{r_0^2}{2} J^2_{n+1/2}\left(\mu_k^{n}\right)\left[1 - \dfrac{n(n+1)}{\mu_k^{(n)2}}\right]} - A_k. \quad (4)$$

Замечание. См. замечание к ответу к предыдущей задаче.

96. Потенциал скоростей частиц газа является решением краевой задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left\{ \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\right\},$$

$$0 \leqslant r \leqslant r_0, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u_r(r_0, \theta, t) = P_n(\cos\theta) f(t), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 < t < +\infty, \tag{2}$$

$$u(r, \theta, 0) = u_t(r, \theta, 0) = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi. \tag{3}$$

Решение краевой задачи (1), (2), (3) может быть представлено в виде

$$u(r, \theta, t) = \left\{ \frac{r^n f(t)}{n r_0^{n-1}} + \sum_{k=1}^{+\infty} \psi_k(t) \frac{J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_k^{(n)} r}{r_0}\right)}{\sqrt{r}} \right\} P_n(\cos\theta), \tag{4}$$

где $\mu_k^{(n)}$ — положительные корни уравнения

$$\mu J'_{n+1/2}(\mu) - 1/2 J_{n+1/2}(\mu) = 0, \tag{5}$$

$$\psi_k(t) = \frac{r_0 A_k}{a\mu_k^{(n)}} \int_0^t f''(\tau) \sin \frac{a\mu_k^{(n)}}{r_0} (t - \tau)\, d\tau, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{6}$$

$$A_k = -\frac{1}{n r_0^{n-1}} \frac{\int_0^{r_0} r^{n+3/2} J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_k^{(n)} r}{r_0}\right) dr}{\frac{r_0^2}{2} J^2_{n+1/2}\left(\mu_k^{(n)}\right)\left[1 - \frac{n(n+1)}{\mu_k^{(n)2}}\right]}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{7}$$

97. $u(r, \theta, t) = \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \frac{J_{n+1/2}\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{\sqrt{r}} P_n(\cos\theta) \right\} \cos\omega t +$

$$+ \sum_{n,\, k=1}^{+\infty} A_{nk} \frac{J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_k^{(n)} r}{r_0}\right)}{\sqrt{r}} P_n(\cos\theta) \cos \frac{a\mu_k^{(n)} t}{r_0}, \tag{1}$$

$$A_n = \frac{2n+1}{2R'_n(r_0)} \int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos\theta) \sin\theta\, d\theta,$$

$$R_n(r) = \frac{J_{n+1/2}\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{\sqrt{r}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

$$A_{nk} = \frac{A_n \int_0^{r_0} r J_{n+1/2}\left(\frac{\omega r}{a}\right) J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_k^{(n)} r}{r_0}\right) dr}{\frac{r_0^2}{2} J^2_{n+1/2}(\mu_k^{(n)})\left[1 - \frac{n(n+1)}{\mu_k^{(n)2}}\right]},$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots, \tag{3}$$

где $\mu_k^{(n)}$ — положительные корни уравнения

$$\mu J'_{n+1/2}(\mu) - 1/2\, J_{n+1/2}(\mu) = 0. \tag{4}$$

98. Потенциал скоростей частиц газа является решением краевой задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left\{ \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right\}, \quad (1)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_0} = AP_{nm}(\cos\theta)\cos m\varphi\cos\omega t, \quad (2)$$

$$u\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=0} = 0. \quad (3)$$

Решение краевой задачи (1), (2), (3) может быть представлено в виде

$$u(r,\,\theta,\,\varphi,\,t) = \left\{ \frac{Ar_0^{3/2} J_{n+1/2}\left(\dfrac{\omega r}{a}\right)\cos\omega t}{\left[\dfrac{\omega r_0}{a}\,J'_{n+1/2}\left(\dfrac{\omega r_0}{a}\right) - J_{n+1/2}\left(\dfrac{\omega r_0}{a}\right)\right]\sqrt{r}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k\,\frac{J_{n+1/2}\left(\dfrac{\mu_k r}{r_0}\right)}{\sqrt{r}}\cos\frac{a\mu_k t}{r_0}\right\} P_{nm}(\cos\theta)\cos m\varphi, \quad (4)$$

где μ_k — положительные корни уравнения

$$\mu J'_{n+1/2}(\mu) - \frac{1}{2}J_{n+1/2}(\mu) = 0, \quad (5)$$

$$A_k = -\frac{Ar_0^{3/2}\displaystyle\int_0^{r_0} rJ_{n+1/2}\left(\frac{\omega r}{a}\right)J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_k r}{a}\right)dr}{\left[\dfrac{\omega r_0}{a}\,J'_{n+1/2}\left(\dfrac{\omega r_0}{a}\right) - J_{n+1/2}\left(\dfrac{\omega r_0}{a}\right)\right]\dfrac{r_0^2}{2}J^2_{n+1/2}(\mu_k)\left[1 - \dfrac{n(n+1)}{\mu_k^2}\right]},$$

$$k = 1,\,2,\,\ldots \quad (6)$$

99. $u(r,\,\theta,\,\varphi,\,t) = \cos m\varphi\cos\omega t\displaystyle\sum_{n=m}^{+\infty} A_n\,\frac{J_{n+1/2}\left(\dfrac{\omega r}{a}\right)}{\sqrt{r}}\,P_{nm}(\cos\theta) +$

$$+ \cos m\varphi\sum_{n=m}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} A_{nk}\,\frac{J_{n+1/2}\left(\dfrac{\mu_k^{(n)} r}{r_0}\right)}{\sqrt{r}}\,P_{nm}(\cos\theta)\cos\frac{a\mu_k^{(n)} t}{r_0}, \quad (1)$$

где $\mu_k^{(n)}$ — положительные корни уравнения

$$\mu J'_{n+1/2}(\mu) - \frac{1}{2}J_{n+1/2}(\mu) = 0, \quad (2)$$

$$A_n = \frac{r_0^{3/2}\displaystyle\int_0^{\pi} f(\theta)P_{nm}(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta}{\dfrac{2}{2n+1}\,\dfrac{(n+m)!}{(n-m)!}\left[\dfrac{\omega r_0}{a}\,J'_{n+1/2}\left(\dfrac{\omega r_0}{a}\right) - \dfrac{1}{2}\,J_{n+1/2}\left(\dfrac{\omega r_0}{a}\right)\right]}, \quad n \geqslant m, \quad (3)$$

$$A_{nk} = -\frac{A_n \int\limits_0^{r_0} r J_{n+1/2}\left(\frac{\omega r}{a}\right) J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_k^{(n)} r}{r_0}\right) dr}{\frac{r_0^2}{2} J_{n+1/2}^2(\mu_k^{(n)}) \left[1 - \frac{n(n+1)}{m u_k^{(n)^2}}\right]}, \quad n \geqslant m, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

100. Потенциал скоростей частиц газа является решением краевой задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right\}, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_0} = f(t) P_{nm}(\cos\theta) \cos m\varphi, \quad f(0) = f'(0) = 0, \tag{2}$$

$$u\big|_{t=0} = u\big|_{t=0} = 0. \tag{3}$$

Решение краевой задачи (1), (2), (3) может быть представлено в виде

$$u(r, \theta, \varphi, t) = \left\{ \frac{r^n f(t)}{n r_0^{n-1}} + \sum_{k=1}^{+\infty} \psi_k(t) \frac{J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_k^{(n)} r}{r_0}\right)}{\sqrt{r}} \right\} P_{nm}(\cos\theta) \cos m\varphi, \tag{4}$$

где $\mu_k^{(n)}$ — положительные корни уравнения

$$\mu J'_{n+1/2}(\mu) - \frac{1}{2} J_{n+1/2}(\mu) = 0, \tag{5}$$

$$\psi_k(t) = \frac{r_0 A_k}{a \mu_k^{(n)}} \int\limits_0^t f''(\tau) \sin \frac{a \mu_k^{(n)}}{r_0} (t - \tau)\, dt, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{6}$$

$$A_k = -\frac{1}{n r_0^{n-1}} \cdot \frac{\int\limits_0^{r_0} r^{n+3/2} J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_k^{(n)} r}{r_0}\right) dr}{\frac{r_0^2}{2} J_{n+1/2}^2(\mu_k^{(n)}) \left[1 - \frac{n(n+1)}{\mu_k^{(n)^2}}\right]}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{7}$$

101. $$u(r, \theta, t) = \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \frac{\alpha_k J_{3/2}(\lambda_k r) - \beta_k N_{3/2}(\lambda_k r)}{\sqrt{r}} \cos a\lambda_k t \right\} \cos\theta, \tag{1}$$

где λ_k — положительные корни уравнения

$$\left[\lambda r_1 J'_{3/2}(\lambda r_1) - \frac{1}{2} J_{3/2}(\lambda r_1)\right] \left[\lambda r_2 N'_{3/2}(\lambda r_2) - \frac{1}{2} N_{3/2}(\lambda r_2)\right] -$$
$$- \left[\lambda r_2 J'_{3/2}(\lambda r_2) - \frac{1}{2} J_{3/2}(\lambda r_2)\right] \left[\lambda r_1 N'_{3/2}(\lambda r_1) - \frac{1}{2} N_{3/2}(\lambda r_1)\right] = 0, \tag{2}$$

$$\alpha_k = \lambda_k r_1 N'_{3/2}(\lambda_k r_1) - \frac{1}{2} N_{3/2}(\lambda_k r_1),$$
$$\beta_k = \lambda_k r_2 J'_{3/2}(\lambda_k r_2) - \frac{1}{2} J_{3/2}(\lambda_k r_2), \quad (3)$$

$$A_k = \frac{v \int\limits_{r_1}^{r_2} r^{5/2} \left[\alpha_k J_{3/2}(\lambda_k r) - \beta_k N_{3/2}(\lambda_k r)\right] dr}{\int\limits_{r_1}^{r_2} r \left[\alpha_k J_{3/2}(\lambda_k r) - \beta_k N_{3/2}(\lambda_k r)\right]^2 dr}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \quad (4)$$

102. $$u(r, \theta, t) = \left\{ \frac{\alpha J_{3/2}\left(\frac{\omega r}{a}\right) - \beta N_{3/2}\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{\sqrt{r}} \cos \omega t + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \frac{\alpha_k J_{3/2}(\lambda_k r) - \beta_k N_{3/2}(\lambda_k r)}{\sqrt{r}} \cos a\lambda_k t \right\} \cos \theta, \quad (1)$$

где λ_k, α_k, β_k имеют те же значения, что и в ответе к предыдущей задаче,

$$\alpha = \frac{\omega A}{W(\omega, a, r_1, r_2)} \left\{ r_1^{3/2} \left[\frac{\omega r_2}{a} N'_{3/2}\left(\frac{\omega r_2}{a}\right) - \frac{1}{2} J_{3/2}\left(\frac{\omega r_2}{a}\right) \right] - \right.$$
$$\left. - r_2^{3/2} \left[\frac{\omega r_1}{a} J'_{3/2}\left(\frac{\omega r_1}{a}\right) - \frac{1}{2} J_{3/2}\left(\frac{\omega r_1}{a}\right) \right] \right\}, \quad (2)$$

$$\beta = \frac{\omega A}{W(\omega, a, r_1, r_2)} \left\{ r_1^{3/2} \left[\frac{\omega r_2}{a} J'_{3/2}\left(\frac{\omega r_2}{a}\right) - \frac{1}{2} N_{3/2}\left(\frac{\omega r_2}{a}\right) \right] - \right.$$
$$\left. - r_2^{3/2} \left[\frac{\omega r_2}{a} N'_{3/2}\left(\frac{\omega r_1}{a}\right) - \frac{1}{2} N_{3/2}\left(\frac{\omega r_1}{a}\right) \right] \right\}, \quad (3)$$

$$W(\omega, a, r_1, r_2) =$$
$$= \begin{vmatrix} \left[\frac{\omega r_1}{a} J'_{3/2}\left(\frac{\omega r_1}{a}\right) - \frac{1}{2} J_{3/2}\left(\frac{\omega r_1}{a}\right)\right] & \left[\frac{\omega r_1}{a} N'_{3/2}\left(\frac{\omega r_1}{a}\right) - \frac{1}{2} N_{3/2}\left(\frac{\omega r_1}{a}\right)\right] \\ \left[\frac{\omega r_2}{a} J'_{3/2}\left(\frac{\omega r_2}{a}\right) - \frac{1}{2} J_{3/2}\left(\frac{\omega r_2}{a}\right)\right] & \left[\frac{\omega r_2}{a} N'_{3/2}\left(\frac{\omega r_2}{a}\right) - \frac{1}{2} N_{3/2}\left(\frac{\omega r_2}{a}\right)\right] \end{vmatrix}, \quad (4)$$

$$A_k = -\frac{\int\limits_{r_1}^{r_2} r \left[\alpha J_{3/2}\left(\frac{\omega r}{a}\right) - \beta N_{3/2}\left(\frac{\omega r}{a}\right)\right] \left[\alpha_k J_{3/2}(\lambda_k r) - \beta_k N_{3/2}(\lambda_k r)\right] dr}{\int\limits_{r_1}^{r_2} r \left[\alpha_k J_{3/2}(\lambda_k r) - \beta_k N_{3/2}(\lambda_k r)\right]^2 dr}. \quad (5)$$

б) Неоднородные среды.

103. Решением краевой задачи

$$\left.\begin{aligned}\rho_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}&=T_0\left\{\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial\varphi^2}\right\},\quad 0\leqslant r\leqslant r_1,\\ \rho_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}&=T_0\left\{\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_2}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial\varphi^2}\right\},\quad r_1\leqslant r\leqslant r_2,\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}&0\leqslant\varphi<2\pi, &(1)\\ &0<t<+\infty, &(1')\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}u(r_1-0,\,\varphi,\,t)&=u(r_1+0,\,\varphi,\,t),\\ u_r(r_1-0,\,\varphi,\,t)&=u_r(r_1+0,\,\varphi,\,t),\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}&0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, &(2)\\ &0<t<+\infty, &(2')\end{aligned}$$

$$u(r_2,\,\varphi,\,t)=0, \qquad (2'')$$

$$u(r,\,\varphi,\,0)=f(r,\,\varphi),\quad u_t(r,\,\varphi,\,0)=F(r,\,\varphi),\quad 0\leqslant r\leqslant r_2,\quad 0\leqslant\varphi<2\pi, \qquad (3)$$

является

$$u(r,\,\varphi,\,t)=\sum_{m,\,n=1}^{+\infty}R_{mn}(r)\{[\overline{a}_{mn}\cos n\varphi+\overline{b}_{mn}\sin n\varphi]\cos\lambda_{mn}t+ \\ +[\overline{\overline{a}}_{mn}\cos n\varphi+\overline{\overline{b}}_{mn}\sin n\varphi]\sin\lambda_{mn}t\}, \qquad (4)$$

где λ_{mn} — корни трансцендентного уравнения

$$\begin{vmatrix} J_n(\overline{\omega}r_1) & N_n(\overline{\overline{\omega}}r_1) & J_n(\overline{\overline{\omega}}r_1)\\ \overline{\omega}J_n'(\overline{\omega}r_1) & \overline{\overline{\omega}}N_n'(\overline{\overline{\omega}}r_1) & \overline{\overline{\omega}}J_n'(\bar{\omega}r_1)\\ 0 & N_n(\overline{\overline{\omega}}r_2) & J_n(\overline{\overline{\omega}}r_2)\end{vmatrix}=0, \qquad (5)$$

$$\overline{\omega}=\frac{\rho_1\lambda}{T_0},\quad \omega=\frac{\rho_2\lambda}{T_0}, \qquad (6)$$

$$R_{mn}(r)=\begin{cases}[J_n(\overline{\overline{\omega}}_{mn}r_1)N_n(\overline{\overline{\omega}}_{mn}r_2)-N_n(\overline{\omega}_{mn}r_1)J_n(\overline{\omega}_{mn}r_2)]J_n(\omega_{mn}r),\\ \qquad\qquad 0\leqslant r\leqslant r_1,\\ [J_n(\overline{\overline{\omega}}_{mn}r)N_n(\overline{\overline{\omega}}_{mn}r_2)-N_n(\overline{\overline{\omega}}_{mn}r)J_n(\overline{\overline{\omega}}_{mn}r_2)]J_n(\overline{\overline{\omega}}_{mn}r_1),\\ \qquad\qquad r_1\leqslant r\leqslant r_2,\end{cases} \qquad (7)$$

$$\overline{a}_{mn}=\frac{\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{r_2}\mu(r)f(r,\,\varphi)R_{mn}(r)\cos n\varphi\,dr}{\varepsilon_n\pi\int_0^{r_2}\mu(r)R_{mn}^2(r)dr},\qquad \varepsilon_n=\begin{cases}1 & \text{при}\quad n\neq 0,\\ 2 & \text{при}\quad n=0,\end{cases} \qquad (8)$$

$$b_{mn}=\frac{\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{r_2}\mu(r)f(r,\,\varphi)R_{mn}(r)\sin n\varphi\,dr}{\pi\int_0^{r_2}\mu(r)R_{mn}^2(r)dr}. \qquad (9)$$

Формулы для $\overline{\overline{a}}_{mn}$ и $\overline{\overline{b}}_{mn}$ получаются из формул (8) и (9) заменой подынтегральной функции $f(r,\,\varphi)$ на $F(r,\,\varphi)$ и добавлением множителя $\lambda_{m,\,n}$ в знаменателе.

§ 4. Метод интегральных представлений

1. Применение интеграла Фурье.

а) Преобразование Фурье. Напомним, что образом Фурье функции $F(x, y)$ с ядром $e^{i(\lambda\xi+\mu\eta)}$ называется функция

$$\overline{F}(\lambda, \mu) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\lambda\xi+\mu\eta)} F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{I}$$

Оригинал восстанавливается по образу с помощью формулы обращения

$$F(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\lambda x+\mu y)} F(\lambda, \mu)\, d\lambda\, d\mu. \tag{II}$$

Аналогично определяется преобразование Фурье в пространстве[1].

104. Р е ш е н и е. Применяя преобразование Фурье вида (I) к уравнению (1) и начальным условиям (2) рассматриваемой задачи, получим обыкновенное дифференциальное уравнение и начальные условия

$$\frac{d^2\overline{u}(\lambda, \mu, t)}{dt^2} + a^2(\lambda^2+\mu^2)\overline{u}(\lambda, \mu, t) = 0, \tag{1}$$

$$\overline{u}(\lambda, \mu, 0) = \overline{\Phi}(\lambda, \mu), \quad \frac{d\overline{u}(\lambda, \mu, 0)}{dt} = \Psi(\lambda, \mu), \tag{2}$$

где $\overline{u}$, $\overline{\Phi}$, $\overline{\Psi}$ — образы Фурье функций u, Φ, Ψ. Решение уравнения (1) при начальных условиях (2) записывается в виде

$$\overline{u} = \overline{\Phi}(\lambda, \mu)\cos a\rho t + \overline{\Psi}(\lambda, \mu)\frac{\sin a\rho t}{a\rho}, \quad \rho = \sqrt{\lambda^2+\mu^2}. \tag{3}$$

Применяя обратное преобразование Фурье, находим

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi}\left\{ \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \overline{\Phi}(\lambda, \mu)\cos a\rho t e^{-i(\lambda x+\mu y)}\, d\lambda\, d\mu + \right.$$
$$\left. + \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \overline{\Psi}(\lambda, \mu)\frac{\sin a\rho t}{a\rho} e^{-i(\lambda x+\mu y)}\, d\lambda\, d\mu \right\}. \tag{4}$$

Подставляя значения $\overline{\Phi}(\lambda, \mu)$ и $\overline{\Psi}(\lambda, \mu)$, придем к равенству

$$(x, y, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \Phi(\xi, \eta)\cos a\rho t + \Psi(\xi, \eta)\frac{\sin a\rho t}{a\rho} \right\} \times$$
$$\times\, e^{i[\lambda(x-\xi)+\mu(y-\eta)]}\, d\xi\, d\eta\, d\lambda\, d\mu, \tag{5}$$

где $\rho = \sqrt{\lambda^2+\mu^2}$.

Введем полярные координаты с помощью соотношений

$$\left.\begin{aligned} \xi - x &= r\cos\varphi, & \lambda &= \rho\cos\theta, \\ \eta - y &= r\sin\varphi, & \mu &= \rho\sin\theta, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

[1] Подробнее см. гл. V, § 3.

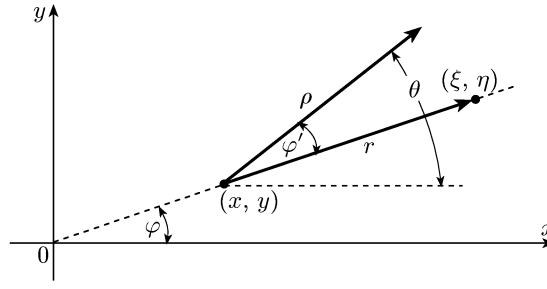


Рис. 53

получим $\lambda(\xi - x) + \mu(\eta - y) = \rho r \cos(\theta - \varphi) = \rho r \cos\varphi'$, где φ' — угол, отсчитываемый, как указано на рис. 53.

Первое и второе слагаемые в правой части равенства (5) обозначим соответственно через $u_1(x, y, t)$ и $u_2(x, y, t)$. В силу (6) мы будем иметь

$$u_2(x, y, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \Psi(\xi, \eta) \frac{\sin a\rho t}{a\rho} e^{i\rho r \cos\varphi'} \rho r \, dr \, d\rho \, d\varphi \, d\varphi'. \tag{7}$$

В силу равенства[1])

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\rho r \cos\varphi'} \, d\varphi' = J_0(\rho r) \tag{8}$$

из (7) получаем

$$u_2(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} \Psi(\xi, \eta) \sin a\rho t J_0(\rho r) r \, dr \, d\rho \, d\varphi. \tag{9}$$

Но[2])

$$\int_0^{+\infty} J_0(\rho r) \sin a\rho t \, d\rho = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad at < r, \\ \dfrac{1}{\sqrt{a^2t^2 - r^2}} & \text{при} \quad at > r, \end{cases} \tag{10}$$

поэтому

$$u_2(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^{at}\int_0^{2\pi} \frac{\Psi(\xi, \eta) r \, dr \, d\varphi}{\sqrt{a^2t^2 - r^2}}; \tag{11}$$

u_1 можно получить из u_2 дифференцированием по t, если предварительно заменить $\Psi(\xi, \eta)$ на $\Phi(\xi, \eta)$. Таким образом,

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{at}\int_0^{2\pi} \frac{\Phi(\xi, \eta) r \, dr \, d\varphi}{\sqrt{a^2t^2 - r^2}} + \frac{1}{2\pi a} \int_0^{at}\int_0^{2\pi} \frac{\Psi(\xi, \eta) r \, dr \, d\varphi}{\sqrt{a^2t^2 - r^2}}, \tag{12}$$

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}.$$

[1]) См. [7, с. 600, (13′)].
[2]) См. [7, с. 608, (12) и (13)].

105. Р е ш е н и е. Применяя преобразование Фурье аналогично тому, как это было сделано в решении предыдущей задачи, мы получим

$$u(x,\,y,\,z,\,t) = u_1(x,\,y,\,z,\,t) + u_2(x,\,y,\,z,\,t), \tag{1}$$

где

$$u_1(x,\,y,\,z,\,t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \Phi(\xi,\,\eta,\,\zeta)\cos a\rho t \times$$
$$\times\, e^{-i[\lambda(x-\xi)+\mu(y-\eta)+\nu(z-\zeta)]}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\lambda\,d\mu\,d\nu, \tag{2}$$

$$u_2(x,\,y,\,z,\,t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \Psi(\xi,\,\eta,\,\zeta)\frac{\sin a\rho t}{a\rho} \times$$
$$\times\, e^{i[\lambda(x-\xi)+\mu(y-\eta)+\nu(z-\zeta)]}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,d\lambda\,d\mu\,d\nu \tag{3}$$

($\rho = \sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}$). Переходя к полярным координатам по формулам

$$\left.\begin{aligned} \xi - x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad \eta - y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad \zeta - z = r\cos\theta,\\ \lambda = \rho\sin\theta'\cos\varphi', \quad \mu = \rho\sin\theta'\sin\varphi', \quad \nu = \rho\cos\theta', \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где θ — угол между положительным направлением оси z и вектором $\boldsymbol{r} = (\xi - x)\boldsymbol{i} + (\eta - y)\boldsymbol{j} + (\zeta - z)\boldsymbol{k}$, а θ' — угол между $\boldsymbol{r}$

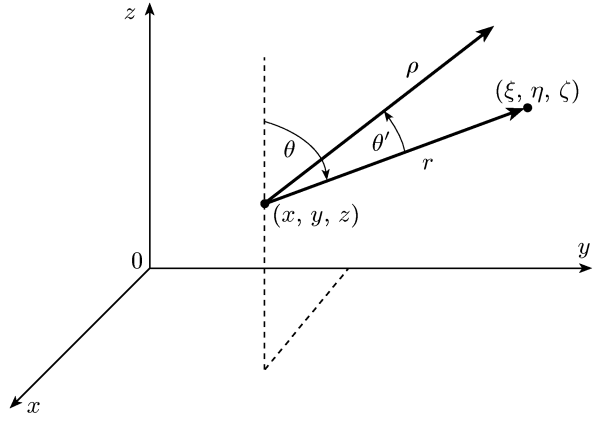


Рис. 54

и $\boldsymbol{\rho} = \lambda\boldsymbol{i} + \mu\boldsymbol{j} + \nu\boldsymbol{k}$ (рис. 54), т. е. принимая направление оси z за положительное направление полярной оси в сферической системе координат, получим

$$u_2 = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \Psi(x + r\sin\theta\cos\varphi,\; y + r\sin\theta\sin\varphi,\; r\cos\theta) \times$$
$$\times\, \frac{\sin a\rho t}{a\rho}\, e^{i\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{r}\cos\theta'}\,\boldsymbol{\rho}^2\boldsymbol{r}^2\sin\theta\sin\theta'\,d\boldsymbol{\rho}\,dr\,d\theta\,d\theta'\,d\varphi\,d\varphi'.$$

Выполнение интегрирования по φ' и θ' дает

$$u_2 = \frac{1}{2\pi^2 a}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\Psi(x + r\sin\theta\cos\varphi,\ y + r\sin\theta\sin\varphi,\ z + r\cos\theta)\times$$

$$\times \sin\rho r \sin a\rho t\, r\sin\theta d\rho\, dr\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 a}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\Psi(x + r\sin\theta\cos\varphi,\ y + r\sin\theta\sin\varphi,\ \boldsymbol{z} + r\cos\theta)\times$$

$$\times \{\cos\rho(r - at) - \cos\rho(r + at)\} r\sin\theta\, dr\, d\rho\, d\theta\, d\varphi.$$

Интеграл

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} d\rho \int_0^{+\infty} r\Psi(x + r\sin\theta\cos\varphi,\ y + r\sin\theta\sin\varphi,\ z + r\cos\theta)\cos\rho(r - at)\, dr \tag{5}$$

можно вычислить с помощью интеграла Фурье

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} d\rho \int_0^{+\infty} f(r)\cos\rho(r - at)\, dr = f(at),$$

положив

$$f(r) = \begin{cases} r\Psi(x + r\sin\theta\cos\varphi,\ y + r\sin\theta\sin\varphi,\ z + r\cos\theta) & \text{при} \quad r \geqslant 0, \\ 0 & \text{при} \quad r \leqslant 0. \end{cases}$$

Если $f(r)$ удовлетворяет условиям разложимости в интеграл Фурье и непрерывна, то интеграл (5) равен нулю при $t \leqslant 0$ и

$$at\Psi(x + at\sin\theta\cos\varphi,\ y + at\sin\theta\sin\varphi,\ z + at\cos\theta) \quad \text{при} \quad t \geqslant 0.$$

Аналогично,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} d\rho \int_0^{+\infty} r\Psi(x + r\sin\theta\cos\varphi,\ y + r\sin\theta\sin\varphi,\ z + r\cos\theta)\cos\rho(r + at)\, dr =$$

$$= \begin{cases} -at\Psi(x - at\sin\theta\cos\varphi,\ y - at\sin\theta\sin\varphi,\ z - at\cos\theta) & \text{при} \quad t \leqslant 0, \\ 0 & \text{при} \quad t \geqslant 0. \end{cases}$$

Таким образом,

$$u_2(x,\ y,\ z,\ t) =$$

$$= \frac{t}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\Psi(x + at\sin\theta\cos\varphi,\ y + at\sin\theta\sin\varphi,\ z + at\cos\theta)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

$u_1(x,\ y,\ z,\ t)$ может быть получено из $u_2(x,\ y,\ z,\ t)$ дифференцированием по t после предварительной замены Ψ на Φ:

$$u_1(x,\ y,\ z,\ t) = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{t}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(x + at\sin\theta\cos\varphi,\ y + at\sin\theta\sin\varphi,\right.$$

$$\left. z + at\cos\theta)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\right\}.$$

106. $$u(x,\,y,\,t)=\frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^t d\tau \iint\limits_{r\leqslant a(t-\tau)} \frac{f(\xi,\,\eta,\,\tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)-r^2}}\,d\xi\,d\eta, \qquad (1)$$

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}.$$

107. $$u(x,\,y,\,z,\,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{r\leqslant at)} \frac{f\left(\xi,\,\eta,\,\zeta,\,t-\dfrac{r}{a}\right)}{r}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta, \qquad (1)$$

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}.$$

Переходя к сферическим координатам, как в предыдущей задаче, выполнить интегрирование по φ', θ', ρ и r.

108. $$u(x,\,y,\,t)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi(x+2\widetilde{\xi}\sqrt{bt},\ y+2\widetilde{\eta}\sqrt{bt})\sin t(\widetilde{\xi}^2+\widetilde{\eta}^2)\,d\widetilde{\xi}\,d\widetilde{\eta}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^t dt\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\Psi(x+2\widetilde{\xi}\sqrt{bt},\ y+2\widetilde{\eta}\sqrt{bt})\sin t(\widetilde{\xi}^2+\widetilde{\eta}^2)\,d\widetilde{\xi}\,d\widetilde{\eta}. \qquad (1)$$

Указание. Применяя преобразование Фурье, нетрудно получить следующее выражение для $u(x,\,y,\,t)$:

$$u(x,\,y,\,t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\xi,\,\eta)\cos\lambda(x-\xi)\cos\mu(y-\eta)\times$$

$$\times\cos bt(\lambda^2+\mu^2)\,d\xi\,d\eta\,d\lambda\,d\mu+\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_0^t d\tau\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\Psi(\xi,\,\eta)\cos\lambda(x-\xi)\times$$

$$\times\cos\mu(y-\eta)\cos b\tau(\lambda^2+\mu^2)\,d\xi\,d\eta\,d\lambda\,d\mu, \qquad (2)$$

если учесть, что аналогичные интегралы, в которых вместо $\cos\lambda\,(x-$ $-\xi)$ или $\cos\mu\,(y-\eta)$ стоит $\sin\lambda\,(x-\xi)$ или $\sin\mu\,(y-\eta)$, равны нулю. Дальнейшие преобразования могут быть выполнены с помощью равенств

$$\left.\begin{aligned}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos p\sigma^2\cos q\sigma\,d\sigma&=\sqrt{\frac{\pi}{p}}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{q^2}{4p}\right),\\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin p\sigma^2\cos q\sigma\,d\sigma&=\sqrt{\frac{\pi}{p}}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{q^2}{4p}\right),\end{aligned}\right\}\ p>0, \qquad (3)$$

и замены переменных

$$\frac{\xi-x}{2\sqrt{bt}}=\widetilde{\xi},\quad \frac{\eta-y}{2\sqrt{bt}}=\widetilde{\eta}. \qquad (4)$$

Равенства (3) могут быть получены, например, из интегралов Френкеля

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos x^2\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\quad\text{и}\quad\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin x^2\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}} \qquad (5)$$

переходом к переменному интегрирования σ по формуле

$$x = \sigma\sqrt{p} - \frac{q}{2\sqrt{p}}. \tag{6}$$

б) Преобразование Фурье–Бесселя (Ханкеля). Напомним, что образом Фурье–Бесселя функции $f(r)$, $0 \leqslant r < +\infty$ с ядром $J_\nu(\lambda\xi)$ [1)] называется функция

$$\overline{f}(\lambda) = \int_0^{+\infty} \xi f(\xi) J_\nu(\lambda\xi)\, d\xi. \tag{1}$$

Оригинал восстанавливается по образцу с помощью формулы обращения

$$f(r) = \int_0^{+\infty} \lambda \overline{f}(\lambda) J_\nu(\lambda r)\, d\lambda. \tag{2}$$

109. $u(r,\, t) = \dfrac{A}{\sqrt{2}} \left\{ \dfrac{1}{\left[\left(1 + \dfrac{r^2 - a^2t^2}{b^2}\right) + 4\left(\dfrac{at}{b}\right)^2\right]^{1/2}} + \right.$

$$\left. + \frac{1 + \dfrac{r^2 - a^2t^2}{b^2}}{\left[\left(1 + \dfrac{r^2 - a^2t^2}{b^2}\right) + 4\left(\dfrac{at}{b}\right)^2\right]} \right\}^{1/2}.$$

Указание. Применяя преобразование Фурье–Бесселя нулевого порядка к краевой задаче

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad 0 < r,\, t < +\infty, \tag{1}$$

$$u(r,\, 0) = f(r), \quad u_t(r,\, 0) = g(r), \quad 0 \leqslant r < +\infty, \tag{2}$$

нетрудно получить следующее выражение для ее решения:

$$u(r,\, t) = \int_0^{+\infty} \lambda \overline{f}(\lambda) \cos(a\lambda t) J_0(\lambda r)\, d\lambda + \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \overline{g}(\lambda) \sin(a\lambda t) J_0(\lambda r)\, d\lambda. \tag{3}$$

В нашем случае $u_t(r,\, 0) = g(r) = 0$, следовательно,

$$\overline{g}(\lambda) = 0, \quad f(r) = \frac{A}{\sqrt{1 + \dfrac{r^2}{b^2}}}.$$

Для $\overline{f}(\lambda)$ нетрудно получить выражение

$$\overline{f}(\lambda) = \frac{Ab}{\lambda} e^{-\lambda b}. \tag{4}$$

[1)] Или, короче, образом Фурье–Бесселя ν-го порядка.

Для этого нужно воспользоваться соотношением

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\omega x} J_0(\rho x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{\rho^2+\omega^2}}\ ^{1)}$$

и формулой обращения. Подстановка (4) в (3) дает

$$u(r,\, t) = Ab \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda b} \cos(a\lambda t) J_0(\lambda r)\, d\lambda = \\ = \operatorname{Re}\left\{ Ab \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda(b+iat)} J_0(\lambda r)\, d\lambda \right\}, \quad (5)$$

где $\operatorname{Re}(p+qi) = p$ — действительная часть комплексного числа $p+qi$.

110. Решением краевой задачи (1), (2) (см. условие задачи) является

$$u(r,\, t) = \frac{1}{2bt} \int\limits_0^{+\infty} \rho f(\rho) J_0\left(\frac{\rho r}{2bt}\right) \sin\left(\frac{\rho^2+r^2}{4bt}\right) d\rho. \quad (1)$$

В частности, при $f(\rho) = Ae^{-\rho^2/a^2}$ получаем

$$w(r,\, t) = \frac{A \exp\left\{-\dfrac{R^2}{1+\tau^2}\right\}}{1+\tau^2} \left(\cos\frac{R^2\tau}{1+\tau^2} + \tau \sin\frac{R^2\tau}{1+\tau^2}\right), \quad (2)$$

где

$$\tau = \frac{4bt}{a^2} \quad \text{и} \quad R = \frac{r}{a}. \quad (3)$$

Указание. Для образа Фурье–Бесселя нулевого порядка решения краевой задачи (1), (2) (см. условие) получаем выражение

$$\overline{u}(\lambda,\, t) = \cos(b\lambda^2 t) \int\limits_0^{+\infty} \xi f(\xi) J_0(\lambda\xi)\, d\xi. \quad (4)$$

Если, применив формулу обращения, воспользоваться интегралом Вебера

$$\int\limits_0^{+\infty} \xi J_0(\lambda\xi) J_0(\lambda r) e^{-p\xi^2}\, d\xi = \frac{1}{2p} \exp\left\{-\left(\frac{\lambda^2+r^2}{4p}\right)\right\} J_0\left(\frac{\lambda r}{2p}\right), \quad (5)$$

положив $p = -ibt$, то для $u(r,\, t)$ получится выражение (1). Если в (4) подставить $f(\xi) = Ae^{-\xi^2/a^2}$, то для $u(\lambda,\, t)$ получится выражение

$$\overline{u}(\lambda,\, t) = A\cos(b\lambda^2 t) \int\limits_0^{+\infty} \xi e^{-\xi^2/a^2} J_0(\lambda\xi)\, d\xi = \frac{1}{2} Aa^2 e^{-\lambda^2 a^2/2} \cos(bt\lambda^2), \quad (6)$$

[1)] См. [7, с. 668].

причем нужно воспользоваться интегралом Ханкеля [1])

$$\int_0^{+\infty} J_\nu(at)e^{-pt^2}t^{\mu-1}\,dt = \frac{a^\nu\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu\right)}{2^{\nu+1}p^{\mu/2+\nu/2}\Gamma(1+\nu)}F_1\left(\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu;\ \nu+1;\ -\frac{a^2}{4p}\right)$$

при $\nu=0,\ p=1/a^2,\ \mu=2,\ a=\lambda$.

Применяя формулу обращения и воспользовавшись этим же интегралом Ханкеля при $\mu=2,\ \nu=0,\ a=r$ и

$$p=\frac{a^2}{4}\left(1+\frac{4ibt}{a^2}\right),$$

получим выражение (2) для $u(r,\,t)$.

111. Если точка $r=0$ движется по закону $u(0,\,t)=\varphi(t),\ 0<t<+\infty$, то выражение для $u(r,\,t)$ может быть получено по формуле (1) ответа к предыдущей задаче, если в ней положить

$$f(r)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\psi(t)}{t}\sin\left(\frac{r^2}{4bt}\right)dt.$$

Если $\psi(t)$ задается соотношениями (1) (см. условие), то

$$f(r)=\frac{2At_0}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2}-\mathrm{Si}\left(\frac{r^2}{4bt_0}\right)+\frac{r}{4bt_0}\ \mathrm{Ci}\left(\frac{r^2}{4bt_0}\right)\right\},$$

где интегральный синус и интегральный косинус определяются соотношениями

$$\mathrm{Si}(x)=\int_0^x\frac{\sin\zeta}{\zeta}\,d\zeta,\quad \mathrm{Ci}(x)=-\int_x^{+\infty}\frac{\cos\zeta}{\zeta}\,d\zeta.$$

Указание. Полагая в равенстве (1) ответа к предыдущей задаче $r=0$, получим интегральное уравнение для определения $f(r)$. Если в нем положить $\rho=\sqrt{\xi}$, то оно преобразуется в интегральное уравнение, которое легко решается с помощью синус-преобразования Фурье [2]).

112. Уравнение вынужденных поперечных колебаний пластинки [3]) при $p(r,\,t)=16\rho hbf(r)\psi'(t)$ принимает вид

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+b^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^2u=8bf(r)\psi'(t),\quad -\infty<t<+\infty,\quad 0\leqslant r<+\infty.$$

Его решением является

$$u(r,\,t)=4\int_{-\infty}^{t}\frac{\psi(\tau)\,d\tau}{t-\tau}\int_0^{+\infty}\rho f(\rho)\sin\left[\frac{\rho^2+r^2}{4b(t-\tau)}\right]J_0\left(\frac{\rho r}{2b(t-\tau)}\right)d\rho. \qquad (1)$$

[1]) См. [42, п. 393].

[2]) По поводу определения синус-преобразования Фурье см. гл. II, § 4.

[3]) См. задачу 18.

Для частных случаев получаем следующие выражения для $u(r,\,t)$:

а) $u(r,\,t)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{t}\psi(\tau)\sin\left[\frac{r^2}{4b(t-\tau)}\right]\frac{d\tau}{t-\tau}$;

б) $u(r,\,t)=\dfrac{8b}{\pi a}\displaystyle\int_{-\infty}^{t}\psi(\tau)d\tau\int_{0}^{+\infty}J_0(\xi r)J_1(\xi a)\cos[b(t-\tau)\xi^2]\,d\xi$;

в) $u(r,\,t)=\dfrac{8\psi_0}{\pi ab}\displaystyle\int_{0}^{+\infty}J_0(\xi r)J_1(\xi a)\frac{1-\cos(bt\xi^2)}{\xi^4}\,d\xi$;

если $r\ll a$, то при $t<t_0$

$$J_0\left(\frac{r\xi}{a}\right)=1-\frac{1}{4}\left(\frac{r}{a}\right)^2\xi^2+O\left(\frac{r^4}{a^4}\right),$$

$$u(r,\,t)\approx\frac{2\psi_0 t}{\pi}\left\{\frac{2bt}{a^2}\left[1-\cos\left(\frac{a^2}{4bt}\right)\right]+F\left(\frac{a^2}{4bt}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{a^2}{8bt}\,G\left(\frac{a^2}{4bt}\right)-\frac{r^2}{4bt}\,G\left(\frac{a^2}{4bt}\right)\right\},$$

где

$$F(x)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{Si}(x)-x\operatorname{Ci}(x),\quad G(x)=\frac{\sin x}{x}-\operatorname{Ci}(x);$$

аналогичное выражение получается и при $t>t_0$;

если $r\gg a$, то

$$J_1\left(\frac{\xi a}{r}\right)\approx\frac{1}{2}\,\xi\,\frac{a}{r}-\frac{1}{16}\,\xi^3\left(\frac{a}{r}\right)^3,$$

$$u(r,\,t)\approx\frac{2\psi_0 t}{\pi}\left[F\left(\frac{a^2}{4bt}\right)+\frac{a^2}{8bt}\,\operatorname{Ci}\left(\frac{r^2}{4bt}\right)\right],\quad 0\leqslant t\leqslant t_0,$$

$$u(r,\,t)\approx\frac{2\psi_0}{\pi}\left\{tF\left(\frac{r^2}{4bt}\right)-(t-t_0)F\left(\frac{r^2}{4b(t-t_0)}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{r^2}{8b}\,\operatorname{Ci}\left(\frac{r^2}{4bt}\right)-\frac{a^2}{8b}\,\operatorname{Ci}\left(\frac{r^2}{4b(t-t_0)}\right)\right\},\quad t_0\leqslant t<+\infty;$$

г) $u(r,\,t)=A\displaystyle\int_{-\infty}^{t}f(\tau)H(t-\tau)\,d\tau$,

где

$$H(x)=\frac{2p^2\exp\left\{-\dfrac{pq}{p^2+x^2}\right\}}{c^2(p^2+x^2)}\left[\cos\left(\frac{qx}{p^2+x^2}\right)+\frac{x}{p}\sin\left(\frac{qx}{p^2+x^2}\right)\right],$$
$$p=\frac{c}{4b},\quad q=\frac{r}{4b},$$

д) $$\frac{\partial u(r,\,t)}{\partial t} = \frac{2Ap^2 \exp\left\{-\dfrac{pq}{p^2+t^2}\right\}}{c^2(p^2+t^2)}\left[\cos\left(\frac{qt}{p^2+x^2}\right) + \right.$$
$$\left. = \frac{t}{p}\sin\left(\frac{qt}{p^2+t^2}\right)\right] = AH(t).$$

Указание. В случае а) положить $f(r) = \dfrac{\delta(r)}{2\pi r}$, где $\delta(r)$ есть импульсная дельта-функция Дирака; в случае в) сначала найти образ Фурье–Бесселя для $u(r,\,t)$:

$$\overline{u}(\lambda,\,t) = \begin{cases} \dfrac{8\psi_0 b J_1(a\lambda)}{\pi a\lambda}\,\dfrac{1-\cos(b\lambda^2 t)}{b^2\lambda^4}, & 0 \leqslant t \leqslant t_0, \\ \dfrac{8\psi_0 b J_1(a\lambda)}{\pi a\lambda}\,\dfrac{\cos[b(t-t_0)\lambda^2]-\cos(bt\lambda^2)}{b^2\lambda^4}, & t_0 \leqslant t < +\infty, \end{cases}$$

а затем применить формулу обращения. При выводе асимптотических формул воспользоваться интегралами

$$\int_0^{+\infty} J_1(x)\cos(bx^2)dx = 1-\cos\left(\frac{1}{4b}\right), \quad \int_0^{+\infty} J_1(x)\sin(bx^2)dx = \sin\left(\frac{1}{4b}\right),$$
$$\int_0^{+\infty} xJ_0(x)\cos(bx^2)dx = \frac{1}{2b}\sin\left(\frac{1}{4b}\right),$$
$$\int_0^{+\infty} xJ_0(x)\sin(bx^2)dx = \frac{1}{2b}\cos\left(\frac{1}{4b}\right).$$

Последние два интеграла могут быть получены из интеграла Вебера, приведенного в указании к задаче 110, в случае г) нужно воспользоваться упомянутым интегралом Вебера.

2. Построение и применение функций влияния сосредоточенных источников.

а) Функции влияния мгновенных сосредоточенных импульсов.

113. $$\varkappa(x,\,y,\,z,\,t) = \frac{1}{4\pi a}\,\frac{\delta(r-at)}{r} = \frac{1}{4\pi a^2}\,\frac{\delta\left(t-\dfrac{r}{a}\right)}{r}\ ^{1}), \qquad (1)$$

где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

В случае, если мгновенный точечный импульс имел место не в начале координат в момент $t=0$, а в точке $\xi,\,\eta,\,\zeta$ в момент $t=\tau$, функция влияния принимает вид

$$\varkappa(x,\,y,\,z,\,\xi,\,\eta,\,\zeta,\,t-\tau) = \frac{1}{4\pi a^2}\cdot\frac{\delta\left(t-\tau-\dfrac{r}{a}\right)}{r}, \qquad (2)$$

где $r = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$.

---

[1]) Следует учесть, что δ-функция четна и что $\delta(x) = \dfrac{1}{\alpha}\,\delta\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)$, где α — произвольная положительная константа. Последнее утверждение проверяется интегрированием по x от $-\infty$ до $+\infty$.

Указание. Нужно воспользоваться тем, что [1])

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\cos k(x-x_0)\,dk=\delta(x-x_0),$$

а также тем, что $\delta(x+x_0)=0$, если x и $x_0>0$ одновременно. Выражение (2) получается из (1) заменой x на $x-\xi,\ldots,t$ на $t-\tau$, что законно, так как уравнение $u_{tt}=a^2\Delta_3 u$ инвариантно относительно этой замены.

114. $\varkappa(x,\,y,\,z,\,\xi,\,\eta,\,\zeta,\,t-\tau)=$

$$=\frac{1}{4\pi a^2}\left\{\frac{\delta\left(t-\tau-\dfrac{r}{a}\right)}{r}-\frac{c}{a}\,\frac{J_1\left(c\sqrt{(t-\tau)^2-\dfrac{r^2}{a^2}}\right)}{\sqrt{(t-\tau)^2-\dfrac{r^2}{a^2}}}\,\sigma_0\left(t-\tau-\frac{r}{a}\right)\right\},\quad(1)$$

если в исходном уравнении перед c^2u стоит знак плюс, и

$\varkappa(x,\,y,\,z,\,\xi,\,\eta,\,\zeta,\,t-\tau)=$

$$=\frac{1}{4\pi a^2}\left\{\frac{\delta\left(t-\tau-\dfrac{r}{a}\right)}{r}-\frac{c}{a}\,\frac{I_1\left(c\sqrt{(t-\tau)^2-\dfrac{r^2}{a^2}}\right)}{\sqrt{(t-\tau)^2-\dfrac{r^2}{a^2}}}\,\sigma_0\left(t-\tau-\frac{r}{a}\right)\right\},\quad(2)$$

если в исходном уравнении перед c^2u стоит знак минус;

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}.$$

Указание. Задача решается аналогично предыдущей; сначала получается выражение для функции влияния мгновенного сосредоточенного импульса, имевшего место в начале координат $x=y=z=0$ в момент $t=0$, а затем, как и в решении предыдущей задачи, делается переход к более общему случаю мгновенного сосредоточенного импульса в точке ξ, η, ζ в момент τ. Функция

$$\sigma_0(x)=\begin{cases}0 & \text{при}\quad -\infty<x<0,\\ 1 & \text{при}\quad 0<x<+\infty\end{cases}$$

связана с функцией $\delta(x)$ соотношением

$$\sigma_0'(x)=\delta(x).$$

115 [2])**.** $\varkappa(x,\,y,\,z,\,\xi,\,\eta,\,\zeta,\,t-\tau)=$

$$=\frac{1}{2\pi a}\,\frac{\sigma_0\left(t-\tau-\dfrac{r}{a}\right)}{\sqrt{a^2(t-\tau_2)-r^2}},\quad r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}.$$

---

[1]) См. [7, с. 271].

[2]) Как и в случае задач 113 и 114, сначала получается функция влияния мгновенного сосредоточенного импульса, имевшего место в момент $t=0$ в начале координат, а затем делается переход к импульсу, имевшему место в произвольной точке в произвольный момент $t=\tau$.

116 [1]**.** $\varkappa(x,\,y,\,z,\,\xi,\,\eta,\,\zeta,\,t-\tau)=$

$$=\frac{1}{2\pi a}\cdot\frac{\sigma_0\left(t-\tau-\dfrac{r}{a}\right)}{\sqrt{a^2(t-\tau)-r^2}}\operatorname{ch}\left\{c\sqrt{(t-\tau)^2-\frac{r^2}{a^2}}\right\},$$

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2},$$

если перед c^2u в уравнении стоит знак плюс; если же в уравнении перед c^2u стоит знак минус, то в ответе нужно ch заменить через cos.

117. Сначала рассмотрим прямоугольную мембрану.

1) для первой краевой задачи, когда $\varkappa=0$ на границе прямоугольника,

$$\varkappa(x,\,y,\,\xi,\,\eta,\,t-\tau)=$$

$$=\frac{4}{l_1l_2}\sum_{m,\,n=1}^{+\infty}\sin\frac{m\pi x}{l_1}\sin\frac{n\pi y}{l_2}\sin\frac{mn\xi}{l_1}\sin\frac{n\pi\eta}{l_2}\cdot\frac{\sin\left\{\pi a(t-\tau)\sqrt{\dfrac{m^2}{l_1^2}+\dfrac{n^2}{l_2^2}}\right\}}{\pi a\sqrt{\dfrac{m^2}{l_1^2}+\dfrac{n^2}{l_2^2}}};$$

2) для второй краевой задачи, когда $\left.\dfrac{\partial\varkappa}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\dfrac{\partial\varkappa}{\partial x}\right|_{x=l_1}=0$, $\left.\dfrac{\partial\varkappa}{\partial y}\right|_{y=0}=\left.\dfrac{\partial\varkappa}{\partial y}\right|_{y=l_2}=0$,

$$\varkappa(x,\,y,\,\xi,\,\eta,\,t-\tau)=\frac{t-\tau}{l_1l_2}+$$

$$+\frac{1}{l_1l_2}\sum_{\substack{m,\,n=0\\ m+n\neq0}}^{+\infty}\varepsilon_{m,\,n}\cos\frac{m\pi x}{l_1}\cos\frac{n\pi y}{l_2}\cos\frac{m\pi\xi}{l_1}\cos\frac{n\pi\eta}{l_2}\times$$

$$\times\frac{\sin\left\{\pi a(t-\tau)\sqrt{\dfrac{m^2}{l_1^2}+\dfrac{n^2}{l_2^2}}\right\}}{\pi a\sqrt{\dfrac{m^2}{l_1^2}+\dfrac{n^2}{l_2^2}}},$$

где $\varepsilon_{m,\,n}=2$ при $m\cdot n=0$ и $\varepsilon_{m,\,n}=4$ при $m\cdot n\neq0$;

3) для третьей краевой задачи, когда

$$\left.\frac{\partial\varkappa}{\partial x}\right|_{x=0}-\alpha_1\varkappa\big|_{x=0}=0,\quad\left.\frac{\partial\varkappa}{\partial x}\right|_{x=l_1}+\beta_1\varkappa\big|_{x=l_1}=0,$$

$$\left.\frac{\partial\varkappa}{\partial y}\right|_{y=0}-\alpha_2\varkappa\big|_{y=0}=0,\quad\left.\frac{\partial\varkappa}{\partial y}\right|_{y=l_2}+\beta_2\varkappa\big|_{y=l_2}=0,$$

[1]) См. вторую сноску на предыдущей странице.

$$\varkappa(x,\,y,\,\xi,\,\eta,\,t-\tau)=$$
$$=4\sum_{m,\,n=0}^{+\infty}\frac{\sin(\mu_m x+\varphi_m)\sin(\nu_n y+\psi_n)\sin(\mu_n\xi+\varphi_n)\sin(\nu_n\eta+\psi_n)}{\left[l_1+\dfrac{(\alpha_1\beta_1+\mu_m^2)(\alpha_1+\beta_1)}{(\alpha_1+\mu_m^2)(\beta_1+\mu_m^2)}\right]\left[l_2+\dfrac{(\alpha_2\beta_2+\nu_n^2)(\alpha_2^2+\beta_2^2)}{(\alpha_2^2+\nu_n^2)(\beta_2^2+\nu_n^2)}\right]}\times$$
$$\times\frac{\sin\left\{a(t-\tau)\sqrt{\mu_m^2+\nu_n^2}\right\}}{a\sqrt{\mu_m^2+\nu_n^2}},$$

где μ_m — положительные корни уравнения

$$\frac{1}{\alpha_1+\beta_1}\left(\mu-\frac{\alpha_1\beta_1}{\mu}\right)=\operatorname{ctg} l_1\mu,$$

ν_n — положительные корни уравнения

$$\frac{1}{\alpha_2+\beta_2}\left(\nu-\frac{\alpha_1\beta_2}{\nu}\right)=\operatorname{ctg} l_2\nu,$$

$$\varphi_m=\operatorname{arctg}\frac{\mu_m}{l_1},\quad \psi_n=\operatorname{arctg}\frac{\nu_n}{l_2}.$$

Приведем ответ для круглой мембраны:

1) в случае первой краевой задачи, когда $\varkappa|_{r=r_0}=0$,

$$\varkappa(r,\,\varphi,\,r',\,\varphi',\,t-\tau)=$$
$$=\sum_{n,\,k=0}^{+\infty}\frac{J_n\left(\dfrac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right)J_n\left(\dfrac{\mu_k^{(n)}r'}{r_0}\right)}{\varepsilon_n\mu_k^{(n)}J_n'^{\,2}(\mu_k^{(n)})}\cos n(\varphi-\varphi')\sin\frac{a\mu_k^{(n)}t}{r_0},$$

где $\mu_k^{(n)}$ — положительные корни уравнения $J_n(\mu)=0$,

$$\varepsilon_n=\begin{cases}2 & \text{при}\quad n=0,\\ 1 & \text{при}\quad n\neq 0;\end{cases}$$

2) в случае второй краевой задачи, когда $\left.\dfrac{\partial\varkappa}{\partial r}\right|_{r=r_0}=0$,

$$\varkappa(r,\,\varphi,\,r',\,\varphi',\,t-\tau)=$$
$$=\frac{t-\tau}{\pi r_0^2}+\frac{2}{\pi a r_0}\sum_{n,\,k=0}^{+\infty}\frac{J_n\left(\dfrac{\mu_k^{(n)}r}{r_0}\right)J_n\left(\dfrac{\mu_k^{(n)}r'}{r_0}\right)}{\varepsilon_n\mu_k^{(n)}\left[1-\dfrac{n^2}{\mu_k^{(n)2}}\right]J_n^2(\mu_k^{(n)})}\cos n(\varphi-\varphi')\sin\frac{a\mu_k^{(n)}t}{r_0},$$

где $\mu_k^{(n)}$ — положительные корни уравнения $J_n(\mu)=0$ и ε_n принимает те же значения, что и в случае 1);

3) в случае третьей краевой задачи, когда $\left.\dfrac{\partial \varkappa}{\partial r}\right|_{r=r_0} + \alpha \varkappa\big|_{r=r_0} = 0$,

$$\varkappa(r,\, \varphi,\, r',\, \varphi',\, t-\tau) =$$

$$= \frac{2}{\pi a r_0} \sum_{n,\,k=0}^{+\infty} \frac{J_n\left(\dfrac{\mu_k^{(n)} r}{r_0}\right) J_n\left(\dfrac{\mu_k^{(n)} r'}{r_0}\right)}{\varepsilon_n \mu_k^{(n)} \left[1 + \dfrac{\alpha^2 - n^2}{\mu_k^{(n)2}}\right] J_n^2(\mu_k^{(n)})} \cos(\varphi - \varphi') \sin \frac{a \mu_k^{(n)} t}{r_0},$$

где $\mu_k^{(n)}$ — положительные корни уравнения $\mu J_n(\mu) + \alpha J_n(\mu) = 0$, а ε_n принимает те же значения, что и в случае 1).

118. Выполняя четные отражения, получим, отправляясь от функции влияния для неограниченной плоскости,

$$\varkappa(r,\, \varphi,\, r_0,\, \varphi_0,\, t-\tau) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sigma_0\left(t - \tau - \dfrac{r_k^+}{a}\right)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - (r_k^+)^2}} \operatorname{ch}\left[c\sqrt{(t-\tau)^2 - \frac{(r_k^+)^2}{a^2}}\right] +$$

$$+ \frac{\sigma_0\left(t - \tau - \dfrac{r_k^-}{a}\right)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - (r_k^-)^2}} \operatorname{ch}\left[c\sqrt{(t-\tau)^2 - \frac{(r_k^-)^2}{a^2}}\right],$$

$$r_k^+ = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos\left(\varphi - \varphi_0 + 2k\frac{\pi}{m}\right)},$$

$$r_k^- = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos\left(\varphi + \varphi_0 + 2k\frac{\pi}{m}\right)}.$$

119. а) Решение первой задачи

$$u_{tt} = a^2 \Delta_2 u \pm c^2 u + f(x,\, y,\, t) \quad \text{в области } G \quad \text{при} \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x,\, y), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x,\, y) \quad \text{в области } G, \tag{2}$$

$$u\big|_{\Gamma} = \mu(x,\, y,\, t) \quad \text{на контуре } \Gamma \quad \text{при} \quad 0 < t < +\infty \tag{3}$$

выражается с помощью функции влияния мгновенного сосредоточенного импульса $\varkappa = \varkappa(x,\, y,\, \xi,\, \eta,\, t-\tau)$, удовлетворяющей граничному условию $\varkappa\big|_{\Gamma} = 0$, следующим образом:

$$u(x,\, y,\, t) = \iint\limits_G \left[\varphi(\xi,\, \eta)\varkappa_t(x,\, y,\, \xi,\, \eta,\, t) + \psi(\xi,\, \eta)\varkappa(x,\, y,\, \xi,\, \eta,\, t)\right] d\xi\, d\eta +$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \iint\limits_G f(\xi,\, \eta,\, \tau)\varkappa(x,\, y,\, \xi,\, \eta,\, t-\tau)\, d\xi\, d\eta -$$

$$- a^2 \int\limits_0^t d\tau \oint\limits_\Gamma \mu(\xi,\, \eta,\, \tau)\, \frac{\partial \varkappa(x,\, y,\, \xi,\, \eta,\, t-\tau)}{\partial n}\, ds. \tag{4}$$

Здесь

$$\frac{\partial}{\partial n} = \cos(n, \xi)\,\frac{\partial}{\partial \xi} + \cos(n, \eta)\,\frac{\partial}{\partial \eta}$$

означает производную по внешней нормали.

б) Решение второй краевой задачи, отличающейся от задачи а) лишь граничным условием

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = \mu(x, y, t), \tag{3'}$$

с помощью соответствующей функции влияния $\varkappa$, удовлетворяющей граничному условию

$$\left.\frac{\partial \varkappa}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0,$$

выражается следующим образом:

$$u(x, y, t) = I_1 + I_2 + a^2 \int_0^t d\tau \oint_{\Gamma} \mu(\xi, \eta, \tau)\varkappa(x, y, \xi, \eta, t-\tau)\,d\xi\,d\eta, \tag{4'}$$

где I_1 и I_2 означают первое и второе слагаемые в формуле (4).

в) Решение третьей краевой задачи, отличающейся от задачи а) лишь граничным условием

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u\right]\Big|_{\Gamma} = \mu(x, y, t), \tag{3''}$$

с помощью соответствующей функции влияния $\varkappa$, удовлетворяющей граничному условию

$$\left[\frac{\partial \varkappa}{\partial n} + \alpha \varkappa\right]\Big|_{\Gamma} = 0,$$

выражается следующим образом:

$$u(x, y, t) = I_1 + I_2 + a^2 \int_0^t d\tau \oint_{\Gamma} \mu(\xi, \eta, \tau)\varkappa(x, y, \xi, \eta, t-\tau)\,ds, \tag{4''}$$

где I_1 и I_2 имеют те же значения, как и в (4').

Указание. Переходя в уравнениях

$$\frac{\partial^2 \varkappa}{\partial t^2} = a^2 \underset{xy}{\Delta_2} \varkappa \pm c^2 \varkappa \tag{5}$$

и

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \underset{xy}{\Delta_2} u \pm c^2 u + f(x, y, t) \tag{6}$$

от x, y, t к ξ, η, τ и используя начальные условия для $\varkappa(x, y, \xi, \eta, t-\tau)$:

$$\varkappa\big|_{t=\tau} = 0, \quad \varkappa_t\big|_{t=\tau} = \delta(x-\xi)\delta(y-\eta),$$

нетрудно получить с помощью формулы Грина – Остроградского, что

$$u(x,\,y,\,t)=$$
$$=\iint\limits_G\left[u(\xi,\,\eta,\,0)\varkappa_t(x,\,y,\,\xi,\,\eta,\,t)+u_t(\xi,\,\eta,\,0)\varkappa(x,\,y,\,\xi,\,\eta,\,t)\right]d\xi\,d\eta+$$
$$+\int\limits_0^t d\tau\iint\limits_G f(\xi,\,\eta,\,\tau)\varkappa(x,\,y,\,\xi,\,\eta,\,t-\tau)\,d\xi\,d\eta+$$
$$+a^2\int\limits_0^t d\tau\oint\limits_\Gamma\left[\varkappa(x,\,y,\,\xi,\,\eta,\,t-\tau)\,\frac{\partial u(\xi,\,\eta,\,\tau)}{\partial n}-\right.$$
$$\left.-\,u(\xi,\,\eta,\,\tau)\,\frac{\partial\varkappa(x,\,y,\,\xi,\,\eta,\,t-\tau)}{\partial n}\right]ds. \quad (7)$$

Для этого нужно уравнения (5) и (6) после перехода к $\xi,\,\eta,\,\tau$ умножить соответственно на $u(\xi,\,\eta,\,\tau)$ и $\varkappa(x,\,y,\,\xi,\,\eta,\,t-\tau)$, вычесть одно из другого и результат проинтегрировать по ξ,η по области G и по τ от нуля до t.

120. Указание. Пусть область Ω ограничена поверхностями S_1 и S_2 (рис. 55). Опишем, как из центра, из точки $(x,\,y,\,z)$ сферу S_ε радиусом ε; ограниченный ею объем обозначим ω_ε. Умножив уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}=a^2\underset{\xi\eta\xi}{\Delta_3}u+f(\xi,\,\eta,\,\zeta,\,\tau)$$

на

$$\varkappa(x,\,y,\,z,\,\xi,\,\eta,\,t-\tau)=\frac{1}{4\pi a^2}\cdot\frac{\delta\left(t-\tau-\dfrac{r}{a}\right)}{r},$$

в уравнение

$$\frac{\partial^2\varkappa}{\partial\tau^2}=a^2\underset{\xi\eta\zeta}{\Delta_3}u$$

на $u(\xi,\,\eta,\,\tau)$, нужно вычесть одно из другого и результат проинтегрировать по объему Ω за вычетом ω_ε и по τ от $\tau_1<0$ до $\tau_2>0$, считая u и f как-либо продолженными для отрицательных значений t.

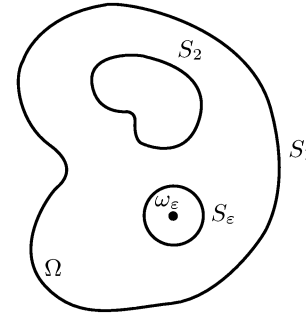


Рис. 55

б) Функции влияния непрерывно действующих сосредоточенных источников.

121. $$\omega(x,\,y,\,z,\,x_0,\,y_0,\,z_0,\,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\,\frac{f\left(t-\dfrac{r}{a}\right)}{r},$$

где

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}.$$

122.
$$\omega(x,\,y,\,x_0,\,y_0,\,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi a}\displaystyle\int\limits_0^{t-r/a}\dfrac{f(\tau)d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2+r^2}} & \text{при}\quad t>\dfrac{r}{a},\\[2ex] 0 & \text{при}\quad 0<t<\dfrac{r}{a},\end{cases}$$

где $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$.

123. $$\widetilde{\omega}(x,\,y,\,z,\,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\sum_{r_k}\frac{f\left(t-\dfrac{r_k}{a}\right)}{\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{dF(r)}{dr}\right|_{r=r_k}},$$

где

$$F(r)=\left\{X\left(t-\frac{r}{a}\right)-x\right\}^2+\left\{Y\left(t-\frac{r}{a}\right)-y\right\}^2+\left\{Z\left(t-\frac{r}{a}\right)-z\right\}^2-r^2,$$

а r_k — положительные корни уравнения $F(r)=0$,

$$\frac{1}{2}\left|\frac{dF(r)}{dr}\right|=\left|r\left(1-\frac{w_r}{a}\right)\right|,$$

где w_r — проекция скорости источника на направление радиуса-вектора r, проведенного из точки наблюдения в источник; поэтому $\dfrac{dF(r)}{dr}$ может обращаться в нуль лишь в том случае, когда скорость движения источника $w>a$; следовательно, лишь при этом условии уравнение $F(r)=0$ может иметь более одного корня.

Если источник движется прямолинейно с постоянной скоростью v, то, направляя ось x по направлению движения источника, получим:

а) при $v<a$, т.е. при $M=\dfrac{v}{a}<1$,

$$\widetilde{\omega}(x,\,y,\,z,\,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\cdot\frac{f\left(t-\dfrac{M(x-vt)+\sqrt{(x-vt)^2+(1-M^2)(y^2+z^2)}}{a(1-M^2)}\right)}{\sqrt{(x-vt)^2+(1-M^2)(y^2+z^2)}};$$

б) при $v>a$, т.е. при $M=\dfrac{v}{a}>1$,

$$\widetilde{\omega}(x,\,y,\,z,\,t)=$$
$$\frac{1}{4\pi a^2}\cdot\frac{f\left(t+\dfrac{M(x-vt)+\sqrt{(x-vt)^2-(M^2-1)(y^2+z^2)}}{a(M^2-1)}\right)}{\sqrt{(x-vt)^2-(M^2-1)(y^2+z^2)}}+$$
$$+\frac{1}{4\pi a^2}\cdot\frac{f\left(t+\dfrac{M(x-vt)+\sqrt{(x-vt)^2-(M^2-1)(y^2+z^2)}}{a(M^2-1)}\right)}{\sqrt{(x-vt)^2-(M^2-1)(y^2+z^2)}}.$$

Замечание. Этим равенством решение определяется внутри кругового конуса с вершиной в O', осью которого служит отрицательная полуось x и отрезок OO' (см. рис. 56); $\operatorname{ctg}\alpha=M^2-1$. В этом конусе корень $\sqrt{(x-vt)^2-(M^2-1)(y^2+z^2)}$ действителен. Если источник начал действовать в момент времени $t=0$, когда он находился в точке O, то областью, в которой вызванные им возмущения могут быть отличны от нуля, является часть пространства, ограниченная упомянутым конусом и частью сферы радиуса at с центром в точке O (причем точка O лежит внутри этой области, а конус касается сферы).

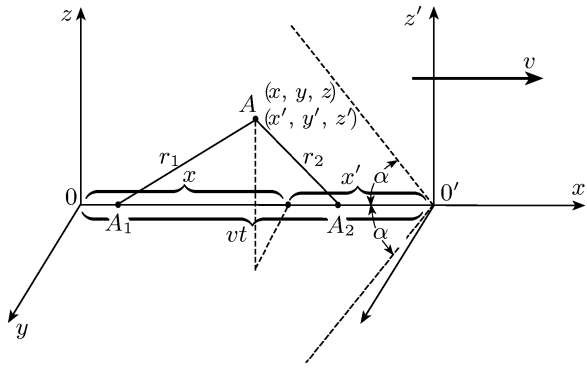


Рис. 56

В точку «наблюдения» $A(x, y, z)$ в момент t при $v > a$ приходят возмущения, посланные источником из двух положений: A_1 и A_2. Расстояния A_1A и A_2A равны

$$A_1A = r_1 = -\frac{M(x-vt) + \sqrt{(x-vt)^2 - (M^2-1)(y^2+z^2)}}{M^2-1},$$

$$A_2A = r_2 = -\frac{M(x-vt) - \sqrt{(x-vt)^2 - (M^2-1)(y^2+z^2)}}{M^2-1}.$$

В точке A_1 источник находится в момент $t_1 = t - \dfrac{r_1}{a}$, а в точке A_2 он находился в момент $t_2 = t - \dfrac{r_2}{a}$.

Если мощность источника постоянна и равна q, то:

а) при $v < a$, т. е. $M = \dfrac{v}{a} < 1$,

$$\widetilde{\omega}(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \frac{q}{\sqrt{(x-vt)^2 + (1-M^2)(y^2+z^2)}};$$

б) при $v > a$, т. е. $M = \dfrac{v}{a} > 1$,

$$\widetilde{\omega}(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi a^2} \frac{q}{\sqrt{(x-vt)^2 - (M^2-1)(y^2+z^2)}}.$$

Указание. В интеграле, выражающем решение уравнения (1) при начальных условиях (2)

$$\widetilde{\omega}(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{[f]}{r}\, \delta(\xi - [X])\delta(\eta - [Y])\delta(\zeta - [Z])\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$

где $[\Phi]$ означает, что в функции Φ аргумент t заменен на $t - \dfrac{r}{a}$, целесообразно перейти к новым переменным интегрирования α, β, γ:

$$\alpha = \xi - [X], \quad \beta = \eta - [Y], \quad \gamma = \zeta - [Z];$$

при этом вместо определителя $\dfrac{D(\xi,\,\eta,\,\zeta)}{D(\alpha,\,\beta,\,\gamma)}$ целесообразно пользоваться определителем $\dfrac{D(\alpha,\,\beta,\,\gamma)}{D(\xi,\,\eta,\,\zeta)}$.

124. Источник находится в начале движущейся вместе с ним системы координат $O'x'y'z'$, расположенной, как указано на рис. 56, $x' = vt - x,\ \ y' = y,\ \ z' = z$.

а) При $v < a$, т. е. $M = \dfrac{v}{a} < 1$, получается уравнение эллиптического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + \frac{1}{1-M^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z'^2}\right) = -\frac{q}{a^2(1-M^2)}\,\delta(x')\delta(y')\delta(z');$$

заменой переменных $x' = \xi,\ \ y' = \dfrac{\eta}{\sqrt{1-M^2}},\ \ z = \dfrac{\zeta}{\sqrt{1-M^2}}$ оно преобразуется в уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} = -4\pi\left(\frac{q}{4\pi a^2}\right)\delta(\xi)\,\delta(\eta)\,\delta(\zeta),$$

решением которого является функция влияния сосредоточенного источника

$$u(\xi,\,\eta,\,\zeta) = \frac{q}{4\pi a^2\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}},$$

или, в исходных координатах x', y', z',

$$u(x',\,y',\,z') = \frac{q}{4\pi a^2\sqrt{x'^2+(1-M^2)(y'^2+z'^2)}}.$$

б) При $v > a$, т. е. $M = \dfrac{v}{a} > 1$, получается уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} = \frac{1}{M^2-1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z'^2}\right) + \frac{q}{a^2(M^2-1)}\,\delta(x')\,\delta(y')\,\delta(z').$$

Решая его с помощью надлежащей интегральной формулы при начальных условиях

$$u\big|_{x'=0} = 0, \quad u_{x'}\big|_{x'=0} = 0,$$

получим

$$u(x',\,y',\,z') = \frac{1}{2\pi a^2}\cdot\frac{q}{\sqrt{x'^2-(M^2-1)(y'^2+z'^2)}}.$$

125. Пусть электрон движется вдоль оси z со скоростью $v = \mathrm{const}$ [1], $a = \dfrac{x}{\sqrt{\varepsilon}} < v < c$, где c — скорость света в вакууме, а $a = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$ — скорость света в рассматриваемом диэлектрике с диэлектрической постоянной ε. Скалярный потенциал электромагнит-

[1] На самом деле эта скорость будет меняться за счет излучения энергии электроном. Подробнее об этом см. [18].

ного поля, создаваемого движущимся электроном, равен

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{2e}{\varepsilon\sqrt{(vt-z)^2-\gamma^2r^2}} & \text{при} \quad vt-z > \gamma r, \\ 0 & \text{при} \quad vt-z < \gamma r. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь e — заряд электрона, $\gamma^2 = \dfrac{v^2}{a^2} - 1$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, причем предполагается, что в момент $t = 0$ электрон находился в точке $x = y = z = 0$. Компоненты векторного потенциала равны

$$A_x = A_y = 0, \quad A_z = \varepsilon\frac{v}{c}\varphi, \tag{2}$$

причем

$$\boldsymbol{H} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A},$$

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}. \tag{2'}$$

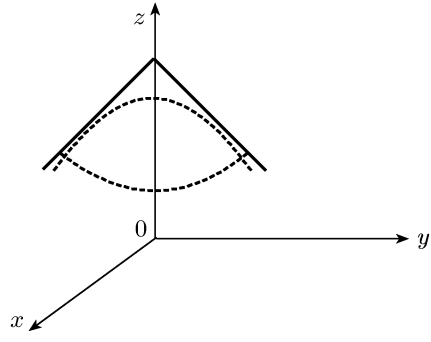


Рис. 57

В каждый момент времени t электромагнитное поле, создаваемое электроном, отлично от нуля лишь в нижнем конусе с вершиной в электроне (рис. 57), а эквипотенциальными внутри конуса поверхностями являются гиперболоиды вращения $(vt-z)^2 - \gamma^2r^2 = \text{const}$.

Указание. Для скалярного и векторного потенциалов имеют место уравнения

$$\left.\begin{aligned} \Delta\varphi - \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{\varepsilon}\boldsymbol{\rho}, \\ \Delta\boldsymbol{A} - \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}^{(e)}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

причем [1])

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0. \tag{4}$$

В нашем случае

$$j_x^{(e)} = f_y^{(e)} = 0, \quad j_z^{(e)} = v\boldsymbol{\rho} = ve\delta(x)\delta(y)\delta(z-vt), \tag{5}$$

$$\rho = e\delta(x)\delta(y)\delta(z-vt). \tag{6}$$

Подстановка этих значений $\boldsymbol{\rho}$ и $\boldsymbol{j}$ в уравнения (3) сразу же дает

$$A_x = A_y = 0, \quad A_z = \varepsilon\frac{v}{c}\varphi, \tag{7}$$

поэтому равенство (4) превращается в равенство

$$\frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0, \tag{8}$$

что позволяет все компоненты электромагнитного поля, используя (7) и (8), выразить через скалярный потенциал φ.

[1]) См. [17, с. 444].

126.

$$H_\varphi = \begin{cases} -\dfrac{M_0\omega^2}{r^2a^2}\left[r\cos\omega\left(t-\dfrac{r}{a}\right)+\dfrac{a}{\omega}\sin\omega\left(t-\dfrac{r}{a}\right)\right]\sin\theta, & t>\dfrac{r}{a}, \\ 0, & t<\dfrac{r}{a}, \end{cases}$$

$$E_r = \begin{cases} -\dfrac{2M_0\omega^2}{r^3a}\left[r\sin\omega\left(t-\dfrac{r}{a}\right)-\dfrac{a}{\omega}\cos\omega\left(t-\dfrac{r}{a}\right)\right]\cos\theta, & t>\dfrac{r}{a}, \\ \dfrac{2M_0\cos\theta}{r^3}, & t<\dfrac{r}{a}, \end{cases}$$

$$E_\theta = \begin{cases} -\dfrac{M_0\omega^2}{r^2a^2}\left[\left(r^2-\dfrac{a^2}{\omega^2}\right)\cos\omega\left(t-\dfrac{r}{a}\right)+\dfrac{ra}{\omega}\sin\omega\left(t-\dfrac{r}{a}\right)\right]\sin\theta, & t>\dfrac{r}{a}, \\ \dfrac{M_0\sin\theta}{r^3}, & t<\dfrac{r}{a}. \end{cases}$$

127. Для смещений u, v, w по осям x, y, z, считая, что сила $F(t)$ приложена к началу координат и направлена по оси x, получаем выражение

$$u = \frac{1}{4\pi\rho}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\int\limits_{r/a}^{r/b}\tau F(t-\tau)\,d\tau + \\ + \frac{x^2}{r^3}\left\{\frac{1}{a^2}F\left(t-\frac{r}{a}\right)-\frac{1}{b^2}F\left(t-\frac{r}{b}\right)+\frac{1}{b^2r}F\left(t-\frac{r}{b}\right)\right\},$$

$$v = \frac{1}{4\pi\rho}\left[\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\int\limits_{r/a}^{r/b}\tau F(t-\tau)\,d\tau + \\ + \frac{xy}{r^3}\left\{\frac{1}{a^2}F\left(t-\frac{r}{a}\right)-\frac{1}{b^2}F\left(t-\frac{r}{b}\right)\right\},$$

$$w = \frac{1}{4\pi\rho}\left[\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\int\limits_{r/a}^{r/b}\tau F(t-\tau)\,d\tau + \\ + \frac{xz}{r^3}\left\{\frac{1}{a^2}F\left(t-\frac{r}{a}\right)-\frac{1}{b^2}F\left(t-\frac{r}{b}\right)\right\},$$

где

$$a^2 = \frac{(2m-2)G}{(m-2)\rho} = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}, \quad b^2 = \frac{G}{\rho} = \frac{\mu}{\rho},$$

ρ — плотность массы среды, a — скорость распространения продольных деформаций, b — скорость распространения поперечных деформаций.

Указание. К поверхности малого шара радиуса r с центром в начале координат приложены упругие напряжения, равнодействующая которых должна совпадать с $F(t)$. Следовательно, при $r\to 0$ напряжения должны иметь порядок $\dfrac{1}{r^2}$ (если только $F(t)\not\equiv 0$ и является конечной величиной). Перемещения, производным которых пропорциональны напряжения, должны иметь порядок $\dfrac{1}{r}$.

Глава VII

УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА $\Delta u + cu = -f$

§ 1. Задачи для уравнения $\Delta u - \varkappa^2 u = -f$

1. Концентрация газа в точке $M(x, y, z)$, отстоящей на расстоянии r от источника $P = P(\xi, \eta, \zeta)$, равна

$$u = \frac{Q_0}{4\pi D}\,\frac{e^{-\varkappa r}}{r}, \quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$

где D — коэффициент диффузии, $\varkappa^2 = \dfrac{\beta}{D}$, β — постоянная распада.

2.
$$u(M, P) = \frac{Q_0}{4\pi D}\left(\frac{e^{-\varkappa r}}{r} + \frac{e^{-\varkappa r_1}}{r_1}\right),$$

где

$$M = M(x, y, z), \quad P = P(\xi, \eta, \zeta),$$
$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$
$$r_1 = MP_1 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2}, \quad P_1 = P_1(\xi, \eta, -\zeta).$$

Источник помещен в точке $P(\xi, \eta, \zeta)$.

Указание. Условие газонепроницаемости стенки $z = 0$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = 0$$

показывает, что отражение относительно плоскости должно быть четным.

3. Функция точечного источника для уравнения

$$\Delta_2 u - \varkappa^2 u = 0$$

на плоскости (x, y) имеет вид

$$G(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} K_0(\varkappa r),$$

где K_0 — цилиндрическая функция мнимого аргумента нулевого порядка второго рода,

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}.$$

Физическая интерпретация функции источника — стационарная концентрация, создаваемая в точке x, y, z_0 источником неустойчивого газа, равномерно распределенным на бесконечной прямой, параллельной оси z и проходящей через точку ξ, η, z_0; мощность источника, отнесенная к единице длины, численно равна D.

4. $$G(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi}[K_0(\varkappa r) + K_0(\varkappa r_1)],$$

где

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}, \quad r_1 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2}.$$

5. Если источник находится в точке (ξ, η, ζ), то

$$u = \frac{Q_0}{4\pi D} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{-\varkappa r_n}}{r_n} + \frac{e^{-\varkappa r'_n}}{r'_n} \right],$$

где

$$r_n = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta_n)^2},$$
$$r'_n = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta'_n)^2},$$
$$\zeta_n = 2nl + \zeta, \quad \zeta'_n = 2nl - \zeta.$$

Указание. Изображения в плоскостях $z = 0$ и $z = l$ являются четными и помещены в точках

$$(\xi, \eta, \zeta_n = 2nl + \zeta) \quad \text{и} \quad (\xi, \eta, \zeta'_n = 2nl - \zeta).$$

Сходимость ряда очевидна в силу наличия экспоненциальных множителей $e^{-\varkappa r_n}$ и $e^{-\varkappa r'_n}$ под знаком суммы.

6. Если источник находится в точке (ξ, η), то

$$u = \frac{Q}{2\pi D} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [K_0(\varkappa r_n) + K_0(\varkappa r'_n)],$$

где

$$r_n = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta_n)^2}, \quad r'_n = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta'_n)^2},$$
$$\eta_n = 2nl + \eta, \quad \eta'_n = 2nl - \eta.$$

Указание. См. задачу 5. Сходимость ряда видна из асимптотической формулы

$$K_0(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi x}}\, e^{-x} + \ldots$$

7. $$u = \frac{Q_0}{2D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(M)\psi_n(P)}{\|\psi_n\|^2 \sqrt{\lambda_n + \varkappa^2}}\, e^{-\sqrt{\lambda_n + \varkappa^2}\,|z-\zeta|},$$

где $(M(x, y); z)$ — точка наблюдения, $(P(\xi, \eta); \zeta)$ — точка, в которой находится источник, λ_n и ψ_n — собственные значения и собственные функции плоской задачи

$$\Delta_2 \psi_n + \lambda_n \psi_n = 0 \quad \text{в} \quad S,$$
$$\frac{\partial \psi_n}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на} \quad C,$$

S — поперечное сечение трубы, C — его граница, ν — нормаль к C,

$$\|\psi_n\|^2 = \int\limits_S \psi_n^2\, ds.$$

Указание. Решение краевой задачи

$$\left.\begin{array}{l} D\Delta u - \beta u = -f \\ \text{или} \\ \Delta u - \varkappa^2 u = -\dfrac{f}{D} \end{array}\right\} \text{ внутри } \quad \Sigma,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma,$$

где Σ — поверхность трубы, следует искать в виде

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)\psi_n(M).$$

Зная решение этой задачи, нетрудно перейти к предельному случаю точечного источника.

8. Если источник находится в точке $(\rho,\, \theta',\, \varphi')$, то

$$u(r,\, \theta,\, \varphi) = \frac{Q_0}{D}\, G(r,\, \theta,\, \varphi;\, \rho,\, \theta',\, \varphi'),$$

где $G(r,\, \theta,\, \varphi;\, \rho,\, \theta',\, \varphi')$ — функция источника, определяемая формулами

$$G(r,\, \theta,\, \varphi,\, \rho,\, \theta',\, \varphi') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{Y_n^{(k)}(\theta,\, \varphi)\, Y_n^{(k)}(\theta',\, \varphi')}{\|Y_n^{(k)}\|^2}\, G_n(r,\, \rho),$$

где

$$Y_n^{(k)} = P_n^{(k)}(\cos\theta) \begin{cases} \cos k\varphi & \text{при} \quad k \geqslant 0, \\ \sin |k|\varphi & \text{при} \quad k < 0 \end{cases}$$

— сферические функции, $P_n^{(k)}$ — присоединенные функции Лежандра,

$$\|Y_n^{(k)}\|^2 = \frac{2}{2n+1}\, \pi\varepsilon_k\, \frac{(n+k)!}{(n-k)!}, \quad \varepsilon_k = \begin{cases} 2 & \text{при} \quad k = 0, \\ 1 & \text{при} \quad k \neq 0, \end{cases}$$

$$G_n(r,\, \rho) = \begin{cases} \varkappa^2 \left[\xi_n'(\varkappa a)\, \eta_n(\varkappa\rho) - \xi_n(\varkappa\rho)\, \eta_n'(\varkappa a)\right] \dfrac{\xi_n(\varkappa r)}{\xi_n'(\varkappa a)} & \text{при} \quad r < \rho, \\ \varkappa^2 \left[\xi_n'(\varkappa a)\, \eta_n(\varkappa r) - \xi_n(\varkappa\rho)\, \eta_n'(\varkappa a)\right] \dfrac{\xi_n(\varkappa\rho)}{\xi_n'(\varkappa a)} & \text{при} \quad r > \rho, \end{cases}$$

$$\xi_n(x) = x^{-1/2}\, I_{n+1/2}(x), \quad \eta_n(x) = x^{-1/2}\, K_{n+1/2}(x).$$

Указание. Решение задачи $\Delta u - \varkappa^2 u = -f$, $u_r|_{r=a} = 0$ представить в виде

$$u(r,\, \theta,\, \varphi) = \int\limits_0^a \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} G(r,\, \theta,\, \varphi,\, \rho,\, \theta',\, \varphi') f(\rho,\, \theta',\, \varphi')\rho^2\, d\rho \sin\theta'\, d\theta'\, d\varphi'.$$

Полагая

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n}u_{nk}(r)Y_n^{(k)}(\theta,\,\varphi),\quad f=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n}f_{nk}(r)Y_n^{(k)}(\theta,\,\varphi),$$

получаем

$$Lu_{nk}=(r^2u'_{nk})'-(\varkappa^2r^2+n(n+1))u_{nk}=-f_{nk}(r),\quad u'_{nk}(a)=0,$$

$$u_{nk}(r)=\int_0^a G_n(r,\,\rho)f_{nk}(\rho)\rho^2d\rho,$$

$$f_{nk}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\rho,\,\theta',\,\varphi')Y_n^{(k)}(\theta',\,\varphi')\sin\theta'd\theta'\,d\varphi',$$

$$LG_n=0\quad(r\neq\rho),\quad G_n(\rho-0,\,\rho)=G_n(\rho+0,\,\rho),$$

$$G'_n(\rho+0,\,\rho)-G'_n(\rho-0,\,\rho)=-\frac{1}{\rho^2},\quad G'_n(a,\,\rho)=0.$$

9. Если ось z прямоугольной системы координат направить вдоль v_0, то

$$u(x,\,y,\,z)=\frac{Q_0}{D}\,\frac{\exp\left\{-\varkappa r-\dfrac{v_0}{2D}\,(x-\zeta)\right\}}{4\pi r},$$

где

$$\varkappa=\frac{\beta}{D},\quad r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}.$$

10. Если $r=a$ — радиус цилиндра, то

$$u(r)=u_0\,\frac{I_0(\varkappa r)}{I_0(\varkappa a)},\quad r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Указание. Требуется найти ограниченное решение уравнения

$$\Delta_2u-\varkappa^2u=0,\quad r<a$$

при условии

$$u\big|_{r=a}=u_0.$$

11.
$$u=u(r)=u_0\,\frac{K_0(\varkappa r)}{K_0(\varkappa a)}.$$

12. а)
$$u=u_0\,\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}}\,\frac{I_{1/2}(\varkappa r)}{I_{1/2}(\varkappa a)}=u_0\,\frac{a}{r}\,\frac{\operatorname{sh}\varkappa r}{\operatorname{sh}\varkappa a};$$

б)
$$u=u_0\,\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}}\,\frac{I_{3/2}(\varkappa r)}{I_{3/2}(\varkappa a)}\cos\theta=u_0\left(\frac{a}{r}\right)^2\,\frac{\varkappa r\operatorname{ch}\varkappa r-\operatorname{sh}\varkappa r}{\varkappa a\operatorname{ch}\varkappa a-\operatorname{sh}\varkappa a}\cos\theta.$$

13. а)
$$u=u_0\,\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}}\,\frac{K_{1/2}(\varkappa r)}{K_{1/2}(\varkappa a)}=u_0\,\frac{ae^{-\varkappa r}}{re^{-\varkappa a}};$$

б)
$$u=u_0\,\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}}\,\frac{K_{3/2}(\varkappa r)}{K_{3/2}(\varkappa a)}\cos\theta=u_0\left(\frac{a}{r}\right)^2\,\frac{\varkappa r+1}{\varkappa a+1}\cdot\frac{e^{-\varkappa r}}{e^{-\varkappa a}}\cdot\cos\theta.$$

14. а) Если поверхность земли совпадает с плоскостью $z = 0$, то распределение концентрации эманации в земле дается формулой

$$u = \begin{cases} \dfrac{f_0}{\beta}\, e^{-\varkappa h} \operatorname{sh} \varkappa z & \text{при} \quad 0 < z < h, \\ \dfrac{f_0}{\beta}\,(1 - e^{-\varkappa z} \operatorname{ch} \varkappa h) & \text{при} \quad h < z < \infty, \end{cases}$$

где $\varkappa = \sqrt{\dfrac{\beta}{D}}$, β — постоянная распада, D — коэффициент диффузии, f_0 — плотность источников.

б) Поток эманации через поверхность земли

$$q = D \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{f_0}{\varkappa}\, e^{-\varkappa h}.$$

15. а) Если $z = 0$ — поверхность земли, а источник находится в точке $(0, 0, h)$, то концентрация

$$u = \frac{Q_0}{4\pi D}\left(\frac{e^{-\varkappa r_1}}{r_1} - \frac{e^{-\varkappa r_2}}{r_2}\right),$$

где

$$r_1 = \sqrt{\rho^2 + (z-h)^2}, \quad r_2 = \sqrt{\rho^2 + (z+h)^2}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

б) Поток через поверхность земли $z = 0$ равен

$$q(\rho) = D \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{Q_0 h}{2\pi r_0^2}\left(\varkappa + \frac{1}{r_0}\right) e^{-\varkappa r_0},$$

где

$$r_0 = \sqrt{\rho^2 + h^2}.$$

16. Требуется определить Q_0 и h. Для этого, пользуясь данными наблюдений, т. е. величиной $q(\rho)$, находим полный поток через поверхность земли

$$Q = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} q(\rho)\rho\, d\rho\, d\varphi = Q_0 e^{-\varkappa h}, \tag{1}$$

затем интеграл

$$I = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} q\rho^2 d\rho\, d\varphi = -Q_0 h \left[\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{e^{-\varkappa r}}{r}\right)\rho\, d\rho\right]_{z=0} =$$

$$= Q_0 h \int_0^{\infty} \frac{e^{-\varkappa\sqrt{\rho^2+h^2}}}{\sqrt{\rho^2+h^2}}\, d\rho = Q_0 h \int_0^{\infty} e^{-\varkappa h \operatorname{ch}\xi}\, d\xi = Q_0 h \cdot K_0(\varkappa h),$$

или

$$I = Q_0 h K_0(\varkappa h). \tag{2}$$

Из формул (1) и (2) имеем

$$h K_0(\varkappa h) e^{\varkappa h} = \frac{I}{Q}.$$

Отсюда, поскольку I и Q известны, определим величину h и затем по формуле (1) — мощность источника Q_0.

Положение источника в горизонтальной плоскости определяется, очевидно, по максимуму наблюдаемого потока $q(\rho)$.

§ 2. Некоторые задачи о собственных колебаниях

1. Собственные колебания струн и стержней.

17. Обозначим $v = v(x)$ — амплитуду отклонения точки струны с координатой x. Требуется найти решение однородного уравнения

$$v'' + \lambda v = 0$$

при соответствующих однородных граничных условиях.

а) Граничные условия

$$v(0) = 0, \quad v(l) = 0,$$

собственные значения

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

собственные функции

$$v_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l}\, x,$$

квадрат нормы собственных функций

$$\|v_n\|^2 = l/2.$$

б) Граничные условия

$$v'(0) = 0, \quad v'(l) = 0,$$

собственные значения

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

собственные функции

$$v_n(x) = \cos \frac{\pi n}{l}\, x \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

квадрат нормы

$$\|v_n\|^2 = \frac{l}{2}\,\varepsilon_n, \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 2, & n = 0, \\ 2, & n \neq 0. \end{cases}$$

в) Граничные условия

$$v(0) = 0, \quad v'(l) = 0,$$

собственные значения

$$\lambda_n = \left[\frac{\pi(2n+1)}{2l}\right]^2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

собственные функции

$$v_n(x) = \sin \frac{\pi(2n+1)}{2l}\, x \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

квадрат нормы

$$\|v_n\|^2 = l/2.$$

г) Граничные условия

$$v'(0) - h_1 v(0) = 0, \quad v'(l) + h_2 v(l) = 0,$$

где $h_1 > 0$, $h_2 > 0$, собственные значения λ_n определяются из трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg} \sqrt{\lambda}\, l = \frac{(h_1 + h_2)\sqrt{\lambda}}{\lambda - h_1 h_2} \tag{1}$$

или

$$\operatorname{tg} \mu l = \frac{(h_1 + h_2)\mu}{\mu^2 - h_1 h_2}, \quad \lambda_n = \mu_n^2,$$

собственные функции

$$v_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n + h_1^2}} \left[\sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n}\, x + h_1 \sin \sqrt{\lambda_n}\, x\right],$$

квадрат нормы

$$\|v_n\|^2 = \frac{l}{2} + \frac{(h_1 + h_2)(\mu_n^2 + h_1 h_2)}{2(\mu_n^2 + h_1^2)(\mu_n^2 + h_2^2)} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

В частном случае при $h_1 = h_2$ уравнение (1) принимает вид

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{2h\,\mu/l}{\mu^2/l^2 - h^2}, \quad \lambda = \frac{\mu^2}{l^2}.$$

д) Граничные условия

$$v(0) = 0, \quad v'(l) + hv(l) = 0,$$

собственные значения λ_n определяются из уравнения

$$\operatorname{tg} \mu = -\frac{\mu}{hl}, \quad \lambda_n = \frac{\mu_n^2}{l^2} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

собственные функции

$$v_n(x) = \sin \sqrt{\lambda_n}\, x,$$

квадрат нормы

$$\|v_n\|^2 = \frac{l}{2} + \frac{hl^2}{2(\mu_n^2 + h^2 l^2)}.$$

е) Граничные условия

$$v'(0) = 0, \quad v'(l) + hv(l) = 0,$$

собственные значения λ_n определяются из уравнения

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{hl}{\mu}, \quad \lambda_n = \frac{\mu_n^2}{l^2},$$

собственные функции

$$v_n(x) = \cos \sqrt{\lambda_n}\, x,$$

квадрат нормы

$$\|v_n\|^2 = \frac{l}{2} + \frac{hl^2}{2(\mu_n^2 + h^2 l^2)}.$$

18. Уравнение продольных собственных колебаний неоднородного стержня имеет вид

$$\frac{d}{dx}\left[E(x)\frac{dv}{dx}\right] + \lambda \rho v = 0, \quad E = \begin{cases} E_1 & (x < x_0), \\ E_2 & (x > x_0), \end{cases} \quad \rho = \begin{cases} \rho_1 & (x < x_0), \\ \rho_2 & (x > x_0). \end{cases}$$

а) Граничные условия

$$v(0) = 0, \quad v(l) = 0,$$

собственные значения определяются из уравнения

$$a_1\rho_1 \operatorname{ctg}\frac{\sqrt{\lambda}}{a_1}x_0 + a_2\rho_2 \operatorname{ctg}\frac{\sqrt{\lambda}}{a_2}(l-x_0) = 0,$$

где

$$a_1 = \sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}}, \quad a_2 = \sqrt{\frac{E_2}{\rho_2}},$$

собственные функции

$$v_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\dfrac{\sqrt{\lambda_n}}{a_1}x}{\sin\dfrac{\sqrt{\lambda_n}}{a_1}x_0} & \text{при} \quad x < x_0, \\[2ex] \dfrac{\sin\dfrac{\sqrt{\lambda_n}}{a_2}(l-x)}{\sin\dfrac{\sqrt{\lambda_n}}{a_2}(l-x_0)} & \text{при} \quad x_0 < x < l, \end{cases}$$

квадрат нормы

$$\|v_n\|^2 = \frac{\rho_1 x_0}{2\sin^2\dfrac{\sqrt{\lambda_n}}{a_1}x_0} + \frac{\rho_2(l-x_0)}{2\sin^2\dfrac{\sqrt{\lambda_n}}{a_2}(l-x_0)} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

б) Граничные условия

$$v'(0) = v'(l) = 0.$$

Собственные значения определяются из уравнения

$$a_1\rho_1 \operatorname{tg}\frac{\sqrt{\lambda}}{a_1}x_0 + a_2\rho_2 \operatorname{tg}\frac{\sqrt{\lambda}}{a_2}(l-x_0) = 0.$$

Собственные функции

$$v_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos\dfrac{\sqrt{\lambda_n}}{a_1}x}{\cos\dfrac{\sqrt{\lambda_n}}{a_1}x_0} & \text{при} \quad 0 < x < x_0, \\[2ex] \dfrac{\cos\dfrac{\sqrt{\lambda_n}}{a_2}(l-x)}{\cos\dfrac{\sqrt{\lambda_n}}{a_2}(l-x_0)} & \text{при} \quad x_0 < x < l, \end{cases}$$

квадрат нормы

$$\|v_n\|^2 = \frac{\rho_1 x_0}{2\cos^2\dfrac{\sqrt{\lambda_n}}{a_1}x_0} + \frac{\rho_2(l-x_0)}{2\cos^2\dfrac{\sqrt{\lambda_n}}{a_2}(l-x_0)} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

в) Граничные условия

$$v'(0) - h_1 v(0) = 0, \quad v'(l) + h_2 v(l) = 0.$$

Собственные значения определяются из уравнения

$$a_1\rho_1\frac{h_1-\dfrac{\sqrt{\lambda}}{a_1}\operatorname{tg}\dfrac{\sqrt{\lambda}}{a_1}x_0}{\dfrac{\sqrt{\lambda}}{a_1}+h_1\operatorname{tg}\dfrac{\sqrt{\lambda}}{a_1}x_0}+a_2\rho_2\frac{h_2-\dfrac{\sqrt{\lambda}}{a_2}\operatorname{tg}\dfrac{\sqrt{\lambda}}{a_2}(l-x_0)}{\dfrac{\sqrt{\lambda}}{a_2}+h_2\operatorname{tg}\dfrac{\sqrt{\lambda}}{a_2}(l-x_0)}=0,$$

где

$$a_1=\sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}},\quad a_2=\sqrt{\frac{E_2}{\rho_2}}.$$

Собственные функции

$$v_n(x)=\begin{cases}\dfrac{X_n(x)}{X_n(x_0)} & \text{при}\quad 0<x<x_0\\[2ex] \dfrac{Y_n(x)}{Y_n(x_0)} & \text{при}\quad x_0<x<l\end{cases}\qquad (n=1,\,2,\,\ldots),$$

$$X_n(x)=\sqrt{\lambda_n}\cos\frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_1}x+a_1h_1\sin\frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_1}x,$$

$$Y_n(x)=\sqrt{\lambda_n}\cos\frac{\lambda_n}{a_2}(l-x)+a_2h_2\sin\frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_2}(l-x).$$

Квадрат нормы

$$\|v_n\|^2=\frac{\rho_1}{X_n^2(x_0)}\int\limits_0^{x_0}X_n^2(x)\,dx+\frac{\rho_2}{Y_n^2(x_0)}\int\limits_{x_0}^{l}Y_n^2(x)\,dx.$$

У к а з а н и е. Требуется найти нетривиальные решения

$$v(x)=\begin{cases}\overline{v}(x) & \text{при}\quad 0<x<x_0,\\ \overline{\overline{v}}(x) & \text{при}\quad x_0<x<l\end{cases}$$

однородных уравнений

$$\overline{v}''+\frac{\lambda}{a_1^2}\,\overline{v}=0,\quad \overline{\overline{v}}''+\frac{\lambda}{a_2^2}\,v=0,$$

удовлетворяющие граничным условиям а) или б), или в) и условиям сопряжения в месте разрыва коэффициентов уравнения

$$\overline{v}=\overline{\overline{v}},\quad E_1\overline{v}'=E_2\overline{\overline{v}}'\quad\text{при}\quad x=x_0.$$

Решение удобно искать в виде

$$v(x)=\begin{cases}\dfrac{X(x)}{X(x_0)} & \text{при}\quad 0<x<x_0,\\[2ex] \dfrac{Y(x)}{Y(x_0)} & \text{при}\quad x_0<x<l,\end{cases}$$

где $X(x)$ удовлетворяет уравнению $X''+\dfrac{\lambda}{a_1^2}X=0$ и граничному условию при $x=0$, а $Y(x)$ удовлетворяет уравнению $Y''+\dfrac{\lambda}{a_2^2}Y=0$ и граничному условию при $x=l$.

Собственные функции ортогональны с весом $\rho(x)$:

$$\int_0^l v_n(x)v_m(x)\rho(x)\,dx = \rho_1\int_0^{x_0} X_n(x)X_m(x)\,dx + \rho_2\int_{x_0}^l Y_n(x)Y_m(x)\,dx = 0, \quad m \neq n,$$

$$\|v_n\|^2 = \int_0^l v_n^2(x)\rho(x)\,dx = \frac{\rho_1}{X_n^2(x_0)}\int_0^{x_0} X_n^2(x)\,dx + \frac{\rho_2}{Y_n^2(x_0)}\int_{x_0}^l Y_n^2\,dx.$$

19. Груз помещен на конце $x = l$. Граничное условие на этом конце имеет вид

$$v'(l) = \frac{M}{\rho}\,\lambda v(l).$$

Собственные функции $\{v_n(x)\}$ удовлетворяют условию ортогональности с нагрузкой

$$\int_0^l v_m(x)v_n(x)\rho(x)dx + Mv_m(l)v_n(l) = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n.$$

Квадрат нормы собственной функции $v_n(x)$ определяется по формуле

$$\|v_n\|^2 = \int_0^l v_n^2(x)\rho(x)\,dx + Mv_n^2(l) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

а) Конец $x = 0$ жестко закреплен, $v(0) = 0$.

Собственные значения определяются из уравнения $\operatorname{ctg}\sqrt{\lambda_n}\,l = \frac{M}{\rho}\sqrt{\lambda_n}$, собственные функции

$$v_n(x) = \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}\,x}{\sin\sqrt{\lambda_n}l} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

квадрат нормы

$$\|v_n\|^2 = \frac{l\rho}{2} + \frac{M^2}{2\rho}\,\lambda_n\,l + \frac{M}{2}.$$

Формулы для поправок к собственным значениям:

1) если нагрузка M мала, то

$$\lambda_n = \lambda_n^{(1)}\left(1 - \frac{2M}{\rho l} + \ldots\right),$$

где $\lambda_n^{(1)} = \left[\frac{\pi(2n+1)}{2l}\right]^2$ — собственные значения ненагруженного стержня со свободным концом;

2) если нагрузка M велика, то

$$\lambda_n = \lambda_n^{(2)} + \frac{2\rho}{Ml} + \ldots,$$

где $\lambda_n^2 = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$ — собственные значения стержня с жестко закрепленным концом $x = l$.

б) Конец $x = 0$ свободен, $v'(0) = 0$.

Собственные значения определяются из уравнения $\operatorname{tg}\sqrt{\lambda_n}\,l = -\dfrac{M}{\rho}\sqrt{\lambda_n}$. Собственные функции

$$v_n(x) = \frac{\cos\sqrt{\lambda_n}\,x}{\cos\sqrt{\lambda_n}\,l} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

квадрат нормы

$$\|v_n\|^2 = \frac{\rho l}{2}\left(1 + \frac{M^2}{\rho^2}\,\lambda_n\right) + \frac{M}{2}.$$

в) Конец $x = 0$ упруго закреплен, $v'(0) - hv(0) = 0$.

Собственные значения λ_n определяются из уравнения

$$\operatorname{tg}\sqrt{\lambda_n}\,l = \frac{h - \dfrac{M}{\rho}\,\lambda_n}{\left(1 + \dfrac{M}{\rho}\,h\right)\sqrt{\lambda_n}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Собственные функции

$$v_n(x) = \frac{X_n(x)}{X_n(l)},$$

$$X_n(x) = \sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}\,x + h\sin\sqrt{\lambda_n}\,x.$$

Квадрат нормы

$$\|v_n\|^2 = \frac{1}{X_n^2(l)}\,\|X_n\|^2.$$

Указание. Динамическое условие нагрузки конца $x = l$ имеет вид $Mu_{tt} = -Eu_x(l, t)$. Полагая $u(x, t) = v(x)T(t)$, получим после разделения переменных для $v(x)$ уравнение

$$v'' + \lambda v = 0, \quad v'(l) = \frac{M}{\rho}\,\lambda v(l).$$

Условие ортогональности следует из формулы Грина

$$\int_0^l \left[v_n L(v_m) - v_m L(v_n)\right] dx = \left[v_n v_m' - v_m v_n'\right]_0^l,$$

где

$$L(v) = (Ev')'.$$

При вычислении нормы следует пользоваться характеристическим уравнением.

20. Сосредоточенная масса M находится в точке $x = x_0$.

а) Оба конца струны жестко закреплены,

$$v(0) = 0, \quad v(l) = 0.$$

Собственные значения λ_n определяются из уравнения

$$\operatorname{ctg}\frac{\sqrt{\lambda_n}}{a}\,x_0 + \operatorname{ctg}\frac{\sqrt{\lambda_n}}{a}(l - x_0) = \frac{M}{a\rho}\sqrt{\lambda_n}.$$

Собственные функции

$$v_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\dfrac{\sqrt{\lambda_n}}{a}x}{\sin\dfrac{\sqrt{\lambda_n}}{a}x_0} & \text{при} \quad 0 < x < x_0, \\ \dfrac{\sin\dfrac{\sqrt{\lambda_n}}{a}(l-x)}{\sin\dfrac{\sqrt{\lambda_n}}{a}(l-x_0)} & \text{при} \quad x_0 < x < l. \end{cases}$$

Квадрат нормы

$$\|v_n\|^2 = \frac{\rho x_0}{2\sin^2\dfrac{\sqrt{\lambda_n}}{a}x_0} + \frac{\rho(l-x_0)}{2\sin^2\dfrac{\sqrt{\lambda_n}}{a}(l-x_0)} + \frac{M}{2} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

б) Оба конца струны свободны, $v'(0) = 0$, $v'(l) = 0$.

Собственные значения λ_n определяются из уравнения

$$\operatorname{tg}\frac{\sqrt{\lambda_n}}{a}x_0 + \operatorname{tg}\frac{\sqrt{\lambda_n}}{a}(l-x_0) = -\frac{M}{a\rho}\sqrt{\lambda_n}.$$

Собственные функции

$$v_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos\dfrac{\sqrt{\lambda_n}}{a}x}{\cos\dfrac{\sqrt{\lambda_n}}{a}x_0} & \text{при} \quad 0 < x < x_0, \\ \dfrac{\cos\dfrac{\sqrt{\lambda_n}}{a}(l-x)}{\cos\dfrac{\sqrt{\lambda_n}}{a}(l-x_0)} & \text{при} \quad x_0 < x < l. \end{cases}$$

Квадрат нормы

$$\|v_n\|^2 = \frac{\rho x_0}{2\cos^2\dfrac{\sqrt{\lambda_n}}{a}x_0} + \frac{\rho(l-x_0)}{2\cos^2\dfrac{\sqrt{\lambda_n}}{a}(l-x_0)} + \frac{M}{2} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

в) Концы струны упруго закреплены,

$$v'(0) - h_1 v(0) = 0, \quad v'(l) + h_2 v(l) = 0.$$

Собственные значения определяются из уравнения

$$\frac{ah_2 - \sqrt{\lambda}\operatorname{tg}\dfrac{\sqrt{\lambda}}{a}(l-x_0)}{ah_2\operatorname{tg}\dfrac{\sqrt{\lambda}}{a}(l-x_0) + \sqrt{\lambda}} + \frac{ah_1 - \sqrt{\lambda}\operatorname{tg}\dfrac{\sqrt{\lambda}}{a}x_0}{ah_1\operatorname{tg}\dfrac{\sqrt{\lambda}}{a}x_0 + \sqrt{\lambda}} = \sqrt{\lambda}\,\frac{aM}{k}.$$

Собственные функции

$$v_n(x) = \begin{cases} \dfrac{X_n(x)}{X_n(x_0)} & \text{при} \quad 0 < x < x_0, \\ \dfrac{Y_n(x)}{Y_n(x_0)} & \text{при} \quad x_0 < x < l, \end{cases}$$

$$X_n(x) = \sqrt{\lambda_n}\cos\frac{\sqrt{\lambda_n}}{a}\,x + ah_1\sin\frac{\sqrt{\lambda_n}}{a}\,x,$$

$$Y_n(x) = \sqrt{\lambda_n}\cos\frac{\sqrt{\lambda_n}}{a}\,(l-x) + ah_2\sin\frac{\sqrt{\lambda_n}}{a}\,(l-x).$$

Квадрат нормы

$$\|v_n\|^2 = \int_0^l v_n^2(x)\rho\,dx + Mv_n^2(x_0) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

21. Уравнение собственных поперечных колебаний однородного стержня имеет вид

$$v^{(\mathrm{IV})} - \frac{\lambda}{a^2}\,v = 0,$$

где $a^2 = \dfrac{EJ}{\rho S}$, E — модуль упругости, J — момент инерции поперечного сечения относительно своей горизонтальной оси, ρ — плотность стержня, S — площадь его поперечного сечения.

а) Оба конца жестко заделаны,

$$v = 0, \quad v' = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,\ l,$$

$$\lambda_n = a^2\,\frac{\mu_n^4}{l^4} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где μ_n — корень уравнения

$$\operatorname{ch}\mu\cos\mu = 1.$$

Собственная функция

$$v_n(x) = A_n\Big\{\Big(\operatorname{ch}\mu_n\frac{x}{l} - \cos\mu_n\frac{x}{l}\Big)(\operatorname{sh}\mu_n - \sin\mu_n) - (\operatorname{ch}\mu_n - \cos\mu_n)\Big(\operatorname{sh}\mu_n\frac{x}{l} - \sin\mu_n\frac{x}{l}\Big)\Big\},$$

где A_n — произвольный множитель.

б) Оба конца свободны,

$$v'' = 0, \quad v''' = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = l,$$

$$\lambda_n = a^2\,\frac{\mu_n^4}{l^4} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где μ_n — корень уравнения

$$\operatorname{ch}\mu\cos\mu = 1,$$

$$v_n(x) = A_n\Big\{\Big(\operatorname{ch}\frac{\mu_n}{l}\,x + \cos\frac{\mu_n}{l}\,x\Big)(\operatorname{sh}\mu_n - \sin\mu_n) - (\operatorname{ch}\mu_n + \cos\mu_n)\Big(\operatorname{sh}\frac{\mu_n}{l}\,x - \sin\frac{\mu_n}{l}\,x\Big)\Big\}.$$

в) Один конец ($x = 0$) заделан, второй конец ($x = l$) свободен,

$$v = 0, \quad v' = 0 \quad \text{при} \quad x = 0; \quad v'' = 0, \quad v''' = 0 \quad \text{при} \quad x = l,$$

$$\lambda_n = a^2\,\frac{\mu_n^4}{l^4} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где μ_n — корень уравнения

$$\operatorname{ch}\mu\cos\mu = -1,$$

$$v_n(x) = A_n\Big\{\Big(\operatorname{ch}\frac{\mu_n}{l}\,x - \cos\frac{\mu_n}{l}\,x\Big)(\operatorname{sh}\mu_n - \sin\mu_n) - \\ - (\operatorname{ch}\mu_n - \cos\mu_n)\Big(\operatorname{sh}\frac{\mu_n}{l}\,x - \sin\frac{\mu_n}{l}\,x\Big)\Big\}.$$

2. Собственные колебания объемов.

22. Пусть $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$ — стороны прямоугольника.

а) Если граница мембраны жестко закреплена ($v = 0$ при $x = 0,\ a$; $y = 0,\ b$), то собственные значения

$$\lambda_{m,\,n} = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \quad (m,\ n = 1,\ 2,\ \dots),$$

собственные функции

$$v_{m,\,n}(x,\ y) = \sin\frac{\pi m}{a}\,x \sin\frac{\pi n}{b}\,y,$$

$$\|v_{m,\,n}\|^2 = \frac{ab}{4}.$$

б) Граница мембраны свободна ($v_x = 0$ при $x = 0,\ a$; $v_y = 0$ при $y = 0,\ b$),

$$\lambda_{m,\,n} = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \quad (m,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots),$$

$$v_{m,\,n}(x,\ y) = \cos\frac{\pi m}{a}\,x \cos\frac{\pi n}{b}\,y,$$

$$\|v_{m,\,n}\|^2 = \frac{ab}{4}\,\varepsilon_m\varepsilon_n, \quad \varepsilon_0 = 2, \quad \varepsilon_k = 1, \quad k \neq 0.$$

в) Две противоположные стороны $x = 0$, $x = a$ жестко закреплены ($v = 0$ при $x = 0,\ a$), а две другие — $y = 0$ и $y = b$ — свободны ($v_y = 0$ при $y = 0,\ b$),

$$\lambda_{m,\,n} = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \quad (m = 1,\ 2,\ \dots;\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots),$$

$$v_{m,\,n}(x,\ y) = \sin\frac{\pi m}{a}\,x \cos\frac{\pi n}{b}\,y,$$

$$\|v_{m,\,n}\|^2 = \frac{1}{4}\,ab\varepsilon_n.$$

г) Две соседние стороны $x = 0$ и $y = 0$ жестко закреплены, а две другие стороны свободны,

$$\lambda_{m,\,n} = \frac{\pi^2}{4}\left[\frac{(2m+1)^2}{a^2} + \frac{(2n+1)^2}{b^2}\right] \quad (m,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots),$$

$$v_{m,\,n}(x,\ y) = \sin\frac{\pi(2m+1)}{2a}\,x \sin\frac{\pi(2n+1)}{2b}\,y,$$

$$\|v_{m,\,n}\|^2 = \frac{ab}{4}.$$

д) Все ребра прямоугольной мембраны закреплены упруго,

$$v_x(0,\ y) - h_1 v(0,\ y) = 0, \quad v_x(a,\ y) + h_2 v(a,\ y) = 0,$$
$$v_y(x,\ 0) - h_3 v(x,\ 0) = 0, \quad v_y(x,\ b) + h_4 v(x,\ b) = 0.$$

Собственные значения $\lambda_{m,\,n}$ определяются из уравнения

$$\lambda_{m,\,n} = [\mu_m^{(1)}]^2 + [\mu_n^{(2)}]^2 \quad (m,\, n = 1,\, 2,\, \ldots),$$

где $\mu_m^{(1)}$ и $\mu_n^{(2)}$ — корни уравнений

$$\operatorname{tg}(\mu^{(1)}a) = \frac{(h_1+h_2)\mu^{(1)}}{(\mu^{(1)})^2 - h_1h_2}, \quad \operatorname{tg}(\mu^{(2)}b) = \frac{(h_3+h_4)\mu^{(2)}}{(\mu^{(2)})^2 - h_3h_4},$$

$$v_{m,\,n}(x,\,y) = \left[\mu_m^{(1)}\cos\mu_m^{(1)}x + h_1\sin\mu_m^{(1)}x\right]\left[\mu_n^{(2)}\cos\mu_n^{(2)}y + h_3\sin\mu_n^{(2)}y\right] \times$$
$$\times \frac{1}{\sqrt{\left(\mu_m^{(1)}\right)^2 + h_1^2}\,\sqrt{\left(\mu_n^{(2)}\right)^2 + h_3^2}},$$

$$\|v_{m,\,n}\|^2 = \left\{\frac{a}{2} + \frac{(h_1+h_2)\left[\left(\mu_m^{(1)}\right)^2 + h_1h_2\right]}{2\left[\left(\mu_m^{(1)}\right)^2 + h_1^2\right]\left[\left(\mu_m^{(1)}\right)^2 + h_2^2\right]}\right\} \times$$
$$\times \left\{\frac{b}{2} + \frac{(h_3+h_4)\left[\left(\mu_n^{(2)}\right)^2 + h_3h_4\right]}{2\left[\left(\mu_n^{(2)}\right)^2 + h_3^2\right]\left[\left(\mu_n^{(2)}\right)^2 + h_4^2\right]}\right\}.$$

23. Начало полярной системы координат $(\rho,\,\varphi)$ поместим в центр круга, радиус круга равен a.

а) Мембрана жестко закреплена, $v\big|_{\rho=a} = 0$.

Собственные значения $\lambda_{m,\,n} = \left(\dfrac{\mu_m^{(n)}}{a}\right)^2$, где $\mu_m^{(n)}$ — корни уравнения $J_n(\mu) = 0$,

$$v_{m,\,n} = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\,\rho\right)\begin{cases}\cos n\varphi\\ \sin n\varphi\end{cases} \quad (n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots;\ m = 1,\, 2,\, \ldots),$$

$$\|v_{m,\,n}\|^2 = \frac{a^2\pi\varepsilon_n}{2}\left[J_n'\left(\mu_m^{(n)}\right)\right]^2, \quad \varepsilon_n = \begin{cases}2, & n = 0,\\ 1, & n \neq 0.\end{cases}$$

В частности, при $n = 0$

$$v = v_m = J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{a}\,\rho\right), \quad \|v_m\|^2 = a^2\pi J_1^2(\mu_m^{(0)}).$$

б) Граница $\rho = a$ мембраны свободна $\left(\dfrac{\partial v}{\partial\rho} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = a\right)$,

$$\lambda_{m,\,n} = \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\right)^2,$$

где $\mu_m^{(n)}$ — корень уравнения $J_n'(\mu) = 0$,

$$v_{m,\,n}(\rho,\,\varphi) = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\,\rho\right)\begin{cases}\cos n\varphi,\\ \sin n\varphi,\end{cases}$$

$$\|v_{m,\,n}\|^2 = \frac{a^2\pi\varepsilon_n}{2\left[\mu_m^{(n)}\right]^2}\left[\left(\mu_m^{(n)}\right)^2 - n^2\right]J_n^2\left(\mu_m^{(n)}\right)$$
$$(m = 1,\, 2,\, \ldots;\ n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots).$$

в) Граница мембраны упруго закреплена, $\left(\dfrac{\partial v}{\partial \rho} + hv\right)_{\rho=a} = 0$,

$$\lambda_{m,\,n} = \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\right)^2,$$

где $\mu_m^{(n)}$ — корень номера m уравнения

$$\mu J_n'(\mu) + ahJ_n(\mu) = 0,$$

$$v_{m,\,n}(\rho,\,\varphi) = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\,\rho\right)\begin{cases}\cos n\varphi,\\ \sin n\varphi\end{cases} \quad (n = 0,\,1,\,2,\,\ldots;\ m = 1,\,2,\,\ldots),$$

$$\|v_{m,\,n}\|^2 = \frac{\pi a^2 \varepsilon_n}{2\left[\mu_m^{(n)}\right]^2}\left[a^2h^2 + \left[\mu_m^{(n)}\right]^2 - n^2\right] J_n^2(\mu_m^{(n)}), \tag{1}$$

или

$$\|v_{m,\,n}\|^2 = \frac{\pi a^2 \varepsilon_n}{2}\left[1 + \frac{\left(\mu_m^{(n)}\right)^2 - n^2}{a^2h^2}\right]\left[J_n'\left(\mu_m^{(n)}\right)\right]^2. \tag{2}$$

Формула (1) удобна при малых h, формула (2) — при больших h. Предельный переход в (1) при $h \to 0$ дает выражение для $\|v_{m,\,n}\|^2$ задачи б); предельный переход в формуле (2) при $h \to \infty$ дает $\|v_{m,\,n}\|^2$ для первой краевой задачи а).

Указание. Требуется решить краевую задачу на собственные значения

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\,\frac{\partial v}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \lambda v = 0 \quad (\rho < a),$$

$$|v(0,\,\varphi)| < \infty;$$

а) $v(a,\,\varphi) = 0$; б) $\dfrac{\partial v}{\partial \rho}(a,\,\varphi) = 0$; в) $\dfrac{\partial v}{\partial \rho}(a,\,\varphi) + hv(a,\,\varphi) = 0$.

Решение ищется в виде произведения $v(\dot\rho,\,\varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$.
Метод вычисления нормы указан в [7, с. 643].
Вывести общую формулу

$$\left\|J_n\left(\frac{\mu}{a}\,\rho\right)\right\|^2 = \frac{a^2}{2}\left[J_n'^2(\mu) + \left(1 - \frac{n^2}{\mu^2}\right)J_n^2(\mu)\right].$$

24. Обозначим a, b, c — ребра параллелепипеда.
а) Если $v = 0$ при $x = 0,\ a;\ \ y = 0,\ b;\ \ z = 0,\ c,$ то

$$\lambda_{m,\,n,\,k} = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{k^2}{c^2}\right) \quad (m,\,n,\,k = 1,\,2,\,3,\,\ldots),$$

$$v_{m,\,n,\,k} = \sin\frac{\pi m}{a}\,x \sin\frac{\pi n}{b}\,y \sin\frac{\pi k}{c}\,z, \quad \|v_{m,\,n,\,k}\|^2 = \frac{abc}{8}.$$

Нормированные собственные функции

$$\overline{v}_{m,\,n,\,k} = \sqrt{\frac{8}{abc}}\,v_{m,\,n,\,k}.$$

б) Если заданы граничные условия второго рода

$$v_x = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,\, a; \quad v_y = 0 \quad \text{при} \quad y = 0,\, b;$$
$$v_z = 0 \quad \text{при} \quad z = 0,\, c,$$

то

$$\lambda_{m,\,n,\,k} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{k^2}{c^2} \right) \quad (m,\, n,\, k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots),$$

$$v_{m,\,n,\,k} = \cos \frac{\pi m}{a}\, x \cos \frac{\pi n}{b}\, y \cos \frac{\pi k}{c}\, z,$$

$$\|v_{m,\,n,\,k}\|^2 = \frac{abc}{8}\, \varepsilon_m \varepsilon_n \varepsilon_k, \quad \varepsilon_j = \begin{cases} 2, & j = 0, \\ 1, & j \neq 0. \end{cases}$$

Нормированные собственные функции

$$\overline{v}_{m,\,n,\,k} = \frac{1}{\|v_{m,\,n,\,k}\|}\, v_{m,\,n,\,k}.$$

в) Для третьей краевой задачи

$$(v_x - h_1 v)_{x=0} = 0, \quad (v_x + h_2 v)_{x=a} = 0, \quad (v_y - h_3 v)_{y=0} = 0,$$
$$(v_y + h_4 v)_{y=b} = 0, \quad (v_z - h_5 v)_{z=0} = 0, \quad (v_z + h_6 v)_{z=c} = 0$$

имеем

$$\lambda_{m,\,n,\,k} = \left[\mu_m^{(1)}\right]^2 + \left[\mu_n^{(2)}\right]^2 + \left[\mu_k^{(3)}\right]^2,$$

где $\mu_m^{(1)}$, $\mu_m^{(2)}$, $\mu_k^{(3)}$ — корни следующих уравнений:

$$\operatorname{tg} \mu^{(1)} a = \frac{(h_1 + h_2)\mu^{(1)}}{\left[\mu^{(1)}\right]^2 - h_1 h_2}, \quad \operatorname{tg} \mu^{(2)} b = \frac{(h_3 + h_4)\mu^{(2)}}{\left[\mu^{(2)}\right]^2 - h_3 h_4},$$

$$\operatorname{tg} \mu^{(3)} c = \frac{(h_5 + h_6)\mu^{(3)}}{\left[\mu^{(3)}\right]^2 - h_5 h_6},$$

$$v_{m,\,n,\,k} = X_m(x)\, Y_n(y)\, Z_k(z),$$

$$X_m(x) = (\mu_m^{(1)} \cos \mu_m^{(1)} x + h_1 \sin \mu_m^{(1)} x)\, \frac{1}{\sqrt{\left(\mu_m^{(1)}\right)^2 + h_1^2}},$$

$$Y_n(y) = (\mu_n^{(2)} \cos \mu_2^{(2)} y + h_3 \sin \mu_n^{(2)} y)\, \frac{1}{\sqrt{\left(\mu_n^{(2)}\right)^2 + h_3^2}},$$

$$Z_k(z) = (\mu_k^{(3)} \cos \mu_k^{(3)} z + h_5 \sin \mu_k^{(3)} z)\, \frac{1}{\sqrt{\left(\mu_k^{(3)}\right)^2 + h_5^2}},$$

$$\|v_{m,\,n,\,k}\|^2 = \left\{ \frac{a}{2} + \frac{(h_1 + h_2)\left[\left(\mu_m^{(1)}\right)^2 + h_1 h_2\right]}{2\left[\left(\mu_m^{(1)}\right)^2 + h_1^2\right]\left[\left(\mu_m^{(1)}\right)^2 + h_2^2\right]} \right\} \times$$
$$\times \left\{ \frac{b}{2} + \frac{(h_3 + h_4)\left[\left(\mu_n^{(2)}\right)^2 + h_3 h_4\right]}{2\left[\left(\mu_n^{(2)}\right)^2 + h_3^2\right]\left[\left(\mu_n^{(2)}\right)^2 + h_4^2\right]} \right\} \times$$
$$\times \left\{ \frac{c}{2} + \frac{(h_5 + h_6)\left[\left(\mu_k^{(3)}\right)^2 + h_5 h_6\right]}{2\left[\left(\mu_k^{(3)}\right)^2 + h_5^2\right]\left[\left(\mu_k^{(3)}\right)^2 + h_6^2\right]} \right\} \quad (m,\, n,\, k = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots).$$

25. Выбираем сферическую систему координат $(r,\ \theta,\ \varphi)$ с началом в центре сферы радиуса a. Исходное уравнение

$$\Delta v + \lambda v = 0$$

или

$$\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial v}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} + \lambda v = 0.$$

а) Первая краевая задача: $v = 0$ при $r = a$,

$$\lambda_{n,\,m} = \left(\frac{\mu_m^{(n+1/2)}}{a}\right)^2 \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ ;\ m = 1,\ 2,\ \ldots), \tag{1}$$

где $\mu_m^{(n+1/2)}$ — корень номера m уравнения

$$J_{n+1/2}(\mu) = 0, \tag{2}$$

$$v_{n,\,m,\,l} = \psi_n\left(\frac{\mu_m^{(n+1/2)}}{a}\,r\right) Y_n^{(l)}(\theta,\ \varphi), \quad l = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots,\ \pm n, \tag{3}$$

где

$$Y_n^{(l)}(\theta,\ \varphi) = P_n^{(l)}(\cos\theta)\begin{cases}\cos l\varphi & \text{при} \quad l > 0,\\ \sin l\varphi & \text{при} \quad l < 0,\end{cases} \tag{4}$$

$P_n^{(l)}(x) = (1-x^2)^{\frac{l}{2}}\,\dfrac{d^l}{dx^l}\,P_n(x)$ — присоединенная функция,

$P_n^{(0)} = P_n(x)$ — полином Лежандра,

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,J_{n+1/2}(x), \tag{5}$$

$$\|v_{n,\,m,\,l}\|^2 = \left\|\psi_n\left(\frac{\mu_m^{(n+1/2)}}{a}\,r\right)\right\|^2 \|Y_n^{(l)}(\theta,\ \varphi)\|^2, \tag{6}$$

$$\|Y_n^{(l)}(\theta,\ \varphi\|^2 = \frac{2\pi\varepsilon_l(n+l)!}{(2n+1)(n-l)!}, \quad \varepsilon_l = \begin{cases}2, & l = 0,\\ 1, & l \neq 0,\end{cases} \tag{7}$$

$$\left\|\psi_n\left(\frac{\mu_m^{(n+1/2)}}{a}\,r\right)\right\|^2 = \frac{\pi a}{2\mu_m^{(n+1/2)}}\,\frac{a^2}{2}\left[J_{n+1/2}\left(\mu_m^{(n+1/2)}\right)\right]^2. \tag{8}$$

б) Вторая краевая задача: $\dfrac{\partial v}{\partial r} = 0$ при $r = a$. Формулы (1), (3)–(7) сохраняют силу; только в этом случае под $\mu_m^{(n+1/2)}$ следует понимать корень уравнения

$$\psi_n'(\mu) = 0,$$

или

$$J_{n+1/2}'(\mu) - \frac{1}{2\mu}\,J_{n+1/2}(\mu) = 0,$$

$$\left\|\psi_n\left(\frac{\mu_m^{(n+1/2)}}{a}\,r\right)\right\| = \frac{\pi a^3}{4\left[\mu_m^{(n+1/2)}\right]}\left(1 - \frac{n(n+1)}{\left[\mu_m^{(n+1/2)}\right]^2}\right) J_{n+1/2}^2\left(\mu_m^{(n+1/2)}\right), \tag{9}$$

в) Третья краевая задача:

$$\frac{\partial v}{\partial r} + hv = 0 \quad \text{при} \quad r = a.$$

Все формулы задачи 25 а), кроме формул (2) и (8), остаются в силе; $\mu_m^{(n+1/2)}$ теперь означает корень уравнения

$$\mu\psi_n'(\mu) + ah\psi_n(\mu) = 0,$$

или

$$J'_{n+1/2}(\mu) - \frac{1-2ah}{2\mu}\, J_{n+1/2}(\mu) = 0, \tag{10}$$

$$\left\| \psi_n\left(\frac{\mu_m^{(n+1/2)}}{a}\, r\right)\right\|^2 =$$

$$= \frac{\pi a^3}{4\mu_m^{(n+1/2)}}\left[1 - \frac{n(n+1)+ah(2-ah)}{\left(\mu_m^{(n+1/2)}\right)^2}\right] J^2_{n+1/2}\left(\mu_m^{(n+1/2)}\right). \tag{11}$$

26. Выбираем цилиндрическую систему координат (ρ, φ, z), направив ось z вдоль оси цилиндра и поместив начало координат на нижнем основании цилиндра, a — радиус цилиндра, l — высота цилиндра. Исходное уравнение краевой задачи на собственные значения имеет вид

$$\Delta v + \lambda v = 0$$

или

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial v}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \lambda v = 0.$$

а) Первая краевая задача: $v = 0$ при $\rho = a$, $z = 0, l$,

$$\lambda_{m,n,k} = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 + \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\right)^2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots;\ m, k = 1, 2, \dots),$$

где $\mu_m^{(n)}$ — корень номера m уравнения $J_n(\mu) = 0$,

$$v_{n,m,k} = \sin\frac{\pi k}{l}\, z J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\,\rho\right)\begin{cases}\cos n\varphi,\\ \sin n\varphi,\end{cases}$$

$$\|v_{n,m,k}\|^2 = \frac{l\pi a^2}{4}\,\varepsilon_n\left[J_n'(\mu_m^{(n)})\right]^2, \quad \varepsilon_n = \begin{cases}2, & n = 0,\\ 1, & n \neq 0.\end{cases}$$

б) Вторая краевая задача: $\dfrac{\partial v}{\partial\rho} = 0$ при $\rho = a$, $\dfrac{\partial v}{\partial z} = 0$ при $z = 0, l$,

$$\lambda_{n,m,k} = \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\right) + \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots;\ m = 1, 2, \dots),$$

$$v_{n,m,k} = \cos\frac{\pi k}{l}\, z J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\,\rho\right)\begin{cases}\cos n\varphi,\\ \sin n\varphi,\end{cases}$$

где $\mu_m^{(n)}$ — корень номера m уравнения $J_n'(\mu) = 0$,

$$\|v_{n,m,k}\|^2 = \frac{l\pi a^2\varepsilon_n}{4\left[\mu_m^{(n)}\right]^2}\left[(\mu_m^{(n)})^2 - n^2\right] J_n^2(\mu_m^{(n)}).$$

в) Третья краевая задача: $\dfrac{\partial v}{\partial \rho} + h_0 v = 0$ при $\rho = a$, $\dfrac{\partial v}{\partial z} - h_1 v = 0$ при $z = 0$, $\dfrac{\partial v}{\partial z} + h_2 v = 0$ при $z = l$,

$$v_{n,\,m,\,k}(\rho,\,\varphi,\,z) = Z_k(z) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\,\rho\right) \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi, \end{cases}$$

$$Z_k(z) = \frac{\nu_k \cos \nu_k z + h_1 \sin \nu_k z}{\sqrt{\nu_k^2 + h_1^2}}, \quad \nu_k \text{ — корень уравнения}$$

$$\operatorname{tg} \nu l = \frac{(h_1 + h_2)\nu}{\nu^2 - h_1 h_2},$$

$\mu_m^{(n)}$ — корень уравнения $\mu J_n'(\mu) + a h_0 J_n(\mu) = 0$,

$$\lambda_{n,\,m,\,k} = \nu_k^2 + \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\right)^2 \quad (m,\,k = 1,\,2,\,\ldots;\ n = 0,\,1,\,2,\,\ldots),$$

$$\|v_{n,\,m,\,k}\|^2 = \pi \varepsilon_n \left\| J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\,\rho\right)\right\|^2 \|Z_k(z)\|^2,$$

где

$$\left\| J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\right)\right\|^2 = \frac{a^2}{2\left(\mu_m^{(n)}\right)^2}\left[a^2 h_0^2 + (\mu_m^{(n)})^2 - n^2\right] J_n^2(\mu_m^{(n)}),$$

$$\|Z_k\|^2 = \frac{l}{2} + \frac{(h_1 + h_2)(\nu_k^2 + h_1 h_2)}{2(\nu_k^2 + h_1^2)(\nu_k^2 + h_2^2)}.$$

Указание. Решение ищется в виде произведения

$$v(\rho,\,\varphi,\,z) = V(\rho,\,\varphi)\,Z(z).$$

После разделения переменных для $V(\rho,\,\varphi)$ получаем задачу 23, а для $Z(z)$ — задачу 17.

27. Выбирается полярная система координат $(\rho,\,\varphi)$.

а) Первая краевая задача: $v = 0$ при $\rho = a$ и $\rho = b$,

$$v_{m,\,n}(\rho,\,\varphi) = R_{m,\,n}(\rho) \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi \end{cases} \quad (m = 1,\,2,\,\ldots;\ n = 0,\,1,\,2,\,\ldots),$$

$$R_{m,\,n}(\rho) = J_n(\mu_m^{(n)}\rho) N_n(\mu_m^{(n)} a) - J_n(\mu_m^{(n)} a) N_n(\mu_m^{(n)}\rho), \tag{1}$$

или

$$R_{m,\,n}(\rho) = \frac{J_n(\mu_m^{(n)} a)}{J_n(\mu_m^{(n)} b)}\left[J_n(\mu_m^{(n)}) N_n(\mu_m^{(n)} b) - J_n(\mu_m^{(n)} b) N_n(\mu_m^{(n)}\rho)\right], \tag{2}$$

где $\mu_m^{(n)}$ — корень номера m трансцендентного уравнения

$$J_n(a\mu) N_n(b\mu) - J_n(b\mu) N_n(a\mu) = 0, \tag{3}$$

которое можно записать также в следующем виде:

$$\frac{J_n(a\mu)}{J_n(b\mu)} = \frac{N_n(a\mu)}{N_n(b\mu)}.$$

Здесь $N_n(x)$ — функция Неймана n-го порядка,

$$\lambda_{m,\,n} = (\mu_m^{(n)})^2,$$

$$\|v_{m,\,n}\|^2 = \pi\varepsilon_n\|R_{m,\,n}\|^2 = \frac{2\varepsilon_n}{\pi[\mu_m^{(n)}]^2}\,\frac{J_n^2(\mu_m^{(n)}a) - J_n^2(\mu_m^{(n)}b)}{J_n^2(\mu_m^{(n)}b)}, \tag{4}$$

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 2, & n = 0, \\ 1, & n \neq 0. \end{cases}$$

б) Вторая краевая задача: $\dfrac{\partial v}{\partial\rho} = 0$ при $\rho = a$, $\rho = b$,

$$v_{m,\,n}(\rho,\,\varphi) = R_{m,\,n}(\rho)\Phi_n(\varphi),$$

$$\Phi_n(\varphi) = \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi \end{cases} \qquad (n = 0,\,1,\,2,\,\ldots),$$

$$R_{m,\,n}(\rho) = J_n(\mu_m^{(n)}\rho)N_n'(\mu_m^{(n)}a) - J_n'(\mu_m^{(n)}a)N_n(\mu_m^{(n)}\rho), \tag{5}$$

или

$$R_{m,\,n}(\rho) = \frac{J_n'(a\mu_m^{(n)})}{J_n'(b\mu_m^{(n)})}\left[J_n(\mu_m^{(n)}\rho)N_n'(\mu_m^{(n)}b) - J_n'(\mu_m^{(n)}b)N_n(\mu_m^{(n)}\rho)\right], \tag{5'}$$

где $\mu_m^{(n)}$ — корень номера m уравнения

$$\frac{J_n'(a\mu)}{J_n'(b\mu)} = \frac{N_n'(a\mu)}{N_n'(b\mu)}. \tag{6}$$

Собственное значение

$$\lambda_{m,n} = (\mu_m^{(n)})^2,$$

$$\|v_{m,n}\|^2 = \pi\varepsilon_n\|R_{m,\,n}\|^2 =$$

$$= \frac{2\varepsilon_n}{\pi\left[\mu_m^{(n)}\right]^2}\left\{\left(1 - \frac{n^2}{b^2\left[\mu_m^{(n)}\right]^2}\right)\frac{J_n'^2(\mu_m^{(n)}a)}{J_n'^2(\mu_m^{(n)}b)} - \left(1 - \frac{n^2}{a^2\left[\mu_m^{(n)}\right]^2}\right)\right\}. \tag{7}$$

В частности, при $n = 0$ имеем

$$\|v_{m,\,0}\|^2 = 2\pi\|R_{m,\,0}\|^2 = \frac{4}{\pi\left[\mu_m^{(0)}\right]^2}\,\frac{J_1^2(a\mu_m^{(0)}) - J_1^2(b\mu_m^{(0)})}{J_1^2(b\mu_m^{(0)})}.$$

в) Третья краевая задача: $\dfrac{\partial v}{\partial\rho} - hv = 0$ при $\rho = a$, $\dfrac{\partial v}{\partial\rho} + hv = 0$ при $\rho = b$,

$$v_{m,\,n}(\rho,\,\varphi) = R_{m,\,n}(\rho)\Phi_n(\varphi),$$

$$\Phi_n(\varphi) = \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi, \end{cases}$$

$$R_{m,\,n}(\rho) = J_n(\mu_m^{(n)}\rho)\delta(a) - \Delta(a)N_n(\mu_m^{(n)}\rho), \tag{8}$$

или

$$R_{m,\,n}(\rho) = \frac{\Delta(a)}{\Delta(b)}\left[J_n(\mu_m^{(n)}\rho)\delta(b) - \Delta(b)N_n(\mu_m^{(n)}\rho)\right], \tag{9}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
\Delta(a) &= J_n'(\mu_m^{(n)}a) - \frac{h}{\mu_m^{(n)}}J_n(\mu_m^{(n)}a),\\
\Delta(b) &= J_n'(\mu_m^{(n)}b) + \frac{h}{\mu_m^{(n)}}J_n(\mu_m^{(n)}b),\\
\delta(a) &= N_n'(\mu_m^{(n)}a) - \frac{h}{\mu_m^{(n)}}N_n(\mu_m^{(n)}a),\\
\delta(b) &= N_n'(\mu_m^{(n)}b) + \frac{h}{\mu_m^{(n)}}N_n(\mu_m^{(n)}b).
\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Собственные значения определяются по формуле

$$\lambda_{m,n} = \left[\mu_m^{(n)}\right]^2 \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ m = 1,\ 2,\ \ldots),$$

где $\mu_m^{(n)}$ — корень номера m следующего уравнения:

$$\delta(a)\Delta(b) - \delta(b)\Delta(a) = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\delta(a)}{\delta(b)} = \frac{\Delta(a)}{\Delta(b)},$$

$$\|v_{m,n}\|^2 = \|\Phi_n\|^2\,\|R_{m,n}\|^2 = \pi\varepsilon_n\|R_{m,n}\|^2,$$

$$\|R_{m,n}\|^2 = \frac{b^2}{2}\left[R_{m,n}'^2(b) + \left(1 - \frac{n^2}{b^2\left[\mu_m^{(n)}\right]^2}\right)R_{m,n}^2(b)\right] -$$

$$- \frac{a^2}{2}\left[R_{m,n}'^2(a) + \left(1 - \frac{n^2}{a^2\left[\mu_m^{(n)}\right]^2}\right)R_{m,n}^2(a)\right]. \qquad (11)$$

При $h = 0$ имеем

$$\frac{\Delta(a)}{\Delta(b)} = \frac{J_n'\left(a\mu_m^{(n)}\right)}{J_n'\left(b\mu_m^{(n)}\right)},$$

и формулы (8) и (11) переходят в формулы (5) и (7).

Указание. Полагая $v(\rho,\,\varphi) = R(\rho)\,\Phi(\varphi)$, получим для радиальной функции $R(\rho)$ задачу

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + \left(\lambda - \frac{n^2}{\rho^2}\right)R = 0,$$

$$R(a) = R(b) = 0 \quad \text{в случае а),}$$

$$R'(a) = R'(b) = 0 \quad \text{в случае б).}$$

Общее решение уравнения имеет вид $R_n(\rho) = AJ_n(\mu\rho) + BN_n(\mu\rho)$, $\mu = \sqrt{\lambda}$. Используя граничные условия при $\rho = a$ и $\rho = b$, получим для $R_n(\rho)$ выражения, приводимые в ответе.

Вычисление нормы проводится обычным методом.

Для $\|R_{m,n}\|^2$ получается общая формула

$$\|R_{m,n}\|^2 = \frac{b^2}{2}\left[R_{m,n}'^2(\mu_m^{(n)}b) + \left(1 - \frac{n^2}{b^2\left[\mu_m^{(n)}\right]^2}\right)R_{m,n}^2(\mu_m^{(n)}b)\right] -$$

$$- \frac{a^2}{2}\left[R_{m,n}'^2\left(\mu_m^{(n)}a\right) + \left(1 - \frac{n^2}{a^2\left[\mu_m^{(n)}\right]^2}\right)R_{m,n}^2\left(\mu_m^{(n)}a\right)\right].$$

При вычислении $R_{m,\,n}\bigl(\mu_m^{(n)}\rho\bigr)$ и $R'_{m,\,n}\bigl(\mu_m^{(n)}\rho\bigr)$ при $\rho = a$ и $\rho = b$ следует воспользоваться выражением для определителя Вронского

$$J_n(x)N'_n(x) - N_n(x)J'_n(x) = \frac{2}{\pi x}.$$

28. Требуется решить краевую задачу

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\,\frac{\partial v}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} + \lambda v = 0 \quad \text{при} \quad \rho < a, \quad 0 < \varphi < \varphi_0$$

при граничных условиях:

а) $v = 0$ при $\rho = a$, $\varphi = 0$, $\varphi = \varphi_0$;

б) $\dfrac{\partial v}{\partial\rho} = 0$ при $\rho = a$, $\dfrac{\partial v}{\partial\varphi} = 0$ при $\varphi = 0$, $\varphi = \varphi_0$;

в) $\dfrac{\partial v}{\partial\rho} + h_0 v = 0$ при $\rho = a$, $\dfrac{\partial v}{\partial\varphi} - h_1 v = 0$ при $\varphi = 0$,

$$\frac{\partial v}{\partial\varphi} + h_2 v = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = \varphi_0.$$

Ответы:

а) первая краевая задача для сектора

$$v_{m,\,n}(\rho,\,\varphi) = J_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\,\rho\right)\sin\frac{\pi n}{\varphi_0}\,\varphi \quad (m,\,n = 1,\,2,\,\dots),$$

$$\lambda_{m,\,n} = \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\right)^2,$$

где $\mu_m^{(n)}$ — корень номера m уравнения

$$J_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu) = 0,$$

$$\|v_{m,\,n}\|^2 = \frac{a^2\varphi_0}{4}\left[J'_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}\bigl(\mu_m^{(n)}\bigr)\right]^2;$$

б) вторая краевая задача для сектора

$$v_{m,\,n}(\rho,\,\varphi) = J_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\,\rho\right)\cos\frac{\pi n}{\varphi_0}\,\varphi \quad (n = 0,\,1,\,2,\,\dots;\ m = 1,\,2,\,\dots),$$

$\lambda_{m,\,n} = \left(\dfrac{\mu_m^{(n)}}{a}\right)^2$, $\mu_m^{(n)}$ — корень номера m уравнения $J'_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu) = 0$,

$$\|v_{m,\,n}\|^2 = \frac{\varphi_0\varepsilon_n}{2}\left\|J_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\,\rho\right)\right\|^2 = \frac{\varphi_0\varepsilon_n a^2}{4}\left(1 - \frac{n^2}{\bigl(\mu_m^{(n)}\bigr)^2}\right)J^2_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}\bigl(\mu_m^{(n)}\bigr);$$

выражение для $\left\|J_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}\left(\dfrac{\mu_m^{(n)}}{a}\,\rho\right)\right\|^2$ см. в ответе к задаче 23;

в) третья краевая задача для сектора

$$v_{m,\,n}(\rho,\,\varphi) = J_{\nu_n}\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\,\rho\right)\Phi_n(\varphi),$$

$$\Phi_n(\varphi) = \frac{\nu_n\cos\nu_n\varphi + h_1\sin\nu_n\varphi}{\sqrt{\nu_n^2 + h_1^2}}, \quad \lambda_m^n = \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\right)^2 \quad (m,\,n = 1,\,2,\,\dots),$$

где ν_n — положительный корень уравнения $\operatorname{tg}\nu\varphi_0 = \dfrac{(h_1+h_2)\nu}{\nu^2 - h_1h_2}$, $\mu_m^{(n)}$ — корень уравнения $\mu J'_{\nu_n}(\mu) + ah_0 J_{\nu_n}(\mu) = 0$,

$$\|v_{m,\,n}\|^2 = \|\Phi_n\|^2 \left\| J_{\nu_n}\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\,\rho\right)\right\|^2,$$

$$\|\Phi_n\|^2 = \frac{\varphi_0}{2} + \frac{(h_1+h_2)(\nu_n^2+h_1h_2)}{2(\nu_n^2+h_1^2)(\nu_n^2+h_2^2)},$$

$$\left\| J_{\nu_n}\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\,\rho\right)\right\|^2 = \frac{a^2}{2}\left[1 + \frac{\left(\mu_m^{(n)}\right)^2 - \nu_n^2}{a^2h_0^2}\right]\left[J'_{\nu_n}\left(\mu_m^{(n)}\right)\right]^2 =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[1 + \frac{a^2h_0^2 - \nu_n^2}{\left[\mu_m^{(n)}\right]^2}\right] J^2_{\nu_n}\left(\mu_m^{(n)}\right).$$

29. Ищется решение уравнения

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial v}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} + \lambda v = 0 \quad (a < \rho < b, \quad 0 < \varphi < \varphi_0),$$

удовлетворяющее однородным граничным условиям: а) первого рода; б) второго рода; в) третьего рода.

а) Первая краевая задача: $v = 0$ при $\rho = a,\ b;\ \varphi = 0,\ \varphi_0$,

$$v_{m,\,n}(\rho,\,\varphi) = R_{m,\,n}(\rho)\,\Phi_n(\varphi),$$

$$\Phi_n(\varphi) = \sin\frac{\pi n}{\varphi_0}\,\varphi \quad (n = 1,\,2,\,\ldots),$$

$$R_{m,\,n}(\rho) = J_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}\left(\mu_m^{(n)}\rho\right) N_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}\left(\mu_m^{(n)}a\right) - J_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}\left(\mu_m^{(n)}a\right) N_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}\left(\mu_m^{(n)}\rho\right),$$

или

$$R_{m,\,n}(\rho) = \frac{J_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}\left(\mu_m^{(n)}a\right)}{J_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}\left(\mu_m^{(n)}b\right)}\left[J_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}\left(\mu_m^{(n)}\rho\right) N_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}\left(\mu_m^{(n)}b\right) - \right.$$

$$\left. - J_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}\left(\mu_m^{(n)}b\right) N_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}\left(\mu_m^{(n)}\rho\right)\right],$$

$\lambda_{m,\,n} = \left[\mu_m^{(n)}\right]^2$ — корень номера m уравнения

$$\frac{J_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu a)}{J_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu b)} = \frac{N_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu a)}{N_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu b)},$$

$$\|v_{m,\,n}\|^2 = \|\Phi_n\|^2\,\|R_{m,\,n}\|^2 = \frac{\varphi_0}{2}\,\|R_{m,\,n}\|^2.$$

Выражение для $\|R_{m,\,n}\|^2$ см. в задаче 27 $\left(\text{формула (4) с заменой } J_n \text{ на } J_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}\right)$.

Подобным же образом получаются выражения для случаев б) и в).

30. а) Требуется найти собственные колебания для области $a \leqslant \rho \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant l$, если $v = 0$ при $\rho = 0$, $\rho = a$ и $z = 0$, $z = l$. Собственные функции

$$v_{m,\,n,\,k}(\rho,\,\varphi,\,z) = R_{m,\,n}(\rho)\,\Phi_n(\varphi)\,Z_k(z),$$

где

$$\Phi_n(\varphi) = \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi \end{cases} \quad (n = 0,\,1,\,2,\,\ldots),$$

$$Z_k(z) = \sin\frac{\pi k}{l}\,z \quad (k = 1,\,2,\,\ldots),$$

$$R_{m,\,n}(\rho) = J_n\bigl(\mu_m^{(n)}\rho\bigr)N_n\bigl(\mu_m^{(n)}a\bigr) - J_n\bigl(\mu_m^{(n)}a\bigr)N_n\bigl(\mu_m^{(n)}\rho\bigr)$$

(см. ответ к задаче 27), $\mu_m^{(n)}$ — корень уравнения

$$\frac{J_n(\mu a)}{J_n(\mu b)} = \frac{N_n(\mu a)}{N_n(\mu b)},$$

$$\lambda_{m,\,n} = \bigl(\mu_m^{(n)}\bigr)^2 + \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2, \quad \|v_{m,\,n,\,k}\|^2 = \frac{\pi l}{2}\,\varepsilon_n\|R_{m,\,n}\|^2.$$

Выражение для $\|R_{m,\,n}\|^2$ см. в ответе к задаче 27, а).

б) В этом случае $\dfrac{\partial v}{\partial\rho} = 0$ при $\rho = a,\ b$, $\dfrac{\partial v}{\partial z} = 0$ при $z = 0,\ z = l$, так что

$$\Phi_n(\varphi) = \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi \end{cases} \quad (n = 0,\,1,\,2,\,\ldots),$$

$$Z_k(z) = \cos\frac{\pi k}{l}\,z \quad (k = 0,\,1,\,2,\,\ldots).$$

$R_{m,\,n}(\rho)$ дано в ответе к задаче 28, б),

$$\lambda_{m,\,n} = \bigl(\mu_m^{(n)}\bigr)^2 + \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2, \quad \|v_{m,\,n,\,k}\|^2 = \frac{\pi l}{2}\,\varepsilon_k\varepsilon_n\|R_{m,\,n}\|^2.$$

31. Если λ_1 — первое собственное значение кольцевой мембраны ($\varepsilon \leqslant \rho \leqslant a$) с закрепленной границей, а λ_1^0 — первое собственное значение круглой мембраны $\rho \leqslant a$ с закрепленной границей, то поправка

$$\Delta\lambda_1 = \lambda_1 - \lambda_1^0$$

всегда положительна, а при малых ε равна

$$\Delta\lambda_1 = \frac{2}{a^2 J_1^2\left(\sqrt{\lambda_1^0}\,a\right)}\,\frac{1}{\ln\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1^0}\varepsilon}} + \ldots = 7{,}41\,\frac{1}{a^2\ln\dfrac{a}{2{,}4048\varepsilon}} + \ldots,$$

где члены более высокого порядка малости относительно ε отброшены.

Из этой формулы видно, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Delta\lambda_1 = 0.$$

Р е ш е н и е. Наименьшее собственное значение λ_1^0 жестко закрепленной по границе $\rho = a$ круглой мембраны определяется из уравнения

$$J_0\left(\sqrt{\lambda_1^0}\,a\right) = 0,$$

а первое собственное значение λ_1 кольцевой мембраны $\varepsilon < \rho < a$ с жестко закрепленной границей определяется из уравнения

$$J_0\left(\sqrt{\lambda_1}\,\varepsilon\right) N_0\left(\sqrt{\lambda_1}\,a\right) - J_0\left(\sqrt{\lambda_1}\,a\right) N_0\left(\sqrt{\lambda_1}\,\varepsilon\right) = 0. \qquad (1)$$

Полагая

$$\sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\lambda_1^0} + \alpha,$$

так что $\Delta\lambda_1 = 2\sqrt{\lambda_1^0}\,\alpha$, и учитывая, что

$$J_0\left(\sqrt{\lambda_1}\,\varepsilon\right) = 1 - \ldots, \quad N_0\left(\sqrt{\lambda_1}\,\varepsilon\right) = \frac{2}{\pi}\ln\sqrt{\lambda_1}\,\varepsilon + \ldots,$$

$$N_0\left(\sqrt{\lambda_1}\,a\right) = N_0\left(\sqrt{\lambda_1^0}\,a\right) - N_1\left(\sqrt{\lambda_1^0}\,a\right)\alpha a,$$

$$J_0\left(\sqrt{\lambda_1}\,a\right) = J_0\left(\sqrt{\lambda_1^0}\,a\right) - J_1\left(\sqrt{\lambda_1^0}\,a\right)\alpha a = -\alpha a J_1\left(\sqrt{\lambda_1^0}\,a\right).$$

Из уравнения (1) получаем

$$\alpha = \frac{\pi}{2a}\,\frac{N_0\left(\sqrt{\lambda_1^0}\,a\right)}{J_1\left(\sqrt{\lambda_1^0}\,a\right)}\,\frac{1}{\ln\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1^0}\,\varepsilon}}.$$

Воспользуемся теперь выражением для определителя Вронского

$$J_0(x)N_0'(x) - J_0'(x)N_0(x) = \frac{2}{\pi x};$$

так как $J_0(\sqrt{\lambda_1^0}\,a) = 0$, то отсюда находим

$$N_0\left(\sqrt{\lambda_1^0}\,a\right) = \frac{2}{\pi\sqrt{\lambda_1^0}\,aJ_1(\sqrt{\lambda_1^0}\,a)}$$

и

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^0}\,a^2 J_1^2(\sqrt{\lambda_1^0}\,a)}\,\frac{1}{\ln\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1^0}\,\varepsilon}}.$$

Так как первый корень уравнения $J_0(\mu) = 0$ равен $\mu_1^0 = 2{,}4048$ и $J_1(\mu_1^0) = 0{,}5191$, то

$$\Delta\lambda_1 \approx 7{,}41\,\frac{1}{a^2\ln\dfrac{a}{2{,}4048\varepsilon}}.$$

32. Если нагрузка M мала, то:

а) $$\lim_{M\to 0}\lambda_1 = \lambda_1^0;$$

б) $$\Delta\lambda_1 = \lambda_1 - \lambda_1^0 \sim \frac{1}{\ln\dfrac{1}{\varepsilon}}.$$

Если нагрузка M велика, то:

а) $$\lim_{M\to\infty}\lambda_1 = 0, \quad \lim_{M\to\infty}\lambda_2 = \lambda_1^0;$$

б) $$\lambda_1 = 2\pi C\,\frac{1}{M} + \ldots,$$

где C равно

$$C = -\frac{1}{\ln p} = \frac{1}{\ln\dfrac{1}{p}},$$

где

$$p = \frac{\varepsilon}{a},$$

так что

$$\lambda_1 = \frac{2\pi}{\ln\dfrac{1}{p}}\,\frac{1}{M} + \ldots$$

Р е ш е н и е. Уравнение колебаний мембраны имеет вид

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{d}{d\rho}\left(\rho\,\frac{du}{d\rho}\right) + \lambda\delta u = 0 \quad \text{для} \quad \varepsilon < \rho < a,$$

где δ — плотность массы.

Граница $\rho = a$ закреплена, так что

$$u\big|_{\rho=a} = 0.$$

Обозначим $\sqrt{\lambda\delta}\,a = x$, $\sqrt{\lambda\delta}\cdot\varepsilon = px$, $p = \dfrac{\varepsilon}{a}$.

Для получения второго граничного условия изменим задачу, заменив круг радиуса ε с центром в точке O абсолютно жесткой пластинкой массы M, для которой уравнение движения имеет вид

$$M\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F,$$

где

$$F = \int\limits_{\rho=\varepsilon}^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial\rho}\,\rho\,d\varphi = 2\pi\varepsilon\,\frac{du}{d\rho}(\varepsilon),$$

или

$$-\lambda M u\big|_{\rho=\varepsilon} = 2\pi\varepsilon u'(\varepsilon),$$

так как $u = -\lambda u$.

Общее решение имеет вид

$$u = AJ_0(\sqrt{\lambda\delta}\,\rho) + BN_0(\sqrt{\lambda\delta}\,\rho)$$

или

$$u = N_0(x)J_0\left(\frac{x}{a}\,\rho\right) - J_0(x)N_0\left(\frac{x}{a}\,\rho\right).$$

Условие при $\rho = \varepsilon$ дает нам уравнение для определения λ

$$\frac{x}{2p}\,\frac{J_0(px)N_0(x) - J_0(x)N_0(px)}{J_1(px)N_0(x) - N_1(px)J_0(x)} = S(x), \tag{1}$$

где

$$S = \frac{\delta\pi a^2}{M}, \quad x = \sqrt{\lambda\delta}\,a.$$

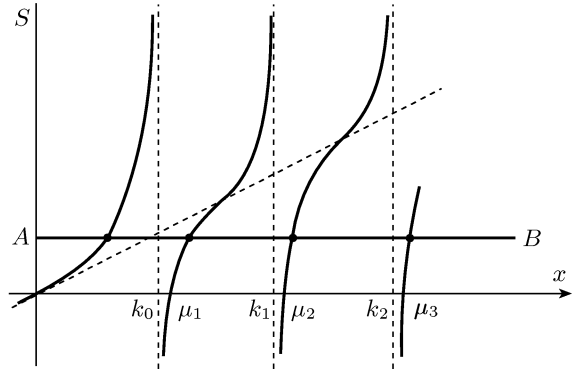


Рис. 58

Решение дисперсионного уравнения (1) может быть найдено графически. График функции $S(x)$ имеет вид рис. 58.

Здесь $k_0,\ k_1,\ k_2$ — корни знаменателя функции $S(x)$, а штриховая кривая — парабола

$$S = -\frac{1}{2}\,x^2 \ln p.$$

Задавая значение M (на рис. 58 горизонталь AB), найдем соответствующие корни дисперсионного уравнения.

При $M \to \infty$ горизонталь AB стремится к оси x, первый корень стремится к нулю, остальные корни стремятся к значениям $\lambda_1^0,\ \lambda_2^0,\ \lambda_3^0,\ \ldots$, которые являются корнями числителя функции $S(x)$. Величины $\lambda_1^0,\ \lambda_2^0,\ \lambda_3^0,\ \ldots$ отличаются от $k_0,\ k_1,\ k_2,\ \ldots$ на величины, имеющие порядок величины емкости круга радиуса ε

$$C = \frac{1}{\ln \dfrac{\varepsilon}{a}}.$$

Для больших масс M первый корень будет мал.

Разложим цилиндрические функции возле нуля:

$$J_0(x) = 1 - \ldots, \quad J_1(x) = \frac{1}{2}\,x + \ldots,$$
$$N_0(x) = \ln(x) + \ldots, \quad N_1(x) = -\frac{1}{x} + \ldots$$

Подставляя эти выражения в равенство (1), найдем

$$\lambda_1 = \frac{2\pi}{M} \cdot \frac{1}{-\ln p} = 2\pi C\,\frac{1}{M} + \ldots,$$

где $C = -\dfrac{1}{\ln p},\ \ p = \dfrac{\varepsilon}{a}$.

33. Пусть внешняя граница кольцевой мембраны $\varepsilon \leqslant \rho \leqslant a$ является свободной, т. е.

$$\frac{\partial v}{\partial \rho}(a,\, \varphi) = 0.$$

Тогда

$$\Delta\lambda_1 = \lambda_1 - \lambda_1^0 = \frac{2}{a^2 J_0^2(\sqrt{\lambda_1^0}\,a)\ln\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1^0}\,\varepsilon}} + \ldots \approx \frac{12,3}{a^2 \ln\dfrac{a}{3,83\varepsilon}},$$

где $\lambda_1^0 = \left(\dfrac{\mu_1^0}{a}\right)^2$, μ_1^0 — первый корень уравнения $J_1(\mu) = 0$, $\mu_1^0 = 3,83$.

34. Задача о собственных колебаниях круглой мембраны, натянутой на отверстие сосуда объема V_0 (барабан), приводит к следующему уравнению:

$$\Delta_2 v + \lambda v = \frac{\delta_0 c_0^2}{V_0 T}\int_0^a\int_0^{2\pi} v\rho\,d\rho\,d\varphi \qquad \left(\lambda = \frac{\omega^2}{c^2}\right), \tag{1}$$

если предположить, что скорость поперечных волн значительно меньше, чем скорость звука в воздухе.

Здесь δ_0 — плотность воздуха в сосуде, c_0 — скорость звука в воздухе при давлении и температуре в сосуде, соответствующих неподвижной мембране, $c = \sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$, T — натяжение мембраны, a — ее радиус. Интеграл справа означает добавочное давление, создаваемое колебаниями воздуха в сосуде (см. [38, с. 217]).

Из (1) и ортогональности тригонометрических функций на $(0,\,2\pi)$ следует, что при $n > 0$ собственные функции мембраны

$$v_{n,\,m} = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\,\rho\right)\begin{cases}\cos n\varphi,\\ \sin n\varphi\end{cases} \tag{2}$$

не меняются, несмотря на наличие присоединенного объема воздуха.

Собственные функции, обладающие цилиндрической симметрией ($n = 0$), имеют вид

$$v_m(\rho) = J_0\left(\frac{\mu_m}{a}\,\rho\right) - J_0(\mu_m) \qquad \left(\lambda = \frac{\mu_m^2}{a^2}\right), \tag{3}$$

где μ_m — корень уравнения

$$J_0(\mu) = -\frac{\chi}{\mu^2}\,J_2(\mu), \tag{4}$$

$$\chi = \frac{\pi\delta_0 c_0^2 a^4}{V_0 T},$$

которое получается, если (3) подставить в уравнение (1).

Ряд для $J_2(\mu)$ дает

$$\frac{J_2(\mu)}{\mu^2} = \frac{1}{8} - \frac{\mu^2}{96} + \frac{\mu^4}{3072}. \tag{5}$$

Если $\nu_1 = 2,4048$ — первый корень уравнения $J_0(\nu) = 0$, то

$$J_0(\mu_1) = -J_1(\nu_1)\varepsilon = -0,5191\,\varepsilon \quad (\varepsilon = \mu_1 - \nu_1).$$

Из (4) и (5) получаем

$$\varepsilon = \frac{\left(\dfrac{1}{8} - \dfrac{\nu_1^2}{96} + \dfrac{\nu_1^4}{3072}\right)\chi}{J_1(\nu_1) + \left(\dfrac{\nu_1}{48} + \dfrac{\nu_1^3}{768}\right)\chi} = \frac{1}{6,8619 + 0,4229\chi}\,\chi.$$

Эта формула позволяет вычислить поправки к первому собственному значению за счет присоединенного объема.

Так, например,

$$\varepsilon = \begin{cases} 0,0373 & \text{при} \quad \chi = 1, \\ 0,5570 & \text{при} \quad \chi = 5 \end{cases}$$

и соответственно

$$\mu_1 = 2,4421,$$
$$\mu_1 = 2,9618.$$

35. Основная частота $\omega_1^0 \approx 1520$ с$^{-1}$. Она может быть увеличена в 1,45 раза, если присоединить воздушный объем

$$V_0 \approx 2918 \text{ см}^3 \quad (\chi = 10).$$

Указание. См. задачу 34.

§ 3. Распространение и излучение звука

Уравнения акустики, как известно [1)], имеют вид

$$\begin{aligned} v_t &= -c^2 \operatorname{grad} s, \\ s_t &+ \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\boldsymbol{v}$ — вектор скорости частиц газа, $s = \dfrac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$ — конденсация газа, $c = \sqrt{\dfrac{\gamma p_0}{\rho_0}}$ — скорость звука, ρ_0 и p_0 — начальная плотность и начальное давление, γ — постоянная адиабаты.

Полагая

$$\boldsymbol{v} = -\operatorname{grad} U \quad \text{или} \quad s = c^2 U_t,$$

где U — потенциал скоростей, получим для потенциала уравнение колебаний

$$U_{tt} = c^2 \Delta U.$$

Полное давление p просто выражается через конденсацию s:

$$p = p_0(1 + \gamma s).$$

Обозначая $P = p - p_0$ — избыточное давление, имеем

$$P = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \rho_0 s = \rho_0 c^2 s.$$

Отсюда видно, что избыточное давление P также удовлетворяет уравнению колебаний

$$P_{tt} = c^2 \Delta P.$$

Если граница Σ области, в которой ищется решение, предполагается абсолютно жесткой, то на ней нормальная составляющая скорости равна нулю:

$$v_n\big|_\Sigma = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial U}{\partial n}\Big|_\Sigma = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial n}\Big|_\Sigma = 0,$$

где n — нормаль к Σ.

[1)] См., например, [7, гл. II].

Кинетическая энергия объема $dx\,dy\,dz$ газа равна $\frac{1}{2}\rho_0 v^2 dx\,dy\,dz$.

Потенциальная энергия, очевидно, дается выражением

$$\frac{1}{2}|Ps| = \frac{1}{2\rho_0 c^2}P^2.$$

Полная энергия в единице объема равна

$$W = \frac{1}{2}\rho_0 v^2 + \frac{1}{2\rho_0 c^2}P^2.$$

Пользуясь формулой Грина, нетрудно записать закон сохранения энергии в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_T W\,d\tau = -\int\limits_S \boldsymbol{Y}\,dS, \quad \boldsymbol{Y} = p\boldsymbol{v},$$

где T — некоторый объем, ограниченный поверхностью S. Вектор $\boldsymbol{Y} = p\boldsymbol{v}$ есть поток энергии в единицу времени через единицу поверхности, называемый вектором Умова.

Полная энергия, изучаемая некоторым источником в единицу времени (полная мощность), равна

$$\Pi = \int\limits_S \boldsymbol{Y}\,dS,$$

где S — некоторая замкнутая поверхность, окружающая источник.

В случае установившихся колебаний

$$P = pe^{i\omega t},$$

где амплитуда p удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta p + k^2 p = 0.$$

В дальнейшем мы всюду будем рассматривать установившиеся акустические процессы, т. е. иметь дело с волновыми уравнениями, опуская, как правило, временной множитель $e^{i\omega t}$. Если $s = \overline{s}e^{i\omega t}$, $\boldsymbol{v} = \overline{\boldsymbol{v}}e^{i\omega t}$, то $\overline{s}$ и $\overline{\boldsymbol{v}}$ также удовлетворяют волновому уравнению, причем $p = ikc\rho_0 U$ — амплитуда.

В случае гармонической зависимости по времени обычно используются величины, являющиеся средними за период значениями рассматриваемых функций. Если зависимость от времени взять в виде $e^{i\omega t}$, то амплитуды p и $\boldsymbol{v}$ будут комплексными (черту над v опускаем). Учитывая это, получим для среднего по времени потока энергии выражение

$$\overline{\boldsymbol{Y}} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}(p\boldsymbol{v}^*),$$

называемое также интенсивностью или силой звука.

В акустике широко используется понятие импеданса. Как известно, механический импеданс системы z определяется как отношение давления к скорости. Величина $\rho_0 c$ называется акустическим сопротивлением излучения. Безразмерный акустический импеданс определяется отношением

$$\zeta = \frac{z}{\rho_0 c} \quad \text{или} \quad \zeta = \frac{p}{\rho_0 v c}.$$

1. Точечный источник.

36. Требуется найти функцию

$$G(x,\,y,\,z,\,\xi,\,\eta,\,\zeta)=\frac{e^{-ikr}}{4\pi r}+v,$$

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2},$$

где v — регулярное решение волнового уравнения, которое должно быть выбрано так, чтобы при $z=0$ выполнялось одно из условий: $G\big|_{z=0}=0$, $\dfrac{\partial G}{\partial z}\Big|_{z=0}=0$.

а) $$G(x,\,y,\,z,\,\xi,\,\eta,\,\zeta)=\frac{e^{-ikr}}{4\pi r}-\frac{e^{-ikr_1}}{4\pi r_1},$$

$$r_1=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}.$$

Решением первой краевой задачи будет

$$u(x,\,y,\,z)=-\frac{z}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(ik+\frac{1}{R}\right)\frac{e^{-ikr}}{R^2}\,f(\xi,\,\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

$$R=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2};$$

б) $$\hat{G}(x,\,y,\,z,\,\xi,\,\eta,\,\zeta)=\frac{e^{-ikr}}{4\pi r}+\frac{e^{-ikr_1}}{4\pi r_1}.$$

Решением второй краевой задачи будет

$$u(x,\,y,\,z)=\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{G}\big|_{\zeta=0}f(\xi,\,\eta)\,d\xi\,d\eta=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikR}}{R}\,f(\xi,\,\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Указание. Для построения функции источника G использовать метод зеркальных изображений.

37. а) $$G(M,\,P)=-\frac{i}{4}[H_0^{(2)}(kr)-H_0^{(2)}(kr_1)],$$

б) $$\hat{G}(M,\,P)=-\frac{i}{4}[H_0^{(2)}(kr)+H_0^{(2)}(kr_1)],$$

где

$$M=M(x,\,y),\quad P=P(\xi,\,\eta),$$

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2},\quad r_1=\sqrt{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}.$$

Указание. Требуется найти решение волнового уравнения $\Delta_2 v+k^2v=0$, удовлетворяющее при $y=0$ граничному условию $v=0$ или $\dfrac{\partial v}{\partial z}=0$, на бесконечности — условию излучения

$$\lim_{r\to\infty}\sqrt{r}\left(\frac{\partial v}{\partial r}+ikv\right)=0 \tag{1}$$

или

$$\lim_{r\to\infty}\sqrt{r}\left(\frac{\partial v}{\partial r}-ikv\right)=0 \tag{2}$$

и имеющее при $r \to 0$ логарифмическую особенность, т. е. представимое в виде

$$G = -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(kr) + v.$$

Мы пользуемся условием излучения в форме (1) в связи с выбором временного множителя в форме $e^{i\omega t}$.

38. Потенциал скоростей точечного источника равен

$$U = Q_0 \frac{e^{-ikr}}{4\pi r},$$

где Q_0 — производительность точечного источника.

Скорость $\boldsymbol{v} = -\operatorname{grad} U$ имеет радиальную составляющую

$$v_r = \left(ik + \frac{1}{r}\right) U.$$

Давление

$$p = ikc\rho_0 U.$$

Полная излучаемая в единицу времени мощность (среднее по времени значение)

$$\Pi = \frac{Q_0^2 k^2 c\rho_0}{8\pi}.$$

Безразмерный акустический импеданс

$$\zeta = \frac{ikc\rho_0}{\left(ik + \dfrac{1}{r}\right) c\rho_0} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{ikr}}.$$

Если r достаточно велико, то

$$\zeta = 1 + \frac{i}{kr} + \ldots$$

Указание. Для вычисления скорости v и избыточного давления p использовать формулы

$$v_r = -\frac{\partial U}{\partial r}, \quad p = ikc\rho_0 U.$$

Поток энергии вычисляется как среднее по времени значение произведения давления на скорость

$$\overline{Y} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(pv^*) = \frac{Q_0^2 c\rho_0 k^2}{32\pi^2 r^2}.$$

Полная мощность излучения

$$\Pi = \overline{Y} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_0^2 k^2 c\rho_0}{8\pi}.$$

39. Пусть $P_0(0, 0, -a)$ — прямоугольные координаты точечного источника звука, $P_1(0, 0, a)$ — его зеркальное изображение в плоскости $z = 0$.

Потенциал скоростей равен

$$U = \left(\frac{e^{-ikr}}{4\pi r} + \frac{e^{-ikr_1}}{4\pi r_1}\right) Q_0,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}, \quad r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+a)^2},$$

причем

$$r_1 = \sqrt{r^2 + 4a^2 + 4ar\cos\theta},$$

где θ — угол между P_0M и P_0P_1, $M(x, y, z)$ — точка наблюдения.

На больших расстояниях от источника (в волновой зоне) имеем

$$r_1 = r + 2a\cos\theta,$$

так что

$$U = \frac{Q_0 e^{-ikr}}{4\pi r}\left(1 + e^{-2iak\cos\theta}\right).$$

Интенсивность излучения

$$\overline{Y} = 2\overline{Y}_{38}[\cos(2ak\cos\theta) + 1].$$

Полная мощность излучения

$$\Pi = 2\pi r^2 \int_0^{\pi/2} \overline{Y}\sin\theta\, d\theta = \frac{Q_0^2 k^2 c\rho_0}{8\pi}\left(1 + \frac{\sin 2ak}{2ak}\right) = \Pi_{38}\left(1 + \frac{\sin 2ak}{2ak}\right),$$

где $\overline{Y}_{38}$ и Π_{38} — интенсивность и полная мощность излучения точечного источника, рассмотренного в задаче 38.

40. В этом случае при $z = 0$ будет иметь место граничное условие равенства нулю потенциала скоростей $U = 0$, так что

$$U = \left(\frac{e^{-ikr}}{4\pi r} - \frac{e^{-ikr_1}}{4\pi r_1}\right) Q_0,$$

$$\Pi = \frac{Q_0^2 k^2 c\rho_0}{8\pi}\left(1 - \frac{\sin 2ak}{2ak}\right) = \Pi_{38}\left(1 - \frac{\sin 2ak}{2ak}\right).$$

41. Указание. Требуется доказать, что

$$v_M(P) = v_P(M),$$

где $v_M(P)$ — значение в точке P решения волнового уравнения с источником в точке M, $v_P(M)$ — решение в точке M, источник в точке P.

Для доказательства следует использовать формулу Грина.

42. Требуется найти частные решения уравнения

$$\Delta_2 u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0$$

при условии

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Sigma = 0 \quad (u \text{ — потенциал скорости})$$

и условия отсутствия волн, приходящих из бесконечности (условия излучения).

Существуют частные решения в виде бегущих волн

$$u_n(M, z) = A_n\psi_n(M)e^{i\gamma_n z} \quad (M = M(x, y)),$$

где

$$\gamma_n = \sqrt{k^2 - \lambda_n},$$

λ_n и $\psi_n(M)$ — собственные значения и собственные функции мембра-

ны, имеющей форму перпендикулярного сечения S трубы,

$$\Delta_2\psi_n + \lambda_n\psi_n = 0 \quad \text{в} \quad S, \quad \frac{\partial\psi_n}{\partial\nu}\Big|_C = 0 \quad (C \text{ — граница } S).$$

Если $\lambda_{n_0} < k^2$, а $\lambda_{n_0+1} > k^2$, то существует n_0 бегущих волн. При $n > n_0$ имеем

$$u = A_n\psi_n(M)e^{-p_n|z|}, \quad p_n = \sqrt{\lambda_n - k^2}$$

— затухающие волны. Заметим, что всюду мы будем предполагать собственные функции нормированными к единице. Наибольшая допустимая длина волны, могущей распространяться в трубе,

$$\Lambda_{\text{макс}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda_1}},$$

для круглой трубы радиуса a $\Lambda_{\text{макс}} \approx 2,613a$.

Фазовая скорость

$$v_\Phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \dfrac{\lambda_n}{k^2}}} > c.$$

Избыточное давление

$$P = -ikc\rho_0 u.$$

Скорость частиц вдоль оси z равна

$$v_z = -i\gamma_n u.$$

Поток энергии через поперечное сечение трубы

$$\overline{Y}_n = \frac{1}{2}\,|A_n|^2 \iint\limits_S \psi_n^2\, dS \cdot kc\rho_0\gamma_n = \frac{1}{2}\,kc\rho_0\gamma_n|A_n|^2.$$

Для трубы круглого сечения радиуса a имеем

$$\lambda_n = \lambda_{m,\,n} = \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\right)^2,$$

$$\hat{\psi}_{m,\,n} = \sqrt{\frac{\varepsilon_n}{\pi a^2}}\,\frac{\hat{\mu}_m^{(n)}}{\sqrt{\left(\hat{\mu}_m^{(n)}\right)^2 - n^2}}\,\frac{J_n\left(\dfrac{\hat{\mu}_m^{(n)} r}{a}\right)}{J_n\left(\hat{\mu}_m^{(n)}\right)}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} n\varphi, \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 2, & n \neq 0. \end{cases}$$

Поток энергии

$$\overline{Y}_{m,\,n} = \frac{1}{2}\,|A_n|^2 kc\rho_0 \sqrt{k^2 - \left(\frac{\hat{\mu}_m^{(n)}}{a}\right)^2},$$

где $\hat{\mu}_m^{(n)}$ — корень уравнения $J_n'(\mu) = 0$.

Для трубы прямоугольного сечения $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$ имеем

$$\lambda_{m,\,n} = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right),$$

$$\psi_{m,\,n} = \sqrt{\frac{\varepsilon_m\varepsilon_n}{ab}}\,\cos\frac{\pi m}{a}\,x\cos\frac{\pi n}{b}\,y \quad (n,\, m = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots).$$

Поток энергии

$$\overline{Y}_{m,\,n} = \frac{1}{2}\,|A_{m,\,n}|^2 kc\rho_0 \sqrt{k^2 - \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)}.$$

43. а) $$G(M,\,P,\,z,\,\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\psi_n(M)\psi_n(P)}{2\varkappa_n}\,e^{-\varkappa_n|z-\zeta|},$$

где $\varkappa_n=\sqrt{\lambda_n-k^2}$; λ_n и ψ_n — собственные значения и собственные функции первой краевой задачи: $\Delta_2\psi_n+\lambda_n\psi_n=0$ в поперечном сечении S, $\psi_n=0$ на границе C сечения S;

б) $$\hat G(M,\,P,\,z,\,\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\hat\psi_n(M)\hat\psi_n(P)}{2\hat\varkappa_n}\,e^{-\hat\varkappa_n|z-\zeta|},$$

где $\hat\varkappa_n=\sqrt{\hat\lambda_n-k^2}$; $\hat\lambda_n$ и $\hat\psi_n$ — собственные значения и собственные функции второй краевой задачи

$$\Delta_2\hat\psi_n+\hat\lambda_n\hat\psi_n=0\quad\text{в}\quad S,\quad \frac{\partial\hat\psi_n}{\partial\nu}\Big|_C=0.$$

Если S — круг радиуса a, то

$$\psi_n(M)=\psi_{m,\,n}(r,\,\varphi)=\sqrt{\frac{\varepsilon_n}{\pi a^2}}\,\frac{J_n\Big(\dfrac{\mu_m^{(n)}}{a}\,r\Big)}{J_n'(\mu_m^{(n)})}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}n\varphi,$$

$$\hat\psi_n(M)=\hat\psi_{m,\,n}(r,\,\varphi)=\sqrt{\frac{\varepsilon_n}{\pi a^2}}\,\frac{\hat\mu_m^{(n)}}{\sqrt{\big(\hat\mu_m^{(n)}\big)^2-n^2}}\,\frac{J_n\Big(\dfrac{\hat\mu_m^{(n)}r}{a}\Big)}{J_n\big(\hat\mu_m^{(n)}\big)}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}n\varphi,$$

где

$$\varepsilon_n=\begin{cases}1 & \text{при}\quad n=0,\\ 2 & \text{при}\quad n\ne0,\end{cases}$$

$\mu_m^{(n)}$ — корень уравнения $J_n(\mu)=0$, а $\hat\mu_m^{(n)}$ — корень уравнения $J_n'(\mu)=0$.

Указание. Следует применить метод разделения переменных к неоднородному уравнению

$$\Delta_2 v+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+k^2v=-f(M,\,z),$$

где f — произвольная функция, и представить решение в виде

$$v=\int\limits_S\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(M,\,P,\,z,\,\zeta)f(P,\,\zeta)\,d\sigma_P\,d\zeta.$$

Если искать $v(M,\,z)$ в виде

$$v(M,\,z)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n(z)\psi_n(M),$$

то для $v_n(z)$ мы получаем уравнение

$$v_n''-\varkappa_n^2v_n(z)=-f_n(z),\quad f_n=\int\limits_S\int f(P,\,z)\,\Psi_n(P)\,d\sigma_P,$$

решая которое, найдем

$$v_n=\frac{1}{2\varkappa_n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\varkappa_n|z-\zeta|}f_n(\zeta)\,d\zeta$$

или

$$v_n(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \iint\limits_S \frac{e^{-\varkappa_n|z-\zeta|}}{2\varkappa_n}\,\psi_n(P)f(P,\,\zeta)\,d\sigma_P\,d\zeta.$$

44. Функция источника для полубесконечной трубы $z > 0$ произвольного сечения S:

а) $G(M,\,P,\,z,\,\zeta) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(M)\psi_n(P)}{2\varkappa_n}\,e^{-\varkappa_n\zeta}\,\mathrm{sh}\,\varkappa_n z;$

б) $\hat{G}(M,\,M',\,z,\,\zeta) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{\psi}_n(M)\hat{\psi}_n(M')}{2\hat{\varkappa}_n}\,e^{-\hat{\varkappa}_n\zeta}\,\mathrm{ch}\,\hat{\varkappa}_n z.$

Здесь ψ_n и $\hat{\psi}_n$ — собственные функции первой и второй краевых задач для мембраны S

$$\varkappa_n = \sqrt{\lambda_n - k^2}, \quad \hat{\varkappa}_n = \sqrt{\hat{\lambda}_n - k^2}.$$

Указание. Применить метод отражения к функции

$$Z_n(z) = e^{-\varkappa_n|z-\zeta|},$$

так что:

а) $Z_n(z) = e^{-\varkappa_n(\zeta-z)} - e^{-\varkappa_n(\zeta+z)} = 2e^{-\varkappa_n\zeta}\,\mathrm{sh}\,\varkappa_n z;$

б) $\hat{Z}_n(z) = e^{-\hat{\varkappa}_n(\zeta-z)} + e^{-\hat{\varkappa}_n(\zeta+z)} = 2e^{-\hat{\varkappa}_n\zeta}\,\mathrm{ch}\,\hat{\varkappa}_n z.$

45. Функция точечного источника, дающая пространственное распределение для потенциала скоростей, равна

$$G(M,\,M',\,z,\,\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(M)\psi_n(M')K_n(z,\,\zeta),$$

где

$$K_n(z,\,\zeta) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{ch}\,p_n z\,\mathrm{ch}\,p_n(l-\zeta)}{p_n\,\mathrm{sh}\,p_n l} & \text{при} \quad z < \zeta, \\ \dfrac{\mathrm{ch}\,p_n(l-z)\,\mathrm{ch}\,p_n\zeta}{p_n\,\mathrm{sh}\,p_n l} & \text{при} \quad z > \zeta, \end{cases}$$

где $p_n = \sqrt{\lambda_n - k^2}$, $\psi_n(M)$ и λ_n — собственная функция и собственное значение краевой задачи

$$\Delta_2\psi_n + \lambda_n\psi_n = 0 \quad \text{в} \quad S, \quad \frac{\partial\psi_n}{\partial\nu} = 0 \quad \text{на} \quad C,$$

где S — поперечное сечение резонатора, C — граница S.

Указание. Рассматривая уравнение (см. задачу 42) для потенциала скоростей

$$\Delta_2 U + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k^2 U = -f(M,\,z)$$

с граничными условиями

$U_z\big|_\Sigma = 0, \quad U_z\big|_{z=0,\,z=l} = 0$ (Σ — боковая поверхность резонатора)

и полагая

$$U(M,\,z) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(z)\psi_n(M),$$

получаем для $v_n(z)$ уравнение

$$v_n'' - p_n^2 v_n = -f_n(z), \quad v_n'(0) = v_n'(l) = 0.$$

Его решение имеет вид

$$v_n = \int_0^l K_n(z, \zeta) f_n(\zeta)\, d\zeta,$$

где $K_n(z, \zeta)$ — соответствующая функция Грина для уравнения

$$v_n'' - p_n^2 v_n = 0.$$

Далее см. задачу 43.

2. Излучение мембран, цилиндров и сфер.

46. Скорость

$$v = v_0 e^{-ikz}, \quad z > 0.$$

Давление

$$p = c\rho_0 v_0 e^{-ikz}, \quad z > 0.$$

Поток энергии (среднее по времени значение)

$$Y = 0,5\, c\rho_0 v_0^2.$$

Удельный акустический импеданс

$$\zeta = 1.$$

47. Если на границе $z = 0$ скорость

$$v_z\big|_{z=0} = v_0(r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0\left(\frac{\mu_m}{a} r\right),$$

где μ_m — корень уравнения $J_0(\mu) = 0$, то

$$v_z(r, z) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0\left(\frac{\mu_m}{a} r\right) e^{-i\gamma_m z} = \sum_{n=1}^{\infty} A_m J_0\left(\frac{\mu_m}{a} r\right) e^{-\varkappa_m z} \quad (z > 0),$$

$$\gamma_m = \sqrt{k^2 - \frac{\mu_m^2}{a^2}}, \quad \varkappa_m = \sqrt{\frac{\mu_m^2}{a^2} - k^2},$$

a — радиус трубы.

Давление

$$p = \sum_{m=0}^{\infty} B_m J_0\left(\frac{\mu_m}{a} r\right) e^{-i\gamma_m z} \quad (z > 0),$$

где

$$B_m = \frac{\omega\rho_0}{\gamma_m} A_m.$$

Если

$$v(r, 0) = A J_0\left(\frac{\mu_1}{a} r\right),$$

то

$$B_m = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad m > 1, \\ \dfrac{\omega\rho_0 A}{\sqrt{k^2 - \dfrac{\mu_1^2}{a^2}}} & \text{при} \quad m = 1. \end{cases}$$

Средняя скорость поршня

$$V = \frac{2J_1(\mu_1)}{\mu_1}\, A \approx 0,428A.$$

Импеданс

$$\zeta = \frac{p}{\rho_0 c v} = \frac{k}{\sqrt{k^2 - \dfrac{\mu_1^2}{a^2}}}.$$

Поток энергии через поперечное сечение

$$\Pi = \frac{\pi\omega\rho_0 a^2 A^2 J_1^2(\mu_1)}{2\sqrt{k^2 - \dfrac{\mu_1^2}{a^2}}}.$$

48. Радиальная скорость

$$v_r = v_0\, \frac{H_1^{(2)}(kr)}{H_1^{(2)}(ka)}.$$

Давление

$$p = ic\rho_0 v_0\, \frac{H_0^{(2)}(kr)}{H_1^{(2)}(ka)}.$$

Импеданс

$$\zeta = \frac{p}{\rho_0 c v_r} = i\, \frac{H_0^{(2)}(kr)}{H_1^{(2)}(kr)} = 1 + \ldots$$

На больших расстояниях, при $kr \gg 1$, имеем

$$v_r = \frac{v_0}{H_1^{(2)}(ka)} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\, \exp\left\{-i\left(kr - \frac{3\pi}{4}\right)\right\} =$$

$$= \frac{iv_0}{H_1^{(2)}(ka)} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\, \exp\left\{-i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)\right\} + \ldots,$$

$$p = \frac{ic\rho_0 v_0}{H_1^{(2)}(ka)} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\, \exp\left\{-i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)\right\} + \ldots$$

Поток энергии

$$\overline{Y} = 0,5 p v_r^* = \frac{c\rho_0 v_0^2}{\pi kr |H_1^{(2)}(ka)|^2}.$$

Указание. Требуется решить уравнение

$$\Delta_2 v + k^2 v = 0$$

в области $r \geqslant a$ при дополнительных условиях

$$v\big|_{r=a} = v_0$$

и

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt{r}\, \left(\frac{\partial v}{\partial r} + ikv\right) = 0 \quad \text{(условие излучения)}.$$

49. Избыточное давление равно

$$p \approx \pi^2 \nu a \rho_0 v_0 H_0^{(2)}(kr) \quad \left(\nu = \frac{\omega}{2\pi}\right).$$

В волновой зоне

$$p = \sqrt{c\nu}\,\pi a \rho_0 v_0 \frac{\exp\left\{-i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)\right\}}{\sqrt{r}} + \ldots,$$

$$v_r = \pi a v_0 \sqrt{\frac{\nu}{c}} \frac{\exp\left\{-i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)\right\}}{\sqrt{r}} + \ldots,$$

$$\zeta = 1.$$

Полная излучаемая энергия на единицу длины цилиндра приближенно равна

$$\Pi = \pi^3 \rho_0 \nu a^2 v_0^2.$$

Указание. Использовать разложение

$$H_1^{(2)}(x) = \frac{2i}{\pi x} + \ldots \quad \text{при малых } x,$$

$$H_0^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left\{-i\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right\} \quad \text{при больших } x.$$

50. Давление

$$p = A \cos\varphi H_1^{(2)}(kr).$$

Радиальная скорость

$$v_r = \frac{iA}{c\rho_0} \cos\varphi H_1^{(2)'}(kr), \quad A = \frac{-ic\rho_0 v_0}{H_1^{(2)'}(ka)}.$$

Удельный акустический импеданс

$$\zeta\big|_{r=a} = -i \frac{H_1^{(2)}(ka)}{H_1^{(2)'}(ka)}.$$

Если $ka \ll 1$, то

$$A = \frac{2\pi^3 \nu^2 a^2 \rho_0 v_0}{c}, \quad \zeta = \frac{\pi (ak)^2 k}{2} - ik = \zeta_0 - i\zeta_1,$$

причем $\zeta_0 \ll \zeta_1$.

Полная излучаемая мощность на единицу длины

$$\Pi = \int_0^{2\pi} \overline{Y}\boldsymbol{r}\, d\varphi = \frac{\pi^2}{4c} \rho_0 \omega^3 a^4 v_0^2.$$

Реакция воздуха на единицу длины цилиндра в направлении его движения

$$F = \int_0^{2\pi} ap(a, \varphi) \cos\varphi\, d\varphi = ika^2 \pi c \rho_0 v_0 \ ^{1)}.$$

Указание. Учесть, что граничное условие имеет вид

$$v_r\big|_{r=a} = v_0 \cos\varphi.$$

[1)] Здесь, как и всюду для давления и скорости, множитель $e^{i\omega t}$ опущен.

51. Если

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi),$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi, \quad a_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos m\varphi\, d\rho \quad (m = 1, 2, \ldots),$$

$$b_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin m\varphi\, d\varphi,$$

то

$$p = \sum_{m=0}^{\infty} (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi) H_m^{(2)}(kr),$$

где

$$A_m = -\frac{ic\rho_0}{H_m^{(2)'}(ka)}\, a_m, \quad B_m = \frac{-ic\rho_0}{H_m^{(2)'}(ka)}\, b_m \quad (m = 1, 2, \ldots),$$

$$A_0 = -\frac{ic\rho_0}{H_0^{(2)'}(ka)} \frac{a_0}{2},$$

$$v_r = \frac{a_0}{2} \frac{H_0^{(2)'}(kr)}{H_0^{(2)'}(ka)} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi) \frac{H_m^{(2)'}(kr)}{H_m^{(2)'}(ka)}.$$

При

$$f(\varphi) = v_0 = \frac{a_0}{2}\, a_m = b_m = 0, \quad m > 0,$$

и мы получаем

$$p = \frac{ic\rho_0}{H_1^{(2)}(ka)}\, v_0 H_0^{(2)}(kr), \quad v = v_0 \frac{H_1^{(2)}(kr)}{H_1^{(2)}(ka)},$$

т. е. решение задачи 48. Аналогично получаются решения задач 49 и 50.

52. Давление

$$p = A\zeta_1^{(2)}(kr)\, P_1(\cos\theta).$$

Радиальная скорость

$$v_r = \frac{iA}{3c\rho_0} [\zeta_0^{(2)}(kr) - 2\zeta_2^{(2)}(kr)]\, P_1(\cos\theta),$$

где

$$\zeta_n^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, H_{n+1/2}^{(2)}(x),$$

$P_1(x) = x$ — полином Лежандра первой степени. Если $ka \ll 1$, то

$$A = 0,5 c\rho_0 (ak)^3 v_0.$$

Полная сила, действующая на шар в направлении его колебаний,

$$F = -i\omega \cdot \frac{2}{3}\, \pi\rho a^3 v_0.$$

Безразмерный удельный резонанс при $r = a$

$$\zeta = -\frac{i3\zeta_1^{(2)}(ka)}{\zeta_0^{(2)}(ka) - 2\zeta_2^{(2)}(ka)} = -\frac{i}{2}\, ka + \ldots$$

В волновой зоне

$$p = \frac{A}{kr}\, e^{-i(kr-\pi)} \cos\theta, \quad v_r = \frac{A}{c\rho_0 kr}\, e^{-i(kr-\pi)} \cos\theta,$$

$$A = \frac{3c\rho v_0 i}{2\zeta_2^{(2)}(ka) - \zeta_0^{(2)}(ka)}.$$

Поток энергии, излучаемой диполем в единицу времени,

$$Y = 0,5\, \frac{A^2 \cos^2\theta}{c\rho_0 (kr)^2} = \frac{1}{8}\, \frac{c\rho_0 (ak)^6 v_0^2}{(kr)^2}\, \cos^2\theta.$$

Полная мощность, излучаемая акустическим диполем, равна

$$\Pi = \frac{\pi}{6}\, c\rho_0 v_0^2 a^2 (ak)^4,$$

т. е.

$$\Pi \sim k^4, \quad \text{или} \quad \Pi \sim \frac{1}{\lambda^4}.$$

53. Если возможно разложение

$$f(\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m P_m(\cos\theta),$$

то скорость

$$v = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m \zeta_m^{(2)'}(kr)}{\zeta_m^{(2)'}(ka)}\, P_m(\cos\theta),$$

избыточное давление

$$p = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m \zeta_m^{(2)}(kr)}{\zeta_m^{(2)'}(ka)}\, P_m(\cos\theta),$$

где

$$B_m = -ic\rho_0 A_m.$$

Если $ka \ll 1$, то полную реакцию среды на шар можно вычислить по формуле

$$F = 2\pi a^2 \int_0^{\pi} (p)_{r=a} \cos\theta \sin\theta\, d\theta = \frac{4\pi a^2}{3}\, B_1\, \frac{\zeta_1^{(2)}(ka)}{\zeta_1^{(2)'}(ka)} =$$

$$= \frac{ic\rho_0}{2} \left(\frac{4\pi a^2}{3}\right) A_1 k + \ldots$$

Если $f(\theta) = v_0$, то

$$A_m = \begin{cases} v_0 & \text{при} \quad m = 0, \\ 0 & \text{при} \quad m \neq 0 \end{cases}$$

и

$$F = 0.$$

Указание. При вычислении полной силы, действующей на шар, следует воспользоваться формулами

$$\zeta_1^{(2)}(\rho) \approx \frac{i}{\rho^2} + \ldots; \quad \zeta_1^{(2)'}(\rho) \approx -\frac{2i}{\rho^3} + \ldots \quad \text{при малых } \rho.$$

54. Если скорость поверхности сферы равна нулю везде, кроме малой круговой площади радиуса ε, вокруг точки $\theta = 0$ (полюса)

$$v(\theta) = \begin{cases} v_0 & \text{при} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \varepsilon/a, \\ 0 & \text{при} \quad \varepsilon/a < \theta < \pi, \end{cases}$$

где a — радиус сферы, то

$$p = -ic\rho_0 \sum_{m=0}^{\infty} A_m \frac{\zeta_m^{(2)}(kr)}{\zeta_m^{(2)'}(ka)} P_m(\cos\theta),$$

$$v_r = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \frac{\zeta_m^{(2)'}(kr)}{\zeta_m^{(2)'}(ka)} P_m(\cos\theta),$$

$$A_m = \frac{2m+1}{2} v_0 \int_0^{\varepsilon/a} P_m(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta \approx \frac{2m+1}{4}\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^2 v_0.$$

Полная энергия излучения равна

$$\Pi = \rho c v_0^2 \frac{\varepsilon^4}{32a^2} \frac{4\pi}{(ka)^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{D_m^2}.$$

При очень низких частотах

$$p = \omega \frac{\rho_0}{4\pi r}(\pi\varepsilon^2 v_0) e^{ikr} = i\omega \frac{\rho_0}{4\pi r} e^{ikr} Q_0,$$

где $Q_0 = \pi\varepsilon^2 v_0$ есть производительность точечного источника.

Указание. Выражение для D_m получается из формул (1) задачи 62.

55. Радиальная составляющая скорости равна

$$v_r(r, \vartheta) = \frac{\zeta_2^{(2)'}(kr)}{\zeta_2^{(2)'}(ka)} P_2(\cos\theta).$$

Давление

$$p = -ic\rho_0 v_0 \frac{\zeta_2^{(2)}(kr)}{\zeta_2^{(2)'}(ka)} P_2(\cos\theta).$$

При $ka \ll 1$ интенсивность и мощность излучения квадруполя будут равны

$$\overline{Y} = \frac{c\rho_0 k^6 a^8}{162 r^2} v_0^2 P_2^2(\cos\theta), \quad \Pi = \frac{2\pi}{405} c\rho_0 k^6 a^8 v_0^2.$$

Указание. Учесть, что $v\big|_{r=a}$ может быть записано в виде $v\big|_{r=a} = v_0 P_2(\cos\theta)$ и искать давление в виде

$$p = R(r) P_2(\cos\theta).$$

При вычислении потока энергии и мощности излучения воспользоваться формулами

$$\zeta_2^{(2)}(x) = i\frac{3}{x^3} \quad \text{при малых } x,$$

$$\zeta_2^{(2)'}(x) = -i\frac{9}{x^4} \quad \text{при малых } x,$$

а также асимптотическими формулами для больших x.

Интересно сравнить формулы

$$\Pi = \frac{\pi}{6}\, c\rho_0 v_0^2 a^6 k^4 \sim \omega^4 \quad \text{для акустического диполя,}$$

$$\Pi = \frac{2\pi}{405}\, c\rho_0 v_0^2 a^8 k^6 \sim \omega^6 \quad \text{для акустического квадруполя.}$$

56. Если скорость поршня v_0, то

$$p = \frac{ikc\rho_0 v_0}{2\pi} \int\limits_0^a y\, dy \int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{-ikR}}{R}\, d\psi,$$

где R — расстояние точки $M_0(y,\, \psi)$ от точки наблюдения M (рис. 59).

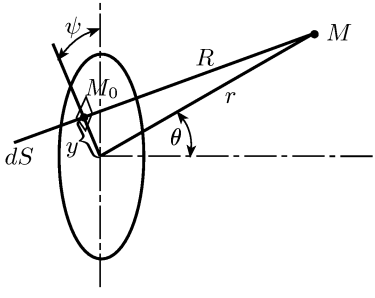


Рис. 59

Если $\dfrac{a}{R} \ll 1$, то

$$p \approx \frac{ikc\rho_0 a^2}{2r}\, v_0 e^{-ikr} \left[\frac{2J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}\right],$$

$$v_r \approx ika^2\, \frac{e^{-ikr}}{2r}\, v_0 \left[\frac{2\overline{J}_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}\right].$$

Поток энергии, излучаемой поршнем,

$$\overline{Y} = \frac{a^2 c\rho_0 v_0^2}{8r^2}\, \mu^2 \left[\frac{2J_1(\mu\sin\theta)}{\mu\sin\theta}\right]^2, \qquad \mu = ak.$$

Если $\mu \ll 1$, то

$$\overline{Y} = \frac{a^2 c\rho_0 v_0^2}{8r^2}\, \mu^2 \left(1 - \frac{\mu^2 \sin^2\theta}{4}\right).$$

В этом случае полная мощность равна $\Pi = \dfrac{\pi a^2 c\rho_0 v_0^2}{4}\, \mu^2 \left(1 - \dfrac{\mu^2}{6}\right)$.

Указание. Потенциал скоростей, создаваемых движением поршня, представляется в виде потенциала простого слоя

$$U = \frac{v_0}{2\pi} \int\limits_0^a \int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{-ikR}}{R}\, y\, dy\, d\psi.$$

Давление

$$p = ikc\rho_0 U.$$

Если $R \gg a$, то подынтегральная функция принимает вид

$$\frac{e^{-ikR}}{R} = \frac{e^{-ikr} e^{iky\sin\theta\cos\psi}}{r - y\sin\theta\cos\psi} \quad (R = r - y\sin\theta\cos\psi),$$

так что

$$U = v_0\, \frac{e^{-ikr}}{2\pi r} \int\limits_0^a y\, dy \int\limits_0^{2\pi} e^{i(ky\sin\theta)\cos\psi} d\psi =$$

$$= v_0\, \frac{e^{-ikr}}{2\pi r} \int\limits_0^a y\, dy\, J_0(ky\sin\theta) 2\pi = v_0\, \frac{e^{-ikr}}{2r}\, a^2 \left[\frac{2J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}\right].$$

Отсюда и получаются формулы для p и v_r.

57. Давление на поверхности пластинки

$$p\big|_{r=a} = \frac{c\rho_0}{2}\, v_0 \left\{1 - J_0(2\mu) + iM_0(2\mu)\right\}, \quad \mu = ak, \tag{1}$$

где

$$M_0(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} \sin(x\sin\varphi)\, d\varphi = \\ = \frac{2}{\pi}\left(x - \frac{x^3}{1^2\cdot 3^2} + \frac{x^5}{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2} - \frac{x^7}{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2} + \dots\right).$$

Сила реакции звукового поля на пластинку

$$F = 2\pi\int\limits_0^a p\big|_{r=a'} a'da' = \frac{a^2\pi c\rho_0 v_0}{2}\left[1 - \frac{J_1(2\mu)}{\mu}\right] + i\,\frac{\pi c\rho_0 v_0}{4k^2}\, M_1(2\mu),$$

где

$$M_1(x) = \int\limits_0^x M_0(\xi)\, d\xi = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^3}{1^2\cdot 3} - \frac{x^5}{1^2\cdot 3^2\cdot 5} + \frac{x^7}{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7} + \dots\right).$$

Если масса пластинки мала, т. е. мало a и, следовательно, мало μ ($\mu \ll 1$), то

$$F \approx \frac{\pi c\rho_0\mu^4 v_0}{4k^2} + i\,\frac{8c\rho_0}{3k^2}\,\mu^3 v_0.$$

Импеданс

$$\zeta = i\,\frac{2\mu}{\pi} + \frac{\mu^3}{2}.$$

Р е ш е н и е. При вычислении потенциала простого слоя на самой пластинке удобно выбрать полярные координаты ρ, φ с центром в какой-либо точке окружности $\rho = a'$ в качестве полюса.

Тогда

$$U = \frac{v_0}{2\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\int\limits_0^{2a'\cos\varphi} e^{-ik\rho}\, d\rho\, d\varphi = \frac{v_0}{ik\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\left\{1 - e^{-2ika'\cos\varphi}\right\} d\varphi.$$

Учитываем, что

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} e^{-2ika'\cos\varphi} d\varphi = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} e^{-2ika'\sin\varphi} d\varphi = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\cos(2ka'\sin\varphi)\, d\varphi - \\ - \frac{2i}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\sin(2ka'\sin\varphi)\, d\varphi = J_0(2ka') - iM_0(2ka').$$

где $M_0(x)$ — некоторая функция, определяемая формулой

$$M_0(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\sin(x\sin\varphi)\, d\varphi = \frac{2}{\pi}\left(x - \frac{x^3}{1^2\cdot 3^2} + \frac{x^5}{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2} - \dots\right).$$

При $x \to \infty$ для $M_0(x)$ имеет место асимптотическая формула

$$M_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{2}{\pi x} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right).$$

Следовательно, для $p\big|_{r=a}$ верна формула (1). Чтобы найти силу реакции, действующую на пластинку, надо вычислить интеграл

$$F = 2\pi \int_0^a p\big|_{r=a'} a'\,da' =$$

$$= -i\pi c\rho v_0 \frac{1}{4k^2}\left\{\int_0^{2\mu}(1 - J_0(\xi'))\xi'\,d\xi' - i\int_0^{2\mu} M_0(\xi)\xi\,d\xi\right\} =$$

$$= \frac{a^2\pi\rho_0 c v_0}{2}\left[1 - \frac{J_1(2\mu)}{\mu}\right] + i\,\frac{\pi c\rho_0 v_0}{4k^2}\,M_1(2\mu),$$

где

$$M_1(x) = \int_0^x M_0(\xi)\xi\,d\xi.$$

58. В волновой зоне (при $kr \gg 1$)

$$p = ikc\rho_0 a^2\,\frac{e^{-ikr}}{r}\sum_{m=0}^{\infty} A_m\Phi_m(\theta), \quad v = ika^2\,\frac{e^{-ikr}}{r}\sum_{m=0}^{\infty} A_m\Phi_m(\theta),$$

где A_m — коэффициенты разложения $v\big|_{z=0} = f(\rho)$ в ряд по функциям $J_0\left(\frac{\mu_m}{a}\rho\right)$, равные

$$A_m = \frac{2}{a^2 J_1^2(\mu_m)}\int_0^a f(\rho)J_0\left(\frac{\mu_m}{a}\rho\right)\rho\,d\rho,$$

$$\Phi_m(\theta) = \frac{2sJ_1(s)}{s^2 - \mu_m^2}, \quad s = ka\sin\theta,$$

μ_m — корень уравнения $J_1(\mu) = 0$.

Р е ш е н и е. Пользуясь разложением $f(\rho)$ в ряд

$$v\big|_{z=0} = f(\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m J_0\left(\frac{\mu_m}{a}\rho\right),$$

находим

$$p = \frac{ikc\rho_0}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty} A_m \int_0^a J_0\left(\frac{\mu_m}{a}\rho\right)\rho\,d\rho\int_0^{2\pi}\frac{e^{-ikR}}{R}\,d\varphi.$$

В волновой зоне

$$\frac{e^{-ikR}}{R} \approx \frac{e^{-ikr}}{r}\,e^{ik\rho\sin\theta\cos\varphi}$$

(см. задачу 56). Вычисления дают

$$\int_0^a J_0\left(\frac{\mu_m}{a}\rho\right)\rho\,d\rho\int_0^{2\pi} e^{ik\rho\sin\theta\cos\theta}\,d\varphi = 2\pi\int_0^a J_0\left(\frac{\mu_m}{a}\rho\right)J_0(k\rho\sin\theta)\rho\,d\rho.$$

Для нахождения этого интеграла обратимся к формуле

$$\int_0^a J_\nu(\alpha\rho)J_\nu(\beta\rho)\,\rho\,d\rho = \frac{a}{\beta^2 - \alpha^2}\left[\alpha J'_\nu(\alpha a)J_\nu(\beta a) - \beta J'_\nu(\beta a)J_\nu(\alpha a)\right],$$

положим здесь $\alpha = \mu_m/a$, $\beta = k\sin\theta$, $\nu = 0$, тогда получим

$$\int_0^a J_0(\alpha\rho)J_0(\beta\rho)\rho\,d\rho = \frac{a^2 sJ_1(s)}{s^2-\mu_m^2}\,J_0(\mu_m) \quad (J_1(\mu_m)=0),$$

так что

$$p = ikc\rho_0 a^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m J_0(\mu_m) sJ_1(s)}{s^2-\mu_m^2}\,\frac{e^{-ikr}}{r}.$$

Первый член ($m=0$, $\mu_0=0$) этого ряда дает решение задачи 56 о колебании жесткого поршня в бесконечном экране

$$p = \frac{ikc\rho_0 a^2}{2}\,A_0\left[\frac{2J_1(s)}{s}\right] + \ldots, \quad s = ka\sin\theta,$$

причем A_0, очевидно, означает среднюю скорость поршня.

3. Дифракция на цилиндре и сфере.

59. Если плоская волна распространяется вдоль оси x, перпендикулярной к оси цилиндра (оси z), то давление в ней можно представить в виде

$$p_0 = Ae^{-ikx} = Ae^{-ikr\cos\varphi} = A\left[J_0(kr) + 2\sum_{m=1}^{\infty}(-i)^m J_m(kr)\cos m\varphi\right].$$

Давление в рассеянной волне

$$p_s = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \cos m\varphi H_m^{(2)}(kr),$$

где

$$B_0 = -\frac{J_1(ka)}{H_1^{(2)'}(ka)}\,A, \quad B_m = -\frac{2(-i)^m J_m(ka)}{H_m^{(2)'}(ka)}\,A \quad (m=1,\,2,\,\ldots).$$

Скорость в рассеянной волне

$$v_{sr} = \frac{i}{c\rho_0}\sum_{m=0}^{\infty} B_m H_m^{(2)'}(kr)\cos m\varphi.$$

В волновой зоне (на больших расстояниях от цилиндра $kr \gg 1$)

$$p_s = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\,\exp\left\{-i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)\right\}\sum_{m=0}^{\infty} B_m i^m \cos m\varphi,$$

$$v_{sr} = \frac{1}{c\rho_0}\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\,\exp\left\{-i\left(kr-\frac{\pi}{4}\right)\right\}\sum_{m=0}^{\infty} B_m i^m \cos m\varphi = \frac{1}{c\rho_0}\,p_s.$$

60. Интенсивность рассеянной волны

$$Y_s = \frac{2Y_0}{\pi kr}\,|F_s|^2,$$

$$F_s = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \sin\gamma_m e^{i\gamma_m}\cos m\varphi, \quad \varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_m = 2, \quad m>0,$$

$$|F_s|^2 = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_m\varepsilon_n \sin\gamma_m \sin\gamma_n \cos(\gamma_m - \gamma_n)\cos m\varphi\, \cos n\varphi,$$

γ_m определяется соотношениями

$$\operatorname{tg}\gamma_0 = -\frac{J_1(\mu)}{N_1(\mu)},$$

$$\operatorname{tg}\gamma_m = \frac{J_{m-1}(\mu) - J_{m+1}(\mu)}{N_{m+1}(\mu) - N_{m-1}(\mu)}, \quad \mu = ka,$$

N_m — функция Неймана. Полная мощность звука, рассеянного на единице длины цилиндра,

$$\Pi_3 = \frac{4Y_0}{k}\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \sin^2\gamma_m, \quad Y_0 = \frac{A^2}{2c\rho_0}.$$

Указание. Пользуясь соотношениями

$$J'_m = 0,5(J_{m-1} - J_{m+1}), \quad N'_m = 0,5(N_{m-1} - N_{m+1}),$$

нетрудно выразить коэффициенты B_m в виде

$$B_m = -A\varepsilon_m(-i)^{m+1}e^{-i\gamma_m}\sin\gamma_m,$$

где

$$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_m = 2, \quad m \geqslant 1;$$

в волновой зоне имеем

$$p_s = i\sqrt{\frac{4\rho_0 cY_0}{\pi kr}}\, F_s(\varphi)\exp\left\{-i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)\right\}, \quad v_{sr} = \frac{1}{\rho c}\, p_s.$$

61. Если $ka \ll 1$, то в волновой зоне будем иметь:

$$p_s = \frac{i\sqrt{\pi}\, a^2k^2A}{2\sqrt{2kr}}\exp\left\{-i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)\right\}(1 - 2\cos\varphi) + \ldots,$$

$$v_{sr} = \frac{1}{c\rho_0}\, p_s.$$

Интенсивность

$$\overline{Y}_s = \frac{\pi k^3a^4}{8r}\, Y_0(1 - 2\cos\varphi)^2, \quad \overline{Y}_0 = \frac{A^2}{2c\rho_0}.$$

Полная мощность

$$\Pi_s = \frac{3}{4}\,\pi^2k^3a^4Y_0 + \ldots = \frac{6\pi^5a^4}{\lambda^3}\, Y_0 + \ldots,$$

где λ — длина волны ($k = 2\pi/\lambda = \omega/c$). Полное давление на поверхности цилиндра

$$p_n = (p_0 + p_s)\big|_{r=a} = \frac{4A}{\pi ka}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_m\cos m\varphi}{\alpha_m}\exp\left\{-i\left(\gamma_m - \frac{\pi m}{2}\right)\right\},$$

$$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_m = 2, \quad m \geqslant 1,$$

где

$$\alpha_m = \frac{\sqrt{\left[J_{m+1}(\mu) - J_{m-1}(\mu)\right]^2 + \left[N_{m+1}(\mu) - N_{m-1}(\mu)\right]^2}}{2}.$$

Полная сила, действующая на единицу длины цилиндра, направленная по линии распространения плоской волны, равна

$$F = a\int_0^{2\pi} p_n \cos\varphi\, d\varphi = \frac{4A}{k\alpha_1}\exp\left\{i\left(\gamma_1 - \frac{\pi}{2}\right)\right\}.$$

Если $\mu = ka \ll 1$, то

$$p_n = A\left(\frac{1}{2} + 2i\mu\cos\varphi\right), \quad F = -2i\pi a^2 kA.$$

Если $\mu = ka \gg 1$, то

$$F = -\sqrt{4a\lambda}\, Ae^{i\left(\mu - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Указание. Следует воспользоваться приближенными формулами:

а) при $\mu \gg m + 1/2$

$$\alpha_0 \approx \sqrt{\frac{8}{\pi\mu}}, \quad \gamma_0 \approx \mu - \frac{\pi}{4}, \quad \alpha_m \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\mu}}, \quad \gamma_m \approx \mu - \frac{1}{2}\pi\left(m + \frac{1}{2}\right);$$

б) при $\mu = ka \ll m + 1/2$

$$\alpha_0 \approx \frac{4}{\pi\mu}, \quad \gamma_0 \approx \frac{\pi\mu^2}{4}, \quad \alpha_m \approx \frac{m!}{2\pi}\left(\frac{2}{\mu}\right)^{m+1},$$

$$\gamma_m \approx -\frac{\pi m}{(m!)^2}\left(\frac{\mu}{2}\right)^{2m} \quad (m > 0).$$

62. Пусть плоская волна распространяется вдоль оси z:

$$\overline{p}_0 = Ae^{i(\omega t - kz)} = p_0 e^{i\omega t}, \quad p_0 = Ae^{-ikz} = Ae^{-ikr\cos\theta}.$$

Давление и радиальная скорость в рассеянной волне даются формулами

$$p_s = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \zeta_m^{(2)}(kr) P_m(\cos\theta),$$

$$v_{sr} = -\frac{1}{ikc\rho_0}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{i}{c\rho_0}\sum_{m=0}^{\infty} B_m \zeta_m^{(2)'}(kr) P_m(\cos\theta),$$

где

$$\zeta_m^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, H_{m+1/2}^{(2)}(x),$$

$$B_m = -A(-i)^m(2m+1)\frac{\psi_m(\mu)}{\zeta_m^{(2)'}(\mu)}, \quad \mu = ka,$$

$$\psi_m(\mu) = \sqrt{\frac{\pi}{2\mu}}\, J_{\mu+1/2}(\mu).$$

Коэффициенты B_m удобно представить в виде

$$B_m = -A(-i)^{m+1}(2m+1)\sin\beta_m e^{i\beta_m},$$

где B_m определяется из уравнений [1])

$$\begin{cases} mf_{m-1}(\mu) - (m+1)f_{m+1}(\mu) = -(2m+1)D_m\cos\beta_m = \\ \qquad\qquad = -(2m+1)f'_m(\mu), \\ (m+1)\psi_{m+1}(\mu) - m\psi_{m-1}(\mu) = -(2m+1)D_m\sin\beta_m = \\ \qquad\qquad = -(2m+1)\psi'_m(\mu). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь

$$f_m = \sqrt{\frac{\pi}{2\mu}}\,N_{m+1/2}(\mu).$$

В волновой зоне ($r \to \infty$)

$$p_s = \frac{\exp\left\{-i\left(kr - \frac{\pi}{2}\right)\right\}}{kr}\sum_{m=0}^{\infty} B_m i^m P_m(\cos\theta), \quad v_s = \frac{1}{c\rho_0}\,p_s.$$

Интенсивность рассеянной волны

$$\overline{Y}_s = \overline{Y}_0\,\frac{1}{k^2r^2}\times$$

$$\times \sum_{m,\,n=0}^{\infty}(2m+1)(2n+1)\sin\beta_m\sin\beta_n\cos(\beta_m-\beta_n)P_m(\cos\theta)P_n(\cos\theta).$$

Полная мощность

$$\Pi_s = \overline{Y}_0\,\frac{4\pi}{k^2}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\sin^2\beta_n, \quad \overline{Y}_0 = \frac{A^2}{2c\rho_0}.$$

Указание. Решение ищем в виде ряда

$$p_s = \sum_{m=0}^{\infty} B_m\zeta_m^{(2)}(kr)P_m(\cos\theta),$$

где B_m — коэффициенты, подлежащие определению из граничного условия $\left.\dfrac{\partial(p_0 - p_s)}{\partial r}\right|_{r=a} = 0$. Для их определения необходимо получить разложение плоской волны в ряд. Докажем, что имеет место формула

$$e^{-i\rho\cos\theta} = \sum_{m=0}^{\infty} C_m\varphi_m(\rho)P_m(\cos\theta),$$

где

$$C_m = (2m+1)(-i)^m.$$

В самом деле, полагаем

$$C_m\psi_m(\rho) = \frac{2m+1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-i\rho\xi}P_m(\xi)\,d\xi.$$

[1]) См. [38, с. 351].

Интегрирование по частям при больших ρ дает

$$\int_{-1}^{1} e^{-i\rho\xi} P_m(\xi)\, d\xi = 2(-i)^m \frac{\sin\left(\rho - \frac{m\pi}{2}\right)}{\rho} + O\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

С другой стороны,

$$\psi_m(\rho) = \frac{\sin\left(\rho - \frac{m\pi}{2}\right)}{\rho} + O\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

где $O\left(\frac{1}{\rho}\right)$ — члены более высокого порядка малости, чем $\frac{1}{\rho}$. Из совпадения асимптотики левой и правой частей следует, что

$$C_m = (2m+1)(-i)^m.$$

63. Если $\mu = ka \ll 1$, то

$$\left.\begin{aligned} p_s &\approx -\frac{Aa\mu^2}{3r}\left(1 - \frac{3}{2}\cos\theta\right) e^{-ikr}, \\ v_s &= \frac{1}{c\rho}\, p_s \end{aligned}\right\} \text{ в волновой зоне } \quad (kr \gg 1).$$

Интенсивность звука, рассеянного сферой,

$$\overline{Y}_s = \frac{\mu^4 a^2}{9r^2}\, Y_0 \left(1 - \frac{3}{2}\cos\theta\right)^2 + \ldots, \quad Y_0 = \frac{A^2}{2c\rho_0}.$$

Полная мощность звука, рассеиваемого сферой,

$$\Pi_s = \frac{7\pi a^6 k^4}{9}\, Y_0 + \ldots = \frac{112}{9}\, \frac{\pi^5 a^6}{\lambda^4}\, \overline{Y}_0 + \ldots \quad (\lambda \text{ — длина волны}).$$

Сила, действующая на шар в направлении z

$$F = 2\pi a^2 \int_0^{\pi} p\big|_{r=a} \cos\theta \sin\theta\, d\theta = -2\pi i a^2 \mu A.$$

Давление на поверхности сферы

$$p_{\text{п}} = (p_0 + p_s)\big|_{r=a} = A\left(1 - \frac{3}{2}\, i\mu\cos\theta\right) + \ldots \quad \text{при} \quad \mu \ll 1.$$

Указание. Выражения для p_s и $\overline{Y}_s$, Π_s можно получить либо прямым расчетом, пользуясь приближенными формулами

$$\psi_0'(\mu) \approx -\frac{\mu}{3}, \quad \psi_1' \approx \frac{1}{3}, \quad \zeta_0^{(2)'} \approx -\frac{i}{\mu^2}, \quad \zeta_1^{(2)'} \approx -\frac{2i}{\mu^3} \quad (\mu \ll 1),$$

либо из полученных в решении предыдущей задачи 62 общих формул. При этом надо иметь в виду следующие приближенные формулы для β_m и D_m.

Если $\mu \gg m + \frac{1}{2}$, то

$$D_m \approx \frac{1}{\mu}, \quad \beta_m \approx \mu - \frac{1}{2}\,\pi(m+1).$$

Если $\mu \ll m + \dfrac{1}{2}$, то $D_0 \approx \dfrac{1}{\mu^2}$, $\beta_0 \approx \dfrac{1}{3}\,\mu^3$,

$$D_m \approx \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2m-1)(m+1)}{\mu^{m+2}},$$

$$\beta_m \approx \frac{m\mu^{2m+1}}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \ldots (2m-1)^2(2m+1)^2(m+1)}.$$

64. На шар падает плоская волна

$$p_0 = Ae^{-ikr\cos\theta}.$$

Давление в рассеянной волне

$$p_s = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \zeta_m^{(2)}(kr) P_m(\cos\theta),$$

где

$$B_m = -\frac{(-i)^n(2m+1)A\psi_m'(\mu)}{\zeta_m^{(2)'}(\mu)} \quad \text{при} \quad m \neq 1,$$

$$B_1 = 3iA\,\frac{\rho_0\psi_1(\mu) - \rho_1\psi'(\mu)\cdot\mu}{\rho_0\zeta_1^{(2)}(\mu) - \rho_1\zeta_1^{(2)'}(\mu)\mu},$$

ρ_1 — плотность шара.

Радиальная составляющая скорости

$$v_s = \frac{1}{c\rho_0} \sum_{m=0}^{\infty} B_m \zeta_m^{(2)'}(kr) P_m(\cos\theta)$$

(по поводу значения ψ_1 и $\zeta_1^{(2)}$ см. задачу 62).

Решение. Уравнение движения центра тяжести шара под действием воздуха имеет вид

$$M\ddot{\xi} = -\iint (\overline{p}_0 + \overline{p}_s)_{r=a} \cos\theta a^2\, d\Omega,$$

где $M = \dfrac{4\pi}{3}\, a^3\rho_1$ — масса шара, или

$$M\omega^2\xi = a^2 \iint (\overline{p}_0 + \overline{p}_s)_{r=a} \cos\theta\, d\Omega. \tag{1}$$

Граничное условие при $r = a$ можно записать таким образом:

$$\frac{i}{kc\rho_0}\,\frac{\partial}{\partial r}\,(\overline{p}_0 + \overline{p}_s)\Big|_{r=a} = i\omega\xi\cos\theta. \tag{2}$$

Перемножая (1) и (2), исключим ξ и получим граничное условие на поверхности шара

$$\frac{2a\rho_1}{3}\,\frac{\partial}{\partial r}\,(p_0 + p_s)\Big|_{r=a} = \rho_0\cos\theta \int_0^{\pi} (p_0 + p_s)_{r=a} P_1(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta, \tag{3}$$

где

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta.$$

Пользуясь разложением плоской волны по сферическим функциям

$$p_0 = Ae^{-ikr\cos\theta} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \psi_m(kr) P_m(\cos\theta), \quad A_m = (-i)^m (2m+1) A$$

и полагая

$$p_s = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \zeta_m^{(2)}(kr) P_m(\cos\theta),$$

получим из (3) в силу ортогональности полиномов Лежандра

$$B_m = \begin{cases} -\dfrac{\rho_0\psi_1(\mu) - \rho_1\psi_1'(\mu)\mu}{\rho_0\zeta_1^{(2)}(\mu) - \rho_1\mu\zeta_1^{(2)'}(\mu)} A & \text{при} \quad m = 1, \\ -\dfrac{A_m\psi_m'(\mu)}{\zeta_m^{(2)'}(\mu)} & \text{при} \quad m \neq 1. \end{cases}$$

65.

$$p_s = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \zeta_m^{(2)}(kr)\, P_m(\cos\theta),$$

где

$$B_1 = -A_1 \frac{\rho_0\psi_1(\mu) - \rho_1\left(1 - \dfrac{\mu_0^2}{\mu^2}\right)\mu\psi_1'(\mu)}{\rho_0\zeta_1^{(2)}(\mu) - \rho_1\left(1 - \dfrac{\mu_0^2}{\mu^2}\right)\mu\zeta_1^{(2)'}(\mu)}, \quad \mu_0 = \frac{\omega_0}{c}\, a, \quad \mu = ka,$$

$$B_m = -A_m \frac{\psi_m'(\mu)}{\zeta_m^{(2)'}(\mu)} \quad (m \neq 1).$$

При резонансе, т. е. при $\mu = \mu_0$,

$$B_1 = -A_1 \frac{\psi_1(\mu)}{\zeta_1^{(2)}(\mu)}.$$

Если на шар падает плоская волна, то $A_1 = -3i$. Если же нет внешнего поля, то мы получаем характеристическое уравнение

$$\rho_0\zeta_1^{(2)}(\mu) = \rho_1\left(1 - \frac{\mu_0^2}{\mu^2}\right)\mu\zeta_1^{(2)'}(\mu),$$

из которого определяется частота ω «свободных» колебаний шара, вызванных внешней средой.

Указание. См. предыдущую задачу.

§ 4. Установившиеся электромагнитные колебания

1. Уравнения Максвелла. Потенциалы. Векторные формулы Грина–Остроградского.

66. Уравнения Максвелла в непроводящей среде без источников

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\boldsymbol{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0, \quad \boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}, \\ \operatorname{rot}\boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{D} = 0, \quad \boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

в криволинейных ортогональных координатах имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\varepsilon}{c}\,h_2h_3\,\frac{\partial E_1}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_2}\,h_3H_3 - \frac{\partial}{\partial x_3}\,h_2H_2,\\
-\frac{\mu}{c}\,h_2h_3\,\frac{\partial H_1}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_2}\,h_3E_3 - \frac{\partial}{\partial x_3}\,h_2E_2,\\
\frac{\varepsilon}{c}\,h_3h_1\,\frac{\partial E_2}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_3}\,h_1H_1 - \frac{\partial}{\partial x_1}\,h_3H_3,\\
-\frac{\mu}{c}\,h_3h_1\,\frac{\partial H_2}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_3}\,h_1E_1 - \frac{\partial}{\partial x_1}\,h_3E_3,\\
\frac{\varepsilon}{c}\,h_1h_2\,\frac{\partial E_3}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\,h_2H_2 - \frac{\partial}{\partial x_2}\,h_1H_1,\\
-\frac{\mu}{c}\,h_1h_2\,\frac{\partial H_3}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\,h_2E_2 - \frac{\partial}{\partial x_2}\,h_1E_1,\\
\frac{\partial}{\partial x_1}\,h_2h_3H_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\,h_3h_1H_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\,h_1h_2H_3 &= 0,\\
\frac{\partial}{\partial x_1}\,h_2h_3E_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\,h_3h_1E_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\,h_1h_2E_3 &= 0\\
(ds^2 = h_1^2dx_1^2 + h_2^2dx_2^2 + h_3dx_3^2).&
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Если зависимость полей от времени дается множителем $e^{-i\omega t}$, то в этих уравнениях надо произвести замену, пользуясь соотношениями

$$\frac{1}{c}\,\frac{\partial E_m}{\partial t} = -ik_0E_m, \quad \frac{1}{c}\,\frac{\partial H_m}{\partial t} = -ik_0H_m \quad \left(k_0 = \frac{\omega}{c},\ m = 1,\,2,\,3\right). \qquad (3)$$

В сферической системе координат $x_1 = r$, $x_2 = \theta$, $x_3 = \varphi$ и $h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = r\sin\theta$. В цилиндрической системе координат

$$x_1 = \rho, \quad x_2 = \varphi, \quad x_3 = z \quad \text{и} \quad h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = 1.$$

Указание. Использовать выражения для операторов div и rot в криволинейной системе координат (см. Дополнение).

67. Если зависимость от времени дается множителем $e^{-i\omega t}$, то для векторного потенциала и скалярного потенциала можно написать уравнения

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta\boldsymbol{A} + k^2\boldsymbol{A} = -\frac{4\pi}{c}\,\mu\boldsymbol{j},\\
&\Delta\varphi + k^2\varphi = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\,\rho,
\end{aligned}\qquad k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}, \quad a^2 = \frac{c^2}{\varepsilon\mu},\right\} \qquad (1)$$

причем

$$\varphi = \frac{-ic}{\varepsilon\mu\omega}\ \operatorname{div}\boldsymbol{A}, \qquad (2)$$

т. е. скалярный потенциал может быть исключен ($\boldsymbol{j}$ — вектор плотности тока).

Выражение для $\Delta\boldsymbol{A}$ в произвольной ортогональной криволинейной системе координат имеет вид

$$\Delta\boldsymbol{A} = -\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A},$$

где

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\frac{1}{h_2h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{h_3}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2A_2)-\frac{\partial}{\partial x_2}(h_1A_1)\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{h_2}{h_3h_1}\left[\frac{\partial}{\partial x_3}(h_1A_1)-\frac{\partial}{\partial x_1}(h_3A_3)\right]\right\}i_1+$$
$$+\frac{1}{h_3h_1}\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{h_1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}(h_3A_3)-\frac{\partial}{\partial x_3}(h_2A_2)\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{h_3}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2A_2)-\frac{\partial}{\partial x_2}(h_1A_1)\right]\right\}i_2+$$
$$+\frac{1}{h_1h_2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{h_2}{h_3h_1}\left[\frac{\partial}{\partial x_3}(h_1A_1)-\frac{\partial}{\partial x_1}(h_3A_3)\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{h_1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}(h_3A_3)-\frac{\partial}{\partial x_3}(h_2A_2)\right]\right\}i_3,$$

$$\operatorname{grad}\psi=\frac{1}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\boldsymbol{i}_1+\frac{1}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\boldsymbol{i}_2+\frac{1}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\boldsymbol{i}_3,$$

$$\psi=\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2h_3A_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(h_1h_3A_2)+\frac{\partial}{\partial x_3}(h_1h_2A_3)\right],$$

где i_1, i_2, i_3 — единичные направляющие векторы координатной системы, A_1, A_2, A_3 — компоненты вектора $\boldsymbol{A}$.

68. В однородной проводящей среде уравнения Максвелла имеют вид [1)]

$$j_{\text{стр}}=0,\quad \rho=0,$$
$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\frac{4\pi}{c}\sigma\boldsymbol{E}+\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t},\quad &&\operatorname{div}\boldsymbol{E}=0,\\&\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t},\quad &&\operatorname{div}\boldsymbol{H}=0.\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

Полагая

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{E}=-\operatorname{grad}\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t},\tag{2}$$

получаем для $\boldsymbol{A}$ и φ уравнения

$$\Delta\varphi=\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t},\tag{3}$$

$$\Delta\boldsymbol{A}=\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}+\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t},\tag{4}$$

причем $\boldsymbol{A}$ и φ связаны условием Лоренца

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}+\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{4\pi\sigma\mu}{c}\varphi=0.\tag{5}$$

Если зависимость от времени типа $e^{-i\omega t}$, то

$$\Delta\varphi+k^2\varphi=0,\quad k^2=\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\omega^2+i\frac{4\pi\mu\sigma\omega}{c^2},\tag{3′}$$

[1)] См. [17, с. 420].

$$\Delta \boldsymbol{A} + k^2 \boldsymbol{A} = 0, \tag{4'}$$

$$\varphi = \frac{-i\omega}{ck^2} \operatorname{div} \boldsymbol{A}, \tag{5'}$$

т. е. при $\sigma \neq 0$ волновое число k всегда комплексно.

69. Если в вакууме ($\sigma = 0$, $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$) нет токов и свободных зарядов, то, полагая $\boldsymbol{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{\Pi}}{\partial t}$, $\varphi = -\operatorname{div} \boldsymbol{\Pi}$, получаем

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{\partial \boldsymbol{\Pi}}{\partial t}, \quad \boldsymbol{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{\Pi} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\Pi}}{\partial t^2}, \tag{1}$$

поляризационный потенциал $\boldsymbol{\Pi}$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta \boldsymbol{\Pi} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\Pi}}{\partial t^2} = 0. \tag{2}$$

Для временной зависимости типа $e^{-i\omega t}$ имеем

$$\boldsymbol{H} = -ik \operatorname{rot} \boldsymbol{\Pi}, \quad \boldsymbol{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{\Pi} + k^2 \boldsymbol{\Pi}, \tag{1'}$$

и

$$\Delta \Pi + k^2 \boldsymbol{\Pi} = 0. \tag{2'}$$

Магнитный вектор Герца $\boldsymbol{\Pi'}$ вводится так:

$$\boldsymbol{H'} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{\Pi'} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\Pi'}}{\partial t^2}, \quad \boldsymbol{E'} = -\frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{\partial \boldsymbol{\Pi'}}{\partial t}, \tag{3}$$

причем

$$\Delta \boldsymbol{\Pi'} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \boldsymbol{\Pi'}}{\partial t^2}. \tag{4}$$

Для временной зависимости типа $e^{-i\omega t}$ имеем

$$\boldsymbol{H'} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{\Pi'} + k^2 \boldsymbol{\Pi'}, \quad \boldsymbol{E'} = ik \operatorname{rot} \boldsymbol{\Pi'}, \tag{3'}$$

$$\Delta \boldsymbol{\Pi'} + k^2 \boldsymbol{\Pi'} = 0. \tag{4'}$$

Используя уравнения (2') и (4') для $\boldsymbol{\Pi}$ и $\boldsymbol{\Pi'}$, можно формулы для $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H'}$ переписать иначе:

$$\boldsymbol{E} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{\Pi}, \quad \boldsymbol{H'} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{\Pi'}.$$

В проводящей среде для установившихся полей ($\sim e^{-i\omega t}$) $\boldsymbol{\Pi}$ и $\boldsymbol{\Pi'}$ формально вводятся так же, как и для вакуума; однако в этом случае под k^2 надо понимать величину

$$k^2 = \frac{\varepsilon \mu \omega^2}{c^2} + i \frac{4\pi \sigma \mu}{c^2}.$$

70. В сферической системе координат имеем:

а) для поля электрического типа ($H_r = 0$)

$$\left.\begin{aligned} &E_r = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + k^2 U, \quad E_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial r\, \partial \theta}, \quad E_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial r\, \partial \varphi}, \\ &H_r = 0, \qquad\qquad H_\theta = \frac{-ik}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad H_\varphi = \frac{ik}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}; \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

б) для поля магнитного типа ($E_r = 0$)

$$\left.\begin{aligned} &E'_r = 0, && E'_\theta = \frac{ik}{r\sin\theta}\frac{\partial U'}{\partial\varphi}, && E'_\varphi = \frac{-ik}{r}\frac{\partial U'}{\partial\theta},\\ &H'_r = \frac{\partial^2 U'}{\partial r^2} + k^2 U', && H'_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 U'}{\partial r\,\partial\theta}, && H'_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2 U'}{\partial r\,\partial\varphi}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

причем потенциалы U и U' удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} + k^2 U = 0, \tag{3}$$

или

$$\Delta U + k^2 U - \frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r} = 0,$$

а функции $u = Ur$, $u' = U'r$ удовлетворяют волновому уравнению

$$\Delta u + k^2 u = 0.$$

В цилиндрической системе координат (z, φ, ρ):

а) для поля электрического типа ($H_z = 0$)

$$\left.\begin{aligned} &E_z = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k^2 U, && E_\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi\,\partial z}, && E_\rho = \frac{\partial^2 U}{\partial\rho\,\partial z},\\ &H_z = 0, && H_\varphi = -ik\frac{\partial U}{\partial\rho}, && H_\rho = \frac{ik}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\varphi}; \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

б) для поля магнитного типа ($E_z = 0$) имеем

$$\left.\begin{aligned} &E'_z = 0, && E'_\varphi = ik\frac{\partial U'}{\partial\rho}, && E'_\rho = \frac{-ik}{\rho}\frac{\partial U'}{\partial\varphi},\\ &H'_z = \frac{\partial^2 U'}{\partial z^2} + k^2 U', && H'_\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 U'}{\partial\varphi\,\partial z}, && H'_\rho = \frac{\partial^2 U'}{\partial\rho\,\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

причем U и U' удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} + k^2 U = 0, \tag{6}$$

или

$$\Delta U + k^2 U = 0.$$

Отсюда получаем

$$U = \mathbf{\Pi}_{\boldsymbol{z}}, \quad U' = \mathbf{\Pi}'_{\boldsymbol{z}}.$$

В сферическом случае

$$U \neq \mathbf{\Pi}_{\boldsymbol{r}} \quad \text{и} \quad U' \neq \mathbf{\Pi}'_{\boldsymbol{r}}.$$

У к а з а н и е. Для доказательства основного утверждения задачи надо подставить выражения для составляющих полей через U (или U') в уравнения Максвелла, расписанные в ортогональной криволинейной системе координат (см. задачу 66), и потребовать их выполнения; из этого требования следует уравнение для U (или U').

71. $E_1 = k^2 U + \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}$, $E_2 = \dfrac{1}{h_2}\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1\,\partial x_2} + \dfrac{i\omega\mu}{c}\dfrac{1}{h_3}\dfrac{\partial U'}{\partial x_3}$,

$$E_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial^2 U}{\partial x_1\,\partial x_3} - \frac{i\omega\mu}{c}\frac{1}{h_2}\frac{\partial U'}{\partial x_2},$$

$$H_1 = k^2 U' + \frac{\partial^2 U'}{\partial x_1^2}, \quad H_2 = -\frac{ik^2 c}{\omega\mu}\frac{1}{h_3}\frac{\partial U}{\partial x_3} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial^2 U'}{\partial x_1 \partial x_2},$$

$$H_3 = \frac{ick^2}{\omega\mu}\frac{1}{h_2}\frac{\partial U}{\partial x_2} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial^2 U'}{\partial x_1 \partial x_3},$$

где U и U' — решения уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_3}{h_2}\frac{\partial U}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{h_2}{h_3}\frac{\partial U}{\partial x_3}\right)\right] + k^2 U = 0,$$

$$k^2 = \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2} + i\,\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\,\omega.$$

Указание. См. задачу 70.

72. На границе раздела двух сред при $r = a$ должны выполняться условия

$$\frac{k_1^2}{\mu_1}U_1 = \frac{k_2^2}{\mu_2}U_2, \quad \frac{k_1^2}{\mu_1}U_1' = \frac{k_2^2}{\mu_2}U_2',$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial r} = \frac{\partial U_2}{\partial r}, \quad \frac{\partial U_1'}{\partial r} = \frac{\partial U_2'}{\partial r},$$

где значок 1 или 2 означает номер среды (1 при $r < a$, 2 при $r > a$), k_1 и k_2 определяются по формуле

$$k_s^2 = \frac{\varepsilon_s\mu_s\omega^2}{c^2} + i\,\frac{4\pi\sigma_s\mu_s\omega}{c^2}, \quad s = 1, 2.$$

Функции U_s и U_s' удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2 U_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial U_s}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U_s}{\partial\varphi^2} + k_s^2 U_s = 0, \quad s = 1, 2,$$

так что

$$\Delta u_s + k_s^2 u_s = 0, \quad u_s = \frac{U_s}{r} \quad (s = 1, 2).$$

Указание. На границе сред 1 и 2 тангенциальные составляющие вектора напряженности электрического поля и вектора напряженности магнитного поля, в данном случае E_θ, E_φ, H_θ, H_φ, должны быть непрерывны.

73. Указание. Воспользоваться векторной формулой

$$\operatorname{div}[\boldsymbol{ab}] = (\boldsymbol{b}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{b}) \tag{1}$$

и формулой Остроградского.

74. Решение. В формуле

$$\int_T \{\boldsymbol{W}\operatorname{rot}\operatorname{rot}U - \boldsymbol{U}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{W}\}\,d\tau = \int_\Sigma \{[U\operatorname{rot}\boldsymbol{W}] - [\boldsymbol{W}\operatorname{rot}U]\}\,\boldsymbol{n}\,d\sigma \tag{1}$$

полагаем: $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{a}\varphi$, где $\varphi = \dfrac{e^{ikr}}{r}$, $\boldsymbol{a}$ — произвольный постоянный вектор. Вычисления дают

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{W} = [\operatorname{grad}\varphi, \boldsymbol{a}], \quad \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{W} = \boldsymbol{a}k^2\varphi + \operatorname{grad}(\boldsymbol{a}\operatorname{grad}\varphi),$$

$$\boldsymbol{U}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{W} = \boldsymbol{a}\{k^2\varphi\boldsymbol{U} - \operatorname{grad}\varphi\operatorname{div}\boldsymbol{U}\} + \operatorname{div}[(a\operatorname{grad}\varphi)\boldsymbol{U}],$$

$$[\boldsymbol{W}\operatorname{rot}\boldsymbol{U}]\,\boldsymbol{n} = [\operatorname{rot}\boldsymbol{U},\,\boldsymbol{n}]\,\boldsymbol{W},$$

$$[\boldsymbol{U}\operatorname{rot}\boldsymbol{W}]\,\boldsymbol{n} = [\boldsymbol{U}[\operatorname{grad}\varphi,\,\boldsymbol{a}]] = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{a})(\operatorname{grad}\varphi,\,\boldsymbol{n}) - (\boldsymbol{A},\operatorname{grad}\varphi)(\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}).$$

В силу формулы Остроградского

$$\int\limits_T \operatorname{div}[(\boldsymbol{a}\operatorname{grad}\varphi)\boldsymbol{U}]\,d\tau = \int\limits_\Sigma (U\boldsymbol{n})(\operatorname{grad}\varphi,\boldsymbol{a})\,d\sigma. \tag{2}$$

Под знаком поверхностного интеграла в формуле (1) стоит выражение $\boldsymbol{F}\boldsymbol{a}$, где

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{U}(\operatorname{grad}\varphi,\,\boldsymbol{n}) - (\boldsymbol{U}\operatorname{grad}\varphi)\,\boldsymbol{n} - [\operatorname{rot}\boldsymbol{U},\,\boldsymbol{n}]\,\varphi + (\boldsymbol{U}\boldsymbol{n})\operatorname{grad}\varphi = \\ = (\boldsymbol{U}\boldsymbol{n})\operatorname{grad}\varphi + [\operatorname{grad}\varphi[\boldsymbol{U}\boldsymbol{n}]] + [\boldsymbol{n}\operatorname{rot}\boldsymbol{U}]\,\varphi.\end{aligned} \tag{3}$$

Подынтегральное выражение, стоящее в левой части, имеет вид $\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{a}$, где

$$\boldsymbol{\Phi} = (\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{U} - k^2 U)\,\varphi + \operatorname{grad}\varphi\operatorname{div}\boldsymbol{U}.$$

Вектор $\boldsymbol{a}$ является, таким образом, общим множителем для всех членов формулы (1), и так как он произволен, то на него можно сократить; в результате мы получаем формулу

$$\int\limits_T \boldsymbol{\Phi}\,d\tau = \int\limits_\Sigma \boldsymbol{F}\,d\sigma, \tag{4}$$

если точка M_0 не принадлежит области T. Если же точка M_0 находится внутри T, то мы опишем вокруг этой точки небольшую сферу Σ_ε радиусом ε и применим формулу (4) к области $T - T_\varepsilon$, ограниченной поверхностями Σ и Σ_ε. Оценим величину $\boldsymbol{F}$ на Σ_ε.

Заметим, что

$$\operatorname{grad}\varphi\big|_{\Sigma_\varepsilon} = \left(\frac{1}{r} - ik\right), \quad \varphi\big|_{\Sigma_\varepsilon}\boldsymbol{n} \approx \frac{1}{\varepsilon^2}\,\boldsymbol{n}, \quad \varphi\big|_{\Sigma_\varepsilon} \approx \frac{1}{\varepsilon}.$$

Поэтому

$$\boldsymbol{F}\big|_{\Sigma_\varepsilon} = \left(\frac{1}{\varepsilon} - ik\right)\varphi(\varepsilon)\,\{(\boldsymbol{U}\boldsymbol{n})\,\boldsymbol{n} + [\boldsymbol{n}[\boldsymbol{U}\boldsymbol{n}]]\} - [\operatorname{rot}\boldsymbol{U}\boldsymbol{n}]\,\varphi(\varepsilon) \approx \frac{\boldsymbol{U}}{\varepsilon^2}$$

и, следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Sigma_\varepsilon} \boldsymbol{F}\,d\sigma = 4\pi\boldsymbol{U}(M_0).$$

Поскольку $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{T_\varepsilon} \boldsymbol{\Phi}\,d\tau = 0$, то мы получаем в пределе

$$\boldsymbol{U}(M_0) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_T \boldsymbol{\Phi}\,d\tau - \frac{1}{4\pi}\int\limits_\Sigma \boldsymbol{F}\,d\sigma$$

или

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}(M_0) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_\Sigma \{(\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{U} - k^2\,\boldsymbol{U})\varphi + \operatorname{grad}\varphi\operatorname{div}\boldsymbol{U}\}\,d\tau_M - \\ - \frac{1}{4\pi}\int\limits_T \{(\boldsymbol{U}\boldsymbol{n})\operatorname{grad}\varphi + [[\boldsymbol{n}\boldsymbol{U}]\operatorname{grad}\varphi] + [\boldsymbol{n}\operatorname{rot}\boldsymbol{U}]\,\varphi\}\,d\sigma_M.\end{aligned} \tag{5}$$

75. $E(M_0) = \dfrac{1}{c\omega\varepsilon}\int\limits_T \{-k^2\varphi\boldsymbol{j} + \operatorname{grad}\varphi \operatorname{div}\boldsymbol{j}\}\,d\tau -$

$$- \frac{1}{4\pi}\int\limits_\Sigma \{ik_0\mu[\boldsymbol{nH}]\,\varphi + [[\boldsymbol{nE}]\operatorname{grad}\varphi] + (\boldsymbol{nE})\operatorname{grad}\varphi\}\,d\sigma,$$

$$\boldsymbol{H}(M_0) = \frac{1}{c}\int\limits_T [\boldsymbol{j}\operatorname{grad}\varphi]\,d\tau +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int\limits_\Sigma \{ik_0\varepsilon[\boldsymbol{nE}] - [[\boldsymbol{nH}]\operatorname{grad}\varphi] - (\boldsymbol{nH})\operatorname{grad}\varphi\}\,d\sigma,$$

где

$$\varphi = \frac{e^{ikr}}{r}, \quad k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}, \quad k_0 = \frac{\omega}{c}.$$

Указание. В общей формуле (5) в ответе 74 положить соответственно $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{H}$. Во втором случае справа появляется слагаемое $\int\limits_\Sigma [\boldsymbol{nj}]\varphi\,d\sigma$, которое следует преобразовать к объемному интегралу с помощью формулы

$$\int\limits_\Sigma [\boldsymbol{nj}]\,\varphi\,d\sigma = \int\limits_T \{-[\boldsymbol{j}\operatorname{grad}\varphi] + \varphi\operatorname{rot}\boldsymbol{j}\}\,d\tau. \tag{1}$$

Для ее доказательства надо умножить обе части на произвольный вектор $\boldsymbol{a}$ и использовать соотношения

$$[\boldsymbol{nj}]\boldsymbol{a}\varphi = \boldsymbol{n}[\boldsymbol{ja}]\,\varphi,$$

$$\operatorname{div}[\boldsymbol{j},\,\boldsymbol{a}\,\varphi] = \boldsymbol{a}\,\varphi\operatorname{rot}\boldsymbol{j} - (\boldsymbol{j}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}\varphi) = \boldsymbol{a}\{\varphi\operatorname{rot}\boldsymbol{j} - [\boldsymbol{j}\operatorname{grad}\varphi]\},$$

так что

$$\int\limits_\Sigma \boldsymbol{a}[\boldsymbol{nj}]\,\varphi\,d\sigma = \int\limits_T \operatorname{div}[\boldsymbol{j},\,\boldsymbol{a}\varphi]\,d\tau = \boldsymbol{a}\int\limits_T \{\varphi\operatorname{rot}\boldsymbol{j} - [\boldsymbol{j}\operatorname{grad}\varphi]\}\,d\tau.$$

Отсюда в силу произвольности $\boldsymbol{a}$ и следует (1).

2. Распространение электромагнитных волн и колебания в резонаторах.

76. Направим ось z цилиндрической системы координат ρ, φ, z вдоль оси цилиндра.

Пусть $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\sigma}$ — параметры окружающей среды. Существуют волны вида

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{-i\alpha z + i\omega t}e^{-\beta|z|} \quad (\alpha > 0),$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 e^{-i\alpha z + i\omega t}e^{-\beta|z|} \quad (\beta > 0),$$

т. е. волны затухающие. Здесь приняты обозначения

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{\varepsilon^2\mu^2\omega^4 + 16\pi^2\sigma^2\mu^2\omega^2} + \varepsilon\mu\omega^2}{2c^2}},$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\sqrt{\varepsilon^2\mu^2\omega^4 + 16\pi^2\sigma^2\mu^2\omega^2} - \varepsilon\mu\omega^2}{2c^2}},$$

$$\boldsymbol{E}_0 = (E_{0\rho},\, E_{0\varphi},\, 0), \quad \boldsymbol{H}_0 = (H_{0\rho},\, H_{0\varphi},\, 0),$$

причем

$$E_{0\rho} = \frac{Ak}{\rho}, \quad H_{0\varphi} = -\frac{ck}{\omega\mu}\, E_{0\rho},$$

$$E_{0\varphi} = \frac{\mu\omega}{kc}\, H_{0\rho}, \quad H_{0\rho} = \frac{Bk}{\rho},$$

где A и B — постоянные множители,

$$k^2 = \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2} - i\,\frac{4\pi\sigma\mu\omega}{c^2}, \quad k = \alpha - i\beta.$$

Если $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$ (вакуум), то $k = \dfrac{\omega}{c}\, k_0$ — волны вдоль такого провода распространяются со скоростью света:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{\boldsymbol{i}(\omega t - k_0 z)}, \quad E_{0\rho} = \frac{Ak_0}{\rho}, \quad H_{0\varphi} = -E_{0\rho},$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 e^{\boldsymbol{i}(\omega t - k_0 z)}, \quad E_{0\varphi} = H_{0\rho}, \quad H_{0\rho} = \frac{Bk_0}{\rho}.$$

77. Решение. Пусть ε_1, μ_1, σ_1 — характеристики провода, ε_2, μ_2, σ_2 — характеристики окружающей среды.

Выберем цилиндрическую систему координат $(\rho,\, \varphi,\, z)$, направив ось z вдоль оси цилиндра и поместив начало координат на оси цилиндра.

Обозначая $\Pi_z = u$, $\Pi'_z = v$ и предполагая, что зависимость u и v от z дается множителем $e^{i\gamma z}$, т. е. $u = u^0 e^{i\gamma z}$, $v = v^0 e^{i\gamma z}$ и т. д., получаем после сокращения на этот множитель

$$\left.\begin{aligned} E_z^0 &= p^2 u^0, \quad & E_\varphi^0 &= \frac{i\gamma}{\rho}\,\frac{\partial u^0}{\partial \varphi} - \frac{i\omega\mu}{c}\,\frac{\partial v^0}{\partial \rho}, \\ & & E_\rho^0 &= i\gamma\,\frac{\partial u^0}{\partial \rho} + \frac{i\omega\mu}{c\rho}\,\frac{\partial v^0}{\partial \rho}, \\ H_z^0 &= p^2 v^0, \quad & H_\varphi^0 &= -\frac{ik^2 c}{\omega\mu}\,\frac{\partial u^0}{\partial \rho} + \frac{i\gamma}{\rho}\,\frac{\partial v^0}{\partial \varphi}, \\ & & H_\rho^0 &= \frac{ik^2 c}{\omega\mu}\,\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial u^0}{\partial \varphi} + i\gamma\,\frac{\partial v^0}{\partial \rho}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $p^2 = k^2 - \gamma^2$, $k^2 = \dfrac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2} - i\,\dfrac{4\pi\sigma\mu\omega}{c^2}$, функции

$$u^0 = \alpha\psi(\rho,\, \varphi) \quad \text{и} \quad v^0 = \beta\psi(\rho,\, \varphi), \tag{2}$$

где α и β — постоянные, $\psi(\rho,\, \varphi)$ — решение уравнения

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\,\frac{\partial \psi}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \rho^2\psi = 0.$$

Отсюда находим частные решения вида

$$\psi_n(\rho,\, \varphi) = \begin{cases} J_n(p\rho)e^{in\varphi} & \text{внутри цилиндра,} \\ H_n^{(1)}(p\rho)e^{in\varphi} & \text{вне цилиндра.} \end{cases} \tag{3}$$

Подставляя выражение для ψ_n в формулы (1) и (2), получаем:

внутри цилиндра

$$E_z^0 = \alpha_1 p_1^2 J_n(p_1\rho)e^{in\varphi}, \quad H_z^0 = \beta_1 p_1^2 J_n(p_1\rho)e^{in\varphi},$$

$$E_\varphi^0 = \left[-\frac{\gamma n}{\rho}\,\alpha_1 J_n(p_1\rho) + \frac{i\omega\mu_1 p_1}{c}\,\beta_1 J_n'(p_1\rho)\right] e^{in\varphi},$$

$$H_\varphi^0 = \left[-\frac{\gamma n}{\rho}\,\beta_1 J_n(p_1\rho) - \frac{ik_1^2 cp_1}{\omega\mu_1}\,\alpha_1 J_n'(p_1\rho)\right] e^{in\varphi},$$

$$E_\rho^0 = \left[\frac{\omega\mu_1 n}{c\rho}\,\beta_1 J_n(p_1\rho) + i\gamma p_1\alpha_1 J_n'(p_1\rho)\right] e^{in\varphi},$$

$$H_\rho^0 = \left[-\frac{k_1^2 cn}{\omega\mu_1\rho}\,\alpha_1 J_n(p_1\rho) + ip_1\beta_1 J_n'(p_1\rho)\right] e^{in\varphi};$$

вне цилиндра

$$E_z^0 = \alpha_2 p_2^2 H_n^{(1)}(p_2\rho)e^{in\varphi}, \quad H_z^0 = \beta_2 p_2^2 H_n^{(1)}(p_2\rho)e^{in\varphi},$$

$$E_\varphi^0 = \left[-\frac{\gamma n}{\rho}\,\alpha_2 H_n^{(1)}(p_2\rho) + \frac{i\omega\mu_2 p_2}{c}\,\beta_2 H_n^{(1)'}(p_2\rho)\right] e^{in\varphi},$$

$$H_\varphi^0 = \left[-\frac{\gamma n}{\rho}\,\beta_2 H_n^{(1)}(p_2\rho) - \frac{ik^2 cp_2}{\omega\mu_2}\,\alpha_2 H_n^{(1)'}(p_2\rho)\right] e^{in\varphi},$$

$$H_\varphi^0 = \left[\frac{\omega\mu_2 n}{c\rho}\,\beta_2 H_n^{(1)}(p_2\rho) + i\gamma p_2\alpha_2 H_n^{(1)'}(p_2\rho)\right] e^{in\varphi},$$

$$H_\rho^0 = \left[-\frac{k_2^2 cn}{\omega\mu_2\rho}\,\alpha_2 H_n^{(1)}(p_2\rho) + i\gamma p_2\beta_2 H_n^{(1)'}(p_2\rho)\right] e^{in\varphi}.$$

На границе при $\rho = a$ должны быть непрерывно тангенциальные составляющие $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$. Это дает четыре однородных уравнения с четырьмя неизвестными α_1, α_2, β_1 и β_2. Приравнивая определитель системы нулю, получаем дисперсионное уравнение относительно γ

$$\left[\frac{k_1^2}{\mu_1\xi}\,\frac{J_n'(\xi)'}{J_n(\xi)} - \frac{k_2^2}{\mu_2\eta}\,\frac{H_n^{(1)'}(\eta)}{H_n^{(1)}(\eta)}\right]\left[\frac{\mu_1}{\xi}\,\frac{J_n'(\xi)}{J_n(\xi)} - \frac{\mu_2}{\eta}\,\frac{H_n^{(1)'}(\eta)}{H_n^{(1)}(\eta)}\right] = n^2\gamma^2\left(\frac{1}{\eta^2} - \frac{1}{\xi^2}\right)^2, \tag{4}$$

где $\xi = p_1 a$, $\eta = p_2 a$, a — радиус цилиндра. Это уравнение имеет бесчисленное множество корней γ_{nm} (см. [35, с. 460]).

Для основной волны $n = 0$ дисперсионное уравнение распадается на два уравнения:

$$\frac{\eta H_0^{(1)}(\eta)}{H_1^{(1)}(\eta)} = \frac{k_2^2\mu_1}{k_1^2\mu_2}\,\frac{\xi J_0(\xi)}{J_1(\xi)}, \tag{5}$$

$$\frac{\eta H_0^{(1)}(\eta)}{H_1^{(1)}(\eta)} = \frac{\mu_2}{\mu_1}\,\frac{\xi J_0(\xi)}{J_1(\xi)}. \tag{6}$$

Первое из них определяет допустимые волны магнитного типа, а второе — волны электрического типа.

78. Пусть Σ — поверхность трубы, S — ее перпендикулярное сечение, C — граница S. Направим ось z параллельно образующей трубы. Зависимость от времени $e^{-i\omega t}$.

Любое поле внутри волновода можно представить в виде суммы полей электрического типа ($H_z = 0$) и магнитного типа ($E_z = 0$), каждое из которых определяется z-компонентой соответствующего вектора Герца (см. задачу 69).

Если $H_z = 0$, то, полагая $\Pi_z = \Pi$, получаем задачу для скалярной функции

$$\Delta\Pi + k^2\Pi = 0 \quad \text{внутри} \quad \Sigma \quad \left(k = \frac{\omega}{c}\right),$$

$$\Pi = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma.$$

Если $E_z = 0$, то $\Pi'_z = \Pi'$ и

$$\Delta\Pi' + k^2\Pi' = 0 \quad \text{внутри} \quad \Sigma,$$

$$\frac{\partial\Pi'}{\partial\nu} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma.$$

Существуют частные решения вида

$$\Pi(M, z) = \psi_n(M)e^{i\gamma_n z}, \quad \Pi'(M, z) = \hat{\psi}_n(M)e^{i\hat{\gamma}_n z},$$

где $\gamma_n = \sqrt{k^2 - \lambda_n}$, $\hat{\gamma}_n = \sqrt{k^2 - \hat{\lambda}_n}$, λ_n и $\hat{\lambda}_n$ — собственные значения краевых задач

$$\Delta_2\psi_n + \lambda_n\psi_n = 0 \text{ в } S, \quad \psi_n = 0 \text{ на } C,$$

$$\Delta_2\hat{\psi}_n + \hat{\lambda}_n\hat{\psi}_n = 0 \text{ в } S, \quad \frac{\partial\hat{\psi}_n}{\partial\nu} = 0 \text{ на } C.$$

Если $\lambda_n \leqslant k^2$ для $n = 1, 2, \ldots, N$ и $\lambda_n > k^2$ для $n = N+1, N+2, \ldots$, то существует N бегущих волн, каждая из которых распространяется с фазовой скоростью

$$v_n = \frac{kc}{\gamma_n} = \frac{c}{\sqrt{1 - \dfrac{\lambda_n}{k^2}}}.$$

Если $\lambda_1 > k^2$, то бегущих волн в трубе не может быть.

Если $\Pi(M, z) = A_n\psi_n(M)e^{i\gamma_n z}$, то поток энергии через поперечное сечение равен

$$Y_z = |A_n|^2 \frac{ck}{8\pi}\gamma_n\lambda_n.$$

При этом предполагается, что $\psi_n(M)$ нормированы к единице

$$\int_S \psi_n^2\, dS = 1.$$

Указание. Если ввести прямоугольную систему координат, то

$$E_x = \frac{\partial^2\Pi}{\partial x\,\partial z}, \quad E_y = \frac{\partial^2\Pi}{\partial y\,\partial z}, \quad E_z = \frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2} + k^2\Pi,$$

$$H_x = -ik\frac{\partial\Pi}{\partial y}, \quad H_y = ik\frac{\partial\Pi}{\partial x}, \quad H_z = 0.$$

Задача, полученная для Π', аналогична задаче 42 о распространении акустических волн в цилиндрической трубе с жесткими стенками (см. [7, с. 528]).

79. Бегущие волны могут существовать при выполнении следующих условий:

а) если $\lambda_{m,\,n} = \left[\mu_m^{(n)}\right]^2 < k^2$, то существует столько бегущих волн, сколько имеется линейно независимых решений волнового уравнения для $\lambda_{m,\,n}$, удовлетворяющих этому неравенству; здесь $\mu_m^{(n)}$ — корень уравнения

$$\frac{J_n(\mu a)}{J_n(\mu b)} = \frac{N_n(\mu a)}{N_n(\mu b)};$$

в этом случае могут быть волны электрического типа;

б) для всех собственных значений $\hat{\lambda}_{m,\,n}$, для которых выполняется неравенство

$$\hat{\lambda}_{m,\,n} = \left[\hat{\mu}_m^{(n)}\right]^2 < k^2,$$

где $\hat{\mu}_m^{(n)}$ — корень уравнения

$$J_n'(\mu a)\, N_n'(\mu b) - J_n'(\mu b)\, N_n'(\mu a) = 0,$$

существуют бегущие волны магнитного типа ($E_z = 0$).

Для основной волны электрического типа ($n = 0$) имеем

$$\Pi_z = \Pi = A_m R_m(\rho) e^{i(\gamma_m z - \omega t)}, \quad \gamma_m = k\sqrt{1 - \frac{\mu_m^2}{k^2}},$$

где A_m — коэффициент,

$$R_m(\rho) = J_0(\mu_m \rho)\, N_0(\mu_m a) - J_0(\mu_m a)\, N_0(\mu_m \rho),$$

μ_m — корень номера m уравнения

$$J_0(\mu a)\, N_0(\mu b) - J_0(\mu b)\, N_0(\mu a) = 0.$$

Поток энергии через поперечное сечение равен

$$Y_z = \frac{ck^2}{4\pi^3} |A_m|^2 \sqrt{1 - \frac{\mu_m^2}{k^2}}\, \frac{J_0^2(\mu_m a) - J_0^2(\mu_m b)}{J_0^2(\mu_m b)}.$$

Составляющие поля даются формулами

$$E_z = \lambda_m \Pi, \quad E_\varphi = 0, \quad E_\rho = i\gamma_m A_m R_m'(\rho) e^{i(\gamma_m z - \omega t)},$$
$$H_z = 0, \quad H_\varphi = -A_m ikR_m'(\rho) e^{i(\gamma_m z - \omega t)}, \quad H_\rho = 0,$$

так что

$$H_\varphi = -\frac{k}{\gamma_m} E_\rho.$$

Указание. Следует воспользоваться результатами задачи 78, предположив, что область S имеет форму кольца с радиусами a и b. Собственные функции кольцевой мембраны с закрепленными и свободными границами даны соответственно в ответе к задаче 27.

80. Пусть начало сферической системы координат (r, θ, φ) находится в центре сферического резонатора. Зависимость о времени типа $e^{-i\omega t}$.

Колебания электрического типа определяются по формулам

$$E_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru) + k^2(ru), \quad E_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(ru)}{\partial r\,\partial\theta}, \quad E_\varphi = \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial^2(ru)}{\partial r\,\partial\varphi},$$

$$H_r = 0, \quad H_\theta = \frac{-ik}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}, \quad H_\varphi = ik\frac{\partial u}{\partial\theta},$$

где $u = u_{m,n}$ — собственная функция краевой задачи

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad u = 0 \quad \text{при} \quad r = a,$$

определяемая формулой

$$u_{m,n}(r,\theta,\varphi) = \psi_n(k_{m,n}r)\,Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$$
$$(n = 1, 2, \ldots;\ m = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm n,$$

где $k_{m,n} = \dfrac{\omega_{m,n}}{c}$ — собственное волновое число, являющееся корнем уравнения

$$\frac{J_{n+1/2}(ka)}{J_{n-1/2}(ka)} = \frac{ka}{n+1}, \quad \psi_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}\,J_{n+1/2}(\rho),$$

$Y_n^{(m)}(\theta,\varphi) = P_n^{(m)}(\cos\theta)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi$ — сферическая функция.

Самая низкая собственная частота соответствует $n = 0$: $u_{m,0}(r) = \psi_0(k_m r)$, причем k_m определяется из уравнения

$$\frac{J_{1/2}(ka)}{J_{-1/2}(ka)} = ka,$$

т. е.

$$\operatorname{tg}(ka) = ka.$$

Для колебаний магнитного типа ($E_r = 0$) имеем

$$E_r = 0, \qquad E_\theta = \frac{ik}{\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial\varphi}, \quad E_\varphi = -ik\frac{\partial v}{\partial\theta},$$

$$H_r = \frac{\partial^2(rv)}{\partial r^2} + k^2(rv), \quad H_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(rv)}{\partial r\,\partial\theta}, \quad H_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(rv)}{\partial r\,\partial\varphi},$$

где

$$v = v_{m,n} = \psi_n(k_{m,n}r)\,Y_n^{(m)}(\theta,\varphi),$$

причем $k_{m,n}$ определяется из уравнения

$$J_{n+1/2}(ka) = 0.$$

При $n = 0$ получаем:

$$v_{m,0} = \psi_0(k_m r),$$

где

$$k_m = \frac{\pi m}{a}, \quad \omega_1 = c\frac{\pi}{a}.$$

Указание. Ср. с задачей 25 о собственных акустических колебаниях сферы.

81. Рассматривается отрезок цилиндрического волновода произвольного сечения, ограниченный двумя плоскостями $z = \pm l$ (ось z параллельна образующей цилиндра, см. задачу 78).

Колебания электрического типа ($H_z = 0$)

$$\Pi_z = \Pi_{m,\,n} = A_{m,\,n}\psi_n(M)\cos\frac{\pi m}{2l}\,(l - z),$$

где $\psi_n(M)$ — собственная функция краевой задачи

$$\Delta_2\psi_n + \lambda_n\psi_n = 0 \text{ в } S, \quad \psi_n = 0 \text{ на } C.$$

Собственные частоты

$$\omega_{m,\,n} = c\sqrt{\lambda_n + \left(\frac{\pi m}{2l}\right)^2}.$$

Колебания магнитного типа ($E_z = 0$)

$$\hat{\Pi}_z = \hat{\Pi}_{m,\,n}(M,\,z) = \hat{A}_{m,\,n}\hat{\psi}_n(M)\sin\frac{\pi m}{2l}\,(l - z),$$

где $\hat{\psi}_n(M)$ — собственная функция краевой задачи

$$\Delta_2\hat{\psi}_n + \hat{\lambda}_n\hat{\psi}_n = 0 \text{ в } S, \quad \frac{\partial\hat{\psi}_n}{\partial\nu} = 0 \text{ на } C.$$

Собственные частоты

$$\hat{\omega}_{m,\,n} = c\sqrt{\lambda_n + \left(\frac{\pi m}{2l}\right)^2}.$$

Средняя за период электрическая энергия в стоячей волне равна среднему за период значению магнитной энергии

$$\overline{\mathcal{E}}_{\text{эл}} = \mathcal{E}_{\text{м}} = \frac{1}{16\pi}\,ck^2\lambda_n|A_n|^2.$$

Полная энергия стоячей волны не меняется во времени и равна

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi}\,ck^2\lambda_n|A_n|^2.$$

Для резонатора с круглым или прямоугольным сечением формулы для Π остаются в силе; туда следует лишь подставить конкретное выражение для собственной функции.

а) Для прямоугольного сечения со сторонами a и b

$$\psi_n(M) = \psi_{n,\,m}(x,\,y) = \sqrt{\frac{4}{ab}}\sin\frac{\pi m}{a}x\sin\frac{\pi n}{b}\,y,$$

$$\hat{\psi}_n(M) = \hat{\psi}_{n,\,m}(x,\,y) = \sqrt{\frac{\varepsilon_m\varepsilon_n}{ab}}\cos\frac{\pi m}{a}x\cos\frac{\pi n}{b}\,y,$$

$$\varepsilon_k = 2, \quad k \neq 0, \quad \varepsilon_0 = 1.$$

б) Для круглого сечения радиуса a имеем

$$\psi_{n,\,m}(r,\,\varphi) = \sqrt{\frac{\varepsilon_n}{\pi a^2}}\,\frac{J_n\left(\dfrac{\mu_m^{(n)}}{a}\,r\right)}{J_n'(\mu_m^{(n)})}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} n\varphi,$$

$$\hat{\psi}_{n,\,m}(r,\,\varphi) = \sqrt{\frac{\varepsilon_n}{\pi a^2}}\,\frac{\hat{\mu}_m^{(n)}}{\sqrt{\left[\hat{\mu}_m^{(n)}\right]^2 - n^2}}\,\frac{J_n\left(\dfrac{\hat{\mu}_m^{(n)}}{a}\,r\right)}{J_n(\hat{\mu}_m^{(n)})}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} n\varphi,$$

где $\mu_m^{(n)}$ — корень уравнения $J_n(\mu)=0$, $\lambda_{mn}=\dfrac{\left[\mu_m^{(n)}\right]^2}{a^2}$, $\hat{\mu}_m^{(n)}$ — корень уравнения $J_n'(\mu)=0$.

Приведенные выше функции $\psi_{m,\,n}$ и $\hat{\psi}_{m,\,n}$ нормированы к единице.

Указание. Функции Π и $\hat{\Pi}$ удовлетворяют волновому уравнению $\Delta u+k^2u=0$ и следующим граничным условиям:

$$\Pi=0 \quad \text{на} \quad \Sigma; \quad \frac{\partial\Pi}{\partial z}=0 \quad \text{при} \quad z=\pm l,$$

$$\frac{\partial\hat{\Pi}}{\partial\nu}=0 \quad \text{на} \quad \Sigma; \quad \hat{\Pi}=0 \quad \text{при} \quad z=\pm l.$$

При вычислении энергии во всем объеме следует воспользоваться формулой Грина (см. [7, с. 538–542]).

82. Пусть тороид ограничен поверхностями $\rho=a$ и $\rho=b$ и плоскостями $z=-l$ и $z=l$. Если можно трактовать как «отрезок» коаксиала длиной $2l$, рассмотренного в задаче 79. Для поляризационных потенциалов Π и $\hat{\Pi}$ остаются в силе формулы, полученные при решении задачи 81, а для собственных функций поперечного сечения ψ_n и $\hat{\psi}_n$ следует взять выражения, приведенные в ответе к задаче 79,

$$\psi_{m,\,n}(\rho,\,\varphi)=R_{m,\,n}(\rho)\begin{matrix}\cos n\varphi\\ \sin n\varphi\end{matrix}, \quad \hat{\psi}_{m,\,n}(\rho,\,\varphi)=\hat{R}_{m,\,n}(\rho)\begin{matrix}\cos n\varphi\\ \sin n\varphi\end{matrix},$$

где

$$R_{m,\,n}(\rho)=J_n(\mu_m^{(n)}\rho)\,N_n(\mu_m^{(n)}a)-J_n(\mu_m^{(n)}a)\,N_n(\mu_m^{(n)}\rho),$$

$$\hat{R}_{m,\,n}(\rho)=J_n(\hat{\mu}_m^{(n)}\rho)\,N_n'(\hat{\mu}_m^{(n)}a)-J_n'(\hat{\mu}_m^{(n)}a)\,N_n(\hat{\mu}_m^{(n)}\rho),$$

$\mu_m^{(n)}$ и $\hat{\mu}_m^{(n)}$ определяются соответственно из уравнений

$$R_{m,\,n}(b)=0, \quad \hat{R}_{m,\,n}'(b)=0.$$

Собственные частоты колебаний равны

$$\omega_{m,\,n}=c\sqrt{\left[\mu_m^{(n)}\right]^2+\left(\frac{\pi m}{2l}\right)^2}, \quad \hat{\omega}_{m,\,n}=c\sqrt{\left[\hat{\mu}_m^{(n)}\right]^2+\left(\frac{\pi m}{2l}\right)^2}.$$

Указание. См. задачу 81.

83. *Дифракция на цилиндре.* Ось цилиндра направлена по оси z; плоская волна распространяется вдоль оси x, вектор напряженности электрического поля в падающей волне направлен параллельно оси провода. Обозначим ε_1, μ_1, σ_1 — параметры провода, $\varepsilon_2=1$, $\mu_2=1$, $\sigma_2=0$ — параметры среды, k_1 и k_2 — соответствующие волновые числа, причем

$$k^2=\frac{\varepsilon\mu\omega^2+i4\pi\sigma\mu\omega}{c^2}.$$

Зависимость от времени типа $e^{-i\omega t}$.

Только z-компонента вектора $\boldsymbol{E}$ отлична от нуля:

$$\boldsymbol{E}=(0,\,0,\,E),$$

через нее выражаются H_ρ и H_φ:

$$H_\rho = -\frac{ic}{\mu\omega}\,\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial E}{\partial \varphi}, \quad H_\varphi = \frac{ic}{\mu\omega}\,\frac{\partial E}{\partial \rho}, \quad H_z = 0.$$

Для $E = E(\rho,\, \varphi)$ получаем

$$E = \begin{cases} e^{ik_2 x} + \displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m H_m^{(1)}(k_2\rho) e^{im\varphi} & \text{при} \quad \rho > a, \\ \displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m J_m(k_1\rho) e^{im\varphi} & \text{при} \quad \rho < a, \end{cases} \tag{1}$$

где a — радиус провода,

$$a_m = -i^m \frac{\dfrac{k_1}{\mu_1}\, J_m'(k_1 a)\, J_m(k_2 a) - k_2 J_m(k_1 a)\, J_m'(k_2 a)}{\dfrac{k_1}{\mu_1}\, J_m'(k_1 a)\, H_m^{(1)}(k_2 a) - k_2 H_m^{(1)'}(k_2 a)\, J_m(k_1 a)},$$

$$b_m = i^m \frac{J_m(k_2 a)}{J_m(k_1 a)} + \frac{H_m^{(1)}(k_2 a)}{J_m(k_1 a)}\, a_m.$$

Если провод идеально проводящий, то

$$a_m = -i^m \frac{J_m(k_2 a)}{H_m^{(1)}(k_2 a)}, \quad b_m = 0.$$

Указание. Требуется найти решение уравнения

$$\Delta E^{(1)} + k_1^2 E^{(1)} = 0 \quad \text{при} \quad r < a,$$
$$\Delta E^{(2)} + k_2^2 E^{(2)} = 0 \quad \text{при} \quad r > a,$$

причем

$$E^{(2)} = E_0 + u = e^{ik_2 x} + u,$$

удовлетворяющее на поверхности провода $\rho = a$ условиям непрерывности E_z и H_φ, что дает

$$E^{(1)} = E^{(2)}, \quad \frac{1}{\mu_1}\,\frac{\partial E^{(1)}}{\partial \rho} = \frac{\partial E^{(2)}}{\partial \rho} \quad \text{при} \quad \rho = a.$$

Кроме того, функция u должна удовлетворять на бесконечности условию излучения

$$\lim_{\rho\to\infty} \sqrt{\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho} - ik_2 u\right) = 0.$$

Решение ищется в виде (1). Коэффициенты a_m и b_m вычисляются из условий при $\rho = a$, причем должно быть использовано разложение $e^{ik_2 x}$ в ряд:

$$e^{ik_2 x} = e^{ik_2\rho\cos\varphi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(k_2\rho) e^{im\varphi}.$$

Если провод идеально проводящий, то $k_1 = \infty$ и граничные условия сводятся к одному:

$$E^{(2)} = e^{ik_2 a\cos\varphi} + u = 0 \quad \text{при} \quad \rho = a.$$

Поэтому для a_m получается выражение

$$a_m = -i^m \frac{J_m(k_2 a)}{H_m^{(1)}(k_2 a)}.$$

84. *Дифракция на идеально проводящем шаре.* Плоская волна распространяется по направлению полярной оси z сферической системы координат r, θ, φ, электрическое поле поляризовано по направлению оси x, а магнитное поле — по направлению оси y:

$$E_x^0 = H_y^0 = e^{ikz} = e^{ikr\cos\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n \psi_n(kr)\, P_n(\cos\theta),$$

$$E_r = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + k^2 U, \quad E = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial r\, \partial\theta}, \quad E_\varphi = -\frac{ik}{r}\frac{\partial U'}{\partial\theta}, \tag{1}$$

$$H_r = \frac{\partial^2 U'}{\partial r^2} + k^2 U', \quad H_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 U'}{\partial r\, \partial\theta}, \quad H_\varphi = \frac{ik}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}, \tag{2}$$

где

$$U = ru, \quad U' = rv.$$

Функции $u = \dfrac{U}{r}$ и $v = \dfrac{U'}{r}$ находятся из волновых уравнений $\Delta u + k^2 u = 0$ и $\Delta v + k^2 v = 0$ и граничных условий

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru) = 0, \quad v = 0 \quad \text{при} \quad r = a,$$

которые являются следствием равенств

$$E_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (ru)}{\partial r\, \partial\theta} = 0, \quad E_\varphi = -\frac{ik}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(rv) = 0 \quad \text{при} \quad r = a.$$

Для того чтобы решить задачу, надо, прежде всего, найти потенциалы u^0 и v^0 для падающей волны. Поскольку электромагнитное поле полностью определяется значениями E_r и H_r, то вычислим:

$$E_r^0 = \frac{\partial x}{\partial r} E_x^0 = \sin\theta\cos\varphi e^{ikr\cos\theta} = \frac{-\cos\varphi}{ikr}\frac{\partial}{\partial\theta} e^{ikr\cos\theta} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n \frac{\psi_n(kr)}{ikr} P_n^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi,$$

$$H_r^0 = \frac{\partial y}{\partial r} H_y^0 = \sin\theta\sin\varphi e^{ikr\cos\theta} = \frac{-\sin\varphi}{ikr}\frac{\partial}{\partial\theta} e^{ikr\cos\theta} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n \frac{\psi_n(kr)}{ikr} P_n^{(1)}(\cos\theta)\sin\varphi,$$

где

$$P_n^{(1)}(\cos\theta) = -\frac{d}{d\theta} P_n(\cos\theta).$$

С другой стороны,

$$E_r^0 = \frac{\partial^2 (ru^0)}{\partial r^2} + k^2 ru^0, \quad H_r^0 = \frac{\partial^2 (rv^0)}{\partial r^2} + k^2 (rv^0).$$

Полагая

$$u^0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(kr)\, P_n^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi,$$

$$v^0 = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \psi_n(kr)\, P_n^{(1)}(\cos\theta)\sin\varphi,$$

сравнивая оба выражения для E_r^0 и H_r^0 и учитывая уравнение

$$\frac{d^2}{dr^2}(r\psi_n) + k^2 r\psi_n = \frac{n(n+1)\,\psi_n}{r},$$

получаем

$$a_n = b_n = \frac{2n+1}{n(n+1)}\,\frac{i^{n-1}}{k}.$$

Будем теперь искать решение задачи в виде

$$u(r,\,\theta,\,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n[\psi_n(kr) + \alpha_n \zeta_n^{(1)}(kr)]P_n^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi,$$

$$v(r,\,\theta,\,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n[\psi_n(kr) + \beta_n \zeta_n^{(1)}(kr)]P_n^{(1)}(\cos\theta)\sin\varphi.$$

Граничные условия при $r = a$ позволяют определить α_n и β_n:

$$\alpha_n = -\frac{\Psi_n(ka)}{Z_n^{(1)}(ka)}, \quad \Psi_n(x) = \frac{d}{dx}\,[x\psi_n(x)], \qquad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,J_{n+1/2}(x),$$

$$\beta_n = -\frac{\psi_n(ka)}{\zeta_n^{(1)}(ka)}, \quad Z_n^{(1)}(x) = \frac{d}{dx}\,[x\zeta_n^{(1)}(x)], \quad \zeta_n^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,H_{n+1/2}^{(1)}(x).$$

85. *Дифракция на проводящей сфере.* Если система координат и падающая волна выбраны так же, как и в предыдущей задаче, то искомые потенциалы Боргниса [1] $U = ru$ и $U' = rv$ будут определяться выражениями

$$u = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n[\psi_n(k_1 r) + \alpha_n \zeta_n^{(1)}(k_1 r)]P_n^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi & \text{при} \quad r > a \\ & \text{(воздух)}, \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A_n \psi_n(k_2 r) P_n^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi & \text{при} \quad r < a, \end{cases}$$

$$v = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n[\psi_n(k_1 r) + \beta_n \zeta_n^{(1)}(k_1 r)]P_n^{(1)}(\cos\theta)\sin\varphi & \text{при} \quad r > a, \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} B_n \psi_n(k_2 r) P_n^{(1)}(\cos\theta)\sin\varphi & \text{при} \quad r < a, \end{cases}$$

где

$$\alpha_n = \frac{\dfrac{k_1^2}{\mu_1}\,\psi_n(k_1 a)\Psi_n(k_2 a) - \dfrac{k_2^2}{\mu_2}\,\psi_n(k_2 a)\Psi_n(k_1 a)}{\Delta},$$

[1] См. задачу 70.

$$A_n = \frac{k_1^2[\Psi_n(k_1a)Z_n^{(1)}(k_1a) - \psi_n(k_1a)\zeta_n^{(1)}(k_1a)]}{\mu_1\Delta}\,a_n,$$
$$\Delta = \frac{k_2^2}{\mu_2}\,Z_n^{(1)}(k_1a)\psi_n(k_2a) - \frac{k_1^2}{\mu_1}\,\Psi_n(k_2a)\zeta_n^{(1)}(k_1a),$$

аналогично записываются выражения для B_n и β_n, k_2 — волновое число шара, k_1 — волновое число среды.

Составляющие электрического и магнитного полей вычисляются по формулам (1) и (2) задачи 84. Исключение составляют выражения для E_φ и H_φ:

$$E_\varphi = -\frac{i\omega\mu}{er}\,\frac{\partial U'}{\partial\theta},$$
$$H_\varphi = \frac{ik^2c}{\omega\mu r}\,\frac{\partial U}{\partial\theta}.$$

Указание. Следует воспользоваться полученными при решении предыдущей задачи выражениями для потенциалов u^0 и v^0 падающей волны. Граничные условия на поверхности шара имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(ru_2) &= \frac{\partial}{\partial r}(ru_1), \quad & \frac{k_1^2u_1}{\mu_1} &= \frac{k_2^2u_2}{\mu_2},\\ \frac{\partial}{\partial r}(rv_2) &= \frac{\partial}{\partial r}(rv_1), \quad & \mu_1v_1 &= \mu_2v_2 \end{aligned}\right\} \text{ при } \quad r = a.$$

3. Излучение электромагнитных волн.

86. *Электрический диполь в неограниченном пространстве.* Пусть $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0e^{-i\omega t}$ — момент диполя. Выберем сферическую систему координат r, θ, φ, в начале координат поместим диполь, а ось z направим вдоль вектора $\boldsymbol{p}_0$; тогда можно написать

$$E_r = 2\cos\theta\left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r}\right)\Pi_0,$$
$$E_\theta = \sin\theta\left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r} - k^2\right)\Pi_0,$$
$$H_\varphi = ik\sin\theta\left(ik - \frac{1}{r}\right)\Pi_0,$$
$$E_\varphi = H_r = H_\theta = 0.$$

Здесь Π_0 — составляющая вектора Герца, направленного вдоль оси z,

$$\Pi_0 = p_0\,\frac{e^{ikr}}{r}\,e^{-i\omega t}.$$

В волновой зоне ($kr \gg 1$) с точностью до членов порядка $\frac{1}{r^2}$ и более высокого порядка малости

$$E_r = 0, \quad E_\theta = H_\varphi = -k^2\sin\theta\,\Pi_0.$$

Средний за период поток энергии

$$\overline{Y} = 2\pi r^2\int\limits_0^\pi \frac{c}{4\pi}\,\frac{1}{2}\,E_\theta H_\varphi\sin\theta\,d\theta = \frac{p_0^2k^4c}{3}.$$

Указание. См. [7, с. 451].

87. Указание. Пусть диполь помещен в начале сферической системы координат r, θ, φ, а его момент $\boldsymbol{p}_0$ направлен вдоль оси z ($\theta = 0$). Тогда

$$\left.\begin{aligned} &E_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru) + k^2(ru), \quad E_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial\theta}(ru), \quad E_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial\varphi}(ru) = 0,\\ &H_r = 0, \qquad\qquad H_\theta = 0, \qquad\qquad H_\varphi = ik\frac{\partial u}{\partial\theta}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $u = \dfrac{U}{r}$ — решение уравнения

$$\Delta u + k^2 u = 0,$$

причем

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right) = 0 \quad \text{(условие излучения)}.$$

Условие возбуждения можно взять в виде

$$H_\varphi \approx -p_0\frac{ik\sin\theta}{r^2} \quad \text{при малых } r$$

или

$$H_\varphi = -p_0k^2\frac{\sin\theta}{r}e^{ikr} \quad \text{при больших } r.$$

Это дает

$$u = A\zeta_1^{(1)}(kr)\cos\theta, \quad \zeta_1^{(1)}(kr) = \frac{i}{k^2}\frac{e^{ikr}}{r}\left(ik - \frac{1}{r}\right),$$

где

$$A = ik^2p_0.$$

Отсюда и следуют формулы задачи 86 для составляющих поля E_r, E_θ, H_φ.

88. Пусть диполь с моментом $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0e^{-i\omega t}$ направлен вдоль оси z координатной системы r, θ, φ, начало которой помещено в центре сферы радиуса a.

Функция $u = u(r, \theta)$ определяется по формуле

$$u(r, \theta) = [A\zeta_1(kr) + B\psi_1(kr)]\,P_1(\cos\theta),$$

где

$$A = ik^2p_0, \quad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,J_{n+1/2}(x),$$

$$B = -\frac{Z_1^{(1)}(ka)}{\Psi_1(ka)} = -\frac{ka\zeta_1^{(1)'}(ka) + \zeta_1^{(1)}(ka)}{ka\psi_1'(ka) + \psi_1(ka)}, \quad \zeta_n^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,H_{n+1/2}^{(1)}(x).$$

Составляющие поля вычисляются по формулам (1) задачи 87.

Указание. Задача отличается от предыдущей тем, что вместо условия излучения на бесконечности здесь появляется граничное условие $E_\theta = 0$ или $\dfrac{\partial}{\partial r}(ru) = 0$ на поверхности сферы при $r = a$. Поэтому в решении должны содержаться две линейно независимые цилиндрические функции, например $H_{n+1/2}^{(1)}$ и $H_{n+1/2}^{(2)}$, $N_{n+1/2}$ и $J_{n+1/2}$, $H_{n+1/2}^{(1)}$ и $J_{n+1/2}$ и т. д. Мы выбираем функции $J_{n+1/2}$

и $H^{(1)}_{n+1/2}$. Постоянная A — та же, что и в предыдущей задаче, постоянная B выбирается из условия при $r = a$.

89. Если выбрать сферическую систему координат r, θ, φ с началом в центре сферы и полярной осью $\theta = 0$, направленной вдоль диполя, то можно написать:

$$E_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru) + k^2(ru), \quad E_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(ru)}{\partial r\,\partial\theta}, \quad E_\varphi = 0,$$
$$H_r = 0, \qquad H_\theta = 0, \qquad H_\varphi = \frac{ick^2}{\mu\omega}\frac{\partial u}{\partial\theta},$$

причем

$$k^2 = \begin{cases} k_1^2 = \dfrac{\varepsilon_1\mu_1\omega^2 + i4\pi\mu_1\sigma_1\omega}{c^2} & \text{при} \quad r > a, \\ k_2^2 = \dfrac{\varepsilon_2\mu_2\omega^2 + i4\pi\mu_2\sigma_2\omega}{c^2} & \text{при} \quad r < a. \end{cases}$$

Функция

$$u = \begin{cases} u_1 & \text{при} \quad r > a, \\ u_2 & \text{при} \quad r < a \end{cases}$$

определяется формулами

$$u_1 = C\zeta_1^{(1)}(k_1 r)\cos\theta,$$
$$u_2 = ip_0k_2^2[\zeta_1^{(1)}(k_2 r) + B\psi_1(k_2 r)]\cos\theta,$$

где

$$B = \frac{\zeta_1^{(1)}(ak_2)\,Z_1^{(1)}(ak_1) - \dfrac{k_1^2\mu_2^2}{k_2^2\mu_1}\zeta_1^{(1)}(ak_1)\,Z_1^{(1)}(ak_2)}{\dfrac{k_1^2\mu_2}{k_2^2\mu_1}\zeta_1^{(1)}(ak_1)\,\Psi_1(ak_2) - \psi_1(ak_2)\,Z_1^{(1)}(ak_1)},$$

$$C = \frac{\zeta_1^{(1)}(ak_2)\,\Psi_1(ak_2) - \psi_1(ak_2)\,Z_1^{(1)}(ak_2)}{\dfrac{k_1^2\mu_2}{k_2^2\mu_1}\zeta_1^{(1)}(ak_1)\,\Psi_1(ak_2) - \psi_1(ak_2)\,Z_1^{(1)}(ak_1)}\,p_0k_2^2,$$

$$\Psi_1(x) = \frac{d}{dx}[x\psi_1(x)], \quad Z_1^{(1)}(x) = \frac{d}{dx}[x\zeta_1^{(1)}(x)].$$

При $\sigma_1 \to \infty$ $C \to 0$, $B \to -\dfrac{Z_1^{(1)}(ak_2)}{\Psi_1(ak_2)}$, т. е. мы приходим к решению задачи 88.

При $a \to \infty$ $C \to 0$, $B \to 0$, и мы получаем решение задачи 86 о диполе в неограниченном пространстве.

90. Введем сферическую систему координат r, θ, φ с началом в центре сферы и полярной осью, направленной вдоль диполя. Как и в предыдущей задаче,

$$E_\varphi = H_r = H_\theta = 0, \quad E_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru) + k^2(ru), \quad E_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(ru)}{\partial r\,\partial\theta},$$
$$H_\varphi = \frac{ick^2}{\mu\omega}\frac{\partial u}{\partial\theta},$$

где

$$u = \begin{cases} u_1 & \text{при} \quad r < a, \\ u_2 & \text{при} \quad a < r < b, \\ u_3 & \text{при} \quad r > b \end{cases}$$

определяются выражениями

$$u_1 = ip_0 k_0^2 \left[\zeta_1^{(1)}(k_0 r) + A\psi_1(k_0 r)\right] \cos\theta,$$
$$u_2 = \left[B\psi_1(kr) + C\zeta_1^{(1)}(kr)\right] \cos\theta,$$
$$u_3 = D\zeta_1^{(1)}(k_0 r) \cos\theta.$$

Коэффициенты A, B, C, D находятся из решения системы следующих четырех уравнений:

$$ip_0 k_0^2 [\zeta_1^{(1)}(ak_0) + A\psi_1(ak_0)] = \frac{k^2}{k_0^2 \mu} [B\psi_1(ak) + C\zeta_1^{(1)}(ak)],$$
$$D\zeta_1^{(1)}(k_0 b) = \frac{k^2}{k_0^2 \mu} [B\psi_1(kb) + C\zeta_1^{(1)}(kb)],$$
$$ip_0 k^2 [Z_1^{(1)}(k_0 a) + A\Psi_1(k_0 a)] = B\Psi_1(ka) + CZ_1^{(1)}(ka),$$
$$DZ_1^{(1)}(k_0 b) = B\Psi_1(kb) + CZ_1^{(1)}(kb).$$

Здесь приняты обозначения

$$\Psi_1(x) = [x\psi_1(x)]', \quad Z_1^{(1)}(x) = [x\zeta_1^{(1)}(x)]'.$$

Указание. Потенциалы u_1, u_2, u_3 удовлетворяют уравнениям

$$\Delta u_s + k_s^2 u_s = 0 \quad (s = 1, 2, 3), \quad k_1 = k_3 = k_0, \quad k_2 = k,$$

и граничным условиям

$$\left.\begin{aligned} k_0^2 u_1 &= \frac{k^2}{\mu} u_2, \\ \frac{\partial}{\partial r}(u_1 r) &= \frac{\partial}{\partial r}(u_2 r) \end{aligned}\right\} \text{при} \quad r = a, \qquad \left.\begin{aligned} \frac{k^2}{\mu} u_2 &= k_0^2 u_3, \\ \frac{\partial}{\partial r}(ru_2) &= \frac{\partial}{\partial r}(ru_3) \end{aligned}\right\} \text{при} \quad r = b.$$

О выборе выражений для u_1, u_2, u_3 см. предыдущие задачи.

91. Решение. Введем сферическую систему координат r', θ, φ с началом в центре сферы, диполь находится в точке $r = r'$, $\theta = 0$. Поле не зависит от угла φ и определяется через скалярный потенциал $u(r, \theta)$:

$$E_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru) + k^2(ru), \quad E_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(ru)}{\partial r\, \partial\theta}, \quad E_\varphi = 0,$$
$$H_r = 0, \qquad H_\theta = 0, \qquad H_\varphi = \frac{ick^2}{\mu\omega}\frac{\partial u}{\partial\theta}.$$

Функция

$$u = \begin{cases} u_1 & \text{при} \quad r < a, \\ u_2 & \text{при} \quad r > a \end{cases}$$

удовлетворяет волновому уравнению $\Delta u + k^2 u = 0$, где

$$k^2 = \begin{cases} k_0^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} & \text{при} \quad r < a, \\ \dfrac{\varepsilon\mu\omega^2 + i4\pi\sigma\mu\omega}{c^2} & \text{при} \quad r > a. \end{cases}$$

На поверхности сферы $r = a$ должны быть непрерывны тангенциальные составляющие вектора $\boldsymbol{E}$ и вектора $\boldsymbol{H}$, т. е. E_θ и H_φ:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial\theta}\,(ru_1) = \frac{\partial^2}{\partial r\,\partial\theta}\,(ru_2),\\ &k_0^2\,\frac{\partial u_1}{\partial\theta} = \frac{k^2}{\mu}\,\frac{\partial u_2}{\partial\theta} \end{aligned}\right\} \text{ при } \quad r = a.$$

Эти условия будут выполнены, если потребовать, чтобы были непрерывны $\dfrac{\partial}{\partial r}\,(ru)$ и $\dfrac{k^2}{\mu}\,u$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial r}\,(ru_1) = \frac{\partial}{\partial r}\,(ru_2),\\ &k_0^2 u_1 = \frac{k^2}{\mu}\,u_2 \end{aligned}\right\} \text{ при } \quad r = a.$$

Функция ru_1, очевидно, имеет в источнике особенность типа $\dfrac{e^{ik_0R}}{R}$, где $R = \sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr'\cos\theta}$ ($(r,\,\theta,\,\varphi)$ — точка наблюдения), т. е. $u_1 \sim \dfrac{1}{r'}\,\dfrac{e^{ik_0R}}{R}$.

Полагая $u_1 = \overline{u}_0 + v_1$, где $\overline{u}_0 = \dfrac{\alpha}{r'}\,u_0 = \dfrac{\alpha}{r'}\,\dfrac{e^{ik_0R}}{ik_0R}$ (α — нормировочный множитель, который будет определен ниже), получаем для v_1 и u_2

$$\Delta v_1 + k_0^2 v_1 = 0 \quad \text{при} \quad r < a, \qquad \Delta u_2 + k^2 u_2 = 0 \quad \text{при} \quad r > a,$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial r}\,(rv_1) - \frac{\partial}{\partial r}\,(ru_2) = -\frac{\partial}{\partial r}\,(r\overline{u}_0),\\ &k_0^2(v_1 + \overline{u}_0) = \frac{k^2}{\mu}\,u_2 \end{aligned}\right\} \text{ при } \quad r = a, \tag{1}$$

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial u_2}{\partial r} - iku_2\right) = 0.$$

Частные решения имеют вид

$$v_{1n} = [A_n\psi_n(k_0r) + A'_n\zeta_n^{(1)}(k_0r)]P_n(\cos\theta),$$
$$u_{2n} = [B_n\zeta_n^{(1)}(kr) + B'_n\psi_n(kr)]P_n(\cos\theta).$$

В силу ограниченности функции u_1 при $r = 0$ коэффициент $A'_n = 0$; из условия излучения при $r \to \infty$ следует, что $B'_n = 0$. Поэтому

$$\left.\begin{aligned} v_1(r,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n\psi_n(k_0r)P_n(\cos\theta),\\ u_2(r,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n\zeta_n^{(1)}(kr)P_n(\cos\theta). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Для определения коэффициентов A_n и B_n из граничных условий при $r = a$, используем разложения фундаментального решения u_0 в

ряд по полиномам Лежандра:

$$u_0 = \frac{e^{ik_0R}}{ik_0R} = \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \zeta_n^{(1)}(k_0 r) P_n(\cos\theta) & \text{при} \quad r > r', \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n \psi_n(k_0 r) P_n(\cos\theta) & \text{при} \quad r < r', \end{cases} \tag{3}$$

$$a_n = (2n+1)\psi_n(k_0 r'), \quad b_n = (2n+1)\zeta_n^{(1)}(k_0 r').$$

При $r' \to 0$ должно выполняться условие

$$\overline{u}_0 \to u = ip_0 k_0^2 \zeta_1^{(1)}(k_0 r) P_1(\cos\theta) \quad (p_0 \text{ — момент диполя}).$$

Учитывая, что первое слагаемое при $n = 0$ в (3) следует отбросить, так как для него $H_\varphi = E_r = E_\theta = 0$, и замечая, что

$$\lim_{r' \to 0} \frac{a_n}{r'} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n > 1, \\ -0,5k_0 & \text{при} \quad n = 1, \end{cases}$$

находим $\alpha = 2ip_0 k_0$. Подставляя в условия (1) при $r = a$ выражения (2) и (3) (при $r = a > r'$), получаем

$$\beta a_n Z_n^{(1)}(k_0 a) + A_n \Psi_n(k_0 a) = B_n Z_n^{(1)}(ka),$$

$$k_0^2 [a_n \beta \zeta_n^{(1)}(k_0 a) + A_n \psi_n(k_0 a)] = \frac{k^2}{\mu} B_n \zeta_n^{(1)}(ka),$$

$$Z_n^{(1)}(\rho) = [\rho \zeta_n^{(1)}(\rho)]', \quad \Psi_n(\rho) = [\rho \psi_n(\rho)]', \quad \beta = \frac{\alpha}{r'} = \frac{2ip_0 k_0}{r'}.$$

Отсюда находим

$$A_n = \left[\frac{k^2}{k_0^2 \mu} Z_n^{(1)}(k_0 a) \zeta_n^{(1)}(ka) - \zeta_n^{(1)}(k_0 a) Z_n^{(1)}(ka) \right] \frac{\beta a_n}{\Delta},$$

$$B_n = \left[\psi_n(k_0 a)\, Z_n^{(1)}(k_0 a) - \zeta_n^{(1)}(k_0 a) \Psi_n(k_0 a) \right] \frac{\beta a_n}{\Delta},$$

$$\Delta = \psi_n(k_0 a)\, Z_n^{(1)}(ka) - \frac{k^2}{k_0^2 \mu} \zeta_n^{(1)}(ka)\, \Psi_n(k_0 a).$$

Если $\sigma \to \infty$ $(k \to \infty)$, то $B_n = 0$,

$$A_n = -\frac{Z_n^{(1)}(k_0 a)}{\Psi_n(k_0 a)} \beta a_n,$$

и мы приходим к решению задачи о диполе, помещенном в точке $(r',\, 0,\, \varphi)$ внутри идеально проводящей сферы.

92. *Вертикальная электрическая антенна над сферической землей.* Антенна (точечный диполь) помещена в точке $r' = a + h$ $(h > 0)$, $\theta = 0$ и ориентирована вдоль оси $\theta = 0$. Момент диполя равен $p = p_0 e^{-i\omega t}$. Временной множитель $e^{-i\omega t}$ мы всюду опускаем.

Для потенциала $u = \dfrac{U}{r}$ имеем:

внутри земли $(r < a)$

$$u_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \psi_n(kr)\, P_n(\cos\theta);$$

вне земли $(r > a)$

$$u_2 = \beta\,\frac{e^{ik_0R}}{ik_0R} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n\zeta_n^{(1)}(k_0r)\,P_n(\cos\theta) =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(\beta a_n + B_n)\zeta_n^{(1)}(k_0r)\,P_n(\cos\theta) & (r > r'), \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left[\beta b_n\psi_n(k_0r) + B_n\zeta_n^{(1)}(k_0r)\right]P_n(\cos\theta) & (r < r'); \end{cases}$$

где

$$A_n = \frac{\zeta_n^{(1)}(k_0a)\Psi_n(k_0a) - \psi_n(k_0a)\,Z_n^{(1)}(k_0a)}{\dfrac{k_0^2}{k^2}\,\zeta_n^{(1)}(ka)\Psi_n(ka) - Z_n^{(1)}(ka)\,\psi_n(ka)}\,\frac{k_0^2}{k^2}\,\beta b_n, \quad k_0 = \frac{\omega}{c},$$

$$B_n = \frac{\psi_n(ka)\Psi_n(k_0a) - \dfrac{k_0^2}{k^2}\,\psi_n(k_0a)\,\Psi_n(ka)}{\dfrac{k_0^2}{k^2}\,\zeta_n^{(1)}(k_0a)\Psi_n(ka) - Z_n^{(1)}(k_0a)\,\psi_n(ka)}\,\beta b_n, \quad \begin{matrix} k^2 = \dfrac{\varepsilon\omega^2 + i\cdot 4\pi\sigma\omega}{c^2}, \\ \mu = 1, \end{matrix}$$

$$a_n = (2n+1)\psi_n(k_0r'), \quad b_n = (2n+1)\zeta_n^{(1)}(k_0r'), \quad \beta = \frac{2ip_0k_0}{a+h}.$$

Если земля идеально проводящая, то

$$A_n = 0, \quad B_n = -\frac{\Psi_n(k_0a)}{Z_n^{(1)}(k_0a)}\,\beta b_n.$$

В результате

$$u_1 = 0, \quad u_2 = \overline{u}_0 - \sum_{n=0}^{\infty}\beta b_n\,\frac{\psi_n(k_0a)\zeta_n^{(1)}(k_0r)}{Z_n^{(1)}(k_0a)}\,P_n(\cos\theta).$$

См. задачу 91.

93. *Вертикальная электрическая антенна на сферической земле.* Антенна помещена в точке $r' = a$, $\theta = 0$ на поверхности земли.

Внутри земли $(r < a)$

$$u_1 = \frac{2p_0k_0^2}{a^2k^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)\,\zeta_n^{(1)}(k_0a)}{\psi_n(ka)[Z_n^{(1)}(k_0a) - C_n]}\,\psi_n(kr)\,P_n(\cos\theta),$$

вне земли $(r > a)$

$$u_2 = \frac{2p_0}{a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)\,\zeta_n^{(1)}(k_0r)}{C_n - Z_n^{(1)}(k_0a)}\,P_n(\cos\theta).$$

Здесь C_n обозначает выражение

$$C_n = \frac{k_0^2}{k^2}\,\frac{\Psi_n(ka)}{\psi_n(ka)}\,\zeta_n^{(1)}(k_0a).$$

Указание. Необходимо в решении предыдущей задачи совершить предельный переход при $h \to 0$. В процессе вычислений исполь-

зовать выражение для вронскиана

$$\psi_n(x)\zeta_n^{(1)}(x) - \zeta_n^{(1)}(x)\psi_n(x) = \frac{i}{x^2}.$$

Предельный переход при $h \to 0$ дает

$$\lim_{h\to 0}(a_n\beta + B_n) = \frac{2p_0}{a^2}\,\frac{2n+1}{C_n - Z_n^{(1)}(k_0 a)}.$$

4. Антенна на плоской земле.

94. Вводится электрический вектор Герца Π, направленный вдоль антенны. В цилиндрической системе координат ρ, φ, z имеем

$$\Pi_\rho = \Pi_\varphi = 0, \quad \Pi_z = \Pi.$$

Поскольку задача обладает аксиальной симметрией,

$$E_\rho = \frac{\partial^2\Pi}{\partial\rho\,\partial z}, \quad E_\varphi = 0, \quad E_z = \frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2} + k^2\Pi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Pi}{\partial\rho}\right),$$

$$\Delta\Pi + k^2\Pi = 0, \quad H_\rho = H_z = 0, \quad H_\varphi = -\frac{ick^2}{\omega}\frac{\partial\Pi}{\partial\rho}.$$

На поверхности земли при $z = 0$

$$k_0^2\Pi_0 = k^2\Pi, \quad \frac{\partial\Pi_0}{\partial z} = \frac{\partial\Pi}{\partial z},$$

где

$$\Pi_0, \quad k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{соответствует } z > 0 \quad \text{(атмосфера)},$$

$$\Pi, \quad k^2 = \frac{\varepsilon\omega^2 + i4\pi\sigma\omega}{c^2} \quad \text{соответствует } z < 0 \quad \text{(земля)}$$

$$(\mu = 1).$$

Момент диполя $p = p_0 e^{-i\omega t}$, $p_0 = 1$; множитель $e^{-i\omega t}$ всюду опущен.

95. Электромагнитное поле выражается через магнитный вектор Герца, у которого отлична от нуля лишь составляющая вдоль оси антенны $\Pi_z = \Pi$, поэтому $E_z = 0$. В силу аксиальной симметрии

$$E_\rho = 0, \quad E_\varphi = i\,\frac{\omega}{c}\,\frac{\partial\Pi}{\partial\rho},$$

$$H_\rho = \frac{\partial^2\Pi}{\partial\rho\,\partial z}, \quad H_\varphi = 0, \quad H_z = k^2\Pi + \frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2}.$$

Потенциал $\mathbf{\Pi}$ удовлетворяет уравнению

$$\Lambda\mathbf{\Pi} + k^2\Pi = 0, \quad \text{где} \quad k^2 = \begin{cases} k_0^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} & \text{при} \quad z > 0, \\ \dfrac{\varepsilon\omega^2 + i4\pi\sigma\omega}{c^2} & \text{при} \quad z < 0, \end{cases}$$

и условиям сопряжения на поверхности земли

$$\Pi_0 = \Pi, \quad \frac{\partial\Pi_0}{\partial z} = \frac{\partial\Pi}{\partial z} \quad \text{при} \quad z = 0,$$

причем

$$\mathbf{\Pi}_0 = \frac{e^{ik_0R}}{R} + \Pi_{0\,\text{втор}},$$
$$\Pi = \frac{e^{ikR}}{R} + \Pi_{\text{втор}},$$

где $R = \sqrt{r^2 + z^2}$. Первые члены в наших выражениях означают потенциал Герца для диполя в неограниченной среде с соответствующим волновым числом (k или k_0), $\Pi_{0\,\text{втор}}$ и $\Pi_{\text{втор}}$ — вторичное излучение.

96. Введем систему координат x, y, z, направив ось z перпендикулярно к поверхности земли, а ось x — вдоль антенны,

$$\boldsymbol{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi} + k^2\mathbf{\Pi}, \quad \boldsymbol{H} = -\frac{ik^2c}{\omega}\operatorname{rot}\mathbf{\Pi}, \quad \mathbf{\Pi} = (\Pi_x,\, 0,\, \Pi_z),$$

где Π_x и Π_z удовлетворяют волновому уравнению

$$E_x = k^2\Pi_x + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Pi_x}{\partial x} + \frac{\partial\Pi_z}{\partial z}\right), \quad E_\nu = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Pi_x}{\partial x} + \frac{\partial\Pi_z}{\partial z}\right),$$
$$E_z = k^2\Pi_z + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\Pi_x}{\partial x} + \frac{\partial\Pi_z}{\partial z}\right),$$
$$H_x = -\frac{ick^2}{\omega}\frac{\partial\Pi_z}{\partial y}, \quad H_\nu = -\frac{ick^2}{\omega}\left(\frac{\partial\Pi_x}{\partial z} - \frac{\partial\Pi_z}{\partial x}\right), \quad H_z = \frac{ick^2}{\omega}\frac{\partial\Pi_x}{\partial y}.$$

Граничные условия при $z = 0$ (на поверхности земли)

$$k_0^2\Pi_{0z} = k^2\Pi_z, \quad k_0^2\frac{\partial\Pi_{0x}}{\partial z} = k^2\frac{\partial\Pi_x}{\partial z},$$
$$k_0^2\Pi_{0x} = k^2\Pi_x, \quad \frac{\partial\Pi_{0x}}{\partial x} + \frac{\partial\Pi_{0z}}{\partial z} = \frac{\partial\Pi_x}{\partial x} + \frac{\partial\Pi_z}{\partial z}.$$

Обычно вместо Π_z вводится функция F:

$$\Pi_{0z} = \frac{\partial F_0}{\partial x}, \quad \Pi_z = \frac{k_0^2}{k^2}\frac{\partial F}{\partial x}.$$

Первое и последнее граничные условия дают:

$$F_0 = F, \quad \Pi_{0x} + \frac{\partial F_0}{\partial z} = \Pi_x + \frac{k_0^2}{k^2}\frac{\partial F}{\partial z}.$$

97. Пусть рамка с током помещена в плоскости x, z, так что нормаль к рамке направлена вдоль оси y. Векторы поля выражаются через магнитный вектор Герца

$$\boldsymbol{E} = i\frac{\omega}{c}\operatorname{rot}\mathbf{\Pi}, \quad \boldsymbol{H} = k^2\mathbf{\Pi} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi},$$

у вектора $\mathbf{\Pi}$ отличны от нуля составляющие Π_y и Π_z, так что

$$E_x = \frac{i\omega}{c}\left(\frac{\partial\Pi_z}{\partial y} - \frac{\partial\Pi_y}{\partial z}\right), \quad E_y = -\frac{i\omega}{c}\frac{\partial\Pi_z}{\partial x}, \quad E_z = i\frac{\omega}{c}\frac{\partial\Pi_y}{\partial x},$$
$$H_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Pi_y}{\partial y} + \frac{\partial\Pi_z}{\partial z}\right), \quad H_y = k^2\Pi_y + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Pi_y}{\partial y} + \frac{\partial\Pi_z}{\partial z}\right),$$
$$H_z = k^2\Pi_z + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\Pi_y}{\partial y} + \frac{\partial\Pi_z}{\partial z}\right).$$

Граничные условия при $z = 0$

$$\Pi_{0z} = \Pi_z, \quad k_0^2 \Pi_{0y} = k^2 \Pi_y,$$
$$\frac{\partial \Pi_{0y}}{\partial z} = \frac{\partial \Pi_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial \Pi_{0y}}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_{0z}}{\partial z} = \frac{\partial \Pi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_z}{\partial z}.$$

Если положить

$$\Pi_{0z} = \frac{\partial F_0}{\partial y}, \quad \Pi_z = \frac{\partial F}{\partial y},$$

то вместо первого и четвертого условий получается

$$F_0 = F, \quad \Pi_{0y} + \frac{\partial F_0}{\partial z} = \Pi_y + \frac{\partial F}{\partial z}.$$

98. Помещаем в антенну начало координат. Тогда над землей

$$\Pi_0 = \frac{2k^2}{k_0^2 + k^2} \frac{e^{ik_0 R}}{R} + \int_0^\infty f_0(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}\, z} d\lambda \quad (z > 0),$$

в земле

$$\Pi = \frac{2k_0^2}{k_0^2 + k^2} \frac{e^{ikR}}{R} + \int_0^\infty f(\lambda) J_0(\lambda r) e^{+\sqrt{\lambda^2 - k^2}\, z} d\lambda \quad (z < 0),$$

где

$$f_0(\lambda) = \frac{2k_0^2 k^2}{k_0^2 + k^2} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}} \cdot \frac{\sqrt{\lambda^2 - k_0^2} - \sqrt{\lambda^2 - k^2}}{k^2 \sqrt{\lambda^2 - k_0^2} + k_0^2 \sqrt{\lambda^2 - k^2}},$$

$$f(\lambda) = -\frac{2k_0^2 k^2}{k_0^2 + k^2} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \cdot \frac{\sqrt{\lambda^2 - k_0^2} - \sqrt{\lambda^2 - k^2}}{k^2 \sqrt{\lambda^2 - k_0^2} + k_0^2 \sqrt{\lambda^2 - k^2}},$$

$$R = \sqrt{r^2 + z^2}.$$

Р е ш е н и е. Вводим согласно задаче 94 электрический вектор Герца $\mathbf{\Pi} = (0, 0, \Pi_z = \Pi)$, причем

$$\Pi_0 = \frac{2k^2}{k_0^2 + k^2} \frac{e^{ik_0 R}}{R} + \Pi_{0\,\text{втор}}, \quad \Pi = \frac{2k_0^2}{k_0^2 + k^2} \frac{e^{ikR}}{R} + \Pi_{\text{втор}}.$$

Воспользуемся интегральным разложением первичного потенциала

$$\frac{e^{ikR}}{R} = \int_0^\infty J_0(\lambda r) \frac{e^{-\sqrt{\lambda^2 - k^2}\,|z|} \lambda\, d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}},$$

и будем искать вторичное возбуждение в виде

$$\Pi_{0\,\text{втор}} = \int_0^\infty f_0(\lambda)\, J_0(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}\, z}\, d\lambda \quad (z > 0),$$

$$\Pi_{\text{втор}} = \int_0^\infty f(\lambda)\, J_0(\lambda r) e^{\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}\, z}\, d\lambda \quad (z < 0).$$

$\Pi_{0\,\text{втор}}$ и $\Pi_{\text{втор}}$, представленные этими интегралами, удовлетворяют уравнениям

$$\Delta \Pi_{0\,\text{втор}} + k_0^2 \Pi_{0\,\text{втор}} = 0, \quad \Delta \Pi_{\text{втор}} + k^2 \Pi_{\text{втор}} = 0.$$

Требуя выполнения граничных условий

$$k_0^2\Pi_0 = k^2\Pi, \quad \frac{\partial\Pi_0}{\partial z} = \frac{\partial\Pi}{\partial z} \quad \text{при} \quad z = 0,$$

получаем

$$\int\limits_0^\infty J_0(\lambda r)\left[\frac{2k_0^2k^2}{k_0^2+k^2}\,\frac{\lambda}{\mu_0} + f_0(\lambda)k_0^2\right]d\lambda = \int\limits_0^\infty \left[\frac{2k_0^2k^2}{k_0^2+k^2}\,\frac{\lambda}{\mu} + f(\lambda)\right] J_0(\lambda r)\,d\lambda$$

и

$$\int\limits_0^\infty [\mu_0 f_0(\lambda) + \mu f(\lambda)]\, J_0(\lambda r)\,d\lambda = 0 \quad (\mu = \sqrt{\lambda^2 - k^2}),$$

где $\mu^2 = \lambda^2 - k^2$, $\mu_0^2 = \lambda^2 - k_0^2$.

Отсюда и находим

$$f_0(\lambda) = \frac{2k_0^2k^2}{k_0^2+k^2}\,\frac{\lambda}{\mu_0}\,\frac{\mu_0-\mu}{k^2\mu_0 + k_0^2\mu},$$

$$f(\lambda) = -\frac{2k_0^2k^2}{k_0^2+k^2}\,\frac{\lambda}{\mu}\,\frac{\mu_0-\mu}{k^2\mu_0 + k_0^2\mu}.$$

Частные случаи:

1) $k = \infty$, земля — идеально проводящая,

$$f(\lambda) = 0, \quad f_0(\lambda) = \frac{2\lambda}{\mu_0},$$

$$\Pi_0 = 2\int\limits_0^\infty J_0(\lambda r)e^{-\mu_0|z|}\,\frac{\lambda\,d\lambda}{\mu_0} = 2\,\frac{e^{ik_0R}}{R},$$

$\Pi = 0$ (в земле). Первичное возбуждение антенны отражается от поверхности земли;

2) $k = k_0$, антенна в однородной среде (в воздухе). В этом случае

$$f_0(\lambda) = 0, \quad f(\lambda) = 0,$$

$\Pi = \dfrac{e^{ik_0R}}{R}$ во всем пространстве.

99. Магнитный вектор Герца $\mathbf{\Pi} = (0, 0, \Pi)$ определяется следующим образом:

над землей

$$\Pi_0 = \frac{e^{ik_0R}}{R} + \int\limits_0^\infty f_0(\lambda)\, J_0(\lambda r)\, e^{-\mu_0 z}\,d\lambda \quad (z > 0),$$

в земле

$$\Pi_0 = \frac{e^{ikR}}{R} + \int\limits_0^\infty f(\lambda)\, J_0(\lambda r)\, e^{\mu z}\,d\lambda \quad (z < 0),$$

где

$$f_0(\lambda) = \frac{\lambda}{\mu_0}\,\frac{\mu_0-\mu}{\mu_0+\mu}, \quad f(\lambda) = \frac{\lambda}{\mu}\,\frac{\mu-\mu_0}{\mu+\mu_0},$$

$$\mu_0 = \sqrt{\lambda^2 - k_0^2}, \quad \mu = \sqrt{\lambda^2 - k^2}.$$

Выражения для Π_0 и Π можно записать иначе:

$$\Pi_0 = \int\limits_0^\infty \frac{2J_0(\lambda r)}{\mu+\mu_0}\, e^{-\mu_0 z}\, \lambda\, d\lambda \quad \text{при} \quad z>0,$$

$$\Pi = \int\limits_0^\infty \frac{2J_0(\lambda r)}{\mu+\mu_0}\, e^{\mu z}\, \lambda\, d\lambda \quad \text{при} \quad z<0.$$

В случае идеально проводящей земли $k=\infty$, $\mu=\infty$ и $\Pi = \Pi_0 = 0$. Действие магнитной антенны компенсируется вихревыми токами, возникающими в земле.

Указание. См. задачи 95 и 98.

100. Если антенна направлена вдоль оси x, то в соответствии с задачей 96 вектор Герца $\mathbf{\Pi} = (\Pi_x,\, 0,\, \Pi_z)$, где

$$\Pi_{0x} = \int\limits_0^\infty \frac{2J_0(\lambda r)}{N'}\, e^{-\mu_0 z}\, \lambda\, d\lambda \quad \text{при} \quad z>0,$$

$$\Pi_x = \frac{k_0^2}{k^2}\int\limits_0^\infty \frac{2J_0(\lambda r)}{N'}\, e^{\mu z}\, \lambda\, d\lambda \quad \text{при} \quad z<0,$$

$$\Pi_{0z} = 2(k^2-k_0^2)\cos\varphi \int\limits_0^\infty \frac{J_0'(\lambda r)}{NN'}\, e^{-\mu_0 z}\, \lambda^2\, d\lambda, \quad z>0,$$

$$\Pi_z = \frac{2k_0^2}{k^2}\,(k^2-k_0^2)\cos\varphi \int\limits_0^\infty \frac{J_0'(\lambda r)}{NN'}\, e^{\mu z}\, \lambda^2\, d\lambda, \quad z<0,$$

где

$$N' = \mu+\mu_0, \quad N = k^2\mu_0 + k_0^2\mu, \quad \mu = \sqrt{\lambda^2-k^2}, \quad \mu_0 = \sqrt{\lambda^2-k_0^2}.$$

Указание. Функция Π_x определяется уравнением $\Delta u + k^2 u = 0$ и граничными условиями

$$k_0^2\Pi_{0x} = k^2\Pi_x, \quad k_0^2\,\frac{\partial \Pi_{0x}}{\partial z} = k^2\,\frac{\partial \Pi_x}{\partial z} \quad \text{при} \quad z=0.$$

Отсюда видно, что функции Π_{0x} и $\dfrac{k^2}{k_0^2}\,\Pi_x$ совпадают с выражениями для Π_0 и Π в решении предыдущей задачи 99.

Для функции $\Pi_z = \dfrac{\partial F}{\partial x}$ имеем

$$F_0 = F, \quad \Pi_{0x} + \frac{\partial F_0}{\partial z} = \Pi_x + \frac{k_0^2}{k^2}\,\frac{\partial F}{\partial z} \quad \text{при} \quad z=0.$$

Полагая

$$F_0 = \int\limits_0^\infty f_0(\lambda)\, J_0(\lambda r)\, e^{-\mu_0 z}\, d\lambda \quad (z>0),$$

$$F = \int\limits_0^\infty f(\lambda)\, J_0(\lambda r)\, e^{\mu z}\, d\lambda \quad (z<0)$$

и пользуясь уже найденными выражениями для Π_{0x} и Π_x, получаем

$$f_0(\lambda) = f(\lambda) = \frac{2(k^2 - k_0^2)\lambda}{NN'}.$$

Функция Π_z вычисляется по формуле

$$\Pi_{0z} = \frac{\partial F_0}{\partial x} = \cos\varphi \frac{\partial F_0}{\partial r}, \quad \Pi_z = \frac{k_0^2}{k^2}\cos\varphi \frac{\partial F}{\partial r}.$$

101. Используем все обозначения задачи 97. В этом случае поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ выражаются через магнитный вектор Герца $\boldsymbol{\Pi} = (0, \Pi_y, \Pi_z)$, где

$$\Pi_{0y} = \int_0^\infty \frac{2k_0^2}{N} J_0(\lambda r) e^{-\mu_0 z} \lambda \, d\lambda \quad \text{при} \quad z > 0,$$

$$\Pi_y = \int_0^\infty \frac{2k_0^2}{N} J_0(\lambda r) e^{\mu z} \lambda \, d\lambda \quad \text{при} \quad z < 0,$$

$$\Pi_{0z} = 2(k^2 - k_0^2)\sin\varphi \int_0^\infty \frac{J_0'(\lambda r)}{NN'} e^{-\mu_0 z} \lambda^2 \, d\lambda \quad \text{при} \quad z > 0,$$

$$\Pi_z = 2(k^2 - k_0^2)\sin\varphi \int_0^\infty \frac{J_0'(\lambda r)}{NN'} e^{\mu z} \lambda^2 \, d\lambda \quad \text{при} \quad z < 0.$$

Значения N и N' даны в ответе к задаче 100.

102. Поляризационный потенциал $\boldsymbol{\Pi} = (0, 0, \Pi_z = \Pi)$ определяет компоненты электромагнитного поля с помощью формул

$$\boldsymbol{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{\Pi} + k^2\boldsymbol{\Pi}, \quad \boldsymbol{H} = -ik \operatorname{rot}\boldsymbol{\Pi}.$$

Для потенциала

$$\Pi = \begin{cases} \Pi_1 & \text{при} \quad z > a, \\ \Pi_2 & \text{при} \quad 0 < z < a \end{cases}$$

получаем

$$\Pi_1 = \Pi_{1\,\text{перв}} + \Pi_{1\,\text{втор}}, \quad \Pi_2 = \Pi_{2\,\text{перв}} + \Pi_{2\,\text{втор}},$$

где

$$\Pi_{1\,\text{перв}} = \int_0^\infty J_0(\lambda r)\, e^{-\mu_1(z - z_0)} \frac{\lambda \, d\lambda}{\mu_1},$$

$$\Pi_{1\,\text{втор}} = \int_0^\infty f_1(\lambda) J_0(\lambda r)\, e^{-\mu_1(z + z_0 - 2a)} \frac{\lambda \, d\lambda}{\mu_1},$$

$$\Pi_{2\,\text{перв}} = \int_0^\infty f_2(\lambda) J_0(\lambda r)\, e^{\mu_2(z - z_0)} \frac{\lambda \, d\lambda}{\mu_2},$$

$$\Pi_{2\,\text{втор}} = \int_0^\infty f_3(\lambda) J_0(\lambda r)\, e^{-\mu_2(z + z_0)} \frac{\lambda \, d\lambda}{\mu_2},$$

$$\mu_1 = \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}; \quad \mu_2 = \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}.$$

Используя граничные условия

$$k_1^2\Pi_1 = k_2^2\Pi_2, \quad \frac{\partial \Pi_1}{\partial z} = \frac{\partial \Pi_2}{\partial z} \quad \text{при} \quad z = a,$$

а также $\dfrac{\partial \Pi_2}{\partial z} = 0$ при $z = 0$, находим

$$f_1(\lambda) = \frac{k_2^2\mu_1 - k_1^2\mu_2 \operatorname{th}\mu_2 a}{k_2^2\mu_1 + k_1^2\mu_2 \operatorname{th}\mu_2 a},$$

$$f_2(\lambda) = f_3(\lambda) = \frac{\mu_2 k_1^2 e^{-\mu_1 z_0 + \mu_1 a + \mu_2 z_0}}{\mu_2 k_1^2 \operatorname{sh}\mu_2 a + \mu_1 k_2^2 \operatorname{ch}\mu_2 a}.$$

103. Пусть $I = I_0 f(s) e^{-i\omega t}$ $(f(s) \geqslant 1)$ — сила тока в прямолинейном проводнике $-l \leqslant s \leqslant l$ длиной $2l$. Цилиндрическая система координат выбрана так, что линейный ток направлен вдоль оси z и симметричен относительно начала координат. Вектор Герца $\mathbf{\Pi} = (0, 0, \Pi)$ определяется формулой

$$\Pi(\rho, \varphi, z) = \frac{I_0}{-ikc} \int_{-l}^{l} \Pi^0[\rho, \varphi, z; \xi, \psi, \zeta]\, f(\zeta)\, d\zeta,$$

где $\Pi^0 = \dfrac{e^{ikR}}{R}$, R — расстояние между точками $[M(\rho, \varphi), z]$ и $[M_0(\xi, \psi), \zeta]$,

$$E = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi} + k^2\mathbf{\Pi}, \quad \boldsymbol{H} = -ik \operatorname{rot}\mathbf{\Pi}.$$

Сопротивление излучения равно

$$R = -\frac{1}{I_0}\left\{ \int_{-l}^{l} \Pi[f'' + k^2 f]\, dz - \Pi f' \Big|_{-l}^{l} \right\},$$

если

$$f(-l) = f(l) = 0.$$

Указание. Нормировка Π получается из условия $H_\varphi \approx \dfrac{2l}{c\rho}$ вблизи тока.

Входное сопротивление линейного тока определяется следующей формулой метода наведенных э.д.с.:

$$R = -\frac{1}{I_0} \int_{-l}^{l} E_z(M_0, M_0; z) f(z)\, dz.$$

Подставляя сюда вместо E_z выражение

$$E_z = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + k^2 \Pi$$

и интегрируя по частям, получим приведенное выше выражение для R.

104. Если диполь полуволновой, то $I = I_0 f(z)$ при $-l \leqslant z \leqslant l$, где

$$f(z) = \cos kz, \quad k = \frac{\omega}{c},$$

$$\Pi = \frac{I_0}{-ikc} \int_{-l}^{l} \Pi^0(M, M_0, z - \zeta) \cos k\zeta\, d\zeta,$$

входное сопротивление полуволнового диполя

$$R = \frac{1}{c}\left\{ \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos\alpha}{\alpha}\, d\alpha - i \int_0^{2\pi} \frac{\sin\alpha}{\alpha}\, d\alpha \right\}.$$

Активная составляющая входного сопротивления или сопротивление излучения

$$R_a = \frac{1}{c}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1-\cos\alpha}{\alpha}\,d\alpha.$$

Реактивная составляющая или реактанц

$$R_r = -\frac{1}{c}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha.$$

Р е ш е н и е. Для вычисления R используется $E_z = \dfrac{\partial^2\Pi}{\partial z^2} + k^2\Pi$, где

$$E_z = \frac{I_0}{-ick}\int\limits_{-l}^{l}\left[\frac{\partial^2\Pi^0}{\partial z^2} + k^2\Pi^0(M,\, M_0;\, z-\zeta)\right] j(\zeta)\,d\zeta.$$

Учитывая, что $\dfrac{\partial^2\Pi^0}{\partial z^2} = \dfrac{\partial^2\Pi^0}{\partial\zeta^2}$, и интегрируя в дальнейшем по частям, получим

$$E_z(M,\, M_0,\, z) = \frac{I_0}{-ick}\left\{\int\limits_{-l}^{l}\Pi^0(M,\, M_0;\, z-\zeta)[f''(\zeta) + k^2 f(\zeta)]\,d\zeta + \right.$$
$$\left. + \Pi^0(M,\, M_0;\, l+z)f'(-l) - \Pi^0(M,\, M_0,\, l-z)f'(l)\right\}.$$

Это возможно, если $f''(z)$ кусочно непрерывна.

Для полуволнового диполя

$$f''(z) + k^2 f = 0, \quad f(\pm l) = 0, \quad f'(-l) = -f'(l) = k.$$

Поэтому

$$E_z(M,\, M_0;\, z) = \frac{I_0}{-ic}\big\{\Pi^0(M,\, M_0,\, l+z) + \Pi^0(M,\, M_0;\, l-z)\big\}.$$

Подстановка этого значения E_z в формулу

$$R = -\frac{1}{I_0}\int\limits_{-l}^{l} E_z(M_0,\, M_0;\, z)\, f(z)\,dz$$

дает

$$R = -\frac{2i}{c}\int\limits_{-l}^{l}\Pi^0(M_0,\, M_0;\, l+z)\, f(z)\,dz,$$

где

$$\Pi^0(M_0,\, M_0;\, l+z) = \frac{e^{ik(l+z)}}{l+z}.$$

Полагая $l+z=\alpha$, после несложных преобразований получаем приведенную выше формулу для R. В частности, в практической системе единиц

$$R = 30\left\{\int\limits_0^{2\pi}\frac{1-\cos\alpha}{\alpha}\,d\alpha - i\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha\right\}\text{ ом}.$$

105. Пусть ось z совпадает с осью волновода, а диполь находится в плоскости $z = \zeta$ в точке M_0 и направлен параллельно оси z. Поле определяется одной лишь z-компонентой электрического вектора Герца

$$\mathbf{\Pi} = (0,\ 0,\ \Pi),$$

где

$$\Pi = \frac{4\pi p_0}{-ikc}\,\Pi^0(M,\ M_0;\ z-\zeta), \quad p_0 = I_0 l \text{ — момент диполя,}$$

M и M_0 — точки в плоскости перпендикулярного сечения,

$$\Pi^0(M,\ M_0,\ z-\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(M)\psi_n(M_0)}{2p_n}\, e^{-p_n|z-\zeta|}, \tag{1}$$

$p_n = \sqrt{\lambda_n - k^2}$, $k = \omega/c$, λ_n — собственное значение, а ψ_n — нормированные собственные функции краевой задачи

$$\Delta_2\psi_n + \lambda_n\psi_n = 0 \quad \text{в} \quad S,$$
$$\psi_n = 0 \quad \text{на} \quad C,$$

S — поперечное сечение волновода, C — граница области S.

Сопротивление излучения

$$R^{(a)} = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{I_0^2} \iint\limits_{S_z+S_{-z}} \frac{c}{4\pi}[\boldsymbol{E}\boldsymbol{H}^*]\,d\sigma$$

равно

$$R^{(a)} = \frac{4\pi}{c}\,\frac{l^2}{k} \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n\psi_n^2(M_0)}{2\sqrt{k^2-\lambda_n}},$$

где N — максимальное число бегущих волн в волноводе, так что

$$\lambda_N < k^2, \quad \lambda_{N+1} > k^2.$$

Если диполь находится на оси круглого волновода радиуса a, то

$$R^{(a)} = \frac{2}{ck^2a^2}\left(\frac{l}{a}\right)^2 \sum_{m=1}^{N} \frac{\mu_m^2}{J_1^2(\mu_m)\sqrt{1-\dfrac{\mu_m^2}{a^2k^2}}},$$

где μ_m — корень уравнения $J_0(\mu) = 0$.

Указание. Формула $\Pi = \dfrac{4\pi p_0}{-ikc}\,\Pi^0$ следует из общей формулы для Π, приведенной в ответе к задаче 103. Функция источника Π^0 для волнового уравнения

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

в произвольной цилиндрической области с нулевыми граничными условиями была построена в задаче 45.

При вычислении $R^{(a)}$ использована формула

$$R^{(a)} = \lim_{z\to\infty} \frac{c}{4\pi I_0^2} \iint\limits_{S_z+S_{-z}} \left\{E_x H_y^* - E_y H_x^*\right\} dx\,dy\ ^{1)}$$

и первая формула Грина.

---

[1]) См. [7, с. 528].

106. Для произвольного линейного тока $I = I_0 f(z)$ при $-l \leqslant z \leqslant l$ функция Герца

$$\Pi = \frac{4\pi I_0}{-ikc} \int_{-l}^{l} \Pi^0(M,\, M_0; z-\zeta) f(\zeta)\, d\zeta,$$

где $\Pi^0(M,\, M_0; z-\zeta)$, дается формулой (1) ответа задачи 105.

Мощность излучения $W_r = I_0^2 R^{(a)}$, где

$$R^{(a)} = \frac{4\pi}{ck} \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n^2 \psi_n^2(M_0)}{2\varkappa_n} \left\{ \left[\int_{-l}^{l} f(\zeta) \cos \varkappa_n \zeta\, d\zeta \right]^2 + \left[\int_{-l}^{l} f(\zeta) \sin \varkappa_n \zeta\, d\zeta \right]^2 \right\},$$

$$\varkappa_n = \sqrt{k^2 - \lambda_n}.$$

В общем случае для полуволнового диполя в волноводе произвольного сечения S получаются формулы

$$R^{(a)} = \frac{4\pi}{c} \sum_{n=1}^{N} \frac{\psi_n^2(M_0)(1 + \cos \pi \sqrt{1-\gamma_n^2})}{\lambda_n \sqrt{1-\gamma_n^2}},$$

$$R^{(r)} = -\frac{4\pi}{c} \sum_{n=1}^{N} \frac{\psi_n^2(M_0) \sin \pi \sqrt{1-\gamma_n^2}}{\lambda_n \sqrt{1-\gamma_n^2}} + \\ + \frac{4\pi}{c} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\psi_n^2(M_0)(1 + e^{-\pi} \sqrt{\gamma_n^2 - 1})}{\lambda_n \sqrt{\gamma_n^2 - 1}},$$

$\Delta\psi_n + \lambda_n \psi_n = 0$ в S, $\psi_n = 0$ на C, $\int\limits_S \psi_n^2\, dS = 1$, $\gamma_n^2 = \dfrac{\lambda_n}{k^2}$, C — граница S, $\gamma_N < 1$, $\gamma_{N+1} > 1$. См. задачи 45 и 103.

107. Для полуволнового диполя, лежащего на оси круглого волновода, имеем:

активная часть входного сопротивления

$$R^{(a)} = \frac{4}{c} \sum_{m=1}^{N} \frac{1 + \cos \pi \sqrt{1-\gamma_m^2}}{J_1^2(\mu_m) \mu_m^2 \sqrt{1-\gamma_m^2}} \quad (\gamma_N < 1,\ \gamma_{N+1} > 1),$$

реактанц

$$R^{(r)} = -\frac{4}{c} \sum_{m=1}^{N} \frac{\sin \pi \sqrt{1-\gamma_m^2}}{J_1^2(\mu_m)\, \mu_m^2 \sqrt{1-\gamma_m^2}} + \frac{4}{c} \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1 - e^{-\pi} \sqrt{\gamma_m^2 - 1}}{J_1^2(\mu_m)\, \mu_m^2 \sqrt{\gamma_m^2 - 1}},$$

где $\gamma_m^2 = \dfrac{\mu_m^2}{a^2 k^2}$, μ_m — корень уравнения $J_0(\mu) = 0$, a — радиус волновода.

108. Пусть S $(0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b)$ — сечение волновода.

а) Бесконечно малый диполь ориентирован вдоль оси y и находится в точке $M_0(d,\, y_0)$. Сопротивление излучения этого диполя дается формулой

$$R^{(a)} = \frac{l^2}{\omega\varepsilon} \sum_{m=1}^{N} \sum_{n=1}^{N'} \frac{\varkappa_{mn} \left[\dfrac{\partial \psi_{mn}}{\partial y_0} (M_0) \right]^2}{2\lambda_{mn}} + \omega\mu l^2 \sum_{m=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_1'} \frac{\left[\dfrac{\partial \hat{\psi}_{mn}}{\partial x_0} (M_0) \right]^2}{2\hat{\varkappa}_{mn} \hat{\lambda}_{mn}}, \tag{1}$$

где

$$\psi_n(M) = \psi_{mn}(x, y) = \sqrt{\frac{4}{ab}} \sin \frac{\pi m}{a} x \sin \frac{\pi n}{b} y,$$

$$\hat{\psi}_n(M) = \hat{\psi}_{mn}(x, y) = \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \cos \frac{\pi m}{a} x \cos \frac{\pi n}{b} y \quad \left(\varepsilon_j = \begin{cases} 1, & j = 0, \\ 2, & j \neq 0 \end{cases} \right),$$

$$\lambda_{mn} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad (m, n = 1, 2, \dots),$$

$$\hat{\lambda}_{mn} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\varkappa_{mn} = \sqrt{k^2 - \lambda_{mn}}, \quad \hat{\varkappa}_{mn} = \sqrt{k^2 - \hat{\lambda}_{mn}}.$$

Пределы N и N', N_1 и N_1' таковы, что $\lambda_{NN'}$, $\hat{\lambda}_{N_1 N_1'}$ — наибольшие собственные значения, при которых $\varkappa_{mn}$ и $\hat{\varkappa}_{mn}$ вещественны.

В наиболее интересном для практики случае волны H_{10} имеем

$$\psi_{10} = 0, \quad \hat{\psi}_{10}(x, y) = \sqrt{\frac{2}{ab}} \cos \frac{\pi}{a} x, \quad \hat{\lambda}_{10} = \left(\frac{\pi}{a} \right)^2,$$

и для $R^{(a)}$ получаем формулу Слэтера

$$R^{(a)} = \frac{l^2}{ab} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\sin^2 \dfrac{\pi}{a} d}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{\pi}{ak} \right)^2}} \tag{2}$$

(формулы (1) и (2) даны в практической системе единиц).

б) Пусть полуволновой диполь ориентирован вдоль оси y, а его концы находятся в точках $M_1(d, y_1)$ и $M_2(d, y_2)$, причем $y_2 - y_1 = \dfrac{\lambda}{2} = \dfrac{\pi}{k}$. Распределение тока в диполе дается формулой

$$I = I_0 \sin k(y - y_1).$$

Сопротивление излучения равно

$$R^{(a)} = \frac{8\pi}{c} k \sum_{m=1} \sum_{n=0} \frac{2\varepsilon_n}{ab} \frac{\sin^2 \dfrac{\pi m}{a} d \cos^2 \dfrac{\pi n}{b} \left(y_1 + \dfrac{\pi}{2k} \right) \cos^2 \dfrac{\pi n}{2bk}}{P_{mn} \left[k^2 - \left(\dfrac{\pi n}{b} \right)^2 \right]} \quad (\lambda_{mn} < k^2),$$

где

$$P_{mn} = \sqrt{\lambda_{mn} - k^2}, \quad \lambda_{mn} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right), \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 2, & n \neq 0. \end{cases}$$

Верхние пределы суммирования находятся из условия $\lambda_{mn} < k^2$.

ДОПОЛНЕНИЕ

I. Различные ортогональные системы координат

Пусть x, y, z — декартовы координаты некоторой точки, а x_1, x_2, x_3 — криволинейные ортогональные координаты этой точки. Квадрат элемента длины выражается формулой

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = h_1^2 dx_1^2 + h_2^2 dx_2^2 + h_3^2 dx_3^2,$$

где

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2} \quad (i = 1, 2, 3)$$

— метрические коэффициенты, или коэффициенты Ламэ. Ортогональная координатная система полностью характеризуется тремя метрическими коэффициентами h_1, h_2, h_3.

Приведем общее выражение для операторов grad, div, rot и оператора Лапласа Δ в ортогональной криволинейной системе координат:

$$\operatorname{grad} u = \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{h_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \boldsymbol{i}_j,$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 A_3) \right],$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \boldsymbol{i}_1 & h_2 \boldsymbol{i}_2 & h_3 \boldsymbol{i}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta u = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial u}{\partial x_3} \right) \right],$$

где $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{i}_3$ — единичные базисные векторы, $\boldsymbol{A} = (A_1, A_2, A_3)$ — произвольный вектор, u — скаляр, $A_s = A_s(x_1, x_2, x_3)$, $s = 1, 2, 3$, $u = u(x_1, x_2, x_3)$.

1. Прямоугольные координаты.

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad h_1 = 1, \quad h_2 = 1, \quad h_3 = 1$$

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \boldsymbol{k}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \boldsymbol{i} + \ldots,$$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz},$$

где $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ — направляющие единичные векторы осей x, y, z.

2. Цилиндрические координаты.

$$x_1 = r, \quad x_2 = \varphi, \quad x_3 = z$$

связаны с прямоугольными координатами уравнениями

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z.$$

Координатные поверхности: $r = \text{const}$ — цилиндры, $\varphi = \text{const}$ — плоскости, $z = \text{const}$ — плоскости.

Метрические коэффициенты равны

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = 1,$$

так что

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r}\,\boldsymbol{i}_1 + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial \varphi}\,\boldsymbol{i}_2 + \frac{\partial u}{\partial z}\,\boldsymbol{i}_3,$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\,(rA_1) + \frac{1}{r}\,\frac{\partial A_2}{\partial \theta} + \frac{\partial A_3}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial A_3}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \boldsymbol{i}_1 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial r} \right) \boldsymbol{i}_2 + \left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}(rA_2) - \frac{1}{r}\,\frac{\partial A_1}{\partial \varphi} \right] \boldsymbol{i}_3,$$

$$\Delta u = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

3. Сферические координаты.

$$x_1 = r, \quad x_2 = \theta, \quad x_3 = \varphi$$

связаны с прямоугольными координатами формулами

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta.$$

Координатные поверхности: концентрические сферы $r = \text{const}$, плоскости $\varphi = \text{const}$, конусы $\theta = \text{const}$.

Метрические коэффициенты равны

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r\sin\theta,$$

так что

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r}\,\boldsymbol{i}_1 + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial \theta}\,\boldsymbol{i}_2 + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial u}{\partial \varphi}\,\boldsymbol{i}_3,$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\,(r^2 A_1) + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_2) + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial A_3}{\partial \varphi},$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_3) - \frac{\partial A_2}{\partial\varphi}\right]\boldsymbol{i}_1 +$$

$$+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_1}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_3)\right]\boldsymbol{i}_2 + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_2) - \frac{\partial A_1}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{i}_3,$$

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

4. Эллиптические координаты.

$$x_1 = \lambda, \quad x_2 = \mu, \quad x_3 = z$$

определяются с помощью формул преобразования

$$x = c\lambda\mu, \quad y = c\sqrt{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)}, \quad z = z,$$

где c — масштабный множитель.

Метрические коэффициенты равны

$$h_1 = c\sqrt{\frac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda^2-1}}, \quad h_2 = c\sqrt{\frac{\lambda^2-\mu^2}{1-\mu^2}}, \quad h_3 = 1.$$

Координатные поверхности: $\lambda = \text{const}$ — цилиндры эллиптического сечения с фокусами в точках $x = \pm c$, $y = 0$, $\mu = \text{const}$ — семейство конфокальных гиперболических цилиндров, $z = \text{const}$ — плоскости.

5. Параболические координаты. Если r, θ — полярные координаты точки на плоскости, то параболические координаты могут быть введены с помощью формул

$$x_1 = \lambda = \sqrt{2r}\sin\frac{\theta}{2}, \quad x_2 = \mu = \sqrt{2r}\cos\frac{\theta}{2}, \quad x_3 = z.$$

Координатные поверхности $\lambda = \text{const}$ и $\mu = \text{const}$ представляют собой пересекающиеся параболические цилиндры с образующими, параллельными оси z.

Связь с декартовыми координатами дают формулы

$$x = \frac{1}{2}(\mu^2 - \lambda^2), \quad y = \lambda\mu, \quad z = z.$$

Метрические коэффициенты

$$h_1 = h_2 = \sqrt{\lambda^2+\mu^2}, \quad h_3 = 1.$$

6. Эллипсоидальные координаты. Вводятся с помощью уравнений $(a > b > c)$.

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1 \quad (\lambda > -c^2) \quad \text{(уравнение эллипсоида)},$$

$$\frac{x^2}{a^2+\mu} + \frac{y^2}{b^2+\mu} + \frac{z^2}{c^2+\mu} = 1 \quad (-c^2 > \mu > -b^2)$$

(уравнение однополостного гиперболоида),

$$\frac{x^2}{a^2+\nu}+\frac{y^2}{b^2+\nu}+\frac{z^2}{c^2+\nu}=1 \quad (-b^2>\nu>-a^2)$$

(уравнение двухполостного гиперболоида).

Каждой точке (x, y, z) соответствует только одна система значений λ, μ, ν.

Параметры

$$x_1=\lambda, \quad x_2=\mu, \quad x_3=\nu$$

и называются эллипсоидальными координатами. Координаты x, y, z выражаются явно через λ, μ, ν:

$$x=\pm\sqrt{\frac{(\lambda+a^2)(\mu+a^2)(\nu+a^2)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}},$$

$$y=\pm\sqrt{\frac{(\lambda+b^2)(\mu+b^2)(\nu+b^2)}{(c^2-b^2)(a^2-b^2)}},$$

$$z=\pm\sqrt{\frac{(\lambda+c^2)(\mu+c^2)(\nu+c^2)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}}.$$

Коэффициенты Ламэ равны

$$h_1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{R^2(\lambda)}}, \quad h_2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{R^2(\mu)}},$$

$$h_3=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{R^2(\nu)}},$$

где

$$R(s)=\sqrt{(s+a^2)(s+b^2)(s+c^2)} \quad (s=\lambda,\ \mu,\ \nu).$$

Оператор Лапласа можно представить в виде

$$\Delta u=\frac{4}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}\left[(\mu-\nu)R(\lambda)\,\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(R(\lambda)\,\frac{\partial u}{\partial\lambda}\right)+\right.$$

$$\left.+(\nu-\lambda)\,R(\mu)\,\frac{\partial}{\partial\mu}\left(R(\mu)\,\frac{\partial u}{\partial\mu}\right)+(\lambda-\mu)\,R(\nu)\,\frac{\partial}{\partial\nu}\left(R(\nu)\,\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)\right].$$

Частное решение уравнения Лапласа, зависящее только от λ, $U=U(\lambda)$ дается формулой

$$U=A\int\frac{d\lambda}{R(\lambda)}+B,$$

где A и B — произвольные постоянные.

7. Вырожденные эллипсоидальные координаты.

а) Вырожденные эллипсоидальные координаты (α, β, φ) для вытянутого эллипсоида вращения определяются при помощи формул

$$x=c\sin\beta\cos\varphi, \quad y=c\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi, \quad z=c\,\mathrm{ch}\,\alpha\cos\beta,$$

где c — масштабный множитель, $0\leqslant\alpha<\infty$, $0\leqslant\beta\leqslant\pi$, $-\pi<\varphi\leqslant\pi$. Координатные поверхности: вытянутые эллипсоиды вращения $\alpha=$ $=\mathrm{const}$, двухполостные гиперболоиды вращения $\beta=\mathrm{const}$ и плоскости $\varphi=\mathrm{const}$.

Квадрат линейного элемента дается выражением

$$ds^2 = c^2(\operatorname{sh}^2\alpha + \sin^2\beta)(d\alpha^2 + d\beta^2) + c^2\operatorname{sh}^2\alpha\sin^2\beta\, d\varphi^2,$$

откуда для метрических коэффициентов получаются значения

$$h_1 = h_2 = c\sqrt{\operatorname{sh}^2\alpha + \sin^2\beta}, \quad h_3 + h_\varphi = c\operatorname{sh}\alpha\sin\beta.$$

Уравнение Лапласа имеет вид

$$\Delta u = \frac{1}{c^2(\operatorname{sh}^2\alpha + \sin^2\beta)}\left[\frac{1}{\operatorname{sh}\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\operatorname{sh}\alpha\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right) + \frac{1}{\sin\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\sin\beta\,\frac{\partial u}{\partial\beta}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{\operatorname{sh}^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right] = 0.$$

б) Система вырожденных эллипсоидальных координат (α, β, φ) для сплюснутого эллипсоида вращения определяется с помощью равенств

$$x = c\operatorname{ch}\alpha\sin\beta\cos\varphi, \quad y = c\operatorname{ch}\alpha\sin\beta\sin\varphi, \quad z = c\operatorname{sh}\alpha\cos\varphi,$$
$$0 \leqslant \alpha < \infty, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant \pi, \quad -\pi < \varphi \leqslant \pi.$$

Координатные поверхности: сплюснутые эллипсоиды вращения $\alpha = \text{const}$, однополостные гиперболоиды вращения $\beta = \text{const}$ и плоскости $\varphi = \text{const}$, проходящие через ось z.

Квадрат линейного элемента и оператор Лапласа в рассматриваемой системе координат имеют вид

$$ds^2 = c^2(\operatorname{ch}^2\alpha - \sin^2\beta)(d\alpha^2 + d\beta^2) + c^2\operatorname{ch}^2\alpha\sin^2\beta\, d\varphi^2,$$

$$\Delta u = \frac{1}{c^2(\operatorname{ch}^2\alpha - \sin^2\beta)}\left[\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\operatorname{ch}\alpha\,\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right) + \frac{1}{\sin\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\sin\beta\frac{\partial u}{\partial\beta}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2\alpha}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right].$$

8. Тороидальные координаты. Система тороидальных координат (α, β, φ) определяется при помощи формул

$$x = \frac{c\operatorname{sh}\alpha\cos\varphi}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}, \quad y = \frac{c\operatorname{sh}\alpha\sin\varphi}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}, \quad z = \frac{c\sin\beta}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta},$$

где c — масштабный множитель, $0 \leqslant \alpha < \infty$, $-\pi < \beta \leqslant \pi$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

Координатные поверхности суть торы $\alpha = \text{const}$

$$(\rho - c\operatorname{cth}\alpha)^2 + z^2 = \left(\frac{c}{\operatorname{sh}\alpha}\right)^2 \quad (\rho = \sqrt{x^2 + y^2}),$$

сферы $\beta = \text{const}$

$$(z - c\operatorname{ctg}\beta)^2 + \rho^2 = \left(\frac{c}{\sin\beta}\right)^2,$$

плоскости $\varphi = \text{const}$.

Квадрат линейного элемента в тороидальной системе координат имеет вид

$$ds^2 = \frac{c^2}{(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)^2}\,[d\alpha^2 + d\beta^2 + \operatorname{sh}^2\alpha\, d\varphi^2],$$

метрические коэффициенты равны

$$h_\alpha = h_\beta = \frac{c}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}, \quad h_\varphi = \frac{c\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta},$$

и оператор Лапласа дается следующим выражением:

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}\,\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}\,\frac{\partial u}{\partial\beta}\right) + \\ + \frac{1}{(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)\operatorname{sh}\alpha}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

Удобно вводить вместо u новую функцию v с помощью соотношения

$$u = \sqrt{2\operatorname{ch}\alpha - 2\cos\beta}\cdot v,$$

при этом уравнение $\Delta u = 0$ приводится к уравнению

$$v_{\alpha\alpha} + v_{\beta\beta} + v_\alpha \operatorname{cth}\alpha + \frac{1}{4}\,v + \frac{1}{\operatorname{sh}^2\alpha}\,v_{\varphi\varphi} = 0.$$

9. Биполярные координаты.

а) Биполярные координаты на плоскости.

Переменные

$$x_1 = \alpha, \quad x_2 = \beta, \quad x_3 = z$$

называются биполярными координатами, если имеют место равенства

$$x = \frac{a\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}, \quad y = \frac{a\sin\beta}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}, \quad z = z.$$

Метрические коэффициенты равны

$$h_1 = h_2 = \frac{a}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}, \quad h_3 = 1.$$

б) Бисферические координаты

$$x_1 = \alpha, \quad x_2 = \beta, \quad x_3 = \varphi$$

определяются при помощи формул

$$x = \frac{c\sin\alpha\cos\varphi}{\operatorname{ch}\beta - \cos\alpha}, \quad y = \frac{c\sin\alpha\sin\varphi}{\operatorname{ch}\beta - \cos\alpha}, \quad z = \frac{c\operatorname{sh}\beta}{\operatorname{ch}\beta - \cos\alpha},$$

где c — постоянный множитель, $0 \leqslant \alpha < \beta$, $-\infty < \beta < \infty$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

Эти формулы можно представить в компактной форме

$$z + i\rho = ci\operatorname{ctg}\frac{\alpha + i\beta}{2} \quad (\rho = \sqrt{x^2 + y^2}).$$

Координатные поверхности суть:

веретенообразные поверхности вращения α = const

$$(\rho - c\operatorname{ctg}\alpha)^2 + z^2 = \left(\frac{c}{\sin\alpha}\right)^2,$$

сферы $\beta = \text{const}$

$$\rho^2 + (z - c\operatorname{cth}\beta)^2 = \left(\frac{c}{\operatorname{sh}\beta}\right)^2;$$

плоскости $\rho = \text{const}$.

Выражение для квадрата линейного элемента в пространственных биполярных координатах имеет вид

$$ds^2 = \frac{c^2}{(\operatorname{ch}\beta - \cos\alpha)^2}\,[d\alpha^2 + d\beta^2 + \sin^2\alpha\, d\varphi^2],$$

откуда следует

$$h_1 = h_2 = \frac{c}{\operatorname{ch}\beta - \cos\alpha}, \quad h_3 = \frac{c\sin\alpha}{\operatorname{ch}\beta - \cos\alpha},$$

и уравнение Лапласа принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\sin\alpha}{\operatorname{ch}\beta - \cos\alpha}\,\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\sin\alpha}{\operatorname{ch}\beta - \cos\alpha}\,\frac{\partial u}{\partial\beta}\right) + \\ + \frac{1}{\sin\alpha(\operatorname{ch}\beta - \cos\alpha)}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0.$$

При решении уравнения Лапласа удобна подстановка

$$u = \sqrt{2\operatorname{ch}\beta - 2\cos\alpha}\, v.$$

Тогда для функции v получается уравнение

$$v_{\alpha\alpha} + v_{\beta\beta} + v_\alpha \operatorname{ctg}\alpha - \frac{1}{4}\,v + \frac{1}{\sin^2\alpha}\,v_{\varphi\varphi} = 0.$$

10. Сфероидальные координаты.

а) Вытянутые сфероидальные координаты

$$x_1 = \lambda, \quad x_2 = \mu, \quad x_3 = \varphi,$$

$$x = c\lambda\mu, \quad y = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}\cos\varphi, \quad z = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}\sin\varphi,$$

$$\lambda \geqslant 1, \quad -1 \leqslant \mu \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$

$$h_1 = c\sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - 1}}, \quad h_2 = c\sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{1 - \mu^2}}, \quad h_3 = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}.$$

б) Сплюснутые сфероидальные координаты

$$x_1 = \lambda, \quad x_2 = \mu, \quad x_3 = \varphi,$$

$$x = c\lambda\mu\sin\varphi, \quad y = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}, \quad z = c\lambda\mu\cos\varphi.$$

Поверхности $\lambda = \text{const}$ — сплюснутые сфероиды, $\mu = \text{const}$ — однополостные гиперболоиды.

Метрические коэффициенты

$$h_1 = c\sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - 1}}, \quad h_2 = c\sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{1 - \mu^2}}, \quad h_3 = c\,\lambda\mu.$$

11. Параболоидные координаты. Переменные

$$x_1 = \lambda, \quad x_2 = \mu, \quad x_3 = \varphi,$$

определяемые соотношениями

$$x = \lambda\mu\cos\varphi, \quad y = \lambda\mu\sin\varphi, \quad z = \frac{1}{2}(\lambda^2 - \mu^2),$$

называются параболоидными координатами. Метрические коэффициенты равны

$$h_1 = h_2 = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}, \quad h_3 = \lambda\mu.$$

Координатные поверхности $\lambda = \text{const}$, $\mu = \text{const}$ являются параболами вращения вокруг оси симметрии Oz.

II. Некоторые формулы векторного анализа

Обозначения: $\boldsymbol{a}$ — векторная функция, u — скалярная функция.

$$[[\boldsymbol{ab}]c] = (\boldsymbol{ac})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{bc})\boldsymbol{a},$$

$$[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{ab}),$$

$$\operatorname{grad}(uv) = u\operatorname{grad} v + v\operatorname{grad} u,$$

$$\operatorname{div}(u\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}\operatorname{grad} u + u\operatorname{div}\boldsymbol{a},$$

$$\operatorname{rot}(u\boldsymbol{a}) = [\boldsymbol{a}\operatorname{grad} u] + u\operatorname{rot}\boldsymbol{a},$$

$$\operatorname{div}[\boldsymbol{ab}] = \boldsymbol{b}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{b},$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{a} - \Delta\boldsymbol{a},$$

$$\operatorname{grad}(\boldsymbol{ab}) = \boldsymbol{a}\operatorname{div}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\operatorname{div}\boldsymbol{a} + [\boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{b}] + [\boldsymbol{b}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}],$$

$$\operatorname{rot}[\boldsymbol{ab}] = \boldsymbol{a}\operatorname{div}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\operatorname{div}\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b}\nabla)\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}\nabla)\boldsymbol{b},$$

где

$$(\boldsymbol{b}\nabla)\boldsymbol{a} = b_x\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial x} + b_y\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial y} + b_z\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial z}.$$

III. Специальные функции

1. Тригонометрические функции.

$$\cos z = 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 - \ldots = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \operatorname{ch}(iz),$$

$$\sin z = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \ldots = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = -i\operatorname{sh}(iz),$$

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y,$$

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y,$$

$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}\cos(x+y) + \frac{1}{2}\cos(x-y),$$

$$\sin x\sin y = -\frac{1}{2}\cos(x+y) + \frac{1}{2}\cos(x-y).$$

2. Гиперболические функции.

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{1}{2!}\,z^2 + \frac{1}{4!}\,z^4 + \ldots = \frac{1}{2}\,(e^z + e^{-z}) = \cos(iz),$$

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{1}{3!}\,z^3 + \frac{1}{5!}\,z^5 + \ldots = \frac{1}{2}\,(e^z - e^{-z}) = -i\sin(iz),$$

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1,$$

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y.$$

3. Интеграл ошибок.

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2}\,d\alpha.$$

Разложение в ряд при малых z

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(z - \frac{z^3}{1!\,3} + \frac{z^5}{2!\,5} - \ldots \right).$$

Асимптотическое разложение при больших z

$$\Phi(z) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{e^{-z^2}}{z} \left(1 - \frac{1}{2z^2} + \frac{3\cdot 4}{(2z)^4} - \frac{4\cdot 5\cdot 6}{(2z)^6} + \ldots \right).$$

В таблице 1 даны значения $\Phi(z)$ для $0 \leqslant z \leqslant 2,3$.

4. Гамма-функции.

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\,dt \quad (\operatorname{Re} z > 0), \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad \Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right),$$

$$\Gamma(z) \to \sqrt{2\pi}\, z^{z-1/2}\, e^{-z} \quad \text{для} \quad z \gg 1.$$

Бэта-функция

$$B(x,\, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} =$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}\varphi \cos^{2y-1}\varphi\,d\varphi \quad (\operatorname{Re} x > 0, \quad \operatorname{Re} y > 0).$$

5. Эллиптические функции.

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \operatorname{sn}^{-1}(x,\, k),$$

$$\int_x^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(x^2+k^2-1)}} = \operatorname{dn}^{-1}(x,\, k),$$

$$\int_x^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2+k^2x^2)}} = \operatorname{cn}^{-1}(x,\, k),$$

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(1+k'^2x^2)}} = \operatorname{tn}^{-1}(x,\, k),$$

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-(k')^2x^2)}}, \quad k = \sin\alpha, \quad k' = \cos\alpha.$$

6. Функции Бесселя.

$$J_n(z) = \frac{1}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^n \left[1 - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{1!\,(n+1)} + \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^4}{2!\,(n+1)(n+2)} - \dots\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+n+1)} \underset{z\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left[z - \frac{1}{2}\,\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\right], \quad (\operatorname{Re} z > 0),$$

$$N_n(z) = \frac{1}{\pi}\left[2\ln\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma - \psi(n+1)\right] J_n(z) - \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!\left(\frac{z}{2}\right)^{n-2m}} -$$

$$- \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m}}{m!\,(n+m)!} \left[\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+n}\right)\right],$$

где $\psi(n) = \dfrac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}$,

$$N_0(z) \underset{z\to 0}{\longrightarrow} \frac{2}{\pi}\,(\ln z - 0{,}11593), \quad n = 0,$$

$$N_n(z) \underset{z\to 0}{\longrightarrow} \frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{z}\right)^n, \quad n = 1,\, 2,\, 3,\, \dots,$$

$$N_n(z) \underset{z\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left[z - \frac{1}{2}\,\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\right] \quad (\operatorname{Re} z > 0),$$

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z), \quad N_{-n}(z) = (-1)^n N_n(z),$$

$$\left.\begin{aligned} J_n(z)\, N_n'(z) - J_n'(z)\, N_n(z) &= \Delta(J_n,\, N_n) = \frac{2}{\pi z}, \\ N_{n-1}(z)\, J_n(z) - N_n(z)\, J_{n-1}(z) &= \Delta(J_n,\, N_n) = \frac{2}{\pi z} \end{aligned}\right\}$$

(определитель Вронского),

$$e^{-iz\sin\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{-in\varphi},$$

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iz\sin\varphi + in\varphi} d\varphi \quad (n \text{ — целое число}),$$

$$H_n^{(1)}(z) = J_n(z) + iN_n(z) \underset{z\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, \exp\left\{ i\left[z - \frac{\pi}{2}\, n - \frac{\pi}{4} \right] \right\},$$

$$H_n^{(2)}(z) = J_n(z) - iN_n(z) \underset{z\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, \exp\left\{ -i\left[z - \frac{\pi}{2}\, n - \frac{\pi}{4} \right] \right\}.$$

Рекуррентные формулы

$$\frac{2n}{x}\, Z_n(x) = Z_{n-1} + Z_{n+1}, \quad 2Z_n'(x) = Z_{n-1} - Z_{n+1}$$

или

$$\frac{d}{dx}\left[x^n Z_n(x) \right] = x^n Z_{n-1}, \quad \frac{d}{dx}\left[\frac{Z_n(x)}{x^n} \right] = -\frac{Z_{n+1}}{x^n},$$

$$Z_0' = -Z_1, \quad [xZ_1(x)]' = xZ_0(x),$$

$$\int Z_0^2(\alpha x)\, x\, dx = \frac{1}{2}\, x^2 \left[Z_0^2(\alpha x) + Z_1^2(\alpha x) \right],$$

$$\int Z_m^2(\alpha x)\, x\, dx = \frac{1}{2}\, x^2 \left[Z_m^2(\alpha x) - Z_{m-1}(\alpha x) Z_{m+\hat{1}}(\alpha x) \right].$$

Здесь $Z_n(x) = AJ_n(x) + BN_n(x)$ — любое решение уравнения Бесселя

$$\frac{1}{x}\, \frac{d}{dx}\left(x\, \frac{dZ_n}{dx} \right) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2} \right) Z_n = 0.$$

Функции мнимого аргумента

$$I_n(x) = \left(\frac{1}{i} \right)^n J_n(ix) \underset{z\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\, e^x, \quad I_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2} \right)^{2k+n}}{\Gamma(k+1)\, \Gamma(k+n+1)},$$

$$K_n(x) = \frac{1}{2}\, \pi i^{n+1}\, N_n^{(1)}(ix) \underset{z\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x},$$

$$K_n(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{(n-1)!}{2} \left(\frac{2}{x} \right)^n + \ldots, \quad n > 0,$$

$$I_{-n}(x) = I_n(x), \quad K_n(x) = K_{-n}(x),$$

$K_0(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\left(\ln \frac{x}{2} + C \right) + \ldots$, $C = 0,5772\ldots$ — постоянная Эйлера.

$$I_n(x)\,K_n'(x) - I_n'(x)\,K_n(x) = \Delta(I_n,\,K_n) = -\frac{1}{x},$$

$$I_n(x)\,K_{n-1}(x) + I_{n-1}(x)\,K_n(x) = -\Delta(I_n,\,K_n) = \frac{1}{x},$$

$$I_{n-1}(x) - I_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}\,I_n(x), \quad I_{n-1}(x) + I_{n+1}(x) = 2I_n'(x),$$

$$Z_n'' + \frac{1}{x}\,Z_n' - \left(1 + \frac{n^2}{x^2}\right) Z_n = 0, \quad Z_n = I_n \quad \text{или} \quad Z_n = K_n.$$

Некоторые интегралы

$$\int_0^\infty e^{-at}\,J_n(bt)\,\frac{dt}{t} = \frac{1}{ab^n}\,[\sqrt{a^2+b^2} - a]^n,$$

$$\int_0^\infty e^{-at}\,J_n(bt)\,t^n\,dt = \frac{(2b)^n\,\Gamma\,(n+1/2)}{\Gamma\,(1/2)\,(a^2+b^2)^{n+1/2}},$$

$$\int_0^\infty e^{-at}\,N_0(bt)\,dt = \frac{-2/\pi}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\ln\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$

($a,\ b$ вещественны и положительны).

7. Полиномы Лежандра. Уравнение $[(1-x^2)\,y']' + n(n+1)\,y = 0$ $(-1 < x < 1)$,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + r^2 - 2rr_0\cos\theta}} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r_0}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\cos\theta) & \text{при} \quad r < r_0, \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\cos\theta) & \text{при} \quad r > r_0, \end{cases}$$

$$(n+1)P_{n+1}(x) - x(2n+1)P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0,$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\,n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\,[(x^2-1)^n].$$

Уравнение присоединенных функций

$$[(1-x^2)y']' + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right) y = 0,$$

$$\int_{-1}^{1} P_n^{(m)}(x) P_k^{(m)}(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\,\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\,\delta_{kn}, \quad \delta_{kn} = \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & k \neq n, \end{cases}$$

$$P_n^{(m)}(x) = (1-x^2)^{m/2}\,\frac{d^m}{dx^m}\,P_n(x),$$

$$e^{i\rho\cos\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\,i^n\,\psi_n(\rho)\,P_n(\cos\theta),$$

$$\psi_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}\, J_{n+1/2}(\rho),$$

$$\frac{e^{ikR}}{ikR} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\zeta_n^{(1)}(\rho_0)\psi_n(\rho)P_n(\cos\theta), & r < r_0, \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\psi_n(\rho_0)\zeta_n^{(1)}(\rho)P_n(\cos\theta), & r > r_0, \end{cases}$$

$$\zeta_n^{(1)}(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}\, H_{n+1/2}^{(1)}(\rho),$$

$$R = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\theta},$$

$$\rho = kr, \quad \rho_0 = kr_0,$$

$$\psi_n(\rho)\zeta_n^{(1)'}(\rho) - \zeta_n^{(1)}(\rho)\psi_n'(\rho) = \frac{i}{\rho},$$

$$\psi_0(\rho) = \frac{\sin\rho}{\rho}, \quad \psi_1(\rho) = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\sin\rho}{\rho} - \cos\rho\right),$$

$$\zeta_0^{(1)}(\rho) = \frac{e^{i(\rho-\pi/2)}}{\rho}, \quad \zeta_1^{(1)}(\rho) = \frac{e^{i(\rho-\pi/2)}}{\rho}\left(\frac{1}{\rho} - i\right).$$

8. Гипергеометрическая функция $F(\alpha, \beta, \gamma)$. Уравнение

$$z(1-z)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)z]\,y' - \alpha\beta y = 0,$$

$$y = y_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}\,z + \frac{\alpha(\alpha+1)\,\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}\,z^2 + \ldots,$$

$$y = y_2 = z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ z),$$

$$P_n(z) = F\left(-n,\ n+1,\ 1,\ \frac{1-z}{2}\right) = (-1)^n F\left(-n,\ n+1,\ 1,\ \frac{1+z}{2}\right),$$

$$P_n^{(m)}(z) = \\ = \frac{(n+m)!}{2^m m!\,(n-m)!}\,(1-z^2)^{m/2}\,F\left(m-n,\ m+n+1,\ m+1,\ \frac{1-z}{2}\right).$$

Конфлюэнтная (вырожденная) гипергеометрическая функция

$$F = F(\alpha, \gamma, \rho) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma}\,\frac{\rho}{1} + \frac{\alpha(\alpha+1)\,\rho^2}{\gamma(\gamma+1)\,z!} + \ldots,$$

$$\rho\,\frac{d^2F}{d\rho^2} + (\gamma-\rho)\,\frac{dF}{d\rho} - \alpha F = 0.$$

IV. Таблицы

Таблица 1

Интеграл ошибок $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2}\, d\alpha, \quad 0 \leqslant z \leqslant 2{,}3$

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0,00	0,0000	0,40	0,4284	0,80	0,7421	1,20	0,9103
0,01	0,0113	0,41	0,4380	0,81	0,7480	1,21	0,9130
0,02	0,0226	0,42	0,4475	0,82	0,7538	1,22	0,9155
0,03	0,0338	0,43	0,4569	0,83	0,7595	1,23	0,9181
0,04	0,0451	0,44	0,4662	0,84	0,7651	1,24	0,9205
0,05	0,0564	0,45	0,4755	0,85	0,7707	1,25	0,9229
0,06	0,0676	0,46	0,4847	0,86	0,7761	1,26	0,9252
0,07	0,0789	0,47	0,4937	0,87	0,7814	1,27	0,9275
0,08	0,0901	0,48	0,5027	0,88	0,7867	1,28	0,9297
0,09	0,1013	0,49	0,5117	0,89	0,7918	1,29	0,9319
0,10	0,1125	0,50	0,5205	0,90	0,7969	1,30	0,9340
0,11	0,1236	0,51	0,5292	0,91	0,8019	1,31	0,9361
0,12	0,1348	0,52	0,5379	0,92	0,8068	1,32	0,9381
0,13	0,1459	0,53	0,5465	0,93	0,8116	1,33	0,9400
0,14	0,1569	0,54	0,5549	0,94	0,8163	1,34	0,9419
0,15	0,1680	0,55	0,5633	0,95	0,8209	1,35	0,9438
0,16	0,1790	0,56	0,5716	0,96	0,8254	1,36	0,9456
0,17	0,1900	0,57	0,5798	0,97	0,8299	1,37	0,9473
0,18	0,2009	0,58	0,5879	0,98	0,8342	1,38	0,9490
0,19	0,2118	0,59	0,5959	0,99	0,8385	1,39	0,9507
0,20	0,2227	0,60	0,6039	1,00	0,8427	1,40	0,9523
0,21	0,2335	0,61	0,6117	1,01	0,8468	1,41	0,9539
0,22	0,2443	0,62	0,6194	1,02	0,8508	1,42	0,9554
0,23	0,2550	0,63	0,6170	1,03	0,8548	1,43	0,9569
0,24	0,2657	0,64	0,6346	1,04	0,8586	1,44	0,9583
0,25	0,2763	0,65	0,6420	1,05	0,8624	1,45	0,9597
0,26	0,2869	0,66	0,6494	1,06	0,8661	1,46	0,9611
0,27	0,2974	0,67	0,6566	1,07	0,8698	1,47	0,9624
0,28	0,3079	0,68	0,6633	1,08	0,8733	1,48	0,9637
0,29	0,3183	0,69	0,6708	1,09	0,8768	1,49	0,9649
0,30	0,3286	0,70	0,6778	1,10	0,8802	1,50	0,9661
0,31	0,3389	0,71	0,6847	1,11	0,8835	1,51	0,9661
0,32	0,3491	0,72	0,6914	1,12	0,8868	1,6	0,9763
0,33	0,3593	0,73	0,6981	1,13	0,8900	1,7	0,9838
0,34	0,3694	0,74	0,7047	1,14	0,8931	1,8	0,9891
0,35	0,3794	0,75	0,7112	1,15	0,8961	1,9	0,9928
0,36	0,3893	0,76	0,7175	1,16	0,8991	2,0	0,9953
0,37	0,3992	0,77	0,7238	1,17	0,9020	2,1	0,9970
0,38	0,4090	0,78	0,7300	1,18	0,9048	2,2	0,9981
0,39	0,4187	0,79	0,7361	1,19	0,9076	2,3	0,9989

Таблица 2

Корни характеристических уравнений $J_0(\mu) = 0$ и $J_1(\mu) = 0$

n	Корни μ_n уравнения $J_0(\mu) = 0$	Корни μ_n уравнения $J_1(\mu) = 0$	n	Корни μ_n уравнения $J_0(\mu) = 0$	Корни μ_n уравнения $J_1(\mu) = 0$
1	2,4048	3,8317	6	18,0711	19,6159
2	5,5201	7,0156	7	21,2116	22,7601
3	8,6537	10,1735	8	24,3525	25,9037
4	11,7915	13,3237	9	27,4935	29,0468
5	14,9309	16,4706	10	30,6346	32,1897

Таблица 3

Корни характеристического уравнения $\dfrac{J_0(\mu)}{J_1(\mu)} = \dfrac{1}{lh}\,\mu$

$lh = \hbar$	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6
0,0	0,0000	3,8317	7,0156	10,1735	13,3237	16,4706
0,01	0,1412	3,8343	7,0170	10,1745	13,3244	16,4712
0,02	0,1995	3,8369	7,0184	10,1754	13,3252	16,4718
0,03	0,2814	3,8421	7,0213	10,1774	13,3267	16,4731
0,06	0,3438	3,8473	7,0241	10,1794	13,3282	16,4743
0,08	0,3960	3,8525	7,0270	10,1813	13,3297	16,4755
0,10	0,4417	3,8577	7,0298	10,1833	13,3312	16,4767
0,15	0,5376	3,8706	7,0369	10,1882	13,3349	16,4797
0,20	0,6170	3,8835	7,0440	10,1931	13,3387	16,4828
0,30	0,7465	3,9091	7,0582	10,2029	13,3462	16,4888
0,40	0,8516	3,9344	7,0723	10,2127	13,3537	16,4949
0,50	0,9408	3,9594	7,0864	10,2225	13,3611	16,5010
0,60	1,0184	3,9841	7,1004	10,2322	13,3686	16,5070
0,70	1,0873	4,0085	7,1143	10,2419	13,3761	16,5131
0,80	1,1490	4,0325	7,1282	10,2519	13,3835	16,5191
0,90	1,2048	4,0562	7,1421	10,2613	13,3910	16,5251
1,0	1,2558	4,0795	7,1558	10,2710	13,3984	16,5312
1,5	1,4569	4,1902	7,2223	10,3188	13,4353	16,5612
2,0	1,5994	4,2910	7,2884	10,3658	13,4719	16,5910
3,0	1,7887	4,4634	7,4103	10,4566	13,5434	16,6499
4,0	1,9081	4,6018	7,5201	10,5423	13,6125	16,7073
5,0	1,9898	4,7131	7,6177	10,6223	13,6786	16,7630
6,0	2,0490	4,8033	7,7039	10,6964	13,7414	16,8168
7,0	2,0937	4,8772	7,7797	10,7646	13,8008	16,8684
8,0	2,1286	4,9384	7,8464	10,8271	13,8566	16,9179
9,0	2,1566	4,9897	7,9051	10,8842	13,9090	16,9650
10,0	2,1795	5,0332	7,9569	10,9363	13,9580	17,0099
15,0	2,2509	5,1773	8,1422	11,1367	14,1576	17,2008
20,0	2,2880	5,2568	8,2534	11,2677	14,2983	17,3442
30,0	2,3261	5,3410	8,3771	11,4221	14,4748	17,5348
40,0	2,3455	5,3846	8,4432	11,5081	14,5774	17,6508
50,0	2,3572	5,4112	8,4840	11,5621	14,6433	17,7272
60,0	2,3651	5,4291	8,5116	11,5990	14,6889	17,7807
80,0	2,3750	5,4516	8,5466	11,6461	14,7475	17,8502
100,0	2,3809	5,4652	8,5678	11,6747	14,7834	17,8931
∞	2,4048	5,5201	8,6537	11,7915	14,9309	18,0711

Таблица 4

Корни μ_n характеристического уравнения $J_0(\mu)\,N_0(k\mu) - N_0(\mu)\,J_0(k\mu) = 0$

k	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5
1,2	15,7014	31,4126	47,1217	62,8304	78,5385
1,5	6,2702	12,5598	18,8451	25,1294	31,4133
2,0	3,1230	6,2734	9,4182	12,5614	15,7040
2,5	2,0732	4,1773	6,2754	8,3717	10,4672
3,0	1,5485	3,1291	4,7038	6,2767	7,8487
3,5	1,2339	2,5002	3,7608	5,0196	6,2776
4,0	1,0244	2,0809	3,1322	4,1816	5,2301

Таблица 5

Корни характеристического уравнения $\operatorname{tg}\mu = -\dfrac{\mu}{h}$

h	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6
0	1,5708	4,7124	7,8540	10,9956	14,1372	17,2788
0,1	1,6320	4,7335	7,8667	11,0047	14,1443	17,2845
0,2	1,6887	4,7544	7,8794	11,0137	14,1513	17,2903
0,3	1,7414	4,7751	7,8920	11,0228	14,1584	17,2961
0,4	1,7906	4,7956	7,9046	11,0318	14,1654	17,3019
0,5	1,8366	4,8158	7,9171	11,0409	14,1724	17,3076
0,6	1,8798	4,8358	7,9295	11,0498	14,1795	17,3134
0,7	1,9203	4,8556	7,9419	11,0588	14,1865	17,3192
0,8	1,9586	4,8751	7,9542	11,0677	14,1935	17,3249
0,9	1,9947	4,8943	7,9665	11,0767	14,2005	17,3306
1,0	2,0288	4,9132	7,9787	11,0856	14,2075	17,3364
1,5	2,1746	5,0037	8,0382	11,1296	14,2421	17,3649
2,0	2,2889	5,0870	8,0965	11,1727	14,2764	17,3932
3,0	2,4557	5,2329	8,2045	11,2560	14,3434	17,4490
4,0	2,5704	5,3540	8,3029	11,3349	14,4080	17,5034
5,0	2,6537	5,4514	8,3914	11,4086	14,4699	17,5562
6,0	2,7165	5,5378	8,4703	11,4773	14,5288	17,6072
7,0	2,7654	5,6078	8,5406	11,5408	14,5847	17,6562
8,0	2,8044	5,6669	8,6031	11,5994	14,6374	17,7032
9,0	2,8363	5,7172	8,6587	11,6532	14,6860	17,7481
10,0	2,8628	5,7606	8,7083	11,7027	14,7335	17,7908
15,0	2,9476	5,9080	8,8898	11,8959	14,9251	17,9742
20,0	2,9930	5,9921	9,0019	12,0250	15,0625	18,1136
30,0	3,0406	6,0831	9,1294	12,1807	15,2380	18,3018
40,0	3,0651	6,1311	9,1986	12,2688	15,3417	18,4180
50,0	3,0801	6,1606	9,2420	12,3247	15,4090	18,4953
60,0	3,0901	6,1805	9,2715	12,3632	15,4559	18,5497
80,0	3,1028	6,2058	9,3089	12,4124	15,5164	18,6209
100,0	3,1105	6,2211	9,3317	12,4426	15,5537	18,6650
∞	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080	18,8496

Таблица 6

Первые шесть корней [1] α_n уравнения $\alpha \operatorname{tg} \alpha = C$

C	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
0	0	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080
0,001	0,0316	3,1419	6,2833	9,4249	12,5665	15,7080
0,002	0,0447	3,1422	6,2835	9,4250	12,5665	15,7081
0,004	0,0632	3,1429	6,2838	9,4252	12,5667	15,7082
0,006	0,0774	3,1435	6,2841	9,4254	12,5668	15,7083
0,008	0,0893	3,1441	6,2845	9,4256	12,5670	15,7085
0,01	0,0998	3,1448	6,2848	9,4258	12,5672	15,7086
0,02	0,1410	3,1479	6,2864	9,4269	12,5680	15,7092
0,04	0,1987	3,1543	6,2895	9,4290	12,5696	15,7105
0,06	0,2425	3,1606	6,2927	9,4311	12,5711	15,7118
0,08	0,2791	3,1668	6,2959	9,4333	12,5727	15,7131
0,1	0,3111	3,1731	6,2991	9,4354	12,5743	15,7143
0,2	0,4328	3,2039	6,3148	9,4459	12,5823	15,7207
0,3	0,5218	3,2341	6,3305	9,4565	12,5902	15,7270
0,4	0,5932	3,2636	6,3461	9,4670	12,5981	15,7334
0,5	0,6533	3,2923	6,3616	9,4775	12,6060	15,7397
0,6	0,7051	3,3204	6,3770	9,4879	12,6139	15,7460
0,7	0,7506	3,3477	6,3923	9,4983	12,6218	15,7524
0,8	0,7910	3,3744	6,4074	9,5087	12,6296	15,7587
0,9	0,8274	3,4003	6,4224	9,5190	12,6375	15,7650
1,0	0,8603	3,4256	6,4373	9,5293	12,6453	15,7713
1,5	0,9882	3,5422	6,5097	9,5801	12,6841	15,8026
2,0	1,0769	3,6436	6,5783	9,6296	12,7223	15,8336
3,0	1,1925	3,8088	6,7040	9,7240	12,7966	15,8945
4,0	1,2646	3,9352	6,8140	9,8119	12,8678	15,9536
5,0	1,3138	4,0336	6,9096	9,8928	12,9352	16,0107
6,0	1,3496	4,1116	6,9924	9,9667	12,9988	16,0654
7,0	1,3766	4,1746	7,0640	10,0339	13,0584	16,3177
8,0	1,3978	4,2264	7,1263	10,0949	13,1141	16,1675
9,0	1,4149	4,2694	7,1806	10,1502	13,1660	16,2147
10,0	1,4289	4,3058	7,2281	10,2003	13,2142	16,2594
15,0	1,4729	4,4255	7,3959	10,3898	13,4078	16,4474
20,0	1,4961	4,4915	7,4954	10,5117	13,5420	16,5864
30,0	1,5202	4,5615	7,6057	10,6543	13,7085	16,7691
40,0	1,5325	4,5979	7,6647	10,7334	13,8048	16,8794
50,0	1,5400	4,6202	7,7012	10,7832	13,8666	16,9519
60,0	1,5451	4,6353	7,7259	10,8172	13,9094	17,0026
80,0	1,5514	4,6543	7,7573	10,8606	14,9644	17,0686
100,0	1,5552	4,6658	7,7764	10,8871	13,9981	17,1093
∞	1,5708	4,7124	7,8540	10,9956	14,1372	17,2788

[1] Все корни этого уравнения действительны, если $C > 0$.

Таблица 7

Первые шесть корней [1] α_n уравнения $\alpha \operatorname{ctg} \alpha + C = 0$

C	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
−1,0	0	4,4934	7,7253	10,9041	14,0662	17,2208
−0,995	0,1224	4,4945	7,7259	10,9046	14,0666	17,2210
−0,99	0,1730	4,4956	7,7265	10,9050	14,0669	17,2213
−0,98	0,2445	4,4979	7,7278	10,9060	14,0676	17,2219
−0,97	0,2991	4,5001	7,7291	10,9069	14,0683	17,2225
−0,96	0,3450	4,5023	7,7304	10,9078	14,0690	17,2241
−0,95	0,3854	4,5045	7,7317	10,9087	14,0697	17,2237
−0,94	0,4217	4,5068	7,7330	10,9096	14,0705	17,2242
−0,93	0,4551	4,5090	7,7343	10,9105	14,0712	17,2248
−0,92	0,4860	4,5112	7,7356	10,9115	14,0719	17,2254
−0,91	0,5150	4,5134	7,7369	10,9124	14,0726	17,2260
−0,90	0,5423	4,5157	7,7382	10,9133	14,0733	17,2266
−0,85	0,6609	4,5268	7,7447	10,9179	14,0769	17,2295
−0,8	0,7593	4,5379	7,7511	10,9225	14,0804	17,2324
−0,7	0,9208	4,5601	7,7641	10,9316	14,0875	17,2382
−0,6	1,0528	4,5822	7,7770	10,9408	14,0946	17,2440
−0,5	1,1656	4,6042	7,7899	10,9499	14,1017	17,2498
−0,4	1,2644	4,6261	7,8028	10,9591	14,1088	17,2556
−0,3	1,3525	4,6479	7,8156	10,9682	14,1159	17,2614
−0,2	1,4320	4,6696	7,8284	10,9774	14,1230	17,2672
−0,1	1,5044	4,6911	7,8412	10,9865	14,1301	17,2730
0	1,5708	4,7124	7,8540	10,9956	14,1372	17,2788
0,1	1,6320	4,7335	7,8667	11,0047	14,1443	17,2845
0,2	1,6887	4,7544	7,8794	11,0137	14,1513	17,2903
0,3	1,7411	4,7751	7,8920	11,0228	14,1584	17,2961
0,4	1,7906	4,7956	7,9046	11,0318	14,1654	17,3019
0,5	1,8366	4,8158	7,9171	11,0409	14,1724	17,3076
0,6	1,8798	4,8358	7,9295	11,0498	14,1795	17,3134
0,7	1,9203	4,8556	7,9419	11,0588	14,1865	17,3192
0,8	1,9586	4,8751	7,9542	11,0677	14,1935	17,3249
0,9	1,9947	4,8943	7,9665	11,0767	14,2005	17,3306
1,0	2,0288	4,9132	7,9787	11,0856	14,2075	17,3364
1,5	2,1746	5,0037	8,0385	11,1296	14,2421	17,3649
2,0	2,2889	5,0870	8,0962	11,1727	14,2764	17,3932
3,0	2,4557	5,2329	8,2045	11,2560	14,3434	17,4490
4,0	2,5704	5,3540	8,3029	11,3349	14,4080	17,5034
5,0	2,6537	5,4544	8,3914	11,4086	14,4699	17,5562
6,0	2,7165	5,5378	8,4703	11,4773	14,5288	17,6072
7,0	2,7654	5,6078	8,5406	11,5408	14,5847	17,6562
8,0	2,8044	5,6669	8,6031	11,5994	14,6374	17,7032
9,0	2,8363	5,7172	8,6587	11,6532	14,6870	17,7481
10,0	2,8628	5,7606	8,7083	11,7027	14,7335	17,7908
15,0	2,9476	5,9080	8,8898	11,8959	14,9251	17,9742
20,0	2,9930	5,9921	9,0019	12,0250	15,0625	18,1136
30,0	3,0406	6,0831	9,1294	12,1807	15,2380	18,3018
40,0	3,0651	6,1311	9,1987	12,2688	15,3417	18,4180
50,0	3,0801	6,1606	9,2420	12,3247	15,4090	18,4953
60,0	3,0901	6,1805	9,2715	12,3632	15,4559	18,5497
80,0	3,1028	6,2058	9,3089	12,4124	15,5164	18,6203
100,0	3,1105	6,2211	9,3317	12,4426	15,5537	18,6650
∞	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080	18,8496

[1] Все корни этого уравнения действительны, если $C > -1$. Отрицательные значения C встречаются при рассмотрении сферы (см. § 2 гл. V).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Общие курсы и сборники задач по уравнениям математической физики

1. *Крылов А.Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах. — М.: Гостехиздат, 1950.
2. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. — М.: Наука, 1974 (т. I, II); 1974 (т. III, ч. 1); 1974 (т. III, ч. 2); 1958 (т. IV); 1959 (т. V).
3. *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966.
4. *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. — М.: Физматгиз, 1961.
5. *Левин В.И., Гросберг Ю.Н.* Дифференциальные уравнения математической физики. — М.: Гостехиздат, 1951.
6. *Кошляков Н.С.* Основные дифференциальные уравнения математической физики. — М.: ОНТИ, 1936.
7. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977.
8. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1971.
9. *Тихонов А.Н., Свешников А.Г.* Теория функций комплексной переменной. — М.: Наука, 1979.
10. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. I, II. — М.: Гостехиздат, 1951.

10а. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964.

11. *Вебстер А., Сеге Г.* Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики. — М.: ГТТИ, 1934.
12. *Гюнтер Н.М., Кузьмин Р.О.* Сборник задач по высшей математике. Ч. III. — М.: Гостехиздат, 1951.
13. *Смирнов М.М.* Задачи по уравнениям математической физики. — М.: Наука, 1965.
14. *Будак Б.М.* Сборник задач по математической физике. — М.: МГУ; ММИ, 1952.

II. Монографии по специальным вопросам

15. *Гюнтер Н.М.* Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. — М.: Гостехиздат, 1953.
16. *Кочин Н.Е.* Векторное исчисление и начала тензорного вычисления. — М.: Наука, 1965.
17. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. — М.: Физматгиз, 1963.
18. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика сплошных сред. — М.: Гостехиздат, 1954.
19. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. — М.: Наука, 1976.

20. *Иваненко Д.Д., Соколов А.А.* Классическая теория поля. — М.: Гостехиздат, 1944.
21. *Седов Л.И.* Методы подобия размерности в механике. — М.: Наука, 1967.
22. *Сретенский Л.Н.* Теория ньютоновского потенциала. — М.: Гостехиздат, 1946.
23. *Гринберг Г.А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. — М.: Изд-во АН СССР, 1948.
24. *Лурье А.И.* Операционное исчисление. — М.: Гостехиздат, 1950.
25. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. — М.: Гостехиздат, 1952.
26. *Тимошенко С.П.* Теория колебаний в инженерном деле /Перев. Л.Г. Пановко с 3-го изд. перераб. совм. с Д.Х. Янгом. — М.: Физматгиз, 1959.
27. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. — М.: Высшая школа, 1967.
28. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: Наука, 1966.
29. *Лебедев Н.Н.* Специальные функции и их приложения. — М.: Физматгиз, 1963.
30. *Кузьмин Р.О.* Функции Бесселя. — М.: ОНТИ, 1935.
31. *Введенский Б.А., Аренберг А.Г.* Радиоволноводы. — М.: Гостехиздат, 1946.
32. *Блохинцев Д.И.* Основы квантовой механики. — М.: Наука, 1976.
33. *Франк Ф., Мизес Р.* Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. — М.: ОНТИ, 1937.
34. *Ляв А.* Математическая теория упругости. — М.: ОНТИ, 1935.
35. *Треффтц.* Математическая теория упругости. — М.: ГТТИ, 1932.
36. *Ламб.* Гидродинамика. — М.: Гостехиздат, 1947.
37. *Стреттон.* Теория электромагнетизма. — М.: Гостехиздат, 1948.
38. *Релей.* Теория звука. — М.: Гостехиздат, 1955.
39. *Смайт.* Электростатика и электродинамика. — М.: ИЛ, 1954.
40. *Луи де Бройль.* Электромагнитные волны в волноводах и полых резонаторах. — М.: ИЛ, 1948.
41. *Морз Ф.* Колебания и звуки. — М.: Гостехиздат, 1949.
42. *Ван дер Поль, Бреммер.* Операционное исчисление на основе двухстороннего преобразования Лапласа. — М.: ИЛ, 1952.
43. *Карслоу, Егер.* Операционные методы в прикладной математике. Теплопроводность в твердых телах. — М.: ИЛ, 1948.
44. *Карслоу.* Теория теплопроводности. — М.: Гостехиздат, 1947.
45. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. — М.: ИЛ, 1949.
46. *Гобсон Е.В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. — М.: ИЛ, 1952.
47. *Чарный И.А.* Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. — М.: Гостехиздат, 1951.
48. *Лебедев Н.Н., Уфлянд Я.С., Скальская И.П.* Сборник задач по математической физике. — М.: Гостехиздат, 1955.
49. *Снеддон Г.Е.* Преобразования Фурье. — М.: ИЛ, 1955.
50. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. — М.: Наука, 1965.