УДК 330.115
ББК 22.1
А 95

Учебное пособие победило во Всероссийском конкурсе учебников по математике для социально-экономических направлений и специальностей высшего профессионального образования

Ахтямов А. М. **Математика для социологов и экономистов:** Учеб. пособие. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 464 с. — ISBN 5-9221-0460-8.

Пособие написано в соответствии с программой по математике, одобренной Научно-методическим советом Министерства образования Российской Федерации по математике, для студентов вузов, специализирующихся по направлениям: 521000–Психология, 521200–Социология, 521500–Менеджмент, 521600–Экономика.

В пособии изложены основы математического анализа, математической логики, дифференциальных и разностных уравнений, сопровождаемые большим количеством примеров и задач. В конце каждой темы приведены соответствующие применения пакета символьных вычислений. Каждый раздел книги завершается главой, которая содержит применения теории данного раздела в социально-экономической сфере.

Библиогр. 38 назв.

ISBN 5-9221-0460-8

© ФИЗМАТЛИТ, 2004
© А. М. Ахтямов, 2004

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 9
Введение 11

Раздел I. Введение в анализ

Глава 1. **Функция** 17
1.1. Понятие множества 17
1.2. Понятие функции 20
1.3. Способы задания функции 23
1.4. Основные свойства функций 25
1.5. Обратная функция 27

Глава 2. **Элементарные функции** 30
2.1. Основные элементарные функции 30
2.2. Элементарные функции 37

Глава 3. **Предел последовательности** 43
3.1. Понятие сходимости 43
3.2. Существование предела монотонной ограниченной последовательности 47
3.3. Действия над сходящимися последовательностями 50
3.4. Числовые ряды 51

Глава 4. **Предел функции и непрерывность** 56
4.1. Определения предела функции 56
4.2. Бесконечно большая величина 59
4.3. Расширение понятия предела 60
4.4. Бесконечно малая величина 63
4.5. Сравнение бесконечно малых 64
4.6. Основные теоремы о пределах 66

4.7. Непрерывность функции 69
4.8. Точки разрыва функции 74

Глава 5. **Техника вычисления пределов** 76
5.1. Непосредственное вычисление пределов 76
5.2. Раскрытие неопределенности вида $\frac{0}{0}$ 80
5.3. Раскрытие неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ 83
5.4. Раскрытие неопределенностей вида $\infty - \infty$ и $0 \cdot \infty$ 85
5.5. Раскрытие неопределенностей вида 1^{∞}, ∞^0 и 0^0 86
5.6. Компьютерное вычисление пределов 89

Глава 6. **Использование понятий функции и предела в социально-экономической сфере** 92
6.1. Функции в социологии и психологии 92
6.2. Функции в экономике 94
6.3. Пределы в социально-экономической сфере 96
6.4. Непрерывное начисление процентов 97
6.5. Паутинообразная модель рынка и ряд 100

Раздел II. Дифференциальное исчисление

Глава 7. **Производная** 103
7.1. Задачи, приводящие к понятию производной 103
7.2. Определение производной 106
7.3. Схема нахождения производной 109
7.4. Зависимость между дифференцируемостью и непрерывностью функции 111

Глава 8. **Основные теоремы о производных** 114
8.1. Правила дифференцирования 114
8.2. Производные основных элементарных функций 118
8.3. Таблица производных 122
8.4. Логарифмическая производная 122
8.5. Производная функции, заданной параметрически 125
8.6. Производная неявной функции 127
8.7. Производная высших порядков 128
8.8. Теорема о конечном приращении и ее следствия 128

8.9. Формула Тейлора 134

Глава 9. **Исследование функций** 140
9.1. Признаки монотонности функции 140
9.2. Экстремум функции 142
9.3. Достаточные условия существования экстремума 147
9.4. Разыскание оптимальных значений функций 151
9.5. Выпуклость функции. Точки перегиба 160
9.6. Асимптоты графика функции 164
9.7. Исследование функции 173
9.8. Построение графика функции на компьютере 179

Глава 10. **Применение дифференциального исчисления в социально-экономической сфере** 181
10.1. Предельные величины в экономике 181
10.2. Использование логарифмической производной в экономике . 187
10.3. Эластичность 188
10.4. Принцип акселерации 196
10.5. Экономия ресурсов 198

Раздел III. Интегральное исчисление

Глава 11. **Неопределенный интеграл** 201
11.1. Неопределенный интеграл 201
11.2. Свойства неопределенного интеграла 204
11.3. Непосредственное интегрирование 206
11.4. Метод замены переменной 210
11.5. Метод интегрирования по частям 213
11.6. Компьютерное интегрирование 216

Глава 12. **Определенный интеграл** 220
12.1. Исторические сведения 220
12.2. Понятие определенного интеграла 223
12.3. Геометрический смысл интеграла 228
12.4. Интеграл в социально-экономической сфере 229
12.5. Свойства определенного интеграла 231
12.6. Формула Ньютона–Лейбница 237
12.7. Методы интегрирования 240
12.8. Геометрические приложения определенного интеграла 245

12.9. Приближенное вычисление определенных интегралов 254
12.10. Несобственные интегралы 260

Глава 13. **Применение интегрального исчисления в социально-экономической сфере** 269
13.1. Вычисление объема выпущенной продукции 269
13.2. Степень неравенства в распределении доходов 270
13.3. Прогнозирование материальных затрат 272
13.4. Прогнозирование объемов потребления электроэнергии . . . 273
13.5. Задача дисконтирования денежного потока 275

Раздел IV. Функции многих переменных

Глава 14. **Частные производные** 278
14.1. Понятие функции многих независимых переменных 278
14.2. Область определения, предел и непрерывность функции двух переменных 281
14.3. Частные производные первого порядка 284
14.4. Полный дифференциал 288
14.5. Касательная плоскость и нормаль к поверхности 289
14.6. Производная сложной функции 291
14.7. Производная по направлению. Градиент 292
14.8. Частные производные высших порядков 295
14.9. Производная неявной функции от одной переменной 296
14.10. Двойной и тройной интегралы 300
14.11. Компьютерные вычисления частных производных и кратных интегралов 303

Глава 15. **Оптимизационные задачи** 305
15.1. Экстремум функции двух переменных 305
15.2. Экстремум функции многих переменных 310
15.3. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных в заданной замкнутой области 316
15.4. Условный экстремум 319
15.5. Метод наименьших квадратов 322
15.6. Компьютерное вычисление экстремумов и поиск параметров сглаживающей функции 331

Глава 16. **Использование понятия функции многих переменных в социально-экономической сфере** 336
16.1. Линейно-однородные производственные функции 336
16.2. Многофакторные производственные функции и предельная производительность 339
16.3. Повышение урожайности 341
16.4. Рост производства и частные производные 342
16.5. Линии постоянного выпуска и предельные показатели экономики 345
16.6. Экономический смысл дифференциала производственной функции 348
16.7. Максимизация прибыли от производства товаров разных видов 350
16.8. Экономия ресурсов 353

Раздел V. Дифференциальные и разностные уравнения

Глава 17. **Дифференциальные уравнения первого порядка** 357
17.1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям . . . 357
17.2. Основные понятия теории дифференциальных уравнений . . 359
17.3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными 361
17.4. Линейные дифференциальные уравнения 363
17.5. Уравнение Бернулли 366

Глава 18. **Дифференциальные уравнения высшего порядка** 368
18.1. Основные понятия 368
18.2. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка . . 373
18.3. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами 376
18.4. Линейные неоднородные второго порядка с постоянными коэффициентами 386
18.5. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков 398

18.6. Решение дифференциальных уравнений с помощью пакета Maple 401

Глава 19. **Системы дифференциальных уравнений** 404
19.1. Основные понятия 404
19.2. Система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами 406
19.3. Решение систем дифференциальных уравнений с помощью компьютерной математики 413

Глава 20. **Разностные уравнения** 416
20.1. Основные понятия 416
20.2. Решение разностных уравнений 418

Глава 21. **Применение аппарата дифференциальных и разностных уравнений в социально-экономической сфере** 422
21.1. Естественный рост и задача Бернулли о кредитовании 422
21.2. Рост населения Земли и истощение ресурсов 424
21.3. Рост денежного вклада в сбербанке 426
21.4. Инфляция и правило величины 70 427
21.5. Рост выпуска дефицитной продукции 428
21.6. Рост в социально-экономической сфере с учетом насыщения 430
21.7. Выбытие фондов 434
21.8. Рост производства с учетом инвестиций 436
21.9. Модель экономического цикла Самуэльсона–Хикса 441
21.10. Паутинообразная модель рынка 445
21.11. Модель социального взаимодействия Саймона 446
21.12. Динамическая модель Леонтьева 448

Заключение 451
Литература 453
Приложение 456
Алфавитный указатель 457

Предисловие

Пособие удовлетворяет требованиям новых государственных образовательных стандартов к минимуму содержания и уровню подготовки в области математики для социально-экономических направлений и специальностей и написано в соответствии с примерной программой дисциплины «Математика», одобренной Научно-методическим советом по математике Министерства образования Российской Федерации. Пособие включает следующие девять разделов программы: «Введение в математический анализ», «Основы математической логики», «Дифференциальное исчисление функций одной переменной», «Применение дифференциального исчисления для исследования функций и построения их графиков», «Неопределенный интеграл», «Определенный интеграл», «Функции нескольких переменных», «Обыкновенные дифференциальные уравнения», «Системы обыкновенных дифференциальных уравнений». Кроме обязательного материала автор счел необходимым включить в пособие главу, посвященную разностным уравнениям, широко используемым в экономической теории.

Пособие написано на основе лекций, прочитанных автором в течении ряда лет на экономических факультетах университетов и академий.

Многолетний преподавательский опыт автора свидетельствует о том, что насыщение лекций сведениями из истории становления и развития математики пробуждает у студентов интерес к предмету, углубляет знания и способствует более осмысленному изучению материала. Поэтому в книгу в виде специальных вставок включены некоторые биографические сведения тех математиков, именами которых названы теоремы, критерии, формулы, задачи, методы и математические понятия.

Изложение материала часто сопровождается историческими отступлениями, что позволяет лучше понять необходимость введения того или иного понятия. Приводятся также переводы соответствующих терминов с латинского, греческого и других языков, что способствует их лучшему запоминанию и осмыслению.

Автором учтены также изменения в математике, произошедшие в 90-х гг. XX в. — появление универсальных пакетов символьных вычислений, которые позволяют без знания алгоритмов и программ решать на компьютере сложнейшие численные и аналитические задачи: отыскивать производные сложных функций, строить графики, вычислять непростые пределы, решать системы уравнений и многое другое.

Автору необходимо было для определенности демонстрации возможностей пакетов символьных вычислений остановится на одном из них. Для этих целей был выбран пакет Maple, поскольку он обладает уникальным ядром символьных вычислений, мощнейшей графикой и удобной системой помощи. К тому же, возможности символьного анализатора Maple используются и в других пакетах: он включен в состав инженерного пакета MathCad и пакета символьной математики MatLab; он содержится также и в пакете Scientific WorkPlace — рабочем месте исследователя, где совмещены операции написания формул, проведения выкладок и численных расчетов, графического оформления результатов и подготовки публикаций в формате LaTeX'a, в котором оформлена эта книга; создан также Math Office for Word, объединяющий возможности пакета Maple и популярного редактора Word.

После изучения какого-либо математического понятия (предела, производной, интеграла и т. п.) и решения соответствующих примеров демонстрируются также примеры с вычислениями в пакете Maple.

Для удобства пользования пособием наиболее важные формулы выделены в рамку. В колонтитулах, помимо номеров страниц, указываются также номера и названия глав и параграфов. Названия параграфов приводятся на нечетных страницах, а названия глав — на четных. Кроме того, в конце пособия приводится алфавитный указатель, по которому можно легко найти определение понятия или биографию ученого.

Знаком □ обозначается начало доказательства теоремы, а знаком ■ — ее окончание; знаком ▽ — начало примера, знаком ▲ — окончание решения.

Пользуясь возможностью, автор искренне благодарит всех, кто своими советами способствовал улучшению этой книги. Особо признателен рецензенту профессору В. А. Треногину, а также своему коллеге Р. А. Башмакову, замечания и пожелания которых были наиболее полезными.

Введение

Математика — наука о количественных отношениях и пространственных формах; термин «математика» происходит от греческого слова «матема», означающего «знание», «наука».

Математика возникла в глубокой древности из практических потребностей людей. Сначала появилась необходимость в подсчете запасов пищи, пройденного времени, затем понадобилось рассчитывать площади обрабатываемых земель. С появлением цивилизации появились приемы проектирования и расчетов возводимых сооружений. Математические знания помогли древним создать и сохранившееся до наших дней одно из Семи чудес Света — знаменитые египетские пирамиды.

С древних времен математика используется и в создании орудий и техники. Крепость Сиракузы долго оборонялась благодаря изобретениям великого математика и механика Архимеда. Сегодня без математики немыслимо не только создание оружия, но и запуски космических аппаратов и моделирование новейшей техники.

Понятия математики отвлечены от конкретных явлений и предметов. Это обстоятельство чрезвычайно существенно для приложений математики. Число 3 не связано неразрывно с каким-либо определенным содержанием. Оно может относиться и к трем планетам, и к трем рублям, и к трем социальным группам. Точно так же методы, изложенные в этой книге, применимы и в физике, и в экономике, и в социологии. Они помогают предсказывать и затмения, и инфляцию, и рост населения.

Математика является не только мощным средством решения прикладных задач, но и универсальным языком науки, а также неотъемлемой частью мировоззрения. Книга «Начала» Евклида, заложившая фундамент классической геометрии, сильно влияла на представления об устройстве нашего мира. А открытие неевклидовой геометрии и теории относительности сразу перевернуло наши представления о нем. Не случайно Эйнштейн подчеркивал важность математики в постижении природы. Он писал: «Весь

предшествующий опыт убеждает нас в том, что природа представляет собой реализацию простейших математически мыслимых элементов».

Изучение законов общества и экономики также невозможно без математики. Подтверждением этого может служить тот факт, что с использованием математических методов связаны работы практически всех экономистов XX в., удостоенных Нобелевской премии по экономике (Л. Канторович, В. Леонтьев, П. Самуэльсон, Р. Солоу, Д. Хикс, Д. Нэш, Р. Зельтен).

В истории математики можно наметить четыре периода.

1. Период *зарождения математики* как самостоятельной научной дисциплины; начало этого периода теряется в глубине истории; продолжался он приблизительно до V в. до н. э.

2. Период *элементарной математики*, математики постоянных величин; он продолжался приблизительно до конца XVII в.

3. Период *математики переменных величин*; характеризуется созданием и развитием математического анализа, изучением процессов в их движении и развитии; продолжался он приблизительно до XIX в.

4. Период *современной математики*; характеризуется обобщением понятий функции, трехмерного пространства и алгебраических операций и рождением на этой основе новых дисциплин (теории обобщенных функций, функционального анализа, теории групп и т. п.). В XX и XXI вв. новый импульс на развитие математики оказывает также создание и совершенствование компьютеров и вычислительных методов.

Математический анализ развивается на протяжении всех четырех периодов.

Название «математический анализ» — сокращенное видоизменение названия «анализ посредством бесконечно малых». В эту дисциплину входят теория действительного числа, теория пределов, дифференциальное и интегральное исчисление, а также их непосредственные приложения.

В первый и второй периоды математики математический анализ представлял собой совокупность разрозненных частных задач; например, в интегральном исчислении — это задачи на вычисление площадей фигур, объемов тел. Каждая задача или частная группа задач решалась своим методом, подчас сложным и громоздким.

Как отдельная дисциплина математический анализ зародился лишь в XVII в., когда начался новый период в развитии математики — математика переменных величин. Произошло изменение

содержания и характера науки. В математику вошла идея движения, изменения. Рассмотрение переменных величин и связей между ними привело к понятиям функции, производной и интеграла.

Теория пределов составляет основу математического анализа. Именно с помощью предела принято определять такие важнейшие понятия как производная, дифференциал, ряд, определенный и несобственный интегралы. Поэтому первый раздел книги посвящен теории пределов. Такой порядок изложения в книге связан с современными требованиями математической строгости. Исторически же порядок был как раз обратным. Дифференциальное и интегральное исчисление зародилось в XVII в. и развивалось в XVIII, находя многочисленные и важные приложения; а его база — теория пределов — была разработана французским ученым О. Коши в начале XIX в.

Теория пределов является для студентов сложным и не самым любимым разделом математики. Думается, что во многом это происходит потому, что ее важность не до конца ими осознается. Поэтому в книге мы рассказываем и о том периоде математики, когда анализ существовал без строгого определения предела.

Математики в XVII и XVIII вв. не знали пределов и пользовались отбрасыванием бесконечно малых высокого порядка. Это приводило к верным результатам (например, при вычислении мгновенных скоростей и площадей сложных фигур). Однако это же порождало серьезные споры о законности подобных операций. Критики анализа говорили о том, что его результаты получены «при помощи фокуса», поскольку считали, что математики, предположив сначала бесконечно малое существующим, затем отбрасывают его как вовсе несуществующее. Понятие мгновенной скорости критиковалось, например, и так: «Ньютон говорит о скорости точки в данный момент времени. Но точка есть отсутствие пространства, а момент — отсутствие времени, а там, где нет пространства и времени, нет и движения. О какой скорости идет речь?» Как только не называли мгновенную скорость — и «отношение ничего к ничему», и «действительное произведение из ничего, умноженного на нечто».

Споры возникали и по поводу того, что понимать под «суммой»

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots ?$$

Одни утверждали, что «сумма» равна нулю, поскольку

$$(1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0 + 0 + \ldots = 0,$$

другие — единице:

$$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \ldots = 1 + 0 + 0 + \ldots = 1.$$

Возник кризис математики. Он был преодолен в начале XIX в. созданием понятия предела. Именно использование предела помогло преодолеть затруднения, существовавшие в математическом анализе. После введения этого понятия были обоснованы операции, используемые в анализе бесконечно малых, стало ясно как понимать «бесконечные суммы» и мгновенную скорость, как обосновать формулы вычисления площадей, получавшиеся «с помощью сомнительных средств — взаимной компенсацией погрешностей».

Поэтому необходимо внимательнее отнестись к замечательному понятию предела — этому спасителю математического анализа, и проследить, как с его помощью удалось устранить недоразумения, разрешить парадоксы, объяснить «фокусы» XVII и XVIII вв.

Для современного математического анализа характерно обобщение известных понятий и появление на их основе новых направлений науки. Обобщение понятия функции породило теорию обобщенных функций. Выяснение общих свойств алгебраических, дифференциальных и интегральных уравнений привело к созданию теории операторов. Появились и другие новые ветви анализа. Они находят все более широкое применение в исследовательских методах экономики и социологии.

В настоящее время происходит также синтез аналитических методов математического анализа и вычислительной математики. В последние десятилетия появились универсальные пакеты символьных вычислений, которые позволяют без знания алгоритмов и программ решать на компьютере сложнейшие численные и аналитические задачи: быстро отыскивать производные и экстремумы сложных функций, строить графики, решать системы уравнений и многое другое.

Произошедшие изменения диктуют необходимость познакомить с некоторыми из пакетов и включить в пособие примеры их использования для вычисления пределов, производных, интегралов и решения других задач математического анализа.

Пакеты составлены различными исследовательскими группами. Например, пакет Maple создан университетом Ватерлоо (штат Онтарио, Канада) и Высшей технической школой (Цюрих, Швейцария), Mathematica — фирмой Wolfram Research, MathCad —

фирмой MathSoft, Inc., MathLab — компанией MathWorks, а Axiom имеет английские корни.

По каждому из пакетов выпущены соответствующие книги, журналы, электронные справочники и компакт-диски. Для подробного ознакомления с пакетами можно использовать также соответствующие WWW-серверы Интернета. Приводим три наиболее популярных пакета и соответствующие адреса серверов:

Maple	http://www.maplesoft.com
MathCad	http://www.mathsoft.com
MathLab	http://www.mathworks.com;
	http://www.softline.ru

Надо хорошо представлять все возможности и недостатки пакета символьных вычислений. При недостаточном ознакомлении с пакетом и методами решения пользователь может сделать неверный вывод. Поэтому в пособии показано как различия в методах влияют на скорость сходимости и круг решаемых задач (см. п. 12.8, в котором рассмотрены различия трех приближенных формул вычисления определенного интеграла).

Символьные анализаторы являются лишь инструментом, который помогает тем, кто сам хорошо владеет математикой и способен предвидеть возможные недоразумения. Поэтому изучение математического анализа продолжает оставаться неотъемлемой частью подготовки любого специалиста.

Математический анализ богат символическими обозначениями. Важно правильно называть и записывать соответствующие символы. Буквы русского алфавита в обозначениях, как правило, не используются. Основу математической символики составляют буквы латинского и греческого алфавитов. Поэтому ниже для справки приведены употребляемые в математике латинские и греческие буквы и их названия.

Латинские буквы и их названия

$A\ a$	а	$N\ n$	эн
$B\ b$	бэ	$O\ o$	о
$C\ c$	цэ	$P\ p$	пэ
$D\ d$	дэ	$Q\ q$	ку
$E\ e$	э	$R\ r$	эр
$F\ f$	эф	$S\ s$	эс
$G\ g$	же	$T\ t$	тэ
$H\ h$	аш (ха)	$U\ u$	у
$I\ i$	и	$V\ v$	вэ
$J\ j$	йот (жи)	$W\ w$	дубль-вэ
$K\ k$	ка	$X\ x$	икс
$L\ l$	эль	$Y\ y$	игрек
$M\ m$	эм	$Z\ z$	зэт

Греческие буквы и их названия

A α	альфа	N ν	ню
B β	бэта	Ξ ξ	кси
Γ γ	гамма	O o	омикрон
Δ δ	дельта	Π π	пи
E ε	эпсилон	P ρ	ро
Z ζ	дзета	Σ σ	сигма
H η	эта	T τ	тау
Θ ϑ	тета	Υ υ	ипсилон
I ι	йота	Φ φ	фи
K $\varkappa$	каппа	X χ	хи
Λ λ	ламбда	Ψ ψ	пси
M μ	мю	Ω ω	омега

Раздел I
Введение в анализ

Я не мог понять содержания вашей статьи, так как она не оживлена иксами и игреками.

У. Томсон

Глава 1
Функция

1.1. Понятие множества

Понятие множества принадлежит к числу первичных, не определяемых через более простые.

Под *множеством* понимается совокупность (набор, собрание) некоторых объектов. Объекты, которые образуют множество, называются *элементами* или *точками* этого множества. Примерами множеств являются: множество натуральных чисел, множество социальных работников, множество коммерческих банков и т. п.

Обычно множества обозначают большими буквами латинского алфавита A, B, C, ..., X, Y, Z, ..., а их элементы — малыми буквами латинского алфавита: a, b, c, ..., x, y, z, ...

Иногда для обозначения элементов используются также большие буквы латинского алфавита и греческие буквы (список латинских и греческих букв и их названия приведены во введении).

Множество часто записывают с помощью фигурных скобок, например: $A = \{a_1; a_2; a_3; ...; a_n\}$. Если объект a принадлежит множеству A, то пишут $a \in A$, в противном случае пишут $a \notin A$ (a не принадлежит A). Множество, не содержащее ни одного

элемента, называется *пустым* и обозначается символом $\varnothing$. Так, например, пусто множество землян, ступивших на планету Сатурн.

Множество B называется *подмножеством* множества A, если каждый элемент множества B является элементом множества A. Символически это обозначают так: $B \subset A$.

Если, например, A — множество всех студентов вуза, а B — множество студентов-первокурсников этого вуза, то B есть подмножество A, т. е. $B \subset A$.

Два множества A и B называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов. Обозначают это так: $A = B$.

Объединением двух множеств A и B называется множество C, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из данных множеств. Объединение множеств обозначают символом $\cup$ и пишут

$$C = A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Пересечением множеств A и B называется множество D, состоящее из всех элементов, одновременно принадлежащих каждому из данных множеств A и B. Пересечение множеств обозначают символом $\cap$ и пишут

$$D = A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Числовые множества. Множества, элементами которых являются числа, называются числовыми.

Понятие числа появилось в результате необходимости счета предметов. Вначале возникли натуральные числа. Множество натуральных чисел обозначается большой ажурной латинской буквой $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Позже, когда возникла необходимость расчетов в торговле и начисления процентов с соответствующей суммы, были введены в обращение отрицательные числа, нуль и дроби, как отношения двух целых чисел.

Множество целых чисел обозначается буквой $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Числа целые и дробные составляют множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Всякое рациональное число выражается отношением двух целых чисел или бесконечной периодической дробью.

В практической деятельности возникали задачи, когда результаты вычислений нельзя было отнести ни к одному из упомянутых выше множеств (например, результат вычисления длины диагонали квадрата). Было введено множество иррациональных чисел. Иррациональные числа выражаются бесконечной непериодической десятичной дробью.

Множества рациональных и иррациональных чисел составляют множество действительных чисел $\mathbb{R}$.

Между множествами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ существует соотношение

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Геометрически множество действительных чисел $\mathbb{R}$ изображается точками *числовой прямой* (или *числовой оси*) (рис. 1.1), т. е. прямой, на которой выбрано начало отсчета, положительное направление и единица масштаба.

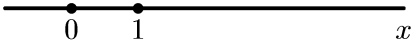


Рис. 1.1. Числовая ось

Между множеством действительных чисел $\mathbb{R}$ и точками числовой прямой существует взаимно однозначное соответствие, т. е. каждому действительному числу соответствует определенная точка числовой прямой, и наоборот, каждой точке прямой — определенное действительное число. Поэтому часто вместо «число x» говорят «точка x».

Множество действительных чисел дополняют двумя элементами, обозначаемыми $-\infty$ и $+\infty$ и называемыми *минус бесконечность* и *плюс бесконечность*. Множество $\mathbb{R}$, дополненное элементами $-\infty$ и $+\infty$, называется *расширенным множеством действительных чисел* (расширенной числовой прямой) и обозначается $\overline{\mathbb{R}}$. Бесконечности $-\infty$ и $+\infty$ называют еще *бесконечно удаленными точками*.

Предполагается, что для бесконечно удаленных точек справедливы следующие правила:

$$x \pm \infty = \pm\infty;$$
$$\frac{x}{\pm\infty} = 0;$$
$$x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty, \text{ если } x > 0;$$
$$x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty, \text{ если } x < 0.$$

Порядок на $\overline{\mathbb{R}}$ естественный: всякое действительное число меньше $+\infty$ и больше $-\infty$, т. е. если $x \in \mathbb{R}$, то $-\infty < x < +\infty$. Полезно представлять, что $-\infty$ на числовой прямой находится левее всех чисел, а $+\infty$ — правее всех чисел.

Иногда множество действительных чисел дополняют одним элементом, обозначаемым ∞ и называемым *бесконечностью* или *бесконечно удаленной точкой.*

Множество X, элементы которого удовлетворяют:

– неравенству $a \leqslant x \leqslant b$, называется *отрезком* (или *сегментом*) $[a; b]$;

– неравенству $a < x < b$ — *интервалом* $(a; b)$;

– неравенствам $a \leqslant x < b$ или $a < x \leqslant b$ — *полуинтервалами* соответственно $[a; b)$ и $(a; b]$.

Наряду с этим рассматриваются бесконечные интервалы и полуинтервалы $(-\infty; b)$, $(a; +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$, $(-\infty; b]$, $[a; +\infty)$.

В дальнейшем все указанные множества мы объединяем термином *промежуток* X.

Абсолютной величиной (или *модулем*) действительного числа x называется само число x, если x неотрицательно, и число $-x$, если x отрицательно:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Заметим, что из определения следует неравенство $|x| \geqslant 0$.

Отметим свойства абсолютных величин:

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|, \qquad |x\,y| = |x|\,|y|,$$
$$|x - y| \geqslant |x| - |y|, \qquad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

Интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, т. е. множество точек, таких, что

$$|x - a| < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$, называется *ε-окрестностью точки a.*

1.2. Понятие функции

Когда мы наблюдаем какой-нибудь процесс или явление из области экономики, области социальных наук или другой области знаний, то видим, что одни величины сохраняют свои значения, другие же принимают различные значения.

Переменной величиной называется такая величина, которая при выполнении некоторого комплекса условий, может принимать различные значения.

Постоянной величиной называется такая величина, которая при выполнении некоторого комплекса условий, сохраняет одно и то же значение.

Отметим, что выполнение комплекса условий является очень важным. Так, одна и та же величина может быть переменной или постоянной в зависимости от того, в каких условиях она рассматривается. Например, цена на хлеб (и некоторые другие продукты) в условиях рыночной экономики является величиной переменной. В условиях жесткого планирования экономики цена на хлеб может держаться на одном уровне и быть постоянной величиной (в 70-е годы цена на хлеб была постоянна, буханка серого хлеба стоила 16 коп.).

Переменные величины обычно обозначаются последними буквами латинского алфавита (x, y, z, u, v, w), а постоянные — первыми (a, b, c).

Изучая какое-нибудь явление, мы обычно имеем дело с совокупностью переменных величин, которые связаны между собой так, что каждым значениям одних величин соответствуют значения других. Так, например, ясно, что:

1) каждому значению цены товара соответствует определенная величина спроса;

2) каждому значению объема производства соответствует определенная величина издержек;

3) каждому году соответствует сумма накопившегося денежного вклада в сбербанке;

4) числу членов научного коллектива соответствует его продуктивность.

Во всех этих примерах общим является то, что каждому числовому значению одной величины сопоставляется определенное числовое значение другой.

Дадим теперь определение понятия функции, являющегося центральным понятием математического анализа, причем вначале ограничимся случаем двух переменных величин.

Пусть даны два множества X и Y.

Определение. Правило f, сопоставляющее каждому числу $x \in X$ единственное число $y \in Y$, называется *функцией*, заданной на множестве X и принимающей значения в множестве Y.

Термин «функция» происходит от латинского слова functio — исполнение, осуществление.

Задать функцию — значит задать три объекта: 1) множество X, 2) множество Y, 3) правило f. О функции f говорят, что она действует из X в Y и пишут: $f: \quad X \to Y$.

Иногда функцией называют также уравнение $y = f(x)$, т. е. формулу, где y выражено через x с помощью правила f. В уравнении $y = f(x)$ переменную x называют *независимой переменной* или *аргументом*, а y — *зависимой переменной*. О величинах x и y говорят, что они связаны функциональной зависимостью.

Множество всех значений независимой переменной, для которых определена функция (т. е. при которых функция $y = f(x)$ вообще имеет смысл), называется *областью определения* или *областью существования* этой функции, обозначается $D(f)$.

Множество всех значений функции называется *областью значений* функции и обозначается $E(f)$.

Например, областью определения функции $y = 3\,x^2$ является множество всех действительных чисел, а областью значений — множество $x \geqslant 0$; областью определения функции $y = \ln(x-1)$ является полупрямая $x > 1$, областью значений — множество всех действительных чисел; областью определения функции $y = \sqrt{1-x^2}$ является отрезок $-1 \leqslant x \leqslant 1$, областью значений — отрезок $0 \leqslant x \leqslant 1$.

В социально-экономических задачах часто приходится рассматривать зависимости одной переменной от многих других. Например, национальный доход Y зависит от затрат труда L и объема производственных фондов; издержки производства зависят от материальных затрат и расходов на оплату рабочей силы. В этом случае говорят *о функции нескольких переменных.*

Бывают случаи, когда одной переменной соответствует несколько других. Так, например, некоторому значению цены на товар соответствуют определенные значения спроса и предложения, т. е. одной переменной соответствуют две другие. В таких случаях говорят о *двузначной* или *многозначной* функции (в отличие от *однозначной*).

Наличие функциональных зависимостей социально-экономических явлений позволяет использовать для решения экономических проблем методы математического анализа. Поэтому необходимо познакомиться с ними. Это знакомство мы начнем со способов задания функции.

1.3. Способы задания функции

Различают три способа задания функции: 1) аналитический; 2) табличный; 3) графический.

1. Аналитический способ. Если функция выражена при помощи формулы, устанавливающей, какие вычислительные операции надо произвести над x, чтобы получить y, то говорят, что она задана *аналитически.*

При аналитическом способе задания функция может быть задана *явно*, когда дано выражение y через x, т. е. формула имеет вид $y = f(x)$; *неявно*, когда x и y связаны между собой уравнением вида $F(x,\ y) = 0$; *параметрически*, когда соответствующие друг другу значения x и y выражены через третью переменную величину t, называемую *параметром.*

Неявная функция может быть однозначной или многозначной. Например, уравнение $xy - 1 = 0$ задает однозначную неявную функцию при $x \neq 0$, которую, решив данное уравнение, можно записать в явном виде: $y = 1/x$; уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$ задает двузначную неявную функцию на интервале $-1 < x < 1$, которую можно записать в явном виде: $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$ может быть также представлено и параметрически: $x = \cos t,\ y = \sin t\ (0 \leqslant t < 2\pi)$ (параметрические уравнения окружности). Параметрическое представление функции позволяет изучать неявные функции в тех случаях, когда переход к их явному заданию без посредства параметров затруднителен.

Аналитический способ удобен для выполнения математических действий над функцией и решения задач прогнозирования.

Приведем пример аналитического задания функции из социально-экономической сферы.

▽ **Пример 1. Функция Филлипса.** Как и любая цена, цена труда зависит от конъюнктуры рынка. Когда на рынке труда имеет место дефицит, то рабочие могут рассчитывать на бóльшую зарплату, и наоборот, в период существования конъюнктурной безработицы рабочим будут платить меньше.

В 1958 году профессор Лондонской школы экономики Филлипс опубликовал результаты своих исследований взаимозависимости между уровнем безработицы и изменением денежной ставки зарплаты в Великобритании в период с 1861 по 1957 г. Для первых 52 лет (1861–1913) эта зависимость выражалась уравнением

$$y = -0{,}9 + 9{,}638 \cdot x^{-1{,}394}, \tag{1.1}$$

где y — годовой темп прироста ставки заработной платы (в процентах), x — общий уровень безработицы (в процентах).

Это уравнение представляет аналитическое задание функции и называется *формулой Филлипса.* ▲

ФИ́ЛЛИПС (Phillips) Олван (1914–1975) — австралийский экономист, работавший в Англии.

К недостаткам аналитического способа задания функции можно отнести то, что он не всегда нагляден.

2. Табличный способ. Этот способ является наиболее простым. В одном столбце записывают значения аргумента x, а во втором — значения $f(x)$.

Такой способ задания функции часто применяется в тех случаях, когда область определения состоит из конечного числа значений (таблицы цен на товары, таблицы розыгрыша лотерей и т. д. Широко используются таблицы значений различных функций: в таблицах тригонометрических функций, логарифмов и т. п. В виде таблиц записываются результаты экспериментального исследования каких-либо процессов и явлений.

▽ **Пример 2. Рост числа научных изданий.** Рост числа научных изданий y, начиная с 1750 г. с интервалом в 50 лет, в зависимости от года x, выглядит (округленно) следующим образом [1]).

x	1750 г.	1800 г.	1850 г.	1900 г.	1950 г.
y	10	100	1 000	10 000	100 000

▲

К недостатку табличного способа можно отнести то, что представление о функциональной зависимости здесь не является полным, так как невозможно поместить в таблице все значения аргумента.

3. Графический способ. Аналитический и табличный способы задания функции страдают отсутствием наглядности. Графический способ не имеет такого недостатка. *Графическим способом* называется такой способ задания функции $y = f(x)$, при котором соответствие между аргументом x и функцией y устанавливается с помощью графика.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество всех точек плоскости с координатами $(x,\ f(x))$, т. е. таких, координаты которых обращают выражение $y = f(x)$ в тождество.

[1]) См. [5, с. 9].

Отличительной чертой графика функции является то, что каждая прямая, параллельная оси Oy, пересекает его либо в единственной точке (если $x \in D(f)$), либо вовсе не пересекает (если $x \notin D(f)$).

▽ **Пример 3. Кривая Филлипса.** Как мы знаем, аналитическая зависимость между годовым темпом прироста ставки заработной платы y (в процентах) и общим уровнем безработицы x (в процентах) выражается формулой (1.1). Эта формула не дает наглядного представления о функции. График же этой функции, называемый кривой Филлипса и изображенный на рис. 1.2, позволяет как бы увидеть соответствующую зависимость. ▲

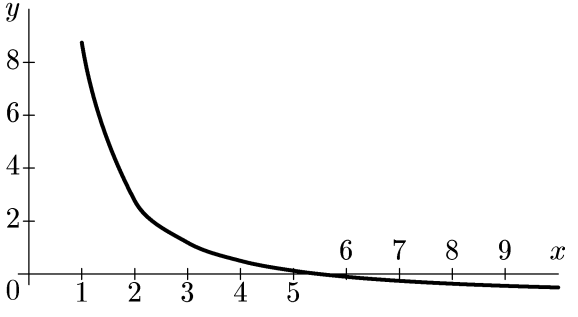


Рис. 1.2. Кривая Филлипса

1.4. Основные свойства функций

Под основными свойствами функции $y = f(x)$ будем понимать следующие шесть:

1) область определения $D(f)$;
2) область значений $E(f)$;
3) четность, нечетность;
4) монотонность;
5) ограниченность;
6) периодичность.

Первые два свойства функции уже были определены. Ниже дается описание остальных четырех свойств функции.

Четность и нечетность. Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если для любых значений x из области определения $f(-x) = f(x)$ и *нечетной*, если $f(-x) = -f(x)$. В противном случае функция $y = f(x)$ называется *функцией общего вида.*

▽ **Пример 1.**

1. Функция $y = x^n$ при четном n является четной функцией (так как $f(-x) = (-x)^n = x^n = f(x)$). Заметим, что отсюда и произошло само название четной функции.

2. Функция $y = x^n$ с нечетным показателем степени n является нечетной ($f(-x) = (-x)^n = -x^n = -f(x)$). Отсюда происходит название нечетной функции.

3. Функция $y = x + x^2$ является функцией общего вида. Действительно, $f(-x) = (-x) + (-x)^2 = -x + x^2 \neq f(x)$ и $f(-x) \neq \neq -f(x)$.▲

График четной функции симметричен относительно оси ординат (например, график функции $y = x^2$), а график нечетной функции симметричен относительно начала координат (например, график функции $y = x^3$). Поэтому для четной функции достаточно строить лишь правую половину графика ($x \geqslant 0$); левая половина его ($x \leqslant 0$) является зеркальным отражением правой относительно оси Oy. Чтобы построить график нечетной функции, достаточно изобразить правую половину его ($x \geqslant 0$); левая половина графика ($x \leqslant 0$) получается в результате поворота правой на 180°.

Монотонность. Функция $y = f(x)$ называется *строго возрастающей* (*строго убывающей*) на промежутке X, если большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции.

Более точно, функция $y = f(x)$ называется *строго возрастающей* (*строго убывающей*) на промежутке X, если для любых двух значений x_1 и x_2, принадлежащих этому промежутку из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$ ($f(x_2) < f(x_1)$).

Строго возрастающие и строго убывающие функции называются *строго монотонными* функциями.

Если последнее неравенство является нестрогим, то говорят о нестрогом возрастании (нестрогом убывании) функции или просто о возрастании (убывании) функции.

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на промежутке X, если для любых двух значений x_1 и x_2, принадлежащих этому промежутку из неравенства $x_2 > x_1$ следует нестрогое неравенство $f(x_2) \geqslant f(x_1)$ ($f(x_2) \leqslant f(x_1)$).

Возрастающие и убывающие функции называются *монотонными* функциями.

▽ **Пример 2.** Функция $y = x^3$ является строго возрастающей на всей действительной оси.

Функция $y = x^2$ строго убывает при $x \in (-\infty; 0]$ и строго возрастает при $x \in [0; -\infty)$.

Функция $y = 0{,}1^x$ является строго убывающей на всей действительной оси. ▲

Ограниченность. Функция называется *ограниченной* на промежутке X, если существует такое положительное число $M > 0$, что $|f(x)| < M$ для любого $x \in X$.

▽ **Пример 3.** Функция $y = \sin x$ ограничена на всей числовой оси, ибо $|\sin x| \leqslant 1$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

Функция $y = x^3$ не является ограниченной на всей действительной оси, поскольку не существует такого положительного числа $M > 0$, что $|x^3| < M$ для любого $x \in \mathbb{R}$. ▲

Периодичность. Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует положительное число T такое, что $f(x + T) = f(x)$. Наименьшее число с таким свойством называется *периодом* функции.

Для построения графика периодической функции достаточно изобразить его на отрезке, длина которого равна периоду (*основная область*), а затем построить периодическое продолжение графика, повторяя график, нарисованный в основной области.

1.5. Обратная функция

Рассмотрим функцию $y = x^2$. Выберем произвольное значение $y = b > 0$. Этому значению функции соответствуют два значения аргумента $x = -a$ и $x = a$ на интервале $(-\infty, +\infty)$ и одно значение $x = a$ на интервале $(0, +\infty)$.

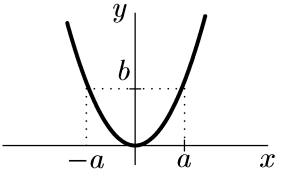


Рис. 1.3

Говорят, что функция $y = x^2$ необратима на интервале $(-\infty, +\infty)$ и обратима на интервале $(0, +\infty)$.

Определение 1. Функция $y = f(x)$, определенная на промежутке X, называется *обратимой на промежутке* X, если любое свое значение она принимает только в одной точке этого промежутка; иными словами, если любым различным значениям аргумента соответствуют различные значения функции:

$$x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2).$$

Если под промежутком X рассматривается область определения функции, то, говоря об обратимости функции, слова «на

промежутке X» обычно опускают. Выражения «функция $y = x^2$ необратима, а функция $y = x$ обратима» означают, что функции являются необратимыми или обратимыми на своей области определения.

Теорема 1. *Если функция $y = f(x)$ строго монотонна на промежутке X, то она обратима на этом промежутке.*

□ Пусть $y = f(x)$ возрастает на X. Тогда из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$. Таким образом, различным значениям аргумента соответствуют разные значения функции, т. е. функция обратима. ■

Наглядную иллюстрацию этой теоремы дает функция $y = x^2$. Она не является строго монотонной и необратима на своей области определения, но возрастает и обратима на интервале $(0, +\infty)$.

Определение 2. Пусть функция $y = f(x)$ обратима на промежутке X и отображает X в Y. Поставим в соответствие каждому y из Y то единственное значение x, при котором $f(x) = y$. Тогда получим функцию, которая определена на Y, а область ее значений есть X. Эта функция называется *обратной* для функции f и обозначается f^{-1}.

Из теоремы 1 следует, что для любой монотонной на X функции $y = f(x)$ существует обратная функция. Чтобы найти ее, нужно из уравнения $y = f(x)$ выразить x через y.

▽ **Пример 1.** Для функции $y = x^2$, если ее областью определения считать всю числовую ось, нет однозначно определенной обратной функции. Причина заключается в том что, $y = 4$, например, принимает значение в двух точках $x = 2$ и $x = -2$, поэтому в точке $y = 4$ обратную функцию нельзя определить однозначно. Для ветви функции $y = x^2$, определенной в интервале $(0, \infty)$, обратной функцией является $y = \sqrt{x}$. Для функции $y = x^2$, рассматриваемой на полупрямой $(-\infty, 0]$, обратной является функция $y = -\sqrt{x}$. ▲

▽ **Пример 2.** Для определения однозначной «ветви» функции, обратной функции $y = \sin x$, выберем один из интервалов монотонности синуса. Обычно принято рассматривать интервал $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, в котором обратной для $y = \sin x$ является функция $y = \arcsin x$.

Аналогичным образом можно определить однозначные «ветви» функций, обратных функциям $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$. ▲

Построение графика обратной функции

График обратной функции получается из графика самой функции зеркальным отражением относительно прямой $y = x$. Это основано на том, что зеркальным отражением точки $(a,\ b)$ относительно прямой $y = x$ является точка $(b,\ a)$.

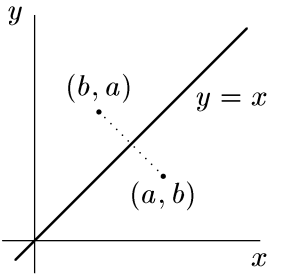


Рис. 1.4

Весь анализ бесконечных вращается вокруг переменных величин и их функций.

Л. Эйлер

Глава 2
Элементарные функции

2.1. Основные элементарные функции

Прежде чем ввести необходимые определения отметим, что функции, называемые элементарными, были первыми функциями, которые подверглись математиками наиболее детальному изучению и начали широко использоваться в приложениях математики. Их особая роль в математическом анализе объясняется тем, что они обладают рядом важных свойств. Забегая вперед приведем два наиболее важных из них: 1) всякая элементарная функция непрерывна на своей области определения; 2) производная от элементарной функции есть также элементарная функция.

К *основным элементарным функциям* относят пять классов функций:

1) степенные $y = x^\alpha$ (α — действительное число);
2) показательные $y = a^x$, $a \neq 1$, $a > 0$;
3) логарифмические $y = \log_a x$, $a \neq 1$, $a > 0$;
4) тригонометрические: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;
5) обратные тригонометрические: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Приведем в качестве справочного материала их свойства и графики.

1) степенные функции:

1. $y = x^0$:

1) $D(f) = (-\infty,\ 0) \cup (0,\ +\infty)$;
2) $E(f) = \{1\}$;
3) четная: $(-x)^0 = x^0$;
4) постоянна на $(-\infty,\ 0) \cup (0,\ +\infty)$;
5) ограниченная;
6) непериодическая.

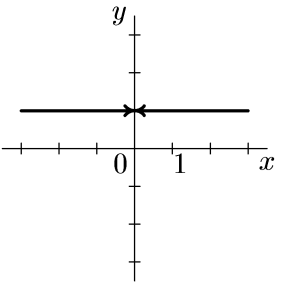


Рис. 2.1

2. $y = x$:

1) $D(f) = (-\infty,\ +\infty)$;
2) $E(f) = (-\infty,\ +\infty)$;
3) нечетная: $(-x)^1 = -x^1$;
4) возрастает на $(-\infty,\ +\infty)$;
5) неограниченная;
6) непериодическая.

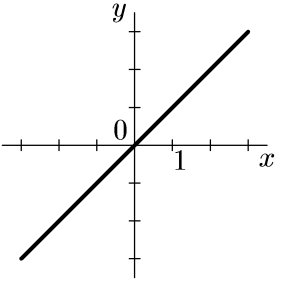


Рис. 2.2

3. $y = x^n$,
n — нечетное натуральное число $\geqslant 3$:

1) $D(f) = (-\infty,\ +\infty)$;
2) $E(f) = (-\infty,\ +\infty)$;
3) нечетная: $(-x)^n = -x^n$;
4) возрастает на $(-\infty,\ +\infty)$;
5) неограниченная;
6) непериодическая.

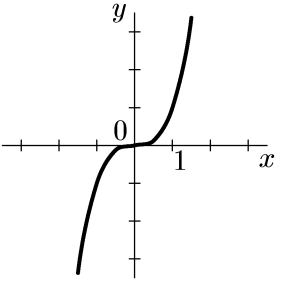


Рис. 2.3

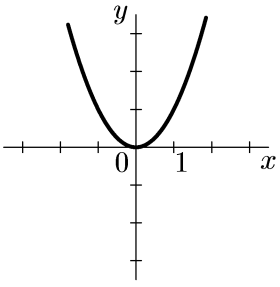


Рис. 2.4

4. $y = x^n$,
n — четное натуральное число:

1) $D(f) = (-\infty,\ +\infty)$;
2) $E(f) = [0,\ +\infty)$;
3) четная: $(-x)^n = x^n$;
4) убывает на $(-\infty,\ 0)$,
возрастает на $[0,\ +\infty)$;
5) неограниченная;
6) непериодическая.

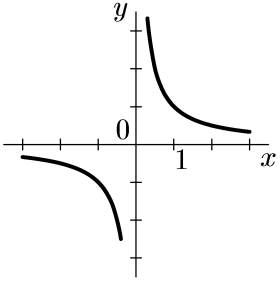


Рис. 2.5

5. $y = x^{-n}$,
n — нечетное натуральное число:

1) $D(f) = (-\infty,\ 0) \cup (0,\ +\infty)$;
2) $E(f) = (-\infty,\ 0) \cup (0,\ +\infty)$;
3) нечетная: $(-x)^{-n} = -x^{-n}$;
4) убывает на $(-\infty,\ 0) \cup (0,\ +\infty)$;
5) неограниченная;
6) непериодическая.

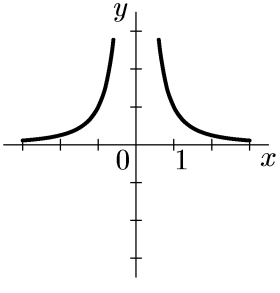


Рис. 2.6

6. $y = x^{-n}$,
n — четное натуральное число:

1) $D(f) = (-\infty,\ 0) \cup (0,\ +\infty)$;
2) $E(f) = (-\infty,\ 0) \cup (0,\ +\infty)$;
3) четная: $(-x)^{-n} = x^{-n}$;
4) возрастает на $(-\infty,\ 0)$,
убывает на $(0,\ +\infty)$;
5) неограниченная;
6) непериодическая.

7. $y = \sqrt[n]{x}$,
n — нечетное натуральное число:

1) $D(f) = (-\infty,\ +\infty)$;
2) $E(f) = (-\infty,\ +\infty)$;
3) нечетная: $\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$;
4) возрастает на $(-\infty,\ +\infty)$;
5) неограниченная;
6) непериодическая.

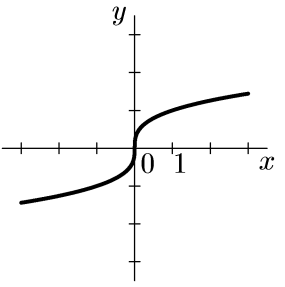


Рис. 2.7

8. $y = \sqrt[n]{x}$,
n — четное натуральное число:

1) $D(f) = [0,\ +\infty)$;
2) $E(f) = [0,\ +\infty)$;
3) общего вида;
4) возрастает на $[0,\ +\infty)$;
5) неограниченная;
6) непериодическая.

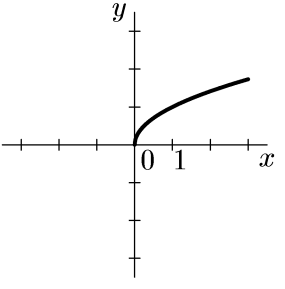


Рис. 2.8

2) показательные функции:

1. $y = a^x$, $\quad 0 < a < 1$:

1) $D(f) = (-\infty,\ +\infty)$;
2) $E(f) = (0,\ +\infty)$;
3) общего вида;
4) убывает на $(-\infty,\ +\infty)$;
5) неограниченная;
6) непериодическая.

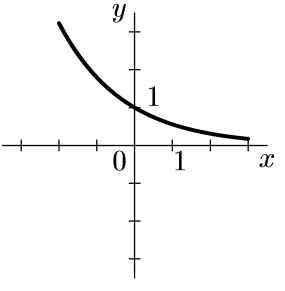


Рис. 2.9

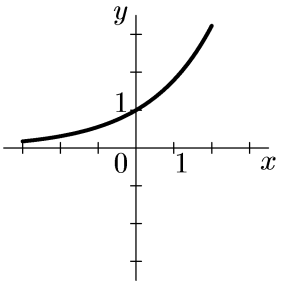


Рис. 2.10

2. $y = a^x, \qquad a > 1$:

1) $D(f) = (-\infty,\ +\infty)$;
2) $E(f) = (0,\ +\infty)$;
3) общего вида;
4) возрастает на $(-\infty,\ +\infty)$;
5) неограниченная;
6) непериодическая.

3) логарифмические функции:

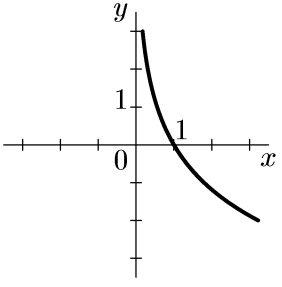


Рис. 2.11

1. $y = \log_a x, \qquad 0 < a < 1$:

1) $D(f) = (0,\ +\infty)$;
2) $E(f) = (-\infty,\ +\infty)$;
3) общего вида;
4) убывает на $(-\infty,\ +\infty)$;
5) неограниченная;
6) непериодическая.

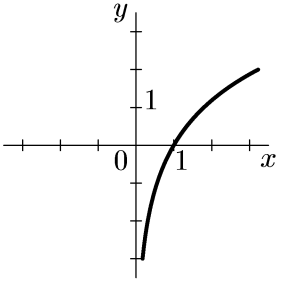


Рис. 2.12

1. $y = \log_a x, \qquad a > 1$:

1) $D(f) = (0,\ +\infty)$;
2) $E(f) = (-\infty,\ +\infty)$;
3) общего вида;
4) возрастает на $(-\infty,\ +\infty)$;
5) неограниченная;
6) непериодическая.

4) тригонометрические функции:

1. $y = \sin x$:

1) $D(f) = (-\infty,\ +\infty)$;
2) $E(f) = [-1,\ 1]$;
3) нечетная: $\sin(-x) = -\sin x$;
4) возрастает на
$[-\pi/2 + 2\pi n,\ \pi/2 + 2\pi n]$,
убывает на
$[\pi/2 + 2\pi n,\ 3\pi/2 + 2\pi n]$,
$n \in \mathbb{Z}$;
5) ограниченная: $|\sin x| \leqslant 1$;
6) периодическая:
$\sin(x + T) = \sin x,\ T = 2\pi$.

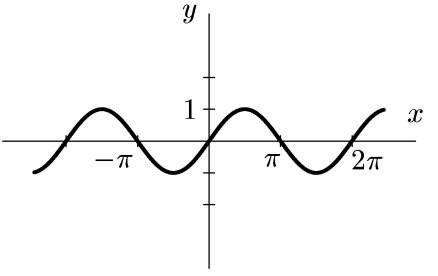


Рис. 2.13

2. $y = \cos x$:

1) $D(f) = (-\infty,\ +\infty)$;
2) $E(f) = [-1,\ 1]$;
3) четная: $\cos(-x) = \cos x$;
4) убывает на
$[2\pi n,\ \pi + 2\pi n]$,
возрастает на
$[-\pi + 2\pi n,\ \pi + 2\pi n]$,
$n \in \mathbb{Z}$;
5) ограниченная: $|\cos x| \leqslant 1$;
6) периодическая:
$\cos(x + T) = \cos x,\ T = 2\pi$.

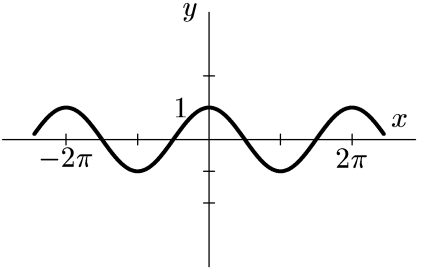


Рис. 2.14

3. $y = \operatorname{tg} x$:

1) $D(f) =$
$= (-\pi/2 + \pi n,\ \pi/2 + \pi n)$,
$n \in \mathbb{Z}$;
2) $E(f) = (-\infty,\ +\infty)$;
3) нечетная: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$;
4) возрастает на
$(-\pi/2 + \pi n,\ \pi/2 + \pi n)$,
$n \in \mathbb{Z}$;
5) неограниченная;
6) периодическая:
$\operatorname{tg}(x + T) = \operatorname{tg} x,\ T = \pi$.

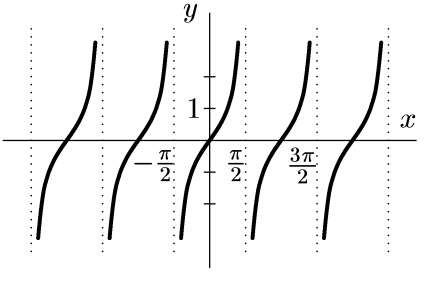


Рис. 2.15

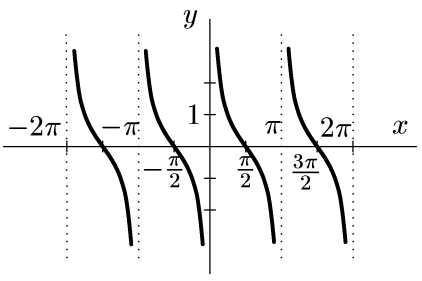


Рис. 2.16

3. $y = \operatorname{ctg} x$:

1) $D(f) = (\pi n,\ \pi + \pi n),\ \ n \in \mathbb{Z}$;
2) $E(f) = (-\infty,\ +\infty)$;
3) нечетная: $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$;
4) убывает на $(\pi n,\ \pi + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$;
5) неограниченная;
6) периодическая:
$\operatorname{ctg}(x + T) = \operatorname{ctg} x$, $T = \pi$.

5) обратные тригонометрические функции:

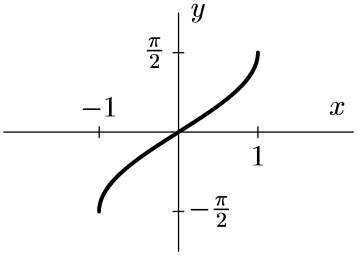


Рис. 2.17

1. $y = \arcsin x$:

1) $D(f) = [-1,\ 1]$;
2) $E(f) = [-\pi/2,\ +\pi/2]$;
3) нечетная: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$;
4) возрастает на $[-1,\ 1]$;
5) ограниченная: $|\arcsin x| \leqslant \pi/2$;
6) непериодическая.

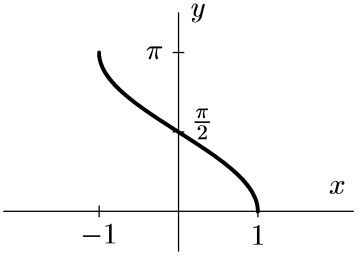


Рис. 2.18

2. $y = \arccos x$:

1) $D(f) = [-1,\ 1]$;
2) $E(f) = [0,\ \pi]$;
3) общего вида:
$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$;
4) убывает на $[-1,\ 1]$;
5) ограниченная: $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$;
6) непериодическая.

3. $y = \operatorname{arctg} x$:

1) $D(f) = (-\infty,\ +\infty)$;
2) $E(f) = (-\pi/2,\ \pi/2)$;
3) нечетная: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$;
4) возрастает на $(-\infty,\ +\infty)$;
5) ограниченная: $|\operatorname{arctg} x| < \pi/2$;
6) непериодическая.

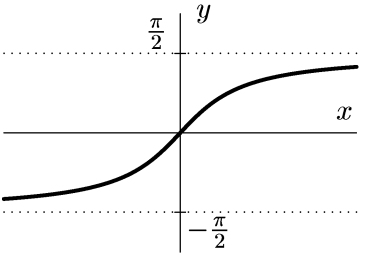


Рис. 2.19

4. $y = \operatorname{arcctg} x$:

1) $D(f) = (-\infty,\ +\infty)$;
2) $E(f) = (0,\ \pi)$;
3) общего вида:
$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x;$$
4) убывает на $(-\infty,\ +\infty)$;
5) ограниченная: $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$;
6) непериодическая.

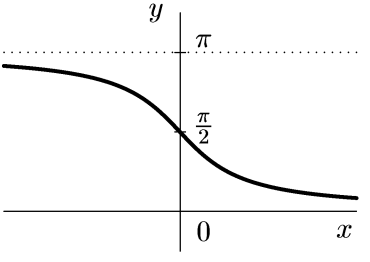


Рис. 2.20

2.2. Элементарные функции

1. Сложная функция. Пусть функция $y = f(u)$ есть функция от переменной u, определенной на множестве U с областью значений Y, а переменная u в свою очередь является функцией $u = g(x)$ от переменной x, определенной на множестве X с областью значений U. Тогда заданная на множестве X функция $y = f(g(x))$ называется *сложной* функцией (или *композицией* функций, *суперпозицией* функций, *функцией от функции*).

Например, $y = \sin(x^2 + 1)$ — сложная функция, так как она составлена из двух функций $y = \sin u$ и $u = x^2 + 1$.

Разумеется, сложную функцию можно составлять и из большего числа функций. Например, функция $y = \ln(\sin(x^2 + 1))$ составлена из трех функций $y = \ln v$, $v = \sin u$ и $u = x^2 + 1$.

2. Понятие элементарной функции. Из основных элементарных функций новые функции могут быть получены двумя способами при помощи:

а) алгебраических действий;

б) операций образования сложной функции.

Определение. Функции, построенные из основных элементарных функций с помощью конечного числа алгебраических действий и конечного числа операций образования сложной функции, называются *элементарными.*

Функция

$$y = x^2 + \sin x$$

является элементарной, так как она получена из основных элементарных функций: степенной x^2 и тригонометрической $\sin x$ с помощью операции сложения.

Функция

$$y = 3^x - x \cdot \ln x$$

получена из функций: показательной 3^x, степенной x и логарифмической $\ln x$ с помощью операций вычитания и умножения. Поэтому она — элементарна.

Элементарна также сложная функция

$$y = \sin x^6,$$

которая образована из двух основных элементарных функций: степенной x^6 и тригонометрической $\sin x$.

Функция

$$y = \sqrt{\sin x} - \frac{2^x - 3}{\ln (x^2 \cos x + 4)}$$

получена из основных элементарных функций $y = \sqrt{x}$, $y = \sin x$, $y = 2^x$, $y = 1$, $y = \ln x$, $y = x^2$, $y = \cos x$ с помощью алгебраических действий сложения, вычитания, умножения, деления и операции образования сложной функции. Поэтому она является элементарной.

Примерами неэлементарных функций являются функция Дирихле и функция $y = [x]$.

Функция Дирихле

$$y(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число,} \\ 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число} \end{cases}$$

определена на всей числовой прямой, множество ее значений состоит из двух точек: 0 и 1. График ее изобразить невозможно. На рис. 2.21 приведено лишь схематическое изображение этой функции.

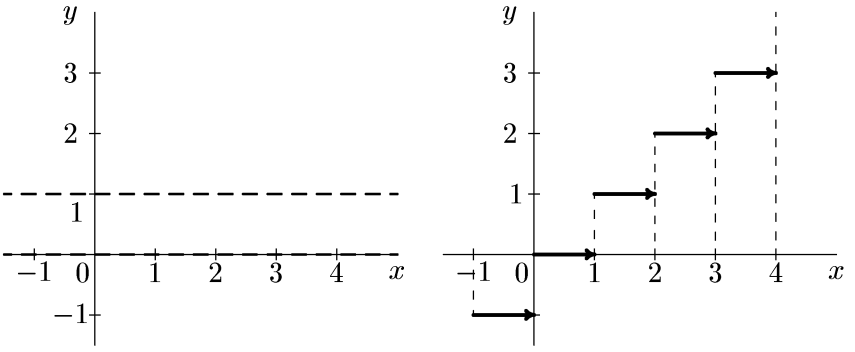


Рис. 2.21. Функция Дирихле и функция $y = [x]$

ДИРИХЛЕ́ (Dirichlet) Петер Густав Лежён (1805–1859) — немецкий математик, член Берлинской Академии наук. С 17 лет в течении 5 лет был домашним учителем в Париже. В 22 года — доцент в Бреславле. В 26 лет — профессор Берлинского университета. После смерти К. Гаусса (1855) — профессор Гетингенского университета. С именем Дирихле связаны задача, интеграл, принцип, функция, ряды и многое другое. Его лекции имели огромное влияние на выдающихся математиков более позднего времени.

Функция $y = [x]$ (читается «y равно антье x») — целая часть от значений аргумента — задана для всех вещественных значений x, а множество ее значений состоит из целых чисел. Ее график изображен на рис. 2.21.

Название элементарных функций сложилось исторически. В процессе развития математики и ее приложений элементарные функции появились сравнительно рано и играли важную роль, поэтому и символы, введенные для их обозначения, как, например, $\sin x$, стали хорошо известными и привычными. Но с точки зрения современной математики нет никакого основания называть элементарные функции более простыми , чем неэлементарные. Например, элементарная функция

$$y = \sqrt[7]{\sin x^2} - \frac{2^x - 3}{\ln\left(x^2 \sqrt{\cos x} + 4\right)}$$

не выглядит проще неэлементарной функции $y = [x]$.

3. Преобразования графиков функций. Покажем, как из графика функции $y = f(x)$ можно получить графики функций

вида

$$y = A\,f(a\,x + b) + B,$$

где A, B, a, b — некоторые действительные числа.

1. График функции $y = f(x) + b$ получается из графика функции параллельным переносом.

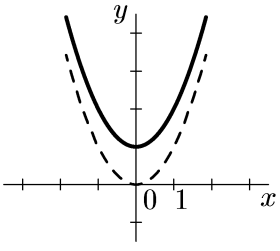


Рис. 2.22

Если $b > 0$, то перенос совершается параллельно оси ординат на расстояние b вверх, а если $b < 0$, то вниз на расстояние $|b|$. На рис. 2.22 изображены графики функций $y = x^2$ (пунктирной линией) и $y = x^2 + 1$ (сплошной линией).

2. График функции $y = f(x + a)$ также получается из графика функции $y = f(x)$ параллельным переносом.

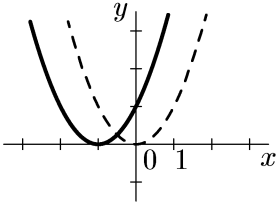


Рис. 2.23

Если $a > 0$, то график переносится параллельно оси абсцисс влево на расстояние a, а если $a < 0$, то вправо на расстояние $|a|$. На рис. 2.23 изображены графики функций $y = x^2$ (пунктирной линией) и $y = (x + 1)^2$ (сплошной линией).

3. График функции $y = A\,f(x)$, где $A > 0$, получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением или сжатием вдоль оси ординат.

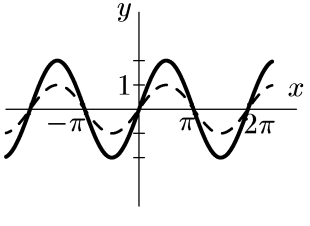


Рис. 2.24

Если $A > 1$, то график функции растягивается вдоль оси Oy в A раз, а если $0 < A < 1$, то сжимается в $1/A$ раз. На рис. 2.24 изображены графики функций $y = \sin x$ (пунктирной линией) и $y = 2\sin x$ (сплошной линией).

4. График функции $y = f(a\,x)$, где $a > 0$, получается из графика функции $y = f(x)$ сжатием к оси ординат или растяжением вдоль оси абсцисс.

График функции $y = f(a\,x)$ есть график $y = f(x)$, сжатый (при $a > 1$) в a раз или растянутый (при $0 < a < 1$) вдоль оси Ox. На рис. 2.25 изображены графики функций $y = \sin x$ (пунктирной линией) и $y = \sin 2x$ (сплошной линией).

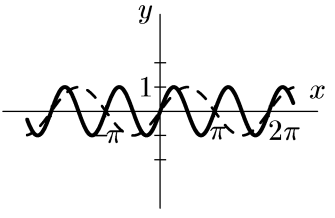


Рис. 2.25

5. График функции $y = -f(x)$ получают из графика функции $y = f(x)$ зеркальным отражением относительно оси абсцисс.

На рис. 2.26 изображены графики функций $y = x^2$ (пунктирной линией) и $y = -x^2$ (сплошной линией).

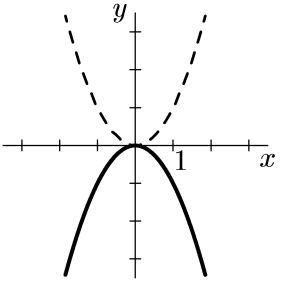


Рис. 2.26

6. График функции $y = f(-x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ зеркальным отражением относительно оси ординат.

На рис. 2.27 изображены графики функций $y = a^x$, где $a > 0$ (пунктирной линией) и $y = a^{-x}$ (сплошной линией).

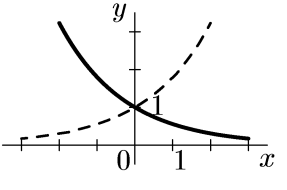


Рис. 2.27

7. Рассмотрим теперь, как получается график функции $y = A\,f(a\,x + b) + B$, где $A > 0$ и $a > 0$, из графика функции

$y = f(x)$. Так как

$$y = A\, f\Big(a\,(x + b/a)\Big) + B,$$

то сжатием вдоль оси абсцисс получим график функции $y = f(ax)$. Из этого графика сжатием вдоль оси ординат получим график функции $y = A\, f(a\, x)$, из которого параллельным переносом вдоль оси абсцисс на $|b/a|$ единиц и вдоль оси ординат на $|B|$ единиц получим график функции $y = A\, f(a\, x + b) + B$.

Работайте, работайте, — полное понимание придет потóм.

Даламбер

Глава 3
Предел последовательности

3.1. Понятие сходимости

Определение. *Последовательностью* называется числовая функция $f(n)$, заданная на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$.

В дальнейшем вместо $f(n)$ будем писать a_n.

Если n — натуральное число, а a_n — значение последовательности в точке n, то говорят, что n называется *номером* числа a_n, а само число a_n называют *общим* или *n-м членом последовательности*. Для последовательности с общим членом a_n употребляются следующие обозначения:

$$a_n, \qquad n = 1,\ 2,\ 3\ldots;$$
$$(a_n);$$
$$\{a_n\}.$$

Графиком последовательности является изолированное множество точек плоскости.

▽ **Пример 1.** Даны последовательности:

1) $a_n = \dfrac{1}{n},\ \ n = 1,\ 2,\ 3\ldots;$

2) $a_n = (-1)^n,\ \ n = 1,\ 2,\ 3\ldots;$

3) $a_n = n - 2,\ \ n = 1,\ 2,\ 3\ldots.$

Изобразить несколько первых ее членов на координатной плоскости.

Решение. Придавая n значения 1, 2, 3, 4, 5, получим:

1) $a_1 = \dfrac{1}{1},\ \ a_2 = \dfrac{1}{2},\ \ a_3 = \dfrac{1}{3},\ \ a_4 = \dfrac{1}{4},\ \ a_5 = \dfrac{1}{5};$

2) $a_1 = -1,\ \ a_2 = 1,\ \ a_3 = -1,\ \ a_4 = 1,\ \ a_5 = -1;$

3) $a_1 = -1,\ \ a_2 = 0,\ \ a_3 = 1,\ \ a_4 = 2,\ \ a_5 = 3.$

Графики этих последовательностей изображены на рис. 3.1. ▲

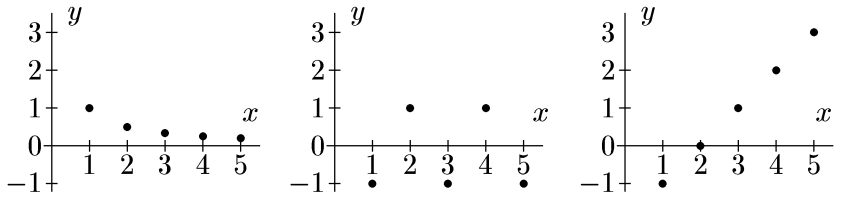


Рис. 3.1. Графики последовательностей

▽ **Пример 2.** Пусть в момент времени n цена на товар составляет $a_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ денежных единиц. Определить к какой цене стремится цена на товар с течением времени.

Решение. С ростом номера n число a_n (n-й член последовательности) становится все ближе к 1. Действительно, разность $|a_n - 1|$ (расстояние от a_n до 1) приближается к нулю:

при $n = 1$ равна $|1 + 1 - 1| = 1$;
при $n = 2$ $|a_n - 1| = |1 + 1/2 - 1| = 1/2$;
при $n = 3$ $|a_n - 1| = |1 + 1/3 - 1| = 1/3$;
при $n = 4$ $|a_n - 1| = |1 + 1/4 - 1| = 1/4$;
при $n = 10$ $|a_n - 1| = |1 + 0,1 - 1| = 0,1$;
при $n = 100$ $|a_n - 1| = |1 + 0,01 - 1| = 0,01$;
при $n = 1000$ $|a_n - 1| = |1 + 0,001 - 1| = 0,001$.

Легко заметить, что:

при $n > 1$ имеем $|a_n - 1| < 1$;
при $n > 10$ имеем $|a_n - 1| < 0,1$;
при $n > 100$ имеем $|a_n - 1| < 0,01$;
при $n > 1000$ имеем $|a_n - 1| < 0,001$.

Таким образом, с течением времени цена на товар падает и приближается к единице. Единицу именуют пределом последовательности изменения цены товара. ▲

Приведем более точное определение предела.

Определение. Число a называется *пределом числовой последовательности* $\{a_n\}$, если для любого, даже сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$, найдется такое число N (зависящее от ε, $N = N(\varepsilon)$), что для всех членов последовательности с номерами $n > N$ верно неравенство

$$|a_n - a| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Если это выполняется, то пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ или $a_n \to a$ при $n \to \infty$.

Обозначение lim — сокращение от латинского слова limes — «предел» и равнозначного французского слова limite.

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, в противном случае — *расходящейся.*

Используя логические символы $\forall$ (вместо фразы «для любого»), $\exists$ (вместо слова «найдется») и символ равносильности $\Leftrightarrow$, определение предела можно записать в виде

$$(a = \lim_{n\to\infty} a_n) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \qquad |a_n - a| < \varepsilon).$$

Смысл определения предела числовой последовательности состоит в том, что для достаточно больших n члены последовательности $\{a_n\}$ как угодно мало отличаются от числа a (по абсолютной величине меньше, чем на число ε, каким бы малым оно ни было).

▽ **Пример 3.** Пусть $a_n = 1 + \dfrac{1}{n}$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Решение. С ростом номера n число a_n (n-й член последовательности) становится все ближе к 1. Действительно, разность $|a_n - 1|$ (расстояние от a_n до 1) приближается к нулю. Более строго, для любого $\varepsilon > 0$ выберем число N равным $\dfrac{1}{\varepsilon}$. Отсюда для любого $n > N = \dfrac{1}{\varepsilon}$ имеем: $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ или $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$. Но $|a_n - 1| = |1 + \dfrac{1}{n} - 1| = \dfrac{1}{n}$. Поэтому $|a_n - 1| < \varepsilon$. Таким образом,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \ (N = \frac{1}{\varepsilon}) \quad \forall n > N \quad |a_n - 1| < \varepsilon.$$

Это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. ▲

▽ **Пример 4.** Дана последовательность

$$a_1 = 0{,}3, \quad a_2 = 0{,}33, \quad a_3 = 0{,}333, \quad \ldots .$$

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{3}$.

Решение. Общий член последовательности a_n неограниченно приближается к $\dfrac{1}{3}$. Действительно, разность $a_n - \dfrac{1}{3}$ последовательно равна

$$a_1 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{30}, \quad a_2 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{300}, \quad a_3 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3000},$$

т. е.

$$a_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3 \cdot 10^n}.$$

Неограниченность приближения a_n к $\frac{1}{3}$ выражается в том, что абсолютная величина разности $a_n - \frac{1}{3}$, начиная с некоторого номера остается меньше любого (заранее заданного) положительного числа ε. Так, если задать $\varepsilon = 0{,}01$, то N можно выбрать равным единице, поскольку начиная со второго номера ($n > N$), абсолютная величина остается меньше 0,01. Если задать $\varepsilon = 0{,}005 \left(= \frac{1}{200}\right)$, то по-прежнему можно считать, что $N = 1$. Если $\varepsilon = 0{,}001$, то $N = 2$; если $\varepsilon = 0{,}00001$, то $N = 4$ и т. д. ▲

▽ **Пример 5.** Показать, что число 2 является пределом последовательности $\{a_n\}$, где $a_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$.

Решение. $|a_n - 2| = \frac{1}{n}$, а величина $\frac{1}{n}$, начиная с некоторого номера, остается меньшей любого заранее данного положительного числа ε (если $\varepsilon = 2$, то начиная с первого номера; если $\varepsilon = 0{,}02$, то с 51-го и т. д.). ▲

Пример 5 показывает, что члены последовательности могут быть то больше, то меньше предела. Они могут и равняться пределу (см. следующий пример).

▽ **Пример 6.** Показать, что последовательность 0, 1, 0, $\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{3}$, ..., общий член которой выражается формулой $a_n = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n}$, имеет предел $b = 0$. ▲

Решение. Величина $|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n}\right|$, начиная с некоторого номера, остается меньше любого сколь угодно малого положительного числа ε (если $\varepsilon = \frac{1}{3}$, то начиная с седьмого номера; если $\varepsilon = 0{,}01$, то с 201-го и т. д.). ▲

▽ **Пример 7.** Показать, что последовательность $a_n = (-1)^n$ не имеет предела.

Решение. Члены последовательности $a_1 = -1$, $a_2 = 1$,

$a_3 = -1$, $a_4 = 1$ и т. д. не стремятся ни к какому числу. Действительно, какое бы число мы ни предложили в качестве предела a при $\varepsilon < 0{,}5$ неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$, определяющее предел последовательности, не удовлетворяется. Вне ε-окрестности этого числа остается бесконечное число элементов a_n. ▲

В определении сходимости и предела последовательности нет ясного указания на то, как проверять сходимость и как находить предел. Поэтому для вычисления пределов используются специальные критерии. Этим критериям и посвящен следующий параграф.

3.2. Существование предела монотонной ограниченной последовательности

При вычислении пределов используются понятия монотонной и постоянной последовательностей. Введем эти необходимые понятия.

Последовательность $\{a_n\}$ называется *постоянной*, если $a_n = c$ для любого $n \in \mathbb{N}$, где c — некоторое действительное число ($c \in \mathbb{R}$).

Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной*, если найдется число M такое, что $|a_n| \leqslant M$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Последовательность $\{a_n\}$ называется *возрастающей* (*убывающей*), если $a_n \leqslant a_{n+1}$ ($a_n \geqslant a_{n+1}$) для любого $n \in \mathbb{N}$.

Возрастающие и убывающие последовательности называются *монотонными* последовательностями.

Последовательность $\{a_n\}$ называется *строго возрастающей* (*строго убывающей*), если $a_n < a_{n+1}$ ($a_n > a_{n+1}$) для любого $n \in \mathbb{N}$.

Строго возрастающие и строго убывающие последовательности называются *строго монотонными* последовательностями.

▽ **Пример 1.** Даны последовательности:

1) $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$;

2) $2, 2, 2, \ldots, 2, \ldots$;

3) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$;

4) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$;

5) $1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots$.

Определить являются ли эти последовательности монотонными.

Решение. Первая последовательность является строго возрастающей, так как $a_n = n < n + 1 = a_{n+1}$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Вторая последовательность является постоянной, так как $a_n = 2 = \text{const}$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Третья и четвертая последовательности являются строго убывающими, так как $a_n = \dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n+1} = a_{n+1}$ и $a_n = \dfrac{1}{2^n} > \dfrac{1}{2^{n+1}} = a_{n+1}$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Таким образом, первые четыре последовательности являются монотонными.

Пятая последовательность не является монотонной, так как последующий член в одних случаях больше, а в других случаях меньше предыдущего. ▲

▽ **Пример 2.** Какие из последовательностей примера 1 являются ограниченными?

Решение. Первая последовательность $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ не является ограниченной, поскольку для любого числа M всегда найдется номер N (например, $N = [M] + 1$), для которого $a_N > M$.

Поскольку для второй последовательности $|a_n| \leqslant 2$, для третьей, четвертой и пятой последовательностей $|a_n| \leqslant 1$, то эти последовательности ограничены. ▲

Доказано, что последовательности, обладающие как свойством ограниченности, так и свойством монотонности, имеют предел.

Теорема 1. *Если последовательность ограничена и монотонна, то она сходится.*

Из пяти последовательностей, рассмотренных в примерах 1 и 2, свойствами и монотонности и ограниченности обладают три последовательности — вторая, третья и четвертая. Поэтому они имеют предел.

Теорема 1 дает возможность находить сходящиеся последовательности, но не дает возможности вычислять их пределы. Для вычисления пределов используются другие теоремы. Приведем здесь три из них.

Теорема 2. *Пусть дана постоянная числовая последовательность* $\{a_n\}$, *где* $a_n = c = \text{const}$ *для любого* $n \in \mathbb{R}$. *Тогда она*

сходится и

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} c = c}$$

(предел постоянной равен постоянной).

□ Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и пусть N — любое число ($N \in \mathbb{R}$). Тогда $\forall n > N$, $|a_n - a| = |c - c| = 0 < \varepsilon$. ■

Из этой теоремы следует, что предел второй последовательности, рассмотренной в примере 1, равен двум.

Теорема 3. *Последовательность* $\{a_n\}$ *с общим членом* $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ ($\alpha > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$) *сходится и*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0, \qquad \alpha > 0.}$$

□ Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и пусть $N = \left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)^{1/\alpha}$. Тогда $\forall n > N$,

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n^\alpha} < \frac{1}{N^\alpha} = \frac{1}{\left(\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/\alpha}\right)^\alpha} = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |a_n - 0| < \varepsilon. \ ■$$

Для третьей последовательности из примера 1 показатель степени $\alpha = 1 > 0$, поэтому предел последовательности равен нулю: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Теорема 4. *Если* $|q| < 1$ ($q \in \mathbb{R}$), *то последовательность* $\{q^n\}$ *сходится и*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} q^n = 0, \qquad |q| < 1.}$$

□ Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и пусть $N = \log_q \varepsilon$. Тогда $\forall n > N$,

$$|a_n - 0| = q^n < q^{\log_q \varepsilon} = \varepsilon. \ ■$$

Четвертая последовательность, рассмотренная в примере 1, имеет предел. Найдем его. Общий член последовательности имеет вид q^n, где $q = \dfrac{1}{2} < 1$. Из теоремы 4 имеем $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$.

3.3. Действия над сходящимися последовательностями

Сформулируем теоремы о действиях над сходящимися последовательностями, которые очень часто облегчают нахождение пределов.

Теорема 1. *Если последовательности* $\{a_n\}$ *и* $\{b_n\}$ *сходятся, то сходится последовательность* $\{a_n \pm b_n\}$ *и справедлива формула*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n \pm \lim_{n\to+\infty} b_n.} \tag{3.2}$$

Краткая формулировка этой теоремы следующая: *предел суммы равен сумме пределов.*

Для последующих теорем точные формулировки опускаются и приводятся только их краткие формулировки.

Теорема 2. *Предел произведения равен произведению пределов*:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n \cdot \lim_{n\to+\infty} b_n.} \tag{3.3}$$

Теорема 3. *Постоянную величину можно выносить за знак предела*:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to+\infty} a_n.} \tag{3.4}$$

Теорема 4. *Предел отношения равен отношению пределов:*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n}.} \tag{3.5}$$

(Разумеется предполагается, что знаменатели справа и слева от знака равенства не равны нулю.)

□ Ограничимся доказательством теоремы 1 для случая предела суммы. Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Тогда существуют числа N_1 и N_2 такие, что

при всех $n > N_1$ $\quad |a_n - a| < \varepsilon/2$,

при всех $n > N_2$ $\quad |b_n - b| < \varepsilon/2$.

Пусть N_3 — число, бóльшее, чем N_1 и N_2. Тогда при $n > N_3$ последние два неравенства истинны одновременно. Поэтому

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leqslant$$
$$\leqslant |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

(использовано неравенство треугольника для модулей). Следовательно, последовательность $a_n + b_n$ сходится и

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = a + b = \lim_{n\to+\infty} a_n + \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

Остальные правила доказываются аналогично. ■

▽ **Пример.** Используя теоремы о действиях над сходящимися последовательностями, вычислить $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3n+2}{n}\right)$.

Решение.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3n+2}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(3 + \frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} 3 + 2\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} =$$
$$= 3 + 0 = 3.$$ ▲

3.4. Числовые ряды

Путем деления всякую обыкновенную дробь можно преобразовать в периодическую десятичную дробь. Дробь $1/3$ можно представить в виде следующей бесконечной периодической дроби:

$$0{,}333\ldots .$$

Запишем ее иначе:

$$1/3 = 0{,}333\ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots . \tag{3.6}$$

Это представление называется представлением числа $1/3$ в виде ряда. Записанное равенство не означает, разумеется, что мы складываем бесконечно много чисел и в результате получаем $1/3$. Бесконечное число суммирований нельзя произвести. Речь идет о том, что $1/3$ является числом, от которого сумма отличается сколь угодно мало, если сложить достаточно много членов.

Поставим теперь обратный вопрос: для всякой ли периодической десятичной дроби (соответствующего ряда) найдется обыкновенная дробь, которая в нее преобразуется? Ответ на этот вопрос положителен. Для доказательства достаточно использовать бесконечную геометрическую прогрессию.

Напомним некоторые сведения о геометрической прогрессии.

Геометрическая прогрессия. *Геометрической прогрессией* называется последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предшествующему члену, умноженному на одно и то же не равное нулю число q. Число q называется *знаменателем* геометрической прогрессии.

Общий (n-й) член последовательности определяется по формуле

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1},$$

где b_1 — первый член прогрессии, а q — ее знаменатель.

Как найти сумму первых n членов прогрессии? Если $q = 0$, то сумма первых n членов $S_n = b_1$. Если $q = 1$, то очевидно, что $S_n = b_1 + \ldots + b_1 = n \cdot b_1$. Предположим теперь, что $q \neq 0$ и $q \neq 1$. Тогда

$$S_n = b_1 + b_1\, q + \cdot + b_1\, q^{n-1} = b_1 \left(1 + q + q^2 + \ldots q^{n-1}\right).$$

Умножим обе части полученного равенства на q:

$$q\, S_n = b_1 \left(q + q^2 + q^3 + \ldots q^n\right).$$

Вычитая первое равенство из второго, получаем

$$(q-1)\, S_n = q\, S_n - S_n = b_1 \left(-1 + q^n\right).$$

Поскольку $q \neq 1$, то разделив обе части последнего равенства на $(q-1)$, получим сумму первых n членов геометрической прогрессии:

$$\boxed{S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.}$$

Вернемся опять к бесконечным периодическим десятичным дробям, о которых шла речь выше, и рассмотрим дробь 0,333..., а также последовательность

$$S_1 = 0{,}3, \quad S_2 = 0{,}33, \quad \ldots, \quad S_n = 0{,}33\ldots3.$$

Это можно записать иначе:

$$S_1 = \frac{3}{10}, \quad S_2 = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2}, \quad \ldots, \quad S_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \ldots + \frac{3}{10^n}.$$

S_n является суммой первых n членов геометрической прогрессии, первый член которой $b_1 = \dfrac{3}{10}$, а знаменатель $q = \dfrac{1}{10}$. Используя

формулу для суммы n членов геометрической прогрессии, получаем:

$$S_n = \frac{\frac{3}{10}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right).$$

Отсюда $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{3}$.

В результате мы преобразовали бесконечную десятичную дробь в обыкновенную.

Рассмотрим теперь в более общем виде последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм геометрического ряда

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} b_n,$$

получаемого из геометрической прогрессии, когда $q \neq 1$.

$$S_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{b_1}{1 - q} - \frac{b_1}{1 - q} \cdot q^n.$$

Если $|q| < 1$, то $q^n \to 0$ при $n \to \infty$, поэтому

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{b_1}{1 - q}, \qquad \text{если } |q| < 1.$$

При других значениях q последовательность $\{S_n\}$ не сходится.

Будем говорить, что бесконечный геометрический ряд сходится, если $|q| < 1$ и его сумма

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{b_1}{1 - q}.$$

Таким образом, под суммой бесконечного геометрического ряда мы понимаем предел последовательности его частичных сумм.

Пример геометрического ряда подводит нас к общему понятию числового ряда.

Определение. Бесконечным числовым рядом или просто *числовым рядом* называется бесконечная последовательность чисел $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, чисто формально соединенных знаком плюс:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Числа $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ называются *членами ряда*, а член u_n — *общим* или *n-м членом ряда.*

Обозначение $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ читается как «сумма u_n, где n изменяется от 1 до ∞». Часто это обозначение читают еще короче «сумма u_n от 1 до ∞».

Рассмотрим суммы конечного числа членов ряда:

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \quad \ldots, \quad S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Сумма n первых членов ряда S_n называется *n-й частичной суммой ряда.*

При $n \to \infty$ возможны два случая.

I. При неограниченном возрастании номера n сумма n первых членов S_n стремится к конечному пределу S :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Тогда говорят, что ряд *сходится* и число S называется *суммой* этого ряда.

II. При неограниченном возрастании номера n сумма n первых членов S_n возрастает неограниченно или вообще не стремится ни к какому пределу. Тогда говорят, что ряд *расходится* и суммы не имеет.

Определение. Числовой ряд называется *сходящимся*, если существует конечный предел последовательности частичных сумм — этот предел называется *суммой ряда*; в противном случае ряд называется *расходящимся.*

Таким образом, сумма бесконечного ряда получается не в результате суммирования всех членов, а как предел последовательности частичных сумм ряда. Понимание суммы ряда как суммирования всех его членов приводит к недоразумениям. Например, что считать суммой ряда

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots ?$$

Многие скажут, что суммой ряда следует считать 0, поскольку члены ряда можно сгруппировать так:

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0.$$

Но другие возразят, что группировать можно и по другому — не начиная с первого члена, а начиная со второго, то есть так:

$$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \ldots = 1 + 0 + 0 + \ldots = 1.$$

Между тем, и те и другие не правы. Этот ряд расходится, поскольку последовательность частичных сумм не имеет предела:

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 1 - 1 = 0, \quad S_3 = 1 - 1 + 1 = 1, \quad \dots .$$

Только понимание суммы ряда как предела частичных сумм позволяет избежать многих недоразумений и парадоксов.

Я знаю, что это такое, только до той поры, пока меня не спросят — что же это такое!

Блаженный Августин

Глава 4
Предел функции и непрерывность

4.1. Определения предела функции

Пусть a — число. Функция $y = f(x)$ задана в некоторой проколотой окрестности точки a, т. е. при $x \in (a - \varepsilon, 0) \cup (0, a + \varepsilon)$. Точка a не обязательно входит в $D(f)$.

Рассмотрим ряд последовательностей $\{x_n\}$, значения которых лежат в области определения $f(x)$ ($x_n \neq a$, $\forall n \in \mathbb{N}$) и таких, что

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = a \qquad (x_n \to a).$$

Для каждой такой последовательности x_n построим последовательность $y_n = f(x_n)$.

Если все последовательности $\{y_n\}$ имеют пределы, эти пределы совпадают между собой и равны некоторому b, то говорят, что функция $f(x)$ при x, стремящемся к a, имеет предел, равный b. В противном случае говорят, что функция $f(x)$ при x, стремящемся к a, не имеет предела.

Сформулируем точное определение предела функции.

Определение 1. Число b называется *пределом функции* $f(x)$ в точке $x = a$, если для любой последовательности x_n, сходящейся к a ($x_n \in D(f)$, $x_n \neq a$ при любом n), последовательность соответствующих значений функции $y = f(x_n)$ сходится и ее предел равен b.

Кратко пишут

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

▽ **Пример 1.** Функцию $y = f(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{2x - 1}$ определена во всех точках, кроме $x = \dfrac{1}{2}$. Найти предел функции при $x \to 6$.

Решение. Возьмем $a = 6$. Тогда $f(6) = \dfrac{4 \cdot 6^2 - 1}{2 \cdot 6 - 1} = 13$. По мере приближения любой последовательности $\{x_n\}$ к 6, числитель $4x^2 - 1$ стремится к 143, знаменатель — к 11. Вся дробь стремится к $\dfrac{143}{11} = 13$. Число 13 (равное значению функции при $x = 6$) есть вместе с тем предел функции при $x \to 6$:

$$\lim_{x \to 6} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1} = 13. \quad ▲$$

▽ **Пример 2.** Рассмотрим ту же функцию $f(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{2x - 1}$. Найти предел этой функции при $x \to a = \dfrac{1}{2}$.

Решение. Функция $f(x)$ в точке $a = \dfrac{1}{2}$ не определена (формула дает неопределенное выражение $\dfrac{0}{0}$). Но предел функции при $x \to \dfrac{1}{2}$ существует. Он равен двум.

Действительно, выражение $f(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{2x - 1}$ неопределено только при x, равном $\dfrac{1}{2}$, но при приближении членов любой последовательности $\{x_n\}$ к $\dfrac{1}{2}$, выражение $2x_n - 1$ отлично от нуля. Поэтому, разделив числитель дроби $\dfrac{4x_n^2 - 1}{2x_n - 1}$ на отличный от нуля знаменатель, получим $2x_n + 1$. А последнее выражение стремится к числу 2. Следовательно,

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1} = 2. \quad ▲$$

▽ **Пример 3.** Доказать, что функция $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ не имеет предела при $x \to 0$.

Решение. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = \dfrac{1}{\pi/2 + \pi\,(n+1)}$. Ясно, что $x_n \neq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$. Построим последовательность $\{y_n\}$, где $y_n = \sin 1/x_n = \sin(\pi/2 + \pi\,(n+1))$. Последовательность y_n совпадает с последовательностью

$$-1, \quad 1, \quad -1, \quad 1, \quad -1, \quad \ldots,$$

которая, как мы знаем, расходится. Отсюда следует, что функция $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ не имеет предела. ▲

Существует другое определение предела функции, в котором не используется понятие предела последовательности.

Определение 2. Число b называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \to a$ (или в точке $x = a$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

С помощью логических символов определение можно записать в следующем виде:

$$\Big(b = \lim_{x\to a} f(x)\Big) \Leftrightarrow$$

$$(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \neq a: \quad |x - a| < \delta \quad |f(x) - b| < \varepsilon).$$

Рассмотрим геометрический смысл предела функции в точке. Построим график функции $y = f(x)$, точки $x = a$, $y = b$. Выберем $\varepsilon > 0$ и построим прямые $y = b + \varepsilon$, $y = b - \varepsilon$. Число b является пределом функции $f(x)$ в точке $x = a$, если найдется δ-окрестность точки a такая, что часть графика функции $f(x)$, для которой $x \in (a - \delta,\ a) \cup (a,\ a + \delta)$, попадает внутрь полосы, ограниченной прямыми $y = b - \varepsilon$ и $y = b + \varepsilon$.

Определения 1 и 2 эквивалентны. Первое определение предела функции основано на понятии числовой последовательности, и его называют определением на языке последовательностей или определением по Гейне. Второе определение носит название определение на языке ε–δ или определение по Коши. К достоинству определения 1 можно отнести возможность доказательства того, что функция в точке не имеет предела (пример 3). Недостаток состоит в том, что для доказательства существования предела в точке надо перебирать теоретически бесконечно много последовательностей $\{x_n\}$. Поэтому нельзя дать строго доказательства

существования предела. В этом смысле определение 2 предпочтительнее.

> *ГЕ́ЙНЕ (Heine) Генрих Эдуард (1821–1881), немецкий математик, чл.-корр. Берлинской Академии наук. Работал в университетах в Бонне и Галле. Основные труды по теории множеств, математической физике.*

> *КОШИ́ (Cauchy) Огюстен Луи (1789–1857), французский математик, член Парижской Академии наук. Работал инженером в Шербуре, преподавал в Политехнической школе, Колеж де Франс и в Парижском университете (отказывался от должности в университете до тех пор, пока не была отменена присяга в лояльности правительству). Оставил свой след во многих областях математики. Его курсы анализа, основанные на систематическом использовании понятия предела, послужили образцом для большинства курсов позднейшего времени. В них он дал определение понятия непрерывности функции, четкое определение сходящихся рядов, определение интеграла как предела суммы и др.*

Пределом постоянной величины b называется сама величина b.

Это определение вводится для того, чтобы основные теоремы о пределах были верны во всех случаях без исключения. Оно согласуется с определениями 1 и 2 (величина $|b-b|=0$ меньше любого положительного числа ε).

▽ **Пример 4.** Доказать, что $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)=3$.

Решение. Неравенство $|(2x+1)-3|<\varepsilon$ эквивалентно неравенству $|2(x-1)|<\varepsilon$ или $|x-1|<\varepsilon/2$. Таким образом, для любого $\varepsilon>0$ можно взять $\delta=\varepsilon/2$, тогда для всех x таких, что $|x-1|<\delta$, будет справедливо неравенство $|(2x+1)-3|=$ $=|2(x-1)|<\varepsilon$. Это и означает, что

$$\lim_{x\to 1}(2x+1)=3. \quad ▲$$

4.2. Бесконечно большая величина

Определение. Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой величиной* при $x\to a$, если абсолютное значение остается бóльшим любого заранее данного положительного числа M, всякий раз как абсолютное значение разности $x-a$ меньше некоторого положительного числа δ (зависящего от M).

Иногда говорят, что *бесконечно большой величиной* называется переменная величина, абсолютное значение которой неограниченно возрастает.

▽ **Пример 1.** Целочисленная функция $y = 5\,n + 1$ есть бесконечно большая величина, ибо члены последовательности неограниченно возрастают. ▲

▽ **Пример 2.** Целочисленная функция $y = \dfrac{5}{x}$ есть бесконечно большая величина при $x \to 0$, ибо по мере приближения к нулю абсолютное значение величины $\dfrac{5}{x}$ неограниченно возрастает. ▲

▽ **Пример 3.** Целочисленная функция $y = \operatorname{tg} x$ есть бесконечно большая величина при $x \to \dfrac{\pi}{2}$. ▲

4.3. Расширение понятия предела

В этом параграфе будут введены понятия бесконечного и одностороннего предела, которые являются обобщением понятия предела в смысле определений предыдущего параграфа.

1. Бесконечные пределы. Если переменная величина y бесконечно велика, то говорят, что y *стремится к бесконечности* и пишут

$$y \to \infty \quad \text{или} \quad \lim y = \infty. \tag{4.1}$$

Если бесконечно большая величина y для достаточно больших значений $|y|$ является положительной, то говорят, что она *стремится к плюс бесконечности.* Это обозначают так:

$$y \to +\infty \quad \text{или} \quad \lim y = +\infty.$$

Если бесконечно большая величина $|y|$ для достаточно больших значений $|y|$ является отрицательной, то говорят, что она *стремится к минус бесконечности* и пишут:

$$y \to -\infty \quad \text{или} \quad \lim y = -\infty.$$

Вместо записи (4.1) для большей выразительности иногда пишут:

$$y \to \pm\infty \quad \text{или} \quad \lim y = \pm\infty.$$

▽ **Пример 1.** Функция $y = \operatorname{tg} x$ есть бесконечно большая величина при $x \to \frac{\pi}{2}$. Говорят, что функция $y = \operatorname{tg} x$ имеет бесконечный предел:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = \infty.$$

Чтобы подчеркнуть, что функция $\operatorname{tg} x$ при $x \to \frac{\pi}{2}$ может принимать как положительные значения $\left(\text{при } x < \frac{\pi}{2}\right)$, так и отрицательные $\left(\text{при } x > \frac{\pi}{2}\right)$, пишут:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = \pm\infty. \quad \blacktriangle$$

▽ **Пример 2.** Запись $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$ означает, что когда абсолютное значение x неограниченно возрастает, функция $\dfrac{1}{x}$ стремится к нулю. ▲

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой величиной* при $x \to \infty$, если абсолютное значение остается бóльшим любого заранее данного положительного числа M, всякий раз как $|x|$ больше некоторого положительного числа N (зависящего от M).

Неограниченная функция не обязательно бесконечно большая. Например, функция $x \sin x$ является неограниченной (ее значения могут быть как угодно большими), но не бесконечно большой при $x \to \infty$, так как с ростом x функция все время колеблется, и неравенство $|x \sin x| > M$ не может выполняться при всех x, для которых $|x| > N$.

▽ **Пример 3.** Можно написать:

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \quad \text{или} \quad \lim_{x \to +\infty} e^x = \infty.$$

Вторая запись оставляет открытым вопрос о знаке функции e^x. Но нельзя под знаком предела вместо $x \to +\infty$ написать $x \to \infty$. Последняя запись включала бы и тот случай, когда $x \to -\infty$, что было бы неверно, так как

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0. \quad \blacktriangle$$

Заметим, что бесконечно большая величина не имеет предела в смысле определений предыдущего параграфа, ибо никак

нельзя сказать, например, что разность между $f(x)$ и ∞ остается меньшей заранее данного положительного числа. Таким образом, введение бесконечного предела расширяет понятие предела. В отличие от бесконечного предела предел, определенный ранее, называется *конечным.*

2. Односторонние пределы. Если любая последовательность $x_n \to a$, $x_n < a$ (a — число или символ $-\infty$) при любом $n \in \mathbb{N}$, то говорят, что *функция* $f(x)$ *при* $x \to a$ (*слева*) *имеет левый односторонний предел*

$$b = f(a-0) = \lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x).$$

Символическая запись $x \to a - 0$ обозначает, что x принимает лишь значения, принадлежащие интервалу $(c,\ a)$ $c < a$. Для существования одностороннего предела от функции достаточно потребовать, чтобы функция $f(x)$ была определена лишь в интервале $(c,\ a)$ $c < a$, т. е. левее точки a. Поэтому соответствующее значение обозначается символически $f(a-0)$.

Говорят, что *функция* $f(x)$ *при* $x_n \to a$ (*справа*) *имеет правый односторонний предел*

$$b = f(a+0) = \lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x),$$

если функция $f(x)$ была определена в некотором интервале $(a,\ d)$ (a — число или символ $+\infty$), т. е. правее точки a, и любая последовательность $x_n \to a$, $x_n > a$ (a — число или символ $-\infty$) при любом $n \in \mathbb{N}$.

▽ **Пример 4.** Найти пределы

$$\lim_{x \to 1-0} [x] \quad \text{и} \quad \lim_{x \to 1+0} [x],$$

где $[x]$ — целая часть x.

Решение.

$$\lim_{x \to 1-0} [x] = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} [x] = 0, \qquad \lim_{x \to 1+0} [x] = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} [x] = 1. \quad ▲$$

Если $f(x)$ имеет в точке a (a — число) односторонние пределы $f(a-0)$ и $f(a+0)$ и $f(a-0) = f(a+0) = b$ (b — число

или один из символов $-\infty$ или $+\infty$. Тогда $f(x)$ имеет в точке a обычный (двусторонний) предел $\lim\limits_{x\to a} = f(a) = b$.

Если односторонние пределы различны, т. е. $f(a-0) \neq \neq f(a+0)$, то не существует и предела функции при $x \to a$.

В примере 4 показано, что односторонние пределы функции $y = [x]$ не совпадают. Отсюда следует, что эта функция не имеет предела при $x \to 1$.

4.4. Бесконечно малая величина

Определение. *Бесконечно малой величиной* называется величина, предел которой равен нулю.

▽ **Пример 1.** Функция $x^2 - 4$ есть бесконечно малая величина при $x \to 2$ и при $x \to -2$. При $x \to 1$ та же функция не является бесконечно малой, ибо ее предел равен -3. ▲

▽ **Пример 2.** Функция $\sin x$ есть бесконечно малая величина при $x \to 0$ и при $x \to \pi$. При $x \to \pi/2$ та же функция не является бесконечно малой, так как ее предел равен 1. ▲

▽ **Пример 3.** Функция $\dfrac{5x+3}{x+1}$ не является бесконечно малой величиной при $x \to 1$. ▲

▽ **Пример 4.** Последовательность $\dfrac{3}{n}$ есть бесконечно малая величина, ибо предел этой последовательности равен нулю. ▲

Из определения бесконечно малой величины следует, что утверждения «число b есть предел величины y» и «разность $y - b$ есть бесконечно малая величина» равнозначны.

▽ **Пример 5.** Уравнение $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{5x+3}{x+1} = 4$ эквивалентно фразе «величина $\dfrac{5x+3}{x+1} - 4$ бесконечно мала». ▲

Из постоянных величин лишь нуль является бесконечно малой величиной.

Основные свойства бесконечно малых величин

1. *Сумма двух бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.*

Это свойство и для трех, четырех и вообще любого *неизменного* числа слагаемых бесконечно малых величин. Если число слагаемых не остается неизменным, а меняется вместе с изменением

аргумента, то свойство 1 может потерять силу. Так, если имеем n слагаемых равных $\frac{1}{n}$, то при $n \to \infty$ каждое слагаемое бесконечно мало, но сумма

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot n$$

равна 1.

2. *Произведение ограниченной величины на бесконечно малую величину есть бесконечно малая величина.*

В частности, произведение постоянной величины на величину бесконечно малую, а также произведение бесконечно малых величин есть бесконечно малая величина.

3. *Частное от деления бесконечно малой величины на переменную величину, стремящуюся к пределу,* не равному нулю, *есть бесконечно малая величина.*

Эти свойства доказываются по определению. Поскольку они интуитивно понятны и легко запоминаются, доказательства опускаем.

Связь между бесконечно большими и бесконечно малыми величинами. Из определений бесконечно большой и бесконечно малой величин следует, что если y — бесконечно большая величина, то $\frac{1}{y}$ — бесконечно малая; если y — бесконечно малая величина, то $\frac{1}{y}$ — бесконечно большая.

▽ **Пример 6.** Величина $\frac{5}{x-1}$ — бесконечно большая при $x \to$ $\to 1$. Обратная дробь $\frac{x-1}{5}$ — бесконечно мала при $x \to 1$. ▲

▽ **Пример 7.** Величина $\operatorname{tg} x$ бесконечно мала при $x \to 0$, величина $\frac{1}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{ctg} x$ бесконечно велика при $x \to 0$ (вспомните графики этих основных элементарных функций). ▲

4.5. Сравнение бесконечно малых

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые при $x \to a$. Их частное может и не быть бесконечно малым. Действительно,

если $\alpha(x) = 6\,x$ и $\beta(x) = 2\,x$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{6\,x}{2\,x} = \lim_{x\to 0} 3 = 3.$$

Более того, предел отношения двух бесконечно малых величин является неопределенной величиной $\frac{0}{0}$. В зависимости от того, какие конкретные бесконечно малые рассматриваются, этот символ может быть равен произвольному числу, или символу бесконечности. Действительно, вычислим следующие пределы отношения бесконечно малых:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\,x}{x} = \lim_{x\to 0} 5 = 5,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0.$$

В первом случае предел отношения бесконечно малых равен 5, во втором — символу бесконечности, в третьем — нулю.

Поэтому частное бесконечно малых называют *неопределенностью* вида $\frac{0}{0}$, а нахождение предела дроби называют *раскрытием неопределенности.*

Определение. Если отношение $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ двух бесконечно малых величин само бесконечно мало, то $\alpha(x)$ называется величиной *более высокого порядка малости*, чем $\beta(x)$; при этом $\beta(x)$ называется величиной *более низкого порядка малости*, чем $\alpha(x)$.

Если отношение $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ двух бесконечно малых величин стремится к конечному пределу, не равному нулю, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми *одного порядка малости.* В частности, если отношение $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ двух бесконечно малых величин стремится к 1, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными.* В этом случае пишут $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций. Пусть $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to 0$. Тогда

$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$	$\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$
$\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$	$\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$
$\ln\big(1+\alpha(x)\big) \sim \alpha(x)$	$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \cdot \ln a$
$1 - \cos \alpha(x) \sim \big(\alpha(x)\big)^2/2$	$\big(1+\alpha(x)\big)^p - 1 \sim p\,\alpha(x).$

Принцип замены эквивалентных. Если функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми при $x \to a$ и если $\alpha(x) \sim \gamma(x)$, $\beta(x) \sim \delta(x)$, то

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\gamma(x)}{\delta(x)}.$$

▽ **Пример.** С помощью принципа замены эквивалентных вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 6x}{\ln(1+3x)}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\operatorname{arctg} x^2}$.

Решение.

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 6x}{\ln(1+3x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6x}{3x} = 2$;

б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\operatorname{arctg} x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2/2}{x^2} = \dfrac{1}{2}$. ▲

4.6. Основные теоремы о пределах

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — функции, для которых существуют пределы при $x \to a$ (мы не исключаем случая $a = \infty$):

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = c.$$

Сформулируем основные теоремы о пределах.

1. *Функция не может иметь более одного предела.*

2. *Предел алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме пределов этих функций, т. е.*

$$\boxed{\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x).}$$

3. *Предел произведения двух функций равен произведению пределов этих функций, т. е.*

$$\boxed{\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x).}$$

В частности, постоянный множитель можно выносить за знак предела, т. е.

$$\boxed{\lim_{x\to a}\big(c\cdot f(x)\big)=c\cdot\lim_{x\to a}f(x).}$$

4. *Предел частного равен частному пределов, если предел делителя не равен нулю*:

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}.}$$

В случае, когда $\lim\limits_{x\to a}g(x)$ равен нулю, но $\lim\limits_{x\to a}f(x)\neq 0$, теорема остается верной, если ее истолковать в более широком смысле. Запись $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\left(\dfrac{c}{0}\right)$ (c — число, не равное нулю) следует понимать в том смысле, что

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty.$$

Таким образом, можно считать

$$\boxed{\left(\frac{c}{0}\right)=\infty.}$$

Выражение $\dfrac{c}{0}$ взято в скобки, ввиду условности этой записи.

Аналогичные записи можно ввести и для односторонних пределов:

$$\boxed{\left(\frac{c}{+0}\right)=+\infty,\qquad\left(\frac{c}{-0}\right)=-\infty,\qquad\text{при } c>0.}$$

▽ **Пример 1.** Найти пределы

$$\lim_{x\to -0}\frac{1}{x} \quad \text{и} \quad \lim_{x\to +0}\frac{1}{x}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to -0}\frac{1}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{1}{x}=\left(\frac{1}{-0}\right)=-\infty.$$

$$\lim_{x\to +0}\frac{1}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x}=\left(\frac{1}{+0}\right)=+\infty. \quad ▲$$

В случае, когда $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, теорема неприменима, так как выражение $\dfrac{0}{0}$ является неопределенным. Но неверного результата теорема не может дать и в этом случае. «Сокращать» на нуль и писать 1 вместо $\dfrac{0}{0}$, конечно, нельзя. Этот символ служит сигналом, закрывающим прямой путь подстановки и заставляющим искать путь раскрытия этой неопределенности (например, с помощью сокращения общих множителей).

5. *Если* $\lim\limits_{u\to b} f(u)=c$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$, *то предел сложной функции*

$$\boxed{\lim_{x\to a} f\big(g(x)\big)=c.}$$

6. *Если существуют конечные пределы*

$$\lim_{x\to a} f(x)=b>0, \qquad \lim_{x\to a} g(x)=c,$$

имеет место соотношение

$$\boxed{\lim_{x\to a}\big(f(x)\big)^{g(x)}=\Big(\lim_{x\to a} f(x)\Big)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=b^{\,c}.}$$

7. *Если в некоторой окрестности точки* a (*окрестностью точки* ∞ *считаем множество достаточно больших* x) *выполняется нестрогое неравенство* $f(x)\leqslant g(x)$, *то для соответствующих пределов выполнено нестрогое неравенство*:

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)\leqslant \lim_{x\to a} g(x).}$$

(Заметим, что если в окрестности точки a выполняется строгое неравенство $f(x) < g(x)$, то утверждение теоремы сохраняет свою силу, так как из строгого неравенства в пределе получается, вообще говоря, нестрогое.)

8. *Если в некоторой окрестности точки a функция $f(x)$ заключена между двумя функциями $u(x)$ и $v(x)$, имеющими одинаковый предел b при $x \to a$, то функция $f(x)$ имеет тот же предел b* :

$$u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x), \quad \lim_{x\to a} u(x) = b, \quad \lim_{x\to a} v(x) = b \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} f(x) = b.$$

□ Докажем в качестве примера первое свойство. Предположим противное, т. е. что функция $f(x)$ имеет два разных предела b и c:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \quad \lim_{x\to a} f(x) = c, \qquad b \neq c.$$

Поскольку утверждения «число b есть предел величины y» и «разность $y - b$ есть бесконечно малая величина» равнозначны, то величины

$$\alpha(x) = f(x) - b, \qquad \beta(x) = f(x) - c$$

бесконечно малы при $x \to a$. Вычитая почленно эти равенства, получим

$$\alpha(x) - \beta(x) = c - b \neq 0,$$

что невозможно, поскольку переходя в этом равенстве к пределу при $x \to a$, имеем: $0 \neq 0$. Следовательно, предположение о существовании второго предела неверно. ■

4.7. Непрерывность функции

Пусть над столом висит на резиновой нитке груз. Под действием этого груза нитка растягивается, поэтому расстояние l груза от точки подвеса нити является функцией массы груза m, т. е. $l = f(m)$, $m \geqslant 0$.

Если немного изменить массу груза, то расстояние l изменится мало. Таким образом, малым изменениям m соответствуют малые изменения l. Однако если масса груза близка к пределу прочности m_0 нити, то небольшое увеличение массы груза может вызвать разрыв нити: расстояние l скачкообразно увеличится

и станет равным расстоянию от точки подвеса до поверхности стола.

График схематически изображен на рис. 4.1. Мы видим, что на участке $[0,\ m_0)$ этот график является непрерывной (сплошной линией), а в точке m_0 он прерывается. В результате получается график, состоящий из двух ветвей. Говорят, что во всех точках, кроме m_0, функция $l = f(m)$ непрерывна, а в точке m_0 она имеет разрыв.

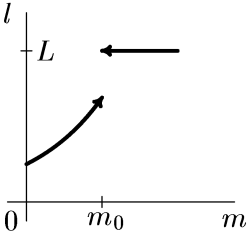


Рис. 4.1

Точки непрерывности характеризуются тем, что при малых изменениях аргумента мало меняется значение функции, а точки разрыва — тем, что в них при малых изменениях аргумента изменения функции могут быть значительными. Данное понятие непрерывности весьма далеко от точности, оно является незавершенным, описательным. Дело в том, что использованные в этом определении слова «малое изменение» никакого математического смысла не имеют.

Пусть a — точка числовой прямой, и $y = f(x)$ — функция, определенная при $x = a$. Очевидно, что если функция непрерывна, то для точек x близких к точке a, значения $f(x)$ и $f(a)$ также близки друг к другу. Смысл утверждения «если x близко к a, то $f(x)$ близко к $f(a)$» с помощью математических символов можно записать так: «если $x \to a$, то $f(x) \to f(a)$».

Определение 1. Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке a, если функция имеет конечный предел в точке a и этот предел совпадает со значением функции в этой точке, т. е.

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = f(a).}$$

Так как $\lim\limits_{x\to a} x = a$, то это равенство можно переписать в следующей форме:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x).$$

Последнее равенство означает, что для непрерывной функции символы предела и функции можно менять местами. Это дает основание сформулировать следующее правило: *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a, то при вычислении предела функции при $x \to a$, надо вместо x в выражение $f(x)$ подставить a. Полученное число и является пределом функции $f(x)$ в точке $x = a$.*

Определение 1 именуют определением непрерывности на языке предела.

Существует и другое определение непрерывности.

Дадим аргументу a приращение $\Delta x = x - a$. Тогда функция получит приращение Δy, определяемое как разность наращенного и исходного значения функции: $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a) = = f(x) - f(a)$.

Определение 2. Функция называется *непрерывной в точке* a, если она определена в этой точке и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции:

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.}$$

Это определение называют определением непрерывности на языке приращений. Оно эквивалентно предыдущему, поскольку фразы «если $x \to a$, то $f(x) \to f(a)$» и «если $(x - a) \to 0$, то $\big(f(x) - f(a)\big) \to 0$» равнозначны.

Определение 3. Функция называется *непрерывной на промежутке* X, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Теорема 1. *Основные элементарные функции непрерывны в областях их определения.*

□ Докажем для примера эту теорему для функции $y = x^2$.

Доказательство на языке пределов:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} x^2 = \lim_{x \to a} x \cdot x = \big(\lim_{x \to a} x\big) \cdot \big(\lim_{x \to a} x\big) = \\ = a \cdot a = a^2 = f(a).$$

Здесь мы воспользовались свойством: предел произведения равен произведению пределов.

Доказательство на языке приращений:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \big((a + \Delta x)^2 - a^2\big) = \\ = \lim_{\Delta x \to 0} (a^2 + 2\,a\,\Delta x + (\Delta x)^2 - a^2) = \lim_{\Delta x \to 0} (2\,a + \Delta x) \cdot (\Delta x) = \\ = \lim_{\Delta x \to 0} (2\,a + \Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x) = 2\,a \cdot 0 = 0. \quad \blacksquare$$

В предыдущем разделе были приведены графики основных элементарных функций и их свойства. В их числе для каждой функции была указана область определения $D(f)$. Поэтому мы можем считать, что область непрерывности для каждой основной элементарной функции нами уже указана (в нашем перечне свойств она совпадает с $D(f)$).

Если мы научились находить области непрерывности основных элементарных функций, то следующий вопрос, который возникает, как находить пределы элементарных функций. С помощью основных теорем о пределах может быть доказана

Теорема 2. *Все элементарные функции непрерывны в областях их определения.*

Это определение дает основание сформулировать следующее правило: *Если функция $f(x)$ элементарна и точка a принадлежит области определения этой функции, то при вычислении предела функции при $x \to a$ надо вместо x в выражение $f(x)$ подставить a. Полученное число и является пределом функции $f(x)$ в точке $x = a$* :

$$\boxed{\text{Если } f(x) \text{ — элементарна и } a \in D(f), \text{ то } \lim_{x \to a} f(x) = f(a).}$$

Заметим, что это правило верно лишь для элементарных функций. Непрерывность функции в любой точке области определения не гарантируется для неэлементарных функций. Так, функция $y = [x]$, хотя и определена на всей числовой прямой, разрывна во всех целых точках. Другая неэлементарная функция, определенная на всей числовой прямой — функция Дирихле — имеет разрыв в каждой точке.

Функция называется *ограниченной* на отрезке $[a,\ b]$, если существует такое число M, что для всех $x \in [a,\ b]$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant M$.

Теорема 3 (первая теорема Вейерштрасса). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, то она ограничена на этом отрезке.*

Теорема 4 (вторая теорема Вейерштрасса). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, то она достигает на этом отрезке наименьшего значения m и наибольшего значения M.*

Заметим, что среди значений, которые принимает функция $f(x)$ в точках *незамкнутого* промежутка, может не быть наибольшего или наименьшего значения.

Так, в интервале (1, 3) функция $y = x$ не обладает ни наименьшим значением, ни наибольшим (она могла бы принять эти значения на концах $x = 1$ и $x = 3$, но из открытого промежутка концы исключены).

ВЕ́ЙЕРШТРАСС (Weierstraβ) Карл Теодор Вильгельм (1815–1897) — немецкий математик. Начал свою деятельность в качестве учителя средней школы. С 1856 года профессор Берлинского университета. Вейерштрасс разработал систему логического обоснования математического анализа на основе построенной им теории действительных чисел. Он дал строгое доказательство основных свойств функций, непрерывных на отрезке, построил пример непрерывной функции, не имеющей производной ни в одной точке и получил ряд других результатов. Тенденция к обоснованию математики на основе чисел и требование полной строгости в значительной мере являются результатами влияния Вейерштрасса.

БОЛЬЦА́НО (Bolzano) Бернард (1781–1848) — чешский математик, философ, теолог. Занимал кафедру истории религии в Пражском университете. В 1820 году был уволен за вольнодумство и лишен права публичных выступлений, после чего работал в основном в области логики и математики.

Теорема 5 (теорема Больцано–Коши). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$ и и на концах этого отрезка принимает неравные значения*

$$f(a) = A \qquad и \qquad f(b) = B.$$

Тогда, каково бы ни было число C, лежащее между A и B, найдется такая точка с между a и b, что

$$f(c) = C.$$

Справедливость теоремы геометрически очевидна. Поскольку функция непрерывна, график состоит из одного куска. Кривая эта соединяет точки $(a,\ A)$ и $(b,\ B)$, одна из которых лежит ниже прямой $y = C$, а другая — выше ее. Поэтому кривая где-то должна пересекать прямую $y = C$. Значит, существует по крайней мере одно c, для которого $a < c < b$ и $f(c) = C$.

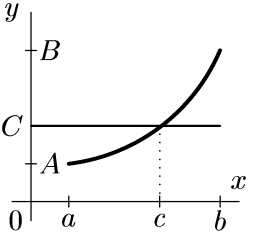


Рис. 4.2

4.8. Точки разрыва функции

Напомним, если значение функции $f(x)$ стремится к числу b_1 по мере стремления x к a со стороны меньших значений, то число b_1 называют *левосторонним пределом функции* $f(x)$ в точке $x = a$ и пишут:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = b_1 \qquad \text{или} \qquad \lim_{x\to a-0} f(x) = b_1.$$

Если $f(x)$ стремится к числу b_2 по мере стремления x к a со стороны бóльших значений, то b_2 называют *правосторонним пределом функции* $f(x)$ в точке $x = a$ и пишут:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = b_2 \qquad \text{или} \qquad \lim_{x\to a+0} f(x) = b_2.$$

Величина $|b_2 - b_1|$ называется *скачком.*

Левосторонний и правосторонний пределы объединяются наименованием «односторонний предел».

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную на интервале X, кроме, быть может, точки $a \in X$. Точка a называется точкой разрыва данной функции, если в ней функция определена, но не является непрерывной, или не определена в этой точке.

В зависимости от характера поведения функции в окрестности точки разрыва различают два основных видов разрывов:

1. Разрыв I рода — в этом случае существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to a-0} f(x) \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to a+0} f(x).$$

2. Разрыв II рода — в этом случае хотя бы один из пределов

$$\lim_{x\to a-0} f(x) \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to a+0} f(x)$$

не существует или бесконечен.

▽ **Пример.** Для заданных функций найти точки разрыва и исследовать их характер:

а) $y = \dfrac{x}{x-2}$;

б) $y = 3^{1/x}$;

в) $y = \dfrac{1}{1+5^{1/x}}$.

Решение.

а) Функция определена при всех значениях x, кроме $x = 2$. Так как эта функция является элементарной, то она непрерывна в каждой точке своей области определения. Таким образом, единственной точкой разрыва служит точка $x = 2$. Для исследования характера разрыва найдем левый и правый пределы функции при $x \to 2$:

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{x}{x-2} = \left(\frac{2}{-0}\right) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 2+0} \frac{x}{x-2} = \left(\frac{2}{+0}\right) = +\infty.$$

Следовательно, функция $\dfrac{x}{x-2}$ в точке $x = 2$ имеет бесконечный разрыв, т. е. $x = 3$ — точка разрыва второго рода.

б) Здесь функция определена при всех значениях x, кроме $x = 0$. Найдем левый и правый пределы функции при $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 2-0} 3^{1/x} = \left(3^{-\infty}\right) = 0, \qquad \lim_{x\to 2+0} 3^{1/x} = \left(3^{+\infty}\right) = +\infty.$$

Так как при x, стремящемся к нулю справа, функция имеет бесконечный предел, то $x = 0$ — точка разрыва второго рода.

в) В этом случае единственной точкой разрыва также является точка $x = 0$. Вычислим односторонние пределы функции при $x \to 0$:

$$\lim_{x\to -0} \frac{1}{1+5^{1/x}} = \frac{1}{1+0} = 1, \qquad \lim_{x\to +0} \frac{1}{1+5^{1/x}} = \left(\frac{1}{+\infty}\right) = 0.$$

Поскольку левый и правый пределы функции при $x = 0$ являются конечными, $x = 0$ — точка разрыва первого рода. ▲

Задача. Для заданных функций найти точки разрыва и исследовать их характер:

а) $y = \dfrac{1}{(x-2)(x-4)}$;

б) $y = \dfrac{1}{1-e^{1-x}}$.

Ответ:

а) $x = 2$, $x = 4$ — точки разрыва второго рода.

б) $x = 1$ — точка разрыва второго рода.

К неведомому я иду.
В дороге радость встречи,
Преодоление всех противоречий.

Индийское изречение

Глава 5
Техника вычисления пределов

5.1. Непосредственное вычисление пределов

На протяжении всей главы считается, что функция $y = f(x)$ элементарна.

При вычислении предела $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ вначале проверяют принадлежит ли точка a области определения. Если $a \in D(f)$, то предел равен значению функции $f(x)$ в точке a:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$$

(это объясняется непрерывностью элементарной функции на своей области определения).

▽ **Пример 1.** Вычислить:

а) $\lim\limits_{x \to 2}(x^3 - x)$;

б) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - x}{x - 1}$;

в) $\lim\limits_{x \to 0} \cos x$.

Решение.

а) $\lim\limits_{x \to 2}(x^3 - x) = 2^3 - 2 = 6$;

б) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - x}{x - 1} = \dfrac{2^3 - 2}{2 - 1} = 6$;

в) $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1$. ▲

Правило сохраняет силу, если $a = \infty$. Запись $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, например, означает, что когда абсолютное значение x неограниченно возрастает, функция $\dfrac{1}{x}$ стремится к нулю (это ясно из графика функции).

▽ **Пример 2.** Найти:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x$;

в) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x$.

Решение.

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = +\pi/2$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\pi/2$;

в) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$. ▲

▽ **Пример 3.** Найти $\lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{x+1}{2\,x+1}\right)^{\frac{x^2+1}{x+3}}$.

Решение.

$$\lim_{x\to1} \left(\frac{x+1}{2\,x+1}\right)^{\frac{x^2+1}{x+3}} = \left(\lim_{x\to1} \frac{x+1}{2\,x+1}\right)^{\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2+1}{x+3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,.$$ ▲

При подстановке в значение функции $f(a)$ вместо a символа бесконечности, результат может оказаться не конечным числом. Например:

$$\lim_{x\to+\infty}(x-3) = +\infty - 3, \qquad \lim_{x\to-\infty}(-3\,x) = (-3)\cdot(-\infty),$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-3}{x} = \frac{-3}{-\infty}.$$

Что считать ответом в этом случае?

При вычислении подобных пределов пользуются одним из следующих правил (в приводимых ниже формулах c означает

число):

$$+\infty + c = c + (+\infty) = +\infty + (+\infty) = +\infty,$$

$$-\infty + c = c + (-\infty) = -\infty + (-\infty) = -\infty,$$

$$(+\infty)\, c = c\, (+\infty) = (-\infty)\, (-c) = (-c)\, (-\infty) = +\infty, \text{ при } c > 0,$$

$$(-\infty)\, c = c\, (-\infty) = (+\infty)\, (-c) = (-c)\, (+\infty) = -\infty, \text{ при } c > 0,$$

$$(+\infty)\, (+\infty) = (-\infty)\, (-\infty) = +\infty,$$

$$(+\infty)\, (-\infty) = (-\infty)\, (+\infty) = -\infty,$$

$$\frac{c}{+\infty} = \frac{c}{-\infty} = 0.$$

Приведенные формулы следуют из соображений здравого смысла. Например, первая из приведенных формул по существу утверждает, что если одна из функций становится очень большой и положительной, а другая ограничена, то сумма их становится очень большой и положительной. Те же соображения приводят и к формальному доказательству: надо только вместо «очень больших» значений говорить о «бóльших любого заданного числа».

Применим эти правила для вычисления пределов, которые были оставлены без вычисления:

$$\lim_{x \to +\infty} (x - 3) = +\infty - 3 = +\infty,$$

$$\lim_{x \to -\infty} (-3\, x) = (-3) \cdot (-\infty) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-3}{x} = \frac{-3}{-\infty} = 0.$$

Соображениями здравого смысла руководствуются и при вычислении пределов от функций при $x \to \pm\infty$. Надо проследить по графику функции куда стремится значение функции, если аргумент стремится к $\pm\infty$.

▽ **Пример 4.** Вычислить:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5}{4\, x + 1}$;

б) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x$.

Решение.

а) При $x \to \infty$ знаменатель $4\,x + 1$ неограниченно растет, т. е. является величиной бесконечно большой, а обратная величина $\dfrac{1}{4\,x+1}$ — бесконечно малой. Произведение $\dfrac{1}{4\,x+1} \cdot 5$ бесконечно малой на ограниченную величину (постоянная — частный случай ограниченной величины) есть величина бесконечно малая, и предел ее при $x \to \infty$ равен нулю. Следовательно, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5}{4\,x+1} = 0$.

Этот же ответ получается при применении последнего из приведенных выше правил: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5}{4\,x+1} = \dfrac{5}{\infty} = 0$.

б) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

в) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.

Приведенные рассуждения не являются строгими. Однако они вполне достаточны для приложений и интуитивно понятны.

Как уже было отмечено ранее, выражение $\dfrac{c}{0}$ при $c \neq 0$ можно считать равным ∞:

$$\boxed{\left(\frac{c}{0}\right) = \infty.}$$

Выражение $\dfrac{c}{0}$ взято в скобки, чтобы подчеркнуть условность записи.

▽ **Пример 5.** Найти:

а) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x+4}{x-2}$;

б) $\lim\limits_{x\to0} \operatorname{ctg} x$;

в) $\lim\limits_{x\to\pi/2+0} \operatorname{tg} x$.

Решение.

а) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x+4}{x-2} = \left(\dfrac{6}{0}\right) = \infty$;

б) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{ctg} x = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{\sin x} = \left(\dfrac{1}{0}\right) = \infty;$

в) $\lim\limits_{x\to \pi/2+0} \operatorname{tg} x = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\cos x} = \left(\dfrac{1}{-0}\right) = -\infty.$ ▲

5.2. Раскрытие неопределенности вида $\frac{0}{0}$

Имеются случаи, не охватываемые правилами из предыдущего параграфа. Не существует «общей формулы» для выражения $\dfrac{0}{0}$. В самом деле, пусть $f(x) = x^2$, $g(x) = x^n$, где n — целое число. Частное этих функций $f(x)/g(x) = x^{2-n}$ при $x \to 0$ является частным бесконечно малых. Оно может стремиться к нулю (при $n = 1$), или 1 (при $n = 2$), или ∞ (при $n = 4$). Поэтому выражение $\dfrac{0}{0}$ и подобные ему называются неопределенностями. К неопределенностям относятся следующие выражения:

$$\frac{0}{0}, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad 0\cdot\infty, \qquad \infty-\infty, \qquad 1^{\infty}, \qquad \infty^{0}, \qquad 0^{0}.$$

Как для случая неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$, встретившейся при сравнении бесконечно малых, здесь для раскрытия неопределенности уже недостаточно знать лишь пределы функций $f(x)$ и $g(x)$, а нужно учесть и закон их изменения.

Примеры раскрытия неопределенностей приведены ниже.

▽ **Пример 1.** Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2 - x}{x^2 - 2x}$.

Решение. Непосредственной подстановкой вместо аргумента его предельного значения вычислить предел нельзя, поскольку получается неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$.

Разложим числитель и знаменатель на множители, чтобы сократить дробь на общий множитель, стремящийся к нулю. Нужно иметь в виду, что здесь не производится сокращение на нуль, что недопустимо. По определению предела функции аргумент x стремится к своему предельному значению, никогда не принимая этого значения (вспомним, что в определении предела по Коши $x \in (-\delta,\ 0) \cup (0,\ \delta)$); поэтому до перехода к пределу можно произвести сокращение на множитель, стремящийся к

нулю. Имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{x^2-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\,(2\,x-1)}{x\,(x-2)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\,x-1}{x-2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.\quad\blacktriangle$$

▽ **Пример 2.** Найти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5\,x+6}{3\,x^2-9\,x}$.

Решение. Пределы числителя и знаменателя при $x\to 3$ равны нулю:

$$\lim_{x\to 3}(x^2-5\,x+6)=3^2-5\cdot 3+6=0,$$

$$\lim_{x\to 3}(3\,x^2-9\,x)=3\cdot 3^2-9\cdot 3=0.$$

Разложим квадратный трехчлен в числителе на линейные множители по формуле $a\,x^2+b\,x+c=a\,(x-x_1)\,(x-x_2)$, где x_1 и x_2 — корни трехчлена. Разложив на множители и знаменатель, сократим на $(x-3)$, получим

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5\,x+6}{3\,x^2-9\,x}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\,(x-2)}{3\,x\,(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{3\,x}=\frac{3-2}{3\cdot 3}=\frac{1}{9}.\quad\blacktriangle$$

▽ **Пример 3.** Найти $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{x^3-1000}{x^3-20\,x^2+100\,x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 10}\frac{x^3-1000}{x^3-20\,x^2+100\,x}=\lim_{x\to 10}\frac{(x-10)\,(x^3+10\,x+100)}{x\,(x-10)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 10}\frac{x^2+10\,x+100}{x\,(x-10)}=\left(\frac{300}{0}\right)=\infty.\quad\blacktriangle$$

▽ **Пример 4.** Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$.

Решение. Пределы числителя и знаменателя при $x\to 0$ равны нулю. Умножим числитель и знаменатель на сопряженный знаменателю множитель $\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}$ и затем, сократив дробь на x, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\,(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\,)}{(\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}\,)(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\,)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\,(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\,)}{-2\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}}{-2}=-\sqrt{5}\,.\quad\blacktriangle$$

▽ **Пример 5.** Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-x^2}{\sqrt{7+x}-3}$.

Решение. Когда $x\to 2$, числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю, получается неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Желая избавится от иррациональности в знаменателе, преобразуем данное выражение:

$$\frac{4-x^2}{\sqrt{7+x}-3}=\frac{(4-x^2)(\sqrt{7+x}+3)}{(\sqrt{7+x}-3)\,(\sqrt{7+x}+3)}=$$

$$=\frac{(4-x^2)(\sqrt{7+x}+3)}{7+x-9}=\frac{(2-x)\,(2+x)\,(\sqrt{7+x}+3)}{x-2}=$$

$$=-(2+x)\,(\sqrt{7+x}+3).$$

Перейдя к пределу, получим

$$\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{\sqrt{7+x}-3}=-\lim_{x\to 2}(2+x)\,(\sqrt{7+x}+3)=-4\cdot 6=-24.\quad ▲$$

В предыдущих примерах неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$ раскрывалась путем выделения в числителе и знаменателе общего множителя. Однако этот прием «срабатывает» не во всех случаях. Например, в случае предела $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$ неясно, как выделить общий множитель. Этот предел можно вычислить с помощью принципа замены эквивалентных. Вычислим этот предел другим способом — сведением к пределу

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=1,}$$

называемому 300 лет назад *первым замечательным пределом.*

Доказательство равенства $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ нетрудно и опирается на геометрические свойства тригонометрических функций. Здесь оно не приводится.

Заметим, что выражение $\dfrac{0}{0}$ взято в скобки, поскольку писать $\dfrac{0}{0}=1$ нельзя! Скобки в записи $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ подчеркивают ее условность. Равенство $\left(\dfrac{0}{0}\right)=1$ означает, что в данном конкретном

случае неопределенность раскрыта и значение соответствующего предела равно единице.

▽ **Пример 6.** Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}5\cdot\frac{\sin 5x}{5x}=5\cdot\lim_{5x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=5\cdot 1=5. \quad ▲$$

▽ **Пример 7.** Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10\,x}{x^2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 10\,x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 5x}{x^2}=$$

$$=2\cdot 25\cdot\lim_{5x\to 0}\frac{\sin^2 5x}{(5x)^2}=50\cdot 1^2=50. \quad ▲$$

Задача. Найти пределы, приведенные в примерах 6 и 7 с помощью принципа замены эквивалентных.

5.3. Раскрытие неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$

▽ **Пример 1.** Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\,x^5+10\,x}{5\,x^4+x^3}$.

Решение. При $x\to\infty$ числитель и знаменатель — величины бесконечно большие. Поэтому при непосредственной подстановке символа ∞ вместо x получаем выражение ∞/∞, которое представляет собой неопределенность. Для вычисления предела этой функции нужно и числитель и знаменатель разделить на x^4 (наивысшую степень аргумента в знаменателе):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2\,x^5+10\,x}{5\,x^4+x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\,x+10/x^3}{5+1/x}=$$

$$=\left(\frac{2\cdot\infty+10/\infty^3}{5+1/\infty}\right)=\left(\frac{\infty+0}{5+0}\right)=\infty. \quad ▲$$

▽ **Пример 2.** Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\,x^{100}+10\,x}{5\,x^{100}+x^{99}}$.

Решение. При непосредственной подстановке символа ∞ вместо x получаем неопределенность вида ∞/∞. Для вычисления предела этой функции нужно и числитель и знаменатель разделить на x^{100} (наивысшую степень аргумента в знаменателе):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2\,x^{100}+10\,x}{5\,x^{100}+x^{99}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+10/x^{99}}{5+1/x}=\frac{2+0}{5+0}=\frac{2}{5}$$

(при $x\to\infty$ слагаемые $10/x^{99}$ и $1/x$ — величины бесконечно малые и, следовательно, их пределы равны нулю). ▲

▽ **Пример 3.** Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\,x^{10}+10\,x^2}{5\,x^{11}+x^9}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2\,x^{10}+10\,x^2}{5\,x^{11}+x^9}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2/x+10/x^9}{5\,+1/x^2}=\frac{0+0}{5\,+0}=\frac{0}{5}=0.\quad\blacktriangle$$

Вообще, предел отношения полиномов при $x\to\infty$ равен отношению коэффициентов при старших членах, если степени числителя и знаменателя одинаковы, и равен нулю или бесконечности, если степень числителя соответственно меньше или больше знаменателя.

▽ **Пример 4.** Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{2\,x+1}\right)^{\frac{x^2+1}{x+3}}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2\,x+1}\right)^{\frac{x^2+1}{x+3}}=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2\,x+1}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x+3}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty}=0.\ \blacktriangle$$

▽ **Пример 5.** Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\sqrt{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3\,x-2}+\sqrt[3]{2\,x-3}}$.

Решение. В подобных примерах полезно иметь в виду, что функция $f(x)=\sqrt[m]{p_n(x)}$, где $p_n(x)$ — многочлен степени n, стремится к бесконечности так же, как и функция $\sqrt[m]{x^n}$. Это позволяет выделить высшую степень x, входящую в данное выражение, и разделить числитель и знаменатель на эту степень x. В данном примере надо делить на $\sqrt{x}$; тогда получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3\,x-2}+\sqrt[3]{2\,x-3}}=$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2 + 5/\sqrt[10]{x^3}}{\sqrt{3 - 2/x} + \sqrt[3]{(2\,x - 3)/x^{\frac{3}{2}}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}. \quad \blacktriangle$$

5.4. Раскрытие неопределенностей вида $\infty - \infty$ и $0 \cdot \infty$

Неопределенности вида $0 \cdot \infty$ и $\infty - \infty$ путем преобразования можно привести к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, которая раскрывается уже известными способами.

Покажем на примерах, как находятся такие пределы.

▽ **Пример 1.** Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{x^2}{x^2-1}\right)$.

Решение. Произведем вычитание дробей, получим

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{x^2}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x\,(x+1) - x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1 - 1/x^2} = \frac{0}{1-0} = 0. \quad \blacktriangle$$

▽ **Пример 2.** Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + 6\,x + 5} - x\right)$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + 6\,x + 5} - x\right) = (\infty - \infty) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 6\,x + 5} - x\right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + 6\,x + 5} + x\right)}{\sqrt{x^2 + 6\,x + 5} + x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 6\,x + 5 - x^2}{\sqrt{x^2 + 6\,x + 5} + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 6\,x + 5 - x^2}{\sqrt{x^2 + 6\,x + 5} + x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{6\,x + 5}{\sqrt{x^2 + 6\,x + 5} + x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{6 + 5/x}{\sqrt{1 + 6/x + 5/x^2} + 1} = \frac{6}{\sqrt{1} + 1} = 3. \quad \blacktriangle$$

▽ **Пример 3.** Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x \sin \frac{1}{x}\right)$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = (\infty\cdot 0) = \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1$$

(сделали замену $y = \dfrac{1}{x}$). ▲

Задача. Найти $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

Ответ: $2/\pi$.

5.5. Раскрытие неопределенностей вида 1^∞, ∞^0 и 0^0

Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$, где

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Может показаться, что неограниченное возрастание показателя степени n должно повлечь неограниченное возрастание целочисленной функции $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Но рост показателя компенсируется тем, что основание $1+\dfrac{1}{n}$ стремится к 1. В результате последовательность $\{a_n\}$ оказывается возрастающей и ограниченной. А всякая ограниченная и возрастающая последовательность имеет конечный предел. Предел, к которому стремится $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, при $n\to\infty$ обозначается e :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Обозначением числа e и его широким применением во многих вопросах математики мы обязаны Эйлеру. Это число иррационально и с точностью до шестой значащей цифры равно 2,71828:

$$e \approx 2{,}71828.$$

Функция $f(n) = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ имеет пределом число e не только при целочисленных значениях n, но и тогда, когда n стремится к бесконечности, пробегая числовую прямую непрерывно. Более того, аргумент n может принимать как положительные, так и

отрицательные значения, лишь бы n неограниченно росло по абсолютному значению. Чтобы отметить это обстоятельство, заменим букву n буквой x и напишем:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

или короче

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.}$$

Этот предел часто используется в математике для раскрытия неопределенности 1^∞ и именуется *вторым замечательным пределом.*

Э́ЙЛЕР (Euler) Леонард (1707–1783) — *математик, механик и физик. Родился в Базеле, в Швейцарии, и учился там у Иоганна Бернулли. Он был членом Академий в Берлине и в Санкт-Петербурге, и прожил в России в совокупности 31 год. Был похоронен в Петербурге, оставив своей второй родине, наряду с выдающимися трудами, многочисленных потомков, представители которых носят и сегодня славную фамилию Эйлер в Петербурге и в Москве.*

Одной из отличительных сторон творчества Эйлера является его исключительная продуктивность. За первые 50 лет издательской деятельности Российской Академии наук (с 1729 до 1780 г.) Эйлеру принадлежит 60% всех ее публикаций по чистой и прикладной математике. Последние 13 лет жизни он работал в полной слепоте, диктуя свои работы ученикам. В его трудах многие математические формулы и символика впервые получают современный вид (например, ему принадлежат обозначения для e и π). Сфера научных интересов Эйлера всеобъемлюща: его труды — это энциклопедия точных наук XVIII века. Свыше 800 его научных работ составят 72 больших тома все еще незавершенного «Полного собрания трудов», издаваемого в Швейцарии с 1911 г.

Российской Академией наук учреждена золотая медаль имени Эйлера.

▽ **Пример 1.** Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^x$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\,x)^{5/x}$.

Решение.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^x = (1^\infty) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x/5}\right)^{(x/5)\cdot 5} =$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x/5}\right)^{(x/5)}\right]^5 = \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x/5}\right)^{(x/5)}\right]^5 = e^5;$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{5/x} = (1^\infty) = \lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{(2x)}\right)^{5\cdot(1/x)\cdot(2/2)} =$

$$= \lim_{1/(2x)\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{(2x)}\right)^{1/(2x)}\right]^{10} =$$

$$= \left[\lim_{1/(2x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{(2x)}\right)^{1/(2x)}\right]^{10} = e^{10}. \quad \blacktriangle$$

▽ **Пример 2.** Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{4x+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}$.

Решение.

а) При $x\to\infty$ основание степени $\frac{2x-1}{2x+3}$ стремится к единице, а показатель $4x+1$ стремится к бесконечности. Следовательно, имеем неопределенность вида 1^∞. Представим основание в виде суммы единицы и некоторой бесконечно малой величины:

$$\frac{2x-1}{2x+3} = \frac{2x+3-4}{2x+3} = 1+\frac{-4}{2x+3},$$

тогда

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{4x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{2x+3}\right)^{4x+1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{(2x+3)/(-4)}\right)^{\frac{2x+3}{-4}\cdot\frac{(-4)\cdot(4x+1)}{(2x+3)}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{(2x+3)/(-4)}\right)^{\frac{2x+3}{-4}}\right]^{\frac{-16x-4}{2x+3}} =$$

$$= \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{(2x+3)/(-4)}\right)^{(2x+3)/(-4)}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-16x-4}{2x+3}} = e^{-8};$$

б) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x} = (1^{\infty}) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{-x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{1+x}{x}\right)^{x}\right]^{-1} = \left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)^{x}\right]^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}. \quad \blacktriangle$$

Число e во многих случаях выгодно брать за основание логарифмов. Логарифм от x с основанием e носит название натурального логарифма и обозначается $\ln x$. Показательная функция e^x широко используется в науке и называется экспоненциальной. Другое обозначение этой функции — $\exp x$.

Неопределенности вида 1^{∞}, ∞^0 и 0^0 можно свести к неопределенности вида $0\cdot\infty$ следующим образом:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{\,g(x)} = \lim_{x\to a} e^{\,g(x)\cdot\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot\ln f(x)} = e^{0\cdot\infty}.$$

▽ **Пример 3.** Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/(\ln x)}$;

б) $\lim\limits_{x\to+0} x^{3/(\ln x)}$.

Решение.

а) $$\lim_{x\to+\infty} x^{1/(\ln x)} = (\infty^0) = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x\,\frac{1}{\ln x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} 1} = e;$$

б) $$\lim_{x\to+0} x^{3/(\ln x)} = (0^{\,0}) = e^{\lim\limits_{x\to+0}\ln x\,\frac{3}{\ln x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} 3} = e^3. \quad \blacktriangle$$

Замечание. Для раскрытия неопределенностей иногда удобнее оказывается метод Лопиталя–Бернулли, основанный на использовании производной. Поэтому после изучения производной будут рассмотрены новые примеры вычисления пределов.

5.6. Компьютерное вычисление пределов

В случае необходимости пределы могут быть вычислены на компьютере с помощью математических пакетов MathCad, Maple

и других. Для вычисления в Maple существуют команда

```
limit(expr,x=val,dir) ,
```

где `expr` — выражение, для которого вычисляется предел (функции или последовательности), `x=val` — значение точки, для которой вычисляется предел, а `dir` — необязательный параметр, который может принимать следующие значения: `left` (предел слева), `right` (предел справа).

Напомним, что при загрузке пакета Maple автоматически загружается новый рабочий лист, на котором выводится приглашение для ввода команды `>`. В командную строку можно записать любое алгебраическое выражение, написанное согласно принятым в Maple правилам. Если в конце выражения поставить символ `;`, то при нажатии клавиши Enter или кнопки с восклицательным знаком на инструментальной панели, выражение будет обработано программой, а результат выведен на монитор.

▽ **Пример 1.** Найти с помощью Maple предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{4x+1}$ (пример 2а п. 5.5).

Решение.

Вводим команду

```
>limit(((2*x-1)/(2*x+3))^(4*x+1),x=infinity); ,
```

нажимаем клавишу Enter и получаем ответ: e^{-8}. ▲

▽ **Пример 2.** Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\,\sin(n!)}{n^2+1}$.

Решение.

```
>limit(n*sin(n!)/(n^2+1),n=infinity); .
```

Ответ: 0. ▲

▽ **Пример 3.** Найти односторонние пределы $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{1}{1+5^{1/x}}$ и $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1}{1+5^{1/x}}$ (см. с. 75).

Решение.

```
>limit(1/(1+5^(1/x)),x=0,left); .
```

Ответ: 1.

```
>limit(1/(1+5^(1/x)),x=0,right); .
```

Ответ: 0. ▲

Для вычисления суммы ряда используется команда

```
>sum(expr,var=var1..var2); ,
```

где `expr` — выражение, зависящее от переменной суммирования `var`, а `var1..var2` — пределы суммирования.

▽ **Пример 4.** Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n}$ (см. с. 53).

Решение.

```
sum(3/(10^n),n=1..infinity); .
```

Ответ: $\frac{1}{3}$. ▲

▽ **Пример 5.** Найти сумму геометрического ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, $|q| < 1$ (см. с. 53).

Решение.

```
>sum(q^n),q=0..infinity); .
```

Ответ: $\frac{1}{1-q}$. ▲

В математике следует помнить не формулы, а процессы мышления.

В. Ермаков

Глава 6
Использование понятий функции и предела в социально-экономической сфере

6.1. Функции в социологии и психологии

▽ **Пример 1 (Модели включенности в малую дискуссионную группу)** [1]. В моделях включенности в малую дискуссионную группу единицей анализа являются коммуникативные действия. Действие определяется как наименьший сегмент поведения, который может быть отнесен к одной из 12 категорий, таких как «проявляет солидарность» (поднимает статус других, оказывает помощь, поощряет), «советует» (руководит, учитывает автономию других), «ориентирует» (рассказывает, вносит ясность, подтверждает), «не соглашается» (саботирует, проявляет педантизм, не помогает), а также ряда других. Все группы ранжируются по частоте их действий. Для большого числа групп одинакового размера n эмпирически (на основе опытных данных) вычисляется $N_n(r)$ — частота действий индивида r-го ранга в группе размера n.

Если бы $N(r)$ была близка к постоянной величине, то это бы означало «равенство» в количестве действий индивидов. Однако многочисленные исследования социальных психологов показывают, что в частоте действий индивидов наблюдаются значительные различия. В реальных группах действия распределены неравномерно среди их членов. Зависимость частоты действий индивида от его ранга оказывается гиперболической:

$$\boxed{N_n(r) = \frac{c_n}{r}, \quad r = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,}$$

где c_n — эмпирический коэффициент для группы размера n.

[1] См. [31, с. 191–192].

Эта гиперболическая зависимость в социальной психологии носит название «закона Ципфа».

Иногда вместо частоты $N_n(r)$ удобнее рассматривать долю действий $p_n(r) = N_n(r)/N$, где N — общее количество действий в группе.

Ф. Стефан и Е. Мишлер [1] предложили следующую аналитическую зависимость для доли действий:

$$p_n(r) = a(n) \cdot b^{r-1}(n),$$

где $a(n)$ и $b(n)$ — эмпирические коэффициенты.

Для своих данных, собранных на студенческих группах численностью от 4 до 12 членов, Стефан и Мишлер получили следующие значения этих коэффициентов:

$$a(n) = 234/(n+4), \quad \text{и} \quad b(n) = 0{,}522 + 0{,}0172\, n.$$

С этими оцененными коэффициентами модель показала хорошее согласие с эмпирическими данными (действия, направленные к лидеру или от него, исключались). ▲

▽ **Пример 2 (Модель групповой продуктивности).** Обыденная точка зрения на связь между научной продуктивностью и размером научной группы такова: чем меньше группа, тем меньше «бездельников», тем более группа продуктивна. По мнению большинства людей уменьшение группы, ее дробление способствует большей продуктивности каждого члена группы. Однако многочисленные исследования социологов не подтверждают это мнение. Обыденное мнение верно «с точностью до наоборот». Увеличение научных групп способствует их большей продуктивности. Более того, продуктивность группы растет при ее увеличении экспоненциально. А. И. Яблонским [2] была предложена следующая модель:

$$p(n) = p(1)\, e^{\alpha(n-1)},$$

где n — число индивидов в научном коллективе; $p(n)$ — его продуктивность; $p(1)$ — продуктивность при $n = 1$.

В этой модели продуктивность группы измерялась отношением c/n, где c — число ссылок на работы организации, в которой

[1] См.: *Stephan F., Mishler E. G.* The distribution of participation in small groups: an exponential approximation. //Amer. Soc. Rev. 1952. V. 17, № 5. P. 482–608.

[2] См.: *Яблонский А. И.* Модели и методы математического исследования науки. М.: ИНИОН АН СССР, 1977. С. 89–90.

работает данная группа. Вопреки традиционной точке зрения эта модель предсказывает, что продуктивность является возрастающей функцией размера группы. ▲

6.2. Функции в экономике

В экономике многие зависимости могут быть заданы как функции одной переменной $y = f(x)$.

Наличие функциональных зависимостей позволяет использовать для решения экономических проблем методы математического анализа. В качестве примеров функциональных зависимостей можно привести следующие функции, имеющие смысл в некоторой области значений аргумента:

1. Функция спроса от цены товара. Обозначим через x цену товара, через y — спрос на товар. Тогда функцию спроса часто можно выразить аналитически (т. е. в виде формулы):

$$y = f(x).$$

Например,

$$y = \frac{200}{x+2}, \qquad y = e^{-3x}.$$

2. Функция цены от спроса товара. Если x — спрос на товар, y — цена товара, то $y = f(x)$. Например, $y = 3\,x^{-0{,}8}$.

3. Суммарная выручка, равная произведению количества проданного товара на цену товара, тоже является функцией спроса, если цена — функция спроса.

Например, если x — спрос, цена $\frac{100}{x+1}$, то выручка $\frac{100x}{x+1}$.

4. Суммарные издержки производства F и средние (удельные) издержки производства (себестоимость) f — функции от объема производства x: $F = F(x)$, $f(x) = F(x)/x$.

Например, $F(x) = 5x + 300$, $f(x) = 5 + 300/x$.

5. Сумма денежного вклада в сбербанке y — функция от времени x, которое хранится вклад: $y = y(x)$.

Например, $y = 100\,(1{,}03)^x$.

6. Функция полезности (функция предпочтений) — в широком смысле зависимость полезности, т. е. результата, эффекта некоторого действия от уровня (интенсивности) этого действия.

В некоторых экономических задачах, например, в задачах о денежных вкладах в сбербанке, возникает необходимость рассчитать так называемые «сложные проценты».

Мы говорим, что имеем дело со сложными процентами в том случае, когда величина в конце каждого этапа времени испытывает изменение на определенное число процентов, причем каждый раз начисление процентов происходит по отношению к тому значению рассматриваемой величины, которое образовалось в конце предыдущего этапа времени.

Рассмотрим случай, когда в конце каждого этапа времени начисляется одно и тоже постоянное количество процентов p%.

Некоторая величина A, исходное значение которой A_0, в конце первого этапа будет равна $A_1 = A_0 + \frac{p}{100} A_0 = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$.

В конце второго этапа — $A_2 = A_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$.

В конце третьего этапа — $A_3 = A_2 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$,

и т. д.

Ясно, что в конце n-го этапа

$$\boxed{A_n = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}.$$

Эта формула показывает, что величина A растет (или убывает, если $p < 0$) в геометрической прогрессии, первый член которой равен A_0 , а знаменатель — величина $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$.

▽ **Пример 1.** Определить сумму, которую получит вкладчик через 3 года, вкладывая 10 денежных единиц под сложный процент, ставка которого 3% .

Решение. Зависимость суммы A от количества лет n, которое хранится вклад, первоначально равный A_0 , определяется формулой

$$A = A_0 \ (1 + 0{,}03)^x = A_0 \, (1{,}03)^x.$$

В данном случае $A = 10 \, (1{,}03)^3 = 10{,}91927 \approx 11$ ден. ед. ▲

▽ **Пример 2.** Вычислить, в какую сумму обратилась бы копейка в 2002 году, если бы ее положили в сберегательный

банк в начале нашей эры под 5% годовых? Предполагается, что денежные реформы не проводятся и нет инфляции.

Решение. Согласно приведенной выше формуле

$$A = A_0(1 + 0{,}05)^n = (1{,}05)^{2002}.$$

К концу 2002 года копейка обратиться в $(1{,}05)^{2002}$ копеек. 2^{40} копеек — это приблизительно десять миллиардов рублей. Наша сумма, однако, в 2^{103} раза больше; точнее она выражается числом, состоящим из 49 цифр. Значит, речь идет о сумме, которая намного превосходит все денежные запасы земного шара.

Этот результат показывает, что денежные реформы неизбежны. ▲

6.3. Пределы в социально-экономической сфере

▽ **Пример 1.** Экспериментально была установлена зависимость $y = 200/(x + 2)$ между ценой одного из товаров x и спроса на него y. Исследовать поведение функции спроса от цены товара $y = 200/(x + 2)$ при неограниченном увеличении цены ($x \to \to \infty$).

Решение.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{200}{x+2} = \frac{200}{\infty} = 0.$$

Таким образом, при неограниченном росте цен спрос приближается к нулю. ▲

▽ **Пример 2.** В п. 6.1 была рассмотрена модель групповой продуктивности

$$p(n) = p(1)\, e^{\alpha(n-1)},$$

где n — число индивидов в естественно-научном коллективе; $p(n)$ — его продуктивность; $p(1)$ — продуктивность при $n = 1$. Найдем продуктивность естественно-научного коллектива при неограниченном увеличении его членов ($n \to \infty$):

$$\lim_{n\to\infty} p(n) = \lim_{n\to\infty} p(1)\, e^{\alpha(n-1)} = \infty.$$

Предел равен бесконечности. Отсюда следует, что не существует оптимального размера группы с наибольшей продуктивностью. ▲

▽ **Пример 3.** Экономические исследования показывают, что спрос y на товары первой необходимости и спрос z на предметы

роскоши зависят от дохода x следующим образом [1]):

$$y(x) = \frac{b_1\,(x - a_1)}{x - c_1} \qquad x > a_1,$$

$$z(x) = \frac{b_2\,x\,(x - a_2)}{x - c_2} \qquad x > a_1, \quad a_2 > a_1,$$

где a_1, a_2 — уровни доходов, при которых начинается приобретение тех или иных товаров.

Функции $y(x)$ и $z(x)$ называются функциями Л. Торнквиста.

Найдем как меняются $y(x)$ и $z(x)$ при $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{b_1\,(x - a_1)}{x - c_1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{b_1\,(1 - a_1/x)}{1 - c_1/x} = b_1,$$

$$\lim_{x\to\infty} z(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{b_2\,x\,(x - a_1)}{x - c_1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{b_2\,x\,(1 - a_1/x)}{1 - c_1/x} = \infty.$$

Таким образом, при неограниченном увеличении доходов спрос на товары первой необходимости растет до определенного предела, равного b_1. Миллионеры не покупают для себя хлеба больше, чем съедят. Поэтому число b_1 называется уровнем насыщения.

Спрос же на предметы роскоши не имеет уровня насыщения. Он растет даже при неограниченном росте доходов.

Как видно из приведенных примеров, многие социально-экономические закономерности удается увидеть с помощью предельного перехода. Именно поэтому приобретение навыков вычисления пределов является необходимым и включено в программу по математике для экономистов, социологов и психологов.

6.4. Непрерывное начисление процентов

Большую роль в социально-экономической сфере играет второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Пусть сбербанк выплачивает в год 2% от суммы вклада. Если 1 января положить в банк 100 у. е. (условных денежных единиц), то в конце года на них будет начислено дополнительно 2 у. е. Но если 1 июля взять весь вклад обратно, то процентов будет начислено

[1]) См. [20, с. 136].

не 2 у. е., а только половина этой суммы, т. е. 1 у. е. Если изъять вклад 1 апреля, то процентов будет получено только 0,5 у. е.

Сбербанки начисляют проценты только в конце года или при полном изъятии вклада. Поэтому вместо того, чтобы вложить 1 января 100 у. е. и истребовать их в конце года, оказывается выгоднее (считаем, что плата за оформление нового вклада существенно меньше величины вклада), например, 1 июля изъять весь вклад и вложить его снова. В самом деле, в первом случае в конце года будет получено 102 у. е. Во втором же случае 1 июля будет получено 101 у. е., но на вторую половину года будет вложен вклад не в 100 у. е., а в 101 у. е., на которые и будут начислены проценты. Именно 1% от 101 составит 1,01, т. е. всего будет в конце года получено 102,01 у. е.

Еще выгоднее изымать и снова вносить вклад каждый месяц, каждую неделю, каждый день, каждый час и т. д. В действительности за дробную часть дня сбербанки процентов не начисляют. Но в математической схеме можно себе представить процесс учащения изъятий и внесений вклада беспредельным.

Согласно формуле

$$A_n = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n,$$

полученной в п. 6.2, при ежегодном приросте $p\,\%$, процент начисления за $\dfrac{1}{m}$-ю часть года составит $\dfrac{p}{m}\,\%$, а размер вклада за n лет при $m \cdot n$ начислениях составит

$$A_n(m) = A_0 \left(1 + \frac{p}{100\,m}\right)^{mn}.$$

Таким образом, общая сумма вклада в конце года, если проценты начислялись по истечении полугода, составит

$$A_1(2) = A_0 \left(1 + \frac{p}{200}\right)^2.$$

Если проценты будут начисляться поквартально, то сумма вклада в конце года составит

$$A_1(4) = A_0 \left(1 + \frac{p}{200}\right)^4;$$

если ежемесячно, то

$$A_1(12) = A_0 \left(1 + \frac{p}{1200}\right)^{12}.$$

На практике часто бывает, что какая-либо величина испытывает приращения не скачкообразно, а меняется непрерывно, и ее изменение за этап составляет $p\,\%$.

Закон изменения этой величины можно найти из представления для $A_n(m)$, неограниченно увеличивая число m (число подэтапов).

Вычислим предельное значение величины $A_n(m)$ при $m \to \infty$ в конце n-го этапа:

$$A_n = \lim_{m\to\infty} A_0 \left(1 + \frac{p}{100\,m}\right)^{mn}.$$

Таким образом, задача о непрерывном начислении процентов приводит к необходимости использования второго замечательного предела:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

С помощью этого предела получаем, что

$$A_n = \lim_{x\to\infty} A_0 \left(1 + \frac{p}{100\,m}\right)^{mn} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left[A_0 \left(1 + \frac{p}{100\,m}\right)^{\frac{100\,m}{p}}\right]^{\frac{p\cdot n}{100}} = A_0\, e^{\frac{p\,n}{100}}.$$

Поскольку количество лет n в этой формуле может быть и дробным числом, обозначим его через t. Тогда получим

$$\boxed{A(t) = A_0\, e^{\frac{p\,t}{100}}.}$$

Полученная формула непрерывного начисления процентов выражает показательный (экспоненциальный) закон роста (при $p > 0$) или убывания (при $p < 0$).

Погрешность вычисления суммы вклада по формуле непрерывного начисления процентов по сравнению с формулой сложных процентов, начисляемых ежегодно ($m = 1$), при процентной ставке $p = 5\%$ составляет около 2,5%.

Погрешность вычисления суммы вклада по формуле непрерывного начисления процентов по сравнению с формулой сложных процентов, начисляемых ежедневно ($m = 365$), при процентной ставке $p = 5\%$ является более меньшей и составляет сотые доли процента.

Конечно, нельзя себе представить, чтобы кто-либо изымал и обратно вносил свой вклад в сбербанк не только бесконечно часто, но даже делал это один раз в год для увеличения процентной суммы. В практических финансово-кредитных операциях непрерывное начисление процентов применяется крайне редко. Однако оно оказывается весьма эффективным при анализе сложных финансовых проблем, в частности при обосновании и выборе инвестиционных решений и при анализе инфляционных процессов.

▽ **Пример.** Пусть темп инфляции составляет 20 % в год. Тогда реальная стоимость хранящихся дома денежных сбережений уменьшается. Насколько она уменьшится за месяц?

Решение. Применение формулы начисления непрерывных процентов дает

$$A(1/12) = A_0\, e^{\frac{-20\cdot 1/12}{100}} = A_0\, e^{-1/60} \approx 0{,}98 \cdot A_0,$$

где A_0 — хранящаяся дома денежная сумма.

Таким образом, инфляция за месяц уменьшит реальную стоимость денежной заначки приблизительно на 2%. ▲

Полезна формула непрерывного начисления процентов и в демографии. Закон показательного роста позволяет прогнозировать изменения в составе населения, динамику роста трудоспособного населения, соотношение городского и сельского населения, текучесть рабочей силы и т. п.

Некоторые другие применения показательного закона роста будут рассмотрены также при изучении дифференциальных уравнений.

6.5. Паутинообразная модель рынка и ряд

Будем предполагать, что производители зерна определяют предложение s (*supply*) товара в текущем периоде на основе цены p (*price*), установившейся в предшествующем периоде, а спрос d (*demand*) на товар изменяется в зависимости от цены в данном периоде. Предположение о запаздывании предложения от цены вполне объяснимо. Действительно, решение об объеме производства принимается с учетом текущих цен, но производственный цикл имеет определенную продолжительность, и соответствующее этому решению предложение появится на рынке по окончании данного цикла.

Если спрос и предложение линейно зависят от p, то динамика цены описывается следующими уравнениями:

$$s(t) = a\,p(t-1) + b, \qquad d(t) = -m\,p(t) + n.$$

Здесь $n > b > 0$, так как при нулевой цене спрос превышает предложение; $a > 0$, так как функция предложения возрастающая; $m > 0$, так как функция спроса убывающая.

Таким образом, если спрос $s(t)$ равен предложению $d(t)$, то получим следующее рекуррентное соотношение:

$$p(t) = \frac{n-b}{m} - \frac{a}{m}\,p(t-1).$$

Последовательно применяя это соотношение, находим:

$$p(1) = \frac{n-b}{m} - \frac{a}{m}\,p(0);$$

$$p(2) = \frac{n-b}{m} - \frac{a}{m}\left(\frac{n-b}{m} - \frac{a}{m}\,p(0)\right) = \\ = \frac{n-b}{m}\left(1 - \frac{a}{m}\right) + \left(\frac{a}{m}\right)^2 p(0);$$

$$p(3) = \frac{n-b}{m} - \frac{a}{m}\left[\frac{n-b}{m}\left(1 - \frac{a}{m}\right) + \left(\frac{a}{m}\right)^2 p(0)\right];$$

$$\ldots;$$

$$p(t) = \frac{n-b}{m} \cdot \left[1 - \frac{a}{m} + \left(\frac{a}{m}\right)^2 + \ldots + \right. \\ \left. + (-1)^{t-1}\left(\frac{a}{m}\right)^{t-1}\right] + (-1)^t\left(\frac{a}{m}\right)^t \cdot p(0).$$

Выражение в квадратных скобках есть сумма первых t членов геометрической прогрессии:

$$S_t = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{t-1} = \frac{1-q^{\,t}}{1-q},$$

где $q = -\dfrac{a}{m}$. Отсюда получаем выражение для цены $p(t)$ в произвольный момент времени t :

$$p(t) = \frac{n-b}{m} \cdot \frac{1-q^t}{1-q} + q^t \cdot p(0).$$

Следовательно, динамика цен носит колебательный характер.

Пусть $t \to \infty$. Если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{t\to\infty} S_n = S = \dfrac{1}{1-q}$ и

$$p(t) \to \frac{n-b}{m} \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{n-b}{m+a},$$

т. е. при $t \to \infty$ и $a/m < 1$ равновесие устойчиво и цена стремится к своему равновесному значению

$$\overline{p} = \frac{n-b}{m+a}.$$

Если $|q| > 1$, то $p(t) \to \infty$ (равновесие неустойчиво). При $|q| = 1$, т. е. при $a = m$, значения $p(t)$ чередуются вокруг равновесного значения $\overline{p}$.

Заметим, что в реальности при $\dfrac{a}{m} > 1$ бесконечно возрастающих колебаний не происходит, так как при больших отклонениях от равновесия линейные зависимости спроса и предложения от цены становятся нереалистичными. В более реалистической нелинейной модели устанавливаются колебания большой, но конечной амплитуды.

Раздел II
Дифференциальное исчисление

Там, где прежде были границы науки, там теперь ее центр.

Г. Лихтенберг

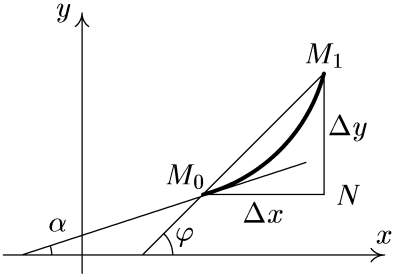
Глава 7
Производная

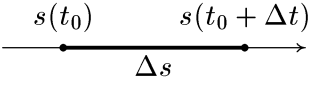
7.1. Задачи, приводящие к понятию производной

1. Тангенс угла наклона касательной. Пусть дана непрерывная кривая $y = f(x)$ и необходимо найти тангенс угла наклона касательной к этой кривой в точке $M(x_0,\ y_0)$.

Прежде всего необходимо выяснить, что мы будем понимать под касательной к кривой. В школьном курсе касательную к окружности определяют как «прямую, имеющую с кривой лишь одну общую точку». Но это определение имеет частный характер, не вскрывая существа. В общем случае касательную нельзя определять как прямую, имеющую с кривой одну общую точку. В самом деле, ось Oy имеет с кривой $y = \sin x$ общую точку, но не является касательной к ней. А прямая $y = 1$ имеет с той же кривой $y = \sin x$ бесконечное число общих точек, в которых она касается кривой. Поэтому для определения касательной к кривой должен быть реализован другой подход.

Дадим аргументу x_0 приращение Δx и перейдем на кривой $y = f(x)$ от точки $M_0(x_0,\ y_0))$ к точке $M_1(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y)$. Проведем секущую M_0M_1 (рис. 7.1). Когда M_1 вдоль кривой будет перемещаться к точке M_0, секущая будет вращаться вокруг





тангенс угла наклона касательной мгновенная скорость

Рис. 7.1. Задачи, приводящие к понятию производной

точки M_0 и приближаться к некоторой прямой с углом наклона α. Эту прямую и называют касательной.

Таким образом, определение касательной в общем случае можно сформулировать следующим образом:

Касательной к кривой $y = f(x)$ в точке M_0 называется предельное положение секущей M_0M_1 при приближении точки M_1 к точке M_0, т. е. при $\Delta x \to 0$.

Тангенс угла наклона секущей может быть найден из прямоугольного треугольника M_0M_1N как отношение противолежащего катета к прилежащему:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{|M_1N|}{|M_0N|} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Тогда тангенс угла наклона касательной

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

2. Мгновенная скорость. Рассмотрим некоторое прямолинейное движение. Представим себе, что мы движемся по прямолинейной дороге, вдоль которой вместо километровых столбов проходит числовая ось. В нашем распоряжении имеется секундомер. По числовой оси мы в любой момент времени t, показанной секундомером, можем определить пройденный путь s. Таким образом, каждому значению t соответствует определенное значение s, т. е. s является функцией t, что выражается с помощью уравнения движения

$$s = s(t).$$

Как понимать скорость точки в момент времени t_0? Математики XVII и XVIII вв. понимали ее как отношение мгновенного

отрезка пути к мгновенному отрезку времени. Мгновенный отрезок они понимали не как переменную величину, а как постоянную величину — некоторое число. В результате часто возникало «число» $\frac{0}{0}$, которое в одних случаях оказывалось равным 1, в других — 2 или еще какому-либо числу. Это приводило к противоречиям и вместе с другими подобными противоречиями породило кризис математики, который был преодолен только с введением понятия предела и уточнением понятия функции. Сейчас под мгновенной скоростью понимается предел средней скорости, которая рассматривается как переменная от промежутка времени величина.

Дадим более подробное и точное определение мгновенной скорости.

К моменту времени t_0 пройденный путь равен $s(t_0)$, а к моменту $t_0 + \Delta t$ — $s(t_0 + \Delta t)$. За промежуток времени Δt пройденный путь составит $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$. Средняя скорость на промежутке Δs составит

$$v_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Чем меньше Δt, тем лучше средняя скорость характеризует движение точки в момент времени t_0. Поэтому *скоростью точки в момент* t_0 называют предел средней скорости за промежуток от t_0 до $t_0 + \Delta t$, когда $\Delta t \to 0$, т. е.

$$\boxed{v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.}$$

Мгновенную скорость используют не только в физике. В социально-экономических задачах понятие мгновенной скорости используется при определении скорости роста объемов продукции, скорости распространения рекламы, скорости роста трудоспособного населения и т. п.

3. Производительность труда. Пусть функция $Q(t)$ выражает количество произведенной продукции за время t. Найдем производительность труда в момент t_0.

За период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ количество произведенной продукции изменится от значения $Q(t_0)$ до значения $Q(t_0 + \Delta t)$,

т. е. на $\Delta Q = Q(t_0 + \Delta t) - Q(t_0)$; тогда средняя производительность труда за этот период времени $u_{ср} = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$. Под *производительностью труда в момент* t_0 естественно понимать предельное значение средней производительности за период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ при $\Delta t \to 0$, т. е.

$$\boxed{u(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} Q_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}.}$$

Таким образом, производительность труда — это скорость роста объема продукции.

4. Предельный продукт. Пусть функция $Q(x)$ выражает зависимость количества произведенной продукции от величины затрат x.

Отношение $\dfrac{\Delta Q}{\Delta x}$ есть средняя величина продукта, соответствующая величине затрат в размере Δx. Под *предельным продуктом* или *маржинальным продуктом* при затратах x_0 в экономике понимают следующий предел:

$$\boxed{MQ(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} Q_{ср} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta x}.}$$

7.2. Определение производной

Рассматривая различные по характеру задачи, мы пришли к пределу одного вида

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Этот предел очень часто используется в различных областях науки. Поэтому ему дали отдельное название — производная. Дадим общее определение производной.

Пусть $y = f(x)$ определена на промежутке X. Дадим значению $x_0 \in X$ приращение $\Delta x \neq 0$, тогда функция получит приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Определение. *Производной функции* $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует):

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Термин «производная» был введен Лагранжем на рубеже XVIII и XIX вв. Он означает, что производная функции $f(x)$ есть некоторая функция $f'(x)$, произведенная (т. е. полученная по определенным правилам) из данной функции.

> *ЛАГРА́НЖ (Lagrange) Жозеф Луи (1736–1813) — французский математик и механик, член Берлинской и Парижской Академий наук. Родился в семье обедневшего чиновника. Самостоятельно изучал математику. В 18 лет стал преподавателем училища, в 19 лет — профессором, в 23 года — академиком. Одна из его книг, знаменитая «Аналитическая механика», представляет собой систематическое построение механики методами анализа; в этой книге нет ни одного чертежа — все основано только на формулах. Он сделал массу открытий. Парижская АН пять раз присуждала ему премии. В математике и механике его именем названы несколько методов, формул и теорем.*

Нахождение производной называется *дифференцированием* этой функции.

Если функция в точке x имеет конечную производную, то функция называется *дифференцируемой* в этой точке. Функция, дифференцируемая во всех точках промежутка X, называется *дифференцируемой на* этом *промежутке.*

Производная функции имеет несколько обозначений:

y' (обозначение Лагранжа, читается: «игрек штрих»);

$\dfrac{dy}{dx}$ (обозначение Лейбница, читается: «дэ игрек по дэ икс»);

$\dot{y}$ (обозначение Ньютона, читается: «игрек с точкой»);

Dy (обозначение Коши, читается: «дэ игрек»).

Все эти обозначения используются в современной математике и сейчас. Обозначение Лейбница используется преимущественно в теории обыкновенных дифференциальных уравнений (оно удобно, например, при решении так называемых уравнений с разделяющимися переменными). Обозначение Коши используют чаще в теории уравнений математической физики. Обозначением Ньютона пользуются тогда, когда хотят подчеркнуть, что роль независимой переменной играет время.

Мы будем пользоваться преимущественно простыми обозначениями Лагранжа. В тех случаях, когда необходимо указать значение независимой переменной x_0, при котором вычисляется производная, вместо y' будем писать $y'(x_0)$. А в тех случаях, когда может возникнуть сомнение относительно переменной, по которой взята производная, эта переменная указывается в виде

значка внизу:

$$y'_x, \qquad f'_x(x_0).$$

В предыдущем параграфе было показано, что тангенс угла наклона (угловой коэффициент) касательной и скорость прямолинейного движения выражаются с помощью производной. Эти выражения характеризуют геометрический и механический смысл производной.

Геометрический смысл производной. Для функции $y = f(x)$ ее производная $y' = f'(x)$ для каждого значения x равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в соответствующей точке.

Поскольку угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла наклона, то уравнение касательной $y = k\,x + b$ к кривой дифференцируемой функции $y = f(x)$ в точке x_0 можно записать следующим образом:

$$y = y'(x_0) \cdot x + b.$$

Если касательную к кривой в некоторой точке провести невозможно, то это означает, что функция недифференцируема в этой точке.

Механический смысл производной. Для функции $y = f(x)$, меняющейся со временем x, производная $y' = f'(x_0)$ есть скорость изменения y в момент x_0.

> *ЛЕ́ЙБНИЦ (Leibniz) Готфрид Вильгельм (1646–1716) — немецкий философ, математик, физик и изобретатель, юрист, историк, экономист, дипломат, языковед, член Лондонского королевского общества и Парижской Академии наук, основатель Берлинской Академии наук. Родился в Лейпциге. В 17 лет защитил диссертацию на степень бакалавра, в 18 лет — магистра философии и в 20 лет — доктора права.*
>
> *Лейбниц является одним из создателей анализа. Он изобрел также определители и сконструировал вычислительную машину, которая выполняла не только сложение и вычитание, как это было у Паскаля, но и умножение, деление, возведение в степень и извлечение квадратного и кубического корней. Свыше 40 лет посвятил Лейбниц усовершенствованию своего изобретения. Именно поэтому его можно считать идейным вдохновителем современной машинной математики. Он первым нарушил вековую традицию писать научные труды только на латинском языке.*
>
> *Лейбниц ввел много математических терминов, которые теперь прочно вошли в научную практику: функция, дифференциал, дифференциальное исчисление, дифференциальное уравнение, алгоритм, абсцисса, ордината, координата, а также знаки дифференциала, интеграла, логическую символику и другие.*

В философии Лейбниц явился завершителем философии XVIII века, предшественником немецкой классической философии. В физике он развивал учение об относительности пространства, времени и движения. Лейбниц установил в качестве меры движения «живую силу» (кинетическую энергию) — произведение массы тела на квадрат скорости. В языкознании создал теорию исторического происхождения языков, дал их генеалогическую классификацию, развил учение о происхождении названий. Является одним из создателей научного лексикона. С именем Лейбница в науке связано также много других открытий и гипотез.

НЬЮ́ТОН (Newton) Исаак (1643–1727) — английский физик и математик, член Лондонского королевского общества (с 1672) и его президент (с 1703).

В своем грандиозном труде «Математические начала натуральной философии» (1687) Ньютон намечает программу построения методов анализа на основе учения о пределе, не давая впрочем, формального определения этого понятия, получившего глубокое развитие в математике XIX века. Вклад Ньютона в математику не исчерпывается открытиями в области дифференциального и интегрального исчисления. В алгебре ему принадлежит метод численного решения алгебраических уравнений (метод Ньютона), важные теоремы об отделении корней, о приводимости уравнений и т. д.

В физике Ньютон обосновал справедливость закона всемирного тяготения всеми известными в то время астрономическими фактами и вычислил на основе его траектории тел, которые двигаются в разных условиях в поле тяготения; выдвинул корпускулярную теорию света, в которой рассматривал свет как поток особых корпускул (частиц), испускаемых источниками света. Ньютон первым обнаружил, что пучок белого света можно разложить в пучки монохроматического света (дисперсия света), и показал, что сложный состав белого света является одной из причин искажения изображения в оптических системах, в частности в телескопах. Стремясь обойти этот недостаток телескопов, сконструировал первые зеркальные (отражательные) телескопы.

7.3. Схема нахождения производной

Из определения производной следует схема ее нахождения:

1. Фиксируется значение x аргумента функции и выписывается исходное (начальное) значение функции $f(x)$.

2. В точке x аргументу придается приращение $\Delta x \neq 0$ и выписывается новое (наращенное) значение функции $f(x + \Delta x)$.

3. Вычисляется приращение функции $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.

4. Составляется отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

5. Находится предел этого отношения при $\Delta x \to 0$ (если этот предел существует).

Рассмотрим некоторые примеры нахождения производных.

Производная постоянной величины. Пусть дана функция $y = c$. Найдем ее производную.

1. Фиксируем значение x аргумента функции и выписываем исходное значение функции $f(x) = c$.

2. В точке x аргументу придаем приращение $\Delta x \neq 0$ и выписываем новое значение функции $f(x + \Delta x) = c$.

3. Вычисляем приращение функции: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0$.

4. Составляем отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{c - c}{\Delta x} = \dfrac{0}{\Delta x} = 0$.

5. Находим предел этого отношения при $\Delta x \to 0$: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$.

Итак, *производная постоянной величины равна нулю*:

$$\boxed{c' = 0.}$$

Производная функции $y = x$. Пусть $y = x$. Найдем производную.

1. Фиксируем значение x аргумента функции и выписываем исходное значение функции $f(x) = x$.

2. В точке x аргументу придаем приращение $\Delta x \neq 0$ и выписываем новое значение функции $f(x + \Delta x) = x + \Delta x$.

3. Вычисляем приращение функции: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = x + \Delta x - x = \Delta x$.

4. Составляем отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1$.

5. Находим предел этого отношения при $\Delta x \to 0$: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 1 = 1$.

Таким образом, *производная функции $y = x$ равна единице:*

$$\boxed{x' = 1.}$$

Производная функции $y = x^3$. Пусть $y = x^3$. Найдем производную.

1. Фиксируем значение x аргумента функции и выписываем исходное значение функции $f(x) = x^3$.

2. В точке x аргументу придаем приращение $\Delta x \neq 0$ и выписываем новое значение функции $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3$.

3. Вычисляем приращение функции: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 - x = x^3 + 3x^2\,\Delta x + 3x\,(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 = \Delta x\,(3x^2 + 3x\,\Delta x + (\Delta x)^2)$.

4. Составляем отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\,\Delta x + (\Delta x)^2$.

5. Находим предел этого отношения при $\Delta x \to 0$: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(3x^2 + 3x\,\Delta x + (\Delta x)^2\right) = 3x^2$.

Таким образом, получаем

$$\boxed{\left(x^3\right)' = 3x^2.}$$

Эта схема нахождения производной полезна для начального обучения. По мере ее усвоения необходимость в подробных записях пропадает. Поэтому в дальнейшем при нахождении производной будем придерживаться этой последовательности, но не будем расписывать ее так подробно.

7.4. Зависимость между дифференцируемостью и непрерывностью функции

Напомним одно из определений непрерывности. Функция называется непрерывной в точке, если в этой точке $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. Между понятиями непрерывности и дифференцируемости (существованием конечной производной) имеется простая связь.

Теорема. *Если функция дифференцируема в некоторой точке, то в этой точке функция непрерывна.*

□ Пусть функция дифференцируема. Тогда существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'$. Отсюда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = y' \cdot 0 = 0.$$

Следовательно, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x. ■

Заметим, что обратное утверждение неверно: непрерывная функция может не иметь производной.

Простейшим примером непрерывной функции, не имеющей производной в одной точке, является функция $y = |x|$. Эта функция непрерывна при $x = 0$, но не является дифференцируемой

для этого значения, так как в точке $x = 0$ график функции имеет излом, и там не существует касательной.

Таким образом, непрерывность функции — необходимое, но не достаточное условие дифференцируемости функции. Вейерштрассу удалось построить пример функции, недифференцируемой ни в одной точке. Впоследствии подобные примеры были найдены другими математиками. Построить такие функции нелегко, и их почти невозможно наглядно изобразить с помощью графика.

Впервые отчетливое различие между понятиями непрерывности и дифференцируемости функции было дано Н. И. Лобачевским.

> *ЛОБАЧЁВСКИЙ Николай Иванович (1792–1856) — российский математик. Родился в Нижнем Новгороде в семье бедного чиновника. Почти всю свою жизнь провел в Казани. Деятельность Лобачевского в качестве ректора университета положила начало процветанию и славе Казанского университета.*
>
> *Он создал так называемую неевклидову геометрию, известную под названием геометрии Лобачевского, явившуюся поворотным пунктом в развитии математического мышления XIX века. Лобачевский не побоялся новизны и необычности открытия, ломающего многовековые научные традиции, и опубликовал свои воззрения в России. Сочинения Лобачевского почти никем в то время поняты не были и подверглись резкой критике. Лишь немецкий ученый Гаусс, хотя и не высказываясь в печати, высоко оценил труды Лобачевского и по его представлению Лобачевский был избран в 1842 г. членом-корреспондентом Гетингенского ученого общества. Полное признание и широкое распространение геометрия Лобачевского получила через 12 лет после его смерти.*
>
> *Лобачевский внес большой вклад и в другие области математики. В его работах различаются понятия дифференцируемости и непрерывности функций, но и эта идея завоевала всеобщее признание только через много лет после смерти автора. Он внес значительный вклад в теорию определителей, рядов и алгебраических уравнений.*
>
> *Учреждена международная премия его имени, вручаемая Российской Академией наук.*

Производная непрерывной функции не обязательно непрерывна. Если функция имеет непрерывную производную на некотором промежутке X, то функция называется *непрерывно дифференцируемой* на этом промежутке.

Помимо производной в анализе используется понятие дифференциала, которое особенно широко применяется в интегральном исчислении.

Определение. *Дифференциалом функции* называется произведение производной на приращение независимой переменной:

$$\boxed{dy = f'(x)\,\Delta x.}$$

▽ **Пример 1.** Найти дифференциал функции $f(x) = x$.

Решение. $df(x) = dx = x'\,\Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x.$ ▲

Из примера 1 вытекает, *что дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной* и поэтому

$$\boxed{dy = f'(x)\,dx,}$$

или $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

Таким образом, обозначение производной $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$, введенное Лейбницем, можно понимать не только как символическую запись, но и как обычную дробь, числителем и знаменателем которой служат дифференциалы.

▽ **Пример 2.** Найти дифференциал функции $f(x) = c$.

Решение. $dc = c' \cdot dx = 0 \cdot dx = 0.$ ▲

▽ **Пример 3.** Найти дифференциал функции $f(x) = x^3$.

Решение. $d\left(x^3\right) = \left(x^3\right)'\,dx = 3\,x^2\,dx.$ ▲

Ни одно человеческое исследование не может назваться истинной наукой, если оно не прошло через математические доказательства.

Леонардо да Винчи

Глава 8
Основные теоремы о производных

8.1. Правила дифференцирования

1. Дифференцирование суммы и разности. *Производная суммы (разности) двух дифференцируемых функций равна сумме (разности) производных,* т. е.

$$\boxed{(u \pm v)' = u' \pm v'.}$$

□ Докажем это утверждение в случае суммы.

$$(u(x) + v(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x) - (u(x) + v(x))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x) + v'(x).$$

Равенство $(u(x) - v(x))' = u'(x) - v'(x)$ доказывается аналогично. ■

Это правило справедливо и для случая суммы конечного числа функций: производная суммы конечного числа дифференцируемых функций равна сумме производных этих функций.

2. Дифференцирование произведения. *Производная произведения двух дифференцируемых функций равна произведению производной первого сомножителя на второй, плюс произведение производной второго сомножителя на первый*:

$$\boxed{(u\,v)' = u'\,v + u\,v'.}$$

□ $(u(x)\,v(x))' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{(u+\Delta u)\,(v+\Delta v) - u\,v}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(u\,\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\,\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\,\Delta v\right) =$$

$$= u\,v' + v\,u' + u' \lim_{\Delta x\to 0} \Delta v = u'\,v + v'\,u.$$

При вычислении $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta v$ было учтено, что v дифференцируема (следовательно и непрерывна), и поэтому $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta v = 0$. ■

Следствие 1. *Постоянный множитель можно выносить за знак производной:*

$$\boxed{(c\,v)' = c\,v'.}$$

□ Если c — постоянный множитель, то имеем $(c\,v)' = c\,v' + c'\,v$, отсюда, так как $c' = 0$, получаем $(c\,v)' = c\,v'$. ■

Следствие 2. *Производная нескольких дифференцируемых функций равна сумме произведений производной каждого из этих сомножителей на все остальные*, в частности

$$\boxed{(u\,v\,w)' = u'\,v\,w + u\,v'\,w + u\,v\,w'.}$$

□ $(u\,v\,w)' = [(u\,v)\,w]' = (u\,v)\,w' + (u\,v)'\,v =$

$$= (u\,v)'\,w' + (u\,v' + u'\,v)\,w = u'\,v\,w + u\,v'\,w + u\,v\,w'.$$ ■

3. Дифференцирование частного. Если числитель и знаменатель дроби — дифференцируемые функции и знаменатель не обращается в нуль, то производная дроби равна производной числителя, умноженной на знаменатель, минус производная знаменателя, умноженная на числитель, и все это деленное на квадрат знаменателя. Другими словами, *производная частного двух дифференцируемых функций может быть найдена по формуле*

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}.}$$

(Разумеется предполагается, что $v \neq 0$.)

□ $$\left(\frac{u}{v}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\dfrac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \dfrac{u}{v}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{v\,\Delta u - u\,\Delta v}{v\,(v+\Delta v)\,\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{v\,\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\,\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v\,(v+\Delta v)} = \frac{u'\,v - v'\,u}{v^2}.$$

При доказательстве было использовано, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta v = 0$ (функция v непрерывна). ■

Следствие. *Если знаменатель дроби — постоянная величина, то*

$$\boxed{\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c}.}$$

□ $$\frac{u}{c} = \frac{1}{c}\,u, \qquad \left(\frac{u}{c}\right)' = \left(\frac{1}{c}\,u\right)' = \frac{1}{c}\,u' = \frac{u'}{c}.$$ ■

4. Дифференцирование сложной функции. Пусть переменная y есть функция от переменной u, а переменная u, в свою очередь, есть функция от независимой переменной x, т. е. задана сложная функция $y = f(u(x))$. Функцию $f(\cdot)$ будем называть внешней функцией, а функцию $u(x)$ — внутренней. В качестве примера рассмотрим сложную функцию $y = (4\,x + 7)^3$. Внешней функцией для нее является степенная функция $(\cdot)^3$, а внутренней — линейная функция $u(x) = 4\,x + 7$. Как найти производную сложной функции? Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение:

Если y есть дифференцируемая функция от u $\big(y = f(u)\big)$, а u есть дифференцируемая функция от x $\big(u = u(x)\big)$, то производная сложной функции существует и равна производной внешней функции, умноженной на производную внутренней функции, т. е.

$$\boxed{y'_x = f'_u(u)\cdot u'_x(x).}$$

Заметим, что аргументы как внешней, так и внутренней функции сохраняются без изменения.

Более кратко сформулированное утверждение можно записать так: *производная сложной функции равна произведению производных, из которых она состоит.*

▽ **Пример.** Найти производную функции $y = (4\,x + 7)^3$.

Решение. Функция $y = (4\,x + 7)^3$ составлена из двух функций: внешней $f = u^3$ и внутренней $u = 4\,x + 7$. Производная внешней функции $f = u^3$ равна $y'_u = 4\,u^2$. Производная внутренней функции $u = 4\,x + 7$ равна

$$u'_x = (4\,x + 7)' = (4\,x)' + 7' = 4\,x' + 0 = 4 \cdot 1 = 4.$$

Откуда

$$y' = 3\,(4\,x + 7)^2 \cdot 4 = 12\,(4\,x + 7)^2. \quad ▲$$

□ Вначале докажем формулу вычисления производной сложной функции в предположении $\Delta u \neq 0$:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}\,\frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u\,u'_x.$$

Пусть, теперь, $\Delta u = 0$. Тогда $\Delta y = y(u + \Delta u) - y(u) = 0$. Следовательно, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \dfrac{\Delta u}{\Delta x}$. Переходя в последнем равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем $y' = y'_u\,u'_x$. ■

Формулу дифференцирования сложной функции легче запомнить, если воспользоваться обозначением Лейбница:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}.}$$

Механический смысл формулы $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\,\dfrac{du}{dx}$. Производная $\dfrac{dy}{dx}$ — скорость изменения функции при данном значении x, $\dfrac{dy}{du}$ — скорость изменения функции при данном значении u, а $\dfrac{du}{dx}$ — скорость изменения u при данном значении x. Формула означает, что скорость изменения переменной y относительно переменной x равна произведению скоростей изменения переменной y относительно переменной u и переменной u относительно x. Если y изменяется, например, в 3 раза быстрее, чем u, а u изменяется в 2 раза быстрее, чем x, то y изменяется в $3 \cdot 2 = 6$ раз быстрее, чем x.

Из доказанных правил вытекают свойства дифференциала:

$$d(u \pm v) = du \pm dv, \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2},$$

$$d(u\,v) = u\,dv + v\,du, \qquad df(u) = f'(u)\,u'\,dx = f'(u)\,du.$$

5. Дифференцирование обратной функции. Если $y = f(x)$ и $x = g(y)$ — взаимно-обратные дифференцируемые функции и $y'_x \neq 0$, то

$$\boxed{x'_y = \frac{1}{y'_x},}$$

т. е. *производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции*:

$$\square \quad x'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'_x}. \quad \blacksquare$$

8.2. Производные основных элементарных функций

Выведем формулы производных основных элементарных функций.

1. Производная логарифмической функции.

Пусть $\boldsymbol{y = \ln x}$.

1. Фиксируем значение x аргумента функции и выписываем исходное значение функции $f(x) = \ln x$.

2. В точке x аргументу придаем приращение $\Delta x \neq 0$ и выписываем новое значение функции $f(x + \Delta x) = \ln(x + \Delta x)$.

3. Вычисляем приращение функции:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

4. Составляем отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

5. Находим предел этого отношения при $\Delta x \to 0$:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Обозначив $\dfrac{\Delta x}{x} = y$, найдем $\Delta x = x\,y$ и

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{xy} \ln(1+y) = \frac{1}{x} \lim_{y \to 0} \ln(1+y)^{\frac{1}{y}}.$$

В силу непрерывности логарифмической функции, меняем местами символы предела и логарифма, а затем используем определение числа e:

$$y' = \frac{1}{x} \ln\left[\lim_{y \to 0} (1+y)^{\frac{1}{y}}\right] = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}.$$

Итак,

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}.}$$

Пусть $y = \log_a x$. Найдем y':

$$y' = (\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{x \ln a},$$

т. е.

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.}$$

2. Производная показательной функции.

Пусть $\boldsymbol{y = e^x}$.

Прологарифмируем обе части равенства по основанию e, получим $\ln y = x$. Дифференцируя обе части по переменной x и учитывая, что $\ln y$ — сложная функция, получим $(\ln y)' = x'$ или $\dfrac{y'}{y} = 1$, откуда $y' = y$, т. е.

$$\boxed{(e^x)' = e^x.}$$

Таким образом, экспонента не изменяется при дифференцировании.

Если же $y = a^x$, то

$$y' = (a^x)' = \left[\left(e^{\ln a}\right)^x\right]' = \left(e^{x \ln a}\right)',$$

и по правилу дифференцирования сложной функции

$$y' = e^{x \ln a}\,(x \ln a)' = a^x \cdot \ln a.$$

Итак,

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a.}$$

3. Производная степенной функции. Теперь мы можем доказать формулу производной степенной функции $\boldsymbol{y = x^\alpha}$ для любого α. Действительно, $\ln y = \alpha \ln x$. Дифференцируя обе части равенства, получим $\dfrac{1}{y}\,y' = \alpha \cdot \dfrac{1}{x}$, откуда

$$y' = y\,\alpha\,\frac{1}{x} = x^\alpha\,\alpha\,\frac{1}{x} = \alpha\,x^{\alpha-1},$$

т. е.

$$\boxed{(x^\alpha)' = \alpha\,x^{\alpha-1}.}$$

4. Производные тригонометрических функций. Если $y = \sin x$, то

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \dfrac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$$

(применили тригонометрическую формулу для разности синусов, учли первый замечательный предел и непрерывность функции $\cos x$).

Итак,

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x.}$$

Если $y = \cos x$, то

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x.}$$

Эта формула доказывается так же как и предыдущая.

Если $y = \operatorname{tg} x$, то

$$y' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

т. е.

$$\boxed{(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.}$$

Формула

$$\boxed{(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}}$$

доказывается аналогично.

5. Производные обратных тригонометрических функций. Верны следующие формулы:

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},}$$

$$\boxed{(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.}$$

□ Докажем первую из этих формул. Дана функция $y = \arcsin x$, где $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$. Обратная функция имеет вид $x = \sin y$, причем $x'_y = \cos y \neq 0$, если $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Используя правило дифференцирования обратной функции, получаем

$$y' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{+\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

При $x = \pm 1$ производной не существует.

Итак,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Доказательство остальных формул аналогично. ■

8.3. Таблица производных

При перемножении чисел в конкретных вычислениях используют не определение действия умножения, а таблицу умножения. (Определение используется только при доказательстве основных свойств умножения и различных теорем.)

Так же и с операцией дифференцирования. Используя определение производной, были доказаны правила дифференцирования и выведены формулы для вычисления производных основных элементарных функций. Определение производной понадобится также и в дальнейшем при доказательстве некоторых теорем. Однако в практических вычислениях оно не нужно. Для вычисления производной любой элементарной функции достаточно воспользоваться уже доказанными формулами. Для лучшего запоминания ниже приводится сводка всех основных формул. Будем пользоваться этой сводкой формул как таблицей умножения. Так же как и таблицу умножения, ее следует запомнить.

В верхней части таблицы приведены производные основных элементарных функций, в нижней — правила дифференцирования. Среди формул есть сходные пары, которые легче запомнить вместе. Поэтому все формулы в таблице приводятся парами.

8.4. Логарифмическая производная

Определение. *Логарифмической производной положительной функции* $y = f(x)$ называется производная $(\ln y)'_x$.

Так как $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, то по правилу дифференцирования сложной функции получим следующее соотношение для логарифмической производной

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y}. \tag{8.1}$$

Если производную y' рассматривать как скорость изменения функции y, то величина y'/y является ее относительной скоростью изменения. Поэтому логарифмическую производную $(\ln y)'$

Таблица производных

№	$f(x)$	$f'(x)$
1	x	1
2	x^{α}	$\alpha\, x^{\alpha-1}$
3	e^x	e^x
4	a^x	$a^x\ \ln a$
5	$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
6	$\log_a x$	$\dfrac{1}{x\ \ln a}$
7	$\sin x$	$\cos x$
8	$\cos x$	$-\sin x$
9	$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
10	$\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
11	$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12	$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13	$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
14	$\operatorname{arcctg} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$
15	c	0
16	$u(x) \pm v(x)$	$u'(x) \pm v'(x)$
17	$c\, u(x)$	$c\, u'(x)$
18	$u(x) \cdot v(x)$	$u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x)$
19	$\dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\dfrac{u'(x)\, v(x) - u(x)\, v'(x)}{v^2(x)}$
20	$f(u(x))$	$f'_u(u) \cdot u'_x(x)$

называют также *относительной скоростью изменения функции* y или *ее темпом роста.*

Для не обращающейся в нуль функции $y = f(x)$ логарифмическую производную определяют как $(\ln|y|)'$. Поскольку $(\ln|x|)' = 1/x$, то формулу (8.1) можно записать в более общем виде

$$y' = y\,(\ln|y|)'. \tag{8.2}$$

С помощью логарифмической производной удобно вычислять обычную производную в тех случаях, когда логарифмирование упрощает вид функции. Одним из таких случаев является дифференцирование функции $y = x^x$.

▽ **Пример 1.** Найти производную функции $y = x^x$.

Решение. Функцию $y = x^x$ нельзя назвать степенной x^n, поскольку показателем степени является не число n, а переменная x. Не является она и показательной (a^x), поскольку основанием степени является не число a, а переменная x. Вместе с тем функция x^x напоминает и степенную, и показательную. Поэтому ее называют *степенно-показательной функцией.*

Для дифференцирования этой функции нельзя непосредственно применить формулы дифференцирования степенной или показательной функции. Формула вычисления производной такой функции основана на использовании логарифмической производной.

Логарифмирование упрощает вид функции: $\ln y = \ln x^x = x\ln x$. Дифференцируя, находим $(\ln y)' = x'\ln x + x\,(\ln x)' = \ln x + 1$ или $\dfrac{y'}{y} = \ln x + 1$. Откуда

$$y' = y\,(\ln x + 1) = x^x\,(\ln x + 1). \quad ▲$$

Используя логарифмическую производную, найдем производную произвольной степенно-показательной функции $y = u^v$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$ — дифференцируемые функции, производные которых известны: $y' = y\,(\ln y)' = u^v\,(v\ln u)' = u^v\,(v'\ln u + v\,(\ln u)') = u^v\left(v'\ln u + v\,\dfrac{u'}{u}\right)$. Отсюда

$$y' = v'\,u^v\ln u + v\,u^{v-1}\,u'.$$

Таким образом, для того чтобы найти производную степенно-показательной функции, достаточно дифференцировать ее вначале как показательную, а затем как степенную, и полученные результаты сложить.

▽ **Пример 2.** Найти производную функции $y = (\sin x)^{\ln x}$.

Решение.

$$y' = (\ln x)' (\sin x)^{\ln x} \ln \sin x + \ln x (\sin x)^{\ln x - 1} (\sin x)'.$$

Следовательно, $y' = (\sin x)^{\ln x} \left(\dfrac{\ln \sin x}{x} + \operatorname{ctg} x \right)$. ▲

8.5. Производная функции, заданной параметрически

Плоские кривые часто задаются уравнениями вида $x = x(t)$, $y = y(t)$, где переменная t, называемая *параметром*, пробегает некоторый промежуток значений T. Чтобы построить кривую, заданную параметрически, нужно задать ряд значений параметра t по формулам $x = x(t)$, $y = y(t)$, вычислить соответствующие значения x и y, отметить полученные точки $(x,\ y)$ на координатной плоскости и соединить их плавной линией. Из курса геометрии известны параметрические уравнения окружности $x^2 + y^2 = R^2$ и эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, которые соответственно имеют вид

$$\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases}$$

где $t \in [0,\ 2\pi]$.

Теорема 1. *Пусть функции $x = x(t)$, $y = y(t)$ непрерывны на $[\alpha,\ \beta]$, дифференцируемы в $(\alpha,\ \beta)$, причем $x'(t)$ сохраняет постоянный знак на этом интервале. Пусть далее $[a,\ b]$ — область значений функции $x = x(t)$. Тогда уравнения $x = x(t)$, $y = y(t)$ определяют непрерывную на $[a,\ b]$ и дифференцируемую в $(a,\ b)$ функцию $y = y(x)$, причем*

$$\boxed{y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)}.}$$

□ По условию $x'(t)$ сохраняет постоянный знак; пусть для определенности $x'(t) > 0$. Тогда функция $x(t)$ монотонна и непрерывна на $[\alpha,\ \beta]$; значит, она обратима и производная обратной функции $t(x)$ вычисляется по формуле $t'(x) = 1/x'(t)$.

Воспользовавшись правилом дифференцирования сложной функции $y = y(t(x))$, получим

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y'(t)}{x'(t)}. \quad \blacksquare$$

▽ **Пример 1.** Найти производную функции, заданную параметрически: $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, где $t \in [0,\ \pi]$ (параметрические уравнения полуокружности радиуса R с центром в начале координат).

Решение.

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{(R\sin t)'}{(R\cos t)'} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\operatorname{ctg} t.$$

Если необходимо выразить ответ с помощью переменной x, то можно воспользоваться представлением $t = t(x) = \arccos(x/R)$:

$$y'(x) = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\frac{\cos\big(\arccos(x/R)\big)}{\sin\big(\arccos(x/R)\big)} = \\ = -\frac{x/R}{\sqrt{1-(x/R)^2}} = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

Полученный ответ в точности совпадает со значением производной, найденным непосредственно из уравнения полуокружности $x^2 + y^2 = R^2$ $y > 0$:

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}\,, \qquad y' = \frac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}. \quad \blacktriangle$$

▽ **Пример 2.** Найти производную функции, заданную параметрически: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, где $t \in [0,\ \pi]$ (параметрические уравнения полуэллипса).

Решение.

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'} = -\frac{b\cos t}{a\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t.$$

Выразив t через x, получим

$$y'(x) = -\frac{b\cos t}{a\sin t} = -\frac{b\cos\big(\arccos(x/a)\big)}{a\sin\big(\arccos(x/a)\big)} = -\frac{b\,x}{a^2\sqrt{1-(x/a)^2}} = -\frac{b}{a}\,\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Полученный ответ в точности совпадает со значением производной, найденным непосредственно из уравнения полуэллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, где $y>0$:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, \qquad y' = \frac{b}{a}\cdot\frac{-2\,x}{2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{b}{a}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}. \quad \blacktriangle$$

В рассмотренных примерах показана связь производных функций, заданных явно и параметрически. В практических же задачах нет необходимости от представления $y'(t)$ переходить к представлению $y'(x)$. Параметрическое представление производной вполне достаточно. Оно позволяет строить график производной и изучить ее свойства. Заметим также, что обычное задание функции $y=y(x)$ можно рассматривать как частный случай параметрического $x=t$, $y=y(t)$.

8.6. Производная неявной функции

Выше было рассмотрено дифференцирование явных функций и параметрических функций. Рассмотрим дифференцирование неявной функции, заданной уравнением $F(x,y)=0$. Для нахождения производной функции y, заданной неявно, нет нужды искать явное выражение функции $y=f(x)$; нужно просто продифференцировать обе части уравнения, рассматривая y как функцию от x, а затем из полученного уравнения найти производную y'.

$\triangledown$ **Пример.** Найти производную функции, заданную уравнением эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Решение. Дифференцируя обе части уравнения, находим:

$$\frac{2\,x}{a^2}+\frac{2\,y}{b^2}\,y' = 0,$$

отсюда $y' = -\dfrac{b^2 x}{a^2 y}$. Это представление для y' совпадает с формулой

$$y' = \pm\frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

найденной с помощью явного выражения функции. ▲

8.7. Производная высших порядков

До сих пор мы рассматривали производную $f'(x)$ от функции $f(x)$, так называемую производную первого порядка. Но производная $f'(x)$ сама является функцией, которая также может иметь производную. Производной n-го порядка называется производная от производной $(n-1)$-го порядка. Обозначение производных: $f''(x)$ — второго порядка или вторая производная, $f'''(x)$ — третьего порядка или третья производная. Для обозначения производных более высокого порядка используются арабские цифры в скобках или римские цифры, например, $f^{(4)}$, $f^{(n)}(x)$, или $f^{IV}(x)$ и т. д.

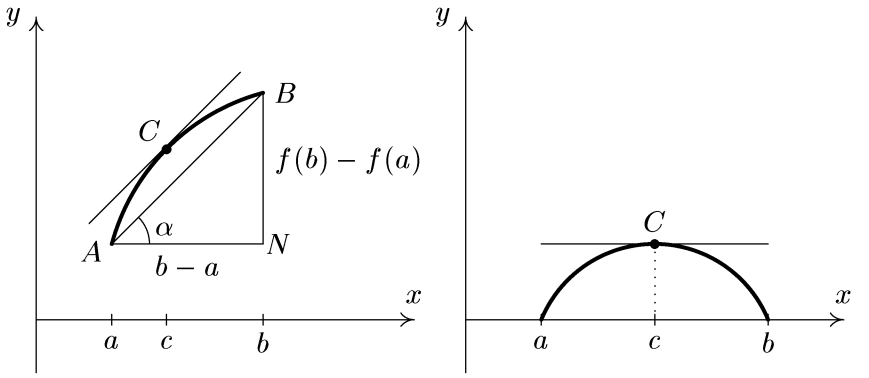
Выясним механический смысл второй производной. Выше было установлено, что если точка движется прямолинейно по закону $s = s(t)$ (где s — путь, t — время), то $s'(t_0)$ представляет скорость изменения пути в момент t_0. Следовательно, вторая производная пути во времени $s''(t_0) = [s'(t_0)]' = v'(t_0)$ есть скорость изменения скорости или ускорение точки в момент t_0.

8.8. Теорема о конечном приращении и ее следствия

Теорема Лагранжа. *Если функция непрерывна на отрезке* $[a,\ b]$ *и дифференцируема в интервале* $(a,\ b)$, *то существует такая точка* $c \in (a,\ b)$, *что*

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a).}$$

□ Через точки $A(a,\ f(a))$ и $B(b,\ f(b))$ данной функции проведем секущую AB (рис. 8.1). Угол, образуемый секущей AB с осью Ox, обозначим через α. Тангенс угла в прямоугольном



к теореме Лагранжа к теореме Ролля

Рис. 8.1. Иллюстрации к теоремам Лагранжа и Ролля

треугольнике равен отношению катетов: противолежащего к прилежащему. Из треугольника ABN находим

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|BN|}{|AN|} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Будем перемещать секущую AB параллельно начальному положению до тех пор, пока она не превратиться в касательную к графику функции $y = f(x)$ в некоторой точке $C(c,\ f(c))$, где $a < c < b$ (здесь опускается доказательство того факта, что такое предельное положение существует). Согласно построению и геометрическому смыслу производной $\operatorname{tg}\alpha$ равен тангенсу угла наклона касательной $f'(c)$, поэтому

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c), \qquad a < c < b.$$

Отсюда $f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a)$. ■

Следствие 1. *Если производная равна нулю в каждой точке некоторого промежутка, то функция есть тождественная постоянная на этом промежутке.*

□ Пусть $f'(x) = 0$ для всех x из данного промежутка. Если a и x — две точки этого промежутка, то по доказанной теореме $f(x) - f(a) = f'(c)\,(x-a)$, $a < c < x$. Поскольку $f'(c) = 0$, то

$$f(x) - f(a) = 0, \quad f(x) = f(a) = \text{const}. \quad ■$$

Следствие 2. *Если две функции имеют равные производные в некотором промежутке X, то они отличаются в этом промежутке лишь постоянным слагаемым.*

□ Если $f_1(x) = f_2(x)$, $x \in X$, то

$$\big(f_1(x) - f_2(x)\big)' = f_1'(x) - f_2'(x) = 0.$$

В силу следствия 1

$$f_1(x) - f_2(x) = \text{const}, \qquad x \in X. \quad \blacksquare$$

Прежде чем переходить к формулировке следующей теоремы, напомним, что *корнем* (или *нулем*) функции $y = f(x)$ называют такое значение ее аргумента, при котором функция обращается в нуль. Геометрически корень функции означает абсциссу точки, в которой график функции пересекает ось Ox или касается ее.

Теорема Ролля. *Между двумя различными корнями дифференцируемой функции содержится по меньшей мере один корень ее производной.*

□ Пусть a и b — различные корни дифференцируемой функции, т. е. $f(a) = 0$, $f(b) = 0$. Из теоремы Лагранжа получаем

$$f'(c)\,(b - a) = 0, \qquad a < c < b.$$

Так как $b - a \neq 0$ (корни различны), то $f'(c) = 0$. ■

Теорема Ролля имеет простую геометрическую интерпретацию. Между значениями a и b имеется по меньшей мере одно значение c, такое, что в точке $C(c,\ f(c))$ графика функции касательная параллельна оси Ox (рис. 8.1).

> *РОЛЛЬ (Rolle) Мишель (1652–1719) — французский математик, член Парижской Академии наук. В 23 года решил одну из задач, которую не смог до конца решить известный в то время математик Ж. Озанам. Впоследствии чисто алгебраическими средствами для случая многочлена доказал теорему, которая теперь носит его имя. Ролль долгое время критиковал анализ Р. Декарта и исчисление бесконечно малых Г. Лейбница. Хотя эта критика в большинстве случаев была бездоказательной, но она заставила Г. Лейбница внимательнее отнестись к обоснованию основ анализа.*

Теорема Коши. *Если $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ — две функции непрерывные на отрезке $[a,\ b]$ и дифференцируемые в интервале $(a,\ b)$, причем $\varphi'(x) \neq 0$ для любого $x \in (a,\ b)$, то между a*

и b найдется такая точка c, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Замечание. Знаменатель в левой части равенства отличен от нуля (допустив противное, т. е. $\varphi(b)-\varphi(a)$, получили бы $\varphi'(c)=0$, что противоречит условию), поэтому выражение в левой части равенства имеет смысл.

□ Введем в рассмотрение функцию

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\big(\varphi(x)-\varphi(a)\big).$$

Эта функция удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Действительно, во-первых, она дифференцируема в интервале $(a,\ b)$, так как дифференцируемы в нем функции $f(x)$ и $\varphi(x)$:

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\,\varphi'(x).$$

Во-вторых, $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, поскольку непрерывны на нем функции $f(x)$ и $\varphi(x)$. В-третьих, на концах отрезка $[a,\ b]$ функция $F(x)$ обращается в нуль:

$$F(a)=f(a)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\big(\varphi(a)-\varphi(a)\big)=0,$$

$$F(b)=f(b)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\big(\varphi(b)-\varphi(a)\big)=0.$$

Следовательно, между a и b найдется такая точка c, для которой $F'(c)=0$, т. е.

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\,\varphi'(c)=0,$$

откуда

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.\quad\blacksquare$$

С помощью теоремы Коши может быть доказано важное правило, которое позволяет находить пределы дроби $f(x):\varphi(x)$, числитель и знаменатель которой при $x\to a$ стремятся к нулю или бесконечности.

Теорема (правило Лопиталя–Бернулли). *Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций*

равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует в указанном смысле.

Итак, если имеется неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ *или* $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, *то*

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.}$$

БЕРНУ́ЛЛИ (Bernoulli) Иоганн I (1667–1748) — швейцарский математик, иностранный почетный член Петербургской Академии наук (1725), профессор математики Гронингенского и Базельского университетов. Был деятельным соратником немецкого ученого Г. Лейбница в разработке дифференциального и интегрального исчислений, в области которых им был сделан ряд открытий. Он развил теорию показательной функции, вывел правило раскрытия неопределенностей типа $\frac{0}{0}$ *(носящее имя Лопиталя–Бернулли), указал методы интегрирования рациональных дробей, вычисления площадей плоских кривых, дал определения понятия функции как аналитического выражения и др. В геометрии он дал определение пространственных координат, занимался различными специальными кривыми и др. Ему принадлежат также ценные работы по механике, в частности он дал весьма четкое понятие работы и для простейших случаев сформулировал так называемый «принцип виртуальных скоростей». Среди многочисленных учеников Иоганна Бернулли были такие известные математики как Л. Эйлер, маркиз де-Лопиталь и его сыновья Даниил, Иоганн II, Николай II.*

ЛОПИТА́ЛЬ (Lhopital) Гийом Франсуа Антуан (1662–1704) — французский математик, член Парижской Академии наук. Родился в Париже. Издал первый печатный учебник по дифференциальному исчислению — «Анализ бесконечно малых» (1696). В книге есть правило нахождения предела дроби, числитель и знаменатель которой стремятся к нулю. Это правило теперь называют его именем. Кроме того, он создал курс аналитической геометрии конических сечений. Ему также принадлежит исследование и решение с помощью математического анализа нескольких трудных задач по геометрии и механике.

□ Для простоты рассмотрим доказательство теоремы в случае, когда функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в окрестности точки $x=a$, обращаются в нуль в этой точке и существует предел отношения $f'(x):\varphi'(x)$ при $x\to a$.

Пусть точка $x\neq a$ принадлежит интервалу, в котором функции дифференцируемы. По теореме Коши

$$\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)},$$

где c лежит между x и a.

По условию $f(a) = \varphi(a)$, поэтому

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Если $x \to a$, то $c \to a$, так как c заключено между x и a. Переходя к пределу в последнем равенстве, получаем

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{c\to a} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \quad \blacksquare$$

▽ **Пример 1.** Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{3x - \sin x}$.

Решение. При $x = 0$ числитель и знаменатель обращаются в нуль, имеем неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Применяя правило Лопиталя–Бернулли, получим:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{3x - \sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin 2x)'}{(3x - \sin x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x}{3 - \cos x} = \frac{2}{3-1} = 1. \quad \blacktriangle$$

▽ **Пример 2.** Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n}$, где n — натуральное число.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Применяя правило Лопиталя–Бернулли, получим:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^n)'} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{x}}{n\,x^{n-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n\,x^n} = 0.$$

Этот пример показывает, что при возрастании x логарифмическая функция растет медленнее степенной функции. ▲

Правило Лопиталя–Бернулли при выполнении соответствующих условий можно применять несколько раз.

▽ **Пример 3.** Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{e^x}$, где n — натуральное число.

Решение. Применяя правило Лопиталя–Бернулли n раз, получим:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{n\,x^{n-1}}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{n\,(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\ldots=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{n\,(n-1)\ldots1}{e^x}=0. \quad \blacktriangle$$

Как мы уже отмечали ранее, неопределенности $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0 можно свести к неопределенностям $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$.

▽ **Пример 4.** Найти $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{2}{x-1}}$.

Решение. Это неопределенность вида 1^∞.

$$\lim_{x\to1}x^{\frac{2}{x-1}}=\lim_{x\to1}e^{\ln x\,\frac{2}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{2\ln x}{x-1}}.$$

Поскольку

$$\lim_{x\to1}\frac{2\ln x}{x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1}\frac{(2\ln x)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{2}{x}}{1}=2,$$

то

$$\lim_{x\to1}x^{\frac{2}{x-1}}=e^2. \quad \blacktriangle$$

8.9. Формула Тейлора

Мы уже знакомились (правда, не в такой форме) с соотношением

$$1+x+x^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}.$$

Оно означает, что геометрический ряд сходится, если $|x|<1$, и его сумма равна $\dfrac{1}{1-x}$. Говорят также, что функция $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ в интервале $(-1,\ 1)$ разлагается в ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$.

Ряд более общего вида

$$c_0 + c_1\,x + c_2\,x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,x^n$$

называется *степенным рядом* (с центром в нуле). А ряд вида

$$c_0 + c_1\,(x-a) + c_2\,(x-a)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-a)^n$$

называется степенным рядом (с центром в точке a). Название объясняется тем, что члены ряда являются степенями x.

Областью сходимости степенного ряда называется множество, состоящее из всех тех x, для которых сходится соответствующий числовой ряд.

Во многих случаях бывает сложно определить значения функций, соответствующие значениям независимой переменной. Эта задача облегчается при записи функций в виде так называемых степенных рядов Тейлора.

Например, возьмем многочлен

$$f(x) = c_0 + c_1\,x + c_2\,x^2 + c_3\,x^3, \tag{8.3}$$

где c_0, c_1, c_2, c_3 — постоянные. Вычислим производные

$$f'(x) = c_1 + 2\,c_2\,x + 3\,c_3\,x^2, \tag{8.4}$$

$$f''(x) = 2\,c_2 + 6\,c_3\,x, \tag{8.5}$$

$$f'''(x) = 6\,c_3. \tag{8.6}$$

Если в выражения (8.3)–(8.6) подставить $x = 0$, получим

$$f(0) = c_0,$$

$$f'(0) = c_1 = 1! \cdot c_1,$$

$$f''(0) = 2\,c_2 = 1 \cdot 2 \cdot c_2 = 2! \cdot c_2,$$

$$f'''(0) = 6\,c_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot c_3 = 3! \cdot c_3,$$

откуда

$$c_0 = f(0), \quad c_1 = \frac{f'(0)}{1!}, \quad c_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \quad c_3 = \frac{f'''(0)}{3!}.$$

Подставляя эти значения в выражение (8.3), получаем

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3.$$

Аналогично можно получить разложение многочлена

$$f(x) = C_0 + C_1\,(x-a) + C_2\,(x-a)^2 + C_3\,(x-a)^3 :$$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}\,(x-a)^3.$$

Действуя таким же образом, можно любой многочлен n-й степени записать в виде

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n. \quad (8.7)$$

Выражение (8.7) называется *рядом Тейлора.*

> *ТЕ́ЙЛОР (Taylor) Брук (1685–1731) — английский математик, член Лондонского королевского общества. Получил общую формулу разложения функций в степенной ряд, положил начало математическому изучению задачи о колебаниях струны. Он автор работ о полете снарядов, взаимодействии магнитов, центре качания, перспективе и др. К концу жизни занимался вопросами философии.*

Подставляя в выражение (8.7) $a = 0$, получаем частный случай ряда Тейлора для многочленов:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n. \quad (8.8)$$

▽ **Пример 1 (бином Ньютона).** Разложить функцию $f(x) = (a+x)^m$ в ряд Тейлора.

Решение. Согласно (8.8) имеем:

$$(a+x)^m = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{m!}\,x^m.$$

Последовательно дифференцируя $f(x) = (a+x)^m$, находим:

$$f(x) = (a+x)^m, \quad f^{(k)}(x) = m(m-1)\ldots\big(m-(k-1)\big)(a+x)^{m-k},$$

$$f(0) = a^m, \qquad f^{(k)}(0) = m\,(m-1)\ldots\big(m-(k-1)\big)\,a^{m-k},$$

где $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$.

Откуда вытекает *биномиальная формула Ньютона*:

$$\boxed{(a+x)^m = a^m + m\,a^{m-1}\,x + \frac{m\,(m-1)}{2!}\,a^{m-2}\,x^2 + \ldots + x^m}$$

(ее называют также биномом Ньютона). В частности, при $a = 1$ получаем:

$$(1+x)^m = 1 + m\,x + \frac{m\,(m-1)}{2!}\,x^2 + \ldots + x^m,$$

$$(1+x)^7 = 1 + 7\,x + 21\,x^2 + 35\,x^3 + 35\,x^4 + 21\,x^5 + 7\,x^6 + x^7. \quad \blacktriangle$$

Формулу Тейлора можно распространить на функции, не являющиеся многочленами. Можно доказать следующую теорему.

Теорема. *Если функция $f(x)$ имеет в интервале $(a,\ b)$ производные до n-го порядка включительно, то*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x-a)x^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\,(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}\,(x-a)^n, \quad (8.9)$$

где $a < c < b$.

Это *формула Тейлора* для произвольной функции. Она отличается от формулы Тейлора для многочленов (8.7) только последним слагаемым. При разложении многочлена в последнем слагаемом имеет место $f^{(n)}(a)$, а при разложении произвольной функции имеет место $f^{(n)}(c)$.

Это последнее слагаемое в разложении произвольной функции называют *остатком* ряда.

Если в формуле (8.9) принять $a = 0$, то получаем следующую часто используемую формулу:

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\,x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}\,x^n,}$$

где $0 < c < b$. $x \in X$.

Формула Тейлора имеет важное значение для многих задач математического анализа. Так, сложные функции посредством этой формулы можно с большой точностью заменить многочленом, т. е. более простой функцией. Кроме того, эта формула позволяют рассчитать приблизительные значения функций.

▽ **Пример 2.** С помощью формулы Тейлора разложить функцию e^x в степенной ряд.

Решение. Поскольку

$$f(x)=e^x,\quad f'(x)=e^x,\quad \ldots,\quad f^{(n-1)}(x)=e^x,\quad f^{(n)}(x)=e^x,$$

$$f(0)=1,\qquad f'(0)=1,\qquad \ldots,\quad f^{(n-1)}(0)=1,\qquad f^{(n)}(c)=e^c,$$

то разложение функции $f(x)=e^x$ в ряд Тейлора имеет следующий вид:

$$e^x=1+\frac{1}{1!}\,x+\frac{1}{2!}\,x^2+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\,x^{(n-1)}+\frac{e^c}{n!}\,x^n.$$

Примем без доказательства, что

$$\frac{e^c}{n!}\,x^n\to 0$$

при $n\to\infty$. Тогда

$$e^x=1+\frac{1}{1!}\,x+\frac{1}{2!}\,x^2+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\,x^{(n-1)}+\ldots. \quad ▲$$

Аналогично можно получить разложения в степенные ряды многих других функций.

Задача. Разложить в степенной ряд функции:

$$\sin x,\qquad \cos x,\qquad \ln(1+x),\qquad (1+x)^m.$$

Ответ:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}\,x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots \qquad (-\infty<x<\infty),$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n\,x^{2n}}{(2n)!}+\ldots \qquad (-\infty<x<\infty),$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+\frac{(-1)^n\,x^{n+1}}{n+1}+\ldots \qquad (-1<x\leqslant 1),$$

$$(1+x)^m=1+m\,x+\ldots+\frac{m(m-1)(m-n+1)}{n!}\,x^n+\ldots \qquad (-1<x<1).$$

Последний ряд называется *биномиальным.* Если m — целое положительное число, то биномиальный ряд представляет формулу бинома Ньютона. Действительно, $m-n+1=0$ при $n=m+1$.

Поэтому n-й член ряда и все последующие равны нулю, т. е. ряд обрывается, и вместо бесконечного разложения получается конечная сумма.

Замечание. Основываясь на своем ограниченном опыте, математики XVIII века не сомневались в том, что всякая непрерывная функция разлагается в бесконечный ряд Тейлора. Лишь позже в XIX веке Коши дал первый пример функции, которая хотя и является непрерывной и обладает в точке $x = a$ всеми производными, но не разлагается в ряд по степеням $(x - a)$. Эта функция задается формулой $f(x) = e^{-1/x}$ при добавочном условии $f(0) = 0$ (при $x = 0$ формула теряет смысл). Функция $f(x)$ имеет в точке $x = 0$ производные любого порядка. Все они равны нулю в этой точке, так что ряд Тейлора тождественно равен нулю. Однако $f(x)$ нигде, кроме точки $x = 0$, не обращается в нуль.

Коши показал также, что функция разлагается в ряд Тейлора только в том случае, если остаток ряда стремится к нулю при $n \to \infty$, в противном случае не разлагается.

Следует помнить, что в каком-то смысле высшая математика проще элементарной. Исследовать, например, лесную чащу пешком очень трудно, с самолета это делается проще.

У. Сойер (английский математик и педагог)

Глава 9
Исследование функций

9.1. Признаки монотонности функции

Теорема 1 (необходимое и достаточное условие постоянства функции). *Дифференцируемая на промежутке X функция $y = f(x)$ постоянна тогда и только тогда, когда $f'(x) = 0$ для всех $x \in X$.*

□ Необходимое условие постоянства функции (если функция постоянна на некотором промежутке, то ее производная равна нулю) следует из формулы $c' = 0$. Достаточное условие постоянства функции (если производная равна нулю в каждой точке некоторого промежутка, то функция есть тождественная постоянная на этом промежутке) есть следствие 1 из теоремы Лагранжа, которое уже было ранее доказано (см. с. 129). ■

Теорема 2 (достаточное условие строгой монотонности функции). *Если в промежутке X производная функции положительна, то функция возрастает в этом промежутке; если производная отрицательна, то функция строго убывает в соответствующем промежутке.*

□ Пусть x_1 и x_2 принадлежат промежутку, в котором $f'(x) > 0$; будем считать, что $x_1 < x_2$. По теореме Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\,(x_2 - x_1), \tag{9.1}$$

где $x_1 < c < x_2$.

Поскольку $f'(c) > 0$, то разности $f(x_2) - f(x_1)$ и $(x_2 - x_1)$ одного знака, причем $x_2 - x_1 > 0$, поэтому $f(x_2) - f(x_1) > 0$.

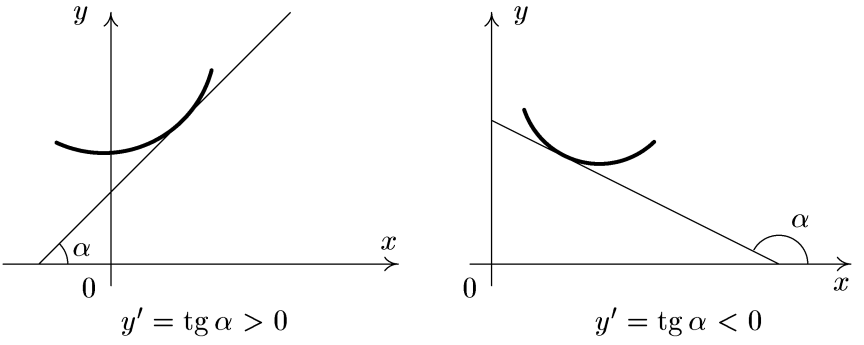


Рис. 9.1. Достаточное условие строгой монотонности функции

Следовательно, из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, т. е. функция строго возрастает в промежутке, где $f'(x) > 0$.

Если $f'(x) < 0$ для всех x из данного промежутка, то $f'(c) < 0$. Из этого неравенства и (9.1) следует, что $f(x_2) - f(x_1) < 0$ при $x_2 - x_1 > 0$, т. е. $f(x_1) > f(x_2)$, когда $x_1 < x_2$. Это означает, что функция строго убывает в данном промежутке. ■

Геометрический смысл теоремы. Если в некотором промежутке касательная к графику функции $y = f(x)$ образует с осью Ox острый угол α ($\operatorname{tg}\alpha > 0$), то функция строго возрастает в этом промежутке. Если касательная к графику функции $y = f(x)$ образует с осью Ox тупой угол α ($\operatorname{tg}\alpha < 0$), то функция строго убывает (рис. 9.1).

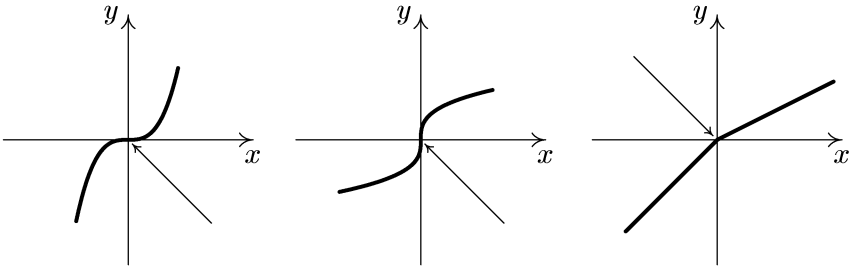
Из теорем 1 и 2 следует достаточное условие «нестрогой» монотонности: если в промежутке X производная функции неотрицательна, то функция возрастает на этом промежутке; если производная неположительна, то функция убывает в соответствующем промежутке.

▽ **Пример 1.** Найти промежутки строгого возрастания и строгого убывания функции $f(x) = x^3 - 3x$.

Решение. Находим производную функции

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1).$$

Если $x < -1$ и $x > 1$, то $f'(x) > 0$; функция строго возрастает в интервалах $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$. Если $-1 < x < 1$, то $f'(x) < 0$; функция строго убывает в интервале $(-1, 1)$. ▲



$f'(0) = 0$ $\quad$ $g'(0) = \infty$ $\quad$ $\varphi'(0)$ не существует

Рис. 9.2. Возрастающие функции

▽ **Пример 2.** На рис. 9.2 изображены три функции:

1) $f(x) = x^3$; $\quad$ 2) $g(x) = x^{1/3}$; $\quad$ 3) $\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{при } x \leqslant 0, \\ 2\,x, & \text{при } x > 0. \end{cases}$

Эти функции непрерывны везде. При $x \neq 0$ их производные существуют и положительны; в то время как $f'(0) = 0$ (касательная горизонтальна), $g'(0) = \infty$ (касательная вертикальна), $\varphi'(0)$ не существует (касательной нет). Однако все три функции строго возрастают при всех x. Тем самым установлено, что неравенство $f'(x) > 0$ является достаточным, но не необходимым условием строгого возрастания функции $f(x)$. ▲

Для дифференцируемой функции (т. е. для функции, у которой существует конечная производная) можно сформулировать **необходимое условие строгой монотонности:** *Если дифференцируемая функция строго возрастает (строго убывает) на некотором промежутке X, то ее производная неотрицательна (неположительна) на этом промежутке*: $f'(x) \geqslant 0$ $(f'(x) \leqslant 0)$, $x \in X$. Таким образом, в отдельных точках производная строго монотонной дифференцируемой функции может равняться нулю. Заметим, что необходимое условие «нестрогой» монотонности формулируется так же как и необходимое условие строгой монотонности.

9.2. Экстремум функции

Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *строгий локальный максимум (минимум)*, если эту точку можно окружить такой окрестностью $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, содержащейся на промежутке,

где задана функция, что для всех ее точек x выполняется строгое неравенство

$$f(x) < f(x_0) \qquad (\text{или } \ f(x) > f(x_0)).$$

Иными словами, точка x_0 доставляет функции $f(x)$ строгий локальный максимум (минимум), если значение $f(x_0)$ оказывается наибольшим (наименьшим) из значений, принимаемых функцией в некоторой (хотя бы малой) окрестности этой точки. Отметим, что само определение строгого локального максимума (минимума) предполагает, что функция задана по обе стороны от точки x_0.

Если существует такая окрестность, в пределах которой (при $x = x_0$) выполняется нестрогое неравенство

$$f(x) \leqslant f(x_0) \qquad (\text{или } \ f(x) \geqslant f(x_0)),$$

то говорят, что функция имеет в точке x_0 *нестрогий локальный максимум* (*минимум*).

По-латыни слова *maximum* и *minimum* означают «наибольшее» и «наименьшее» (значение).

Если функция имеет строгие локальные максимумы в точках x_0 и x_1, то наименьшего своего значения в этом промежутке функция достигает в некоторой точке x_2 между x_0 и x_1 и имеет там строгий локальный минимум. Аналогично между двумя строгими локальными минимумами непременно найдется строгий локальный максимум. В том простейшем (и на практике — важнейшем) случае, когда функция имеет вообще лишь конечное число строгих локальных максимумов и минимумов, они попросту чередуются. На графике функции (как, например, на графике функции $\sin x$, $0 \leqslant x \leqslant 6\pi$) им соответствуют характерные горбы и впадины.

Наличие локального экстремума функции при некотором значении аргумента нисколько не зависит от того, как ведет себя функция вдали от этого значения. С этой точки зрения понятно, что строгий локальный минимум функции может быть больше строгого локального максимума, — подобно тому как впадина в горах может быть выше, чем небольшая вершина. В отличие от строгого локального максимума (минимума) существует еще понятие *строгого глобального максимума* (*минимума*) на некотором множестве. Естественно, что строгий глобальный максимум больше всех остальных значений значений функции на данном множестве (в том числе и дальних), а строгий глобальный минимум — меньше. В географических горных терминах строгий

глобальный максимум — это наивысшая точка, а глобальный — самая низкая.

Заметим, что когда нет надобности акцентировать внимание на том, является ли максимум (минимум) строгим или нестрогим, локальным или глобальным, соответствующие прилагательные опускают. Для максимума или минимума существует и объединяющий их термин — *экстремум*. Латинское *extremum* означает «крайнее» (значение). Экстремумы также разделяются на строгие и нестрогие, локальные и глобальные.

Те значения аргумента, при которых достигаются экстремумы функции, называются *точками экстремума функции*.

Поставим задачу о разыскании всех значений аргумента доставляющих функции экстремум. При решении ее основную роль будет играть производная.

Предположим сначала, что для функции $f(x)$ в промежутке X существует конечная производная. Если в точке x_0 функция имеет экстремум, то $f'(x_0) = 0$:

Теорема (необходимое условие экстремума). *В точке экстремума дифференцируемой функции производная ее равна нулю.*

□ Пусть x_0 — точка экстремума дифференцируемой функции $y = f(x)$. Для определенности предположим, что x_0 — точка нестрого локального максимума, тогда $f(x_0) \geqslant f(x_0 + \Delta x)$ при достаточно малых Δx. Отсюда

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leqslant 0 \qquad \text{при достаточно малых } \Delta x > 0,$$

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geqslant 0 \qquad \text{при достаточно малых } \Delta x < 0.$$

Переходя к пределу, получаем

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leqslant 0 \qquad \text{при } \Delta x > 0,$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geqslant 0 \qquad \text{при } \Delta x < 0.$$

Поскольку $f'(x_0)$ является числом, не зависящим от способа стремления Δx к нулю, два последних соотношения совместимы лишь в том случае, когда

$$f'(x_0) = 0.$$

Аналогично доказывается теорема для случая, когда x_0 — точка нестрого локального минимума функции. Теорема верна и в случае строгого экстремума. При доказательстве используется тот факт, что строгое неравенство в пределе переходит в нестрогое. ■

Таким образом, экстремум дифференцируемой функции следует искать только в тех точках, где производная равна нулю; такие точки будем называть *стационарными.*

По латыни слово *stationnare* означает «стоящий», «неподвижный». Это название вполне оправдано. Представим себе график дифференцируемой функции в виде твердой поверхности и шарик, помещенный на какую-либо его точку.

Если шарик поместить точно на стационарную точку и не двигать его, то он останется на месте (будет «стоящим», «неподвижным»), поскольку касательная к графику в стационарной точке горизонтальна: $f'(x) = \operatorname{tg}\alpha = 0$.

Если же шарик находится на точке графика функции, в которой производная положительна (отрицательна), то шарик покатится, поскольку касательная к графику функции имеет в этой точке наклон

$$f'(x) = \operatorname{tg}\alpha > 0 \qquad \Big(f'(x) = \operatorname{tg}\alpha < 0\Big).$$

На рис. 9.3 изображены стационарные точки, а на рис. 9.4 — нестационарные.

Не следует думать, что каждая стационарная точка доставляет экстремум: указанное необходимое условие не является достаточным.

Например, для функции $f(x) = x^3$ производная $3\,x^2$ обращается в нуль при $x = 0$, но в этой точке, как мы уже видели из рис. 9.2, функция x^3 не имеет экстремума: она все время возрастает.

Если расширить класс рассматриваемых функций и допустить, что в отдельных точках производная равна бесконечности или вовсе не существует, то не исключена возможность того, что экстремум придется на какую-либо из таких точек. На рис. 9.5 изображены подобные возможности. Например, функция $g(x) = x^{2/3}$, очевидно, имеет строгий минимум при $x = 0$ (рис. 9.5), в то время как производная ее $\dfrac{2}{3}\,x^{-1/3}$ равна бесконечности в этой точке, точно так же в точке $x = 0$ имеет строгий минимум

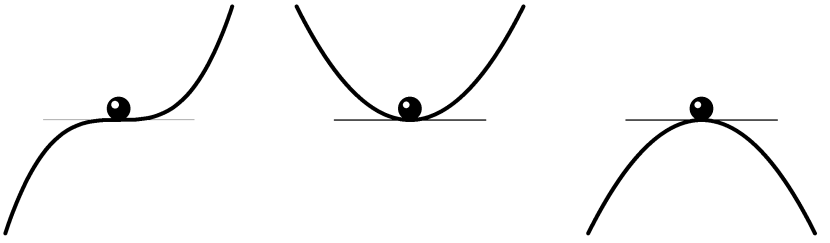


Рис. 9.3. Стационарные точки

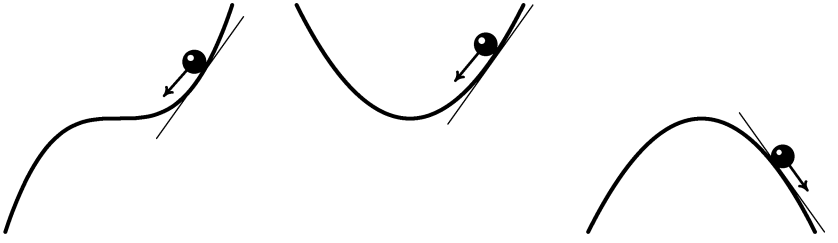
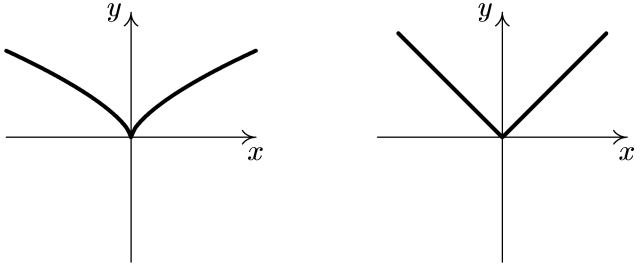


Рис. 9.4. Нестационарные точки



$g'(0) = \infty$ $\varphi'(0)$ не существует

Рис. 9.5. Минимум функции в точке $x = 0$

функция $\varphi(x) = |x|$, хотя производной для нее в этой точке вовсе нет.

Следовательно, и точки, в которых производная бесконечна или не существует, также могут доставлять функции экстремум. Стационарные точки, а также точки, в которой функция имеет бесконечную производную или в которой производная не существует, называются *критическими*. Из сказанного следует, что точки экстремума для расширенного класса функций следует искать среди критических точек.

Геометрически это означает, что точки экстремума следует искать в тех точках, где касательная горизонтальна ($y' = 0$), вертикальна ($y' = \infty$) или не существует (нет производной).

9.3. Достаточные условия существования экстремума

Итак, если точка x_0 есть критическая точка для функции $f(x)$, то точка x_0 представляется, так сказать, лишь «подозрительной» по экстремуму и подлежит дальнейшему испытанию. Это испытание состоит в проверке достоверных условий для существования экстремума. В этом параграфе рассматриваются три правила для испытания «подозрительного» значения x_0.

Теорема 1 (первое правило). *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку x_0, и дифференцируема во всех точках этого интервала, кроме, может быть, самой точки x_0.*

Если при переходе аргумента слева направо через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то функция $f(x)$ в этой точке имеет строгий локальный максимум.

Если при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, то функция имеет в этой точке строгий локальный минимум.

Если при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ сохраняет постоянный знак, то функция не имеет строгого локального экстремума.

□ Пусть x_0 — критическая точка и при переходе аргумента через точку x_0 знак производной изменяется с плюса на минус. Из достаточных условий монотонности функции следует, что на интервале $(x_0 - \Delta x,\ x_0)$, $\Delta x > 0$, функция строго возрастает, а на $(x_0,\ x_0 + \Delta x)$, $\Delta x > 0$, строго убывает. Следовательно, в точке $x = x_0$ значения функции $f(x)$ больше, чем ее значения во всех точках интервала $(x_0 - \Delta x,\ x_0 + \Delta x)$, а это означает, что в точке x_0 функция имеет максимум.

Аналогично доказывается вторая часть теоремы.

Докажем третью часть теоремы.

Пусть производная при переходе через точку x_0 сохраняет знак плюс, т. е.

$$f'(x) > 0, \qquad \text{при } x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon, \qquad x \neq x_0.$$

Отсюда и из теоремы о достаточном условии строгой монотонности функции следует, что функция строго возрастает как на отрезке $[x_0 - \varepsilon,\ x_0]$, так и на отрезке $[x_0,\ x_0 + \varepsilon]$. Следовательно, функция не имеет ни максимума, ни минимума при $x = x_0$.

Третья часть теоремы в случае, когда производная при переходе через точку x_0 сохраняет знак минус, доказывается точно так же. ■

Таким образом, первое правило для испытания «подозрительного» значения x_0 таково: подставляется в выражение для производной $f'(x)$ сначала $x < x_0$, а затем $x > x_0$; устанавливается знак вблизи от точки x_0 слева и справа от нее; если при этом производная $f'(x)$ меняет знак плюс на минус, то в точке x_0 — максимум; если производная $f'(x)$ меняет знак минуса на плюс, то — минимум; если же производная знака не меняет, то экстремума вовсе нет.

▽ **Пример 1.** Даны функции:
1) $y = x^2$;
2) $y = x^{2/3}$;
3) $y = |x|$;
4) $y = x^3$.

Для всех четырех функций точка $x = 0$ является критической: в первом и четвертом случаях производная в точке $x = 0$ обращается в нуль, во втором — равна бесконечности, в третьем — не существует. Используя первое правило, исследовать критическую точку $x = 0$ на экстремум.

Решение. Все четыре функции непрерывны на числовой оси. Производные функций $y = x^2$, $y = x^{2/3}$ и $y = |x|$ меняют знак при переходе через точку $x = 0$ с минуса на плюс. Это означает, что критическая точка $x = 0$ является для этих функций точкой строгого локального минимума. Функция $y = x^3$ при переходе через точку $x = 0$ сохраняет положительное значение производной. Следовательно, для функции $y = x^3$ точка $x = 0$ не является точкой экстремума. ▲

▽ **Пример 2.** Исследовать на экстремум функцию $f(x) = x^3 - 3\,x$.

Решение. Находим производную функции

$$f'(x) = 3\,x^2 - 3 = 3\,(x + 1)\,(x - 1).$$

Приравняв производную нулю, находим стационарные точки $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. В данном случае производная определена

всюду. Значит, кроме двух найденных точек, других критических точек нет. При переходе через точку $x = -1$ производная меняет знак с плюса на минус, а при переходе через точку $x = 1$ — с минуса на плюс. Следовательно, в точке $x = -1$ функция имеет строгий локальный максимум, а в точке $x = 1$ — строгий локальный минимум. ▲

При разыскании экстремумов исследование знака производной вблизи испытуемой точки можно заменить исследованием знака второй производной в самой точке. На этом основано второе правило.

Теорема 2 (второе правило). *Если функция $y = f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 и*

$$f'(x_0) = 0, \qquad f''(x_0) \neq 0,$$

то в этой точке $f(x)$ имеет строгий локальный экстремум; а именно: если $f''(x_0) > 0$, то $f(x_0)$ — строгий локальный минимум функции $f(x)$, и если $f''(x_0) < 0$, то $f(x_0)$ — строгий локальный максимум функции $f(x)$.

□ Пусть $f'(x_0) = 0$. Допустим, что $f''(x_0) > 0$. Это означает, что в окрестности критической точки x_0 производная $f'(x)$ строго возрастает. Но $f'(x_0) = 0$, поэтому $f'(x) < 0$ при $x < x_0$, а при $x > x_0$ имеем $f'(x) > 0$. Производная $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, если в критической точке $f''(x_0) > 0$, то функция имеет строгий минимум.

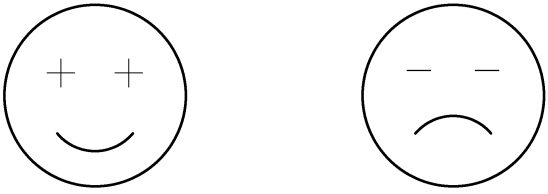
Если $f''(x_0) < 0$, то это означает, что в окрестности критической точки x_0 производная $f'(x)$ строго убывает. Но $f'(x_0) = 0$, поэтому $f'(x) > 0$ при $x < x_0$, $f'(x) < 0$ при $x > x_0$. Производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус. Значит, если в критической точке $f''(x_0) < 0$, то функция имеет строгий максимум. ■

Таким образом, второе правило для испытания «подозрительного» значения x_0 состоит в следующем: подставляем x_0 во вторую производную $f''(x)$; если $f''(x_0) > 0$, то функция имеет минимум, если же $f''(x_0) < 0$, то — максимум.

На рис. 9.6 [1)] изображены «личики», которые помогут запомнить второе правило.

Два знака (глаза) личика напоминают, что второе исходит из знака второй, а не первой производной. Конфигурация рта,

[1)] Рисунок заимствован из книги [38].



$f''(x_0) > 0$ $f''(x_0) < 0$

Рис. 9.6. Экстремум функции в стационарной точке x_0

характеризующая улыбку или грусть, означает минимум или максимум функции в стационарной точке.

Первое личико — это «рисунок» первого утверждения правила. Если глаза личика блестят $(+\ +)$, то оно улыбается. Значит, если знак второй производной плюс, то стационарная точка является точкой строгого локального минимума.

Вторая рожица — это «рисунок» второго утверждения теоремы. Если глаза личика не блестят $(-\ -)$, то оно грустит. Значит, если знак второй производной минус, то стационарная точка является точкой строго локального максимума.

▽ **Пример 3.** Используя второе правило, исследовать критическую точку $x = 0$ для функций из примера 1 на экстремум.

Решение. Для первой функции из этого примера имеем: $y = x^2$, $y' = 2x$, $y'' = 2 > 0$. Следовательно, в точке $x = 0$ — строгий локальный минимум.

Для второй и третьей функций критическая точка $x = 0$ не является стационарной, поскольку производные в нуле не равны нулю. Таким образом, второе правило не применимо для второй и третьей функций из примера 1.

Для четвертой функции точка $x = 0$ является стационарной, однако вторая производная в ней обращается в нуль, что не позволят применить второе правило для исследования этой функции на экстремум. ▲

Таким образом, второе правило имеет, вообще говоря, более узкий круг применения, чем первое; оно, например, явно неприложимо к тем точкам, где не существует конечной производной (ибо там и речи быть не может о второй). В тех случаях, когда вторая производная обращается в нуль, правило также ничего не дает.

9.4. Разыскание оптимальных значений функций

До сих пор мы интересовались лишь локальными максимумами и минимумами функции, теперь же поставим вопрос о разыскании глобального экстремума, т. е. наибольшего или наименьшего из всех значений, которые она принимает промежутке X.

В прикладных задачах чаще всего встречается простой случай, когда в промежутке X оказывается лишь одна критическая точка x_0. Если в этой точке функция имеет локальный максимум (минимум), то ясно, что это и будет наибольшее (наименьшее) значение функции в промежутке. Причем, сказанное приложимо в полной мере к любому промежутку X (к замкнутому, открытому, или же бесконечному). На этих рассуждениях основано правило.

Первое правило разыскания наибольшего или наименьшего значения: *Пусть в промежутке X оказывается лишь одна критическая точка x_0. Если в этой точке функция имеет локальный максимум (минимум), то это и будет наибольшее (наименьшее) значение функции в промежутке.*

Особенно часто этот случай встречается в прикладных задачах на экономию.

Вот простейший пример такого рода.

▽ **Пример 1.** Требуется огородить забором участок прямоугольной формы площадью 100 кв. м.

В зависимости от размеров участка расходы материала при строительстве такого забора будут различны. Действительно, сравним общие длины (периметры) ограждений двух участков схематически изображенных на рис. 9.7.

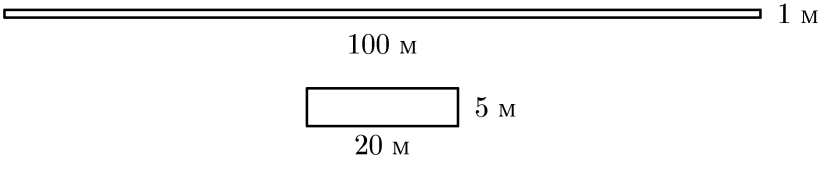


Рис. 9.7. Две ограды с площадью 100 кв. м

Длина первого прямоугольного участка равна 100 м, а ширина равна 1 м. Поэтому периметр первой ограды равен

$$2 \cdot 100 + 2\,1 = 202 \quad (\text{м}).$$

Периметр второго участка равен

$$2 \cdot 20 + 2 \cdot 5 = 50 \quad (\text{м}).$$

Как видим, периметр первой ограды более чем в 4 раза больше периметра второй ограды, хотя площади соответствующих участков одинаковы (100 кв. м). Отсюда следует, что материала на сооружение первого забора требуется гораздо больше, чем на сооружение второго, и поэтому проект второй ограды намного экономичнее первой.



Рис. 9.8. Наиболее экономичная ограда с площадью 100 кв. м

Возникает вопрос: не существует ли еще более экономичного проекта? Методом проб можно найти такую ограду — забор, огораживающий квадратный участок со сторонами 10 м (рис. 9.8). Однако как доказать, что более экономичного проекта среди прямоугольников не существует? Доказать это можно только хорошо зная правила отыскания экстремума.

Поставим и решим поставленную задачу в общем виде.

Задача. Найти наименьшую величину периметра P с данной площадью S.

Решение. Обозначим стороны прямоугольника через x, y. По условию

$$x\,y = S \tag{9.2}$$

(x и y — положительные величины). Требуется найти наименьшее значение величины

$$P = 2\,(x + y). \tag{9.3}$$

Примем за аргумент x. Выразим переменную y через x из (9.2) и подставим в (9.3). Получим

$$P = P(x) = 2\left(x + \frac{S}{x}\right) \qquad (x > 0).$$

Находим производную

$$P'(x) = 2\left(1 - \frac{S}{x^2}\right). \tag{9.4}$$

Производная при всех $x \in (0,\ +\infty)$ существует и принимает конечные значения. Поэтому критические точки могут быть только

среди стационарных. Приравняв выражение $2\left(1-\dfrac{S}{x^2}\right)$ нулю, находим $x=\sqrt{S}$.

Используя первое правило отыскания экстремума, покажем, что точка $x=\sqrt{S}$ является точкой минимума. Из (9.4) видно, что при $0<x<\sqrt{S}$ производная $P'(x)$ отрицательна, а при $x>\sqrt{S}$ — положительна. Значит, имеем минимум. Будучи единственным, он является наименьшим значением периметра:

$$P_{\text{наим}}(x)=2\left(\sqrt{S}+\frac{S}{\sqrt{S}}\right)=4\sqrt{S}\,,$$

т. е. *из всех прямоугольников с данной площадью S наименьший периметр имеет квадрат* $\left(x=\sqrt{S}\,,\ y=\sqrt{S}\right)$. ▲

Таким образом, доказано, что из всех прямоугольников с данной площадью S наименьшим периметром обладает квадрат. Однако, не следует думать, что из всех прямоугольников квадрат всегда будет оптимальной фигурой. Все зависит от постановки задачи. Ниже рассмотрен пример, показывающий, что оптимальной фигурой может оказаться вовсе не квадрат.

▽ **Пример 2.** Требуется оградить забором прямоугольный участок земли площадью 294 кв. м и затем разделить его на две равные части перегородкой. Каковы должны быть размеры участка, чтобы на постройку забора и перегородки было истрачено наименьшее количество материала?

Решение. Будем решать задачу сразу в общем виде без рассмотрения предварительных проектов. Обозначим ширину прямоугольного участка через x, а длину через y.

Из условий задачи следует, что $x\in(0,\ +\infty)$ (сторона прямоугольника неотрицательна).

Поскольку площадь участка равна 294 кв. м, то $x\,y=S=294$. Отсюда получаем, что $y=294/x$, а общая длина P всей ограды равна

$$P(x)=3\,x+2\,y=3\,x+2\cdot 294/x.$$

Таким образом, длина всей ограды представляет собой функцию от одной переменной x, и задача сводится к нахождению наименьшего значения этой функции в интервале $(0,\ +\infty)$.

Каково же наименьшее значение функции? Если в открытом интервале имеется лишь одна критическая точка, которая

является точкой локального минимума, то именно она и будет наименьшим значением функции в рассматриваемом интервале.

Проверим, имеет ли функция $P(x)$ критические точки в интервале $(0, +\infty)$. Для нахождения критических точек следует предварительно найти производную функции. Найдем ее.

$$P'(x) = (3\,x + 2 \cdot 294/x)' = 3 - 2 \cdot 294x^{-2} = (3\,x^2 - 588)/x^2.$$

В интервале $(0,\ +\infty)$ выражение $(3\,x^2 - 588)/x^2$ всегда имеет смысл, значит, для функции $P(x)$ нет точек, в которых ее производная бесконечна или не существует. Проверим, не обращается ли где-нибудь производная $P'(x)$ в нуль. Для этого приравняем выражение $(3\,x^2 - 588)/x^2$ к нулю. Дробь равна нулю, когда ее числитель обращается в нуль. Поэтому $3\,x^2 - 588 = 0$. Последнее уравнение имеет два решения $x = -14$ и $x = 14$. Значение $x = -14$ не входит в рассматриваемый интервал. Поэтому в интервале $(0,\ +\infty)$ у функции $P(x)$ имеется лишь одна критическая точка $x = 14$.

Проверим является ли эта критическая точка точкой минимума. Значение $x = 14$ входит в рассматриваемый интервал и разбивает его на два интервала $(0,\ 14)$ и $(14,\ +\infty)$, в которых производная не меняет знак. Поэтому, выбирая в каждом из полученных интервалов произвольную точку, определяем знак производной в них. В первом интервале производная оказывается отрицательной (в этом интервале функция строго убывает), а во втором интервале производная положительна (здесь функция строго возрастает). Так как при переходе через точку $x = 14$ производная меняет знак с минуса на плюс, то, согласно первому правилу отыскания экстремума, функция имеет в этой точке строгий локальный минимум. Отсюда следует, что в точке $x = 14$ достигается наименьшее значение функции $P(x)$ в интервале $(0, +\infty)$.

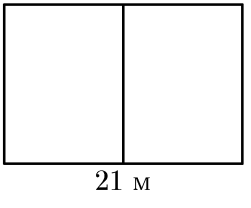


Рис. 9.9. Ограда с перегородкой

Практически же это означает, что наименьшее количество материала на ограду участка будет истрачено при ширине забора 14 м. Найдем длину участка, когда ширина равна 14 м:

$$y = 294/x = 294/14 = 21 \quad (\text{м}).$$

Таким образом, размеры ограды должны быть 21×14. Именно при таких размерах участка расходы строительного материала будут наименьшими. Общая

длина оптимальной (наиболее экономичной) ограды равна $2 \cdot 21 + 3 \cdot 14 = 42 + 42 = 84$ (м).

Заметим, что ограды, огораживающие квадратный участок, или же участок, составленный из двух квадратов, не являются оптимальными.

Действительно, в случае квадрата имеем:

$$x = y, \qquad S = x\,y = x^2, \qquad x = \sqrt{294} \approx 17{,}146,$$
$$P = 2\,x + 3\,y \approx 5 \cdot 17{,}146 = 85{,}73,$$

т. е. общая длина ограды в этом случае больше 84 м.

Для случая двух квадратов имеем:

$$y = 2\,x, \qquad S = x\,y = 2\,x^2, \qquad x = \sqrt{294/2} \approx 12{,}124,$$
$$P = 2\,x + 3\,y \approx 8 \cdot 12{,}124 = 96{,}992.$$

Общая длина ограды в этом случае еще больше. ▲

Задача 1. Требуется огородить забором прямоугольный участок земли площадью S м^2 и затем разделить его на n частей $n-1$ перегородками, параллельными меньшей стороне участка. Каковы должны быть размеры участка (ширина x и длина y), чтобы на постройку забора и перегородок было израсходовано наименьшее количество материала.

Указание. Площадь S равна $x\,y$, откуда $y = S/x$. Подставляя это выражение для y в формулу вычисления периметра (общей длины ограды с перегородками) $P = (n+1) \cdot x + 2\,y$, получим $P(x) = (n+1) \cdot x + 2S/x$.

Ответ: Наименьшее значение в интервале $(0,\ +\infty)$ эта функция принимает в точке $x = \sqrt{2\,S/(n+1)}$.

Рассмотренные выше примеры представляют задачи на нахождение наименьшего значения. Ниже рассматривается прикладная задача на отыскание наибольшего значения.

▽ **Пример 3 (Задача Дидоны).** Из имеющихся досок можно сделать забор длиной l. Как этим забором огородить прямоугольный двор наибольшей площади, используя в качестве одной стороны стену прилегающего здания (рис. 9.10)?

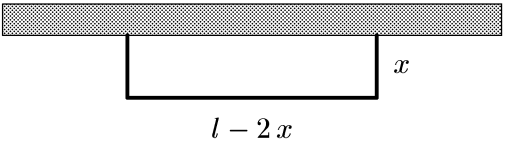


Рис. 9.10. Задача Дидоны

Решение. Пусть две стороны забора имеют длину x $(0 < x < l/2)$; тогда третья сторона имеет длину $l - 2x$. Площадь двора $S(x) = (l - 2x)x = -2x^2 + lx$, откуда $S'(x) = -4x + l$. Функция $S'(x)$ существует и конечна для всех x из интервала $(0,\ l/2)$. Поэтому единственной критической точкой в интервале $(0,\ l/2)$ является точка $x = l/4$, в которой $S'(x)$ обращается в нуль.

Проверим является ли эта критическая точка точкой локального экстремума. Воспользуемся вторым правилом отыскания экстремума:

$$S''(x) = -4 < 0.$$

Вторая производная отрицательна (лицо грустит). Так что при $x = l/4$ функция $S(x)$ имеет локальный максимум, который и является наибольшим значением функции $S(x)$ в интервале $(0,\ l/2)$.

Рассмотренный пример является одним из вариантов так называемой *задачи Дидоны.* По преданию, мифическая основательница города Карфагена в Северной Африке финикийская царица Дидона в ответ на обращенную к вождю прибрежного племени просьбу о выделении ей территории для постройки города получила издевательское согласие уступить участок земли «в пределах бычьей шкуры». Однако хитрая Дидона не просто покрыла шкурой крошечную часть побережья, как рассчитывали аборигены, а разрезав шкуру на тонкие ремни, отгородила этими ремнями довольно большой участок, который удалось сделать еще большим, воспользовавшись берегом моря. ▲

Итак, если функция внутри отрезка $[a,\ b]$ имеет один максимум (минимум), то это и есть наибольшее (наименьшее) ее значение при $x \in [a,\ b]$. В следующем разделе, посвященном приложениям в социально-экономической сфере приводятся другие примеры и задачи на первое правило отыскания экстремума.

Если же функция не имеет экстремума внутри отрезка, как, например, линейная функция, то наибольшее (наименьшее) ее значение будет в граничных точках.

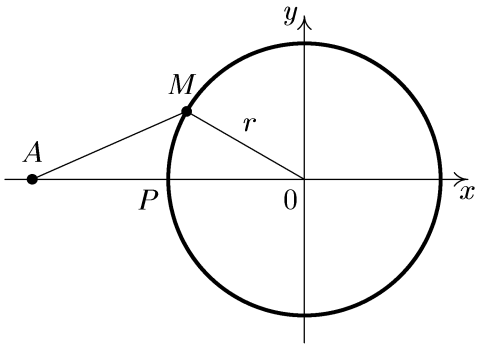


Рис. 9.11. Парадокс Декарта

Ферма́, нашедший необходимый признак экстремума, сообщил его в 1838 году без доказательства Декарту. Последний испробовал правило Ферма́ на нижеследующем примере и пришел к ошибочному выводу, что признак неверен.

▽ **Пример 4 (парадокс Декарта).** Найти на окружности

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{9.5}$$

точку, ближайшую к точке $A(-a,\ 0),\ a > 0$ (рис. (9.11).

Решение. Если $M(x,\ y)$ — произвольная точка окружности, то

$$|AM|^2 = (x + a)^2 + (y - 0)^2,$$

или в силу (9.5)

$$|AM|^2 = (x + a)^2 + r^2 - x^2 = 2\,a\,x + a^2 + r^2.$$

Для разыскания минимума величины $|AM|^2$ Декарт составил уравнение, которое теперь мы пишем так:

$$(2\,a\,x + a^2 + r^2)' = 0.$$

Декарт нашел отсюда $2\,a = 0$ и посчитал, что это приводит к противоречию, ибо по условию $a \neq 0$, и заключил, что необходимый признак минимума неверен. Между тем геометрически ясно, что искомая точка существует и совпадает с точкой $P(-r,\ 0)$. Эта точка не обнаруживается с помощью производной, поскольку наименьшее значение $|AM|^2$ не является минимумом. Действительно, x принимает значения на отрезке $[a,\ b]$, а функция $|AM|^2 = 2\,a\,x + a^2 + r^2$ является линейной, поэтому принимает наименьшее значение на конце промежутка $x = -r$.

Кажущееся противоречие связано с неверным отождествлением понятия наименьшего значения и локального минимума. ▲

Таким образом, в случаях, когда для функции, заданной на отрезке, экстремум отсутствует, или же функция имеет не менее двух экстремумов, требуется другое правило отыскания наибольшего или наименьшего значения, отличное от первого.

Второе правило разыскания наибольшего или наименьшего значения: *Пусть непрерывная функция* $y = f(x)$ *задана на отрезке* $[a,\ b]$.

1. Найдем все критические точки функции на отрезке $[a,\ b]$ *и вычислим значение функции в этих точках, не выясняя характера экстремума.*

2. Вычислим значения функции на концах отрезка.

3. Запишем полученные значения функции в порядке возрастания.

Тогда первое число является наименьшим значением $f(x)$, *а последнее — наибольшим значением функции на отрезке.*

Пример 4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^3 - 3\,x$ на отрезке $[0,\ 2]$.

Решение. Найдем производную; $y' = 3\,x^2 - 3$. Она всегда имеет смысл и обращается в нуль в двух точках: $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$. Из них только одна $x_2 = 1$ лежит в рассматриваемом промежутке; следовательно, только она должна приниматься во внимание. Для отыскания наибольших и наименьших значений функции необходимо вычислить значения функции в критических точках, а также на концах отрезка:

$$y(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 = 0, \quad y(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = -2, \quad y(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 = 2.$$

Наибольшим среди найденных значений является число 2, а наименьшим — число (-2).

Итак, $y_{\text{наиб}} = y(2) = 2$, $y_{\text{наим}} = y(1) = -2$; наибольшее значение достигается на конце промежутка, а наименьшее — внутри. ▲

Задача 2. Найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции $y = x^3 - 3\,x^2 - 45\,x + 225$ на отрезке $[0,\ 6]$.

Ответ: $y_{\text{наиб}} = y(0) = 225$, $y_{\text{наим}} = y(5) = 50$.

▽ **Пример 5 (о наименьшей стоимости перевозок).** Завод A нужно соединить шоссейной дорогой с прямолинейной железной дорогой, на которой расположен город B. Расстояние $|AO|$ от завода до железной дороги равно a, расстояние $|OB|$

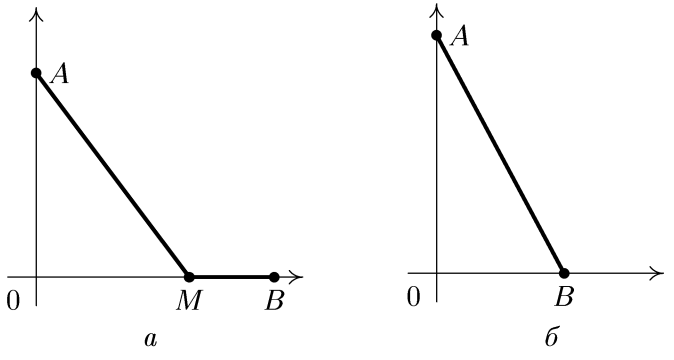


Рис. 9.12. Задача о наименьшей стоимости перевозок

по железной дороге равно l. Стоимость перевозок по шоссе в k раз дороже стоимости перевозок по железной дороге ($k > 1$).

Как провести шоссе AM к железной дороге, чтобы стоимость перевозок от завода к городу была наименьшей?

Решение. Сделаем чертеж (рис. 9.12, *а*). Ясно, что шоссе тоже должно быть прямолинейным (прямая короче любой кривой, соединяющей данные две точки). Кроме того, пункт M не может лежать левее точки A и правее точки B. Если расстояние $|MB|$ обозначить через x, то $0 \leqslant x \leqslant l$.

Пусть стоимость провоза по железной дороге m, тогда стоимость провоза по шоссе будет $k\,m$. Общая стоимость P провоза из A в B равна $P = m\,x + k\,m\,\sqrt{a^2 + (l-x)^2}$. Следовательно, нужно найти наименьшее значение функции $f(x) = x + k\,\sqrt{a^2 + (l-x)^2}$, $(0 \leqslant x \leqslant l)$. Она имеет смысл при всех x. Поэтому критические точки функции $f(x)$ могут быть только среди стационарных. Приравняем производную к нулю:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{a^2 + (l-x)^2} + k\,(x-l)}{\sqrt{a^2 + (l-x)^2}} = 0.$$

Тогда

$$\sqrt{a^2 + (l-x)^2} + k\,(x-l) = 0, \qquad a^2 + (l-x)^2 = k^2\,(l-x)^2,$$

$$(l-x)^2\,(k^2-1) = a^2.$$

Отсюда следует, что единственной критической точкой в интервале $(0,\ +\infty)$ является

$$x = l - \frac{a}{\sqrt{k^2 - 1}}.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай — найденная точка попадает в интервал $(0,\ l)$, второй — найденная точка не попадает в интервал $(0,\ l)$.

Первый случай. Если найденная точка лежит в интервале $(0,\ l)$, то производная $f'(x)$ при переходе через эту точку меняет знак с минуса на плюс. Поэтому найденная точка дает наименьшую стоимость перевозок.

Второй случай. Если же найденная точка не попадает в интервал $(0,\ l)$, то производная неотрицательна в промежутке $[0, l]$, а значит сама функция $f(x)$ неубывает на этом отрезке и поэтому наименьшая стоимость перевозок достигается при $x = 0$. Второй случай показан на рис. 9.12, *б*.

9.5. Выпуклость функции. Точки перегиба

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *выпуклым вниз* в данном промежутке, если соответствующая часть графика расположена выше касательной, проведенной в любой точке промежутка.

Аналогично, график дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *выпуклым вверх* в промежутке, если соответствующая часть кривой расположена ниже любой касательной (рис. 9.13).

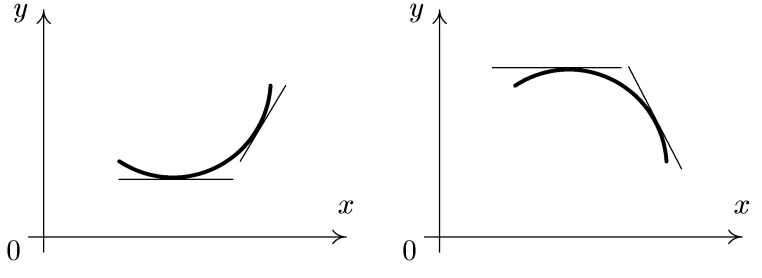


Рис. 9.13. Выпуклость вниз и выпуклость вверх

Теорема 1 (Достаточное условие выпуклости графика функции). *Если вторая производная дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$ в данном промежутке X положительна,*

то график ее является выпуклым вниз в этом промежутке; *если* $f''(x) < 0$, *то график является выпуклым вверх в соответствующем промежутке.*

□ Пусть функция $y = f(x)$ такова, что $f''(x) > 0$ для всех x из промежутка X. Фиксируем $x_0 \in X$, запишем уравнение касательной в этой точке, обозначив текущую ординату касательной через $\overline{y}$:

$$\overline{y} - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0). \tag{9.6}$$

Разложим данную функцию в окрестности x_0 по формуле Тейлора, приняв $n = 2$:

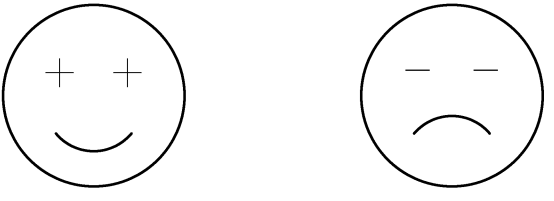
$$y = f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}\,(x - x_0)^2, \tag{9.7}$$

где c лежит между x и x_0.

Из формул (9.6) и (9.7) получаем $y - \overline{y} = \dfrac{f''(c)}{2!}\,(x - x_0)^2$. Поскольку $(x - x_0)^2 > 0$ и по условию $f''(c) > 0$, то $y - \overline{y} > 0$, или $y > \overline{y}$.

Последнее неравенство означает, что график функции $y = f(x)$ лежит выше касательной. Следовательно, в промежутке X график функции будет выпуклым вниз.

Аналогично доказывается второе утверждение теоремы. ■



$y'' > 0$ $y'' < 0$

Рис. 9.14. Выпуклость вниз и выпуклость вверх

На рис. 9.14 изображены «личики», которые помогут запомнить утверждение доказанной теоремы. Два знака (глаза) личика напоминают, что достаточное условие выпуклости исходит из знака второй, а не первой производной. Конфигурация рта, характеризующая улыбку или грусть, означает выпуклость вниз или вверх.

Первое личико — это «рисунок» первого утверждения теоремы. Если глаза личика блестят $(+\,+)$, то оно улыбается. Значит, если знак второй производной плюс, то функция выпукла вниз.

Второе личико — это «рисунок» второго утверждения теоремы. Если глаза личика не блестят $(-\,-)$, то оно грустит. Значит, если знак второй производной минус, то функция выпукла вверх.

Необходимое условие выпуклости слабее: если функция выпукла в промежутке X, то можно утверждать лишь, что $f''(x) \geqslant 0$ (или $f''(x) \leqslant 0$), $x \in X$. Например, функция $y = x^4$ выпукла вниз на всей числовой оси, хотя вторая производная $y'' = 13\,x^2$ не всюду положительна: $f''(0) = 0$ при $x = 0$.

Определение. *Точкой перегиба* графика непрерывной функции называется точка, разделяющая интервалы, в которых функция выпукла вниз и вверх.

Эквивалентное определение: точкой перегиба графика функции $y = f(x)$ называется точка $M(x_0, f(x_0))$, при переходе через которую меняется направление выпуклости кривой.

Если, например, для $x < x_0$ кривая является выпуклой вверх и $M(x_0, f(x_0))$ — точка перегиба, то для $x > x_0$ кривая становится выпуклой вниз.

Иными словами, точка перегиба графика функции — эта точка, в которой кривая переходит с одной стороны касательной на другую ее сторону (рис. 9.15).

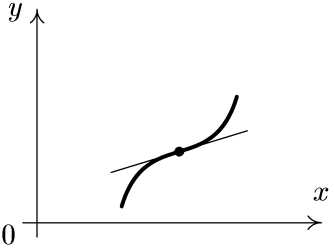


Рис. 9.15. Точка перегиба

Из теоремы 1 следует, что у дважды дифференцируемой функции в тех промежутках, в которых вторая производная не равна нулю, не может быть точек перегиба. Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 2 (необходимое условие перегиба). *Если $M(x_0, f(x_0))$ — точка перегиба графика функции $y = f(x)$, то $f''(x_0) = 0$.*

Теорема 3 (достаточное условие перегиба). *Если при переходе через точку $x = x_0$ вторая производная дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$ меняет знак, то $M(x_0,\ f(x_0))$ — точка перегиба графика этой функции.*

□ Пусть $f''(x) < 0$ при $x \in (x_0 - \varepsilon,\ x_0)$ $(\varepsilon > 0)$ и $f''(x) > 0$ при $x \in (x_0,\ x_0 + \varepsilon)$, тогда согласно теореме 1 график функции является выпуклым вверх в интервале $(x_0 - \varepsilon,\ x_0)$ и выпуклым

вниз в интервале $(x_0,\ x_0+\varepsilon)$. Следовательно, при переходе через точку M выпуклость вверх меняется на выпуклость вниз, т. е. M — точка перегиба. ■

Чтобы найти все точки перегиба графика дифференцируемой функции $y=f(x)$, надо испытать все те значения x, в которых вторая производная $f''(x)$ равна нулю, бесконечна или не существует (только в таких точках перегиб возможен).

Если при переходе через одно из этих значений вторая производная меняет знак, то линия имеет в этой точке перегиб. Если же не меняет, то перегиба нет.

▽ **Пример.** Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графиков следующих функций:

$$\text{а) } y=x^3-3\,x; \qquad \text{б) } y=x+x^{5/3}; \qquad \text{в) } y=\frac{x}{1+x^2}.$$

Решение.

а) $y'=3\,x^2-3$, $y''=6\,x$, $y''=0$ при $x=0$. Если $y''<0$ (глаза опущены $--$, личико грустит), то функция выпукла вверх. Поскольку $y''=6\,x<0$ при $x<0$, на интервале $(-\infty,\ 0)$ функция выпукла вверх. Если $y''=6\,x>0$, то $x>0$. Значит, на интервале $(0,\ +\infty)$ функция выпукла вниз (глаза блестят $++$, личико улыбается). Поскольку при переходе через точку $x=0$ вторая производная меняет знак, точка $O(0,\ 0)$ является точкой перегиба.

б) Найдем производные:

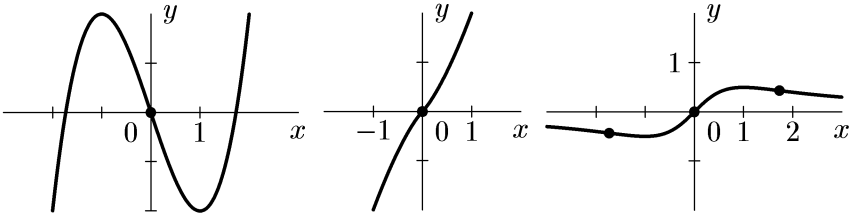
$$y'=1+\frac{5}{3}\,x^{2/3}, \qquad y''=\frac{10}{9\sqrt[3]{x}}.$$

Вторая производная нигде не равна нулю и теряет смысл (обращается в бесконечность) в точке $x=0$. При $x<0$ имеем $y''<0$ и кривая выпукла вверх, при $x>0$ имеем $y''>0$ и кривая выпукла вниз. Вторая производная меняет знак при переходе через точку $x=0$. Поэтому точка $O(0,\ 0)$ — точка перегиба.

в) Найдем производные:

$$y'=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}, \qquad y''=-2\,x\,\frac{3-x^2}{(1+x^2)^3}.$$

Вторая производная y'' равна нулю, если $x=-\sqrt{3}\,,\ 0,\ \sqrt{3}\,$. На интервалах $(-\infty,\ -\sqrt{3}\,)$, $(0,\sqrt{3}\,)$ вторая производная отрицательна — следовательно, функция на этих интервалах выпукла



$y = x^3 - 3\,x$ $\qquad$ $y = x + x^{5/3}$ $\qquad$ $y = x/(1 + x^2)$

Рис. 9.16. Точки перегиба некоторых функций

вверх. На интервалах $(-\sqrt{3},\ 0)$, $(\sqrt{3},\ +\infty)$ вторая производная положительна — следовательно, функция на этих интервалах выпукла вниз. Во всех трех точках $x = -\sqrt{3},\ 0,\ \sqrt{3}$ вторая производная меняет знак. Откуда заключаем, что все три точки являются точками перегиба.

Графики всех трех функций изображены на рис. 9.16. ▲

Задача. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости графика функции $y = -x^{1/3}$.

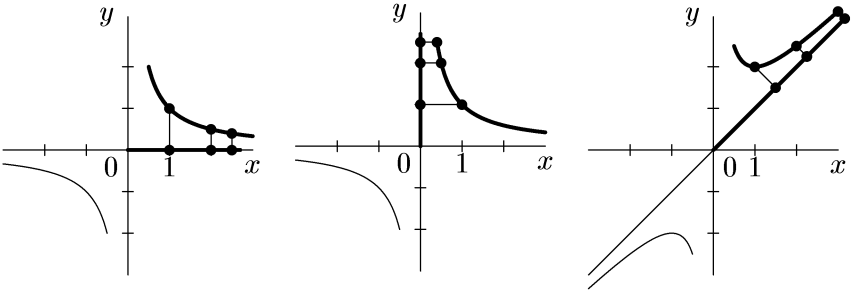
Ответ: Точка перегиба одна — $O(0,\ 0)$. В интервале $(-\infty,\ 0)$ кривая выпукла вверх, а в интервале $(0,\ +\infty)$ — вниз.

Заметим, что для непрерывных функций, которые являются дифференцируемыми не во всех точках, также используется понятие выпуклости кривой. Оно возникает, например, в математическом программировании. Здесь не может быть использовано наше определение, использующее понятие касательной (касательной в этом случае может и не быть). Поэтому пользуются другим определением, основанном на понятии хорды. График функции (или сама функция) называется выпуклым (выпуклой) вниз, если каждая дуга кривой лежит не выше своей хорды. График функции (или сама функция) называется выпуклым (выпуклой) вверх, если каждая дуга кривой лежит не ниже своей хорды.

В случае дифференцируемых функций определения, основанные на понятиях касательной и хорды, совпадают.

9.6. Асимптоты графика функции

В предыдущих параграфах мы изучали характерные точки. Теперь рассмотрим характерные линии, именуемыми асимптотами.



а, горизонтальная *б*, вертикальная *в*, наклонная

Рис. 9.17. Асимптоты

Вспомним как выглядит знакомый нам график функции $y = \frac{1}{x}$. Нетрудно заметить, что при удалении точки этого графика вправо от начала координат расстояние от нее до прямой $y = 0$ (оси Ox) стремится к нулю (рис. 9.17, *а*). В этом случае говорят, что кривая $y = 1/x$ имеет *горизонтальную асимптоту* $y = 0$.

При удалении точки графика вверх от начала координат расстояние от нее до прямой $x = 0$ (оси Oy) также стремится к нулю (рис. 9.17, *б*). Говорят, что прямая $x = 0$ является *вертикальной асимптотой*.

График функции может иметь также и *наклонную асимптоту*. Таков, например, график функции $y = x + 1/x$. При удалении точки графика от начала координат расстояние до прямой $y = x$ неуклонно сокращается (рис. 9.17, *в*).

Термин асимптота введен древнегреческим ученым Аполлонием Пергским при изучении гиперболы и происходит от греческого слова «асимтотос», означающего «несовпадающий». Пусть это слово не вводит вас в заблуждение. Асимптоты гиперболы действительно не пересекают график функции (т. е. являются в некотором смысле «несовпадающими»). Однако, согласно современным представлениям об асимптоте, кривая может пересекать свою асимптоту (например, график затухающих колебаний, изображенный на рис. 9.18).

> *АПОЛЛО́НИЙ Пергский (около 260–170 до н.э.) — древнегреческий математик. Его труд «Конические сечения» (в 8 книгах) оказал огромное влияние на развитие астрономии, механики и оптики. Аполлоний ввел понятия и термины: «гипербола», «парабола», «эллипс», «фокус», «асимптота».*

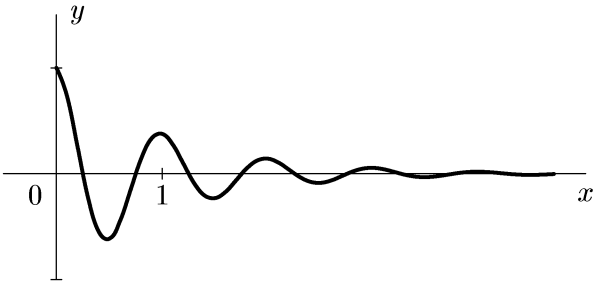


Рис. 9.18. Асимптота — ось Ox

Определение. *Асимптотой графика функции* $y = f(x)$ называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки $\big(x,\ f(x)\big)$ до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Различают три вида асимптот: вертикальные, горизонтальные и наклонные.

Вертикальные асимптоты. График функции $y = f(x)$ при $x \to a$ имеет вертикальную асимптоту, если

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \quad \text{или} \quad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty;}$$

при этом точка $x = a$ есть точка разрыва. Уравнение вертикальной асимптоты имеет вид

$$\boxed{x = a}$$

(рис. 9.19).

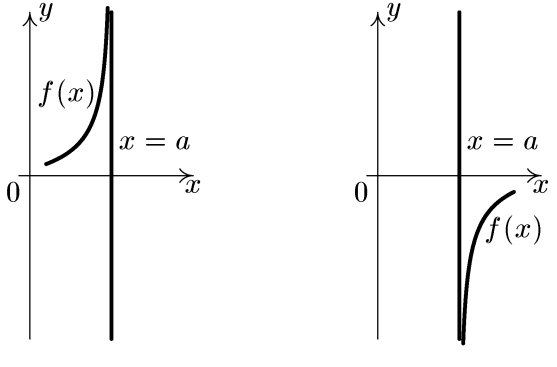


Рис. 9.19. Вертикальные асимптоты

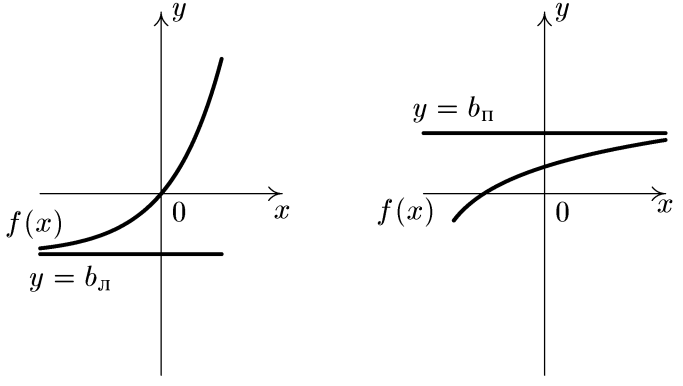
Вертикальные асимптоты $x = a$ следует искать в точках разрыва функции или на концах ее области определения, если концы не равны $\pm\infty$.

Горизонтальные асимптоты. График функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$ имеет горизонтальную асимптоту, если существует и конечен хотя бы один из пределов:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b_{\text{л}} \quad \text{или} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = b_{\text{п}}.$$

Если конечен предел $b_{\text{л}}$, то говорят, что существует *левосторонняя* горизонтальная асимптота $y = b_{\text{л}}$.

Если конечен предел $b_{\text{п}}$, то говорят о существовании *правосторонней асимптоты* $y = b_{\text{п}}$ (рис. 9.20).



левосторонняя правосторонняя

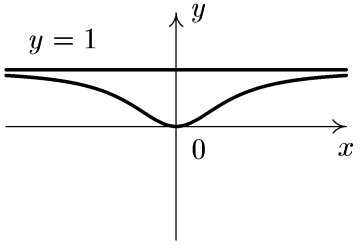
Рис. 9.20. Горизонтальные асимптоты

В случае, когда конечные пределы $b_{\text{л}}$ и $b_{\text{п}}$ совпадают: $b_{\text{л}} = b_{\text{п}}$, говорят, что график функции $y = f(x)$ имеет *двустороннюю* горизонтальную асимптоту $y = b$. Примеры двусторонних горизонтальных асимптот приведены на рис. 9.21.

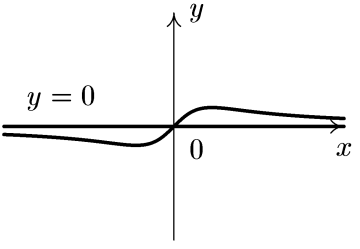
В том случае, если

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty,$$

график функции не имеет горизонтальных асимптот, но может иметь наклонные.



$y = x^2/(1+x^2)$



$y = x/(1+x^2)$

Рис. 9.21. Двусторонние горизонтальные асимптоты

Наклонные асимптоты. *Наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ называется ее асимптота, задаваемая уравнением

$$\boxed{y = k\,x + b.}$$

Наклонная асимптота, так же, как и горизонтальная, может быть правосторонней, левосторонней и двусторонней.

Теорема. *Пусть функция $y = f(x)$ определена при достаточно больших x и существуют конечные пределы*

$$\boxed{k_{\text{п}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b_{\text{п}} = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - k\,x\big).}$$

Тогда прямая $y = k_{\text{п}}\,x + b_{\text{п}}$ является правосторонней наклонной асимптотой.

□ Если $y = k_{\text{п}}\,x + b_{\text{п}}$ — наклонная асимптота, то справедливо равенство

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - (k_{\text{п}}\,x + b_{\text{п}})\big) = 0 \tag{9.8}$$

и, тем более,

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - k_{\text{п}} - \frac{b_{\text{п}}}{x}\right) = 0.$$

Поэтому

$$k_{\text{п}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Теперь из равенства (9.8), учитывая, что k — конечное число, получаем:

$$b_{\text{п}} = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - k\,x\big). \quad \blacksquare$$

Аналогично можно показать, что параметры $k_{\text{л}}$ и $b_{\text{л}}$ в уравнении левосторонней наклонной асимптоты $y = k_{\text{л}}\,x + b_{\text{л}}$ определяются по формулам:

$$k_{\text{л}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b_{\text{л}} = \lim_{x\to-\infty} \bigl(f(x) - k_{\text{л}}\,x\bigr).$$

На рис. 9.22 изображены наклонные асимптоты.

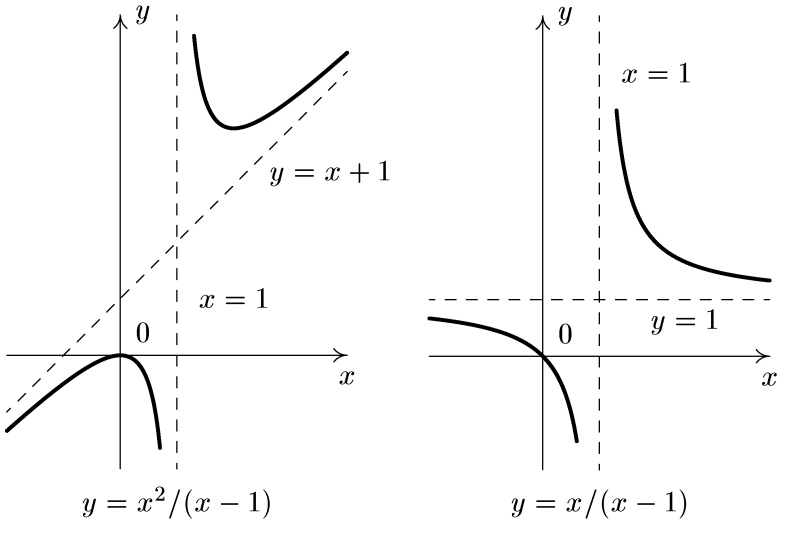


Рис. 9.22. Графики функций и их асимптоты

Замечание. Если хотя бы один из пределов

$$k_{\text{п}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b_{\text{п}} = \lim_{x\to+\infty} \bigl(f(x) - k\,x\bigr)$$

бесконечен, то правосторонней наклонной асимптоты график функции $y = f(x)$ не имеет. Аналогично, если $k_{\text{л}} = \infty$ или $b_{\text{л}} = \infty$, то левосторонней наклонной асимптоты не существует.

Если $k_{\text{л}} = k_{\text{п}} = k$, $b_{\text{л}} = b_{\text{п}} = b$ и эти числа конечны, то график функции имеет двустороннюю асимптоту $y = k\,x + b$.

На рис. 9.22 изображена двусторонняя наклонная асимптота $y = x + 1$.

При отыскании асимптот следует отдельно рассматривать случаи $x \to a - 0$ и $x \to a + 0$, а также $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

Горизонтальную асимптоту можно рассматривать как частный случай наклонной асимптоты при $k = 0$. Поэтому при отыскании асимптот рассматривают лишь два случая: 1) вертикальные асимптоты; 2) наклонные асимптоты.

Схема отыскания асимптот:

1) для отыскания вертикальных асимптот выписывают все точки разрыва функции и конечные числа на границе области определения функции. Если таких точек нет, то нет и вертикальных асимптот. Если такая точка $x = a$ имеется, то вычисляют пределы:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x \to a+0} f(x).$$

Если хотя бы один из этих пределов существует и бесконечен, то $x = a$ — вертикальная асимптота. Если оба предела не существуют или конечны, то $x = a$ не является асимптотой.

2) для отыскания правосторонней наклонной (горизонтальной) асимптоты вычисляют пределы:

$$k_{\text{п}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b_{\text{п}} = \lim_{x \to +\infty} \bigl(f(x) - k\,x\bigr).$$

Если оба предела существуют и конечны, то прямая $y = k_{\text{п}}\,x + b_{\text{п}}$ является правосторонней наклонной асимптотой (правосторонней горизонтальной асимптотой, если $k = 0$). В противном случае правосторонних наклонных и горизонтальных асимптот не существует.

Левосторонние наклонные (горизонтальные) асимптоты находятся аналогично.

▽ **Пример 1.** Найти асимптоты кривых:

а) $y = \dfrac{x}{x-1}$;

б) $y = \dfrac{x^2}{x-1}$;

в) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Решение.

а) 1) Найдем вертикальные асимптоты графика функции $y = \dfrac{x}{x-1}$ (если они существуют). Их следует искать среди точек разрыва функции или на границе ее области определения. Так как функция определена на всей числовой оси за исключением

точки $x = 1$, то вертикальной асимптотой может оказаться только прямая $x = 1$. Проверим, является ли прямая $x = 1$ асимптотой. Для этого вычислим соответствующие пределы:

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{x}{x-1} = \left(\frac{1}{-0}\right) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 1+0} \frac{x}{x-1} = \left(\frac{1}{+0}\right) = +\infty.$$

Следовательно, кривая имеет вертикальную асимптоту $x = 1$.

2) Найдем наклонные и горизонтальные асимптоты (если они есть). Для этого вычислим соответствующие пределы:

$$k_{\text{п}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\,(x-1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1} = \left(\frac{1}{+\infty}\right) = 0;$$

$$b_{\text{п}} = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - k_{\text{п}}\,x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1+1}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) = 1;$$

$$k_{\text{л}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x\,(x-1)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-1} = \left(\frac{1}{-\infty}\right) = 0;$$

$$b_{\text{л}} = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - k_{\text{л}}\,x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1+1}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) = 1,$$

т. е. $y = 1$ $(y = 0 \cdot x + 1)$ — двусторонняя горизонтальная асимптота. Других асимптот нет.

б) 1) Функция определена при всех действительных x, кроме $x = 1$. Проверим, является ли прямая $x = 1$ вертикальной асимптотой. Найдем пределы:

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{x^2}{x-1} = \left(\frac{1}{-0}\right) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 1+0} \frac{x}{x-1} = \left(\frac{1}{+0}\right) = +\infty.$$

Следовательно, имеется единственная вертикальная асимптота $x = 1$.

2) Найдем наклонные и горизонтальные асимптоты (если они есть). Для этого вычислим соответствующие пределы:

$$k_{\text{п}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x\,(x-1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1-1/x} = 1;$$

$$b_{\text{п}} = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - k_{\text{п}}\,x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x-1} - 1\cdot x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = 1;$$

$$k_{\text{л}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x\,(x-1)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1-1/x} = 1;$$

$$b_{\text{л}} = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - k_{\text{л}}\,x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x-1} - 1\cdot x\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = 1.$$

Итак, $k_{\text{п}} = k_{\text{л}} = k = 1$ и $b_{\text{п}} = b_{\text{л}} = b = 1$, следовательно, график функции имеет наклонную асимптоту $y = x + 1$.

в) 1) Функция $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ имеет смысл при всех $x \in \mathbb{R}$, поэтому ее график не имеет вертикальных асимптот.

2) Найдем наклонные и горизонтальные асимптоты:

$$k_{\text{п}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0;$$

$$b_{\text{п}} = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - k_{\text{п}}\,x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 0\cdot x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+1/x}} = 1;$$

$$k_{\text{л}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x\sqrt{x^2+1}} = 0;$$

$$b_{\text{п}} = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - k_{\text{п}}\,x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 0\cdot x\right) =$$

$$= \Big|\ \text{Замена } x = -z\ \Big| =$$

$$= \lim_{z\to-\infty}\frac{-z}{\sqrt{z^2+1}} = \lim_{z\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+1/z^2}} = -1.$$

Таким образом, при $x \to +\infty$ асимптотой служит прямая $y = 1$ (правосторонняя горизонтальные асимптота), а при $x \to -\infty$ —

прямая $y = -1$ (левосторонняя асимптота). ▲

▽ **Пример 2.** Найти асимптоты кривой $y = x^3 - 3\,x$.

Решение.

1) Вертикальных асимптот график этой функции не имеет, так как функция $y = x^3 - 3\,x$ не имеет разрывов.

2) Найдем пределы $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - 3\,x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} (x^2 - 3) = +\infty.$$

Таким образом, $k_{\text{л}} = k_{\text{п}} = \infty$. Следовательно, график функции не имеет также наклонных асимптот и горизонтальных асимптот (если бы горизонтальная асимптота существовала имели бы $k = 0$).

Итак, график функции не имеет асимптот ни вертикальных, ни наклонных, ни горизонтальных. ▲

Задача. Найти асимптоты графиков функций $y = x^2$, $y = x^2/(1 + x^2)$ и $y = x/(1 + x^2)$.

Ответ: График функции $y = x^2$ не имеет асимптот. Графики функций $y = x^2/(1 + x^2)$ и $y = x/(1 + x^2)$ имеют двусторонние горизонтальные асимптоты, которые изображены на рис. 9.21. (Асимптотой графика функции $y = x^2/(1 + x^2)$ является прямая $y = 1$, а асимптотой графика функции $y = x/(1 + x^2)$ является ось абсцисс.)

9.7. Исследование функции

График функции, заданной формулой $y = f(x)$, строится по точкам, которые затем соединяются плавной линией. Но если брать точки, как попало, то можно допустить грубую ошибку, пропустив какие-то важные особенности графика.

Чтобы построить график с помощью небольшого числа точек, полезно предварительно выяснить его характерные особенности.

Для этого следует прежде всего найти область определения. Это позволит не подставлять в формулу $y = f(x)$ значения аргумента, в которых функция заведомо не определена.

Целесообразно также исследовать функцию на периодичность, поскольку для периодической функции исследование ее

свойств достаточно провести на промежутке длины T, составляющей ее основной период. Важно знание свойства четности функции. Так как график четной функции симметричен относительно оси Oy, а график нечетной — относительно начала координат, то для четных и нечетных функций можно ограничиться исследованием их свойств лишь при $x \geqslant 0$.

Далее, полезно найти точки пересечения графика с осями координат и определить интервалы знакопостоянства функции. Если, скажем, на интервале $(a,\, b)$ функция принимает только положительные значения, то на этом интервале ее график лежит выше оси Ox.

После этого нужно изучить поведение функции на границах области определения, установить характер точек разрыва (если они имеются), найти асимптоты. Наконец, следует найти точки экстремума и перегиба.

Принята следующая

Схема исследования функции и построения ее графика:

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на периодичность.
3. Исследовать функцию на четность.
4. Найти точки пересечения графика с осями координат и определить интервалы знакопостоянства функции; найти точки разрыва.
5. Исследовать поведение функции на границах области определения, найти асимптоты.
6. Найти промежутки возрастания и убывания функции, точки экстремума.
7. Исследовать направление выпуклости графика функции, найти точки перегиба.
8. Вычислить значения функции для некоторых значений ее аргумента.
9. Используя все полученные результаты, построить график функции.

▽ **Пример 1.** Исследовать функцию $y = x^3 - 3\,x$ и построить ее график.

Решение. Исследуем функцию согласно принятой схеме.

1. Область определения функции $D(f) = (-\infty,\, +\infty)$.
2. Функция не является периодической.

3. Функция нечетна: $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -(x^3 - 3x) = -f(x)$. Ее график симметричен относительно начала координат. График функции достаточно построить в области $x \geqslant 0$. Однако в этом примере для наглядности проведем исследование при всех x.

4. Найдем точки пересечения графика с осями координат и определим интервалы знакопостоянства функции. С осью Oy график пересекается в точке $O(0,\ 0)$, так как $f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 = 0$. Для того чтобы найти точки пересечения с осью Ox, приравняем функцию к нулю. Получим $x^3 - 3x = x(x^2 - 3) = 0$, откуда искомые точки — $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3}$.

Функция является элементарной, поэтому непрерывна в своей области определения. Областью определения является вся действительная ось. Отсюда следует, что функция $y = x^3 - 3x$ непрерывна при любом значении аргумента.

Таким образом, точки $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3}$ разбивают ось Ox на четыре интервала знакопостоянства функции. Выбрав из каждого интервала по одной точке, проверим знак значений функции в этих точках (а значит, и в соответствующем интервале):

$$
\begin{array}{lll}
(-\infty,\ -\sqrt{3}), & f(-3) = (-3)^3 - 3 \cdot (-3) = -27 + 9 = -18, & - \\
(-\sqrt{3},\ 0), & f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = -1 + 3 = +2, & + \\
(0,\ \sqrt{3}), & f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = 1 - 3 = -2, & - \\
(\sqrt{3},\ +\infty), & f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3 = 27 - 9 = +18. & +
\end{array}
$$

5. Так как функция является непрерывной, то ее график не имеет вертикальных асимптот. Наклонных и горизонтальных асимптот также нет, так как $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x^3 - 3x}{x} = \infty$ (см. пример 2 на с. 173).

6. Найдем промежутки возрастания и убывания функции, точки экстремума (см. также пример 1 на с. 141). В соответствии с необходимым условием экстремума находим первую производную заданной функции, приравниваем ее нулю и решаем полученное уравнение:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x + 1)(x - 1) = 0.$$

Если $x < -1$ и $x > 1$, то $f'(x) > 0$; функция возрастает в интервалах $(-\infty,\ -1)$, $(1,\ +\infty)$. Если $-1 < x < 1$, то $f'(x) < 0$; функция убывает в интервале $(-1,\ 1)$.

Так как при переходе через точку $x = -1$ производная меняет знак с плюса на минус, то в этой точке функция имеет строгий локальный максимум; при переходе через точку $x = 1$ производная меняет знак с минуса на плюс, следовательно, функция имеет в этой точке строгий локальный минимум. Вычислим значения функции в этих двух точках:

$$y_{\max} = f(-1) = 2, \qquad y_{\min} = f(1) = -2.$$

Таким образом, точка $A(-1,\ 2)$ — строгий локальный максимум функции, а точка $B(1,\ -2)$ — ее строгий локальный минимум.

7. Исследуем направление выпуклости графика функции и найдем точки перегиба (см. также пример на с. 163). Найдем вторую производную функции и приравниваем ее нулю:

$$y' = 3\,x^2 - 3, \qquad y'' = 6\,x \qquad y'' = 0 \text{ при } x = 0.$$

Точка $x = 0$ разбивает числовую ось на интервалы $(-\infty,\ 0)$ и $(0,\ +\infty)$. В первом интервале вторая производная отрицательна, а во втором — положительна. Следовательно, в первом интервале график функции является выпуклым вверх, а во втором — выпуклым вниз. При этом вторая производная при переходе через точку $x = 0$ меняет знак. Это означает, что значение $x = 0$ является абсциссой точки перегиба графика. Вычислим ординату этой точки: $f(0) = 0$. Таким образом, точка $O(0,\ 0)$ — точка перегиба графика заданной функции.

8. Вычислим значения функции для некоторых значений ее аргумента. Функция нечетна, поэтому достаточно взять значения функции при $x \geqslant 0$:

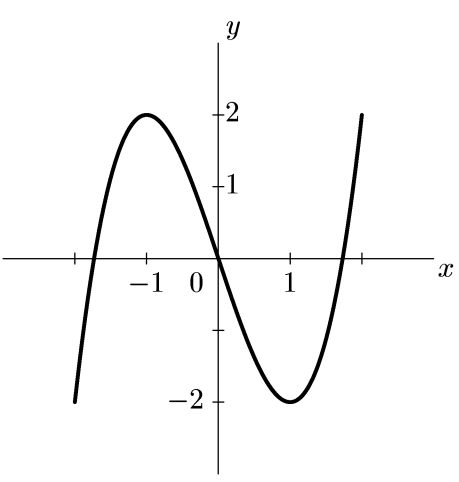
$$f(0) = 0, \qquad f(1) = -2, \qquad f(2) = 5.$$

9. Используя все полученные результаты, построим график функции. График изображен на рис. 9.23. ▲

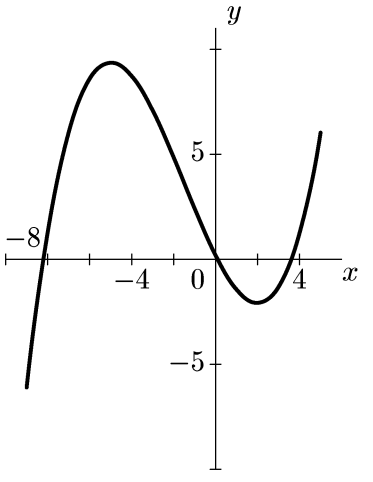
Задача 1. Исследовать функцию $y = \dfrac{1}{15}\,x^3 + \dfrac{3}{10}\,x^2 - 2\,x + \dfrac{1}{5}$ и построить ее график.

Ответ: График функции изображен на рис. 9.23, где $y_{\max} = y(-2) = 2\dfrac{7}{15}$, $y_{\min} = y(5) = -8\dfrac{29}{30}$, а точка перегиба имеет координаты $\left(\dfrac{3}{2},\ -3\dfrac{1}{4}\right)$.

▽ **Пример 2.** Провести исследование с помощью производной и построить график функции $y = (x^2 + 20)/(x - 4)$.



$y = x^3 - 3\,x$



$y = \dfrac{1}{15}\,x^3 + \dfrac{3}{10}\,x^2 - 2\,x + \dfrac{1}{5}$

Рис. 9.23. Графики двух функций

Решение.

1. Область определения функции

$$D(y) = \{x \mid x \in (-\infty, 4) \cup (4, +\infty)\}.$$

2. Функция не является периодической.

3. Функция общего вида.

4. Найдем точки пересечения графика с осями координат и определим интервалы знакопостоянства функции. Если $y = (x^2 + 20)/(x - 4) = 0$, то $x = \varnothing$; точек пересечения с осью Ox нет. Если $x = 0$, то $y = (0^2 + 20)/(0 - 4) = -5$. Таким образом, точка с координатами $(0,\ -5)$ является точкой пересечения с осью Oy. Это единственная точка пересечения с осями координат. Интервалы знакопостоянства: в интервале $(-\infty, 4)$ функция отрицательна, в интервале $(4,\ +\infty)$ — положительна. Найдем точки разрыва. Заданная функция непрерывна всюду, кроме точки $x = 4$.

5. Найдем асимптоты. Вычислим ее односторонние пределы в этой точке:

$$\lim_{x \to 4-0} f(x) = \lim_{x \to 4-0} (x + 20)/(x - 4) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to 4+0} f(x) = \lim_{x \to 4+0} (x + 20)/(x - 4) = +\infty.$$

Таким образом, прямая $x = 4$ — вертикальная асимптота графика.

Исследуем график на наличие наклонных асимптот.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+20}{x\,(x-4)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+20/x^2}{1-4/x} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - k\,x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2+20}{x-4} - 1\cdot x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+20-x^2+4\,x}{x-4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4\,x+20}{x-4} = 4.$$

Таким образом, прямая $y = x + 4$ — двусторонняя наклонная асимптота графика.

6. Найдем промежутки возрастания и убывания функции, точки экстремума.

$$y' = \left(\frac{x^2+20}{x-4}\right)' = \frac{2\,x\,(x-4) - (x^2+20)}{(x-4)^2} = \frac{x^2-8\,x-20}{(x-4)^2};$$

$$\frac{x^2-8\,x-20}{(x-4)^2} = 0, \quad x^2-8\,x-20 = 0; \qquad x_1 = -2, \quad x_2 = 10.$$

Производная функции обращается в нуль в точках $x = -2$ и $x = 10$ и не существует в точке $x = 4$. В интервале $(-\infty,\ -2)$ производная положительна ($f'(-3) > 0$), следовательно, функция строго возрастает. В интервалах $(-2,\ 4)$ и $(4,\ 10)$ производная отрицательна, функция строго убывает. В интервале $(10,\ +\infty)$ производная положительна, функция строго возрастает.

При переходе через точку $x = -2$ производная функции меняет знак с плюса на минус, следовательно, $x = -2$ — точка строго локального максимума. При переходе через точку $x = 10$ производная меняет знак с минуса на плюс, $x = 10$ — точка строгого локального минимума: $y_{\max} = y(-2) = -4$; $y_{\min} = y(10) = 20$.

7. Исследуем направление выпуклости графика функции, найдем точки перегиба.

$$y'' = \left(\frac{x^2-8\,x-20}{(x-4)^2}\right)' = \frac{(2\,x-8)\,(x-4)^2 - 2\,(x-4)\,(x^2-8\,x-20)}{(x-4)^4} =$$

$$= \frac{2\,x\,(x-4) - (x^2+20)}{(x-4)^4} = \frac{36}{(x-4)^3}.$$

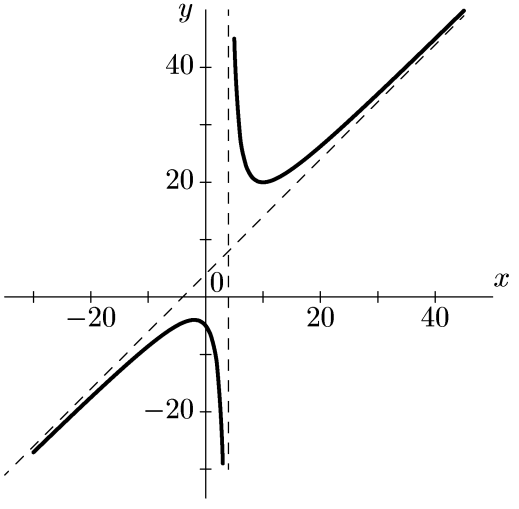


Рис. 9.24. График функции $y = (x^2 + 20)/(x - 4)$

Вторая производная не обращается в нуль и не определена лишь в точке разрыва $x = 4$. Поскольку точка перегиба должна быть точкой графика функции, то график функции точек перегиба не имеет. Остается выяснить вопрос об интервалах выпуклости функции. В интервале $(-\infty,\ 4)$ вторая производная отрицательна, кривая выпукла вверх. В интервале $(4,\ +\infty)$ вторая производная положительна, кривая выпукла вниз.

8. Вычислим значения функции для некоторых значений ее аргумента: $f(-2) = ((-2)^2 + 20)/(-2 - 4) = -24/6 = 4$; $f(-1) = 21/5 = 4{,}2$; $f(1) = 21/3 = 7$; $f(2) = -24/2 = 12$.

9. График функции изображен на рис. 9.24. ▲

Задача 2. Построить график функции $y = 2\,x^3/(x^2 - 4)$.

Ответ: График функции изображен на рис. 9.25.

9.8. Построение графика функции на компьютере

Для построения с помощью Maple графика функции $y = f(x)$ в интервале $(a,\ b)$ достаточно набрать на компьютере команду

```
>plot(f(x),x=a..b);
```

и нажать клавишу Enter.

▽ **Пример.** Построить график функции $y = x \sin x$ в интервале $(-9,\ 9)$.

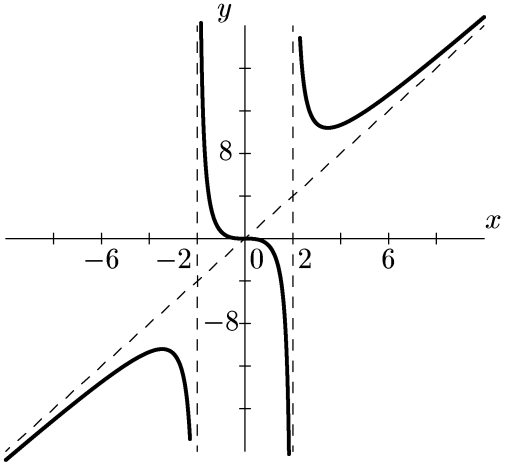


Рис. 9.25. График функции $y = 2\,x^3/(x^2 - 4)$

Решение. Набираем команду

```
>plot(x*sin(x), x=-9..9);
```

и нажимаем клавишу enter. Компьютер тут же нарисует график, изображенный на рис. 9.26. ▲

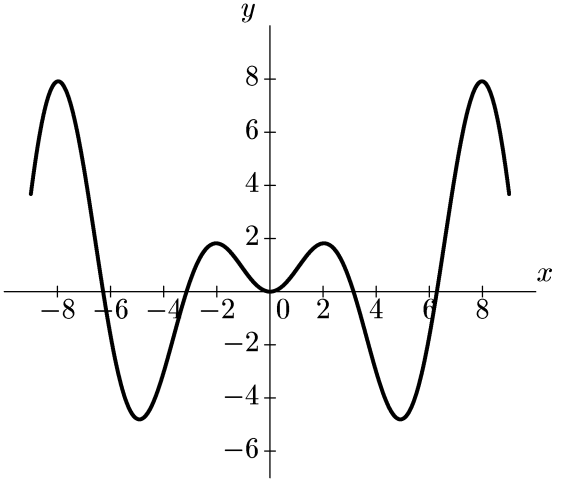


Рис. 9.26. График функции $y = x \sin x$

Как это ни парадоксально ... наиболее непосредственное влияние идеи Ньютона оказали в области экономики и политики.

Д. Бернал

Глава 10
Применение дифференциального исчисления в социально-экономической сфере

10.1. Предельные величины в экономике

Теоретический анализ разнообразных явлений экономики использует ряд предельных величин. Перечислим лишь некоторые из них: предельная стоимость, предельные издержки, предельный доход, предельная производительность, предельная полезность, предельная склонность к потреблению. Все эти величины самым тесным образом связаны с понятием производной. В качестве характерного примера рассмотрим предельные издержки.

Пусть $y(x)$ — затраты на изготовление x экземпляров некоторого продукта. Тогда $y'(x)$ выражает скорость изменения затрат при изменении количества продукта. Эта производная называется предельной (маржинальной) стоимостью.

Согласно определению производной имеем:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Следовательно, можно считать, что производная $y'(x)$ приближенно равна отношению $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Положим $\Delta x = 1$. На практике обычно x — очень большое число, так что 1 мала по сравнению с x. Откуда

$$y'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = y(x + 1) - y(x).$$

Разность $y(x + 1) - y(x)$ выражает на сколько изменились затраты (издержки) при изготовлении еще одного экземпляра

продукции. Поэтому экономисты определяют предельные издержки $y'(x)$ так же, как затраты на изготовление еще одного экземпляра продукции.

▽ **Пример 1.** Зависимость между издержками продукции y и объемом выпускаемой продукции x на предприятии выражается функцией $y = 10x + 50$. Определить предельные издержки при объеме продукции $x = 100$ единиц.

Решение. Предельные издержки выражаются производной $y'(x)$. При $x = 100$ предельные издержки составят $y'(100) = 10$. Это означает, что при данном уровне производства (количестве выпущенной продукции 100 единиц) на выпуск единицы дополнительной продукции необходимы дополнительные затраты в 10 денежных единиц. Действительно, затраты на выпуск сто первой единицы продукции можно подсчитать и по другому:

$$y(101) - y(100) = 10 \cdot 101 + 50 - 10 \cdot 100 - 50 = 10.$$

Для нашей конкретной задачи (т. е. в случае, когда y является линейной функцией от переменной x) разность $y(x+1) - y(x)$ совпадает со значением производной $y'(100)$. В общем же случае (когда функция $y(x)$ может быть нелинейной) при больших x разность $y(x+1) - y(x)$ совпадает с $y'(x)$ лишь приближенно. ▲

▽ **Пример 2.** Зависимость издержек производства одного из предприятий от объема выпускаемой продукции x выражается формулой

$$y(x) = 40\,x - 0{,}03\,x^3.$$

Определить средние и предельные издержки при объеме продукции $x = 15$ ден. ед.

Решение. Функция средних издержек на единицу продукции определяется по формуле $\overline{y} = y/x$, или в нашем случае

$$\overline{y}(x) = 40 - 0{,}03\,x^2,$$

откуда

$$\overline{y}(15) = 40 - 0{,}038225 \cdot 15^2 = 33{,}25 \text{ ден. ед.}$$

Предельные издержки y' определяются по формуле

$$y'(x) = 40 - 0{,}09\,x^2,$$

откуда при $x = 15$ получаем $y'(15) = 19{,}75$ ден. ед.

Иными словами, при средних издержках на производство единицы продукции в 33,25 ден. ед. дополнительные затраты на производство единицы продукции составят 19,75 ден. ед. и не превысят средних издержек. ▲

Как видим, предельная величина характеризует не состояние (как суммарная или средняя величины), а процесс, изменение экономического объекта. Таким образом, предельная величина выступает как скорость изменения некоторого экономического объекта (процесса).

Помимо предельных издержек с помощью производной могут быть определены предельный доход, предельная стоимость, предельный спрос, предельная выручка, предельная производительность ресурса и другие предельные величины.

В экономической теории *предельные* (*маржинальные*) *величины* $y'(x)$ принято обозначать через $My(x)$. Буква M — первая буква английского слова marginal — «маржинальный» (переводится на русский язык словом «предельный»).

Определение предельных величин с помощью понятия производной позволяет использовать математический аппарат для доказательства экономических законов. Рассмотрим некоторые применения дифференциального исчисления в экономической теории.

Пусть x — количество реализованного товара, $R(x)$ — функция дохода, $C(x)$ — функция издержек (затрат на производство товара). Вид этих функций зависит от способа производства, оптимизации инфраструктуры и т. п. Обозначим функцию прибыли за $\Pi(x)$. Тогда

$$\Pi(x) = R(x) - C(x).$$

Очевидно, оптимальным уровнем производства является тот, при котором прибыль максимальна, т. е. такое значение выпуска x, при котором функция $\Pi(x)$ имеет максимум. По теореме Ферма в этой точке

$$\Pi'(x) = 0.$$

Но $\Pi'(x) = R'(x) - C'(x)$. Поэтому $R'(x) = C'(x)$, т. е. если уровень выпуска x является оптимальным для производителя, то $MR(x) = MC(x)$, где $MR(x)$ — предельный доход, а $MC(x)$ — предельные издержки.

Получили известное в микроэкономике утверждение:

> Для того чтобы прибыль была максимальной, необходимо, чтобы предельный доход и предельные издержки были равны.

Использование в конце XIX в. предельных (маржинальных) величин полностью изменило способы анализа и предмет экономической теории. Экономисты для вывода экономических законов стали охотно прибегать к математическим доказательствам. Произошедшие в результате этого изменения были столь значительны, что их впоследствиии назвали маржиналистской революцией.

▽ **Пример 3 (Максимизация прибыли).** Пусть функция дохода от количества реализованного товара x выражается формулой $R(x) = \dfrac{x^3}{3} + 2000000\,x$, а функция затрат на производство товара — формулой $C(x) = 1500\,x^2$. Определить оптимальный уровень производства и прибыль, которая при этом достигается.

Решение. Прибыль определяется формулой

$$\Pi(x) = R(x) - C(x),$$

откуда

$$\Pi(x) = \frac{x^3}{3} - 1500\,x^2 + 2000000\,x.$$

Приравнивая производную прибыли

$$\Pi'(x) = x^2 - 3000\,x + 2000000$$

нулю, получаем уравнение

$$x^2 - 3000\,x + 2000000 = 0.$$

Корни этого уравнения $x_1 = 1000$, $x_2 = 2000$. Проверка показывает, что максимальная прибыль достигается при $x = 1000$:

$$\Pi_{\max} = \Pi(1000) \approx 833\,333\,333 \text{ ден. ед.} \quad ▲$$

▽ **Пример 4 (Оптимизация прибыли).** Пусть функция дохода от количества реализованного товара x выражается формулой $R(x) = 16\,x - x^2$, а функция затрат на производство товара — формулой $C(x) = x^2 + 1$. Определить оптимальный уровень производства и прибыль, которая при этом достигается.

Решение. Прибыль определяется формулой

$$\Pi(x) = R(x) - C(x),$$

откуда

$$\Pi(x) = 16\,x - 2\,x^2 - 1.$$

Приравнивая производную прибыли $\Pi'(x) = 16 - 4\,x$ нулю, получаем $x = 4$. Проверка показывает, что эта точка является точкой максимума. Таким образом, оптимальный уровень производства $x = 4$. При этом значении максимальная прибыль составит $\Pi_{\max} = 31$. ▲

▽ **Пример 5 (Оптимизация налогообложения предприятий** [1]**).** Пусть, как и в предыдущем примере, функция дохода от количества реализованного товара x выражается формулой $R(x) = 16\,x - x^2$, а функция затрат на производство товара — формулой $C(x) = x^2 + 1$. Определить оптимальный уровень налога с единицы реализованного товара и прибыль предприятия, которая при этом достигается.

Решение. Пусть t (tax) — налог с единицы выпускаемой продукции. Тогда общий налог с x единиц продукции составит $T = t\,x$. В этом случае функция прибыли будет иметь вид

$$\Pi(x) = R(x) - C(x) - t\,x.$$

Требуется определить: каким должен быть налог t, чтобы величина суммарного налога T со всей продукции была наибольшей?

Поскольку $R(x) = 16\,x - x^2$, а $C(x) = x^2 + 1$, то функция прибыли имеет вид

$$\Pi(x) = 16\,x - 2\,x^2 - t\,x - 1.$$

Как и в предыдущем примере, условие максимума прибыли $\Pi'(x) = 0$; отсюда получаем значение x, максимизирующего прибыль с учетом пока неизвестного налога t:

$$16 - 4\,x - t = 0, \qquad x = 4 - t/4.$$

Подставим полученное значение объема продукции в величину суммарного налога $T = t\,x$. Получим

$$T = t\,(4 - t/4).$$

[1] Пример взят из книги [19, с. 131].

Найдем теперь условия, при которых величина T будет максимальной:

$$T = t\,(4 - t/4), \qquad T'(t) = 0, \quad \Rightarrow \quad t = 8.$$

Далее, при $t = 8$ имеем $x = 4 - t/4 = 4 - 8/4 = 2$. Отсюда следует, что при налоге $t = 8$ максимальная величина прибыли достигается при $x = 2$:

$$\Pi_{\max} = \Pi(2) = 16 \cdot 2 - 2\,2^2 - 8 \cdot 2 - 1 = 7,$$

а оптимальный (с точки зрения налоговой службы) сбор налога

$$T = t\,(4 - t/4) = 8 \cdot (4 - 8/4) = 16.$$

Интересно сопоставить эти цифры ($x = 2$, $\Pi_{\max} = 7$) с цифрами при отсутствии налогообложения. При $t = 0$ решение задачи на максимизацию прибыли дало следующие результаты (см. предыдущий пример): $x = 4$, $\Pi_{\max} = 31$.

Вывод: уменьшение налогообложения стимулирует рост выпуска продукции и приводит при этом к увеличению прибыли от ее реализации.

Понятно, почему производители прикладывают столько усилий, чтобы снизить ставку налога. ▲

▽ **Пример 6 (Минимизация средних издержек).** Доказать с помощью теоремы Ферма экономический закон, согласно которому при наиболее экономичном производстве достигается равенство средних и предельных издержек.

Решение. Уровнем наиболее экономичного производства является такой, при котором средние издержки по производству товара минимальны. Средние издержки определяются как $AC = C(x)/x$, т. е. издержки по производству товара, деленные на произведенное его количество. По теореме Ферма в точке минимума функции $C(x)/x$ производная этой функции равна нулю. Следовательно,

$$\left(\frac{C(x)}{x}\right)' = \frac{C'(x) \cdot x - C(x)}{x^2} = 0,$$

откуда

$$C' \cdot x - C = 0, \qquad C' = C/x,$$

или $MC = AC$, что и требовалось доказать.

Вывод: при наиболее экономичном производстве достигается равенство средних и предельных издержек. ▲

10.2. Использование логарифмической производной в экономике

Пусть $y(t)$ — величина вклада в момент времени t (в годах). Можно ли определить (приближенно) годовую ставку банковского процента p по функции $y(t)$?

Если проценты начисляются непрерывно, то, как мы уже знаем из п. 6.4,

$$y(t) = y_0\, e^{pt/100},$$

где p — ежегодный процент прироста вклада, а $r = p/100$ — номинальная ставка за год. Найдем логарифмическую производную от величины вклада:

$$(\ln y)' = (\ln\, y_0 + r\, t)' = r.$$

Вывод: ставка банковского процента r совпадет с логарифмической производной от величины вклада.

Таким образом, логарифмическая производная денежного вклада характеризует его доходность. Это верно и в более общем случае, когда процентная ставка вклада постоянно меняется. В этом случае говорят, что логарифмическая производная денежного вклада выражает его мгновенную доходность.

Рассмотренный пример — не единственное применение логарифмической производной. С ее помощью можно получить мгновенную оценку доходности какого-либо актива.

Пусть $A(t)$ — стоимость некоторого актива A в момент времени t, r — доходность от вложения денег в другие активы. Считаем, для простоты, что r не зависит от времени. Когда выгодно покупать или продавать актив A? Для ответа на данный вопрос найдем интервал времени, в течение которого мгновенная доходность актива A будет больше r. Так как мгновенная доходность A совпадает с логарифмической производной его стоимости, то искомый интервал времени задается неравенством

$$(\ln A(t))' > r.$$

Если это неравенство задает интервал $(t_1,\, t_2)$, то актив A следует купить в момент t_1 и продать в момент t_2. Именно за

это время произойдет наибольшее приращение A по сравнению с другими активами.

Относительная скорость (темп) изменения функции $y = f(x)$ определяется логарифмической производной

$$\boxed{T_y = (\ln y)' = \frac{y'}{y}.} \tag{10.1}$$

▽ **Пример 1.** Производительность труда бригады рабочих может быть описана уравнением

$$y = -2{,}5 \cdot t^2 + 15 \cdot t + 100,$$

где $0 < t < 8$ — рабочее время в часах. Вычислить скорость и темп изменения производительности труда при $t = 2$ и $t = 7$.

Решение. Скорость изменения производительности труда выражается производной

$$y' = -5\,t + 15,$$

а темп ее изменения — логарифмической производной

$$T_y = (\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{-5\,t + 15}{-2{,}5 \cdot t^2 + 15 \cdot t + 100}.$$

При $t = 2$ $y'(2) = 5$, $T_y = 1/24 \approx 0{,}04$.

При $t = 7$ $y'(7) = -20$, $T_y = -8/33 \approx -0{,}24$.

Итак, в момент $t = 2$ ч после начала работы скорость изменения производительности труда составила 5 ед./ч, а в момент $t = 7$ ч — (-20) ед./ч; относительная скорость (темп) изменения производительности труда составила соответственно 0,04 ед./ч и $(-0{,}24)$ ед./ч. Знаки плюс и минус указывают на то, что в начале смены (при $t = 2$) наблюдалось увеличение производительности труда, а в конце смены (при $t = 7$) — ее снижение. ▲

10.3. Эластичность

Определение эластичности. Понятие эластичности было введено Альфредом Маршаллом в связи с анализом функции спроса. Впоследствии это понятие было распространено и на другие функции.

МА́РШАЛЛ (Marshall) Альфред (1842–1924) — английский экономист, основатель кембриджской школы политэкономии и один из организаторов Королевского экономического общества. Его труд «Principles of economics» (принципы экономической науки) стал учебником, по которому учились студенты Англии и США. В середине XX в. укороченное название данного произведения — «economics» — стало обозначать учебники, в которых излагается неоклассическая экономическая теория.

Пусть дана функция $y = f(x)$. Предположим, что приращение независимой переменной x есть Δx.

Определение. *Эластичностью функции* $y = f(x)$ называется следующий предел

$$\boxed{E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right).} \tag{10.2}$$

Говорят также, что $E_x(y)$ — это *коэффициент эластичности* y по x.

Из определения эластичности вытекает, что при достаточно малых Δx выполняется приближенное равенство

$$E_x(y) \approx \left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right),$$

которое можно записать в виде

$$\frac{\Delta y}{y} \approx E_x(y) \, \frac{\Delta x}{x}.$$

Вывод: эластичность $E_x(y)$ — это коэффициент пропорциональности между относительными изменениями величин y и x. Если, например, x увеличится на один процент, то y увеличится (приближенно) на $E_x(y)$ процентов.

▽ **Пример 1.** Правильное применение знаний о коэффициентах эластичности спроса на товары помогает правительству в оценке последствий введения новых налогов или акцизов.

Пусть x — акцизы на водку, y — спрос на этот товар. Предположим, что государство предполагает повысить акцизы на водку на 10%. Если известно, что эластичность спроса составляет $E_x(y) = -0{,}2$, то следует ожидать, что это вызовет снижение спроса на данный товар на $0{,}2 \cdot 10 = 2\,(\%)$ и доходы государства по продаже водки повысятся на 8%. ▲

▽ **Пример 2.** Изучение эластичности важно и для оценки изменения ситуации на рынке товаров и услуг в результате повышения доходов населения. Замечено, [1]) что для мяса, масла и яиц эластичность спроса относительно доходов населения положительна, а для муки — отрицательна. Это означает, что с ростом дохода спрос на мясо, масло и яйца увеличивается, а на муку — понижается. Обратно, понижение доходов населения приводит к понижению закупок мяса, яиц, масла и увеличению закупок муки. Связано это с тем, что снижение доходов влечет за собой и уменьшение возможности покупки дорогостоящих продуктов. Вместо этих продуктов, например мяса, население покупает более дешевый продукт, т. е. муку или хлеб. ▲

▽ **Пример 3.** Пусть заданы функции спроса y и предложения (количества товаров предлагаемого в единицу времени) z от цены x :

$$y = 10 - x, \qquad z = 3x - 6.$$

Найти:

а) цену равновесия при которой спрос и предложение уравновешиваются;

б) эластичность спроса и предложения для цены равновесия.

Решение.

а) Цена равновесия находится из условия $y(x) = z(x)$, или $10 - x = 3x - 6$, откуда $x = 4$;

б) эластичность спроса $E_x(y)$ и предложения $E_x(z)$ находим по формуле (10.2). Имеем

$$y = 10 - x;$$

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = 10 - (x + \Delta x) - (10 - x) = -\Delta x;$$

$$\frac{\Delta y}{y} \ : \ \frac{\Delta x}{x} = \frac{-\Delta x}{10 - x} \ : \ \frac{\Delta x}{x} = -\frac{x}{10 - x},$$

откуда

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(-\frac{x}{10 - x} \right) = -\frac{x}{10 - x}.$$

Аналогично имеем

$$z = 3x - 6;$$

$$\Delta z = z(x + \Delta x) - z(x) = 3x + 3\,\Delta x - 6 - (3x - 6) = 3\,\Delta x;$$

[1]) См. [21].

$$\frac{\Delta z}{z} \;:\; \frac{\Delta x}{x} = \frac{3\,\Delta x}{3x-6} \;:\; \frac{\Delta x}{x} = \frac{3\,x}{3\,x-6},$$

следовательно

$$E_x(z) = \frac{x}{x-2}.$$

Таким образом, при $x = 4$ получаем

$$E_x(y) = -4/(10-4) = -2/3, \qquad E_x(z) = 4/(4-2) = 2.$$

Это означает, что при цене равновесия между спросом и предложением увеличение цены на 1% влечет уменьшение спроса на $(2/3)\%$ и возрастание предложения на 2%. ▲

Эластичность спроса и логарифмическая производная. Понятие эластичности связано с ранее введенным понятием логарифмической производной. Выведем формулу, связывающую эти понятия.

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} \right) = y' \, \frac{x}{y}.$$

Представим отношение $\dfrac{y'}{y}$ как логарифмическую производную $(\ln y)'$. Тогда получим

$$\boxed{E_x(y) = x\,(\ln y)' = x\,T_y.} \tag{10.3}$$

Использование этой формулы позволяет вычислять эластичность функции быстрее, чем это делается по формуле (10.2). Так, найденная в примере 3 эластичность $E_x(y)$ для функции $y = 10 - x$ может быть вычислена с помощью формулы (10.3) в одну строчку:

$$E_x(y) = x\,(\ln y)' = x\,(\ln(10-x))' = -x/(10-x).$$

Поскольку $x = 1/(\ln x)'$, то из формулы (10.3) имеем

$$\boxed{E_x(y) = (\ln y)'/(\ln x)'.}$$

Таким образом, эластичность совпадает с отношением логарифмических производных.

Ценовая эластичность спроса и выручки. В экономической теории спрос (в натуральных единицах) принято обозначать не через y, а через q, а цену на товар не через x, а через p (price). (Иногда спрос обозначают также через d (demand). Однако при

таком обозначении может возникнуть путаница, связанная с тем, что так обозначают и дифференциал. Традиционное обозначение спроса через q более удобно.)

Знак коэффициента эластичности $E_p(q)$ имеет большое значение. Как было отмечено, при отрицательном коэффициенте эластичности спрос на товар падает при увеличении цены на него, а при положительном, напротив, повышается. Помимо знака коэффициента эластичности большое значение имеет значение его абсолютной величины. Если абсолютная величина коэффициента эластичности $|E_p(q)|$ велика, то изменение спроса при малом изменении цены становится значительным, а если абсолютная величина коэффициента эластичности мала, то даже существенное повышение цены не вызывает резкого изменения спроса.

Например, повышение цен на железнодорожные билеты в два-три раза может привести к существенному сокращению спроса на железнодорожные перевозки и сокращению поступлений в бюджет. А спрос потребителя на спички, практически не изменится, даже если цена возрастет в несколько раз. Величина $|E_p(q)|$ для железнодорожных билетов выше, чем для спичек.

Спрос называется *эластичным*, если $|E_p(q)| > 1$, и *неэластичным*, если $|E_p(q)| < 1$. Термин *совершенно неэластичный спрос* означает крайний случай, когда изменение цены не приводит ни к какому изменению спроса. В этом случае $E_p(q) = 0$. В другом крайнем случае, когда самое малое снижение цены побуждает покупателя увеличивать покупки от нуля до предела своих возможностей, говорят, что спрос является *совершенно эластичным*. Можно считать, что для совершенно эластичного спроса $|E_p(q)| = \infty$.

Знание того, является ли спрос эластичным или нет, важно для определения изменения выручки при изменении цены товара. Для абсолютного большинства продовольственных товаров (мясо, молоко, сметана, сыр, сахар) и непродовольственных товаров (одежда, обувь, украшения) спрос падает при увеличении цены на товар, т. е. $E_p(q) < 0$. Рассмотрим как меняется выручка на товар при таком изменении спроса.

Если продавцы обладают достаточными запасами товара, то $q = q(p)$ — это не только количество спрашиваемого товара, но и одновременно количество проданного товара. В этом случае общая выручка (receipts) всех продавцов $R = p\,q$. Находим эластичность выручки по цене

$$E_p(R) = \frac{R'}{R}\,p = \frac{(p\,q)'}{p\,q}\,p = \frac{1\cdot q + p\cdot q'}{q} = 1 + E_p(q) = 1 - |E_p(q)|.$$

При эластичном спросе $|E_p(q)| > 1$, поэтому $E_p(R) = 1 - |E_p(q)| < 0$. При неэластичном спросе $|E_p(q)| < 1$, и поэтому $E_p(R) > 0$.

Вывод: Если спрос эластичен, то изменение цены вызывает изменение общей выручки в противоположном направлении. Если же спрос неэластичен, то изменение общей выручки происходит в том же направлении, что и изменение цены.

Здесь не приведены конкретные графики и числовые значения эластичности спроса по цене отдельных товаров, поскольку числовое значение эластичности товара нельзя считать неизменным, раз и навсегда заданным. Эластичность спроса по цене зависит от многих факторов и ее нельзя рассматривать только как функцию от одной переменной p. Она зависит от замещаемости данного товара в потреблении, от удельного веса в доходе, от субъективной необходимости и т. п. Поэтому при прогнозировании последствий повышения налогов или цен, надо подходить к проблеме комплексно.

Поясним это на примере необходимости учета замещаемости данного товара.

По оценкам экономистов [1]) эластичность спроса на бензин в США в 80-е гг. XX в. составляла 0,2. Однако введение 6% налога на бензин в Вашингтоне привело к падению спроса не на 1,2%, как планировалось, а на 33% (что соответствует эластичности 5,5). Поэтому через 2 месяца налог в столице был отменен. Причина этого — «узкое» налогообложение на бензин, не включавшее в себя бензин из соседних штатов Мэриленд и Виргиния, которым потребители и стали заменять подорожавший в городе бензин.

Похожая ситуация произошла в 1993 г. в России, когда повышение ставок акцизов на отечественную водку до 90% привело не к ожидаемому увеличению поступлений в бюджет, а к существенному снижению спроса и сокращению доходов в бюджет. Причина — исключение из рассмотрения импортной водки (в том числе из стран ближнего зарубежья). Именно продажа импортной водки заняла в это время преимущественное место в торговой сети. Поэтому спустя несколько месяцев вышло новое постановление, которым вводилась ставка акцизов до 250% на импортную водку, а ставка акцизов на отечественную водку снижалась до 85%.

[1]) См. [15, с. 81].

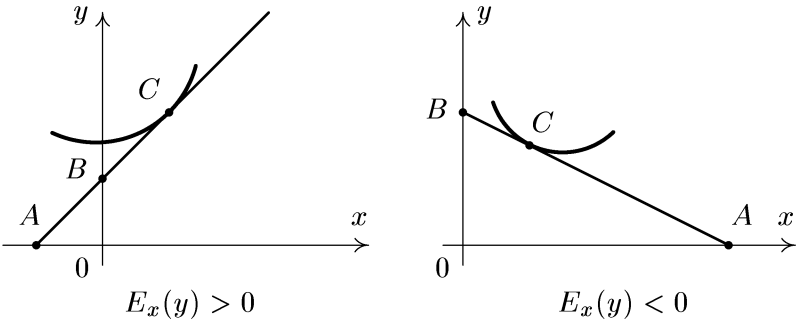


Рис. 10.1. Геометрический смысл эластичности

Геометрический смысл эластичности. В экономической теории часто рассматривают зависимость между переменными графически. Поэтому полезна геометрическая интерпретация понятия эластичности.

Напомним, геометрический смысл производной: $f'(x)$ — это тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $C(x_c,\, y_c)$, $y_c = f(x_c)$. Геометрический смысл эластичности функции $f(x)$ в точке x_c связан с разбиением данной касательной на отрезки точками A, B и C, где $A(x_a,\, 0)$ — точка пересечения касательной с осью Ox, $B(0,\, y_b)$ — точка пересечения касательной с осью Oy (рис. 10.1).

Если эластичность $E_x(y)$ положительна, то она совпадает с отношением длин отрезков BC и AC :

$$E_x(y) = \frac{BC}{AC}. \tag{10.4}$$

Если же эластичность $E_x(y)$ отрицательна (рис. 10.1), то выполняется следующее соотношение:

$$E_x(y) = -\frac{BC}{AC}. \tag{10.5}$$

С помощью векторов формулы (10.4), (10.5) можно записать в виде одной формулы

$$\boxed{\overline{BC} = E_x(y)\,\overline{AC}.} \tag{10.6}$$

□ Доказательство равенства (10.6).

Выразим координаты точек A и B через координаты точки C. Уравнение касательной в точке $C(x_c,\, y_c)$ имеет вид

$$y = y_c + f'(x_c)\,(x - x_c). \tag{10.7}$$

Подставив в уравнение (10.7) координаты точки $B(0,\ y_b)$, получим

$$y_b = y_c - f'(x_c)\,x_c.$$

Подставив в уравнение (10.7) координаты точки $A(x_a,\ 0)$, получим равенство

$$0 = y_c + f'(x_c)\,(x_a - x_c),$$

откуда

$$x_a = x_c - \frac{y_0}{f'(x_c)}.$$

Итак, точка A имеет координаты $\left(x_c - \dfrac{y_c}{f'(x_c)},\ 0\right)$, а точка B — координаты $\big(0,\ y_c - f'(x_c)\,x_c\big)$.

Сравним, теперь, векторы $\overline{BC}$ и $E_x(y)\,\overline{AC}$:

$$\overline{BC} = (x_c - 0,\ y_c - y_b) = \big(x_c,\ f'(x_c)\,x_c\big),$$

$$E_x(y)\,\overline{AC} = \frac{f'(x_c)\,x_c}{y_c}\left(x_c - x_c + \frac{y_c}{f'(x_c)},\ y_c - 0\right) =$$

$$= \big(x_c,\ f'(x_c)\,x_c\big).$$

Таким образом,

$$\overline{BC} = E_x(y)\,\overline{AC}. \quad \blacksquare$$

Из формулы (10.6) следует равенство

$$|\overline{BC}| = |E_x(y)|\,|\overline{AC}|,$$

откуда

$$|E_x(y)| = \frac{|BC|}{|AC|}.$$

Если $|E_x(y)| < 1$, то $|BC| < |AC|$. Если $|E_x(y)| > 1$, то $|BC| > |AC|$.

Вывод: Неэластичность кривой спроса в точке C означает, что отрезок касательной, проведенной к этой кривой в точке C, с концами A и B на осях координат, делится точкой C так, что отрезок AC длиннее отрезка BC (рис. 10.1). Эластичность кривой спроса в точке C означает, что отрезок касательной делится точкой C так, что отрезок AC короче отрезка BC.

10.4. Принцип акселерации

Рассмотрим некоторое предприятие, выпускающее потребительскую продукцию y. Зададимся вопросом: как инвестиции в расширение производства этого предприятия влияют на рост его продукции? Очевидно, увеличение инвестиций $i(t)$ ведет к росту продукции $y(t)$. Но весь вопрос состоит в том в каких размерах это происходит. Как эту зависимость выразить аналитически?

Предположим, что с некоторого начального момента времени $t = 0$ инвестиции отсутствуют; тогда выпуск продукции должен остаться на прежнем уровне, т. е. если $i(t) \equiv 0$, то $y(t) \equiv y(0)$ (рис. 10.2).

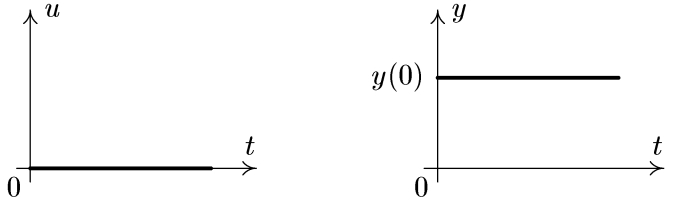


Рис. 10.2. Выпуск продукции в условиях отсутствия инвестиций

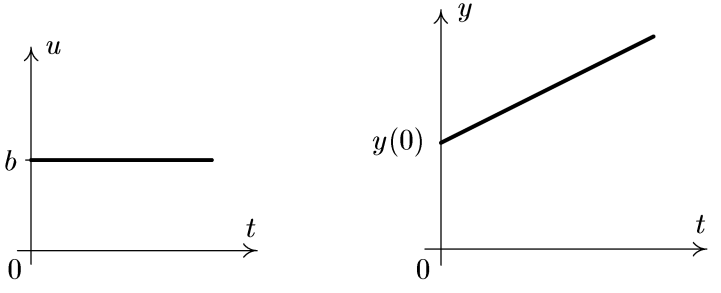


Рис. 10.3. Выпуск продукции в условиях постоянного инвестирования

Если же предприятие инвестируется, причем инвестиции постоянны, то производство постоянно расширяется и выпуск продукции должен линейно расти, т. е. $y(t) = c\,t + y(0)$ при $i(t) = b > 0$ (рис. 10.3).

Выразить из этих графиков зависимость между переменными $i(t)$ и $y(t)$ с помощью алгебраических уравнений невозможно.

Наилучшим уравнением, выражающим эти графические зависимости между $i(t)$ и $y(t)$, является не алгебраическое уравнение, а уравнение, содержащее вместо переменной $y(t)$, ее производную:

$$\frac{dy(t)}{dt} = k\, i(t). \tag{10.8}$$

Уравнение (10.8) достаточно точно отражает реальную ситуацию. Действительно, если $i(t) \equiv 0$ из (10.8) получаем $\dfrac{dy(t)}{dt} = 0$ или $y(t) = \text{const} = y(0)$; если же $i(t) = b$, то $\dfrac{dy(t)}{dt} = k\, b$ или $y(t) = k\, b\, t + y(0)$.

Вывод: рост инвестиций ведет не столько к росту продукции, сколько к скорости роста, причем скорость роста прямо пропорциональна увеличению инвестиций.

* * *

В реальной рыночной экономике предприятие не может бесконечно увеличивать рост своей продукции. Оно увеличивает производство только в том случае, если есть спрос на его продукцию. Предприятие должно мгновенно реагировать на изменения спроса $q(t)$ и выпускать продукции ровно на столько больше на сколько больше увеличивается спрос, т. е. предприятие должно выпускать продукцию $y(t)$ так, чтобы она совпадала по величине со спросом $q(t)$ на нее:

$$y(t) = q(t).$$

Из этого уравнения и равенства (10.8) получаем, что для того, чтобы удовлетворить этим требованиям, инвестиции должны удовлетворять уравнению

$$\frac{d\, q(t)}{dt} = k\, i(t).$$

После введения нового обозначения $a = \dfrac{1}{k}$, получаем

$$\boxed{i(t) = a\, \frac{d\, q(t)}{d\, t}.} \tag{10.9}$$

Вывод: Для полного удовлетворения спроса и полной реализации своей продукции предприятие должно увеличивать инвестиции пропорционально скорости роста спроса (акселерации).

Коэффициент пропорциональности $a = \frac{1}{k}$ называют *коэффициентом акселерации* или *акселератором.*

* * *

Пусть спрос на продукцию предприятия растет. Должны ли инвестиции также возрасти? Многие скажут: конечно, должны. И будут неправы. Ответ на этот вопрос не является однозначным, как иногда думают. Все зависит от того, каков знак второй производной от функции спроса — плюс или минус.

Если знак функции $q''(t)$ — плюс, то $q'(t)$ строго возрастает. Из (10.9) следует, что тогда должны возрастать и инвестиции $i(t)$.

Если знак $q''(t)$ — минус, то $q'(t)$ строго убывает, а это означает, что инвестиции $i(t)$ также должны убывать.

Если вторая производная $q''(t)$ равна нулю на некотором промежутке, то $q'(t)$ постоянна на этом промежутке. Следовательно, должны быть постоянными и капиталовложения в производство.

Вывод:
1. Если спрос на предметы потребления возрастает в каком-либо периоде все быстрее ($q''(t) > 0$), то должны возрастать и капиталовложения в их производство.
2. Если спрос на предметы потребления с какого-то момента начинает расти все медленнее ($q''(t) < 0$), то должны уменьшиться и размеры капиталовложений.
3. Если спрос на предметы потребления возрастает с постоянным темпом, достигнутым в момент времени t_0, то капиталовложения следует удерживать на уровне достигнутом в момент времени t_0 (рис. 10.3).

Приведенное положение называют *принципом акселератора.*

10.5. Экономия ресурсов

Решение некоторых примеров, связанных с экономией ресурсов, нами уже было рассмотрено в предыдущей главе при изучении темы «Разыскание оптимальных значений». Рассмотрим еще один.

▽ **Пример.** Найти наименьшее количество жести, из которого можно изготовить цилиндрическую консервную банку вместимостью $V = 2$ л (запас на швы не учитывать).

Решение. Пусть поверхность банки S, радиус основания R, высота H. Требуется найти наименьшее значение площади поверхности цилиндра

$$S = 2\,\pi\,R\,H + 2\,\pi\,R^2 \tag{10.10}$$

при условии, что

$$\pi\,R^2\,H = V. \tag{10.11}$$

За аргумент удобно принять R. Из (10.10) и (10.11) находим:

$$S = 2\left(\frac{V}{R} + \pi\,R^2\right).$$

Найдем производную этой функции:

$$S'(R) = 2\left(-\frac{V}{R^2} + 2\,\pi\,R\right).$$

Аргумент изменяется в промежутке $(0,\ +\infty)$. В этом промежутке имеется единственная критическая точка

$$R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\,\pi}}\,. \tag{10.12}$$

Она и соответствует наименьшему значению S. Из (10.11) и (10.12) находим:

$$H = \frac{V}{\pi\,R^2} = \sqrt[3]{\frac{4\,V}{\pi}} = 2\,R,$$

т. е. *высота банки должна равняться диаметру основания.* Наименьшее количество жести, требуемое для изготовления банки, равно $S_{\text{наим}} = 2\,\pi\,(R\,H + R^2) = 6\,\pi\,R^2 = 3\,\sqrt[3]{2\,\pi\,V^2} \approx 879$ см^2. ▲

Кофе, конфеты, мед, сгущенное молоко и другую продовольственную продукцию часто упаковывают в цилиндрические банки. При этом крышка, дно и боковая поверхность банки часто имеют разную толщину или же бывают сделаны из разных материалов (например, полиэтилен, пластмасса, картон и жесть). Предлагаем следующее обобщение предыдущей задачи:

Задача. Пусть каждый квадратный сантиметр крышки цилиндрической банки стоит a денежных единиц, дна банки — b

денежных единиц, а боковой поверхности банки — c денежных единиц. Определить каково должно быть отношение высоты H к диаметру банки D, чтобы при объеме V ее стоимость была наименьшей.

Указание. Объем V равен $\pi R^2 H$. Откуда $H = V/(\pi R^2)$. Подставляя это выражение для H в формулу стоимости $P = a \cdot \pi R^2 + b \cdot \pi R^2 + c \cdot 2\pi R H$, получим

$$P(R) = (a + b)\,\pi R^2 + 2\,c\,V/R.$$

Наименьшее значение в интервале $(0, +\infty)$ эта функция принимает при

$$R = \sqrt[3]{c\,V/(\pi\,a + \pi\,b)}\,.$$

Ответ: $H/D = (a + b)/(2\,c)$.

Раздел III
Интегральное исчисление

Смысл — там, где змеи интеграла
Меж цифр и букв, меж d и f!

В. Брюсов

Глава 11
Неопределенный интеграл

11.1. Неопределенный интеграл

Определение. Пусть функция $f(x)$ есть производная от функции $F(x)$:

$$F'(x) = f(x).$$

Тогда $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$.

Функция $3\,x^2$ есть производная для функции x^3:

$$(x^3)' = 3\,x^2.$$

Поэтому по определению функция x^3 является первообразной для функции $3\,x^2$.

Функция $4\,x^3$ есть производная для функции x^4:

$$(x^4)' = 4\,x^3.$$

По определению функция x^4 является первообразной для функции $4\,x^3$.

Первообразной для функции $5\,x^4$ служит функция x^5, так как

$$(x^5)' = 5\,x^4.$$

Функция $f(x) = 3x^2$ является производной функции $F(x) = x^3$. Но она также является и производной функции $F_1(x) = x^3 + 1$, поскольку

$$(x^3 + 1)' = 3x^2 = f(x).$$

Поэтому функция $3x^2$ имеет не одну первообразную. По определению функции $F(x) = x^3$ и $F_1(x) = x^3 + 1$ являются ее первообразными. Функция $F_2(x) = x^3 + 2$ также является первообразной для $3x^2$. Более того, любая функция вида

$$x^3 + C,$$

где C — произвольное число, также является первообразной для функции $f(x) = 3x^2$, так как

$$(x^3 + C)' = 3x^2.$$

Таким образом, функция $3x^2$ имеет бесчисленное множество первообразных.

Аналогично, в общем случае, если $F(x)$ — некоторая первообразная для $f(x)$, то поскольку

$$\big(F(x) + C\big)' = F'(x) = f(x),$$

функция вида $F(x) + C$, где C — произвольное число, также является первообразной для $f(x)$.

Остается вопрос, имеет ли функция $f(x)$ другие первообразные, которые не описываются выражением вида $F(x) + C$. Ответ на него дает следующая

Теорема. *Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — первообразные для функции $f(x)$ в некотором промежутке X, то найдется такое число C, что справедливо равенство*

$$F_2(x) = F_1(x) + C.$$

□ Поскольку

$$\big(F_2(x) - F_1(x)\big)' = F_2'(x) - F_1(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

то по следствию из теоремы Лагранжа найдется такое число C, что $F_2(x) - F_1(x) = C$ или $F_2(x) = F_1(x) + C$. ■

Из данной теоремы следует, что если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то выражение вида $F(x) + C$, где C — произвольное число, задает *все* возможные первообразные для $f(x)$.

Определение. Наиболее общий вид первообразной для функции $f(x)$ на промежутке X называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)\,dx$. Таким образом:

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C,}$$

где $F(x)$ — некоторая первообразная для $f(x)$, C — произвольная постоянная.

Слово «неопределенный» подчеркивает, что в общее выражение первообразной функции входит слагаемое, которое можно выбрать произвольным.

Знак $\int$ называется *знаком интеграла*, функция $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, выражение $f(x)\,dx$ — подынтегральным выражением, переменная x — *переменной интегрирования.*

Обозначение $\int f(x)\,dx$ читается так: «интеграл эф от икс дэ икс».

Знак $\int$ (вытянутая буква S), введенный Лейбницем, происходит от начальной буквы латинского слова Summa (сумма), а термин интеграл, введенный учеником Лейбница Якобом Бернулли — от латинского слова integralis (целостный). И знак, и термин были введены для того, чтобы отличить «сумму бесконечно малых» от обычной суммы. По другому предположению, Якоб Бернулли произвел термин от латинского integro (приводить в прежднее состояние, восстанавливать).

> *БЕРНУЛЛИ (Bernoulli) Якоб (1654–1705) — самый знаменитый из трех выдающихся поколений математиков Бернулли (Базель, Швейцария), применившими и развившими дифференциальное и интегральное исчисление Лейбница. Он был также автором первого трактата по математической теории вероятностей.*

Операция нахождения неопределенного интеграла от некоторой функции называется *интегрированием* этой функции.

Из множества первообразных данной функции $f(x)$ только одна может принимать данное значение b при данном значении аргумента $x = a$. Если известен интеграл

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

то соответствующее значение постоянной C находится из соотношения

$$b = F(a) + C.$$

▽ **Пример.** Найти ту первообразную от функции $3\,x^2$, которая принимает значение 6 при $x = 2$.

Решение. Имеем:

$$\int 3\,x^2\,dx = x^3 + C. \tag{11.1}$$

Постоянную C находим из соотношения $6 = 2^3 + C$. Получаем $C = -2$. Подставляя в (11.1), находим искомую первообразную функцию

$$y = x^3 - 2.$$

Геометрически задачу можно сформулировать так: найти ту интегральную кривую функцию $3\,x^2$, которая проходит через точку $(2,\ 6)$. Искомая линия есть кубическая парабола. ▲

Задача. Найти ту первообразную от функции $\dfrac{1}{2}\,x$, которая принимает значение 3 при $x = 2$.

Ответ: $F(x) = \dfrac{1}{4}\,x^2 + 2$.

11.2. Свойства неопределенного интеграла

1. *Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:*

$$\boxed{\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x).}$$

□ $\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$. ■

2. *Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:*

$$\boxed{d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx.}$$

□ $d\left(\int f(x)\,dx\right) = |$применим определение дифференциала$| =$
$= \left(\int f(x)\,dx\right)' dx = |$применим свойство 1$| = f(x)\,dx$. ■

3. *Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого* C:

$$\boxed{\int d\,F(x) = F(x) + C.}$$

□ Пусть производная функции $F(x)$ равна $f(x)$. Тогда $\int d\,F(x) =$
$= \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + C$. ■

Таким образом, согласно свойствам 2 и 3, операции интегрирования и дифференцирования в некотором смысле взаимно обратны (знаки d и $\int$ взаимно уничтожают друг друга, в случае свойства 3, правда, с точностью до постоянного слагаемого).

4. *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:*

$$\boxed{\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx,}$$

где k — некоторое число, отличное от нуля.

□ Найдем производную функции $g(x) = \int k\,f(x)\,dx -$
$- k\int f(x)\,dx$:

$$g'(x) = \left(\int k\,f(x)\,dx - k\int f(x)\,dx\right)' =$$

$$= \left(\int k\,f(x)\,dx\right)' - k\left(\int f(x)\,dx\right)' =$$

$$= |\text{применим свойство 1}| = k\,f(x) - k\,f(x) = 0.$$

По следствию из теоремы Лагранжа найдется такое число C, что $g(x) = C$, и значит

$$\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx + C.$$

Так как сам неопределенный интеграл находится с точностью до постоянного слагаемого, то в последнем равенстве постоянную C

можно опустить. ■

5. *Интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме интегралов от этих функций:*

$$\boxed{\int \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.}$$

Доказательство аналогично доказательству свойства 4.

Нетрудно видеть, что свойство 5 остается справедливым для любого конечного числа слагаемых.

▽ **Пример.** Найти $\int(4\,x^3 - 3\,x^2 + 2\,x)\,dx$.

Решение. Имеем:

$$\int(4\,x^3 - 3\,x^2 + 2\,x)\,dx = \int(4\,x^3)\,dx - \int(3\,x^2)\,dx + \int(2\,x)\,dx =$$

$$= (x^4 + C_1) - (x^3 + C_2) + (x^2 + C_3) = x^4 - x^3 + x^2 + C,$$

где $C = C_1 - C_2 + C_3$. Заметим, что здесь нет необходимости выписывать при промежуточных вычислениях постоянное слагаемое для каждого интеграла. Достаточно приписать его после выполнения всех интегрирований. ▲

11.3. Непосредственное интегрирование

Всякая формула дифференцирования, рассмотренная в обратном порядке, дает формулу интегрирования, например:

$$(e^{2\,x} + \cos x)' = 2\,e^{2\,x} - \sin x,$$

$$\int(2\,e^{2\,x} - \sin x)\,dx = e^{2\,x} + \cos x + C.$$

Таким образом, из таблицы производных нетрудно получить таблицу интегралов (см. следующую страницу).

Справедливость каждой формулы проверяется непосредственно дифференцированием.

Например, формула 1 верна, так как $(x + C)' = x' + C' = 1$.

Формула

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

Таблица интегралов		
№	$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
1	1	$x+C$
2	$x^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$
3	e^x	e^x+C
4	a^x	$a^x/\ln a+C$
5	$\dfrac{1}{x} \quad (x^\alpha,\ \alpha=-1)$	$\ln\lvert x\rvert+C$
6	$\dfrac{1}{x\ln a}$	$\log_a\lvert x\rvert+C$
7	$\cos x$	$\sin x+C$
8	$\sin x$	$-\cos x+C$
9	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x+C$
10	$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x+C$
11	$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}},\ (a>0,\ -a<x<a)$	$\arcsin\dfrac{x}{a}+C$
12	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}} \quad (a\neq 0)$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+a}\right\rvert+C$
13	$\dfrac{1}{x^2+a^2} \quad (a\neq 0)$	$\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}+C$
14	$\dfrac{1}{x^2-a^2} \quad (a\neq 0)$	$\dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{x-a}{x+a}\right\rvert+C$

следует из равенства

$$\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)'=\left(\frac{1}{\alpha+1}\,x^{\alpha+1}\right)'=\frac{1}{\alpha+1}\,(\alpha+1)\,x^\alpha=x^\alpha.$$

Докажем равенство

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{1}{x}\,dx=\ln x+C.$$

Пусть $x>0$. Тогда $|x|=x$ и $(\ln|x|+C)'=(\ln x+C)'=\dfrac{1}{x}$.

Если $x < 0$, то $|x| = -x$ и $(\ln|x| + C)' = (\ln(-x) + C)' = \dfrac{-1}{-x} = \dfrac{1}{x}$, т. е. в обоих случаях производная равна $\dfrac{1}{x}$.

Аналогично доказываются остальные формулы.

Интегрирование, основанное на прямом использовании таблицы интегралов, называется *непосредственным интегрированием.*

При непосредственном интегрировании могут представиться следующие случаи:

1) данный интеграл находится непосредственно по соответствующему табличному интегралу;

2) данный интеграл после применения свойств 4 и 5 приводится к одному или нескольким табличным интегралам;

3) данный интеграл после элементарных тождественных преобразований над подынтегральной функцией и применения свойств 4 и 5 приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Рассмотрим три примера, каждый из которых соответствует одному из трех случаев непосредственного интегрирования.

▽ **Пример 1.** Найти $\int x^3\,dx$, $\int \dfrac{1}{x^3}\,dx$, $\int \sqrt[4]{x^5}\,dx$, $\int \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^5}}\,dx$, $\int x^{-1}\,dx$.

Решение. Все пять интегралов имеют вид: $\int x^\alpha\,dx$. В первом случае $\alpha = 3$, во втором $\alpha = -3$, в третьем $\alpha = 5/4$, в четвертом $\alpha = -5/4$ и в пятом $\alpha = -1$. В первых четырех случаях $\alpha \neq -1$, поэтому применяем формулу 2:

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C.$$

При $\alpha = 3$, $\alpha = -3$, $\alpha = \dfrac{5}{4}$ и $\alpha = -\dfrac{5}{4}$ имеем:

$$\int x^3\,dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C,$$

$$\int \frac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2\,x^2} + C,$$

$$\int \sqrt[4]{x^5}\,dx = \int x^{\frac{5}{4}}\,dx = \frac{x^{\frac{5}{4}+1}}{\frac{5}{4}+1} + C = \frac{x^{\frac{9}{4}}}{\frac{9}{4}} + C = \frac{4\sqrt[4]{x^9}}{9} + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[4]{x^5}}\,dx = \int x^{-\frac{5}{4}}\,dx = \frac{x^{-\frac{5}{4}+1}}{-\frac{5}{4}+1} + C = \frac{x^{-\frac{1}{4}}}{-\frac{1}{4}} + C = -\frac{4}{\sqrt[4]{x}} + C.$$

В следующем примере формулу 2, с помощью которой были найдены предыдущие интегралы, использовать нельзя, так как $\alpha = -1$. Но этот интеграл также является табличным (формула 5):

$$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C. \quad \blacktriangle$$

▽ **Пример 2.** Найти $\int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{5\cos^2(x)} - \frac{2}{x}\right) dx$.

Решение. Используя свойства 4 и 5 и формулы 2, 5, 9, имеем:

$$\int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{5\cos^2(x)} - \frac{2}{x}\right) dx = 3\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{5}\int \frac{dx}{\cos^2(x)} - 2\int \frac{dx}{x} =$$

$$= 3\,\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + \frac{1}{5}\operatorname{tg} x - 2\ln x + C =$$

$$= 4{,}5\,\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{5}\operatorname{tg} x - 2\ln x + C. \quad \blacktriangle$$

▽ **Пример 3.** Найти $\int \frac{1+3\,x^2}{x^2\,(1+x^2)}\,dx$.

Решение.

$$\int \frac{1+3\,x^2}{x^2\,(1+x^2)}\,dx = \int \frac{(1+x^2)+2\,x^2}{x^2\,(1+x^2)}\,dx =$$

$$= \int \frac{(1+x^2)}{x^2\,(1+x^2)}\,dx + \int \frac{2\,x^2}{x^2\,(1+x^2)}\,dx = \int \frac{dx}{x^2}\,dx + \int \frac{2\,dx}{1+x^2}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{x} + 2\operatorname{arctg} x + C. \quad \blacktriangle$$

Задача. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{3 - 2\,x^4 + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}}\,dx$. Результат проверить дифференцированием.

Ответ: $4\sqrt[4]{x^3} - \frac{8}{19}\sqrt[4]{x^{19}} + \frac{12}{17}\sqrt[12]{x^{17}} + C.$

11.4. Метод замены переменной

К наиболее важным методам интегрирования относятся методы: непосредственного интегрирования, замены переменной, интегрирования по частям.

Метод непосредственного интегрирования рассмотрен в предыдущем параграфе.

Метод замены переменной (или *метод подстановки*) основан на следующей теореме.

Теорема 1. *Если $F(t)$ — первообразная функции $f(t)$, а $t = \varphi(x)$ — дифференцируемая функция, то функция $f\big(\varphi(x)\big)\,\varphi'(x)$ также имеет первообразную, причем*

$$\boxed{\int f\big(\varphi(x)\big)\,\varphi'(x)\,dx = F\big(\varphi(x)\big) + C.} \tag{11.2}$$

□ По правилу дифференцирования сложной функции

$$\Big(F\big(\varphi(x)\big)\Big)'_x = F'_t(t)\cdot\varphi'_x(x) = f\big(\varphi(x)\big)\,\varphi'(x),$$

т. е. функция $f\big(\varphi(x)\big)\,\varphi'(x)$ имеет в качестве одной из своих первообразных функцию $F\big(\varphi(x)\big)$.

Следовательно,

$$\int f\big(\varphi(x)\big)\,\varphi'(x)\,dx = F\big(\varphi(x)\big) + C,$$

что и требовалось доказать. ■

Эта формула позволяет свести вычисление интеграла $\int f\big(\varphi(x)\big)\,\varphi'(x)\,dx$ к вычислению интеграла $\int f(t)\,dt$. При этом вместо $\varphi(x)$ мы подставляем переменную t, а вместо $\varphi'(x)\,dx$ — дифференциал этой переменной, т. е. dt. Поэтому формула (11.2) называется *формулой замены переменной* под знаком неопределенного интеграла.

▽ **Пример 1.** Найти $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$.

Решение. В данное подынтегральное выражение входит множитель $\cos x\,dx$, являющийся дифференциалом функции $\sin x$.

Полагая $\sin x = t$, получим $\int e^{\sin x} \cos x\, dx = \int e^t\, dt = e^t + C$. Возвращаясь к переменной x, находим:

$$\int e^{\sin x} \cos x\, dx = e^{\sin x} + C.$$

Проверим полученный результат:

$$\left(e^{\sin x} + C\right)' = e^{\sin x} (\sin x)' = e^{\sin x} \cos x. \quad \blacktriangle$$

▽ **Пример 2.** Найти $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{\sqrt[3]{3x^2+5}}$.

Решение. Числитель данного подынтегрального выражения напоминает дифференциал для подкоренного выражения $3x^2+5$; в самом деле, $d(3x^2+5) = (3x^2+5)'\, dx = 6x\, dx$. Это наводит на мысль о целесообразности подстановки $t = 3x^2+5$. Тогда $dt = 6x\, dx$, откуда $x\, dx = \dfrac{1}{6}\, dt$. Таким образом,

$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt[3]{3x^2+5}} = \int \frac{\frac{1}{6}\, dt}{\sqrt[3]{t}} = \frac{1}{6} \int t^{-\frac{1}{3}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{6} \frac{t^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{1}{4} \sqrt[3]{(3x^2+5)^2} + C. \quad \blacktriangle$$

▽ **Пример 3.** Найти $\int \sqrt{3x+4}\, dx$.

Решение. Положим $t = 3x+4$. Тогда $dt = 3\, dx$, $dx = \dfrac{1}{3}\, dt$,

$$\int \sqrt{3x+4}\, dx = \int \sqrt{t} \cdot \frac{1}{3} \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{3} \int t^{\frac{1}{2}}\, dt = \frac{1}{3} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9} \sqrt{(3x+4)^3} + C. \quad \blacktriangle$$

Заметим, что в простых случаях нет нужды вводить новую переменную. Так, предыдущий пример можно решить следующим образом. Находим в уме дифференциал от подкоренного выражения $3x+4$: $d(3x+4) = 3\, dx$. Вводим в подынтегральное

выражение перед dx множитель 3; для компенсации ставим $\frac{1}{3}$ перед интегралом. Получаем:

$$\frac{1}{3}\int\sqrt{3\,x+4}\cdot 3\cdot dx=\frac{1}{3}\int\sqrt{3\,x+4}\cdot d\,(3\,x+4)=$$

$$=\frac{1}{3}\,\frac{(3\,x+4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{9}\sqrt{(3\,x+4)^3}+C.$$

В последнем решении новая переменная не выписана явно в виде $t=3\,x+4$. В этом случае говорят о *преобразовании функции под знаком дифференциала* или *о введении постоянных и переменных под знак дифференциала.*

▽ **Пример 4.** Найти $\int(2\,x-5)^9\,dx$.

Решение.

$$\int(2\,x-5)^9\,dx=\frac{1}{2}\int(2\,x-5)^9\cdot 2\cdot dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int(2\,x-5)^9\,d(2x-5)=\frac{1}{2}\,\frac{(2\,x-5)^{10}}{10}+C=$$

$$=\frac{1}{20}\,(2\,x-5)^{10}+C.\quad\blacktriangle$$

▽ **Пример 5.** Найти $\int\cos(3\,x+2)\,dx$.

Решение.

$$\int\cos(3\,x+2)\,dx=\frac{1}{3}\int\cos(3\,x+2)\cdot 3\cdot dx=$$

$$=\frac{1}{3}\int\cos(3\,x+2)\cdot d\,(3\,x+2)=\frac{1}{3}\,\sin(3\,x+2)+C.\quad\blacktriangle$$

В примерах 3–5 была использована линейная подстановка $t=$ $=k\,x+b$, где k $(k\neq 0)$ и b — некоторые числа. Применим эту подстановку к общему интегралу вида $\int f(k\,x+b)\,dx$. Пусть $F(x)$ — некоторая первообразная для функции $f(x)$. Тогда

$$\int f(k\,x+b)\,dx=\frac{1}{k}\int f(k\,x+b)\cdot k\cdot dx=$$

$$= \frac{1}{k}\int f(k\,x+b)\cdot d\,(k\,x+b) = \frac{1}{k}\,F(k\,x+b)+C.$$

Таким образом, верна следующая теорема, часто применяемая на практике.

Теорема 2. *Пусть $F(x)$ — некоторая первообразная для функции $f(x)$. Тогда*

$$\boxed{\int f(k\,x+b)\,dx = \frac{1}{k}\,F(k\,x+b)+C,}$$

где k и b — некоторые числа, $k \neq 0$.

▽ **Пример 6.** Найти $\displaystyle\int \frac{1}{3\,x+2}\,dx$.

Решение. Поскольку

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C,$$

применив теорему 2, получим

$$\int \frac{1}{3\,x+2}\,dx = \frac{1}{3}\,\ln|3\,x+2| + C. \quad ▲$$

11.5. Метод интегрирования по частям

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — дифференцируемые функции. По правилу дифференцирования произведения двух функций имеем

$$\big(u(x)\,v(x)\big)' = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x).$$

Интегрируя левую и правую части последнего равенства по переменной x, получаем

$$\int \big(u(x)\,v(x)\big)'\,dx = \int u'(x)\,v(x)\,dx + \int u(x)\,v'(x)\,dx,$$

$$u(x)\,v(x) + C = \int u'(x)\,v(x)\,dx + \int u(x)\,v'(x)\,dx.$$

Так как $\int u(x)\,v'(x)\,dx$ уже содержит произвольную постоянную, то можно опустить C и записать равенство в виде

$$u(x)\,v(x) = \int u'(x)\,v(x)\,dx + \int u(x)\,v'(x)\,dx.$$

Используя определение дифференциала ($du = u'\,dx$, $dv = v'\,dx$), последнее равенство можно записать в форме

$$u\,v = \int v\,du + \int u\,dv$$

или

$$\boxed{\int u\,dv = u\,v - \int v\,du.}$$

Эта формула называется *формулой интегрирования по частям.* Ею обычно пользуются в тех случаях, когда подынтегральное выражение $v\,du$ проще, чем подынтегральное выражение $u\,dv$.

▽ **Пример 1.** Найти $\int x\,e^x\,dx$.

Решение. Воспользуемся методом интегрирования по частям. Положим $u = x$, $dv = e^x\,dx$. Тогда $du = dx$, $v = \int e^x\,dx = e^x + C$. Теперь, применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int x\,e^x\,dx = \begin{vmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = e^x, & v = e^x + C \end{vmatrix} = u\,v - \int v\,du =$$

$$= x\,(e^x + C) - \int (e^x + C)\,dx =$$

$$= x\,e^x + C\,x - e^x - C\,x + C_1 = e^x\,(x - 1) + C_1.$$

Анализ полученного решения показывает, что слагаемые, содержащие C, уничтожаются. Аналогично, в общем случае постоянная C, возникающая при нахождении v, не входит в запись окончательного ответа. Поэтому в дальнейшем, применяя формулу интегрирования по частям и найдя v, будем полагать $C = 0$, что несколько упрощает запись решения. ▲

▽ **Пример 2.** Найти $\int x\,\cos x\,dx$.

Решение. Воспользуемся методом интегрирования по частям. Положим $u = x$, $dv = \cos x\,dx$. Тогда $du = dx$,

$$v = \int \cos x\,dx = \sin x$$

($C = 0$). Теперь, применяя формулу интегрирования по частям получаем

$$\int x\,\cos x\,dx = \left|\begin{matrix} u = x, & du = dx \\ dv = \cos x, & v = \sin x \end{matrix}\right| = x\,\sin x - \int \sin x\,dx =$$

$$= x\,\sin x + \cos x + C. \quad \blacktriangle$$

Задача 1. Найти $\int x\,\sin x\,dx$.

Ответ: $-x\,\cos x + \sin x + C$.

$\triangledown$ **Пример 3.** Найти $\int x^2\,\cos x\,dx$.

Решение.

$$\int x^2\,\cos x\,dx = \left|\begin{matrix} u = x^2, & du = (x^2)'dx = 2\,x\,dx \\ dv = \cos x, & v = \sin x \end{matrix}\right| =$$

$$= x^2\,\sin x - 2\int x\,\sin x\,dx.$$

К полученному интегралу применяем интегрирование по частям (задача 1). Окончательно получаем:

$$\int x^2\,\cos x\,dx = x^2\,\sin x + 2\,x\,\cos x - 2\,\sin x + C.$$

В данном примере формулу интегрирования по частям была применена дважды: после первого интегрирования по частям степень переменной x в подынтегральном выражении уменьшилась на единицу. Второе применение формулы интегрирования по частям привело уже к табличному интегралу. $\blacktriangle$

Задача 2. Найти $\int x\,\sin x\,dx$.

Ответ: $-x^2\,\cos x + 2\,x\,\sin x + 2\,\cos x + C$.

$\triangledown$ **Пример 4.** Найти $\int x\,\ln x\,dx$.

Решение.

$$\int x\,\ln x\,dx = \left|\begin{matrix} u = \ln x, & du = (\ln x)'dx = \dfrac{1}{x}\,dx \\ dv = x\,dx, & v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \left(\frac{x^2}{2}\,\frac{1}{x}\right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{1}{2}\,x^2\ln x - \frac{1}{4}\,x^2.$$

Если выбрать функции u и v в виде $u = x$, $dv = \ln x\,dx$, то возникает интеграл $v = \int \ln x\,dx$, который не является табличным (не путать интеграл с производной!). Таким образом, такой выбор функций приводит к интегралу, который не легче исходного. Интеграл $v = \int \ln x\,dx$ также находится с помощью интегрирования по частям. Он вычислен ниже. Отметим, что даже если его подставить в формулу интегрирования по частям, то получим интеграл, который труднее исходного. Поэтому прежде чем интегрировать по частям, надо в уме прикинуть, что́ может дать тот или иной выбор функции u. ▲

▽ **Пример 5.** Найти $\int \ln x\,dx$.

Решение.

$$\int \ln x\,dx = \left|\begin{matrix} u = \ln x, & du = (\ln x)'dx = \dfrac{1}{x}\,dx \\ dv = dx, & v = x \end{matrix}\right| =$$

$$= x\ln x - \int x\,\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + C.$$

Задача 3. Найти $\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$.

Ответ: $\dfrac{x^2}{2}\,\mathrm{arctg}\,x - \dfrac{1}{2}\,x + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x + C$.

11.6. Компьютерное интегрирование

В предыдущих параграфах были рассмотрены лишь простейшие интегралы. Поэтому может показаться, что отыскание интегралов — это легкое дело. На самом деле это не так. Если при нахождении производных действуют механически, руководствуясь определенными правилами, то при интегрировании часто требуется проявить догадку, найти какую-нибудь нестандартную подстановку. Бóльшая часть подобных находок классифицирована и описана в литературе. Выделены специальные классы функций для интегрирования которых используется один и тот же прием. В учебниках наиболее часто выделяют следующие классы:

1) рациональные функции;

2) иррациональные выражения, вычисляемые при помощи рационализации;

3) иррациональные выражения, вычисляемые при помощи подстановок Эйлера;

4) биномиальные дифференциалы;

5) тригонометрические функции.

В справочниках подобных классов интегрирования значительно больше.

Более того, описаны непрерывные элементарные функции, интегралы от которых не являются элементарными функциями. Такие интегралы часто называют «неберущимися», подразумевая под этим, что такого рода интегралы не могут быть выражены с помощью конечного числа элементарных функций (они имеют представление только в виде ряда!). Например, интегралы

$$\int e^{-x^2}\,dx, \qquad \int \sin x^2\,dx, \qquad \int \cos x^2\,dx,$$

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx, \qquad \int \frac{\cos x}{x}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{\ln x}$$

не сводятся к конечной комбинации элементарных функций.

Хорошими помощниками при интегрировании служат математические пакеты символьных вычислений, которые вобрали в себя практически все что известно об интегралах. Приведем примеры вычисления некоторых интегралов в пакете Maple.

Потребуем от компьютера вычисления «неберущегося» интеграла $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$. Для этого напишем в командной строке:

```
>int(sin(x)/x,x);
```

и нажмем клавишу Enter. Компьютер ответит: `Si(x)`.

Обратившись через Help к помощи узнаем, что через $Si(x)$ обозначается специальная функция, являющаяся одной из первообразных от функции $\frac{\sin x}{x}$ и называемая интегральным синусом или the Sine Integral (синусный интеграл). Таким образом, ответ дан верно (+ C компьютер не пишет).

Преимущества использования пакета особенно заметны, когда приходится применять неоднократные интегрирования по частям. Новых знаний подобная операция не прибавляет, а времени отнимает много. Пусть, например, требуется вычислить интеграл

$\int x^6 \sin x\, dx$. Ясно, что нахождение этого интеграла требует 6 интегрирований по частям, что является весьма утомительным и может привести к механической описке при вычислении. Гораздо проще вычислить этот интеграл на компьютере в пакете Maple. Пишем команду:

```
>int(x^6*sin(x),x);
```

Нажимаем Enter и получаем ответ:

$$-x^6\cos(x)+6\,x^5\sin(x)+30\,x^4\cos(x)-120\,x^3\sin(x)-$$
$$-360\,x^2\cos(x)+720\,\cos(x)+720\,x\sin(x).$$

Для вычисления интеграла $\int \dfrac{x^3-2\,x^2+4}{x^2+2\,x-3}\,dx$ набираем

```
>int((x^3-2*x^2+4)/(x^2+2*x-3),x);
```

Ответ: $\dfrac{1}{2}\,x^2-4\,x+\dfrac{41}{4}\,\ln(x+3)+\dfrac{3}{4}\,\ln(-1+x)$. (Интеграл вычисляется выделением в подынтегральном выражении целой части и разложением остатка в сумму простейших дробей.)

Пусть требуется вычислить интеграл $\int \dfrac{1}{1+\sin x+\cos x}\,dx$. После выполнения компьютером команды

```
>int(1/(1+sin(x)+cos(x)),x);
```

получаем $\ln\left(2+2\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{1}{2}\,x\right)\right)$. (Этот интеграл от выражения, содержащего тригонометрические функции, можно вычислить с помощью универсальной тригонометрической подстановки $t=\mathrm{tg}\left(\dfrac{1}{2}\,x\right)$.)

Чтобы вычислить интеграл $\int \dfrac{x}{\sqrt{(7*x-10-x^2)^3}}\,dx$ на компьютере, вводим команду

```
>int(x/sqrt((7*x-10-x^2)^3),x);
```

и нажимаем клавишу Enter.

Ответ: $-\dfrac{2}{9}\,\dfrac{(7\,x-20)\,(-7\,x+10+x^2)}{\sqrt{-(-7\,x+10+x^2)^3}}$. Без использования Maple пришлось бы применить так называемую третью подстановку

Эйлера, которая для данного примера имеет вид $t = \sqrt{7x - 10 - x^2}\,/(x-2)$.

Интегрирование при помощи компьютера превращает былое искусство в элементарное нажатие кнопок. Поэтому многие, возможно, еще жалеют о том времени, когда приходилось применять чудеса смекалки, чтобы вычислить тот или иной интеграл. Стоит ли жалеть об этом? Думается, что нет. То, что трудоемко и требует больших затрат времени, уходит в прошлое. Такова логика развития. Ведь не пытаемся же мы вспомнить как делятся римские цифры. А деление римских цифр — это тоже целое искусство. Римская система, в отличие от арабской, не является позиционной. Поэтому выполнения арифметических операций в этой системе сродни искусству. Чтобы научиться арифметическому делению, в Европе в средние века требовалось закончить университет. Да еще не всякий университет мог научить этой премудрости. Нужно было непременно ехать в Италию: тамошние математики добивались большого искусства в делении римских цифр. Деление же миллионных чисел было доступно лишь бородатым мужам, посвятившим этому занятию всю жизнь.

Римская система счисления, распространенная в средние века в Европе, оказалась неудобной для арифметических операций и канула в лету. Мы стали проводить необходимые вычисления быстро и легко, полностью забыв об искусстве счета в римской системе счисления. Так надо ли жалеть о том, что рутинное искусство интегрирования также уходит в прошлое? Не лучше ли направить свои знания, навыки, смекалку и выдумку на задачи, которые еще ждут своего решения?

Тот, кто имеет достаточные навыки в анализе, сможет все увидеть с необычайной легкостью.

Л. Эйлер

Глава 12
Определенный интеграл

12.1. Исторические сведения

Интегральное исчисление возникло из задач на определение площадей и объемов. Эмпирически обнаруженные правила измерения площадей и объемов некоторых простейших фигур были известны еще ученым Древнего Востока. Уже за 2000 лет до н. э. египтяне и вавилоняне умели, в частности, приближенно измерять площадь круга и знали правило вычисления объема усеченной пирамиды с квадратным основанием. А существенный прогресс в вычисление площадей и объемов различных фигур внесла древнегреческая наука. Особенно большой вклад был внесен Архимедом. Архимед нашел площади многих фигур и объемы значительного числа тел, основываясь на представлении, что плоская фигура состоит из бесчисленного множества прямых отрезков, а геометрическое тело — из бесчисленного количества параллельных плоских сечений.

АРХИМЕ́Д (около 287–212 до н.э.) — древнегреческий математик, физик, астроном и изобретатель. Родился в Сиракузах (о. Сицилия) и жил в эпоху 1-й и 2-й Пунических войн. Архимед — автор многочисленных технических изобретений: машины для орошения полей, водоподъемного механизма (архимедов винт), системы рычагов, блоков для поднятия больших тяжестей, военных метательных машин и т. п. Во время 2-й Пунической войны он возглавлял оборону Сиракуз. Его метательные машины вынудили римлян отказаться от попытки взять город штурмом и заставили перейти к осаде.

Математические работы Архимеда намного опередили свое время и были правильно оценены только в эпоху создания дифференциального и интегрального исчисления. Архимед вычислил площадь эллипса, параболического сегмента, нашел площадь поверхности и шара, объем шара и сферического сегмента, а также объемы различных тел вращения и их сегментов. Ему принадлежит также понятие центра тяжести тела, он нашел положение центра тяжести различных фигур и тел, дал математический вывод законов рычага. Рассказывают, что Архимед нашел решение задачи об определении количества золота и серебра в жертвенной короне сиракузского царя Гиерона, когда садился в ванну, и нагим побежал домой с криком «эврика!» (нашел). Крупнейшим его достижением в астрономии было построение планетария — полой вращающейся сферы, на которой можно было наблюдать движение солнца и пяти планет, фаз луны, солнечные и лунные затмения.

При взятии Сиракуз Архимед был убит римским солдатом, которого, по преданию, встретил словами: «Не трогай моих чертежей». На могиле Архимеда был поставлен памятник с изображением шара и описанного вокруг него цилиндра. Эпитафия указывала, что объемы этих тел относятся как 2:3, — открытие Архимеда которое он особенно ценил.

Систематическое развитие подобные представления получили значительно позже — лишь в XVII веке. Так, например, теорему Архимеда о том, что площадь круга равновелика площади треугольника с основанием, равным длине окружности, и высотой равной радиусу, И. Кеплер доказывал в нескольких словах: каждая точка окружности рассматривается как основание равнобедренного треугольника с вершиной в центре круга и высотой, равной радиусу; площадь круга состоит из бесконечного числа треугольников, в совокупности равновеликих треугольнику с той же высотой, то есть радиусом, и основанием, равным сумме всех оснований, то есть длине окружности.

КЕ́ПЛЕР (Kepler) Иоганн (1571–1630) — немецкий астроном и математик. Родился в Вейль-дер-Штадте (Вюртенберг, Германия). Обрабатывая наблюдения датского астронома Т. Браге установил три закона движения планет. Изложил теорию солнечных и лунных затмений, их причины и способы предсказания. Изобрел простейшую зрительную трубу, которая до сих пор называется его именем. Оригинальными приемами интеграций нашел объемы 92 тел вращения.

Пользуясь такого рода рассуждениями И. Кеплер нашел объемы многих новых тел вращения. Известные в астрономии законы Кеплера фактически также были получены им с помощью приближенного интегрирования.

Замечательно остроумные приемы Архимеда, Кеплера и других ученых не обладали, однако, строгостью, а главное, как

правило, носили характер геометрических преобразований, для каждого случая особых и поэтому лишенных общности.

Кавальери, Торричелли, Ферма, Паскаль и другие ученые XVII века еще больше приблизились к современным представлениям об интеграле. Барроу установил связь между задачей о разыскании площади и задачей о разыскании касательной. А И. Ньютон и Г. Лейбниц независимо друг от друга в 70-х годах XVII века отделили эту связь от упомянутых частных геометрических задач и создали алгоритмы дифференциального и интегрального исчислений.

И. Ньютон открыл взамно обратный характер операций дифференцирования и интегрирования. Он указывал, что все задачи нового анализа сводятся к двум взамно обратным проблемам, которые могут быть сформулироаны в терминах механики: 1) определение скорости движения в данный момент времени по известному пути и 2) определение пройденного за данное время пути по известной скорости движения. «Время» при этом понималось просто как общий аргумент всех переменных. Вводит он и понятие дифференциала, которое называет моментом. И. Ньютон намечает программу построения анализа на основе учения о пределе, не давая впрочем формального определения этого понятия, получившего глубокое развитие в математике XIX века.

Г. Лейбниц свел частные и разрозненные приемы вычисления площадей, проведения касательных и т. п. в единую систему взаимно связанных понятий анализа, выраженных в обозначениях, позволяющих производить действия с бесконечно малыми по правилам определенного алгоритма. При этом дифференциал в основном понимался как бесконечно малая разность двух соседних значений величины (отсюда его символ d — первая буква латинского слова differentia (дифференция) — разность, и отношение дифференциалов $\frac{dy}{dx}$, соответствующее производной), кривая рассматривалась как многоугольник с бесконечно большим бесконечно малых сторон, касательная — как прямая продолжающая одну из таких сторон. Г. Лейбниц ввел понятие об интеграле как о сумме бесконечного числа дифференциалов. Таким образом, главными понятиями анализа Г. Лейбница являлись дифференциал как бесконечно малая разность и интеграл как сумма.

Дальнейшее развитие методы интегрирования получили в XVIII и XIX веках. В XVIII веке в работах Л. Эйлера были найдены практически все известные в настоящее время приемы

интегрирования в элементарных функциях. В XIX веке О. Коши аналитически доказал существование интеграла непрерывной функции и перестроил дифференциальное и интегральное исчисление, заложив в качестве их основы понятие предела функции.

Дальнейшие обобщения понятия интеграла связаны с немецким ученым Б. Риманом и французским ученым А. Лебегом.

12.2. Понятие определенного интеграла

Рассмотрим непрерывную функцию $y = f(x)$, не принимающую отрицательных значений, так что график ее целиком лежит выше оси Ox, хотя и может касаться оси Ox в некоторых точках. Пусть a и b — такие числа, что функция определена при $a \leqslant x \leqslant b$.

Кривая $y = f(x)$ и прямые $x = a$, $x = b$ и $y = 0$ ограничивают некоторую область плоскости, называемую *областью под кривой* $y = f(x)$ *от* a *до* b, или *криволинейной трапецией.*

Если требуется вычислить площадь S криволинейной трапеции, то можно, например, покрыть плоскость сетью мелких квадратов и сосчитать число квадратов, лежащих внутри нашей области (рис. 12.1). Это не дает еще всей площади, поскольку некоторые из квадратов лежат частично внутри, а частично вне рассматриваемой области. Но если сделать сеть достаточно густой, то можно вычислить S с любой степенью точности.

Можно вычислить площадь криволинейной трапеции и с помощью тонких прямоугольников. Лейбниц считал, что криволинейная трапеция составлена из бесконечно тонких прямоугольников (рис. 12.2). Каждый такой прямоугольник поднимается над точкой x интервала $[a,\ b]$; он имеет высоту $f(x)$ и бесконечно

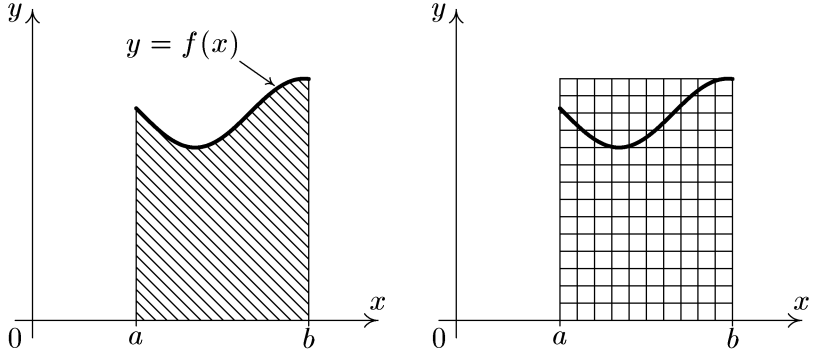


Рис. 12.1. Криволинейная трапеция

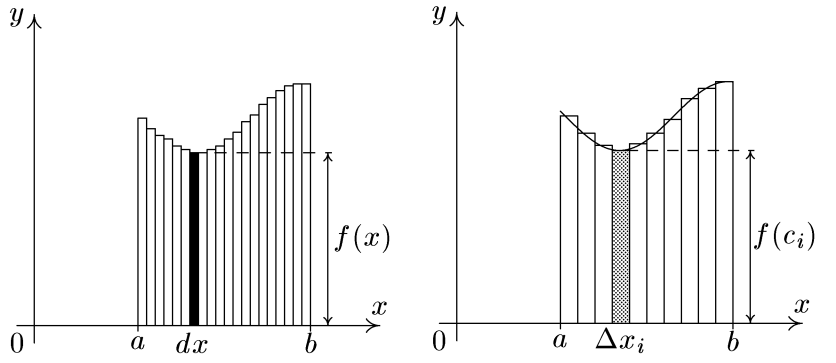


Рис. 12.2. Вычисление площади криволинейной трапеции

малую ширину dx; площадь его равна, следовательно, $f(x)\,dx$. Общая же площадь S есть сумма всех таких площадей.

Напомним, Лейбниц писал $S = \int f(x)\,dx$. Символ $\int$ означал у него сумму. Этот символ происходит от удлинения буквы S (первой буква слова Summa). Позже ученик Лейбница Иоган Бернулли предложил отличать «целостную сумму бесконечно малых» от обычной суммы и предложил знак $\int$ именовать интегралом от латинского слова integralis (целостный).

Фурье усовершенствовал обозначение Лейбница, предложив явно указывать начальное и конечное значения x:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Рассуждения математиков XIX века носили нестрогий характер. Термин бесконечно малая величина не был достаточно строго определен, что приводило к противоречиям. Строгое определение основано на понятии предела и интегральной суммы. Оно вобрало в себя качественный смысл определения Лейбница и устранило нечеткость формулировок.

Пусть функция $f(x)$ неотрицательна на $[a,\ b]$. Разобьем отрезок $[a,\ b]$ на n промежутков точками $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

На каждом отрезке разбиения выберем точку c_i и положим

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Тогда произведение $f(c_i)\,\Delta x_i$ равно площади прямоугольника S_i со сторонами $f(c_i)$ и Δx_i. Сумма площадей всех таких прямоугольников равна сумме вида

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i.$$

Эта сумма представляет площадь ступенчатой фигуры. Чем у́же ступеньки, тем ближе площадь ступенчатой фигуры к площади криволинейной трапеции (рис. 12.2). Естественно ожидать, что при неограниченном возрастании числа промежутков, так что наибольшая из их длин стремится к нулю, сумма S_n стремится к площади криволинейной трапеции S.

Введем теперь точное определение.

Пусть на отрезке $[a,\ b]$ задана функция $y = f(x)$ (теперь уже не обязательно неотрицательная). Разобьем отрезок $[a,\ b]$ на n промежутков точками $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

На каждом отрезке разбиения $[x_{i-1},\ x_i]$ выберем точку c_i и положим

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Сумму вида

$$\boxed{S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i}$$

назовем *интегральной суммой* для функции $y = f(x)$ на $[a,\ b]$. Очевидно, что интегральная сумма зависит от способа разбиения отрезка $[a,\ b]$ точками $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$, так и от выбора точек $c_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_n$ на каждом из промежутков разбиения $[x_{i-1},\ x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Обозначим через $\max \Delta x_i$ максимальную из длин отрезков $[x_{i-1},\ x_i]$, где $i = 1, 2, \ldots, n$.

Определение. Пусть предел интегральной суммы

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$

при стремлении $\max \Delta x_i$ к нулю существует, конечен и не зависит от способа выбора точек $x_1, x_2, \ldots$ и $c_1, c_2, \ldots$. Тогда этот предел называется *определенным интегралом от функции* $y = f(x)$

на $[a,\ b]$ и обозначается

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

а сама функция $y = f(x)$ называется *интегрируемой* на отрезке $[a,\ b]$, т. е.

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i.}$$

Эта запись читается: «интеграл от а до бэ эф от икс дэ икс». При этом число a называется *нижним пределом*, число b — его *верхним пределом* («пределы интегрирования» не имеют ничего общего с термином «предел функции»); функция $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, выражение $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением*, а задача о нахождении $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ — *интегрированием функции* $f(x)$ на отрезке $[a,\ b]$.

Несмотря на сходство в обозначениях и терминологии, определенный и неопределенный интегралы существенно различные понятия. Неопределенный интеграл представляет функцию (а точнее семейство функций), а определенный интеграл — это число.

Из определения следует, что величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования, т. е.

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(t)\,dt = \int\limits_a^b f(u)\,du.$$

Верхний предел b может быть больше или меньше нижнего a. В первом случае

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

т. е. $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} > 0$. Во втором случае

$$a = x_0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_{n-1} > x_n = b,$$

т. е. $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} < 0$.

Поэтому по определению полагают

$$\boxed{\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.}$$

Понятие определенного интеграла распространяют и на случай $a = b$; интеграл с равными пределами считается равным нулю:

$$\boxed{\int_a^a f(x)\,dx = 0.}$$

Это соглашение оправдано тем, что интегральная сумма стремится к нулю при сближении a и b.

Очевидно, если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,\ b]$, то она и ограничена на этом отрезке. В самом деле, если $f(x)$ не ограничена на отрезке $[a,\ b]$, то она не ограничена на некотором отрезке $[x_{i-1},\ x_i]$. За счет выбора точки c_i интегральную сумму можно сделать сколь угодно большой, а такая интегральная сумма не имеет конечного предела, что противоречит определению, согласно которому предел интегральной суммы S_n существует и конечен.

Покажем на примере функции Дирихле, что обратное утверждение неверно: существует ограниченная функция, не являющаяся интегрируемой. Напомним, что функция Дирихле равна единице в рациональных точках и нулю — в иррациональных. На любом отрезке $[a,\ b]$ эта функция ограничена, но не является интегрируемой на нем. Действительно, если в каждом отрезке $[x_{i-1},\ x_i]$ выбрать рациональную точку c_i, то интегральная сумма

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) =$$

$$= (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (x_n - x_{n-1}) =$$

$$= x_n - x_0 = b - a.$$

Если выбрать иррациональную точку c_i, то $f(c_i) = 0$ и

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0 = 0.$$

Таким образом, с одной стороны $S_n = b - a$, с другой стороны $S_n = 0$. Поэтому предел интегральных сумм не существует и функция Дирихле не является интегрируемой.

Отметим без доказательств, что справедливы следующие утверждения:

1. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,\ b]$, то она интегрируема на любом отрезке $[c,\ d]$, содержащимся в $[a,\ b]$.

2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

3. Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a,\ b]$ конечное число точек разрыва первого рода, то она интегрируема на $[a,\ b]$.

12.3. Геометрический смысл интеграла

В случае, когда функция $y = f(x)$ *неотрицательна на отрезке* $[a,\ b]$, где $a < b$, $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ численно равен площади S под кривой $y = f(x)$ на $[a,\ b]$. Это следует из определения интеграла: при стремлении $\max \Delta x_i$ к нулю ширина ступенек стремится к нулю и интегральная сумма превращается в площадь фигуры под кривой.

Если $a < b$ и $f(x) \leqslant 0$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -S,$$

т. е. определенный интеграл от функции, принимающей неположительные значения, равен площади соответствующей криволинейной трапеции, взятой со знаком минус (рис. 12.3).

Если $a < b$ и $f(x)$ меняет знак на отрезке $[a,\ b]$, то определенный интеграл равен алгебраической сумме площадей соответствующих криволинейных трапеций (рис. 12.3):

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = S_1 - S_2 + S_3.$$

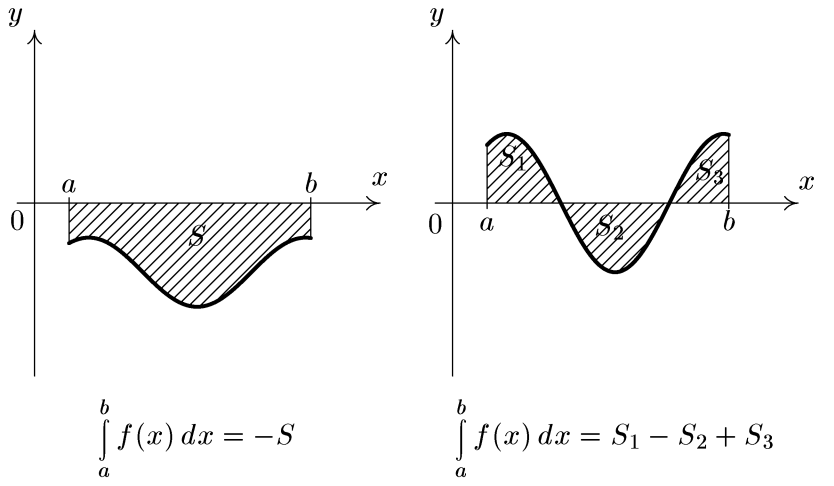


Рис. 12.3. Геометрический смысл интеграла

12.4. Интеграл в социально-экономической сфере

Определение интегральной суммы позволяет использовать понятие определенного интеграла в социально-экономической сфере. Его применение основано на том, что любой меняющийся социально-экономический процесс может быть интерпретирован как скачкообразный, скачки которого близки к нулю.

Количество денег, поступивших в сбербанк за определенный промежуток времени. Пусть $u = f(t)$ описывает количество денег поступающих в сберегательный банк в каждый момент времени t. Требуется определить общее количество денег U, поступивших в банк за промежуток времени $[0,\ T]$.

Если $f(t) = \text{const}$, то количество денег U, поступившее в банк за промежуток времени $[0,\ T]$, находится по формуле $U = f(c) \cdot (T - 0) = f(c)\,T$, где c произвольное значение из отрезка $[0,\ T]$.

Если в каждый момент времени за промежуток времени $[0,\ T/2]$ в банк поступает $f(c_1)$ денежных единиц, а в каждый момент времени в промежутке $[T/2,\ T]$ — $f(c_2)$ денежных единиц, то общее количество денег, поступившее за промежуток времени $[0,\ T]$, подсчитывается по формуле

$$U = f(c_1)\,T/2 + f(c_2)\,T/2.$$

Пусть $f(t)$ — произвольная кусочно-непрерывная функция на отрезке $[0,\ T]$. Разобьем отрезок $[0,\ T]$ на промежутки времени точками:

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = T.$$

Количество денег ΔU_i, поступивших в банк за промежуток времени $[t_{i-1},\ t_i]$, приближенно может быть вычислено по формуле

$$\Delta U \approx f(c_i)\,\Delta t_i,$$

где $c_i \in [t_{i-1},\ t_i]$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ (точность этого равенства тем выше, чем меньше Δt_i). Тогда

$$U = \sum_{i=1}^{n} \Delta U_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta t_i.$$

При стремлении $\max \Delta t_i$ к нулю каждое из использованных приближенных равенств становится все более точным, поэтому

$$U = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta t_i.$$

Учитывая определение определенного интеграла, окончательно получаем

$$\boxed{U = \int_0^T f(t)\,dt,}$$

т. е. если $f(t)$ — количество денег, поступивших в сбербанк в момент времени t, то $\int\limits_0^T f(t)\,dt$ есть общее количество денег, поступивших в сбербанк за промежуток времени $[0,\ T]$.

Поскольку $f(t) \geqslant 0$, то общее количество денег, поступивших в сбербанк за промежуток времени $[0,\ T]$ численно равно площади фигуры под графиком функции $f(t)$.

Объем продукции, произведенной за определенный промежуток времени. Пусть, теперь, функция $y = f(t)$ описывает изменение производительности некоторого производства с течением времени. Найдем объем продукции Q, произведенной за промежуток времени $[0,\ T]$.

Разобьем отрезок $[0,\ T]$ на промежутки времени точками:

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = T.$$

Объем продукции ΔQ_i, произведенной за промежуток времени $[t_{i-1},\ t_i]$, приближенно может быть вычислен по формуле

$$\Delta Q \approx f(c_i)\,\Delta t_i,$$

где $c_i \in [t_{i-1},\ t_i]$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (точность этого равенства тем выше, чем меньше Δt_i). Тогда

$$\boxed{Q = \sum_{i=1}^{n} \Delta Q_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta t_i.}$$

При стремлении $\max \Delta t_i$ к нулю каждое из использованных приближенных равенств становится все более точным, поэтому

$$Q = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta t_i.$$

Учитывая определение определенного интеграла, окончательно получаем

$$Q = \int_0^T f(t)\,dt,$$

т. е. если $f(t)$ — производительность труда в момент времени t, то $\int\limits_0^T f(t)\,dt$ есть объем выпускаемой продукции за промежуток времени $[0,\ T]$.

Поскольку $f(t) \geqslant 0$, то объем продукции, произведенной за промежуток времени $[0,\ T]$, численно равен площади фигуры под графиком функции $f(t)$, описывающей изменение производительности труда с течением времени, на промежутке $[0,\ T]$.

12.5. Свойства определенного интеграла

На протяжении всего параграфа будем предполагать интегрируемость рассматриваемых функций на выделенных отрезках интегрирования.

Рассмотрим сначала свойства определенного интеграла, которые имеют аналоги в случае интеграла неопределенного.

1. *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла,* т. е.

$$\boxed{\int\limits_a^b k\,f(x)\,dx = k\int\limits_a^b f(x)\,dx,}$$

где k — некоторое число.

□ Отрезок $[a,\ b]$ разобьем на отрезки $[x_{i-1},\ x_i]$ и выберем точки c_i на каждом из отрезков разбиения. Составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} k\,f(c_i)\,\Delta x_i$$

для функции $k\,f(x)$. Используя распределительный закон умножения чисел, имеем

$$\sum_{i=1}^{n} k\,f(c_i)\,\Delta x_i = k\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i.$$

Переходя к пределу при $\max\Delta x_i \to 0$ в левой и правой частях последнего равенства и вынося множитель k в правой части из под знака предела, получаем

$$\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} k\,f(c_i)\,\Delta x_i = k\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i.$$

По определению определенного интеграла первый из пределов равен $\int\limits_a^b k\,f(x)\,dx$, второй равен $k\int\limits_a^b f(x)\,dx$. ■

2. *Интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме интегралов от этих функций,* т. е.

$$\boxed{\int\limits_a^b \big(f(x)\pm g(x)\big)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx \pm \int\limits_a^b g(x)\,dx.}$$

□ Справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{n}\big(f(c_i)\pm g(c_i)\big)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i \pm \sum_{i=1}^{n} g(c_i)\,\Delta x_i.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\max \Delta x_i \to 0$, получаем

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \big(f(c_i) \pm g(c_i)\big)\, \Delta x_i = \\ = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x_i \pm \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(c_i)\, \Delta x_i.$$

Откуда

$$\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx. \quad \blacksquare$$

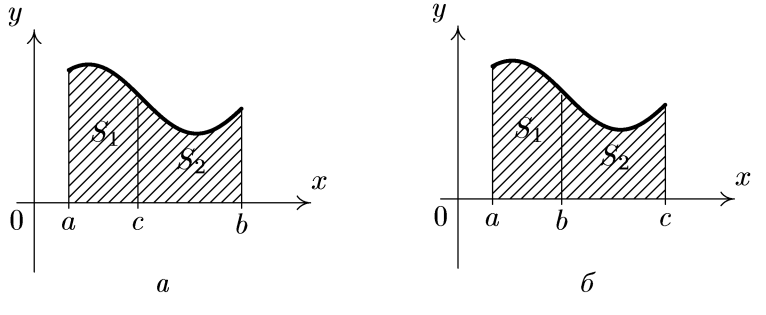
Перейдем теперь к свойствам определенного интеграла, которые не имеют аналогов в случае неопределенного интеграла.

3. *Если отрезок интегрирования разбит на части, то интеграл на всем отрезке равен сумме интегралов для каждой из возникших частей,* т. е. при любых a, b, c:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.}$$

При $a < c < b$ это равенство имеет простой геометрический смысл (см. рис. 12.4, *а*). Согласно геометрическому смыслу определенного интеграла

$$\int_a^c f(x)\, dx = S_1, \qquad \int_c^b f(x)\, dx = S_2, \qquad \int_a^b f(x)\, dx = S,$$



а *б*

Рис. 12.4. Третье свойство определенного интеграла

где S — площадь всей заштрихованной фигуры. Тогда при сделанных предположениях третье свойство утверждает наличие следующего очевидного соотношения между площадями:

$$S = S_1 + S_2.$$

Другие случаи сводятся к данному. Например, если $a < b < c$, то согласно рис. 12.4, *б*):

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = S_1 = S - S_2 = \int\limits_a^c f(x)\,dx - \int\limits_b^c f(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

4. *Если на отрезке* $[a,\ b]$, *где* $a < b,\ f(x) < g(x),$ *то и*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx,$$

т. е. обе части неравенства можно почленно интегрировать.

□ Из неравенства $f(x) \leqslant g(x)$ вытекает аналогичное неравенство для интегральных сумм:

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} g(c_i)\,\Delta x_i.$$

Переходя к пределу при $\max \Delta x_i \to 0$, получаем

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i \leqslant \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(c_i)\,\Delta x_i;$$

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx. \quad \blacksquare$$

Следствие. *Пусть на отрезке* $[a,\ b]$, *где* $a < b$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$, *где* m *и* M *— некоторые числа. Тогда*

$$\boxed{m\,(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M\,(b-a).}$$

□ По свойству 4 имеем

$$\int\limits_a^b m\,dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b M\,dx.$$

Вычислим $\int\limits_a^b m\,dx$ и $\int\limits_a^b M\,dx$. Для этого докажем сначала равенство

$$\int\limits_a^b dx = b - a.$$

Подынтегральная функция равна единице: $f(x) = 1$; интегральная сумма для нее выразится формулой

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i =$$

$$= (x_1 - a) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \ldots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \\ + (b - x_{n-1}) = b - a.$$

Далее, согласно свойству 1 имеем

$$\int\limits_a^b m\,dx = m \int\limits_a^b dx = m\,(b - a),$$

$$\int\limits_a^b M\,dx = M \int\limits_a^b dx = M\,(b - a),$$

откуда

$$m\,(b - a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M\,(b - a). \quad \blacksquare$$

5. Теорема о среднем. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$ (где $a < b$), то найдется значение $c \in [a,\ b]$, что*

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b - a).}$$

□ По первой и второй теоремам Вейерштрасса непрерывная на отрезке $[a,\ b]$ функция ограничена на нем и достигает своего наименьшего и наибольшего значения (см. раздел «Предел и непрерывность»), т. е.

$$m \leqslant f(x) \leqslant M, \qquad x \in [a,\ b],$$

где m и M — наименьшее и наибольшее значения функции на $[a,\ b]$. Тогда согласно только что доказанному следствию

$$m\,(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M\,(b-a),$$

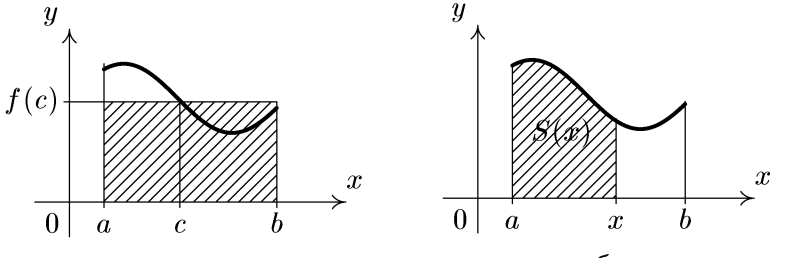
или

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M.$$

Но функция, непрерывная на отрезке, принимает любое значение, заключенное между наименьшим и наибольшим значениями (теорема Больцано–Коши). Поэтому, в частности, найдется такое число $c \in [a,\ b]$, что

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c). \quad \blacksquare$$

Геометрический смысл теоремы о среднем. Пусть $f(x) \geqslant 0$ на $[a,\ b]$. Найдется точка c из отрезка $[a,\ b]$, что площадь под кривой $y = f(x)$ на $[a,\ b]$ равна площади прямоугольника со сторонами $f(c)$ и $(b-a)$ (см. рис. 12.5, *а*).



а *б*

Рис. 12.5

12.6. Формула Ньютона–Лейбница

Рассмотрим функцию $y = f(t)$, интегрируемую на отрезке $[a,\ b]$. Если $x \in [a,\ b]$, то функция $f(t)$ интегрируема также на любом отрезке $[a,\ b]$. Предположим, что x меняется на отрезке $[a,\ b]$, тогда на этом отрезке определена функция

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt.$$

Эта функция называется *определенным интегралом с переменным верхним пределом.*

Пусть $f(x) \geqslant 0$ на отрезке $[a,\ b]$. Тогда значение функции $\Phi(x)$ в точке x равно площади $S(x)$ под кривой $y = f(x)$ на отрезке $[a,\ x]$ (см. рис. 12.5, *б*). В этом состоит геометрический смысл интеграла с переменным верхним пределом.

Рассмотрим теперь свойства функции $\Phi(x)$.

Теорема. *Если подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна, то производная функции $\Phi(x)$ по переменному верхнему пределу существует и равна значению подынтегральной функции для этого предела*, т. е.

$$\boxed{\Phi'(x) = \left(\int\limits_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x).}$$

□ Мы должны доказать, что

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = f(x).$$

Найдем $\Delta\Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)$.

$$\Delta\Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int\limits_a^x f(t)\,dt = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

По теореме о среднем найдется такое значение $c \in [x,\ x + \Delta x]$, что

$$\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(c)\,(x + \Delta x - x) = f(c)\,\Delta x,$$

откуда

$$\Delta\Phi = f(c)\,\Delta x.$$

Найдем теперь $\Phi'(x)$.

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c)\,\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} f(c).$$

Заметим, что $c \to x$ при $\Delta x \to 0$, так как $c \in [x,\ x+\Delta x]$. Поэтому в силу непрерывности функции $f(x)$ получаем:

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} f(c) = f(x). \quad \blacksquare$$

Следствие. *Для любой непрерывной функции $f(x)$ существует первообразная.*

Действительно, в качестве такой первообразной всегда можно предъявить определенный интеграл с переменным верхним пределом $\Phi(x)$, поскольку $\Phi'(x) = f(x)$.

Теорема (формула Ньютона–Лейбница). *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$ и $F(x)$ — произвольная первообразная для $f(x)$ на $[a,\ b]$. Тогда определенный интеграл от функции $f(x)$ на $[a,\ b]$ равен разности значений первообразной $F(x)$ для верхнего и нижнего предела интегрирования*, т. е.

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).}$$

□ Пусть $F(x)$ — некоторая первообразная для функции $f(x)$. Функция $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ также является первообразной для функции $f(x)$. Следовательно,

$$F(x) - \Phi(x) = C,$$

так как любые первообразные для одной и той же функции отличаются лишь на константу (см. с. 202). Отсюда

$$F(b) - F(a) = (\Phi(b) + C) - (\Phi(a) + C) = \Phi(b) - \Phi(a) =$$

$$= \int\limits_a^b f(x)\,dx - \int\limits_a^a f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx - 0 = \int\limits_a^b f(x)\,dx. \quad \blacksquare$$

Формула названа в честь Ньютона и Лейбница, хотя она была установлена еще Барроу, учителем Ньютона.

> *БА́РРОУ (Barrow) Иссак (1630–1677) — английский математик, филолог, богослов. Родился в Лондоне. Крупным достижением Барроу является установление связей между операцией отыскания производной и операцией интегрирования. Он рассматривает интегрирование, по сути дела, как новую математическую операцию, с помощью которой можно решать многие задачи.*
>
> *В 1669 г. он отказался от кафедры математики в Кембридже в пользу Ньютона, своего тезки и ученика.*
>
> *Перед смертью Барроу произнес: «Наконец-то я узнаю решение многих геометрических и астрономических вопросов. О, господи, какой Ты геометр!»*

Формула Ньютона–Лейбница сводит вычисление определенного интеграла к отысканию неопределенного интеграла. Чтобы вычислить определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, достаточно найти неопределенный интеграл $\int f(x)\,dx$, подставить в найденное выражение сначала верхний предел, затем нижний и вычесть вторую величину из первой.

Постоянное слагаемое неопределенного интеграла можно не выписывать: оно все равно уничтожится при вычитании.

▽ **Пример 1.** Найти $\int\limits_{-1}^{2} 3\,x^2\,dx$.

Решение. Находим неопределенный интеграл

$$\int 3\,x^2\,dx = x^3 + C.$$

Подставив $x = 2$, находим $8 + C$; при $x = -1$ получаем $-1 + C$. Вычитая вторую величину из первой, находим

$$\int\limits_{-1}^{2} 3\,x^2\,dx = (8 + C) - (-1 + C) = 8 - (-1) = 9.$$

Постоянное слагаемое C при вычитании уничтожилось. ▲

▽ **Пример 2.** Найти $\int\limits_0^{\pi} \sin x\,dx$.

Решение. Имеем

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^{\pi} \sin x\,dx = -(\cos\pi - \cos 0) = 2. \quad \blacktriangle$$

Разность $F(b) - F(a)$ при вычислении интеграла часто записывают так:

$$F(x)\Big|_a^b$$

(читается: «$F(x)$ с двойной подстановкой от a до b») обозначает то же, что $F(b) - F(a)$. Например, вместо $-(\cos\pi - \cos 0)$ пишут $-\cos x\Big|_0^{\pi}$.

▽ **Пример 3.** Найти $\int\limits_1^e \dfrac{dx}{x}$.

Решение. Имеем

$$\int\limits_1^e \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1. \quad \blacktriangle$$

12.7. Методы интегрирования

Теорема 1. *Если выполнены условия 1) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$; 2) отрезок $[a,\ b]$ является множеством значений функции $x = g(t)$, определенной на отрезке $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ и имеющую на нем непрерывную производную; 3) $g(\alpha) = a,\ g(\beta) = b$, то справедлива формула*:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(g(t)\big)\,g'(t)\,dt.}$$

□ Пусть $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ на отрезке $[a,\ b]$, т. е. $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in [a,\ b]$, тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Поскольку функции $F(x)$ и $x = g(t)$ являются дифференцируемыми на соответствующих отрезках, сложная функция $F\big(g(t)\big)$ дифференцируема и

$$F'_t = F'_x(x)\,g'_t(t) = f\big(g(t)\big)\,g'(t).$$

Следовательно, функция $F\big(g(t)\big)$ является первообразной для функции $f\big(g(t)\big)$ на отрезке $[\alpha,\ \beta]$. По формуле Ньютона–Лейбница получаем

$$\int\limits_\alpha^\beta f\big(g(t)\big)\,g'(t)\,dt = F\big(g(\beta)\big) - F\big(g(\alpha)\big) =$$

$$= F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)\,dx. \quad \blacksquare$$

Доказанную формулу называют *формулой замены переменной под знаком определенного интеграла.* При использовании этой формулы определенного интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

преобразуется с помощью подстановки $x = g(t)$ в определенный интеграл

$$\int\limits_\alpha^\beta f\big(g(t)\big)\,g'(t)\,dt$$

относительно новой переменной t. При этом старые пределы интегрирования a и b заменяются соответственно новыми пределами интегрирования α и β, которые находятся из исходной подстановки: $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$. При этом нет необходимости, как это было для неопределенного интеграла, возвращаться к исходной переменной интегрирования.

▽ **Пример 1.** Найти $\int\limits_5^{13} \sqrt{2x-1}\,dx$.

Решение. Введем вспомогательную переменную t, связанную с x зависимостью $t = 2x - 1$. Дифференцируя, имеем $dt = 2\,dx$, откуда $dx = \frac{1}{2}\,dt$. Находим новые пределы интегрирования. Подставляя в соотношение $t = 2x - 1$ значения $x = 5$ и $x = 13$, соответственно получим

$$\alpha = 2 \cdot 5 - 1 = 9, \qquad \beta = 2 \cdot 13 - 1 = 25.$$

Следовательно,

$$\int\limits_5^{13} \sqrt{2x-1}\,dx = \int\limits_9^{25} \sqrt{t}\,\cdot\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_9^{25} t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{3}\,t^{\frac{3}{2}}\Big|_9^{25} = 32\frac{2}{3}. \quad ▲$$

При вычислении определенного интеграла методом подстановки принято введение новой переменной, смену пределов интегрирования и другие пояснения записывать в специальных скобках $\big|\cdot\big|$ между знаками равенства.

▽ **Пример 2.** Найти $\int\limits_0^1 (2x^3+1)^4 x^2\,dx$.

Решение.

$$\int\limits_0^1 (2x^3+1)^4\,x^2\,dx =$$

$$= \left|\begin{array}{l} t = 2x^3+1; \quad dt = 6x^2\,dx; \quad x^2\,dx = \frac{1}{6}\,dt; \\ t = 1 \ \text{ при } \ x = 0, \quad t = 3 \ \text{ при } \ x = 1 \end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{6}\int\limits_1^3 t^4\,dt = \frac{1}{6}\cdot\frac{t^5}{5}\Big|_1^3 = \frac{1}{30}\,(3^5 - 1^5) = 8\frac{1}{15}. \quad ▲$$

▽ **Пример 3.** Найти $\int\limits_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$.

Решение.

$$\int\limits_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}} = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x+1}\,; \quad x = t^2 - 1; \quad dx = 2\,t\,dt; \\ t = 2 \text{ при } x = 3, \quad t = 3 \text{ при } x = 8 \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_2^3 \frac{(t^2-1)\,2\,t\,dt}{t} = 2\int\limits_2^3 (t^2-1)\,dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Big|_2^3 =$$

$$= 2\,(9-3) - 2\left(\frac{8}{3} - 2\right) = 10\frac{2}{3}. \quad \blacktriangle$$

Задача 1. Найти $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 x\,dx$.

Ответ: $\frac{2}{3}$ (подстановка $t = \cos x$).

Рассмотрим теперь, как выполняется интегрирование по частям в определенном интеграле.

Теорема 2. *Пусть функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a,\ b]$. Тогда*

$$\boxed{\int\limits_a^b u\,dv = u\,v\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du,}$$

где $u\,v\Big|_a^b = u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a)$.

Эта формула называется *формулой интегрирования по частям для определенного интеграла.*

□ Поскольку $(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$, функция $u\,v$ является первообразной для функции $u'\,v + u\,v'$. Тогда по формуле Ньютона–Лейбница и свойству 2 получаем:

$$u\,v\Big|_a^b = \int\limits_a^b (u'\,v + u\,v')\,dx = \int\limits_a^b v\,u'\,dx + \int\limits_a^b u\,v'\,dx =$$

$$= \int\limits_a^b v\,du + \int\limits_a^b u\,dv. \quad \blacksquare$$

▽ **Пример 4.** Найти $\int\limits_0^{\pi/2} x\,\cos x\,dx$.

Решение.

$$\int\limits_0^{\pi/2} x\,\cos x\,dx = \left|\begin{matrix} u = x; & du = dx; \\ dv = \cos x\,dx; & v = \sin x \end{matrix}\right| =$$

$$= x\,\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int\limits_0^{\pi/2} \sin x\,dx = \frac{\pi}{2}\,\sin\frac{\pi}{2} - 0 + \cos x\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1. \quad ▲$$

▽ **Пример 5.** Найти $\int\limits_1^e x\,\ln x\,dx$.

Решение.

$$\int\limits_1^e x\,\ln x\,dx = \left|\begin{matrix} u = \ln x; & du = (\ln x)'dx = \dfrac{1}{x}\,dx; \\ dv = x\,dx; & v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{x^2}{2}\,\ln x\Big|_1^e - \int\limits_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \left(\frac{1}{2}\,x^2\,\ln x - \frac{1}{4}\,x^2\right)\Big|_1^e =$$

$$= \left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4}\right) - \left(0 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\,(e^2+1). \quad ▲$$

Задача 2. Найти $\int\limits_1^e x\,\ln^2 x\,dx$.

Ответ: $\frac{1}{4}\,(e^2-1)$ — интегрирование по частям производится дважды.

Примеры вычисления неопределенных интегралов с помощью пакета символьных вычислений Maple уже приводилось в этой книге. С его помощью можно вычислять и определенные интегралы. Покажем как выглядит решение примера 5 и задачи 2 с

помощью компьютера:

```
>int(x*ln(x),x=1..exp(1));
```

$$\frac{1}{4}\,e^2 + \frac{1}{4}.$$

```
>int(x*(ln(x))^2,x=1..exp(1));
```

$$\frac{1}{4}\,e^2 - \frac{1}{4}.$$

Конечно же для таких простых примеров нет необходимости в применении компьютера. Компьютер целесообразно использовать в случае, когда требуется выполнение рутинных вычислений. Так, вычисление определенного интеграла

$$\int\limits_1^e x\,\ln^{10} x\,dx$$

требует выполнения десяти интегрирований по частям. Такую задачу лучше поручить компьютеру. Она легко найдет ответ:

```
>int(x*(ln(x))^10,x=1..exp(1));
```

$$\frac{1919}{8}\,e^2 - \frac{14175}{8}.$$

12.8. Геометрические приложения определенного интеграла

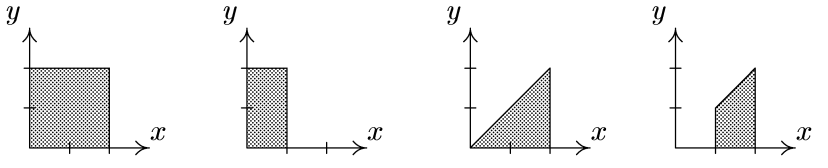
Формула Ньютона–Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

представляет универсальную формулу вычисления площадей. С помощью этой формулы можно находить площади квадратов, прямоугольников, треугольников, трапеций и других более сложных фигур.

Действительно, площадь квадрата со сторонами, равными 2, равна

$$\int\limits_0^2 2\,dx = 2\,x\Big|_0^2 = 4,$$



квадрат прямоугольник треугольник трапеция

Рис. 12.6. Вычисление площадей

площадь прямоугольника со сторонами 1 и 2 равна

$$\int_0^1 2\,dx = 2\,x\Big|_0^1 = 2,$$

площадь прямоугольного треугольника с катетами 2 и 2 равна

$$\int_0^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 2,$$

площадь трапеции с основаниями 1, 2 и высотой 1 равна

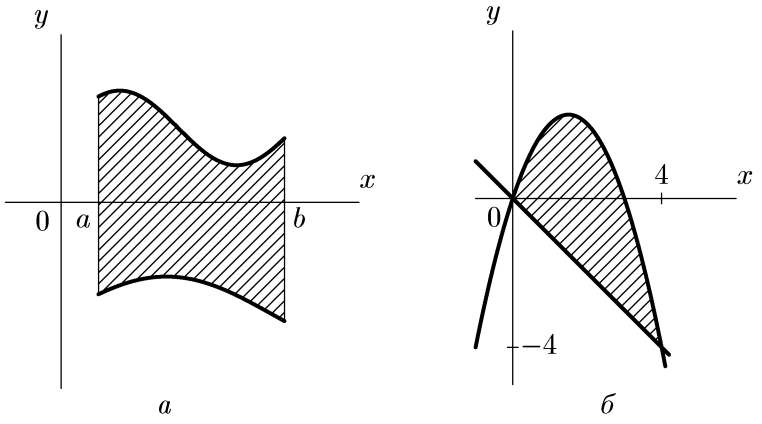
$$\int_1^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{3}{2}$$

(рис. 12.6).

Теорема. *Пусть на отрезке* $[a,\,b]$ *заданы непрерывные функции* $y = f_1(x)$ *и* $y = f_2(x)$ *такие, что* $f_2(x) \geqslant f_1(x)$. *Тогда площадь фигуры, заключенной между кривыми* $y = f_2(x)$ *и* $y = f_1(x)$, *на отрезке* $[a,\,b]$ *вычисляется по формуле* (рис. 12.7, *а*)

$$\boxed{S = \int_a^b \bigl(f_2(x) - f_1(x)\bigr)\,dx.}$$

□ Будем предполагать, что $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ — неотрицательные функции на $[a,\,b]$. Этого всегда можно добиться путем параллельного переноса оси Ox.



а *б*

Рис. 12.7. Вычисление площадей

Искомую площадь можно рассматривать как разность двух криволинейных трапеций, ограниченных данными линиями. Поэтому

$$S = S_2 - S_1 = \int\limits_a^b f_2(x)\,dx - \int\limits_a^b f_1(x)\,dx = \int\limits_a^b \bigl(f_2(x)\,dx - f_1(x)\bigr)\,dx.$$

Заметим, что разность $f_2(x) - f_1(x)$ представляет «толщину» фигуры в точке x, а площадь S представляет собой «сумму» по x от a до b всех «кусочков» с переменной «толщиной» $f_2(x) - f_1(x)$. ■

▽ **Пример 1.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3\,x - x^2$ и $y = -x$.

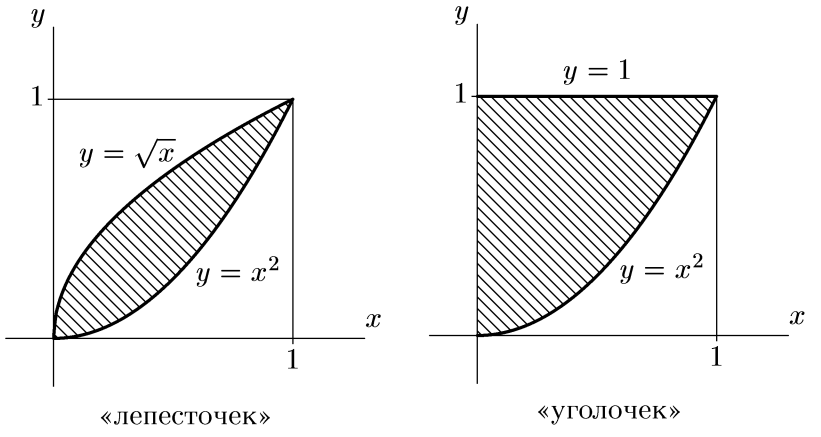
Решение. Найдем точки пересечения данных кривых. Для этого решаем систему уравнений

$$\begin{cases} y = 3\,x - x^2, \\ y = -x. \end{cases}$$

Решив ее, получаем:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 4, \qquad y_1 = 0, \quad y_2 = -4.$$

Строим искомую фигуру (см. рис. 12.7, *б*). График параболы расположен выше прямой. Поэтому $f_2(x) = 3\,x - x^2$, а $f_1(x) = -x$.



«лепесточек» «уголочек»

Рис. 12.8. Площади фигур

Отсюда

$$S = \int\limits_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)\,dx = \int\limits_0^4 \big((3\,x - x^2) - (-x)\big)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^4 (4\,x - x^2)\,dx = \left(2\,x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4 = 10\frac{2}{3}. \quad \blacktriangle$$

▽ **Пример 2.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$.

Решение. Вычислим координаты точек пересечения указанных кривых, для чего решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = \sqrt{x}\,. \end{cases}$$

Решив ее, получаем:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \qquad y_1 = 0, \quad y_2 = 1.$$

Строим искомую фигуру. Она похожа на лепесточек (рис. 12.8). График параболы $y = x^2$ расположен ниже кривой $y = \sqrt{x}$

(в этом можно убедиться сравнив ординаты в какой-либо промежуточной между нулем и единицей точке, например, в точке $x = 1/2$). Поэтому $f_2(x) = \sqrt{x}$, а $f_1(x) = x^2$. Следовательно,

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right) dx = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx =$$

$$= \left(\frac{2}{3}\, x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \quad \blacktriangle$$

▽ **Пример 3.** Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямыми $x = 0$ и $y = 1$.

Решение. Фигура, ограниченная указанными линиями, изображена на рис. 12.8 под названием «уголочек». Площадь этой фигуры вычисляется по формуле

$$S = \int_0^1 (1 - x^2)\, dx = \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Площадь «лепесточка» внутри квадрата оказалась в три раза меньше площади самого квадрата, а площадь «уголочка» — в два раза больше площади «лепесточка». ▲

Задача 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой

$$y = \frac{1}{3}\,(x + 6)^2$$

и прямой

$$2\,x - y + 12 = 0.$$

Ответ: 12 кв. ед.

Объем тела вращения. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная неотрицательная функция $y = f(x)$. Необходимо найти объем V_x тела, образованного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ (рис. 12.1).

Ученые XVIII века находили объем тела вращения следующим образом. Они считали, что криволинейная трапеция состоит из бесконечно малых прямоугольников со сторонами dx и $f(x)$

(рис. 12.2). При вращении каждого такого прямоугольника вокруг оси абсцисс получается диск, имеющий толщину dx и радиус $R = f(x)$ (рис. 12.9). Объем диска V_d равен объему цилиндра с радиусом $R = f(x)$ и высотой $H = dx$:

$$V_d = \pi R^2 \cdot H = \pi f^2(x)\, dx.$$

«Просуммировав» объемы всех таких дисков, ученые получали следующую формулу:

$$V_d = \int V_d = \int_a^b \pi f^2(x)\, dx.$$

Эта формула действительно справедлива. Рассуждения ученых были качественно верными. Однако термин бесконечно малая величина не был ими достаточно четко определен, что приводило к противоречиям. Поэтому по форме такие рассуждения в современной математике считаются неприемлемыми [1] и заменяются доказательствами, основанными на теории предела.

Докажем полученную формулу, пользуясь понятиями предела и интегральной суммы. Разобьем отрезок $[a,\ b]$ на более мелкие отрезки точками:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

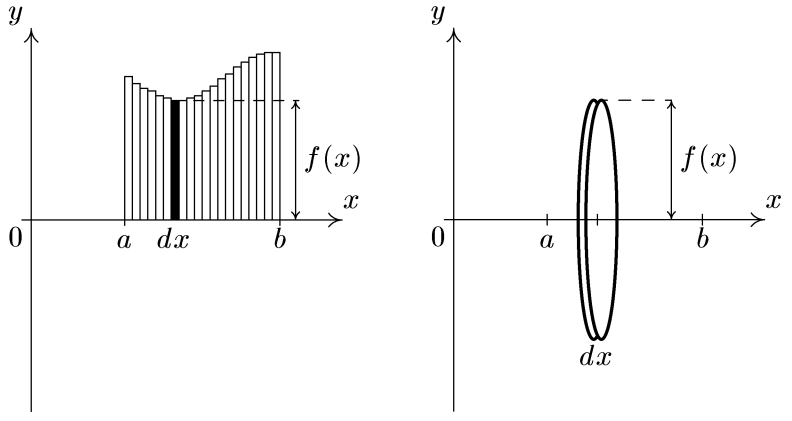
и на каждом из отрезков разбиения выберем точку c_i, где $i = 1, 2, \ldots, n$ (рис. 12.10). При вращении вокруг оси Ox каждый прямоугольник с высотой $f(c_i)$ и основанием $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ описывает цилиндр с радиусом $f(c_i)$ и высотой Δx_i. Сумма объемов всех цилиндров

$$\sum_{i=1}^{n} \pi f^2(c_i)\, \Delta x_i$$

приближенно равна объему V_x тела вращения (рис. 12.10). Очевидно, что приближение для искомого объема V_x будет тем лучше, чем меньше длина отрезков разбиения Δx_i, поэтому за искомый объем V_x естественно взять следующий предел:

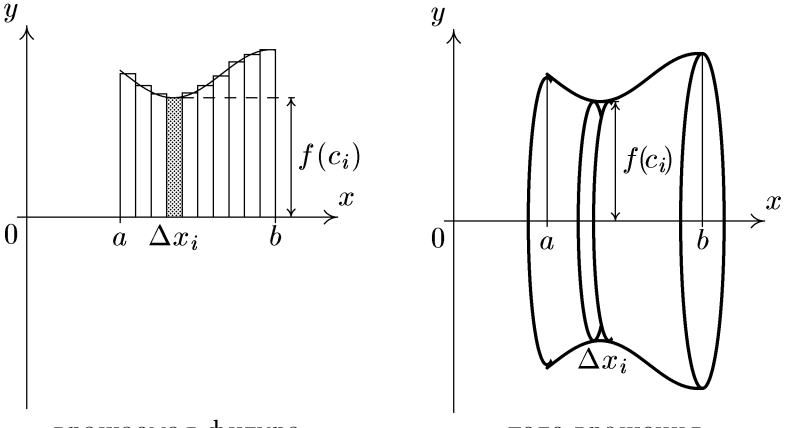
$$V_x = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(c_i)\, \Delta x_i,$$

[1] Исключение составляет так называемый *нестандартный* (или *неархимедов*) *анализ*, зародившийся в 60-х гг. XX в., где вводится четкое определение бесконечно малой величины как некоего гипердействительного числа.



вращаемый прямоугольник диск толщиной dx

Рис. 12.9. $V_d = \pi\, f^2(x)\, dx$



вращаемая фигура тело вращения

Рис. 12.10. $V_x = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \pi\, f^2(c_i)\, \Delta x_i$

где $\max \Delta x_i \to 0$ — максимальная из длин отрезков разбиения. Но выражение

$$\sum_{i=1}^{n} \pi\, f^2(c_i)\, \Delta x_i$$

есть не что иное, как предел интегральной суммы для функции $g(x) = \pi\, f^2(x)$, поэтому по определению определенного

интеграла получаем

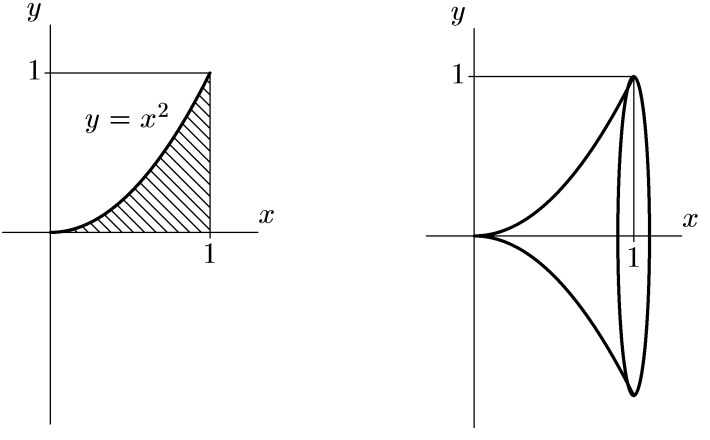
$$\boxed{V_x = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx.}$$

Заменим формально в этой формуле переменную x на y. Получим формулу

$$\boxed{V_y = \pi \int\limits_c^d g^2(y)\,dy.}$$

Она выражает объем тела, полученного от вращения криволинейной трапеции вокруг оси Oy.

▽ **Пример 4.** Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямыми $y = 0$, $x = 1$ (рис. 12.11).



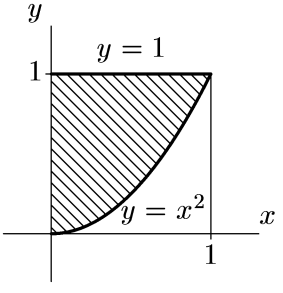
вращаемая фигура тело вращения

Рис. 12.11. $V_x = \pi \int\limits_0^1 (x^2)^2\,dx$

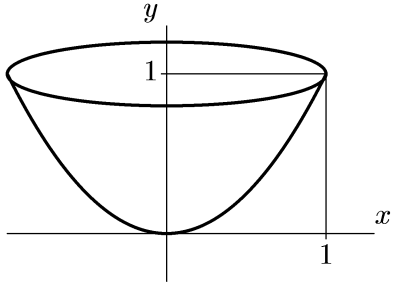
Решение. Имеем $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = x^2$, откуда

$$V_x = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx = \pi \int\limits_0^1 (x^2)^2\,dx = \pi\,\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{1}{5}\,\pi. \quad \blacktriangle$$

▽ **Пример 5.** Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy области, ограниченной параболой $y = x^2$ и прямыми $y = 1$, $x = 0$ (рис. 12.11).



вращаемая фигура



тело вращения

Рис. 12.12. $V_y = \pi \int\limits_0^1 \left(\sqrt{y}\,\right)^2\,dy$

Решение. Имеем $c = 0$, $d = 1$, $g(y) = \sqrt{y}$, откуда

$$V_y = \pi \int\limits_c^d g^2(y)\,dy = \pi \int\limits_0^1 y\,dy = \pi\,\frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\,\pi. \quad \blacktriangle$$

Задача 2. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = \dfrac{6}{x}$, $x = 1$, $y = 2$.

Ответ: $30\,\pi$.

Задача 3. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4 - x^2$, $x = 0$.

Ответ: $\dfrac{512}{15}\,\pi \approx 107{,}23$.

12.9. Приближенное вычисление определенных интегралов

На практике часто встречаются интегралы, которые не выражаются через элементарные функции или выражаются очень сложно. Нередко подынтегральная функция задается таблицей или графиком. В этих случаях интегралы находят *численными методами.* Основа численных методов построения формул приближенного вычисления интегралов состоит в замене частичных криволинейных трапеций, образующихся при разбиении отрезка интегрирования, на более простые фигуры. В формуле прямоугольников — это прямоугольники; в формуле трапеций — трапеции; в формуле парабол — параболы. Рассмотрим эти методы более подробно.

Формула прямоугольников. Пусть на отрезке $[a,\ b]$ задана функция $y = f(x)$. Требуется вычислить площадь криволинейной трапеции S, ограниченной кривой $y = f(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$ и $y = 0$ (рис. 12.1).

Ранее было дано определение интегральной суммы. Напомним, как она строилась. Отрезок $[a,\ b]$ разбивался на n промежутков точками $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

На каждом отрезке разбиения выбиралась точка c_i и полагалось

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \qquad i = 1,\ 2,\ \ \ldots,\ n.$$

Тогда произведение $f(c_i)\,\Delta x_i$ представляло площадь прямоугольника S_i со сторонами $f(c_i)$ и Δx_i. Сумма площадей всех таких прямоугольников равнялась сумме вида

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i,$$

причем S_n можно было считать приближенно равной искомой площади S.

Формула прямоугольников практически совпадает с приближенной формулой для определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i.$$

Отличие состоит лишь в том, что в формуле прямоугольников меньше произвола. Отрезок $[a,\ b]$ делится на равные части (а не

произвольным образом, как в определении определенного интеграла), а значения c_i представляют середины соответствующих отрезков $[x_{i-1},\ x_i]$.

Итак, *формулой прямоугольников* называется следующее приближенное равенство:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\,(\overline{y_1} + \overline{y_2} + \ldots + \overline{y_n}),$$

где $\dfrac{b-a}{n}$ — длина каждого отрезка, а $\overline{y_i} = f(c_i)$, c_i — середина отрезка $[x_{i-1},\ x_i]$.

С увеличением n точность формулы неограниченно возрастает. В пособиях по численным методам доказывается, что предельная погрешность $R_n = |S - S_n|$ формулы прямоугольников составляет

$$\frac{(b-a)^3}{24\,n^2}\,M_2, \tag{12.1}$$

где M_2 — наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке $[a,\ b]$. Для эмпирических функций вместо M_2 берут наибольшее значение величины $\left|\dfrac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right|$.

▽ **Пример 1.** Найти по формуле прямоугольников приближенное значение интеграла $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ $\left(= \dfrac{\pi}{4} = 0{,}785398\ldots\right)$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned}
c_1 &= 0{,}05 & \overline{y_1} &= 0{,}9995,\\
c_2 &= 0{,}15 & \overline{y_2} &= 0{,}9780,\\
c_3 &= 0{,}25 & \overline{y_3} &= 0{,}9442,\\
c_4 &= 0{,}35 & \overline{y_4} &= 0{,}8909,\\
c_5 &= 0{,}45 & \overline{y_5} &= 0{,}8316,\\
c_6 &= 0{,}55 & \overline{y_6} &= 0{,}7678,\\
c_7 &= 0{,}65 & \overline{y_7} &= 0{,}7029,\\
c_8 &= 0{,}75 & \overline{y_8} &= 0{,}6400,
\end{aligned}$$

$$c_9 = 0{,}85 \qquad \overline{y_9} = 0{,}5806,$$
$$c_{10} = 0{,}95 \qquad \overline{y_{10}} = 0{,}5256,$$

откуда

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\,dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1} 10\overline{y} = \frac{1}{10} \cdot 7{,}8581.$$

Погрешность $\left|\frac{\pi}{4} - 0{,}78581\right|$ составляет примерно 0,0004. Вычислим теоретическую предельную погрешность. Имеем:

$$f''(x) = 2\,\frac{3\,x^2-1}{(1+x^2)^3}.$$

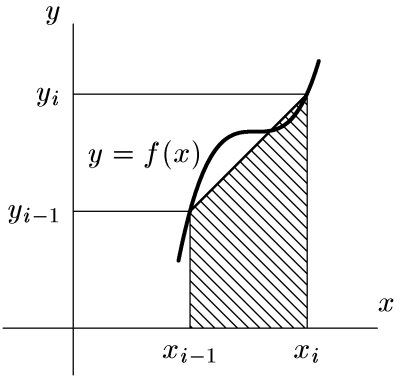
Наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке $[0,\ 1]$ равно 2 (оно достигается при $x = 0$). Подставляя $n = 10$, $M_2 = 2$ в формулу для предельной погрешности (12.1), получим $R_{10} = 0{,}00085$ (она никогда не превысит действительную погрешность). Значит, нет смысла вычислять $\overline{y_i}$ больше чем на четыре знака. ▲

Формула трапеций. Формула трапеций также представляет приближенную формулу вычисления определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Приближенное значение искомого интеграла можно получить, заменив площадь под кривой площадью под ломаной, расположенной достаточно близко к исходной кривой. Для построения этой ломаной разобьем отрезок интегрирования на n равных частей длиной $h = \dfrac{b-a}{n}$ и на каждом отрезке разбиения $[x_{i-1},\ x_i]$ заменим часть кривой $y = f(x)$ хордой, соединяющей концевые точки (рис. 12.13). Тогда

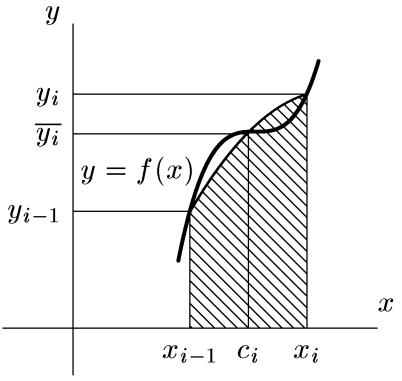
$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx S_1 + S_2 + \ldots + S_n,$$

где S_1, S_2, ..., S_n — площади трапеций (площади под хордами на каждом из отрезков разбиения). Площадь каждой трапеции S_i



а

формула трапеций



б

формула парабол

Рис. 12.13. Приближенные формулы

равна полусумме оснований $\dfrac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$, умноженный на высоту $h = \dfrac{b-a}{n}$:

$$S_i = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\, h.$$

Обозначим $f(x_i)$ через y_i. Тогда

$$S_i = \frac{y_{i-1} + y_i}{2}\, h$$

и

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx S_1 + S_2 + \ldots + S_n =$$

$$= \frac{y_0 + y_1}{2}\, h + \frac{y_1 + y_2}{2}\, h + \ldots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}\, h =$$

$$= h\left(\frac{y_0}{2} + \frac{y_1}{2} + \frac{y_1}{2} + \frac{y_2}{2} + \ldots + \frac{y_{n-1}}{2} + \frac{y_n}{2}\right).$$

Все слагаемые, кроме крайних $\dfrac{y_0}{2}$ и $\dfrac{y_n}{2}$, встречаются дважды. Поэтому окончательно получаем *формулу трапеций*:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-2} + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right).}$$

▽ **Пример 2.** Найти по формуле трапеций приближенное значение интеграла $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ $\left(= \frac{\pi}{4} = 0{,}785398\ldots\right)$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned}
x_0 &= 0{,}0 & y_0 &= 1{,}0000,\\
x_1 &= 0{,}1 & y_1 &= 0{,}9901,\\
x_2 &= 0{,}2 & y_2 &= 0{,}9615,\\
x_3 &= 0{,}3 & y_3 &= 0{,}9174,\\
x_4 &= 0{,}4 & y_4 &= 0{,}8621,\\
x_5 &= 0{,}5 & y_5 &= 0{,}8000,\\
x_6 &= 0{,}6 & y_6 &= 0{,}7353,\\
x_7 &= 0{,}7 & y_7 &= 0{,}6711,\\
x_8 &= 0{,}8 & y_8 &= 0{,}6098,\\
x_9 &= 0{,}9 & y_9 &= 0{,}5525,\\
x_{10} &= 1{,}0 & y_{10} &= 0{,}5000,
\end{aligned}$$

откуда

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\,dx \approx \frac{b-a}{n}\cdot\sum\overline{y} = \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{1{,}5000}{2} + 7{,}0998\right) = 0{,}78498.$$

Погрешность $\left|\frac{\pi}{4} - 0{,}78581\right|$ составляет примерно 0,0004, как и по формуле прямоугольников. Но там мы нашли избыточное, а здесь — недостаточное приближение. Предельная погрешность для формулы трапеций в два раза больше, чем для формулы прямоугольников, поэтому $R_{10} = 2\cdot 0{,}00085 = 0{,}0017$. ▲

Формула парабол. В уже введенных выше обозначениях приближенная *формула парабол* (или *формула Симпсона*) имеет вид

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \approx \frac{b-a}{3\,n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + (y_1+\ldots+y_{n-1}) + 2\,(\overline{y_1}+\ldots+\overline{y_n})\right).$$

СИ́МПСОН (Simpson) Томас (1710–1761) — английский математик, член Лондонского королевского общества. Был ткачом шелковых тканей, математику изучил самостоятельно. Основные труды по геометрии, тригонометрии и математическому анализу. Вывел формулу приближенного интегрирования (формулу Симпсона). Один из основоположников теории ошибок.

В основе этого метода лежит замена частичных криволинейных трапеций, ограниченных сверху функцией $f(x)$, на криволинейную трапецию, ограниченную сверху параболой вида

$$y = A\,x^2 + B\,x + C.$$

Предельная погрешность формулы Симпсона составляет

$$\frac{(b-a)^5}{180\,(2\,n)^4}\,M_4.$$

Здесь M_4 — наибольшее значение $|f^{(4)}|$ на отрезке $[a,\ b]$.

▽ **Пример 3.** Найти по формуле Симпсона приближенное значение интеграла $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ $\left(= \frac{\pi}{4} = 0{,}785398\ldots\right)$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} x_0 &= 0{,}00 & \frac{1}{2}\,y_0 &= 0{,}50000,\\ c_1 &= 0{,}25 & 2\,\overline{y_1} &= 1{,}88235,\\ x_1 &= 0{,}50 & y_1 &= 0{,}80000,\\ c_2 &= 0{,}75 & 2\,\overline{y_2} &= 0{,}28000,\\ x_2 &= 1{,}00 & \frac{1}{2}\,y_4 &= 0{,}250000, \end{aligned}$$

откуда

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\,dx \approx \frac{1}{6}\cdot 4{,}71235 = 0{,}78539.$$

Погрешность составляет примерно 0,00001, т. е. в 40 раз меньше, чем в примерах 1 и 2, хотя там число ординат было вдвое больше.

Численное вычисление на компьютере. Используя какой-либо из методов, описанных выше, и формулу предельной погрешности соответствующей формулы, можно вычислять

определенные интегралы с любой степенью точности. В Maple для этого существует команда:

```
>evalf(Int(expr,x=a..b,digits);
```

Здесь обязательными параметрами являются подынтегральная функция `expr`, зависящая только от переменной `x`, `a` и `b` — пределы интегрирования, а необязательным — `digits` — точность вычисления.

▽ **Пример 4.** С помощью пакета Maple найти с точностью до 10^{-3} интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{1+x^2}$ $\left(= \dfrac{\pi}{4} = 0{,}785398\ldots\right)$.

Решение.

```
>evalf(Int(1/(1+x^2),x=0..1,3);
```

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 0{,}785. \quad \blacktriangle$$

▽ **Пример 5.** С помощью пакета Maple найти с точностью до 10^{-4} интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{\sin x\, dx}{x}$.

Решение.

```
>evalf(Int(sin(x)/x,x=0..1,4);
```

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin x\, dx}{x} = 0{,}9461.$$

Заметим, что функция $\dfrac{\sin x}{x}$ не интегрируема в элементарных функциях. ▲

12.10. Несобственные интегралы

Понятие определенного интеграла было введено для функции, ограниченной на отрезке $[a, b]$. Ряд конкретных задач (в частности, задач теории случайных величин) приводит к

расширению понятия интеграла на случаи бесконечных промежутков и разрывных функций. Такие интегралы называются *несобственными.* Различают несобственные интегралы первого и второго рода в зависимости от того, имеем ли мы дело с бесконечным промежутком интегрирования или с неограниченной подынтегральной функцией.

Несобственные интегралы первого рода. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна при $x \geqslant a$.

Определение 1. Если интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{12.2}$$

при $b \to +\infty$ имеет конечный предел, то этот предел называется *несобственным интегралом функции* $f(x)$ *от* a *до бесконечности* и обозначается

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Итак, по определению

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx.} \tag{12.3}$$

Если интеграл (12.2) при $b \to +\infty$ имеет бесконечный предел или вовсе не имеет предела, то говорят, что *несобственный интеграл* (12.3) *расходится.* Если интеграл (12.2) при $b \to +\infty$ имеет конечный предел, то говорят, что *несобственный интеграл* (12.3) *сходится.*

▽ **Пример 1.** Найти $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2^{-x}\,dx$.

Решение. Имеем

$$\int_0^{+\infty} 2^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b 2^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{\ln 2}\left(-2^{-x}\right)\Big|_0^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{\ln 2}\left(1 - \frac{1}{2^b}\right) = \frac{1}{\ln 2}(1-0) = \frac{1}{\ln 2} \approx 1{,}4.$$

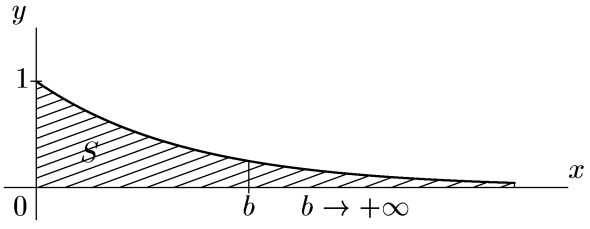


Рис. 12.14. $S = \int\limits_0^{+\infty} 2^{-x}\,dx$

Геометрическое истолкование. Интеграл $\int\limits_0^b 2^{-x}\,dx$ изображается криволинейной трапецией, ограниченной линиями $y = 2^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = b$ (рис. 12.14). По мере удаления b от начала координат площадь криволинейной трапеции возрастает, но не безгранично. Она стремится к $1/\ln 2$. Таким образом, площадь бесконечной области под линией $y = 2^{-x}$ конечна (равна $1/\ln 2$). Это не удивительно. Объяснить это можно следующим образом. Площадь бесконечного луча на плоскости равна нулю (у луча нет ширины), т. е. тоже конечна. При добавлении к лучу треугольника получается бесконечная фигура, которая имеет конечную ненулевую площадь. Примерно то же самое и с несобственным интегралом. По мере удаления b от начала координат бесконечная область под линией $y = 2^{-x}$ настолько сближается с осью абсцисс, что почти сливается с ней. В результате площадь всей фигуры оказывается конечной. Функция $y = 2^{-x}$ сродни также геометрическому ряду $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}$, который имеет конечную сумму. ▲

Геометрический смысл несобственного интеграла (12.3) для неотрицательной на $[a, +\infty)$ функции $f(x)$ состоит в том, что он представляет собой площадь криволинейной фигуры, ограниченной данной линией $y = f(x)$, осью Ox и вертикалью $x = a$.

▽ **Пример 2.** Найти $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x}$.

Решение. Имеем

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \ln x \Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} (\ln b - 0) = +\infty.$$

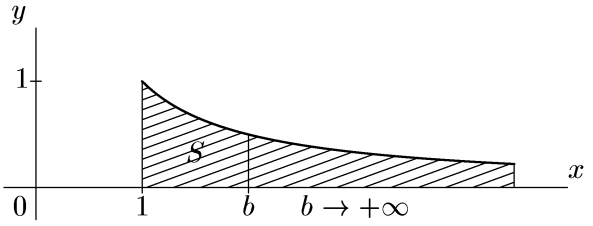


Рис. 12.15. $S = \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{1}{x}\,dx$

Значит, искомый несобственный интеграл расходится. Геометрически это означает, что площадь области под гиперболой $y = \dfrac{1}{x}$ неограниченно возрастает (по мере удаления b от начала координат гипербола недостаточно приближается к оси Ox, чтобы площадь была конечной). ▲

Пусть функция непрерывна в промежутке $(-\infty,\ b]$.

Определение 2. *Несобственным интегралом функции $f(x)$ от $-\infty$ до a* называется предел интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ при $a \to -\infty$:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Сходимость и расходимость несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ понимаются как в определении 1.

Пусть функция непрерывна на всей числовой оси.

Определение 3. *Несобственным интегралом функции $f(x)$ от $-\infty$ до $+\infty$* называется следующая сумма:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Она не зависит от выбора точки $x = c$. Предполагается, что оба

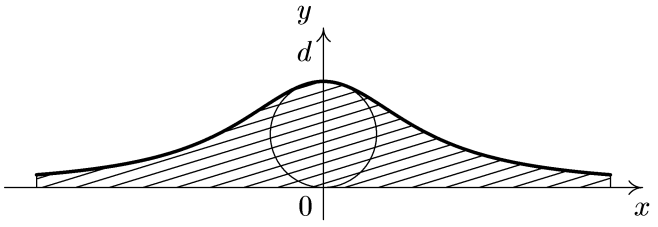


Рис. 12.16. Локон Аньези

несобственных интеграла сходятся. Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ выражает площадь области под линией $y = f(x)$, бесконечно простирающейся в обе стороны.

▽ **Пример 3.** Найти площадь бесконечной области под линией $y = \dfrac{d^3}{d^2 + x^2}$ — локон Аньези (рис. 12.16).

АНЬЕ́ЗИ (Agnesi) Мария Гаэтана (1718–1799) — итальянский математик, профессор университета в Болонье. Родилась в Милане. В ее честь плоскую кривую, выраженную уравнением $y = \dfrac{d^3}{x^2 + d^2}$ *назвали «локон Аньези».*

Решение. Искомая площадь представляется интегралом

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3}{d^2 + x^2}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{d^3}{d^2 + x^2}\,dx + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{d^3}{d^2 + x^2}\,dx.$$

Так как

$$\int\limits_{0}^{b} \frac{d^3}{d^2 + x^2}\,dx = d^2 \operatorname{arctg} \frac{b}{d},$$

то

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{d^3}{d^2 + x^2}\,dx = \lim_{b \to +\infty} d^2 \operatorname{arctg} \frac{b}{d} = \pi\, d^2/2.$$

Аналогично

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{d^3}{d^2+x^2}\,dx = -\lim_{a\to-\infty} d^2 \operatorname{arctg}\frac{a}{d} = \pi\, d^2/2,$$

откуда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3}{d^2+x^2}\,dx = \pi\, d^2.$$

Таким образом, площадь искомой бесконечной фигуры вчетверо больше площади круга с диаметром d. Этот результат получила итальянский математик Мария Аньези. (Впрочем, еще за сто лет до Аньези искомую площадь другим методом нашел Ферма.) ▲

Иногда вместо $\lim\limits_{b\to\pm\infty} F(b)$ пишут $F(\pm\infty)$. Такая запись позволяет обобщить формулу Ньютона–Лейбница. Действительно, пусть $F(x)$ — первообразная функция для непрерывной функции $f(x)$. Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\big(F(b)-F(c)\big) + \lim_{a\to-\infty}\big(F(c)-F(a)\big) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a) = F(+\infty) - F(-\infty).$$

Таким образом, если функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой оси, то формула Ньютона–Лейбница

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

верна и в случае, когда a или b равны $\pm\infty$.

▽ **Пример 4.** Найти несобственный интеграл $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx.$

Решение.

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x \Big|_{-\infty}^{0} =$$

$$\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg}(-\infty) = 0 - (-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}. \quad \blacktriangle$$

Несобственные интегралы второго рода.

Определение 4. Пусть функция $f(x)$ непрерывна при $a < x \leqslant b$ и имеет точку разрыва при $x = a$. Тогда соответствующий *несобственный интеграл от разрывной функции* определяется формулой

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \tag{12.4}$$

и называется *сходящимся* или *расходящимся* в зависимости от того, существует или не существует предел правой части равенства (12.4).

Аналогично определяется несобственный интеграл, когда $f(x)$ имеет разрыв только на конце $x = b$ промежутка $[a,\ b)$.

$\triangledown$ **Пример 5.** Найти несобственный интеграл $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{x}\,dx$.

Решение. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ разрывна в точке $x = 0$. Поэтому

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{+\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} (\ln x)\Big|_{+\varepsilon}^{1} = 1 - (-\infty) = +\infty.$$

Искомый несобственный интеграл расходится. Геометрически это означает, что соответствующая криволинейная трапеция («бесконечный шпиль») имеет бесконечную площадь (рис. 12.17). $\blacktriangle$

Если существует функция $F(x)$, непрерывная на отрезке $[a,\ b]$ и такая, что

$$F'(x) = f(x) \quad \text{при} \quad a < x \leqslant b$$

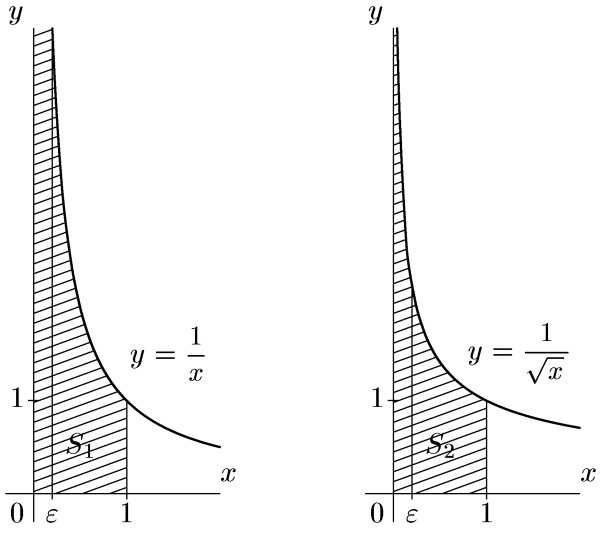


Рис. 12.17. Геометрический смысл несобственного интеграла

(*обобщенная первообразная*), то для несобственного интеграла (12.4) справедлива обобщенная формула Ньютона–Лейбница:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\bigl(F(b)-F(a+\varepsilon)\bigr) =$$

$$= F(b)-F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Таким образом, формула Ньютона–Лейбница для определенных интегралов *доказывается*; для несобственных она *принимается за определение.*

Аналогично определяется несобственный интеграл, когда $f(x)$ имеет разрыв только на конце $x=b$ промежутка $[a,\,b)$:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

▽ **Пример 6.** Найти несобственный интеграл $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$

Решение. Функция $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ разрывна в точке $x = 0$. Поэтому

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\,\Big|_0^1 = 2 - 0 = 2.$$

Геометрически это означает, что соответствующая криволинейная трапеция («бесконечный шпиль») имеет площадь равную двум (рис. 12.17). По сравнению с предыдущим примером площадь оказалась конечной. Это является следствием того, что «шпиль» для функции $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ является тонким и, начиная с некоторой высоты, почти сливается с осью Oy. ▲

Решение примеров 4, 5, 6 в пакете Maple.

```
>int(1/(1+x**2),x=-infinity..0);
```

Ответ: $\dfrac{1}{2}\,\pi$.

```
>int(1/x,x=0..1);
```

Ответ: ∞.

```
>int(1/sqrt(x),x=0..1);
```

Ответ: 2.

Нет ни одной области математики, как бы абстрактна она ни была, которая когда-нибудь не окажется применимой к явлениям действительного мира.

Н. Лобачевский

Глава 13

Применение интегрального исчисления в социально-экономической сфере

13.1. Вычисление объема выпущенной продукции

Как уже отмечалось выше (см. п. 12.4), определенный интеграл используется в экономике и для определения объема выпуска продукции.

Считая, что объем продукции, произведенной в единицу времени (производительность), является непрерывной функцией $f(t)$ от времени t, выпуск продукции за промежуток времени $[0,\, T]$ можно вычислять по формуле $Q = \int\limits_0^T f(t)\,dt$.

▽ **Пример 1.** Найти дневную выработку Q за рабочий день продолжительностью 8 часов, если производительность труда в течение дня меняется по эмпирической формуле $f(t) = -0{,}1\,t^2 + 0{,}8\,t + 10$.

Решение.

$$Q = \int\limits_0^T f(t)\,dt = \int\limits_0^8 (-0{,}1\,t^2 + 0{,}8\,t + 10)\,dt =$$

$$= -0{,}1\,t^3/3 + 0{,}8\,t^2/2 + 10\,t\Big|_0^1 \approx 88{,}53. \quad ▲$$

Задача 1. Найти объем продукции, выпущенной за год (258 рабочих дней) при 8-часовом рабочем дне, если производительность задана функцией $f(t) = -0{,}0033\,t^2 - 0{,}089\,t + 20{,}96$, $0 < t < 8$.

Указание. Сначала найти объем продукции за 8 часов, затем умножить на 258.

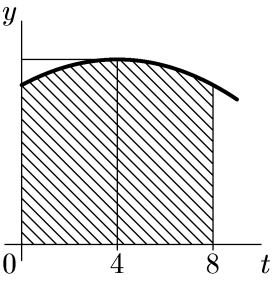


Рис. 13.1. Дневная выработка

Ответ: 42 381 ед.

▽ **Пример 2.** Пусть известно, что в начальный момент времени $t = 0$ на предприятии производилось продукции в количестве y_0, а скорость роста продукции, произведенной на предприятии, равна нулю. Найти какое количество продукции $y(t)$ производится в каждый момент времени t.

Решение. Согласно условию задачи

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0.$$

Решением этого уравнения является произвольная постоянная $y(t) = C$. Воспользовавшись другим условием задачи, согласно которому

$$y(0) = y_0,$$

получим $C = y_0$, откуда имеем

$$y(t) = y_0,$$

т. е. предприятие производит продукции в каждый момент времени столько же сколько и в начальный. ▲

Задача 2. В условиях предыдущей задачи найти количество продукции произведенной на предприятии за время $[0, 2]$.

Ответ: $\int\limits_0^2 y(t)\,dt = 2y_0.$

13.2. Степень неравенства в распределении доходов

Одной из важнейших проблем в социальных и экономических науках является проблема измерения социального неравенства. Наиболее распространена следующая методика изучения. Сначала по тому или иному критерию (имуществу, количеству земли и т. п.) вся совокупность людей, семей или хозяйств делится на несколько групп, чаще всего на три: богатые, средние, бедные; затем определяется доля каждой группы. Если в социальной

структуре преобладают «середняки», а крайние группы по численности одинаковы, то делается вывод о том, что данная социальная совокупность более или менее однородна, если же, наоборот, бóльшая часть населения принадлежит к крайним группам, то считается, что налицо сильное расслоение и неравенство. При изучении социальной структуры в динамике исходят из мысли, что если в интервале времени наблюдалось изменение в соотношении социальных прослоек в пользу крайних за счет средней группы, то дифференциация и неравенство углубились.

Подобную методику измерения социального неравенства называют *методикой соотношения имущественных прослоек.* Ее недостаток состоит в том, что вынуждает исследователя оценивать неравенство на глаз и только в качественном отношении: уменьшилось—увеличилось, сильное—слабое, не позволяя *количественно измерить* его уровень, скажем, в интервале (0, 1).

В последнее время в социальных и экономических науках при изучении неравенства все чаще применяется математика. Разработано несколько видов коэффициентов — коэффициент Лоренца, коэффициент Джини, коэффициент Шютца, коэффициент дифференциации и другие [1]. Преобразование данных в математическую форму дает исследователю много новой ценной информации, которая выражается в концентрированном виде, имеет четкий и ясный смысл.

> *ЛО́РЕНЦ (Lorenz) Макс (1876–1959) — американский экономист и статистик. Дал графическую интерпретацию неравенства в распределении дохода в обществе (кривая Лоренца).*

> *ДЖИ́НИ (ДЖИННИ) (Gini) Каррадо (1884–1965) — итальянский экономист, статистик, демограф.*

Приведем пример использования коэффициента Джини для определения степени неравенства по кривой Лоренца. Кривая Лоренца (рис. 13.2) выражает график зависимости процента доходов от процента, имеющего их населения. По оси Oy откладывается доля населения, имеющих определенный доход; по оси Ox откладывается доля доходов, приходящийся на определенную долю населения. С помощью кривой Лоренца можно оценить степень неравенства в распределении доходов населения. При равномерном распределении доходов кривая Лоренца является

[1] См, например: *Atkinson A. B.* On measurement of inequality. // Journal of Economic Theory. 1970. V. II. P. 244–263; *Клосс Б. М.* О формализации понятия неравенства. // Математические методы в исследованиях по социально-экономической истории. М., 1975. С. 75–82.

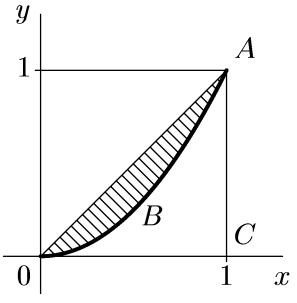


Рис. 13.2. Кривая Лоренца

линейной функцией — биссектрисой $0A$, при неравномерном — кривой вида $0BA$. Коэффициентом Джини именуют отношение площади фигуры между биссектрисой $0A$ и кривой Лоренца к площади треугольника $0AC$. При коэффициенте, равном 0, налицо полное равенство в доходах населения, при значении коэффициента менее 0,3 — слабое неравенство, при 0,3–0,7 — значительное, при 0,7–1 — сильное.

▽ **Пример.** Для одной из стран кривая Лоренца (рис. 13.2) может быть описана уравнением $y = x^2$, где x — доля населения, y — доля доходов населения. Вычислить коэффициент Джини k.

Решение. Так как $S_{\Delta 0AC} = \dfrac{1}{2}$, а

$$S_{0AB} = \int\limits_0^1 (x - x^2)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6},$$

то

$$k = \frac{S_{0AB}}{S_{0AC}} = \frac{1}{6} : \frac{1}{2} = \frac{1}{3} > 0{,}3.$$

Поскольку $k = \dfrac{1}{3}$ принадлежит интервалу $(0{,}3,\ 0{,}7)$, то делаем вывод о том, что в изучаемой стране наблюдается значительное неравенство в доходах. ▲

13.3. Прогнозирование материальных затрат

При прогнозировании материальных затрат часто возникает необходимость вычисления площадей различных сложных фигур. Приведем соответствующий пример, для решения которых используется определенный интеграл.

▽ **Пример.** Палуба корабля напоминает две пересекающиеся параболы. Сколько необходимо краски для ее покрытия, если длина корабля 80 м, ширина в центре — 20 м, а на каждый квадратный метр необходимо 0,25 кг краски?

Решение. Введем систему координат следующим образом: начало координат поместим в центре корабля, а ось Ox вдоль

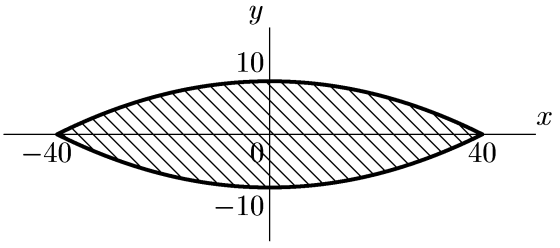


Рис. 13.3. Палуба корабля

палубы (рис. 13.3). Чтобы найти площадь палубы, определим уравнение одной из парабол.

Общее уравнение параболы имеет вид $y = ax^2 + bx + c$. Так как точки $(-40,\ 0)$, $(40,\ 0)$, $(0,\ 10)$ принадлежат параболе, то они удовлетворяют уравнению параболы:

$$a \cdot 40^2 - b \cdot 40 + c = 0, \qquad a \cdot 40^2 + b \cdot 40 + c = 0, \qquad c = 10.$$

Решением этой системы уравнений являются следующие числа: $a = -1/160$, $b = 0$, $c = 10$. Таким образом, уравнение искомой параболы имеет вид

$$y = -x^2/160 + 10.$$

Площадь половинки палубы корабля равна

$$S = \int\limits_{-40}^{40} (-x^2/160 + 10)\, dx = \left(-\frac{x^3}{160 \cdot 3} + 10 \cdot x\right)\Bigg|_{-40}^{40} =$$

$$= -1600 \cdot \frac{40}{160 \cdot 3} - 1600 \cdot \frac{40}{160 \cdot 3} + 400 + 400 = 400 \cdot 4/3.$$

Для покраски половины палубы необходимо $S \cdot 0{,}25 = 400/3$ (кг) краски. Поэтому для покраски всей палубы потребуется $2 \cdot S = 2 \cdot 400/3 \approx 266{,}7$ (кг). ▲

13.4. Прогнозирование объемов потребления электроэнергии

Потребление энергии каждой лампой или фонарем пропорционально числу часов от захода солнца до его восхода. Чем короче ночь, тем меньше требуется электроэнергии. Самая короткая ночь в году приходится на 22 июня. В этот день электроэнергии потребуется меньше, чем в самую длинную ночь — 22 декабря.

Таким образом, потребление энергии представляет собой колебательный процесс. Этот процесс может быть описан функцией [1])

$$w = b + c\,\cos\big(2\,\pi\,(t + 0{,}025)\big). \tag{13.1}$$

Здесь, слагаемое 0,025 определяет, что максимум приходится на $t = -0{,}025$, т. е. за $0{,}025 \cdot 365 = 9$ дней до начала каждого года, т. е. на 22 декабря. Множитель $2\,\pi$ определяет длину периода, равную 1 (году).

▽ **Пример 1.** Потребление энергии сетью за год от $x = 0$ до $x = 1$ описывается уравнением (13.1), где b и c — некоторые числа. Вычислить потребление энергии сетью за год от $t = 0$ до $t = 1$.

Решение. Потребление энергии в течение времени dt составит $w\,dt$, а за год

$$\int\limits_0^1 w\,dt = \int\limits_0^1 \big[b + c\,cos\big(2\,\pi\,(t + 0{,}025)\big)\big]\,dt =$$

$$= b + c\int\limits_0^1 \cos\big(2\,\pi\,(t + 0{,}025)\big)\,dt.$$

Для вычисления второго слагаемого положим $2\,\pi\,(t + 0{,}025) = z$, тогда

$$\int\limits_0^1 \cos\big(2\,\pi\,(t + 0{,}025)\big)\,dt =$$

$$= \left|\begin{matrix} t = \dfrac{z}{2\,\pi} - 0{,}025; & \dfrac{dz}{2\,\pi}; \\ \text{если } t = 0, \text{ то } z = 0{,}05\,\pi; & \text{если } t = 1, \text{ то } z = 2{,}05\,\pi \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{0{,}05\,\pi}^{2{,}05\,\pi} \cos z\,dz = \frac{1}{2\,\pi}\,\sin z\Big|_{0{,}05\,\pi}^{2{,}05\,\pi} = 0.$$

Отсюда следует, что потребление энергии за год составляет b единиц мощности. ▲

[1]) См. [8, с. 209].

▽ **Пример 2.** Потребление энергии каждой лампой и фонарем за год от $x = 0$ до $x = 1$ описывается уравнением (13.1), где b и c — некоторые числа. Сеть освещения в районе линейно возрастает по закону $u = u_0 + a\,t$, где t измеряется в годах. Вычислить потребление энергии сетью за год от $t = 0$ до $t = 1$.

Решение. Потребление энергии в течение времени dt составит $u\,w\,dt$, а за год

$$\int_0^1 u\,w\,dt = \int_0^1 (u_0 + a\,t)\,[b + c\,\cos(2\,\pi\,(x + 0{,}025))]\,dt \approx$$

$$\approx b\,u_0 + 0{,}5\,a\,b + 0{,}025\,a\,c.$$

При вычислении этого интеграла был использован метод интегрирования по частям и метод замены переменной. Приближенно вычислено лишь последнее слагаемое (а именно, число 0,025). Таким образом, потребление энергии за год составляет $(b\,u_0 + 0{,}5\,a\,b + 0{,}025\,a\,c)$ единиц мощности. ▲

Задача 1. Потребление энергии каждой лампой и фонарем за год от $x = 0$ до $x = 1$ описывается уравнением (13.1). Сеть освещения в районе возрастет как квадратичная функция $u = u_0 + a\,t^2$. Вычислить потребление энергии сетью за год от $t = 0$ до $t = 1$.

Указание: Для вычисления соответствующего интеграла необходимо дважды произвести интегрирование по частям.

Ответ: Приблизительно $(b\,u_0 + 0{,}07\,a\,c + 0{,}33\,a\,b)$ единиц мощности.

13.5. Задача дисконтирования денежного потока

При определении экономической эффективности капитальных вложений возникает *задача дисконтирования*: определение начальной суммы A_0 через время t по ее конечной величине $A(t)$ при процентной ставке p.

Пусть $A(t)$ — конечная сумма, полученная за t лет, и A_0 — начальная сумма.

Если проценты простые, то в конце каждого года t сумма $A(t)$ в сбербанке по сравнению с прошлым годом $(t-1)$ увеличивается на p % от начальной суммы A_0:

$$A(t) = A(t-1) + \frac{p}{100}\,A_0.$$

В первого года начисляется сумма составит

$$A(1) = A_0 + \frac{p}{100} A_0 = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right);$$

в конце второго года

$$A(2) = A_1 + \frac{p}{100} A_0 = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right) + A_0 = A_0 \left(1 + 2\,\frac{p}{100}\right);$$

в конце года t:

$$A(t) = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\, t\right).$$

Поэтому если проценты простые, то дисконтированная сумма вычисляется по формуле

$$\boxed{A_0 = \frac{A(t)}{1 + \frac{p}{100}\, t}.}$$

Ранее в гл. 6 было установлено, что при начислении сложных процентов, конечная сумма вычисляется по формуле

$$A(t) = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t, \qquad t \in \mathbb{N};$$

при непрерывном начислении процентов — по формуле

$$A(t) = A_0\, e^{\frac{p\,t}{100}}, \qquad t \in (0,\ +\infty).$$

Отсюда получаем, что дисконтированная (в данном случае, начальная) сумма к моменту времени t в случае сложных процентов

$$\boxed{A_0 = \frac{A(t)}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t},}$$

а в случае непрерывного начисления процентов

$$\boxed{A_0 = A(t)\, e^{-\frac{p\,t}{100}}.}$$

Предположим, теперь, что деньги вкладываются в банк не разово, в начальный момент времени $t = 0$, а постоянно и образуют денежный поток, который выражается непрерывной функцией $A_0(t)$. Тогда (см. п. 12.4) общая сумма U_d, вложенная в банк

за период времени $[0,\ T]$, представляет определенный интеграл

$$U_d(T) = \int\limits_0^T A_0(t)\,dt = \int\limits_0^T A(t)\,e^{-\frac{p\,t}{100}}\,dt.$$

Здесь $A(t)$ — ежегодно поступающий доход.

Величина $U_d(T)$ называется дисконтной суммой за период времени $[0,\ T]$. Слово «дисконтный» происходит от английского discount (скидка).

▽ **Пример.** Какую сумму следует внести за период $[0,\ T]$ в сбербанк под 10% годовых, чтобы ежегодный доход составлял тысячу рублей. Предполагается, что проценты начисляются непрерывно.

Решение. Согласно условию задачи $A(t) = 1$ при всех $t \in (0,\ T)$, поэтому

$$U_d(T) = \int\limits_0^T A_0(t)\,dt = \int\limits_0^T 1 \cdot e^{-\frac{10\,t}{100}}\,dt = -10\,e^{-0{,}1T} + 10 \quad \text{(тыс. руб.)}.$$

В частности, при $T = 3$ года, имеем

$$U_d(3) = -10\,e^{-0{,}1\cdot 3} + 10 \approx 2{,}59 \quad \text{(тыс. руб.)}.$$

Таким образом, чтобы ежегодный доход в течении трех лет составлял 1 тыс. руб. (за три года — 3 тыс. руб.), следует вложить в сбербанк 2,59 тыс. руб. Прибыль за три года составит 0,41 тыс. руб. За $T = 10$ лет

$$U_d(10) = -10\,e^{-0{,}1\cdot 10} + 10 \approx 6{,}32 \quad \text{(тыс. руб.)}$$

(прибыль за 10 лет равна около 3,68 тыс. руб.). ▲

Задача 1. Пусть проценты в банке начисляются непрерывно. Какую сумму следует внести за период $[0,\ T]$ в сбербанк под 10% годовых, чтобы ежемоментный доход в момент времени t составлял $e^{0{,}1\,t}$ тысячу рублей.

Ответ: T тысяч рублей.

Задача 2. Пусть проценты в банке начисляются непрерывно. Какую сумму следует внести за период $[0,\ T]$ в сбербанк под 10% годовых, чтобы ежемоментный доход в момент времени t составлял $1 + 0{,}1\,t$ тысячу рублей.

Указание. Применить формулу интегрирования по частям.

Ответ: $20 - 10\ (2 + 0{,}1 \cdot T)\ e^{-0{,}1T}$ тыс. руб.

Раздел IV
Функции многих переменных

Именно предельные абстракции являются тем истинным оружием, которое правит нашим осмыслением конкретного факта.

А. Уайтхед

Глава 14
Частные производные

14.1. Понятие функции многих независимых переменных

Если каждой паре чисел x_1 и x_2, называемых *независимыми переменными*, однозначно соответствует число y, называемое *зависимой переменной*, то говорят, что y есть *функция двух переменных*; тогда записывают:

$$y = f(x_1,\, x_2).$$

Функции двух и более независимых переменных находят широкое применение в экономике. Приведем примеры лишь некоторых из них:

1. Издержки производства y являются функцией материальных затрат x_1 и расходов на оплату рабочей силы x_2:

$$y = f(x_1,\, x_2).$$

2. Производительность труда y является функцией от уровня квалификации x_1 и уровня автоматизации труда x_2.

3. Спрос на товар y является функцией цены товара x_1 и средней заработной платы x_2.

В трехмерном пространстве оси координат обозначают через

$$Ox, \qquad Oy, \qquad Oz.$$

Поэтому функцию двух переменных часто записывают и так:

$$z = f(x,\, y).$$

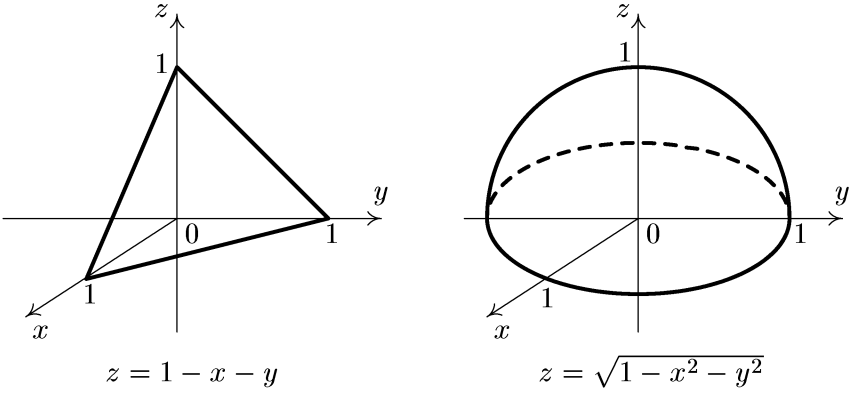
Такая запись удобна для геометрического ее изображения. Например, *графическое представление функции*

$$z = 1 - x - y$$

есть плоскость, проходящая через точки

$$(0,\, 0,\, 1), \qquad (0,\, 1,\, 0), \qquad (1,\, 0,\, 0)$$

(рис. 14.1).



$z = 1 - x - y$ $\qquad$ $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Рис. 14.1. Графическое изображение функций двух переменных

Вообще, функция двух переменных изображается в пространстве некоторой поверхностью (а не линией, как в случае функции одной переменной). Каждой паре чисел x и y соответствует точка $P(x,\, y)$ плоскости Oxy. В точке $P(x,\, y)$ проводим прямую, перпендикулярную плоскости Oxy, и отмечаем на ней соответствующее значение функции z; получаем в пространстве точку M с координатами x, y, z, которая обозначается символом $M(x,\, y,\, z)$. Точки M, соответствующие разным значениям независимых переменных, и образуют некоторую поверхность в пространстве. Такая поверхность и есть геометрическое изображение функции $z = f(x,\, y)$. Например, геометрическое

изображение функции

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

для переменных x и y есть полусфера (рис. 14.1).

Покажем это с помощью сечений координатными плоскостями. Если $z = 0$, то $x^2 + y^2 = 1$, и, следовательно, сечение плоскостью Oxy есть окружность радиуса 1.

Если $x = 0$, то $y^2 + z^2 = 1$ $(z \geqslant 0)$; сечение плоскостью Ozy есть полуокружность.

Если $y = 0$, то $x^2 + z^2 = 1$ $(z \geqslant 0)$; сечение плоскостью Ozx есть полуокружность.

Как и функцию одной переменной, функцию двух переменных можно представить не только графически, но и *аналитически* и в виде *таблицы*.

Аналитическое выражение для плоскости, проходящей через три точки

$$(0,\, 0,\, 1), \qquad (0,\, 1,\, 0), \qquad (1,\, 0,\, 0),$$

есть функция

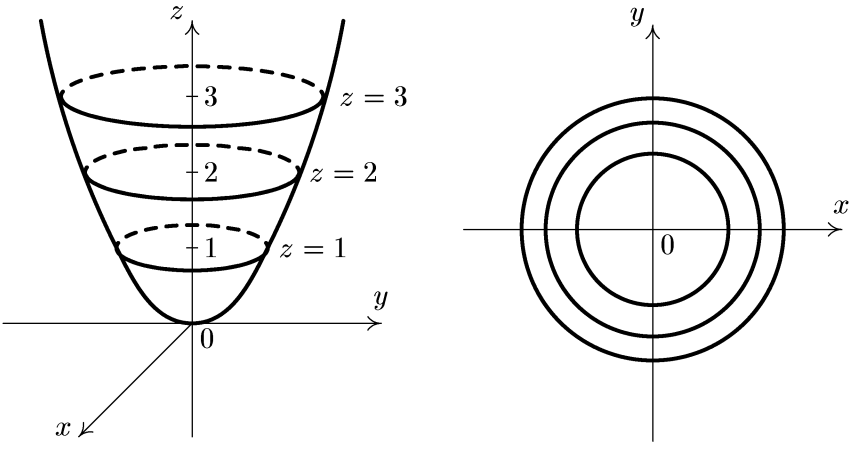
$$z = 1 - x - y.$$

С помощью таблицы функцию $z = 1 - x - y$ можно определить для некоторых значений независимых переменных x и y следующим образом:

$x \diagdown y$	0	1	2	3	4
0	1	0	−1	−2	−3
1	0	−1	−2	−3	−4
2	−1	−2	−3	−4	−5
3	−2	−3	−4	−5	−6
4	−3	−4	−5	−6	−7

В этой таблице каждой паре значений $(x,\, y)$ соответствует значение z. Например, паре $(1,\, 0)$ соответствует значение функции $z = 0$, а паре $(2,\, 3)$ соответствует значение функции $z = -4$.

Представление о функции может дать и *метод линий уровня*. Геометрическое место точек плоскости, в которых функция $z = f(x,\, y)$ принимает постоянное значение, называется *линией уровня*. Это линия пересечения поверхности $z = f(x,\, y)$ плоскостью $z = C$ и ортогонально спроектированная на плоскость Oxy. Сделав несколько таких сечений плоскостями $z = C$,



Сечения плоскостями $z = 1$, $z = 2$, $z = 3$

Линии уровня — окружности радиуса 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$

Рис. 14.2. Линии уровня функции $z = x^2 + y^2$

которые отстоят друг от друга на равное расстояние, и вычертив линии уровня, можно составить представление о самой поверхности. Там где линии уровня проходят близко друг к другу, поверхность поднимается круто, а значит, и функция изменяется быстрее по сравнению с изменением функции в тех местах, где расстояние между соседними линиями больше. Поверхность, определяемая уравнением $z = x^2 + y^2$, и ее соответствующие линии уровня изображены на рис. 14.2. Из рисунка видно: чем дальше от начала координат расположены линии уровня, тем они ближе подходят друг к другу. Это означает, что при удалении от начала координат поверхность поднимается все круче. Обратно, чем ближе к началу координат, тем медленнее меняется функция.

Метод линий уровня широко используется в социально-экономической сфере. О его некоторых приложениях изложено в п. 16.5.

14.2. Область определения, предел и непрерывность функции двух переменных

Область определения. Множество всех значений независимых переменных x и y, для которых определена функция $z = f(x, y)$ (для которых она вообще имеет смысл), называется *областью определения* этой функции.

Например, область определения функции

$$z = 1 - x - y$$

есть вся плоскость Oxy, так как соответствующая формула имеет смысл при всех значениях x и y.

Формула

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

имеет смысл только при тех действительных x и y, при которых

$$1 - x^2 - y^2 \geqslant 0.$$

Поэтому соответствующая функция определена лишь в круге

$$x^2 + y^2 \leqslant 1.$$

Предел функции двух переменных. Говорят, что *последовательность точек* P_n с координатами x_n, y_n *стремится* к точке P_0 с координатами x_0, y_0, если последовательность расстояний d_n точек P_n от точки P_0 стремится к нулю при $n \to \infty$. Таким образом, последовательность точек P_n стремится к P_0, если

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} = 0,$$

т. е. если x_n стремится к x_0, а y_n — к y_0.

Говорят, что z_0 есть *предел функции* $f(x, y)$, где (x, y) стремится к (x_0, y_0), если для каждой последовательности точек (x_n, y_n), отличных от (x_0, y_0) и стремящихся к (x_0, y_0), последовательность $f(x_n, y_n)$ стремится к z_0 при $n \to \infty$.

Это записывается следующим образом:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = z_0$$

или

$$f(x, y) \to z_0, \text{ при } (x, y) \to (x_0, y_0).$$

▽ **Пример 1.** Найти $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} (1 - x - y)$.

Решение. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} (1 - x - y) = 1 - 1 - 2 = -2.$ ▲

▽ **Пример 2.** Найти $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Решение. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \sqrt{1 - x^2 - y^2} = \sqrt{1 - 0 - 0} = 1.$ ▲

Теоремы о пределе суммы, разности, произведения и частного двух функций, выведенные для функций одной переменной, справедливы и для функций двух переменных. Таким образом, имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Предел суммы (разности) двух функций в точке* $(x_0,\ y_0)$ *равен сумме (разности) пределов этих функций в той же точке, т. е. если при* $(x,\ y) \to (x_0,\ y_0)$ *имеет место*

$$f(x,\ y) \to a, \qquad g(x,\ y) \to b,$$

то

$$f(x,\ y) \pm g(x,\ y) \to a \pm b.$$

Теорема 2. *Предел произведения двух функций в точке* $(x_0,\ y_0)$ *равняется произведению пределов этих функций в этой точке, т. е. если при* $(x,\ y) \to (x_0,\ y_0)$ *имеет место*

$$f(x,\ y) \to a, \qquad g(x,\ y) \to b,$$

то

$$f(x,\ y) \cdot g(x,\ y) \to a \cdot b.$$

Теорема 3. *Предел частного двух функций в точке* $(x_0,\ y_0)$ *равняется частному пределов этих функций в той же точке (при условии, что ни значение функции-делителя в окрестности этой точки, ни значение предела этой функции не равны нулю), т. е. если при* $(x,\ y) \to (x_0,\ y_0)$ *имеет место*

$$f(x,\ y) \to a, \qquad g(x,\ y) \to b,$$

то при условии, что $g(x,\ y) \neq 0$ *и* $b \neq 0$, *имеем:*

$$\frac{f(x,\ y)}{g(x,\ y)} \to \frac{a}{b}.$$

Говорят, что функция $z = f(x, y)$ *непрерывна в точке* (x_0, y_0), если она определена в этой точке и если

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0),$$

т. е. если значение функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) равно пределу функции в этой точке.

Другими словами, функция $z = f(x, y)$ непрерывна в точке (x_0, y_0), если бесконечно малым изменениям значений x и y соответствует бесконечно малое изменение значения $f(x, y)$.

График непрерывной функции представляет собой поверхность без разрывов и проколов. Функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в области D, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Например, функция $z = 1 - x - y$ непрерывна везде, так как

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = 1 - x_0 - y_0 = f(x_0, y_0).$$

14.3. Частные производные первого порядка

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$. Пусть независимая переменная y приняла постоянное значение $y = y_0$, а переменная x изменяется. Тогда из функции двух переменных получим функцию одной независимой переменной $z = f(x, y_0)$. Ее графиком является линия пересечения поверхности $z = f(x, y)$ и плоскости $y = y_0$ (рис. 14.3).

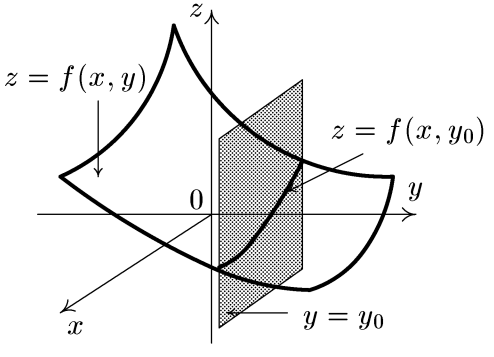


Рис. 14.3. Частная производная z'_x

Как мы знаем, производной от функции одной переменной называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю. Поскольку $z = f(x, y_0)$ является функцией одной переменной, ее производная z'_x в точке x_0

вычисляется по формуле

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x,\, y_0) - f(x_0,\, y_0)}{\Delta x}.$$

Эта производная называется частной производной z'_x от функции двух переменных $z = f(x, y)$ в точке $M(x_0, y_0)$.

Частную производную z'_x для функции $z = f(x, y)$ можно вычислить не только при $y = y_0$, но и при других фиксированных значениях y. Кроме того, можно также определить и частную производную z'_y.

Обозначим через Δx приращение переменной x; введем также обозначение

$$\boxed{\Delta_x z = f(x + \Delta x,\, y) - f(x,\, y).}$$

Приращение $\Delta_x z$ называют *частным приращением функции z по переменной x*.

Аналогично, если переменная y получает приращение Δy, а x остается постоянной, то частное приращение функции z по переменной y имеет следующий вид:

$$\boxed{\Delta_y z = f(x,\, y + \Delta y) - f(x,\, y).}$$

Если существует предел

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x,\, y) - f(x,\, y)}{\Delta x},}$$

то этот предел называется *частной производной первого порядка* или *первой частной производной по переменной x*; она обозначается следующими символами:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}, \quad z'_x.}$$

Аналогично определяется *первая частная производная по переменной y*

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y}, \quad z'_y}$$

как предел отношения

$$\boxed{\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(y,\, y + \Delta y) - f(x,\, y)}{\Delta x}.}$$

Обозначение $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ читается «дэ зет по дэ икс», z'_x читается «зет штрих по икс». Аналогично читаются обозначения $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ и z'_y.

Заметим, что обозначения частных производных $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ отличаются от обозначения производной $\dfrac{dy}{dx}$ тем, что для обозначения частных производных используется «круглое» d (∂), а для обозначения производной — «прямое» (d).

Как и производной функции одной переменной, частным производным функции двух переменных также можно придать геометрический, механический и экономический смыслы.

В геометрическом смысле производная z'_x представляет собой тангенс угла наклона касательной к кривой $z = f(x, y_0)$, $y = y_0$ в точке $M(x_0, y_0)$. Другими словами, z'_x равна тангенсу угла между касательной и линией, параллельной оси Ox и проходящей через точку $M(x_0, y_0)$.

В механическом смысле частная производная показывает, во сколько раз быстрее изменяется функция по сравнению с изменением аргумента, когда второй аргумент зафиксирован.

Частная производная от производственной функции показывает отзывчивость функции выхода продукта. Другими словами, *в экономическом смысле* частная производная есть количество продукции, приходящееся на единицу величины одного фактора, при условии, что второй фактор остается постоянным.

Поскольку определение частной производной вполне сходно с определением производной для функции одной переменной, теоремы о производных соответствуют и частным производным функции двух переменных.

Так как частная производная по любой переменной является производной по этой переменной, найденной при условии, что другая переменная постоянна, то правила дифференцирования функций одной переменной применимы для нахождения частных производных двух переменных.

▽ **Пример 1.** Найти первые частные производные функции $z = x^3y^2 + 4x - y^3 + 5$.

Решение. Чтобы найти частную производную по x, принимаем y за постоянную и находим производную по x:

$$z'_x = (x^3 y^2 + 4x - y^3 + 5)'_x = y^2 (x^3)' + 4x' - 0 + 0 = 3x^2 y^2 + 4.$$

(Производную $(y^3)'_x$ приняли равной нулю, поскольку y считаем постоянным числом. В первом слагаемом постоянную y^2 вынесли за знак производной.)

Чтобы найти частную производную по y, принимаем x за постоянную и находим производную по y:

$$z'_y = (x^3\,y^2 + 4\,x - y^3 + 5)'_y = x^3\,(y^2)' + 0 - (y^3)' + 0 = \\ = 2\,x^3\,y - 3\,y^2. \quad \blacktriangle$$

▽ **Пример 2.** Найти первые частные производные функции $z = 9\,x\,y^2 + 4\,x^2 - y + 102$.

Решение. Чтобы найти частную производную по x, принимаем y за постоянную и находим производную по x:

$$z'_x = (9\,x\,y^2 + 4\,x^2 - y + 102)'_x = 9\,y^2 \cdot x' + 4(x^2)' - 0 + 0 = \\ = 9\,y^2 + 8\,x.$$

Чтобы найти частную производную по y, принимаем x за постоянную и находим производную по y:

$$z'_y = (9xy^2 + 4x^2 - y + 102)'_y = 9x(y^2)' + 0 - y' + 0 = 18xy - 1. \blacktriangle$$

▽ **Пример 3.** Найти первые частные производные функции $z = 9\,x\,y^2 + 4\,x^2 - y + 102$ в точке $P(-1,\,2)$.

Решение. В предыдущем примере было найдено

$$z'_x(x,\,y) = 8\,x + 9\,y^2, \qquad z'_y(x,\,y) = 18\,x\,y - 1.$$

Вычислим значения этих производных в точке $P(-1,\,2)$:

$$z'_x(-1,\,2) = 8\,(-1) + 9 \cdot 2^2 = -8 + 36 = 28,$$
$$z'_y(-1,\,2) = 18 \cdot (-1) \cdot 2 - 1 = -37. \qquad \blacktriangle$$

▽ **Пример 4.** Найти первые частные производные функции $z = e^x\,\ln y + \cos y - e^x + 2$.

Решение. Чтобы найти частную производную по x, принимаем y за постоянную и находим производную по x:

$$z'_x = (e^x\,\ln y + \cos y - \sin x + 2)'_x = \\ = (e^x)'\,\ln y + 0 - (\sin x)' + 0 = e^x\,\ln y - \cos x.$$

Чтобы найти частную производную по y, принимаем x за постоянную и находим производную по y:

$$z'_y = (e^x \ln y + \cos y - \sin x + 2)'_y =$$
$$= e^x (\ln y)' + (\cos y)' - 0 + 0 = e^x/y - \sin y. \quad \blacktriangle$$

Задача. Найти первые частные производные функции $z = x\,y - x^2 - 2\,y^2 + x + 10\,y - 8$ в точке $P(2,\,0)$.

Ответ: $z'_x(2,\,0) = -3$, $z'_y(2,\,0) = 12$.

14.4. Полный дифференциал

Полным приращением Δz функции

$$z = f(x,\,y)$$

называется разность $f(x + \Delta x,\,y + \Delta y) - f(x,\,y)$, где Δx и Δy — соответствующие приращения аргументов x и y:

$$\boxed{\Delta z = f(x + \Delta x,\,y + \Delta y) - f(x,\,y).}$$

Будем говорить, что функция *имеет непрерывные частные производные* в точке $M(x, y)$, если $z = f(x, y)$ имеет частные производные $z_x(x, y)$, $z_y(x, y)$ в окрестности точки (x, y), причем эти производные непрерывны в самой точке (x, y). Такая функция является *дифференцируемой* в точке (x, y). (Вообще же, понятие дифференцируемости шире, чем существование непрерывных частных производных. Однако практически все функции, рассматриваемые в социально-экономической сфере, обладают непрерывными частными производными. Поэтому точного определения дифференцируемости нам не понадобится.)

Полным дифференциалом функции $z = f(x,\,y)$ называется выражение dz, которое вычисляется по формуле

$$\boxed{dz = z'_x\,\Delta x + z'_y\,\Delta y.}$$

Дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями, то есть $dx = \Delta x$ и $dy = \Delta y$ (проверьте!). Поэтому формулу полного дифференциала можно записать так:

$$\boxed{dz = z'_x\,dx + z'_y\,dy.}$$

Произведение частной производной на приращение (дифференциал) аргумента x называется *частным дифференциалом* и обозначается $d_x z$. Аналогично определяется частный дифференциал по аргументу y:

$$d_x z = z'_x\, dx, \quad d_y z = z'_y\, dy,$$

т. е. полный дифференциал dz равен сумме частных дифференциалов $d_x z$ и $d_y z$.

▽ **Пример.** Найти полный дифференциал функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Решение. Имеем

$$z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

и, следовательно,

$$dz = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dy. \quad ▲$$

Аналогично определяется и вычисляется полный дифференциал любого числа переменных.

14.5. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

В п. 7.1 было дано определение касательной к кривой как предельного положения секущей.

Похожим образом определяется касательная плоскость.

Плоскость, проходящая через точку M_0 поверхности, называется *касательной плоскостью* в данной точке, если угол между этой плоскостью и секущей, проходящей через точку M_0 и любую точку поверхности, стремится к нулю, когда точка M стремится по этой поверхности к точке M_0.

Непрерывность функции нескольких переменных проверить напрямую бывает довольно трудно, но это важное свойство функции можно установить более простым способом — воспользовавшись следующим утверждением: *если функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные в точке M_0, то она непрерывна в этой точке и, более того, имеет в этой точке касательную.* Как видим, это утверждение, которое мы примем без доказательства, позволяет также проверять существование касательной плоскости к поверхности.

Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, то *уравнение касательной плоскости* в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ к данной поверхности дается уравнением:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)\,(y - y_0),$$

а *канонические уравнения нормали*, проведенной через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхности, имеет следующий вид:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

В случае, когда уравнение гладкой поверхности задано в неявном виде

$$F(x, y, z) = 0,$$

уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхности имеет вид

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)\,(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)\,(y - y_0) + \\ + F'_z(x_0, y_0, z_0)\,(z - z_0) = 0,$$

а *канонические уравнения нормали*, проведенной через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхности:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

▽ **Пример 1.** Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 + y^2 + 1$ в точке $M_0(1, 0, 2)$.

Решение. Вычисляем $f'_x(1, 0)$ и $f'_y(1, 0)$:

$$f'_x(x, y) = 2x, \qquad f'_x(1, 0) = 2 \cdot 1 = 2,$$

$$f'_y(x, y) = 2y, \qquad f'_y(1, 0) = 2 \cdot 0 = 0.$$

Отсюда получаем уравнение касательной плоскости в точке $M_0(1, 0, 2)$ к данной поверхности

$$z - 2 = 2 \cdot (x - 1) + 0 \cdot (y - 0),$$

или

$$z = 2x$$

и канонические уравнения нормали, проведенной через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхности:

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 0}{0} = \frac{z - 2}{-1}. \quad ▲$$

▽ **Пример 2.** Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $F(x,\,y,\,z) = x^3 + y^3 + z^3 + x\,y\,z - 6$ в точке $M_0(1,\,2,\,-1)$.

Решение. Вычисляем $f'_x(1,\,0)$ и $f'_y(1,\,0)$:

$$F'_x(x,\,y,\,z) = 3\,x^2 + y\,z \qquad F'_x(1,\,2,\,-1) = 1,$$

$$F'_y(x,\,y,\,z) = 3\,y^2 + x\,z, \qquad F'_y(1,\,2,\,-1) = 11,$$

$$F'_z(x,\,y,\,z) = 3\,z^2 + y\,x, \qquad F'_z(1,\,2,\,-1) = 5.$$

Отсюда получаем уравнение касательной плоскости в точке $M_0(1,\,0,\,2)$ к данной поверхности

$$(x-1) + 11\,(y-2) + 5\,(z+1) = 0$$

и канонические уравнения нормали, проведенной через точку $M_0(x_0,\,y_0,\,z_0)$ поверхности:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{11} = \frac{z+1}{5}. \quad ▲$$

Задача. Найти уравнение касательной плоскости и уравнение нормали к поверхности $z = x^2 + 3\,y^2$ в точке $M_0(-2,\,1,\,7)$.

Ответ: Уравнение касательной

$$4\,x - 6\,y + z + 7 = 0,$$

а уравнение нормали

$$\frac{x+2}{-4} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-7}{-1}.$$

14.6. Производная сложной функции

Предположим, что имеется данная функция z двух переменных u и v:

$$z = f(u,\,v),$$

причем эти переменные суть функции переменных x, y, т. е.

$$u = g(x,\,y), \qquad v = h(x,\,y).$$

Формула

$$z = f\big(g(x,\,y),\;h(x,\,y)\big)$$

определяет *сложную функцию.*

Можно доказать, что если функции z, u и v дифференцируемы, то

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

▽ **Пример.** Найти первые частные производные функции $z = (5\,x - y)\,\ln(x^2 + y^2)$.

Решение. Введем обозначения: $u = 5\,x - y$, $v = x^2 + y^2$; тогда $z = u\,\ln v$. Поэтому

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \ln v \cdot 5 + \frac{u}{v} \cdot 2\,x =$$

$$= 5\,\ln(x^2 + y^2) + 2\,x\,\frac{5\,x - y}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \ln v \cdot (-1) + \frac{u}{v} \cdot 2\,y =$$

$$= -\ln(x^2 + y^2) + 2\,y\,\frac{5\,x - y}{x^2 + y^2}. \quad ▲$$

В частности, если u и v — функции только одной переменной x, и, следовательно, $u = g(x)$, $v = h(x)$, то $z = f(u,\,v) = f\big(g(x),\,h(x)\big) = Z(x)$. Откуда получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Но

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{dx}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dx}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{dv}{dx}.$$

Следовательно,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}. \tag{14.1}$$

14.7. Производная по направлению. Градиент

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$; l — некоторый луч с началом M_0; $M(x, y)$ — точка на этом луче, принадлежащая рассматриваемой окрестности

точки M_0 (рис. 14.4); Δl — длина отрезка $[M_0, M]$. Если существует

$$\lim_{\Delta l \to 0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\Delta l},$$

то этот предел называется *производной* функции $z = f(x, y)$ *по направлению* $\vec{l}$ в точке M_0 и обозначается $\dfrac{\partial z}{\partial l}$ (читается «дэ зет по эль»); здесь $\vec{l}$ — вектор, имеющий направление луча l.

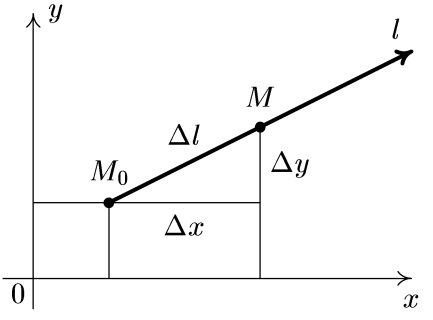


Рис. 14.4. Производная по направлению $\dfrac{\partial z}{\partial l}$

В частности, частная производная $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ есть производная $z = f(x, y)$ по положительному направлению оси Ox, а $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ — производная по положительному направлению оси Oy.

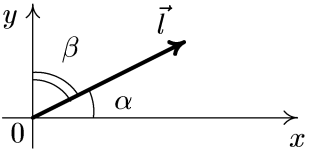


Рис. 14.5. Единичный вектор $\vec{l}$

Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $\vec{l}$ — единичный вектор; тогда он имеет координаты $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ или, что то же самое, $(\cos\alpha, \cos\beta)$, где α, β — углы между $\vec{l}$ и положительными направлениями осей Ox, Oy соответственно (рис. 14.5).

Теорема. *Если функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ непрерывные частные производные, то в этой точке существует производная $\dfrac{\partial z}{\partial l}$ по любому направлению $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta)$, причем*

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta,} \qquad (14.2)$$

где $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ — значения частных производных в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Производная по направлению $\dfrac{\partial z}{\partial l}$ характеризует скорость изменения функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ по направлению $\vec{l}$. В этом состоит *механический смысл* производной по направлению. *Геометрический смысл* производной по направлению

состоит в том, что она выражает величину наклона функции в направлении. *В экономическом смысле* производная по направлению от производственной функции есть количество продукции, приходящееся на единицу определенной линейной комбинации факторов.

Рассмотрим вектор $\vec{a} = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$. Тогда скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta)$ выражается формулой

$$\vec{a}\,\vec{l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta.$$

Сопоставляя последнюю формулу с равенством (14.2), получим

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial l} = \vec{a}\,\vec{l}.}$$

С другой стороны, $\vec{a}\,\vec{l} = |\vec{a}|\,|\vec{l}|\cos\varphi$, где φ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{l}$. Это скалярное произведение имеет максимальное значение при $\cos\varphi = 1$, т. е. при $\varphi = 0$. Таким образом, наибольшее значение $\left|\dfrac{\partial z}{\partial l}\right|$ достигается в направлении $\vec{l} = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$.

Вектор с координатами $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$, характеризующий направление максимального роста функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, называется *градиентом функции* $z = f(x, y)$ в этой точке и обозначается $\operatorname{grad} z$ или ∇z.

Градиент совпадает с нормалью к линии уровня $f(x, y) = \text{const}$ в точке M_0.

Понятие «градиент» Дж. Максвеллом; ему же принадлежит и обозначение grad. Оно происходит от латинского слова gradior (градиор), означающего «расти» (или от латинского слова gradientis (градиентис), означающее «шагающий»). Обозначение ∇ — перевернутую греческую букву Δ (дельта) — придумал Р. Гамильтон. Этот значок теперь называют «набла» (из-за сходства с остовом древнего музыкального инструмента наблы).

> *МА́КСВЕЛЛ (Maxwell) Джеймс Клерк (1831–1879) — английский физик, создатель классической электродинамики, один из основателей статистической физики, способствовал формированию векторного исчисления в виде отдельной математической дисциплины. Стал членом Лондонского королевского общества в 29 лет.*

ГА́МИЛЬТОН (Hamilton) Уильям Роуан (1805–1865) — ирландский математик и астроном, член Ирландской королевской Академии наук. В 22 года — профессор астрономии в Дублинском университете и директор университетской астрономической обсерватории. В его работах дано точное формальное изложение теории комплексных чисел. В механике Гамильтон применил вариационный метод (так называемый принцип наименьшего действия).

Итак, градиент

$$\boxed{\operatorname{grad} z = \nabla z = \left(\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)}$$

характеризует направление наибольшей скорости изменения функции. В этом состоит *механический смысл градиента. С геометрической точки зрения* градиент выражает направление наибольшего наклона графика функции, а *с экономической* — такую линейную комбинацию факторов x и y, при которой наблюдается наибольший выход продукции на единицу этого состава.

Производная функции $z = f(x, y)$ в направлении $\vec{l}$ и градиент связаны соотношением

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial l} = \operatorname{grad} z \cdot \vec{l}.}$$

14.8. Частные производные высших порядков

Частными производными второго порядка называют частные производные, взятые от частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = z''_{xx},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = z''_{yy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = z''_{xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = z''_{yx}.$$

Обозначение $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ читается «дэ зет по дэ икс квадрат», а $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ читается «дэ зет по дэ икс дэ игрек».

Аналогично определяются частные производные третьего и более высоких порядков. Запись

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^k\,\partial y^{n-k}}$$

означает, что функция z продифференцирована k раз по переменной x и $n-k$ раз по переменной y.

Частные производные z''_{xy} и z''_{yx} называются *смешанными*. Значения смешанных производных равны в тех точках, в которых эти производные непрерывны.

▽ **Пример 1.** Найти вторые частные производные функции $z = x^4 + 5\,x^2\,y^2 + 6\,x\,y + 5$. Убедиться в том, что $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Решение. Вначале находим первые частные производные данной функции:

$$z'_x = 4\,x^3 + 10\,x\,y^2 + 6\,y,$$
$$z'_y = 10\,x^2\,y + 6\,x.$$

Дифференцируя каждую из полученных производных по x и по y, находим вторые частные производные данной функции:

$$z''_{xx} = 12\,x^2 + 10\,y^2$$
$$z''_{xy} = 20\,x\,y + 6,$$
$$z''_{yy} = 10\,x^2,$$
$$z''_{yx} = 20\,x\,y + 6.$$

Смешанные частные производные равны:

$$z''_{xy} = z''_{yx} = 20\,x\,y + 6. \quad ▲$$

Задача 1. Найти смешанные частные производные функции $z = x^3\,y^2 + x\,\sin y$ и показать, что они равны между собой.

Ответ: $z''_{xy} = z''_{yx} = 6\,x^2\,y + \cos y$.

14.9. Производная неявной функции от одной переменной

В социально-экономических исследованиях часто возникает ситуация, когда значения двух переменных x и y связаны между собой уравнением, которое, если все члены перенести налево,

в общем случае имеет вид

$$F(x,\ y) = 0. \tag{14.3}$$

Здесь $F(x, y)$ есть функция двух переменных, заданная в какой-либо области. Если для каждого значения x из некоторого промежутка существует одно или несколько значений y, которое совместно с x удовлетворяют уранению (14.3), то этим определяется, однозначная или многозначная, функция $y = f(x)$, для которой равенство

$$F(x,\ f(x)) = 0 \tag{14.4}$$

имеет место уже тождественно относительно x.

Рассмотрим, например, уравнение

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Уравнение определяет двузначную функцию от x в промежутке $[-1, 1]$, а именно

$$y = \sqrt{1 - x^2}\,.$$

Если вместо y подставить эту функцию в уравнение (14.3), то получится тождество.

Здесь удалось найти для y очень простое аналитическое выражение через x, даже в элементарных функциях. Однако так обстоит дело не всегда. Например, если взять уравнение

$$y - x - \varepsilon \sin y = 0 \qquad (0 < \varepsilon < 1),$$

то этим уравнением переменная y не выражается в конечном виде через элементарные функции от x.

Функция $y = f(x)$ называется *неявной*, если она задана посредством неразрешенного (относительно y) уравнения (14.3); она становится *явной*, если рассматривается непосредственная зависимость y от x. Ясно, что эти термины характеризуют лишь способ задания функции $y = f(x)$ и не имеют отношения к ее природе.

В простейшем случае, когда уравнение (14.3) — алгебраическое, т. е. когда функция $F(x, y)$ есть полином относительно x и y, определяемое им неявная функция y от x (вообще многозначная) называется алгебраической. Если степень уравнения (относительно y) не выше четырех, то алгебраическая функция допускает явное выражение в радикалах; при степени выше четырех такое выражение возможно лишь в виде исключения.

Полезна следующая

Теорема. *Пусть для функции $F(x, y)$ выполнены следующие условия:*

1) $F(x, y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике

$$D = [x_0 - \Delta, x_0 + \Delta; y_0 - \Delta', y_0 + \Delta']$$

с центром в точке (x_0, y_0);

2) частные производные F'_x и F'_y существуют и непрерывны в D;

3) $F(x_0, y_0) = 0$;

4) производная $F'_y(x_0, y_0)$ отлична от нуля.

Тогда в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) уравнение (14.3) определяет y как однозначную функцию $y = f(x)$, которая имеет непрерывную производную y'_x; при $x = x_0$ эта функция принимает значение y_0.

Теорема однако не дает представления о способе вычисления производной от неявной функции y'_x. А это очень важно в социально-экономических исследованиях, так как использование производной позволяет более детально исследовать функцию: определить интервалы ее возрастания и убывания, найти точки минимума и максимума. Поэтому ниже приводится простой прием, с помощью которого можно легко находить производную от неявной функции.

Пусть выполнены условия теоремы. Согласно определению неявной функции $y = f(x)$ удовлетворяет уравнению (14.3). Левая часть этого уравнения представляет собой сложную функцию от x, которая тождественно равна нулю. Тогда и производная ее по x также есть нуль. Воспользовавшись формулой (14.1) дифференцирования сложной функции, получаем

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Так как производная правой части (14.3) равна нулю, а производная левой части равна $\dfrac{dF}{dx}$, то имеем

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

или, в других обозначениях,

$$F'_x + F'_y\, y'_x = 0, \tag{14.5}$$

откуда (так как $F'_y \neq 0$) имеем

$$\boxed{y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}.} \tag{14.6}$$

Эта формула выражает правило дифференцирования неявной функции y от переменной x.

Если функция $F(x, y)$ имеет еще и непрерывные производные второго порядка, то выражение, стоящее в равенстве (14.6) справа, может быть продифференцировано по x, следовательно существует и вторая производная y''_{xx} от неявной функции y.

После того как факт второй производной установлен, их вычисление производится путем повторного дифференцирования тождества (14.5) с учетом того, что y является функцией от x. Дифференцирование тождества (14.5) дает

$$F''_{xx} + F''_{xy} \cdot y'_x + (F''_{xy} + F''_{yy} \cdot y'_x) \cdot y'_x + F'_y \cdot y''_{xx} = 0,$$

откуда (так как $F'_y \neq 0$) имеем

$$\boxed{y''_{xx} = -\frac{F''_{xx} + 2\,F_{xy} \cdot y'_x + F''_{yy} \cdot (y'_x)^2}{F'_y}.}$$

Аналогичные формулы легко получить и в случае других частных производных высшего порядка, и в случае уравнения $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$ с бóльшим числом переменных.

▽ **Пример.** Неявная функция задана уравнением

$$F(x,\ y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 0.$$

Найти y'_x и y''_x.

Решение. Дифференцируя последовательно по x (причем y считаем функцией от x), получим

$$\frac{x + y\,y'}{x^2 + y^2} = \frac{x\,y' - y}{x^2 + y^2}$$

или

$$x + y\,y' = x\,y' - y;$$

затем

$$1 + (y')^2 + y\,y'' = x\,y''.$$

Из первого уравнения находим

$$y' = \frac{x+y}{x-y},$$

из второго (если подставить найденное значение y')

$$y'' = \frac{1+(y')^2}{x-y} = 2\,\frac{x^2+y^2}{(x-y)^3}. \quad \blacktriangle$$

Задача. Неявная функция задана уравнением

$$F(x,\ y) = x^y - y^x = 0, \qquad (x \neq y).$$

Найти $\dfrac{dy}{dx}$.

Ответ: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y^2\,(1-\ln x)}{x^2\,(1-\ln y)}$.

14.10. Двойной и тройной интегралы

При изучении функций одной переменной было введено понятие определенного интеграла. Оно определялось как предел интегральных сумм.

Для функции двух переменных можно ввести понятие двумерной интегральной суммы, предел которой называется *двойным интегралом* и обозначается так:

$$\int\limits_D \int f(x,\ y)\,dx\,dy.$$

Если определенный интеграл от неотрицательной непрерывной функции выражает площадь криволинейной трапеции, то двойной интеграл от неотрицательной непрерывной функции равен объему тела, построенного на области D плоскости xOy как на основании и ограниченного сверху поверхностью $z = f(x,\ y)$. Этот объемный аналог криволинейной трапеции называют *цилиндроидом*.

Для функции трех переменных аналогично вводится понятие тройного интеграла, а в общем случае, для функции n переменных, определяют кратный интеграл.

В случае простейших тел, кратные интегралы удается свести к *повторным* и вычислить их с помощью определенного интеграла.

Покажем, как это делается в случае двойного интеграла.

Множество D на плоскости xOy называется *элементарным относительно оси* Ox, если его граница состоит из графиков двух непрерывных функций $g(x)$ и $h(x)$, определенных на некотором отрезке $[a,\ b]$ и таких, что

$$g(x) \leqslant h(x),$$

и отрезков прямых $x = a$ и $x = b$ (рис. 14.6).

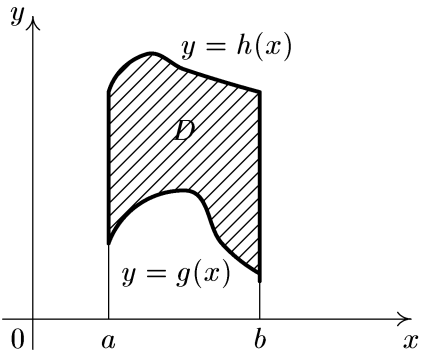


Рис. 14.6. Множество элементарное относительно оси Ox

Двойной интеграл по элементарному множеству D может быть вычислен с помощью теоремы, представляющей собой двумерный аналог формулы Ньютона–Лейбница.

Теорема. *Если функция* $z = f(x,\ y)$ *непрерывна на элементарном множестве* D, *то*

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,\ y)\,dy \right) dx. \tag{14.7}$$

Интеграл, стоящий в правой части (14.7), называется *повторным интегралом*. Иногда он записывается также в виде

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,\ y)\,dy.$$

▽ **Пример.** Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_D (10 - x^2 - y^2)\,dx\,dy,$$

если область D есть прямоугольник, стороны которого определены уравнениями

$$x = 1; \qquad x = 2; \qquad y = 0; \qquad y = 2.$$

Решение. Применим формулу (14.7):

$$\iint\limits_D (10 - x^2 - y^2)\,dx\,dy = \int\limits_1^2 \left(\int\limits_0^2 f(x,\ y)\,dy \right) dx.$$

Вычислим внутренний интеграл; при интегрировании считаем x постоянной величиной:

$$\int\limits_0^2 (10 - x^2 - y^2)\,dy = \left(10\,y - x^2\,y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=2} =$$

$$= 20 - 2\,x^2 - \frac{8}{3} = \frac{52}{3} - 2\,x^2.$$

Тогда

$$\iint\limits_D (10 - x^2 - y^2)\,dx\,dy = \int\limits_1^2 \left(\frac{52}{3} - 2\,x^2\right) dx =$$

$$= \left(\frac{52}{3}\,x - \frac{2\,x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{38}{3}. \quad \blacktriangle$$

Задача 1. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_D (x^2 + y^2 + 2)\,dx\,dy,$$

если область D есть прямоугольник, стороны которого определены уравнениями

$$x = 2; \qquad x = 4; \qquad y = 0; \qquad y = 3.$$

Ответ: 86.

Задача 2. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_D (x^2 + y^2 + 2)\,dx\,dy,$$

если область D есть прямоугольник, стороны которого определены уравнениями

$$x = 0; \qquad x = 1; \qquad y = 0; \qquad y = 2.$$

Ответ: 14.

14.11. Компьютерные вычисления частных производных и кратных интегралов

Для вычисления частных производных в Maple используется команда

```
> diff(expr,x1$n1,x2$n2,...);
```

Здесь `expr` — выражение, зависящее от переменных `x1`, `x2`, ..., а `n1`, `n2`, ... — порядки дифференцирования по соответствующим переменным.

▽ **Пример 1.** Найти частные производные z'_x, z''_{xy} и z''_{yy} функции от двух переменных $z = 5^{x \cdot y}$.

Решение.

```
> z:=5^(x*y): diff(z,x); diff(z,x,y); diff(z,y$2);
```

$$5^{x\,y}\; y\; \ln 5,$$

$$5^{x\,y}\; x\, (\ln 5)^2 + 5^{x\,y}\; \ln 5,$$

$$5^{x\,y}\; x^2\, (\ln 5)^2. \qquad \blacktriangle$$

Для компьютерного вычисления двойных, тройных и т. д. интегралов нужно применить несколько раз команду

```
int(f(x),x=a..b),
```

рассмотренную при изучении определенного интеграла.

▽ **Пример 2.** Вычислить повторный интеграл:

$$\int_2^4 \left(\int_0^3 (x^2 + y^2 + 2)\, dy \right) dx.$$

Решение.

```
> int(int(x^2+y^2+2,y=0..3),x=2..4);
```

$$86. \qquad \blacktriangle$$

▽ **Пример 3.** Вычислить повторный интеграл:

$$\int_2^4 \left(\int_0^x (x^2 + y^2 + 2)\, dy \right) dx.$$

Решение.

```
> int(int(x^2+y^2+2,y=0..x),x=2..4);
```

$$92. \quad \blacktriangle$$

Несколько команд интегрирования имеется в библиотеке `student`, которую предварительно нужно подключить при помощи `with(student)`. В библиотеке `student` имеется, например, команда `Tripleint(f,x,y,z)` для вычисления тройного интеграла.

▽ **Пример 4.** Вычислить интеграл:

$$\int_0^2 dx \int_0^{2\sqrt{x}} dy \int_0^{\sqrt{4x-y^2}} x\,dz.$$

Решение. Подключаем библиотеку `student`:

```
> with(student);
```

Записываем тройной интеграл

```
> Tripleint(x,z=0..sqrt(4*x-y^2),y=0..2*sqrt(x),x=0..2);
```

Вычисляем

```
> value(");
```

$$\frac{8}{3}\pi. \quad \blacktriangle$$

Если поручить двум людям, один из которых — математик, выполнение любой незнакомой работы, то результат всегда будет следующим: математик сделает ее лучше.

Г. Штейнгауз

Глава 15
Оптимизационные задачи

15.1. Экстремум функции двух переменных

Внутренняя область каждого круга с центром $P_0(x_0,\, y_0)$ и радиусом $\delta > 0$ называется *окрестностью точки* $P_0(x_0,\, y_0)$.

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$, непрерывную в окрестности точки $P_1(x_1, y_1)$. *Строгим максимумом* (*строгим локальным максимумом*) функции $z = f(x,\, y)$ называется такое ее значение $f(x_1, y_1)$, которое больше всех других значений, принимаемых в точках $P(x, y)$, достаточно близких к точке $P_1(x_1, y_1)$ и отличных от нее (рис. 15.1), т. е.

$$\boxed{f(x_1, y_1) > f(x, y).}$$

Пусть функция $z = f(x, y)$, непрерывна в окрестности точки $P_2(x_2, y_2)$. *Строгим минимумом* (*строгим локальным минимумом*) функции $z = f(x,\, y)$ называется такое ее значение $f(x_2, y_2)$ в точке $P_2(x_2,\, y_2)$, которое меньше всех других значений, принимаемых в точках $P(x, y)$, достаточно близких к точке $P_2(x_2, y_2)$ и отличных от нее (рис. 15.1), т. е.

$$\boxed{f(x_2,\, y_2) < f(x,\, y).}$$

Если рассмотренные выше неравенства являются нестрогими, то говорят о *нестрогих локальных максимуме и минимуме* соответственно.

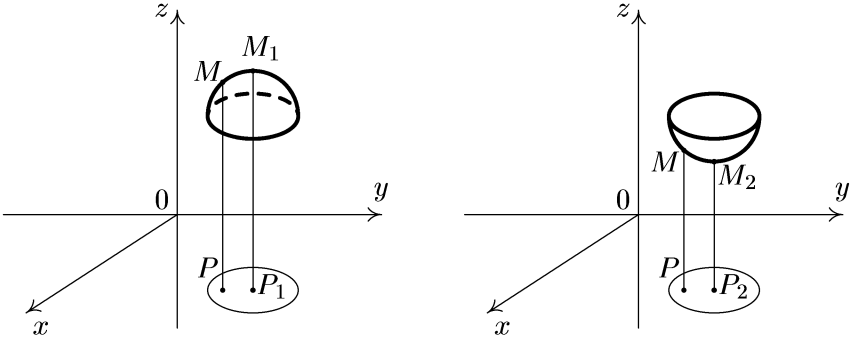


Рис. 15.1. Экстремум функции двух переменных

В случаях, когда упоминание о том, является ли максимум или минимум строгим или нестрогим, локальным или глобальным, не является существенным, то соответствующие прилагательные опускают.

Точки максимума и минимума называются точками *экстремума.*

Приведем теоремы, облегчающие нахождение экстремумов функции двух переменных.

Теорема 1 (необходимое условие экстремума). *Если функция* $z = f(x,\, y)$ *имеет в точке* $P_0(x_0,\, y_0)$ *экстремум и первые частные производные* $f'_x(x_0,\, y_0)$, $f'_y(x_0,\, y_0)$ *непрерывны в некоторой окрестности этой точки, то*

$$f'_x(x_0,\, y_0) = 0, \qquad f'_y(x_0,\, y_0) = 0. \tag{15.1}$$

□ Если в точке $(x_0,\, y_0)$ функция $f(x,\, y)$ имеет максимум, то функция $f(x,\, y_0)$ одной переменной x имеет в точке $x = x_0$ максимум, и, следовательно, ее производная $f'_x(x_0,\, y_0)$ равна нулю. Функция $f(x_0,\, y)$ одной переменной y также имеет в точке $y = y_0$ максимум, и, следовательно, ее производная $f'_y(x_0,\, y_0)$ равна нулю. Следовательно, одновременно должно иметь место:

$$f'_x(x_0,\, y_0) = 0, \qquad f'_y(x_0,\, y_0) = 0.$$

Аналогично доказывается случай, когда функция $f(x,\, y)$ имеет в точке $(x_0,\, y_0)$ минимум. ■

Точки, при которых выполняются (15.1), называются *стационарными точками функции* $z = f(x,\, y)$.

Теорема 2 (геометрический смысл необходимых условий экстремума). *В стационарной точке касательная плоскость к поверхности $z = f(x, y)$ параллельна плоскости xOy.*

□ Пусть $P_0(x_0, y_0)$ есть стационарная точка функции $z = f(x, y)$. Уравнение касательной плоскости в этой точке имеет вид

$$z - z_0 = z'_x(x_0,\, y_0)\,(x - x_0) + z'_y(x_0,\, y_0)\,(y - y_0).$$

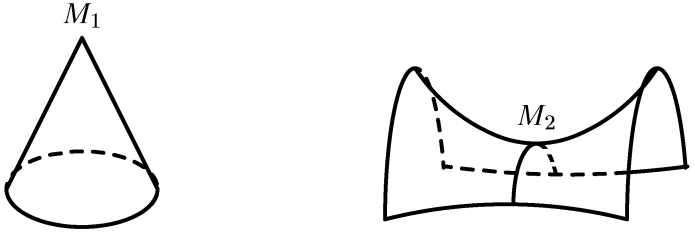
Так как частные производные равны нулю, то получаем

$$z - z_0 = 0, \qquad z = z_0. \quad \blacksquare$$

Заметим, что точки экстремума могут быть не только в тех точках, в которых частные производные функции равны нулю. Экстремум функции может быть и в тех точках, где хотя бы одна из частных производных не существует или равна бесконечности. На рис. 15.2 изображена функция с конусообразным графиком. В вершине конуса — точке M_1 — находится максимальная точка функции, однако частные производные там не существуют (в соответствующей точке невозможно провести касательную плоскость).

Более того, обращение в нуль или же несуществование частных производных первого порядка является более общим *необходимым условием экстремума.*

Однако это необходимое условие недостаточно для существования экстремума. Например, у седловидной поверхности $z = x^2 - y^2$, изображенной на рис. 15.2, частные производные равны нулю в точке M_2, но эта точка не является экстремумом.



конус седловина

Рис. 15.2. В точке M_1 — максимум, однако частные производные не существуют. В точке M_2 нет экстремума, однако частные производные равны нулю

Теорема 3 (достаточные условия экстремума). *Если функция* $z = f(x,\, y)$ *имеет в окрестности точки* $P_0(x_0,\, y_0)$ *первые и вторые непрерывные частные производные, то в точке* P_0, *в которой выполняются необходимые условия* (15.1), *имеет место экстремум в случае, когда в этой точке*

$$\Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2 > 0. \tag{15.2}$$

Функция имеет максимум в точке $P_0(x_0,\, y_0)$, *если в этой точке* $f''_{xx} < 0$; *и минимум, если* $f''_{xx} > 0$.

Если же $\Delta < 0$, *то функция* $z = f(x,\, y)$ *не имеет экстремума в точке* P_0.

Таким образом, схема исследования функции $z = f(x,\, y)$, имеющей непрерывные первые и вторые частные производные, на экстремум такова. Вначале сужаем область поиска. Находим стационарные точки (только они могут быть точками экстремума). Далее, пусть $P_0(x_0,\, y_0)$ является стационарной точкой функции. Значения производных второго порядка в точке P_0 обозначим так:

$$f''_{xx}(x_0,\, y_0) = A;$$

$$f''_{xy}(x_0,\, y_0) = B;$$

$$f''_{yy}(x_0,\, y_0) = C.$$

Составим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = A\,C - B^2.$$

Если $\Delta < 0$, то в стационарной точке P_0 нет экстремума (в этом случае P_0 является так называемой *седловиной*, или *точкой минимакса*; рис. 15.2).

Если $\Delta > 0$, то в точке P_0 есть экстремум, причем максимум, если $A < 0$, и минимум, если $A > 0$.

Если $\Delta = 0$, то требуется дополнительное исследование. (В этом случае возможны оба случая. Для одних функций в стационарной есть экстремум, для других — нет.) Поэтому при $\Delta = 0$ проводят исследование, используя определение.

▽ **Пример 1.** Найти экстремум функции

$$z = 2\,x + 8\,y - x^2 - 2\,y^2.$$

Решение. Находим частные производные функции:

$$z'_x = 2 - 2\,x, \qquad z'_y = 8 - 4\,y.$$

Находим стационарные точки. Для этого решаем систему уравнений

$$z'_x = 2 - 2\,x = 0, \qquad z'_y = 8 - 4\,y = 0,$$

откуда $x = 1$, $y = 2$. Таким образом, стационарной является точка $P_0(1, 2)$. Находим значения частных производных второго порядка в точке P_0:

$$A = z''_{xx}(P_0) = -2, \qquad B = z''_{yy}(P_0) = -4, \qquad C = z''_{xy}(P_0) = 0.$$

Составляем выражение

$$\Delta = A\,C - B^2 = (-2) \cdot (-4) - 0^2 = 8.$$

Так как $\Delta > 0$ и $A < 0$, делаем вывод о наличии максимума в точке $P_0(1, 2)$. При этом минимальное значение функции равно

$$z_{\min} = 9. \quad \blacktriangle$$

▽ **Пример 2.** Найти экстремум функции

$$z = 2\,x^3 + x\,y^2 + 5\,x^2 + y^2 + 1.$$

Решение. Находим частные производные функции:

$$z'_x = 6\,x^2 + y^2 + 10\,x, \qquad z'_y = 2\,x\,y + 2\,y.$$

Находим стационарные точки. Для этого решаем систему уравнений

$$z'_x = 6\,x^2 + y^2 + 10\,x = 0, \qquad z'_y = 2\,x\,y + 2\,y = 0.$$

Решение системы дает 4 стационарные точки:

$$P_1(0,\,0), \quad P_2(-\frac{5}{3},\,0), \quad P_3(-1,\,2), \quad P_4(-1,\,-2).$$

Находим значения частных производных второго порядка:

$$z''_{xx} = 12\,x + 10; \qquad z''_{xy} = 2\,y; \qquad z''_{yy} = 2\,x + 2.$$

Исследуем каждую стационарную точку.

1) В точке $P_1(0,\,0)$: $A = 10$; $B = 0$; $C = 2$; $\Delta = 20$. Так как $\Delta > 0$ и $A > 0$, то в этой точке функция имеет минимум:

$$z_{\min} = z(0,\,0) = 1.$$

2) В точке $P_2\left(-\frac{5}{3},\,0\right)$: $A=-10;\ B=0;\ C=-\frac{4}{3};\ \Delta=\frac{40}{3}$. Так как $\Delta>0$ и $A<0$, то в этой точке функция имеет максимум:

$$z_{\max}=z\left(-\frac{5}{3},\,0\right)=5\frac{17}{27}.$$

3) В точке $P_3(-1,\,2)$: $A=-2;\ B=4;\ C=0;\ \Delta=-16$. Так как $\Delta<0$, то в этой точке нет экстремума.

4) В точке $P_4(-1,\,-2)$: $A=-2;\ B=-4;\ C=0;\ \Delta=-16$. Так как $\Delta<0$, то в этой точке нет экстремума. ▲

Задача. Найти экстремум функции

$$z=3\,x+6\,y-x^2-x\,y-y^2.$$

Ответ: $z_{\max}=z(0,\,3)=9$.

В следующей главе будет рассмотрено приложение этого материала к задачам на экономию ресурсов.

15.2. Экстремум функции многих переменных

Достаточные условия экстремума функции можно сформулировать и на языке квадратичной формы, изучаемой в разделе «Аналитическая геометрия и линейная алгебра». Достаточные условия экстремума функции многих (и не только двух) переменных сводятся к положительной (или отрицательной) определенности квадратичной формы

$$\sum_{i,\,k=1}^{n}A_{ik}\,\Delta x_i\,\Delta x_k,$$

где A_{ik} — значение $f''_{x_i\,x_k}$ в исследуемой точке.

Прежде чем сформулировать соответствующие теоремы приведем некоторые сведения из о квадратичных формах.

Некоторые сведения о квадратичных формах. Функция вида

$$\boxed{\sum_{i,\,k=1}^{n}a_{ik}\,x_i\,x_k}$$

называется *квадратичной формой* от переменных $x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n$; коэффициенты a_{ik} не зависят от $x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n$.

Если $a_{ik} = a_{ki}$ для всех $i, k = 1, 2, \ldots, n$, то квадратичная форма называется *симметричной*.

Симметричная квадратичная форма от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется *положительно определенной* (*отрицательно определенной*), если она имеет положительные (отрицательные) значения при всех значениях переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, не равных одновременно нулю.

▽ **Пример 1.** Проверить положительную определенность формы

$$6\,x_1^2 + 5\,x_2^2 + 14\,x_3^2 + 4\,x_1\,x_2 - 8\,x_1\,x_3 - 2\,x_2\,x_3.$$

Решение. Форму можно представить в виде

$$(2\,x_1 - 3\,x_3)^2 + 2\,(x_1 + x_2 + x_3)^2 + 3\,(x_2 - x_3)^2.$$

Следовательно предложенная для проверки квадратичная форма является положительно определенной. ▲

Положительно определенные и отрицательно определенные квадратичные формы объединяют под названием *знакоопределенных форм*.

Если симметричная квадратичная форма имеет как положительные, так и отрицательные значения, то она называется *знакопеременной*.

▽ **Пример 2.** Показать знакопеременность формы

$$6\,x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 8\,x_1\,x_2 - 8\,x_1\,x_3 - 2\,x_2\,x_3.$$

Решение. Значение формы равно $+6$ при $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = 0$ и равно -1 при $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$. Следовательно, предложенная для проверки квадратичная форма принимает как положительные, так и отрицательные значения и поэтому является знакопеременной. ▲

Сформулируем критерий знакоопределенности симметричной квадратичной формы. Будем называть матрицу

$$\|a_{ik}\| = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

матрицей квадратичной формы

$$\Phi = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}\, x_i\, x_k, \qquad a_{ik} = a_{ki}, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Определители этой матрицы

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называются *главными минорами* матрицы $\|a_{ik}\|$ квадратичной формы Φ.

Критерий Сильвестра. *Для того чтобы симметричная положительная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \ldots, \quad \Delta_n > 0.$$

Для того чтобы симметричная квадратичная форма была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки главных миноров

$$\Delta_1, \quad \Delta_2, \quad \ldots, \quad \Delta_n$$

чередовались, причем

$$\Delta_1 < 0.$$

СИЛЬВЕ́СТР (Sylvester) Джеймс Джозеф (1814–1897) — английский математик, член Лондонского королевского общества. Родился в Лондоне. Важнейшие работы Сильвестра относятся к алгебре, теории чисел, теории вероятностей, механике и математической физике. Он заложил основы теории элементарных делителей двух квадратичных форм, развил теорию канонических форм, т. е. разрешил задачу сведения формы к простейшему виду. Ему принадлежат все термины этой теории: инвариант, ковариант, коммутант, дискриминант и т. д. Вообще, он ввел очень много употребляемых в современной математике терминов. Учреждена медаль им. Сильвестра.

▽ **Пример 3.** Проверить знакоопределенность форм

$$6\, x_1^2 + 5\, x_2^2 + 14\, x_3^2 + 4\, x_1\, x_2 - 8\, x_1\, x_3 - 2\, x_2\, x_3$$

и

$$6\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 8\, x_1\, x_2 - 8\, x_1\, x_3 - 2\, x_2\, x_3$$

из примеров 1 и 2 по критерию Сильвестра.

Решение. Для формы из первого примера имеем $a_{11} = 6$, $a_{22} = 5$, $a_{33} = 14$, $a_{12} = a_{21} = 2$, $a_{13} = a_{31} = -4$, $a_{23} = a_{32} = -1$, откуда

$$\Delta_1 = a_{11} = 6 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 26 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & -1 \\ -4 & -1 & 14 \end{vmatrix} = 294 > 0.$$

Поскольку все главные миноры положительны, то квадратичная форма из примера 1 является положительно определенной.

Два главных минора квадратичной формы из примера 2 удовлетворяют неравенствам

$$\Delta_1 = a_{11} = 6 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -10 < 0.$$

Поэтому соответствующая квадратичная форма не может быть положительно определенной или отрицательно определенной. Следовательно она является знакопеременной. ▲

Рассмотрим теперь как с помощью квадратичных форм находить точки экстремума.

Достаточные условия экстремума. Отметим, что окрестность, минимум, максимум и экстремум для функции многих переменных определяются аналогично тому, как это сделано для функции двух переменных. Так же как и в случае функции двух переменных, доказывается

Теорема 1 (необходимое условие экстремума). *Если функция $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет в точке P_0 экстремум и первые частные производные f'_{x_i}, $i = 1, 2, \ldots, n$ непрерывны в некоторой окрестности этой точки, то*

$$f'_{x_i}\Big|_{P_0} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{15.3}$$

Точки, в которых выполняются условия (15.3), называются *стационарными.*

Необходимое условие экстремума может быть сформулировано и в терминах дифференциалов.

Введем для этого необходимые определения.

Полный дифференциал функции многих переменных, который называют еще и дифференциалом первого порядка вводится

по аналогии с полным дифференциалом функции двух переменных.

Пусть функция $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет непрерывные частные производные z'_{x_1}. *Дифференциалом первого порядка* такой функции называется выражение dz, которое вычисляется по формуле

$$\boxed{dz = z'_{x_1}\,\Delta x_1 + z'_{x_2}\,\Delta x_2 + \ldots + z'_{x_n}\,\Delta x_n.}$$

Дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями, т. е. $dx_i = \Delta x_i$.

Из условий (15.3) вытекает, что в точке локального экстремума

$$\boxed{dz\Big|_{P_0} = 0.} \tag{15.4}$$

Обратное утверждение также верно: если в точке P_0 первый дифференциал функции $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ тождественно равен нулю (как функция относительно dx_i), то все частные производные z'_{x_i} в указанной точке также равны нулю в силу произвольности dx_i.

Условия (15.3) или (15.4) не являются достаточными условиями экстремума.

Достаточное условие экстремума формулируется с помощью привлечения второго дифференциала функции.

Пусть функция $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет непрерывные частные производные $z''_{x_i\,x_k}$. *Дифференциалом второго порядка* этой функции называют выражение

$$\boxed{d^2z = \sum_{i,\,k=1}^{n} z''_{x_i\,x_k}\,dx_i\,dx_k.}$$

Здесь дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями, т. е. $dx_i = \Delta x_i$, $dx_k = \Delta x_k$.

Нетрудно видеть, что дифференциал d^2z представляет собой симметричную квадратичную форму относительно дифференциалов независимых переменных dx_1, dx_2, ..., dx_n. Матрица этой квадратичной формы, элементы которой являются вторыми

частными производными $z''_{x_i\,x_k}$, называется *матицей Гессе*:

$$H = \begin{Vmatrix} z''_{x_1\,x_1} & z''_{x_1\,x_2} & \dots & z''_{x_1\,x_n} \\ z''_{x_2\,x_1} & z''_{x_2\,x_2} & \dots & z''_{x_2\,x_n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z''_{x_n\,x_1} & z''_{x_n\,x_2} & \dots & z''_{x_n\,x_n} \end{Vmatrix}.$$

Определитель этой матрицы называется *гессианом.*

> *ГЁССЕ (Hesse) Людвиг Отто (1811–1874) — немецкий математик, член Баварской академии наук. Родился в Кенигсберге. Основные труды относятся к геометрии, линейной алгебре, вариационному исчислению; ввел понятие гессиана.*

Теорема 2 (достаточные условия экстремума). *Пусть в стационарной точке P_0 и в некоторой ее окрестности функция $z = f(x_1,\, x_2,\, \dots,\, x_n)$ имеет все непрерывные частные производные. Тогда, если в этой точке второй дифференциал d^2z является знакоопределенной квадратичной формой от дифференциалов dx_1, dx_2, ..., dx_n независимых переменных, данная функция имеет в точке P_0 локальный экстремум. При этом*

1) *если d^2z является положительно определенной квадратичной формой, то функция $z = f(x_1,\, x_2,\, \dots,\, x_n)$ имеет в точке P_0 локальный минимум*;

2) *если d^2z является отрицательно определенной квадратичной формой, то функция $z = f(x_1,\, x_2,\, \dots,\, x_n)$ имеет в точке P_0 локальный максимум.*

Если же d^2z является знакопеременной квадратичной формой, то функция $z = f(x_1,\, x_2,\, \dots,\, x_n)$ не имеет локального экстремума в точке P_0.

▽ **Пример 4.** Найти экстремум функции трех переменных $z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Решение. Найдем стационарную точку функции. Для этого приравняем первые частные производные к нулю:

$$z'_{x_1} = 2\,x_1 = 0, \quad z'_{x_2} = 2\,x_2 = 0, \quad z'_{x_3} = 2\,x_3 = 0.$$

Отсюда получаем единственную стационарную точку $O(0, 0, 0)$. Проверим, является ли эта точка точкой экстремума. Найдем вторые частные производные.

$$z''_{x_1\,x_1} = 2, \quad z''_{x_2\,x_2} = 2, \quad z''_{x_3\,x_3} = 2,$$

$$z''_{x_1 x_2} = 0, \quad z''_{x_1 x_3} = 0, \quad z''_{x_2 x_3} = 0.$$

Гессиан, составленный из этих вторых частных производных в точке $O(0, 0, 0)$, имеет вид

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix},$$

все главные миноры

$$\Delta_1 = 2, \quad \Delta_2 = 4, \quad \Delta_3 = 8$$

которого положительны. Следовательно, согласно критерию Сильвестра, квадратичная форма $d^2 z$ положительно определена. Поэтому из теоремы 2 вытекает, что функция $z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ имеет в точке $O(0, 0, 0)$ локальный минимум. ▲

Отметим, что теорема 3 (о достаточных условиях экстремума функции двух переменных) из предыдущего пункта является следствием теоремы 2, поскольку введенный в предыдущем пункте определитель Δ является гессианом функции двух переменных.

15.3. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных в заданной замкнутой области

Пусть требуется найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x, y)$ в некоторой замкнутой области D. Этих значений функция достигает либо во внутренних точках области, которые являются стационарными точками функции, либо на границах области. Следовательно, чтобы найти наибольшее и наименьшее значение функции в заданной области, необходимо:

1) найти стационарные точки, лежащие внутри области, и вычислить значения функции в этих точках; исследовать на экстремум эти точки нет необходимости;

2) найти наибольшее и наименьшее значение функции на границе области; если граница области состоит из нескольких линий (участков), то исследование проводится для каждого участка в отдельности;

3) сравнить все полученные значения функции; наибольшее из них будет наибольшим, а наименьшее — наименьшим значением функции в заданной области.

▽ **Пример.** Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^2 + 2y^2 - 2x - 8y + 5$ в замкнутом треугольнике AOB, ограниченном осями координат и прямой $x + y - 4 = 0$ (рис. 15.3).

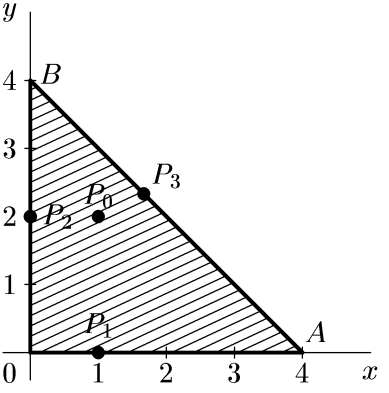


Рис. 15.3. Стационарные точки в замкнутом треугольнике AOB

Решение. Найдем стационарные точки:

$$z'_x = 2x - 2; \quad z'_y = 4y - 8.$$

Решая систему

$$z'_x = 2x - 2 = 0;$$
$$z'_y = 4y - 8 = 0,$$

находим стационарную точку $P_0(1, 2)$. Эта точка лежит внутри области. Вычислим значение функции в этой точке:

$$z(P_0) = z(1, 2) = 1 + 8 - 2 - 16 + 5 = -4.$$

Граница заданной области состоит из отрезка OA оси Ox, отрезка OB оси Oy и отрезка AB. Определим наибольшее и наименьшее значения функции z на каждом из этих трех участков. На отрезке OA имеем $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 4$. При $y = 0$ функция

$$z = x^2 - 2x + 5$$

есть функция одной независимой переменной x. Находим наибольшее и наименьшее значение этой функции на отрезке $[0, 4]$:

$$\frac{dz}{dx} = 2x - 2; \quad 2x - 2 = 0; \quad x = 1;$$

$P_1(1, 0)$ — стационарная точка. Значение функции в этой точке равно $z(P_1) = z(1, 0) = 4$.

Вычислим значения функции на концах отрезка OA, т. е. в точках O и A:

$$z(O) = z(0, 0) = 5; \qquad z(A) = z(4, 0) = 13.$$

На отрезке OB имеем $x = 0$ и $0 \leqslant y \leqslant 4$. При $x = 0$

$$z = 2y^2 - 8y + 5.$$

Находим наибольшее и наименьшее значение этой функции z от переменной y на отрезке $[0,\ 4]$:

$$z'_y = 4\,y - 8; \quad 4\,y - 8 = 0; \quad y = 2;$$

$P_2(0,\ 2)$ — стационарная точка,

$$z(P_2) = z(0,\ 2) = -3.$$

Вычислим значения функции z на концах отрезка OB, т. е. в точках O и B:

$$z(O) = z(0,\ 0) = 5, \qquad z(B) = z(0,\ 4) = 5.$$

Исследуем теперь отрезок AB. Уравнение прямой AB:

$$y = 4 - x.$$

Подставив это выражение для y в заданную функцию z, получим

$$z = x^2 + 2\,(4 - x)^2 - 2\,x - 8\,(4 - x) + 5,$$

или

$$z = 3\,x^2 - 10\,x + 5.$$

Определим наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[0,\ 4]$:

$$z'_x = 6\,x - 10; \quad 6\,x - 10 = 0; \quad x = \frac{5}{3};$$

$P_3\left(\frac{5}{3},\ \frac{7}{3}\right)$ — стационарная точка,

$$z(P_3) = z\left(\frac{5}{3},\ \frac{7}{3}\right) = -\frac{10}{3}.$$

Значения в точках A и B найдены ранее. Сравнивая полученные результаты, заключаем, что наибольшее значение заданной функции z в заданной замкнутой области достигается в точке $A(4,\ 0)$, а наименьшее значение — в стационарной точке $P_0(1,\ 2)$. Таким образом, наибольшее значение достигается в точке $z(4,\ 0) = 13$, а наименьшее — в точке $z(1,\ 2) = -4$. ▲

Задача. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x^2 + y^2 - x\,y + x + y$$

в замкнутом треугольнике, ограниченном осями координат и прямой

$$x + y + 3 = 0.$$

Ответ: Наименьшее значение: -1, а наибольшее: 6.

В следующей главе рассмотрено приложение методов поиска наибольших и наименьших значений функций к задачам повышения урожайности.

15.4. Условный экстремум

Пусть требуется исследовать на экстремум функцию $z = f(x, y)$ при условии, что сами переменные x и y связаны уравнением

$$g(x,\ y) = 0.$$

Геометрически это означает, что кроме функции $z = f(x, y)$ задана еще некоторая линия L в плоскости xOy, и требуется функцию z исследовать на экстремум при условии, что экстремальные точки могут принадлежать только этой линии L. Эти точки называются *точками условного экстремума*, а уравнение, связывающее переменные x и y, — *уравнением связи*.

Если из уравнения связи $g(x,\ y)$ переменную y выразить явно через x и подставить в заданную функцию $z = f(x,\ y)$, то получим функцию от одной переменной x. Найдя те значения x, при которых z достигает экстремума, мы подставим их в уравнение связи и определим соответствующие значения y. В результате будут получены точки условного экстремума.

В тех случаях, когда y нельзя выразить явно через x, применяют так называемый *метод множителей Лагранжа*, сущность которого состоит в следующем.

Чтобы данную функцию $z = f(x,\ y)$ исследовать на экстремум при условии, что $g(x,\ y) = 0$, надо:

1) составить вспомогательную *функцию Лагранжа*

$$\boxed{F(x,\ y,\ \lambda) = f(x,\ y) + \lambda g(x,\ y),}$$

где λ — вспомогательная неизвестная, именуемая *множителем Лагранжа*;

2) найти частные производные

$$F'_x,\quad F'_y,\quad F'_\lambda;$$

приравнять каждую из них нулю и решить полученную систему трех уравнений с тремя неизвестными x, y и λ.

В результате решения системы будут получены точки, в которых функция *может* иметь условный экстремум, но может и не

иметь его в найденных точках, так как система выражает только необходимое условие экстремума.

▽ **Пример.** Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 + 6\,x - 2\,y + 1$$

при условии, что переменные x и y связаны уравнением

$$x^2 + y - 4 = 0.$$

Решение. *Первый способ решения.* Уравнение связи представляет уравнение параболы $y = 4 - x^2$. Заменив в заданной функции z переменную y через $4 - x^2$, получим

$$z(x) = x^2 + 6\,x - 2\,(4 - x^2) + 1,$$

или

$$z(x) = 3\,x^2 + 6\,x - 7.$$

Полученную функцию $z(x)$ исследуем на экстремум.

$$\frac{dz}{dx} = 6\,x + 6; \qquad 6\,x + 6 = 0;$$

x_0 — стационарная точка функции $z(x)$. Находим вторую производную:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = 6.$$

Так как вторая производная положительна, то в найденной стационарной точке функция $z(x)$ имеет минимум. Подставив $x_0 = -1$ в уравнение связи, получим

$$y_0 = 4 - 1 = 3.$$

Следовательно, точка $P_0(-1,\,3)$ — точка условного экстремума. В этой точке функция $z(x,\,y)$ имеет минимум:

$$z_{\min} = z(-1,\,3) = 1 - 6 - 6 + 1 = -10.$$

Второй способ решения. Определим теперь точку условного экстремума, пользуясь методом множителей Лагранжа.

1) Составляем вспомогательную функцию Лагранжа. Так как по условию

$$z = x^2 + 6\,x - 2\,y + 1, \qquad g(x,\,y) = x^2 + y - 4 = 0,$$

то

$$F(x,\,y,\,\lambda) = x^2 + 6\,x - 2\,y + 1 + \lambda \cdot (x^2 + y - 4).$$

2) Находим частные производные

$$F'_x = 2x + 6 + 2\lambda x;$$

$$F'_y = -2 + \lambda;$$

$$F'_\lambda = x^2 + y - 4.$$

3) Приравняв каждую частную производную нулю, получаем систему:

$$\begin{cases} 2x + 6 + 2\lambda x = 0, \\ -2 + \lambda = 0, \\ x^2 + y - 4 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения $\lambda = 2$, тогда из первого уравнения следует $x = -1$, а из третьего $y = 3$. Таким образом, $P_0(-1,\, 3)$ — единственная точка, которая может быть точкой условного экстремума. Бóльшего метод Лагранжа не дает. В этом смысле первый способ решения предпочтительнее. ▲

Задача. Исследовать на экстремум функцию

$$z = 2x^2 + y^2$$

при условии, что переменные x и y связаны уравнением

$$x + y - 2 = 0.$$

Ответ: $z_{\min} = z(-2,\, 4) = 24$.

Метод множителей Лагранжа может быть использован и при исследовании на экстремум функции бóльшего числа переменных.

Пусть задана функция трех переменных

$$u = f(x,\, y,\, z),$$

где переменные x, y, z связаны между собой уравнением

$$g(x,\, y,\, z) = 0.$$

В этом случае вспомогательная функция Лагранжа имеет вид

$$F(x,\, y,\, z,\, \lambda) = f(x,\, y,\, z) + \lambda\, g(x,\, y,\, z).$$

Переменные x, y и z могут быть связаны двумя уравнениями связи:

$$g_1(x,\, y,\, z) = 0, \qquad g_2(x,\, y,\, z) = 0.$$

Тогда функция Лагранжа имеет вид

$$F(x,\, y,\, z,\, \lambda_1,\, \lambda_2) = f(x,\, y,\, z) + \lambda_1\, g_1(x,\, y,\, z) + \lambda_2\, g_2(x,\, y,\, z).$$

15.5. Метод наименьших квадратов

В социально-экономических науках одной из важнейших задач является задача определения аналитических зависимостей между различными величинами. Получение соответствующих формул позволяет лучше понять ситуацию и спрогнозировать как она будет меняться в будущем.

Одним из наилучших способов получения таких формул — это метод наименьших квадратов.

Изложим идею этого способа.

Пусть мы хотим установить зависимость между двумя величинами x и y. Произведем соответствующие статистические исследования и занесем их результаты в таблицу:

x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n
y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_i	$\cdots$	y_n

Требуется наилучшим образом отразить общую тенденцию зависимости y от x, исключив при этом случайные отклонения, связанные с неизбежными погрешностями статистических наблюдений. Такую зависимость стремятся представить в виде формулы $y = f(x)$.

Формулы, служащие для аналитического представления опытных данных, получили название *эмпирических формул.*

Задача нахождения эмпирических формул разбивается на два этапа. На первом этапе нужно установить вид зависимости $y = f(x)$, т. е. решить является ли она линейной, квадратичной, логарифмической или какой-либо другой. Для выбора функции $y = f(x)$ привлекаются соображения нематематического характера (теоретические предпосылки, соображения экспертов и т. п.), а также характер расположения точек (x_i, y_i) на плоскости.

Если вид функции $y = f(x)$ установлен, то переходят ко второму этапу — определению неизвестных параметров этой функции. Например, для зависимости $y = ax + b$ неизвестными параметрами являются a и b. В методе наименьших квадратов в качестве неизвестных параметров выбирают такие значения, чтобы сумма квадратов отклонений теоретических значений $f(x_i)$,

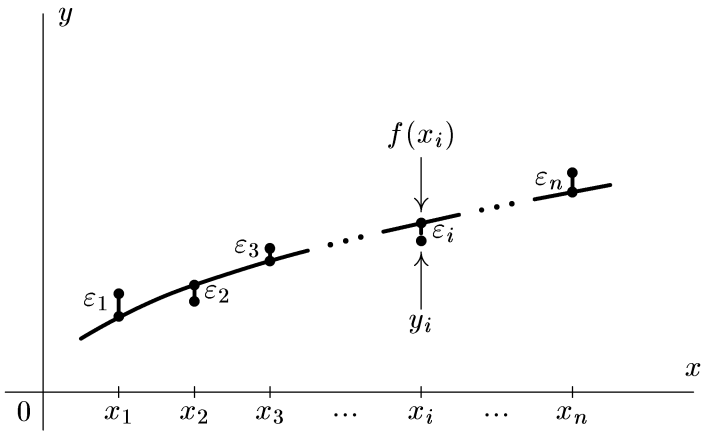


Рис. 15.4. Метод наименьших квадратов

найденных по эмпирической формуле $y = f(x)$, от соответствующих опытных значений y_i, т. е.

$$S = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2,$$

была минимальной.

Числа $f(x_i) - y_i$ будем обозначать ε_i и называть *погрешностями* (рис. 15.4).

На языке погрешностей метод наименьших квадратов состоит в следующем: нужно подобрать неизвестные параметры так, чтобы сумма квадратов погрешностей была возможно меньшей. Если эта минимальная сумма квадратов окажется малой, тогда и сами погрешности будут малыми по абсолютной величине.

Следует отметить, что выбор в качестве отклонения S эмпирических точек (x_i, y_i) от точек кривой $y = f(x)$ именно суммы квадратов погрешностей впервые предложил французский математик Лежандр. В принципе можно было взять в качестве S сумму погрешностей ε_i или сумму их абсолютных величин $|\varepsilon_i|$. Но делать это нецелесообразно, так как в первом случае $\sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i$ может быть малой или даже равняться нулю при значительном разбросе эмпирических точек, так как положительные отклонения ε_i компенсируются отрицательными. Во втором случае функция $\sum\limits_{i=1}^{n} |\varepsilon_i|$ лишена этого недостатка, однако имеет другой —

она не является дифференцируемой, что существенно затрудняет решение задачи.

Пусть в качестве функции $y = f(x)$ взята линейная функция $y = ax + b$. Задача сводится к отысканию таких параметров a и b, при которых функция

$$S = \sum_{i=1}^{n} (a\, x_i + b - y_i)^2$$

принимает наименьшее значение. Заметим, что S можно рассматривать как функцию от двух неизвестных параметров a и b. Подберем коэффициенты a и b так, чтобы функция S получила возможно меньшее значение. Для этого необходимо, чтобы соблюдались условия

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial b} = 0.$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i)x_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i) = 0.$$

После алгебраических преобразований эта система принимает вид

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) b = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i,$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Эта система называется системой нормальных уравнений. Она имеет единственное решение, так как ее определитель

$$D = n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 > 0$$

(что можно доказать методом математической индукции при $n \geqslant 2$).

Убедимся, что найденные значения дают минимум функции $S = S(a, b)$. Найдем частные производные

$$S''_{aa} = 2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = A, \quad S''_{ab} = 2 \sum_{i=1}^{n} x_i = B, \quad S''_{bb} = 2\, n = C.$$

Поскольку

$$\Delta = AB - C^2 = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 > 0$$

и

$$A = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0,$$

то согласно достаточному условию экстремума функция $S = S(a, b)$ имеет единственную точку минимума, определяемую из системы нормальных уравнений. Причем эта точка является точкой глобального минимума, поскольку она является единственной критической точкой.

Линейная зависимость. Значительный интерес представляет дифференциация по возрастным группам населения. Зная различия состава потребления в зависимости от возраста, можно предвидеть изменения спроса на основании ожидаемых изменений в составе населения. Известно, например, что потребление молока больше в тех семьях, в составе которых имеется по нескольку детей, и меньше в тех, где детей нет. Требуется определить как зависит среднедушевое потребление в семье y от количества детей x (в %).

Чтобы получить представление об изменении y в зависимости от x были собраны статистические данные, результаты которых занесены в следующую таблицу.

Группы по проценту детей	Число детей в %	Литров молока на душу
0	0	3,0
0–23	19	6,8
23–46	40	7,1
46–69	60	8,1
69–92	74	11,2
Всего	40	–

Теперь нужно найти формулу зависимости y от x. Как уже было отмечено выше, эта задача разбивается на два этапа. На первом этапе нужно установить вид зависимости $y = f(x)$, а на втором — определить неизвестные параметры этой функции.

Первый этап. Величина y выражает среднее душевое потребление в семье, т. е. отношение общего числа литров потребляемого молока к числу членов семьи. Если число детей u, а взрослых v, среднее потребление молока для детей y_u, а взрослых y_v, то общее душевое потребление составит

$$y = \frac{u\,y_u + v\,y_v}{u+v} = \frac{u\,y_u}{u+v} + \frac{v\,y_v}{u+v} = \frac{u\,y_u}{u+v} + \frac{(v+u-u)\,y_v}{u+v}.$$

Или, если относительное число детей $\dfrac{u}{u+v}$ обозначить x и выделить слагаемое y_v, то

$$y = (y_u - y_v)\,x + y_v.$$

Отсюда видно, что при данных y_u и y_v величина y представляет собой линейную функцию относительно числа детей. Это же подтверждается и графическим расположением точек (x_i, y_i).

Второй этап. Определим неизвестные параметры a и b линейной зависимости

$$y = ax + b.$$

Для этого вычислим все суммы $\sum x$, $\sum x^2$, $\sum y$, $\sum xy$.

x	y	x^2	xy
0	3,0	0	0
19	6,8	361	129,2
40	7,1	1 600	284,0
60	9,8	3 600	528,0
74	11,2	5 476	828,8
193	36,6	11 037	11 770,0

Подставим эти значения в систему нормальных уравнений:

$$193a + 5b = 36{,}9,$$

$$11037a + 193b = 1770{,}0.$$

Решив эту систему, получим:

$$a = 0{,}0964, \qquad b = 3{,}66.$$

Это дает

$$f(x) = 0{,}0964x + 3{,}66.$$

В частности, если $x = 0$ (детей нет), получаем показатель для взрослых 3,66. Если же $x = 100$ (нет взрослых), получаем показатель для детей

$$0{,}0964 \cdot 100 + 3{,}66 = 13{,}30.$$

Линейная зависимость характерна также и для других случаев. Статистические исследования показывают, например, что реальный объем потребления y (в млрд долларов, 1982 г.) в США в период за 1931–1990 гг. зависел от численности населения в США x ($120 < x < 250$ млн чел.) линейно (причем, формула зависимости, найденная методом наименьших квадратов, имеет вид: $y = -1817{,}3 + 16{,}7\,x$). Объем частного потребления y (млрд долларов, 1982 г.) от располагаемого дохода x (млрд долларов, $1600 < x < 2900$) в США в 1971–1990 гг. выражался зависимостью $y = -217{,}6 + 1{,}007\,x$.

Гиперболическая зависимость. В ряде случаев теоретический анализ приводит к выводу нелинейной зависимости различных факторов. Рассмотрим, например, зависимость себестоимости единицы продукции y от объема производства этой продукции x. Себестоимость единицы продукции рассчитывается путем деления общей суммы затрат на объем произведенной продукции. Поэтому общая сумма затрат на производство равна произведению $x\,y$. В то же время затраты на производство (как уже отмечалось выше) можно условно подразделить на две части: 1) затраты, которые возрастают более или менее пропорционально увеличению объема произведенной продукции, — *условно-переменные* расходы (затраты на сырье и материалы, на топливо и электроэнергию для технологических целей, оплата труда основных производственных рабочих и т. п.); 2) затраты, либо совершенно не зависящие от объема продукции, либо зависящие от него в незначительной степени, — *условно-постоянные расходы* (оплата труда инженерно-технических работников и служащих, расходы на содержание зданий и сооружений и другие административно-управленческие и общехозяйственные расходы).

Обозначим переменные расходы в расчете на единицу продукции через a; тогда их общая сумма составит $a\,x$. Общую сумму условно-постоянных расходов обозначим b. Тогда общая себестоимость продукции составит: $x\,y = a\,x + b$, откуда себестоимость единицы продукции будет равна: $a + \dfrac{b}{x}$.

Поскольку $b > 0$, то зависимость себестоимости единицы продукции от объема является обратной: с увеличением x себестоимость снижается. Однако это снижение не является равномерным, так как по мере увеличения x снижение y постепенно замедляется.

В случае гиперболической зависимости $y = f(x) = a + \dfrac{b}{x}$ отклонение S эмпирических точек (x_i, y_i) от точек кривой $y = f(x)$ заменяется выражением

$$S = \sum_{i=1}^{n} (a + \frac{b}{x_i} - y_i)^2.$$

Подберем коэффициенты a и b так, чтобы функция S получила возможно меньшее значение. Для этого необходимо, чтобы соблюдались условия

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial b} = 0.$$

Отсюда

$$a\,n + b \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^{n} y_i, \qquad a \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} + b \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{x_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\, y_i.$$

Решение этой системы нормальных уравнений и определяет параметры a и b.

▽ **Пример.** Производство цемента x (в сотнях тонн) и расход электроэнергии y_i (на 1 тонну цемента в год) за определенный период составили величины, приведенные в следующей таблице.

x	y	$1/x$	$1/x^2$	y/x
8,0	80	0,125	0,015625	10,000
10,0	72	0,100	0,010000	7,200
12,0	65	0,083	0,006889	5,416
13,5	70	0,074	0,005476	5,185
14,0	68	0,071	0,005041	5,857
	355	0,453	0,043031	32,658

Найти гиперболу наилучшим образом отражающую эти данные.

Решение. Система нормальных уравнений имеет здесь следующий вид:

$$5\,a + 0{,}453\,b = 355, \qquad 0{,}453\,a + 0{,}043031\,b = 32{,}658,$$

откуда

$$a = 48{,}5, \qquad b = 249.$$

Следовательно, уравнение искомой гиперболы есть

$$y = 48{,}5 + \frac{249}{x}.$$

Введем обозначения: K — полные затраты электроэнергии, a — удельные затраты на производственные нужды (пропорциональные выпуску продукции), b — расходы на производственные нужды (постоянные). Имеем

$$K = a\,x + b;$$

отсюда затраты на единицу продукции составляют:

$$y = \frac{K}{x} = a + \frac{b}{x}.$$

Из приведенного уравнения следует, что производственные расходы на единицу продукции составляют 48,5, а непроизводственные нужды — 249 квт-ч/т. ▲

Параболическая зависимость. В некоторых случаях теоретический и логический анализ показывает, что неравномерное изменение результативного признака должно иметь иной характер. Так, при недостаточном количестве осадков урожайность будет, естественно, очень низкой, а по мере увеличения их количества урожайность будет повышаться. Однако это повышение не будет беспредельным, так как для каждой культуры в данных конкретных условиях есть какое-то оптимальное количество осадков, при котором достигается наиболее высокая урожайность. По мере того как количество осадков будет приближаться к оптимальной величине, рост урожайности будет постепенно замедляться и прекратится совсем при достижении этого оптимума. Дальнейшее увеличение количества осадков может привести к тому, что они окажутся излишними и вредными, в результате чего урожайность будет снижаться. Такого рода зависимость приближенно можно выразить уравнением параболы. Аналогичный характер связи можно ожидать и в ряде других случаев, например для зависимости уровня производительности труда рабочего от его возраста.

Пусть функция

$$y = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2$$

и есть та парабола, которая отражает зависимость y от x. Естественно искать коэффициенты a_0, a_1 и a_2 такие, чтобы сумма квадратов погрешностей

$$S = \sum_{i=1}^{n}(a_0 + a_1\,x_i + a_2\,x_i^2 - y_i)^2$$

была минимальной. Дифференцируя эту сумму по очереди по переменным a_0, a_1 и a_2 и приравнивая к нулю частные производные, получаем:

$$\sum_{i=1}^{n} 2\,(a_0 + a_1\,x_i + a_2\,x_i^2 - y_i)\cdot 1 = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} 2\,(a_0 + a_1\,x_i + a_2\,x_i^2 - y_i)\cdot x = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} 2\,(a_0 + a_1\,x_i + a_2\,x_i^2 - y_i)\cdot x^2 = 0.$$

Отсюда окончательно получаем систему нормальных уравнений для параболы:

$$n\,a_0 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i,$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i\,y_i,$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\,y_i.$$

Мы привели системы нормальных уравнений только для трех видов зависимостей. В некоторых случаях теоретический анализ дает основания предполагать другие зависимости. Параметры этих зависимостей также могут быть найдены с помощью метода наименьших квадратов.

15.6. Компьютерное вычисление экстремумов и поиск параметров сглаживающей функции

Для исследования на экстремум функций как одной, так и многих переменных используется команда

`extrema(expr,constr,vars,nv)`,

где `expr` — выражение, экстремумы которого нужно найти, `constr` — ограничения, `vars` — переменные, по которым разыскивается экстремум, `nv` — имя переменной, которой будут присвоены координаты точек экстремумов. Перед обращением к функции `extrema` ее необходимо вызвать из стандартной библиотеки командой `readlib`. Приведем соответствующие примеры.

▽ **Пример 1.** Найти с помощью пакета Maple экстремум функции

$$z = 2\,x^3 + x\,y^2 + 5\,x^2 + y^2 + 1$$

(см. пример 2 на с. 309).

Решение.

```
>readlib(extrema):

>extrema(2*x^3 +x*y^2 +5*x^2 + y^2+1,{},{x,y},'z'); z;
```

$$\left\{\frac{152}{27}, 1\right\}$$

$$\left\{\{x = 0,\ y = 0\},\right.$$

$$\left\{x = -\frac{5}{3},\ y = 0\right\},$$

$$\{x = -1,\ y = 2\},$$

$$\left.\{x = -1,\ y = -2\}\right\}.$$

Сначала машина выводит значения экстремумов, а затем — стационарные точки. ▲

▽ **Пример 2.** Найти экстремум функции

$$z = 15,63 \cdot x^{0,372} \cdot (2 - x)^{0,158}$$

(см. с. 341 в параграфе «Повышение урожайности» следующей главы, где рассмотрено приложение этой задачи).

Решение.

```
>readlib(extrema):
>extrema(15.63*x^{0.372}*(2-x)^{0.158},{},x,'z'); z;
```

$$\{16.34061640\}$$

$$\{\{x = 1.403773585\}\}.$$

Последняя запись означает: $z_{\text{extr}} \approx z(1{,}4) \approx 16{,}3$. ▲

▽ **Пример 3.** Найти экстремум функции

$$z = x^2 + 6\,x - 2\,y + 1$$

при условии, что переменные x и y связаны уравнением

$$x^2 + y - 4 = 0$$

(см. пример на с. 320).

Решение.

```
>readlib(extrema):
>extrema(x^2+6*x-2\, y+1,{x^2+y-4=0},{x,y},'z'); z;
```

$$\{-10\}$$

$$\{\{y = 3, x = -1\}\}.$$

Ответ совпадает с найденным без помощи компьютера. ▲

Для обработки опытных и статистических данных в Maple имеется пакет `stats`. Он содержит в себе команду `leastsquare`, которая позволяет определять параметры различных зависимостей с помощью метода наименьших квадратов. Приведем применения этой команды.

▽ **Пример 4.** Найти методом наименьших квадратов формулу линейной зависимости y от x:

$$y = a \cdot x + b,$$

если известны пять значений переменной x и соответствующие им значения переменной y (см. с. 325):

$$x = 0,\ 19,\ 40,\ 60,\ 74, \qquad y = 3,\ 6{,}8,\ 7{,}1,\ 9{,}8,\ 11{,}2.$$

Решение. Вначале подгружается пакет `stats`:

```
>with(stats):

>fit[leastsquare[[x,y],y=a*x+b,{a,b}]]

([[0,19,40,60,74],[3,6.8,7.1,9.8,11.2]]);
```

$$y = 0{,}10232\,x + 3{,}6303.$$

Объясним, как была найдена аналитическая зависимость. Вначале был подгружен пакет `stats`, затем была введена команда `leastsquare` (метод наименьших квадратов) из подбиблиотеки `fit`, содержащей эту команду, введены переменные, формула зависимости. После в фигурных скобках написаны обозначения параметров, которые требуется найти, далее в квадратных скобках вводятся эмпирические значения переменных x и y.

Ответ $y = 0{,}10232\,x + 3{,}6303$, полученный компьютером несколько отличается от зависимости $y = 0{,}0964\,x + 3{,}66$, найденной без помощи компьютера. Связано это с ошибками ручного счета, накапливаемых при округлениях и недостаточно большим набором эмпирических данных. ▲

▽ **Пример 5.** Найти методом наименьших квадратов формулу гиперболической зависимости y от x:

$$y = a + b/x,$$

если известны пять значений переменной x и соответствующие им значения переменной y (см. с. 328):

$$x = 8,\ 10,\ 12,\ 13{,}5,\ 14, \qquad y = 80,\ 72,\ 65,\ 70,\ 68.$$

Решение.

```
>with(stats):

>fit[leastsquare[[x,y],y=a+b/x,{a,b}]]

([[8,10,12,13.5,14],[80,72,65,70,68]]);
```

$$y = 50{,}855 + \frac{221{,}94}{x}.$$

Заметим, что ответ, полученный компьютером, несколько отличается от зависимости $y = 48{,}5\,x + \dfrac{249}{x}$, найденной без помощи компьютера. ▲

▽ **Пример 6.** Найти методом наименьших квадратов формулу параболической зависимости y от x:

$$y = a\,x^2 + b\,x + c,$$

если известны четыре значений переменной x и соответствующие им значения переменной y:

$$x = 10,\ 15,\ 17,\ 20, \qquad y = 3,\ 4,\ 5,\ 6.$$

Решение.

```
>with(stats):

>fit[leastsquare[[x,y],y=a+b/x,{a,b}]]

([[10,15,17,20],[3,4,5,6]]);
```

$$y = \frac{41}{2810}\,x^2 - \frac{367}{2810}\,x + \frac{794}{281}. \quad \blacktriangle$$

Заметим, что коэффициент при x^2 мал, поскольку эта зависимость отличается от линейной незначительно. ▲

Пакет позволяет находить аналитические зависимости не только между двумя переменными, но и между тремя, четырьмя и большим числом переменных. Рассмотрим соответствующие примеры.

▽ **Пример 7.** Найти методом наименьших квадратов формулу линейной зависимости z от x и y:

$$z = a\,x + b\,y + c,$$

если известны четыре значений переменной x, четыре значений переменной y и соответствующие им значения переменной z:

$$x = 1,\ 2,\ 3,\ 5, \qquad y = 2,\ 4,\ 6,\ 8, \qquad z = 3,\ 5,\ 7,\ 10.$$

Решение.

```
>with(stats):

>fit[leastsquare[[x,y,z],y=a*x+b*y+c,{a,b,c}]]

([[1,2,3,5],[2,4,6,8],[3,5,7,10]]);
```

$$z = x + \frac{1}{2}\,y + 1. \quad \blacktriangle$$

Если некоторые эмпирические данные повторяются, то это должно учитываться при поиске зависимости. Эмпирические данные следующего примера мало отличаются от данных примера 7, но среди них есть повторяющиеся. Поэтому параметры линейной зависимости a, b, c будут отличаться от параметров примера 7.

▽ **Пример 8.** Найти методом наименьших квадратов формулу линейной зависимости z от x и y:

$$z = a\,x + b\,y + c,$$

если известны значения переменных x и y и соответствующие им значения переменной z:

$$x = 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 5,\ 5,$$

$$y = 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 8,\ 8,$$

$$z = 3,\ 5,\ 7,\ 10,\ 15,\ 15.$$

Решение.

```
>with(stats):

>fit[leastsquare[[x,y,z],y=a*x+b*y+c,{a,b,c}]]

([[1,2,3,5,5,5],[2,4,6,8,8,8],[3,5,7,10,15,15]]);
```

$$z = \frac{13}{3}\,x - \frac{7}{6}\,y + 1. \quad \blacktriangle$$

С помощью пакета можно находить не только линейные, параболические и гиперболические, но и любые другие аналитические зависимости (экспоненциальные, логарифмические, степенные и т. п.). Нужно лишь после команды `leastsquare` поставить соответствующую формулу.

С помощью пакета `stats` можно также построить графики теоретических зависимостей с указанием точек, соответствующих эмпирическим данным, а также изображать данные в виде гистограмм, вычислять средние и т. д.

Математики — своего рода французы: когда говоришь с ними, они переводят твои слова на свой язык, и вот сразу получается нечто совершенно иное.

И. Гете

Глава 16
Использование понятия функции многих переменных в социально-экономической сфере

16.1. Линейно-однородные производственные функции

При моделировании экономики страны в качестве основных ресурсов используют затраты труда L и объем производственных фондов K. Национальный доход выступает в роли результата деятельности экономики. Поэтому в макроэкономике Y рассматривают как функцию двух независимых переменных K и L:

$$Y = F(K,\, L).$$

При моделировании экономической деятельности отдельного предприятия, цеха и т. п. через Y обозначают объем выпускаемой продукции.

Как в макроэкономике, так и в микроэкономике часто предполагают, что при отсутствии хотя бы одного ресурса производство невозможно, т. е.

$$F(0,\, L) = 0, \qquad F(K,\, 0) = 0.$$

Считают также, что при пропорциональном росте используемых ресурсов производства объем производства увеличивается в такое же число раз. Математически это можно записать так:

$$\boxed{F(m\,K,\, m\,L) = m\,F(K,\, L), \qquad m > 0.} \tag{16.1}$$

Так, если $m = 2$ (вдвое увеличены затраты каждого ресурса), то выпуск увеличивается в два раза.

Функции, обладающие свойством (16.1), называют *линейно-однородными.*

Наиболее широкое применение имеют две из линейно-однородных функций — *функция Кобба–Дугласа* и *функция с постоянными пропорциями.*

Функция Кобба–Дугласа. Функцией Кобба–Дугласа называется производственная функция следующего вида

$$\boxed{Y = Y_0\, K^{\alpha}\, L^{1-\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1.} \tag{16.2}$$

ДУ́ГЛАС (Douglas) Пол Говард (1892–1976) — американский экономист. В 1947 г. совместно с математиком Ч. Коббом разработал производственную функцию, получившую впоследствии название функции Кобба–Дугласа. Функция Кобба–Дугласа установила математическую зависимость роста национального дохода от изменений двух факторов производства — капитала и труда. Дуглас совместно с Коббом провел одно из первых эконометрических исследований динамики национального дохода, использовав американскую статистику 20–30-х гг. XX в.

КОББ (Cobb) Чарльз — американский математик, разработавший совместно с П. Дугласом концепцию производственной функции.

При $K = 0$ результат функционирования экономического объекта

$$Y = Y_0 \cdot 0 \cdot L^{1-\alpha} = 0.$$

К такому же выводу приходим и при $L = 0$, т. е. оба ресурса абсолютно необходимы.

Если в функции Кобба–Дугласа переменные K и L увеличить в m раз, то в такое же количество раз возрастет и Y.

Действительно,

$$F(m\,K,\, m\,L) = Y_0\,(m\,K)^{\alpha}\,(m\,L)^{1-\alpha} =$$

$$= Y_0\, m^{\alpha}\, K^{\alpha}\, m^{1-\alpha}\, L^{1-\alpha} = m\,F(K,\, L).$$

Знание параметров Y_0 и α функции Кобба–Дугласа позволяет делать приближенные прогнозы значений национального дохода. На основании данных по экономике СССР, опубликованных за 1960–1985 гг., были рассчитаны параметры функции Кобба–Дугласа: $Y_0 = 1{,}022$, $\alpha = 0{,}5382$. При подстановке фактических значений K и L за 1986 год ошибка прогноза составила 3% .

Для увеличения точности прогноза в функцию Кобба–Дугласа иногда вводят дополнительный множитель $e^{p\,t}$, который характеризует темп прироста выпуска под влиянием научно-технического прогресса:

$$Y = Y_0\, e^{p\,t}\, K^{\alpha}\, L^{\beta}.$$

Требование $\alpha + \beta = 1$ здесь является необязательным. Эта функция называется функцией Кобба–Дугласа с учетом научно-технического прогресса. На основании данных по экономике СССР, опубликованных за 1960–1985 гг., функция имела вид:

$$Y = 1{,}038\, e^{0{,}0294\,t}\, K^{0{,}9749}\, L^{0{,}2399}.$$

Функция с постоянными пропорциями. Функцию с постоянными пропорциями выбирают тогда, когда один из ресурсов производства дефицитен, а второй избыточен. Такая функция содержит в себе понятие рациональной пропорции между двумя ресурсами. Этим объясняется ее использование в балансовых моделях планирования.

Простейшая функция с постоянными пропорциями задается с помощью формулы

$$\boxed{Y = F(K,\, L) = Y_0\, \min\left\{\frac{K}{K_0},\, \frac{L}{L_0}\right\}.}$$

Как видно из формулы, если один из ресурсов, например L, избыточен, то его увеличение не является разумным, так как оно не отразится на величине Y, а приводит лишь к дополнительным расходам.

Свое название функция получила так потому, что для увеличения Y и недопущения лишних расходов необходимо увеличивать оба ресурса в постоянной пропорции.

Задача 1. Показать, что функция с постоянными пропорциями является линейно однородной, т. е. удовлетворяет соотношению

$$F(m\,K,\, m\,L) = m\,F(K,\, L), \qquad m > 0.$$

Задача 2. Показать, что функция с постоянными пропорциями удовлетворяет соотношениям

$$F(0,\, m\,L) = F(K,\, 0) = 0.$$

16.2. Многофакторные производственные функции и предельная производительность

В предыдущем параграфе предполагалось, что производственная функция является линейно-однородной функцией двух переменных. Такая функция — лишь частный случай производственной функции. В общем случае *производственной функцией* называется экономико-математическое выражение зависимости результатов производственной деятельности от обусловивших эти результаты показателей.

Предполагают, что объем производства может зависеть не от двух, а от большего числа переменных x_1, x_2, ...x_n. Например, можно считать, что национальный доход зависит не от двух переменных: трудовых ресурсов и производственных фондов, а от трех: трудовых ресурсов, производственных фондов и природных ресурсов.

Производственные функции, в которых устанавливается зависимость объема производства продукции от наличия или потребления ресурсов, называют также *функциями выпуска*, а функции, в которых рассматривается зависимость затрат на производство от выпуска продукции, — *функцией производственных затрат.*

Ранее мы предполагали, что производственная функция линейно-однородна. В общем же случае допускается, что производственная функция может быть просто однородной. Требование линейности необязательно.

Функция $F = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *однородной степени* $k > 0$, если

$$F(m\,x_1, m\,x_2, \ldots, x_n) = m^k\,F(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad k > 0.$$

Это равенство означает, что с ростом масштаба производства в m раз, объем выпуска возрастает в m^k раз. При $k > 1$ имеем рост эффективности производства. При $k < 1$ — падение эффективности. При $k = 1$ (линейно-однородная функция) имеем постоянную эффективность производства при росте его масштаба.

▽ **Пример 1.** Показать, что функция

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

однородна.

Решение. Если m — произвольное число, то

$$F(m\,x,\ m\,y,\ m\,z) = (m\,x)^2 + (m\,y)^2 + (m\,z)^2 = \\ = m^2\,x^2 + m^2\,y^2 + m^2\,z^2 = m^2\,F(x,\ y,\ z).$$

Следовательно, заданная функция есть однородная функция второй степени. ▲

▽ **Пример 2.** Показать, что функция

$$F(x,\ y) = \frac{x+y}{x^2-y^2}$$

однородна.

Решение. Если m — произвольное число, то

$$F(m\,x,\ m\,y) = \frac{m\,x + m\,y}{(m\,x)^2 - (m\,y)^2} = \frac{x+y}{m\,(x^2-y^2)} = m^{-1}\,F(x,\ y).$$

Следовательно, заданная функция есть однородная функция минус первой степени. ▲

Функция

$$F(x,\ y) = 3 + x + y$$

не является однородной, поскольку для нее не выполняется соответствующее свойство.

Для производственной функции

$$Y = F(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$$

отношение F/x_i выражает среднюю производительность (отдачу, эффективность) i-го ресурса, т. е. величину общественного продукта на единицу i-го ресурса. А частная производная

$$F'_{x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} F}{\Delta x_i}$$

характеризует предельную производительность (отдачу, эффективность) i-го ресурса и показывает приближенно изменение величины общественного продукта при изменении i-го ресурса на единицу (при постоянстве других ресурсов).

В экономике иногда используют следующую теорему.

Теорема (Эйлера). *Если функция* $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *есть однородная функция* k*-й степени, то*

$$\boxed{x_1 F'_{x_1} + x_2 F'_{x_2} + \ldots + x_n F'_{x_n} = k F.}$$

Из теоремы Эйлера следует, что для линейно-однородной функции ($k = 1$) Кобба–Дугласа выполняется соотношение

$$K \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} + L \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = F(K, L).$$

Вывод: Произведение затрат живого труда на предельную производительность живого труда плюс произведение затрат овеществленного труда на предельную производительность овеществленного труда равняется полной стоимости продукции.

16.3. Повышение урожайности

В предыдущей главе были рассмотрены методы поиска наибольших и наименьших значений функции двух переменных в замкнутой области (с. 316). Рассмотрим приложение данных задач к задаче повышения урожайности. Зависимость урожайности кукурузы z (ц/га) от затрат на удобрения x (руб./га) и затрат на семена y (руб/га) выражается следующей формулой (в ценах 1970 г.) [1]:

$$z = 15{,}63\, x^{0{,}372}\, y^{0{,}158}, \qquad x > 0, \quad y > 0.$$

Рассматриваемая производственная функция является произведением двух степенных функций. Она достигает минимума, равного нулю в точках $P(0, y)$ и $Q(x, 0)$, где x и y — любые положительные числа, и возрастает с возрастанием x и y. О максимуме можно говорить только тогда, когда по условиям производства необходимо учитывать дополнительные ограничения.

Определим при каких значениях x и y урожайность достигает наибольшего значения, если суммарные затраты на приобретение удобрений и семян $x + y$ равны 2 (соответствует ценам 1970 г.) [2].

[1] См.: *Браславец М. Е.* Экономико-математические методы в организации и планировании сельскохозяйственного производства. М.: 1971.

[2] См. [16, с. 196].

Учитывая ограничения $x + y = 2$, делаем вывод, что область определения функции $z = z(x,\ y)$ — треугольник, заданный неравенствами

$$x > 0, \qquad y > 0, \qquad x + y \leqslant 2.$$

Наибольшее значение функции достигается на границе области.

Выразим y через x из равенства $x + y = 2$ и подставим полученное значение в выражения для производственной функции. Имеем

$$z = 15{,}63\, x^{0{,}372}\,(2 - x)^{0{,}158}.$$

Исследуем полученную функцию на экстремум:

$$z'_x = 15{,}63\,\Big(0{,}372\, x^{-0{,}628}\,(2 - x)^{0{,}158} - \\ - x^{0{,}372}\, 0{,}158\,(2 - x)^{-0{,}842}\Big) = \\ = 15{,}63\, x^{0{,}372}\,(2 - x)^{-0{,}842}\,\Big(0{,}372\, x^{-1}\,(2 - x) - 0{,}158\Big).$$

Имеем три критические точки $x_1 = 0$ $\Big($соответствует случаю, когда множитель $x^{0{,}372} = 0\Big)$, $x_2 = 1{,}404$ $\Big(0{,}372\, x^{-1}\,(2 - x) - 0{,}158 = 0\Big)$, $x_3 = 2$ $\Big((2 - x)^{-0{,}842} = \infty\Big)$, причем $z_1 = 0$ при $x_1 = 0$, $z_2 = 16{,}34$ при $x_2 = 1{,}404$, $z_3 = 0$ при $x_3 = 2$.

Наибольшим среди найденных трех значений z_i является $z_2 = 16{,}34$.

Таким образом, наибольшая урожайность кукурузы будет достигнута при затратах на удобрения в размере 1,404 руб. и затратах на семена в размере 0,596 руб.

16.4. Рост производства и частные производные

Рассмотрим, как связаны между собой рост производства и знаки частных производных.

Как известно, если производная функции положительна, то сама функция возрастает. То же можно сказать и о частных производных. Если, например, $z_x(x,\ y) > 0$, то это означает, что функция $z(x, y)$ возрастает, если переменная y неизменна.

Если производственная функция $F(K,\ L)$ непрерывно дифференцируема, то естественно считать, что

$$\boxed{F'_K(K,\ L) > 0, \qquad F'_L(K,\ L) > 0,} \tag{16.3}$$

поскольку рост количества используемых фондов K и рост числа трудящихся L приводят к росту национального дохода $Y = F(K, L)$.

Проверим это свойство для функции Кобба–Дугласа. По правилу дифференцирования степенной функции имеем

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = Y_0\,\alpha\,K^{\alpha-1}\,L^{1-\alpha},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = Y_0\,(1-\alpha)\,K^{\alpha}\,L^{-\alpha}.$$

Поскольку $K > 0$, $L > 0$, $0 < \alpha < 1$, из выражений для первых частных производных функции Кобба–Дугласа вытекает (16.3):

$$\frac{\partial Y}{\partial K} > 0, \qquad \frac{\partial Y}{\partial L} > 0.$$

Вывод: Первые частные производные производственной функции положительны.

А каковы знаки вторых частных производных производственной функции?

Найдем вторые частные производные для функции Кобба–Дугласа:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} = Y_0\,\alpha\,(\alpha-1)\,K^{\alpha-2}\,L^{1-\alpha},$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} = Y_0\,(1-\alpha)\,(-\alpha)\,K^{\alpha}\,L^{-\alpha-1},$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K\,\partial L} = Y_0\,\alpha\,(1-\alpha)\,K^{\alpha-1}\,L^{-\alpha},$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial L\,\partial K} = Y_0\,\alpha\,(1-\alpha)\,K^{\alpha-1}\,L^{-\alpha}.$$

Поскольку $K > 0$, $L > 0$, $0 < \alpha < 1$, все множители, за исключением $(\alpha - 1) < 0$ и $(-\alpha) < 0$ в предыдущих равенствах, положительны. Поэтому

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} < 0,$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} < 0,$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K\,\partial L} > 0,$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial L\,\partial K} > 0.$$

Что означают эти неравенства? Напомним, что если вторая производная положительна, то график функции одной переменной является выпуклым вниз, а если вторая производная отрицательна, то график направлен выпуклостью вверх. Знак второй производной величины показывает рост или убывание предельной величины. Если вторая производная производственной функции (одной переменной) положительна, то эффективность ресурса растет, если отрицательна, эффективность падает. Знаки производных $\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2}$ и $\frac{\partial^2 Y}{\partial L^2}$ отрицательны. Это означает, что эффективность трудовых и производственных ресурсов убывает.

Это вполне согласуется с реальными процессами экономики. Наблюдения показывают, что в условиях экстенсивного роста производства (увеличивается объем производства без изменения технологии) наращивание затрат лишь одного производственного ресурса приводит к снижению его эффективности. Так, если увеличивать число станков, обслуживаемых одним рабочим, не изменяя технологические характеристики станков, то на каждом новом станке будет производиться все меньшее дополнительное количество продукции (при неизменном числе рабочих, они просто не будут поспевать обслуживать все станки). То же происходит, если увеличивать количество рабочих, оставляя неизменным количество станков. Эффективность каждого рабочего будет падать (из-за увеличения простоев).

Таким образом, неравенства

$$\boxed{\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} < 0, \qquad \frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} < 0}$$

вполне естественны.

Вывод: Вторые частные производные $\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2}$ и $\frac{\partial^2 Y}{\partial L^2}$ производственной функции отрицательны.

Увеличение лишь одного производственного ресурса приводит к снижению его эффективности. Однако, если увеличивать

все ресурсы, то можно добиться увеличения эффективности каждого ресурса. Математически это можно записать следующим образом:

$$\boxed{\frac{\partial^2 Y}{\partial K\,\partial L} = \frac{\partial^2 Y}{\partial L\,\partial K} > 0.}$$

Вывод: Вторые смешанные частные производные производственной функции положительны.

16.5. Линии постоянного выпуска и предельные показатели экономики

Линии постоянного выпуска. Напомним (с. 280), что множество точек плоскости называется *линией уровня* функции

$$z = f(x,\, y),$$

если координаты этих точек удовлетворяют уравнению

$$f(x,\, y) = C,$$

где C — постоянная.

Линии уровня функции $z = x^2 + y^2$ — концентрические окружности

$$x^2 + y^2 = C$$

радиуса $R = \sqrt{C}$ с центром в начале координат.

Пусть процесс производства описывается с помощью двухфакторной производственной функции $z = f(x,\, y)$. Тогда равенство

$$f(x_0,\, y_0) = C$$

означает, что при затратах ресурсов в объемах

$$x = x_0, \qquad y = y_0,$$

выпуск продукции составляет C единиц (в натуральном или стоимостном выражении). Множество точек x и y, удовлетворяющих равенству

$$f(x,\, y) = f(x_0,\, y_0) = C,$$

выражает соответствующие затраты ресурсов, при которых обеспечивается выпуск в объеме C. Таким образом, линия уровня производственной функции описывает такие затраты ресурсов,

при которых обеспечивается один и тот же выпуск C. Поэтому линии уровня производственных функций называют *линиями постоянного выпуска* или *изоквантами* (от греческого слова «изо» — равный и немецкого Quantum — «количество»).

Предельная норма замещения. Уравнение линии постоянного выпуска производственной функции

$$z = z(x_1,\, x_2)$$

имеет вид

$$f(x_1,\, x_2) = C.$$

Продифференцируем его. Получим

$$dz = dC = 0,$$

а значит,

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}\,\Delta x_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2}\,\Delta x_2 = 0.$$

Отсюда выразим отношения приращений затрат ресурсов и обозначим их соответственно γ_{21} и γ_{12}:

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = -\,\frac{\dfrac{\partial z}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial z}{\partial x_2}} = \gamma_{21},$$

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = -\,\frac{\dfrac{\partial z}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial z}{\partial x_1}} = \gamma_{12}.$$

Величина γ_{ij} называется коэффициентом эквивалентной заменяемости ресурсов или *предельной нормой замещения*. Она показывает, какое количество одного ресурса может быть высвобождено при увеличении затрат другого на единицу. Ясно, что числа γ_{ij} и γ_{ji} обратны друг другу.

В предыдущем параграфе было показано, что предельные производительности ресурсов $\dfrac{\partial z}{\partial x_i}$ положительны, поэтому

$$\boxed{\gamma_{ij} \leqslant 0.}$$

Для функции Кобба–Дугласа

$$Y = Y_0\, K^{\alpha}\, L^{1-\alpha},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = Y_0\, \alpha\, K^{\alpha-1}\, L^{1-\alpha} = \frac{\alpha}{K}\, Y,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = Y_0\, (1-\alpha)\, K^{\alpha}\, L^{-\alpha} = \frac{1-\alpha}{L}\, Y.$$

Отсюда

$$\gamma_{KL} = -\frac{1-\alpha}{\alpha}\,\frac{K}{L},$$

$$\gamma_{LK} = -\frac{\alpha}{1-\alpha}\,\frac{L}{K}.$$

Вывод: Для производственной функции Кобба–Дугласа предельная норма γ_{KL} замещения прямо пропорциональна фондовооруженности труда K/L, а предельная норма замещения γ_{LK} пропорциональна трудоемкости L/K.

Коэффициенты эластичности выпуска по затратам ресурсов. Пусть аргумент x_1 функции $z = f(x_1,\, x_2)$ получил приращение Δx_1, а значение x_2 осталось прежним. Изменение значения функции выражается частным приращением по x_1:

$$\Delta_{x_i} z = f(x_1 + \Delta x_1,\, x_2) - f(x_1,\, x_2).$$

Составим относительные приращения $\dfrac{\Delta x_1}{x_1}$ и $\dfrac{\Delta_{x_1} z}{z}$.

Отношение относительного приращения функции к относительному приращению аргумента x_1, равное

$$\left(\frac{\Delta_{x_1} z}{z}\cdot 100\%\right) : \left(\frac{\Delta x_1}{x_1}\cdot 100\%\right),$$

показывает, на сколько в среднем изменится значение функции при увеличении x_1 на 1% (т. е. от x_1 до $x_1 + 0{,}01\, x_1$).

Найдем предел этого отношения при $\Delta x_i \to 0$:

$$E_1 = \lim_{\Delta x_i \to 0} \left(\left(\frac{\Delta_{x_1} z}{z}\cdot 100\%\right) : \left(\frac{\Delta x_1}{x_1}\cdot 100\%\right)\right) =$$

$$= \frac{x_1}{z} \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_1} z}{\Delta x_1} = \frac{x_1}{z}\cdot z'_{x_1}.$$

Аналогично

$$E_2 = \frac{x_2}{z} \cdot z'_{x_2}.$$

E_1 и E_2 называются *коэффициентами эластичности выпуска* по первому и второму ресурсу соответственно.

Коэффициенты E_i показывают, на сколько процентов приблизительно изменится значение функции (величина выпуска), если затраты соответствующего ресурса увеличили на один процент, оставив неизменными затраты другого ресурса.

Поскольку

$$E_i = \frac{x_i}{z} \cdot z'_{x_i} = z'_{x_i} : \frac{z}{x_i},$$

отсюда следует

Вывод: Коэффициент эластичности E_i производственной функции $z = f(x_1,\, x_2)$ равен отношению предельной производительности z'_{x_i} соответствующего ресурса к его средней производительности $\dfrac{z}{x_i}$.

Из этого вывода следует, что равенство единице коэффициента эластичности выпуска по i-му ресурсу означает совпадение предельной и средней производительности этого ресурса:

$$E_i = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{z}{x_i} = \frac{\partial z}{\partial x_i}.$$

Задача. Показать, что для функции Кобба–Дугласа

$$E_K = \alpha, \qquad E_L = 1 - \alpha.$$

16.6. Экономический смысл дифференциала производственной функции

Пусть функция $z = f(x_1,\, x_2)$ выражает зависимость стоимости выпущенной продукции фирмы от количества затраченных ресурсов x_i.

Частный дифференциал $d_{x_i} z = \dfrac{\partial z}{\partial x_i}\,\Delta x_i$, являясь произведением предельной производительности $\dfrac{\partial z}{\partial x_i}$ на его дополнительные затраты Δx_i, дает приближенное значение стоимости,

произведенной за счет увеличения x_i на Δx_i. Тогда полный дифференциал

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1}\,\Delta x_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2}\,\Delta x_2$$

приближенно выражает изменение выпуска продукции Δz при небольших изменениях затрат обоих ресурсов.

Если P_1 — цена единицы первого ресурса (скажем, меди), а P_2 — цена единицы второго ресурса (например, серебра), то затраты на приобретение дополнительного количества меди Δx_1 составят $P_1\Delta x_1$ денежных единиц, а на приобретение дополнительного количества серебра Δx_1 составят $P_1\Delta x_1$. Следовательно, $P_1\,\Delta x_1 + P_2\,\Delta x_2$ — сумма затрат на дополнительное приобретение ресурсов. Производство выгодно только тогда, когда дополнительно произведенная стоимость превосходит затраты, связанные с ее созданием, т. е.

$$dz > P_1\,\Delta x_1 + P_2\,\Delta x_2$$

Вывод: Производство выгодно только тогда, когда дифференциал произведенной стоимости больше суммарных затрат.

Последнее неравенство можно записать в следующей форме:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}\,\Delta x_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2}\,\Delta x_2 > P_1\,\Delta x_1 + P_2\,\Delta x_2.$$

Это неравенство выполняется лишь при условии, что

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x_1} - P_1\right)\Delta x_1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2} - P_2\right)\Delta x_2 > 0.$$

Так как $\Delta x_1 > 0$ и $\Delta x_2 > 0$, последнее неравенство заведомо выполнено в случае, когда

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} - P_1 \geqslant 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial x_2} - P_2 \geqslant 0,$$

причем хотя бы одно из этих неравенств является строгим.

Вывод: Если цены ресурсов не превосходят их предельных производительностей, то убытков при их приобретении не будет.

16.7. Максимизация прибыли от производства товаров разных видов

В экономике бывает важно определить в каком соотношении следует выпускать различные товары, чтобы получить максимальную прибыль от их продажи.

Решим одну из задач подобного рода. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — количества n различных производимых товаров. Будем предполагать, что товары x_i продаются по фиксированным ценам P_i и моментально реализуются. Затраты на производство этих товаров задаются функцией издержек

$$C = C(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Тогда функция прибыли от реализации товаров является функцией от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которая вычисляется по формуле

$$\Pi = \Pi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = P_1 x_1 + P_2 x_2 + \ldots + P_n x_n - C(x_1, x_2, \ldots, x_n). \quad (16.4)$$

Спрашивается: какое количество каждого товара нужно производить, чтобы иметь наибольшую прибыль, от реализации всех товаров?

Для того чтобы ответить на этот вопрос нужно найти наибольшее значение функции П. Одним из естественных условий при которых ищется экстремум, является следующее: $x_i \geqslant 0$ (количество произведенных товаров не может быть отрицательным).

▽ **Пример 1.** Пусть производится два вида товаров, обозначим их количества x и y. Пусть цены на эти товары соответственно $P_1 = 16$ и $P_2 = 14$, а функция затрат

$$C = x^2 + 3xy + y^2.$$

Требуется ответить на вопрос: Какое количество обоих видов товаров нужно произвести, чтобы иметь наибольшее значение прибыли?

Решение. Согласно формуле (16.4) прибыль выражается функцией

$$\Pi(x, y) = 16x + 14y - (x^2 + 3xy + y^2).$$

Требуется найти наибольшее значение П при условиях

$$x \geqslant 0, \qquad y \geqslant 0 \quad (16.5)$$

(количество произведенных товаров не может быть отрицательным).

Необходимые условия локального экстремума приводят к системе алгебраических уравнений

$$\Pi'_x = 16 - 2\,x - 3\,y = 0, \qquad \Pi'_y = 14 - 3\,x - 2\,y = 0,$$

решением которой являются значения $x = 2$, $y = 4$. Поскольку в стационарной точке

$$\Pi''_{xx} = -2 < 0, \qquad \Pi''_{xx}\,\Pi''_{yy} - P''_{xy} = 13 > 0,$$

то согласно достаточному условию локального экстремума найденная стационарная точка определяет локальный максимум функции прибыли, причем $\Pi(2, 4) = 44$.

Однако наибольшее значение в квадранте (16.4) достигается на его границе. Действительно, при $x = 0$ и $y = 0$ имеем соответственно:

$$\Pi(0, y) = 14\,y - y^2, \quad \Pi(x, 0) = 16\,x - x^2.$$

первая функция имеет максимум при $y = 7$, вторая — при $x = 8$. При этом

$$\Pi(0, 7) = 49, \qquad \Pi(8, 0) = 64.$$

Таким образом, наибольшее значение достигается при $x = 8$ и $y = 0$. Следовательно, второй товар лучше вообще не производить. ▲

Наибольшее значение в задачах такого рода может достигаться и внутри квадранта (16.4).

Задача. Пусть производится два вида товаров, обозначим их количества x и y. Пусть цены на эти товары соответственно $P_1 = 8$ и $P_2 = 10$, а функция затрат

$$C = x^2 + x\,y + y^2.$$

Требуется определить какое количество обоих видов товаров нужно произвести, чтобы иметь наибольшее значение прибыли.

Ответ: $x = 2$, $y = 4$, $\Pi_{\max}(2, 4) = 28$.

Вывод: В одних случаях выгодно производить лишь один товар из всего ассортимента выпускаемой продукции, в других — все товары, но в определенной пропорции. Пропорция зависит от цен на товары и функции затрат.

Мы рассматриваем задачу максимизации прибыли от производства товаров разных видов. Продемонстрируем теперь применение к этой задаче критерия Сильвестра (с. 312) и достаточных условий экстремума, сформулированных с помощью квадратичных форм (с. 315).

▽ **Пример 2.** Пусть производится три вида товаров, обозначим их количества x, y и z. Пусть цены на эти товары соответственно $P_1 = 7$, $P_2 = 8$ и $P_3 = 9$, а функция затрат

$$C = x^2 + y^2 + z^2 + x\,y + x\,z + y\,z.$$

Требуется определить: какое количество обоих видов товаров нужно произвести, чтобы иметь наибольшее значение прибыли.

Решение. Согласно формуле (16.4) прибыль выражается функцией

$$\Pi(x, y) = 7\,x + 8\,y + 9\,z - (x^2 + y^2 + z^2 + x\,y + x\,z + y\,z).$$

Требуется найти наибольшее значение Π при естественных ограничениях:

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0. \tag{16.6}$$

Необходимые условия локального экстремума приводят к системе алгебраических уравнений

$$\Pi'_x = 7 - 2\,x - y - z = 0,$$
$$\Pi'_y = 8 - x - 2\,y - z = 0,$$
$$\Pi'_y = 9 - x - y - 2\,z = 0,$$

решением которой являются значения $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. Поскольку в стационарной точке

$$\Pi''_{xx} = \Pi''_{yy} = \Pi''_{zz} = -2,$$
$$\Pi''_{xy} = \Pi''_{xz} = P''_{yz} = -1,$$

то гессиан имеет вид

$$\det(H) = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}.$$

При этом главные миноры соответствующей квадратичной формы:

$$\Delta_1 = -2 < 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 > 0,$$

$$\Delta_3 = \det(H) = -4 < 0.$$

Отсюда согласно достаточному условию локального экстремума найденная стационарная точка определяет локальный максимум функции прибыли. Причем, $\Pi(1,2,3) = 25$. Значения функции прибыли на границе тела (16.6) меньше 25. Действительно, наибольшее значение функции прибыли $\Pi(x,y,z)$ при $x = 0$ равно $73/3 \approx 24{,}33$, при $y = 0$ равно приблизительно 22,33, а при $z = 0$ равно 19.

Таким образом, наибольшее значение достигается при $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. Следовательно, товары в данном случае лучше производить в соотношении 1:2:3. ▲

16.8. Экономия ресурсов

В предыдущей главе (с. 305) были рассмотрены методы поиска экстремумов функции двух переменных. В настоящем параграфе рассмотрены некоторые приложения этих задач к задачам экономии ресурсов.

▽ **Пример 1.** Рассчитать размеры параллелепипеда так, чтобы при заданном объеме $V = 1\text{м}^3$ площадь его поверхности была минимальной. В качестве приложения эту задачу можно сформулировать иначе: рассчитать размеры коробки так, чтобы на ее изготовление ушло наименьшее количество материала.

Решение. Обозначим через x и y размеры основания, тогда высота h вычислится из соотношения $1 = x\,y\,h$, т. е. $h = \dfrac{1}{xy}$. Составим функцию площади

$$S = 2\,x\,y + 2\,\frac{y}{xy} + 2\,\frac{x}{xy} = 2\,x\,y + 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right), \quad x \neq 0,\ y \neq 0.$$

Можно предположить, что существуют такие x и y, при которых S достигает наименьшего значения. Задача состоит в том, чтобы найти эти числа.

Исследуем на экстремум функцию

$$S = S(x,\, y) = 2\,x\,y + 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

двух переменных x и y (если бы в условии задачи было указано, что основание — квадрат, то S была бы функцией лишь одной переменной):

1) Найдем частные производные:

$$S'_x(x,\, y) = 2\,y - \frac{2}{x^2},$$

$$S'_y(x,\, y) = 2\,x - \frac{2}{y^2}.$$

2) Приравниваем к нулю частные производные

$$y - \frac{1}{x^2} = 0, \qquad x - \frac{1}{y^2} = 0.$$

Подставим $y = 1/x^2$, найденное из первого уравнения, во второе уравнение. Имеем

$$y = \frac{1}{x^2}, \qquad x - x^4 = 0.$$

На множестве действительных чисел эта система уравнений имеет одно решение:

$$x = 1, \qquad y = 1, \qquad h = 1.$$

3) Найдем частные производные второго порядка:

$$S''_{xx} = \frac{4}{x^3}, \qquad A = \frac{4}{1^3}, \qquad A = 4 > 0,$$

$$S''_{yy} = \frac{4}{y^3}, \qquad C = \frac{4}{1^3}, \qquad C = 4,$$

$$S''_{xy} = 2, \qquad B = 2,$$

$$\Delta = A\,C - B^2 = 12 > 0.$$

Так как $\Delta > 0$, $A > 0$, то в точке $(1,\, 1)$ функция имеет минимум:

$$S_{\min} = S(1,\, 1) = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1}\right) = 6 \ \ (\text{м}^2). \quad \blacktriangle$$

▽ **Пример 2.** Определить размеры прямоугольного бассейна данного объема V, чтобы на облицовку (дна и стен) потребовалось наименьшее количество материала.

Решение. Обозначим через x и y размеры основания, тогда высота h вычислится из соотношения $V = x\,y\,h$, т. е. $h = V/(xy)$. Составим функцию площади

$$S = xy + \frac{2yV}{xy} + \frac{2xV}{xy} = xy + 2V\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right), \quad x \neq 0,\ y \neq 0$$

(произведение $x\,y$, в отличие от предыдущего примера, учитываем лишь один раз, поскольку бассейн не имеет крышки).

Исследуем на экстремум функцию

$$S = S(x,\,y) = x\,y + 2V\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$$

1) Найдем частные производные:

$$S'_x(x,\,y) = y - 2\,\frac{V}{x^2},$$

$$S'_y(x,\,y) = x - 2\,\frac{V}{y^2}.$$

2) Приравниваем нулю частные производные

$$y - \frac{V}{x^2} = 0, \qquad x - 2\,\frac{V}{y^2} = 0.$$

Решение последней системы дает одну стационарную точку

$$P_0\left(\sqrt[3]{2\,V}\,,\ \sqrt[3]{2\,V}\right).$$

3) Найдем частные производные второго порядка:

$$S''_{xx} = 4\,\frac{V}{x^3}, \qquad A = S''_{xx}(P_0) = 4 > 0,$$

$$S''_{yy} = 4\,\frac{V}{y^3}, \qquad C = S''_{yy}(P_0) = 2,$$

$$S''_{xy} = 1, \qquad B = S''_{xy}(P_0) = 1,$$

$$\Delta = A\,C - B^2 = 4 - 1 = 3 > 0.$$

Так как $\Delta > 0$, $A > 0$, то в точке P_0 функция имеет минимум. Если

$$x = y = \sqrt[3]{2\,V}\,,$$

то

$$h = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}\,.$$

Таким образом, дно бассейна есть квадрат со стороной $\sqrt[3]{2V}$, а глубина бассейна в два раза меньше стороны этого квадрата. ▲

Задача. Для упаковки продукции требуется изготовить коробку в форме параллелепипеда, объем которой был бы равен V. Дно коробки изготавливается из материала, каждый квадратный сантиметр которой стоит a денежных единиц. Крышка изготавливается из материала, каждый квадратный сантиметр которой стоит b денежных единиц. Боковая поверхность изготовляется из материала, каждый кв. см которой стоит c денежных единиц. Определить каковы должны быть размеры всех сторон x, y, h, чтобы стоимость коробки $P = P(x,\, y,\, h)$ была наименьшей.

Указание. $P(x,\, y,\, h) = (a+b)\,x\,y + 2\,c\,h\,(x+y)$.

Ответ:

$$x = y = \sqrt[3]{\frac{2\,c\,V}{a+b}}\,, \qquad h = V \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{a+b}{2\,c\,V}\right)^2}\,.$$

Заметим, что при $a = b = c = V = 1$ получаем $x = y = h = 1$ (решение первого примера), а при $b = 0$, $a = c$ получаем

$$x = y = \sqrt[3]{2V}\,, \qquad h = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$$

(решение второго примера).

Раздел V
Дифференциальные и разностные уравнения

Алгебраические решения получаются не иначе, как через уравнения.

О. Хайям

Глава 17
Дифференциальные уравнения первого порядка

17.1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Уже была исследована задача вычисления неопределенного интеграла от функции $f(x)$. Решение этой задачи

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, можно рассматривать как решение уравнения

$$y' = f(x), \tag{17.1}$$

поскольку $(F(x) + C)' = f(x)$. Уравнение (17.1) содержит производную y'. Поэтому его называют дифференциальным уравнением. Оно имеет бесчисленное множество решений. Каждое из решений представляет некоторую первообразную от функции $f(x)$.

Если потребовать, чтобы для решения $y(t)$ выполнялось дополнительное условие

$$y(0) = 1,$$

то среди всех решений найдется только одно, которое ему удовлетворяет. Действительно, поскольку $y(x) = F(x) + C$ и $y(0) = 1$, то

$$y(0) = F(0) + C = 1, \qquad C = 1 - F(0),$$

откуда

$$y(x) = F(x) + C = F(x) + 1 - F(0).$$

▽ **Пример.** Пусть известно, что в начальный момент времени $t = 0$ на предприятии производилось продукции в количестве y_0, а скорость роста продукции, произведенной на предприятии, пропорциональна инвестированию $u(t)$. Найти какое количество продукции $y(t)$ производится в каждый момент времени t, если инвестирование предприятия постоянно и равно 3 денежным единицам.

Решение. Согласно условию задачи

$$\frac{dy(t)}{dt} = k\,u(t) = 3\,k.$$

Поскольку первообразной от постоянной величины $3\,k$, является линейная функция $3\,k\,t + C$, то решение дифференциального уравнения представляет функцию $y(t) = 3\,k\,t + C$. Воспользовавшись другим условием задачи, согласно которому

$$y(0) = y_0,$$

получим $C = y_0$, откуда имеем

$$y(t) = 3\,k\,t + y_0,$$

т. е. рост продукции предприятия растет линейно. ▲

Задача. В условиях предыдущей задачи найти количество продукции $y(t)$, произведенной в каждый момент времени t, если инвестирование предприятия растет пропорционально времени.

Ответ:

$$\frac{dy(t)}{dt} = k\,t, \qquad y(t) = k\,\frac{t^2}{2} + y_0.$$

17.2. Основные понятия теории дифференциальных уравнений

Дифференциальными уравнениями называются уравнения, в которых неизвестными являются функции и в которые входят не только сами функции, но и их производные.

Такими уравнениями являются, например, следующие:

$$y' = f(x); \qquad y'' + p(x)\,y' + q(x) = 0; \qquad y''' = g(x). \tag{17.2}$$

Если в уравнение входит первая производная и не входят производные более высокого порядка, то это уравнение называется *дифференциальным уравнением первого порядка.* Если же в уравнение входит вторая производная и не входят производные более высокого порядка, то оно называется *дифференциальным уравнением второго порядка.* Аналогично определяются дифференциальные уравнения третьего порядка, четвертого порядка и т. д. Из уравнений (17.2) первое является дифференциальным уравнением первого порядка, второе — дифференциальным уравнением второго порядка, третье — дифференциальным уравнением третьего порядка.

Вообще, *порядком дифференциального уравнения* называется порядок старшей производной (искомой функции), входящей в это уравнение. Во многих случаях (см. п. 17.1) искомые функции являются функциями времени t. В общем случае независимая переменная, как обычно, будет обозначаться через x, а искомые функции — через $y = f(x)$, $z = z(x)$ и т. п. В общем случае дифференциальное уравнение первого порядка можно записать в следующем виде:

$$F(x,\, y,\, y') = 0,$$

где $y = y(x)$ — искомая неизвестная функция, $y' = y'(x)$ — ее производная по x, а F — заданная функция переменных x, y, y'.

Дифференциальные уравнения, рассмотренные в п. 17.1, имеют вид

$$y' = f(x,\, y). \tag{17.3}$$

Такие уравнения называются *разрешенными относительно производной.*

Функция $\phi(x)$, $x \in (a,\, b)$, называется *решением дифференциального уравнения* (17.3), если она имеет производную $\phi'(x)$ на $(a,\, b)$, и если для любого $x \in (a,\, b)$ справедливо равенство

$$\phi'(x) = f(x,\, \phi(x)).$$

Другими словами, функция $\phi(x)$, $x \in (a, b)$, называется решением дифференциального уравнения (17.3), если уравнение (17.3) при подстановке ее вместо y обращается в тождество по x на интервале (a, b).

Аналогично определяется решение дифференциального уравнения (17.2).

В дальнейшем рассматриваются лишь уравнения, разрешенные относительно производной, т. е. уравнения вида (17.3), или уравнения которые приводятся к уравнениям вида (17.3).

Задание уравнения вида (17.3) равносильно заданию функции $f(x, y)$ переменных x, y. Геометрически функция f переменных x, y — это функция, определенная на некотором множестве точек плоскости с координатами x, y.

Любая кривая, заданная уравнением $y = \phi(x)$, $x \in (a, b)$, где $\phi(x)$ — некоторое решение уравнения (17.3), называется *интегральной кривой* дифференциального уравнения (17.3).

Из этого определения и геометрического смысла производной следует, что интегральная кривая уравнения (17.3) полностью лежит в области, в которой определена функция f, и что интегральная кривая в каждой своей точке $M(x, y)$ имеет касательную, угловой коэффициент которой равен значению функции f в этой точке M.

Задача нахождения решения уравнения (17.3), удовлетворяющего условию

$$y(x_0) = y_0, \tag{17.4}$$

где x_0, y_0 — заданные числа, называется *задачей Коши.* Условие (17.4) называется *начальным условием.* Решение уравнения (17.3), удовлетворяющее начальному условию (17.4), называется *решением задачи Коши* (17.3), (17.4).

Решение задачи Коши имеет простой геометрический смысл. Действительно, согласно данным определениям, решить задачу Коши (17.3), (17.4) означает найти интегральную кривую уравнения (17.3), которая проходит через данную точку $M_0(x_0, y_0)$.

Отметим без доказательства, что верна следующая

Теорема (существования и единственности). *Если функция $f(x, y)$ непрерывна в области, содержащей точку $M_0(x_0, y_0)$, то дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ имеет частное решение $y = y(x)$, такое, которое удовлетворяет условию $y(x_0) = y_0$. Если, кроме того, непрерывна и частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, то решение единственно.*

Таким образом, практически всякое изучаемое нами дифференциальное уравнение имеет бесчисленное множество решений, а соответствующая задача Коши имеет единственное решение.

17.3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение, в котором путем преобразований переменные могут быть разделены, называется *дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.* Уравнение этого типа можно представить в виде

$$\boxed{y' = f(x)\, g(y),}$$

где в правой части равенства каждый из двух множителей является функцией одной переменной. Так, уравнение

$$y' = y/(x+1)$$

является уравнением с разделяющимися переменными

$$f(x) = 1/(x+1), \quad g(y) = y,$$

а уравнение

$$x\, y' - 2y = x$$

— нет.

Решение уравнений с разделяющимися переменными состоит в следующем. Учитывая, что $y' = \dfrac{dy}{dx}$, перепишем уравнение

$$y' = f(x)\, g(x)$$

в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\, g(y).$$

Из этого уравнения получим уравнение с разделенными переменными

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\, dx.$$

Почленно интегрируя последнее равенство, имеем

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\, dx.$$

При делении на $g(y)$ мы полагали, что $g(y) \neq 0$, поэтому решения, при которых $g(y) = 0$, могут быть потеряны. Их наличие надо проверять отдельно.

▽ **Пример.** Найти решение дифференциального уравнения

$$y' = y/(x+1),$$

удовлетворяющего начальным данным $y = 6$ при $x = 2$, $(y(2) = 6)$.

Решение. Имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+1}.$$

Чтобы разделить переменные, выполним следующие операции:

1) умножим обе части на dx:

$$dy = \frac{y\,dx}{x+1};$$

2) разделим обе части на y, $y \neq 0$:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+1};$$

3) интегрируем:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x+1},$$

или

$$\ln|y| = \ln|x+1| + \ln|C| = \ln|C\,(x+1)|$$

(когда при интегрировании возникает $\ln|y|$, константу интегрирования принято записывать в виде $\ln|C|$);

4) потенцируя, получаем решение

$$y = C\,(x+1)$$

$\big(y = 0\ \ (C = 0)$ также является решением, в этом можно убедится непосредственной проверкой$\big)$;

5) по начальным данным определяем произвольную постоянную

$$6 = C\,(2+1), \qquad C = 2.$$

Окончательно имеем $y = 2\,(x+1)$. ▲

17.4. Линейные дифференциальные уравнения

Уравнение называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка*, если оно имеет вид

$$\boxed{y' + f(x)\,y = g(x),} \tag{17.5}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые (непрерывные) функции переменной x.

Название уравнения объясняется тем, что неизвестная функция и ее производная входят в указанное уравнение линейно.

В случае, когда функция $g(x)$ тождественно равна нулю, уравнение называется *однородным*, в противном случае — *неоднородным.*

Линейное однородное уравнение

$$y' + f(x)\,y = 0 \tag{17.6}$$

легко решается методом разделения переменных:

$$\frac{dy}{dx} = -f(x)\,y, \qquad \frac{dy}{y} = -f(x),$$

откуда

$$\ln|y| = -\int f(x)\,dx + \ln|C_1|.$$

Потенцируя, получаем общее решение уравнения линейного однородного уравнения:

$$y = C\,e^{-\int f(x)\,dx}, \tag{17.7}$$

где $C = \pm C_1$.

Общее решение неоднородного линейного уравнения находят с помощью универсального метода, именуемым *методом вариации постоянной.*

Метод вариации постоянной основывается на предварительном решении однородного уравнения (17.6). Общее решение неоднородного уравнения ищем в методе вариации постоянной в виде решения однородного уравнения (17.7), полагая постоянную C новой неизвестной функцией аргумента x:

$$y = C(x)\,e^{-\int f(x)\,dx}. \tag{17.8}$$

Подставим (17.8) в неоднородное уравнение (17.5) с тем, чтобы найти функцию $C(x)$:

$$C'(x)\,e^{-\int f(x)\,dx} - C(x)\,f(x)\,e^{-\int f(x)\,dx} + \\ + f(x)\,C(x)\,e^{-\int f(x)\,dx} = g(x),$$

откуда после приведения подобных получаем уравнение для $C'(x)$:

$$C'(x) = g(x)\,e^{\int f(x)\,dx}.$$

Интегрирование последнего уравнения дает выражение для $C(x)$:

$$C(x) = \int g(x)\,e^{\int f(x)\,dx}\,dx + C_2,$$

подстановка которого в (17.8) приводит к окончательному виду решения неоднородного уравнения (17.5):

$$\boxed{y = e^{-\int f(x)\,dx}\left(\int g(x)\,e^{\int f(x)\,dx}\,dx + C_2\right),} \tag{17.9}$$

где C_2 — произвольная постоянная.

▽ **Пример 1.** Решить уравнение

$$x\,y' - 2\,y = 2\,x^2.$$

Решение. Разделив левую и правую части уравнения на x, приходим к линейному неоднородному уравнению:

$$y' - 2\,\frac{y}{x} = 2\,x. \tag{17.10}$$

Соответствующее однородное уравнение имеет вид

$$y' - \frac{2}{x}\,y = 0.$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{dy}{y} = \frac{2\,dx}{x}.$$

Проинтегрировав, найдем

$$\ln|y| = 2\,\ln|x| + \ln C = \ln C\,x^2,$$

или

$$y = C\,x^2.$$

Полагая постоянную C новой неизвестной функцией аргумента x и подставляя решение однородного уравнения в (17.10), получаем

$$\mathrm{C}'\, x^2 = 2\, x^2,$$

откуда

$$C(x) = 2\, x + C_1.$$

Следовательно общее решение искомого уравнения имеет вид

$$y = (2\, x + C_1)\, x^2. \quad \blacktriangle$$

▽ **Пример 2.** Найти частное решение уравнения

$$\cos x\, dy + y\, \sin x\, dx = dx,$$

удовлетворяющее условию $y = 1$ при $x = 0$.

Решение. Разделив все члены данного уравнения на $\cos x\, dx$, получим уравнение

$$\frac{dy}{dx} + y\, \mathrm{tg}\, x = \frac{1}{\cos x}, \tag{17.11}$$

которое является линейным. В отличие от примера 1 для нахождения общего решения неоднородного уравнения воспользуемся готовой формулой (17.9). Имеем

$$y = e^{-\int \mathrm{tg}\, x\, dx} \left(\int \frac{1}{\cos x}\, e^{\int \mathrm{tg}\, x\, dx}\, dx + C \right) =$$

$$= e^{\ln \cos\, x} \left(\int \frac{1}{\cos x}\, e^{\ln \cos x\, dx}\, dx + C \right) =$$

$$= \cos x\, (\mathrm{tg}\, x + C) = \sin x + C\, \cos x.$$

Используя начальные условия $y = 1$, $x = 0$, имеем

$$1 = \sin 0 + C\, \cos 0,$$

откуда $C = 1$. Таким образом, искомое решение имеет вид

$$y = \sin x + \cos x. \quad \blacktriangle$$

Задача 1. Найти решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} + x\, y = x.$$

Ответ: $y = 1 + C\, e^{-x^2/2}$.

Задача 2. Найти решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} - \frac{x\,y}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2} = 0,$$

удовлетворяющее начальному условию $y = 3$ при $x = 0$.

Ответ: $y = 2\,x + 3\sqrt{1+x^2}$.

17.5. Уравнение Бернулли

Некоторые дифференциальные уравнения первого порядка, не являясь линейными, могут быть приведены к линейным после предварительных преобразований. Примером может служить уравнение

$$\boxed{y' + f(x)\,y = g(x)\cdot y^n,} \tag{17.12}$$

которое называется *уравнением Бернулли.*

При $n = 1$ уравнение (17.12) становится уравнением с разделяющимися переменными. При $n = 0$ уравнение (17.12) есть линейное уравнение. Если n — число, отличное от нуля и единицы, то при помощи подстановки $z = y^{1-n}$ уравнение (17.12) приводится к линейному уравнению относительно новой функции z.

Итак, пусть $n \neq 0$, $n \neq 1$. Введем новую функцию

$$\boxed{z = y^{1-n},} \tag{17.13}$$

тогда

$$z' = (1-n)\,y^{-n}\,y'.$$

Разделим обе части уравнения (17.12) на y^n:

$$y^{-n}\,y' + f(x)\,y^{1-n} = g(x).$$

Отсюда

$$z'/(1-n) + f(x)\,y = g(x),$$

или, что то же самое,

$$z' + (1-n)\,f(x)\,y = (1-n)\,g(x). \tag{17.14}$$

Это уже линейное уравнение, решение которого описано в п. 17.4.

▽ **Пример 1.** Решить уравнение

$$y' + \frac{y}{x} = y^2\,\ln x.$$

Решение. Заданное уравнение является уравнением Бернулли ($n = 2$). После замены (17.13) оно приводится к уравнению (17.14). В нашем случае оно имеет вид

$$z' - \frac{1}{x}\, z = -\ln x.$$

Согласно (17.9) решение этого уравнения имеет вид

$$z = e^{\int 1/x\, dx} \left(\int (-\ln x)\, e^{-\int 1/x\, dx}\, dx + C_1 \right) = x \left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C_1 \right).$$

Поскольку $z = \dfrac{1}{y}$, имеем

$$\frac{1}{y} = x \left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C_1 \right).$$

Положив $C_1 = C/2$, окончательно получаем

$$y = -\frac{2}{(\ln^2 x + C)}. \quad \blacktriangle$$

Задача. Решить уравнение Бернулли

$$x\, y' - y = x^3\, y^2.$$

Ответ: $y = \dfrac{4\, x}{4\, C - x^4}$.

Открытие исчисления бесконечно малых дало математикам возможность свести законы движения тел к аналитическим уравнениям.

Ж. Лагранж

Глава 18
Дифференциальные уравнения высшего порядка

18.1. Основные понятия

Рассмотрим одну из задач, связанную с дифференциальным уравнением второго порядка.

▽ **Пример 1.** На тело, движущееся по прямой, в направлении движения действует некоторая постоянная сила. Найти, как зависит путь, пройденный телом, от времени.

Решение. Обозначим длину пути через s, а время — через t. Постоянная сила вызывает постоянное ускорение, которое обозначим через g. Поскольку ускорение есть вторая производная пути по времени, получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g = \text{const}.$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Поскольку

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = g = \text{const},$$

то

$$\frac{ds}{dt} = g\,t + C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная. Следовательно, скорость тела $\dfrac{ds}{dt}$ есть линейная функция времени. Если в начальный момент

времени ($t = 0$) скорость тела равнялась 0, то

$$\frac{ds}{dt} - C_1 = 0,$$

в противном случае C_1 — величина начальной скорости $\left(s'(0) = C_1\right)$. После вторичного интегрирования получаем

$$s = s(t) = \frac{g\,t^2}{2} + C_1\,t + C_2,$$

где C_2 — произвольная постоянная. Физический смысл постоянной C_2 — путь, пройденным телом до момента времени $t = 0$. Если пройденный путь отмерять от того места, где тело находилось в момент $t = 0$, то $C_2 = 0$. Если и начальная скорость C_1 равна 0, то уравнение движения принимает вид

$$s = \frac{g\,t^2}{2}$$

(уравнение свободного падения). Важно отметить, что в общем случае уравнение движения содержит независимые друг от друга произвольные постоянные: C_1 и C_2. Это характерно для дифференциальных уравнений второго порядка. ▲

Рассмотренное дифференциальное уравнение является типичным обыкновенным дифференциальных уравнением второго порядка.

Вообще же, дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид

$$F(x,\, y,\, y',\, y'') = 0. \tag{18.1}$$

Если (18.1) разрешено относительно второй производной, то получаем уравнение

$$y'' = f(x,\, y,\, y'). \tag{18.2}$$

Как и в случае уравнения первого порядка, *решением уравнения* (18.2) называется функция $y = y(x)$, определенная на некотором интервале (a, b), которая обращает это уравнение в тождество. График решения называется *интегральной кривой.*

Справедлива следующая

Теорема 1 (существования и единственности). *Если функция $f(x,\, y,\, y')$ — функция трех независимых переменных x, y и y' — непрерывна в области, содержащей*

точку $M_0(x_0,\, y_0,\, y_0')$, *то дифференциальное уравнение*

$$y'' = f(x,\, y,\, y') \tag{18.3}$$

имеет решение $y = y(x)$ *такое, что*

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_0'. \tag{18.4}$$

Если, кроме того, непрерывны и частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *и* $\dfrac{\partial f}{\partial y'}$, *то это решение уравнения единственно.*

Геометрический смысл этой теоремы заключается в том, что при выполнении условий теоремы через заданную точку (x_0, y_0) на координатной плоскости проходит единственная интегральная кривая с заданным угловым коэффициентом y_0 ее касательной.

Условия (18.4) называются *начальными условиями*, а задача отыскания решения уравнения (18.3) по заданным начальным условиям (18.4) называется *задачей Коши.*

Общим решением дифференциального уравнения второго порядка (18.3) называется функция

$$y = y(x,\, C_1,\, C_2),$$

если она является решением этого уравнения при любых постоянных величинах C_1 и C_2, которые могут быть определены единственным образом при заданных начальных условиях (18.4).

Частным решением уравнения (18.3) называется общее решение этого уравнения при фиксированных постоянных C_1 и C_2:

$$y = y\left(x, C_1^0, C_2^0\right).$$

В зависимости от способов решения дифференциальные уравнения второго порядка разделяются на различные типы. Простейшим типом является уравнение

$$\boxed{y'' = f(x),} \tag{18.5}$$

допускающее понижение порядка. Одно из уравнений этого типа уже было решено в примере 1.

Покажем, как такое уравнение решается в общем случае. Правая часть уравнения (18.5) не содержит функции y и производной y'. Известно, что $y'' = (y')' = \dfrac{dy'}{dx}$. Следовательно, данное

уравнение можно записать так:

$$\frac{dy'}{dx} = f(x),$$

или

$$dy' = f(x)\,dx.$$

Интегрируя последнее уравнение, получим

$$y' = \int f(x)\,dx.$$

Интегрируя еще раз, получим общее решение уравнения (18.5):

$$y = \int \left(\int f(x)\,dx \right) dx.$$

▽ **Пример 2.**
Найти частное решение уравнения

$$y'' = 6\,x + \sin x,$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(0) = 2, \qquad y'(0) = 3.$$

Решение. Так как $y'' = \dfrac{dy'}{dx}$, данное уравнение можно записать так:

$$\frac{dy'}{dx} = 6\,x + \sin x,$$

или

$$dy' = (6\,x + \sin x)\,dx.$$

Интегрируя, получим

$$y' = 3\,x^2 - \cos x + C_1. \tag{18.6}$$

Тогда

$$dy = (3\,x^2 - \cos x + C_1)\,dx.$$

Интегрируя еще раз, получаем общее решение

$$y = x^3 - \sin x + C_1\,x + C_2.$$

Используем начальные условия. Подставив в общее решение $x = 0$ и $y = 2$, получим $C_2 = 2$. Подставив в (18.6) $x = 0$ и $y' = 3$, будем иметь

$$3 = -1 + C_1,$$

откуда

$$C_1 = 4.$$

Следовательно, искомое частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, имеет вид

$$y = x^3 - \sin x + 4\,x + 2.$$

Геометрически найденное частное решение выражает собой интегральную кривую, которая проходит через точку $M_0(0,\,2)$. Кроме того, касательная, проведенная к этой кривой в точке M_0, образует с положительным направлением оси Ox угол, тангенс которого равен 3.

Задача. Найти общее решение уравнения

$$y'' = x + \cos x.$$

Ответ: $\dfrac{1}{6}\,x^3 - \cos x + C_1\,x + C_2$.

Теорема существования и единственности решения задачи Коши обобщается и на уравнения более высокого порядка. А именно верна следующая

Теорема 2 (существования и единственности). *Если правая часть уравнения*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$$

нерерывна в некоторой окрестности начальной точки

$$\left(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}\right)$$

и имеет непрерывные в этой окрестности частные производные y, y', $\ldots y^{(n-1)}$, *то оно имеет единственное решение* $y = y(x)$, *удовлетворяющее начальным условиям*

$$y = y_0, \quad y' = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$$

при $x = x_0$.

18.2. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка

Линейным дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение вида

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\,\frac{dy}{dx} + q(x)\,y = f(x),} \tag{18.7}$$

где $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ — функции переменной x.

Если $f(x) \neq 0$. то уравнение (18.7) называется *неоднородным.*

Если $f(x) = 0$, то уравнение (18.7) принимает вид

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\,\frac{dy}{dx} + q(x)\,y = 0 \tag{18.8}$$

и называется *однородным.*

Если в уравнениях (18.7) или (18.8) коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ постоянные, соответственно равные p и q, то полученные уравнения:

$$y'' + p\,y' + q\,y = f(x), \tag{18.9}$$

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0 \tag{18.10}$$

называются *линейными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами.*

Теорема 1. *Сумма двух решений однородного линейного уравнения* (18.8) *также есть решение этого уравнения.*

□ Предположим, что $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — решения уравнения (18.8); это означает, что имеют место тождества:

$$y_1'' + p(x)\,y_1' + q(x)\,y_1 = 0,$$

$$y_2'' + p(x)\,y_2' + q(x)\,y_2 = 0.$$

Складывая почленно эти тождества, получаем

$$(y_1 + y_2)'' + p(x)\,(y_1 + y_2)' + q(x)\,(y_1 + y_2) = 0.$$

Это означает, что функция $(y_1 + y_2)$ удовлетворяет уравнению (18.8). ■

Теорема 2. *Если y_1 — решение линейного однородного уравнения* (18.8) *и если C_1 — произвольная постоянная, то $C_1\,y_1$ также есть решение этого уравнения* (18.8).

□ Найдем первую и вторую производные функции $C_1\,y_1$:

$$(C_1\,y_1)' = C_1\,y_1', \qquad (C_1\,y_1)'' = C_1\,y_1''.$$

Подставив функцию $C_1\,y_1$ в левую часть уравнения (18.8) и воспользовавшись тем, что

$$y_1'' + p(x)\,y_1' + q(x)\,y_1 = 0,$$

получим

$$(C_1\,y_1)'' + p(x)\,(C_1\,y_1)' + q(x)\,(C_1\,y_1) =$$

$$= C_1\,y_1'' + p(x)\,C_1\,y_1' + q(x)\,C_1\,y_1 =$$

$$= C_1\,(y_1'' + p(x)\,y_1' + q(x)\,y_1) = C_1 \cdot 0 = 0.$$

Это означает, что функция $C_1\,y_1$ удовлетворяет уравнению (18.8). ■

Из двух доказанных теорем вытекает

Следствие. *Если y_1 и y_2 — решения линейного однородного уравнения* (18.8), *то $C_1\,y_1$ и $C_2\,y_2$ — решения этого уравнения, следовательно, и выражение*

$$y = C_1\,y_1 + C_2\,y_2$$

есть решение этого уравнения.

В дальнейшем нам понадобятся понятия линейной зависимости и независимости функций.

Две функции y_1 и y_2 называются *линейно зависимыми*, если их отношение $\dfrac{y_2}{y_1}$ является постоянной величиной. В противном случае функции y_1 и y_2 называются *линейно независимыми.*

Например, функции $y_1 = x$, $y_2 = 3\,x$ *линейно зависимы*, а функции $y_1 = x$, $y_2 = x + 1$ линейно независимы.

От того, линейно зависимы или линейно независимы функции y_1 и y_2, зависит ответ на вопрос: является ли функция $y = C_1\,y_1 + C_2\,y_2$ общим решением уравнения (18.8)?

Верна следующая

Теорема 3. *Если y_1 и y_2 — линейно независимые решения линейного однородного дифференциального уравнения* (18.8), *то функция*

$$\boxed{y_{\text{одн}} = C_1\,y_1 + C_2\,y_2}$$

является общим решением этого уравнения.

▽ **Пример.** Найти общее решение уравнения

$$y'' - 3\,y' + 2\,y = 0,$$

если известно, что $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{2\,x}$ — частные решения этого уравнения.

Решение. Данное уравнение является линейным однородным. Так как

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{2x}}{e^x} = e^x$$

не является постоянным числом, то эти решения являются линейно независимыми. Поэтому

$$y(x) = C_1\,e^x + C_2\,e^{2\,x},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, является общим решением уравнения. ▲

Что касается решения неоднородного уравнения (18.7), то имеет место следующая

Теорема 4. *Общее решение уравнения* (18.7) *равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения* (18.8) *и какого-нибудь частного решения данного уравнения* (18.7). *Если*

$$y_{\text{одн}} = C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x)$$

есть общее решение уравнения (18.8), *а* $\overline{y}$ *есть какое-нибудь частное решение неоднородного уравнения* (18.7), *то*

$$\boxed{y = C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x) + \overline{y}}$$

есть общее решение неоднородного уравнения (18.7).

Таким образом, чтобы найти общее решение линейного неоднородного уравнения второго порядка, надо предварительно найти общее решение соответствующего уравнения без правой части и прибавить к нему какое-нибудь частное решение заданного уравнения.

С другой стороны, чтобы найти общее решение однородного уравнения, надо иметь два частных линейно независимых решения этого уравнения. Для случая, когда $p(x)$ и $q(x)$ не являются постоянными числами, нахождение таких частных решений — весьма сложная задача. Сравнительно легко найти такие решения, когда p и q — постоянные числа.

18.3. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Общим решением линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами (18.10) является функция

$$y = C_1\, y_1 + C_2\, y_2,$$

где y_1 и y_2 — два линейно независимых частных решения этого уравнения.

Для нахождения одного из частных решений поступим следующим образом. Предположим, что

$$\boxed{y = e^{k\,x},}$$

где k — некоторое постоянное число, есть решение уравнения (18.10). Выясним, при каких значениях k показательная функция $y = e^{k\,x}$ станет решением уравнения (18.10). Для этого находим

$$y' = k\, e^{k\,x},$$

$$y'' = k^2\, e^{k\,x}$$

и подставляем y, y' и y'' в левую часть уравнения (18.10). В результате подстановки получим выражение

$$k^2\, e^{k\,x} + p\,k\, e^{k\,x} + q\, e^{k\,x} = e^{k\,x}\,(k^2 + p\,k + q). \tag{18.11}$$

Чтобы $y = e^{k\,x}$ удовлетворяло уравнению (18.10), требуется, чтобы выражение (18.11) было тождественно равно нулю. Так как сомножитель $e^{k\,x}$ не равен нулю ни при каком значении k, то второй сомножитель должен быть равен нулю. Следовательно, те значения k, которые удовлетворяют уравнению

$$\boxed{k^2 + p\,k + q = 0,} \tag{18.12}$$

пригодны для составления частного решения $y = e^{k\,x}$.

Уравнение (18.12) называется *характеристическим* по отношению к уравнению (18.10).

Как видно, чтобы получить характеристическое уравнение (18.12), достаточно заменить в данном уравнении (18.10) производные соответствующими степенями неизвестной k.

Если действительное число k является корнем характеристического уравнения, то, как было показано, $e^{k\,x}$ — частное решение уравнения (18.10). Поиск другого частного решения, линейно

независимого с первым, зависит от вида характеристического уравнения.

При решении характеристического уравнения могут встретиться три случая: корни характеристического уравнения действительные и различные, корни равные, нет действительных корней. Справедлива следующая

Теорема. 1. *Пусть характеристическое уравнение* (18.12) *уравнения* (18.10) *имеет действительные корни* k_1 *и* k_2, *причем* $k_1 \neq k_2$. *Тогда общее решение уравнения* (18.10) *имеет вид*

$$\boxed{y = C_1\, e^{k_1 x} + C_2\, e^{k_2 x},}$$

где C_1 *и* C_2 — *некоторые числа.*

2. *Если характеристическое уравнение* (18.12) *имеет только один корень* k, *то общее решение уравнения* (18.10) *имеет вид*

$$\boxed{y = C_1\, e^{k x} + C_2\, x\, e^{k x},}$$

где C_1 *и* C_2 — *некоторые числа.*

3. *Если характеристическое уравнение* (18.12) *не имеет действительных корней, то общее решение уравнения* (18.10) *имеет вид*

$$\boxed{y = C_1\, e^{\alpha x} \sin \beta x + C_2\, e^{\alpha x} \cos \beta x,}$$

где $\alpha = -p/2$, $\beta = \sqrt{q - p^2/4}$, C_1 *и* C_2 — *некоторые числа.*

□ Пусть корни характеристического уравнения (18.12) действительные и различные, т. е. $k_1 \neq k_2$. Тогда

$$y_1 = e^{k_1 x} \quad \text{и} \quad y_2 = e^{k_2 x}$$

являются линейно независимыми решениями, так как они удовлетворяют уравнению и

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{k_2}}{e^{k_1}} = e^{(k_2 - k_1)\, x} \neq \text{const}.$$

Отсюда и из теоремы 3 п. 18.2 следует, что общее решение уравнения (18.10) имеет вид

$$y = C_1\, e^{k_1 x} + C_2\, e^{k_2 x}.$$

Таким образом, для случая, когда характеристическое уравнение имеет два действительных корня, теорема доказана.

Для двух других случаев теорема доказывается аналогично. ■

Ниже приведены применения доказанной теоремы к известной задаче о малых колебаниях пружинного маятника. Эти примеры приводятся здесь не случайно. Соответствующая физическая задача может быть интерпретирована как экономическая задача о колебаниях цен.

▽ **Пример 1.** Материальная точка массы m, движущаяся вдоль прямой, притягивается к неподвижному центру O с силой, пропорциональной удалению s точки от притягивающего центра (упругая сила). Найти закон движения этой точки (пренебрегая сопротивлением среды).

Решение. Согласно закону Ньютона имеем

$$m\,a = F,$$

Здесь через m обозначена масса точки, через a — ускорение, через F — сила. Закон Ньютона в условиях нашей задачи можно записать в следущей форме:

$$m\,\frac{d^2s}{dt^2} = -b\,s,$$

где b — коэффициент пропорциональности и знак минус поставлен потому, что направление действующей силы обратно по знаку смещению s. Отсюда

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega^2\,s = 0,$$

где $\omega = \sqrt{\dfrac{b}{m}}$.

Это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами $p = 0$ и $q = \omega^2$. Соответствующее характеристическое уравнение

$$k^2 + \omega^2 = 0$$

не имеет действительных корней. Общее решение уравнения согласно теореме имеет вид

$$s = C_1\,e^{\alpha\,t}\,\sin\beta\,t + C_2\,e^{\alpha\,t}\,\cos\beta\,t.$$

Поскольку

$$\alpha = -p/2 = 0, \quad \beta = \sqrt{q - p^2/4} = \omega,$$

то

$$s = s(t) = C_1\,\sin\omega\,t + C_2\,\cos\omega\,t.$$

Можно положить

$$C_1 = A \sin \phi, \qquad C_2 = A \cos \phi,$$

где A и ϕ — некоторые другие произвольные постоянные. Отсюда, используя тригонометрические формулы, получаем

$$s(t) = A \sin (\omega t + \phi),$$

или

$$s(t) = A \sin \left(\sqrt{\frac{b}{m}}\, t + \phi \right),$$

т. е. материальная точка в наших условиях совершает периодические гармонические колебания около притягивающего центра с амплитудой A и начальной фазой ϕ. ▲

▽ **Пример 2.** Материальная точка массы m, движущаяся вдоль прямой, притягивается к неподвижному центру O с силой, пропорциональной удалению s точки от притягивающего центра (упругая сила). Найти закон движения этой точки с учетом сопротивлением среды.

Решение. В отличие от предыдущего примера, помимо «упругой» силы

$$F = -b\, s$$

на точку массы m действует еще и сила сопротивления среды. Обычно полагают, что сила сопротивления по величине пропорциональна скорости $\dfrac{ds}{dt}$ и направлена в противоположную сторону $\left(F = -r \dfrac{ds}{dt} \right)$. Поэтому уравнение отклонения точки от неподвижного центра O имеет вид

$$m\, a = F + F$$

или

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -r \frac{ds}{dt} - b\, s,$$

где r — постоянная сопротивления среды.

Это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, которое в привычной форме записывается так:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{ds}{dt} + \frac{b}{m}\, s = 0.$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 + \frac{r}{m}\,k + \frac{b}{m} = 0.$$

Поведение решения однородного дифференциального уравнения зависит от дискриминанта характеристического уравнения. Возможны три случая: дискриминант D больше нуля; дискриминант равен нулю; дискриминант меньше нуля.

1. Если дискриминант

$$D = \left(\frac{r}{m}\right)^2 - \frac{4\,b}{m} > 0,$$

то характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня

$$k_1 = -\frac{r}{2\,m} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{r}{m}\right)^2 - \frac{4\,b}{m}}, \quad k_2 = -\frac{r}{2\,m} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{r}{m}\right)^2 - \frac{4\,b}{m}}$$

и

$$s(t) = C_1\,e^{k_1\,t} + C_2\,e^{k_2\,t} =$$

$$= e^{-\frac{r}{2\,m}\cdot t}\left(e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{r}{m}\right)^2 - \frac{4\,b}{m}}\cdot t} + e^{+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{r}{m}\right)^2 - \frac{4\,b}{m}}\cdot t}\right).$$

2. Если дискриминант

$$D = \left(\frac{r}{m}\right)^2 - \frac{4\,b}{m} = 0,$$

то характеристическое уравнение только один корень

$$k = -\frac{r}{2\,m},$$

который является действительным числом, и

$$s(t) = C_1\,e^{k\,t} + C_2\,t\,e^{k\,t} = e^{-\frac{r}{2\,m}\cdot t}\,(\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2\,t)\,.$$

3. Если дискриминант

$$D = \left(\frac{r}{m}\right)^2 - \frac{4\,b}{m} < 0,$$

то характеристическое уравнение не имеет действительных корней и

$$s(t) = C_1\,e^{\alpha\,t}\,\sin\beta\,t + C_2\,e^{\alpha\,t}\,\cos\beta\,t.$$

Поскольку

$$\alpha = -\frac{p}{2} = -\frac{r}{2\,m}, \quad \beta = \frac{1}{2}\sqrt{q - p^2/4} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\,b}{m} - \left(\frac{r}{m}\right)^2},$$

то

$$s(t) = e^{-\frac{r}{2\,m}\cdot t}\left(C_1 \sin\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\,b}{m} - \left(\frac{r}{m}\right)^2}\,t + \right.$$

$$\left. + C_2 \cos\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\,b}{m} - \left(\frac{r}{m}\right)^2}\,t\right).$$

Чтобы проанализировать закон движения точки, введем новые обозначения. Обозначим $r/(2\,m)$ через δ, а $\sqrt{b/m}$ — через ω_0^2. Коэффициент δ называют *коэффициентом затухания*, а ω_0 — *циклической частотой свободных колебаний в отсутствии трения.*

В новых обозначениях уравнение колебаний имеет вид

$$s''(t) + 2\,\delta\,s'(t) + \omega_0^2\,s(t) = 0.$$

Обобщая предыдущие рассуждения получаем, что для движения точки возможны три случая:

1. Если $\delta > \omega_0$, то имеет место *непериодическое затухание*:

$$s(t) = C_1\,e^{-\left(\delta+\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}\right)t} + C_2\,e^{-\left(\delta-\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}\right)t}.$$

Функция $s(t)$ монотонно убывает с ростом t. Система, выведенная из состояния равновесия, асимптотически, т. е. при $t \to \infty$, возвращается в это состояние.

2. Если $\delta = \omega_0$, то также имеет место *непериодическое затухание*:

$$s(t) = e^{-\delta\,t}\,(C_1 + C_2\,t)\,.$$

3. Если $\delta < \omega_0$, то система совершает *затухающие колебания*:

$$s(t) = A_0\,e^{-\delta\,t}\sin(\omega\,t + \phi_0),$$

где A_0 и ϕ_0 — постоянные величины, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ — собственная циклическая частота колебаний. Величина $A(t) = A_0\,e^{-\delta\,t}$ называется *амплитудой затухающих колебаний.* ▲

Колебания рыночных цен. Примеры 1 и 2 применимы не только к колебаниям пружинного маятника. Рассмотренное дифференциальное уравнение применимо к любой системе, испытывающей колебания. Например, оно может быть интерпретировано и как уравнение колебаний отклонения рыночной цены товара от его естественной цены. Более точно эта интерпретация выглядит следующим образом. Пусть $s(t)$ — отклонение рыночной цены от ее естественного значения в момент времени t (при $s(t) = 0$ рыночная цена в момент времени t совпадает с равновесной). Найдем уравнение отклонения рыночной цены от ее естественного состояния. Для этого предположим, что на рынке товаров действуют две силы, аналогичные силам упругости и сопротивления для пружинного маятника, которые условно назовем силой (тяготения) Смита и силой сохранения. Чтобы пояснить, что понимается под силой Смита, приведем две его цитаты:

«Фактическая цена, за которую обычно продается товар, называется его рыночной ценой. Она может или превышать его естественную цену, или быть ниже ее, или же в точности совпадать с нею ... Таким образом, естественная цена как бы представляет собой центральную цену, к которой постоянно тяготеют цены всех товаров. Различные случайные обстоятельства могут иногда держать их на значительно более высоком уровне и иногда несколько понижать их по сравнению с нею. Но каковы бы ни были препятствия, которые отклоняют цены от их устойчивого центра, они постоянно тяготеют к нему [1]).»

Описанное в этих цитатах «тяготение» (в чем-то схожее с силой упругости пружины) будем называть *силой Смита* $F_1(t)$. Естественно предполагать, что сила Смита направлена в сторону точки O на оси Os и по по величине пропорциональна отклонению цены $s(t)$:

$$F_1(t) = -b\,s(t).$$

Коэффициент пропорциональности b будем называть *коэффициентом Смита.*

Помимо силы Смита на рынке может действовать еще и аналог силы трения, которую мы назовем *силой сохранения* $F_2(t)$. Адам Смит писал: «Одно и то же число рабочих в сельском хозяйстве производит в различные годы весьма различные количества зерна, вина, масла, хмеля и т. п., между тем как одно и то же количество прядильщиков и ткачей каждый год производит

[1]) *Смит А.* Исследование о природе и причинах Богатства народов. Книга первая. М.: Ось-89, 1997. С. 56, 58.

одинаковое или почти одинаковое количество полотна и сукна ... Собственный опыт каждого человека говорит ему, что цена полотна или сукна не подвержена столь частым и столь большим колебаниям, как цена хлеба. Цена одного рода товаров изменяется лишь в зависимости от изменений в спросе; цена другого рода товаров изменяется не только в зависимости от изменений в спросе, но и в зависимости от гораздо больших и гораздо более частых колебаний количества товара, доставляемого на рынок для удовлетворения этого спроса [1]) .»

Таким образом, сила сохранения тем больше, чем более реже происходят колебания цены. Эта сила зависит от вида товара (сезонных и других колебаний количества товаров на рынке), психологии продавца (меньшей или большей склонности к изменению цены) и других факторов. Естественно полагать, что сила сохранения по величине пропорциональна скорости $\dfrac{ds}{dt}$ и направлена в противоположную сторону $\left(F_2 = -r\,\dfrac{ds}{dt}\right)$. Коэффициент r будем называть *коэффициентом сохранения.*

Используя закон Ньютона

$$m\,a = F_1 + F_2$$

и аналогию с пружинным маятником, получаем дифференциальное уравнение отклонения $s(t)$ рыночной цены товара от ее естественной цены:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -r\,\frac{ds}{dt} - b\,s,$$

где m выбрано равным единице.

Обозначив $\dfrac{r}{2}$ через δ, а $\sqrt{b}$ — через ω_0^2, где δ — *коэффициент затухания*, а ω_0 — *циклическая частота свободных колебаний в отсутствии силы сохранения.*

В новых обозначениях уравнение колебаний имеет вид

$$s''(t) + 2\,\delta\,s'(t) + \omega_0^2\,s(t) = 0.$$

По аналогии с пружинным маятником получаем, что возможны три случая:

1. Если $\delta > \omega_0$, то имеет место *непериодическое затухание*:

$$s(t) = C_1\,e^{-\left(\delta+\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}\right)t} + C_2\,e^{-\left(\delta-\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}\right)t}.$$

[1]) Там же, с. 58–59.

Функция $s(t)$ монотонно убывает с ростом t. Система, выведенная из состояния равновесия, асимптотически, т. е. при $t \to \infty$, возвращается в это состояние.

2. Если $\delta = \omega_0$, то также имеет место *непериодическое затухание*:

$$s(t) = e^{-\delta t}\,(C_1 + C_2\,t)\,.$$

3. Если $0 < \delta < \omega_0$, то система совершает затухающие колебания:

$$s(t) = A_0\,e^{-\delta t}\,\sin(\omega\,t + \phi_0),$$

где A_0 и ϕ_0 — постоянные величины, а $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ — собственная циклическая частота колебаний. ▲

▽ **Пример 3.** Найти общие решения уравнений:

а) $y'' + 2\,y' - 15\,y = 0$;

б) $y'' - 10\,y' + 25\,y = 0$;

в) $y'' - 4\,y' + 13\,y = 0$.

Решение.

а) Составляем характеристическое уравнение

$$k^2 + 2\,k - 15 = 0.$$

Корнями этого уравнения являются два действительных числа $k_1 = -5$ и $k_2 = 3$. Поэтому общее решение имеет вид

$$y = C_1\,e^{-5\,x} + C_2\,e^{3\,x}.$$

б) Составляем характеристическое уравнение

$$k^2 - 10\,k + 25 = 0.$$

Решая это уравнение, получим $k_1 = k_2 = 5$. Так как корни равные, то общее решение

$$y = (C_1 + C_2\,x)\,e^{5\,x}.$$

в) Характеристическое уравнение

$$k^2 - 4\,k + 13 = 0$$

не имеет действительных корней. Вычисляем соответствующие α и β:

$$\alpha = -p/2 = 4/2 = 2, \qquad \beta = \sqrt{q - p^2/4} = \sqrt{13 - 16/4} = 3.$$

Отсюда получаем общее решение:

$$y = e^{2x}\,(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x). \quad \blacktriangle$$

Задача 1. Найти общие решения уравнений:

а) $y'' + 2y' + 2y = 0$;

б) $y'' + 4y = 0$;

в) $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Ответ:

а) $y = e^{-x}\,(C_1\cos x + C_2\sin x)$. Если x — время, то эта функция описывает колебания отклонений y рыночной цены от ее естественного значения. Колебания являются затухающими. При $x \to \infty$ отклонение от естественной цены стремится к нулю;

б) $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$. Функция описывает колебания отклонений рыночной цены от ее естественного значения в момент времени x. Колебания являются незатухающими. При $x \to \infty$ отклонение $y(x)$ не имеет предела. Рыночная цена постоянно колеблется вокруг естественной цены;

в) $y = (C_1 + C_2 x)\,e^{-2x}$. Функция описывает постепенное понижение рыночной цены. При $x \to \infty$ отклонение от естественной цены стремится к нулю.

▽ **Пример 4.** Найти частное решение уравнения

$$y'' + 4y' + 4y = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = 4, \qquad y'(0) = 0.$$

Решение. Общее решение искомого уравнения имеет вид

$$y = (C_1 + C_2 x)\,e^{-2x}.$$

Воспользуемся начальными условиями для определения произвольных постоянных C_1 и C_2. Находим производную общего решения:

$$y' = -2C_1\,e^{-2x} + C_2\,e^{-2x} - 2C_2\,x\,e^{-2x}.$$

Подставив $x = 0$ и $y = 4$ в общее решение, получим $C_1 = 4$. Подставив $x = 0$ и $y' = 0$ в найденное выражение для y', получим

$$0 = 2C_1 + C_2,$$

откуда $C_2 = 8$.

Следовательно,

$$y = 4\,e^{-2\,x} + 8\,x\,e^{-2\,x}$$

есть искомое частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям. ▲

Задача 2. Найти частное решение уравнения

$$y'' - 5\,y' = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = -5.$$

Ответ: $y = 2 - e^{-5\,x}$.

18.4. Линейные неоднородные второго порядка с постоянными коэффициентами

Пусть требуется найти общее решение линейного неоднородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\boxed{y'' + p\,y' + q\,y = f(x).} \tag{18.13}$$

Напомним, что общее решение неоднородного уравнения (18.13) равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения

$$\boxed{y'' + p\,y' + q\,y = 0} \tag{18.14}$$

и какого-нибудь частного решения неоднородного уравнения (18.13).

Если

$$y_{\text{одн}} = C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x)$$

есть общее решение уравнения (18.14), а $\overline{y}$ — какое-нибудь частное решение неоднородного уравнения (18.13), то общее решение выражается формулой

$$\boxed{y = y_{\text{одн}} + \overline{y}.} \tag{18.15}$$

Метод неопределенных коэффициентов. В предыдущем параграфе рассмотрен способ нахождения общего решения уравнения (18.14). Следовательно, остается указать способ

нахождения какого-либо частного решения заданного уравнения (18.13). Рассмотрим способ отыскания частного решения *методом неопределенных коэффициентов*. Этим методом можно пользоваться в нескольких случаях. Рассмотрим случай, когда функция $f(x)$ из правой части (18.13) представляется в виде

$$\boxed{f(x) = e^{m\,x}\,P_n(x),}$$

где $P_n(x)$ — многочлен n-й степени.

Теорема 1. *Если m не является корнем характеристического уравнения*

$$k^2 + p\,k + q = 0,$$

то частное решение уравнения (18.13) *имеет вид*

$$\boxed{\overline{y} = e^{m\,x}\,Q_n(x),}$$

где $Q_n(x)$ — многочлен n-й степени с неопределенными коэффициентами.

Если m — корень характеристического уравнения

$$k^2 + p\,k + q = 0,$$

то частное решение уравнения (18.13) *имеет вид*

$$\boxed{\overline{y} = x^r\,e^{m\,x}\,Q_n(x),}$$

где $r = 1$ или 2, смотря по тому, совпадает m с одним из корней характеристического уравнения или же с каждым из двух равных корней характеристического уравнения.

▽ **Пример 1.** Найти общее решение уравнения

$$y'' - 7\,y' + 10\,y = 4\,e^{3\,x}.$$

Решение. Находим общее решение уравнения без правой части

$$y'' - 7\,y' + 10 = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$k^2 - 7\,k + 10 = 0$$

имеет корни $k_1 = 2$ и $k_2 = 5$.

Общее решение однородного уравнения таково:

$$y_{\text{одн}} = C_1\,e^{2\,x} + C_2\,e^{5\,x}.$$

$P_n(x) = 4$ — многочлен нулевой степени, $m = 3$ не совпадает ни с одним из из корней характеристического уравнения. Поэтому частное решение $\overline{y}$ следует искать в виде $A\,e^{3\,x}$, т. е.

$$\overline{y} = A\,e^{3\,x},$$

где A — неопределенный коэффициент, который нужно найти.

Дифференцируя это равенство, находим:

$$\overline{y}' = 3\,A\,e^{3\,x}, \qquad \overline{y}'' = 9\,A\,e^{3\,x}.$$

Подставим $\overline{y}$, $\overline{y}'$ и $\overline{y}''$ в левую часть исходного уравнения и определим значение коэффициента A:

$$9\,A\,e^{3\,x} - 21\,A\,e^{3\,x} + 10\,A\,e^{3\,x} = 4\,e^{3\,x};$$

$$-2\,A = 4; \qquad A = -2.$$

Следовательно, частное решение $\overline{y} = A\,e^{3\,x} = -2\,e^{3\,x}$, а общее решение

$$y = C_1\,e^{2\,x} + C_2\,e^{5\,x} - 2\,e^{3\,x}. \quad \blacktriangle$$

▽ **Пример 2.** Найти общее решение уравнения

$$y'' - y' - 6\,y = 12\,x^2 - 2\,x + 1.$$

Решение. Находим общее решение однородного уравнения

$$y'' - y' - 6\,y = 0.$$

Так как характеристическое уравнение

$$k^2 - k - 6 = 0$$

имеет корни $k_1 = -2$ и $k_2 = 3$, то общее решение однородного уравнения

$$y_{\text{одн}} = C_1\,e^{-2\,x} + C_2\,e^{3\,x}.$$

В правой части заданного уравнения $e^{m\,x} = e^{0\cdot x} = 1$, поэтому $m = 0$. Число нуль не является корнем характеристического уравнения. Следовательно, частное решение $\overline{y}$ заданного уравнения следует искать в виде многочлена второй степени, т. е.

$$\overline{y} = A\,x^2 + B\,x + C.$$

Дифференцируя это равенство, находим $\overline{y}\,'$ и $\overline{y}\,''$:

$$\overline{y}\,' = 2\,A\,x + B; \qquad \overline{y}\,'' = 2\,A.$$

Подставив $\overline{y}$, $\overline{y}'$ и $\overline{y}''$ в левую часть заданного уравнения, получим равенство:

$$2A - 2Ax - B - 6Ax^2 - 6Bx - 6C = 12x^2 - 2x + 1,$$

или

$$-6Ax^2 + (-2A - 6B)x + (2A - B - 6C) = 12x^2 - 2x + 1.$$

Выбираем неопределенные коэффициенты A, B и C так, чтобы последнее равенство стало тождеством. Для этого приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях переменной x. В результате получаем систему трех уравнений с тремя неизвестными A, B и C.

Решая систему

$$\begin{cases} -6A = 12, \\ -2A - 6B = -2, \\ 2A - B - 6C = 1, \end{cases}$$

находим, что $A = -2$, $B = 1$, $C = -1$. Следовательно, частное решение имеет вид

$$\overline{y} = -2x^2 + x - 1,$$

а общее —

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} - 2x^2 + x - 1. \quad \blacktriangle$$

▽ **Пример 3.** Найти общее решение уравнения

$$y'' - 2y' + y = x e^x.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$k^2 - 2k + 1 = 0$$

однородного уравнения имеет двойной корень

$$k_1 = k_2 = 1.$$

Поскольку

$$f(x) = x e^x$$

и $m = 1$ совпадает с корнем характеристического уравнения, а $P_n(x)$ — многочлен первой степени, то частное решение заданного уравнения есть функция

$$\overline{y} = x^2 e^x (Ax + B) = e^x (Ax^3 + Bx^2).$$

Вычислим $\overline{y}'$ и $\overline{y}''$:

$$\overline{y}' = e^x\,(A\,x^3 + B\,x^2) + e^x\,(3\,A\,x^2 + 2\,B\,x) =$$

$$= e^x\,(A\,x^3 + B\,x^2 + 3\,A\,x^2 + 2\,B\,x);$$

$$\overline{y}'' = e^x\,(A\,x^3 + B\,x^2 + 3\,A\,x^2 + 2\,B\,x) +$$

$$+ e^x\,(3\,A\,x^2 + 2\,B\,x + 6\,A\,x + 2\,B) =$$

$$= e^x\,\big(A\,x^3 + (B + 6\,A)\,x^2 + (4\,B + 6\,A)\,x + 2\,B\big).$$

Подставляя эти значения в исходное неоднородное дифференциальное уравнение, получим

$$e^x\,\big(A\,x^3 + (B + 6\,A)\,x^2 + (4\,B + 6\,A)\,x + 2\,B\big) -$$

$$- 2\,e^x\,(A\,x^3 + B\,x^2 + 3\,A\,x^2 + 2\,B\,x) + e^x\,(A\,x^3 + B\,x^2) = x\,e^x,$$

откуда

$$A\,x^3 + B\,x^2 + 6\,A\,x^2 + 4\,B\,x + 6\,A\,x + 2\,B - 2\,A\,x^3 -$$

$$- 2\,B\,x^2 - 6\,A\,x^2 - 4\,B\,x + A\,x^3 + B\,x^2 = x;$$

сократив, имеем

$$6\,A\,x + 2\,B = x,$$

т. е.

$$6\,A = 1, \quad 2\,B = 0,$$

откуда

$$A = 1/6, \quad B = 0.$$

Подставляя эти значения в частное решение, получим:

$$\overline{y} = \frac{1}{6}\,x^3\,e^x.$$

Поскольку общее решение однородного уравнения есть функция

$$y_{\text{одн}} = (C_1 + C_2\,x)\,e^x,$$

общее решение неоднородного дифференциального уравнения есть функция

$$y = (C_1 + C_2\,x)\,e^x + \frac{1}{6}\,x^3\,e^x. \quad \blacktriangle$$

▽ **Пример 4.** Найти частное решение уравнения

$$y'' - y' - 2\,y = 9\,e^{2\,x},$$

удовлетворяющие начальным условиям

$$y(0) = 2, \qquad y'(0) = 13.$$

Решение. Находим общее решение однородного уравнения

$$y'' - y' - 2\,y = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$k^2 - k - 2 = 0$$

имеет два корня:

$$k_1 = -1, \qquad k_2 = 2.$$

Отсюда

$$y_{\text{ одн}} = C_1\,e^{-x} + C_2\,e^{2\,x}.$$

Так как в правой части заданного уравнения $P_n(x) = 9\,x^{2\,x}$ и $m = 2$ совпадает с одним из корней характеристического уравнения, то частное решение $\overline{y}$ следует искать в виде функции $A\,x\,e^{2\,x}$.

Дифференцируя дважды $\overline{y} = A\,x\,e^{2\,x}$, получим:

$$\overline{y}\,' = A\,e^{2\,x} + 2\,A\,x\,e^{2\,x};$$

$$\overline{y}\,'' = 2\,A\,e^{2\,x} + 2\,A\,e^{2\,x} + 4\,A\,x\,e^{2\,x}.$$

Подставим $\overline{y}$, $\overline{y}\,'$ и $\overline{y}\,''$ в левую часть заданного уравнения и определим коэффициент A :

$$4\,A\,e^{2\,x} + 4\,A\,x\,e^{2\,x} - A\,e^{2\,x} - 2\,A\,x\,e^{2\,x} - 2\,A\,x\,e^{2\,x} = 9\,e^{2\,x};$$

$$3\,A = 9; \qquad A = 3.$$

Следовательно, частное решение имеет вид

$$\overline{y} = 3\,x\,e^{2\,x},$$

а общее решение:

$$y = y_{\text{одн}} + \overline{y} = C_1\,e^{-x} + C_2\,e^{2\,x} + 3\,x\,e^{2\,x}.$$

Используя начальные условия , определим значения произвольных постоянных C_1 и C_2. Дифференцируя общее решение, получим:

$$y' = -C_1\,e^{-x} + 2\,C_2\,e^{2\,x} + 3\,e^{2\,x} + 6\,x\,e^{2\,x}. \tag{18.16}$$

Подставив в общее решение $x = 0$ и $y = 2$, будем иметь:

$$2 = C_1 + C_2.$$

Подставив $x = 0$ и $y' = 13$ в (18.16), будем иметь:

$$13 = -C_1 + 2\,C_2 + 3; \qquad 10 = -C_1 + 2\,C_2.$$

Решая систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2, \\ -C_1 + 2\,C_2 = 10, \end{cases}$$

находим: $C_1 = -2$ и $C_2 = 4$.

Таким образом,

$$y = -2\,e^{-x} + 4\,e^{2\,x} + 3\,x\,e^{2\,x}$$

есть частное решение, которое удовлетворяет заданным начальным условиям. ▲

Задача 1. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 5\,y' + 6\,y = (12\,x - 7)\,e^{-x}.$$

Ответ: $y = C_1\,e^{2\,x} + C_2\,e^{3\,x} + x\,e^{-x}$.

Задача 2. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 3\,y' + 2\,y = 2\,x^2 - 4\,x - 17.$$

Ответ: $y = C_1\,e^{-x} + C_2\,e^{-2x} + x^2 - 5\,x - 2$.

Задача 3. Найти частное решение уравнения

$$y'' + 4\,y = 8\,x,$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(0) = 0; \qquad y'(0) = 4.$$

Ответ: $y = \sin 2\,x + 2\,x$.

Метод неопределенных коэффициентов применим только в тех случаях, когда правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения, т. е. функция $f(x)$, является либо многочленом, либо показательной функцией, либо синусом или косинусом (этот случай нами не рассматривался), либо произведением этих функций. В тех случаях, когда правая часть $f(x)$ отлична от названных выше функций, применяют так называемый *метод вариации произвольных постоянных.*

Метод вариации произвольных постоянных. Метод вариации произвольных постоянных является общим методом, позволяющим решать неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Сущность метода заключается в следующем.

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами (18.13). Пусть общим решением соответствующего однородного уравнения (18.14) будет функция

$$y_{\text{одн}} = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x), \tag{18.17}$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — два линейно независимых частных решения однородного уравнения (18.14), а C_1 и C_2 — некоторые произвольные постоянные. Заменим в общем решении (18.17) постоянные C_1 и C_2 некоторыми функциями $C_1(x)$ и $C_2(x)$ так, чтобы

$$\overline{y} = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x) \tag{18.18}$$

стало решением неоднородного уравнения (18.13). Другими словами, будем искать частное решение уравнения (18.13) в виде (18.18), т. е. в виде копии функции (18.17), в которой осуществлена вариация (видоизменение) произвольных постоянных произвольными функциями.

Найдем условия на функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$, при которых (18.18) становится решением неоднородного уравнения (18.13).

Если $\overline{y}$ есть решение неоднородного уравнения (18.13), то при подстановке в левую часть этого уравнения $\overline{y}$, $\overline{y}\,'$ и $\overline{y}\,''$ получим тождество.

Дифференцируя (18.18), имеем

$$\overline{y}\,' = C_1'(x)\, y_1(x) + C_1(x)\, y_1'(x) + C_2'(x)\, y_2(x) + C_2(x)\, y_2'(x),$$

или

$$\overline{y}\,' = \left[C_1'(x)\, y_1(x) + C_2'(x)\, y_2(x)\right] + C_1(x)\, y_1'(x) + C_2(x)\, y_2'(x).$$

Выберем функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ так, чтобы сумма в квадратных скобках была равна нулю, т. е., чтобы имело место равенство

$$C_1'(x)\, y_1(x) + C_2'(x)\, y_2(x) = 0. \tag{18.19}$$

Тогда

$$\overline{y}\,' = C_1(x)\, y_1'(x) + C_2(x)\, y_2'(x).$$

Дифференцируя еще раз, находим $\overline{y}\,''$:

$$\overline{y}\,'' = C_1'(x)\, y_1'(x) + C_1(x)\, y_1''(x) + C_2'(x)\, y_2'(x) + C_2(x)\, y_2''(x).$$

Подставив $\overline{y}$, $\overline{y}'$ и $\overline{y}''$ в левую часть неоднородного уравнения (18.13), получим

$$C_1'(x)\,y_1'(x) + C_1(x)\,y_1''(x) + C_2'(x)\,y_2'(x) + \\ + C_2(x)\,y_2''(x) + p\,C_1(x)\,y_1'(x) + p\,C_2(x)\,y_2'(x) + \\ + q\,C_1(x)\,y_1(x) + q\,C_2(x)\,y_2(x) = f(x).$$

Или, группируя члены, получим:

$$C_1(x)\,[y_1''(x) + p\,y_1'(x) + q\,y_1(x)] + \\ + C_2(x)\,[y_2''(x) + p\,y_2'(x) + q\,y_2(x)] + \\ + C_1(x)\,y_1'(x) + C_2'(x)\,y_2'(x) = f(x).$$

Так как $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями однородного уравнения (18.14), то выражения в квадратных скобках равны нулю.

Следовательно,

$$C_1'(x)\,y_1'(x) + C_2'(x)\,y_2'(x) = f(x). \tag{18.20}$$

Итак, для нахождения неизвестных функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ надо решить совместно систему уравнений (18.19) и (18.20).

Таким образом, метод вариации произвольных постоянных отыскания частного решения неоднородного решения состоит из двух этапов:

На первом этапе находятся неизвестные функции $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ из системы уравнений (18.19) и (18.20):

$$\boxed{\begin{cases} C_1'(x)\,y_1(x) + C_2'(x)\,y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)\,y_1'(x) + C_2'(x)\,y_2'(x) = f(x). \end{cases}}$$

На втором этапе по найденным функциям $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ с помощью интегрирования отыскивают $C_1(x)$ и $C_2(x)$ и подставляют в представление для частного решения

$$\boxed{\overline{y} = C_1(x)\,y_1(x) + C_2(x)\,y_2(x).}$$

▽ **Пример 5.** Найти общее решение уравнения

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}.$$

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 + 1 = 0.$$

Следовательно,

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 1.$$

Поэтому частными решениями однородного уравнения

$$y'' + y = 0$$

являются функции

$$y_1 = \cos x, \qquad y_2 = \sin x,$$

а общее решение однородного уравнения есть функция

$$y_{\text{одн}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Таким образом, частное решение заданного уравнения имеет вид

$$\overline{y} = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x,$$

где функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0, \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \dfrac{1}{\sin x}. \end{cases}$$

Умножая первое уравнение этой системы на $\sin x$, а второе — на $\cos x$ и суммируя их, получаем

$$C_2'(x) \sin^2 x + C_2'(x) \cos^2 x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

т. е.

$$C_2'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Интегрируя находим

$$C_2(x) = \ln |\sin x|$$

(здесь не пишем $\ln |\sin x| + \mathrm{C}$, так как ищется не общее, а частное решение. Поэтому можно считать, что $C = 0$).

Подставляя

$$C_2'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

в первое из уравнений данной системы, получаем

$$C_1'(x) \cos x + \cos x = 0,$$

откуда

$$C_1'(x) = -1.$$

Следовательно,

$$C_1(x) = -x.$$

Таким образом, частное решение заданного дифференциального уравнения представляет функцию

$$\overline{y} = -x\,\cos x + \sin x\,\ln|\sin x|,$$

а общее решение — функцию

$$y = (C_1 - x)\,\cos x + (C_2 + \ln|\sin x|)\,\sin x. \quad \blacktriangle$$

Задача 4. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 4\,y = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Ответ:

$$y = (C_1 - \ln|\sin x|)\,\cos x + (C_2 - \frac{1}{2}\operatorname{ctg} x - x)\,\sin x.$$

Задача 5. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 4\,y' + 4\,y = e^{-2\,x}\,\ln x.$$

Ответ:

$$y = \left(C_1 + C_2\,x + \frac{1}{2}\,x^2\,\ln x - \frac{3}{4}\,x^2\right)\,e^{-2\,x}.$$

Принцип наложения. При решении неоднородных уравнений часто оказывается полезным *принцип наложения* (или *принцип суперпозиции.*)

Теорема 2. *Если правая часть линейного неоднородного уравнения представлена в виде суммы двух функций, т. е. дано уравнение*

$$y'' + p\,y' + q\,y = f_1(x) + f_2(x)$$

и $\overline{y_1}$ *есть частное решение уравнения*

$$y'' + p\,y' + q\,y = f_1(x),$$

а $\overline{y_2}$ *есть частное решение уравнения*

$$y'' + p\,y' + q\,y = f_2(x),$$

то $\overline{y} = \overline{y_1} + \overline{y_2}$ *есть частное решение заданного уравнения.*

▽ **Пример 6.** Найти общее решение уравнения

$$y'' - 7\,y' + 10\,y = 4\,e^{3\,x} + 10\,x + 3.$$

Решение. В данном случае $f_1(x) = 4\,e^{3\,x}$, а $f_2(x) = 10\,x + 3$. Ранее в примере 1 (с. 387) уже было найдено общее решение неоднородного уравнения

$$y'' - 7\,y' + 10\,y = 4\,e^{3\,x}.$$

Общим решением этого неоднородного уравнения с правой частью $f_1(x)$ является

$$y = C_1\,e^{2\,x} + C_2\,e^{5\,x} - 2\,e^{3\,x}.$$

Частным решением уравнения

$$y'' - 7\,y' + 10\,y = 10\,x + 3$$

с правой частью $f_2(x)$ является функция

$$\overline{y_2} = x + 1.$$

Следовательно, согласно теореме 2, общее решение исходного уравнения таково:

$$y = C_1\,e^{2\,x} + C_2\,e^{5\,x} - 2\,e^{3\,x} + x + 1. \quad \blacktriangle$$

Задача 6. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 3\,y' + 2\,y = 3\,e^{2\,x} + 2\,x^2.$$

Ответ:

$$y = C_1\,e^{2\,x} + C_2\,e^{x} + 3\,x\,e^{2\,x} + x^2 + 3\,x + \frac{7}{2}.$$

Колебания цен. В предыдущем параграфе рассматривалось однородное уравнение колебаний цен

$$s''(t) + 2\,\delta\,s'(t) + \omega_0^2\,s(t) = 0,$$

где $s(t)$ рассматривалось как отклонение рыночной цены от своего «естественного» значения. Экономический смысл имеет также и неоднородное уравнение

$$s''(t) + 2\,\delta\,s'(t) + \omega_0^2\,s(t) = f(t).$$

Оно описывает колебание цен на рынке при внешнем воздействии $f(t)$. Внешнее воздействие может быть интерпретировано,

например, как завоз на рынок большой партии аналогичной импортной продукции или же как государственные дотации и т. п.

18.5. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

Линейным неоднородным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + p_2(x)\, y^{(n-2)} + \ldots + \\ + p_{n-1}(x)\, y' + p_n(x)\, y = f(x), \quad (18.21)$$

где $p_i(x)$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, $f(x)$ — заданные функции.

Если правая часть уравнения (18.21) $f(x) \equiv 0$, то получаем уравнение

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + p_2(x)\, y^{(n-2)} + \ldots p_{n-1}(x)\, y' + p_n(x)\, y = 0, \quad (18.22)$$

называемое *линейным однородным уравнением*, соответствующим уравнению (18.21).

При отыскании общего и частного решений уравнений (18.21) и (18.22) важную роль играет понятие линейной зависимости и независимости функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$.

Определение линейной зависимости и независимости для двух функций y_1 и y_2 было дано на с. 374. Приведем более общее определение, пригодное для любого конечного числа функций.

Функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ называют *линейно зависимыми* в интервале $(a,\ b)$, если существуют постоянные числа μ_1, μ_2, ..., μ_n, не все равные нулю, такие, что

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i\, y_i(x) \equiv 0$$

для любых $x \in (a,\ b)$. Если же указанное тождество выполняется только в случае, когда все $\mu_i = 0$, то функции $y_i(x)$ называются *линейно независимыми* в интервале $(a,\ b)$.

Совокупность n линейно независимых решений

$$y_1(x), \quad y_2(x), \quad \ldots, \quad y_n(x)$$

уравнения (18.22) называется *фундаментальной системой решений*. С ее помощью строится общее решение однородного уравнения (18.22). Справедлива следующая

Теорема 1. *Если* $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ — *любая фундаментальная система решений уравнения* (18.22), *то функция*

$$\boxed{y_{\text{одн}} = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x) + \ldots + C_n\, y_n(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i(x),}$$

где C_i — *произвольные постоянные, является общим решением уравнения* (18.22).

Теорема 2 (о структуре общего решения неоднородного уравнения). *Общее решение линейного неоднородного уравнения* (18.21) *имеет вид*

$$\boxed{y = y_{\text{одн}} + \overline{y},}$$

где $y_{\text{одн}}$ — *общее решение соответствующего ему однородного уравнения* (18.22), *а* $\overline{y}$ — *одно из частных решений уравнения* (18.21).

В общем случае не существует метода отыскания фундаментальной системы решений и общего решения уравнения (18.21). Только в частном случае, когда в уравнении (18.21) все коэффициенты $p_i(x)$ являются постоянными числами, существует метод нахождения фундаментальной системы решений и общего решения уравнения (18.21). Этот метод, основанный на использовании характеристического уравнения

$$k^n + p_1\, k^{n-1} + p_2\, k^{n-2} + \ldots + p_{n-1}\, k + p_n = 0,$$

аналогичен методу, изложенному в предыдущем параграфе для дифференциального уравнения второго порядка.

▽ **Пример.** Найти общее решение однородного уравнения

$$y''' - y'' + y' - y = x^2 + x.$$

Решение. Находим общее решение однородного уравнения

$$y''' - y'' + y' - y = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$k^3 - k^2 + k - 1 = 0$$

можно переписать так:

$$(k-1)\,(k^2+1)=0,$$

откуда находим действительный корень $k=1$ (соответствующий уравнению $k-1=0$) и числа $\alpha=0$, и $\beta=1$ (соответствующие уравнению $k^2+1=0$, не имеющему действительных корней). Тогда

$$y_{\text{одн}}=C_1\,e^x+C_2\,\cos x+C_3\,\sin x.$$

В правой части заданного уравнения имеется многочлен второй степени и $e^{m\,x}=e^{0\cdot x}=1$. Так как число $m=0$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение $\overline{y}$ следует искать в виде многочлена второй степени, т. е.

$$\overline{y}=A\,x^2+B\,x+C.$$

Определим производные $\overline{y}\,'$, $\overline{y}\,''$ и $\overline{y}\,'''$ и подставим в левую часть заданного уравнения:

$$\overline{y}\,'=2\,A\,x+B,\qquad \overline{y}\,''=2\,A,\qquad \overline{y}\,'''=0,$$

$$0-2\,A+2\,A\,x+B-A\,x^2-B\,x-C=x^2+x,$$

или

$$-A\,x^2+(2\,A-B)\,x+(-2\,A+B-C)=x^2+x.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, получим систему

$$\begin{cases}-A=1,\\ 2\,A-B=1,\\ -2\,A+B-C=0.\end{cases}$$

Решение этой системы дает: $A=-1$, $B=-3$, $C=-1$. Следовательно, частное решение

$$\overline{y}=-x^2-3\,x-1,$$

а общее решение

$$y=C_1\,e^x+C_2\,\cos x+C_3\,\sin x-x^2-3\,x-1.\quad\blacktriangle$$

Задача 1. Найти частное решение уравнения

$$y'''+y'=e^{2\,x},$$

удовлетворяющее условиям:

$$y(0)=0,\quad y'(0)=0,\quad y''(0)=0.$$

Ответ: $y = -\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\cos x - \frac{1}{5} + \frac{1}{10}e^{2x}$.

Задача 2. Найти частное решение дифференциального уравнения четвертого порядка

$$y^{(4)} - y = 8e^x,$$

удовлетворяющее условиям:

$$y(0) = -1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1, \quad y'''(0) = 0.$$

Ответ: $y = e^{-x} - 3e^x + \cos x + 2\sin x + 2xe^{2x}$.

18.6. Решение дифференциальных уравнений с помощью пакета Maple

Для решения обыкновенных дифференциальных уравнений используется команда

```
>dsolve(eqns,vars,option);
```

Здесь `eqns` — дифференциальное уравнение (или система) относительно неизвестных функций `vars`, а `option` — дополнительные условия, позволяющие указать метод решения задачи (например, `type=numeric` — для численного решения).

Если дополнительных условий нет, то Maple пытается найти аналитическое решение задачи, так как по умолчанию принято, что `type=exact`. При этом решение будет содержать неопределенные константы, изображаемые _$C1$, _$C2$, ...

Для задачи Коши в уравнение (уравнения) `eqns` нужно включить также начальные условия.

▽ **Пример 1.** Найти общее решение однородного уравнения

$$y''' - y'' + y' - y = x^2 + x.$$

Решение.

```
>dsolve(diff(y(x),x$3)-diff(y(x),x$2)+
diff(y(x),x)-y(x)=x^2+x,y(x));
```

$$y(x) = -1 - 3x - x^2 + _C1\cos(x) + _C2e^x + _C3\sin(x).$$

То же можно решить также и в два этапа:

```
>eqn:=diff(y(x),x$3)-diff(y(x),x$2)+
diff(y(x),x)-y(x)=x^2+x:
```

$$y(x) = -1 - 3\,x - x^2 + _C1\cos(x) + _C2\,e^x + _C3\sin(x).$$

Этот результат совпадает с ответом, полученным в примере п. 18.5. ▲

▽ **Пример 2.** Найти частное решение дифференциального уравнения четвертого порядка

$$y^{(4)} - y' = 8\,e^{\,x},$$

удовлетворяющее условиям

$$y(0) = -1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1, \quad y'''(0) = 0.$$

Решение. Обозначим заданное дифференциальное уравнение через `eqn` и решим его:

```
>eqn:=diff(y(x),x$4)-y(x)=8*exp(x):
>dsolve(eqn,y(x));
```

$$\frac{1 - 3\,(e^x)^2 + \cos x\,e^x + 2\,\sin x\,e^x + 2\,x\,e^{2\,x}\,e^x}{e^x}.$$

В полученной дроби поделим числитель на знаменатель:

```
>expand(");
```

$$e^{-x} - 3\,e^x + \cos x + 2\,\sin x + 2\,x\,e^{2\,x}$$

(вообще команда `expand(")` раскрывает скобки).

Этот результат совпадает с ответом, полученным в задаче 2 п. 18.5. ▲

С помощью команды `dsolve` можно решать и дифференциальные уравнения, рассмотренные в гл. 17

▽ **Пример 3.** Решить уравнение Бернулли

$$x\,y' - y = x^3\,y^2.$$

Решение.

```
>dsolve(x*dsolve(diff(y(x),x)-y=x^3*y^2,y(x));
```

$$\frac{1}{y(x)} = -\frac{1}{4}\,\frac{x^4 - 4\,_C1}{x}.$$

Результат вычисления совпадает с ответом

$$y = \frac{4\,x}{4\,C - x^4},$$

приведенным при изучении уравнения Бернулли. ▲

Экономический план можно представить себе как численное решение конкретной системы уравнений общего равновесия.

В. Леонтьев

Глава 19
Системы дифференциальных уравнений

19.1. Основные понятия

Совокупность уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x,\, y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x,\, y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x,\, y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n), \end{cases} \tag{19.1}$$

где y_1, y_2, ..., y_n — искомые функции от независимой переменной x, называется *системой дифференциальных уравнений первого порядка.* Всякая совокупность n функций

$$y_1 = y_1(x), \quad y_2 = y_2(x), \quad \ldots, \quad y_n = y_n(x) \tag{19.2}$$

называется *решением* системы (19.1) в интервале X, если она обращает все уравнения системы (19.1) в тождества, справедливые при всех значениях x из интервала X. Процесс нахождения решений системы называется *интегрированием* этой системы. График решения (19.2) называется *интегральной кривой* системы (19.2).

Система уравнений (19.1) разрешена относительно производных от искомых функций. Поэтому ее называют еще системой дифференциальных уравнений *в нормальной форме* или *нормальной системой.*

Задача Коши для нормальной системы (19.1) ставится так: найти решение (19.2), удовлетворяющее *начальным условиям*

(*условиям Коши*)

$$y_1(x) = y_1(x_0), \quad y_2(x) = y_2(x_0), \quad \ldots, \quad y_n(x) = y_n(x_0),$$

где x_0 — заданное число. *Геометрически* ищется интегральная кривая, проходящая через данную точку

$$(x_0,\ y_1(x_0),\ y_2(x_0),\ \ldots,\ y_n(x_0)).$$

Рассмотрим нормальную систему вида (19.1), где x — время, а $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ — координаты точки n-мерного пространства. Это пространство будем называть *фазовым пространством*. В случае $n = 1$ фазовое пространство есть ось Ox; при $n = 2$ — плоскость $(x,\ y)$ — *фазовая плоскость*.

Всякое решение

$$y_1 = y_1(x), \quad y_2 = y_2(x), \quad \ldots, \quad y_n = y_n(x) \tag{19.3}$$

(интегральная кривая) системы (19.1) представляет собой *закон движения* точки в фазовом пространстве. Поэтому решение (19.3) называют просто *движением*, определяемым системой дифференциальных уравнений (19.1), а путь, описываемый точкой в фазовом пространстве, — траекторией этого движения.

Левые части системы (19.1) суть составляющие (по осям координат) скорости движения точки. Поэтому система (19.1) задает так называемое *поле скоростей* движений, так что точка может проходить в момент времени x через положение

$$(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$$

только с заданной скоростью. Требуется найти сами движения и изучить их свойства.

Если скорость, с которой точка проходит через положение

$$(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n),$$

не зависит явно от момента времени прохождения, т. е. система (19.1) имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n), \end{cases} \tag{19.4}$$

она называется *стационарной* или *автономной* системой.

Если правой части нормальной системы *линейно* зависят от искомых функций

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_n,$$

т. е. эта система имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = p_{11}(x)\, y_1 + p_{12}(x)\, y_2 + \ldots + p_{1n}(x)\, y_n + f_1(x), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = p_{21}(x)\, y_1 + p_{22}(x)\, y_2 + \ldots + p_{2n}(x)\, y_n + f_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = p_{n1}(x)\, y_1 + p_{n2}(x)\, y_2 + \ldots + p_{nn}(x)\, y_n + f_n(x), \end{cases} \tag{19.5}$$

она называется *линейной системой.*

19.2. Система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Из линейных систем (19.5) наиболее важными, как в теории, так и в приложениях, являются системы с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = p_{11}\, y_1 + p_{12}\, y_2 + \ldots + p_{1n}\, y_n + f_1(x), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = p_{21}\, y_1 + p_{22}\, y_2 + \ldots + p_{2n}\, y_n + f_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = p_{n1}\, y_1 + p_{n2}\, y_2 + \ldots + p_{nn}\, y_n + f_n(x), \end{cases} \tag{19.6}$$

где функции $f_i(x)$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ обычно предполагаются непрерывными в некотором интервале X.

Если все $f_i(x) \equiv 0$, то система (19.6) называется *однородной*, в противном случае — *неоднородной.*

В матричной форме однородная система выглядит следующим образом:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.}$$

По-другому ее можно записать в следующем виде:

$$\boxed{\frac{dy_i}{dx} = \sum_{i=0}^{n} p_{ij}\, y_j,}$$

где $i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

В более компактной форме последнюю формулу можно записать так:

$$\boxed{\frac{dY}{dx} = P\,Y,} \tag{19.7}$$

где $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ — искомый вектор, а P — численная матрица размера $n \times n$.

Чтобы найти решение системы (19.7), введем пробную функцию

$$\boxed{Y = Z\,e^{k\,x},}$$

где

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Подставим ее в левую часть равенства (19.7). Получим

$$\frac{dY}{dx} = \frac{d\,(Z\,e^{k\,x})}{dx} = k\,Z\,e^{k\,x}.$$

Отсюда и из (19.7) вытекает, что

$$P\,Z\,e^{k\,x} = k\,Z\,e^{k\,x}$$

или

$$P\,Z = k\,Z.$$

Полученное уравнение — это уравнение на собственные векторы квадратной матрицы. Использование единичной матрицы E дает уравнение на собственные числа квадратной матрицы

$$\boxed{\det(P - k\,E) = 0,}$$

которое называется *характеристическим уравнением.*

Если все n корней k_j характеристического уравнения различны и Z_j — соответствующие вектора матрицы P, то общее решение системы (19.7) имеет вид

$$\boxed{Y = \sum_{i=0}^{n} C_j\,Z_j\,e^{k_j\,x},}$$

где $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

▽ **Пример 1.** Найти общее решение однородной автономной системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 + 2\,y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 2\,y_1 + y_2. \end{cases}$$

Решение. Решаем характеристическое уравнение

$$\det(P - k\,E) = \begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ 2 & 1-k \end{vmatrix} = 0;$$

$$(1-k)^2 - 4 = 0; \qquad k_1 = -1, \quad k_2 = 3.$$

Общее решение имеет вид

$$Y = C_1\,Z_1\,e^{-x} + C_2\,Z_2\,e^{3\,x}.$$

Для определения собственного вектора

$$Z_1 = \begin{pmatrix} z_{11} \\ z_{12} \end{pmatrix},$$

соответствующего собственному значению $k_1 = -1$, решаем систему

$$P\,Z_1 = k_1\,Z_1,$$

которую можно записать так:

$$\det(P - k_1 E) = \begin{pmatrix} 1 - k_1 & 2 \\ 2 & 1 - k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{11} \\ z_{12} \end{pmatrix} = 0.$$

Отсюда

$$\begin{pmatrix} 1 + 1 & 2 \\ 2 & 1 + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{11} \\ z_{12} \end{pmatrix} = 0,$$

или

$$\begin{pmatrix} 2(z_{11} + z_{12}) \\ 2(z_{11} + z_{12}) \end{pmatrix} = 0.$$

Так как определитель этой системы равен нулю, то система имеет бесчисленное множество решений. В данном случае можно выбрать $z_{11} = 1$, а $z_{12} = -1$, т. е. можно считать, что

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Для определения собственного вектора

$$Z_2 = \begin{pmatrix} z_{21} \\ z_{22} \end{pmatrix},$$

соответствующего собственному значению $k_1 = 3$, решаем систему

$$P\,Z_1 = k_1 Z_1,$$

которую можно записать так:

$$\det(P - k_2 E) = \begin{pmatrix} 1 - 3 & 2 \\ 2 & 1 - 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{21} \\ z_{22} \end{pmatrix} = 0.$$

Отсюда

$$\begin{pmatrix} 2\,(-z_{21} + z_{22}) \\ 2\,(z_{21} - z_{22}) \end{pmatrix} = 0.$$

Так как определитель этой системы равен нулю, система имеет бесчисленное множество решений. В данном случае можно выбрать $z_{11} = 1$, а $z_{12} = 1$, т. е. можно считать, что

$$Z_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, общее решение заданного уравнения имеет вид

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x},$$

это означает, что

$$y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}, \quad y_2 = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}. \quad \blacktriangle$$

Последняя однородная система может быть решена и другим способом — приведением к однородному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами.

$\triangledown$ **Пример 2.** Найти общее решение однородной автономной системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 + 2\,y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 2\,y_1 + y_2 \end{cases}$$

приведением к дифференциальному уравнению второго порядка.

Решение. Продифференцируем обе части первого уравнения по переменной x:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{dy_1}{dx} + 2\,\frac{dy_2}{dx}.$$

Заменим в полученном уравнении $\dfrac{dy_2}{dx}$ правой частью второго уравнения системы:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{dy_1}{dx} + 2\,(2\,y_1 + y_2),$$

или

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{dy_1}{dx} + 4\,y_1 + 2\,y_2. \tag{19.8}$$

Из первого уравнения системы находим y_2:

$$y_2 = \frac{1}{2}\,\frac{dy_1}{dx} - \frac{1}{2}\,y_1. \tag{19.9}$$

Подставим в (19.8) вместо y_2 в правую часть (19.9), получим

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{dy_1}{dx} + 4\,y_1 + 2\left(\frac{1}{2}\,\frac{dy_1}{dx} - \frac{1}{2}\,y_1\right),$$

откуда

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} - 2\,\frac{dy_1}{dx} - 3\,y_1 = 0.$$

Это обыкновенное линейное однородное дифференциальное уравнение. Так как характеристическое уравнение

$$k^2 - 2\,k - 3 = 0$$

имеет корни

$$k_1 = -1, \quad k_2 = 3,$$

то

$$y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3\,x}. \tag{19.10}$$

Найдем $\dfrac{dy_1}{dx}$ и подставим в (19.9). Получим

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{d}{dx}\,(C_1 e^{-x} + C_2 e^{3\,x}) = -C_1 e^{-x} + 3\,C_2 e^{3\,x};$$

$$y_2 = \frac{1}{2}\,\frac{dy_1}{dx} - \frac{1}{2}\,y_1 =$$

$$= \frac{1}{2}\,(-C_1 e^{-x} + 3\,C_2 e^{3\,x}) - \frac{1}{2}\,(C_1 e^{-x} + C_2 e^{3\,x}) =$$

$$= -C_1 e^{-x} + C_2 e^{3\,x}.$$

Отсюда и из (19.10), получаем

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3\,x}. \quad \blacktriangle$$

Методом приведения к одному линейному дифференциальному уравнению можно решать и неоднородные системы.

▽ **Пример 3.** Найти общее решение неоднородной линейной системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = -8\,y_1 + 3\,y_2 + 5\,e^{-x}, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -18\,y_1 + 7\,y_2 + 12\,e^{-x} \end{cases}$$

приведением к дифференциальному уравнению второго порядка.

Решение. Продифференцируем обе части первого уравнения по переменной x.

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = -8\,\frac{dy_1}{dx} + 3\,\frac{dy_2}{dx} - 5\,e^{-x}.$$

Заменим в полученном уравнении $\dfrac{dy_2}{dx}$ правой частью второго уравнения системы:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = -8\,\frac{dy_1}{dx} + 3\,(-18\,y_1 + 7\,y_2 + 12\,e^{-x}) - 5\,e^{-x},$$

или

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = -8\,\frac{dy_1}{dx} - 54\,y_1 + 21\,y_2 + 31\,e^{-x}. \tag{19.11}$$

Из первого уравнения системы находим y_2:

$$y_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{dy_1}{dx} + 8\,y_1 - 5\,e^{-x}\right). \tag{19.12}$$

Подставим в (19.11) вместо y_2 в правую часть (19.12) и, приведя подобные члены, получим уравнение

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} + \frac{dy_1}{dx} - 2\,y_1 = -4\,e^{-x}. \tag{19.13}$$

Решаем вначале однородное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} + \frac{dy_1}{dx} - 2\,y_1 = 0.$$

Так как характеристическое уравнение

$$k^2 + k - 2 = 0$$

имеет корни

$$k_1 = -2, \quad k_2 = 1,$$

то

$$y_{1\,\text{одн}} = C_1 e^{-2\,x} + C_2 e^{x}.$$

Пусть $\overline{y_1} = A\,e^{-x}$; тогда $\overline{y_1}' = -A\,e^{-x}$ и $\overline{y_1}'' = A\,e^{-x}$. Подставив эти значения в (19.13), находим $A = 2$ и, следовательно,

$$\overline{y_1} = 2\,e^{-x}.$$

Тогда

$$y_1 = y_{1\,\text{одн}} + \overline{y_1} = C_1\,e^{-2\,x} + C_2\,e^{x} + 2\,e^{-x}. \tag{19.14}$$

Чтобы найти y_2, продифференцируем обе части последнего равенства:

$$\frac{dy_1}{dx} = -2\,C_1 e^{-2\,x} + C_2 e^{x} - 2\,e^{-x}.$$

Найденное выражение для $\dfrac{dy_1}{dx}$ подставим в (19.12). Получим

$$y_2 = 2\,C_1\,e^{-2\,x} + 3\,C_2\,e^{x} + 3\,e^{-x}.$$

Отсюда и из (19.14), получаем

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-2\,x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-x}. \quad \blacktriangle$$

Задача. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 2\,y_1 + y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 3\,y_1 + 4\,y_2 \end{cases}$$

двумя способами: 1) с помощью характеристического уравнения; 2) сведением к дифференциальному уравнению второго порядка.

Ответ:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5\,x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{x}.$$

19.3. Решение систем дифференциальных уравнений с помощью компьютерной математики

Команда `dsolve`, рассмотренная в гл. 18, позволяет решать также и системы дифференциальных уравнений. Покажем ее использование на конкретных примерах.

$\triangledown$ **Пример 1.** Найти с помощью пакета Maple решение однородной линейной системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 + 2\,y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 2\,y_1 + y_2, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 1.$$

Решение.

```
>sys:=diff(y(x),x)=y(x)+2*z(x),
diff(z(x),x)=2*y(x)+z(x):
>Y:={y(x),z(x)}:
>dsolve({sys,y(0)=0,z(0)=1},Y);
```

$$\left\{y(x) = \frac{1}{2}\,e^{3\,x} - \frac{1}{2}\,e^{-x}, \quad z(x) = \frac{1}{2}\,e^{-x} + \frac{1}{2}\,e^{3\,x}\right\}.$$

Этот результат полностью согласуется с примерами 1 и 2 из п. 19.2. ▲

▽ **Пример 2.** Найти с помощью пакета Maple решение неоднородной линейной системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = -8\,y_1 + 3\,y_2 + 5\,e^{-x}, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -18\,y_1 + 7\,y_2 + 12\,e^{-x}, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 1.$$

Решение.

```
>sys:=diff(y(x),x)=-8*y(x)+3*z(x)+5*exp(-x),
diff(z(x),x)=-18*y(x)+7*z(x)+12*exp(-x):
>Y:={y(x),z(x)}:
>dsolve({sys,y(0)=0,z(0)=1},Y);
```

$$\left\{y(x) = 2\,e^{x} - 4\,e^{-2\,x} + 2\,e^{-x}, \quad z(x) = -8\,e^{-2\,x} + 6\,e^{x} + 3\,e^{-x}\right\}.$$

Этот результат согласуется с примером 3 из п. 19.2. ▲

Пакет символьных вычислений позволяет решать и те системы, методы решения которых не излагаются в настоящей книге.

Приведем пример решения системы дифференциальных уравнений, у которой соответствующее характеристическое уравнение не имеет действительных корней.

▽ **Пример 3.** Найти с помощью пакета Maple решение неоднородной линейной системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 2\,y_1 + y_2(x) + \cos x, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -y_1 + 3\,\sin x, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y_1(0) = 2, \quad y_2(0) = -4.$$

Решение.

```
>sys:=diff(y(x),x)=2*y(x)+z(x)+cos(x),
diff(z(x),x)=-y(x)+3*sin(x):
>Y:={y(x),z(x)}:
>dsolve({sys,y(0)=2,z(0)=-4},Y);
```

$$\Big\{y(x) = e^x + \cos(x), \quad z(x) = -e^x - 3\,\cos(x) - \sin(x)\Big\}. \quad \blacktriangle$$

Если ты продашь мне рыбу, я буду сыт весь день;
если научишь ее ловить, буду сыт всю жизнь.

Африканская пословица

Глава 20
Разностные уравнения

20.1. Основные понятия

Разностные уравнения играют большую роль в экономической теории. Многие экономические законы доказывают с помощью именно этих уравнений.

Пусть время t выступает как независимая переменная, а зависимая переменная определяется для времени t, $t-1$, $t-2$ и т. д.

Обозначим через y_t значение в момент времени t; через y_{t-1} — значение функции в момент, сдвинутый назад на единицу (например, в предыдущем часу, на предыдущей неделе и т. п.); через y_{t-2} — значение функции y в момент, сдвинутый на две единицы назад, и т. д.

Уравнение

$$\boxed{a_0\, y_t + a_1\, y_{t-1} + a_2\, y_{t-2} + \ldots + a_n\, y_{t-n} = f(t),} \qquad (20.1)$$

где a_0, a_1, ..., a_n — постоянные, называется *разностным неоднородным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами.*

Уравнение

$$\boxed{a_0\, y_t + a_1\, y_{t-1} + a_2\, y_{t-2} + \ldots + a_n\, y_{t-n} = 0,} \qquad (20.2)$$

в котором $f(t) = 0$, называется *разностным однородным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами.*

Решить разностное уравнение n-го порядка — значит найти функцию y_t, которая обращает это уравнение в верное тождество.

Решение, в котором отсутствует произвольная постоянная, называется *частным решением разностного уравнения*; если же в решении есть произвольная постоянная, то оно называется *общим решением.*

Можно доказать следующие теоремы.

Теорема 1. *Если однородное разностное уравнение* (20.2) *имеет решения* $y_1(t)$ *и* $y_2(t)$, *то решением будет также функция*

$$y_{\text{одн}} = C_1\, y_1(t) + C_2\, y_2(t),$$

где C_1 *и* C_2 — *произвольные постоянные.*

Теорема 2. *Если* $\overline{y(t)}$ — *частное решение неоднородного разностного уравнения* (20.1) *и* $y(t,\, C_1,\, C_2,\, \ldots,\, C_n)$ — *общее решение однородного уравнения* (20.2), *то общим решением неоднородного уравнения* (20.1) *будет функция*

$$y(t) = y(t,\, C_1,\, C_2,\, \ldots,\, C_n) + \overline{y(t)},$$

где $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$ — *произвольные постоянные.*

Эти теоремы сходны с теоремами для дифференциальных уравнений.

Системой линейных разностных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами p_{ij} называется система вида

$$\boxed{Y_t = P\, Y_{t-1} + F_t,}$$

где $Y_t = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \cdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$ — вектор из неизвестных функций,

$F_t = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \cdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$ — вектор из известных функций,

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

есть матрица размера $n \times n$.

Эта система может быть решена сведением к разностному уравнению n-го порядка по аналогии с решением системы дифференциальных уравнений.

20.2. Решение разностных уравнений

Решение разностного уравнения первого порядка. Рассмотрим неоднородное разностное уравнение

$$y_t - a\,y_{t-1} = f(t). \tag{20.3}$$

Соответствующее однородное уравнение есть

$$y_t - a\,y_{t-1} = 0. \tag{20.4}$$

Проверим, будет ли функция

$$y_{\,t\ \text{одн}} = a^{\,t}$$

решением уравнения (20.3).

Имеем

$$y_{\,t-1\ \text{одн}} = a^{\,t-1}.$$

Подставляя в уравнение (20.4), получаем

$$a^{\,t} - a\,a^{\,t-1} = a^{\,t} - a^{\,t} = 0.$$

Следовательно, $y_{t\ \text{одн}} = a^{\,t}$ есть решение уравнения (20.4).

Общее решение уравнения (20.4) есть функция

$$\boxed{y_{\,t\ \text{одн}} = C\,a^{\,t},}$$

где C — произвольная постоянная.

Пусть $\overline{y}_t$ — частное решение неоднородного уравнения (20.3). Тогда общее решение разностного уравнения (20.3) есть функция

$$\boxed{y_t = y_{\,t\ \text{одн}} + \overline{y}_t = C\,a^{\,t} + \overline{y}_t.}$$

Найдем частное решение разностного уравнения (20.3), если $f(t) = c$, где c — некоторая постоянная.

Будем искать решение в виде постоянной m. Имеем

$$\overline{y}_t = m, \qquad \overline{y}_{t-1} = m.$$

Подставив эти постоянные в уравнение

$$\overline{y}_t - a\,\overline{y}_{t-1} = c,$$

получаем

$$m - a\,m = c,$$

откуда

$$m = \frac{c}{1-a}.$$

Следовательно, общее решение разностного уравнения

$$\boxed{y_t - a\,y_{t-1} = c}$$

есть

$$\boxed{y_t = C\,a^{\,t} + \frac{c}{1-a}.}$$

▽ **Пример 1.** Найти с помощью разностного уравнения формулу прироста денежного вклада A в сбербанке, положенного под p % годовых.

Решение. Если некоторая сумма y_0 положена в банк под сложный процент p, то к концу года t ее размер составит

$$y_t = \left(1 + \frac{p}{100}\right) y_{t-1}.$$

Это однородное разностное уравнение первого порядка. Его решение

$$y_t = C\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t,$$

где C — некоторая постоянная, которую можно рассчитать по начальным условиям.

Если принять $y_0 = A$, то $C = A$, откуда

$$\boxed{y_t = A\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t.}$$

Это известная формула подсчета прироста денежного вклада, положенного в сбербанк под сложный процент. ▲

Решение разностного уравнения второго порядка. Рассмотрим неоднородное разностное уравнение второго порядка

$$y_t + p\,y_{t-1} + q\,y_{t-2} = f(t) \tag{20.5}$$

и соответствующее однородное уравнение

$$\boxed{y_t + p\,y_{t-1} + q\,y_{t-2} = 0.} \tag{20.6}$$

Если $k \neq 0$ является корнем уравнения

$$\boxed{k^2 + p\,k + q = 0,} \tag{20.7}$$

то функция

$$y_{\,t\ \text{одн}} = k^{\,t}$$

есть решение однородного уравнения (20.6).

Действительно, подставляя k^t в левую часть уравнения (20.6) и учитывая (20.7), получаем

$$k^t + p\,k^{t-1} + q\,k^{t-2} = k^{t-2}\,(k^2 + p\,k + q) = 0.$$

Таким образом, если k — корень уравнения (20.7), то k^t — решение уравнения (20.6).

Уравнение (20.7) называется *характеристическим уравнением* для уравнения (20.6).

Если дискриминант $p^2 - 4\,q$ характеристического уравнения (20.7) больше нуля, то уравнение (20.7) имеет два разных действительных корня k_1 и k_2, а общее решение однородного уравнения(20.6) имеет следующий вид:

$$\boxed{y_{t\ \text{одн}} = C_1\,k_1^t + C_2\,k_2^t.}$$

Общее решение неоднородного уравнения (20.5) таково:

$$\boxed{y_t = y_{t\ \text{одн}} + \overline{y}_t = C_1\,k_1^t + C_2\,k_2^t + \overline{y}_t,}$$

где $\overline{y}_t$ — частное решение неоднородного уравнения (20.5), а C_1 и C_2 — произвольные постоянные, которые можно вычислить по начальным условиям, например, $y(0) = y_0$, $y(1) = y_1$.

▽ **Пример 2.** Найти решение разностного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y_t - 5\,y_{t-1} + 6\,y_{t-2} = 7,$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$y_0 = 5, \quad y_1 = 9.$$

Решение. Характеристическое уравнение для соответствующего однородного разностного уравнения таково:

$$k^2 - 5\,k + 6 = 0.$$

Корни уравнения $k_1 = 2$, $k_2 = 3$ действительны и различны. Следовательно, общее решение однородного разностного уравнения есть функция

$$y_t = C_1\,2^t + C_2\,3^t.$$

Предположим далее, что $\overline{y}_t = c$ есть частное решение неоднородного уравнения, тогда

$$c - 5\,c + 6\,c = 7,$$

откуда

$$2c = 7; \quad c = \frac{7}{2}.$$

Таким образом, общее решение заданного неоднородного уравнения есть функция

$$y_t = C_1 2^t + C_2 3^t + \frac{7}{2}.$$

Постоянные C_1 и C_2 определяем по начальным условиям

$$y_0 = 5, \qquad y_1 = 9.$$

Для $t = 0$ и $t = 1$ соответственно получаем

$$5 = C_1 2^0 + C_2 3^0 + \frac{7}{2}, \qquad 9 = C_1 2^1 + C_2 3^1 + \frac{7}{2}.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \dfrac{3}{2}, \\ 2C_1 + 3C_2 = \dfrac{11}{2}, \end{cases}$$

находим

$$C_1 = -1, \qquad C_2 = \frac{5}{2}.$$

Поэтому в итоге имеем

$$y_t = -2^t + \frac{5}{2} 3^t + \frac{7}{2}. \quad \blacktriangle$$

Математика — это искусство давать разным вещам одно наименование.

Анри Пуанкаре

Глава 21
Применение аппарата дифференциальных и разностных уравнений в социально-экономической сфере

21.1. Естественный рост и задача Бернулли о кредитовании

В природе и обществе встречаются многочисленные процессы, в ходе которых некоторые величины изменяются по следующему закону: *в течение любого промежутка времени фиксированной длительности Δt значение величины меняется в одно и то же число раз.*

Обозначим через $m(t)$ массу колонии бактерий в момент времени t. Если нет ограничений в количестве питательных веществ и объеме сосуда и притом отсутствуют живые существа, поедающие эти бактерии, то за равные промежутки времени масса колонии будет возрастать в одно и то же число раз.

Аналогично обстоят дела в любой совокупности живых существ при условии, что нет ограничений в пище и в пространстве и нет истребляющих их врагов. Растение куреслеп трижды в год дает по 15 000 семян; следовательно от одного растения могло бы произойти более $15000^3 = 3375$ миллиардов растений. Сельдь откладывает 30 000 икринок, карп — свыше миллиона, треска от 4 до 6 миллионов, солитер — около 42 миллионов, аскарида — приблизительно 64 миллиона. Даже при медленном размножении какого-либо вида животных территория могла бы быть в сравнительно короткое время буквально наводнена им, если бы борьба за существование между видами не ставила предела этому распространению. Если бы это препятствие на какое-то время исчезло, мы наблюдали бы неслыханное размножение животных. Расчеты

показывают, что потомство одной пары мух за два года при беспрепятственном размножении имело бы массу, превосходящую массу Земли. Известны случаи, когда некоторые виды животных и растений, попав в благоприятные условия, размножались столь быстро, что становились бедствием (саранча в Африке, кролики в Австралии, водяной гиацинт в США и т. д.).

Процессы, в которых величина увеличивается за равные промежутки времени в одно и то же число раз, называют *процессами естественного роста.*

Сумма вклада в сбербанке за данный промежуток времени возрастает в одно и то же число раз (скажем, за год на 5 %). Эта сумма подчинена закону естественного роста.

При распаде ядер во время цепной реакции образуются нейтроны. Чем больше свободных нейтронов в данном объеме, тем чаще они сталкиваются с ядрами и тем больше новых нейтронов появляется. Процесс увеличения количества свободных нейтронов также представляет собой процесс естественного роста.

Если допустить, что значение величины $y(t)$ меняется в одно и то же число раз не в течение промежутка фиксированной длительности Δt, а мгновенно, то мы приходим к процессу, при котором скорость изменения величины $v(t)$ в момент времени t пропорциональна значению этой величины в тот же момент времени. Уравнение, описывающее этот процесс, можно записать так:

$$v(t) = k\,y(t).$$

Так как $v(t) = y'(t)$, то получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$\boxed{y'(t) = k\,y(t).} \tag{21.1}$$

Уравнение (21.1) называют *дифференциальным уравнением естественного роста.* Впервые его получил Якоб Бернулли.

Им же была решена следующая задача.

▽ **Пример (задача о кредитовании).** Пусть заимодавец платит кредитору p % процентов от занятой суммы y_0 за год; сколько он должен уплатить за год на каждую единицу занятой суммы, если проценты нарастают *непрерывно?*

Решение. Поскольку проценты нарастают непрерывно, то скорость $y'(t)$ изменения величины долга $y(t)$ в момент времени t пропорциональна значению этой величины в тот же момент времени. Следовательно, закон изменения долга описывается дифференциальным уравнением (21.1).

Найдем общее решение этого уравнения. Разделяя переменные в уравнении (21.1), имеем

$$\frac{dy}{y} = k\,dt.$$

После интегрирования обеих частей находим

$$\ln|y| = k\,t + \ln C,$$

откуда следует, что общим решением уравнения (21.1) является показательная функция

$$y(t) = C\,e^{k\,t}.$$

Поскольку ежегодный прирост величины $y(t)$ составляет $p\%$, то скорость изменения величины составляет $p/100$ от $y(t)$ и коэффициент $k = p/100$. Кроме того, по условию задачи $y(0) = y_0$. Поэтому сумма, которую заимодавец должен уплатить кредитору от занятых y_0 денежных единиц за t лет, составит

$$\boxed{y(t) = y_0 \exp(p\,t/100).} \tag{21.2}$$

От каждой единицы занятой суммы заимодавец обязан уплатить $y(t) = \exp(p\,t/100)$. А за год эта сумма составит $y(1) = \exp(p/100)$ денежных единиц. ▲

Уравнение (21.2) с $k = p/100$ может быть применено не только при изучении кредитования. Оно применяется всякий раз, когда скорость изменения некоторой величины $y(t)$ прямо пропорциональна ее значению в данный момент времени t, а ежегодный прирост равен p %.

21.2. Рост населения Земли и истощение ресурсов

Дифференциальное уравнение (21.1) было предложено Мальтусом в 1798 г. для прогнозирования роста населения Земли.Постоянная k в социальных и биологических науках именуется *мальтузианским коэффициентом линейного роста.*

> *МАЛЬТУС (Malthus) Томас Роберт (1766–1834), английский экономист, основоположник мальтузинанства, утверждавшего, что темпы роста населения значительно превышают темпы увеличения средств существования (их соотношение, в первоначальной формулировке Мальтуса, выводилось из сравнения геометрической и арифметической прогрессий). В современных условиях проблемы, связанные с быстрым ростом народонаселения в развивающихся странах, служат основанием для периодического оживления модифицированных форм мальтузианства.*

▽ **Пример (истощение ресурсов).** В настоящее время для обеспечения пищей одного человека необходима площадь 0,1 га. На земном шаре 4000 млн га пахотной земли. Поэтому население его должно быть, если не учитывать в будущем новых источников пищи, ограничено количеством 40000 млн человек.

Когда будет достигнут этот предел насыщения населения, если оно непрерывно растет со скоростью 1,8 % в год?

Решение. Согласно формуле (21.2), закон роста населения можно выразить следующим образом:

$$y(t) = y_0 \exp(p\,t/100).$$

За $t = 0$ возьмем 1999 год, когда население Земли составило $6 \cdot 10^9$ человек. Тогда

$$y(t) = 6 \cdot 10^9\, e^{0{,}018\,t}.$$

Ищем такое t, чтобы

$$y(t) = 40 \cdot 10^9.$$

Тогда

$$40 \cdot 10^9 = 6 \cdot 10^9\, e^{0{,}018\,t},$$

откуда

$$e^{0{,}018\,t} = \frac{40 \cdot 10^9}{6 \cdot 10^9} \approx 6{,}667.$$

Логарифмируя последнее равенство, имеем

$$0{,}018\,t \approx \ln 6{,}667 \approx 1{,}897,$$

откуда $t \approx 105$ лет.

Итак, примерно в 2104 г. мир достиг бы предела насыщения, если бы сохранился темп роста населения. ▲

Решение уравнения (21.1) выражается с помощью экспоненциальной функции $e^{k\,t}$, которая очень быстро возрастает. График этой функции представлен на рис. 21.1.

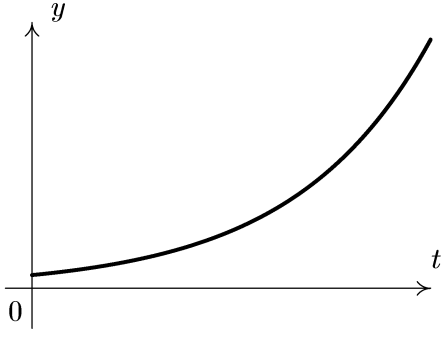


Рис. 21.1. График функции $y = C\,e^{k\,x}$

Если t растет в арифметической прогрессии, т. е. принимает возрастающую последовательность значений

$$t = 0, \quad t = 0 + 1 = 1, \quad t = 1 + 1 = 2, \quad t = 2 + 1 = 3, \quad \dots,$$

то соответствующие значения $e^{k\,t}$ образуют геометрическую прогрессию

$$1, \quad q, \quad q^2, \quad q^3, \quad \dots,$$

где $q = e^k$. Поскольку $k > 0$, имеем $q > 1$. Откуда следует, что $e^{k\,t} \to +\infty$ при $t \to +\infty$ (вспомните восточную легенду о вознаграждении, потребованном изобретателем шахмат).

Из решения этой задачи видно, что согласно модели Мальтуса население Земли растет очень быстро. Говоря о росте населения ученые употребляют термин «демографический взрыв». Этот термин вполне уместен, поскольку рост населения описывается тем же дифференциальным уравнением, что и ядерный взрыв. (Число распадов ядра при цепной реакции растет экспоненциально, столь же быстро растет и выделяемая энергия: $y(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$.)

Таким образом, согласно Мальтусу, человечество находится в ловушке — если оно не наладит регулирования рождаемости, то оно обречено на безработицу, голод и обнищание широких масс.

21.3. Рост денежного вклада в сбербанке

Как было отмечено выше, денежная сумма на денежном вкладе в сбербанке подчиняется закону естественного роста. Поэтому функция (21.2) может быть использована для приближенной оценки накопившейся в сбербанке суммы.

▽ **Пример (рост денежного вклада в сбербанке).** В какую сумму обратилась бы копейка в 2000 году, если бы ее положили в сберегательный банк в первый год нашей эры под 5 % годовых? Предполагается, что денежные реформы не проводятся, а приращение начисляется непрерывно.

Решение. Так как скорость изменения денежного вклада составляет 0,05 от накопившейся суммы, то коэффициент $k = 0{,}05$. Поэтому соответствующее дифференциальное уравнение имеет вид

$$y'(t) = 0{,}05\, y(t).$$

Решением является функция $y(t) = 1 \cdot e^{0{,}05 \cdot t}$.

При $t = 2000$ получим $y(2000) = 1 \cdot e^{0{,}05 \cdot 2000} = e^{100} \approx$ $\approx 2{,}688 \cdot 10^{43}$ коп. или $y(100) \approx 2{,}688 \cdot 10^{41}$ руб. ▲

Полученное число содержит 41 цифру. Значит, речь идет о сумме, которая намного превосходит все денежные запасы земного шара.

Этот пример поучителен тем, что позволяет понять одну из причин денежных реформ. Действительно, сберегательные банки во избежание инфляции не должны сильно увеличивать денежную массу государства; долги же сбербанков населению, как мы увидели, очень быстро растут. Поэтому порой и возникает необходимость в проведении денежных реформ.

21.4. Инфляция и правило величины 70

В экономической теории при изучении понятия темпа инфляции приводится так называемое правило величины 70. Оно позволяет быстро подсчитать количество лет t, необходимых для удвоения уровня цен. Надо только разделить число 70 на ежегодный уровень инфляции p %:

$$\boxed{t = 70/p.}$$

Например, при ежегодном уровне инфляции в 5 % уровень цен удвоится через 14 (70/5) лет. При 10 %-й инфляции уровень цен удвоится через семь (70/10) лет. При инфляции в 12 % уровень цен удвоится примерно через шесть (70/12) лет. Правило величины 70 может быть использовано и в случае, когда нужно установить, сколько потребуется времени, чтобы удвоились личные сбережения в сбербанке.

▽ **Пример (вывод правила величины 70).** Вывести правило величины 70 и ответить на вопрос: почему в правиле фигурирует именно число 70, а ни какое-либо другое?

Решение. При ежегодном уровне инфляции в p % коэффициент пропорциональности k будет равен $p/100$. Поэтому общий уровень цен согласно уравнению естественного роста можно вычислять по формуле

$$y(t) = y_0 \exp(pt/100).$$

При удвоении уровня цен будем иметь:

$$2\,y_0 = y(t),$$

$$2\,y_0 = y_0\,\exp(pt/100).$$

Найдем, теперь, количество лет t, необходимых для удвоения уровня цен. Для этого выразим из последней формулы t. В результате получим

$$t = \frac{100 \cdot \ln 2}{p}.$$

Поскольку $\ln 2 \approx 0{,}7$, можно принять, что

$$t \approx 70/p.$$

Формула получена. В числителе этой формулы стоит 70, так как $100 \cdot \ln 2 \approx 70$. Если бы речь шла об утроении цен, то в числителе соответствующей формулы стояло бы не 70, а 110, так как в этом случае имели бы

$$t = (100 \cdot \ln 3)/p,$$

а $100 \cdot \ln 3 \approx 110$. ▲

Задача. Сумма y_0 положена в сбербанк под 10 % годовых. Через сколько лет внесенная сумма возрастет в три раза, если приращение начисляется непрерывно.

Ответ: Через 11 лет.

Заметим, что число денежных единиц всегда выражается целым числом. Поэтому изменение денежной массы является разрывной функцией от времени, и, казалось бы, при выводе правила величины 70 нельзя применить модель, основанную на понятии производной. Но при достаточно большой денежной массе эту разрывную функцию можно с достаточной точностью приблизить дифференцируемой функцией (экспонентой). Сделанная при этом ошибка оказывается малой. Поэтому инфляционные процессы довольно точно описываются уравнением естественного роста.

21.5. Рост выпуска дефицитной продукции

▽ **Пример (модель естественного роста выпуска).** Найти закон роста выпуска дефицитной продукции в условиях ненасыщаемости рынка.

Решение. Обозначим через $y(t)$ количество продукции, произведенной в момент времени t. Будем предполагать, что продукция продается по фиксированной цене p и моментально реализуется. Тогда в момент времени t доход составит $p\,y(t)$. Поскольку предприятие получает прибыль от реализации своей продукции в течении долгого времени, то ему выгодно расширять производство. Пусть на инвестиции $i(t)$ в производство расходуется m-я часть указанного дохода, т. е.

$$i(t) = \frac{p}{m}\,y(t). \tag{21.3}$$

В результате расширения производства будет получен прирост дохода, m-я часть которого опять будет использована для расширения выпуска продукции. Это приведет к росту скорости выпуска, причем скорость выпуска $y'(t)$ пропорциональна увеличению инвестиций, т. е.

$$y'(t) = a\,i(t). \tag{21.4}$$

Подставив (21.4) в (21.3), получим дифференциальное уравнение естественного роста

$$y'(t) = k\,y(t), \qquad k = a\,p/m.$$

Решением его является экспоненциальная функция $y = C\,e^{k\,t}$, которая показывает как быстро можно добиться огромных объемов выпуска дефицитной продукции, если постоянно направлять часть дохода в расширение производства. ▲

Харрод и Домар считали, что можно добиться устойчивого роста не только объемов выпуска дефицитной продукции предприятия, но и также всей мировой рыночной экономики. Харрод считал, что устойчивый темп роста производства обеспечивается естественным ростом населения и естественным ростом производительности труда. Третьим фактором роста Харрод считал размеры накопления капитала, норма накопления которого должна быть постоянной.

ХАРРОД (Harrod) Рой (1900–1978), английский экономист. Сочинения по проблемам экономического роста, теории денег, международной торговли, валютной системы.

ДОМАР (Domar) Евсей Дейвид (р. 1914), американский экономист. Сочинения по теории экономического роста.

Мы рассмотрели пять примеров социально-экономических процессов — задачу о долге, рост населения, рост денежных вкладов в банке, инфляционные процессы, естественный рост выпуска продукции. Математической моделью всех этих процессов служит уравнение вида $y'(t) = k\,y(t)$. В первом случае применение дифференциального уравнения позволяет увидеть как быстро растут невыплачиваемые долги, во втором использование этого уравнения позволяет понять будущие проблемы человечества, связанные с «демографическим взрывом», в третьем — почему возникают денежные реформы, из четвертого примера становится понятным правило величины 70 и инфляционные процессы, из пятого — как быстро можно добиться больших объемов выпуска продукции в условиях постоянных инвестиций в производство и ненасыщаемости рынка.

21.6. Рост в социально-экономической сфере с учетом насыщения

В соответствии с законом Мальтуса (21.1) численность населения должна расти экспоненциально, что не всегда справедливо, ибо не согласуется с реальностью. Хотя имеющий в настоящее время место «демографический взрыв» представляет собой серьезную опасность для человечества, дифференциальное уравнение (21.1), разумеется, слишком упрощенно изображает реальную ситуацию, и его решение далеко от истинного течения процесса. При использовании моделей естественного роста в социальных науках надо иметь в виду, что темпы роста, описываемые первоначально экспоненциальной функцией, в дальнейшем замедляются, наступает период насыщения. Экстраполяция этих показателей при условиях естественного роста часто приводит к заведомому абсурду. Например, рост числа научных работников в индустриально развитых странах в недавнем прошлом описывался экспоненциальной функцией. Экстраполяция привела бы к тому, что уже в ближайшие десятилетия численность научных работников должна была бы превзойти население страны.

Для преодоления противоречия с реальностью необходимо принять во внимание эти факторы и соответствующим образом модифицировать модель роста.

Дж. Кьютелет предположил, что k в уравнении (21.1) должна быть не постоянной, а убывающей функцией, зависящей от $y(t)$:

$$\boxed{y'(t) = k(y)\,y(t).} \qquad (21.5)$$

На основании этого в 1836 г. его ученик Ферхюльст предложил использовать для роста населения уравнение

$$\boxed{y'(t) = a\left(1 - \frac{y(t)}{b}\right) y(t),} \tag{21.6}$$

т. е. считать, что

$$k(y) = a\left(1 - \frac{y(t)}{b}\right).$$

▽ **Пример 1 (рост населения Земли с учетом насыщения).** Определить как будет меняться рост населения Земли $y(t)$ в условиях насыщения.

Решение. Согласно Ферхюльсту величина $y(t)$ в условиях насыщения удовлетворяет дифференциальному уравнению (21.6). Решим это уравнение. Разделяя переменные в уравнении (21.6), находим

$$\frac{dy}{y\left(1 - \frac{y}{b}\right)} = a\,dt,$$

или

$$\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{b-y}\right) dy = a\,dt.$$

Проинтегрировав это соотношение, имеем

$$\ln|y| - \ln|b-y| = a\,t + \ln|C|,$$

т. е.

$$\frac{y}{b-y} = C\,e^{a\,t}.$$

Отсюда получим, что

$$\boxed{y(t) = \frac{b\,C\,e^{a\,t}}{1 + C\,e^{a\,t}}.} \tag{21.7}$$

Таким образом, рост в условиях насыщения описывается функцией (21.7). ▲

График функции (21.7) называется *логистической кривой.* Он изображен на рис. 21.2.

Из этого рисунка хорошо видно, что при малых t логистический рост схож с естественным ростом, однако при больших t

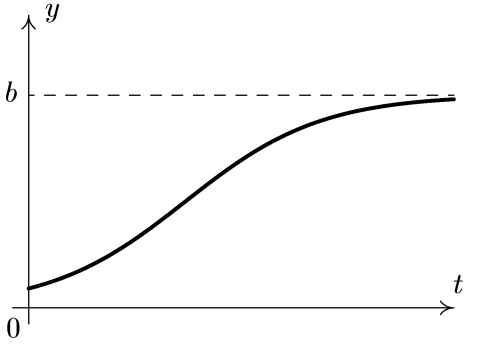


Рис. 21.2. График функции $y(t) = \dfrac{b\,C\,e^{a\,t}}{1 + C\,e^{a\,t}}$

характер роста меняется, темпы роста замедляются. При $t \to +\infty$ кривая асимптотически приближается к прямой $y = b$, поскольку

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{b\,C\,e^{a\,t}}{1 + C\,e^{a\,t}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{\left(b\,C\,e^{a\,t}\right)'}{\left(1 + C\,e^{a\,t}\right)'} = \lim_{t\to+\infty} \frac{b\,C\,a\,e^{a\,t}}{C\,a\,e^{a\,t}} = b.$$

Прямая $y(t) = b$ является стационарным решением уравнения (21.6) и соответствует случаю $k(y) = a\left(1 - \dfrac{y(t)}{b}\right) = 0$. Значит, для модели (21.6) объем выпускаемой продукции в единицу времени стремится к конечному значению b («взрыва» не происходит).

Модель Ферхюльста применяется и к другим социально-экономическим явлениям. Рассмотрим ее применение в сфере экономического роста.

▽ **Пример 2 (рост выпуска продукции в условиях конкуренции).** Найти закон роста продукции в условиях конкуренции и насыщаемости рынка.

Решение. По условию задачи, происходит насыщаемость рынка. Согласно Ферхюльсту величина $y(t)$ в условиях насыщаемости удовлетворяет дифференциальному уравнению (21.6). Поэтому рост продукции $y(t)$ в условиях насыщаемости рынка будет также описываться уравнением Ферхюльста и соответствующее решение выражаться формулой (21.7). ▲

В п. 21.5 была описана модель Харрода–Домара, согласно которому экономика имеет устойчивый темп роста. В реальности происходит замедление темпов экономического роста. Так, если период с 1948 по 1973 г. был периодом быстрого экономического роста США, при этом ежегодные темпы производительности труда, например, составляли 2,43 %, то с 1973 по 1983 г. производительность труда увеличивалась только на 0,75 % в год. Поэтому логистический рост более точно описывает развитие экономики, чем модель Харрода–Домара.

▽ **Пример 3 (обеспеченность новым товаром).** Найти закон обеспеченности новым необходимым товаром (удельный вес семей или людей, владеющих данным товаром) с течением времени.

Решение. Спрос на необходимые товары с течением времени возрастает: сначала медленно, затем быстро и, наконец, снова замедляется за счет насыщения. Это значит, что скорость увеличения спроса прямо пропорциональна обеспеченности и насыщению товаром. Если b — насыщенность товаром (предельное значение обеспеченности товаром), то зависимость обеспеченности от времени выражается дифференциальным уравнением

$$\frac{d\,y(t)}{dt} = k\,y\,(b-y), \tag{21.8}$$

т. е. скорость увеличения обеспеченности $\dfrac{d\,y}{d\,t}$ пропорциональна достигнутой обеспеченности y и необеспеченности $(b-y)$.

Легко заметить, что уравнение (21.8) является уравнением Ферхюльста, записанным в другой форме. ▲

▽ **Пример 4 (модель «социальной диффузии»).** Определить как с течением времени меняется число сторонников некоторого новшества.

Решение. Рынок информации, так же как и рынок товаров, подвержен насыщению. Поэтому число сторонников новшества изменяется согласно закону Ферхюльста. В определенный момент времени наступает насыщение и эффективность от рекламы и агитации снижается. Количество сторонников некоторого новшества с течением времени стремится к постоянному числу. ▲

В социальных науках уравнение Ферхюльста используется для описания распространения в определенных социальных группах образцов поведения, моды, информации (рекламы),

культурных новшеств. Правда, при изучении социальных групп, это уравнение чаще именуют уравнением Дж. Коулмена, который применительно к социальным группам уточнил смысл коэффициентов a и b из уравнения Ферхюльста. Он предложил следующее уравнение:

$$\frac{dy}{dt} = \psi\,\beta\left(1 - \frac{y(t)}{b}\right) y(t),$$

где y — число сторонников новшества в данный момент времени; b — общая численность рассматриваемой группы; β — число контактов, завязываемых каждым сторонником новшества в единицу времени; ψ — коэффициент, меняющийся от 0 до 1 и отражающий то, что не каждый контакт сторонника с не сторонником предполагает агитирование последнего, а также то, что не каждая агитация заканчивается успехом.

Отметим, что эмпирические исследования [1)] подтверждают, что распространение сторонников новшеств изменяется согласно уравнению Ферхюльста (Коулмена).

21.7. Выбытие фондов

Рассмотрим теперь еще одну математическую модель, описывающую рост количества продукции $y(t)$ на некотором предприятии, произведенной в момент времени t. В отличие от модели естественного роста, когда $k = \text{const}$, и в отличие от модели Дж. Кьютелета (21.5), когда $k = k(y)$, будем предполагать, что коэффициент k зависит от времени t: $k = -k(t)$. (Знак «минус» означает, что фонды не увеличиваются, а выбывают.) Такое происходит, например, когда предприятие не вкладывает вырученные деньги в производство, и при этом с течением времени на предприятии происходит изнашивание оборудования и орудий труда, т. е. происходит выбытие фондов.

Тогда рост количества продукции $y(t)$ на некотором предприятии, произведенной в момент времени t описывается не уравнением (21.6), а уравнением

$$\boxed{y'(t) = -k(t)\,y(t), \qquad y(0) = y_0.} \tag{21.9}$$

Рассмотрим два случая. Первый, когда $k(t) = 0$, и второй, когда $k(t) = 1$.

[1)] См., например, *Coleman J. S.* Introduction to mathematical sociology. N. Y.: Free Press of Glencoe, 1964.

1. Пусть фонды в указанный промежуток времени не выбывают ($k(t) = 0$). Здравый смысл подсказывает, что ввиду отсутствия капиталовложений производство расти не будет, а ввиду отсутствия выбытия фондов оно не должно убывать. Таким образом, объем производства должен остаться на прежнем уровне. Так и происходит согласно дифференциальному уравнению $y'(t) = 0$. Решением этого уравнения является произвольная константа $y(t) = C$. Так как $y(0) = y_0$, то $y(x) = y_0$ (рис. 21.3).

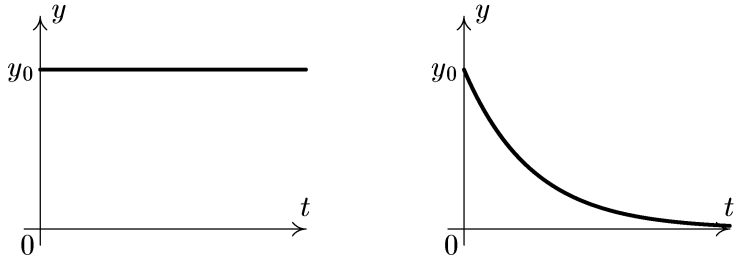


Рис. 21.3. Графики функций $y(t) = C$ и $y(t) = y_0\, e^{-t}$

2. При постоянном выбытии фондов (например, при $k(t) = 1$) должно происходить падение производства. Решение соответствующего дифференциального уравнения дает именно это:

$$\frac{dy}{y} = -dt; \qquad \ln|y| = -t + \ln|C|;$$

$$y(t) = y_0\, e^{-t} \quad \text{(убывающая функция)}.$$

Соответствующий график приведен на рис. 21.3.

В социальных науках и страховом деле уравнением (21.9) пользуются для определения вероятности того, что лицо доживет до возраста t. Решением уравнения (21.9) при учете начального условия $y(0) = 1$ будет функция

$$y(t) = e^{-\int\limits_0^t k(t)\,dz}.$$

При составлении таблиц смертности для взрослого населения нередко пользуются *формулой Макегама*, согласно которой

$$k(t) = \alpha + \beta\, e^{\gamma\, t}, \qquad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \gamma > 0,$$

где значение коэффициентов α, β, γ определяется условиями, в которых находится группа лиц, подлежащих изучению, и, прежде всего, социальными условиями.

Формула Макегама выражает то, что взрослый человек может умереть от причин, не зависящих от возраста, и причин, зависящих от возраста. При этом вероятность смерти растет с увеличением возраста в геометрической прогрессии.

21.8. Рост производства с учетом инвестиций

Уравнение Дж. Кьютелета $y(t) = k(y)\,y(t)$ исходит из замкнутости популяции и не учитывает миграции популяции, зависящей, вообще говоря, от y и t.

Если изучается население страны, то эта модель становится неприемлемой. Учет миграции приводит к уравнению

$$y'(t) = k(y)\,y(t) + u(t, y). \tag{21.10}$$

Здесь $u(t, y)$ — величина, характеризующая миграцию. Она равна разности между количеством иммигрантов и эмигрантов. Если $u(t, y) > 0$, то это означает, что количество иммигрантов в момент времени t превышает количество эмигрантов.

В моделях экономического роста уравнение (21.10) характеризует рост выпуска продукции с учетом внешних инвестиций $u(t, y) > 0$.

▽ **Пример.** Государство решает перечислить в течении двух лет в только созданное предприятие и расширение его производства денежную сумму 20 тыс. условных единиц. При этом оно должно выбрать одну из непрерывных схем финансирования, изображенных на рис. 21.4:

Первая схема. Перечислять каждый год по 10 тыс. у. е.

Вторая схема. Перечислить в первый год все 20 тыс. у. е., и во второй год не перечислять ничего.

(По оси ординат единице соответствует 10 тыс. у. е.)

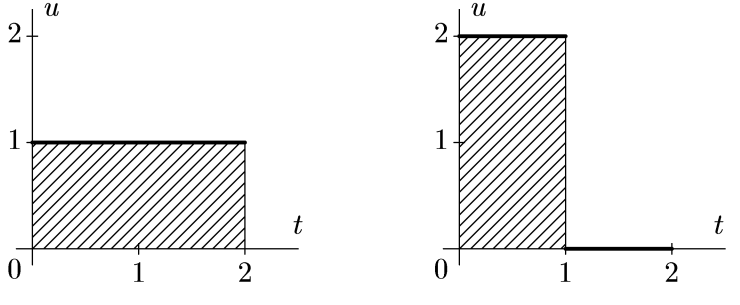


Рис. 21.4. Две схемы инвестирования

Какую из двух схем инвестирования должно выбрать государство, чтобы предприятие выпустило больший объем продукции?

Решение. Предприятие начинает с нуля и еще не в состоянии делать инвестиции. Поэтому считаем, что $y(0) = 0$. Государство вкладывает в каждый момент времени t сумму в $u(t)$ денежных единиц. Поскольку в нашей упрощенной модели предполагается, что с момента создания первые же денежные инвестиции позволяют выпускать предприятию свою продукцию, то количество выпущенной продукции $y(t)$ в денежном эквиваленте выражается уравнением

$$y'(t) = u(t), \qquad y(0) = 0. \tag{21.11}$$

1. Для первой схемы инвестирования имеем

$$u(t) = 1, \qquad \text{при} \quad 0 < t < 2,$$

т. е.

$$y'(t) = 1, \qquad y(0) = 0,$$

откуда

$$\boxed{y(t) = t, \quad \text{при} \quad 0 < t < 2.}$$

Объем Y_1, выпущенной продукции за два года равен площади фигуры под графиком функции $y(t)$. Площадь этой фигуры, представляющей собой треугольник (рис. 21.5), равна 2:

$$Y_1 = 0{,}5 \cdot 2 \cdot 2 = 2 \quad (20 \text{ тыс. у. е.}).$$

2. Для второй схемы инвестирования имеем:

$$u(t) = 2, \quad \text{при} \quad 0 < t < 1,$$

$$u(t) = 0, \quad \text{при} \quad 1 < t < 2,$$

т. е.

$$y'(t) = 2, \quad y(0) = 0, \quad \text{при} \quad 0 < t < 1,$$

$$y'(t) = 0 \quad \text{при} \quad 1 < t < 2,$$

откуда

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) &= 2\,t, \quad \text{при} \quad 0 < t < 1, \\ y(t) &= 2, \quad \text{при} \quad 1 < t < 2. \end{aligned}}$$

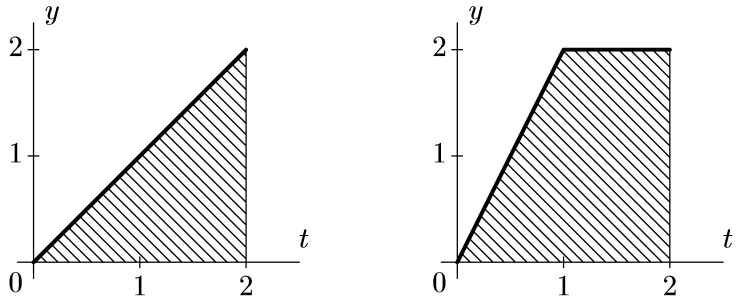


Рис. 21.5. Объем выпущенной продукции по двум схемам инвестирования

Объем Y_2 продукции, выпущенной за два года по второй схеме инвестирования, равен площади трапеции (рис. 21.5). Стало быть, $Y_2 = 3$ (30 тыс. у. е.).

По второй схеме инвестирования предприятие выпустит продукции на общую сумму на 10 тыс. у. е. больше. Таким образом, вторая схема инвестирования выгоднее. ▲

Пример показывает, что предприятия в период становления нуждаются в поддержке государства больше, чем в более поздний период.

Задача 1. Государство решает перечислить в течении двух лет в только созданное предприятие и расширение его производства денежную сумму в 10 условных единиц. При этом оно должно выбрать одну из непрерывных схем финансирования:

$$u(t) = 5\,t \quad \text{или} \quad u(t) = 10 - 5\,t.$$

Какую из двух схем инвестирования должно выбрать государство, чтобы предприятие выпустило больший объем продукции?

Ответ: вторую.

Объединим две последние модели — модель выбытия фондов и модель роста производства с учетом банковских инвестиций. Пусть предприятие производит нужную для государства продукцию. Как и в модели выбытия фондов, будем предполагать, что на предприятии происходит быстрое изнашивание оборудования и орудий труда и само предприятие не вкладывает вырученные деньги в производство $\big(k = -k(t)\big)$. Денежные вложения в производство осуществляет лишь банк. Причем, в момент времени t поток капиталовложений составляет $u(t)$ условных единиц и мгновенно преобразуется в расширение производства.

Тогда стоимость продукции $y(t)$ на некотором предприятии, произведенной в момент времени t, описывается уравнением

$$\boxed{y'(t) + k(t)\,y(t) = u(t).} \tag{21.12}$$

Дифференциальное уравнение (21.12) является обыкновенным линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Знание его экономического смысла позволяет часто предугадывать свойства решения только по виду уравнения. Действительно, например, пусть задано линейное дифференциальное уравнение

$$y' - y = e^x,$$

или

$$y' = y + e^x.$$

Коэффициент при y является коэффициентом выбытия фондов. Он равен (-1). Следовательно, фонды не выбывают, а растут. Государственные капиталовложения в предприятие положительны (функция $e^x > 0$). Здравый смысл подсказывает, что при таких условиях должен происходить рост производства. Поэтому, не решая самого дифференциального уравнения, мы можем сказать, что его решением является растущая функция. Так оно и есть на самом деле. После соответствующих математических выкладок получим, что решением этого дифференциального уравнения является

$$y(x) = C\,e^x + x\,e^x$$

(растущая функция).

Аналогичный вывод мы можем сделать и для линейного дифференциального уравнения

$$y' - \frac{x}{1+x^2}\,y = x.$$

Коэффициент выбытия фондов $\left(-\dfrac{x}{1+x^2}\right)$ отрицателен, значит фонды прибывают. Инвестиции x растут. Следовательно, должен происходить рост производства. Решением уравнения должна быть растущая функция. После соответствующего решения действительно получим растущую функцию

$$y(x) = \left(\sqrt{1+x^2} + C\right)\sqrt{1+x^2}\,.$$

Слагаемое u в уравнении

$$y'(t) = -k\,y(t) + u,$$

выражавшее поток «внешних капиталовложений», может означать и другие внешние воздействия на предприятие. Слагаемое u может быть и отрицательным. В этом случае оно может выражать, например, какой-либо уход денег из предприятия (например, расходы или выплаты по налогам, издержки производства, потребительские расходы и т. п.). Поскольку издержки часто зависят не только от времени t, но и от объема выпуска продукции $y(t)$ в момент времени t, то u является, вообще говоря, функцией от двух переменных t и y. Коэффициент k, как мы видели, также может зависеть и от переменной t и от переменной y. Таким образом, более общее уравнение роста может быть выражено более общим, вообще говоря, уже нелинейным, дифференциальным уравнением

$$y'(t) = k(t, y)\,y(t) + u(t, y). \tag{21.13}$$

В частных случаях это уравнение может оказаться и уравнением с разделяющимися переменными, и линейным уравнением, и уравнением Бернулли. Знание его экономического смысла позволяет предугадывать свойства решения.

Если в микроэкономике наиболее употребимым линейным дифференциальным уравнением является уравнение (21.12), то в макроэкономике используется уравнение

$$\boxed{y(t) = k\,\frac{d\,y(t)}{dt} + c(t).} \tag{21.14}$$

Здесь t выражает время; $y(t)$ — национальный доход; $c(t)$ — потребление (более точно, непроизводственное потребление, прирост материальных оборотных средств, государственных материальных резервов, потери); $k\,\dfrac{d\,y(t)}{dt}$ — накопление основных производственных фондов.

Уравнение (21.14) характеризует тот факт, что национальный доход разделен на две части: накопление $k\,\dfrac{d\,y(t)}{dt}$ (первое слагаемое в правой части уравнения) и потребление $c(t)$ (второе слагаемое в правой части уравнения), причем накопление производится государством пропорционально приросту национального дохода

в тот же момент времени. Коэффициент k выражает капиталоемкость национального дохода (отношение производственного накопления к приросту национального дохода).

Модель, основанная на уравнении (21.14), является простейшей моделью экономической динамики. С помощью нее находят динамику национального дохода $y(t)$ в зависимости от траектории потребления $c(t)$.

Задача 2. Не интегрируя дифференциальное уравнение

$$y' - \frac{3\,y}{x} = x, \qquad x > 1, \quad y(1) = 1,$$

зная лишь экономический смысл коэффициентов (коэффициент выбытия фондов равен $-\dfrac{3}{x}$, инвестиции равны x), определить возрастает или убывает функция, задающая решение.

Ответ: возрастает.

Задача 3. Проинтегрировать уравнение из предыдущей задачи.

Ответ: $y = 2\,x^3 - x^2$.

Задача 4. Решить задачу Коши

$$y' - \frac{2\,y}{x} = 1, \quad x > 1, \quad y(1) = 1.$$

Придать этой задаче несколько социальных и экономических интерпретаций, пояснить полученное решение.

Задача 5. Придать уравнению Бернулли

$$y' + \frac{y}{x} = -x\,y^2$$

экономический смысл. Проинтегрировать его и объяснить экономический смысл решения.

Ответ: $y = \dfrac{1}{x^2 + Cx}$. Решение — убывающая функция, так как происходит выбытие фондов и капитала.

21.9. Модель экономического цикла Самуэльсона–Хикса

При рассмотрении применений дифференциальных уравнений мы исходили из предположения о мгновенном воздействии факторов, влияющих на рост. В действительности,

это воздействие не мгновенно. Оно происходит с некоторым запаздыванием. В тех случаях, когда запаздывание оказывает существенное влияние на рассматриваемые процессы, его необходимо включать в соответствующее дифференциальное уравнение. В социально-экономических науках в целях простоты модели, связанные с запаздыванием, записывают уже не в виде дифференциальных, а в виде разностных уравнений, то есть в виде уравнений с дискретным временем.

> *САМУЭЛЬСОН (Samuelson) Пол (р. 1915), американский экономист. Труды по проблемам моделирования экономического цикла, экономико-математическим методам измерения полезности и др. Лауреат Нобелевской премии (1970).*

> *ХИКС (Hicks) Джон (1904–1989), английский экономист. Труды в области моделирования экономического роста, теории спроса, цен. Лауреат Нобелевской премии (1972).*

Так, модель Самуэльсона–Хикса предполагает, что рост потребления $c(t)$ (consumption) запаздывает от роста национального дохода y, т. е. что

$$c(t) = m\,y(t-1) + n, \tag{21.15}$$

где m (marginal) — предельная склонность к потреблению (показывает на сколько увеличится потребление при увеличении текущего дохода на единицу $\big(m = \Delta c/\Delta y\big)$, а n — автономное потребление.

Предполагается также, что предприниматели осуществляют инвестиции $i(t)$ (investments) после того, как убедятся в том, что приращение национального дохода устойчиво. Поэтому, принимая решение об объеме инвестиций, они ориентируются на приращение национального дохода не в текущем, а предшествующем периоде:

$$i(t) = a\,\Big(y(t-1) - y(t-2)\Big). \tag{21.16}$$

Здесь a (accelerator) — коэффициент, именуемый *акселератором.*

Условие равенства спроса и предложения имеет вид

$$y(t) = c(t) + i(t). \tag{21.17}$$

Подставляя в (21.17) выражение для $c(t)$ из (21.15), $i(t)$ из (21.16), находим:

$$\boxed{y(t) = (a+m)\,y(t-1) - a\,y(t-2) + n.} \tag{21.18}$$

Уравнение (21.18) называется *уравнением Хикса.* Пусть величины a, m и n постоянны. Тогда уравнение Хикса представляет собой линейное неоднородное разностное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

В реальной экономике $m < 1$, а $a > 1$. При таких значениях предельной склонности к потреблению m и акселератора a решение уравнения Хикса неустойчиво и носит колебательный характер: возрастание сменяется убыванием, убывание — возрастанием. Это означает, что даже при постоянном темпе капиталовложений экономика имеет неустойчивый характер (раз нарушенное равновесие больше не восстанавливается), а периоды подъема экономики чередуются с периодами спадов (кризисов).

Поясним это на числовом примере.

▽ **Пример (уравнение Хикса).** Предположим, что $a = 1{,}25$, $m = 0{,}95$, $n = 0{,}1$. Тогда уравнение Хикса примет вид

$$y(t) - 2{,}2\,y(t-1) + 1{,}25\,y(t-2) = 0{,}1. \tag{21.19}$$

Найдем частное решение. Положив $y(t) = \text{const} = C$ и подставив в (21.19), получим

$$C - 2{,}2\,C + 1{,}25\,C = 0{,}1, \qquad C = 2.$$

Частное решение $\overline{y}(t) = 2$. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения.

Корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 - 2{,}2\,\lambda + 1{,}25 = 0$$

равны $1{,}1 \pm 0{,}2\,i$.

Этим корням соответствуют линейно независимые решения вида

$$y_1(t) = \left(\sqrt{1{,}25}\right)^t \cos(\varphi\, t)$$

и

$$y_2(t) = \left(\sqrt{1{,}25}\right)^t \sin(\varphi\, t),$$

где $\varphi = \operatorname{arctg}(2/11)$. После округления получим

$$y_1(t) = 1{,}07^{\,t} \cos(0{,}18\,t)$$

и

$$y_2(t) = 1{,}07^{\,t} \sin(0{,}18\,t).$$

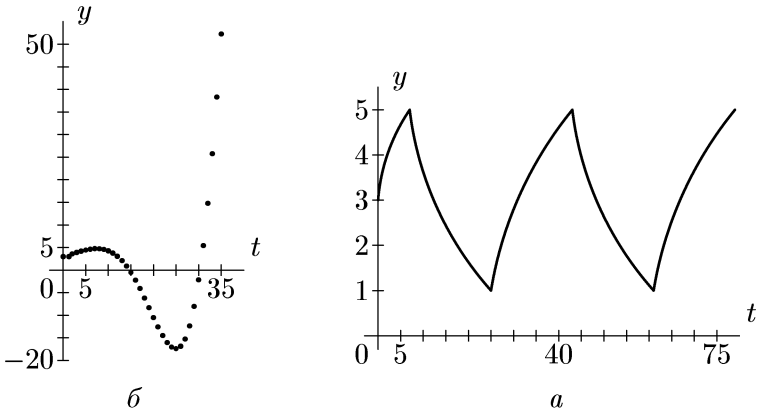


Рис. 21.6. Модель Самуэльсона–Хикса

Таким образом, общим решением однородного уравнения является функция

$$\widetilde{y}(t) = 1{,}07^{\,t}\left(C_1\,\cos(0{,}18\,t) + C_2\,\sin(0{,}18\,t)\right),$$

где C_1 и C_2 — произвольные константы. Следовательно, общим решением уравнения (21.19) будет функция

$$y(t) = 2 + 1{,}07^{\,t}\left(C_1\,\cos(0{,}18\,t) + C_2\,\sin(0{,}18\,t)\right).$$

График этой функции при $C_1 = C_2 = 1$ и $t \in \mathbb{N}$ изображен на рис. 21.6, *а*. ▲

Из последнего примера наглядно видно, что решение уравнения Хикса $y(t)$ очень быстро принимает неправдоподобные значения. В действительности такой сильной раскачки значений национального дохода не происходит. Размер национального дохода не может превышать величину национального дохода полной занятости. Это ограничивает амплитуду колебаний объема национального дохода сверху. С другой стороны, объем инвестирования не может быть меньше отрицательной величины амортизации и это ограничивает амплитуду колебания величины национального дохода снизу. В результате колебания размера национального дохода принимают вид, изображенный на рис. 21.6, *б*. Они имеют конечную амплитуду и характеризуют экономические циклы подъема и спада производства.

21.10. Паутинообразная модель рынка

Опишем еще одну модель, учитывающую запаздывание во времени. Эта модель позволяет исследовать устойчивость цен и объемов товаров на рынке.

Будем предполагать, что производители зерна определяют предложение s (supply) товара в текущем периоде на основе цены p (price), установившейся в предшествующем периоде, а спрос d (demand) на товар изменяется в зависимости от цены в данном периоде. Предположение о запаздывании предложения от цены вполне объяснимо. Действительно, решение об объеме производства принимается с учетом текущих цен, но производственный цикл имеет определенную продолжительность, и соответствующее этому решению предложение появится на рынке по окончании данного цикла.

Если спрос и предложение линейно зависят от p, то динамика цены описывается следующими уравнениями:

$$s(t) = a\,p(t-1) + b,$$

$$d(t) = -m\,p(t) + n.$$

Здесь $n > b > 0$, так как при нулевой цене спрос превышает предложение; $a > 0$, так как функция предложения возрастающая; $m > 0$, так как функция спроса убывающая.

Таким образом, если спрос $s(t)$ равен предложению $d(t)$, то получим линейное разностное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$m\,p(t) + a\,p(t-1) = n - b.$$

Частным решением этого уравнения является константа

$$\overline{p} = \frac{n-b}{m+a}.$$

Решая характеристическое уравнение $m\,\lambda + a = 0$, находим его корень $\lambda = -\dfrac{a}{m}$.

Общее решение разностного уравнения имеет вид

$$p(t) = C\,\left(-\frac{a}{m}\right)^t + \overline{p}.$$

Следовательно, динамика цен носит колебательный характер.

При этом, если $\dfrac{a}{m} < 1$, то $\left(-\dfrac{a}{m}\right)^t \to 0$ $(t \in \mathbb{N})$ и $p(t) \to \overline{p}$. Последовательность цен сходится к равновесному состоянию.

При $m = a$ значения $p(t)$ чередуются вокруг равновесного значения $\overline{p}$.

Если $\frac{a}{m} > 1$, то $\left(-\frac{a}{m}\right)^t \to \infty$ (равновесие неустойчиво). В реальности бесконечно возрастающих колебаний не происходит, так как при больших отклонениях от равновесия линейные зависимости спроса и предложения от цены становятся нереалистичными. В более реалистической нелинейной модели устанавливаются колебания большой, но конечной амплитуды.

21.11. Модель социального взаимодействия Саймона

Модель Саймона является формализацией некоторых постулатов теории малых групп Д. Хоманса. Эти постулаты согласно Д. Хомансу таковы:

1. Если деятельность изменяется, то взаимодействие, вообще говоря, также изменяется, и обратно.

2. Лица, которые часто взаимодействуют друг с другом, стремятся любить друг друга.

3. Если взаимодействие между членами группы часто осуществляется во внешней системе, чувство любви между членами растет, и это чувство, в свою очередь, способствует проявлению взаимодействия во внешней системе.

4. Лица, которые имеют чувство любви друг к другу, будут выражать это чувство сверх деятельности внешней системы, и эта деятельность в дальнейшем будет усиливать чувство любви.

5. Чем более часто люди взаимодействуют друг с другом, тем более в некотором отношении они становятся похожими как в своей деятельности, так и в чувствах.

Саймон осуществил «перевод» постулатов Хоманса в следующую математическую модель:

$$T = a_1 E + a_2 W, \tag{21.20}$$

$$\frac{dI}{dt} = b\,(T - \beta I), \tag{21.21}$$

$$\frac{dW}{dt} = c_1\,(I - \tau W) + c_2\,(F - W), \tag{21.22}$$

где $T(t)$ — интенсивность взаимодействия среди членов группы; $I(t)$ — степень дружелюбия среди членов группы; $W(t)$ — уровень

деятельности, выполненной группой; $F(t)$ — объем внешненавязанной деятельности («внешняя система»).

Уравнение (21.20) — алгебраическое (структурное). В этом уравнении T выражается как функция I и W. Из этого уравнения вытекают постулаты Хоманса о взаимосвязи между степенью дружелюбия среди членов группы (I), уровнем деятельности, выполненной группой (W) и интенсивностью взаимодействия среди членов группы (T). Для того чтобы получить постулаты Хоманса о связи этих факторов с объемом внешней деятельности (F), подставим уравнение (21.20) в (21.21). Получим дифференциальное уравнение, которое вместе с уравнением (21.22) образует систему двух дифференциальных уравнений с тремя переменными, две из которых (I и W) экзогенные (модель должна объяснить их динамику), а одна (F) — эндогенная (она влияет на процесс, но сама не зависит от него). В матричной форме эта система двух уравнений от двух экзогенных переменных запишется в виде

$$\frac{d\,X(t)}{dt} = A\,X(t) + B, \tag{21.23}$$

где

$$X(t) = \begin{pmatrix} I(t) \\ W(t) \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ c_2\ F(t) \end{pmatrix},$$

а числовая матрица $A = ||a_{ij}||$ выражена соответствующим образом через семь свободных параметров (a_1, a_2, c_1, c_2, b, β, τ).

Решение этой системы в матричной форме имеет следующий вид:

$$X(t) = e^{A\,t}\,X(0) + (e^{A\,t} - E)\,A^{-1}\,B. \tag{21.24}$$

Саймон исследовал систему (21.23) в условиях устойчивого равновесия (числовым аналогом этого является случай $A < 0$). Анализ решения (21.24) позволяет заключить, что рост B ведет к росту X и обратно, т. е. увеличение объема деятельности, навязываемой внешней системой, увеличивает степень дружелюбия среди членов группы и внутригрупповую деятельность. Обратно, увеличение степени дружелюбия и внутригрупповой деятельности способствует проявлению взаимодействия во внешней системе.

Другой вывод из модели: если система находится в устойчивом равновесии и внешняя деятельность B стремится к нулю, то X также стремится к нулю. Этот вывод также согласуется

с гипотезой Хоманса, касающейся объяснения социальной интеграции и различия в численности современной и первобытной семьи. Кроме того, модель дает ряд других качественных выводов, отсутствующих в теории Хоманса, и тем самым иллюстрирует преимущества математики в получении выводов из формализованных постулатов.

Однако модель Саймона является в основном иллюстративной и, ввиду неопределенности соответствующих коэффициентов, не дает возможности применить ее на практике. Следующая модель, которую мы рассмотрим, содержит коэффициенты, которые поддаются измерению. Это позволяет использовать ее для прогнозирования.

21.12. Динамическая модель Леонтьева

Напомним, что статическая модель межотраслевого баланса В. Леонтьева записывается следующим образом:

$$X = A\,X + Y.$$

Предложенная Леонтьевым динамическая межотраслевая модель является классическим примером использования систем дифференциальных уравнений в исследовании проблем экономического роста. Эта модель, включающая дополнительно матрицу коэффициентов капиталоемкости B, определяет траектории сбалансированного экономического развития. Качественные свойства этих траекторий зависят от матрицы $B\,(I - A)^{-1}$. При некоторых условиях величина, обратная наибольшему собственному значению матрицы, определяет максимально возможный («технологический») темп прироста экономики, а соответствующий этому значению собственный вектор характеризует необходимые пропорции между объемами производства продукции на «магистральном» (с максимальным темпом прироста) участке экономического развития.

Динамическая модель В. Леонтьева выражается системой дифференциальных уравнений

$$\boxed{Y(t) = K\,\frac{d\,Y(t)}{dt} + C(t).} \tag{21.25}$$

Здесь $Y(t)$ — вектор-столбец национального дохода, $C(t)$ — вектор-столбец потребления, K — матрица коэффициентов полной

приростной капиталоемкости, т. е. полных затрат производственного накопления на единичные приросты элементов используемого национального дохода.

Система уравнений (21.25) является матричным аналогом дифференциального уравнения (21.14).

Заметим, что матрица K и матрица прямых материальных затрат A связаны уравнением:

$$K = B\,(E - A)^{-1},$$

где A — матрица коэффициентов прямых материальных затрат (в отличие от коэффициентов статического межотраслевого баланса, коэффициенты динамической модели включают также затраты на возмещение основных производственных фондов); B — матрица коэффициентов капиталоемкости приростов производства (затраты производственного накопления на единицу прироста соответствующих видов продукции); $(E - A)^{-1}$ — матрица коэффициентов полных потребностей в выпуске продукции для получения единиц соответствующих видов конечной продукции.

▽ **Пример (динамическая модель Леонтьева)** [1]**.** Рассмотрим народное хозяйство в разрезе двух отраслей. Пусть $C(t) = 0$ (экономика замкнута, т. е. все потребляется самими отраслями):

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 1{,}0 & 0{,}8 \end{pmatrix}, \qquad Y(0) = \begin{pmatrix} 25 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Найти динамику роста национального дохода с учетом отраслевой структуры.

Решение. Вычислим матрицы $(E - A)^{-1}$ и $K = B(E - A)^{-1}$:

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}54 & 0{,}77 \\ 0{,}77 & 2{,}05 \end{pmatrix}, \qquad K = \begin{pmatrix} 1{,}16 & 1{,}41 \\ 2{,}16 & 2{,}41 \end{pmatrix}.$$

Решая систему дифференциальных уравнений

$$Y(t) = K\,\frac{dY(t)}{dt},$$

находим все элементы решения

$$Y(t) = 40{,}4 \begin{pmatrix} 0{,}35 \\ 0{,}61 \end{pmatrix} e^{0{,}275\,t} + 9{,}6 \begin{pmatrix} 1{,}15 \\ -1{,}00 \end{pmatrix} e^{-14{,}2\,t}. \qquad (21.26)$$

[1] См. [13, с. 127–128].

Проанализируем полученное решение. Технологический темп прироста равен 0,275; он соответствует корню Фронебиуса–Перрона $\widetilde{\lambda} = 3{,}64$. Ему соответствует также собственный вектор $\widetilde{Y} = \begin{pmatrix} 0{,}35 \\ 0{,}61 \end{pmatrix}$, определяющий структуру вектора $Y(t)$. Второе слагаемое в уравнении (21.26) очень быстро стремится к нулю. Поэтому темп прироста национального дохода и его отраслевая структура очень быстро приближаются соответственно к $\widetilde{\lambda}$ и $\widetilde{Y}$. Уже при $t = 30$ различия фактических и асимптотических структур становятся меньше 0,001. ▲

Первая модель В. Леонтьева содержала 44 отрасли, баланс США за 1947 год охватывал примерно 400 отраслей. Современные балансы создаются с помощью быстродействующих компьютеров. Создание таких балансов позволяет прогнозировать тенденции экономического роста и создавать сценарии экономического развития.

> *ЛЕО́НТЬЕВ (Leontief) Василий Васильевич (1906–1999), американский экономист. Родился в России, в Санкт-Петербурге и там же окончил университет. Разработал в 30-х гг. метод экономико-математического анализа «затраты–выпуск» для изучения межотраслевых связей, который широко применяется для прогнозирования и планирования экономики. Лауреат Нобелевской премии (1973).*

Так, в 1941–1942 гг. В. Леонтьев опроверг предсказания о том, что послевоенная конверсия промышленности неизбежно приведет к массовой безработице. Вопреки убеждениям о падении спроса на продукцию сталелитейной промышленности США, он доказал (и это подтвердилось): спрос на сталь возрастет благодаря расширению строительства и массовой реконструкции. Этот прогноз был сделан благодаря учету межотраслевых взаимодействий, не улавливаемых, как правило, сторонниками правдоподобных, но упрощенных объяснений процессов, происходящих в экономике.

Заметим, что планирование, основанное на модели межотраслевого баланса не противоречит рыночной экономике. Леонтьев часто использовал сравнение экономики с кораблем: частная инициатива, как ветер в парусах, сообщает экономике свой импульс; планирование же, как руль, направляет экономику в нужную сторону.

Заключение

В 1956 году в статье «Вклад в теорию экономического роста» Р. Солоу предложил математическую модель, выраженную в форме системы дифференциальных уравнений, которая показывает, как возросший основной капитал вызывает рост продукции на душу населения. Основной вывод, вытекающий из анализа решения этой системы, заключается в том, что темпы экономического роста, рассмотренные на протяжении длительного периода времени, не зависят от темпа роста капиталовложений. Определяющими факторами экономического роста являются не капиталовложения, а технический прогресс и эффективное использование ресурсов. Впоследствии этот удивительный вывод был подтвержден при анализе развития экономики. Было доказано, что $\frac{7}{8}$ роста американской экономики за период с 1909 по 1949 г. следует отнести за счет технического прогресса и лишь $\frac{1}{8}$ — за счет капиталовложений.

> *СОЛОУ* (*Solow*) *Роберт* (*р.* 1924), — *американский экономист. Исследования в области эконометрики, теории экономического роста. Лауреат Нобелевской премии* (1987).

Это открытие подчеркивает огромную роль науки, образования, бережного отношения к людям и знаниям. Только благодаря знаниям и эффективному их применению, а не капиталу, можно надеяться на экономический рост и процветание нашей Родины. Эффективное, оптимальное развитие невозможно без использования математики.

Заканчивая книгу, обращаюсь к своим читателям. Любите математику!

Математика — это способ мышления, побуждающий действовать точно, оптимально и эффективно.

Математика — это ритм и размер, рождающие поэзию.

Математика — это гармония, которая скрыта в искусстве и музыке.

Математика — это универсальный язык, на котором изъясняется наука.

Обретенные знания — это ваш капитал, который никто не сможет отнять. Хорошо усвоенные знания по математике — это капитал втройне, поскольку, во-первых, математические знания точны, так как строго доказаны, во-вторых, эффективны, поскольку используют оптимальные методы, в-третьих, универсальны, так как применимы и в биологии, и в технике, и в экономике.

Усвоение знаний по математике возможно только при применении их на практике и при решении задач.

Поэтому ищите новые приемы решения задач, эффективные применения теории на практике. Пусть каждый новый ответ, каждое новое решение будет вашим открытием, будет вашей победой. Это поможет вам стать творческими людьми, яркими личностями, созидателями и вершителями своей судьбы.

Литература

1. *Абрамов А. М., Виленкин Н. Я., Дорофеев Г. В. и др.* Избранные вопросы математики: 10 кл. Факультативный курс. / Сост.: С. И. Шварцбурд. М.: Просвещение, 1980. 191 с.
2. *Ахтямов А. М., Гадыльшин Р.Р.* Высшая математика. / Учебное пособие для студентов первого и второго курсов экономического факультета. Уфа: Изд-во Башкирск. ун-та, 1996. 74 с.
3. *Ахтямов А. М.* Математический анализ для социально-экономических специальностей. / Учебное пособие в 3-х частях. Уфа: Изд-во Башкирск. ун-та, 2001. Ч. 1. 122 с. Ч. 2. 199 с. Ч. 3. 194 с.
4. *Берс Л.* Математический анализ. / Учебное пособие для втузов. В 2 томах. М.: Высшая школа, 1975. Т. 1. 519 с. Т. 2. 544 с.
5. *Бестужев-Лада И. В., Варыгин В. Н. Малахов В.А.* Моделирование в социологических исследованиях. 103 с.
6. Большой экономический словарь. / Под ред. А. Н. Азрилияна. Изд. 5-е дополненное и переработанное. М.: Институт новой экономики, 2002. 1280 с.
7. *Бородин А. И., Бугай А. С.* Биографический словарь деятелей в области математики. / Пер. с укр. под. ред. И. И. Гихмана. Киев: Радянска школа, 1979. 607 с.
8. *Боярский А. Я.* Математика для экономистов. М.: Госстатиздат, 1961. 464 с.
9. *Выгодский М. Я.* Справочник по высшей математике. Изд. 3-е. М.: Физматгиз, 1958. 784 с.
10. *Гальперин В. М.* Макроэкономика. СПб.: Экономическая школа, 1997. 719 с.
11. *Говорухин В. Н., Цибулин В. Н.* Введение в Maple. Математический пакет для всех. М.: Мир, 1997. 208 с.
12. *Горелик В. А., Горелов М. А., Кононенко А. Ф.* Анализ конфликтных ситуаций в системах управления. М.: Радио и связь, 1991. 288 с.
13. *Гранберг А. Г.* Динамические модели народного хозяйства. / Учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности «Экономическая кибернетика». М.: Экономика, 1985. 240 с.
14. *Гусак А. А.* Высшая математика: Учебное пособие для естеств. спец. университетов. В 2 т. Т. 1. Изд. 2-е переработанное и дополненное. Минск: Изд-во Белорусск. ун-та, 1983. 464 с. Т. 2. Изд. 2-е

переработанное и дополненное. Минск: Изд-во Белорусск. ун-та, 1984. 383 с.

15. *Замков О. О., Толстопятенко А. В., Черемных Ю. Н.* Математические методы в экономике. / Учебник. Изд. 2-е. М.: Дело и сервис, 1999. 368 с.
16. *Зайцев И. А.* Высшая математика. / Учебник для неинженерных специальностей с.-х. вузов. М.: Высшая школа, 1991. 400 с.
17. *Каченовский М. И., Кутасов А. Д., Луканкин Г. Л. и др.* Математика для техникумов. Алгебра и начала анализа. / Учебник. Ч. 2. / Под ред. Г. Н. Яковлева. Изд. 3-е, переработанное. М.: Наука, 1988. 272 с.
18. *Коршунова Н. И., Плясунов В. С.* Математика в экономике. М.: Вита-Пресс, 1996. 368 с.
19. *Красс М. С.* Математика для экономических специальностей. / Учебник. М.: ИНФРА-М, 1998. 464 с. (Серия «Высшее образование»).
20. *Кремер Н. Ш., Путко Б. А., Тришин И. М., Фридман М. Н.* Высшая математика для экономистов. / Учебное пособие для вузов. / Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. 439 с.
21. *Крыньский Х. Э.* Математика для экономистов. / Пер. с польск. М.: Статистика, 1970. 580 с.
22. *Крушевский А. В.* Справочник по экономико-математическим моделям и методам. Киев: Техніка, 1982. 208 с.
23. *Кудрявцев В. А., Демидович Б. П.* Краткий курс высшей математики. / Учебное пособие для вузов. Изд. 7-е исправленное М.: Наука, 1989. 656 с.
24. *Леонтьев В. В.* Межотраслевая экономика. / Пер. с англ. / Автор предисл. и науч. ред. А. Г. Гранберг. М.: Экономика, 1997. 479 с.
25. *Макконел К. Р., Брю С. Л.* Экономика: Принципы, проблемы и политика. В 2 т. Т. 1. М.: Республика, 1995. 400 с. Т. 2. М.: Высшая школа, 1995. 100 с.
26. *Манзон Б. М.* Maple V Power Edition. М.: Филинъ, 1998. 240 с.
27. Математика. Большой энциклопедический словарь. / Гл. ред. Ю. В. Прохоров. Изд. 3-е. М.: Большая Российская энциклопедия, 1998. 848 с.
28. Математика: Школьная энциклопедия. / Гл. ред. С. М. Никольский. М.: Большая Российская энциклопедия, 1996. 527 с.
29. *Мордкович А. Г., Солодовников А. С.* Математический анализ. / Учебник для техникумов. М.: Высшая школа, 1990. 416 с.
30. Нобелевские лауреаты по экономике. Библиографический словарь 1969–1992. М.: Информат, 1994. 220 с.
31. *Паповян С. С.* Математические методы в социальной психологии. М.: Наука, 1983. 344 с.

32. *Рябушко А. П., Бархатов В. В., Державец В. В., Юрутъ И. Е.* Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. / Учебное пособие. В 3 ч. Ч. 2. / Под общ. ред. А. П. Рябушко. Минск: Вища школа, 1991. 352 с.
33. *Солодовников А. С., Бабайцев В. А., Браилов А. В.* Математика в экономике. / Учебник в 2-х ч. Ч.1. М.: Финансы и статистика, 1999. 224 с.
34. *Солодовников А. С., Бабайцев В. А., Браилов А. В., Шандра И. Г.* Математика в экономике. / Учебник в 2-х ч. Ч.2. М.: Финансы и статистика, 1999. 376 с.
35. *Фрид Э., Пастор И., Рейман И., Ревес П., Ружа И.* Малая математическая энциклопедия. Будапешт: Издательство Академии наук Венгрии, 1976. 693 с.
36. *Штейнгардт Д. А.* Высшая математика: Методические разработки для выполнения контрольной работы № 6. М.: ВСХИЗО, 1980. 81 с.
37. *Штейнгардт Д. А.* Высшая математика: Методические разработки для выполнения контрольной работы № 5. М.: ВСХИЗО, 1981. Ч. 1. 64 с., Ч. 2. 70 с.

---

38. *Lial M. L., Greenwell R. N., Miller C.D.* Calculus with applications: brief version. 6th ed. 1998. Addison Wesley Educational Publishers, Inc. 522 p.

Приложение

Некоторые математические символы

$\forall$	квантор общности
$\exists$	квантор существования
$!$	квантор единственности
$A \vee B$	дизъюнкция высказываний A и B
$A \wedge B$	конъюнкция высказываний A и B
$A \Rightarrow B$	импликация высказываний A и B
$A \Leftrightarrow B$	эквивалентность высказываний A и B
$B \subset A$	B — подмножество множества A
$a \in A$	a принадлежит множеству A
$a \notin A$	a не принадлежит A
$A = B$	A и B равны
$A \cup B$	объединение множеств A и B
$A \cap B$	пересечение множеств A и B
∞	бесконечность
$[a; b]$	отрезок (сегмент)
$(a; b]$, $[a; b)$	полуинтервалы
$(a; b)$	интервал
$\mathbb{N}$	множество натуральных чисел
$\mathbb{Z}$	множество целых чисел
$\mathbb{Q}$	множество рациональных чисел
$\mathbb{R}$	множество действительных чисел
$\overline{\mathbb{R}}$	расширенное множество действительных чисел
$\lvert x \rvert$	модуль x
$D(f)$	область определения функции
$E(f)$	область значений функции

Алфавитный указатель

Автономная система 406
Акселератор 198, 442
Амплитуда затухающих колебаний 381
Анализ неархимедов 250
— нестандартный 250
Антье x 39
Аньези Мария 264
Аполлоний Пергский 165
Аргумент 22
Архимед 220
Асимптота вертикальная 165
— горизонтальная 165
— графика функции 166
— — — двусторонняя 167
— — — левосторонняя 167
— — — наклонная 168
— — — правосторонняя 167
— наклонная 165

Барроу Иссак 239
Бернулли Иоганн I 132
Бернулли Якоб 203
Бесконечность 20
Больцано Бернард 73

Введение постоянных и переменных под знак дифференциала 212
Вейерштрасс Карл 73
Величина абсолютная 20
— бесконечно большая 59, 61
— — малая 63
— более высокого порядка малости 65
— переменная 21
— постоянная 21
Величины бесонечно малые эквивалентные 65
— маржинальные 183
— предельные 183
Выражение подынтегральное 226

Гамильтон Уильям 295
Гейне Генрих 59
Геометрический смысл градиента 295
— — несобственного интеграла 262
— — производной по направлению 293
— — теоремы существования и единственности решения дифференциального уравнения 370
— — частной производной 286
Гессе Людвиг 315
Гессиан 315
Градиент функции 294
График функции 24
— — выпуклый вверх 160
— — выпуклый вниз 160

Движение 405
Демографический взрыв 426
Джини Каррадо 271
Дирихле Петер 39
Дифференциал функции 113
— — второго порядка 314
— — первого порядка 314
— — полный 288
— — частный 289
Дифференциальное уравнение 359
— — n-го порядка линейное неоднородное 398
— — — — — — однородное 398
— — второго порядка 359

— — — — линейное 373
— — — — — неоднородное 373
— — — — — с постоянными коэффициентами 373
— — первого порядка 359
— — — — линейное 363
— — — — — неоднородное 363
— — — — — однородное 363
— — , разрешенное относительно производной 359
— — с разделяющимися переменными 361
Дифференцирование 107
Домар Евсей 429
Дуглас Пол 337

Задание функции аналитическое 280
— — табличное 280
Задача Бернулли о кредитовании 422
— Дидоны 156
— дисконтирования 275
— Коши 360, 370, 404
Закон движения 405
Замечательный предел второй 87
— — первый 82
Затухание непериодическое 381
Затухающие колебания 381
Знак интеграла 203
Знаменатель прогрессии 52

Изокванта 346
Интеграл двойной 300
— неопределенный 203
— несобственный 261
— определенный 225
— — с переменным верхним пределом 237
— повторный 300, 301
Интегральная сумма 225
Интегрирование 203, 226
— непосредственное 208
— системы дифференциальных уравнений первого порядка 404
Интервал 20

Касательная к кривой 104
Касательная плоскость 289
Квадратичная форма 310
— — знакоопределенная 311
— — знакопеременной 311
— — отрицательно определенная 311
— — положительно определенная 311
— — симметричная 311
Кеплер Иоганн 221
Композиция функций 37
Корень функции 130
Коши Огюстен 59
Коэффициент акселерации 198
— затухания 381
— эластичности 189
— — выпуска 348
Кривая интегральная 360, 369, 404
— логистическая 431
— Филлипса 25
Криволинейная трапеция 223
Критерий Сильвестра 312

Лагранж Жозеф 107
Лейбниц Готфрид 108
Леонтьев Василий 450
Линейная система 406
Линия постоянного выпуска 346
— уровня 345
Лобачевский Николай 112
Лопиталь Гийом 132
Лоренц Макс 271

Максвелл Джеймс 294
Максимум нестрогий локальный 143, 305
— строгий глобальный 143
— — локальный 142, 305
Мальтузианский коэффициент линейного роста 424
Мальтус Томас 424
Маршалл Альфред 189
Матрица Гессе 315
— квадратичной формы 312
Метод вариации постоянной 363

— — произвольных постоянных 392
— замены перемены 210
— линий уровня 280
— множителей Лагранжа 319
— неопределенных коэффициентов 387
— подстановки 210
Методы численные 254
Механический смысл производной по направлению 293
— — частной производной 286
Минимум нестрогий локальный 143, 305
— строгий глобальный 143
— — локальный 142, 305
Минус бесконечность 19
Множества равные 18
Множество 17
— действительных чисел расширенное 19
— пустое 18
— элементарное относительно оси Ox 301
Множитель Лагранжа 319
Модель естественного роста выпуска 428
— Леонтьева динамическая 448
— рынка 445
— социального взаимодействия Саймона 446
— «социальной диффузии» 433
— экономического цикла Самуэльсона–Хикса 441
Модуль 20

Начальные условия 370
Необходимое условие строгой монотонности 142
Неопределенность 65
— вида $\frac{0}{0}$ 65
Непрерывность функции 284
Несобственный интеграл от разрывной функции 266
— — расходящийся 266
— — сходящийся 266
Нормаль к поверхности 289
Нормальная система 404
Нуль функции 130
Ньютон Исаак 109

Область значений 22
— определения 22, 281
— существования 22
— сходимости степенного ряда 135
Объединение множеств 18
Окрестность точки 20, 305
Основная область функции 27
Основные теоремы о пределах 66
Остаток ряда 137
Ось числовая 19
Отрезок 20

Параметр 23
Первообразная 201
— обобщенная 267
Переменная зависимая 22, 278
— интегрирования 203
— независимая 22, 278
Пересечение множеств 18
Период 27
— зарождения математики 12
— математики переменных величин 12
— современной математики 12
— элементарной математики 12
Плоскость фазовая 405
Плюс бесконечность 19
Погрешность 323
Подмножество 18
Поле скоростей 405
Полуинтервал 20
Порядок дифференциального уравнения 359
Последовательность 43
— возрастающая 47
— — строго 47
— монотонная 47
— ограниченная 47
— постоянная 47
— строго монотонная 47

— сходящаяся 45
— убывающая 47
— — строго 47
Постулаты Хоманса 446
Правило величины «семьдесят» 427
Предел интегрирования верхний 226
— — нижний 226
— конечный 62
— односторонний 62
— — левый 62
— — правый 62
— последовательности 44
— функции 56, 58, 282
— — левосторонний 74
— — правосторонний 74
Предельная норма замещения 346
Представление функции графическое 279
Преобразование графиков 39
— функции под знаком интеграла 212
Принцип акселератора 198
— замены эквивалентных 66
— наложения 396
— суперпозиции 396
Приращение частное 288
Прогрессия геометрическая 52
Продукт маржинальный 106
— предельный 106
Производительность труда 106
Производная логарифмическая 122
— по направлению 293
— сложной функции 291
— функции 106
Промежуток 20
Пространство фазовое 405
Процесс естественного роста 423
Прямая числовая 19
— — расширенная 19

Разностное уравнение неоднородное 416
— — однородное 416
Раскрытие неопределенности 65
Расходы условно-переменные 327
— условно-постоянные 327
Решение дифференциального уравнения 359, 369
— — — второго порядка 370
— задачи Коши 360
— разностного уравнения 416
— — — общее 416
— — — частное 416
— системы дифференциальных уравнений первого порядка 404
Ролль Мишель 130
Ряд биномиальный 138
— расходящийся 54
— степенной 135
— сходящийся 54
— Тейлора 136
— числовой 53

Самуэльсон Пол 442
Свойства функций основные 25
Сегмент 20
Седловина 308
Сильвестр Джеймс 312
Симпсон 259
Система в нормальной форме 404
— дифференциальных уравнений первого порядка 404
— линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами неоднородная 406
— — — — — — — однородная 406
— разностных уравнений 417
Скачок 74
Скорость изменения функции относительная 124, 188
— точки 105
Солоу Роберт 451
Способ задания функции 23
— — — аналитический 23

— — — графический 24
— — — неявный 23
— — — параметрический 23
— — — явный 23
Спрос неэластичный 192
— совершенно неэластичный 192
— — эластичный 192
— эластичный 192
Стационарная система 406
— точка 306
Сумма ряда 54

Тейлор Брук 136
Темп роста функции 124, 188
Теорема Больцано–Коши 73
— Вейерштрасса вторая 72
— Вейерштрасса первая 72
— Коши 130
Точка бесконечно удаленная 20
— минимакса 308
— перегиба 162
— экстремума 144
— — условного 319
Точки 17
— критические 146
— стационарные 145, 313

Уравнение Бернулли 366
— естественного роста 423
— Коулмена 434
— касательной плоскости 290
— связи 319
— Ферхюльста 431
— Хикса 443
— характеристическое 376, 408
Уравнения нормали канонические 290
Условие начальное 360
— экстремума необходимое 307
Условия Коши 405
— начальные 405

Филлипс Олван 24
Формула замены переменной 210, 241
— интегрирования по частям 214, 243
— Макегама 435
— Ньютона биномиальная 137
— парабол 258
— прямоугольников 255
— Симпсона 258
— Тейлора 137
— трапеция 257
— Филлипса 24
— эмпирическая 322
Фундаментальная система решений 399
Функции линейно зависимые 374, 398
— независимые 374, 398
Функция 21, 278
— возрастающая 26
— — строго 26
— выпуска 339
— Дирихле 38
— двузначная 22
— дифференцируемая 288
— — в точке 107
— — на промежутке 107
— интегрируемая 226
— Кобба–Дугласа 337
— Лагранжа 319
— линейно-однородная 337
— многозначная 22
— монотонная 26
— непрерывная 70
— — в точке 71
— — на промежутке 71
— непрерывно дифференцируемая 112
— нескольких переменных 22
— нечетная 25
— неявная 297
— обратимая 27
— обратная 28
— общего вида 25
— ограниченная 27, 72
— однозначная 22
— основная элементарная 30
— от функции 37
— периодическая 27
— подынтегральная 203, 226
— производственная 339
— — однородной степени 339

— производственных затрат 339
— с постоянными пропорциями 337, 338
— сложная 37, 291
— степенно-показательная 124
— строго монотонная 26
— убывающая 26
— — строго 26
— Филлипса 23
— четная 25
— элементарная 38
— явная 297

Характеристическое уравнение 420
Харрод Рой 429
Хикс Джон 442

Циклическая частота 381
Цилиндроид 300

Частичная сумма ряда 54
Частная производная второго порядка 295
— — первая 285
— — первого порядка 285
— — смешанная 296
Член последовательности n-й 43
— — общий 43
Член ряда 54
— — общий 54
— — n-й 54

Эйлер Леонард 87
Экономический смысл градиента 295
— — производной по направлению 294
— — частной производной 286
Экстремум 144
— функции двух переменных 306
Эластичность функции 189
Элементы множества 17

Учебное издание

АХТЯМОВ Азамат Мухтарович

МАТЕМАТИКА ДЛЯ СОЦИОЛОГОВ И ЭКОНОМИСТОВ

Редактор *Р.А. Бунатян*
Оригинал-макет: *А.М. Широков*
Оформление переплета: *А.Ю. Алехина*

ЛР №071930 от 06.07.99. Подписано в печать 15.12.03.
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 29. Уч.-изд. л. 32. Заказ № 9497

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, http://www.fml.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ППП «Типография «Наука»
121099 Москва, Шубинский пер., 6

ISBN 5-9221-0460-8

