Mathematische Methoden der Physik, Teil I

Prof. A. Wipf
Theoretisch-Physikalisches Institut
Friedrich-Schiller-Universität
Max Wien Platz 1
07743 Jena

Wintersemester 1999/2000

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung, Literatur **3**

2 Differentialgleichungen und spezielle Funktionen **5**

2.1 Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten 5

2.1.1 Die allgemeine (formale) Lösung 6

2.1.2 Wichtige Spezialfälle 8

2.1.3 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung 12

2.2 Homogene und inhomogene lineare Systeme mit variablen Koeffizienten . . . 13

2.2.1 Formale Lösung durch Dysonreihe 14

2.2.2 Inhomogene lineare Differentialgleichungen 15

2.3 Nichtlineare Differentialgleichungen 17

2.3.1 Einige einfache und exakt lösbare nichtlineare DG 18

2.3.2 Räuber-Beute Problem 19

2.3.3 Stabilität 19

2.3.4 Liapunov Funktionen 21

2.3.5 Lineare Stabilität bedingt Stabilität 23

2.4 Periodische Systeme 25

2.4.1 Mathieusche Differentialgleichung, Blochwellen und Stabilität 27

2.4.2 Feigenbaumbifurkation 29

2.5 Lineare Differentialgleichungen mit Singularitäten 31
2.5.1 Die Legendresche Differentialgleichung 31
2.5.2 Orthogonale Polynome in Hilberträumen 37
2.5.3 Zugeordnete Legendrefunktionen oder Kugelfunktionen 39
2.5.4 Der Satz von Fuchs 40
2.5.5 Integraltransformationen 41
2.5.6 Die Besselsche Differentialgleichung 42
2.5.7 Die Hypergeometrische Differentialgleichung 51

3 Gruppen und Darstellungen **53**

3.1 Beispiele von Gruppen 54
3.1.1 Endliche Gruppen, S_N: 54
3.1.2 Liesche Gruppen, $SU(2)$ 55
3.2 Elemente der Gruppentheorie 58
3.3 Darstellungen von Gruppen 61
3.3.1 Äquivalenz von Darstellungen 62
3.3.2 Reduzibilität von Darstellungen beliebiger Gruppen 65
3.4 Mittelbildung und Haarsches Maß 66
3.4.1 Mittelbildung für kompakte Lie-Gruppen 67
3.4.2 Unitäre Darstellungen 69
3.5 Klassenfunktionen und Charaktere 70
3.6 Alle Darstellungen einer endlichen Gruppe 81
3.7 Die Charakterenmatrix 83
3.8 Lie-Gruppen und Liealgebren. 85
3.8.1 Die Charakteren von kompakten Lie-Gruppen 86
3.8.2 Lie-Algebren 89

Kapitel 1

Einführung, Literatur

Diese Vorlesung richtet sich an Studenten im fünften Semester. Sie sollen hier die für das Verständnis der Physikvorlesungen notwendigen mathematischen Werkzeuge vertiefen. Die Vorlesung besteht aus vier Kapiteln:

- Differentialgleichungen und spezielle Funktionen (Wipf)
- Symmetrien und Liegruppen/Liealgebren (Wipf)
- Stochastische Prozesse (Neugebauer)
- Einführung in wahrscheinlichkeitstheoretische Methoden (Neugebauer).

Dieses Skript enthält die ersten beiden Kapitel (Teil 1) der Vorlesung. Folgende *Literatur* kann für diesen Teil empfohlen werden:

Methoden der Mathematische Physik:

R. COURANT UND D. HILBERT, Methoden der Mathematischen Physik I und II; 2. Auflage, Heidelberger Taschenbücher, Springer 1968
W.I. SMIRNOV, Lehrgang der Höheren Mathematik, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1963-71
H. FISCHER UND H. KAUL, Mathematik für Physiker, Teubner Studienbücher, 1998
H. MARGENAU UND G.M. MURPHY, Die Mathematik für Physik und Chemie, Teubner 1964

Gewöhnliche Differentialgleichungen, spezielle Funktionen:

W. WALTER, Gewöhnliche Differentialgleichungen – Eine Einführung –, Heidelberger Taschenbücher, Springer 1993

E. KAMKE, Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, 7. Auflage, Akademische Verlagsgesellschaft, Geest & Portig, K.G., Leipzig 1961
V.I. ARNOLD, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Springer 1980
V.I. ARNOLD, Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations, Springer 1983
M.W. HIRSCH UND S. SMALE, Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra, Academic Press 1974
H. STEPHANI, Differentialgleichungen, Spektrum 1994
M. ABRAMOVITZ UND I.A. STEGUN, Handbook of Mathematical Functions, Dover 1970
A. ERDELYI, W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER UND F.G. TRICOMI, Higher Transcendental Functions I-III, Mc Graw-Hill Book Comp. 1953

Liegruppen, Liealgebren und Darstellungen:

H. GEORGI, Lie Algebras in Particle Physics, Reading, Benjamin 1982
M. HAMERMESH, Group Theory and its Application to Physical Problems, Dover 1989
V. HEINE, Group Theory in Quantum Mechanics, Dover 1993
W. LUDWIG UND C. FALTER, Symmetries in Physics: Group Theory Applied to Physial Problems, Springer 1996
E. WIGNER, Group Theory and its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra, Academic Press 1959
J. TITS, Liesche Gruppen und Algebren, Springer 1992
H. WEYL, Gruppentheorie und Quantenmechanik, Hirzel-Verlag, 1928
M. WAGNER, Gruppentheoretische Methoden in der Physik, Vieweg 1998

Kapitel 2

Differentialgleichungen und spezielle Funktionen

2.1 Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Systeme von Differentialgleichungen

$$\begin{array}{l} \dot{w}_1 = a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + \ldots + a_{1n}w_n \\ \dot{w}_2 = a_{21}w_1 + a_{22}w_2 + \ldots + a_{2n}w_n \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ \dot{w}_n = a_{n1}w_1 + a_{n2}w_2 + \ldots + a_{nn}w_n \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{w} = Aw \tag{2.1}$$

mit konstantem Koeffizienten a_{ij} treten in vielen Problemen auf. Einfache Ratengleichungen, Hamiltonsche Bewegungsgleichungen oder Schrödingergleichungen (mit endlich vielen Freiheitsgraden) sind Beispiele dafür. Die kovariante Form der Bewegungsgleichung für ein relativistisches Teilchen im äußeren elektromagnetischen Feld,

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{e}{mc} F^\mu{}_\nu u^\nu, \tag{2.2}$$

wobei m die Masse, τ die Eigenzeit, $u^\mu = \dot{x}^\mu = \gamma(c, \vec{v})$ die Vierer-Geschwindigkeit des

Teilchen und

$$F^{\mu}_{\ \nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

der Feldstärketensor ist, ist für konstantes $(\vec{E}, \vec{B})$ eine Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten. Auch bei der Untersuchung von einparametrigen Untergruppen von Lie-Gruppen werden wir diesen einfachen Differentialgleichungen wieder begegnen.

Eine Lösung des Systems

$$\dot{w} = Aw, \qquad w \in V, \quad A \in L(V), \tag{2.3}$$

wobei V ein n-dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt ist (z.B. $V = R^n$ oder $V = C^n$), ist durch die Angabe des Anfangswertes

$$w(0) = w_0 \in V \tag{2.4}$$

eindeutig bestimmt. Da es n linear unabhängige Vektoren $w(0)$ gibt und Linearkombinationen von Lösungen wieder Lösungen sind, gibt es n unabhängige Lösungen.

2.1.1 Die allgemeine (formale) Lösung

Bei der Lösungssuche wollen wir benutzen, daß $w(t)$ genau dann eine Lösung von (2.3,2.4) ist, wenn es die Integralgleichung

$$w(t) = w_0 + \int_0^t A\, w(t_1) dt_1 \tag{2.5}$$

löst. Diese Integralgleichung lösen wir nun iterativ. In der nullten Näherung ist $w_0(t) = w_0$. Dies setzen wir in der rechten Seite in (2.5) ein und erhalten die erste Näherung

$$w_1(t) = w_0 + \int_0^t A w_0 dt_1 = w_0 + A\, w_0 t.$$

Nun benutzen wir $w_1(t)$ in der rechten Seite in (2.5) und erhalten die zweite Näherung

$$w_2(t) = w_0 + \int_0^t A\, w_1(t_1) dt_1 = w_0 + A\, w_0 t + \frac{1}{2} A^2 w_0.$$

Nach n Iterationen finden wir

$$w_n(t) = \sum_{p=0}^{n} \frac{t^p}{p!} A^p w_0.$$

Wir wollen uns nun davon überzeugen, daß die rechte Seite konvergiert. Dazu erinnern wir uns daran, daß $L(V)$, versehen mit der Norm

$$\|A\| = \max_{|w|=1} |Aw|, \qquad |w| = (w,w)^{1/2},$$

ein vollständiger Vektorraum ist. Wegen

$$\|A+B\| = \max|(A+B)w| \leq \max(|Aw| + |Bw|) \leq \max|Aw| + \max|Bw|$$

erfüllt die Norm die Schwartzsche Ungleichung

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\| \tag{2.6}$$

und aus der Definition der Norm folgt auch ($|w| = 1$)

$$|ABw| = |A(Bw)| \leq \|A\|\,|Bw| \leq \|A\|\,\|B\| \Longrightarrow \|AB\| \leq \|A\|\,\|B\| \quad , \quad \|A^p\| \leq \|A\|^p.$$

Damit ist

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} A^p = e^{tA}$$

eine absolut konvergente Reihe für jeden linearen Operator A. Also konvergiert $w_n(t)$ gegen die Lösung

$$w(t) = \sum_{0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} A^p w_0 \equiv e^{At} w(0). \tag{2.7}$$

Durch direktes Nachrechnen kann man sich auch davon überzeugen, daß $w(t) = \exp(tA)w(0)$ die Differentialgleichung (2.3) löst[1]. Wir sehen auch, daß $w(t)$ eine in t analytische Funktion ist. In anderen Koordinaten $\tilde{w}$, die mit den w linear zusammenhängen,

$$\begin{array}{l} \tilde{w}_1 = s_{11}w_1 + s_{12}w_2 + \ldots + s_{1n}w_n \\ \tilde{w}_2 = s_{21}w_1 + s_{22}w_2 + \ldots + s_{2n}w_n \\ \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \tilde{w}_n = s_{n1}w_1 + s_{n2}w_2 + \ldots + s_{nn}w_n \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{w} = Sw, \tag{2.8}$$

wobei S eine reguläre Matrix ist, $\det S \neq 0$, sieht das Differentialgleichungssystem folgendermassen aus:

$$\dot{\tilde{w}} = S\dot{w} = SAw = SAS^{-1}\tilde{w} = D\tilde{w}.$$

[1] Zeige, das (2.7) die Differentialgleichung (2.3) löst.

Damit ist die Lösung in den $\tilde{w}$-Koordinaten

$$\tilde{w}(t) = e^{Dt}\tilde{w}(0), \qquad D = SAS^{-1}. \tag{2.9}$$

2.1.2 Wichtige Spezialfälle

Wir wollen jetzt einige wichtige Spezialfälle diskutieren.

$V = C^n$ und A diagonalisierbar: In der linearen Algebra zeigt man, daß eine Matrix B (im Komplexen) diagonalisierbar ist, wenn die Nullstellen λ_i des charakteristischen Polynoms

$$\begin{aligned} p(\lambda, B) &= \det(\lambda - B) = \lambda^n - \mathrm{Sp}\,(B)\lambda^{n-1} + \ldots + (-)^n \det B \\ &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n) \end{aligned} \tag{2.10}$$

verschieden sind. Sind also die Nullstellen des Polynoms $p(\lambda, A)$ verschieden, dann können wir eine Matrix S finden, so daß $SAS^{-1} = D$ diagonal ist, D =diag$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. In den $\tilde{w}$-Koordinaten ist die Lösung dann einfach

$$\tilde{w}(t) = e^{Dt}\tilde{w}(0) \Longleftrightarrow \tilde{w}_i(t) = e^{\lambda_i t}\tilde{w}_i(0), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.11}$$

Da die $\tilde{w}_i$ vollständig entkoppeln, genügt es das Verhalten einer Komponente $\tilde{w}_i = \tilde{w}$ zu betrachten. Zerlegen wir $\tilde{w}$ in Real- und Imaginärteil, $\tilde{w} = u + iv$, so schreibt sich die Lösung wie

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = e^{t\Re\lambda} \begin{pmatrix} \cos t\Im\lambda & -\sin t\Im\lambda \\ \sin t\Im\lambda & \cos t\Im\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix}.$$

Wir wollen die qualitativ verschiedenen Möglichkeiten etwas näher anschauen: Verschwindet der Imaginärteil des Eigenwertes, dann ist der Fixpunkt $w = 0$ für $\lambda > 0$ ein Quelle und für $\lambda < 0$ eine Senke. Im ersten Fall ist $w = 0$ ein instabiler, im zweiten Fall ein stabiler Fixpunkt der Differentialgleichung. Ist der Eigenwert dagegen rein imaginär, dann ist $w = 0$ ein Zentrum. Die Lösungen $w(t)$ sind periodisch mit derselben Periode und rotieren um den Fixpunkt. Ist $\Re\lambda > 0$ und $\Im\lambda \neq 0$ dann liegt ein auslaufender Strudel und für $\Re\lambda < 0$ ein einlaufender Strudel vor.

Haben alle Eigenwerte λ_i einen negativen Realteil, dann ist $w = 0$ ein *stabiler Fixpunkt.* Sind alle Realteile positiv, dann ist $w = 0$ ein *instabiler Fixpunkt.* Die Punkte $w(t)$ laufen dann von der Lösung $w = 0$ weg.

$V = C^n$, A beliebig

Hat das charakteristische Polynom $P(\lambda, A)$ von A mehrfache Nullstellen, dann ist A im

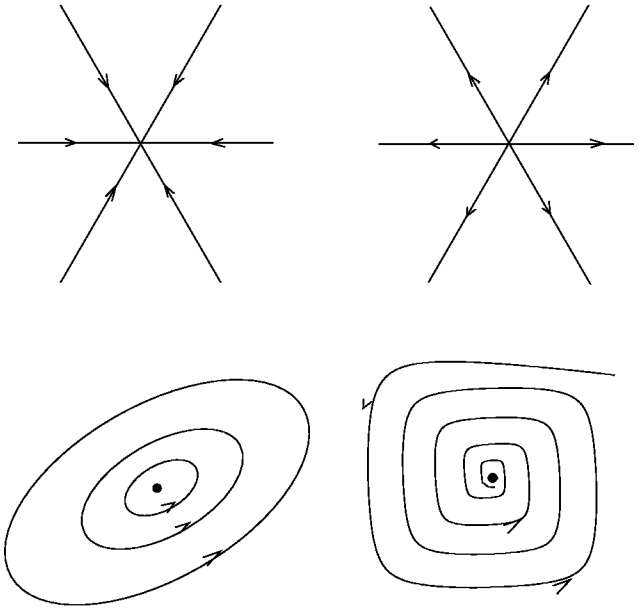


Abbildung 2.1: *Senke, Quelle, Zentrum und Strudel*

Allgemeinen nicht diagonalisierbar. Das charakteristische Polynom hat dann die Form

$$p(\lambda, A) = \det(\lambda - A) = \prod_{k=1}^{r} (\lambda - \lambda_k)^{n_k},$$

wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die verschiedenen Nullstellen von p sind und die $n_k > 0$ ihre Vielfachheiten. Wir definieren die *verallgemeinerten Eigenräume* von A zu den λ_k als die Unterräume

$$V_k = \mathrm{Kern}(A - \lambda_k)^{n_k} \subset V.$$

Ein Vektor w ist also genau in V_k falls $(A - \lambda_k)^{n_k} w = 0$ ist. Offensichtlich ist mit w auch Aw in V_k. Damit ist $A : V_k \to V_k$. Nun gilt folgender Satz:

Satz: Sei $A \in L(V)$, wobei V ein komplexer Vektorraum ist. Dann ist V die direkte Summe der verallgemeinerten Eigenräume V_k und $\dim V_k = n_k$.

Wir wollen sehen, was diese Zerlegung impliziert. Wir nehmen zuerst an, daß das charakteristische Polynom von A nur eine Nullstelle λ der Vielfachheit n hat und setzen

$$A = \lambda + N \equiv D + N.$$

Offensichtlich gilt $[D, N] = 0$ und D ist diagonal in jeder Basis. Wegen $(A - \lambda) = N$ ist Kern $N^n = V$ und damit ist N nilpotent, $N^n = 0$. Also gilt

$$e^{tA} = e^{t\lambda} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{N^p}{p!} t^p.$$

Daher kann das System $\dot{w} = Aw$ leicht gelöst werden.

Beispiel: Sei

$$\dot{w}_1 = w_1 - w_2 \quad , \quad \dot{w}_2 = w_1 + 3w_2. \tag{2.12}$$

Die zugehörige Matrix A hat das charakteristische Polynom $(\lambda - 2)^2$. Damit gilt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \lambda + N.$$

Man rechnet leicht nach, daß in der Tat $N^2 = 0$ ist, so daß

$$e^{tA} = e^{2t}(1 + tN) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix}$$

und damit lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (2.12)

$$\begin{aligned} w_1(t) &= e^{2t}\big((1-t)w_1(0) - tw_2(0)\big) \\ w_2(t) &= e^{2t}\big(tw_1(0) + (1+t)w_2(0)\big). \end{aligned}$$

Im allgemeinen Fall von mehr als einer Nullstelle von $p(\lambda, A)$ setzten wir $A_k = A|_{V_k}$. Jedes A_k hat nur einen Eigenwert und damit gilt

$$A_k = D_k + N_k, \qquad D_k, N_k \in L(V_k), \quad [D_k, N_k] = 0, \quad N_k^{n_k} = 0.$$

Damit gilt der

Satz: Jeder lineare Operator in $A \in L(C^n)$ hat die Zerlegung

$$A = D + N, \qquad D = D_1 \oplus \ldots \oplus D_r, \quad N = N_1 \oplus \ldots \oplus N_k.$$

Es gilt $[D, N] = 0$, N nilpotent und D diagonalisierbar. Man kann zeigen, daß A die Operatoren D und N eindeutig bestimmt.

Beispiel: Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow p(\lambda, A) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1). \tag{2.13}$$

Damit hat A den zweifachen Eigenwert -1 und den einfachen Eigenwert 1. Wegen

$$(A+1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (A-1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sind die verallgemeinerten Eigenräume

$$V_1 = \text{span}\{\tilde{e}_1 = e_1, \tilde{e}_2 = e_2\} \quad \text{und} \quad V_2 = \text{span}\{\tilde{e}_3 = 2e_2 + e_3\}.$$

Setzen wir $w_i e_i = \tilde{w}_i \tilde{e}_i$ wobei $\tilde{e}_i = S^{-1}_{ji} e_j$, so ist $\tilde{w} = Sw$ und damit geht $\dot{w} = Aw$ über in

$$\dot{\tilde{w}} = (SAS^{-1})\tilde{w} = \tilde{A}\tilde{w}, \quad \text{wobei} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist. Nach unserem allgemeinem Theorem ist

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{D} + \tilde{N}$$

die Summe eines diagonalen und nilpotenten Operators. Wir schließen, daß

$$A = D + N = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad [D, N] = 0, \quad N^2 = 0.$$

Um $\exp(tA)$ zu berechnen, benutzen wir, daß

$$e^{tA} \;=\; S^{-1} e^{t\tilde{A}} S = S^{-1} e^{t\tilde{D}} \big(1 + t\tilde{N}\big) S = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & -2te^{-t} \\ 0 & e^{-t} & 2(e^{t} - e^{-t}) \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix}.$$

Damit wäre auch die Differentialgleichung mit Matrix A in (2.13) gelöst.

$V = R^n$ und allgemeines A: Jeden linearen Operator $A \in L(R^n)$ können als linearen Operator auf $L(C^n)$ auffassen. Dort hat er die Eigenschaft $\bar{A} = A$. In C^n können wir obiges Resultat anwenden:

$$A = D + N \Longrightarrow \bar{A} = A = \bar{D} + \bar{N}.$$

Da aber die (D, N)-Zerlegung eindeutig ist, schließen wir, daß $\bar{D} = D$ und $\bar{N} = N$ ist. A kann also in ein reelles und im Komplexen diagonalisierbares D und ein reelles nilpotentes N zerlegt werden. Dann gibt es eine reelle Basis in R^n, so daß

$$D = \operatorname{diag}\Big(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, D(\lambda_{r+1}), \ldots, D(\lambda_s)\Big), \quad D(\lambda) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \lambda = a + ib,$$

wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die reellen Eigenwerte von A und $\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_s$ die komplexen Eigenwerte sind. $\exp(tD)$ ist einfach zu berechnen, da

$$e^{tD(\lambda)} = e^{ta} \begin{pmatrix} \cos tb & -\sin tb \\ \sin tb & \cos tb \end{pmatrix}$$

ist.

Übung: Berechne e^{tA} für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $p(\lambda, A) = 1 + 2\lambda^2 + \lambda^4$.

A antihermitesch oder antisymmetrisch: Ein für die Physik wichtiger Spezialfall ist gegeben, wenn A antihermitesch ist, $A^\dagger = -A$. In diesem Falle kann A mit einer unitären Matrix S diagonalisiert werden (da iA hermitesch ist) und alle Eigenwerte sind rein imaginär. Damit ist auch $\exp(Dt)$ unitär und

$$w(t) = e^{At}w(0) = S^{-1}e^{Dt}Sw(0) = U(t)w(0), \qquad U(t) \quad \text{unitär.}$$

Es sei nun $V = R^n$ und A antisymmetrisch, $A^t = -A$. Wegen

$$\frac{d}{dt}\big(w(t), w(t)\big) = \big(Aw(t), w(t)\big) + \big(w(t), Aw(t)\big) = 0$$

ist $|w(t)| = |w(0)|$. Damit ist $R(t) = \exp(tA)$ eine längenerhaltende lineare Abbildung, also eine Drehung. Aus (2.10) folgern wir für eine beliebiges B, daß

$$\mathrm{tr}\,(B) = \sum \lambda_i \quad \text{und} \quad \det B = \prod \lambda_i,$$

so daß für beliebige Operatoren B die nützliche Identität

$$\log\det(B) = \mathrm{tr}\,\log(B) \tag{2.14}$$

folgt. Insbesondere ist

$$\det\big(\exp(tA)\big) = \exp\big(t\mathrm{tr}\,A\big) = 1$$

und damit ist $R(t)$ eine eigentliche Drehung, $\det(R) = 1$.

2.1.3 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Wir betrachten eine Differentialgleichung höherer Ordnung,

$$u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\dot{u} + a_n u = 0. \tag{2.15}$$

Hier soll u eine reell- oder komplexwertige Funktion sein und $u^{(n)}$ bezeichnet die n'te Ableitung nach t. Nun führen wir neue Variablen gemäß

$$w_1 = u \quad w_2 = \dot{w}_1 \quad \ldots \quad w_n = \dot{w}_{n-1}$$

ein. Dann ist die Differentialgleichung (2.15) äquivalent zum System

$$\dot{w} = Aw, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 0 \\ 0 & 0 & & \ldots\ 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von A ist

$$p(\lambda, A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Mit obigen Resultaten kann man nun zum Beispiel für

$$\ddot{u} + a\dot{u} + bu = 0 \tag{2.16}$$

Folgendes zeigen:

Es seien λ_1, λ_2 die Nullstellen des Polynoms $\lambda^2 + a\lambda + b$. Dann ist jede Lösung der Differentialgleichung (2.16) von einem der folgenden 3 Typen:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \neq \lambda_2 \in R: &\quad u(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in R: &\quad u(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t} \\ \lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = a + ib, b \neq 0: &\quad u(t) = e^{at}\big(C_1 \cos vt + C_2 \sin vt\big). \end{aligned}$$

Ist im ersten Fall $\lambda_1\lambda_2 > 0$, so liegt eine Quelle oder eine Senke (bzw. ein Knoten) vor, ist $\lambda_1\lambda_2 < 0$ dann ein Sattelpunkt. Im zweiten Fall ist $w = 0$ ein uneigentlicher Knoten und im letzten Fall ein Zentrum (2.2).

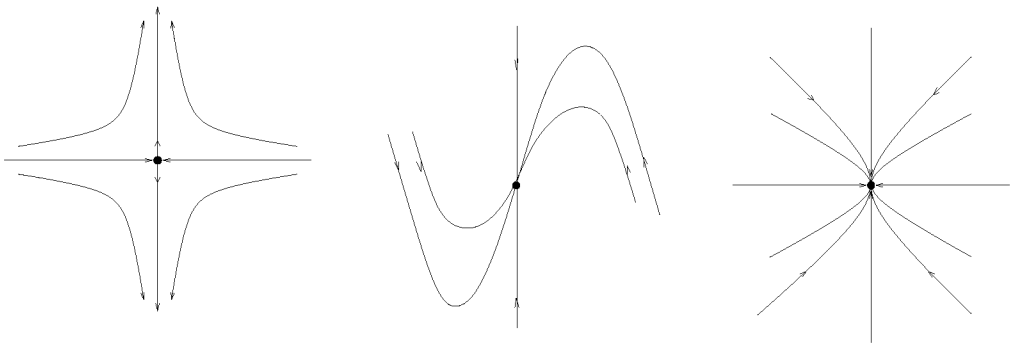


Abbildung 2.2: *Sattelpunkt, uneigentlicher Knoten und Knoten.*

2.2 Homogene und inhomogene lineare Systeme mit variablen Koeffizienten

Wir wollen jetzt zulassen, daß die Koeffizienten in (2.1) zeitabhängig sind. Auch in diesem Falle ist das Differentialgleichungssystem zusammen mit der Anfangsbedingung äquivalent zur Integralgleichung

$$w(t) = w(0) + \int_0^t A(t_1) w(t_1) dt_1. \tag{2.17}$$

2.2.1 Formale Lösung durch Dysonreihe

Genau wie früher lösen wir diese Integralgleichung mit sukzessiver Approximation. Als nullte Näherung wählen wir wieder $x_0 = x(0)$. Nun erhalten wir

$$\begin{aligned} w(t) &= \Big(1 + \int_0^t dt_1 A(t_1) + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2\, A(t_1)A(t_2) \\ &\quad + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3\, A(t_1)A(t_2)A(t_3) + \dots \Big) w(0). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Dies kann mit Einführung des zeitgeordneten Produktes noch etwas eleganter geschrieben werden. Es sei

$$T\Big(A(t_1)\cdots A(t_n)\Big) = A(t_{\pi(1)})\cdots A(t_{\pi(n)}), \quad \text{wobei} \quad t_{\pi(1)} \geq \cdots \geq t_{\pi(n)}$$

das zeitgeordnete Produkt von $(A(t_1)A(t_2)\cdots A(t_n)$. Der Operator T der chronologischen Ordnung verändert also die Reihenfolge der Operatoren, so daß der Operator zur spätesten Zeit links steht und der zur frühesten Zeit rechts. Offensichtlich ist $T\big(A(t_1)\cdots A(t_n)\big)$ symmetrisch in $t_1, \dots, t_n$. In (2.18) sind die auftretenden Operatoren schon zeitgeordnet, deshalb können wir die auftretenden Produkte von Operatoren durch die zeitgeordneten Produkte ersetzen. Benutzen wir noch, daß

$$\int_0^t dt_1 \dots dt_n\, f(t_1, \dots, t_n) = n! \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n\, f(t_1, \dots, t_n)$$

für jede symmetrische Funktion f, so folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} w(t) &= \Big[1 + \int_0^t dt_1 A(t_1) + \frac{1}{2!} \int_0^t dt_1 dt_2\, T\Big(A(t_1)A(t_2)\Big) \\ &\quad + \frac{1}{3!} \int_0^t dt_1 dt_2 dt_3\, T\Big(A(t_1)A(t_2)A(t_3)\Big) + \dots \Big] w(0). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Wir können hier T aus der Summe 'herausziehen' und finden schlußendlich die kompakte Formel

$$w(t) = U(t,0)w(0), \qquad U(t,0) = T\Big[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^t dt_1 \dots dt_n A(t_1) \cdots A(t_n)\Big]. \tag{2.20}$$

Diese Reihenentwicklung für $U(t,0)$ ist diejenige der Exponentialfunktion und deshalb schreibt man oft formal

$$U(t,0) = T \exp\Big(\int_0^t A(s)ds\Big).$$

Man soll hier die Exponentialfunktion entwickeln und auf jeden Term den Zeitordnungsoperator T anwenden.

Statt den Anfangwert $w(0)$ zur Zeit $t = 0$ vorzugeben, könnten wir dies auch zu jeder anderen Zeit t_0 machen. Dann lautet die Lösung der Differentialgleichung mit diesem Anfangswert

$$w(t) = U(t,t_0)w(t_0) \quad \text{wobei} \quad U(t,t_0) = T \exp\Big(\int_{t_0}^t A(s)ds\Big)$$
$$\tfrac{d}{dt}U(t,t_0) = A(t)U(t,t_0), \quad U(t_0,t_0) = 1.$$

Wegen

$$w(t) = U(t,s)w(s) = U(t,s)U(s,t_0)w(t_0) = U(t,t_0)w(t_0)$$

und der Eindeutigkeit der Lösung, ist

$$U(t,s)U(s,t_0) = U(t,t_0) \Longrightarrow U^{-1}(t,t_0) = U(t_0,t).$$

Die $U(t,s)$ bilden eine einparametrige Gruppe von Transformationen.

2.2.2 Inhomogene lineare Differentialgleichungen

Wir suchen die Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung

$$\dot{w} = A(t)w + B(t). \tag{2.21}$$

Wir setzten

$$w(t) = U(t)f(t), \qquad U(t) = T \exp\Big(\int_0^t A(s)ds\Big).$$

Wegen $\dot{w} = Aw + U\dot{f} \equiv Aw + B$ muß offensichtlich $\dot{f} = U^{-1}B$ gelten, bzw.

$$f(t) = \int_0^t U^{-1}(s)B(s)ds + K$$

mit konstantem K. Damit lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (2.21)

$$w(t) = U(t)\Big(\int_0^t U^{-1}(s)B(s)ds + w(0)\Big). \tag{2.22}$$

Beispiel: Die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators unter dem Einfluß einer äußeren Kraft F ist

$$\ddot{u}(t) + \omega^2 u(t) = f(t),$$

wobei wir die Masse $m = 1$ gesetzt haben. Diese Gleichung ist äquivalent zu

$$\dot{w} = Aw + B, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Wegen $A^2 = -\omega^2$ findet man

$$U(t) = e^{tA} = 1 + tA - \frac{\omega^2 t^2}{2!} - \frac{\omega^2 t^3}{3!}A - \ldots = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \frac{1}{\omega}\sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}.$$

Damit lautet die Lösung der Differentialgleichung

$$w(t) = e^{At}\Big(\int_0^t \begin{pmatrix} -\frac{1}{\omega}\sin\omega s \\ \cos\omega s \end{pmatrix} f(s) + w(0)\Big).$$

Nach einer kurzen Rechnung ergibt sich

$$u(t) = w_1(t) = u(0)\cos\omega t + \dot{u}(0)\frac{\sin\omega t}{\omega} + \frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega(t-s)f(s),$$

als allgemeine Lösung für u. Dabei sind $w_1(0) = u(0)$ und $w_2(0) = \dot{u}(0)$ die anfängliche Position und Geschwindigkeit des Oszillators. Ist $f(t) = \sin\alpha t, \alpha \neq \omega$, d.h. ist die äußere Kraft nicht in Resonanz mit den Eigenschwingungen des harmonischen Oszillators, dann ist

$$u(t) = w_1(t) = u(0)\cos\omega t + \frac{1}{\omega}\dot{u}(0)\sin\omega t + \frac{\sin\alpha t + \sin\omega t}{2(\alpha+\omega)\omega} - \frac{\sin\alpha t - \sin\omega t}{2(\alpha-\omega)\omega}.$$

Diese Lösung ist für alle Zeiten beschränkt. Der harmonische Oszillator ist stabil unter der Störung. Im *Resonanzfall* $f = \sin\omega t$ ist die Lösung

$$u(t) = u(0)\cos\omega t + \frac{1}{\omega}\dot{u}(0)\sin\omega t + \frac{\sin\omega t}{2\omega^2} - \frac{t}{2\omega}\cos\omega t.$$

Wegen des Resonanzterms $\sim t\cos\omega t$ wächst die Amplitude an. Der Oszillator ist instabil.

2.3 Nichtlineare Differentialgleichungen

Es sei $\mathcal{G}$ ein offenes und zusammenhängendes Gebiet im R^n und $w \in \mathcal{G}$. Gegeben sei eine Funktion

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & R \times \mathcal{G} \longrightarrow R^n \\ & (t, w) \longrightarrow f(t, w). \end{aligned}$$

Wir wollen allgemeine Differentialgleichungssysteme der Form

$$\dot{w} = f(t, w) \quad \text{mit} \quad w(t_0) = w_0 \in \mathcal{G} \tag{2.23}$$

studieren. Wie im linearen Fall ist diese Differentialgleichung, zusammen mit der Anfangsbedingung, äquivalent zur Integralgleichung

$$w(t) = w_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, w(s))ds. \tag{2.24}$$

Wir wollen voraussetzen, daß f in $R \times \mathcal{G}$ stetig ist und stetig differenzierbar in $\mathcal{G}$. Statt stetig differenzierbar kann man auch die etwas schwächere Lipschitzbedingung fordern:

$$|f(t, w) - f(t, \tilde{w})| \leq L|w - \tilde{w}| \quad \text{auf} \quad \mathcal{G}.$$

Mit diesen Voraussetzungen kann man zeigen, daß die Abbildung

$$w \longrightarrow T(w), \quad \big(T(w)\big)(t) = w_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, w(s))ds$$

auf der Menge der stetigen Funktionen $w : [t_0, t] \to R^n$ für genügend kleine $t - t_0$ einen Fixpunkt hat. Solch ein Fixpunkt löst die Differentialgleichung (2.23). Auf diesem Wege gelangt man zu folgendem Existenz- und Eindeutigkeitssatz:

Satz: Unter den obigen Voraussetzungen hat das System (2.23) lokal genau eine Lösung: *Es gibt* ein Intervall $(t_1, t_2) \ni t_0$ und *genau eine differenzierbare Funktion* $w : (t_1, t_2) \to \mathcal{G}$, so daß (2.23) für $t \in (t_1, t_2)$ gilt.

Aufgrund dieses Existenz und Eindeutigkeitsatzes gibt es genau eine Lösungsfunktion $w = \mathcal{L}(t, t_0, w_0)$, wobei $\mathcal{L}(t_0, t_0, w_0) = w_0$ ist. Im *autonomen Fall* ist f zeitunabhängig und jede Anfangszeit ist so gut wie jede andere. Nur die Zeitdifferenz $t - t_0$ ist von Bedeutung. Deshalb braucht man t_0 nicht zu schreiben. Die Kurve $\mathcal{L}(t, w_0)$ ist für feste Anfangsbedingung eine partikuläre Lösungskurve (Trajektorie) der Differentialgleichung. Für festes t ist die Abbildung

$$w_0 \longrightarrow \mathcal{L}(t, w_0)$$

der Fluß. Wegen

$$\mathcal{L}(t+s, w_0) = \mathcal{L}(t, \mathcal{L}(s, w_0)) \quad \text{ist} \quad \mathcal{L}_{t+s} = \mathcal{L}_t \circ \mathcal{L}_s$$

und der Fluß $\mathcal{L}_t$ eine 1-parametrige Gruppe. Wegen der Eindeutigkeit der Lösungen geht durch jeden Punkt $\in \mathcal{G}$ genau eine Lösungskurve.

2.3.1 Einige einfache und exakt lösbare nichtlineare DG

In seltenen Fällen kann man eine nichtlineare DG explizit lösen. Hier einige Beispiele:

Bernoullische DG: Ein Beispiel für eine lösbare Gleichung ist die *Bernoullische DG*

$$\dot{w} = a(t)w + b(t)w^\alpha, \qquad \alpha \neq 1.$$

Ersetzt man w durch $v = w^{1-\alpha}$ dann geht diese nämlich in die lineare DG

$$\dot{v} = \beta\big(a(t)v + b(t)\big), \qquad \beta = 1 - \alpha$$

über. Mit den Resultaten des letzten Kapitels ist dann

$$v(t) = U(t)\Big(\beta \int_0^t U^{-1}(s)b(s)ds + v(0)\Big), \quad \text{wobei} \quad U(t) = \exp\big(\beta \int_0^t a(s)ds\big).$$

Die Riccatische DG

$$\dot{w} = a(t)w + b(t)w^2 + c(t),$$

ist allgemein lösbar, wenn man eine spezielle Lösung $w^*(t)$ kennt. Dazu setzen wir $w = w^* + 1/v$. Benutzen wir, daß w^* die DG erfüllt, so ist w genau dann eine Lösung, wenn

$$-\dot{v} = (a + 2bw^*)v + b$$

ist. Zum Beispiel ist $w^* = 2$ eine spezielle Lösung der *logistischen Gleichung* $\dot{w} = w - w^2 + 2$. Damit lautet die Gleichung für v

$$\dot{v} = 3v + 1 \Longrightarrow v = \frac{1}{3}\big(ke^{3t} - 1\big).$$

Damit ist die allgemeine Lösung der logistischen Gleichung

$$w = 2 + \frac{3}{ke^{3t} - 1}.$$

Das nächste Beispiel ist nicht mehr analytisch lösbar.

2.3.2 Räuber-Beute Problem

Es sei w_1 die Anzahl Beutetiere und w_2 die Anzahl Räuber. Als Modell für die Änderung der Spezies nehmen wir

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= aw_1 - cw_1w_2 \\ \dot{w}_2 &= -bw_2 + dw_1w_2 \end{aligned}, \quad a, b, c, d > 0$$

Ohne Räuber würde die Anzahl Beutetiere exponentiell zunehmen und ohne Beutetiere würde die Anzahl Räuber wegen Nahrungmangel exponentiell abnehmen. In der Tat,

$$w(t) = \begin{pmatrix} e^{at} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-bt} \end{pmatrix}$$

sind spezielle Lösungen der Differentialgleichung. Wegen dem Eindeutigkeitssatz kann deshalb keine Lösung die Achse $w_1 = 0$ bzw. $w_2 = 0$ schneiden.

Die quadratischen Terme modellieren die Abnahme der Beutetiere weil diese von den Räubern gefressen werden und die Zunahme der Räuber weil diese Nahrung finden. Qualitativ kann man die Lösungen diskutieren indem man das Vektorfeld

$$f(w) = \begin{pmatrix} aw_1 - cw_1w_2 \\ -bw_2 + dw_1w_2 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \dot{w} = f(w)$$

betrachtet (siehe Figur (2.3)). Zum Beispiel ist es interessant zu wissen, ob es eine Gleichgewichtslösung gibt wobei $f(w) = 0$ und damit $\dot{w} = 0$ ist, und wenn ja, ob diese stabil oder instabil ist. Das Räuber-Beute-Modell hat zwei Gleichgewichtslösungen, nämlich

$$w^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w^{(2)} = \begin{pmatrix} b/d \\ a/c \end{pmatrix}.$$

Die linearisierten Gleichungen in der Nähe der Fixpunkte haben die Form $w \sim (\nabla f)(w^{(i)})w = A^{(i)}w$. Man findet

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -bc/d \\ ad/c & 0 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist der Ursprung in der linearisierten Gleichung ein Sattelpunkt und damit instabil und der zweite Fixpunkt ein Zentrum und damit stabil. Diese Verhalten gilt auch für die exakten Lösungen des nichtlinearen Problems. Das Gleichgewicht mit b/d Beutetieren und a/c Räuber ist ein stabiles Gleichgewicht. Viele dieser Eigenschaften kann man schon aus dem Vektorfeld $f(w)$ in (2.3) ablesen. Die anschauliche Vektorfeldmethode funktioniert allerdings nur schön bei *autonomen Systemen* für die f nicht explizit von der Zeit abhängt. Für nicht-autonome Systeme ändert sich das Vektorfeld f mit der Zeit.

2.3.3 Stabilität

Es sei $w^*(t)$ eine Lösung von (2.23). Wir wollen Lösungen in der Nähe von w^* studieren, d.h. wir setzen

$$w = w^*(t) + \eta.$$

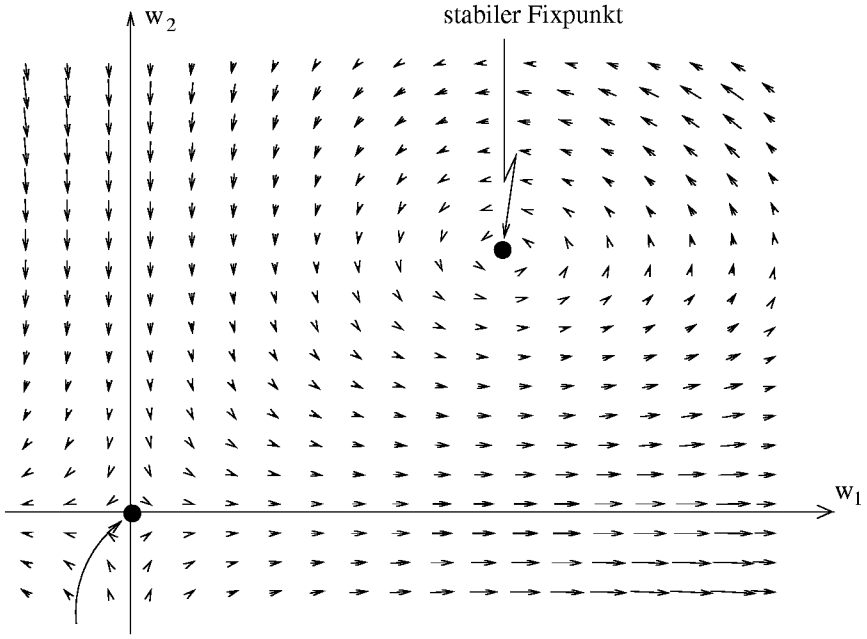


Abbildung 2.3: *Vektorfeld für Räuber-Beute Problem* ($a = b = c = d = 1$)

Dann ist

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= \dot{w} - \dot{w}^*(t) = f(t,w) - f(t,w^*(t)) = f(t,w^*(t)+\eta) - f(t,w^*(t)) \\ &= \sum_{ij} \frac{\partial f_i}{\partial w^j}\big(t,w^*(t)\big)\,\eta_j + r(t,\eta) = A(t)\eta + r(t,\eta).\end{aligned}$$

Vernachlässigen wir den Restterm $r(t,\eta)$ dann lautet die linearisierte Gleichung für die Störung

$$\dot{\eta} = A(t)\eta \quad \text{mit} \quad A_{ij}(t) = \frac{\partial f_i}{\partial w_j}\big(t,w^*(t)\big). \tag{2.25}$$

Eine Lösung $w(t,t_0,w_0^*)$ heißt stabil (im Sinne von Liapunov) falls es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß für $|w_0 - w_0^*| < \delta$

1) $w(t,t_0,w_0)$ für $t_0 \le t < \infty$ existiert,

2) $|w(t,t_0,w_0) - w(t,t_0,w_0^*)| < \epsilon$ für alle $t_0 \le t < \infty$ ist.

Eine Lösung heißt *asymptotisch stabil*, wenn zusätzlich

3) $|w(t,t_0,w_0) - w(t,t_0,w_0^*)| \longrightarrow 0$ für $t \longrightarrow \infty$ gilt.

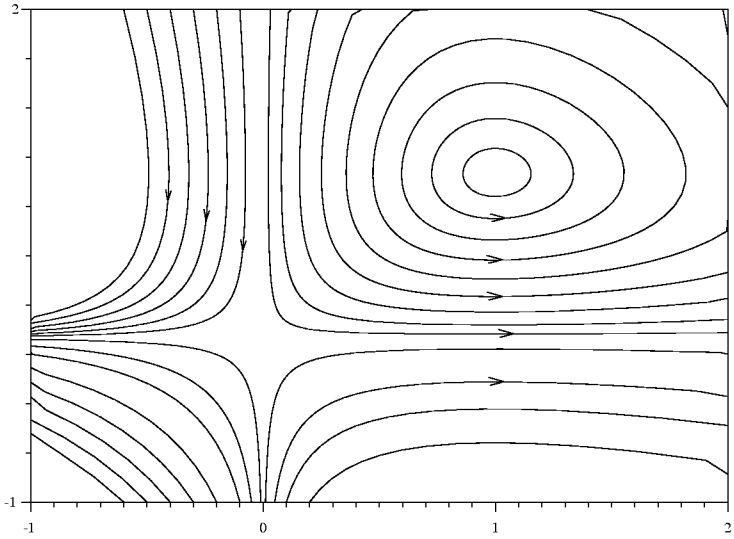


Abbildung 2.4: *Die Lösungskurven für das Räuber-Beute-Modell* ($a = b = c = d = 1$)

2.3.4 Liapunov Funktionen

Wir wollen zunächst ein autonomes System betrachten,

$$\dot{w} = f(w) \quad \text{mit} \quad f(0) = 0. \tag{2.26}$$

Dann ist $w = 0$ eine Gleichgewichtslösung des autonomen Differentialgleichungssystems. In dieser Situation gibt es ein hilfreiches Kriterium von *Liapunov* für die Stabilität des Fixpunktes $w = 0$. Dazu brauchen wir den Begriff der Liapunov-Funktion für das System (2.26):

Eine Funktion $V : U \to R$ auf einer Umgebung U von $w = 0$ heißt Liapunov-Funktion bezüglich (2.26) falls

1. ∇V auf U stetig ist,
2. $V(0) = 0$ und $V > 0$ auf $U - \{0\}$
3. $\nabla V \cdot f \leq 0$ auf $U - \{0\}$

gelten. Nun gilt der folgende

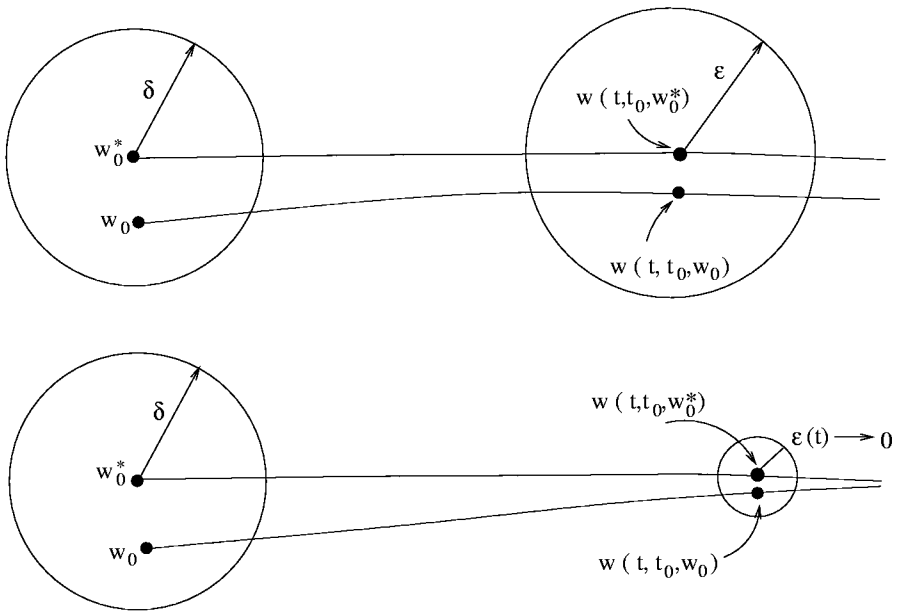


Abbildung 2.5: *Stabile und asymptotisch stabile Lösungen*

Satz: Existiert eine Liapunov-Funktion für (2.26), dann ist $w = 0$ eine stabile Lösung des Systems. Ist $\nabla V \cdot f < 0$ in $U - \{0\}$ dann ist $w = 0$ asymptotisch stabil.

Dieses Theorem von Liapunov kann angewandt werden ohne die Differentialgleichung zu lösen. Anderseits gibt es keine systematische Methode um eine Liapunov-Funktion zu finden. Für mechanische Systeme ist die Energie eines benachbarten Systems ein guter Kandidat für diese Funktion. Für thermodynamische Systeme ist die negative Entropiefunktion eine Liapunovfunktion.

Beweis: Es sei ϵ so klein gewählt, daß die Kugel K_ϵ mit Radius ϵ in U liege. Es sei α das Minimum von V auf der Kugeloberfläche,

$$\alpha = \min_{|w|=\epsilon} V(w) > 0.$$

Es sei weiter

$$M := \{w | V(w) \leq \frac{\alpha}{2}\} \cap K_\epsilon$$

und M' die Zusammenhangskomponente von M die $w = 0$ enthält. Wähle nun ein $\delta > 0$, so daß $K_\delta \subset M'$. Es seien nun $w(t, w_0)$ eine Lösung mit $w_0 \in K_\delta$. Nach der zweiten Eigenschaft der Liapunov Funktion ist

$$\frac{d}{dt} V\big(w(t, w_0)\big) = \nabla V \cdot \dot{w} = \nabla V \cdot f \leq 0.$$

Daraus folgt, daß $V\big(w(t,w_0)\big) \leq \alpha/2$ ist, und damit ist $w(t,w_0)$ in M' wegen der Stetigkeit der Lösung. Daraus folgt dann, daß $w(t,w_0) \in K_\epsilon$, woraus die Behauptung folgt.

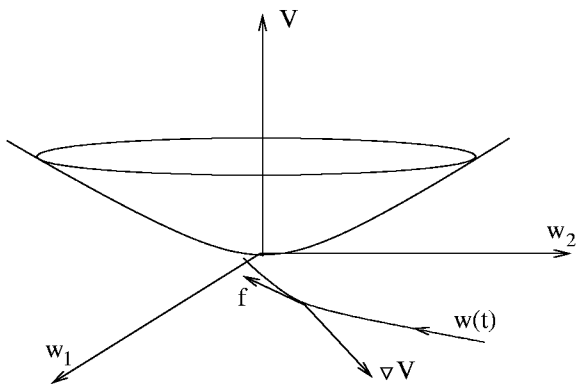


Abbildung 2.6: *Liapunov Funktion für* $\dot{w} = f(w)$.

Beispiel: Wir betrachten den harmonischen Oszillator mit Reibung,

$$\ddot{x} + h(x,\dot{x})\dot{x} + x = 0, \quad h(x,\dot{x}) \geq 0.$$

Mit $w_1 = x$ und $w_2 = \dot{x}$ ist dies äquivalent zu

$$\dot{w} = f(w), \qquad f = \begin{pmatrix} w_2 \\ -h(w)w_2 - w_1 \end{pmatrix}.$$

Die Energie für den Oszillator ohne Reibung, $V = w_1^2 + w_2^2$ ist eine Liapunov Funktion. Dazu müssen wir nur die dritte Bedingung nachprüfen:

$$(\nabla V \cdot f) = \Big(\frac{dV}{dw_1} f_1 + \frac{dV}{dw_2} f_2\Big) = -2h(w)w_2^2 \leq 0.$$

Damit ist auch die dritte Bedingung erfüllt. Diese bedeutet auch, daß $\nabla V \cdot \dot{w} \leq 0$ ist. Längs der Bahnen $w(t)$ nimmt also die Liapunov-Funktion, in unserem Beispiel also die Energie des reibungsfreien Vergleichsystems, ab. Das Pendel spiralt in den Gleichgewichtpunkt $w = 0$ hinein.

2.3.5 Lineare Stabilität bedingt Stabilität

Wir wollen noch einen zweiten, wichtigen Satz behandeln.

Satz: Es sei $\dot{w} = f(w)$ mit $f(0) = 0$ ein autonomes System. Weiter sei $f(w) = Aw + r(w)$, $A = (\nabla f)(0)$, wobei die Realteile der Eigenwerte von A alle kleiner als $-c < 0$ seien. Dann gibt es eine Umgebung $U \subset \mathcal{G}$ von $w = 0$ so daß

i) $w(t, w_0)$ definiert ist und in U bleibt für alle $w_0 \in U, t > 0$.

ii) Es gilt

$$|w(t, w_0)| < ae^{-ct}|w_0|$$

für alle $w_0 \in U, t \geq 0$. Speziell gilt $w(t, w_0) \to 0$ für $t \to \infty$ für alle $w_0 \in U$.

Dieser Satz besagt also, daß der Fixpunkt attraktiv ist falls er bezüglich der linearisierten Differentialgleichung attraktiv ist.

Es gilt in gewissem Sinne auch die Umkehrung: Hat ein Eigenwert von A einen positive Realteil, dann ist der Fixpunkt instabil. Liegt ein Eigenwert auf der imaginären Achse, dann muß man die Methode der Zentrumsmannigfaltigkeiten anwenden.

Um zu entscheiden, ob alle Nullstellen von $p(\lambda, A)$ negative Realteil haben kann man das Kriterium von Routh-Hurwitz benutzen:

Kriterium von Routh-Hurwitz: Alle Nullstellen des Polynoms

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda = 0 = 0$$

mit reellen Koeffizienten a_k und $a_n > 0$ liegen genau dann in der linken offenen Halbebene von C wenn die Determinanten der Untermatrizen

$$a_1, \quad \det\begin{pmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & \ldots & \ldots & a_n \end{pmatrix}$$

($a_m = 0$ für $m > n$) positiv sind. Die Form der Matrizen wird ersichtlich, wenn man die Diagonale betrachtet.

Beispiel: Der Gleichgewichtspunkt $w = 0$ der Differentialgleichung

$$\ddot{w} + 2\dot{w} + w = w^n, \qquad n = 2, 3, \ldots$$

ist asymptotisch stabil.

Beweis des Satzes: Die allgemeine Lösung der linearisierten Gleichung ist $U(t)w(0)$ und ist die Summe von Termen $t^k \exp(\lambda_i t)$. Damit gibt es Konstanten $\gamma, \lambda > 0$ so daß

$$|U(t)w_0| \leq \gamma e^{-\lambda t}|w_0|$$

für alle positiven t. Nun wollen wir den Einfluß des Restterms $r(w) = o(w)$ abschätzen. Zu jedem $\chi > 0$ gibt es ein $\rho > 0$ so daß

$$|w| < \rho \Longrightarrow |r(w)| < \chi \cdot |w|.$$

Wie im linearen Fall ist die Differentialgleichung zusammen mit der Anfangsbedingung äquivalent zu der Integralgleichung

$$w(t, w_0) = U(t)w_0 + \int_0^t U(t-s)r\big[w(s, w_0)\big]ds.$$

Wir schätzen ab:

$$|w(t,w_0)| \le |U(t)w_0| + \int_0^t |U(t-s)r\big[w(s,w_0)\big]|ds \le \gamma e^{-\lambda t}|w_0| + \gamma\chi \int_0^t e^{-\lambda(t-s)}|w(s,w_0)|ds.$$

Setzen wir $y(t) = \exp(\lambda t)|w(t,w_0)|$ dann schreibt sich diese Ungleichung auch

$$y(t) \le c_1 + c_2 \int_0^t y(s)ds, \qquad c_1 = \gamma|w_0|, \quad c_2 = \gamma\chi.$$

Offensichtlich ist $y(t)$ kleiner oder gleich

$$Y(t) \equiv c_1 + c_2 \int_0^t y(s)ds.$$

Wegen

$$\dot{Y} = c_2 y \quad \text{ist} \quad \frac{d}{dt}\log Y = \frac{\dot{Y}}{Y} = c_2\frac{y}{Y} \le c_2.$$

Damit ist

$$\log Y(t) \le c_2 t + \log Y(0) \quad \text{bzw.} \quad Y(t) \le c_1 e^{c_2 t}.$$

Wir haben damit das Lemma von Cronwall bewiesen:

Lemma (Cronwall) Falls

$$y(t) \le c_1 + c_2 \int_0^t y(s)ds \quad \text{dann ist} \quad y(t) \le c_1 e^{c_2 t}.$$

Damit haben wir gezeigt, daß

$$|w(t,w_0)| \le \gamma|w_0|e^{(\gamma\chi-\lambda)t}$$

gilt. Nun ist es einfach einzusehen, daß die Lösung stabil ist. Nun wählen wir χ so klein, daß $\gamma\chi - \lambda$ negativ ist. Dies bedeutet eine Wahl von ρ. Als nächstes sei $|w_0| < \delta = \epsilon/\gamma$. Dann ist offensichtlich $|w(t,w_0)| < \epsilon$ für alle t und strebt in der Tat gegen den Fixpunkt $w = 0$ für große t. Damit streben Lösungen, die in der Nähe des Fixpunktes starten für große Zeiten in den Fixpunkt. Der Fixpunkt $w = 0$ ist asymptotisch stabil.

2.4 Periodische Systeme

Gegeben sei ein System

$$\dot{w} = f(t,w) = A(t)w + r(t,w) \quad \text{mit periodischem } f: \\ A(t+T) = A(t), \quad r(t+T,w) = r(t,w) \tag{2.27}$$

und wir wollen annehmen, daß

$$r(t,w) = o(|w|) \quad \text{gleichmäßig in} \quad t.$$

Also ist $w = 0$ eine Lösung der Differentialgleichung. Es sei nun $w = \mathcal{L}(t, t_0, w_0)$ die Lösung die zur Zeit t_0 bei w_0 startet. Für die Stabilitätsuntersuchung von periodischen Systemen definiert man die

Def: *Poincare Abbildung:*

$$P : w_0 \longrightarrow \mathcal{L}(T, 0, w_0).$$

Wegen

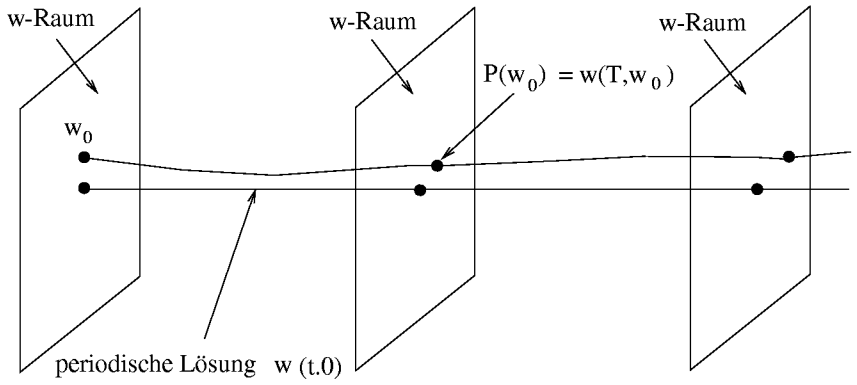


Abbildung 2.7: *Poincare Abbildung* $P : w_0 \to P(w_0)$.

$$\mathcal{L}(2T, 0, w_0) = \mathcal{L}(2T, T, \mathcal{L}(T, 0, w_0)) = \mathcal{L}(T, 0, \mathcal{L}(T, 0, w_0)) = (P \circ P)(w_0)$$

und der entsprechenden Relation für $2T \to nT$ (Induktion) hat man die wichtige Eigenschaft

$$\mathcal{L}(nT, 0, w_0) = P^n(w_0), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.28}$$

Da $w = 0$ eine Lösung der Differentialgleichung ist, ist $P(0) = 0$. Wir wollen P um 0 entwickeln:

$$P(w_0) = (\nabla P)(0) \cdot w_0 + g(w_0) \equiv M w_0 + g(w_0).$$

Die Matrix M ist die *Monodromie-Matrix* und die Eigenwerte von M sind die *Floquet-Multiplikatoren.* Es stellt sich nun die Frage wie man M berechnet und was M über die Stabilität der Bahn $w = 0$ besagt.

Um M zu bestimmen, stellen wir uns vor, daß $w(t, w_0)$ eine Lösung des periodischen Systems ist,

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t, w_0) = A(t)w(t, w_0) + r\big(t, w(t, w_0)\big)$$

und variieren die anfängliche Position w_0 in dieser Gleichung. Wir differenzieren nach w_0 und setzen dann $w_0 = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial w_0}(t, 0) = A(t)\frac{\partial w}{\partial w_0}(t, 0) + \frac{\partial r}{\partial w}\big(t, w(t, 0)\big)\frac{\partial w}{\partial w_0}(t, 0).$$

Da $w(t, 0) = 0$ ist und die Ableitung von r an der Stelle $w = 0$ verschwindet, folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t) = A(t)U(t) \quad \text{wobei} \quad U(t) = \frac{\partial w}{\partial w_0}(t, 0) \Longrightarrow U(0) = 1. \tag{2.29}$$

Anderseits ist

$$P(w_0) = w(T, w_0) \Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial w_0}(0) = \frac{\partial w}{\partial w_0}(T, 0) = U(T)$$

woraus folgt, daß die Monodromiematrix gerade U zur Zeit T ist. Die lineare Differentialgleichung (2.29) haben wir bereits im vorletzten Kapitel (formal) gelöst. Damit finden wir

$$M = U(T, 0), \quad \text{wobei} \quad U(t, 0) = T\Big(\exp \int_0^t A(s)ds\Big). \tag{2.30}$$

2.4.1 Mathieusche Differentialgleichung, Blochwellen und Stabilität

Die Mathieusche Differentialgleichung ($r = 0$) wird gewöhnlich in der Form

$$\ddot{w} + (a + 16b\cos 2t)w = 0$$

geschrieben; a und b sind Konstanten. Dies ist eine lineare DG mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a - 16b\cos 2t & 0 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist $w(t) = U(t, 0)w_0$, wenn $w(0) = w_0$ die Anfangsbedingung ist. Wegen

$$U(t + \pi, 0) = U(t + \pi, \pi)U(\pi, 0) = U(t + \pi, \pi)M.$$

Nun ist aber

$$U(t+\pi,\pi) = T\Big(\exp\int_{\pi}^{\pi+t} A(s)ds\Big) = T\Big(\exp\int_{0}^{t} A(s)ds\Big) = U(t,0),$$

wobei wir benutzten, daß $A(\pi+s) = A(s)$, und damit ist

$$U(t+n\pi,0) = U(t,0)M^n$$

Offensichtlich hat die Mathieusche DG eine periodische Lösung, wenn $w(\pi) = Mw(0) = w(0)$ für mindestens ein $w(0)$ gilt, d.h. wenn die Monodromie-Matrix M einen Eigenvektor mit Eigenwert 1 hat. Im Allgemeinen kann man nicht erwarten eine periodische Lösung zu finden, wenn nicht die Konstante a bestimmten Beschränkungen unterliegt. Es stellt sich heraus, daß a eine komplizierte Funktion von b sein muß, wenn die Lösung periodisch sein soll.

Wir wollen annehmen, daß die Monodromiematrix M eines linearen Differentialgleichungssystems mit periodischen Koeffizienten diagonalisierbar sei. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms seien $\{\lambda_i\}$. Es sei

$$\tilde{w}_i(t) = \lambda_i^{-t/T} w_i(t) \Longrightarrow \tilde{w}_i(T) = \lambda_i^{-1} w_i(T) = \lambda_i^{-1} M\tilde{w}_i(0).$$

Dann hat $\lambda_i^{-1}M$ einen Eigenvektor mit Eigenwert 1 und der entsprechende Eigenvektor $\tilde{w}_i(0) = w_i(0)$ ist der Startpunkt einer periodischen Lösung $\tilde{w}_i(t)$. Damit hat die Differentialgleichung Lösungen der Form

$$w_i(t) = \lambda_i^{t/T}\tilde{w}_i(t), \qquad \tilde{w}_i \quad \text{periodisch.}$$

Die Mathieusche Differentialgleichung ist invariant unter $t \to -t$. Deshalb ist $w(t) = \lambda^{-t/\pi}\tilde{w}(-t)$ die zweite unabhängige Lösung. Damit hat man diese Differentialgleichung im Prinzip gelöst. Dieses Ergebnis ist als *Satz von Floquet* bekannt.

Eine wichtige Anwendung dieses Ergebnisses ist die Schrödingergleichung in einem periodischen Kristall. Die Schrödingergleichung

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + [A + V(x)]\psi = 0,$$

wobei A eine Konstante und V eine periodische Funktion mit $V(x+l) = V(x)$ ist, hat Lösungen der Gestalt

$$\psi = e^{ikx}v(x), \qquad v \quad \text{periodisch.}$$

Dies wird verschiedentlich als *Satz von Bloch* bezeichnet. Die Lösungen sind die *Blochwellen.*

Im nichtlinearen Fall löst eine Lösung von (2.27) die Integralgleichung

$$w(t) = U(t)\Big(\int_{0}^{t} U^{-1}(s)r(s,w(s))ds + w(0)\Big), \qquad U(t) = U(t,0),$$

so daß

$$w(T) = Mw(0) + M \int_0^T U^{-1}(s) r(s, w(s)) ds.$$

Mit ähnlichen Methoden wie beim Beweis der asymptotischen Stabilität von linear stabilen Systemen kann die Stabilität von $w_0 \to P^n w_0$ untersucht werden. Man findet das

Lemma: Liegen alle Eigenwerte der Monodromie-Matrix M innerhalb des Einheitskreises ($|\lambda_k| < 1$) und ist $\det M > 0$, dann ist der Fixpunkt $w = 0$ bezüglich P^n asymptotisch stabil.

2.4.2 Feigenbaumbifurkation

Statt des Beweises diskutieren wir ein illustratives Beispiel, nämlich die Feigenbaumbifurkation. Es sei

$$P(w) = 4\lambda w(1 - w)$$

eine Poincareabbildung mit $\lambda \leq 1$. Diese nicht-monotone Abbildung bildet das Intervall $[0, 1]$ auf sich ab. Sie hat die periodischen Bahnen

$$w = 0 \quad \text{und} \quad w = 1 - \frac{1}{4\lambda} = w_1,$$

da beides Fixpunkte von P sind. Die zweite Bahn existiert nur für $\lambda \geq \lambda_1 = 1/4$ (für kleinere λ's läge sie außerhalb des Intervalls $[0, 1]$). Wegen $P' = 4\lambda(1 - 2w)$ ist

$$P'(0) = 4\lambda \quad \text{und} \quad P'(1 - 1/4\lambda) = 2 - 4\lambda.$$

Wir haben damit die folgende Situation:

1) Für festes $0 < \lambda < \lambda_1$ besitzt das System genau einen Fixpunkt $w = 0$. Dieser ist stabil, weil $|P'(0)| < 1$ gilt.

2) Für festes λ mit $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2 = 3/4$ besitzt das System zwei Fixpunkte $w = 0$ und $w = w_1$, wobei $w = 0$ instabil und $w = w_1$ stabil ist.

Nun wollen wir untersuchen was passiert, wenn $\lambda > \lambda_2$ ist.

3) Für festes λ mit $\lambda_2 < \lambda < \lambda_3$ besitzt das System eine periodische Bewegung der Periode $2T$ zwischen den Punkten w_{21} und w_{22}. Die Stabilität dieser periodischen Bewegung folgt daraus, daß diese Punkte stabile Fixpunkte der iterierten Poincare-Abbildung P^2 ist: Wegen $P(w_{21}) = w_{22}$ und $P(w_{22}) = w_{21}$ gilt offensichtlich

$$P^2(w_{21}) = P(w_{22}) = w_{21} \quad \text{und} \quad P^2(w_{22}) = P(w_{21}) = w_{22}.$$

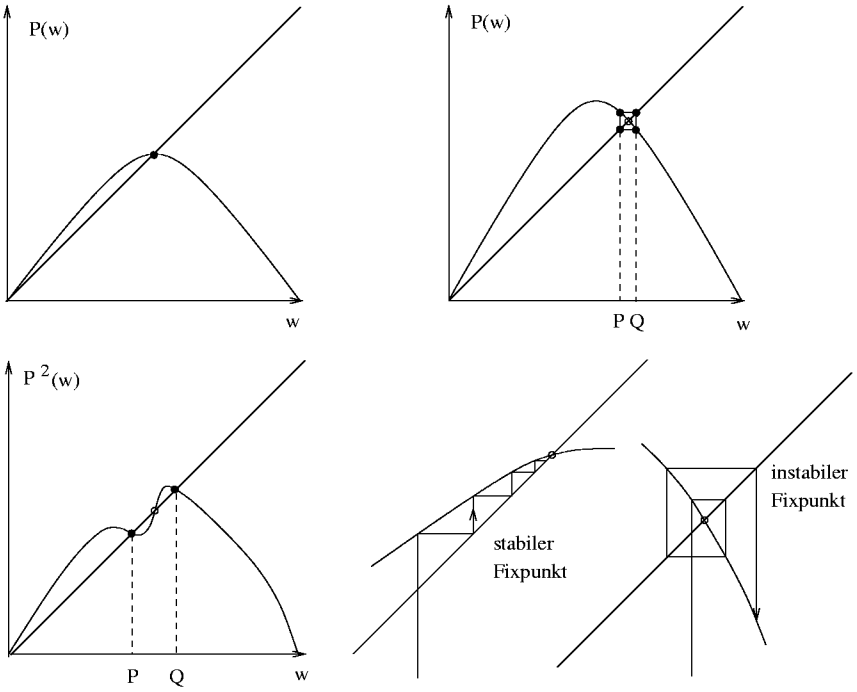


Abbildung 2.8: *Feigenbaum-Bifurkation*

Natürlich sind die Fixpunkte von P auch Fixpunkte der iterierten Abbildung P^2. Diese Fixpunkte von P und P^2, nämlich $w = 0$ und $w = w_1$, sind instabil.

Bei weiterer Vergrößerung von λ werden die stabilen Fixpunkte von P^2 instabil und es entstehen Bewegungen der Periode $2T$ von P^2, d.h. Bewegungen der Periode $4T$ von P, usw.

Wir haben also gesehen, daß ein Attraktor (stabiler Fixpunkt) der Periode T geht bei $\lambda = 3/4$ in einen Attraktor der Periode $2T$ über. Für P sind dies zwei oszillierende Werte w_{21} und w_{22}, für P^2 entspricht dieser Orbit einem Fixpunkt. Überschreitet λ den Wert λ_3, so wird der Fixpunkt von P^2 instabil. Die entsprechende Bahn der Periode $2T$ wird zu einer oszillierenden Bahn, einer Bahn der Periode $4T$, usw. Das Interessante an der Feigenbaum Bifurkation ist, daß der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_{n+2} - \lambda_{n+1}} = \delta \sim 4.6692$$

eine universelle Konstante ist: Für eine große Klasse von Iterationsverfahren auf $[0, 1]$ tritt bei Übergängen zum Chaos mit Periodenverdopplung dieselbe Konstante δ auf. Für $\lambda > \lambda_c = 0.892486417967\ldots$ tritt ein im Wesentlichen chaotisches Verhalten auf. Unabhängig von der Wahl von w_0 ist die Reihe $w_0, P(w_0), P^2(w_0), \ldots$ 'chaotisch': Für einige Startwerte w_0 sind die Orbits $P^n(w_0)$ aperiodisch, d.h. konvergieren gegen keinen endlichen Attraktor.

Für die meisten Startwerte sind die Orbits periodisch. Aber die Perioden sind so groß, daß sie kaum sichtbar sind. Weiterhin führen nahe beieinander liegende Startwerte zu völlig unterschiedlichen Orbits. Dies wurde zum erstenmal von P.J. Myrberg in den frühen 60'ern festgestellt. Etwa 10 Jahre später haben Metropolis, Stein und Stein die Resultate auf andere Abbildungen $[0,1] \to [0,1]$ verallgemeinert.

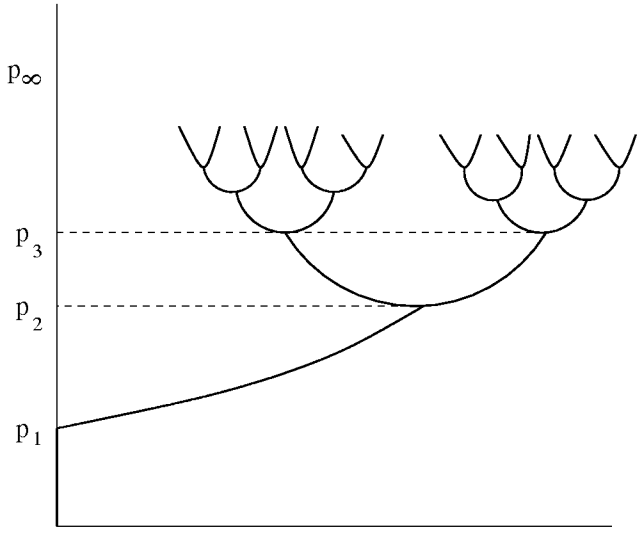


Abbildung 2.9: *Feigenbaum-Bifurkation*

2.5 Lineare Differentialgleichungen mit Singularitäten

In diesem Kapitel untersuchen wir die für die QM wichtigen Differentialgleichungen

$$w'' + p(x)w' + q(x)w = 0, \tag{2.31}$$

etwas genauer. Mit Hinblick auf die Anwendungen bezeichnen wir im Folgenden die unabhängige Variable mit x anstatt mit t. Die Koeffizientenfunktionen p und q können dabei Singularitäten aufweisen.

2.5.1 Die Legendresche Differentialgleichung

Eine DG von besonderem Interesse ist die Legendresche Differentialgleichung

$$(1-x^2)w'' - 2xw' + l(l+1)w = 0, \tag{2.32}$$

wobei l eine Konstante ist. Offensichtlich haben die Koeffizientenfunktionen $p = -2x/(1-x^2)$ und $q = l(l+1)/(1-x^2)$ bei $x = \pm 1$ einfache Pole. Wir versuchen eine Lösung in Form einer formalen Potenzreihe in x zu finden. Ist α die niedrigste vorkommende Potenz, dann hat die Reihe die Form

$$w = x^\alpha \sum_0^\infty a_n x^n, \qquad a_0 \neq 0. \tag{2.33}$$

Wir nehmen an die Reihe konvergiert (dies kann hinterher überprüft werden), so daß (2.33) gliedweise differenziert werden darf. Einsetzen von (2.33) in (2.32) ergibt

$$\sum_n a_n(\alpha+n)(\alpha+n-1)x^{\alpha+n-2} = \sum_n a_n\big[(\alpha+n)(\alpha+n+1) - l(l+1)\big]x^{\alpha+n}.$$

Dies ist nur möglich wenn der Koeffizient jeder Potenz von x verschwindet. Da $n \geq 0$ ist, kommen als niedrigste Potenzen $\alpha-2$ und $\alpha-1$ vor, und zwar nur auf der linken Seite. Also muß

$$a_0\alpha(\alpha-1) = 0 \quad \text{und} \quad \alpha(\alpha+1)a_1 = 0$$

gelten. Dies sind die sogenannten *Bestimmungleichungen.* Da $a_0 \neq 0$ vorausgesetzt wurde, implizieren diese

$$\alpha = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha = 1.$$

Der Koeffizientvergleich bringt a_{n+2} mit a_n folgendermassen in Verbindung

$$a_{n+2} = \frac{(\alpha+n)(\alpha+n+1) - l(l+1)}{(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)}a_n.$$

Für $\alpha = 0$ kann man a_0 und a_1 beliebig vorgeben und findet

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - l(l+1)}{(n+1)(n+2)}a_n, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

mit den Lösungen

$$\begin{aligned} a_{2r} &= \alpha_r a_0 = \frac{(-)^r l(l-2)\cdots(l-2r+2)\cdot(l+1)(l+3)\cdots(l+2r-1)}{(2r)!}a_0 \\ a_{2r+1} &= \beta_r a_1 = \frac{(-)^r (l-1)(l-3)\cdots(l-2r+1)\cdot(l+2)(l+4)\cdots(l+2r)}{(2r+1)!}a_1. \end{aligned}$$

Für $\alpha = 1$ muß $a_1 = 0$ gelten und es treten nur gerade Potenzen in der Reihenentwicklung auf. Für ein willkürlich vorgegebenes a_0 findet man für $\alpha = 1$

$$a_{n+2} = \frac{(n+1)(n+2) - l(l+1)}{(n+2)(n+3)}a_n, \qquad n = 0,2,4,\ldots$$

mit der Lösung

$$a_{2r} = \beta_r a_0.$$

Es ergeben sich die folgenden Potenzreihenentwicklungen: Für $\alpha = 0$:

$$w = a_0 \sum_{r=0,\ldots} \alpha_r x^{2r} \quad \text{und} \quad w = a_1 x \sum_{r=0,\ldots} \beta_r x^{2r} \tag{2.34}$$

und für $\alpha = 1$:

$$w \quad = \quad a_0 x \sum_{r=0,\ldots} \beta_r x^{2r}.$$

Diese letzte Lösung ist gleich dem a_1-Anteil der ersten Lösung. Es genügt daher, den Fall $\alpha = 0$ zu untersuchen. Wegen

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} \longrightarrow 1 \quad \text{für} \quad n \longrightarrow \infty$$

sind die obigen Reihen absolut konvergent für $|x| < 1$. Die Reihen definieren *analytische Funktionen* innerhalb des Einheitskreises.

Es ist auch möglich Lösungen außerhalb des Einheitskreises zu finden. Dazu machen wir den Reihenansatz

$$w = x^\alpha \sum_0^\infty \frac{a_n}{x^n}.$$

Setzen wir in die Differentialgleichung ein, so finden wir

$$\begin{aligned} 0 \quad &= \quad x^\alpha \Big(\big[\alpha(\alpha+1) - l(l+1)\big] a_0 + \big[(\alpha-1)\alpha - l(l+1)\big] \frac{a_1}{x} \Big) \\ &+ \quad \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\big[(\alpha-n-2)(\alpha-n-1) - l(l+1)\big] a_{n+2} - (\alpha-n)(\alpha-n-1) a_n \Big) \frac{1}{x^{n+2}} \end{aligned}$$

Die Bestimmungsgleichungen ergeben sich nach Nullsetzen der Koeffizienten der höchsten beiden Potenzen:

$$[\alpha(\alpha+1) - l(l+1)] a_0 = 0 \quad \text{und} \quad [(\alpha-1)\alpha - l(l+1)] a_1 = 0.$$

Da wir $a_0 \neq 0$ voraussetzen, muß

$$\alpha = l \quad \text{oder} \quad \alpha = -(l+1)$$

gelten und damit muß a_1 verschwinden. Die Rekursionsrelationen sind

$$a_{n+2} = \frac{(\alpha-n)(\alpha-n-1)}{(\alpha-n-2)(\alpha-n-1) - l(l+1)} a_n.$$

Für $\alpha = l$ und $\alpha = -l-1$ vereinfachen sich diese zu

$$a_{n+2} = \frac{(l-n)(l-n-1)}{(n+2)(n-2l+1)} a_n \quad \text{resp.} \quad a_{n+2} = \frac{(l+n+1)(l+n+2)}{(n+2)(n+2l+3)} a_n.$$

Damit sind die beiden Potenzreihenentwicklungen

$$\begin{aligned} w &= x^l \Big(1 + \sum_{r=1,\dots} (-1)^r \frac{(l-2r+1)(l-2r+2)\cdots(l-1)l}{2r\cdots 2\cdot(2l-2r+1)\cdots(2l-3)(2l-1)}\, x^{-2r}\Big) a_0 \\ w &= x^{-l-1}\Big(1 + \sum_{r=1,\dots} \frac{(l+1)\cdots(l+2r)}{2\cdot 4\cdots 2r(2l+3)(2l+5)\cdots(2l+2r+1)}\, x^{-2r}\Big) a_0 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Diese Reihen konvergieren absolut für $|x| > 1$ und definieren dort analytische Funktionen.

Wir verfügen nun über zwei Arten von Lösungen der Legendreschen DG: Die Reihen (2.34) konvergieren innerhalb des Einheitskreises und die Reihen (2.35) außerhalb. Für bestimmte l können diese Reihen zu Polynomen werden. Die Reihe (2.34a) bricht ab für positive gerade oder negative ungerade l. Im ersten Fall, $l = 2k$ löst dann das Polynom

$$w = a\Big(1 - \frac{l(l+1)}{2!}x^2 + \ldots + (-1)^{l/2}\frac{l(l-2)\cdots 2\cdot(l+1)\cdots(2l-1)}{l!}x^l\Big)$$

die DG. Für diese l bricht aber auch die Reihe (2.35a) ab und wird zum Polynom

$$w = ax^l\Big(1 - \frac{l(l-1)}{2(2l-1)}x^{-2} + \ldots + (-1)^{l/2}\frac{l!}{l(l-2)\ldots 2\cdot(l+1)\cdots(2l-1)}x^{-l}\Big).$$

Diese beiden Lösungen werden identisch, wenn man die zweite mit dem konstanten Faktor

$$(-1)^{l/2}\frac{l(l-2)\cdots 2\cdot(l+1)\ldots(2l-1)}{l!}$$

multipliziert. Die partikulären Lösungen (2.34a) und (2.35a) sind also gleich für gerade positive l. Ist l ungerade und negativ zeigt ein Vergleich, daß (2.34a) und (2.35b) identisch sind.

Die Reihe (2.34b) bricht ab wenn l ungerade und positiv oder gerade und negativ ist. Ist l ungerade und positiv, so ergibt sich aus (2.34b)

$$w = a\Big(x - \frac{(l-1)(l+2)}{3!}x^3 + \ldots + (-1)^{\frac{l-1}{2}}\frac{(l-1)(l-3)\cdots 2\cdot(l+2)\cdots(2l-1)}{l!}x^l\Big)$$

während (2.35a) zu

$$w = ax^l\Big(1 - \frac{l(l-1)}{2(2l-1)}x^{-2} + \ldots + (-1)^{\frac{l-1}{2}}\frac{l!}{2\cdot 4\cdot(l-1)\cdot(l+2)\cdots(2l-1)}x^{-l+1}\Big)$$

wird. Diese beiden Polynome sind aber bis auf einen Faktor identisch. Ist l gerade und negativ, so geht (2.34b) in (2.35b) über.

Die Lösungen (2.35) sind in der mathematischen Physik von großer Bedeutung. Setzt man die Konstante in a_0 in (2.35a) gleich

$$\frac{(2l)!}{2^l(l!)^2} = \frac{(2l-1)(2l-3)\cdots 1}{l!}$$

so heißt das sich ergebende Polynom l-ten Grades *Legendrepolynom*:

$$P_l(x) = \frac{(2l-1)!!x^l}{l!}\Big(1 - \frac{l(l-1)}{2(2l-1)}x^{-2} + \frac{l(l-1)(l-2)(l-3)}{2\cdot 4(2l-1)(2l-3)}x^{-4} - \cdots\Big). \tag{2.36}$$

Die Reihe ist bis zum konstanten Glied herab fortzusetzen. Anderseits bezeichnet man (2.35b) mit der Konstanten

$$a_0 = \frac{2^l(l!)^2}{(2l+1)!}, \qquad l \in \mathbb{N},$$

mit Q_l. Es ist eine unendliche Reihe:

$$Q_l = \frac{l!x^{-l-1}}{(2l+1)!!}\Big(1 + \frac{(l+1)(l+2)}{2(2l+3)}x^{-2} + \frac{(l+1)(l+2)(l+3)(l+4)}{(2\cdot 4)(2l+3)(2l+5)}x^{-4} + \ldots\Big) \tag{2.37}$$

Wir fassen zusammen:

Ist l ein ganze positive Zahl, so ist (2.36) ein Polynom und (2.37) eine unendliche Reihe. Die allgemeine Lösung der Legendreschen DG ist eine Linearkombination von P_l und Q_l.

Ist l eine negative Zahl, so wird P_l eine unendliche Reihe und (2.37) ein Polynom. Die allgemeine Lösung ist wiederum eine Linearkombination der beiden.

Bei fast allen Anwendungen ist die Variable x der Cosinus eines Winkels $x = \cos\theta$; diese Werte schließen $x = \pm 1$ ein. Wir haben gesehen, daß Lösungen die für $x = \pm 1$ regulär sind, nur für ganzzahlige l auftreten. Dann können wir uns auf die Lösungen P_l und Q_l beschränken, da sich alle anderen Lösungen auf diese reduzieren. Überdies bemerkt man, daß die Lösung (2.35b) mit $-(l+1)$ anstelle von l gerade (2.35a) ist. Also können wir $l \geq 0$ annehmen und behalten nur noch (2.36) als reguläre Lösungen. In physikalischen Problemen ist $P_l(\cos\theta)$ die einzige Lösung der Legendreschen DG von praktischem Interesse. Die tiefsten Legendrepolynome sind:

$$\begin{aligned} P_0 = 1, \quad P_1 = x, \quad P_2 = (3x^2-1)/2 \\ P_3 = (5x^3-3x)/2, \quad P_4 = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Der Vollständigkeit wegen gebe ich noch die tiefsten $Q's$ an:

$$Q_0 = \frac{1}{2}v(x), \quad Q_1 = \frac{x}{2}v(x) - 1, \quad Q_2 = \frac{1}{2}P_2(x)v(x) - \frac{3x}{2}$$

wo $\quad v(x) = \log\dfrac{1+x}{1-x}$ ist.

Erzeugende Funktion

Die Legendrepolynome können durch Ableiten von einfachen Polynomen erzeugt werden:

$$P_0(x) = 1, \qquad P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l}(x^2 - 1)^l.$$

Beweis: Wir differenzieren die Gleichung

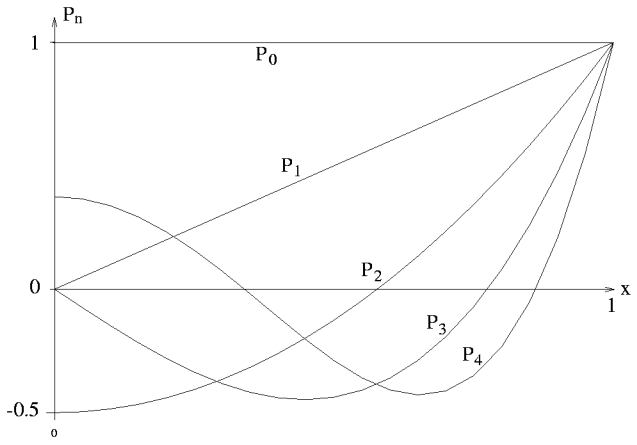


Abbildung 2.10: *Die Legendrepolynome P_l für $l = 0, 1, 2, 3, 4$.*

$$(x^2 - 1)u' = 2lxu \tag{2.39}$$

$(l + 1)$-mal nach x. Unter Benutzung von

$$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \binom{n}{2}u^{(n-2)}v^{(2)} + \ldots$$

ergibt sich

$$(x^2 - 1)u^{(l+2)} + 2x(l + 1)u^{(l+1)} + l(l + 1)u^{(l)} = 2lxu^{(l+1)} + 2l(l + 1)u^{(l)}$$

beziehungsweise die Legendresche Differentialgleichung für $u^{(l)}$:

$$(x^2 - 1)u^{(l+2)} + 2xu^{(l+1)} - l(l + 1)u^{(l)} = 0.$$

Nun erfüllt aber gerade $u = (x^2 - 1)^l$ die Gleichung (2.39). Setzen wir noch $w = u^{(l)}/2^l l!$, dann löst w die Legendresche Differentialgleichung.

2.5.2 Orthogonale Polynome in Hilberträumen

Wir wollen nun beweisen, daß die Legendrepolynome eine Orthogonalsystem auf dem Raum der stetigen Funktionen von $[-1,1]$ nach $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ bilden. Die Funktionen $f : [-1,1] \to \mathbb{C}$ bilden einen linearen Raum. Als inneres Produkt wählen wir

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} \bar{f}(x)g(x)dx. \tag{2.40}$$

Dies ist in der Tat ein Skalarprodukt:
Es ist linear im ersten Argument und antilinear im zweiten Argument,

$$(f, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) = \alpha_1 (f, g_1) + \alpha_2 (f, g_2) \quad \text{und} \quad (f,g) = \overline{(g,f)},$$

und es ist positiv

$$(f,f) \geq 0 \quad \text{und} \quad (f,f) = 0 \quad \text{nur falls} \quad f = 0.$$

Zwei Funktionen f, g (Vektoren in diesem unendlich dimensionalen Funktionenraum) sind orthogonal, falls $(f,g) = 0$ ist. Die Länge oder Norm einer Funktion ist

$$\|f\| = (f,f)^{1/2}.$$

Also ist der Raum der stetigen Funktionen $[-1,1] \to C$ ein sogenannter normierter Raum. Der Abstand zwischen zwei Funktionen ist

$$d(f,g) = \|f - g\|.$$

Ist der Raum bezüglich dieser Metrik vollständig, so heißt er Hilbertraum: Ein *Hilbertraum* ist ein linearer Raum, der bezüglich der über das innere Produkt induzierten Metrik vollständig ist. In einem Hilbertraum konvergieren zum Beispiel alle Cauchy-Folgen gegen ein Element des Hilbertraumes. Ist $\mathcal{H}$ ein Raum mit Skalarprodukt, dann gelten die Ungleichungen

Satz:

$$|(f,g)| \leq \|f\| \, \|g\| \quad \text{und} \quad \|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

Weiterhin ist

$$\|g\| \leq \|\lambda f + g\| \quad \text{für alle} \quad \lambda \in C$$

genau dann, wenn $(f,g) = 0$ ist.

Beweis: Sei $\alpha = (f,g)$. Eine einfache Rechnung zeigt, daß

$$0 \leq \|\lambda f + g\|^2 = |\lambda|^2 \|f\|^2 + 2\Re(\bar{\alpha}\lambda) + \|g\|^2. \tag{2.41}$$

Damit gilt die letzte Aussage im Satz für $\alpha = 0$. Ist $f = 0$, dann sind die erste und letzte

Behauptung trivial erfüllt. Sei nun $f \neq 0$. Wir setzen $\lambda = -\alpha/\|f\|^2$. Mit diesem λ wird (2.41) zu

$$0 \leq \|\lambda f + g\|^2 = \|g\|^2 - \frac{|\alpha|^2}{\|f\|^2}.$$

Dies beweist die erste Ungleichung und zeigt, daß die dritte Behauptung nur für $\alpha = 0$ gelten kann. Die zweite Ungleichung im Satz folgt aus der ersten (man quadriere die zweite Ungleichung).

Der Raum der stetigen Funktionen auf $[-1, 1]$ ist bezüglich der von (2.40) induzierten Norm nicht vollständig. Man kann in aber vervollständigen. Der etwas größere Raum wird mit

$$L_2([-1, 1])$$

bezeichnet.

In der Physik treten oft Polynome oder allgemeiner Funktionensysteme auf (zum Beispiel die Hermite-Polynome) die orthogonal bezüglich eines gewichteten L_2 Raumes sind. Das Skalarprodukt ist dann

$$(f, g) = \int_M \rho(x)\bar{f}(x)g(x)d^n x, \qquad \rho(x) > 0.$$

Das Integrationsgebiet $M \subset R^n$ kann ein endliches oder unendliches Gebiet sein. Die Dichte ρ muß eine positive Funktion sein. Die Vervollständigung des Funktionenraumes bezüglich der von $(.,.)$ induzierten Norm ist $L_2(M, \rho)$. Das Skalarprodukt und die zugehörige Norm erfüllen alle obigen Eigenschaften.

Orthogonalität der Legendrepolynome

Die Legendrepolynome sind orthogonal in $L_2([0, 1])$. Dies ist einfach zu beweisen. Dazu schreiben wir die Legendresche Differentialgleichung wie folgt:

$$Aw = l(l+1)w, \qquad A = -\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx}. \tag{2.42}$$

Allgemein ist der zu A adjungierte Operator A wie folgt definiert:

$$(f, Ag) = (A^\dagger f, g).$$

Für einen symmetrischen Operator ist $A = A^\dagger$. Für den Differentialoperator A in (2.42) gilt nun

$$(f, Ag) = \int_{-1}^{1} \bar{f}Ag = -(1-x^2)(\bar{f}g' - \bar{f}'g)|_{-1}^{1} + \int \overline{Af}g = (Af, g),$$

wobei wir annahmen, daß f und g bei $x = \pm 1$ regulär sind, so daß die Oberflächenterme verschwinden. Für Funktionenräume deren Elemente bei $x = \pm 1$ regulär sind, ist also A in

(2.42) symmetrisch. Insbesondere gilt

$$(AP_k, P_l) = k(k+1)(P_k, P_l) = (P_k, AP_l) = l(l+1)(P_k, P_l).$$

Für $l \neq k$ muß also $(P_l, P_k) = 0$ gelten. Deshalb sind die Legendrepolynome orthogonal zueinander. Es verbleibt noch, die Norm von P_l zu bestimmen. Mit

$$\int_{-1} \Big(\frac{d^l}{dx^l}(1-x^2)^l\Big)^2 = \frac{2}{2l+1} 4^l (l!)^2$$

findet man, daß

$$(P_l, P_l) = \frac{2}{2l+1} \quad \text{und damit} \quad (P_k, P_l) = \frac{2}{2l+1}\delta_{kl}.$$

2.5.3 Zugeordnete Legendrefunktionen oder Kugelfunktionen

Bei der Behandlung von wasserstoffähnlichen Atomen in der QM wird man auf die DG

$$(1-x^2)w'' - 2xw' + \Big(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\Big)w = 0 \tag{2.43}$$

geführt, wobei l und m ganzzahlig sind. Es erfülle P_l die Legendresche Differentialgleichung (2.32), dann erfüllt die *Helmholtzsche Funktion*

$$P_l^{(m)} = \frac{d^m}{dx^m} P_l$$

die DG

$$\Big((1-x^2)\frac{d}{dx^2} - 2(m+1)x\frac{d}{dx} + \Big(l(l+1) - m(m+1)\Big)P_l^{(m)} = 0.$$

Man braucht nur die Legendresche DG m-mal zu differenzieren. Wir setzen nun

$$P_l^{(m)}(x) = (1-x^2)^{-m/2} y_l^{(m)}(x).$$

und bestimmen durch Einsetzen diejenige DG, der $y_l^{(m)}$ genügt. Man findet die DG (2.43) und damit lösen die

$$y_l^{(m)}(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x) \tag{2.44}$$

die DG (2.43). Die Funktion $y_l^{(m)}$ ist als zugeordnete Legendreschefunktion oder als zugeordnete Kugelfunktion bekannt. Die Helmholtz-Funktion $P_l^{(m)}$ ist ein Polynom vom Grad $l-m$. Die zugeordnete Legendrefunktion ist ein Polynom form Grad l.

2.5.4 Der Satz von Fuchs

Wir wollen die Frage beantworten, wann die Lösungen einer Differentialgleichung in eine Potenzreihe entwickelt werden können. Zur Vorbereitung betrachten wir die DG

$$w'' + c\frac{w}{x^m} = 0, \qquad m \in \mathbb{Z}.$$

Setzen wir die Reihenentwicklung $x^\alpha \sum a_n x^n$ mit $a_0 \neq 0$ ein, so finden wir

$$\sum a_n(n+\alpha)(n+\alpha-1)x^{n+\alpha-2} + c\sum a_n x^{n+\alpha-m} = 0.$$

Für $m > 2$ erscheint die niedrigste Potenz $\sim x^{\alpha-m}$ im zweiten Term. Der entsprechende Koeffizient a_0 muß deshalb verschwinden. Für $m = 2$ muß $a_0(\alpha^2 - \alpha + c) = 0$ gelten. Die $a_n, n > 0$ müssen verschwinden, und die allgemeine Lösung ist

$$w = c_1 x^{\frac{1}{2}+\beta} + c_2 x^{\frac{1}{2}-\beta}, \qquad \beta = \sqrt{\frac{1}{4} - c}, \qquad m = 2.$$

Es gibt als immer zwei Potenzlösungen. Eine davon kann bei $x = 0$ singulär werden. Für $m < 2$ kann die Rekursionsformel gelöst werden und führt auf eine konvergente und nichttriviale Lösung:

$$\alpha \in \{0,1\}, \qquad a_{n+2} = -\frac{c}{(n+2+\alpha)(n+\alpha+1)} a_{n+m}.$$

Die entsprechende Reihe ist konvergent für alle x und definiert eine analytische Funktion.

Ein zweites instruktives Beispiel ist die Gleichung

$$w'' + c\frac{w'}{x^m} = 0$$

welche zu

$$\sum a_n(n+\alpha)(n+\alpha-1)x^{n+\alpha-2} + c\sum a_n(n+\alpha)x^{n+\alpha-1-m} = 0$$

führt. Für $m > 1$ muß $a_0\alpha$, und damit α, verschwinden. Die Rekursrelation ist

$$\frac{a_{n+m-1}}{a_n} = -\frac{1}{c}\frac{n(n-1)}{n+m-1}.$$

Die Reihe hat verschwindenden Konvergenzradius und es gibt keine Lösung die eine Potenzreihenentwicklung hat. Für $m = 1$ ist die allgemeine Lösung eine Linearkombination von $w = 1$ und $w = x^{1-c}$. Für $m < 1$ folgt

$$\alpha \in \{0,1\}, \qquad a_{n+1} = -\frac{c a_{n+m}(n+m)}{(n+\alpha)(n+\alpha+1)}.$$

Dies definiert wiederum eine analytische Funktion. Die Gleichungen

$$w'' + c\frac{w}{x^3} \quad \text{und} \quad w'' + c\frac{w'}{x^2}$$

besitzen einen singulären Punkt in $x = 0$, was die Ursache für das Versagen der Reihenentwicklung ist. Im Falle der Legendreschen DG haben die Funktionen p und q einfache Pole an den Stellen $x = \pm 1$, weshalb die erhaltene allgemeine Lösung diese beiden Punkte auslässt. In den eben betrachteten Gleichungen ist $x = 0$ ein singulärer Punkt. Ob Lösungen eine (konvergente) Potenzreihenentwicklung an einer singulären Stelle zulassen hängt offensichtlich vom Divergenzgrad von p und q ab. Wir geben noch ein drittes Beispiel, um den Sachverhalt zu illustrieren. Die Lösung der Gleichung

$$w'' + \frac{w'}{x} - \frac{w}{x^2} = 0$$

kann in der Form $x^\alpha \sum a_n x^n$ entwickelt werden. Man findet für die allgemeine Lösung

$$w = \frac{a_0}{x} + a_2 x.$$

Es gibt eine bei $x = 0$ reguläre und eine divergente Lösung. Welche Singularitäten von p, q noch eine Integration durch Reihen in der Umgebung des singulären Punktes erlauben wird durch den Satz von Fuchs geklärt:

Satz: Wenn die DG

$$w'' + pw' + qw = 0$$

in $x = x_0$ einen singulären Punkt besitzt, so gibt es dennoch eine konvergente Potenzreihenentwicklung der Lösung in $x = x_0$ (eventuell mit endlich vielen negativen Potenzen) falls $(x - x_0)p(x)$ und $(x - x_0)^2 q(x)$ endlich bleiben für $x \to x_0$.

Singuläre Punkte welche die Voraussetzungen des Fuchsschen Satzes erfüllen heißen *außerwesentliche* Singularitäten der DG; alle übrigen heißen *wesentlich.* Eine DG, die in der ganzen komplexen Ebene keine wesentlichen Singularitäten besitzt, heißt eine DG vom Fuchsschen Typ. Selbst wenn x_0 eine außerwesentliche Singularität ist, braucht man bei der Integration der DG durch Reihen nicht zwei unabhängige Lösungen zu erhalten. Man kann zwei unabhängige Lösungen der Form

$$w_1 = (x - x_0)^{\alpha_1} \sum a_n (x - x_0)^n \quad \text{und} \quad w_2 = (x - x_0)^{\alpha_2} \sum b_n (x - x_0)^n$$

immer dann erhalten, wenn die beiden Wurzeln α_1 und α_2 der bestimmenden Gleichung sich nicht um eine ganze Zahl unterscheiden.

2.5.5 Integraltransformationen

Es sei eine Differentialgleichung

$$Lw + \lambda w = 0$$

gegeben, wobei L ein Differentialoperator ist. Statt $w(z)$ führen wir eine neue Funktion $v(\zeta)$ der komplexen Variablen ζ durch eine Gleichung

$$w(z) = \int_C K(z,\zeta) v(\zeta) d\zeta \tag{2.45}$$

ein, wobei der *Transformationskern* $K(z,\zeta)$ in jeder der beiden Variablen analytisch sein soll. Der Integrationsweg C in der komplexen ζ-Ebene wird jeweils geeignet zu bestimmen sein. Die Differentialgleichung geht über in

$$\int_C \big(LK + \lambda K\big) v(\zeta) d\zeta = 0,$$

wobei sich der Operator L auf die Variable z bezieht. Nun soll K die partielle Differentialgleichung

$$LK = AK,$$

erfüllen, wobei A nur auf die Variable ζ wirkt, so folgt

$$\int_C \big(AK + \lambda K\big) v(\zeta) d\zeta = \int_C K(z,\zeta) \big(A^\dagger v + \lambda v\big) d\zeta = 0.$$

Der Weg C ist hier so zu wählen, daß die Randterme verschwinden. Falls die partielle DG $LK = AK$, für deren Wahl man Spielraum hat, und die transformierte DG

$$A^\dagger v + \lambda v = 0 \tag{2.46}$$

explizit gelöst werden können, so erhält man mit dieser Methode die Lösung $w(z)$ in der angegebenen Integralform.

In der Analysis treten solche Integraltransformationen in verschiedener Gestalt auf. Für den Kerne

$$K(z,\zeta) = e^{z\zeta}, \quad K(z,\zeta) = e^{iz\zeta} \quad \text{und} \quad K(z,\zeta) = (z-\zeta)^\alpha$$

sind dies die Transformation von Laplace und Euler. Im Folgenden werden wir Integraltransformationen für mehrere Differentialgleichungen diskutieren. Wir beginnen mit der für die QM wichtigen Besselschen Differentialgleichung.

2.5.6 Die Besselsche Differentialgleichung

Dies ist die folgende Differentialgleichung

$$z^2 w'' + z w' + (z^2 - \lambda^2) w = Lw - \lambda^2 w = 0, \qquad \lambda = \text{konstant}.$$

Sie ist eine Gleichung vom Fuchsschen Typ mit einer außerwesentlichen Singularität bei $z = 0$. Da $z = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit der Gleichung ist, kann dort ihre Lösung in

eine Potenzreihe entwickelt werden. Man findet

$$(\alpha^2-\lambda^2)a_0=0,\quad ((\alpha+1)^2-\lambda^2)a_1=0,\quad a_{n+2}=\frac{a_n}{\lambda^2-(n+2+\alpha)^2}.$$

Offensichtlich ist $\alpha=\pm\lambda$ und $a_1=0$. Für $\alpha=\lambda$ findet man

$$w=a_0z^\lambda\Big(1-\frac{z^2}{2(2\lambda+2)}+\frac{z^4}{2\cdot4(2\lambda+2)(2\lambda+4)}+\cdots\Big)$$

und für $\alpha=-\lambda$

$$w=a_0z^{-\lambda}\Big(1+\frac{z^2}{2(2\lambda-2)}+\frac{z^4}{2\cdot4(2\lambda-2)(2\lambda-4)}+\cdots\Big).$$

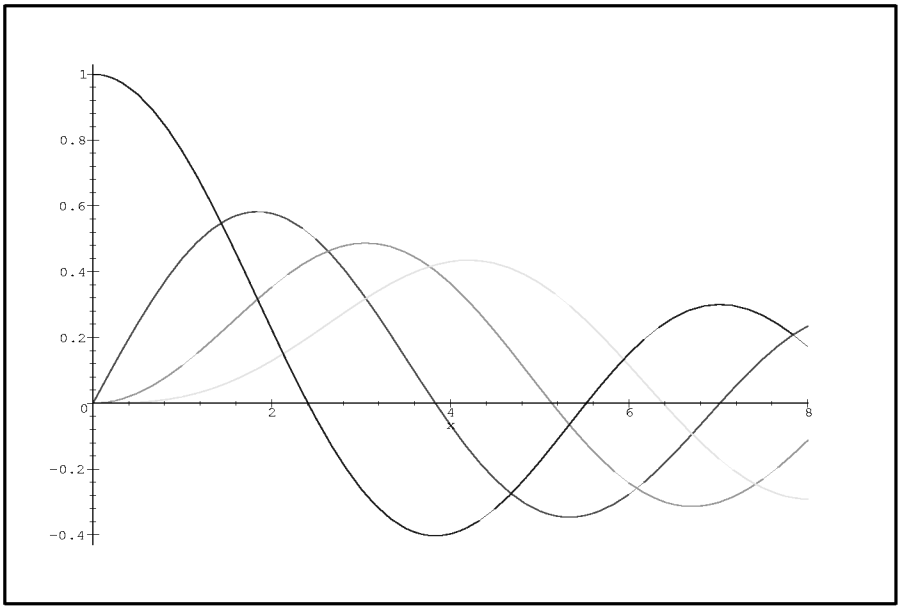
Diese Lösung geht aus der ersten durch die Ersetzung $\lambda\to-\lambda$ hervor. Setzen wir

$$a_0=\frac{1}{2^\lambda\Gamma(\lambda+1)},$$

dann nennt man den sich ergebenden Ausdruck

$$J_\lambda(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\lambda+1)}\big(\frac{z}{2}\big)^{\lambda+2n}$$

Besselfunktion vom Grade λ.



Die vollständige Lösung der Besselschen Differentialgleichung (λ nicht ganzzahlig) ist also

$$w = aJ_\lambda(z) + bJ_{-\lambda}(z). \tag{2.47}$$

Die J_λ sind die *Besselfunktionen* der Ordnung λ.

Für $\lambda = l \in \{1, 2, \ldots\}$ ist

$$J_{-l}(z) = \sum_{n=l,l+1,\ldots} \frac{(-)^n}{n!(n-l)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n-l},$$

wobei wir

$$\lim_{\lambda\to -l} \frac{1}{\Gamma(n+\lambda+1)} = 0 \quad \text{für} \quad n = l-1, l-2, \ldots$$

benutzten. Setzten wir $m = n - l$ so finden wir

$$J_{-l}(z) = \sum_{m=0,1,\ldots} \frac{(-)^{m+l}}{(m+l)!m!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m+l} = (-)^l J_l(z).$$

Für ganzzahlige λ sind also J_λ und $J_{-\lambda}$ linear abhängig.

Integraltransformation

Setzen wir $w = \int Kvd\zeta$ so folgt

$$\int_C \left(z^2K_{zz} + zK_z + z^2K - \lambda^2K\right)v(\zeta)d\zeta = 0.$$

Wir fordern nun, daß

$$LK = z^2K_{zz} + zK_z + z^2K = -K_{\zeta\zeta} = AK$$

gilt, mit der in der ganzen z und ζ-Ebene regulären Lösung

$$K(z,\zeta) = e^{\pm iz\sin\zeta}.$$

Die Besselsche DG geht über in

$$\int_C \left(K_{\zeta\zeta} + \lambda^2K\right)v(\zeta)d\zeta = 0$$

oder, wie man nach partieller Integration erkennt, in

$$\int_C K(z,\zeta)\left(v'' + \lambda^2 v\right)d\zeta - \int_C \frac{d}{d\zeta}\left(Kv' - K_\zeta v\right)d\zeta = 0.$$

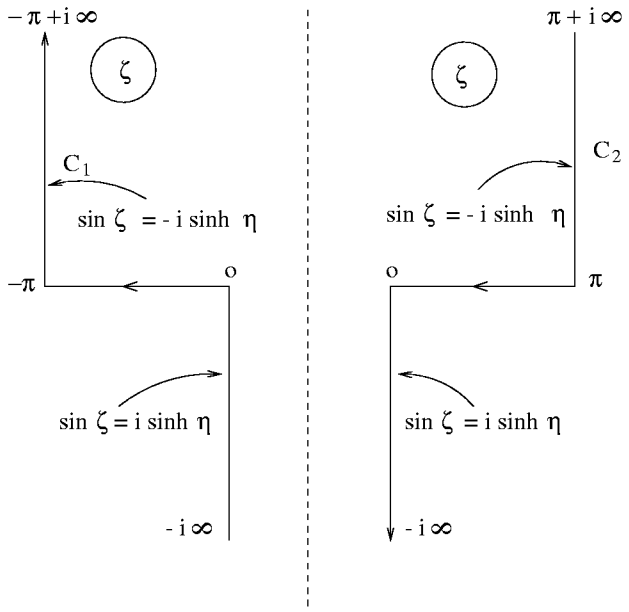


Abbildung 2.11: *Integrationswege in der komplexen ζ-Ebene*

Die transformierte DG $v'' + \lambda^2 v = 0$ hat die Lösungen $\exp(\pm i\lambda\zeta)$. Nun müssen wir noch den Integrationsweg C geeignet wählen damit die Oberflächenterme verschwinden. Auf den senkrechten Abschnitten der in Abb. 2.11 mit C_1 und C_2 bezeichneten Wege ist wegen $\sin(\zeta = \xi + i\eta) = \sin\xi\cos(i\eta) + \sin(i\eta)\cos\xi$ gleich

$$\sin\zeta = \sin\xi\cosh\eta + i\cos\xi\sinh\eta = -i\sinh|\eta|$$

und damit der Realteil von

$$-iz\sin\zeta = -z\sinh|\eta| \quad \text{gleich} \quad -\Re(z)\sinh|\eta|,$$

also negativ für $\Re(z) > 0$. Setzen wir $K(z,\zeta) = \exp(-iz\sin\zeta)$ so strebt auf C_1 und C_2 der Zusatzterm $Kv' - K_\zeta v$ beiderseits gegen Null, und wir erhalten in den Integralen

$$H^1_\lambda(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{C_1} e^{-iz\sin\zeta + i\lambda\zeta}d\zeta \quad \text{und} \quad H^2_\lambda(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{C_2} e^{-iz\sin\zeta + i\lambda\zeta}d\zeta \tag{2.48}$$

zwei Lösungen der Besselschen DG, die sogenannten *Hankelfunktionen*. Man sieht leicht, daß diese Integrale für $\Re(z) > 0$ konvergieren.

Für die analytische Fortsetzung zu $\Re(z) \leq 0$ deformieren wir den Integrationsweg C_1. Wir setzen

$$\lambda = a + ib, \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad z = x + iy$$

dann sind der Real- und Imaginärteil der Funktion

$$f(\zeta) = -iz\sin\zeta + i\lambda\zeta$$

im Exponenten

$$\begin{aligned}\Re f(\zeta) &= y\sin\xi\cosh\eta + x\cos\xi\sinh\eta - b\xi - a\eta \\ \Im f(\zeta) &= -x\sin\xi\cosh\eta + y\cos\xi\sinh\eta + a\xi - b\eta.\end{aligned}$$

Jetzt wählen wir für die senkrechten Teile des Weges C_1 statt der Abszissen 0 und $-\pi$ die Abszissen ξ_0 und $-\pi - \xi_0$. Wegen

$$\Re f(\zeta) \sim \frac{1}{2}e^{|\eta|}\left(y\sin\xi_0 - x\cos\xi_0\right) + O(|\eta|) \quad \text{für} \quad |\eta| \to \infty$$

ist das Integral

$$\int_{C_1} e^{f(\zeta)}d\zeta$$

für solche z konvergent, für welche

$$y\sin\xi_0 - x\cos\xi_0 < 0$$

ist. Vergrößert man nun ξ_0, dann dreht sich die Halbebene auf welcher das Integral konvergiert und eine in z analytische Funktion definiert, um den Punkt $z = 0$. Zum Beispiel, definiert das Integral mit $\xi_0 = 0$ eine analytische Funktion in der Halbebenen $\Re z > 0$ und das Integral mit $\xi_0 = \pi/2$ eine analytische Funktion in der Halbebene $\Im z < 0$. Die Viertelebene mit $\Re z > 0$ und $\Im z < 0$ liegt in beiden Halbebenen. Auf dieser Viertelebene stimmen die beiden Integrale aber überein. Sind $C_1(0)$ und $C_1(\pi/2)$ die beiden Integrationswege mit $\xi_0 = 0$ und $\xi_0 = \pi/2$, so gilt

$$\int_{C_1(0)} e^{f(\zeta)}d\zeta = \int_{C_1(\pi/2)} e^{f(\zeta)}d\zeta$$

für $\Re z > 0$ und $\Im z < 0$, da der eine Weg so in den anderen deformiert werden kann, ohne daß die Randterme beitragen. Lassen wir also ξ_0 in geeigneter Weise eine unbeschränkte Folge positive oder negative Werte durchlaufen, so entsteht nach und nach das gesamte analytische Gebilde der Funktion $H^1_\lambda(z)$, nämlich eine Riemannsche Fläche, die im Nullpunkt einen Verzweigungspunkt mit von λ abhängiger Ordnung besitzt (siehe Abb. 2.12).

Für $\xi_0 = -\pi/2$ verschwindet der waagerechte Bestandteil des Integrationsweges, und wir erhalten

$$H^1_\lambda(z) = \frac{e^{-i\pi\lambda/2}}{i\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iz\cosh\eta - \lambda\eta}d\eta \tag{2.49}$$

welches die Funktion in der oberen Halbebene $\Im z > 0$ darstellt. Lassen wir im Sektor

$$\delta \le \arg z \le \pi - \delta$$

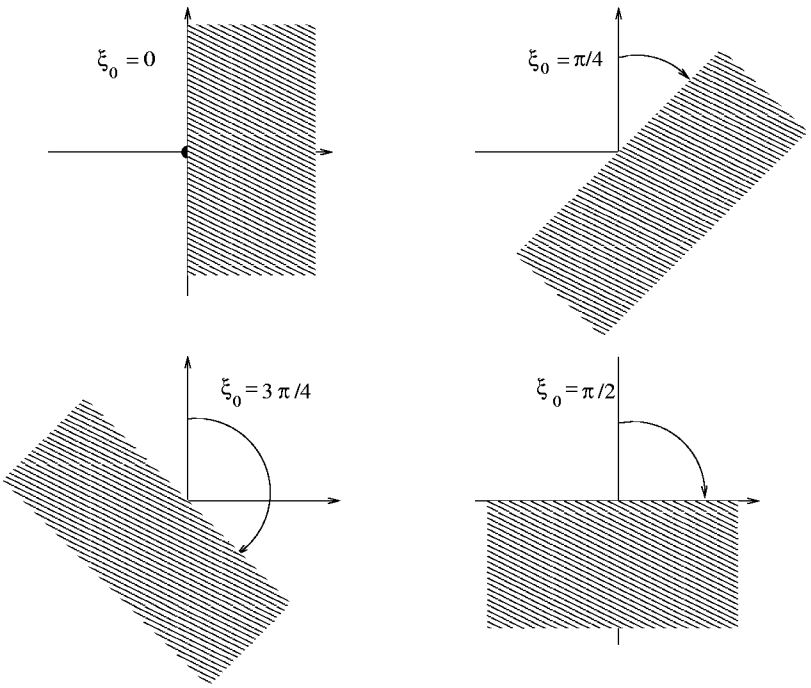


Abbildung 2.12: *Deformation des Integrationsweges in der Integraltransformation*

ins Unendliche wachsen, so strebt der Integrand auf dem ganzen Integrationsweg gegen Null. Ähnlich argumentiert man, daß $H_2^\lambda(z)$ gegen Null strebt, wenn z im Sektor

$$\pi + \delta \leq \arg z \leq 2\pi - \delta$$

ins Unendliche wächst. Damit haben wir bewiesen, daß

Lemma Die Hankelfunktionen erfüllen

$$\begin{aligned} H_\lambda^1(z) &\longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad |z| \to \infty, \quad \delta \leq \arg(z) \leq \pi - \delta \\ H_\lambda^2(z) &\longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad |z| \to \infty, \quad \pi + \delta \leq \arg(z) \leq 2\pi - \delta. \end{aligned}$$

Man kann leicht zeigen, daß H_λ^1 auf der negativen und H_λ^2 auf der positiven imaginären Achse mit $|z| \to \infty$ über alle Grenzen wachsen. Damit müssen H_λ^1, H_λ^2 linear unabhängige Lösungen der Besselschen Differentialgleichung sein.

Um die Hankel- mit den Besselfunktionen in Verbindung zu bringen, bemerken wir, daß für reelle λ und reelle z die Lösungen H_λ^1 und H_λ^2 konjugiert komplex zueinander sind.

Ersetzen wir in der Darstellung

$$\overline{H_\lambda^1(z)} = -\frac{1}{\pi} \int_{\bar{C}_1} e^{iz \sin\zeta - i\lambda\zeta} d\zeta,$$

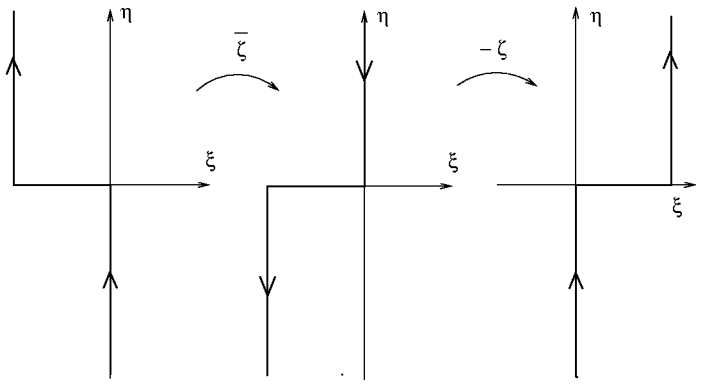


Abbildung 2.13: *Die verschiedenen Integrationswege.*

wobei $\bar{C}_1$ das Spiegelbild von C_1 an der reellen Achse ist, ζ durch $-\zeta$, so folgt

$$\overline{H^1_\lambda(z)} = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\bar{C}_1} e^{-iz\sin\zeta + i\lambda\zeta} d\zeta.$$

Da $-\bar{C}_1$ gleich dem im negativen Sinne durchlaufenen Wege C_2 ist, so wird

$$\overline{H^1_\lambda(z)} = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{C_2} e^{-iz\sin\zeta + i\lambda\zeta} d\zeta = H^2_\lambda(z),$$

was zu beweisen war. $H^i_\lambda(z)$ und $H^i_{-\lambda}(z)$ erfüllen dieselbe Differentialgleichung, die ja nur λ^2 enthält. Deshalb müssen diese 4 Funktionen linear abhängig sein. Da $H^i_\lambda(z)$ und $H^i_{-\lambda}(z)$ dasselbe asymptotische Verhalten zeigen, liegt die Vermutung nahe, daß sie abhängig sind. Um dies zu beweisen ersetzt man in der Integraldarstellung

$$H^1_{-\lambda}(z) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{C_1} e^{-iz\sin\zeta - i\lambda\zeta} d\zeta$$

ζ durch $-\zeta - \pi$. Dann ist

$$H^1_{-\lambda}(z) = \frac{e^{i\pi\lambda}}{\pi} \int\limits_{\tilde{C}_1} e^{-iz\sin\zeta + i\lambda\zeta} d\zeta.$$

Aber da $\tilde{C}_1$ gleich das im negative Sinn durchlaufene C_1 ist, haben wir gezeigt, daß

$$H^1_{-\lambda}(z) = e^{i\lambda\pi} H^1_\lambda(z)$$

gilt. Analog beweist man, daß

$$H^2_{-\lambda}(z) = e^{-i\lambda\pi} H^2_\lambda(z)$$

Damit sind

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{2}\big(H^1_\lambda(z) + H^2_\lambda(z)\big) \quad \text{und} \quad N_\lambda(z) = \frac{1}{2i}\big(H^1_\lambda(z) - H^2_\lambda(z)\big)$$

Lösungen der Besselgleichungen, welche für reelle λ und z reell sind und welche

$$\begin{pmatrix} J_{-\lambda}(z) \\ N_{-\lambda}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\pi\lambda & -\sin\pi\lambda \\ \sin\pi\lambda & \cos\pi\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_\lambda(z) \\ N_\lambda(z) \end{pmatrix}$$

erfüllen. Es sind die Besselschen und Neumannschen Funktionen vom Index λ.

Integraldarstellung der Besselschen Funktionen

Addieren wir H^1_λ und H^2_λ, so heben sich die auf der imaginären Achse laufenden Integrationswege in Abb.(2.11). Wir erhalten also in für $\Re(z) > 0$ die folgende Darstellung für J_λ:

$$J_\lambda(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_C e^{-iz\sin\zeta + i\lambda\zeta} d\zeta, \qquad \Re z > 0, \tag{2.50}$$

wobei C der in Abb. 2.11 gekennzeichnete Weg ist.

Ist nun λ eine ganze Zahl, so heben sich wegen der Periodizität des Integranden die Integrale

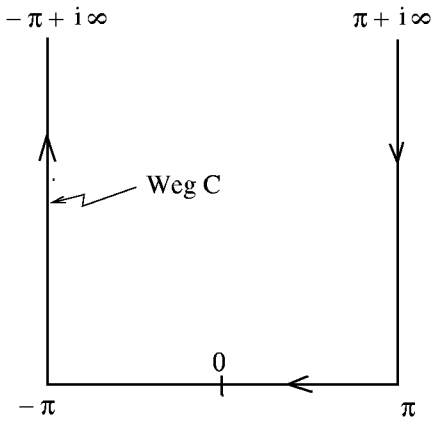


Abbildung 2.14: *Integrationsweg für Besselfunktionen.*

über die senkrechten Abschnitte von C weg und es ergibt sich

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iz\sin\zeta - in\zeta} d\zeta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\big(z\sin\zeta - n\zeta\big) d\zeta. \tag{2.51}$$

Wir sehen, daß die Besselschen Funktionen mit ganzzahligem Index ganze Funktionen auf

C sind. Die Darstellung (2.51) zeigt, daß $J_n(z)$ der n^{te} Fourierkoeffizient in der Fourierentwicklung von

$$e^{iz\sin\zeta} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(z)e^{in\zeta}$$

nach ζ ist. Beachten wir noch, daß $J_{-n}(z) = (-)^n J_n(z)$ ist, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\cos(z\sin\zeta) &= J_0 + 2\sum_{1}^{\infty} J_{2n}(z)\cos 2n\zeta \\ \sin(z\sin\zeta) &= 2\sum_{1}^{\infty} J_{2n-1}(z)\sin(2n-1)\zeta,\end{aligned}$$

und speziell für $\zeta = \pi/2$

$$\cos(z) = J_0 - 2J_2 + 2J_4(z) - \ldots, \quad \sin(z) = 2J_1(z) - 2J_3(z) + \ldots.$$

Wir geben schlußendlich noch eine zweite Integraldarstellung der Besselfunktionen an, die auf eine nützliche Rekursionsformel für die Besselfunktionen mit ganzzahligem Index führt. Es sei

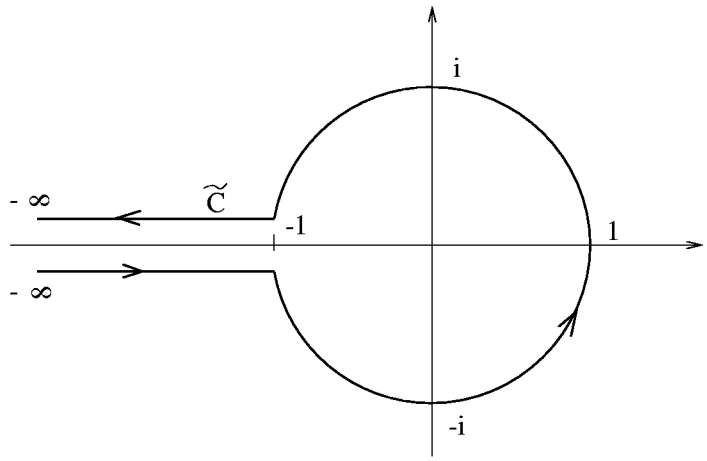


Abbildung 2.15: *Der Integrationsweg $\tilde{C}$ in der komplexen ζ-Ebene.*

$$\tilde{\zeta} = e^{-i\zeta}, \quad \text{so daß} \quad \sin\zeta = \frac{1}{2i}(\tilde{\zeta} - \frac{1}{\tilde{\zeta}}).$$

Dann geht (2.50) über in

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{C}} \frac{e^{\frac{z}{2}(\zeta-\frac{1}{\zeta})}}{\zeta^{\lambda+1}}d\zeta, \tag{2.52}$$

wobei wir $\tilde{\zeta}$ wieder mit ζ bezeichneten. Der neue Integrationsweg $\tilde{C}$ ist in Abb. 2.15 dargestellt. Wegen

$$0 = \int\limits_{\tilde{C}} d\zeta \frac{d}{d\zeta} \frac{e^{\frac{z}{2}(\zeta - \frac{1}{\zeta})}}{\zeta^{\lambda+1}} = \int\limits_{\tilde{C}} d\zeta \Big[\frac{z}{2}\big(\frac{1}{\zeta^{\lambda}} + \frac{1}{\zeta^{\lambda+2}}\big) - \frac{\lambda}{\zeta^{\lambda+1}}\Big] e^{\frac{z}{2}(\zeta - \frac{1}{\zeta})}$$

ergeben sich die wichtigen Rekursionsrelationen

$$J_{\lambda-1}(z) + J_{\lambda+1}(z) = \frac{2\lambda}{z} J_{\lambda}(z).$$

Diese gelten nicht nur für die Besselfunktionen, sondern auch für beide Hankelfunktionen.

2.5.7 Die Hypergeometrische Differentialgleichung

Dies ist die Differentialgleichung

$$(z^2 - z)w'' + \big[(1 + a + b)z - c\big]w' + abw = 0. \tag{2.53}$$

Die Parameter a, b und c sind Konstanten, c wird als nicht ganzzahlig vorausgesetzt. Die Gleichung hat außerwesentliche Singularitäten in $0, 1$ und ∞. Die Bestimmungsgleichung für die Entwicklung um $z = 0$ lautet

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha c = 0.$$

Also ist $\alpha = 0$ oder $\alpha = 1 - c$. Die Rekursionsrelation lautet

$$a_{n+1} = \frac{(\alpha + n + a)(\alpha + n + b)}{(\alpha + n + 1)(\alpha + n + c)} a_n.$$

Für $\alpha = 0$ vereinfacht sich diese zu

$$a_{n+1} = \frac{(a + n)(b + n)}{(n + 1)(n + c)} a_n$$

und damit erhalten wir für $\alpha = 0$ folgende Lösung:

$$w = A\Big(1 + \frac{ab}{1 \cdot c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2! \cdot c(c+1)} z^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{3! \cdot c(c+1)(c+2)} z^3 + \cdots\Big). \tag{2.54}$$

Die Reihe in den Klammern heißt *hypergeometrische Reihe.* Sie konvergiert innerhalb des Einheitskreises. Für $a = 1$ und $b = c$ wird sie zur gewöhnlichen geometrischen Reihe; daher ihr Name. Man bezeichnet die Reihe mit $F(a, b, c; z)$. Damit ist die partikuläre Lösung $w = AF(a, b, c; z)$.
Für $\alpha = 1 - c$ lautet die die Rekursionsformel

$$a_{n+1} = \frac{(a - c + n + 1)(b - c + n + 1)}{(n + 1)(n + 2 - c)} a_n.$$

Benutzt man die neuen Konstanten $a' = a - c + 1, b' = b - c + 1$ und $c' = 2 - c$, so entsteht

$$a_{n+1} = \frac{(a' + n)(b' + n)}{(n + 1)(n + c')} a_n,$$

also dieselbe Rekursionsrelation wie für $\alpha = 0$. Die entsprechende partikuläre Lösung ist daher

$$w = Bz^{1-c} F(a - c + 1, b - c + 1, 2 - c; z).$$

Damit ergibt sich folgende allgemeine Lösung der hypergeometrischen Differentialgleichung:

$$w = AF(a, b, c; z) + Bz^{1-c} F(a - c + 1, b - c + 1, 2 - c; z). \tag{2.55}$$

Die obige Reihendarstellung für F konvergiert innerhalb des Einheitskreises. Wir überlassen es einer Übungsaufgabe, zu zeigen, daß

$$P_l(\xi) = F(l + 1, -l, 1; \frac{1 - \xi}{2})$$

die Legendreschen Polynome sind. Die hypergeometrische Reihe ist ein Polynom, falls a oder b negativ ganz oder 0 sind.

Kapitel 3

Gruppen und Darstellungen

Die Gruppentheorie ist eine rein mathematische Disziplin ziemlich abstrakter Art. Ihre große Bedeutung für die Physik erhält sie erst, wenn man mit ihr den Begriff der Symmetrie verbindet. Die im Folgenden zu behandelnde Gruppen- und Darstellungstheorie wurde in den letzten Jahrzehnten das alltägliche Instrument der Festkörper-, Kern- und Elementarteilchenphysiker. Zum Beispiel versucht man in der modernen Theorie der Elementarteilchen mit Hilfe von Symmetriebetrachtungen möglichst viele Eigenschaften der 'elementarsten Bausteine' zu erklären ohne die den Wechselwirkungen zugrundeliegenden Dynamiken zu lösen. Die Grundlagen der Gruppentheorie wurden in erster Linie von EVARISTE GALOIS (1811-1832) im Alter von 21 Jahren niedergelegt. Er untersuchte die Lösbarkeit der Gleichungen mit einer Unbekannten n-ten Grades mit konstanten Koeffizienten durch Radikale. Mit Einführung des Gruppenbegriffes gelang ihm die Entscheidung dieses uralten Problems. Die Gruppentheorie ist heute ein wesentlicher Bestandteil der physikalischen Forschung. HERMANN WEYL, der schon früh die Relevanz dieser Theorie für die Physik erkannte, schreibt dazu[1]:

Symmetrie, ob man ihre Bedeutung weit oder eng faßt, ist eine Idee, vermöge derer der Mensch durch Jahrtausende seiner Geschichte versucht hat, Ordnung, Schönheit und Vollkommenheit zu begreifen und zu schaffen.

Wegen des großen Umfangs habe ich eine (etwas willkürliche) Auswahl getroffen. Viele Beweise müssen entweder weggelassen werden oder können nur skizziert werden. Der aufmerksame Zuhörer sollte aber am Ende dieses Kapitels in der Lage sein, einfache gruppentheoretische Probleme, wie sie etwa in der Quantenmechanik, Molekülphysik, Festkörperphysik oder Teilchenphysik auftreten, selbständig zu lösen.

Definition: Eine *Gruppe* G besteht aus einer Menge von Elementen $\{g_1, g_2, \ldots\}$ die vier grundlegende Postulate erfüllen:

[1] H. Weyl, Symmetrie, Birkhäuser, Basel (1955).

1. Durch eine Multiplikation $G \times G \to G$, $\{g_1, g_2\} \to g_1 g_2 \in G$ ist jedem Paar g_1, g_2 eindeutig ein Element $g_1 g_2$ der Gruppe zugeordnet. Im allgemeinen ist

$$g_1 g_2 \neq g_2 g_1.$$

2. Diese Multiplikation ist assoziativ: $g_1(g_2 g_3) = (g_1 g_2) g_3$.

3. Es existiert ein Einselement $e \in G$ mit der Eigenschaft $eg = ge = g$ für jedes Element g der Gruppe.

4. Für jedes Element g existiert das inverse Element $g^{-1} \in G$, so daß $gg^{-1} = g^{-1}g = e$.

Die wohl einfachste Gruppe sind die ganzen Zahlen, wenn man als Verknüpfungsgesetz die Addition wählt. Die Null ist das Einselement und das Inverse von a ist $-a$. Bezüglich der Multiplikation von Zahlen bildet diese Menge aber keine Gruppe (0 hat kein Inverses).

3.1 Beispiele von Gruppen

3.1.1 Endliche Gruppen, S_N:

Die wichtigsten endlichen Gruppen sind die symmetrischen Gruppen S_N, oft auch Permutationsgruppen genannt. Die Elemente von S_N sind die *Permutationen* von N Symbolen. Für 3 Elemente sind dies die Transformationen

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad d = ca = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad f = cb = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dabei bedeutet ca zuerst a und dann c ausführen. Zum Beispiel ist

$$ca = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \neq ac = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

und die Gruppe S_N ist NICHT ABELSCH. S_N hat $N!$ Elemente. Wir können S_3 als Transformationsgruppe auf $V = R^2$ DARSTELLEN. Die Wirkungsmenge von S_3 seien die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks. Dabei sei $T(a)$ die Drehung um 120^0 und $T(c)$ die Spiegelung an der Vertikalen.

Gruppentafel: Es ist nützlich, für endliche Gruppen eine sogenannte Gruppentafel zu erstellen,

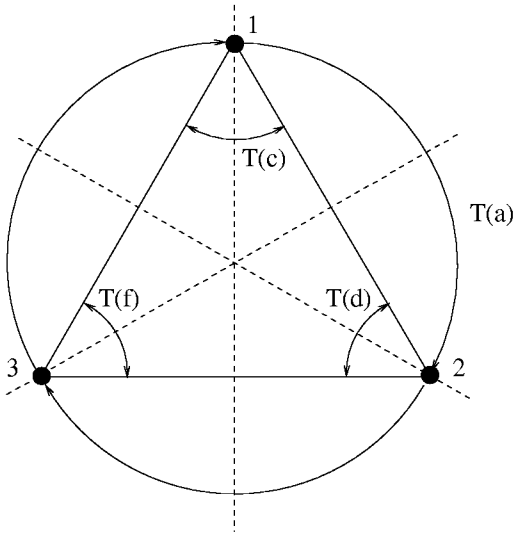


Abbildung 3.1: *Die Wirkung von $T(a), T(c), T(d)$ und $T(f)$ auf die Ecken eine gleichseitigen Dreiecks.*

	e	g_2	g_3	$\cdots$	g_n	$\cdots$
e	e	g_2	g_3	$\cdots$	g_n	$\cdots$
g_2	g_2	g_2^2	$g_2 g_3$	$\cdots$	$g_2 g_n$	$\cdots$
g_3	g_3	$g_3 g_2$	g_3^2	$\cdots$	$g_3 g_n$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
g_m	g_m	$g_m g_2$	$g_m g_3$	$\cdots$	$g_m g_n$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$

In jeder Reihe und Spalte der Gruppentafel muß jeweils jedes Element der Gruppe genau einmal auftreten. Denn aus $gg_p = gg_q$ folgt nach Multiplikation mit g^{-1} von links, daß $g_p = g_q$ sein muß. Analog kann $g_p g$ nur $g_q g$ sein falls $g_p = g_q$ ist.

Die *Ordnung* $|G|$ einer Gruppe G ist die Zahl der Elemente der Gruppe. Zum Beispiel ist $|S_3| = 3! = 6$ und die Multiplikationstabelle dieser Gruppe ist in Abb. 3.2 dargestellt. Die ausgezeichnete Rolle der Permutationsgruppen ist in dem Theorem von Cayley begründet. Danach ist jede Gruppe der Ordnung N eine Untergruppe der Permutationsgruppe S_N.

3.1.2 Liesche Gruppen, $SU(2)$

Während die endlichen oder diskreten Gruppen in der Festkörper und Molekülphysik von Interesse sind, spielen in der Quantenmechanik und Teilchenphysik vorwiegend die kontinu-

	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	b	e	f	c	d
b	b	e	a	d	f	c
c	c	d	f	e	a	b
d	d	f	c	b	e	a
f	f	c	d	a	b	e

Abbildung 3.2: *Multiplikationstabelle von* S_3

ierlichen Lie-Gruppen eine wichtig Rolle. Im Allgemeinen definiert man:

Definition: Eine Lie-Gruppe G ist eine Gruppe, die zugleich eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist, derart daß die Multiplikation

$$G \times G \longrightarrow G, \qquad (g_1, g_2) \longrightarrow g_1 g_2$$

und die Inversenbildung

$$G \longrightarrow G, \qquad g \longrightarrow g^{-1}$$

jeweils stetige und differenzierbare Abbildungen sind.

Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit kann lokal mit einer offenen Menge des $\mathbb{R}^n$ identifiziert werden (siehe die einschlägigen Lehrbücher über Differentialgeometrie). Wir werden diese Begriffe an der Gruppe $SU(2)$ illustrieren. Diese Lie-Gruppe ist die wichtigste Gruppe in der Quantenmechanik. Die quantenmechanischer Zustände mit festem Drehimpuls bilden eine irreduzible Darstellung der quantenmechanischen Drehgruppe $SU(2)$.

Die Elemente $g \in SU(2)$ lassen das Skalarprodukt $(x, y) = \bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2$ auf $\mathbb{C}^2$ invariant: $(gx, gy) = (x, y)$. Sie erfüllen $g^\dagger g = g g^\dagger = 1$ und $\det g = 1\!\!1$. Da die Zeilen von g unitär orthogonal sein müssen, ist

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\lambda\bar{b} & \lambda\bar{a} \end{pmatrix}.$$

Die Orthogonalität der Kolonnen fordert $|\lambda| = 1$. Die Determinantenbedingung lautet dann $\lambda(a\bar{a} + b\bar{b}) = 1$, woraus $\lambda = 1$ und $a\bar{a} + b\bar{b} = 1$ resultiert. Also ist

$$SU(2) = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a\bar{a} + b\bar{b} = 1 \right\}.$$

Die Zuordnung

$$\{\alpha = (\Re a, \Im a, \Re b, \Im b) | \sum \alpha_i^2 = 1\} \longrightarrow SU(2)$$

ist bijektiv. Die Liegruppe $SU(2)$ kann also mit der 3-dimensionalen Sphäre S^3 identifiziert

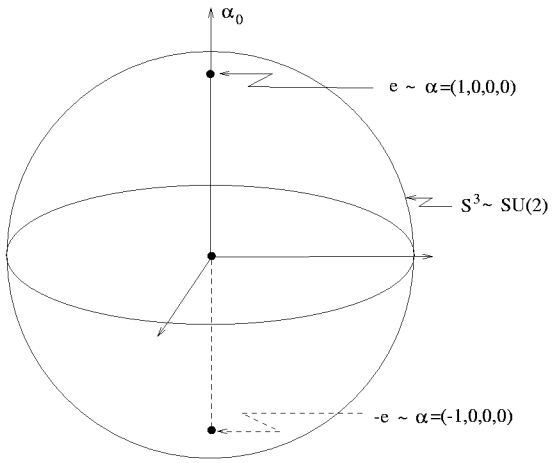


Abbildung 3.3: *Die Gruppe $SU(2)$ kann mit S^3 identifiziert werden.*

werden (siehe Abb. 3.3). Die Sphäre S^3 kann nicht mit einer offenen Umgebung in $\mathbb{R}^3$ identifiziert werden. Aber man kann mittels der stereographischen Projektionen $\phi_\pm$ vom Süd- bzw. Nordpol jeweils die nördliche und südliche Hemisphäre auf eine offene Menge des $\mathbb{R}^3$ abbilden

$$\phi_\pm : H_\pm \longrightarrow \phi_\pm(H_\pm).$$

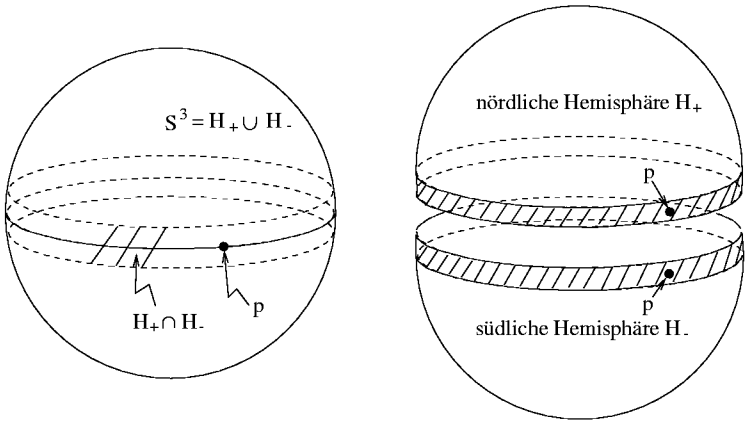


Abbildung 3.4: *Die Gruppe $SU(2)$ kann mit zwei Karten überdeckt werden.*

Auf dem Überlapp $H_+ \cap H_-$ hat man die Gruppe $SU(2)$ auf zwei Arten beschreiben (siehe

Abb. 3.4)

$$H_+ \cap H_- \ni p \longrightarrow x = \phi_+(p) \quad \text{bzw.} \quad \tilde{x} = \phi_-(p).$$

Die Koordinatentransformation

$$x = H_+(p) \longrightarrow \tilde{x} = H_-(p)$$

ist differenzierbar, wie man sich leicht überzeugt. Auch die Gruppenmultiplikation ist eine differenzierbare Abbildung, so daß $SU(2)$ in der Tat eine Liegruppe ist.

3.2 Elemente der Gruppentheorie

Wir führen nun die für uns wichtigsten Begriffe der Gruppentheorie ein und illustrieren diese anhand der endlichen Permuationsgruppen und der Lie-Gruppe $SU(2)$.

Untergruppen: Als Untergruppe von G bezeichnet man eine Untermenge H die unter der Multiplikation in G abgeschlossen ist und eine Gruppe bildet. Das Einselement $e \in G$ muß immer in H liegen.

Die zyklische Gruppe C_N als Untergruppe der Permutationsgruppen S_N: Zum Beispiel bilden die zyklischen Vertauschungen e, a, b eine Untergruppe von S_3, d.h. eine echte Teilmenge die bezüglich der Verknüpfung abgeschlossen ist. Diese Untergruppe ist gerade die zyklische Gruppe C_3 der Ordnung 3. Allgemeiner besteht die zyklische Gruppe C_N aus den Elementen

$$C_N = \{e = a^0, a, a^2, a^3, \ldots a^{N-1}\}$$

mit der Relation $a^N = e$. Die Ordnung der Gruppe ist offensichtlich N. Aus obiger Relation folgt $a^n a^{N-n} = e$ und damit hat jedes Gruppenelement ein Inverses. Wegen

$$a^n a^m = a^m a^n,$$

ist die Gruppenmultiplikation kommutativ. Damit ist C_N eine *abelsche Untergruppe* der Permutationsgruppe S_N. Wir können uns a^n als zyklische Vertauschung von N Elementen oder äquivalent dazu als Drehung um den Winkel $2n\pi/N$ realisieren. Zum Beispiel für S_3

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad a^3 = e.$$

In der Tat, es gibt nur eine Gruppe der Ordnung 3 und zwei Gruppen der Ordnung 4.

Die Gruppe $U(1)$ als Untergruppe von $SU(2)$: Die Gruppe $U(1)$ tritt als Untergruppe von $SU(2)$ auf. Die Elemente von $U(1)$ sind die diagonalen Matrizen in $SU(2)$,

$$\left\{ \begin{pmatrix} e^{i\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} | t \in [0, 2\pi) \right\} \subset SU(2).$$

Wir dürfen die beiden Diagonalelemente getrennt betrachten und erhalten die Gruppe

$$U(1) = \{g(t) = e^{it} | 0 \leq t < 2\pi\}. \tag{3.1}$$

Die Transformation $g(t)$ transformiert z in $e^{it}z$, d.h. dreht die komplexen Zahlen mit Winkel t um den Ursprung. Die Gruppe ist Abelsch und isomorph zur Addition der reellen Zahlen

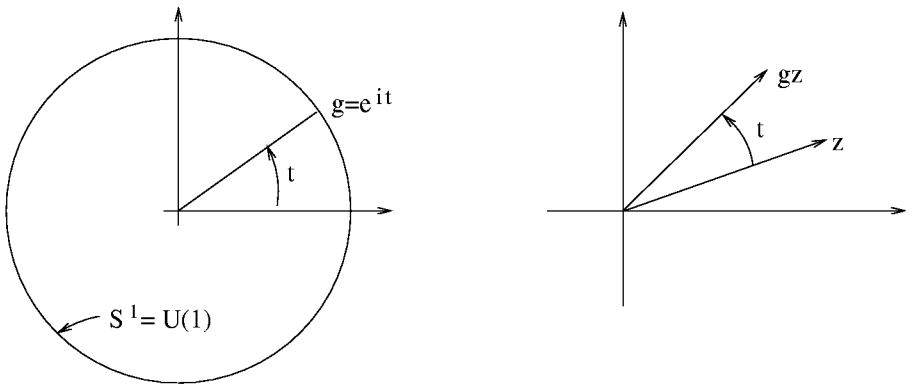


Abbildung 3.5: *Die Gruppe $U(1)$ kann mit S^1 identifiziert werden.*

modulo 2π,

$$g(t_1) \cdot g(t_2) = e^{i(t_1+t_2)} = g(t_1 + t_2) = g(t_2) \cdot g(t_1), \qquad g(t + 2\pi) = g(t),$$

d.h. $U(1)$ ist isomorph zum Kreis S^1. Die abelsche Gruppe $U(1)$ ist in gewissem Sinne der Grenzfall $U(1) \sim \lim_{N\to\infty} C_N$.

Konjugationsklassen: Um diese Klassen einzuführen benötigen wir die

Definition: Zwei Elemente $a, b \in G$ heißen zueinander konjugiert, $a \sim b$, wenn es ein $g \in G$ gibt, so daß

$$gag^{-1} = b.$$

Offensichtlich gelten

$$a \sim a, \qquad a \sim b \Longrightarrow b \sim a, \quad \text{und} \quad a \sim b,\ b \sim c \Longrightarrow a \sim c.$$

Die letzte Eigenschaft folgt aus:

$$b = gag^{-1}, \quad c = \tilde{g}b\tilde{g}^{-1} \Longrightarrow c = \tilde{g}(gag^{-1})\tilde{g}^{-1} = (\tilde{g}g)a(\tilde{g}g)^{-1}.$$

Aus diesen Eigenschaften folgt unmittelbar, daß wir jede Gruppe eindeutig in disjunkte Klassen K_i zerlegen können. Zwei Klassen haben entweder kein gemeinsames Element oder sie sind gleich. Die Konjugationsklasse eines Elementes a,

$$K_a = \{gag^{-1} | g \in G\},$$

enthält immer das Element a. Die Elemente einer Klasse sind zueinander konjugiert, $gK_ig^{-1} = K_i$. Die Anzahl Elemente von K_i sei $n(K_i)$. Demnach gilt

$$\sum_i n(K_i) = \mathrm{Ord}(G).$$

Satz: Die Anzahl Elemente $n(K_i)$ der Konjugationsklasse K_i ist ein Teiler der Anzahl der Gruppenelemente. Ist $|G|$ eine Primzahl, dann ist G abelsch.

Zum Beispiel hat S_3 die drei Klassen:

$$S_3 = \{K_e, K_a, K_c\} = \{\{e\}, \{a, b\}, \{c, d, f\}\}; \qquad 1 + 2 + 3 = 6 = |S_3|. \tag{3.2}$$

Das Einselement bildet immer eine Klasse für sich.

Beweis des Satzes: Die zweite Aussage ist einfach zu beweisen. Ist nämlich die Ordnung der Gruppe eine Primzahl, dann ist nach der ersten Aussage des Satzes die Anzahl Elemente jeder Konjugationsklasse gleich 1. Also bildet jedes Element eine Klasse für sich, d.h. es ist $gag^{-1} = a$ oder $ag = ga$ für zwei beliebige Gruppenelemente g und a. Also ist die Gruppe Abelsch.
Um die erste Aussage zu beweisen braucht es einiger Vorbemerkungen. Es sei $H \subset G$ ein beliebige Untergruppe von G. Wir bilden die *Restklassen* modulo H:

$$a \dot{\sim} b \quad \text{falls} \quad a^{-1}b \in H \Longleftrightarrow a \dot{\sim} b \quad \text{falls} \quad b \in aH.$$

Dies definiert eine Äquivalenzrelation[2]

$$a \dot{\sim} a, \qquad a \dot{\sim} b \Leftrightarrow b \dot{\sim} a, \qquad a \dot{\sim} b,\ b \dot{\sim} c \Rightarrow a \dot{\sim} c.$$

Nun zerlegen wir die die Gruppe in disjunkte Restklassen modulo H,

$$eH, aH, a'H, \ldots.$$

Zwei Restklassen haben entweder kein gemeinsames Element, oder sie sind gleich. Offensichtlich ist $aH = bH$ genau dann wenn $a \dot{\sim} b$ und weiterhin ist $|aH| = |H|$. Deshalb ist

$$\frac{|G|}{|H|} = j$$

immer eine natürliche Zahl, der sogenannte *Index* der Untergruppe H in der Gruppe G.

Nun betrachten wir spezielle Untergruppen in G. Für jedes $a \in G$ definieren wir den *Normalisator* N_a gemäß

$$N_a = \{g \in G | gag^{-1} = a\} \subset G.$$

[2]Die Äquivalent $\dot{\sim}$ sollte nicht mit der obigen vermittels der Konjugation eingeführten Äquivalenz $\sim$ verwechselt werden!

Offensichtlich ist $a \in N_a$. N_a ist eine Untergruppe wie man leicht nachrechnet und entsprechend ist $|G|/|N_a|$ eine natürliche Zahl für jedes $a \in G$. Die Normalisatoren der Gruppe S_3 sind

$$N_e = G,\ N_a = N_b = C_3,\ N_c = \{e, c\},\ N_d = \{e, d\} \quad \text{und} \quad N_f = \{e, f\}.$$

Man sieht hier explizit, daß die Ordnungen der Normalisatoren die Ordnung 6 der Gruppe teilen. Nun ist

$$g_1 a g_1^{-1} = gag^{-1} \Leftrightarrow g^{-1} g_1 \in N_a \Leftrightarrow g_1 \in gN_a.$$

Also

$$g_1 a g_1^{-1} \neq gag^{-1} \Longleftrightarrow g_1 \notin gN_a.$$

Die Anzahl Elemente in der Konjugationsklasse von a ist also die Anzahl Nebenklassen des Normalisators N_a von a oder gleich dem Index $j(N_a)$ von N_a in G. Damit wäre der erste Teil des Satzes bewiesen.

Wie sieht das für S_3 aus?. Wir haben

$$j(N_e) = 1,\ j(N_a) = j(N_b) = 2, \quad \text{und} \quad j(N_c) = j(N_d) = j(N_f) = 3.$$

Dies sind in der Tat die Anzahl Elemente der Konjugationsklassen K_i (siehe (3.2)).

Nun wollen wir noch die Frage beantworten, wann zwei Elemente in $SU(2)$ konjugiert sind. Aus der linearen Algebra wissen wir, daß jede unitäre Matrix vermittels einer unitären Matrix diagonalisiert werden kann. Deshalb ist

$$g_1 \sim \begin{pmatrix} e^{i\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{-i\lambda_1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g_2 \sim \begin{pmatrix} e^{i\lambda_2} & 0 \\ 0 & e^{-i\lambda_2} \end{pmatrix},$$

wobei die $\exp(\pm i\lambda_i)$ die Eigenwerte von g_i sind. Deshalb ist $g_1 \sim g_2$ falls sie dieselben Eigenwerte haben. In der Tat ist auch

$$(i\sigma_1)^{-1} \begin{pmatrix} e^{i\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-i\lambda} \end{pmatrix} (i\sigma_1) = \begin{pmatrix} e^{-i\lambda} & 0 \\ 0 & e^{i\lambda} \end{pmatrix}, \qquad i\sigma_1 \in SU(2),$$

und es kommt nicht auf die Reihenfolge an, wie wir die Eigenwerte auf durchnumerieren. Deshalb gilt

$$g_1 \sim g_2 \Longleftrightarrow \operatorname{Sp} g_1 = \operatorname{Sp} g_2.$$

3.3 Darstellungen von Gruppen

Eine Darstellung θ einer Gruppe ordnet jedem Element $g \in G$ eine lineare Transformation T auf einem Vektorraum V zu:

$$\begin{aligned} \theta: \quad & G \longrightarrow L(V) \\ & g \longrightarrow T(g). \end{aligned}$$

Dabei soll θ die Gruppenstruktur respektieren,

$$T(e) = \mathbb{1}, \quad T(g_1 g_2) = T(g_1)T(g_2) \Rightarrow T(g^{-1}) = T^{-1}(g).$$

Als *Dimension einer Darstellung* bezeichnet man die Dimension des Vektorraumes V. Nach Wahl einer Basis in V werden die $T(g)$ zu Matrizen. Es gibt immer die *triviale Darstellung*, wobei alle Elemente in $\mathbb{1} \in L(V)$ abgebildet werden. Der andere Extremfall sind die *treuen Darstellungen* für die $T(g_1) = T(g_2)$ nur für $g_1 = g_2$ möglich ist. $T(g)$ ist treu, wenn nur e in $\mathbb{1}$ abgebildet wird.

Wir stellen die Drehungen und Spiegelungen des Dreiecks (3.1) durch Matrizen dar. Die Kolonnen der Matrizen sind die Bilder der Basisvektoren:

$$\begin{aligned} T(a) &= \begin{pmatrix} \cos 120^0 & -\sin 120^0 \\ \sin 120^0 & \cos 120^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \\ T(c) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Dies ist eine treue Darstellung von S_3 und wir bezeichnen sie mit θ_2. Daneben gibt es auch noch die Einsdarstellung θ_1^1 :

$$T(e) = T(a) = T(c) = 1 \Longrightarrow T(b) = T(d) = T(f) = 1$$

und die alternierende Darstellung θ_2^1 :

$$T(e) = T(a) = 1, T(c) = -1 \Longrightarrow T(b) = 1, T(d) = T(f) = -1.$$

Die alternierende Darstellung ist gerade die Determinante der Darstellungsmatrizen in (3.3). Den geraden Permutationen (Drehungen) ordnet sie eine 1 und den ungeraden Permutationen (Spiegelungen) eine -1 zu.

Allgemein gilt: ist $T(g)$ eine Darstellung, dann ist $\det T(g)$ eine 1-dimensionale Darstellung:

$$\det T(g_1 g_2) = \det T(g_1)T(g_2) = \det T(g_1) \det T(g_2), \qquad \det T(e) = \det \mathbb{1} = 1.$$

3.3.1 Äquivalenz von Darstellungen

Wir wählen ein anderes Koordinatensystem zur Darstellung von S_3 als Gruppe der Drehungen und Spiegelungen. Es sei $\vec{x} = x^i \vec{e}_i = y^i \vec{f}_i$. Die Basen $\{\vec{e}_i\}$ und $\{\vec{f}_i\}$ sind durch eine lineare Transformation verbunden

$$\vec{e}_i = S^j{}_i \vec{f}_j.$$

Es folgt, daß die Komponenten folgendermassen zusammenhängen:

$$y^i = S^i{}_j x^j, \qquad x^i = (S^{-1})^i{}_j y^j.$$

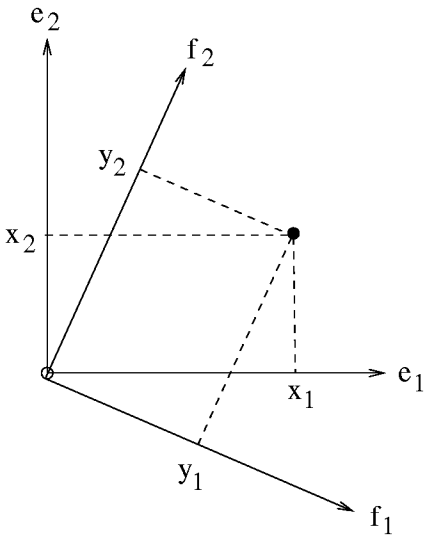


Abbildung 3.6: *Äquivalenz zweier Darstellungen*

Bezüglich der Basis $\vec{e}_i$ haben die $T(g)$ die Komponenten $T(g)^i{}_j$, d.h.

$$\vec{x} \longrightarrow T(g)\vec{x}, \qquad \big(T(g)\vec{x}\big)^i = T(g)^i{}_j x^j.$$

Dann gilt

$$\vec{y} = S\vec{x} \longrightarrow ST(g)S^{-1}\vec{y} \equiv \tilde{T}(g)\vec{y}.$$

Wie erwartet, gehen die Darstellungsmatrizen $\tilde{T}(g)$ bezüglich der Basis $\vec{f}_i$ durch eine Ähnlichkeitstransformation aus denen bezüglich der Basis $\vec{e}_i$ hervor,

$$\tilde{T}(g) = ST(g)S^{-1}.$$

Weiterhin, da

$$\begin{aligned} \tilde{T}(g_1)\tilde{T}(g_2) &= ST(g_1)S^{-1}ST(g_2)S^{-1} = ST(g_1)T(g_2)S^{-1} \\ &= ST(g_1g_2)S^{-1} = \tilde{T}(g_1g_2) \end{aligned}$$

ist, ist $g \to \tilde{T}(g)$ genauso eine Darstellung der Gruppe wie $g \to T(g)$. Diese beiden Darstellungen heißen *äquivalent*. Zwei äquivalente Darstellungen sind wirklich dieselben Darstellungen und sollten identifiziert werden. Ist umgekehrt eine Darstellung gegeben, dann können wir immer unendliche viele äquivalente Darstellungen der Form $ST(g)S^{-1}$ angeben. Bei der Klassifizierung von Darstellungen kann es sich also nur um diejenige von inäquivalenten Darstellungen handeln, also Darstellungen die nicht über eine Ähnlichkeitstransformation auseinander hervorgehen.

Wir geben jetzt noch eine dritte Darstellung von S_3 an. Es sei $\vec{e}_i$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$. Auf diese Elemente wirke die Permutationsgruppe. Unter a wird $\vec{e}_1$ in $\vec{e}_2$, $\vec{e}_2$ in $\vec{e}_3$ und

$\vec{e}_3$ in $\vec{e}_1$ abgebildet. Dies ist eine Drehung um die Achse $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ mit 120^0 und damit eine lineare Transformation in $\mathbb{R}^3$. $T(c)$ vertauscht $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ und ist eine Spiegelung an der Ebene aufgespannt durch $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2 + \vec{e}_3$. Man erhält

$$T(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die restlichen $\{T(g)\}$ können aus der Multiplikationstabelle, die ja wegen der Darstellungs-

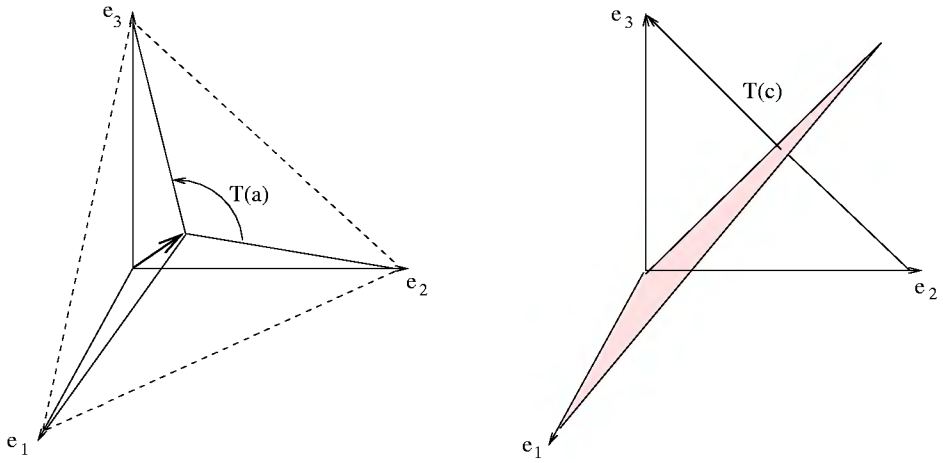


Abbildung 3.7: *Dreidimensionale Darstellung von S_3*

eigenschaft dieselbe wie diejenige der $\{g\}$ ist, abgelesen werden. Die $T(g)$ sind orthogonal und unimodular. Damit haben wir folgende Darstellungen: die Einsdarstellung θ_1^1, alternierende Darstellung θ_2^1, zweidimensionale Darstellung θ_2 und dreidimensionale natürliche Darstellung θ_3.

Reduzible Darstellungen

Unter der Drehung $T(a)$ und der Spiegelung $T(c)$ und damit unter allen $T(g)$ ist der eindimensionale Unterraum, aufgespannt durch $\vec{f} = (\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)/\sqrt{3}$ invariant. Wir ergänzen $\vec{f}_1$ folgendermassen zu einer orthonormierten Basis

$$\vec{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3), \quad \vec{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_2 - \vec{e}_3), \quad \vec{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3).$$

Also ist $\vec{f}_i = (S^{-1})^j{}_i \vec{e}_j$ mit

$$S^{-1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow S = (S^{-1})^t.$$

Bezüglich der neuen Basis haben die Darstellungsmatrizen $\tilde{T}(g) = ST(g)T^{-1}$ die Form

$$\tilde{T}(a) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{T}(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir sehen, daß die $T(g)$ den eindimensionalen Unterraum aufgespannt durch $\vec{f}_1$ invariant lassen, aber auch den 2-dimensionalen Unterraum aufgespannt durch $\{\vec{f}_2, \vec{f}_3\}$. Auf dem ersten Unterraum ist θ_3 die Einsdarstellung und auf dem zweiten Unterraum die Darstellung θ_2. Die natürliche Darstellung ist also reduzibel. Eine Darstellung heißt *irreduzibel*, falls V keinen echten Teilraum hat, der unter θ invariant ist. θ_2 ist offensichtlich irreduzibel.

Formalisiert: Der Darstellungsraum V_3 von θ_3 zerfällt in zwei orthogonale Teilräume V_1 und V_2 der Dimensionen 1 und 2, $V = V_1 \oplus V_2$. Weitherhin, $\theta_3 : V_1 \to V_1$ und $\theta_3 : V_2 \to V_2$. Auf V_1 ist θ_3 gleich θ_1^1 und auf V_2 gleich θ_2. Man schreibt

$$\theta_3 = \theta_1^1 + \theta_2, \qquad \dim\theta_3 = \dim\theta_1^1 + \dim\theta_2.$$

3.3.2 Reduzibilität von Darstellungen beliebiger Gruppen

θ sei eine Darstellung einer beliebigen Gruppe G (endlich oder unendlich) mit n-dimensionalem Darstellungsraum V. Sei V_1 ein m-dimensionaler echter invarianter Teilraum von V, d.h. jede lineare Transformation $T(g)$ bildet jeden Vektor aus V_1 wieder auf einen Vektor in V_1 ab. Wird das Koordinatensystem so gewählt, daß die ersten m Basisvektoren V_1 aufspannen, so hat die Darstellung in dieser Basis die Gestalt

$$g \longrightarrow T(g) = \begin{pmatrix} T_1(g) & H(g) \\ 0 & T_2(g) \end{pmatrix},$$

wobei T_1 eine $m \times m$ und T_2 eine $(n-m)\times(n-m)$ Matrix ist. Eine Darstellung heißt *reduzibel*, falls ein echter invarianter Teilraum von V existiert. Eine nicht reduzible Darstellung heißt *irreduzibel*.

Ist speziell $H(g) = 0$ für alle $g \in G$, so zerfällt die Darstellung θ in die Darstellungen $\theta_1 : g \to T_1(g)$ und $\theta_2 : g \to T_2(g)$ und

$$g \longrightarrow \begin{pmatrix} T_1(g) & 0 \\ 0 & T_2(g) \end{pmatrix}.$$

Man schreibt $\theta = \theta_1 + \theta_2$. Dieses Verfahren läßt sich möglicherweise fortsetzen, so daß die darstellenden Matrizen in einem geeigneten Koordinatensystem weiter zerfallen:

$$g \longrightarrow \begin{pmatrix} T_1(g) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T_2(g) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & T_k(g) \end{pmatrix}.$$

Die Zerlegung bricht ab, wenn in keinem der invarianten Teilräume $V_1, \ldots, V_k$ eine weiterer echter invarianter Teilraum existiert.

Definition: Eine Darstellung, die irreduzibel ist oder in lauter irreduzible Darstellungen zerfällt, heißt *vollreduzibel.*

Es existieren unendliche Gruppen, die nicht vollreduzibel sind, d.h. es existieren Darstellungen für welche $H(g)$ nicht verschwindet. Aber wir haben den folgenden

Satz: Jede unitäre Darstellung ist vollreduzibel.

Beweis: Ist θ irreduzibel, so ist nichts zu beweisen. Sei also V_1 eine echter invarianter Teilraum von V und $W = V_1^{\perp}$ das unitär-orthogonale Komplement von V_1,

$$W = \{w \in V | (w, V_1) = 0\}.$$

V_1 und W spannen V auf. Jeder Vektor von $v \in V$ läßt sich auf eindeutige Weise durch einen Vektor aus $v_1 \in V_1$ und einen Vektor aus $w \in W$ zusammensetzen, $v = v_1 + w$. Nun ist

$$(T(g)w, v_1) = (w, T^{\dagger}(g)v_1) = (w, T(g^{-1})v_1) = 0$$

für alle $g \in G$, da $T(g^{-1})v_1$ nach Voraussetzung in V_1 liegt. Damit liegt mit w auch $T(g)w$ im Unterraum W. Ist also V_1 ein invarianter Teilraum einer unitären Darstellung, so ist dies auch dessen Komplement W. Diese Verfahren kann nun fortgesetzt werden, falls ein echter invarianter Teilraum von W existiert. Schließlich erhält man einen Zerfall der Darstellung in lauter irreduzible Bestandteile.

3.4 Mittelbildung und Haarsches Maß

Für jede endliche Gruppe G existiert eine Mittelwertbildung. Es sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion auf G. Wir definieren den Mittelwert $\mathcal{M}(f)$ von f durch

$$\mathcal{M}(f) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g),$$

wobei $|G|$ die Gruppenordnung ist. Die folgenden Eigenschaften der Mittelwertsbildung evident:

1. linear: $\mathcal{M}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{M}(f_1) + \beta \mathcal{M}(f_2)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
2. positiv: Falls $f(g) \geq 0$ reell $\Rightarrow \mathcal{M}(f) \geq 0$ und nur $= 0$, falls $f \equiv 0$.
3. normiert: falls $f(g) = 1$ dann ist $\mathcal{M}(f) = 1$.

4. invariant gegenüber Translationen der Gruppe, d.h. ist $\tilde{f}(g) = f(\tilde{g}g)$, dann ist

$$\mathcal{M}(\tilde{f}) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(\tilde{g}g) = \frac{1}{|G|}\sum_{\tilde{g}g\in G} f(\tilde{g}g) = \mathcal{M}(f).$$

Diese Mittelwertsbildung kann auch für kompakte Lie-Gruppen definiert werden. Die vier Eigenschaften gelten dann auch für die Mittelwertsbildung auf kompakten Lie-Gruppen.

3.4.1 Mittelbildung für kompakte Lie-Gruppen

Jede kompakte Liegruppe hat eine invariante Mittelbildung. Dies folgt aus dem folgenden

Satz: Zu jeder kompakten Lie-Gruppe gibt es ein bis auf eine multiplikative positive Konstante eindeutiges positives Haarintegral $\mathcal{M} : C_0(G) \to \mathbb{C}$ welches links-und rechtsinvariant ist.

Links- und rechtsinvariant bedeutet, daß

$$\mathcal{M}(f) \equiv \int_G d\mu(g) f(g) = \mathcal{M}(f \circ l_{\tilde{g}}) = \mathcal{M}(f \circ r_{\tilde{g}}),$$

wobei $l_{\tilde{g}}(g) = \tilde{g}g$ und $r_{\tilde{g}}(g) = g\tilde{g}$ ($\tilde{g}$ fest) die *Links- bzw. Rechtstranslationen* sind. Das Haarsche Maß $d\mu(g)$ existiert auch für allgemeinere lokalkompakte Gruppen. Dann ist es aber im Allgemeinen entweder nur links- oder nur rechtsinvariant. Die Integration einer komplexwertigen Funktion mit dem Haarmaß ist offensichtlich eine Mittelbildung.
Die einfachste kompakte Gruppe $U(1)$ hat die Mittelbildung

$$\mathcal{M}(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi} dt f\big(g(t)\big) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt\, f(t), \qquad g(t) = e^{it} = g(t+2\pi).$$

$\mathcal{M}$ erfüllt alle Eigenschaften einer Mittelbildung (ist linear, positiv, normiert und translationsinvariant). Weiter ist wegen

$$\mathcal{M}(f \circ l_{\tilde{g}}) = \frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi} dt f\big(g(\tilde{t})g(t)\big) = \frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi} dt f(g(\tilde{t}+t)) = \mathcal{M}(f)$$

die Mittelbildung translationsinvariant.

Wie sieht nun das invariante Haarmaß für $SU(2)$ aus. Dazu überlegen wir, was die Gruppenoperation $g \to l_{\tilde{g}}(g)$ auf der Gruppenmannifaltigkeit S^3 geometrisch bedeutet. Dazu parametrisieren wir die Gruppenelemente gemäß

$$g = \begin{pmatrix} \alpha_0 + i\alpha_1 & \alpha_2 + i\alpha_3 \\ -\alpha_2 + i\alpha_3 & \alpha_0 - i\alpha_1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{g} = \begin{pmatrix} \beta_0 + i\beta_1 & \beta_2 + i\beta_3 \\ -\beta_2 + i\beta_3 & \beta_0 - i\beta_1 \end{pmatrix}$$

mit $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$. Dann ist $g \to l_{\tilde{g}}(g)$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \vec{\alpha} \longrightarrow O(\beta)\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \beta_0 & -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 \\ \beta_1 & \beta_0 & -\beta_3 & \beta_2 \\ \beta_2 & \beta_3 & \beta_0 & -\beta_1 \\ \beta_3 & -\beta_2 & \beta_1 & \beta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\sum \beta_j^2 = 1$ ist $O(\beta)$ orthogonal, $O^t O = 1$, und damit ist $O(\beta)\vec{\alpha}$ eine Drehung von $\vec{\alpha}$. Nun ist die (induzierte) Volumenform auf S^3 drehinvariant und damit invariant unter Linkstranslationen (und Rechtstranslationen). Normieren wir die Volumenform auf 1, dann erhalten wir das eindeutige Haarmaß auf $SU(2) \sim S^3$. Wir parametrisieren die Punkte auf $SU(2) \sim S^3$ gemäß

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta\cos\psi \\ \sin\theta\sin\psi\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\psi\cos\varphi \end{pmatrix}$$

beziehungsweise

$$g(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\theta + i\sin\theta\cos\psi & \sin\theta\sin\psi e^{i\varphi} \\ -\sin\theta\sin\psi e^{-i\varphi} & \cos\theta - i\sin\theta\cos\psi \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

wobei

$$0 < \theta < \pi, \quad 0 < \psi < \pi \quad \text{und} \quad 0 < \varphi < 2\pi$$

ist. In diesen Koordinaten ist das Volumenelement gegeben durch

$$d\mu = \frac{1}{2\pi^2} \sin^2\theta \cdot \sin\psi d\theta d\psi d\varphi.$$

Für die unitären Matrizen (3.4) ist $\mathrm{Sp}\, g = 2\cos\theta$. Wegen $\det g = 1$ sind deshalb die Eigenwerte dieser Matrizen $e^{i\theta}$ und $e^{-i\theta}$.

Es sei nun

$$f(g) = f(\theta, \psi, \varphi)$$

eine Klassenfunktion, d.h. $f(aga^{-1}) = f(g)$ für alle $a \in SU(2)$. Solch eine Funktion ist konstant auf einer Konjugationsklasse. Nun kann aber jedes $g \in SU(2)$ mit einem $a \in SU(2)$ diagonalisiert werden, d.h. es gibt ein a, so daß

$$aga^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}, \qquad \theta \in (0, \pi).$$

Deshalb hängen Klassenfunktionen nur von θ und nicht von ψ, φ ab, sind 2π-periodisch und wegen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$$

gerade in θ:

$$f \quad \text{Klassenfunktion} \quad \Longleftrightarrow f\big(g(\theta,\psi,\phi)\big) = f(\theta) = f(-\theta) = f(\theta + 2\pi).$$

Für eine Klassenfunktion ist

$$\mathcal{M}(f(g)) = \frac{1}{2\pi^2}\int \sin^2\theta \cdot \sin\psi \cdot f(\theta)\, d\theta d\psi d\varphi = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\theta)\sin^2\theta\, d\theta.$$

3.4.2 Unitäre Darstellungen

In der Darstellungstheorie spielen die Darstellungen durch orthogonale oder unitäre Matrizen eine wichtige Rolle. Eine komplexe $n \times n$ Matrix U heißt unitär, falls $U^\dagger U = UU^\dagger = 1$ ist. Sei $\mathbb{C}^n$ der komplexe Vektorraum mit Skalarprodukt

$$(x,y) = \sum_1^n \bar{x}_i y_i.$$

Die unitären Matrizen sind diejenigen Matrizen, die das Skalarprodukt invariant lassen,

$$(Ux,Uy) = (U^\dagger Ux, y) = (x, U^\dagger Uy) = (x,y).$$

Ausgeschrieben in Komponenten:

$$\sum_k \bar{U}_{ki}U_{kj} = \sum_k U_{ik}\bar{U}_{jk} = \delta_{ij}.$$

Die Zeilen und Spalten von unitären Matrizen sind zueinander unitär orthogonal. Lassen U_1 und U_2 das Skalarprodukt invariant, dann auch U_1U_2 und U_2U_1. Die Einheitsmatrix ist offensichtlich auch unitär. Schlußendlich ist auch $U^\dagger = U^{-1}$ unitär. Also bilden die unitären Matrizen ein Gruppe

$$U(n) = \{U \in L(\mathbb{C}^n) | U^\dagger U = UU^\dagger = \mathbb{1}\}.$$

Eine *orthogonale Matrix* R ist reell und unitär und erfüllt daher $R^tR = RR^t = \mathbb{1}$. Die orthogonalen Matrizen bilden folgende Untergruppe von $U(n)$:

$$O(n) = \{R \in L(\mathbb{R}^n) | R^tR = RR^t = 1\}.$$

Die obigen Darstellungen θ von S_3 sind alle orthogonal, d.h. alle Darstellungsmatrizen $T(g)$ sind orthogonal. Wegen

$$1 = \det(UU^\dagger) = \det U \det U^\dagger = \det U \overline{\det U}$$

ist die Determinante einer unitären Matrix eine Phase. Diejenigen unitären Matrizen mit $\det U = 1$ bilden eine Untergruppe von $U(n)$, die *spezielle unitäre Gruppe*,

$$SU(n) = \{U \in U(n) | \det U = 1\}.$$

Die Determinante einer orthogonalen Matrix ist eine reelle Phase, also ± 1. Die Untergruppe der Matrizen mit $\det R = 1$ heißt *spezielle orthogonale Gruppe*,

$$SO(n) = \{R \in O(n) | \det R = 1.\}.$$

Nun haben wir den wichtigen

Satz: Jede Darstellung einer Gruppe mit Mittelbildung ist zu einer unitären Darstellung äquivalent.

In anderen Worten: Wir können in V immer eine Basis finden, bezüglich der die Matrizen $T(g)$ unitär sind.

Beweis: Die dem Beweise zugrundeliegende Idee der Summation über die Gruppe geht auf Hurwitz zurück. Wir bilden die quadratische Form

$$h(x) = \mathcal{M}\Big\{\big(T(g)x, T(g)x\big)\Big\} = \big(x, \mathcal{M}\{T^\dagger(g)T(g)\}x\big) = (x, Qx).$$

Als Summe von positiven und hermiteschen Formen ist diese Form ist positiv und hermitesch,

$$h(x \neq 0) > 0 \quad \text{und} \quad Q = Q^\dagger,$$

und invariant

$$h(T(\tilde{g})x) = \mathcal{M}\Big\{\big(T(g)T(\tilde{g})x, T(g)T(\tilde{g})x\big)\Big\} = \mathcal{M}\Big\{\big(T(g\tilde{g})x, T(g\tilde{g})x\big)\Big\} = h(x)$$

wegen der Translationsinvarianz der Mittelbildung. Nun benutzen wir noch, daß für jede positive hermitesche Form $h(x)$ ein Koordinatensystem existiert, so daß h in die Einheitsform übergeht,

$$h(y) = \sum \bar{y}_i y_i.$$

In diesem neuen Koordinatensystem geht unsere Darstellung über in eine äquivalente, welche die hermitesche Einheitsform für alle darstellenden Matrizen invariant läßt; also sind diese unitär.

3.5 Klassenfunktionen und Charaktere

Jede Darstellung einer Gruppe mit Mittelbildung ist vollreduzibel. Für endliche Gruppen oder kompakte Lie-Gruppen gibt es eine Mittelbildung und damit ist jede Darstellung vollreduzibel. Wir wollen im Folgenden immer annehmen, daß G eine Gruppe mit Mittelbildung sei.

Sei nun $f(g)$ eine *Klassenfunktion*, d.h eine Funktion die für alle Elemente der gleichen Konjugationsklasse

$$g \sim \tilde{g} \Longleftrightarrow \tilde{g} = aga^{-1}, \quad a, g, \tilde{g} \in G$$

denselben Wert annimmt,

$$f(g) = f(aga^{-1}).$$

Zu jeder endlich-dimensionalen Darstellung $\theta : G \to L(V)$ gehört die komplexwertigen Klassenfunktion

$$\chi_\theta(g) = \mathrm{Sp}\, T(g).$$

Sie heißt *Charakter* der Darstellung θ. Wegen

$$\chi_\theta(aga^{-1}) = \mathrm{Sp}\, T(aga^{-1}) = \mathrm{Sp}\, T(a)T(g)T^{-1}(a) = \mathrm{Sp}\, T(g) = \chi_\theta(g),$$

wobei wir $\mathrm{Sp}\, T_1T_2 = \mathrm{Sp}\, T_2T_1$ benutzten, sind die χ_θ Klassenfunktionen. Die Charakteren haben die folgenden Eigenschaften:

- Äquivalente Darstellung haben denselben Charakter. Dies folgt unmittelbar aus $\mathrm{Sp}\, \tilde{T}(g) = \mathrm{Sp}\, ST(g)S^{-1} = \mathrm{Sp}\, T(g)$.
- Die Dimension der Darstellung (oft auch Grad der Darstellung genannt ist $\chi_\theta(e)$. Dies ist offensichtlich, da $T(e) = \mathbb{1}$ ist.
- Zerfällt eine Darstellung, $\theta = \theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_k$, so gilt dies entsprechend auch für ihren Charakter: $\chi_\theta(g) = \chi_{\theta_1}(g) + \ldots + \chi_{\theta_n}(g)$ für alle $g \in G$.

Die letzte Eigenschaft folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß es eine Basis gibt in der die $T(g)$ blockdiagonal sind,

$$ST(g)S^{-1} = \begin{pmatrix} T_1(g) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & T_2(g) & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & T_k(g) \end{pmatrix},$$

und aus $\mathrm{Sp}\, ST(g)S^{-1} = \mathrm{Sp}\, T(g)$.

- Für jede Darstellung θ mit Mittelbildung gilt: $\chi_\theta(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$.

Beweis: Wir dürfen annehmen, daß die $T(g)$ unitär sind:

$$\begin{aligned} \chi_\theta(g^{-1}) &= \mathrm{Sp}\, T(g^{-1}) = \mathrm{Sp}\, T^{-1}(g) = \mathrm{Sp}\, T^\dagger(g) = \mathrm{Sp}\, \bar{T}^t(g) \\ &= \mathrm{Sp}\, \bar{T}(g) = \overline{\mathrm{Sp}\, T(g)} = \overline{\chi}_\theta(g). \end{aligned}$$

Aus dieser Eigenschaft folgt unmittelbar, das für jede Gruppe G mit Mittelbildung und der Eigenschaft, daß jedes Element zu seinem Inversen ähnlich ist (d.h. für jedes $g \in G$ es gibt ein $a \in G$, so daß $g^{-1} = aga^{-1}$) die Charakteren reellwertige Klassenfunktionen sind.

Tensorprodukt von Darstellungen Es seien θ und $\tilde{\theta}$ zwei Darstellungen einer Gruppe G der Dimensionen n und $\tilde{n}$ ($\dim V = n$ und $\dim \tilde{V} = \tilde{n}$). Wir wählen Koordinaten in diesen Räumen. Dann transformiert ein Vektor $\vec{x}$ in V und ein Vektor $\vec{y}$ in $\tilde{V}$ gemäß

$$\vec{x} \longrightarrow T(g)\vec{x} \quad \text{und} \quad \vec{y} \longrightarrow \tilde{T}(g)\vec{y}.$$

Nun bilden wir den zweistufigen Tensor t mit Komponenten $t_{ip} = x_i y_p$. Diese Komponenten transformieren folgendermassen:

$$t_{ip} = x_i y_p \longrightarrow \sum_{j=1}^{n}\sum_{q=1}^{\tilde{n}} \Big(T(g)_{ij}\tilde{T}(g)_{pq}\Big) x_j y_q = \sum T(g)_{ij}\tilde{T}(g)_{pq}\; t_{jq}.$$

Dies ist eine lineare Transformation der $n \cdot \tilde{n}$ Tensorkomponenten t_{ip} von t. Diese Tensoren bilden eine $n \cdot \tilde{n}$-dimensionalen Vektorraum $V \times \tilde{V}$ und die Matrizen $T(g)_{ij}\tilde{T}(g)_{pq}$ sind die Komponenten der Tensordarstellung

$$\theta \times \tilde{\theta} : V \times \tilde{V} \longrightarrow V \times \tilde{V}.$$

Für explizite Rechnungen ist es nützlich eine Konvention über die Numerierung der Komponenten t zu treffen. Wegen

$$\begin{pmatrix} x_1'\vec{y}' \\ x_2'\vec{y}' \\ \vdots \\ x_n'\vec{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11}\tilde{T} & T_{12}\tilde{T} & \dots & T_{1n}\tilde{T} \\ T_{21}\tilde{T} & T_{22}\tilde{T} & \dots & T_{2n}\tilde{T} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_{n1}\tilde{T} & T_{n2}\tilde{T} & \dots & T_{nn}\tilde{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1\vec{y} \\ x_2\vec{y} \\ \vdots \\ x_n\vec{y} \end{pmatrix},$$

gehen die Darstellungsmatrizen $T(g) \otimes \tilde{T}(g)$ der Darstellung $\theta \times \tilde{\theta}$ auf einfache Weise aus denen der Darstellungen θ und $\tilde{\theta}$ hervor: Man multipliziere jedes Matrixelement von $T(g)$ mit der Matrix $\tilde{T}(g)$. Aus der obigen Form von $T \otimes \tilde{T}$ folgt unmittelbar, daß

$$\chi_{\theta\times\tilde{\theta}} = \mathrm{Sp}\left(T \otimes \tilde{T}\right) = \sum T_{ii}\,\mathrm{Sp}\,\tilde{T} = \mathrm{Sp}\,T \mathrm{Sp}\,\tilde{T} = \chi_\theta \cdot \chi_{\tilde{\theta}}. \tag{3.5}$$

Wir üben dies am Beispiel des Tensorproduktes der Darstellung θ_2 von S_3 mit sich selber:

$$T(a) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}, \qquad T(c) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also haben Darstellungsmatrizen der 4-dimensionalen Darstellung $\theta_2 \times \theta_2$ folgende Form:

$$\begin{aligned} (T \otimes T)(a) &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{3} & 3 \\ -\sqrt{3} & 1 & -3 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -3 & 1 & \sqrt{3} \\ 3 & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \\ (T \otimes T)(c) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir sehen, daß in der Tat $\chi_{\theta_2\times\theta_2}(a) = 1 = \chi_{\theta_2}(a)\chi_{\theta_2}(a)$ und $\chi_{\theta_2\times\theta_2}(c) = 0 = \chi_{\theta_2}(c)\chi_{\theta_2}(c)$ ist. Wir haben damit für S_3 die folgenden Charakterentabelle:

	$\chi_{\theta_1^1}$	$\chi_{\theta_1^2}$	χ_{θ_2}	χ_{θ_3}	$\chi_{\theta_2\times\theta_2}$
K_e	1	1	2	3	4
K_a	1	1	−1	0	1
K_c	1	−1	0	1	0

Da $\theta_3 = \theta_2 + \theta_1^1$ ist auch $\chi_{\theta_3} = \chi_{\theta_2} + \chi_{\theta_1^1}$. Falls nun $\theta_2 \times \theta_2$ reduzibel (und damit vollreduzibel) ist, muß es eine Summe der niedrig-dimensionalen Darstellungen θ_1^1, θ_1^2 und θ_2 sein. Die Summe der Dimensionen der dabei auftretenden Darstellungen in der Zerlegung von $\theta_2 \times \theta_2$ muß gleich 4 sein. Aus der Charaktertabelle sehen wir, daß nur

$$\theta_2 \times \theta_2 = \theta_2 + \theta_1^1 + \theta_1^2$$

in Frage kommt. Dies ist auch die richtige Antwort. Um dies einzusehen müssen wir noch etwas mehr über den Zusammenhang zwischen Charakteren und Darstellungen wissen.

Diedergruppen

Die Diedergruppe D_n besteht aus den möglichen Deckbewegungen eines regulären n-Ecks. Betrachten wir D_6 etwas genauer: Die Drehungen a, a^2, a^3, a^4, a^5 und $a^6 = e$ bilden eine

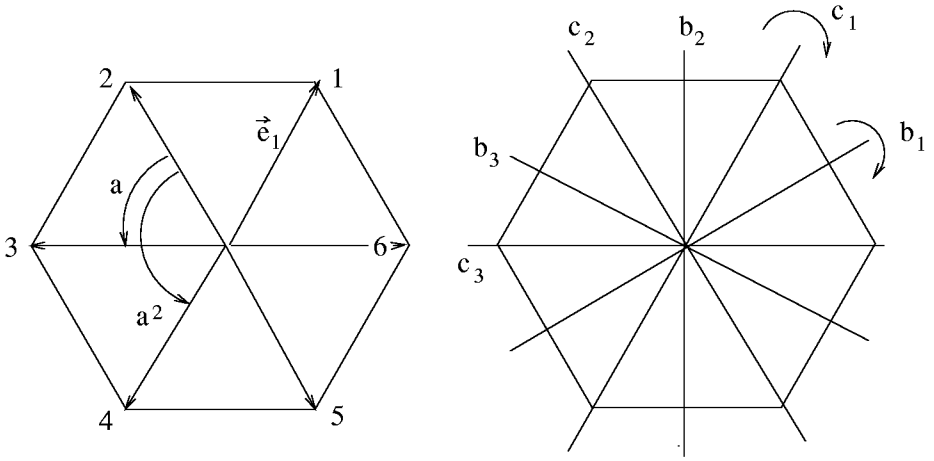


Abbildung 3.8: *Die Erzeugenden der Diedergruppe D_6.*

Untergruppe von D_6. Diese Untergruppe ist gerade die abelsche zyklische Gruppe C_6 der Ordnung 6. Dann gibt es noch die Spiegelungen b_i vom Typus b und die Spiegelungen c_i vom Typus c (siehe Abb.3.8). Die Gruppe besteht also aus 12 Elementen. Wir ordnen die Elemente gemäß

$$\{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3\}.$$

Wie man aus der Abbildung leicht entnimmt, gelten zum Beispiel

$$ab_1 = c_1, \quad ac_1 = b_2, \quad ab_2 = c_2, \quad ac_2 = b_3, \quad ab_3 = c_3, \quad ac_3 = b_1$$
$$b_1a = c_3, \quad c_1a = b_1, \quad b_2a = c_1, \quad c_2a = b_2, \quad b_3a = c_2, \quad c_3a = b_3.$$

Die Multiplikationstabelle ist

	e	a	a^2	a^3	a^4	a^5	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3
e	e	a	a^2	a^3	a^4	a^5	b_1	b_2	b_2	c_1	c_2	c_3
a	a	a^2	a^3	a^4	a^5	e	c_1	c_2	c_3	b_2	b_3	b_1
a^2	a^2	a^3	a^4	a^5	e	a	b_2	b_3	b_1	c_2	c_3	c_1
a^3	a^3	a^4	a^5	e	a	a^2	c_2	c_3	c_1	b_3	b_1	b_2
a^4	a^4	a^5	e	a	a^2	a^3	b_3	b_1	b_2	c_3	c_1	c_2
a^5	a^5	e	a	a^2	a^3	a^4	c_3	c_1	c_2	b_1	b_2	b_3
b_1	b_1	c_3	b_3	c_2	b_2	c_1	e	a^4	a^2	a^5	a^3	a
b_2	b_2	c_1	b_1	c_3	b_3	c_2	a^2	e	a^4	a	a^5	a^3
b_3	b_3	c_2	b_2	c_1	b_1	c_3	a^4	a^2	e	a^3	a	a^5
c_1	c_1	b_1	c_2	b_3	c_2	b_2	a	a^5	a^3	e	a^4	a^2
c_2	c_2	b_2	c_3	b_1	c_3	b_3	a^3	a	a^5	a^2	e	a^4
c_3	c_3	b_3	c_1	b_2	c_1	b_1	a^5	a^3	a	a^4	a^2	e

Wir sehen, daß die Gruppenelement a und b_1 die Diedergruppe erzeugen. Deshalb genügt es, die Darstellungen der erzeugenden Elemente zu notieren.

Sind die Ecken des 6-Ecks die $C-H$'s des Benzols, so hat Hückel als Modell-Hamiltonoperator

$$H \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

vorgeschlagen: Die Energie ist gleich der Summe der Nachbarwerte. Bis auf ein Vielfaches der Identität ist H die diskretisierte zweite Ableitung. Offensichtlich vertauscht H mit allen Symmetrietransformationen des 6-Ecks, d.h. mit den Darstellungen der Diedergruppe D_6. Nun wollen wir zuerst einige spezielle Darstellungen untersuchen. Später werden wir alle Darstellungen von D_6 konstruieren.

Natürlich gibt es die Einsdarstellung θ_1^1 und die alternierende Darstellung θ_1^2 die $a \to 1$ und $b_1 \to -1$ zuordnet. Um eine 6-dimensionale Darstellung zu konstruieren, belegen wir die Eckpunkte des 6-Ecks mit $1, \ldots, 6$ und Vektoren $\vec{e}_1, \ldots \vec{e}_6$. Dann dreht $T(a)$ den Vektor $\vec{e}_i$ in den Vektor $\vec{e}_{i+1}$, wobei $\vec{e}_7 \equiv \vec{e}_1$ ist. Also ist

$$T(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Spiegelung $T(b_1)$ vertauscht $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_6$ etc, so daß

$$T(b_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T(c_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist Spur jeder dieser Permutationsmatrizen gleich der Anzahl *Fixelemente.*

Ausreduktion: Der Unterraum aufgespannt durch $\vec{e}_1 + \ldots + \vec{e}_6$ ist invariant unter Drehungen und Spiegelungen. Die Darstellung auf diesem eindimensionalen Unterraum ist die Einsdarstellung θ_1^1. Der Vektor $\vec{x} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4 + \vec{e}_5 - \vec{e}_6$ geht unter a und unter b_1 in $-\vec{x}$ über. Also definiert $\vec{x}$ einen zweiten invarianten Teilraum mit Darstellung $T(a) = T(b_1) = -1$ und dieser trägt eine eindimensionale Darstellung θ_1^2.

Seien nun

$$\vec{y} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - 2\vec{e}_4 - \vec{e}_5 + \vec{e}_6 \quad \text{und} \quad \vec{z} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4 - 2\vec{e}_5 - \vec{e}_6.$$

Dann gilt:

$$T(a) : \vec{y} \to \vec{z} \to \vec{z} - \vec{y}, \quad T(b_1) : \vec{y} \to \vec{y}, \quad \vec{z} \to \vec{y} - \vec{z}.$$

Also ist der zweidimensionalen Vektorraum, der von $\vec{y}$ und $\vec{z}$ aufgespannt wird, invariant und trägt eine 2-dimensionale Darstellung θ_2^1. Diese Darstellung ist äquivalent zur Darstellung die man erhält, wenn man die Deckbewegungen in einem elementaren Koordinatensystem beschreibt.

Das Lemma von Schur: Es seien θ_1, θ_2 zwei irreduzible Darstellungen einer Gruppe G vorgegeben. Die entsprechenden Darstellungsmatrizen $T_1(g)$ und $T_2(g)$ wirken in den Vektorräumen V_1 und V_2 der Dimensionen n_1 und n_2. Es sei weiterhin

$$H : V_1 \longrightarrow V_2$$

eine lineare Abbildung, so daß gilt

$$HT_1(g) = T_2(g)H, \qquad \forall g \in G.$$

Dann ist entweder:

1. $H = 0$ oder (im ausschließenden Sinn)
2. $n_1 = n_2$, H nicht singulär und $T_2(g) = HT_1(g)H^{-1}$ für alle $g \in G$. Mit anderen Worten: die Darstellungen θ_1 und θ_2 sind zueinander äquivalent und H ist die vermittelnde Koordinatentransformation.

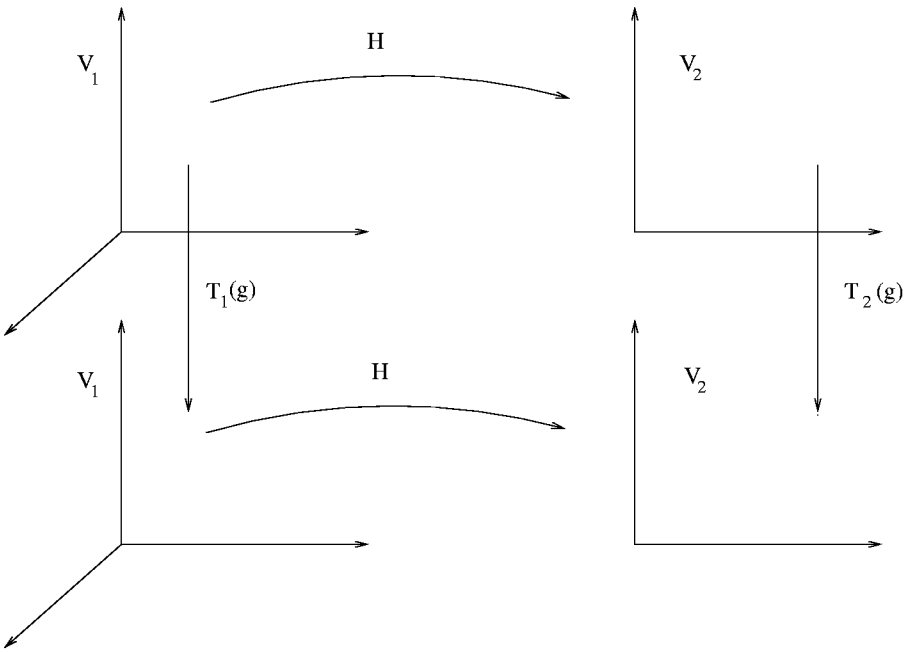


Abbildung 3.9: *$HT_1(g)$ und $T_2(g)H$ sollen dieselbe Abbildung sein.*

Beweis des Lemmas von Schur: Es sei $H(V_1) \subset V_2$ das Bild von V_1 unter H. Nach Voraussetzung gilt:

$$T_2 H(V_1) = HT_1(V_1) = H(V_1),$$

da die irreduzible Darstellung θ_1 keinen echten invarianten Teilraum von V_1 hat. Also ist $H(V_1) \subset V_2$ ein invarianter Teilraum unter θ_2. Da θ_2 nach Voraussetzung irreduzibel ist, existieren keine echten invarianten Teilräume von V_2. Es folgt also

1. 1. Alternative: Es ist $H(V_1) = 0$. Dies führt zur ersten Behauptung des Lemmas.
2. 2. Alternative: Es ist $H(V_1) = V_2$. Dann muß die Dimension von V_1 mindestens so groß wie diejenige von V_2 sein, $n_1 \geq n_2$. Wir führen den Kern der Abbildung H ein. Nach Voraussetzung gilt offenbar

   $$HT_1\big(\text{Kern}(H)\big) = T_2 H\big(\text{Kern}(H)\big) = \emptyset.$$

   Also bilden die T_1 den Kern von H in sich ab, und $\text{Kern}(H)$ ist ein invarianter Teilraum von θ_1. Da θ_1 irreduzibel ist, ist entweder $\text{Kern}(H) = V_1$ oder $\text{Kern}(H) = 0$. Den ersten Fall haben wir schon abgehandelt und es verbleibt $\text{Kern}(H) = 0$. Daraus folgt $n_2 \geq n_1$. Wir schließen, daß H eine reguläre quadratische Matrix sein muß. Damit gilt wegen der Voraussetzung des Lemmas:

   $$HT_1(g)H^{-1} = T_2(g), \qquad \forall g \in G.$$

Beachte, daß das Schursche Lemma für reelle und komplexe Darstellungsräume V_1, V_2 gilt.

Wir wollen zwei für die Physik wichtige Schlußfolgerungen aus diesem Lemma von Schur ziehen.

Korollar: Es sei θ eine irreduzible Darstellung einer Gruppe G auf eine Vektorraum V. Der lineare Operator H vertausche mit allen darstellenden Matrizen: $HT(g) = T(g)H, \forall g \in G$. Dann ist die Matrix H ein Vielfaches der Identität.

Beweis: Sei λ ein Eigenwert von H (eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms von H). Mit H vertauscht auch $H - \lambda$ mit den $T(g)$. Da $\det(H - \lambda) = 0$ ist, kommt nur die 1. Alternative im Lemma von Schur zum Zug: Also ist $H - \lambda = 0$ und damit $H = \lambda$.

Korollar: Es sei θ eine Darstellung von G auf dem n-dimensionalen Vektorraum V. Die Darstellung zerfalle in lauter irreduzible, paarweise inäquivalente Darstellungen,

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_m.$$

Die Matrix $H : V \to V$ einer linearen Abbildung vertausche mit allen $T(g)$:

$$[H, T(g)] = 0, \qquad \forall g \in G.$$

Dann sind die zu den irreduziblen Darstellungen gehörenden invarianten Teilräume Eigenräume des linearen Operators H.

Beweis für $m = 2$ des Korollars: In einem geeigneten Koordinatensystem haben die $T(g)$ die Gestalt

$$T(g) = \begin{pmatrix} T_1(g) & 0 \\ 0 & T_2(g) \end{pmatrix}.$$

In Anlehnung schreiben wir H in Blockmatrix-Form

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & Q_1 \\ Q_2 & H_2 \end{pmatrix}.$$

Nach Voraussetzung gilt

$$\begin{pmatrix} T_1 H_1 & T_1 Q_1 \\ T_2 Q_2 & T_2 H_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 T_1 & Q_1 T_2 \\ Q_2 T_2 & H_2 T_2 \end{pmatrix}$$

also insbesondere

$$[T_1(g), H_1] = 0 \quad \text{und} \quad [T_2(g), H_2] = 0.$$

Nach dem vorherigen Korollar müssen damit H_1 und H_2 auf den Darstellungsräumen V_1 und V_2 der irreduziblen Darstellungen θ_1 und θ_2 proportional zur Identität sein:

$$H_i = \lambda_i \quad \text{auf} \quad V_i, \quad i = 1, 2$$

Anderseits gilt

$$T_1(g)Q_1 = Q_1T_2(g) \quad \text{und} \quad T_2(g)Q_2 = Q_2T_1(g), \quad \forall g \in G.$$

Da die beiden Darstellungen als inäquivalent vorausgesetzt wurden, kann die 2. Alternativen des Schurschen Lemmas nicht eintreten. Somit folgt $Q_1 = Q_2 = 0$. Also sind die beiden Darstellungsräume V_1 und V_2 Eigenräume von H mit Eigenwerten λ_1 und λ_2.

Orthogonalitätsrelationen

Sei G eine Gruppe mit Mittelbildung (eine endliche Gruppe oder kompakte Lie-Gruppe) und seien $\theta_i : g \to T_i(g), i = 1, 2$ zwei irreduzible Darstellungen der Dimensionen n_1 und n_2. Schließlich sei $U : V_1 \to V_2$ eine Rechteck-Matrix so, daß $T_2UT_1^{-1}$ definiert ist. Wir betrachten die Matrix

$$H = \mathcal{M}\Big(T_2(g)UT_1^{-1}(g)\Big).$$

Dabei ist unter der Mittelbildung von Matrizen das Mitteln über die einzelnen Matrixelemente zu verstehen. Diese definieren komplexwertige Funktionen

$$g \longrightarrow \big(T_2(g)UT_1^{-1}(g)\big)_{pj}.$$

Weiter sei

$$\tilde{T}_1 = T_1(\tilde{g}) \quad \text{und} \quad \tilde{T}_2 = T_2(\tilde{g})$$

wobei $\tilde{g} \in G$ ein festes Element ist, zwei darstellende Matrizen. Wegen der Invarianz des Mittelwertes folgt:

$$\begin{aligned} H\tilde{T}_1 &= \mathcal{M}\Big(T_2(g)UT_1^{-1}(g)\tilde{T}_1\Big) = \tilde{T}_2\mathcal{M}\Big(\tilde{T}_2^{-1}T_2(g)UT_1^{-1}(g)\tilde{T}_1\Big) \\ &= \tilde{T}_2\mathcal{M}\Big(T_2(\tilde{g}^{-1}g)UT^{-1}(\tilde{g}^{-1}g)\Big) = \tilde{T}_2\mathcal{M}\Big(T_2(g)UT_1^{-1}(g)\Big). \end{aligned}$$

Also haben wir

$$HT_1(\tilde{g}) = T_2(\tilde{g})H, \qquad \forall \tilde{g} \in G.$$

Damit kann das Lemma von Schur anwendet werden:

1. Alternative: θ_1 und θ_2 sind nicht äquivalent.

In diesem Fall ist $H = 0$ und damit

$$\mathcal{M}\Big(\sum_{qi} T_2(g)_{pq}U_{qi}T_1^{-1}(g)_{ij}\Big) = 0.$$

Wir wählen für U speziell eine Rechtecksmatrix, die nur an der Stelle (q, i) eine 1 enthält und sonst Nullen. Für dieses U folgt

$$\mathcal{M}\Big(T_2(g)_{pq}T_1(g)_{ij}^{-1}\Big) = 0 \quad \text{(keine Summe)}.$$

Jetzt wählen wir noch $p = q, i = j$ und summieren über p und i. Dann ergibt sich

$$\mathcal{M}\Big(\mathrm{Sp}\, T_2 \mathrm{Sp}\, T_1^{-1}\Big) = 0.$$

Da (für unitäre T) $\mathrm{Sp}\, T^{-1} = \mathrm{Sp}\, \bar{T}$ ist, folgt schließlich

$$\mathcal{M}\Big(\bar{\chi}_{\theta_1}\chi_{\theta_2}\Big) = 0, \qquad \theta_1, \theta_2 \quad \text{inäquivalent und irreduzibel.}$$

Wir haben wir den folgenden wichtigen

Satz: Die Charaktere χ_{θ_1} und χ_{θ_2} von 2 inäquivalenten irreduziblen Darstellungen einer Gruppe mit invarianter Mittelbildung sind unitär orthogonal bezüglich der Mittelbildung.

2. Alternative: Die beiden n-dimensionalen Darstellungen θ_1 und θ_2 sind äquivalent.

Nach Wahl eines angepaßten Koordinatensystems ist $\theta_1 = \theta_2 = \theta$. Somit ist $T(\tilde{g})H = HT(\tilde{g})$ für alle $\tilde{g} \in G$ und nach obigem Korollar ist $H = \lambda$. Wegen

$$n\lambda = \mathrm{Sp}\, H = \mathrm{Sp}\, \mathcal{M}\Big(TUT^{-1}\Big) = \mathcal{M}\Big(\mathrm{Sp}\,[TUT^{-1}]\Big) = \mathrm{Sp}\, U,$$

wobei wir $\mathcal{M}(1) = 1$ benutzen, ist $n\lambda = \mathrm{Sp}\, U$ und damit

$$H_{iq} = \mathcal{M}\Big(\sum_{jp} T_{ij} U_{jp} T^{-1}_{pq}\Big) = \frac{\mathrm{Sp}\, U}{n}\delta_{iq}. \tag{3.6}$$

Die Elemente der quadratische Matrix U sollen nun alle verschwinden, bis auf $U_{jp} = 1$. Für diesen Spezialfall folgt:

$$H_{iq} = \mathcal{M}\big(T_{ij}T^{-1}_{pq}\big) = \frac{\mathrm{Sp}\, U}{n}\delta_{iq} = \frac{1}{n}\delta_{jp}\delta_{iq}.$$

Nun setzen wir $i = j, p = q$ und summieren über i und p. Dies führt zum

Satz: Der Charakter jeder irreduziblen Darstellung einer Gruppe mit invarianter Mittelbildung hat die Norm 1 bezüglich Mittelbildung, $\mathcal{M}\big(\bar{\chi}_\theta \chi_\theta\big) = 1$.

Die komplexwertigen Klassenfunktionen bilden einen linearen Raum. Die Mittelbildung definiert ein Skalarprodukt auf diesem Raum,

$$(f, h) = \mathcal{M}\Big(\bar{f} \cdot h\Big).$$

Offensichtlich sind die Charakteren orthonormale Elemente diese Raumes.

Es sei θ eine beliebige Darstellung der Gruppe G mit Mittelbildung, d.h. sie kann als Summe von irreduziblen Darstellungen geschrieben werden,

$$\theta = \sum_{i=1}^{m} c_i \theta_i.$$

Zueinander äquivalente Darstellungen können als gleich betrachtet werden. $2\theta_2$ bedeutet dann, daß die irreduzible Darstellung θ_2 in der Zerlegung von θ zweimal vorkommt. Die $\theta_1, \ldots, \theta_m$ sei ein Liste aller möglichen irreduziblen Darstellung der betreffenden Gruppe. Offensichtlich ist

$$\chi_\theta(g) = c_1\chi_{\theta_1}(g) + \ldots + c_m\chi_{\theta_m}(g).$$

Nun gilt

$$(\chi_{\theta_i}, \chi) = \mathcal{M}\left(\bar{\chi}_{\theta_i} \cdot \chi\right) = c_i$$

und wir haben folgendes Resultat gewonnen:

Ausreduktionsformel: Die irreduziblen Darstellung θ_i tritt in einer Darstellung θ einer Gruppe mit Mittelbildung genau $c_i = (\chi_i, \chi)$-mal auf.

Wir wollen noch zwei Schlußfolgerungen ziehen:

Satz: Zwei beliebige Darstellungen einer Gruppe mit Mittelbildung sind genau dann äquivalent, wenn ihre Charaktere gleich sind.

Sind zwei Darstellungen äquivalent, dann haben sie offensichtlich den gleichen Charakter. Die Umkehrung ist etwas schwieriger zu beweisen. Dazu brauchen wir das folgende

Lemma: Aus den Spuren der Matrizen einer Darstellung lassen sich die charakteristischen Polynome dieser Matrizen berechnen.

Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte der darstellenden Matrix $T = T(g)$. Jeder Eigenwert sei so oft aufgeführt, wie seine algebraische Vielfachheit beträgt. Für das charakteristische Polynom gilt:

$$\deg(\lambda - T) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n) = \lambda^n - s_1\lambda^{n-1} + \ldots + (-)^n s_n$$

wobei die Koeffizienten die folgenden *elementarsymmetrischen Funktionen* der Eigenwerte sind:

$$s_1 = \sum \lambda_j \quad , \qquad s_2 = \sum_{i \neq j} \lambda_i\lambda_j$$

$$s_3 = \sum_{i \neq j \neq k} \lambda_i\lambda_j\lambda_k \quad , \ldots , \quad s_n = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

Anderseits sind mit T auch $T^2 = T(g^2), \ldots, T^n = T(g^n)$ darstellende Matrizen. Die Spuren sind durch folgende *Potenzsummen* gegeben:

$$\sigma_p = \mathrm{Sp}\, T^p = \sum_i \lambda_i^p.$$

Mit Hilfe der Newtonschen Formeln kann gezeigt werden, daß jedes symmetrische Polynom eindeutig als Polynom von Potenzsummen dargestellt werden kann. In unserem Fall ist

$$s_1 = \sigma_1 \quad , \qquad s_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1^2 - \sigma_2), \quad s_3 = \frac{1}{2}(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_3), \ldots$$

Wir sehen also: Haben zwei Darstellungen θ_1 und θ_2 dieselben Charakteren, d.h. dieselben σ_p, dann haben die darstellenden Matrizen $T_1(g)$ und $T_2(g)$ identische charakteristische Polynome für alle $g \in G$. Dann sind diese ähnlich und damit sind θ_1 und θ_2 äquivalente Darstellungen.

Lemma: Jede irreduzible Darstellung $\theta : g \to T(g)$ einer *abelschen Gruppe* hat die Dimension 1.

Sei $\tilde{T} = T(\tilde{g})$ eine beliebige, aber feste Matrix der Darstellung θ. Da G abelsch ist, gilt: $T(g)\tilde{T} = \tilde{T}T(g)$ für alle $g \in G$. Nach obigem Korollar muß also $\tilde{T} = \lambda E$ sein. Somit sind alle darstellenden Matrizen diagonal. Dann kann die Darstellung nur irreduzibel sein, wenn sie die Dimension 1 hat.

3.6 Alle Darstellungen einer endlichen Gruppe

Wir wollen zuerst einmal untersuchen, wieviele inäquivalente irreduzible Darstellungen eine endliche Gruppe haben kann. Wir erinnern uns daran, daß die Charakteren Klassenfunktionen, d.h. auf den Ähnlichkeitsklassen von G konstant sind. Offensichtlich kann es höchstens soviele Charaktere geben wie die Gruppe Klassen hat. Wir werden sehen, daß die Anzahl inäquivalente irreduzible Charaktere genau mit der Anzahl Klassen übereinstimmt. Dazu die führen wir die sogenannte *reguläre Darstellung* der endlichen Gruppe G ein.

Die reguläre Darstellung einer Gruppe der Ordnung h erhält man, indem jedem Gruppenelement auf $1-1$-deutige Art ein Grundvektor in $\mathbb{R}^h$ zugewiesen wird. Jedem g ordnet man eine $h \times h$-Matrix $T_{reg}(g)$ zu, die diese Grundvektoren gemäß Multiplikationstabelle permutieren. Bei Multiplikation aller Gruppenelemente mit einem beliebigem $\tilde{g} \neq e$ bleibt kein Element fest:

$$\tilde{g}g \neq g \quad \forall g \in G.$$

Somit gilt für den Charakter der regulären Darstellung

$$\chi_{reg}(g) = \begin{cases} h & \text{falls } g = e \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3.7}$$

Zurück zu D_6:

Die reguläre Darstellung der Diedergruppe D_6 liefert

$$T_{reg}(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$T_{reg}(b_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Man sieht sofort, daß $T^2(b_1) = E$ ist, wie von der Darstellungseigenschaft gefordert.

Was sind nun die irreduziblen Darstellungen. Wie immer gibt es die eindimensionale Einsdarstellung θ_1^1 die jedem Gruppenelement eine 1 zuordnet und die alternierende Darstellung, die den Drehungen eine 1 und den Spielelungen eine -1 zuordnet. Sei nun χ_j der Charakter einer *beliebigen* irreduziblen Darstellung von G der Dimension n_j. Wegen (3.7) ergibt die Ausreduktionsformel für die Vielfachheit c_j, mit der θ_j in θ_{reg} auftritt:

$$c_j = \mathcal{M}(\bar{\chi}_j \chi_{reg}) = \frac{1}{h} \sum_{g \in G} \bar{\chi}_j(g) \cdot \chi_{reg}(g) = \frac{1}{h} \bar{\chi}_j(e) \cdot \chi_{reg}(e).$$

Mit und $\chi_j(e) = n_j$ und $\chi_{reg}(e) = h$ ergibt sich der

Satz Jede irreduzible Darstellung θ_j der Dimension n_j kommt in der regulären Darstellung θ_{reg} genau n_j mal vor:

$$\theta_{reg} = \sum_{j=1}^{k} n_j \theta_j \quad \text{mit} \quad h = \sum n_j^2. \tag{3.8}$$

Angewandt auf D_6,

$$12 = \sum_1^k n_j^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + \sum_4^k n_j^2 = 6 + \sum_4^k n_j^2,$$

wobei wir benutzten, daß D_6 mindestens zwei eindimensionale Darstellungen und eine zweidimensionale Darstellung hat. Damit kann D_6 zusätzlich zu diesen bekannte Darstellungen nur entweder 6 zusätzliche eindimensionale, oder eine zweidimensionale und 2 eindimensionale irreduzible Darstellungen haben. Wir werden schlußendlich noch zeigen, daß das Letztere der Fall ist.

3.7 Die Charakterenmatrix

Es sei G eine beliebige endliche Gruppe der Ordnung h. G habe k Ähnlichkeitsklassen. Wir wollen die Ähnlichkeitsklassen der symmetrischen Gruppe S_n betrachten, da jede endliche Gruppe der Ordnung n isomorph zu einer echten Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_n ist. Es ist zweckmäßig, die Zyklenschreibweise für Permutationen einzuführen. Beispiel

$$S_6 \ni g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim (1\ \ 4\ \ 6)(3\ \ 5)(2).$$

Man ordnet die Zyklen nach abnehmender Länge an. Offensichtlich ist jede Permutation ein Produkt von elementfremden Zyklen und die Zerlegung einer Permutation in Zyklen ist, bis auf die Reihenfolge gleich langer Zyklen, eindeutig.

Zwei Permutationen von n Objekten heißen vom *gleichen Typus*, wenn in beiden Permutationen Zyklen der Länge l genau gleich oft auftreten. Zum Beispiel die Elemente

$$(1\ \ 3\ \ 8)(4\ \ 5)(2\ \ 6)(7) \quad \text{und} \quad (1\ \ 4\ \ 6)(3\ \ 5)(7\ \ 8)(2) \tag{3.9}$$

aus S_8 sind vom gleichen Typus. Für jede Permutation g aus S_n sei nun α_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ die Anzahl Zyklen der Länge j in der Zerlegung von g in Zyklen. Für die Permutationen in (3.9)

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 2, \quad \alpha_3 = 1, \quad \alpha_4 = \alpha_5 = \ldots = \alpha_8 = 0.$$

Ohne Beweis notieren wir den

Satz: Die Anzahl Permutationen vom Typus $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ist

$$\frac{n!}{\prod_1^n \alpha_j! \cdot j^{\alpha_j}}.$$

Beispiel: die Klassentabelle von S_4 ist

Nr.	Partitionen	Typus	Anz.Zykl. $\alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1$	Anz.Perm.
1)	$4=4$	(....)	1 0 0 0	6
2)	$4=3+1$	(...)(.)	0 1 0 1	8
3)	$4=2+2$	(..)(..)	0 0 2 0	3
4)	$4=2+1+1$	(..)(.)(.)	0 0 1 2	6
5)	$4=1+1+1+1$	(.)(.)(.)(.)	0 0 0 4	1

Es sei nun

$$g=(1\ \ 4\ \ 6)(3\ \ 5)(2) \quad \text{und} \quad a=(1\ \ 3\ \ 5\ \ 2\ \ 6)(4)$$
$$\Rightarrow a^{-1}=(3\ \ 1\ \ 6\ \ 2\ \ 5)(4).$$

Nun wollen wir aga^{-1} bestimmen:

$$ga^{-1}=(3\ \ 4\ \ 6\ \ 2)(5)(1), \quad aga^{-1}=(3\ \ 4\ \ 1)(2\ \ 5)(6).$$

Also ist aga^{-1} vom selben Typus wie g. Allgemein gilt

Satz: Zwei Permutationen $g, \tilde{g}$ der symmetrischen Gruppe S_n sind genau dann zueinander ähnlich, $\tilde{g}=aga^{-1}$, wenn sie vom gleichen Typus sind. Damit haben alle Permutationen vom selben Typus denselben Charakter. Die Anzahl Ähnlichkeitsklassen ist gleich der Anzahl der geordneten Partitionen von n.

Aus der Charakterentabelle

Klassen	(1)	(2)	...	...	(k)
Ordnung d.Kl.	h_1	h_2	...	...	h_k
χ_1	1	1	...	...	1
χ_2	$\chi_2(1)$	$\chi_2(2)$	...	...	$\chi_2(k)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	...	$\vdots$
χ_j	$\chi_j(1)$	$\chi_j(2)$	...	...	$\chi_j(k)$

können wir die sogenannte *Charakterenmatrix* konstruieren

Klassen	(1)	(2)	...	...	(k)
Ordnung d.Kl.	h_1	h_2	...	...	h_k
χ_1	$\sqrt{\frac{h_1}{h}}\cdot 1$	$\sqrt{\frac{h_2}{h}}\cdot 1$	...	...	$\sqrt{\frac{h_k}{h}}1$
χ_2	$\sqrt{\frac{h_1}{h}}\cdot\chi_2(1)$	$\sqrt{\frac{h_2}{h}}\cdot\chi_2(2)$	...	...	$\sqrt{\frac{h_k}{h}}\cdot\chi_2(k)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	...	$\vdots$
χ_j	$\sqrt{\frac{h_1}{h}}\cdot\chi_j(1)$	$\sqrt{\frac{h_2}{h}}\cdot\chi_j(2)$	...	...	$\sqrt{\frac{h_k}{h}}\cdot\chi_j(k)$

Die Faktoren wurden gerade so eingeführt, daß die Zeilen der Charakterenmatrix unitär-orthogonal zueinander sind:

$$\frac{1}{h}\sum_{l=1}^{k} h_l\,\bar{\chi}_p(l)\cdot\chi_q(l)=\frac{1}{h}\sum_{g}\bar{\chi}_p(g)\cdot\chi_q(g)=\delta_{pq}.$$

Aus dieser Tatsache folgt, daß die Anzahl zueinander inäquivalenter irreduzibler Darstellungen j kleiner gleich der Anzahl k von Äquivalenzklassen sein muß.

Nun kann man mit ähnlichen Methoden wie oben noch beweisen, daß

$$\sum_{p=1}^{j} \bar{\chi}_p(g)\chi_p(\tilde{g}) = 0$$

falls g und $\tilde{g}$ zu verschiedenen Ähnlichkeitsklassen gehören. Damit sind auch die Kolonnen der Charakterenmatrix unitär-orthogonal zueinander und die Matrix ist quadratisch und unitär. Damit haben wir den wichtigen

Satz: Es gibt genau soviele irreduzible Darstellungen einer endlichen Gruppe, wie es Äquivalenzklassen gibt. Jede Klassenfunktion ist eine Linearkombination der *orthonormierten* Charakteren.

Beispiel: S_4 hat 5 Äquivalenzklassen und damit 5 irreduzible Darstellungen. Wegen

$$\sum_{i=1}^{5} n_i^2 = 24$$

und der Existenz der Eins- und alternierenden Darstellung, ist nur

$$(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5) = (1, 1, 2, 3, 3)$$

möglich. Es gibt also neben den zwei eindimensionalen noch eine zweidimensionale und zwei dreidimensionale irreduzible Darstellung.

Die Diedergruppe D_6 hat 12 Elemente und 6 Ähnlichkeitsklassen. Also gibt es 4 eindimensionale und 2 zweidimensionale irreduzible Darstellungen.

Für jede abelsche Gruppe ist $aga^{-1} = g$ und damit gibt es so viele Klassen wie die Gruppe Elemente hat. Wegen

$$h = \sum_{i=1}^{j} n_i^2 \quad \text{und} \quad j = h,$$

müssen alle $n_i = 1$ sein. Wir sehen (wie schon früher), daß alle Darstellungen einer abelschen Gruppe eindimensional sein müssen.

3.8 Lie-Gruppen und Liealgebren.

In den wenigen verbleibenden Stunden wollen wir die wichtigsten gruppentheoretischen Werkzeuge bereitstellen die für ein Verständnis von kontinuierlichen Symmetrien in der Physik notwendig sind. Wir beginnen mit der einfachsten kompakten Lie-Gruppe.

3.8.1 Die Charakteren von kompakten Lie-Gruppen

Die Charakteren von $U(1)$**:** Diese Gruppe ist abelsch, und wegen $aga^{-1} = g$ bildet jedes Element eine Äquivalenzklasse. Daher sind alle Funktionen $f : U(1) \to \mathbb{C}$, d.h. 2π-periodische Funktionen $f(t) = f(g(t))$, automatisch Klassenfunktionen.

Alle irreduziblen Darstellungen sind eindimensional und in einer adaptierten Basis unitär. Also hat jede Darstellung die Form

$$T(g(t)) = e^{ih(t)}, \qquad \text{mit reellem} \quad h(t)$$

und die Darstellungseigenschaft impliziert

$$e^{ih(0)} = e^{ih(2\pi)} = 1 \quad \text{und} \quad e^{ih(t_1+t_2)} = e^{i(h(t_1)+h(t_2))}.$$

Also ist $h(t)$ ein lineare Funktion mit $h(t + 2\pi) = h(t) + n$. Damit haben die irreduziblen Darstellungen die Form

$$\theta_n : e^{it} \longrightarrow T(e^{it}) = e^{int}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Da $\mathrm{Sp}\,(T(g(t)) = T(g(t)) = \exp(int)$ sind die Charakteren der irreduziblen Darstellungen der Gruppe $U(1)$

$$\chi_n(t) = \chi_{\theta_n}(t) = e^{int}.$$

Diese sind in der Tat unitär-orthogonal bezüglich der Mittelbildung,

$$\mathcal{M}(\bar{\theta}_n \theta_m) = \frac{1}{2\pi} \int dt\, e^{-int} e^{imt} = \delta_{nm},$$

wie es nach der allgemeinen Theorie über die Charakteren von Gruppen mit Mittelbildung sein muß. Jede Klassenfunktion $f(t)$, d.h. 2π-periodische Funktion, kann nach der Theorie der Fourierreihen nach ebenen Wellen entwickelt werden. Also haben wir genau dieselbe Situation wie für endliche Gruppen: Jede Klassenfunktion $f(t)$ kann als Linearkombination der unitär-orthogonalen Charakteren geschrieben werden,

$$f(t) = \sum_n c_n \chi_n(t), \qquad c_n = \frac{1}{2\pi} \int e^{-int} f(t) = \mathcal{M}(\bar{\chi}_j, f).$$

Die Fourieranalyse ist also ein Spezialfall der Theorie der Charakteren. In der Tat, es gilt der folgende

Satz von Peter und Weyl: Zu jeder kontinuierlichen Gruppe G mit Mittelbildung existieren unendlich viele Charaktere, welche ein vollständiges orthogonales Funktionensystem auf G bilden.

Charaktere von $SU(2)$**:** Der Charakteren der eindimensionalen Einsdarstellung θ_0 und der zweidimensionalen definierenden Darstellung $\theta_{\frac{1}{2}}$ in (3.4) sind

$$\chi_0(g) = 1 \quad \text{und} \quad \chi_{\frac{1}{2}}(g) = 2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}.$$

Wegen

$$\int_0^\pi \sin^2\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^\pi \sin^2\theta\cos^2\theta = \frac{\pi}{8} \quad \text{und} \quad \int_0^\pi \sin^2\theta\cos\theta = 0$$

gilt

$$(\chi_0,\chi_0) = (\chi_{\frac{1}{2}},\chi_{\frac{1}{2}}) = 1 \quad \text{und} \quad (\chi_0,\chi_{\frac{1}{2}}) = 0, \qquad (f,h) = \mathcal{M}(\bar{f},h),$$

wie es nach der allgemeinen Theorie sein muß. Dies sind die einzigen ein- und zweidimensionalen Darstellungen von $SU(2)$ (siehe unten). Um die nächste irreduzible Darstellung zu gewinnen, betrachten wir die 4-dimensionale Darstellung

$$\theta_{\frac{1}{2}} \times \theta_{\frac{1}{2}} \quad \text{mit} \quad \chi_{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}(\theta) = \chi_{\frac{1}{2}}(\theta)\cdot\chi_{\frac{1}{2}}(\theta) = e^{2i\theta} + 2 + e^{-2i\theta}.$$

Offensichtlich ist

$$(\chi_0,\chi_{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}) = 1 \quad \text{und} \quad (\chi_{\frac{1}{2}},\chi_{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}) = 0,$$

so daß θ die Einsdarstellung einmal enthält. Also muß

$$\theta_{\frac{1}{2}} \times \theta_{\frac{1}{2}} = \theta_0 \oplus \theta_1, \quad \chi_1(\theta) = e^{2i\theta} + 1 + e^{-2i\theta}$$

gelten. Da $(\chi_1,\chi_1) = 1$ ist, ist θ_1 eine 3-dimensionale irreduzible Darstellung Wie wir sehen werden ist es eine wohlbekannte Matrixgruppe, nämlich die 3-dimensionale Drehgruppe $SO(3)$. Um dies einzusehen, schauen wir uns die Tensordarstellung $\theta_{\frac{1}{2}} \times \theta_{\frac{1}{2}}$ etwas genauer an. Unter $\theta_{\frac{1}{2}}$ gehen $\vec{x}$ und $\vec{y}$ in $g\vec{x}$ und $g\vec{y}$ über, so daß

$$\begin{pmatrix} x_1y_1 \\ x_1y_2 \\ x_2y_1 \\ x_2y_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & ab & ba & b^2 \\ -a\bar{b} & a\bar{a} & -b\bar{b} & b\bar{a} \\ -\bar{b}a & -\bar{b}b & \bar{a}a & \bar{a}b \\ \bar{b}^2 & -\bar{b}\bar{a} & -\bar{a}\bar{b} & \bar{a}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1y_1 \\ x_1y_2 \\ x_2y_1 \\ x_2y_2 \end{pmatrix}.$$

Benutzen wir statt x_iy_y die symmetrische bzw. antisymmetrischen Kombinationen

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1y_2 - x_2y_1), \qquad (Y_{11},Y_{10},Y_{1-1}) = (x_1y_1, \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1y_2 - x_2y_1), x_2y_2)$$

dann findet man das folgende Transformationsverhalten

$$\begin{pmatrix} Y_{00} \\ Y_{11} \\ Y_{10} \\ Y_{1-1} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & \sqrt{2}ab & b^2 \\ 0 & -\sqrt{2}a\bar{b} & a\bar{a} - b\bar{b} & \sqrt{2}b\bar{a} \\ 0 & \bar{b}^2 & -\sqrt{2}\bar{a}\bar{b} & \bar{a}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{00} \\ Y_{11} \\ Y_{10} \\ Y_{1-1} \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Der eindimensionale invariante Unterraum wird also von der antisymmetrischen Kombination Y_{00} aufgespannt und der dreidimensionale von den symmetrischen Kombinationen Y_{1m}. Setzen wir schlußendlich noch

$$(X_1, X_2, X_3) = \big(\frac{1}{\sqrt{2}}(Y_{11} - Y_{1-1}), \frac{1}{i\sqrt{2}}(Y_{11} + Y_{1-1}), Y_{10}\big), \tag{3.11}$$

dann sieht die dreidimensionale Darstellung folgendermassen aus

$$\vec{X} \longrightarrow (\vec{e}, \vec{X})\vec{e} + \vec{e} \wedge \vec{X} \sin 2\theta - \vec{e} \wedge (\vec{e} \wedge \vec{X}) \cos 2\theta = R(2\theta, \vec{e})\vec{X}, \tag{3.12}$$

wobei θ der Winkel in der Parametrisierung (3.4) und

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} \sin\psi \cos(\pi + \varphi) \\ \sin\psi \sin(\pi + \varphi) \\ \cos\psi \end{pmatrix}$$

ein Einheitsvektor ist. Dies ist gerade eine Drehung von $\vec{X}$ um die Achse $\vec{e}$ mit Winkel 2θ. Die Matrixelemente von R sind reell und damit kann R als Transformation auf $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{C}^3$ angesehen werden. Damit ist $g \to R(g) \in SO(3)$ eine irreduzible Darstellung von $SU(2)$ durch 3-dimensionale Drehungen im $\mathbb{R}^3$. Beachte, daß $R(g) = R(-g)$, d.h. daß $g \to R(g)$ keine treue Darstellung ist.

Nun kann man weiterfahren und $\theta_1 \times \theta_{\frac{1}{2}}$ mit Charakter

$$\chi_{1\times\frac{1}{2}} = \chi_1 \cdot \chi_{\frac{1}{2}} = e^{3i\theta} + 2e^{i\theta} + 2e^{-i\theta} + e^{-3i\theta} = \chi_{\frac{1}{2}} + \chi_{\frac{3}{2}}$$

ausreduzieren. Offensichtlich enthält diese Tensordarstellung die Darstellung $\theta_{\frac{1}{2}}$ genau einmal. Da $(\chi_{\frac{3}{2}}, \chi_{\frac{3}{2}}) = 1$ ist, zerfällt $\theta_1 \times \theta_{\frac{1}{2}}$ in die irreduzible Darstellung $\theta_{\frac{1}{2}}$ und eine 4-dimensionale irreduzible Darstellung $\theta_{\frac{3}{2}}$. Ähnlich gewinnt man auch $\theta_2, \theta_{\frac{5}{2}}$ usf. Man findet die Charaktere

$$\chi_j = \sum_{n=-j,-j+1,\ldots j} e^{2in\theta} = \frac{\sin(2j+1)\theta}{\sin\theta}, \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots.$$

Wegen $\chi_j(e) = 2j + 1$ ist

$$\dim\theta_j = 2j + 1$$

und mit

$$\int_0^\pi \sin(2j+1)\theta \sin(2j'+1)\theta \, d\theta = \frac{\pi}{2}\delta_{jj'}$$

sind die θ_j $2j + 1$-dimensionale irreduzible inäquivalente Darstellungen von $SU(2)$. Da

$$\lim_{\epsilon\to 0} \chi_j(\pi - \epsilon) = (2j+1)(-)^{2j} = (-)^{2j}\chi(0)$$

gilt

$$\theta_j : -e \longrightarrow (-)^{2j} \mathbb{1}_{2j+1}.$$

Die Darstellungen mit nichtganzzahligen j sind treu und diejenigen mit ganzzahligen j sind es nicht.

Jede Klassenfunktion $f(\theta)$ kann nach Peter und Weyl als Linearkombination der Charakteren geschrieben werden

$$f(\theta) = \sum_j c_j \frac{\sin(2j+1)\theta}{\sin\theta}, \qquad c_j = \frac{2}{\pi}\int \sin^2\theta \sin(2j+1) f(\theta) d\theta.$$

Das die Funktionen θ_j ein vollständiges Funktionensystem auf

$$L_2\Big([0,\pi], \frac{2}{\pi}\sin^2\theta d\theta\Big)$$

bilden, kann auch anderweitig eingesehen werden. Dies zeigt dann posteriori, daß die θ_j *alle* irreduziblen Darstellungen von $SU(2)$ sind.

3.8.2 Lie-Algebren

Wir betrachten zuerst noch einmal $SU(2)$. Es sei

$$g(\theta,\vec{n}) = e^{i\theta\vec{n}\vec{\sigma}}, \qquad (\vec{n},\vec{n}) = 1,\ \vec{\sigma} = (\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3),$$

wobei wir die drei hermiteschen Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

eingeführt haben. Jede hermitesche 2×2-Matrix ist eine reelle Linearkombination der Pauli-Matrizen. Diese erfüllen

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k \Longrightarrow [\sigma_i,\sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k,$$

so daß $(\vec{n}\vec{\sigma})^2 = \vec{n}^2 = 1$ ist. Dies benutzen wir in der Entwicklung der Exponentialfunktion mit der Ergebnis

$$g(\theta,\vec{n}) = e^{i\theta\vec{n}\vec{\sigma}} = \cos\theta + i\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\,\sin\theta.$$

Setzen wir

$$(n_1,n_2,n_3) = (\sin\psi\sin\varphi, \sin\psi\cos\varphi, \cos\psi)$$

dann sind dies genau die $SU(2)$ Matrizen in (3.4). Also kann jeder $SU(2)$-Matrix als Exponent einer anti-hermiteschen Matrix geschrieben werden,

$$g = e^{itA}, \quad A = A^\dagger$$

Die antihermiteschen Matrizen bilden einen linearen Raum und der Kommutator von zwei solchen Matrizen ist wiederum antihermitesch.

Etwas allgemeiner: Es sei $g(t)$ eine Kurve in der Liegruppe G, die für $t = 0$ durch die Einheit geht,

$$g(t) \in G \quad \text{und} \quad g(0) = e.$$

Die infinitesimalen Erzeugenden sind

$$A = \frac{d}{dt} g(t)|_{t=0} = \dot{g}(0).$$

Wir zeigen nun, daß die infinitesimalen Erzeugenden eine Lie-Algebra bilden. Dazu betrachten wir verschiedene Kurven in der Gruppe, die alle für $t = 0$ durch die Einheit gehen. Wegen

$$\frac{d}{dt}\big(g_1(\alpha_1 t) g_2(\alpha_2 t)\big)|_{t=0} = \alpha_1 A_1 g_2(0) + g_1(0)\alpha_2 A_2 = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$$

bilden die infinitesimalen Erzeugenden einen *linearen Raum*. Wegen

$$\frac{d}{dt}\big(g_1 g_2(t) g_1^{-1}\big)|_{t=0} = g_1 A_2 g_1^{-1}$$

ist für beliebige $g \in G$ mit A auch gAg^{-1} in diesem Raum. Die Abbildung

$$A \longrightarrow Ad(g)A = gAg^{-1}$$

ist ein Darstellung von G auf dem linearen Raum der Erzeugenden, da für alle A gilt

$$Ad(g_1 g_2)A = g_1 g_2 A g_2^{-1} g_1^{-1} = g_1 \Big(Ad(g_2)A\Big) g_1^{-1} = Ad(g_1)Ad(g_2)A$$

und $Ad(e)A = A$. Diese Darstellung existiert immer und heißt die *adjungierte Darstellung* von G. Wegen

$$\frac{d}{dt}\Big(g_1(t) A_2 g_1^{-1}(t)\Big)|_{t=0} = [A_1, A_2],$$

ist mit A_i auch deren Kommutator $[A_1, A_2]$ in der Lie-algebra. Ein linearer Raum der unter Kommutatorbildung

$$A, B \longrightarrow [A, B]$$

abgeschlossen ist, heißt *Lie-Algebra*. Der Kommutator ist bilinear und antisymmetrisch und erfüllt die Jacobi-Identität

$$[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0.$$

Es seien nun $T(g)$ die Matrizen irgend einer Darstellung. Nun definieren wir die Elemente der von T induzierten Darstellung T_* der Liealgebra gemäß

$$T_*(A) = \frac{d}{dt} T(g(t))|_{t=0}, \quad \text{wobei} \quad \dot{g}(0) = A$$

ist. Aus der Darstellungseigenschaft der T folgt nun, daß T_* linear ist und daß die $T_*(A)$ dieselben Kommutationregeln wie die A erfüllen. Die Linearität ist einfach zu beweisen:

$$\begin{aligned} T_*(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) &= \frac{d}{dt} T\big(g_1(\alpha_1 t) g_2(\alpha_2 t)\big)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} T\big(g_1(\alpha_1 t)\big)|_{t=0} T\big(g_2(0)\big) + T\big((g_1(0)\big) \frac{d}{dt} g_2\big(\alpha_2 t)\big)|_{t=0} \\ &= \alpha_1 T_*(A_1) + \alpha_2 T_*(A_2). \end{aligned}$$

Die Darstellungseigenschaft folgt aus

$$T_*(g_1 A_2 g_1^{-1}) = \frac{d}{dt} T\big(g_1 g_2(t) g_1^{-1}\big)|_{t=0} = T(g_1) T_*(A_2) T^{-1}(g_1)$$

und der Eigenschaft, daß T_* linear ist, so daß

$$\frac{d}{dt}\Big(T(g_1(t)) T_*(A_2) T^{-1}(g_1(t))\Big)|_{t=0} = [T_*(A_1), T_*(A_2)] = T_*\big([A_1, A_2]\big)$$

ist. Die Eigenschaft

$$[T_*(A_1), T_*(A_2)] = T_*\big([A_1, A_2]\big), \qquad \forall A_1, A_2 \tag{3.13}$$

bedeutet, daß die $T_*(A)$ dieselbe Lie-Algebra bilden wie die infinitesimalen Erzeugenden A der Gruppe G. Es kommt nicht darauf an ob wir zuerst den Kommutator von A_1 und A_2 berechnen und dann das Bild des Kommutators unter der induzierten Darstellung T_*, oder ob wir zuerst die Bilder von A_1 und A_2 berechnen und danach den Kommutator der Bilder unter T_*. Die Eigenschaft (3.13) ersetzt die entsprechende Darstellungeigenschaft

$$T(g_1) T(g_2) = T(g_1 g_2)$$

der Gruppendarstellung.

Wir wenden dies nun auf g in (3.4) an, für welches (t wird zu θ)

$$A = \frac{d}{d\theta} g|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} i\cos\psi & \sin\psi e^{i\varphi} \\ -\sin\psi e^{-i\varphi} & -i\cos\psi \end{pmatrix}$$

ist. Für die dreidimensionale Darstellung in (3.10) findet man dann

$$T_*(A) = \begin{pmatrix} i\cos\psi & \sqrt{2}\sin\psi e^{i\varphi} & 0 \\ -\sqrt{2}\sin\psi e^{-i\varphi} & 0 & \sqrt{2}\sin\psi e^{i\varphi} \\ 0 & -\sqrt{2}\sin\psi e^{-i\varphi} & -i\cos\psi \end{pmatrix}.$$

Nach dem Basiswechsel (3.11) zur (reellen) Darstellung (3.12) erhält man die äquivalente Darstellung

$$T_*(A) = \begin{pmatrix} 0 & -\cos\psi & 2\sin\psi\cos\varphi \\ \cos\psi & 0 & 2\sin\psi\sin\varphi \\ -2\sin\psi\cos\varphi & -2\sin\psi\sin\varphi & 0 \end{pmatrix}.$$

Die infinitesimalen Erzeugenden der Darstellung (3.12) sind also die reellen antisymmetrischen 3×3 Matrizen. Dies muß so sein, denn einerseits ist

$$T_*(A) = \frac{d}{d\theta} T\big(g(\theta,\psi,\varphi)\big)|_{\theta=0} = \frac{d}{d\theta} R(\theta,\psi,\varphi)|_{\theta=0}$$

und anderseits

$$0 = \frac{d}{d\theta}(RR^t) \Longrightarrow T_*(A) + T_*^t(A) = 0.$$

Jede irreduzible Darstellung einer Gruppe ist eine irreduzible Darstellung der Liealgebra und (beinahe) umgekehrt. In der Physik konstruiert man oft die Darstellungen einer Gruppe indem man die Darstellungen der zugehörigen Liealgebra studiert. Dieser Weg wird in der Vorlesungen QMI und QMII beschritten.

Den schönen Zusammenhang zwischen Gruppentheorie und speziellen Funktionen konnten wir in dieser Vorlesung leider auch nicht explizit besprechen. In den letzten Abschnitten haben wir in der Tat die Theorie der Kugelfunktionen entwickelt.