ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԻ ԵՎ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ ԱՄԲԻՈՆ

Վ.Ս. ԱԹԱԲԵԿՅԱՆ

ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԻ ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆԻ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ - 2005

ՀՏԴ 512
ԳՄԴ 22.14
Ա 261

ԱԹԱԲԵԿՅԱՆ Վ.Ս.

Ա 261 Հանրահաշվի ներածություն.-Եր.: Երևանի համալս. հրատ., 2005, 124 էջ:

Այս ձեռնարկի նպատակն է՝ ներկայացնել հանրահաշվի այն հասկացությունները, որոնք դասավանդվում են առաջին կուրսում: Շարադրանքն սկսվում է թվերի տեսության տարրերից և շարունակվում տեղադրություններին, մատրիցներին, որոշիչներին, կոմպլեքս թվերին և բազմանդամներին նվիրված բաժիններով:

Ձեռնարկը նախատեսված է բնագիտական ֆակուլտետներում սովորող ուսանողների համար:

Ա $\frac{1602040000}{704(02)04}$ 2005 ԳՄԴ 22.14

ISBN 5-8084-0611-0

«...Արվեստի հետ համադրելիս՝ երկրաչափությունը կարելի է համեմատել կերպարվեստի հետ, հանրահաշիվը՝ երաժշտության...»

Ի.Ռ.Շաֆարևիչ

Նախաբան

Այս ձեռնարկի նպատակն է՝ ներկայացնել հանրահաշվի այն հասկացությունները, որոնք դասավանդվում են առաջին կուրսում: Շարադրված թեմաները համապատասխանում են մաթեմատիկայի ֆակուլտետի 1-ին կիսամյակի նյութին: Մի շարք գաղափարներ՝ գծային հավասարում, մատրիցային հավասարում, կոմպլեքս թիվ, բազմանդամ, սահմանվում են որպես որոշակի այբուբենի տառերով գրված արտահայտություններ (բառեր): Բառի գաղափարը հանդիսանում է ժամանակակից հանրահաշվի, ալգորիթմների տեսության, մաթեմատիկական տրամաբանության, ծրագրավորման լեզուների տեսության նախնական հասկացություններից մեկը: Բառերի միջոցով են կառուցվում հանրահաշվական բազմաձևությունների ազատ հանրահաշիվները: Տվյալ այբուբենի տառերով գրված արտահայտությունները, լինելով ինքնին պարզ ու ընկալելի, մյուս կողմից հնարավորություն են ստեղծում որոշակի խստություն ապահովել հիմնական գաղափարները ներմուծելիս:

Ամբողջ նյութը բաժանված է վեց գլուխների, որոնք իրենց հերթին տրոհված են մասերի (պարագրաֆների): Յուրաքանչյուր գլխի թեորեմները համարակալված են ըստ հերթականության, իսկ սահմանումների և լեմաների համարակալումը կատարվում է այն մասի համարին համապատասխան, որում այն զետեղված է: Ապացուցումներն ավարտվում են ☐ նշանով:

Հեղինակը շնորհակալություն է հայտնում հանրահաշվի և երկրաչափության ամբիոնի աշխատակիցներ Վ. Բեզլարյանին, Ս.Դադայանին, Հ.Օհանիկյանին, Ս.Դավիդովին՝ ձեռնարկի որոշ մասեր կարդալու և իրենց նկատառումներն ու դիտողությունները իր հետ կիսելու համար:

Օգտագործված նշանակումները

$\wedge$ - և
$\vee$ - կամ
$\forall$ - ցանկացած
$\exists$ - գոյություն ունի
$\in$ - պատկանում է
$X \Rightarrow Y$ - եթե X, ապա Y
$X \Leftrightarrow Y$ - եթե X, ապա Y և եթե Y, ապա X
$\forall x\,[Y]$ - կամայական x-ի համար Y
$\exists x\,[Y]$ - գոյություն ունի x, որի համար Y
$\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ - A-ն B-ի ենթաբազմությունն է
$b \mid a$ - b-ն a-ի բաժանարար է
Պ - բոլոր պարզ թվերի բազմությունը
Բ - բոլոր բաղադրյալ թվերի բազմությունը
(a,b) - a և b թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը
$a =_n b$ - a և b թվերը բաղդատելի են ըստ n մոդուլի
$a +_n b$ - a և b թվերի գումարն ըստ n մոդուլի
$a \cdot_n b$ - a և b թվերի արտադրյալն ըստ n մոդուլի
$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
$\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ -բնական թվերի բազմությունը
$\mathbf{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ -ամբողջ թվեր բազմությունը
$\mathbf{Q}$ - ռացիոնալ թվերի բազմությունը
$\mathbf{R}$ -իրական թվերի բազմությունը
$\mathbf{C}$ -կոմպլեքս թվերի բազմությունը
$\mathbf{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-2, n-1\}$
$\mathbf{N}_n = \{1, 2, 3, \dots, n-1, n\}$
S_n - N_n բազմության բոլոր տեղադրությունների բազմությունը
$\varepsilon(\pi)$ - π տեղադրության նշանը
A_n - զույգ տեղադրությունների բազմությունը
B_i - B մատրիցի i-րդ տողը
${}^j\mathrm{B}$ - B մատրիցի j-րդ սյունը
$[\mathrm{B}]_{ij}$ - B մատրիցի i-րդ տողում և j-րդ սյունում գտնվող գործակիցը
$\det \mathrm{B}$ - B մատրիցի որոշիչը
A_{ij} - մատրիցի a_{ij} գործակցի հանրահաշվական լրացումը
$\mathbf{R}[x]$ - իրական գործակիցներով բազմանդամների բազմությունը
$\deg f$ - f բազմանդամի աստիճանը
$(f,g) = 1$ - f և g բազմանդամները փոխադարձաբար պարզ են

Գլուխ 1

Ամբողջ թվեր

1. Բաժանման գաղափարը

Ամբողջ թվերի բազմությունը բաղկացած է դրական ամբողջ թվերից՝ 1, 2, 3, 4, …, բացասական ամբողջ թվերից՝ $-1, -2, -3, \ldots$ և զրոյից՝ 0: Այս թվերի բազմությունը կնշանակենք $\mathbb{Z}$-ով՝

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}:$$

Ոչ բացասական ամբողջ թվերը կանվանենք բնական թվեր, իսկ նրանց բազմությունը կնշանակենք $\mathbb{N}_0$-ով՝

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}:$$

Դրական ամբողջ թվերի բազմությունը կնշանակենք $\mathbb{N}$-ով՝

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}:$$

a և b ամբողջ թվերի գումարը՝ $a+b$, տարբերությունը՝ $a-b$, և արտադրյալը՝ ab, նույնպես ամբողջ թվեր են:

Սահմանում 1.1: *Կասենք, որ a ամբողջ թիվը բաժանվում է $b \neq 0$ ամբողջ թվի վրա, եթե գոյություն ունի այնպիսի x ամբողջ թիվ, որ $a = bx$: Այդ դեպքում նաև կասենք, որ b-ն a-ի բաժանարար է, իսկ a-ն՝ b-ի բազմապատիկ, և այդ փաստը կգրառենք այսպես. $b \mid a$.*

$$b \mid a \Leftrightarrow [\, b \neq 0 \ \wedge \ \exists x (x \in \mathbb{Z} \ \wedge \ a = bx)\,]:$$

Այսպիսով $(-5) \mid 65$, քանի որ $65 = (-5)(-13)$: Սահմանումից անմիջապես բխում է հետևյալը:

Լեմմա 1.1: ա. $(b \mid a \ \wedge \ c \neq 0) \Rightarrow bc \mid ac$

բ. $(c \mid b \ \wedge \ b \mid a) \Rightarrow c \mid a$:

գ. $(a = b + c \ \wedge \ d \mid a \ \wedge \ d \mid b) \Rightarrow d \mid c$:

դ. $(a \in \mathbb{N} \ \wedge \ b \in \mathbb{N} \ \wedge \ b \mid a) \Rightarrow 1 \leq b \leq a$:

Օրինակի համար, $a - b = bx - b = b(x-1) \geq 0$ անհավասարությունն ապացուցում է դ.-ն: □

Քանի որ $a = a \cdot 1$, ուրեմն $1 \mid a$, և եթե $a \neq 0$, ապա $a \mid a$:

2. Պարզ և բաղադրյալ թվեր

Մեկից մեծ բնական թվերը լինում են երկու տեսակի:

Սահմանում 2.1: $p \geq 2$ *ամբողջ թիվը կոչվում է պարզ թիվ, եթե այն ունի ճիշտ երկու բնական բաժանարար՝ 1 և p: Բոլոր պարզ թվերի բազմությունը կնշանակենք* Պ *տառով.* $\text{Պ} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots\}$:

Սահմանում 2.2: $p > 1$ *ամբողջ թիվը կոչվում է բաղադրյալ, եթե այն պարզ թիվ չէ, այսինքն՝ ունի առնվազն երեք բաժանարար: Բաղադրյալ թվերի բազմությունը նշանակենք* Բ *տառով.* $\text{Բ} = \{4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, \ldots\}$:

Ակնհայտորեն $\text{Պ} \cap \text{Բ} = \varnothing$, իսկ $\text{Պ} \cup \text{Բ} = \mathbb{N} - \{1\}$:

Լ ե մ մ ա 2.1: *a-ն բաղադրյալ թիվ է այն և միայն այն դեպքում, երբ a-ն ունի առնվազն մեկ x բաժանարար, որը բավարարում է $1<x<a$ անհավասարությանը.*

$[a \in \text{Բ}] \Leftrightarrow [\exists\, x(x \in \mathbb{N} \wedge x|a \wedge 1<x<a)]$:

Ա պ ա ց ո ւ յ ց: Բխում է լեմմա 1.1, դ.-ից: □

Թ ե ո ր ե մ 1: *Յուրաքանչյուր $a>1$ ամբողջ թվի 1-ից մեծ ամենափոքր բաժանարարը պարզ թիվ է:*

Ա պ ա ց ո ւ յ ց: Դիցուք b-ն a թվի բաժանարարներից ամենափոքրն է, որը բավարարում է $1<b\le a$ անհավասարությանը: b-ի բաղադրյալ լինելու դեպքում, համաձայն լեմմա 2.1-ի, կգտնվի նրա այնպիսի x բաժանարար, որը բավարարում է $1<x<b$ անհավասարությանը: Բայց այդ դեպքում $x|a$ (լեմմա 1.1,բ), որը հակասում է b-ի ընտրությանը: □

Հ ե տ և ա ն ք 1.1: *Յուրաքանչյուր a բաղադրյալ թիվ կարելի է ներկայացնել $a=px$ տեսքով, որտեղ p-ն պարզ թիվ է, x-ը՝ բնական և տեղի ունի $1<p\le x<a$ անհավասարությունը.*

Ա պ ա ց ո ւ յ ց: Որպես p վերցնենք a բաղադրյալ թվի 1-ից մեծ ամենափոքր բաժանարարը: Ուրեմն՝ $a=px$ և $x\ne 1$: Համաձայն p-ի ընտրության $x|a$ և $x\ne 1$ պայմաններից հետևում է $x\ge p$ անհավասարությունը: □

Հ ե տ և ա ն ք 1.2: *a բաղադրյալ թվի պարզ բաժանարարներից ամենափոքրը չի գերազանցում $\sqrt{a}$ թիվը:*

$[a \in \text{Բ}] \Rightarrow [\exists\, p(p\in \text{Պ} \wedge p|a \wedge p \le \sqrt{a})]$:

Ա պ ա ց ո ւ յ ց: Դիցուք p-ն a-ի ամենափոքր պարզ բաժանարարն է: Այդ դեպքում կգտնվի մի $x \ge p$ բնական թիվ, որի համար $a=px$: Ուրեմն՝ $a=xp\ge p^2$: □

Թ ե ո ր ե մ 2: (Էվկլիդես): *Պարզ թվերի քանակն անվերջ է:*

Ա պ ա ց ո ւ յ ց: Դիցուք $\text{Պ}=\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$, այսինքն՝ $p_1, p_2, \ldots, p_k$ թվերը բոլոր պարզ թվերն են: Այդ դեպքում, ըստ թեորեմ 1-ի, $p_1 p_2 \ldots p_k+1$ թիվը պետք է բաժանվի նրանցից որևէ մեկի վրա: Ուրեմն, ըստ լեմմա 1.1,գ.-ի, 1-ը նույնպես կբաժանվի այդ պարզ թվի վրա, որը հնարավոր չէ: □

Թ ե ո ր ե մ 3: *Յուրաքանչյուր բաղադրյալ թիվ հավասար է վերջավոր քանակությամբ պարզ թվերի արտադրյալի:*

Ա պ ա ց ո ւ յ ց: Ենթադրենք, թե կան բաղադրյալ թվեր, որոնք հավասար չեն վերջավոր քանակությամբ պարզ թվերի արտադրյալի: Դրանցից ամենափոքրը նշանակելով a-ով և կիրառելով հետևանք 1.1-ը, կստանանք $a=px$, որտեղ $p\in\text{Պ}$, իսկ $x\in \mathrm{N}$ և $1<x<a$: Այսպիսով, $x \in \mathrm{N}-\{1\}= \text{Պ}\cup\text{Բ}$: Եթե x-ը պարզ թիվ է՝ $x\in\text{Պ}$, ապա a-ն վերլուծվում է երկու պարզ թվերի արտադրյալի. $a=px$՝ հակասություն: Իսկ եթե x-ը բաղադրյալ թիվ է՝ $x\in\text{Բ}$, ապա, a-ի ընտրության և $x<a$ անհավասարության շնորհիվ, կարող ենք պնդել, որ x-ը հավասար է վերջավոր քանակությամբ պարզ թվերի

արտադրյալի՝ $x = p_1\ p_2 \dots p_k$ և կրկին կստացվի, որ a-ն վերլուծվում է պարզ թվերի արտադրյալի. $a = p\ p_1\ p_2 \dots p_k$՝ դարձյալ հակասություն: Ստացված հակասություններն ապացուցում են թեորեմ 2-ի ճիշտ լինելը: □

3. Մնացորդով բաժանում

Թ ե ո ր ե մ 4: *Յուրաքանչյուր a ամբողջ թվի և $b > 0$ բնական թվի համար գոյություն ունեն միարժեքորեն որոշված այնպիսի q և r ամբողջ թվեր, որ տեղի ունի $a = bq + r$ հավասարությունը, ընդ որում $0 \le r < b$:*

Ա պ ա ց ո ւ յ ց: Որպես q վերցնենք այն ամենամեծ ամբողջ թիվը, որի համար $bq \le a$: Այդ դեպքում՝ $bq \le a < b(q+1)$, որից հետևում է, որ $0 \le a - bq < b$: Որպես r կվերցնենք $a - bq$ թիվը:

q և r թվերի միակությունն ապացուցելու համար ենթադրենք, թե $a = bq_1 + r_1$ և $0 \le r_1 < b$ ու, միաժամանակ, $a = bq_2 + r_2$ և $0 \le r_2 < b$: Ընդունենք, որ $r_1 > r_2$, կստանանք $0 < r_1 - r_2 < b - r_2 < b$ անհավասարությունները: Մյուս կողմից $r_1 - r_2 = b(q_2 - q_1)$, այսինքն՝ $b \mid (r_1 - r_2)$: Ուրեմն, համաձայն լեմա 1.1. դ.-ի, $b \le r_1 - r_2$: Հանգեցինք հակասության: Նույն ձևով $r_2 > r_1$ անհավասարությունից կստանանք հակասության: Մնում է $r_1 = r_2$ և, ուրեմն, $q_1 = q_2$ դեպքը: □

Հ ե տ և ա ն ք 4.1: *Տրված a և $b \ne 0$ ամբողջ թվերի համար գոյություն ունեն միարժեքորեն որոշված q և r ամբողջ թվեր, որոնց համար տեղի ունի $a = bq + r$ հավասարությունը, ընդ որում $0 \le r < |b|$:*

Ա պ ա ց ո ւ յ ց: Բավական է տեսնել, որ երբ $b < 0$, ապա $a = |b|q + r \Leftrightarrow a = b(-q) + r$: □

Ս ա հ մ ա ն ո ւ մ 3.1: *Երբ $a = bq + r$, որտեղ $0 \le r < |b|$, ապա r-ը կոչվում է a-ն b-ի վրա բաժանելուց ստացված մնացորդ:*

Հ ե տ և ա ն ք 4.2: $b \mid a \Leftrightarrow$ *a-ն b-ի վրա բաժանելուց ստացված r մնացորդը հավասար է 0-ի:* □

4. Ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար

Ս ա հ մ ա ն ո ւ մ 4.1: *d-ն կոչվում է a և b ամբողջ թվերի ընդհանուր բաժանարար, երբ $d \mid a$ և $d \mid b$: a և b ամբողջ թվերի ընդհանուր բաժանարարներից ամենամեծը կոչվում է նրանց ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար:*

Երբ $a = b = 0$, ապա a և b թվերի ընդհանուր բաժանարարների մեջ ամենամեծը չկա: Մնացած բոլոր դեպքերում, ակնհայտորեն, a և b ամբողջ թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը գոյություն ունի, որական է և միակն է: Այն նշանակվում է այսպես. (a,b): Նկատենք, որ $(a,b) = (|a|,|b|)$:

Լ ե մ ա 4.1: *Երբ p-ն և q-ն պարզ թվեր են, ապա* $[(p,q) \ne 1 \Leftrightarrow p = q]$:

Ա պ ա ց ո ւ յ ց: $(p,q) \ne 1 \Leftrightarrow p = (p,q) = q$: □

Լ ե մ ա 4.2: *Երբ $r_1 = r_2 q + r_3$, ապա $(r_1, r_2) = (r_2, r_3)$:*

Ա պ ա ց ո ւ յ ց: r_1-ի ու r_2-ի ամեն մի ընդհանուր բաժանարար ընդհանուր բաժանարար է նաև r_2-ի ու r_3-ի համար և հակառակը: □

Թ ե ո ր ե մ 5 (ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը գտնելու Էվկլիդեսի ալգորիթմը): *Տրված $r_1 > r_2 > 0$ բնական թվերի համար կամ $r_2 \mid r_1$, և այդ դեպքում $(r_1,r_2) = r_2$, կամ $r_2 \nmid r_1$, և այս դեպքում գոյություն ունի մի $k \ge 2$ բնական թիվ և, դրան համապատասխան, գոյություն ունեն միարժեքորեն որոշված $q_1, q_2, \dots, q_k$ և $r_3, \dots, r_k, r_{k+1}$ այնպիսի ամբողջ թվեր, որոնց համար տեղի ունեն $r_1 = r_2q_1 + r_3$, $r_2 = r_3q_2 + r_4$, ... , $r_{k-1} = r_kq_{k-1} + r_{k+1}$, $r_k = r_{k+1}q_k$ և $r_{k+1} = (r_1,r_2)$ հավասարությունները, ընդ որում՝ $r_2 > r_3 > \dots > r_{k+1} \ge 1$:*

Ա պ ա ց ո ւ ց ո ւ մ: Եթե $r_i > r_{i+1} > 0$, ապա, ըստ թեորեմ 4-ի, կգտնվեն միարժեքորեն որոշված q_i և r_{i+2} թվեր, որոնց համար տեղի ունի $r_i = r_{i+1}q_i + r_{i+2}$ հավասարությունը, ընդ որում՝ $r_{i+1} > r_{i+2} \ge 0$: Հարկավոր է, սկսելով r_1 և r_2 թվերից, թեորեմ 4-ը հաջորդաբար այնքան անգամ կիրառել r_i և r_{i+1} $(i=1, 2, 3, \dots)$ թվերի նկատմամբ, մինչև որ ստացվի 0 մնացորդ: Ակնհայտորեն, կիրառվող քայլերի քանակը՝ k-ն, բավարարում է $1 \le k \le r_2$ անհավասարությանը: Համաձայն լեմմա 4.2-ի՝

$$(r_1,r_2)=(r_2,r_3)= \dots =(r_{k-1},r_k)=(r_k,r_{k+1})=r_{k+1} : \square$$

Երկու կամայական ամբողջ թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը գտնելու համար բավական է օգտվել $(r_1,r_2)=(|r_2|,|r_1|)$ հավասարությունից և հետո միայն կիրառել Էվկլիդեսի ալգորիթմը:

Վերցնենք կամայական a և b թվեր: $\langle a,b\rangle$-ով նշանակենք ամբողջ թվերի հետևյալ բազմությունը.

$$\langle a,b\rangle = \{ax+by; \quad x\in \mathbb{Z} \wedge y\in \mathbb{Z}\},$$

Դժվար չէ տեսնել, որ $\{0, a, b\} \subset \langle a,b\rangle$: Հետևյալ լեմման ակնհայտ է:

Լ ե մ մ ա 4.3: *Դիցուք h-ը և r-ը ինչ-որ ամբողջ թվեր են: Այդ դեպքում.*
ա. $[h\in\langle a,b\rangle \wedge r\in\langle a,b\rangle] \Rightarrow h+r\in\langle a,b\rangle$, բ. $r\in\langle a,b\rangle \Rightarrow r\cdot h\in\langle a,b\rangle$: □

Թ ե ո ր ե մ 6: $(a,b)\in\langle a,b\rangle$, *այսինքն, գոյություն ունեն այնպիսի x և y ամբողջ թվեր, որոնց համար $(a,b)=ax+by$:*

Ա պ ա ց ո ւ ց ո ւ մ: Դիցուք r_1-ը և r_2-ը $\langle a,b\rangle$ բազմությունից վերցված կամայական երկու ամբողջ թվեր են: Այդ դեպքում, եթե q-ն և r-ը այնպիսի թվեր են, որ $r_1=r_2q+r$, ապա $r=r_1-r_2q\in\langle a,b\rangle$ (լեմմա 4.3): Ուրեմն, r_1 և r_2 թվերի նկատմամբ Էվկլիդեսի ալգորիթմը կիրառելու ընթացքում յուրաքանչյուր քայլում ստացված մնացորդը կպատկանի $\langle a,b\rangle$ բազմությանը: Այստեղից, ըստ թեորեմ 5-ի, կստանանք. $r_{k+1}=(r_1,r_2)\in\langle a,b\rangle$: Մասնավորապես, ընտրելով $r_1=a$, $r_2=b$, կստանանք, որ $(a,b)\in\langle a,b\rangle$: □

Հ ե տ և ա ն ք 6.1: ա. $(c|a \wedge c|b) \Rightarrow c|(a,b)$:

բ. (a,b)-ն $\langle a,b\rangle$ *բազմության ամենափոքր դրական թիվն է* :

գ. $\langle a,b\rangle$ *բազմությունը բաղկացած է բոլոր այն թվերից, որոնք հանդիսանում են (a,b)-ի բազմապատիկներ:*

Ա պ ա ց ո ւ ց ո ւ մ: ա. Ինչ-որ x և y ամբողջ թվերի համար տեղի ունի $(a,b)=ax+by$ հավասարությունը, իսկ $c|(ax+by)$:

բ. Դիցուք aa_1+bb_1-ը $\langle a,b\rangle$ բազմության ամենափոքր դրական թիվն է:

Քանի որ $(a,b) \in \langle a,b \rangle$, ուրեմն՝ $aa_1+bb_1 \le (a,b)$: Մյուս կողմից, ակնհայտորեն, aa_1+bb_1-ը բաժանվում է a-ի ու b-ի յուրաքանչյուր ընդհանուր բաժանարարի վրա, մասնավորապես՝ (a,b)-ի վրա: Հետևաբար, տեղի ունի նաև $aa_1+bb_1 \ge (a,b)$ անհավասարությունը: Այսպիսով՝ $aa_1+bb_1=(a,b)$:

գ. Համաձայն բ.-ի, $(a,b)=aa_1+bb_1$-ն $\langle a,b \rangle$-ի ամենափոքր դրական թիվն է: $\langle a,b \rangle$ բազմության կամայական թվի aa_1+bb_1-ի վրա բաժանելուց ստացված մնացորդը պատկանում է $\langle a,b \rangle$-ին (լեմմա 4.3) և, լինելով aa_1+bb_1-ից ավելի փոքր, անհրաժեշտաբար հավասար է 0-ի: Հակառակը, aa_1+bb_1-ի կամայական պատիկ պատկանում է $\langle a,b \rangle$-ին (լեմմա 4.3, բ.): □

5. Փոխադարձաբար պարզ թվեր

Սահմանում 5.1: *a և b թվերը կոչվում են **փոխադարձաբար պարզ** թվեր, եթե* $(a,b)=1$:

Հետևանք 6.2: ա. $(a,b)=1 \Leftrightarrow [\exists x \exists y[x\in \mathbf{Z} \wedge y \in \mathbf{Z} \wedge ax+by=1]]$,

բ. $[(c,b)=1 \ \wedge \ c\,|\,ab \ ] \ \Rightarrow \ c\,|\,a$,

գ. $[\,(a\,,b\,)=1 \ \ \wedge \ a\,|\,c \ \ \wedge \ \ b\,|\,c \ \ ] \Rightarrow ab\,|\,c$,

դ. $[(a_1,c)=1 \ \wedge \ (a_2,c)=1] \ \Rightarrow \ (a_1a_2,c)=1$

ե. *Եթե $a_1,a_2\,,\,...\,,a_n$ թվերից յուրաքանչյուրը փոխադարձաբար պարզ է c թվի հետ, ապա $(a_1a_2..a_n,c)=1$:*

Ապացույց: ա. $(\Rightarrow)$ Բխում է թեորեմ 6-ից: $(\Leftarrow)$ Քանի որ $(a,b)\,|\,ax+by$, ապա $(a,b)\,|1$: Ուրեմն՝ $(a,b)=1$:

բ. Եթե $cx+by=1$, ապա $acx+aby=a$: Մյուս կողմից՝ $c\,|\,acx+aby$:

գ. Եթե $ax+by=1$, ապա $acx+cby=c$: Բայց $ab\,|\,ac$ և $ab\,|\,cb$, ուրեմն՝ $ab\,|\,acx+cby$:

դ. Բազմապատկելով $a_1x_1+cy_1=1$ և $a_2x_2+cy_2=1$ հավասարությունների ձախ մասերը միմյանց հետ, իսկ աջ մասերը՝ միմյանց հետ, կստանանք $a_1a_2x_1x_2+c(a_1x_1y_2+a_2x_2y_1+cy_1y_2)=1$, որը, համաձայն ա. կետի, նշանակում է $(a_1a_2,c)=1$:

ե. $n-1$ անգամ հաջորդաբար կիրառելով դ. պնդումը, կստանանք, որ $(a_1a_2,c)=1$, $((a_1a_2)a_3,c)=1$, $((a_1a_2a_3)a_4,c)=1$, ..., $((a_1a_2\cdots a_{n-1})a_n,c)=1$: □

6. Թվաբանության հիմնական թեորեմը

Լեմմա 6.1: *Դիցուք $a=p_1p_2...p_n$-ը տրված a բաղադրյալ թվի որևէ վերլուծություն է պարզ թվերի արտադրյալի, իսկ $a_1,a_2\,,\,...\,,a_k$ թվերը նույն a թվի բոլոր հնարավոր իրարից տարբեր պարզ բաժանարարներն են: Այդ դեպքում՝* $\{p_1,p_2,...,p_n\}=\{a_1,a_2\,,\,...\,,a_k\}$:

Ապացույց: Քանի որ $p_1,p_2,...,p_n$ թվերից յուրաքանչյուրը a-ի պարզ բաժանարար է, ապա $\{\,p_1,p_2,...,p_n\,\}\subset\{\,a_1,a_2\,,\,...\,,a_k\,\}$: Ցույց տանք, որ $\{\,p_1,p_2,...,p_n\,\}\supset\{\,a_1,a_2\,,\,...\,,a_k\,\}$: Դիտարկենք a թվի կամայական պարզ բաժանարար՝ a_t $(1\le t\le k)$: $a_t\,|\,a$, ուրեմն $a_t\,|\,p_1p_2...p_n$, հետևաբար $(a_t,p_1p_2...p_n)=a_t>1$: Կիրառելով հետևանք 6.2,ե.-ն, կստանանք, որ a_t-ն փոխադարձաբար պարզ չէ $p_1,p_2,...,p_n$ թվերից գոնե մեկի, ասենք թե p_s-ի հետ: Բայց քանի որ a_t-ն և p_s-ն պարզ թվեր են, ապա $a_t = p_s$ (լեմմա 4.1): Այսպիսով, $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ բազմության յուրաքանչյուր թիվ պատկանում է $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ բազմությանը և հակառակը: □

Թ ե ո ր ե մ 7 (**թվաբանության հիմնական թեորեմը**): *Յուրաքանչյուր a բաղադրյալ թիվ վերլուծվում է պարզ թվերի արտադրյալի, այն էլ միակ ձևով, այսինքն, եթե $a = p_1 p_2 \ldots p_n = q_1 q_2 \ldots q_m$, որտեղ $p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_m$ թվերից յուրաքանչյուրը պարզ թիվ է, ընդ որում, տեղի ունեն $p_1 \le p_2 \le \ldots \le p_n$ և $q_1 \le q_2 \le \ldots \le q_m$ անհավասարությունները, ապա*

$$m = n \text{ և } p_1 = q_1, p_2 = q_2, \ldots, p_n = q_n:$$

Ա պ ա ց ո ւ յ ց ո ւ մ: Բաղադրյալ թվի վերլուծվելը պարզ թվերի արտադրյալի տեսքի արդեն ապացուցել ենք (թեորեմ 2): Ապացուցենք վերլուծության միակությունը: Նախ, համաձայն լեմմա 6.1-ի, $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\} = \{q_1, q_2, \ldots, q_m\}$, որտեղ $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ բազմության ամենափոքր թիվը հավասար է $\{q_1, q_2, \ldots, q_m\}$ բազմության ամենափոքր թվին, այսինքն՝ $p_1 = q_1$, ինչից անմիջապես հետևում է, որ $\{p_2, \ldots, p_n\} = \{q_2, \ldots, q_m\}$: Ենթադրելով, որ $m > n$, նույն կերպ ցույց կտանք, որ $p_2 = q_2$, $p_3 = q_3, \ldots, p_n = q_n$: Այս հավասարությունները համադրելով $p_1 p_2 \ldots p_n = q_1 q_2 \ldots q_m$ հավասարության հետ, կստանանք. $q_{n+1} q_{n+2} \ldots q_m = 1$, որն անհնար է: Նույն ձևով ժխտվում է $m < n$ անհավասարությունը: □

Դիցուք $p_{k_1} < p_{k_2} < \ldots < p_{k_s}$ թվերը a բաղադրյալ թվի բոլոր իրարից տարբեր պարզ բաժանարարներն են: Այդ դեպքում, ըստ թվաբանության հիմնական թեորեմի, $a = p_1 p_2 \ldots p_n$ վերլուծության մեջ յուրաքանչյուր p_{k_m} $(1 \le m \le s)$ թվին հավասար արտադրիչների քանակը որոշվում է միարժեքորեն, այսինքն, գոյություն ունեն միարժեքորեն որոշված $\alpha_1 \ge 1$, $\alpha_2 \ge 1, \ldots, \alpha_s \ge 1$ բնական թվեր, որոնց համար $a = p_{k_1}^{\alpha_1} p_{k_2}^{\alpha_2} \ldots p_{k_s}^{\alpha_s}$: Այս վերջին տեսքը կոչվում է a թվի ***կանոնական վերլուծություն***:

Հ ե տ և ա ն ք 7.1: *Յուրաքանչյուր բաղադրյալ թվի կանոնական վերլուծությունը միակն է:* □

Պարզ է, որ թվի կանոնական վերլուծության մեջ p^0 տեսքի արտադրիչներ ավելացնելով արտադրյալը չենք փոխի: Այս դիտողությունը օգտակար է հաջորդ պնդման համար:

Հ ե տ և ա ն ք 7.2: *Դիցուք $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$ և $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_n^{\beta_n}$, որտեղ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ թվերը պարզ թվեր են, իսկ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ թվերը պատկանում են $\mathbb{N}_0$-ին՝ ոչ բացասական ամբողջ թվեր են: Այդ դեպքում, եթե $a \mid b$, ապա $\alpha_1 \le \beta_1, \alpha_2 \le \beta_2, \ldots, \alpha_n \le \beta_n$:*

Ա պ ա ց ո ւ յ ց ո ւ մ: Տրված է, որ $b = ax$, որտեղ, x թվի կանոնական վերլուծության մեջ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ թվերից բացի այլ թվեր չեն կարող մասնակցել:

Այսպիսով, x-ը կարելի է ներկայացնել $x = p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_n^{x_n}$ տեսքով, որտեղ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0$, որտեղ, $\beta_1 = \alpha_1 + x_1$, $\beta_2 = \alpha_2 + x_2, \ldots, \beta_n = \alpha_n + x_n$: □

Հետևանք 7.3: *Դիցուք* $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_n^{\alpha_n}$ *և* $b=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}...p_n^{\beta_n}$, *որտեղ* $p_1,p_2,...,p_n$ *թվերը պարզ թվեր են, իսկ* $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,...,\beta_n$ *թվերը պատկանում են* $\mathbb{N}_0$ *-ին՝ ոչ բացասական ամբողջ թվեր են: Այդ դեպքում*

$$(a,b)=p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)}p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)}...\,p_n^{\min(\alpha_n,\beta_n)}:$$

Ապացույց: Համաձայն հետևանք 7.2-ի, եթե $c\,|\,a$ և $c\,|\,b$, ապա $c=p_1^{\gamma_1}p_2^{\gamma_2}...p_n^{\gamma_n}$, որտեղ, $\gamma_1\le\min\{\alpha_1,\beta_1\},\gamma_2\le\min\{\alpha_2,\beta_2\},...,\ \gamma_n\le\min\{\alpha_n,\beta_n\}$ և, փաստորեն, $p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)}p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)}...\,p_n^{\min(\alpha_n,\beta_n)}$ թիվը a-ի և b-ի ընդհանուր բաժանարարների մեջ ամենամեծն է: □

Սահմանում 6.1: *Յուրաքանչյուր թիվ, որը բաժանվում է և* a *-ի, և* b *-ի վրա, կոչվում է* a *և* b ***թվերի ընդհանուր բազմապատիկ***: a *-ի և* b *-ի ընդհանուր բազմապատիկներից ամենափոքրը կոչվում է նրանց* ***ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկ*** *և նշանակվում է այսպես.* $\{a,b\}$:

Հետևանք 7.4: *Դիցուք* $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_n^{\alpha_n}$ *և* $b=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}...p_n^{\beta_n}$, *որտեղ* $p_1,p_2,...,p_n$ *թվերը պարզ թվեր են, իսկ* $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,...,\beta_n$ *թվերը պատկանում են* $\mathbb{N}_0$ *-ին՝ ոչ բացասական ամբողջ թվեր են: Այդ դեպքում*

$$\{a,b\}=p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)}p_2^{\max(\alpha_2,\beta_2)}...\,p_n^{\max(\alpha_n,\beta_n)}:$$

Ապացույց: Համաձայն հետևանք 2-ի, եթե $a\,|\,c$ և $b\,|\,c$, ապա $c=p_1^{\gamma_1}p_2^{\gamma_2}...p_n^{\gamma_n}$, որտեղ, $\gamma_1\ge\max\{\alpha_1,\beta_1\},\gamma_2\ge\max\{\alpha_2,\beta_2\},...,\ \gamma_n\ge\max\{\alpha_n,\beta_n\}$ և, փաստորեն, $p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)}p_2^{\max(\alpha_2,\beta_2)}...\,p_n^{\max(\alpha_n,\beta_n)}$ թիվը a-ի և b-ի ընդհանուր բազմապատիկների մեջ ամենափոքրն է: □

Հետևանք 7.5: $ab=(a,b)\cdot\{a,b\}$:

Ապացույց: Բավական է նկատել, որ

$$\alpha\beta=\min\{\alpha,\beta\}\cdot\max\{\alpha,\beta\}:\square$$

Օրինակ, $22000=2^4 3^0 5^3 7^0 11^1$ և $266805=2^0 3^2 5^1 7^2 11^2$: Ուրեմն.

$$(22000\ ,\ 266805)=2^0 3^0 5^1 7^0 11^1=55,$$

$$\{22000\ ,\ 266805\}=2^4 3^2 5^3 7^2 11^2=106722000:$$

7. Արտապատկերում: Երկտեղանի գործողություն

•Սահմանում Ա: *Դիցուք* A *-ն և* B *-ն կամայական բազմություններ են: Ենթադրենք թե ինչ-որ մի եղանակով (օրինակ՝ բանաձևով, որևէ կանոնով, որոշակի քայլերի հաջորդականությամբ, ալգորիթմով կամ այս բոլորի զուգակցումով և այլն),* A *բազմության յուրաքանչյուր* a ***տարրի համապատասխանեցվում է միարժեքորեն որոշված որևէ*** b ***տարր***՝ B *բազմությունից: Այն, որ այդ եղանակով* a *տարրին համապատասխանեցվում է* b *տարրը, կգրենք այսպես.* $a\mapsto b$ *: Տրված եղանակով առաջացող բոլոր հնարավոր* $a\mapsto b$ *համապատասխանությունների համախմբությունը կանվանենք* A *բազմությունից դեպի* B *բազմություն* ***արտապատկերում***[1] *(առաջացած տրված եղանակի միջոցով):*

---

[1] *Ավելի խիստ՝* $\Phi:A\to B$ *արտապատկերումը* $A\times B$ *բազմության այնպիսի ենթաբազմություն է՝* $\Phi\subset A\times B$, *որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին.*

1. $\forall a\exists b[a\in A\wedge b\in B\wedge(a,b)\in\Phi]$, 2. $[(a,b)\in\Phi\wedge(a,c)\in\Phi]\Rightarrow b=c$:

*Մեկ անգամ ևս ընդգծենք այն պահանջը, որ յուրաքանչյուր a տարրի համապատասխանեցվում է **միարժեքորեն որոշված** որևէ b տարր. սա նշանակում է, որ $a \mapsto b$ և $a \mapsto c$ համապատասխանությունները հնարավոր են միայն $b = c$ դեպքում: Սովորաբար, թե տրված եղանակը, և թե նրա միջոցով առաջացած արտապատկերումը նշանակվում են միևնույն տառով, օրինակ՝ Φ: Այն փաստը, որ Φ-ն հանդիսանում է A բազմությունից դեպի B բազմություն արտապատկերում, կգրառենք այսպես. $\Phi: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$, իսկ $\Phi: a \mapsto b$ գրությունը նշանակում է, որ Φ արտապատկերմամբ a տարրին համապատասխանեցվում է b տարրը կամ, ուղղակի, Φ-ն a տարրին համապատասխանեցնում է b տարրը: Այս վերջին փաստը կգրենք նաև այսպես. $\Phi(a) = b$:*

*$\Phi(a) = b$ տարրը կոչվում է a տարրի **պատկեր**, իսկ a-ն՝ $\Phi(a)$-ի **նախապատկեր**:*

Պ ա ր զ ա բ ա ն ու մ: *$\Phi(a) = b$ պատկերը a տարրով որոշվում է միարժեքորեն՝ $[\Phi: a \mapsto b \wedge \Phi: a \mapsto c] \Rightarrow b = c$, մինչդեռ a-ն կարող է և միարժեքորեն չորոշվել $\Phi(a) = b$-ով. տարբեր տարրեր կարող են ունենալ միևնույն b պատկերը.•*

•Ս ա հ մ ա ն ու մ Բ: *Դիցուք A-ն որևէ ոչ դատարկ բազմություն է՝ $\mathrm{A} \neq \varnothing$, և տրված է ինչ-որ եղանակ (օրինակ՝ քայլերի հաջորդականություն, ալգորիթմ, կանոն, ինչ-որ բանաձև կամ այս բոլորի զուգակցում և այլն), որով A բազմության **որոշակի հերթականությամբ ընտրված տարրերի յուրաքանչյուր** a_1, a_2 **զույգի** (ավելի հակիրճ, **յուրաքանչյուր** (a_1, a_2) **կարգավորված զույգի**) **համապատասխանեցվում է միարժեքորեն որոշված մի** a_3 **տարր այդ նույն բազմությունից**: Այն, որ այդ եղանակով a_1, a_2 զույգին համապատասխանեցվում է a_3 տարրը, կգրենք այսպես. $(a_1, a_2) \mapsto a_3$: Տրված եղանակով առաջացող բոլոր հնարավոր $(a_1, a_2) \mapsto a_3$ համապատասխանությունների համախմբությունը կանվանենք **երկտեղանի գործողություն**[2] A բազմության վրա (առաջացած տրված եղանակի միջոցով): Երկտեղանի գործողությունների նշանակման համար սովորաբար օգտագործվում է $+, \cdot, -, \oplus, \odot, *, \circ$ նշաններից որևէ մեկը, կամ էլ այդ նշանների ու թվերի, կամ այդ նշանների ու տառերի ինչ-որ զուգակցություն:*

Երբ տվյալ A բազմության վրա տրված է $*$ երկտեղանի գործողություն, ապա այն, որ $*$ գործողությունը a_1, a_2 զույգին համապատասխանեցնում է a_3 տարրը, գրվում է այսպես. $*: (a_1, a_2) \mapsto a_3$, կամ այսպես. $a_1 * a_2 = a_3$, սակայն ավելի ընդունված է վերջին գրությունը:

Գործողությունը, ընդհանրապես ասած, կախված է a_1 և a_2 տարրերի հերթականությունից ու հնարավոր է, որ $a_1 * a_2 \neq a_2 * a_1$: Օրինակ, ամբողջ

---

[2] *Ավելի խիստ՝ յուրաքանչյուր $\Phi: \mathrm{A} \times \mathrm{A} \to \mathrm{A}$ արտապատկերում կոչվում է A բազմության երկտեղանի գործողություն:*

թվերի $\mathbf{Z}$ բազմության որոշակի հերթականությամբ ընտրված թվերի յուրաքանչյուր a_1, a_2 զույգի համապատասխանեցնելով a_1+a_2 ամբողջ թիվը, կարող ենք ասել, որ գումարումը՝ $+$-ը, $\mathbf{Z}$ բազմության վրա երկտեղանի գործողություն է: a_1+a_2 թվի փոխարեն վերցնելով $a_1\cdot a_2$ կամ a_1-a_2 թիվը, կստանանք, որ թե բազմապատկումը՝ $\cdot$, և թե հանումը՝ $-$, երկտեղանի գործողություններ են, ընդ որում, միշտ $a_1+a_2=a_2+a_1$ և $a_1\cdot a_2=a_2\cdot a_1$, մինչդեռ վերջին՝ հանման գործողության դեպքում $a_1-a_2=a_2-a_1 \Leftrightarrow a_1=a_2$, մասնավորապես՝ $7-10\neq 10-7$: •

8. Բաղդատելիություն

Վերցնենք որևէ n բնական թիվ ($n\geq 1$) և $\mathbf{Z}_n$-ով նշանակենք հետևյալ թվերի բազմությունը.

$$\mathbf{Z}_n=\{0,1,2,\dots,n-2,n-1\}:$$

Մենք արդեն ապացուցել ենք (թեորեմ 4), որ կամայական a ամբողջ թվի և տվյալ n-ի համար գոյություն ունեն միարժեքորեն որոշված այնպիսի q և r ամբողջ թվեր, որ տեղի ունի $a=nq+r$ հավասարությունը, ընդ որում՝ $0\leq r<n$: Այս վերջին անհավասարությունը, ակնհայտորեն, համարժեք է $r\in\mathbf{Z}_n$ պայմանին: $\mathbf{Z}_n$-ը կոչվում է ամբողջ թվերը n-ի վրա բաժանելուց ստացված մնացորդների կամ ***մնացքների*** բազմություն: $r_{a,n}$-ով նշանակենք a-ն n-ի վրա բաժանելուց ստացված մնացորդը՝ $a=nq+r_{a,n}$, $0\leq r_{a,n}<n$: Օրինակ, $r_{1,n}=1$, $r_{n,-1}=r_{n-1,n}=n-1$, $r_{2n,n}=0$ և այլն: Համարելով n-ը անփոփոխ, $r_{a,n}$ գրության մեջ n-ը բաց կթողնենք, օգտագործելով r_a նշանակումը: Եվ այսպես, $r_{a,n}=r_a$:

Լ և մ ա 8.1: ա. $a=r_a \Leftrightarrow a\in\mathbf{Z}_n$,

բ. $n\,|\,a \Leftrightarrow r_a=0$:

Ա պ ա ց ո ւ ց ո ւ մ: Անմիջապես բխում են սահմանումներից: □

Ս ա հ մ ա ն ո ւ մ 8.1: *Կասենք, որ a և b թվերը **բաղդատելի** են ըստ n **մոդուլի**, եթե նրանց $a-b$ տարբերությունը բաժանվում է n-ի վրա, այսինքն՝ $n\,|\,a-b$: Այդ փաստը ընդունված է գրառել այսպես. $a\equiv b(\mathrm{mod}\,n)$:*

$a\equiv b(\mathrm{mod}\,n)$ գրության փոխարեն մենք օգտագործելու ենք ավելի կարճ գրառում՝ $a=_n b$: Եվ այսպես՝ $n\,|\,a-b \Leftrightarrow a\equiv b(\mathrm{mod}\,n) \Leftrightarrow a=_n b$:

Օրինակ՝ $4=_7 11$, $16=_{11} 38$, $25364087^2=_3 1$:

Թեորեմ 8: ա. $a=_n a$,

բ. $a=_n b \Leftrightarrow b=_n a$,

գ. $[a=_n b \wedge b=_n c] \Rightarrow a=_n c$,

դ. $[a=_n b \wedge c=_n d] \Rightarrow a+c=_n b+d$,

ե. $[a=_n b \wedge c=_n d] \Rightarrow ac=_n bd$:

Ա պ ա ց ո ւ ց ո ւ մ: ա. $n\,|\,0$:

բ. $n\,|\,a-b \Leftrightarrow n\,|\,b-a$:

գ. Եթե $n \mid a-b$ և $n \mid b-c$, ապա $n \mid (a-b)+(b-c)=a-c$:

դ. Եթե $n \mid a-b$ և $n \mid c-d$, ապա $n \mid (a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d)$:

ե. Եթե $a-b=nq_1$ և $c-d=nq_2$, ապա $ac=bd+n(bq_2+dq_1+nq_1q_2)$, այսինքն՝ $n \mid ac-bd$: □

Բաղդատելիության «$=_n$» նշանի համապատասխանությունը հիմնավորվում է նրանով, որ, ինչպես երևում է թեորեմ 8.-ից, նրա հետ կարելի է վարվել այնպես, ինչպես հավասարման «=» նշանի հետ:

Հ ե տ և ա ն ք 8.1: ա. $a =_n r_a$,

բ. $a+b =_n r_a + r_b$,

գ. $ab =_n r_a r_b$:

Ա պ ա ց ու ց ու մ: ա. Ակնհայտ է:

բ. Քանի որ $a =_n r_a$ և $b =_n r_b$, ապա ըստ թեորեմ 8, դ.-ի, $a+b =_n r_a + r_b$:

գ. Քանի որ $a =_n r_a$ և $b =_n r_b$, ապա ըստ թեորեմ 8, ե.-ի, $ab =_n r_a r_b$: □

Թ ե ո ր ե մ 9: $a =_n b \Leftrightarrow r_a = r_b$:

Ա պ ա ց ու ց ու մ: ($\Rightarrow$) Դիցուք $b=nq_1+r_b$, $0 \le r_b < n$ և $a-b=nq_2$: Այդ դեպքում $a=nq_2+b=n(q_2+q_1)+r_b$: Ուրեմն՝ $r_a=r_b$:

($\Leftarrow$) $a=nq_1+r_a$, $b=nq_2+r_b$ և $r_a=r_b$ հավասարություններից հետևում է $a-b=n(q_1-q_2)$ հավասարությունը, այսինքն՝ $n \mid a-b$: □

Պարզ է, որ $a=b \Rightarrow a =_n b$, սակայն հակառակը ճիշտ չէ, ինչն երևում է վերևում բերված օրինակներից:

Հ ե տ և ա ն ք 9.1: *Եթե $a \in \mathbf{Z}_n$ և $b \in \mathbf{Z}_n$, ապա $a =_n b \Leftrightarrow a=b$*:

Ա պ ա ց ու ց ու մ: $a =_n b \Leftrightarrow r_a =_n r_b \Leftrightarrow r_a = r_b$, իսկ ըստ լեմմա 8.1,ա.-ի, $a=r_a=r_b=b$: □

Նշենք, որ յուրաքանչյուր a ամբողջ թվի համապատասխանության մեջ դնելով $r_{a,n}$ թիվը, կստանանք ամբողջ թվերի բազմությունից դեպի մնացքների $\mathbf{Z}_n$ բազմություն արտապատկերում՝ $\Phi_n : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_n$: Մասնավորապես, թեորեմ 9-ը այդ արտապատկերման միջոցով կարելի է վերաձևակերպել այսպես. $a =_n b \Leftrightarrow \Phi_n(a)=\Phi_n(b)$:

9. «Նոր» գործողություններ ամբողջ թվերի հետ

Ս ա հ մ ա ն ու մ 9.1: *Տվյալ a և b թվերի համար r_{a+b} թիվը կոչվում է a և b թվերի գումար ըստ n մոդուլի*:

Ամբողջ թվերի յուրաքանչյուր a, b զույգի համապատասխանեցնելով $a+b$ գումարը n թվի վրա բաժանելուց ստացված մնացորդը, այսինքն՝ r_{a+b} թիվը, ստանում ենք մի նոր երկտեղանի գործողություն $\mathbf{Z}$ բազմությունում ($+$, $-$, $\cdot$ գործողություններից տարբեր): Այդ գործողությունը կնշանակենք $+_n$ նշանով: Այսպիսով՝ $a +_n b = r_{a+b}$:

Ս ա հ մ ա ն ու մ 9.2: *Տվյալ a և b թվերի համար r_{ab} թիվը կոչվում է a և b թվերի արտադրյալ ըստ n մոդուլի*:

Ամբողջ թվերի յուրաքանչյուր a, b զույգի համապատասխանեցնելով ab արտադրյալը n թվի վրա բաժանելուց ստացված մնացորդը, այսինքն՝

r_{ab} թիվը, ստանում ենք մեկ այլ երկտեղանի գործողություն $\mathbf{Z}$ բազմության վրա ($+, -, \cdot, +_n$ գործողություններից տարբեր): Այդ գործողությունը կնշանակենք $\cdot_n$ նշանով: Այսպիսով՝ $a \cdot_n b = r_{ab}$:

Հ ե տ և ա ն ք 9.2: ա. $a+b =_n a+_n b$,

բ. $ab =_n a \cdot_n b$:

Ա պ ա ց ո ւ ց ո ւ մ: ա. Քանի որ $a+b =_n r_{a+b}$ և $r_{a+b} = a+_n b$, ապա ըստ թեորեմ 8, գ.-ի, $a+b =_n a+_n b$:

Նույն կերպ ապացուցվում է բ.-ն: □

Օրինակ, գրենք ըստ մոդուլ 2-ի գումարման և բազմապատկման աղյուսակները.

a	b	$a \cdot_2 b$	$a +_2 b$
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	1
1	1	1	0

Աղյուսակից երևում է, որ եթե $a \in \mathbf{Z}_2$ և $b \in \mathbf{Z}_2$, ապա $a \cdot_2 b = a \cdot b$:

Դժվար չէ համոզվել նաև, որ եթե $0 \le k < n-1$, ապա $k +_n 1 = k+1$, իսկ $(n-1) +_n 1 = 0$:

Դ ի տ ո ղ ո ւ թ յ ո ւ ն: Եթե $a+b \in \mathbf{Z}_n$, ապա $a +_n b = a+b$ և եթե $ab \in \mathbf{Z}_n$, ապա $a \cdot_n b = ab$, այնպես որ բավականաչափ մեծ n թվի դեպքում տրված a և b թվերի գումարումը (բազմապատկումը) և նույն թվերի գումարումն ըստ n մոդուլի (բազմապատկումն ըստ n մոդուլի) նույն արդյունքն են տալիս: Միևնույն ժամանակ, օրինակ, $2 \cdot 2 = 4$, իսկ $2 \cdot_3 2 = 1$:

Հ ա տ կ ո ւ թ յ ո ւ ն 1: Կամայական x և y ամբողջ թվերի համար

ա. $x+_n y \in \mathbf{Z}_n$ և $x \cdot_n y \in \mathbf{Z}_n$:

բ. $x+_n y = y+_n x$

գ. $x \cdot_n y = y \cdot_n x$:

Ա պ ա ց ո ւ ց ո ւ մ: Բխում են սահմանումներից: □

Հ ա տ կ ո ւ թ յ ո ւ ն 2: Կամայական x, y և z ամբողջ թվերի համար

ա. $(x +_n y)+_n z = x+_n (y +_n z)$,

բ. $(x \cdot_n y)\cdot_n z = x\cdot_n (y \cdot_n z)$:

Ա պ ա ց ո ւ ց ո ւ մ: ա. Նախ հիշենք, որ ամբողջ թվերի գումարումը բավարարում է զուգորդական օրենքին՝

$$\forall x \forall y \forall z \; [x \in \mathbf{Z} \wedge y \in \mathbf{Z} \wedge z \in \mathbf{Z} \Rightarrow (x+y)+z = x+(y+z)],$$

որից սկսելով ու մի քանի անգամ կիրառելով հետևանք 9.2,ա. և թեորեմ 8,դ. պնդումները, կստանանք. $(x+_n y)+_n z =_n (x+_n y)+z =_n (x+y)+z = x+(y+z) = \; =_n x+_n (y+z) =_n x+_n (y+_n z)$, այսինքն՝ $(x+_n y)+_n z =_n x+_n (y+_n z)$:

Մնում է տեսնել, որ $(x +_n y)+_n z \in \mathbf{Z}_n$ և $x+_n (y+_n z) \in \mathbf{Z}_n$, ապա օգտվել հետևանք 9.1-ից:

բ. Նույն ձևով՝ $\forall x \forall y \forall z\ [x \in \mathbf{Z} \wedge y \in \mathbf{Z} \wedge z \in \mathbf{Z} \Rightarrow (xy)z = x(yz)\ ]$, հետևանք 9.2,բ. և թեորեմ 8,ե. պնդումներից օգտվելով կստանանք.

$(x \cdot_n y) \cdot_n z =_n (x \cdot_n y)z =_n (xy)z = x(yz) =_n x \cdot_n (yz) =_n x \cdot_n (y \cdot_n z)$ և դարձյալ մնում է օգտվել հետևանք 9.1-ից: □

10. Մնացքների հատկությունները

Կատարենք հետևյալ նշանակումը. $\mathbf{Z}_n^* = \{1, 2, 3, ..., n-1\}$:

Թ ե ո ր ե մ 10: *Եթե n-ը որևէ պարզ թիվ է, ապա կամայական $a \in \mathbf{Z}_n^*$ թվի համար գոյություն ունի, այն էլ՝ միակ, $a_1 \in \mathbf{Z}_n$ թիվ, որ $a \cdot_n a_1 = 1$:*

Ա պ ա ց ո ւ ց ո ւ մ: n-ը պարզ թիվ է և $a \in \mathbf{Z}_n^*$ պայմաններից հետևում է, որ $(a,n) = 1$: Ըստ հետևանք 6.2,ա.-ի՝ $\exists x \exists y (x \in \mathbf{Z} \wedge y \in \mathbf{Z} \wedge ax + ny = 1)$: Բայց $ax + ny = 1 \Leftrightarrow ax =_n 1 \Leftrightarrow a \cdot_n x = 1 \Leftrightarrow a \cdot_n r_x = 1$: Որպես a_1 կվերցնենք $r_x \in \mathbf{Z}_n$ թիվը:

a_1-ի միակությունը ապացուցելու համար ենթադրենք, թե $a \cdot_n a_2 = 1$: Ըստ հատկություն 1,գ.-ի՝ $a \cdot_n a_2 = a_2 \cdot_n a = 1$, իսկ ըստ հատկություն 2,բ-ի՝

$$a_2 = a_2 \cdot_n 1 = a_2 \cdot_n (a \cdot_n a_1) = (a_2 \cdot_n a) \cdot_n a_1 = 1 \cdot_n a_1 = a_1 : \square$$

Հ ե տ և ա ն ք 10.1: *Եթե n-ը պարզ թիվ է, ապա կամայական $a \in \mathbf{Z}_n^*$ և կամայական $b \in \mathbf{Z}_n$ թվերի համար գոյություն ունի $a^* \in \mathbf{Z}_n$ թիվ, որի համար*

$$a \cdot_n a^* = b :$$

Ա պ ա ց ո ւ ց ո ւ մ: $a \cdot_n a_1 = 1 \Rightarrow (a \cdot_n a_1) \cdot_n b = b \Rightarrow a \cdot_n (a_1 \cdot_n b) = b$: Որպես a^* կվերցնենք $(a_1 \cdot_n b)$ թիվը: □

Իսկ այժմ ամփոփենք ստացված արդյունքները: Ստորև, թեորեմ 11-ում, յուրաքանչյուր հատկությունից հետո փակագծերում գրված է տվյալ հատկության բառացի ձևակերպումը:

Թ ե ո ր ե մ 11: *Դիցուք n-ը պարզ թիվ է: Այդ դեպքում, $\mathbf{Z}_n$ բազմության կամայական x, y և z թվերի համար տեղի ունեն հետևյալ հատկությունները.*

ա. $x +_n y \in \mathbf{Z}_n$ և $x \cdot_n y \in \mathbf{Z}_n$,

(*$\mathbf{Z}_n$-ը փակ է $+_n$ և $\cdot_n$ գործողությունների նկատմամբ*)

1. $(x +_n y) +_n z = x +_n (y +_n z)$,

(*$\mathbf{Z}_n$-ում $+_n$ գործողությունը բավարարում է զուգորդական օրենքին*)

2. $0 +_n x = x$,

(*$\mathbf{Z}_n$-ում 0-ն $+_n$ գործողության համար չեզոք տարր է*)

3. *յուրաքանչյուր $x \in \mathbf{Z}_n$ համար գոյություն ունի այնպիսի $x_1 \in \mathbf{Z}_n$, որ*

$$x +_n x_1 = 0,$$

(*$\mathbf{Z}_n$-ում $+_n$ գործողության նկատմամբ ամեն տարր ունի հակադիր*)

4. $x +_n y = y +_n x$,

(*$\mathbf{Z}_n$-ում $+_n$ գործողությունը բավարարում է տեղափոխական օրենքին*)

I. $(x \cdot_n y) \cdot_n z = x \cdot_n (y \cdot_n z)$,

(*$\mathbf{Z}_n$-ում $\cdot_n$ գործողությունը բավարարում է զուգորդական օրենքին*)

II. $1 \cdot_n x = x$,

($\mathbf{Z}_n$-ում 1-ը $\cdot_n$ գործողության համար չեզոք տարր է)

III. *եթե $x \neq 0$, ապա գոյություն ունի այնպիսի $x^* \in \mathbf{Z}_n$, որ*

$$x \cdot_n x^* = 1,$$

($\mathbf{Z}_n$-ում $\cdot_n$ գործողության նկատմամբ ոչ 0 տարրն ունի հակադարձ)

IV. $x \cdot_n y = y \cdot_n x$,

($\mathbf{Z}_n$-ում $\cdot_n$ գործողությունը բավարարում է տեղափոխական օրենքին)

բ. $x \cdot_n (y +_n z) = (x \cdot_n y) +_n (x \cdot_n z)$,

($\cdot_n$-ը բաշխական է $+_n$-ի նկատմամբ):

Ապացույց: ա. Բխում է հատկություն 1,ա.-ից:

1. Բխում է հատկություն 2,ա.-ից:
2. Բխում է $+_n$ գործողության սահմանումից:
3. $0 +_n 0 = 0$, իսկ եթե $x \in \mathbf{Z}_n$ և $x \neq 0$, ապա $n - x \in \mathbf{Z}_n$ և $x +_n (n - x) = 0$:
4. Բխում է հատկություն 1,բ.-ից:

I. Բխում է հատկություն 2,բ.-ից:

II. Բխում է $\cdot_n$ գործողության սահմանումից:

III. Բխում է թեորեմ 10.-ից:

IV. Բխում է հատկություն 1,գ.-ից:

բ. $x \cdot_n (y +_n z) =_n x \cdot (y +_n z) =_n x \cdot (y + z) =$

$= (x \cdot y) + (x \cdot z) =_n (x \cdot y) +_n (x \cdot z) =_n (x \cdot_n y) +_n (x \cdot_n z)]$: □

Այս թեորեմի հիշելը կհեշտանա, եթե նկատենք հետևյալ օրինաչափությունը. 1.-4. պնդումների ձևակերպումներում անենուրեք $+_n$ գործողությունը փոխարինելով $\cdot_n$ գործողությամբ, իսկ 0-ն փոխարինելով 1-ով, կստանանք ճիշտ I.-IV. պնդումների ձևակերպումները, միայն մի տարբերությամբ. III. պնդման մեջ ավելացված է $x \neq 0$ պայմանը (մենք արդեն նշել ենք, որ $0 \cdot_n y = 0$, այնպես որ՝ $0 \cdot_n y = 1$ հավասարումը լուծում չունի):

Հարկ է նշել, որ թեորեմ 11-ի ապացուցման ընթացքում միայն III. կետում է օգտագործված n թվի պարզ լինելը (տե՛ս թեորեմ 10): Պարզվում է, III. պնդումն ապացուցելու համար n-ի պարզ լինելուց հնարավոր չէ հրաժարվել: Իրոք, երբ n-ը որևէ բաղադրյալ թիվ է՝ $n \in \text{Բ}$, ապա $n = px$, որտեղ $1 < p \le x < n$ (հետևանք 1.1): Ուրեմն՝ $p \in \mathbf{Z}_n$, $x \in \mathbf{Z}_n$ և $p \cdot_n x = 0$: Եթե ենթադրենք, որ III. պնդումը ճիշտ է, ապա կգտնենք մի x_1 թիվ ($x_1 \in \mathbf{Z}_n$), որի համար $x \cdot_n x_1 = 1$: Բայց, այդ դեպքում, օգտագործելով I. պնդումը, կստանանք՝ $0 = 0 \cdot_n x_1 = (p \cdot_n x) \cdot_n x_1 = p \cdot_n (x \cdot_n x_1) = p \cdot_n 1 = p \neq 0$, հակասություն:

Հետևանք 11.1 *Դիցուք n-ը բաղադրյալ թիվ է: Այդ դեպքում, $\mathbf{Z}_n$ բազմության կամայական x, y և z թվերի համար տեղի ունեն հետևյալ հատկությունները.*

ա. $x +_n y \in \mathbf{Z}_n$ *և* $x \cdot_n y \in \mathbf{Z}_n$,

1. $(x +_n y) +_n z = x +_n (y +_n z)$,
2. $0 +_n x = x$,
3. *յուրաքանչյուր $x \in \mathbf{Z}_n$ համար գոյություն ունի այնպիսի $x_1 \in \mathbf{Z}_n$, որ*

$$x +_n x_1 = 0,$$

4. $x +_n y = y +_n x$,

I. $(x \cdot_n y) \cdot_n z = x \cdot_n (y \cdot_n z)$,

II. $1 \cdot_n x = x$,

IV. $x \cdot_n y = y \cdot_n x$,

բ. $x \cdot_n (y +_n z) = (x \cdot_n y) +_n (x \cdot_n z)$,

իսկ III. $\forall x[(x \in \mathbf{Z}_n \wedge x \neq 0) \Rightarrow \exists y(y \in \mathbf{Z}_n \wedge x \cdot_n y = 1)]$ *պնդումը սխալ է*:□

Հետաքրքիրն այն է, որ եթե թեորեմ 11-ի ձևակերպման մեջ ամենուրեք $\mathbf{Z}_n$-ը փոխարինենք $\mathbf{Z}$-ով, մնացած բառերն ու նշանները թողնելով անփոփոխ, ապա 2., II. և III. պնդումները կդադարեն ճիշտ լինելուց: Այսպես.

$\neg$ 2. $0 = 0 +_n n \neq n$,

$\neg$ II. $0 = 1 \cdot_n n \neq n$,

$\neg$ III. $n \neq 0 \wedge \forall y[y \in \mathbf{Z} \Rightarrow 0 = n \cdot_n y \neq 1]$,

մինչդեռ մնացած բոլոր պնդումները նույնությամբ կարելի է ապացուցել:

Այժմ վարվենք հետևյալ կերպ. թեորեմ 11-ի բոլոր 10 պայմանների ձևակերպումների մեջ ամենուրեք $\mathbf{Z}_n$-ը փոխարինենք ռացիոնալ թվերի $\mathbf{Q}$ բազմությամբ, $+_n$ գործողությունը փոխարինենք ռացիոնալ թվերի գումարումով՝ $+$, $\cdot_n$-ը՝ ռացիոնալ թվերի բազմապատկումով՝ $\cdot$: Նշված փոփոխություններից հետո տառացիորեն կստանանք.

Թ ե ո ր ե մ: *Կամայական x, y և z ռացիոնալ թվերի համար տեղի ունեն հետևյալ հատկությունները.*

ա. $x + y \in \mathbf{Q}$ *և* $x \cdot y \in \mathbf{Q}$,

(*$\mathbf{Q}$-ն փակ է $+$ և $\cdot$ գործողությունների նկատմամբ*)

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$,

(*$\mathbf{Q}$-ում $+$ գործողությունը բավարարում է զուգորդական օրենքին*)

2. $0 + x = x$,

(*$\mathbf{Q}$-ում 0-ն $+$ գործողության չեզոք տարր է*)

3. *յուրաքանչյուր* $x \in \mathbf{Q}$ *համար գոյություն ունի այնպիսի* $x_1 \in \mathbf{Q}$, *որ*

$$x + x_1 = 0,$$

(*$\mathbf{Q}$-ում $+$ գործողության նկատմամբ ամեն տարր ունի հակադիր*)

4. $x + y = y + x$,

(*$\mathbf{Q}$-ում $+$ գործողությունը բավարարում է տեղափոխական օրենքին*)

I. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$,

(*$\mathbf{Q}$-ում $\cdot$ գործողությունը բավարարում է զուգորդական օրենքին*)

II. $1 \cdot x = x$,

(*$\mathbf{Q}$-ում 0-ն $\cdot$ գործողության չեզոք տարր է*)

III. *եթե* $x \neq 0$, *ապա գոյություն ունի այնպիսի* $x^* \in \mathbf{Q}$, *որ*

$$x \cdot x^* = 1,$$

(*$\mathbf{Q}$-ում $\cdot$ գործողության նկատմամբ ոչ 0 տարրն ունի հակադարձ*)

IV. $x \cdot y = y \cdot x$,

($\mathbb{Q}$-ում $\cdot$ *գործողությունը բավարարում է տեղափոխական օրենքին*)

բ. $x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z)$,

($\cdot$-*ը բաշխական է* $+$-*ի նկատմամբ*):

Այս պնդումները հեշտությամբ ստուգվում են՝ ելնելով ռացիոնալ թվերի գումարման և բազմապատկման գործողությունների սահմանումներից: Համանման ձևով, այս 10-ը պնդումներում $\mathbb{Q}$-ն փոխարինելով իրական թվերի $\mathbb{R}$ բազմությամբ, կստանանք նույն 10-ը պնդումները արդեն իրական թվերի գումարման ու բազմապատկման գործողությունների վերաբերյալ, որոնց ճիշտ լինելն էլ անմիջապես բխում է այդ գործողությունների սահմանումներից: Մյուս կողմից, եթե մենք $\mathbb{Q}$-ն փոխարինում ենք ոչ թե $\mathbb{R}$-ով, այլ ամբողջ թվերի $\mathbb{Z}$ բազմությամբ, ապա III. պնդումը դադարում է ճիշտ լինելուց (օրինակ, $2\cdot y=1$ հավասարումը չունի ամբողջ լուծում):

III. պնդման տեղի ունենալը կամ չունենալը առաջացնում է էական որակական տարբերություն: Դրանից ելնելով, պարզ n թվի դեպքում $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ եռյակը կոչվում է *դաշտ* (մնացքների դաշտ), իսկ բաղադրյալ n-ի դեպքում $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ եռյակը կոչվում է *օղակ* (մնացքների օղակ): Ասում են նաև, որ պարզ n թվի դեպքում (բաղադրյալ n-ի դեպքում) $\mathbb{Z}_n$ բազմությունը $+_n$ և $\cdot_n$ գործողությունների նկատմամբ հանդիսանում է դաշտ (օղակ):

Նույն տրամաբանությամբ, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ և $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ եռյակները կոչվում են դաշտ, իսկ $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ եռյակը (որում III. պնդումը տեղի չունի)՝ օղակ (ամբողջ թվերի օղակ): Ի տարբերություն վերջինիս, $(\mathbb{Z}, +_n, \cdot_n)$ եռյակը օղակ չի կոչվում, քանի որ, ինչպես արդեն նշել ենք, ամբողջ թվերի $\mathbb{Z}$ բազմությունը $+_n$ և $\cdot_n$ գործողությունների նկատմամբ, չի բավարարում ոչ միայն III., այլ նաև II. և, որ առանձնապես կարևոր է, 2. պնդումներին: Դաշտի ընդհանուր հասկացությունը սկսել է օգտագործվել XX դարի սկզբում, իսկ օղակի ընդհանուր սահմանումը առաջին անգամ տրվել է 1914 թ., Ֆրենկելի կողմից:

Մի շատ բնական հարց է ծագում: Վերջին քննարկում ինչու՞ ենք մենք առանձնացնում հատկապես այդ 1.-4., I.-IV. և բ. պնդումները: Բանն այն է, որ այդ 9 պնդումներով $\mathbb{Z}_n$ բազմության $+_n$ և $\cdot_n$ գործողությունները որոշվում են միարժեքորեն: Այս փաստի ճշգրիտ ձևակերպումն ու ապացուցումը մենք կտանք *դաշտերի և օղակների* հանրահաշվի ուսումնասիրության ընթացքում:

Տրված կամայական a և b թվերի համար $a+x=b$ հավասարումն ունի միակ լուծում՝ $x=b-a$: Եթե այդ հավասարման մեջ + նշանը փոխարինենք $+_n$ նշանով, ապա կստանանք մեկ այլ հավասարում՝ $a+_n x=b$: Երբ $b\notin\mathbb{Z}_n$, ապա $a+_n x=b$ հավասարումը լուծում չունի: Իսկ եթե $b\in\mathbb{Z}_n$, ապա համաձայն հետևանք 9.2,ա. պնդման՝ $a+_n x=b \Leftrightarrow a+x=_n b$, ուստի՝ $a+_n x=b$ հավասարման բոլոր լուծումներն ունեն $x_c=b-a+nc$ տեսքը, որտեղ c-ն կամայական ամբողջ թիվ է: Հետաքրքիրն այն է, որ c-ի բոլոր հնարավոր ամբողջ արժեքների դեպքում $x_c=b-a+nc$ թվերից ճիշտ մեկն է պատկանում $\mathbb{Z}_n$ բազմությանը՝ այդ թիվը $r_{b-a,n}$-ն է: Այսպիսով, $a+_n x=b$ հավասարումն ունի $\mathbb{Z}_n$ բազմությանը պատկանող միակ լուծում՝ $r_{b-a,n}$: Իսկ ինչպիսի՞ն է իրավիճակը $a\cdot_n y=b$ հավասարման դեպքում: $0\cdot_n y=b$ հավասարումը միայն $b=0$ դեպքում լուծառ ունի, քանի որ կամայական y-ի դեպքում $0 \cdot_n y = 0$: Մյուս դեպքերում $a \cdot_n y = b$ հավասարման լուծելիության հարցը պարզաբանվում է հետևանք 10.1-ով և հետևանք 11.1-ով:

11. Վիլսոնի թեորեմը

Որպես $+_n$ և $\cdot_n$ գործողությունների կիրառության օրինակ, ապացուցենք հետևյալը:

Թ ե ո ր ե մ 12 (Վիլսոն): *n-ը պարզ թիվ է այն և միայն այն դեպքում, երբ* $(n-1)!+1 =_n 0$.

$$[\, n \in \text{Պ} \,] \Leftrightarrow [\ (n-1)!+1 =_n 0\,]:$$

Ա պ ա ց ո ւ յ ց ։ $n = 2,3$ դեպքերում թեորեմն ակնհայտ է:

($\Rightarrow$) Դիցուք n-ը պարզ թիվ է ($n \geq 5$): Նախ նկատենք, որ եթե $a \in \mathbf{Z}_n$, ապա $a \cdot_n a = 1 \Leftrightarrow a^2 =_n 1 \Leftrightarrow a^2 - 1 =_n 0 \Leftrightarrow n \mid (a-1)(a+1) \Leftrightarrow$ $[\, n \mid a-1$ կամ $n \mid a+1 \,]$ (վերջին համարժեքությունը՝ ըստ հետևանք 6.2,բ.-ի): Այսպիսով, $a \cdot_n a = 1 \Leftrightarrow [a = n-1 \vee a = 1]$: Հետևաբար, համաձայն թեորեմ 10-ի, $\{2,3,\dots,n-3,n-2\}$ բազմության թվերից կարելի է կազմել թվերի $(n-3)/2$ իրարից տարբեր զույգեր, այնպես որ յուրաքանչյուր զույգի թվերի արտադրյալը ըստ n մոդուլի հավասար լինի 1-ի: Ուրեմն, օգտվելով թեորեմ 11-ի IV և I կետերից, կարող ենք գրել որ

$$2 \cdot_n 3 \cdot_n 4 \cdot_n \dots \cdot_n (n-3) \cdot_n (n-2) = 1:$$

Բայց $2 \cdot_n 3 \cdot_n 4 \cdot_n \dots \cdot_n (n-3) \cdot_n (n-2) =_n 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-3) \cdot (n-2)$, այնպես որ

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-3) \cdot (n-2) =_n 1 \Leftrightarrow (n-1)! =_n n-1 \Leftrightarrow (n-1)!+1 =_n 0:$$

($\Leftarrow$) $(n-1)!+1 =_n 0 \Leftrightarrow n \mid (n-1)!+1$ պայմանից հետևում է, որ գոյություն ունի մի x թիվ, որի համար $nx = (n-1)!+1 \Leftrightarrow nx + (-1)(n-1)! = 1$: Ըստ հետևանք 6.2,ա.-ի, կարող ենք ասել, որ n-ը փոխադարձաբար պարզ է 1, 2, 3, …, $(n-2)$, $(n-1)$ թվերից յուրաքանչյուրի հետ, որը, համաձայն լեմմա 2.1-ի, նշանակում է, որ n-ը պարզ թիվ է: □

Գլուխ 2
Գծային հավասարումների համակարգեր և մատրիցներ

1. Այբուբեն, արտահայտություններ (բառեր)

Տառ ասելով հասկանում ենք որևէ նշան կամ սիմվոլ, որը դիտարկվում է որպես մի ամբողջականություն, այսինքն՝ նշան, որի մասնիկները առանձին վերցրած մեզ չեն հետաքրքրում: Այսպիսով, տառը պարզապես անբաժանելի նշան է: Իրարից տարբեր տառերի կամայական համախմբություն կոչվում է ***այբուբեն***:

Օրինակ, $\{a_b^3\}$ բազմությունը մեկ՝ a_b^3 տառից կազմված այբուբեն է: $\{as, b, c, 0, 1\}$ համախմբությունը հինգ տառերից կազմված այբուբեն է: Այս այբուբենում as-ը դիտարկվում է որպես մեկ անբաժանելի տառ: {գ, և, «, >} համախմբությունը քառատառ այբուբեն է և այլն: Չի բացառվում, որ այբուբենը ունենա անթիվ (ոչ վերջավոր) քանակությամբ տառեր: Օրինակ, յուրաքանչյուր բնական թիվ համարելով տառ, կստանանք

$$N_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots\}$$

անվերջ այբուբենը:

Սահմանում: *Դիցուք տրված է որևէ այբուբեն՝* $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$: *Որոշակի հերթականությամբ իրար հետևից գրված* A *այբուբենի տառերի յուրաքանչյուր վերջավոր հաջորդականություն՝* $a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}$, *կոչվում է **բառ** կամ **արտահայտություն**: Տվյալ արտահայտության (բառի) տառերի քանակը կոչվում է այդ **արտահայտության (բառի) երկարություն**:*

Այսպիսով, $a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}$ արտահայտության տառերի քանակը հավասար է k-ի: a_{i_1}-ը կոչվում է այդ արտահայտության առաջին տառ, a_{i_2}-ը՝ երկրորդ տառ և այլն:

Օրինակ՝ հինգ երկարություն ունեցող հետևյալ երկու բառերը՝ 1աա+1 և 1բ1բ1, գրված են {+, ա, 1, բ} այբուբենի տառերով: Իրար հետևից գրելով բ, ա, ռ տառերը, կստանանք հայկական այբուբենի տառերով գրված բառ բառը, որի երկարությունը երեք է և այլն: Փաստորեն, ըստ բառի սահմանման, տվյալ այբուբենի յուրաքանչյուր տառ նաև հանդիսանում է մի բառ, որն ունի մեկ երկարություն:

Սահմանում: *Տվյալ* A *այբուբենի տառերով գրած երկու արտահայտություններ կոչվում են **տառ առ տառ իրար հավասար**, եթե դրանք ունեն նույն երկարությունը և, բացի այդ, դրանց համապատասխան տառերը նույնն են, այսինքն՝ համընկնում են դրանց առաջին տառերը, համընկնում են երկրորդ տառերը, և այդպես՝ մինչև վերջին տառը:*

Եթե X և Y արտահայտությունները տառ առ տառ իրար հավասար են, ապա կգրենք. $X \equiv Y$: Օրինակ, {1,2,+} այբուբենի տառերով գրած 1+2 և 2+1 արտահայտությունները տառ առ տառ իրար հավասար չեն՝ $1+2 \not\equiv 2+1$, քանի որ դրանց առաջին տառերը չեն համընկնում:

2. Գծային հավասարումների համակարգ

Դիտարկենք $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$ բնական թվերով համարակալված նշանները: Այդ նշաններից յուրաքանչյուրը կանվանենք ***անհայտ տառ*** կամ ողղակի՝ ***անհայտ***: Կառուցենք հետևյալ բազմությունը.

$$\mathbb{R} \cup \{+\} \cup \{=\} \cup \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...\}:$$

Այս բազմության յուրաքանչյուր տարր կանվանենք տառ, իսկ ամբողջ բազմությունը՝ ***իրական գործակիցներով գծային հավասարումների այբուբեն***: Եվ այսպես, մեր այբուբենի տառերն են. իրական թվերը, + և = նշանները, և, վերջապես, $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$ անհայտ տառերը: Վերցնենք $n+1$ $(n \in \mathbb{N})$ կամայական իրական թվեր. $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, b$ և նրանց միջոցով գրենք հետևյալ արտահայտությունը (բառը).

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b, \qquad (1)$$

որի երկարությունը հավասար է $3n+1$ (եթե $n=1$, ապա (1) բառի գրության մեջ + տառը չի մասնակցի և այն կունենա $a_1x_1 = b$ տեսքը): Փաստորեն, (1) արտահայտության յուրաքանչյուր $3k-2$ -րդ տառը իրական թիվ է, $3k-1$ -րդ տառը՝ x_k -ն է, $3k$ -րդ տառը +-ն է (բացառությամբ $3n$ -րդ տառի, որը =-ն է), որտեղ $k = 0,1,2,...,n$:

Սահմանում 2.1: (1) *բառը կանվանենք* $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ ***անհայտներով գծային հավասարում կամ, պարզապես՝*** n ***անհայտով գծային հավասարում:*** $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ ***թվերը կոչվում են այդ հավասարման գործակիցներ,*** b ***-ն՝ ազատ անդամ:***

Օրինակ. $-2x_1 + 1x_2 + \sqrt{3}x_3 + -10x_4 = 7$ բառը չորս անհայտով գծային հավասարում է, որի համար $a_4 = -10$, իսկ ազատ անդամը՝ $b = 7$:

Սահմանում 2.2: ***Եթե*** $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ ***թվերն այնպիսի իրական թվեր են, որ*** $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + ... + a_n\alpha_n = b$ ***թվային արտահայտությունը նույնություն է, ապա*** $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$ n ***-յակը կոչվում է*** (1) ***գծային հավասարման լուծում:***

Պարզ է, որ (1) հավասարումը լուծում չի ունենա միայն մի դեպքում. երբ $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n = 0$, իսկ ազատ անդամը՝ $b \neq 0$:

Կարելի է դիտարկել ոչ թե մեկ, այլ մի քանի, ասենք թե m հատ n անհայտով գծային հավասարումներ: Դրանց համախմբությունը կոչվում է n ***անհայտով գծային հավասարումների համակարգ.***

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} : \qquad (2)$$

(2)-ը n անհայտով m գծային հավասարումների համակարգի ընդհանուր տեսքն է:

Սահմանում 2.3: *Իրական թվերից բաղկացած* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ *n - յակը կոչվում է* (2) *գծային հավասարումների համակարգի լուծում, եթե այդ n - յակը հանդիսանում է նշված համակարգի յուրաքանչյուր գծային հավասարման լուծում:*

Օրինակ, $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases}$ համակարգը լուծում չունի, $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 6 \\ 0x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$ համակարգը ունի միակ՝ $(2, 1)$ լուծումը, իսկ $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6 \\ 0x_1 + 0x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$ համակարգի համար լուծում է հանդիսանում յուրաքանչյուր $(\alpha, 2-\alpha, 1)$ եռյակ, որտեղ α -ն կամայական իրական թիվ է:

Սահմանում 2.4: *Եթե* (2) *գծային հավասարումների համակարգն ունի լուծում, ապա այն կոչվում է **համատեղելի** համակարգ, հակառակ դեպքում՝ **անհամատեղելի**: Իր հերթին, եթե համատեղելի համակարգն ունի միակ լուծում, ապա կոչվում է **որոշակի (որոշյալ)** համակարգ, հակառակ դեպքում՝ **անորոշ**:*

3. Տարրական ձևափոխություններ

Դիցուք, բացի (2)-ից, տրված է գծային հավասարումների ևս մեկ համակարգ.

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + c_{m3}x_3 + \ldots + c_{mn}x_n = d_m \end{cases} : \qquad (3)$$

Սահմանում 3.1: *Գծային հավասարումների* (2) *և* (3) *համակարգերը կոչվում են իրար **համարժեք**, եթե որևէ* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ *n -յակ հանդիսանում է* (2) *համակարգի լուծում այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ n -յակը հանդիսանում է* (3) *համակարգի լուծում:*

Այսպիսով, (2) և (3) համակարգերը համարժեք են այն և միայն այն դեպքում, երբ կամ նրանք ունեն միևնույն լուծումները, կամ երկուսն էլ անհամատեղելի են:

Սահմանում 3.2: *Գծային հավասարումների համակարգի հետ*

ա. *կատարել* I ***տեսակի տարրական ձևափոխություն**, նշանակում է՝ այդ համակարգի որևէ երկու հավասարումների տեղերը փոխել,*

բ. *կատարել* II ***տեսակի տարրական ձևափոխություն**, նշանակում է՝ այդ համակարգի որևէ հավասարում փոխարինել մի հավասարումով, որի գործակիցներն ու ազատ անդամը ստացվում են փոխարինվող հավասարման համապատասխան գործակիցներն ու ազատ անդամը բազմապատկելով զրոյից տարբեր միևնույն թվով.*

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$$
$$\Updownarrow$$
$$\lambda a_{i1}x_1 + \lambda a_{i2}x_2 + \lambda a_{i3}x_3 + \ldots + \lambda a_{in}x_n = \lambda b_i :$$

Կարճ կասենք, որ i-րդ հավասարումը բազմապատկել ենք λ թվով:

գ. *կատարել* III *տեսակի տարրական ձևափոխություն, նշանակում է՝ այդ համակարգի որևէ i-րդ հավասարում՝ $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$, փոխարինել $(a_{i1} + \lambda a_{s1})x_1 + (a_{i2} + \lambda a_{s2})x_2 + \ldots + (a_{in} + \lambda a_{sn})x_n = b_i + \lambda b_s$ հավասարումով, որտեղ λ-ն կամայական իրական թիվ է, իսկ $a_{s1}, a_{s2}, \ldots, a_{sn}$ և b_s թվերը մեկ այլ՝ s-րդ հավասարման գործակիցներն ու ազատ անդամն են.*

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$$
$$\Updownarrow$$
$$(a_{i1} + \lambda a_{s1})x_1 + (a_{i2} + \lambda a_{s2})x_2 + \ldots + (a_{in} + \lambda a_{sn})x_n = b_i + \lambda b_s :$$

Կարճ կասենք, որ i-րդ հավասարմանը գումարել ենք s-րդ հավասարումը, վերջինս նախօրոք բազմապատկելով λ թվով:

Թեորեմ 1: *Եթե գծային հավասարումների համակարգի նկատմամբ կատարենք* I, II *կամ* III *տեսակի տարրական ձևափոխություն, ապա ստացված համակարգը համարժեք կլինի նախորդին:*

Ապացուցում: I. Ակնհայտ է:

II. Բխում է $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + a_{i3}\alpha_3 + \ldots + a_{in}\alpha_n = b_i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda a_{i1}\alpha_1 + \lambda a_{i2}\alpha_2 + \lambda a_{i3}\alpha_3 + \ldots + \lambda a_{in}\alpha_n = \lambda b_i, (\lambda \neq 0)$

համարժեքությունից:

III. Բխում է
$$\begin{cases} a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \ldots + a_{in}\alpha_n = b_i \\ a_{s1}\alpha_1 + a_{s2}\alpha_2 + \ldots + a_{sn}\alpha_n = b_i \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a_{i1} + \lambda a_{s1})\alpha_1 + (a_{i2} + \lambda a_{s2})\alpha_2 + \ldots + (a_{in} + \lambda a_{sn})\alpha_n = b_i + \lambda b_s \\ a_{s1}\alpha_1 + a_{s2}\alpha_2 + \ldots + a_{sn}\alpha_n = b_i \end{cases}$$

համարժեքությունից: □

4. Գծային հավասարումների համակարգը լուծելու Գաուսի ալգորիթմը

Տարրական ձևափոխություններ կատարելու միջոցով գծային հավասարումների յուրաքանչյուր համակարգ կարելի է փոխարինել իրեն համարժեք մեկ այլ համակարգով, որի լուծումները (եթե դրանք կան) գտնելն ավելի հեշտ է: Հավասարման լուծման սահմանումից բխում է հետևյալ լեմման:

Լեմմա 4.1: *Դիցուք ունենք մեկ գծային հավասարումից բաղկացած համակարգ՝*

$$\{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b : \qquad (4)$$

Այդ դեպքում.

1. Եթե $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = b = 0$, *ապա իրական թվերից կազմված կամայական* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ n *-յակ կհանդիսանա* (1) *հավասարման, հետևաբար՝* (4) *համակարգի լուծում,*

2. եթե $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$ *և* $b \neq 0$, *ապա* (4)*-ը լուծում չունի,*

3. եթե $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ *գործակիցներից որևէ մեկը, ասենք թե* a_1 *-ը, հավասար չէ 0-ի, ապա* (1) *հավասարման լուծում կհանդիսանան միայն ու միայն այն* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ n *-յակները, որոնց համար* $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ *թվերը կամայական իրական թվեր են, իսկ* α_1 *-ը որոշվում է*

$$\alpha_1 = \frac{1}{a_1}[b - a_2\alpha_2 - a_3\alpha_3 - \ldots - a_n\alpha_n] \tag{5}$$

բանաձևով:

Ապացուցում: *1. և 2.* կետերն ակնհայտ են, իսկ *3.*-ը բխում է նրանից, որ (5) հավասարությունը համարժեք է $a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = b_1$ հավասարությանը: □

Այսպիսով, *3.* դեպքում, (4) համակարգի լուծումները բոլոր հնարավոր

$$\left(\frac{1}{a_1}[b - a_2\alpha_2 - a_3\alpha_3 - \ldots - a_n\alpha_n],\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots,\ \alpha_n\right)$$

n -յակներն են, որտեղ $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ թվերը կամայական իրական թվեր են:

$$x_1 = \frac{b}{a_1} - \frac{a_2}{a_1}x_2 - \frac{a_3}{a_1}x_3 - \ldots - \frac{a_n}{a_1}x_n \tag{6}$$

արտահայտությունը կոչվում է x_1 ***անհայտի արտահայտում*** $x_2, x_3, \ldots, x_n$ ***անհայտներով***: Հաշվի առնելով, որ (6) արտահայտությամբ (4) համակարգի $\left(\frac{1}{a_1}[b - a_2\alpha_2 - a_3\alpha_3 - \ldots - a_n\alpha_n],\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots,\ \alpha_n\right)$ լուծումը միարժեքորեն նկարագրվում է, (6)-ն անվանում են նաև (4)-*ի* ***ընդհանուր լուծում***:

n անհայտով m գծային հավասարումների համակարգի լուծման հարցը, երբ $m \geq 2$, կարելի է հանգեցնել $m-1$ հավասարումներով համակարգի լուծումները գտնելուն: Ավելի որոշակի, ենթադրենք, թե տրված է n անհայտով m գծային հավասարումների (2) համակարգը: Եթե այդ համակարգի առաջին հավասարման բոլոր գործակիցները 0 են, ապա կամ համակարգը լուծում չունի, կամ էլ համարժեք է մնացած $m-1$ հավասարումներից կազմված համակարգին (տես (4) համակարգին համապատասխանող *2.* և *1.* դեպքերը): Իսկ եթե այդ հավասարման որևէ մի գործակից, պարզության համար, ասենք թե $a_{11} \neq 0$, ապա կկատարենք հետևյալ տարրական ձևափոխությունները: Առաջին հավասարումը կբազմապատկենք $\lambda_i = -\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ թվով և կգումարենք i -րդ հավասարմանը, որտեղ i -ն ընդունում է 2, 3, … ,

m արժեքները: Արդյունքում կստանանք (2)-ին համարժեք հետևյալ տեսքի հավասարումների համակարգ.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ 0x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0x_1 + c_{m2}x_2 + c_{m3}x_3 + \ldots + c_{mn}x_n = d_m \end{cases} : \qquad (7)$$

Որևէ $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ n-յակ կհանդիսանա (7) համակարգի լուծում (եթե, իհարկե, այն ունի լուծում) այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$\alpha_1 = \frac{1}{a_{11}}[b_1 - a_{12}\alpha_2 - a_{13}\alpha_3 - \ldots - a_{1n}\alpha_n],$$

իսկ $(\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ $(n-1)$-յակը հետևյալ $m-1$ հավասարումներից կազմված համակարգի լուծում է.

$$\begin{cases} c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2 \\ c_{32}x_2 + c_{33}x_3 + \ldots + c_{3n}x_n = d_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{m2}x_2 + c_{m3}x_3 + \ldots + c_{mn}x_n = d_m \end{cases} :$$

Ուրեմն, մեզ մնում է լուծել $m-1$ հավասարումներից կազմված այդ համակարգը: Ահա այսպես, քայլ առ քայլ հավասարումների քանակը կնվազեցնենք, մինչև որ հասնենք մեկ հավասարման, որի լուծման եղանակը մենք նկարագրել ենք լեմմա 4.1-ում:

Գծային հավասարումների համակարգի լուծումները գտնելու հարցը ավելի պակաս քանակով գծային հավասարումներից կազմված համակարգի լուծումները գտնելուն հանգեցնող վերևում նկարագրված եղանակը կամ ալգորիթմը կոչվում է *Գաուսի ալգորիթմ*: Նկարագրված ալգորիթմից հետևում է համատեղելիության հետևյալ հայտանիշը.

Թ ե ո ր ե մ 2: *Գծային հավասարումների* (2) *համակարգը համատեղելի է այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ համակարգին համարժեք կամայական համակարգ չի պարունակում* $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \ldots + 0x_n = d$ *տեսքի հավասարում, որտեղ* $d \neq 0$*:*

Ա պ ա ց ու ց ու մ: Անհրաժեշտությունն ակնհայտ է:

Բավարարությունն ապացուցենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով՝ ըստ համակարգի մեջ մտնող հավասարումների քանակի: Երբ (2) համակարգը բաղկացած է մեկ հավասարումից, այսինքն, ունի (4) տեսքը, ապա $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$ հավասարման ինչ-որ գործակից հավասար չի լինի 0-ի և (4)-ը կլինի համատեղելի (լեմմա 4.1): Այժմ ենթադրենք, թե $m-1$ հավասարումներից կազմված համակարգերի համար թեորեմը ճիշտ է և դիտարկենք m հավասարումներից կազմված (2) համակարգը: Եթե (2) համակարգին համարժեք որևէ համակարգ չի պարունակում նշված տեսքի հավասարում, ապա (7) համակարգն էլ է այդպիսին: Հետևաբար,

$$\begin{cases} 0x_1+c_{22}x_2+c_{23}x_3+\dots+c_{2n}x_n=d_2\\ 0x_1+c_{32}x_2+c_{33}x_3+\dots+c_{3n}x_n=d_3\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ 0x_1+c_{m2}x_2+c_{m3}x_3+\dots+c_{mn}x_n=d_m \end{cases}$$

համակարգին համարժեք որևէ համակարգ չի պարունակում

$$0x_1+0x_2+0x_3+\dots+0x_n=d$$

տեսքի հավասարում: Ըստ ինդուկցիայի ենթադրության, այս վերջին համակարգը կլինի համատեղելի, քանի որ նրանում հավասարումների քանակը ավելի քիչ է: Այդ դեպքում (7)-ը (ուրեմն՝ նաև (2)-ը) կլինի համատեղելի: □

5. Մատրիցներ:

(2) համակարգի գործակիցները նույն հերթականությամբ արտագրելով, կստանանք $m\cdot n$ հատ թվերից կազմված հետևյալ ուղղանկյուն աղյուսակը.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (8)$$

բաղկացած՝ m հորիզոնական և n ուղղահայաց շարքերից:

Յուրաքանչյուր $\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in}\end{pmatrix}$ հորիզոնական շարք ($1\le i\le m$) կոչվում է (8) աղյուսակի ***տող*** (i-րդ տող), իսկ ամեն մի ուղղահայաց շարք՝

$$\begin{pmatrix} a_{1j}\\ a_{2j}\\ a_{3j}\\ \vdots\\ a_{mj} \end{pmatrix},$$

որտեղ $1\le j\le n$, կոչվում է (8) աղյուսակի ***սյուն*** (j-րդ սյուն): (8) տեսքի ամեն մի աղյուսակ կոչվում է $m\times n$ ***չափի մատրից***: Եվ այսպես, $m\times n$ չափի մատրիցը թվերից կազմված ուղղանկյուն աղյուսակ է, որն ունի m տող և n սյուն: 1×1 չափի մատրից ասելով կհասկանանք որևէ իրական թիվ: Մատրիցի գրության մեջ մասնակցող թվերը կոչվում են այդ ***մատրիցի գործակիցներ***: $m\times 1$ չափի հետևյալ

$$\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m \end{pmatrix} \qquad (9)$$

մատրիցը կոչվում է (2) գծային հավասարումների համակարգի ***ազատ ան-***

դասերի սյուն:

Մատրիցների նշանակման համար ընդունված է օգտագործել լատինական մեծատառերը: Եթե (8) մատրիցը նշանակենք A-ով, ապա նրա i-րդ տողը կնշանակենք A_i-ով, իսկ j-րդ սյունը կնշանակենք ${}^j\mathrm{A}$-ով.

$$\mathrm{A}_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}, \quad {}^j\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}:$$

Սահմանումներից հետևում է, որ յուրաքանչյուր A_i տող կարելի է համարել $1\times n$ չափի մատրից, իսկ յուրաքանչյուր ${}^j\mathrm{A}$ սյուն՝ $m\times 1$ չափի մատրից: A մատրիցի համար կօգտագործենք

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_1 \\ \mathrm{A}_2 \\ \mathrm{A}_3 \\ \vdots \\ \mathrm{A}_m \end{pmatrix},$$

ինչպես նաև՝

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} {}^1\mathrm{A} & {}^2\mathrm{A} & {}^3\mathrm{A} & \cdots & {}^n\mathrm{A} \end{pmatrix}$$

գրությունները, որոնցից առաջինում A դիտարկվում է որպես տողերի համախմբություն, իսկ երկրորդում՝ սյուների:

Ներմուծենք ևս մի նշանակում. տվյալ A մատրիցի i-րդ տողի և j-րդ սյան հատման տեղում գրված թիվը կնշանակենք $[\mathrm{A}]_{ij}$: Այսպիսով, (8) մատրիցի գործակիցների համար կարող ենք գրել. $[\mathrm{A}]_{ij} = a_{ij}$:

Միանգամայն հասկանալի է, որ (8) և (9) մատրիցներով (2) համակարգը միարժեքորեն է որոշվում և հակառակը: Եթե (2) գծային հավասարումների համակարգն ունի լուծում, ապա այդ լուծումներն ինչպե՞ս են կապված նույն համակարգի գրության մեջ մասնակցող թվերի, այսինքն՝ (8) և (9) մատրիցների հետ: Այս և այլ հարցերի պատասխանները գտնելու համար անհրաժեշտ է մատրիցների հանգամանալից ուսումնասիրություն:

6. Տարրական ձևափոխություններ մատրիցի տողերի և սյուների նկատմամբ

Սահմանում 6.1: *Մատրիցի տողերի նկատմամբ*

ա. *կատարել* I *տեսակի տարրական ձևափոխություն, նշանակում է՝ այդ մատրիցի որևէ երկու տողերի տեղերը փոխել ,* բ. *կատարել* II *տեսակի տարրական ձևափոխություն* (λ *թվով*), *նշանակում է՝ այդ մատրիցի որևէ* i*-րդ տողի բոլոր գործակիցները բազմապատկել զրոյից տարբեր միևնույն* λ *թվով*.

գ. *կատարել* III *տեսակի տարրական ձևափոխություն, նշանակում է՝ այդ մատրիցի որևէ* i *-րդ տողի յուրաքանչյուր* a_{ik} *գործակցին գումարել նույն մատրիցի մեկ այլ՝* s *-րդ տողի համապատասխան* a_{sk} *գործակիցը, վերջինս նախօրոք բազմապատկելով* λ *թվով, որտեղ* λ *-ն կամայական իրական թիվ է: Նկարագրված ձևափոխությունից հետո տվյալ մատրիցի* i *-րդ տողը կվերածվի այսպիսի* n *-յակի.* $(a_{i1}+\lambda a_{s1},\ a_{i2}+\lambda a_{s2},\ \ldots,\ a_{in}+\lambda a_{sn})$:

Այս սահմանման մեջ ամենուրեք տող բառը փոխարինելով սյուն բառով, կստանանք սյուների նկատմամբ կատարվող տարրական ձևափոխությունների սահմանումները:

(2) գծային հավասարումների համակարգին համապատասխանող ***ընդլայնված մատրից*** ասելով կհասկանանք հետևյալ $\overline{\mathrm{A}}$ մատրիցը.

$$\overline{\mathrm{A}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Պարզ է, որ (2) համակարգը միարժեքորեն է որոշվում իր ընդլայնված մատրիցով, և հակառակը: Տարրական ձևափոխությունների սահմանումներից և թեորեմ 1-ից անմիջապես բխում է հետևյալը:

Թեորեմ 3: *Եթե* $\overline{\mathrm{A}}'$ *մատրիցը ստացվում է* $\overline{\mathrm{A}}$ *-ից տարրական ձևափոխությունների օգնությամբ, ապա* $\overline{\mathrm{A}}'$ *-ին համապատասխանող գծային հավասարումների համակարգը համարժեք է* (2)*-ին:* ☐

7. Եռանկյունաձև մատրիցներ

Սահմանում 7.1: $n\times n$ *չափի* A *մատրիցը կոչվում է* ***վերին եռանկյունաձև,*** *եթե դրա գլխավոր անկյունագծից ներքև գրված բոլոր գործակիցները հավասար լինեն 0-ի, այսինքն՝* $i>j \Rightarrow [\mathrm{A}]_{ij}=0$ *: Եթե, բացի այդ, բոլոր* i *-երի համար* $[\mathrm{A}]_{ii}\neq 0$, *ապա վերին եռանկյունաձև մատրիցը կոչվում է* ***խիստ եռանկյունաձև:***

Եռանկյունաձև մատրիցի ընդհանուր տեսքը հետևյալն է.

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} : \qquad (10)$$

Եթե $i < j \Rightarrow [A]_{ij} = 0$, ապա A մատրիցը կոչվում է ***ստորին եռանկյունաձև***: Եթե մատրիցը միաժամանակ և վերին եռանկյունաձև է, և ստորին եռանկյունաձև, ապա կոչվում է ***անկյունագծային մատրից***:

Թեորեմ 4: ա. *Յուրաքանչյուր $n \times n$ չափի A մատրիցից, **տողերի** նկատմամբ տարրական ձևափոխություններ կատարելով, կարելի է ստանալ **վերին** եռանկյունաձև մատրից (տե՛ս (10)):*

բ. *Յուրաքանչյուր $n \times n$ չափի A մատրիցից, **սյուների** նկատմամբ տարրական ձևափոխություններ կատարելով, կարելի է ստանալ **վերին** եռանկյունաձև մատրից:*

Ապացուցում: ա. Հարկավոր է կրկնել գծային հավասարումների համակարգի համար նկարագրված Գաուսի ալգորիթմը: Եթե

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

մատրիցի a_{11} գործակիցը հավասար չէ 0-ի՝ $a_{11} \neq 0$, ապա կատարենք հետևյալ III տեսակի տարրական ձևափոխությունները. յուրաքանչյուր i թվի համար ($2 \le i \le n$) i-րդ տողին գումարենք 1-ին տողը, վերջինս նախօրոք բազմապատկելով $\lambda_i = -\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$ թվով. $A_i \rightleftharpoons A_i + (-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}})A_1$: Այս ձևափոխություններից հետո ստացված մատրիցի առաջին սյան բոլոր գործակիցները, բացի a_{11}-ից, հավասար կլինեն 0-ի: Իսկ եթե $a_{11} = 0$, բայց, ասենք թե, $a_{k1} \neq 0$, ապա I տեսակի տարրական ձևափոխությամբ, նախ A_k և A_1 տողերի տեղերը կփոխենք, որից հետո կկատարենք վերևում նկարագրված III տեսակի տարրական ձևափոխությունները:

Ճիշտ նույն տրամաբանությամբ, I և III տեսակի տարրական ձևափոխությունների միջոցով, մենք 0 կդարձնենք 2-րդ սյան a_{22}-ից ներքև գրված գործակիցները: Այնուհետև նույն քայլերը կկատարենք 3-րդ, 4-րդ,..., և, վերջապես, $(n-1)$-րդ սյան համար: Նկատենք, որ i-րդ սյան a_{ii} գործակցից ներքև գրված թվերը 0 դարձնող ձևափոխությունները 1-ին, 2-րդ, ..., $(i-1)$-րդ սյուների արդեն 0 դարձրած գործակիցները չեն փոխի:

բ. Եթե A մատրիցի a_{nn} գործակիցը հավասար չէ 0-ի՝ $a_{nn} \neq 0$, ապա կատարենք հետևյալ III տեսակի տարրական ձևափոխությունները. յուրաքանչյուր i թվի համար ($1 \le i \le n-1$) i-րդ սյանը գումարենք n-րդ սյունը, վերջինս բազմապատկելով $\lambda_i = -\dfrac{a_{ni}}{a_{nn}}$ թվով. ${}^iA \rightleftharpoons {}^iA + (-\dfrac{a_{ni}}{a_{nn}}) \cdot {}^nA$: Այս ձևափոխություններից հետո ստացված մատրիցի վերջին տողի բոլոր գործակիցները, բացի a_{nn} -ից, հավասար կլինեն 0-ի: Իսկ եթե $a_{nn}=0$, բայց, ասենք թե, $a_{nk}\neq 0$, ապա I տեսակի տարրական ձևափոխությամբ, նախ ^{k}A և ^{n}A սյուների տեղերը կփոխենք, որից հետո կկատարենք վերևում նկարագրված III տեսակի տարրական ձևափոխությունները:

Նույն դատողություններով, I և III տեսակի տարրական ձևափոխություններ կատարելով, 0 կդարձնենք $(n-1)$ -րդ տողի $a_{n-1\,n-1}$ -ից ձախ գրված գործակիցները: Այնուհետև, նույն քայլերը կկատարենք $(n-2)$ -րդ, $(n-3)$ -րդ,..., և, վերջապես, 2-րդ տողի համար: Նկատենք, որ i -րդ տողի a_{ii} գործակցից ձախ գրված թվերը 0 դարձնող ձևափոխությունները n -րդ, $(n-1)$ -րդ, ..., $(i+1)$ -րդ տողերի արդեն 0 դարձրած գործակիցները չեն փոխի: □

Հասկանալի է, որ թեորեմ 4-ում *վերին եռանկյունաձև* բառերը փոխարինելով *ստորին եռանկյունաձև* բառերով, դարձյալ կստանանք ճիշտ պնդում: Օրինակ, սյուների համար պնդումն ապացուցելու համար պարզապես ձևափոխությունները պետք է սկսել վերևի ձախ անկյունից և շարժվել դեպի աջ, տողերի համար՝ ներքևի աջ անկյունից և շարժվել դեպի վեր:

8. Աստիճանաձև մատրիցներ

Դիցուք $A_i=\begin{pmatrix}a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in}\end{pmatrix}$-ն տվյալ A մատրիցի որևէ ***ոչ զրոյական*** տող է, այսինքն՝ $a_{i1},a_{i2},a_{i3},\ldots,a_{in}$ թվերից գոնե մեկը հավասար չէ զրոյի: A_i տողի առաջին զրոյից տարբեր թիվն կանվանենք ***առաջատար***: Այլ կերպ՝ a_{ik} -ն կոչվում է A_i տողի առաջատար, եթե $k=\min\{s;a_{is}\neq 0\}$:

Սահմանում 8.1: A ***մատրիցը կոչվում է աստիճանաձև, եթե այն բավարարում է հետևյալ պայմաններին.***

ա. եթե որևէ A_i տող զրոյական է, ապա նրանից ներքև եղած բոլոր տողերը նույնպես զրոյական են,

բ. եթե a_{ik} -ն և a_{st} -ն համապատասխանաբար i -րդ և s l -րդ տողերի առաջատարներն են, ապա $i<s\Rightarrow k<t$:

Այսպիսով, A ոչ զրոյական մատրիցը (այսինքն՝ մատրիցը, որի գործակիցներից գոնե մեկը զրո չէ), կոչվում է աստիճանաձև, եթե այն ունի այսպիսի տեսք.

$$\begin{pmatrix} & \boxed{a_{1k_1}} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0\cdots & \cdots 0 & \boxed{a_{2k_2}} & \cdots & & \cdots \\ 0\cdots & \cdots & \cdots 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0\cdots & \cdots & \cdots & \cdots 0 & \boxed{a_{mk_m}} & \cdots \\ 0\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

որում $a_{1k_1},a_{2k_2},\ldots,a_{mk_m}$ թվերը, որոնք գտնվում են աստիճանաձև գծի անկյուններում, համապատասխան տողերի առաջատարներն են և հավասար չեն զրոյի, իսկ աստիճանաձև գծից ձախ և ներքև գտնվող բոլոր թվերը հավաստր են զրոյի: Սահմանումից նաև բխում է, որ $k_1 < k_2 < \ldots < k_n$: Այնհայտորեն՝ խիստ եռանկյունաձև մատրիցները նաև աստիճանաձև են:

Թեորեմ 5: *Յուրաքանչյուր* A *մատրիցից, տողերի նկատմամբ տարրական ձևափոխություններ կատարելով, կարելի է ստանալ աստիճանաձև մատրից:*

Ապացույց: Եթե A-ն զրոյական մատրից է, ապա այն արդեն աստիճանաձև է: Եթե A-ն զրոյական չէ, ապա դիցուք k_1-ը մատրիցի առաջին ոչ զրոյական սյան համարն է: Կիրառենք թեորեմ 4, ա. պնդումն ապացուցելու ընթացքում նկարագրված Գաուսի ալգորիթմը: Այսինքն, նախ տողերի տեղերը փոխելով հասնենք նրան, որ $a_{1k_1} \neq 0$, ապա III տեսակի տարրական ձևափոխություններով a_{1k_1} գործակցից ներքև եղած բոլոր թվերը դարձնենք զրո: Ստացված մատրիցից մտովի հեռացնելով առաջին տողը, մնացած տողերով կազմված մատրիցի համար կարող ենք պնդել, որ դրա առաջին k_1 սյուները զրոյական են: Նույն քայլերը կրկնելով այս մատրիցի նկատմամբ, վերջիվերջո, կստանանք աստիճանաձև մատրից: □

8. Աստիճանաձև մատրից ունեցող գծային հավասարումների համակարգի լուծումը

Եթե տրված է գծային հավասարումների կամայական համակարգ, ապա այդ համակարգը, ըստ թեորեմ 5-ի, համարժեք է մի համակարգի, որի ընդլայնված մատրիցը աստիճանաձև տեսքի է: Այնպես որ, մեզ մնում է լուծել աստիճանաձև մատրիցներով համակարգերը:

Դիտարկենք n անհայտով գծային հավասարումների այնպիսի համակարգ, որին համապատասխանող $\overline{\mathrm{A}}$ ընդլայնված մատրիցը աստիճանաձև է: Այդ համակարգի գործակիցներից կազմված A մատրիցը (որը ստացվում է $\overline{\mathrm{A}}$-ից, դրա վերջին սյունը հեռացնելով) նույնպես կլինի աստիճանաձև: Պարզենք, թե այդ համակարգի համատեղելիությունն ինչպես է կախված մատրիցի գործակիցներից: A մատրիցի զրոյից տարբեր տողերի քանակը (աստիճանների քանակը) նշանակենք $m(\mathrm{A})$-ով, իսկ $\overline{\mathrm{A}}$ մատրիցի ոչ զրոյական տողերի քանակը նշանակենք $m(\overline{\mathrm{A}})$-ով: Քանի որ $\overline{\mathrm{A}}$-ն ստացվում է A-ին մեկ սյուն ավելացնելով, ապա

$$m(\mathrm{A}) \le m(\overline{\mathrm{A}}) \le m(\mathrm{A})+1:$$

1. $m(\overline{\mathrm{A}}) = m(\mathrm{A})+1$: Այդ դեպքում համակարգը կպարունակի

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \ldots + 0x_n = d$$

տեսքի հավասարում, որտեղ $d \neq 0$ և կլինի ***անհամատեղելի*** (թեորեմ 2):

2. $m(\overline{\mathrm{A}}) = m(\mathrm{A}) = n$: Այս դեպքում, եթե դեն նետենք զրոյական տողերը, ապա համակարգի լուծումները չեն փոխվի: Արդյունքում՝ $\overline{\mathrm{A}}$-ից կստանանք խիստ եռանկյունաձև մատրից: Վերականգնենք համապատասխան համակարգը: Վերջին հավասարումից x_n-ը միարժեքորեն կորոշվի, այնուհետև, սրանից ելնելով, նախավերջին հավասարումից միարժեքորեն կորոշենք

x_{n-1}-ը և այլն: Այդպես վեր բարձրանալով, կպարզենք, որ համակարգը ***ունի միակ լուծում՝ որոշակի է:***

3. $m = m(A) = m(A) < n$: Ենթադրենք, թե $a_{1k_1}, a_{2k_2}, \ldots, a_{mk_m}$ գործակիցները առաջին m հավասարումների առաջատարներն են: Դրանց համապատասխան, $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_m}$ անհայտները կանվանենք ***գլխավոր***, իսկ մնացած $n-m$ անհայտները՝ ***ազատ***: Դարձյալ դեն նետենք զրոյական տողերը: Վերականգնելով համակարգը, ազատ անհայտների փոխարեն տեղադրենք կամայական թվեր: Այդ դեպքում, գլխավոր անհայտների նկատմամբ կստանանք մի համակարգ, որի մատրիցը խիստ եռանկյունաձև է: Ըստ 2. կետի, գլխավոր անհայտների նկատմամբ այս համակարգը կունենա միակ լուծում: Ազատ անհայտների փոխարեն ընտրված թվերից ու գլխավոր անհայտների գտնված արժեքներից կազմված n-յակը, ակնհայտորեն, կհանդիսանա մեր համակարգի լուծում: Այսպիսով, մեր համակարգը կլինի համատեղելի: Քանի որ ազատ անհայտները կարող ենք փոխարինել կամայական թվերով, ապա ***համակարգը, լինելով համատեղելի, կլինի անորոշ:***

Իսկ այժմ վարվենք հետևյալ կերպ: m-րդ հավասարումից x_{k_m} անհայտն արտահայտենք ազատ անհայտներով (տե՛ս (6)-ը): Ապա x_{k_m}-ի համար ստացված արտահայտությունը տեղադրենք $m-1$-րդ հավասարման մեջ և «նման անդամների միացում կատարելով», $x_{k_{m-1}}$-ն արտահայտենք ազատ անհայտներով և այլն: Վերջում բոլոր գտնված արտահայտությունները տեղադրելով առաջին հավասարման մեջ, x_{k_1}-ն արտահայտենք ազատ անհայտներով: $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_m}$ անհայտների համար ստացված արտահայտություններն անվանում են ***համակարգի ընդհանուր լուծում***: Միանգամայն հասկանալի է, որ համակարգի ընդհանուր լուծման մեջ ազատ անհայտներին տալով կամայական արժեքներ և գտնելով գլխավոր անհայտների դրանց համապատասխանող արժեքները, մենք կգտնենք մեր համակարգի լուծում և հակառակը, յուրաքանչյուր լուծում կստացվի ընդհանուր լուծումից ազատ անհայտների համապատասխան ընտրությամբ:

Օրինակ, լուծենք հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4 \end{cases}:$$

Կազմենք համապատասխան ընդլայնված մատրիցը:

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 5 & 1\\ 1 & 3 & -13 & 22 & -1\\ 3 & 5 & 1 & -2 & 5\\ 2 & 3 & 4 & -7 & 4\end{pmatrix}$$

$\overline{A}$-ը աստիճանաձև տեսքի բերելու համար 1-ին տողը գումարենք 2-րդ, 3-րդ և 4-րդ տողերին, նախօրոք բազմապատկելով, համապատասխանաբար, (-1)-ով, (-3)-ով և (-2)-ով: Կստանանք.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 5 & 1\\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2\\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2\\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2\end{pmatrix}:$$

Այժմ, 2-րդ հավասարումը գումարենք 2-րդին, ապա 3-րդին:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 5 & 1\\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}:$$

Ուրեմն, մեր համակարգը համարժեք է $\begin{cases}x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1\\ \quad x_2 - 10x_3 + 17x_4 = -2\end{cases}$ համակարգին, ինչը համապատասխանում է 3. դեպքին: x_1-ը և x_2-ը կհամարենք գլխավոր անհայտները, x_3-ն ու x_4-ը՝ ազատ անհայտներ: Ընդհանուր լուծումը կլինի. $\begin{cases}x_1 = -17x_3 + 29x_4 + 5\\ x_2 = 10x_3 - 17x_4 - 2\end{cases}$: Ազատ անհայտներին տալով կամայական արժեքներ, ընդհանուր լուծումից կգտնենք գլխավոր անհայտները: Համապատասխան քառյակները կհանդիսանան մեր սկզբնական համակարգի լուծումները: Օրինակի համար, $(-12, 8, 1, 0)$ քառյակը կլինի այդ համակարգի լուծումներից մեկը:

10. Մատրիցների գումարումը:

Դիցուք A-ն որևէ $m\times n$ չափի մատրից է, իսկ B-ն՝ $s\times t$ չափի.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1t}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2t}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{s1} & b_{s2} & b_{s3} & \cdots & b_{st}\end{pmatrix}:$$

Սահմանում: *Կասենք, որ* A *և* B *մատրիցներն իրար հավասար են և կգրենք* A = B, *եթե տեղի ունեն հետևյալ պայմանները.*

ա. $m = s$, բ. $n = t$, գ. $\forall i \forall j [a_{ij} = b_{ij}]$:

Եթե տեղի ունեն նախորդ սահմանման միայն ա. և բ. պայմանները, ապա կասենք, որ A և B մատրիցներն ունեն հավասար չափեր կամ՝ *նույն չափերը*:

Դիցուք k-ն թվերի ինչ-որ բազմություն է: $M_{m\times n}(k)$-ով կնշանակենք միևնույն՝ $m \times n$ չափերն ունեցող բոլոր այն մատրիցների բազմությունը, որոնց գործակիցները պատկանում են k բազմությանը: Այսպես, օրինակ, $M_{m\times n}(\mathbb{Z}_n)$, $M_{m\times n}(\mathbb{Z})$, $M_{m\times n}(\mathbb{Q})$, $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ բազմությունները համապատասխանաբար մնացքների, ամբողջ, ռացիոնալ, իրական և կոմպլեքս թվերի բազմությունների վրա որոշված $m \times n$ չափի մատրիցների բազմություններն են: Առայժմ մեզ հետաքրքրում է $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ բազմությունը: Ըստ սահմանման՝ $M_{1\times 1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$:

Դիտարկենք $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ մատրիցների բազմությունը: Վերցնենք այս բազմության որևէ երկու մատրիցներ $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ և $B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}:$$

Տվյալ A և B մատրիցների միջոցով կառուցենք հետևյալ մատրիցը.

$$\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & a_{m3}+b_{m3} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}: \tag{12}$$

(12) մատրիցը կոչվում է A և B մատրիցների *գումար* և նշանակվում է այսպես. $A+B$: Համաձայն (12)-ի, A և B մատրիցների գումարը, որտեղ $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, մի մատրից է, որը պատկանում է նույն $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ բազմությանը, նշանակվում է $A+B$-ով, և նրա գործակիցները որոշվում են

$$[A+B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij} \tag{13}$$

բանաձևերով: Սահմանելով երկու մատրիցների գումարը, մենք, դրանով իսկ, $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ բազմության վրա սահմանեցինք երկտեղանի գործողություն, որը նշանակեցինք +-ով:

+ գործողության հատկությունները թվարկելուց առաջ կատարենք հետևյալ նշանակումները: $\Theta_{m\times n}$-ով նշանակենք $m \times n$ չափի այն մատրիցը, որի բոլոր գործակիցները հավասար են 0-ի, իսկ ամեն մի A մատրիցի համար $-A$-ով նշանակենք այն մատրիցը, որի գործակիցները որոշվում են $[-A]_{ij} = -[A]_{ij}$ բանաձևերով:

Թեորեմ 6: $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *բազմությունը + գործողության նկատմամբ բավարարում է հետևյալ պայմաններին.*

1. $\forall A \forall B \forall C[(A+B)+C = A+(B+C)]$

(+ գործողությունը բավարարում է զուգորդական օրենքին) ,

2. $\forall A[A+\Theta_{m\times n} = A]$

($\Theta_{m\times n}$ -ը + գործողության համար չեզոք տարր է),

3. $\forall A[-A+A=\Theta_{m\times n}]$

(յուրաքանչյուր մատրից ունի հակադիր),

4. $\forall A \forall B[A+B=B+A]$

(+ գործողությունը բավարարում է տեղափոխական օրենքին):

Ապացույց: 1. Բխում է $[(A+B)+C]_{ij}=[A]_{ij}+[B]_{ij}+[C]_{ij}=[A+(B+C)]_{ij}$ նույնություններից:

4. նույնությունը ստացվում է 1.-ի նման, իսկ 2.-ն ու 3.-ը բխում են $\Theta_{m\times n}$-ի և $-A$-ի սահմանումներից: □

11. Մատրիցների բազմապատկումը:

Դիտարկենք երկու մատրիցներ, որոնցից առաջինը՝ A-ն, որևէ $m\times n$ չափի մատրից է, իսկ երկրորդը՝ B-ն, $n\times s$ չափի.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}:$$

Ընտրենք A մատրիցի մի տող՝ A_i $(1\le i\le m)$ և B մատրիցի մի սյուն՝ ${}^jB$, $(1\le j\le s)$.

$$A_i=\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in}\end{pmatrix}, \quad {}^jB=\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \\ \vdots \\ b_{nj}\end{pmatrix}:$$

Սահմանում 11.1: A_i *տողի և* ${}^jB$ *սյան արտադրյալ ասելով կհասկանանք* $a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+\ldots+a_{in}b_{nj}$ *թիվը ու կգրենք.*

$$A_i\cdot {}^jB = a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+\cdots+a_{in}b_{nj}: \tag{14}$$

Սահմանում 11.2: A *և* B *մատրիցների արտադրյալ կոչվում է* $m\times s$ *չափի հետևյալ մատրիցը՝*

$$\begin{pmatrix} A_1\cdot{}^1B & A_1\cdot{}^2B & A_1\cdot{}^3B & \cdots & A_1\cdot{}^sB \\ A_2\cdot{}^1B & A_2\cdot{}^2B & A_2\cdot{}^3B & \cdots & A_2\cdot{}^sB \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_m\cdot{}^1B & A_m\cdot{}^2B & A_m\cdot{}^3B & \cdots & A_m\cdot{}^sB \end{pmatrix}, \tag{15}$$

որի գործակիցները հաշվվում են (14) *բանաձևով:* A *և* B *մատրիցների արտադրյալը նշանակվում է այսպես.* $A \cdot B$:

Ընդգծենք, որ A և B մատրիցների արտադրյալը սահմանելու համար պահանջվում է, որ A-ն հանդիսանա $m \times n$ չափի մատրից, իսկ B-ն՝ $n \times s$ չափի, և, այս պայմանների առկայության դեպքում, նրանց արտադրյալը՝ $A \cdot B$-ն, ըստ սահմանման, $m \times s$ չափի է: Բացի այդ, $[A \cdot B]_{ij} = A_i \cdot {}^jB$: Նկատենք նաև, որ երբ A-ն $1 \times n$ չափի մատրից է, իսկ B-ն՝ $n \times 1$ չափի, ապա նրանց $A \cdot B$ արտադրյալը կլինի 1×1 չափի մատրից, այսինքն՝ թիվ, և կորոշվի $A \cdot B = A_1 \cdot {}^1B$ բանաձևով: Փաստորեն $A_i \cdot {}^jB = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ բանաձևով տրվում է A_i ($1 \times n$ չափի) և ${}^jB$ ($n \times 1$ չափի) մատրիցների արտադրյալը:

Սահմանում 11.3: *$n \times n$ չափի հետևյալ մատրիցը՝*

$$E(n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

կոչվում է n չափի միավոր մատրից:

Ըստ սահմանման, $[E(n)]_{ii} = 1$ և $i \neq j \Rightarrow [E(n)]_{ij} = 0$:

Թեորեմ 7:ա. Երբ $A \in M_{m \times n}(R)$, $B \in M_{n \times s}(R)$, $C \in M_{s \times t}(R)$, ապա

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C),$$

բ. $A \in M_{m \times n}(R) \Rightarrow [E(m) \cdot A = A \cdot E(n) = A]$,

գ. Երբ $A \in M_{m \times n}(R)$, $B \in M_{n \times s}(R)$ և $C \in M_{n \times s}(R)$, ապա

$$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C):$$

դ. Երբ $A \in M_{s \times t}(R)$, $B \in M_{m \times s}(R)$ և $C \in M_{m \times s}(R)$, ապա

$$(B + C) \cdot A = (B \cdot A) + (C \cdot A):$$

Ապացուցում: ա. Նախ, թե՛ $(A \cdot B) \cdot C$-ն, և թե՛ $A \cdot (B \cdot C)$-ն $m \times t$ չափի մատրիցներ են: Մյուս կողմից, (14) և (15) բանաձևերից անմիջապես հետևում է, որ

$$[(A \cdot B) \cdot C]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{t} [A]_{ik} [B]_{kl} [C]_{lj} = [A \cdot (B \cdot C)]_{ij}:$$

բ. Բխում է $[E(m) \cdot A]_{ij} = [A \cdot E(n)]_{ij} = [A]_{ij}$ նույնություններից:

գ. Բխում է $A_i \cdot ({}^jB + {}^jC) = (A_i \cdot {}^jB) + (A_i \cdot {}^jC)$ նույնություններից, իսկ դրանք, իրենց հերթին, անմիջապես հետևում են (14)-ից:

դ. Ապացուցվում է գ.-ի նման: □

$n\times n$ չափի մատրիցները կոչվում են *քառակուսի* մատրիցներ:

Հետևանք 7.1: *Եթե* $A,B,C\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *կամայական մատրիցներ են, ապա*

I. $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$

($\cdot$ *-ը* $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *բազմության զուգորդական գործողություն է*)

II. $E(n)\cdot A=A\cdot E(n)=A$,

($E(n)$ *-ը* $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *-ի* $\cdot$ *գործողության չեզոք տարր է*)

բ. $A\cdot(B+C)=(A\cdot B)+(A\cdot C)$ և $(B+C)\cdot A=(B\cdot A)+(C\cdot A)$

($\cdot$ *-ը* $+$ *գործողության նկատմամբ բաշխական է*): □

Հարկ է նշել, որ եթե $A,B\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, այսինքն՝ եթե կարելի է հաշվել և $A\cdot B$, և $B\cdot A$ արտադրյալները, ապա դրանք, այնուամենայնիվ, կարող են իրար հավասար չլինել: Օրինակ.

$$\begin{pmatrix}19&22\\43&50\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23&34\\31&46\end{pmatrix}:$$

Այս պատճառով էլ մենք ստիպված ենք հիմնավորել բ. բաշխականության հատկությունը և աջ, և ձախ կողմից[1]:

Սահմանում 11.4: A *$m\times n$ չափի մատրիցի շրջած* (***տրանսպոնացված***) *մատրից ասելով կհասկանանք $n\times m$ չափի այն Δ մատրիցը, որի գործակիցները որոշվում են $\forall i\forall j([\Delta]_{ji}=[A]_{ij})$ բանաձևերով: A -ի շրջած մատրիցը նշանակում են A^T -ով:*

Թեորեմ 7: $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$:

Ապացույց: $[A\cdot B]_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}[A]_{ik}[B]_{kj}=\sum\limits_{k=1}^{n}[B^T]_{jk}[A^T]_{ki}=[B^T\cdot A^T]_{ji}$: □

Հետևյալ հատկությունններն ակնհայտ են.

$$(A^T)_i=({}^iA)^T \quad \text{և} \quad {}^i(A^T)=(A_i)^T:$$

12. Մատրիցի բազմապատկումը թվով

Դիցուք A -ն կամայական $m\times n$ չափի մատրից է՝

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&a_{m3}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},$$

---

[1] Ինչպես երևում է թեորեմ 6-ից և հետևանք 7.1-ից, $(M_{n\times n}(\mathbb{R}),+,\cdot)$ եռյակը չի բավարարում *օղակի* (տե՛ս գլուխ 1, մաս 10, և գլուխ 5, սահմանում 4.1) միայն III. և IV. հատկություններին: Սրանից ելնելով է, որ $(M_{n\times n}(\mathbb{R}),+,\cdot)$ եռյակն անվանում են *$n\times n$ չափի մատրիցների ոչ տեղափոխական (ոչ կոմուտատիվ) օղակ*:

իսկ λ -ն՝ ցանկացած թիվ: λA -ով նշանակենք հետևյալ մատրիցը.

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \lambda a_{m3} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}: \tag{16}$$

Այն կոչվում է λ ***թվի և*** A ***մատրիցի արտադրյալ***:

Հ ա տ կ ո ւ թ յ ո ւ ն 1: ա. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$,

բ. $(\mu\lambda)A = \mu(\lambda A)$:

Ա պ ա ց ո ւ ց ո ւ մ : ա. Բխում է $\lambda\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(\lambda a_{ik})b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\lambda b_{kj})$ հավասարություններից:

բ. Հետևում է $(\mu\lambda)a_{ij} = \mu(\lambda a_{ij})$ նույնություններից: □

Հ ա տ կ ո ւ թ յ ո ւ ն 2: ա. $\lambda(A+B) = (\lambda A)+(\lambda B)$,

բ. $(\mu+\lambda)A = (\mu A)+(\lambda A)$:

Ա պ ա ց ո ւ ց ո ւ մ : ա. Բխում է $\lambda(a_{ij}+b_{ij}) = \lambda a_{ij}+\lambda b_{ij}$ հավասարություններից:

բ. Բխում է $(\mu+\lambda)a_{ij} = \mu a_{ij}+\lambda a_{ij}$ հավասարություններից: □

Գլուխ 3
Տեղադրություններ

1. Տեղադրության սահմանումը

Դիցուք n-ը բնական թիվ է ($n \geq 1$): Թվերի $\{1,2,3,\dots,n-1,n\}$ բազմությունը նշանակենք $\mathbf{N}_n$-ով՝ $\mathbf{N}_n = \{1,2,3,\dots,n-1,n\}$: Դիտարկենք երկու տողերից բաղկացած մի այսպիսի

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_{n-1} & i_n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_{n-1} & j_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

աղյուսակ, որի տողերից յուրաքանչյուրում, ինչ-որ հերթականությամբ, գրված են $\mathbf{N}_n$ բազմությունից վերցված n հատ թվեր.

$$\{i_1, i_2, i_3, \cdots, i_{n-1}, i_n, j_1, j_2, j_3, \cdots, j_{n-1}, j_n\} \subset \mathbf{N}_n: \tag{2}$$

Օրինակ՝
$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

աղյուսակի տողերը կազմված են $\mathbf{N}_5$ բազմության թվերից:

Սահմանում 1.1: *Իրար տակ գրված* $\begin{pmatrix} i_k \\ j_k \end{pmatrix}$ ($1 \leq k \leq n$) *թվազույգը կոչվում է* (1) *աղյուսակի սյուն* (*k-րդ սյուն*):

Այսպիսով (3)-ը ունի 5 սյուն և, օրինակ, նրա 4-րդ սյունը $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$-ն է:

Սահմանում 1.2: ***Եթե*** $1, 2, \dots, n-1, n$ ***թվերից ամեն մեկը*** (1) ***աղյուսակի տողերից յուրաքանչյուրում գրված է մեկից ոչ ավելի անգամ, ապա այդ աղյուսակը կոչվում է*** $\mathbf{N}_n$ ***բազմության*** (***վրա որոշված***) ***տեղադրություն***:

Հասկանալի է, որ (3) աղյուսակը տեղադրություն չէ, բայց բավական է նրա վերին տողում գրված երկու 5-երից որևէ մեկը փոխարինենք 4 թվով և կստանանք $\mathbf{N}_5$-ի վրա որոշված տեղադրություն:

Հայտանիշ: (1) ***աղյուսակը հանդիսանում է տեղադրություն այն և միայն այն դեպքում, երբ*** $1, 2, \dots, n-1, n$ ***թվերից ամեն մեկը*** (1) ***աղյուսակի տողերից յուրաքանչյուրում գրված է ճիշտ մեկ անգամ***:

Ապացուցում: ($\Rightarrow$) Եթե (1)-ը տեղադրություն է, ապա $i_1, i_2, \cdots, i_{n-1}, i_n$ թվերը զույգ առ զույգ իրարից տարբեր են: Ուրեմն, $\{i_1, i_2, \cdots, i_{n-1}, i_n\}$ բազմությունը բաղկացած է n հատ թվերից, այսինքն՝ $\mathbf{N}_n = \{1,2,3,\dots,n-1,n\}$ բազմության բոլոր n թվերն էլ վերևի տողում գրված են: Եվ քանի որ այդ թվերից յուրաքանչյուրը մեկից ավելի անգամ գրված լինել չի կարող, ապա՝ գրված է ճիշտ մեկ անգամ: Նույնը վերաբերում է ներքևի տողին:

($\Leftarrow$) Ակնհայտ է: □

Տեղադրությունների նշանակման համար սովորաբար օգտագործվում են հունական փոքրատառերը՝ π, σ, λ, δ և այլն:

Սահմանում 1.3: *Երկու տեղադրություններ, կոչվում են իրար հավասար, եթե նրանք ունեն միևնույն սյուները (զույգ տարրեր հերթականությամբ գրված): Եթե՝ π -ն և σ -ն իրար հավասար են, ապա կգրենք. $\pi = \sigma$* :

Օրինակ՝ $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, քանի որ նրանք կազմված են միևնույն՝ $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ սյուներից:

Այսպիսով, եթե տրված տեղադրության մեջ որևէ երկու սյուների տեղերը միմյանց հետ փոխենք, ապա ստացված տեղադրությունը, ըստ հավասարության սահմանման, կլինի սկզբնականին հավասար: Եթե $\pi = \sigma$, ապա կասենք, որ σ -ն π տեղադրության մեկ այլ ***տեսք*** է: Հետևյալ հատկություննորն անմիջապես բխում են հավասարության սահմանումից:

Հատկություն: ա. $\pi = \pi$,

բ. $\pi = \sigma \;\Rightarrow\; \sigma = \pi$,

գ. $[\pi = \sigma \;\wedge\; \sigma = \lambda] \;\Rightarrow\; \pi = \lambda$:□

Կասենք, որ տվյալ տեղադրությունն ունի ***կանոնավոր տեսք***, եթե նրա վերին տողը գրված է աճման կարգով (ձախից աջ), այսինքն, եթե նա ունի $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \cdots n-1 & n \\ j_1 & j_2 & j_3 \cdots j_{n-1} & j_n \end{pmatrix}$ տեսքը: Պարզ է, որ յուրաքանչյուր տեղադրության սյուները կարելի է այնպես վերադասավորել, որ նրա վերին տողը գրված լինի աճման կարգով: Այլ կերպ ասած, ***ամեն մի տեղադրություն հավասար է կանոնավոր տեսքի որևէ տեղադրության*** : Ակնհայտ է նաև, որ ***երկու կանոնավոր տեսքի տեղադրություններ հավասար են այն և միայն այն դեպքում, երբ նրանց ստորին տողերը համընկնում են***.

Թեորեմ 1: $\mathbb{N}_n$ *բազմության վրա որոշված իրարից տարբեր տեղադրությունների քանակը* $n!$ ***հավասար է***:

Ապացուցում: Պարզապես պետք է գտնել իրարից տարբեր կանոնավոր տեսքի տեղադրությունների քանակը: Տեսնենք, թե քանի եղանակով կարելի է լրացնել $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \cdots n-1 & n \\ j_1 & j_2 & j_3 \cdots j_{n-1} & j_n \end{pmatrix}$ տեղադրության ստորին տողը: $\mathbb{N}_n$ բազմությունից j_1 թիվն ընտրելու n հնարավորություն կա: j_1-ն ընտրելուց հետո, j_2 -ի ընտրության համար մնում է $n-1$ հնարավորություն: Ստացվում է j_1 և j_2 ընտրելու ընդամենը $n(n-1)$ հնարավորություն: Այդ հնարավորություններից ամեն մեկի համար j_3-ն ընտրելու $n-2$ հնարավորություն կա, ուրեմն՝ j_1, j_2 և j_3 ընտրելու ընդամենը $n(n-1)(n-2)$ հնարավորություն: Այսպես շարունակելով մինչև j_n թիվը, ի վերջո կստանանք $j_1, j_2, j_3, \ldots$ $\ldots, j_{n-1}, j_n$ թվերն ընտրելու $n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$ հնարավորություն:□

N_n բազմության վրա որոշված բոլոր տեղադրությունների բազմությունն ընդունված է նշանակել S_n-ով:

Հ ե տ և ա ն ք 1.1: $|S_n| = n!$:□

Հ ե տ և ա ն ք1.2: *Սխյալ տեղադրությանը համասար տարբեր տեսքի տեղադրությունների քանակը համասար է* $n!$: □

Տեղադրության յուրաքանչյուր տող կոչվում է ***տեղափոխություն:***

Հ ե տ և ա ն ք 1.3: Տարբեր տեղափոխությունների քանակը $n!$ է: □

2. Տեղադրությունների արտադրյալը

Դիցուք π-ն և σ-ն որևէ երկու տեղադրություններ են՝ $\pi, \sigma \in S_n$: Այդ երկու տեղադրությունների միջոցով այժմ մենք կկառուցենք մի նոր՝ δ տեղադրություն, որի համար կատարենք հետևյալ 1* և 2* քայլերը:

1* • σ տեղադրության սյուները վերադասավորենք այնպես, որ նրա վերին տողը համընկնի π տեղադրության ստորին տողի հետ: •

Համաձայն սահմանում 1.3-ի, այդ դեպքում σ տեղադրությունը չի փոխվի, չնայած՝ կփոխվի նրա տեսքը: Եթե π տեղադրությունն ունի (1)՝ $\pi = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_{n-1} & i_n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_{n-1} & j_n \end{pmatrix}$ տեսքը, ապա σ-ն՝ սյուների վերադասավորումից հետո, կընդունի այսպիսի տեսք.

$$\sigma = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_{n-1} & j_n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_{n-1} & k_n \end{pmatrix}: \tag{4}$$

2* • Վերցնելով π-ի վերին և σ-ի ստորին տողերը, կազմենք մի նոր այսպես. $\delta = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_{n-1} & i_n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_{n-1} & k_n \end{pmatrix}$: •

Ակնհայտորեն, δ-ն տեղադրություն է (տե՛ս հայտանիշը): 1* և 2* քայլերի արդյունքում ստացված δ-ն կոչվում է π և σ տեղադրությունների ***արտադրյալ*** : Այն փաստը, որ δ-ն π և σ տեղադրությունների արտադրյալն է, կգրենք այսպես. $\delta = \pi \circ \sigma$:

Օրինակ, ենթադրենք $\pi = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ և $\sigma = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$: Կատարելով 1* և 2* քայլերը, կստանանք, նախ՝ $\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, և, ապա՝

$$\pi \circ \sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}:$$

Ընդգծենք, որ δ արտադրյալ տեղադրության կառուցումը կախված է π-ի և σ-ի հերթականությունից: Հենց վերջին օրինակի π և σ տեղադրությունների համար $\pi \circ \sigma \neq \sigma \circ \pi$, քանի որ

$$\sigma\circ\pi=\begin{pmatrix}5&3&2&4&1\\3&2&5&4&1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}2&1&5&3&4\\4&2&5&3&1\end{pmatrix}=\pi\circ\sigma:$$

Լ ե մ ա 2.1: $\pi\circ\sigma$ արտադրյալը կախված չէ π տեղադրության սյուների հերթականությունից:

Ա պ ա ց ո ւ ց ո ւ մ: Եթե π տեղադրության որևէ երկու՝ $\begin{pmatrix}i_l\\j_l\end{pmatrix}$ և $\begin{pmatrix}i_m\\j_m\end{pmatrix}$ սյուների տեղերը փոխենք և հետո կատարենք 1° քայլը, ապա σ-ի (4) տեսքում կփոխվեն միայն $\begin{pmatrix}j_l\\k_l\end{pmatrix}$ և $\begin{pmatrix}j_m\\k_m\end{pmatrix}$ սյուների տեղերը: Ուրեմն՝ 2° քայլից հետո δ տեղադրությունում կփոխվեն միայն $\begin{pmatrix}i_l\\k_l\end{pmatrix}$ և $\begin{pmatrix}i_m\\k_m\end{pmatrix}$ սյուների տեղերը, այսինքն՝ δ-ն չի փոխվի: □

Լ ե մ ա 2.2: $\pi\circ\sigma$ արտադրյալը կախված չէ σ տեղադրության սյուների հերթականությունից:

Ա պ ա ց ո ւ ց ո ւ մ: Բխում է արտադրյալը հաշվելու 1° քայլից: □

Լեմմա 2.1-ից, մասնավորապես հետևում է, որ արտադրյալը հաշվելիս կարելի է 1° քայլում σ-ն թողնել անփոփոխ, իսկ π-ի սյուները վերադասավորել այնպես, որ նրա ներքևի տողը համընկնի σ-ի վերին տողի հետ և դրանից հետո կիրառել 2° քայլը:

Թ ե ո ր ե մ 2: $(\pi=\pi_1\ \wedge\ \sigma=\sigma_1)\Rightarrow\pi\circ\sigma=\pi_1\circ\sigma_1$:

Ապացուցում: Հավասար տեղադրությունները կարող են տարբերվել միայն սյուների հերթականությամբ: Այդպիսով, թեորեմը բխում է լեմմաներ 2.1 և 2.2-ից: □

Համաձայն թեորեմ 2-ի, π և σ տեղադրությունների $\pi\circ\sigma$ արտադրյալը միարժեքորեն է որոշվում և կախված չէ այն բանից, թե ինչ տեսքով են տրված π և σ տեղադրությունները: Հետևաբար, տեղադրությունների յուրաքանչյուր (π,σ) կարգավորված զույգին համապատասխանեցնելով $\pi\circ\sigma$ տեղադրությունը՝ $(\pi,\sigma)\mapsto\pi\circ\sigma$, կստանանք S_n բազմության վրա երկտեղանի գործողություն (սահմանում Բ), որը կնշանակենք նույն $\circ$ նշանով: Այսպիսով՝ $\circ$-ը S_n-ի վրա երկտեղանի գործողություն է:

Հ ա տ կ ո ւ թ յ ո ւ ն 1: $\forall\pi\forall\sigma\forall\lambda[\pi\circ(\sigma\circ\lambda)=(\pi\circ\sigma)\circ\lambda]$:

Ապացուցում: Դիցուք $\pi=\begin{pmatrix}i_1&i_2&i_3&\cdots&i_{n-1}&i_n\\j_1&j_2&j_3&\cdots&j_{n-1}&j_n\end{pmatrix}$, $\sigma=\begin{pmatrix}j_1&j_2&j_3&\cdots&j_{n-1}&j_n\\k_1&k_2&k_3&\cdots&k_{n-1}&k_n\end{pmatrix}$ և $\lambda=\begin{pmatrix}k_1&k_2&k_3&\cdots&k_{n-1}&k_n\\t_1&t_2&t_3&\cdots&t_{n-1}&t_n\end{pmatrix}$: Այդ դեպքում.

$$\pi\circ\sigma=\begin{pmatrix}i_1&i_2&i_3&\cdots&i_{n-1}&i_n\\k_1&k_2&k_3&\cdots&k_{n-1}&k_n\end{pmatrix}\text{ և }\sigma\circ\lambda=\begin{pmatrix}j_1&j_2&j_3&\cdots&j_{n-1}&j_n\\t_1&t_2&t_3&\cdots&t_{n-1}&t_n\end{pmatrix}:$$

Ուրեմն` $(\pi\circ\sigma)\circ\lambda=\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_{n-1} & i_n\\ t_1 & t_2 & t_3 & \cdots & t_{n-1} & t_n\end{pmatrix}=\pi\circ(\sigma\circ\lambda)$:□

Այսպիսով, $\pi\circ\sigma\circ\lambda$ արտադրյալը կախված չէ փակագծերի դասավորությունից, այնպես որ փակագծերը կարելի է նաև չդնել: Իրականում, նույն դատողություններով կարելի է ապացուցել ավելի ընդհանուր փաստ:

Ընդհանրացված զուգորդական հատկություն: *Որոշակի հերթականությամբ տրված* $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{m-1}, \pi_m$ $(m\ge 3)$ *տեղադրությունների*

$$\pi_1\circ\pi_2\circ\ldots\circ\pi_{m-1}\circ\pi_m$$

արտադրյալը կախված չէ փակագծերի դասավորությունից :

Ապացուցում: π_i $(2\le i\le m)$ տեղադրության սյուները այնպես վերադասավորենք, որ նրա վերին տողը համընկնի π_{i-1} տեղադրության ստորին տողի հետ: Այդ դեպքում, $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{m-1}, \pi_m$ հաջորդականության կամայական երկու հարևան տեղադրությունների արտադրյալի վերին տողը կհամընկնի ձախակողմյան տեղադրության վերին տողի հետ, իսկ ստորին տողը` աջակողմյանի ստորին տողի հետ: Հետևաբար, անկախ փակագծերի դասավորությունից, սյուների վերադասավորումից հետո, $\pi_1\circ\pi_2\circ\ldots\circ\pi_{m-1}\circ\pi_m$ արտադրյալի վերին տողը կհամընկնի $\pi_1$-ի վերին տողի հետ, իսկ ստորին տողը` π_m-ի ստորին տողի հետ: Մնում է կիրառել թեորեմ 2-ը, ըստ որի, տեղադրությունների արտադրյալը կախված չէ արտադրիչների սյուների հերթականությունից: □

Դիտարկենք մի տեղադրություն, որի վերին և ստորին տողերը համընկնում են` $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \cdots & i_{n-1} & i_n\\ i_1 & i_2 & i_3 \cdots & i_{n-1} & i_n\end{pmatrix}$: Եթե այս տեղադրության սյուները վերադասավորենք, դարձյալ կստանանք մի տեղադրություն, որի երկու տողերը համընկնում են: Պարզ է, որ բոլոր այդպիսի տեղադրությունները հավասար են $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \cdots & n-1 & n\\ 1 & 2 & 3 \cdots & n-1 & n\end{pmatrix}$ կանոնավոր տեսքի տեղադրությանը, հետևաբար` իրար հավասար են:

Սահմանում 2.1: *Եթե տեղադրության վերին և ստորին տողերը համընկնում են, ապա այն կոչվում է նույնական տեղադրություն* : *Նույնական տեղադրությունը կնշանակենք* θ *տառով* :

Հատկություն 2: $\forall\pi\ [\pi\circ\theta=\theta\circ\pi=\pi]$:

Ապացուցում: Իրոք, $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \cdots & i_{n-1} & i_n\\ i_1 & i_2 & i_3 \cdots & i_{n-1} & i_n\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_{n-1} & i_n\\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_{n-1} & j_n\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_{n-1} & i_n\\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_{n-1} & j_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_{n-1} & i_n\\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_{n-1} & j_n\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_{n-1} & j_n\\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_{n-1} & j_n\end{pmatrix}$:□

Հատկություն 3: $\forall\pi\,\exists_1\,\pi'\ [\pi\circ\pi'=\pi'\circ\pi=\theta]$:

Ապացուցում:Եթե $\pi=\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_{n-1} & i_n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_{n-1} & j_n \end{pmatrix}$, ապա որպես π' վերցնենք հետևյալ տեղադրությունը.

$$\pi'=\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_{n-1} & j_n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_{n-1} & i_n \end{pmatrix}:$$

Ըստ արտադրյալի սահմանման $\pi\circ\pi'=\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_{n-1} & i_n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_{n-1} & i_n \end{pmatrix}=\theta$, ինչպես նաև $\pi'\circ\pi=\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_{n-1} & j_n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_{n-1} & j_n \end{pmatrix}=\theta$:

Ենթադրենք, թե ինչ-որ π''-ի համար $\pi\circ\pi''=\pi''\circ\pi=\theta$: Օգտագործելով հատկություն 1-ը, կստանանք $\pi''=\pi''\circ\theta=\pi''\circ(\pi\circ\pi')=(\pi''\circ\pi)\circ\pi'=\theta\circ\pi'=\pi'$, այնպես որ, տվյալ π տեղադրության համար հատկություն 3-ին բավարարող π' տեղադրությունը միակն է: □

Եթե $\pi\circ\pi'=\pi'\circ\pi=\theta$, ապա π'-ը (որը, ինչպես տեսանք, միակն է) կոչվում է π-ի հակադարձ տեղադրություն և նշանակվում է այսպես. π^{-1}: Այսպիսով՝ π^{-1} տեղադրությունը գտնելու համար պարզապես պետք է π տեղադրության տողերի տեղը փոխել:

Այժմ ամփոփենք ստացված արդյունքները:

Թ ե ո ր ե մ 3: Տեղադրությունների S_n բազմության տարրերը $\circ$ գործողության նկատմամբ բավարարում են հետևյալ հատկություններին.

1. $\forall\pi\forall\sigma\forall\lambda[\pi\circ(\sigma\circ\lambda)=(\pi\circ\sigma)\circ\lambda]$,

   ($\circ$ *գործողությունը բավարարում է զուգորդական օրենքին*)

2. $\forall\pi\,[\pi\circ\theta=\theta\circ\pi=\pi]$,

   (θ *-ն հանդիսանում է չեզոք տարր՝ $\circ$ գործողության համար*)

3. $\forall\pi\exists_1\pi'\,[\pi\circ\pi'=\pi'\circ\pi=\theta]$,

   (*յուրաքանչյուր տեղադրություն ունի հակադարձ տեղադրություն*): □

3. Տեղադրության նշան

Սահմանում 3.1: *Կասենք,որ i_t և i_k թվերի զույգը (j_t և j_k թվերի զույգը) $\pi=\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_{n-1} & i_n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_{n-1} & j_n \end{pmatrix}$ տեղադրության վերին տողում (ներքևի տողում) կատարում է կարգի խախտում, կամ որ նույնն է՝ կազմում է ինվերսիա, եթե նրանցից մեծը գրված է փոքրից ձախ:*

Այսպիսով, i_t և i_k թվերի զույգը (j_t և j_k թվերի զույգը) եթե կատարում է կարգի խախտում, ապա $t<k$ և $i_t>i_k$ ($j_t>j_k$): Դիցուք տվյալ π տեղադրության բոլոր հնարավոր կարգի խախտում կազմող զույգերի քանակը՝ նրա երկու տողում միասին վերցրած, հավասար է s թվին:

Սահմանում 3.2: *Եթե s-ը բաժանվում է 2-ի՝ զույգ թիվ է, ապա π տեղադրությունը կոչվում է զույգ, հակառակ դեպքում՝ կենտ: $\varepsilon(\pi)=(-1)^s$ թիվը կոչվում է π տեղադրության նշան:*

Օրինակ, նույնական տեղադրությունը զույգ է, քանի որ նրա երկու տողում էլ նույն քանակությամբ կարգի խախտում կատարող թվերի զույգ կա: Հետևաբար՝ $\varepsilon(\theta)=1$, որտեղ θ-ն նույնական տեղադրությունն է:

Թեորեմ 4: *Եթե տվյալ $\pi=\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots i_t \cdots i_k \cdots i_{n-1} & i_n \\ j_1 & j_2 & j_3 \cdots j_t \cdots j_k \cdots j_{n-1} & j_n \end{pmatrix}$ տեղադրության վերին (ստորին) տողում որևէ երկու՝ i_t և i_k (j_t և j_k) թվերի տեղերը միմյանց հետ փոխենք, մնացած բոլոր թվերը թողնելով անշարժ, ապա ստացված տեղադրության նշանը կլինի սկզբնական տեղադրության նշանին հակադիր:*

Ապացուցում: Վերին տողում նշված թվերի տեղափոխությունից հետո ստացված տեղադրությունը կունենա

$$\pi'=\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots i_k \cdots i_t \cdots i_{n-1} & i_n \\ j_1 & j_2 & j_3 \cdots j_t \cdots j_k \cdots j_{n-1} & j_n \end{pmatrix} \tag{5}$$

տեսքը: Նախ, ենթադրենք թե տեղափոխվող i_t և i_k թվերը իրար հարևան են, այսինքն՝ $k=t+1$: Այդ դեպքում, եթե i_t և i_{t+1} թվերը π տեղադրությունում կատարում են կարգի խախտում, ապա π'-ում չեն կատարի և՝ հակառակը: Մնացած բոլոր հնարավոր թվազույգերը π-ում կատարում են կարգի խախտում ճիշտ այն դեպքում, երբ նաև π'-ում են կատարում կարգի խախտում: Ուրեմն, եթե π տեղադրության բոլոր հնարավոր ինվերսիաների քանակը s է, ապա π'-ի ինվերսիաների քանակը կլինի կամ $s+1$ կամ $s-1$: $\varepsilon(\pi')=(-1)^{s\pm1}=(-1)(-1)^s=-\varepsilon(\pi)$:

Եթե i_t և i_k թվերը հարևան չեն, ապա i_t-ն $k-t$ անգամ հերթով տեղափոխենք իրենից անմիջապես աջ գրված թվերի հետ: Ապա ստացված տեղադրությունում i_k-ն $k-t-1$ անգամ հաջորդաբար տեղափոխենք իրենից ձախ գրված հարևան թվերի հետ: Այս $(k-t)+(k-t-1)=2(k-t)-1$ քայլերից հետո կստանանք ճիշտ π' տեղադրությունը: Հետևաբար, համաձայն սկզբում ապացուցածի, եթե π տեղադրության նշանը $2(k-t)-1$ անգամ բազմապատկենք (-1)-ով, ճիշտ կստանանք π' տեղադրության նշանը. $\varepsilon(\pi')=(-1)^{2(k-t)-1}\varepsilon(\pi)=-\varepsilon(\pi)$: Նույնը՝ ստորին տողի համար: □

Հետևանք 4.1: *Եթե տեղադրության որևէ երկու սյուների տեղերը փոխենք, ապա նրա նշանը չի փոխվի:*

Ապացուցում: Տեղափոխել $\begin{pmatrix} i_l \\ k_l \end{pmatrix}$ և $\begin{pmatrix} i_m \\ k_m \end{pmatrix}$ սյուները՝ նույնն է, որ նախ վերևի տողում տեղափոխել i_l և i_m, ապա ներքևի տողում՝ k_l և k_m թվերը: □

Հետևանք 4.2: *Տեղադրության նշանը կախված չէ նրա տեսքից՝*

$$\pi=\sigma \Rightarrow \varepsilon(\pi)=\varepsilon(\sigma):$$

Ապացուցում: Հավասար տեղադրությունները կազմված են միևնույն սյուներից և մեկից մյուսը կարելի է ստանալ սյուների վերադասավորումով: Մնում է օգտվել հետևանք 4.1-ից: □

4. Դիրքափոխություններ

Յուրաքանչյուր $\begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix}$ տեսքի սյուն կոչվում է ***նույնական սյուն***: Նույնական տեղադրությունը միակ տեղադրությունն է, որի բոլոր սյուները նույնական են: Դժվար չէ հասկանալ, որ եթե տեղադրությունը նույնական չէ, ապա այն ունի առնվազն երկու ոչ նույնական սյուներ:

Սահմանում 4.1: *Այն տեղադրությունը, որը ստացվում է նույնական տեղադրությունից նրա ներքևի տողում որևէ երկու՝ i և j $(1 \le i < j \le n)$ թվերի տեղերը փոխանակելով, կոչվում է **դիրքափոխություն** (կամ՝ **տրանսպոզիցիա**) և նշանակվում է այսպես.* (ij):

Այսպիսով՝ $(ij) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots i \cdots & j \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots j \cdots & i \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$: Այն ունի ճիշտ երկու ոչ նույնական սյուներ, որոնք են՝ $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ և $\begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix}$: Եթե մենք i և j թվերի տեղերը փոխենք նույնական տեղադրության ոչ թե ներքևի, այլ վերևի տողում, դարձյալ կստանանք (ij) դիրքափոխությունը, բայց արդեն՝ ոչ կանոնավոր տեսքով:

Հայտանիշ: ***Տեղադրությունը հանդիսանում է դիրքափոխություն այն և միայն այն դեպքում, երբ այն ունի ճիշտ երկու ոչ նույնական սյուներ***:

Ապացուցում: (⇒) Ակնհայտ է:

(⇐) Դիցուք $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$-ն և $\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$-ը տվյալ տեղադրության երկու ոչ նույնական սյուներն են: Այդ դեպքում $j = k$ և $i = l$, քանի որ, օրինակ, եթե $j \ne k$, ապա $\begin{pmatrix} j \\ j \end{pmatrix}$-ն դիտարկվող տեղադրության համար կհանդիսանա սյուն: Կստացվի, որ ներքևի տողում j-ն գրված է երկու անգամ՝ հակասություն: □

Հետևանք 4.3: *Յուրաքանչյուր* (ij) ***դիրքափոխություն կենտ տեղադրություն է և, ուրեմն,*** $\varepsilon((ij)) = -1$:

Ապացուցում: (ij) դիրքափոխության ներքևի տողում i և j թվերի տեղերը փոխելով կստանանք նույնական, հետևաբար՝ զույգ տեղադրություն: Մնում է օգտվել թեորեմ 6-ից: □

Հետևյալ հատկությունները ակնհայտ են:

Հատկություն 1: ա. $(ij) = (ji)$, բ. $(ij) \circ (ij) = \theta$: □

Հատկություն 2: ա. ***Եթե տվյալ*** π ***տեղադրությունը աջ կողմից բազմապատկենք*** (ij) ***դիրքափոխությամբ, ապա քննարկենք*** π ***տեղադրության ներքևի տողում իրար հետ կփոխանակվեն*** i ***և*** j ***թվերը***:

բ. *Երբ տվյալ π տեղադրությունը ձախ կողմից բազմապատկենք (ij) դիրքափոխությամբ, ապա ընդամենը π տեղադրության վերևի տողում իրար հետ կփոխանակվեն i և j թվերը*: □

Հետևանք 4.4: *Երբ տվյալ π տեղադրությունը աջից (կամ՝ ձախից) բազմապատկենք (ij) դիրքափոխությամբ, ապա ստացված տեղադրության նշանը հակադիր կլինի π-ի նշանին՝ $\varepsilon(\pi\circ(ij))=\varepsilon((ij)\circ\pi)=-\varepsilon(\pi)$*:

Ապացուցում: Բխում է հատկություն 2-ից և թեորեմ 6-ից: □

5. Ցիկլեր

Դիցուք $\{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, i_k\}\subset \mathbf{N}_n$ և $\mathbf{N}_n-\{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, i_k\}=\{j_1, j_2, \ldots, j_{n-k}\}$, որտեղ $1\le k\le n$ (երբ $k=n$, ապա $\mathbf{N}_n-\{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, i_k\}=\varnothing$):

Սահմանում: $\begin{pmatrix} i_1\ i_2\cdots i_{k-1}\ i_k\ j_1\ j_2\cdots j_{n-k} \\ i_2\ i_3\cdots i_k\ \ i_1\ j_1\ j_2\cdots j_{n-k}\end{pmatrix}$ *տեսք ունեցող տեղադրությունը կոչվում է ցիկլ և նշանակվում է այսպես.* $(i_1\ i_2\ i_3\cdots\ i_{k-1}\ i_k)$: k *թիվը կոչվում է այդ ցիկլի երկարություն*:

Այսպիսով՝ $(i_1\ i_2\ i_3\cdots\ i_{k-1}\ i_k)=\begin{pmatrix} i_1\ i_2\cdots i_{k-1}\ i_k\ j_1\ j_2\cdots j_{n-k} \\ i_2\ i_3\cdots i_k\ \ i_1\ j_1\ j_2\cdots j_{n-k}\end{pmatrix}$: Սահմանման համաձայն, այս ցիկլի վերջին $n-k$ սյուները (և միայն դրանք) նույնական են: $\begin{pmatrix} i_1\ i_2\cdots i_{k-1}\ i_k\ j_1\ j_2\cdots j_{n-k} \\ i_2\ i_3\cdots i_k\ \ i_1\ j_1\ j_2\cdots j_{n-k}\end{pmatrix}$ ցիկլի առաջին k սյուները շրջապտույտով վերադասավորելով, կստանանք $\begin{pmatrix} i_k\ i_1\ i_2\cdots i_{k-1} j_1\ j_2\cdots j_{n-k} \\ i_1\ i_2\ i_3\cdots i_k\ \ j_1\ j_2\cdots j_{n-k}\end{pmatrix}$ տեղադրությունը, որը $(i_k\ i_1\ i_2\ i_3\cdots\ i_{k-1})$ ցիկլն է: Ուրեմն, ըստ տեղադրությունների հավասարության սահմանման, $(i_1\ i_2\ i_3\cdots i_{k-1}\ i_k)=(i_k\ i_1\ i_2\cdots i_{k-2}\ i_{k-1})$:Այս վերջին նույնությունից էլ հետևում են $(i_1\ i_2\ i_3\cdots i_{k-1}\ i_k)=(i_k\ i_1\ i_2\cdots i_{k-2}\ i_{k-1})=$ $=(i_{k-1}\ i_k\ i_1\ i_2\cdots i_{k-3}\ i_{k-2})=\ldots=(i_2\ i_3\cdots\ i_{k-1}\ i_k\ i_1)$ հավասարությունները:

Դժվար չէ համոզվել, որ յուրաքանչյուր դիրքափոխություն 2 երկարության ցիկլ է և հակառակը: Բացի այդ, 3, հատկություն 2-ի միջոցով հաշվելով $\underbrace{(((\ldots(((}_{k-1}i_1i_2)\circ(i_1i_3))\circ(i_1i_4))\circ\ldots)\circ(i_1i_{k-1}))\circ(i_1i_k))$ արտադրյալը (2, ընդհանրացված զուգորդական հատկության շնորհիվ, այդ արտադրյալը, անկախ փակագծերի դասավորությունից, միարժեքորեն է որոշվում, այնպես որ փակագծերը բաց կթողնենք), կստանանք.

$$(i_1i_2)\circ(i_1i_3)\circ(i_1i_4)\circ\ldots\circ(i_1i_{k-1})\circ(i_1i_k)=$$

$$=\begin{pmatrix} i_1\ i_2\ i_3\ i_4\cdots i_{k-1}\ i_k\ j_1\ j_2\cdots j_{n-k} \\ i_2\ i_1\ i_3\ i_4\cdots i_{k-1}\ i_k\ j_1\ j_2\cdots j_{n-k}\end{pmatrix}\circ(i_1i_3)\circ(i_1i_4)\circ\ldots\circ(i_1i_{k-1})\circ(i_1i_k)=$$

$$=\begin{pmatrix} i_1\ i_2\ i_3\ i_4\cdots i_{k-1}\ i_k\ j_1\ j_2\cdots j_{n-k} \\ i_2\ i_3\ i_1\ i_4\cdots i_{k-1}\ i_k\ j_1\ j_2\cdots j_{n-k}\end{pmatrix}\circ(i_1i_4)\circ\ldots\circ(i_1i_{k-1})\circ(i_1i_k)=\ \ldots\ =$$

$$=\begin{pmatrix} i_1\ i_2 \cdots i_{k-1}\ i_k\ j_1\ j_2 \cdots j_{n-k} \\ i_2\ i_3 \cdots i_k \quad i_1\ j_1\ j_2 \cdots j_{n-k} \end{pmatrix} = (i_1\ i_2\ i_3 \cdots\ i_{k-1}\ i_k):$$ Ձևակերպենք տառացվածը:

Լեմմա 5.1: $(i_1\ i_2\ i_3 \cdots\ i_{k-1}\ i_k) = (i_1 i_2)\circ(i_1 i_3)\circ(i_1 i_4)\circ\ldots\circ(i_1 i_{k-1})\circ(i_1 i_k)$: □

Սահմանում: $(i_1\ i_2\ i_3 \cdots\ i_{k-1}\ i_k)$ *և* $(l_1\ l_2\ l_3 \cdots\ l_{s-1}\ l_s)$ *ցիկլերը կոչվում են անկախ, եթե* $\{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, i_k\} \cap \{l_1, l_2, l_3, \cdots, l_{s-1}, l_s\} = \varnothing$:

Քանի որ $(i_1\ i_2\ i_3 \cdots\ i_{k-1}\ i_k)$ և $(l_1\ l_2\ l_3 \cdots\ l_{s-1}\ l_s)$ անկախ ցիկլերին համապատասխանող $\{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, i_k\}$ և $\{l_1, l_2, l_3, \cdots, l_{s-1}, l_s\}$ բազմությունները չեն կարող ունենալ ընդհանուր թիվ, ապա $k+s \le n$:

Հատկություն: *Եթե* $(i_1\ i_2\ i_3 \cdots\ i_{k-1}\ i_k)$ *և* $(l_1\ l_2\ l_3 \cdots\ l_{s-1}\ l_s)$ *ցիկլերն անկախ են, ապա*

$$(i_1\ i_2\ i_3 \cdots\ i_{k-1}\ i_k)\circ(l_1\ l_2\ l_3 \cdots\ l_{s-1}\ l_s) = (l_1\ l_2\ l_3 \cdots\ l_{s-1}\ l_s)\circ(i_1\ i_2\ i_3 \cdots\ i_{k-1}\ i_k): \quad (6)$$

Ապացուցում: $(i_1\ i_2\ i_3 \cdots\ i_{k-1}\ i_k)$ տեղադրության մեջ $l_1, l_2, l_3, \cdots, l_{s-1}, l_s$ թվեր պարունակող սյուները նույնական են, իսկ $(l_1\ l_2\ l_3 \cdots\ l_{s-1}\ l_s)$ տեղադրության մեջ՝ $i_1, i_2, i_3 \ldots, i_{k-1}, i_k$ թվեր պարունակող սյուներն են նույնական: Ուրեմն, (6) հավասարության և աջ, և ձախ կողմերը հավասար են

$$\begin{pmatrix} i_1\ i_2 \cdots i_{k-1}\ i_k\ l_1\ l_2 \cdots l_{s-1}\ l_s \cdots \\ i_2\ i_3 \cdots i_k \quad i_1\ l_2\ l_3 \cdots l_s \quad l_1 \cdots \end{pmatrix}$$

տեղադրությանը, որում, բացի նշված $k+s$ սյուներից, մնացած սյուները (եթե կան այդպիսիք) նույնական են: □

Թեորեմ 5: *Յուրաքանչյուր տեղադրություն հավասար է վերջավոր քանակությամբ, զույգ առ զույգ անկախ, ցիկլերի արտադրյալի* :

Ապացուցում: Դիցուք $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$-ը տրված λ տեղադրության որևէ ոչ նույնական սյուն է: Կազմենք հետևյալ σ_1 ցիկլը. $\sigma_1 = (a_1\ a_2\ a_3 \cdots a_{k-1}\ a_k)$, որտեղ $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{k-1},\ a_k$ թվերն ընտրված են այնպես, որ $\begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, \ldots,$ $\begin{pmatrix} a_{k-1} \\ a_k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_k \\ a_1 \end{pmatrix}$ սյուները նույնպես λ տեղադրության սյուներ են: Նշված սյուների հաջորդականությունը ընտրվում է հետևյալ սկզբունքով.

1. յուրաքանչյուր սյան վերևի թիվը հավասար է իրենից առաջ ընտրված սյան ներքևի թվին,

2. սյուների ընտրությունը դադարեցվում է, հենց որ առաջին անգամ հասնում ենք այն սյանը, որի ներքևի թիվն a_1-ն է:

Այդպես ընտրված յուրաքանչյուր սյուն ոչ նույնական է: Բացի այդ, նրանց ներքևի թվերն իրարից տարբեր են, այնպես որ, իրոք, ինչ-որ մի $k \le n$ քայլում ներքևում կստանանք a_1 թիվը:

Այժմ λ_1-ով նշանակենք այն տեղադրությունը, որի $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{k-1}, a_k$ թվեր պարունակող սյուները նույնական են, իսկ բոլոր մնացած սյուները նաև λ-ի համար են սյուներ հանդիսանում: Այսինքն, եթե

$$\lambda = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \cdots a_{k-1} & a_k & j_1 & j_2 \cdots j_{n-k} \\ a_2 & a_3 \cdots a_k & a_1 & l_1 & l_2 \cdots l_{n-k} \end{pmatrix},$$

ապա՝

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \cdots a_{k-1} & a_k & j_1 & j_2 \cdots j_{n-k} \\ a_1 & a_2 \cdots a_{k-1} & a_k & l_1 & l_2 \cdots l_{n-k} \end{pmatrix}:$$

Այդ դեպքում, անմիջապես ստացվում է, որ $\lambda = \sigma_1 \circ \lambda_1$: Բացի այդ, λ_1-ի նույնական սյուների քանակն ավելի շատ է, քան λ-ինը: Նույն դատողությունները կրկնելով λ_1-ի համար, կստանանք $\lambda_1 = \sigma_2 \circ \lambda_2$, որտեղ σ_2-ը ցիկլ է, իսկ λ_2-ի նույնական սյուների քանակն ավելին է, քան λ_1-ինը: Այսպիսով, $\lambda = \sigma_1 \circ \lambda_1 = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \lambda_2$: Այս դատողությունները կրկնելով մի քանի անգամ, ինչ-որ մի t քայլից հետո կստանանք $\lambda = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \ldots \circ \sigma_t \circ \lambda_t$, որտեղ λ_t-ի արդեն բոլոր սյուներն են նույնական, այսինքն՝ $\lambda_t = \theta$: Սա նշանակում է, որ $\lambda = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \ldots \circ \sigma_t$: Մնում է տեսնել, որ $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_t$ ցիկլերն անկախ են: □

Թ ե ո ր ե մ 6: *Յուրաքանչյուր տեղադրություն հավասար է վերջավոր քանակությամբ դիրքափոխությունների արտադրյալի: Բացի այդ, եթե λ տեղադրությունը վերլուծված է s հատ $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_s$ դիրքափոխությունների արտադրյալի՝ $\lambda = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_{s-1} \circ \tau_s$, ապա $\varepsilon(\lambda) = (-1)^s$:*

Ապացույց: Պետք է, նախ, տեղադրությունը, ըստ թեորեմ 5-ի, վերլուծել ցիկլերի արտադրյալի, ապա, համաձայն լեմմա 5.1-ի, յուրաքանչյուր ցիկլ վերլուծել դիրքափոխությունների արտադրյալի:

Այնուհետև, դիրքափոխությունների $\tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_{s-1} \circ \tau_s$ արտադրյալը ձախից բազմապատկելով θ նույնական տեղադրությամբ, կստանանք. $\lambda = \theta \circ \tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_{s-1} \circ \tau_s$: θ-ն զույգ տեղադրություն է: Այդ զույգ տեղադրությունը աջ կողմից s անգամ բազմապատկելով դիրքափոխություններով, ըստ հետևանք 4.4-ի, կստանանք մի տեղադրություն, որի նշանը ստացվում է նույնական տեղադրության նշանից, վերջինս s անգամ բազմապատկելով (-1)-ով: Այսպիսով՝ $\varepsilon(\lambda) = \varepsilon(\theta) \cdot (-1)^s = (-1)^s$: □

Հ ե տ և ա ն ք 6.1: $\varepsilon((i_1\ i_2\ i_3 \cdots\ i_{k-1}\ i_k)) = (-1)^{k-1}$:

Ապացույց: Հարկավոր է օգտվել լեմմա 5.1-ից՝

$$(i_1\ i_2\ i_3 \cdots\ i_{k-1}\ i_k) = (i_1 i_2) \circ (i_1 i_3) \circ (i_1 i_4) \circ \ldots \circ (i_1 i_{k-1}) \circ (i_1 i_k)$$

և թեորեմ 6-ից: □

Հ ե տ և ա ն ք 6.2: Կամայական λ և π տեղադրությունների համար

$$\varepsilon(\lambda \circ \pi) = \varepsilon(\lambda) \cdot \varepsilon(\pi):$$

Ապացույց: Ըստ թեորեմ 6-ի, λ-ն և π-ն վերլուծենք դիրքափոխությունների արտադրյալի. $\lambda = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_{s-1} \circ \tau_s$ և $\pi = \iota_1 \circ \iota_2 \circ \ldots \circ \iota_{m-1} \circ \iota_m$: Այդ դեպքում՝ $\lambda\circ\pi=\tau_1\circ\tau_2\circ\ldots\circ\tau_{s-1}\circ\tau_s\circ\iota_1\circ\iota_2\circ\ldots\circ\iota_{m-1}\circ\iota_m$ վերլուծության արտադրիչների քանակը կլինի $s+m$ հատ: Ուրեմն՝

$$\varepsilon(\lambda\circ\pi)=(-1)^{s+m}=(-1)^s\cdot(-1)^m=\varepsilon(\lambda)\cdot\varepsilon(\pi):\square$$

6. Զույգ և կենտ տեղադրությունների քանակը

Թեորեմ 7: $\forall\pi_1\forall\pi_2\forall\pi_3[\pi_1\neq\pi_2\Leftrightarrow\pi_1\circ\pi_3\neq\pi_2\circ\pi_3]$:

Ապացուցում: Եթե $\pi_1\circ\pi_3=\pi_2\circ\pi_3$, ապա այդ հավասարության երկու կողմն էլ աջից բազմապատկելով π_3-ի հակադարձով կստանանք.

$$(\pi_1\circ\pi_3)\circ\pi_3^{-1}=(\pi_2\circ\pi_3)\circ\pi_3^{-1}:$$

Օգտվենք զուգորդականությունից. $(\pi_1\circ\pi_3)\circ\pi_3^{-1}=\pi_1\circ(\pi_3\circ\pi_3^{-1})=\pi_1\circ\theta=\pi_1$: Նույն ձևով $(\pi_2\circ\pi_3)\circ\pi_3^{-1}=\pi_2$: Ուրեմն՝ $\pi_1=\pi_2$, հակասություն:$\square$

Հետևանք 7.1: *Եթե $\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_{m-1},\pi_m$ (m հատ) տեղադրությունները իրարից տարբեր կենտ տեղադրություններ են, ապա*

$$\pi_1\circ(12),\ \pi_2\circ(12),\ldots,\ \pi_{m-1}\circ(12),\ \pi_m\circ(12)$$

(m հատ) տեղադրությունները իրարից տարբեր են և զույգ են:

Ապացուցում: Այն, որ $\pi_1\circ(12)$, $\pi_2\circ(12),\ldots,$ $\pi_{m-1}\circ(12)$, $\pi_m\circ(12)$ տեղադրություններից յուրաքանչյուրը զույգ է, բխում է հետևանք 4.4-ից: Իսկ դրանց իրարից տարբեր լինելը բխում է թեորեմ 6-ից: $\square$

Հետևանք 7.2: *Կենտ տեղադրությունների քանակը զույգ տեղադրությունների քանակից շատ չէ*:$\square$

Հետևանք 7.3: *Եթե $\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_{m-1},\pi_m$ (m հատ) տեղադրությունները իրարից տարբեր զույգ տեղադրություններ են, ապա*

$$\pi_1\circ(12),\ \pi_2\circ(12),\ldots,\ \pi_{m-1}\circ(12),\ \pi_m\circ(12)$$

(m հատ) տեղադրությունները իրարից տարբեր են և կենտ են:

Ապացուցվում է հետևանք 7.1-ի նման:

Հետևանք 7.4: *Կենտ տեղադրությունների քանակը զույգ տեղադրությունների քանակից շատ չէ*:$\square$

Հետևանք 7.5: *Զույգ և կենտ տեղադրությունների քանակներն իրար հավասար են և հավասար են $\frac{n!}{2}$ թվին:*

Ապացուցում: Բխում է հետևանքներ 7.2 , 7.4-ից և հետևանք 1.1-ից, ըստ որի՝ $|S_n|=n!$:$\square$

Բոլոր զույգ տեղադրությունների բազմությունն ընդունված է նշանակել A_n-ով: Այսպիսով՝ $|A_n|=\frac{n!}{2}$: Թվարկենք A_n-ին վերաբերող մի քանի հատկություններ;

Հատկություն 1: $[\pi_1\in A_n\ \wedge\ \pi_2\in A_n]\Rightarrow\pi_1\circ\pi_2\in A_n$:

Ապացուցում: Բխում է հետևանք 6.1-ից: $\square$

Հատկություն 2: $\theta\in A_n$:$\square$

Հատկություն 3: $\pi\in A_n\ \Rightarrow\ \pi^{-1}\in A_n$:

Ապացուցում: π^{-1} տեղադրությունը ստացվում են π-ի տողերի տեղերը փոխելուց: Ուրեմն, եթե π տեղադրությունը զույգ է, ապա π^{-1}-ը նույնպես զույգ է: □

7. Տեղադրությունը որպես արտապատկերում

Վերցնենք մի որևէ տեղադրություն՝ $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_{n-1} & j_n \end{pmatrix}$, գրված կանոնավոր տեսքով: Այս տեղադրության յուրաքանչյուր $\begin{pmatrix} k \\ j_k \end{pmatrix}$ սյան վերևի k թվին համապատասխանեցնենք ներքևի j_k թիվը՝ $k \mapsto j_k$ $(1 \le k \le n)$: Բոլոր այդ համապատասխանությունների համախմբությունը հանդիսանում է արտապատկերում՝ $N_n = \{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}$ բազմությունից դեպի նույն N_n բազմություն, որը կնշանակենք միևնույն π տառով՝ $\pi : N_n \to N_n$ և կանվանենք ***π տեղադրությամբ առաջացած արտապատկերում***: Այս սահմանումից հետևում է, որ եթե π տեղադրության սյուների տեղերը փոխենք, ապա նրանով առաջացած արտապատկերումը չի փոխվի, այսինքն՝ համարժեք տեղադրություններով առաջանում է միևնույն արտապատկերումը: Պարզ է, որ յուրաքանչյուր k-ի համար $\pi : k \mapsto j_k$, կամ, որ նույնն է, $\pi(k) = j_k$, այնպես որ, π տեղադրությունը կարելի է գրել նաև հետևյալ տեսքով.

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \cdots & \pi(n-1) & \pi(n) \end{pmatrix}:$$

• Սահմանում 6.1: $\Phi : A \to B$ *արտապատկերումը կոչվում է **ինյեկտիվ արտապատկերում**, եթե տեղի ունի հետևյալ պայմանը.*

$$\forall x \forall y [x \neq y \Rightarrow \Phi(x) \neq \Phi(y)] : \bullet$$

Լեմմա 6.1: *Յուրաքանչյուր π տեղադրությամբ առաջացած արտապատկերումը հանդիսանում է ինյեկտիվ արտապատկերում*:

Ապացուցում: Ըստ սահմանում 1.2-ի, $\pi(1), \pi(2), \pi(3), \cdots, \pi(n-1)$, $\pi(n)$ թվերը զույգ առ զույգ իրարից տարբեր են: □

• Սահմանում 6.2: $\Phi : A \to B$ *արտապատկերումը կոչվում է **սյուրյեկտիվ արտապատկերում**, եթե տեղի ունի հետևյալ պայմանը.*

$$\forall y [y \in B \Rightarrow \exists x [x \in A \wedge \Phi(x) = y]] : \bullet$$

Լեմմա 6.2: *Յուրաքանչյուր π տեղադրությամբ առաջացած արտապատկերումը հանդիսանում է սյուրյեկտիվ արտապատկերում*:

Ապացուցում: Համաձայն հայտանիշի, $N_n = \{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}$ բազմության յուրաքանչյուր թիվ π տեղադրության ներքևի տողում գրված է: Իսկ դա նշանակում է, որ $\pi : N_n \to N_n$ արտապատկերումը սյուրյեկտիվ է: □

• Սահմանում 6.3: $\Phi : A \to B$ *արտապատկերումը կոչվում է **բիեկտիվ**, եթե այն և ինյեկտիվ, և սյուրյեկտիվ արտապատկերում է:* •

Թեորեմ 8: *Յուրաքանչյուր π տեղադրությամբ առաջացած արտապատկերումը հանդիսանում է բիեկտիվ արտապատկերում*: □

Գլուխ 4
Որոշիչներ

1. Մատրիցի որոշիչի սահմանումը

Այս բաժնում մենք դիտարկելու ենք միայն $n \times n$ չափի մատրիցներ: Նման մատրցները կոչվում են n չափի ***քառակուսի*** մատրիցներ:

Եվ այսպես, դիցուք A-ն n չափի քառակուսի մատրից է.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ինչպես նախկինում, S_n-ը N_n բազմության բոլոր տեղադրությունների բազմությունն է: Վերցնենք որևէ π տեղադրություն.

$$\pi = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_{n-1} & i_n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_{n-1} & j_n \end{pmatrix}:$$

π տեղադրության յուրաքանչյուր $\begin{pmatrix} i_k \\ j_k \end{pmatrix}$ սյանը համապատասխան ընտրենք A մատրիցի $a_{i_k j_k}$ գործակիցը: Այդ եղանակով ընտրված բոլոր n գործակիցների

$$a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \ldots a_{i_{n-1} j_{n-1}} a_{i_n j_n} \tag{1}$$

արտադրյալը կանվանենք (A մատրիցի) π ***տեղադրության միջոցով կառուցված արտադրյալ***: Եթե π տեղադրության տեսքը փոխենք, այսինքն՝ կատարենք սյուների տեղափոխություն, ապա նկարագրված արտադրյալում կփոխվեն միայն արտադրիչների տեղերը, այնպես որ արտադրյալը չի փոխվի: Տեղադրության սահմանումից հետևում է, որ (1) արտադրյալի արտադրիչները ընտրված են տարբեր տողերից: Ավելին, դրանք նաև տարբեր սյուներից են: Ճիշտ է նաև հակառակը. եթե դիտարկենք (1) տեսքի մի արտադրյալ, որի արտադրիչները վերցված են տարբեր տողերից և տարբեր սյուներից, ապա արտադրիչների ն առաջին ինդեքսները կլինեն զույգ առ զույգ իրարից տարբեր, և՛ երկրորդ ինդեքսները: Սա նշանակում է, որ այդ ինդեքսներից կազմած $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_{n-1} & i_n \\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_{n-1} & j_n \end{pmatrix}$ աղյուսակը կլինի տեղադրություն: Ուրեմն, (1) տեսքի բոլոր այն արտադրյալների քանակը, որի արտադրիչները տարբեր տողերից և տարբեր սյուներից են, հավասար է N_n բազմության բոլոր տեղադրությունների քանակին, այսինքն՝ $n!$:

Եթե π տեղադրությունը տրված է կանոնավոր տեսքով՝

$$\pi=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \cdots & \pi(n-1) & \pi(n)\end{pmatrix},$$

իսկ $\varepsilon(\pi)$-ն π տեղադրության նշանն է, ապա յուրաքանչյուր

$$\varepsilon(\pi)\cdot a_{1\,\pi(1)}a_{2\,\pi(2)}\cdots a_{n-1\,\pi(n-1)}a_{n\,\pi(n)}$$

արտադրյալ կանվանենք A մատրիցի π ***տեղադրությանը համապատասխանող արտադրյալ:*** Այդ արտադրյալի համար կօգտագործենք նաև $\text{Ա}(\pi,\mathrm{A})$ նշանակումը.

$$\text{Ա}(\pi,\mathrm{A})=\varepsilon(\pi)\cdot a_{1\,\pi(1)}a_{2\,\pi(2)}\cdots a_{n-1\,\pi(n-1)}a_{n\,\pi(n)} \qquad (2)$$

Դիցուք $\pi_1,\pi_2,\pi_3,\ldots,\pi_{n!}$ հաջորդականությունը S_n բազմության բոլոր $n!$ տեղադրությունների հաջորդականությունն է՝ որևէ հերթականությամբ: Յուրաքանչյուր π_k տեղադրության միջոցով կառուցենք դրան համապատասխանող արտադրյալը՝ $\text{Ա}(\pi_k,\mathrm{A})$:

Սահմանում 1.1: $\text{Ա}(\pi_1,\mathrm{A})+\text{Ա}(\pi_2,\mathrm{A})+\ldots+\text{Ա}(\pi_{n!},\mathrm{A})=\sum_{k=1}^{n!}\text{Ա}(\pi_k,\mathrm{A})$ ***գումարը կոչվում է*** A ***մատրիցի որոշիչ*** և նշանակվում է $\det \mathrm{A}$-ով.

$$\det\mathrm{A}=\sum_{k=1}^{n!}\text{Ա}(\pi_k,\mathrm{A}):$$

$\sum_{k=1}^{n!}\text{Ա}(\pi_k,\mathrm{A})$ գումարը գրելու համար մենք կօգտագործենք նաև $\sum_{\pi\in S_n}\text{Ա}(\pi,\mathrm{A})$ նշանակումը: Եվ այսպես,

$$\det\mathrm{A}=\sum_{k=1}^{n!}\text{Ա}(\pi_k,\mathrm{A})=\sum_{\pi\in S_n}\text{Ա}(\pi,\mathrm{A}):$$

Հաշվի առնելով (2) հավասարությունը, կստանանք.

$$\det\mathrm{A}=\sum_{\pi\in S_n}\text{Ա}(\pi,\mathrm{A})=\sum_{\pi\in S_n}\varepsilon(\pi)\cdot a_{1\,\pi(1)}a_{2\,\pi(2)}\cdots a_{n-1\,\pi(n-1)}a_{n\,\pi(n)} \qquad (3)$$

(3) գումարի գումարելիների ճիշտ կեսը համապատասխանում է զույգ տեղադրություններին, այսինքն՝ վերցված է $\varepsilon(\pi)=1$ նշանով: Ճիշտ այդքան գումարելի էլ վերցված է $\varepsilon(\pi)=-1$ նշանով (գլուխ 3, հետևանք 7.5):

2. Փոքր կարգի որոշիչների բանաձևերը

Դարձյալ դիտարկենք $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$ մատրիցը: Որոշիչի սահմանումից միանգամից բխում է, որ երբ $n=1$, ապա $\det\mathrm{A}=\det a_{11}=a_{11}$:

Թեորեմ 1: *Եթե $n=2$, ապա* $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$: (4)

Ապացուցում: Բանն այն է, որ S_2-ը բաղկացած է հետևյալ երկու տեղադրություններից՝ $S_2 = \{\theta, (12)\}$: □

Հետևանք 1.1: ա. *Հարթության* $\vec{a}=(\alpha_1, \alpha_2)$ *և* $\vec{b}=(\beta_1, \beta_2)$ *վեկտորները համագիծ (կոլինեար) են այն և միայն այն դեպքում, երբ* $\det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{pmatrix}=0$:

բ. *Մի կետից ելնող* $\vec{a}=(\alpha_1, \alpha_2)$ *և* $\vec{b}=(\beta_1, \beta_2)$ *վեկտորների վրա կառուցված զուգահեռանիստի մակերեսը որոշվում է հետևյալ բանաձևով.*

$$S = |\det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{pmatrix}|:$$

Ապացուցում: ա. $(\alpha_1,\alpha_2)=\lambda(\beta_1,\beta_2) \Leftrightarrow \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = \lambda\beta_1\beta_2 - \lambda\beta_2\beta_1 = 0$:

բ. $\vec{a}=(\alpha_1, \alpha_2, 0)$ և $\vec{b}=(\beta_1, \beta_2, 0)$ վեկտորների վեկտորական արտադրյալի մոդուլը, մի կողմից, հավասար է նշված մակերեսին, մյուս կողմից՝ հավասար է $|\det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{pmatrix}|$ թվին: □

Թեորեմ 2: *Եթե $n=3$, ապա*

$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$: (5)

Ապացուցում: S_3-ը բաղկացած է հետևյալ վեց տեղադրություններից.

$$S_3 = \{\theta, (123), (132), (13), (12), (23)\},$$

որոնց համապատասխանող գումարելիներն էլ հենց գրված են (5) բանաձևում, ընդ որում՝ նույն հերթականությամբ: □

Հետևանք 2.1: ա. *Տարածության* $\vec{a}=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{b}=(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ *և* $\vec{c}=(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ *վեկտորները համահարթ են (կոմպլանար) են, այսինքն՝ այդ վեկտորների խառն արտադրյալը հավասար է զրոյի այն և միայն այն դեպքում, երբ* $\det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{pmatrix}=0$:

բ. *Մի կետից ելնող* $\vec{a}=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{b}=(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ *և* $\vec{c}=(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ *վեկտորների վրա կառուցված զուգահեռանիստի V ծավալը որոշվում է հետևյալ բանաձևով.* $V = |\det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{pmatrix}|$:

Ապացուցում: ա. Բավական է տեսնել, որ $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորների խառն արտադրյալը հաշվվում է (5) բանաձևով.

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \alpha_1\beta_2\gamma_3 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2:$$

բ. Նշված ծավալը հավասար է $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ խառը արտադրյալի մոդուլին: □

Երբ $n\geq 4$, ապա որոշիչի գումարելիների քանակն արագորեն աճում է: Հնարավոր է՞ հայտնաբերել որոշիչների այնպիսի հատկություններ, որոնք կօգնեն շրջանցել (3) բանաձևը: Մեզ համար ուղենիշ կարող է ծառայել այն ակնհայտ փաստը, որ մատրիցի գործակիցների մեջ որքան շատ են 0-ները, այնքան շատ գումարելիներ (3) բանաձևում հավասար կլինեն 0-ի: Օրինակ,

երբ $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0&0&a_{13}&0\\a_{21}&0&0&0\\0&a_{32}&0&0\\0&0&0&a_{44}\end{pmatrix}$, ապա $\det\mathrm{A}=\mathrm{U}(\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix},\mathrm{A})=a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}$:

3. Տեղադրություններից կախված արտապատկերումներ

Որոշիչների հատկությունների ուսումնասիրումը հեշտացնելու համար ապացուցենք տեխնիկական բնույթի մի քանի բանաձևեր:

Դիցուք F-ը տեղադրությունների բազմությունից դեպի իրական թվերի բազմություն որևէ արտապատկերում է. $F:\mathrm{S}_n\to\mathbf{R}$: Յուրաքանչյուր π տեղադրության պատկերը F արտապատկերման ժամանակ նշանակվում է $F(\pi)$-ով: Բոլոր հնարավոր $\pi_1,\pi_2,\pi_3,...,\pi_{n!}$ տեղադրությունների պատկերների գումարը՝ $F(\pi_1)+F(\pi_2)+...+F(\pi_{n!})$, կնշանակենք $\sum\limits_{\pi\in\mathrm{S}_n}F(\pi)$-ով.

$$F(\pi_1)+F(\pi_2)+...+F(\pi_{n!})=\sum_{\pi\in\mathrm{S}_n}F(\pi):$$

Օրինակ, երբ $\forall\pi[\,F(\pi)=1]$, ապա $\sum\limits_{\pi\in\mathrm{S}_n}F(\pi)=n!$, իսկ երբ $F(\pi)=\varepsilon(\pi)$, որտեղ $\varepsilon(\pi)$-ն π տեղադրության նշանն է, ապա $\sum\limits_{\pi\in\mathrm{S}_n}F(\pi)=0$, քանի որ զույգ և կենտ տեղադրությունների քանակը նույնն է: Բերենք մեկ այլ օրինակ: Դիցուք A-ն որևէ n չափի քառակուսի մատրից է: Կառուցենք $F_\mathrm{A}:\mathrm{S}_n\to\mathbb{R}$ արտապատկերում հետևյալ ձևով. $F_\mathrm{A}(\pi)=\mathrm{U}(\pi,\mathrm{A})$: Այդ դեպքում՝

$$\sum_{\pi\in\mathrm{S}_n}F_\mathrm{A}(\pi)=\sum_{\pi\in\mathrm{S}_n}\mathrm{U}(\pi,\mathrm{A})=\det\mathrm{A}:$$

Լեմմա 3.1: *Դիցուք $(i\,j)$-ն որևէ դիրքափոխություն է: Այդ դեպքում.*

$$\sum_{\pi\in\mathrm{S}_n}F(\pi)=\sum_{\pi\in\mathrm{S}_n}F((i\,j)\circ\pi): \tag{4}$$

Ապացուցում: $\pi\neq\sigma\iff(i\,j)\circ\pi\neq(i\,j)\circ\sigma$ (գլուխ 3, թեորեմ 7): Ուրեմն, երբ $\pi_1,\pi_2,\pi_3,...,\pi_{n!}$-ը բոլոր տեղադրությունների հաջորդականությունն է, ապա՝

$$(i\,j)\circ\pi_1,\ (i\,j)\circ\pi_2,\ (i\,j)\circ\pi_3,\ldots,\ (i\,j)\circ\pi_{n!}$$

տեղադրությունների հաջորդականությունը նույնպես բոլոր տեղադրություն-ների հաջորդականությունն է, միայն թե՝ մեկ այլ հերթականությամբ: Իրոք, քանի որ դրա անդամները զույգ առ զույգ իրարից տարբեր են, ապա դրանց քանակը $n!$ է, այսինքն՝ համընկնում է բոլոր տեղադրությունների քանակի հետ: Ուրեմն, $S_n=\{(i\,j)\circ\pi_1,\ (i\,j)\circ\pi_2,\ (i\,j)\circ\pi_3,\ldots,\ (i\,j)\circ\pi_{n!}\}$: Այսպիսով.

$$\sum_{\pi\in S_n}F(\pi)=\sum_{k=1}^{n!}F(\pi_k)=\sum_{k=1}^{n!}F((i\,j)\circ\pi_k)=\sum_{\pi\in S_n}F((i\,j)\circ\pi):\quad\square$$

Լեմմա 3.2: $\sum_{\pi\in S_n}F(\pi)=\sum_{\pi\in S_n}F(\pi^{-1})$: (5)

Ապացուցում: $\pi\neq\sigma\Leftrightarrow\pi^{-1}\neq\sigma^{-1}$ (գլուխ 3, մաս 2., հատկություն 3): Ուրեմն, եթե $\pi_1,\pi_2,\pi_3,\ldots,\pi_{n!}$-ը բոլոր տեղադրություններն են, ապա

$$\pi_1^{-1},\ \pi_2^{-1},\ \pi_3^{-1},\ldots,\ \pi_{n!}^{-1}$$

տեղադրությունների հաջորդականությունը բոլոր տեղադրությունների հաջորդականությունն է, քանի որ նրա անդամները զույգ առ զույգ իրարից տարբեր են: Այսպիսով, (5) հավասարության երկու կողմերում էլ նույն գումարելիներն են գրված, միայն թե տարբեր հերթականությամբ ($n=2$ դեպքում հերթականությունն էլ է համընկնում): $\square$

Լեմմա 3.3: Դիցուք $(i\,j)$-ն որևէ դիրքափոխություն է: Այդ դեպքում.

$$\text{ա.}\ \sum_{\pi\in S_n}F(\pi)=\sum_{\pi\in A_n}[F(\pi)+F((i\,j)\circ\pi)]:$$

Ապացուցում: Բավական է նկատել, որ $\{(i\,j)\circ\pi;\ \pi\in A_n\}$ բազմությունը համընկնում է բոլոր կենտ տեղադրությունների բազմության հետ: $\square$

4. Որոշիչների հատկությունները

Հատկություն 1: *Եթե A մատրիցի տողերից մեկը կազմված է միայն զրոներից՝* $A_i=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}$, *ապա* $\det(A)=0$:

Ապացուցում: Որոշիչի յուրաքանչյուր գումարելի ունի

$$\text{Ա}(\pi,A)=\varepsilon(\pi)\cdot a_{1\,\pi(1)}a_{2\,\pi(2)}\cdots a_{i\,\pi(i)}\cdots a_{n-1\,\pi(n-1)}a_{n\,\pi(n)}$$

տեսքը, որի $a_{i\,\pi(i)}$ արտադրիչը 0 է՝ $a_{i\,\pi(i)}=0$: $\square$

Դիցուք A մատրիցի գործակիցները բավարարում են $i>j\Rightarrow[A]_{ij}=0$ պայմանին: Այդ դեպքում A-ն կունենա

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix}\qquad(6)$$

տեսքը և կասենք, որ A մատրիցի *անկյունագծից ներքև* գտնվող գործակից-ները 0 են:

Հատկություն 2: *Եթե* A *մատրիցն ունի* (6) *տեսքը, այսինքն՝ անկյու-նագծից ներքև գտնվող գործակիցները* 0 *են, ապա*

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{n-1\,n-1}a_{nn}:$$

Ապացուցում: Եթե π տեղադրությունը նույնական չէ՝ $\pi \neq \theta$, ապա այն անպայման ունի այնպիսի $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ սյուն, որի համար $i > j$ (քանի որ, հակառակ դեպքում $\pi(n) = n$, $\pi(n-1) = n-1$, ..., $\pi(1) = 1$): Իսկ այդ դեպքում $a_{ij} = a_{i\,\pi(i)} = 0$, ուրեմն,

$$\text{Ա}(\pi, A) = \varepsilon(\pi)\cdot a_{1\,\pi(1)}a_{2\,\pi(2)}\cdots a_{i\,\pi(i)}\cdots a_{n-1\,\pi(n-1)}a_{n\,\pi(n)} = 0:$$

Հետևաբար, $\det(A) = \text{Ա}\ (\theta, A) = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{n-1\,n-1}a_{nn}$:□

Հատկություն 3: *Եթե* A^* *մատրիցը ստացվում է* A *մատրիցից, վերջի-նիս որևէ* i *-րդ տողը բազմապատկելով տրված* λ *թվով, ապա*

$$\det A^* = \lambda\cdot\det A:$$

Ապացուցում: Հետևում է

$$\text{Ա}(\pi, A^*) = \varepsilon(\pi)\cdot a_{1\,\pi(1)}a_{2\,\pi(2)}\ldots(\lambda a_{i\,\pi(i)})\ldots a_{n-1\,\pi(n-1)}a_{n\,\pi(n)} =$$

$= \lambda\cdot\varepsilon(\pi)\cdot a_{1\,\pi(1)}a_{2\,\pi(2)}\ldots a_{i\,\pi(i)}\ldots a_{n\,\pi(n)} = \lambda\cdot\text{Ա}(\pi, A)$ նույնություններից: Իսկ, այդ նույնություններից օգտվելով, կարող ենք գրել.

$$\det A^* = \sum_{\pi\in S_n}\text{Ա}(\pi, A^*) = \sum_{\pi\in S_n}\lambda\cdot\text{Ա}(\pi, A) = \lambda\cdot\sum_{\pi\in S_n}\text{Ա}(\pi, A) = \lambda\cdot\det A:\square$$

Հատկություն 4: Դիցուք $A_i' = (a_{i1}' \quad a_{i2}' \quad \cdots \quad a_{in}')$, $A_i'' = (a_{i1}'' \quad a_{i2}'' \quad \cdots \quad a_{in}'')$ և $A_i = A_i' + A_i'' = (a_{i1}' + a_{i1}'' \quad a_{i2}' + a_{i2}'' \quad \cdots \quad a_{in}' + a_{in}'')$: Այդ դեպքում՝

$$\det A = \det\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_i' \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_i'' \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}:$$

Ապացուցում: Բխում է $\text{Ա}(\pi, A) =$

$$= \varepsilon(\pi)\cdot a_{1\,\pi(1)}a_{2\,\pi(2)}\ldots(a'_{i\pi(i)} + a''_{i\pi(i)})\ldots a_{n-1\,\pi(n-1)}a_{n\,\pi(n)} =$$

$$= \varepsilon(\pi)\cdot a_{1\,\pi(1)}a_{2\,\pi(2)}\ldots a'_{i\pi(i)}\ldots a_{n\,\pi(n)} + \varepsilon(\pi)\cdot a_{1\,\pi(1)}a_{2\,\pi(2)}\ldots a''_{i\pi(i)}\ldots a_{n\,\pi(n)} =$$

$$= \text{Ա}(\pi, \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}) + \text{Ա}(\pi, \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix})$$

հավասարություններից: □

Դիցուք $i \neq j$ և A մատրիցն այնպիսին է, որ նրա գործակիցները բավարարում են $\forall k[a_{ik} = a_{jk}]$ պայմանին: Սա նշանակում է, որ A մատրիցի A_i և A_j տողերը՝ որպես $1 \times n$ չափի մատրիցներ, իրար հավասար են:

Հատկություն 5 (հիմնական): *Եթե* A *մատրիցի որևէ երկու տողեր՝* A_i *և* A_j*, իրար հավասար են, ապա* $\det A = 0$ *:*

Ապացուցում: Ըստ պայմանի, $A_i = A_j$, այսինքն՝ $\forall k[a_{ik} = a_{jk}]$: Ուրեմն, ցանկացած π տեղադրության համար $a_{i\,\pi(i)} = a_{j\,\pi(i)}$ և $a_{j\,\pi(j)} = a_{i\,\pi(j)}$:

Հետևաբար, $\text{Ա}(\pi, A) = \varepsilon(\pi) \cdot a_{1\,\pi(1)} a_{2\,\pi(2)} \ldots a_{i\,\pi(i)} \ldots a_{j\,\pi(j)} \ldots a_{n-1\,\pi(n-1)} a_{n\,\pi(n)} =$

$= \varepsilon(\pi) \cdot a_{1\,\pi(1)} a_{2\,\pi(2)} \ldots a_{j\,\pi(i)} \ldots a_{i\,\pi(j)} \ldots a_{n-1\,\pi(n-1)} a_{n\,\pi(n)} =$

$= \varepsilon(\pi) \cdot a_{1\,\pi(1)} a_{2\,\pi(2)} \ldots a_{i\,\pi(j)} \ldots a_{j\,\pi(i)} \ldots a_{n-1\,\pi(n-1)} a_{n\,\pi(n)} =$

$= -\varepsilon(\sigma) \cdot a_{1\,\sigma(1)} a_{2\,\sigma(2)} \ldots a_{i\,\sigma(i)} \ldots a_{j\,\sigma(j)} \ldots a_{n-1\,\sigma(n-1)} a_{n\,\sigma(n)} = -\text{Ա}(\sigma, A)$

որտեղ $\sigma = (i\,j) \circ \pi$: Այսպիսով՝ $\text{Ա}(\pi, A) = -\text{Ա}((i\,j) \circ \pi, A)$, հետևաբար,

$$\sum_{\pi \in S_n} \text{Ա}(\pi, A) = -\sum_{\pi \in S_n} \text{Ա}((i\,j) \circ \pi, A): \tag{7}$$

Մյուս կողմից, լեմմա 3.1-ի համաձայն,

$$\sum_{\pi \in S_n} \text{Ա}(\pi, A) = \sum_{\pi \in S_n} \text{Ա}((i\,j) \circ \pi, A): \tag{8}$$

(7) և (8) հավասարություններից բխում է, որ $\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \text{Ա}(\pi, A) = 0$: □

Հատկություն 6: $\det \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$:

Ապացուցում: Համաձայն հատկության 5-ի, եթե մատրիցի երկու տողերը համընկնում են, ապա նրա որոշիչը հավասար է 0-ի: Սրանից օգտվելով և, այնուհետև, կիրառելով հատկություն 4-ը, կստանանք.

$$0=\det\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\\vdots\\A_i+A_j\\\vdots\\A_i+A_j\\\vdots\\A_n\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\\vdots\\A_i\\\vdots\\A_i\\\vdots\\A_n\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\\vdots\\A_i\\\vdots\\A_j\\\vdots\\A_n\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\\vdots\\A_j\\\vdots\\A_i\\\vdots\\A_n\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\\vdots\\A_j\\\vdots\\A_j\\\vdots\\A_n\end{pmatrix}:$$

Մնում է տեսնել, որ ստացված գումարի առաջին և վերջին գումարելիները նույնպես հավասար են զրոյի: □

Հատկություն 7: $\det\begin{pmatrix}A_1\\\vdots\\A_i\\\vdots\\A_j+\lambda A_i\\\vdots\\A_n\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}A_1\\\vdots\\A_i\\\vdots\\A_j\\\vdots\\A_n\end{pmatrix}$:

Ապացուցում: Տրված մատրիցի j-րդ տողի նկատմամբ հաջորդաբար կիրառելով հատկություններ 4-ը, 3-ը և ապա՝ 5-ը, կստանանք.

$$\det\begin{pmatrix}A_1\\\vdots\\A_i\\\vdots\\A_j+\lambda A_i\\\vdots\\A_n\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}A_1\\\vdots\\A_i\\\vdots\\A_j\\\vdots\\A_n\end{pmatrix}+\lambda\cdot\det\begin{pmatrix}A_1\\\vdots\\A_i\\\vdots\\A_i\\\vdots\\A_n\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}A_1\\\vdots\\A_i\\\vdots\\A_j\\\vdots\\A_n\end{pmatrix}:\square$$

Հատկություն 8: $\forall A[\det A=\det A^T]$:

Ապացուցում: Դիցուք $[A]_{ij}=a_{ij}$ և $[A^T]_{ij}=c_{ij}$: Այդ դեպքում՝ $c_{ij}=a_{ji}$: Ուրեմն՝ $Ա(\pi,A^T)= =\varepsilon(\pi)\cdot c_{1\,\pi(1)}c_{2\,\pi(2)}\dots c_{i\,\pi(i)}\dots c_{n-1\,\pi(n-1)}c_{n\,\pi(n)}=$

$=\varepsilon(\pi)\cdot a_{\pi(1)1}a_{\pi(2)2}\dots a_{\pi(n-1)n-1}a_{\pi(n)n}=\varepsilon(\sigma)\cdot a_{1\,\sigma(1)}a_{2\,\sigma(2)}\dots a_{n-1\,\sigma(n-1)}a_{n\,\sigma(n)}=$

$= \mathrm{U}(\sigma, \mathrm{A})$, որտեղ $\sigma = \pi^{-1}$: Այսպիսով, $\mathrm{U}(\pi, \mathrm{A}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{U}(\pi^{-1}, \mathrm{A})$, ինչից հետևում է, որ $\sum_{\pi \in \mathrm{S}_n} \mathrm{U}(\pi, \mathrm{A}^{\mathrm{T}}) = \sum_{\pi \in \mathrm{S}_n} \mathrm{U}(\pi^{-1}, \mathrm{A})$: Մյուս կողմից, ըստ լեմմ 3.2-ի, $\sum_{\pi \in \mathrm{S}_n} \mathrm{U}(\pi, \mathrm{A}) = \sum_{\pi \in \mathrm{S}_n} \mathrm{U}(\pi^{-1}, \mathrm{A})$: Հետևաբար, $\det \mathrm{A} = \det \mathrm{A}^{\mathrm{T}}$: □

Հետևանք: *Եթե բոլոր 1-7 հատկությունների ձևակերպումներում* A *մատրիցի յուրաքանչյուր* A_i *տող փոխարինենք* ${}^i\mathrm{A}$ *սյունով, ապա ստացված պնդումները դարձյալ ճիշտ կլինեն:*

Ապացույց: Օրինակ, ձևակերպենք և ապացուցենք հատկություն 5-ը: *Եթե* A *մատրիցի երկու սյուներ հավասար են, ապա* $\det \mathrm{A} = 0$: Իրոք, եթե A մատրիցի երկու սյուներ հավասար են, ապա հավասար կլինեն նաև A^{T} մատրիցի նույն համարի տողերը: Ուրեմն, համաձայն հատկություն 5-ի, $\det \mathrm{A}^{\mathrm{T}} = 0$ և, ըստ հատկություն 8-ի, $\det \mathrm{A} = \det \mathrm{A}^{\mathrm{T}} = 0$: Ճիշտ նույն տրամաբանությամբ ապացուցվում են մնացած հատկությունները: □

5. Որոշիչի վերլուծումն ըստ տողի կամ ըստ սյան

Դիտարկենք հետևյալ մատրիցները.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ և } \mathrm{A}^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Թեորեմ 3: *Եթե* A *և* A^* *մատրիցներն ունեն (9) տեսքը, ապա*

$$\det \mathrm{A} = a_{nn} \cdot \det \mathrm{A}^* : \quad (10)$$

Ապացույց: A մատրիցի տեսքից երևում է, որ եթե $\pi \in \mathrm{S}_n$ և $\pi(n) \neq n$, ապա $\mathrm{U}(\pi, \mathrm{A}) = 0$: Իսկ, եթե $\pi(n) = n$, ապա

$$\mathrm{U}(\pi, \mathrm{A}) = \varepsilon(\pi) \cdot a_{1\,\pi(1)} a_{2\,\pi(2)} \cdots a_{i\,\pi(i)} \cdots a_{n-1\,\pi(n-1)}\, a_{nn} :$$

Բայց, քանի որ $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \cdots & \pi(n-1) & n \end{pmatrix} \in \mathrm{S}_n \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \pi^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \cdots & \pi(n-1) \end{pmatrix} \in \mathrm{S}_{n-1}$ և $\varepsilon(\pi) = \varepsilon(\pi^*)$, ուրեմն՝

$$\mathrm{U}(\pi, \mathrm{A}) = \mathrm{U}(\pi^*, \mathrm{A}^*) \cdot a_{nn} :$$

Հետևաբար, ըստ որոշիչի սահմանման,

$$\det \mathrm{A} = \sum_{\pi \in \mathrm{S}_n} \mathrm{U}(\pi, \mathrm{A}) = \sum_{\substack{\pi \in \mathrm{S}_n \\ \pi(n)=n}} \mathrm{U}(\pi, \mathrm{A}) = \sum_{\pi^* \in \mathrm{S}_{n-1}} \mathrm{U}(\pi^*, \mathrm{A}^*) \cdot a_{nn} :$$

Այսպիսով՝ $\det \mathrm{A} = a_{nn} \cdot \sum_{\pi^* \in \mathrm{S}_{n-1}} \mathrm{U}(\pi^*, \mathrm{A}^*) = a_{nn} \cdot \det \mathrm{A}^*$: □

Սահմանում: *Տված A՝ $n\times n$ չափի մատրիցից որևէ i-րդ տող և j-րդ սյուն ջնջելուց հետո ստացված $(n-1)\times(n-1)$ չափի մատրիցը նշանակվում է M_{ij}-ով և կոչվում է A մատրիցի a_{ij} գործակցի լրացուցիչ մատրից, նրա որոշիչը՝ a_{ij} գործակցի լրացուցիչ մինոր, իսկ $(-1)^{i+j}\det M_{ij} = A_{ij}$-ն՝ a_{ij} գործակցի հանրահաշվական լրացում:*

Հետևանք3.1: *Երբ A և A^* մատրիցների ունեն (9) տեսքը, ապա*

$$\det A^* = \det M_{nn} = A_{nn} \quad \text{և} \quad \det A = a_{nn}\cdot A_{nn}:$$

Ապացուցում: Բխում է (10) հավասարությունից: □

Լեմմա: *Երբ A մատրիցի i-րդ տողն ունի*

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

տեսքը, ապա $\det A = a_{ij}\cdot(-1)^{i+j}\det M_{ij} = a_{ij}\cdot A_{ij}$:

Ապացուցում: A մատրիցի i-րդ տողը հաջորդաբար տեղափոխենք իրենից ներքև գտնվող $n-i$ տողերից յուրաքանչյուրի հետ, ապա այդ տեղափոխություններից հետո ստացված մատրիցի j-րդ սյունը հաջորդաբար տեղափոխենք իրենից աջ գտնվող $n-j$ սյուների հետ: Արդյունքում կստանանք հետևյալ B մատրիցը ($n\times n$ չափի).

$$B = \begin{pmatrix} & & & & a_{1j} \\ & \mathbf{M}_{ij} & & & a_{2j} \\ & & & & \vdots \\ & & & & a_{nj} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ij} \end{pmatrix},$$

որի վերևի ձախ անկյունում գրված է $(n-1)\times(n-1)$ չափի M_{ij} մատրիցը՝ a_{ij} գործակցի լրացուցիչ մատրիցը: Համաձայն հատկություն 6-ի և հատկություն 8-ի հետևանքի, $\det B = (-1)^{n-i+n-j}\det A = (-1)^{i+j}\det A$: Մյուս կողմից, ըստ հետևանք 3.1-ի, $\det B = a_{ij}\cdot\det M_{ij}$, որտեղ՝

$$\det A = (-1)^{i+j}\det B = (-1)^{i+j}a_{ij}\cdot\det M_{ij} = a_{ij}\cdot A_{ij}: \square$$

Թեորեմ4: *Կամայական A մատրիցի և դրա կամայական i-րդ տողի համար* $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot A_{ij}$: *Այս բանաձևը կոչվում է որոշիչի վերլուծություն ըստ i-րդ տողի:*

Ապացուցում: $\Lambda(i,j)$-ով նշանակենք այն մատրիցը, որի i-րդ տողը ունի $\Lambda(i,j)_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ տեսքը, իսկ մնացած տողերը համընկնում են A մատրիցի նույն համարի տողերի հետ: Համաձայն նախորդ լեմմայի, $\det\Lambda(i,j) = a_{ij}\cdot A_{ij}$: Բացի այդ, ակնհայտորեն,

$$\mathrm{A}_i = \Lambda(i,1)_i + \Lambda(i,2)_i + \ldots + \Lambda(i,n)_i :$$

Կիրառելով հատկություն 4-ը, կստանանք՝

$$\det \mathrm{A} = \sum_{j=1}^{n} \det \Lambda(i,j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \mathrm{A}_{ij} : \square$$

Հետևանք 4.1: *Կամայական A մատրիցի և դրա կամայական j-րդ սյան համար՝*

$$\det \mathrm{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot \mathrm{A}_{ij} :$$

Այս բանաձևը կոչվում է որոշիչի վերլուծություն ըստ j-րդ սյան:

Ապացուցում: Քանի որ $[\mathrm{A}^{\mathrm{T}}]_{ij} = a_{ji}$ և $(\mathrm{A}^{\mathrm{T}})_{ij} = \mathrm{A}_{ji}$, ապա, A^{T} մատրիցի նկատմամբ կիրառելով թեորեմ 4-ը, կստանանք.

$$\det \mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \sum_{j=1}^{n} [\mathrm{A}^{\mathrm{T}}]_{ij} \cdot (\mathrm{A}^{\mathrm{T}})_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \cdot \mathrm{A}_{ji} :$$

Մնում է օգտվել հատկություն 8-ից, ըստ որի $\det \mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \det \mathrm{A} : \square$

Հետևանք 4.2: ա. $k \neq i \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \cdot \mathrm{A}_{ij} = 0$,

$$\text{բ. } k \neq j \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \cdot \mathrm{A}_{ij} = 0 :$$

Ապացուցում: ա. Քանի որ $\det \mathrm{A} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \mathrm{A}_{ij}$, ապա $\sum_{j=1}^{n} a_{kj} \cdot \mathrm{A}_{ij}$-ն այն մատրիցի որոշիչն է, որն ստացվում է A-ից, վերջինիս i-րդ տողը k-րդ տողով փոխարինելով: Փաստորեն այդ մատրիցի երկու տողեր կհամընկնեն և, ուրեմն, դրա որոշիչը հավասար կլինի 0-ի:

բ. $\sum_{i=1}^{n} a_{ik} \cdot \mathrm{A}_{ij}$-ն այնպիսի մատրիցի որոշիչն է, որն ստացվում է A-ից, վերջինիս j-րդ սյունը k-րդ սյունով փոխարինելով: Փաստորեն այդ մատրիցի երկու սյուներ կհամընկնեն և, ուրեմն, դրա որոշիչը հավասար կլինի 0-ի: $\square$

6. Տարրական մատրիցներ

Լեմմա 6.1: *Եթե մատրիցի տողերի (սյուների) նկատմամբ կատարենք*

ա. I *տեսակի տարրական ձևափոխություն, ապա ստացված մատրիցի որոշիչը հավասար կլինի սկզբնական մատրիցի որոշիչի հակադիրին,*

բ. II *տեսակի տարրական ձևափոխություն λ թվով, , ապա ստացված մատրիցի որոշիչը հավասար կլինի սկզբնական մատրիցի որոշիչի և λ թվի արտադրյալին,*

գ. III *տեսակի տարրական ձևափոխություն, ապա ստացված մատրիցի որոշիչը հավասար կլինի սկզբնական մատրիցի որոշիչին:*

Ապացուցում: ա. Որոշիչի հատկություն 6-ի վերաձևակերպումն է:

բ. Հատկություն 3-ի վերաձևակերպումն է:

գ. Հատկություն 7-ի վերաձևակերպումն է:

Սյուների դեպքում թեորեմը բխում է մաս 4. հատկություն 8-ի հետևանքից: □

Դիցուք $\mathrm{E}=\mathrm{E}(n)$-ը n չափի միավոր մատրիցն է (տե՛ս գլուխ 2, մաս 11.), իսկ ${}^1\mathrm{E}, {}^2\mathrm{E}, \ldots, {}^n\mathrm{E}$-ը՝ այդ մատրիցի սյուները. $\mathrm{E}=({}^1\mathrm{E}, {}^2\mathrm{E}, \ldots, {}^i\mathrm{E}, \ldots, {}^j\mathrm{E}, \ldots, {}^n\mathrm{E})$:

$\mathrm{E}(i,j)$-ով նշանակենք այն մատրիցը, որը ստացվում է E մատրիցից՝ նրա i-րդ և j-րդ սյուների տեղերը փոխելով.

$$\mathrm{E}(i,j)=({}^1\mathrm{E}, {}^2\mathrm{E}, \ldots, {}^j\mathrm{E}, \ldots, {}^i\mathrm{E}, \ldots, {}^n\mathrm{E}),\ \text{որտեղ}\ i \le j:$$

Հատկություն 6-ից բխում է, որ $\det \mathrm{E}(i,j)=-\det \mathrm{E}=-1$:

$\mathrm{E}(i,\lambda)$-ով նշանակենք այն մատրիցը, որը ստացվում է E մատրիցից՝ նրա i-րդ սյունը բազմապատկելով λ թվով.

$$\mathrm{E}(i,\lambda)=({}^1\mathrm{E}, {}^2\mathrm{E}, \ldots, \lambda\cdot{}^i\mathrm{E}, \ldots, {}^n\mathrm{E}):$$

Հատկություն 3-ից բխում է, որ $\det \mathrm{E}(i,\lambda)=\lambda\cdot\det \mathrm{E}=\lambda$:

$\mathrm{E}(i,j,\lambda)$-ով նշանակենք այն մատրիցը, որը ստացվում է E մատրիցից՝ նրա j-րդ սյանը գումարելով i-րդ սյունը, վերջինս նախօրոք բազմապատկելով λ թվով.

$$\mathrm{E}(i,j,\lambda)=({}^1\mathrm{E}, {}^2\mathrm{E}, \ldots, {}^i\mathrm{E}, \ldots, {}^j\mathrm{E}+\lambda\cdot{}^i\mathrm{E}, \ldots, {}^n\mathrm{E}):$$

Հատկություն 7-ից բխում է, որ $\det \mathrm{E}(i,j,\lambda)=\det \mathrm{E}=1$:

Հետևյալ լեմման ակնհայտ է:

Լեմմա 6.2: ա. $\mathrm{E}(i,j)^{\mathrm{T}}=\mathrm{E}(i,j)$,

բ. $\mathrm{E}(i,\lambda)^{\mathrm{T}}=\mathrm{E}(i,\lambda)$,

գ. $\mathrm{E}(i,j,\lambda)^{\mathrm{T}}=\mathrm{E}(j,i,\lambda)$: □

Մատրիցների բազմապատկման սահմանումից անմիջապես բխում է հետևյալը:

Թեորեմ 5: 1. Կամայական $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} \mathrm{A}_1 \\ \mathrm{A}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{A}_i \\ \vdots \\ \mathrm{A}_j \\ \vdots \\ \mathrm{A}_n \end{pmatrix}$ մատրիցի համար տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները.

ա. $E(i,j)\cdot A=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$, բ. $E(i,\lambda)\cdot A=\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ \lambda A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$, գ. $E(i,j,\lambda)\cdot A=\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i+\lambda A_j \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$:

2. Կամայական $A=({}^1A,{}^2A,\dots,{}^iA,\dots,{}^jA,\dots,{}^nA)$ մատրիցի համար տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները.

ա. $A\cdot E(i,j)=({}^1A,{}^2A,\dots,{}^jA,\dots,{}^iA,\dots,{}^nA)$,

բ. $A\cdot E(i,\lambda)=({}^1A,{}^2A,\dots,\lambda\cdot{}^iA,\dots,{}^nA)$,

գ. $A\cdot E(i,j,\lambda)=({}^1A,{}^2A,\dots,{}^iA,\dots,{}^jA+\lambda\cdot{}^iA,\dots,{}^nA)$: □

Հետևանք 5.1: $A=({}^1A,{}^2A,\dots,{}^iA,\dots,{}^jA,\dots,{}^nA)$ ***մատրիցի սյուների (տողերի) հետ***

ա. ***կատարել I տեսակի տարրական ձևափոխություն, նշանակում է՝ այդ մատրիցն աջ (ձախ) կողմից բազմապատկել որևէ*** $E(i,j)$ ***մատրիցով,***

բ. ***կատարել II տեսակի տարրական ձևափոխություն (*** λ ***թվով), նշանակում է՝ այդ մատրիցն աջ (ձախ) կողմից բազմապատկել որևէ*** $E(i,\lambda)$ ***մատրիցով,***

գ. ***կատարել III տեսակի տարրական ձևափոխություն, նշանակում է՝ այդ մատրիցն աջ (ձախ) կողմից բազմապատկել որևէ*** $E(i,j,\lambda)$ ***մատրիցով:***
□

Սահմանում: $E(i,j)$, $E(i,\lambda)$ ***և*** $E(i,j,\lambda)$ ***մատրիցները կոչվում են համապատասխանաբար I, II և III տեսակի տարրական մատրիցներ:***

Հետևանք 5.2:ա. $\det(A\cdot E(i,j))=\det A\cdot\det E(i,j)=\det(E(i,j)\cdot A)$:

բ. $\det(A\cdot E(i,\lambda))=\det A\cdot\det E(i,\lambda)=\det(E(i,\lambda)\cdot A)$:

գ. $\det(A\cdot E(i,j,\lambda))=\det A\cdot\det E(i,j,\lambda)=\det(E(i,j,\lambda)\cdot A)$:

Ապացուցում: Բոլոր երեք պնդումներն էլ բխում են հետևանք 5.1-ից, լեմմա 6.1-ից և տարրական մատրիցների որոշիչների արժեքներից: Օրինակ, ա. $\det(A\cdot E(i,j))=-\det A=\det E(i,j)\cdot\det A$: Նույն դատողություններն ապացուցում են նաև ա. պնդման վերջին հավասարությունը: □

7. Մատրիցների արտադրյալի որոշիչը

Լեմմա 7.1: ***Կամայական A մատրիցի համար գոյություն ունեն վերջավոր քանակությամբ այնպիսի*** ա. *տարրական մատրիցներ*՝ $F_1, F_2, ..., F_k$, *որ* $F_1 \cdot F_2 \cdot \dots \cdot F_k \cdot A = A^*$, *որտեղ* A^**-ը վերին եռանկյունաձև մատրից է,*

բ. *տարրական մատրիցներ*՝ $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_s$, որ $A \cdot \Gamma_1 \cdot \Gamma_2 \cdot \ldots \cdot \Gamma_s = A^*$, *որտեղ* A^**-ը վերին եռանկյունաձև մատրից է:*

Ապացուցում: Բխում է գլուխ 2, մաս 7., թեորեմ 4-ից և հետևանք 5.1-ից: □

Լեմմա 7.2: *Երբ*

$$A^* = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a'_{33} & \cdots & a'_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a'_{nn} \end{pmatrix}, \quad B^* = \begin{pmatrix} b'_{11} & b'_{12} & b'_{13} & \cdots & b'_{1n} \\ 0 & b'_{22} & b'_{23} & \cdots & b'_{2n} \\ 0 & 0 & b'_{33} & \cdots & b'_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b'_{nn} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

ապա $\det(A^* \cdot B^*) = \det A^* \cdot \det B^*$:

Ապացուցում: Մատրիցների բազմապատկման սահմանումից հետևում է, որ $A^* \cdot B^*$ մատրիցն ունի

$$A^* \cdot B^* = \begin{pmatrix} a'_{11}b'_{11} & * & * & \cdots & * \\ 0 & a'_{22}b'_{22} & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & a'_{33}b'_{33} & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a'_{nn}b'_{nn} \end{pmatrix}$$

տեսքը: Ուրեմն, համաձայն հատկություն 2-ի՝ $\det(A^* \cdot B^*) =$

$$= a'_{11}b'_{11}a'_{22}b'_{22}\ldots a'_{nn}b'_{nn} = a'_{11}a'_{22}\ldots a'_{nn} \cdot b'_{11}b'_{22}\ldots b'_{nn} = \det A^* \cdot \det B^* : \ \square$$

Թեորեմ 6: *Կամայական* A *և* B *մատրիցների համար*

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B :$$

Ապացուցում: Ըստ լեմմա 7.1-ի, գոյություն ունեն $F_1, F_2, ..., F_k$ և $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_s$ այնպիսի տարրական մատրիցներ, որ $F_1 \cdot F_2 \cdot \dots \cdot F_k \cdot A = A^*$ և $B \cdot \Gamma_1 \cdot \Gamma_2 \cdot \ldots \cdot \Gamma_s = B^*$, որտեղ A^*-ը և B^*-ը ունեն (12) տեսքը: Այդ դեպքում, համաձայն հետևանք 5.2-ի.

$$\det(A^* \cdot B^*) = \det(F_1 \cdot F_2 \cdot \dots \cdot F_k \cdot A \cdot B \cdot \Gamma_1 \cdot \Gamma_2 \cdot \ldots \cdot \Gamma_s) =$$
$$= \det(A \cdot B) \cdot \det F_1 \cdot \det F_2 \cdot \ldots \cdot \det F_k \cdot \det(A \cdot B) \cdot \det \Gamma_1 \cdot \det \Gamma_2 \cdot \ldots \cdot \det \Gamma_s : \quad (13)$$

Բացի այս, լեմմա 7.2-ի և լեմմա 7.1-ի շնորհիվ,

$$\det(A^* \cdot B^*) = \det A^* \cdot \det B^* =$$
$$= (\det A \cdot \det F_1 \cdot \det F_2 \cdot \ldots \cdot \det F_k) \cdot (\det B \cdot \det \Gamma_1 \cdot \det \Gamma_2 \cdot \ldots \cdot \det \Gamma_s) : \quad (14)$$

Քանի որ (13) և (14) արտահայտությունները իրար հավասար են, ուրեմն,

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B : \ \square$$

Հետևանք 6.1: *Եթե* $\overrightarrow{a_1}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\overrightarrow{a_2}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, $\overrightarrow{a_3}=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ *վեկտորները եռաչափ տարածության վեկտորներ են և նրանց կազմած հարթ անկյուններն են՝* $\widehat{a_1 a_2}=C$, $\widehat{a_1 a_3}=B$, $\widehat{a_2 a_3}=A$, *ապա այդ վեկտորների վրա կառուցված զուգահեռանիստի ծավալը կարելի է հաշվել*

$$V=|\overrightarrow{a_1}||\overrightarrow{a_2}||\overrightarrow{a_3}|\sqrt{1+2\cos A\cos B\cos C-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C}$$

բանաձևով:

Ապացուցում: Կատարենք նշանակում. $\Delta=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{pmatrix}$: Նախ նկատենք, որ $[\Delta\cdot\Delta^{\mathrm{T}}]=(\overrightarrow{a_i},\overrightarrow{a_j})=|\overrightarrow{a_i}||\overrightarrow{a_j}|\cos\widehat{a_i a_j}$, ինչը բխում է վեկտորների սկալյար արտադրյալը կոորդինատների միջոցով հաշվելու բանաձևից: Համաձայն հետևանք 2.1-ի, $V=|\det\Delta|$: Ուրեմն՝

$$V^2=(\det\Delta)^2=\det\Delta\cdot\det\Delta=\det\Delta\cdot\det\Delta^{\mathrm{T}}=\det(\Delta\cdot\Delta^{\mathrm{T}})$$

նույնությունից կստանանք.

$$V^2=\det\begin{pmatrix}|\overrightarrow{a_1}|^2 & |\overrightarrow{a_1}||\overrightarrow{a_2}|\cos\widehat{a_1 a_2} & |\overrightarrow{a_1}||\overrightarrow{a_3}|\cos\widehat{a_1 a_3}\\ |\overrightarrow{a_2}||\overrightarrow{a_1}|\cos\widehat{a_2 a_1} & |\overrightarrow{a_2}|^2 & |\overrightarrow{a_2}||\overrightarrow{a_3}|\cos\widehat{a_2 a_3}\\ |\overrightarrow{a_3}||\overrightarrow{a_1}|\cos\widehat{a_3 a_1} & |\overrightarrow{a_3}||\overrightarrow{a_2}|\cos\widehat{a_3 a_2} & |\overrightarrow{a_3}|^2\end{pmatrix}=$$

$$=|\overrightarrow{a_1}|^2|\overrightarrow{a_2}|^2|\overrightarrow{a_3}|^2\det\begin{pmatrix}1 & \cos C & \cos B\\ \cos C & 1 & \cos A\\ \cos B & \cos A & 1\end{pmatrix}:$$

Պահանջվող բանաձևի ապացուցելու համար մեզ մնում է հաշվել վերջին որոշիչը և հավասարության երկու կողմից արմատ հանել: □

7. Հակադարձելի մատրիցներ

Սահմանում: *Եթե* A*-ն և* A_1*-ը* n *չափի այնպիսի մատրիցներ են, որ* $\mathrm{A}\cdot\mathrm{A}_1=\mathrm{E}(n)$, *ապա* A*-ն կոչվում է* A_1*-ի ձախակողմյան հակադարձ մատրից, իսկ* A_1*-ը՝* A*-ի աջակողմյան հակադարձ մատրից:*

Կան մատրիցներ, որոնք որևէ հակադարձ չունեն: Օրինակ.

$$\forall\mathrm{A}[\mathrm{A}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\neq\mathrm{E}(2)\ \wedge\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\mathrm{A}\neq\mathrm{E}(2)]:$$

Մյուս կողմից, $\mathrm{E}(n)\cdot\mathrm{E}(n)=\mathrm{E}(n)$, այնպես որ $\mathrm{E}(n)$-ն ինքն իր և աջակողմյան, և ձախակողմյան հակադարձն է:

Լեմմա 7.1: Եթե $\mathrm{A}\cdot\mathrm{A}_1=\mathrm{E}(n)$ և $\mathrm{A}_2\cdot\mathrm{A}=\mathrm{E}(n)$, ապա $\mathrm{A}_1=\mathrm{A}_2$:

Ապացուցում: Օգտվելով մատրիցների բազմապատկման զուգորդականությունից, կարող ենք գրել.

$$A_2 = A_2 \cdot E(n) = A_2 \cdot (A \cdot A_1) = (A_2 \cdot A) \cdot A_1 = E(n) \cdot A_1 = A_1 : \square$$

Թեորեմ 7: A *մատրիցն ունի աջակողմյան հակադարձ այն և միայն այն դեպքում, երբ* $\det A \neq 0$*:*

Ապացուցում: ($\Rightarrow$) Դիցուք $A \cdot A_1 = E(n)$: Ըստ թեորեմ 6-ի, անցնելով որոշիչներին, կստանանք. $\det(A \cdot A_1) = \det A \cdot \det A_1 = \det E(n)) = 1$:

Ուրեմն՝ $\det A \neq 0$:

($\Leftarrow$) Դիցուք $\det A \neq 0$: Դիտարկենք հանրահաշվական լրացումներից կազմված հետևյալ մատրիցը, որը կոչվում է տրված A մատրիցի կցյալ մատրից.

$$A^{v} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} : \tag{15}$$

Քանի որ $[A \cdot A^{v}]_{kl} = A_k \cdot {}^{l}(A^{v}) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \cdot A_{lj}$, ապա ըստ թեորեմ 4-ի և հետևանքներ 4.1-ի ու 4.2,բ.-ի,

$$A \cdot A^{v} = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix} = \det A \cdot E(n) :$$

Հետևաբար, $A \cdot (\frac{1}{\det A} A^{v}) = \frac{1}{\det A}(A \cdot A^{v}) = \frac{1}{\det A} \cdot \det A \cdot E(n) = E(n)$ (տե՛ս գլուխ 2, մաս 12, հատկություն 1,ա.): Այսպիսով, $\frac{1}{\det A} A^{v}$ մատրիցը A մատրիցի համար հանդիսանում է աջակողմյան հակադարձ: $\square$

Հետևանք 7.1: *Եթե որևէ* A *մատրից* ($n \times n$ *չափի*) *ունի աջակողմյան հակադարձ, ապա այն ունի նաև ձախակողմյան հակադարձ:*

Ապացուցում: Եթե A մատրիցն ունի աջակողմյան հակադարձ, ապա համաձայն թեորեմ 7-ի, $\det A \neq 0$: Բայց այդ դեպքում $\det A^{T} \neq 0$, և, դարձյալ նույն թեորեմի համաձայն, A^{T} մատրիցն ունի աջակողմյան հակադարձ, որը կնշանակենք B-ով. $A^{T} \cdot B = E(n)$: Վերջին հավասարությունից հետևում է, որ $(A^{T} \cdot B)^{T} = E(n)$, այսինքն՝ $B^{T} \cdot A = E(n)$: $\square$

Սահմանում: *Եթե տրված* A *մատրիցի համար գոյություն ունի այնպիսի* A_1 *մատրից, որ* $A \cdot A_1 = A_1 \cdot A = E(n)$, *ապա* A*-ն կոչվում է հակադարձելի մատրից, իսկ* A_1*-ը կոչվում է* A*-ի հակադարձ մատրից:*

Հետևանք 7.2: A *մատրիցը հակադարձելի է այն և միայն այն դեպքում, երբ* $\det A \neq 0$:

Ապացուցում: Ըստ թեորեմ 7-ի, $\det A \neq 0$ պայմանը համարժեք է A-ի աջակողմյան հակադարձ տենեմալուն: Մնացածը բխում է հետևանք 7.1-ից ու լեմա 7.1-ից: □

Լեմա 7.1-ից անմիջապես հետևում է, որ եթե A մատրիցը հակադարձելի է, ապա դրա հակադարձ մատրիցը որոշվում է միարժեքորեն: Եթե տվյալ A մատրիցն ունի հակադարձ մատրից, ապա վերջինս, լինելով միակը, նշանակվում է այսպես. A^{-1}: Այսպիսով՝ $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E(n)$: Հակադարձ մատրիցի սահմանումից հետևում է, որ $(A^{-1})^{-1} = A$:

Հետևանք 7.3: *Եթե* $\det A \neq 0$, *ապա* $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A^{\vee}$, *որտեղ* $A^{\vee}$ *-ն ունի* (15) *տեսքը:* □

8. Մատրիցների լրիվ գծային և հատուկ գծային խմբեր

Իրական գործակիցներով n չափի բոլոր այն մատրիցների բազմությունը, որոնցից յուրաքանչյուրն ունի հակադարձ, կամ այլ կերպ ասած՝ հակադարձելի է, ընդունված է նշանակել $GL_n(\mathbb{R})$-ով.

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{A \,;\, A \in M_n(\mathbb{R}) \wedge \det A \neq 0\}:$$

Թեորեմ 8: ա. $[A \in GL_n(\mathbb{R}) \wedge B \in GL_n(\mathbb{R})] \Rightarrow A \cdot B \in GL_n(\mathbb{R})$,

բ. $E(n) \in GL_n(\mathbb{R})$,

գ. $A \in GL_n(\mathbb{R}) \Rightarrow A^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$:

Ապացուցում: բ. Ակնհայտ է:

ա. Եթե $\det A \neq 0$ և $\det B \neq 0$, ապա $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B \neq 0$:

գ. $\det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} = \det E = 1 \Rightarrow \det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} = (\det A)^{-1}$: □

$GL_n(\mathbb{R})$ բազմությունն անվանում են մատրիցների ***լրիվ գծային խումբ:*** Առանձին հետաքրքրություն են ներկայացնում նաև այն մատրիցները, որոնցից յուրաքանչյուրի որոշիչը հավասար է 1-ի: Դրանց բազմությունն էլ նշանակվում է $SL_n(\mathbb{R})$-ով.

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{A \,;\, A \in M_n(\mathbb{R}) \wedge \det A = 1\}:$$

Հետևյալ թեորեմն ապացուցվում է թեորեմ 8-ի նման:

Թեորեմ 9: ա. $[A \in SL_n(\mathbb{R}) \wedge B \in SL_n(\mathbb{R})] \Rightarrow A \cdot B \in SL_n(\mathbb{R})$,

բ. $E(n) \in SL_n(\mathbb{R})$,

գ. $A \in SL_n(\mathbb{R}) \Rightarrow A^{-1} \in SL_n(\mathbb{R})$: □

$SL_n(\mathbb{R})$-ն անվանում են մատրիցների ***հատուկ գծային խումբ:***

8. Մատրիցային հավասարումներ: Կրամերի բանաձևերը

Իրական գործակիցներով բոլոր հնարավոր մատրիցների բազմությունը նշանակենք $M(\mathbb{R})$-ով: Դիտարկենք $M(\mathbb{R}) \cup \{X\} \cup \{=\}$ այբուբենը, որը կանվանենք մատրիցային հավասարումների այրուբեն: Այս այրուբենի X տառը կանվանենք *անհայտ տառ*, կամ ուղղակի անհայտ: Դիցուք A-ն և B-ն կամայական մատրիցներ են՝ $A,B \in M(\mathbb{R})$:

Սահմանում 8.1: *Չորս երկարությամբ* $AX = B$ *բառը կոչվում է մատրիցային հավասարում:*

Սահմանում 8.2: C *մատրիցը*՝ $C \in M(\mathbb{R})$, *կոչվում է* $AX = B$ *մատրիցային հավասարման լուծում, եթե* A *և* C *մատրիցների արտադրյալը որոշված է և հավասար է* B *մատրիցին, այսինքն*՝ $A \cdot C = B$ *-ն նույնություն է:*

Օրինակ, $E(n)$ միավոր մատրիցը հանդիսանում է $AX = A$ մատրիցային հավասարման լուծում, որտեղ A-ն կամայական $m \times n$ չափի մատրից է: Դժվար չէ համոզվել, որ եթե $AX = B$ մատրիցային հավասարումն ունի լուծում, ապա A և B մատրիցներն ունեն նույն քանակությամբ տողեր:

Գլուխ 4-ում մենք արդեն ուսումնասիրել ենք գծային հավասարումների համակարգեր: Գծային հավասարումների ամեն մի համակարգի միջոցով, բնական եղանակով, կարելի է կազմել մատրիցային հավասարում: Դրա համար դիտարկենք գծային հավասարումների որևէ համակարգ.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} : \tag{16}$$

Այս համակարգի գործակիցների ու ազատ անդամների միջոցով կազմենք հետևյալ մատրիցները.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ և } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} : \tag{17}$$

$AX = B$ մատրիցային հավասարումը, որտեղ A-ն և B-ն (17) հավասարություններով որոշված մատրիցներն են, կոչվում է գծային հավասարումների (16) համակարգին համապատասխանող մատրիցային հավասարում:

Լեմմա 8.1: *Իրական թվերից բաղկացած* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ n *-յակը հանդիսանում է* (16) *գծային հավասարումների համակարգի լուծում այն և միայն այն դեպքում, երբ* $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ $n \times 1$ *չափի սյունը հանդիսանում է* (16) *համակարգին համապատասխանող* AX=B *մատրիցային հավասարման լուծում:*

Ապացուցում: $\forall i[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j = b_i] \Leftrightarrow A\cdot\alpha = B$: □

Թեորեմ 10 (Կրամեր) *Եթե* $\det A \neq 0$, *ապա* (16) *գծային հավասարումների համակարգը որոշյալ է, այսինքն ունի միակ լուծում: Ավելին, եթե* $A(i,B)$ *-ով նշանակենք այն մատրիցը, որը ստացվում է* A *-ից, վերջինիս* i *-րդ սյունը փոխարինելով* B *-ով, ապա* (16) *համակարգի լուծում է հանդիսանում այն* $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n)$ n *-յակը, որի համար* $\alpha_i = \dfrac{\det A(i,B)}{\det A}$ *:* (18)

Ապացուցում: Լեմմա 8.1-ի շնորհիվ, (16)-ի փոխարեն կարող ենք դիտարկել AX=B հավասարումը: $\det A \neq 0$ պայմանից հետևում է, որ A-ն ունի հակադարձ՝ A^{-1}: α-ով նշանակենք $n\times 1$ չափի $A^{-1}\cdot B$ մատրիցը. $\alpha = A^{-1}\cdot B$: Այդ α մատրիցը կհանդիսանա AX=B հավասարման լուծում, քանի որ

$$A\cdot\alpha = A\cdot(A^{-1}\cdot B) = (A\cdot A^{-1})\cdot B = E\cdot B = B :$$

Եթե α'-ը AX=B հավասարման մեկ այլ լուծում է, ապա $A\cdot\alpha' = B$, ուրեմն՝ $A\cdot\alpha = A\cdot\alpha'$ և $A^{-1}\cdot(A\cdot\alpha) = A^{-1}\cdot(A\cdot\alpha')$: Վերջին հավասարության նկատմամբ կիրառելով զուգորդական հատկությունը, կստանանք $\alpha = \alpha'$: Սրանով թեորեմի առաջին մասն ապացուցված է:

(18) բանաձևերն ապացուցելու համար հիշենք A^{-1} մատրիցի հաշվման բանաձևը. $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}A^{\vee}$: Հետևաբար՝ $\alpha = A^{-1}\cdot B = \dfrac{1}{\det A}A^{\vee}\cdot B$: Մնում է տեսնել, որ եթե $\alpha = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$, ապա

$$\alpha_i = \alpha_i = \frac{1}{\det A}\cdot[A^{\vee}\cdot B]_{i1} = \frac{1}{\det A}((A^{\vee})_i\cdot B) = \frac{1}{\det A}\sum_{j=1}^{n} A_{ji}\cdot b_j = \frac{\det A(i,B)}{\det A} :$$

Վերջին հավասարության իրավացիության մեջ համոզվելու համար բավական է $\det A(i,\alpha)$ որոշիչը վերլուծել ըստ i -րդ սյան (հետևանք 4.1).

$$\det A(i,B) = \sum_{j=1}^{n} b_j\cdot A_{ji} : \square$$

(18) բանաձևերը կոչվում են *Կրամերի բանաձևեր*:

Գլուխ 5
Կոմպլեքս թվեր

1. Խնդրի ձևակերպումը

Ամբողջ թվերի բազմության մեջ միշտ չէ, որ կարող ենք մի ամբողջ թիվը բաժանել մյուսի վրա: Սա անհրաժշտությունն է առաջացնում ամբողջ թվերի բազմությունը ընդլայնել նոր՝ ռացիոնալ թվերով: Ճիշտ սրա նման, բացասական իրական թվից արմատ հանելու անհնարինությունը հանգեցնում է իրական թվերի բազմության ընդլայնմանը նոր թվերով, այնպես, որ ընդլայնված բազմության յուրաքանչյուր թվից հնարավոր լինի արմատ հանել:

Սկզբում ընդհանուր գծերով նկարագրենք այն խնդիրը, որն ուզում ենք լուծել: Մեր նպատակն է կառուցել նոր տեսակի թվերի մի $\mathbb{C}$ բազմություն, որի տարրերին (թվերին) անվանելու ենք կոմպլեքս թվեր: Ընդ որում, մենք ուզում ենք, որ այդ $\mathbb{C}$ բազմությունը բավարարի հետևյալ պայմաններին.

1. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, այսինքն յուրաքանչյուր իրական թիվ պետք է հանդիսանա նաև կոմպլեքս թիվ (ճիշտ այնպես, ինչպես ամբողջ թիվը նաև ռացիոնալ թիվ է, իսկ ռացիոնալ թիվը՝ նաև իրական),

2. կոմպլեքս թվերը հնարավոր լինի իրար հետ գումարել և բազմապատկել՝ արդյունքում ստանալով կոմպլեքս թվեր, այնպես որ պահպանվեն իրական թվերի գումարման ու բազմապատկմանը բնորոշ բոլոր հիմնական հատկությունները (օրինակ՝ այդ գործողությունները լինեն զուգորդական, տեղափոխելի, իրար հետ կապված լինեն բաշխական օրենքով և դրանց համար գոյություն ունենան հակադարձ գործողություններ՝ հանում և բաժանում զրոյից տարբեր թվի վրա),

3. կամայական a իրական թվի համար գտնվի մի z կոմպլեքս թիվ, որի համար $z^2 = a$:

Որպեսզի հասկանալի լինեն այն շարժառիթները, որոնք հուշում են թե ինչպես կարելի է մոտենալ այս խնդրի լուծմանը, բերենք թվային բազմության կառուցելու մի օրինակ:

$\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$-ով նշանակենք իրական թվերի հետևյալ բազմությունը.

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{ p + q\sqrt{2} \ ; \ p \in \mathbb{Q}, \ q \in \mathbb{Q} \},$$

որտեղ $\mathbb{Q}$-ն ռացիոնալ թվերի բազմությունն է: Ակնհայտորեն $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$: Բացի այդ, եթե $p \neq 0$, ապա $p + q\sqrt{2}$-ն իռացիոնալ թիվ է: Նկատենք նաև հետևյալը.

$$(p_1 + q_1\sqrt{2}) + (p_2 + q_2\sqrt{2}) = (p_1 + p_2) + (q_1 + q_2)\sqrt{2}$$

$$(p_1 + q_1\sqrt{2}) \cdot (p_2 + q_2\sqrt{2}) = (p_1 p_2 + 2q_1 q_2) + (p_1 q_2 + q_1 p_2)\sqrt{2},$$

այսինքն՝ $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ բազմության թվերը գումարելիս ու բազմապատկելիս դարձյալ ստանում ենք նույն բազմության թվեր: Դժվար չէ հասկանալ նաև, որ $(p + q\sqrt{2})^{-1} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$:

2. Կոմպլեքս թվի սահմանումը

Գլուխ 2, 1.-ում մենք սահմանել ենք տառ, այբուբեն, բառ, բառի երկարություն: Առաջիկայում դարձյալ օգտվելու ենք այդ գաղափարներից: Մենք օգտագործելու ենք մի հատուկ այբուբեն: Դիցուք $\mathbb{R}$-ը բոլոր իրական թվերի բազմությունն է: Տվյալ իրական թիվը գրելու համար օգտագործվում է ինչ-որ նշան, իսկ յուրաքանչյուր նշան, ինչպես ասացինք վերևում, մենք անվանում ենք տառ: Մեզ հետաքրքրող այբուբենը բաղկացած է բոլոր իրական թվերից, որոնցից յուրաքանչյուրը դիտարկվում է որպես առանձին տառ, և, բացի այդ, ևս երկու նշաններից՝ + և i: Եվ այսպես, $\mathbb{R}\cup\{+\}\cup\{i\}$ բազմությունը որոնելի այբուբենն է. իրական թվերը, ինչպես նաև՝ + և i նշանները, այդ այբուբենի տառերն են: Օրինակի համար, $\mathbb{R}\cup\{+\}\cup\{i\}$ այբուբենի տառերով գրենք մի քանի արտահայտություններ (բառեր).

$$9\,;\quad +\,;\quad i+\,;\quad 2i\,\frac{1}{5}\,\pi\,8{,}2\quad;\quad +\sqrt{23}\,e\,\frac{12}{13}\,;\quad ii+++001:$$

Բերված արտահայտություններն ունեն համապատասխանաբար մեկ, մեկ, երկու, հինգ, չորս և ութ երկարություն:

$\mathbb{R}\cup\{+\}\cup\{i\}$ այբուբենի տառերով գրված որոշ արտահայտություններ կոչվում են կոմպլեքս թվեր:

Սահմանում 2.1: $\mathbb{R}\cup\{+\}\cup\{i\}$ *այբուբենի տառերով գրված արտահայտությունը կոչվում է **կոմպլեքս թիվ** այն և միայն այն դեպքում, եթե այն կամ*

*ա. ունի a **տեսքը, որտեղ** $a\in\mathbb{R}$ (a տեսքի արտահայտությունները բոլոր այն մեկ երկարությամբ արտահայտություններն են, որոնց միակ տառն իրական թիվ է),*

կամ

*բ. ունի bi **տեսքը, որտեղ** $b\in\mathbb{R}$ (bi տեսքի արտահայտությունները բոլոր այն երկու երկարությամբ արտահայտություններն են, որոնց առաջին տառը կամայական իրական թիվ է, իսկ երկրորդ տառն i-ն է),*

կամ

*գ. **ունի** $a+bi$ **տեսք, որտեղ** a-ն և b-ն **կամայական իրական թվեր են** ($a+bi$ տեսքի արտահայտությունները բոլոր այն չորս երկարությամբ արտահայտություններն են, որոնց առաջին և երրորդ տառերն իրական թվեր են, երկրորդ տառը +-ն է, իսկ վերջին՝ չորրորդ տառն i-ն է):*

Օրինակ, $2+4i$, $-\sqrt{5}+\dfrac{74}{3}i$, $0+-1i$, $\pi+ei$, $1+0i$ արտահայտությունները կոմպլեքս թվեր են, իսկ $ei+\pi$, $0i+2i$ բառերը՝ ոչ:

Տարբեր տեսք ունեցող որոշ կոմպլեքս թվեր մենք համարելու ենք իրար հավասար: Հավասարության գաղափարը ներմուծելու համար, մասնավորապես, մենք առաջնորդվում ենք նրանով, որ $0i$ և $0+0i$ թվերը հավասար լինեն 0-ի:

Սահմանում 2.2: *Դիցուք* X *և* Y *արտահայտությունները կոմպլեքս թվեր են: Կասենք, որ* X *և* Y *արտահայտությունները, որպես կոմպլեքս թվեր, իրար հավասար են և կգրենք* $X = Y$ *այն և միայն այն դեպքում, երբ կամ՝*

1. այդ արտահայտություններն իրար հավասար են տառ առ տառ՝ $X \equiv Y$, *կամ՝*

2. այդ արտահայտություններից մեկն ունի $a+0i$ *տեսքը, մյուսը՝* a, *որտեղ* a *-ն կամայական իրական թիվ է, կամ՝*

3. այդ արտահայտություններից մեկն ունի $0+bi$ *տեսքը, մյուսը՝* bi, *որտեղ* b *-ն կամայական իրական թիվ է, կամ՝*

4. այդ արտահայտություններից մեկն ունի 0 *տեսքը, մյուսը՝* $0i$:

Այժմ $\mathbb{C}$ -ով նշանակենք հետևյալ բազմությունը.

$$\mathbb{C} = \{a+bi\ ;\ \ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\}:$$

Սահմանում 2.2-ից բխում է, որ յուրաքանչյուր կոմպլեքս թիվ հավասար է այս $\mathbb{C}$ բազմության որևէ բառի, այսինքն, չորս երկարության $a+bi$ տեսքի արտահայտության, որի առաջին և երրորդ տառերն իրական թվեր են, երկրորդ տառը +-ն է, իսկ վերջին՝ չորրորդ տառն i -ն է: Ավելին, ըստ *1.* -ի,

$$a+bi = c+di \iff a = c \text{ և } b = d:$$

Բացի այդ, համաձայն վերևում բերված բառերի հավասարության սահմանման, $a+0i$ և $0+bi$ տեսքի կոմպլեքս թվերը կարելի է գրել ավելի կարճ, քանի որ

$$a+0i = a \tag{1}$$

և

$$0+bi = bi: \tag{2}$$

Օրինակ. $2+0i=2$, $\quad -\sqrt{5}+0i=-\sqrt{5}$, $\quad 0+\frac{5}{6}i=\frac{5}{6}i$, $\quad 2+3i \neq 2+4i$, $0=0+0i=0i$ և այլն:

Ասվածից ելնելով, $\mathbb{C} = \{a+bi\ ;\ \ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\}$ բազմությունը կանվանենք կոմպլեքս թվերի բազմություն:

Ըստ սահմանման, երբ $a \in \mathbb{R}$, ապա $a = a+0i \in \mathbb{C}$: Ուրեմն՝ $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, այսինքն՝ յուրաքանչյուր իրական թիվ նաև կոմպլեքս թիվ է:

3. Կոմպլեքս թվերի գումարումը

Վերցնենք երկու կամայական կոմպլեքս թվեր՝ $a+bi$ և $c+di$: Այս կոմպլեքս թվերի միջոցով կառուցենք հետևյալ կոմպլեքս թիվը. $(a+c)+(b+d)i$, որտեղ $(a+c)$ -ն a և c իրական թվերի գումարն է, իսկ $(b+d)$ -ն՝ b և d իրական թվերի գումարը:

Սահմանում: $a+bi$ *և* $c+di$ *կոմպլեքս թվերի գումար ասելով կհասկանանք* $(a+c)+(b+d)i$ *կոմպլեքս թիվը:*

Նշելու համար, որ $(a+c)+(b+d)i$ կոմպլեքս թիվը $a+bi$ և $c+di$ կոմպլեքս թվերի գումարն է, կօգտագործենք $\oplus$ նշանը և կգրենք.

$$(a+bi) \oplus (c+di) = (a+c)+(b+d)i: \tag{3}$$

Սրանով իսկ, մենք կոմպլեքս թվերի $\mathbb{C}$ բազմության մեջ ներմուծեցինք $\oplus$ երկտեղանի գործողությունը (տե՛ս սահմանում Բ, գլուխ 1):

Հիշելով, որ $a+0i=a$ և $0+bi=bi$, ինչպես նաև, հաշվի առնելով $\oplus$ գործողության սահմանումը, կարող ենք գրել հետևյալ առնչությունները.

$$a+bi=(a+0i)\oplus(0+bi)=a\oplus bi \quad (4)$$

$$a\oplus c=(a+0i)\oplus(c+0i)=(a+c)+0i=a+c: \quad (5)$$

(4) հավասարությունից հետևում է, որ $a+bi$ կոմպլեքս թվի գրության մեջ + տառը կարող ենք փոխարինել գումարման $\oplus$ նշանով (որը նույնպես կարելի է համարել տառ): (5) առնչությունը նշանակում է, որ եթե մենք a և c թվերը գումարենք որպես կոմպլեքս թվեր, ապա կստանանք մի թիվ որը հավասար է a և c իրական թվերի գումարին: (4)-ի և (5)-ի շնորհիվ (3) հավասարությունը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$(a\oplus bi)\oplus(c\oplus di)=(a\oplus c)\oplus(b\oplus d)i: \quad (6)$$

Նպատակահարմար է այսուհետ կոմպլեքս թվերի գումարման $\oplus$ նշանի փոխարեն օգտագործել այն նույն + նշանը, որն օգտագործում ենք իրական թվերը գումարելիս: (4), (5) և (6)-ի շնորհիվ, դա որևէ շփոթության չի բերի: Ուրեմն՝

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i: \quad (7)$$

Ամփոփելով, կարող ենք ասել, որ ամեն մի կոմպլեքս թիվ $a+bi$ տեսքի արտահայտություն է՝ $\mathbb{C}=\{a+bi\ ;\ a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R}\}$, իսկ երկու կոմպլեքս թվերի գումարը սահմանվում է (7) հավասարությամբ:

Սահմանում: $a+bi$ *կոմպլեքս թվի համար a-ն կոչվում է* ***իրական մաս*** *և գրվում է.* $\mathrm{Re}(a+bi)=a$ *, իսկ b-ն՝ կոչվում է* ***կեղծ մաս****, որն էլ գրվում է այսպես.* $\mathrm{Im}(a+bi)=b$ *:*

Կոմպլեքս թվերի հավասարության սահմանումից (2.1) բխում է, որ տվյալ կոմպլեքս թիվը հավասար է որևէ իրական թվի, այսինքն՝ իրական թիվ է այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա կեղծ մասը հավասար է զրոյի:

Ընդունված է $a+(-b)i$ տեսքի կոմպլեքս թվերը գրել ավելի կարճ ձևով՝ $a-bi$: $a-bi=a+(-b)i$ կոմպլեքս թիվը կոչվում է $a+bi$ կոմպլեքս թվին ***համալուծ կոմպլեքս*** թիվ: Այդ փաստը նշելու համար գրում են.

$$\overline{a+bi}=a-bi:$$

Ակնհայտորեն $\overline{\overline{a+bi}}=a+bi$: Հետևյալ լեմման անմիջապես բխում է համալուծի և գումարի սահմանումներից:

Լեմա 3.1: ա. $a+bi\ +\ \overline{a+bi}=2a\in\mathbb{R}$

բ. $\forall z_1\forall z_2[\ \overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}\ ]$: □

4. Կոմպլեքս թվերի բազմապատկումը

Իսկ այժմ, տրված երկու $a+bi$ և $c+di$ կոմպլեքս թվերի միջոցով կառուցենք հետևյալ կոմպլեքս թիվը. $(ac-bd)+(ad+bc)i$:

Սահմանում: *$a+bi$ և $c+di$ կոմպլեքս թվերի արտադրյալ անելով կհասկանանք $(ac-bd)+(ad+bc)i$ կոմպլեքս թիվը:*

Այն, որ $(ac-bd)+(ad+bc)i$ թիվը հանդիսանում է $a+bi$ և $c+di$ կոմպլեքս թվերի արտադրյալը, կգրենք այսպես.

$$(a+bi)\odot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i: \quad (8)$$

Օգտագործելով (1) և (8) հավասարությունները, կարող ենք գրել.

$$a\odot b=(a+0i)\odot(b+0i)=(a\cdot b-0\cdot 0)+(a\cdot 0+0\cdot b)i=a\cdot b+0i=a\cdot b=ab, \quad (9)$$

որտեղ $\cdot$ նշանը իրական թվերի բազմապատկման նշանն է (իրական թվերը բազմապատկելիս, երբ հարկ չկա, մենք $\cdot$ նշանը բաց ենք թողնում): (9) հավասարությունը ցկատի ունենալով, առանց շփոթություն առաջացնելու, կարող ենք սրանից հետո $\odot$ նշանը փոխարինել $\cdot$ նշանով: Դրա շնորհիվ, (8)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i: \quad (10)$$

Այս բանաձևից հետևում է, որ եթե $b=0$, այսինքն, եթե $a+bi=a$, ապա

$$a\cdot(c+di)=ac+adi: \quad (11)$$

Հատկանշական է նաև հաջորդ՝ (12) առնչությունը.

$$b\cdot i=(b+0i)\cdot(0+1i)=(b\cdot 0-0\cdot 1)+(b\cdot 1+0\cdot 0)i=0+bi=bi, \quad (12)$$

այսինքն՝ $bi=b\cdot i$:

Նախքան կոմպլեքս թվերի բազմապատկման հիմնական առանձնահատկություններից մեկը ցուցադրելը, պայմանավորվենք այս պահից սկսած $0+1i=1i$ կոմպլեքս թվի փոխարեն գրել մեկ տառ՝ i: Եվ այսպես, $0+1i=i$: Հաշվենք $i\cdot i$ արտադրյալը.

$$i\cdot i=(0+1i)\cdot(0+1i)=(0\cdot 0-1\cdot 1)+(0\cdot 1+1\cdot 0)i=-1+0i=-1: \quad (13)$$

Այսպիսով, $i\cdot i=-1$: Սա նշանակում է, որ կոմպլեքս թվերը և նրանց բազմապատկումը օժտված են նոր որակներով, որոնք բնորոշ չեն իրական թվերին: Իսկապես, ի տարբերություն i կոմպլեքս թվի, գոյություն չունի մի այնպիսի a իրական թիվ, որը բավարարի $a\cdot a=-1$ հավասարությանը:

Մենք արդեն նշել ենք, որ կոմպլեքս թվի և իր համալուծի գումարը իրական թիվ է (տես3.1, ա.): Պարզվում է, որ դրանց արտադրյալը ևս իրական թիվ է.

$$(a+bi)\cdot\overline{(a+bi)}=(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2+b^2\in\mathbf{R}:$$

$\sqrt{a^2+b^2}$ ոչ բացասական իրական թիվը կոչվում է $a+bi$ կոմպլեքս թվի ***մոդուլ***: Դա նշելու համար գրում են.

$$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}:$$

Փաստորեն $(a+bi)\cdot\overline{(a+bi)}=a^2+b^2=|a+bi|^2$:

Եթե a-ն իրական թիվ է, ապա $|a|=|a+0i|=\sqrt{a^2+0^2}=\sqrt{a^2}$, այսինքն՝ a իրական թվի կոմպլեքս իմաստով մոդուլը համընկնում է այդ թվի իրական իմաստով մոդուլի հետ: Հեշտ է ստուգել հետևյալը:

Լեմմա 4.1: $\forall z_1 \forall z_2 [\,\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}\,]$: □

5. Կոմպլեքս թվերի հատկությունները, դաշտ

Այժմ մենք $(\mathbb{C},+,\cdot)$ եռյակի համար կապացուցենք գլուխ 1, թեորեմ 11-ի նմանակը: Պարզվում է, որ եթե մենք հիշատակված թեորեմի ձևակերպման մեջ ամենուրեք $\mathbf{Z}_n$-ը փոխարինենք $\mathbb{C}$-ով, $+_n$-ը՝ $+$-ով, իսկ $\cdot_n$-ը՝ $\cdot$-ով, ապա թեորեմ 11-ը, նշված փոփոխություններով հանդերձ դարձյալ ճիշտ կլինի:

Թ ե ո ր ե մ 1: *Դիցուք $\mathbb{C}$-ն կոմպլեքս թվերի բազմությունն է, իսկ x-ը, y-ը և z-ը՝ կամայական կոմպլեքս թվեր: Այդ դեպքում տեղի ունեն հետևյալ հատկությունները.*

1. $(x+y)+z = x+(y+z)$,

($\mathbb{C}$*-ում + գործողությունը բավարարում է զուգորդական օրենքին*)

2. $0+x=x$,

($\mathbb{C}$*-ում 0-ն + գործողության չեզոք տարր է*)

3. *յուրաքանչյուր* $x\in\mathbb{C}$ *համար գոյություն ունի այնպիսի* $x_1\in\mathbb{C}$, *որ*

$$x + x_1 = 0,$$

($\mathbb{C}$*-ում + գործողության նկատմամբ ամեն տարր ունի հակադիր*)

4. $x+y=y+x$,

($\mathbb{C}$*-ում + գործողությունը բավարարում է տեղափոխական օրենքին*)

I. $(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$,

($\mathbb{C}$*-ում · գործողությունը բավարարում է զուգորդական օրենքին*)

II. $1\cdot x = x$,

($\mathbb{C}$*-ում 1-ը · գործողության չեզոք տարր է*)

III. *եթե* $x\neq 0$, *ապա գոյություն ունի այնպիսի* $x^*\in\mathbb{C}$, *որ*

$$x\cdot x^* = 1,$$

($\mathbb{C}$*-ում · գործողության նկատմամբ ոչ 0 տարրն ունի հակադարձ*)

IV. $x\cdot y = y\cdot x$,

($\mathbb{C}$*-ում · գործողությունը բավարարում է տեղափոխական օրենքին*)

բ. $x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z)$,

(*·-ը բաշխական է +-ի նկատմամբ*):

Ապացուցում: 1. Դիցուք $x=a_1+b_1i$, $y=a_2+b_2i$, $z=a_3+b_3i$: Այդ դեպքում.

$$(x+y)+z = ((a_1+a_2)+a_3)+((b_1+b_2)+b_3)i$$

և

$$x+(y+z) = (a_1+(a_2+a_3))+(b_1+(b_2+b_3))i,$$

այնպես որ կոմպլեքս թվերի + գործողության համար զուգորդական օրենքը բխում է նրանից, որ $(x+y)+z$ և $x+(y+z)$ կոմպլեքս թվերի իրական և կեղծ մասերը համապատասխանաբար իրար հավասար են: Ճիշտ այս նույն տրամաբանությամբ, 4., I, IV. և բ. պնդումներն ապացուցելու համար հարկավոր է հաշվել պահանջվող նույնությունների աջ ու ձախ մասերը և համոզվել, որ դրանց իրական մասերն իրար են հավասար, իսկ կեղծ մասերն՝ իրար: Հաշվարկները թողնում ենք ընթերցողին: Ի դեպ, (11)-ը համընկնում է ր. պնդման մասնավոր դեպքը:

2. և II. պնդումներն ակնհայտ են:

3. Դիցուք $x=a+bi$: x_1-ով նշանակենք $x_1=-a-bi$ կոմպլեքս թիվը: Այդ

դեպքում. $x+x_1=(a+bi)+(-a-bi)=0+0i=0$:

$x_1=-a-bi$ կոմպլեքս թիվն անվանում են $x=a+bi$ կոմպլեքս թվին ***հակադիր*** թիվ և գրում . $-x=x_1$: Այսպիսով,

$$-(a+bi)=-a-bi:$$

III. Դիցուք $x=a+bi\neq 0$: Այդ դեպքում $a^2+b^2\neq 0$: Որպես x^* վերցնենք $x^*=\dfrac{a}{a^2+b^2}-\dfrac{b}{a^2+b^2}i$ կոմպլեքս թիվը: (10) բանաձևով կատարելով ոչ բարդ հաշվարկներ, կհամոզվենք, որ $x\cdot x^*=1$:

$x^*=\dfrac{a}{a^2+b^2}-\dfrac{b}{a^2+b^2}i$ կոմպլեքս թիվն անվանում են $x=a+bi$ կոմպլեքս թվին ***հակադարձ*** թիվ և գրում. $x^{-1}=x^*$: Այսպիսով,

$$(a+bi)^{-1}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i:$$

Հաշվի առնելով (11)-ը, կարող ենք նաև գրել.

$$(a+bi)^{-1}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i=\frac{1}{a^2+b^2}\cdot\overline{(a+bi)}: \square$$

Հ ե տ և ա ն ք: *Կոմպլեքս թվերի արտադրյալը կարելի է հաշվել այսպես.*

$$(a+bi)\cdot(c+di)=a\cdot(c+di)+bi\cdot(c+di)=ac+adi+bic+bidi=ac+adi+bci-bd:$$

• **Սահմանում 4.1:** *Դիցուք* **k** *-ն մի ոչ դատարկ բազմություն է, իսկ* $+$ *-ը և* $\cdot$ *-ը* **k** *բազմության վրա տրված որևէ երկու երկտեղանի գործողություններ են: Այդ դեպքում* (**k**, +, ·) *եռյակը կոչվում է դաշտ, եթե* **k** *բազմության կամայական* x, y *և* z *տարրերի համար տեղի ունեն հետևյալ պայմանները (աքսիոմները).*

1. $(x+y)+z=x+(y+z)$,

 (**k** *-ում* $+$ *գործողությունը բավարարում է զուգորդական օրենքին*)

2. $\exists 0[0\in \mathbf{k}\wedge 0+x=x]$,

 (**k** *-ում 0-ն* $+$ *գործողության չեզոք տարր է*)

3. *յուրաքանչյուր* $x\in\mathbf{k}$ *համար գոյություն ունի այնպիսի* $x_1\in\mathbf{k}$, *որ*

$$x+x_1=0,$$

 (**k** *-ում* $+$ *գործողության նկատմամբ ամեն տարր ունի հակադիր*)

4. $x+y=y+x$,

 (**k** *-ում* $+$ *գործողությունը բավարարում է տեղափոխական օրենքին*)

I. $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$,

 (**k** *-ում* $\cdot$ *գործողությունը բավարարում է զուգորդական օրենքին*)

II. $\exists 1[1 \in \mathbf{k} \wedge 1 \cdot x = x]$,

($\mathbf{k}$-*ում* 1-*ը* $\cdot$ *գործողության չեզոք տարր է*)

III. *եթե* $x \neq 0$, *ապա գոյություն ունի այնպիսի* $x^* \in \mathbf{k}$, *որ*

$$x \cdot x^* = 1,$$

($\mathbf{k}$-*ում* $\cdot$ *գործողության նկատմամբ ոչ* 0 *տարրն ունի հակադարձ*)

IV. $x \cdot y = y \cdot x$,

($\mathbf{k}$-*ում* $\cdot$ *գործողությունը բավարարում է տեղափոխական օրենքին*)

Բ. $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$,

($\cdot$ -*ը բաշխական է* + -*ի նկատմամբ*): •

Հետևանք: $(\mathbb{C},+,\cdot)$, $(\mathbb{R},+,\cdot)$, $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ եռյակները և $(\mathbf{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ եռյակները, որտեղ n-ը պարզ թիվ է, հանդիսանում են դաշտ:

Ապացույց: $(\mathbb{C},+,\cdot)$ եռյակի դաշտ լինելը բխում է թեորեմ 1-ից, իսկ $(\mathbb{R},+,\cdot)$, $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ եռյակները և պարզ n-ի դեպքում $(\mathbf{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ եռյակների դաշտ լինելը մենք հիմնավորել ենք գլուխ 1, 9-ում: □

Իրական թվերի համար ապացուցվող բազմաթիվ նույնություններ, որոնցից են, օրինակ, $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$, կամ

$$a^{-1} - (a+1)^{-1} = a^{-1}(a+1)^{-1},$$

բխում են դաշտի աքսիոմներից, ուրեմն՝ ճիշտ են բոլոր դաշտերում, մասնավորապես՝ կոմպլեքս թվերի դաշտում:

6. Կոմպլեքս թվերի երկրաչափական մեկնաբանությունը

Յուրաքանչյուր $a + bi$ կոմպլեքս թվով միարժեքորեն որոշվում է իրական թվերի (a,b) կարգավորված զույգ և հակառակը: Մյուս կողմից, եթե հարթության վրա ընտրենք ուղղանկյուն կոորդինատական համակարգ, ապա այդ համակարգի միջոցով, իրական թվերի ամեն մի (a,b) կարգավորված զույգի կարելի է համապատասխանեցնել ճիշտ մեկ կետ հարթության վրա: Արդյունքում, յուրաքանչյուր $a + bi$ կոմպլեքս թվի կարող ենք համապատասխանեցնել միարժեքորեն որոշված մի կետ հարթության վրա, որի կոորդինատներն են (a,b): Ավելին, $a + bi$ կոմպլեքս թվով հարթության վրա միարժեքորեն որոշվում է նաև մի $\vec{\alpha}$ վեկտոր, որի ծայրակետն ունի նույն (a,b) կոորդինատները, իսկ սկզբնակետն է $(0,0)$-ն: Այս համապատասխանությունն արժեքավոր է հատկապես նրանով, որ $a + bi$ և $c + di$ կոմպլեքս թվերի $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$ գումարին համապատասխանում է $(a+c, b+d)$ կոորդինատներով վեկտորը, որը հավասար է (a,b) և (c,d) կոորդինատներով վեկտորների գումարին: Ըստ Պյութագորասի թեորեմի, (a,b) կոորդինատներով կետի հեռավորությունը կոորդինատների սկզբնակետից, այսինքն՝ (a,b) կոորդինատներով վեկտորի երկարությունը հավասար

է $\sqrt{a^2 + b^2}$ թվին, իսկ վերջինս, ինչպես արդեն նշել ենք, կոչվում է $a + bi$ թվի մոդուլ՝ $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$:

Դիտարկենք $\vec{\alpha} \neq 0$ վեկտորի և Ox առանցքի դրական ուղղության հետ կազմած այն անկյունը, որն ընկած է $[0,2\pi)$ միջակայքում: Այդ անկյունը, որի հաշվումը կատարվում է ժամացույցի սլաքի պտտմանը հակառակ ուղղությամբ, նշանակվում է $\arg(a+bi)$ -ով և կոչվում է $a+bi$ կոմպլեքս թվի ***գլխավոր արգումենտ*** : Եվ ընդհանրապես, յուրաքանչյուր $\arg(a+bi)+2\pi k$ տեսքի թիվ կոչվում է $a+bi$ թվի ***արգումենտ*** : 0 թվի համար արգումենտ չի սահմանվում: Դիցուք φ -ն $a+bi$ կոմպլեքս թվի արգումենտ է: Եթե $ab \neq 0$, ապա $(0,0)$, $(a,0)$ և (a,b) զագաթներով ուղղանկյուն եռանկյան կողմերի միջև եղած առնչություններից անմիջապես բխում է .

$$a=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\cos\varphi\,,\quad b=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin\varphi:$$

Այսպիսով,

$$a+bi=(\sqrt{a^2+b^2}\cdot\cos\varphi)+(\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin\varphi)i=\sqrt{a^2+b^2}\cdot(\cos\varphi+\sin\varphi\; i):$$

Քանի որ կոմպլեքս թվերի արտադրյալը տեղափոխելի է, ապա

$$\sin\varphi\cdot i=i\cdot\sin\varphi,$$

այնպես որ, կարող ենք գրել.

$$a+bi=|a+bi|\cdot(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi): \tag{14}$$

Դժվար չէ տեսնել, որ $|a+bi|$-ն և φ -ն պարզապես համընկնում են (a,b) կետի բևեռային կոորդինատները $(0,0)$ բևեռով և Ox բևեռային առանցքով համակարգում: Հասկանալի է, որ եթե (14) նույնության մեջ φ -ն փոխարինենք որևէ այլ՝ $\varphi+2\pi k$ արգումենտով, ապա ստացվածը դարձյալ կհանդիսանա նույնություն: (14)-ի աջ մասը կոչվում է $a+bi$ կոմպլեքս թվի ***եռանկյունաչափական տեսք*** :

7. Մուավրի բանաձևը

Կոմպլեքս թվերը բազմապատկելիս հաճախ ավելի հարմար է օգտվել նրանց եռանկյունաչափական տեսքերից:

Լեմմա 7.1: *Եթե φ -ն՝ $a+bi$ կոմպլեքս թվի արգումենտ է, իսկ ψ -ն՝ $c+di$ թվի, ապա*

$$(a+bi)(c+di)=|a+bi|\cdot|c+di|\cdot(\cos(\varphi+\psi)+i\cdot\sin(\varphi+\psi)): \tag{15}$$

Ապացույց: Բավական այն է, որ

$$(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)\cdot(\cos\psi+i\cdot\sin\psi)=(\cos(\varphi+\psi)+i\cdot\sin(\varphi+\psi)):\square$$

Այսպիսով, եռանկյունաչափական տեսքով տրված երկու կոմպլեքս թվերը բազմապատկելիս նրանց մոդուլները բազմապատկվում են, իսկ արգումենտները՝ գումարվում:

Լեմմա 7.2: $(a+bi)^{-1}=|a+bi|^{-1}\cdot(\cos(-\varphi)+i\cdot\sin(-\varphi)):$ (16)

Ապացույց: (15) բանաձևից անմիջապես բխում է, որ

$$|a+bi|\cdot(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)\;\cdot\;|a+bi|^{-1}\cdot(\cos(-\varphi)+i\cdot\sin(-\varphi))=1:$$

Որեմն, նշանակելով $z=|a+bi|^{-1}\cdot(\cos(-\varphi)+i\cdot\sin(-\varphi))$, մի կողմից կստանանք, որ $(a+bi)\cdot z=1$, մյուս կողմից, ըստ $(a+bi)^{-1}$ թվի սահմանման (տե՛ս մաս 4., թեորեմ 1)՝

$$(a+bi)^{-1}=(a+bi)^{-1}\cdot[(a+bi)\cdot z]=[(a+bi)^{-1}\cdot(a+bi)]\cdot z=1\cdot z=z:\Box$$

Լեմմա 7.2-ից մասնավորապես բխում է, որ

$$|(a+bi)^{-1}|=|a+bi|^{-1}: \tag{17}$$

Կոմպլեքս թվի ամբողջ աստիճանը սահմանվում է այնպես, ինչպես իրական թվերի համար: Զրոյից տարբեր յուրաքանչյուր z կոմպլեքս թվի՝ $z\in\mathbb{C}^*=\mathbb{C}-\{0\}$, և կամայական n ամբողջ թվի համար z^n-ով կնշանակենք z-*ի* n ***աստիճանը***, որը սահմանվում է հետևյալ եղանակով.

$$z^n=\begin{cases}\overbrace{z\cdot z\cdot z\cdots z}^{n} & ,\text{եթե } n>0\\ 1 & ,\text{եթե } n=0\\ \underbrace{z^{-1}\cdot z^{-1}\cdot z^{-1}\cdots z^{-1}}_{-n} & ,\text{եթե } n<0\end{cases}:$$

Այս սահմանումից երևում է, որ $n<0\Rightarrow z^n=(z^{-1})^{-n}$: Ավելին, դժվար չի հասկանալ, որ $(z^m)^n=z^{mn}$ կամայական m և n ամբողջ թվերի համար:

Մուավրի բանաձևը: ***Եթե*** $z\in\mathbb{C}^*=\mathbb{C}-\{0\}$ ***և*** $n\in\mathbb{Z}$, ***ապա***

$$(a+bi)^n=|a+bi|^n\cdot(\cos n\varphi+i\cdot\sin n\varphi): \tag{18}$$

Ապացուցում: Դրական n-երի համար բանաձևը բխում է (15) նույնությունից: Դրանից հետևում է, որ բանաձևը ճիշտ է նաև բացասական n-երի համար, եթե հաշվի առնենք $z^n=(z^{-1})^{-n}$ և (16) նույնությունները: □

8. Արմատներ կոմպլեքս թվից:

Կոմպլեքս թվի աստիճանի սահմանումից հեշտությամբ դուրս է բերվում, որ $(z^m)^n=z^{mn}$, $z^m z^n=z^{m+n}$ և $(x\cdot y)^n=x^n\cdot y^n$: Ի դեպ, այս նույնությունները տեղի ունեն կամայական դաշտում, օրինակ՝ $(\mathbb{R},+,\cdot)$, $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ և $(\mathbb{Z}_n,+_n,\cdot_n)$ (որտեղ n-ը պարզ թիվ է) դաշտերում, և բոլոր դեպքերում էլ ապացուցումը նույնն է:

Դիցուք n-ը որևէ բնական թիվ է ($n\geq 2$): Դիտարկենք $x^n=1$ հավասարումը: Զույգ n-երի դեպքում միայն երկու իրական թվեր կան՝ 1-ը և -1-ը, որոնք բավարարում են այդ հավասարմանը, իսկ կենտ n-երի դեպքում՝ մեկ, այն է՝ 1-ը: Իսկ, բացի այդ թվերից, կա՞ն արդյոք այլ կոմպլեքս թվեր, որոնք բավարարում են նշված հավասարմանը:

Թեորեմ 2: *Յուրաքանչյուր n բնական թվի համար ($n\geq 1$) գոյություն ունեն ճիշտ n հատ կոմպլեքս թվեր, որոնցից յուրաքանչյուրի n աստիճանը հավասար է 1-ի, այլ կերպ ասած, որոնք հանդիսանում են $x^n=1$ հավասարման արմատներ: Եթե $n\geq 3$, ապա հարթության վրա այդ արմատներին համապատասխանող կետերը գտնվում են* (0,0) *կենտրոնով միավոր շրջանագծին ներգծած այն կանոնավոր n-անկյան գագաթներում, որի մի գագաթը* (1,0) *կոորդինատներով կետում է:*

Ապացուցում: Ենթադրենք, թե $z=|z|\cdot(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$ եռանկյունաչափական տեսքով տրված այնպիսի կոմպլեքս թիվ է, որը $x^n=1$ հավասարման արմատ է: Համաձայն Մուավրի բանաձևի, սա նշանակում է, որ
$$z^n=|z|^n\cdot(\cos n\varphi+i\cdot\sin n\varphi)=1:$$
Ըստ կոմպլեքս թվերի հավասարության սահմանման (սահմանում 2.1), այստեղից կստանանք, որ $|z|^n\cdot\cos n\varphi=1$ և $|z|^n\cdot\sin n\varphi=0$, այսինքն՝ $|z|^n=1\Leftrightarrow|z|=1$ և $n\varphi=2\pi k$: Ստացանք, որ
$$z^n=1 \;\Rightarrow\; z=z_k=\cos\frac{2\pi k}{n}+i\cdot\sin\frac{2\pi k}{n}:$$
Դարձյալ Մուավրի բանաձևից բխում է, որ ճիշտ է նաև հակառակը՝ $z_k^n=1$:

Այնուհետև, $z_k=z_m \Leftrightarrow \dfrac{2\pi k}{n}=\dfrac{2\pi m}{n}+2\pi s \Leftrightarrow k=_n m$: Ուրեմն, եթե $\mathbb{C}_n$-ով նշանակենք հետևյալ բազմությունը.
$$\mathbb{C}_n=\{\, z_k=\cos\frac{2\pi k}{n}+i\cdot\sin\frac{2\pi k}{n}\,;\;\; k\in\mathbb{Z}_n\,\},$$
ապա $\mathbb{C}_n$-ը բաղկացած կլինի ճիշտ n հատ թվերից և $z^n=1\Leftrightarrow z\in\mathbb{C}_n$: Բացի այդ, $\mathbb{C}_n$ բազմության թվերի պատկերները հենց բնորոշում են նկարագրված բազմանկյան գագաթները: □

Նման դատողություններով լուծվում է նաև յուրաքանչյուր
$$x^n=w \tag{19}$$
հավասարում, որտեղ w-ն կամայական կոմպլեքս թիվ է: Իրոք, ենթադրելով, որ $z=|z|\cdot(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$ կոմպլեքս թիվը $x^n=|w|\,(\cos(\arg w)+i\sin(\arg w))$ հավասարման արմատ է և կիրառելով Մուավրի բանաձևը, կստանանք.
$$|z|^n\cdot\cos n\varphi=|w|\cos(\arg w) \;\text{ և }\; |z|^n\cdot\sin n\varphi=|w|\sin(\arg w),$$
որտեղից հետևում է, որ $|z|=|w|^{\frac{1}{n}}$, իսկ $\varphi=\dfrac{\arg w+2\pi k}{n}$, $k\in\mathbb{Z}$: Այսպիսով, (19) հավասարման լուծումներն ունեն
$$z_k=|w|^{\frac{1}{n}}\,(\cos\frac{\arg w+2\pi k}{n}+i\cdot\sin\frac{\arg w+2\pi k}{n}),\;\; k\in\mathbb{Z}$$
տեսքը: Մյուս կողմից, այս դեպքում ևս կարող ենք գրել. $z_k=z_m \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \dfrac{2\pi k}{n}=\dfrac{2\pi m}{n}+2\pi s \Leftrightarrow k=_n m$: Սա նշանակում է, որ (19) հավասարումն ունի ճիշտ n հատ լուծումներ, որոնք հետևյալ թվերն են
$$z_k=|w|^{\frac{1}{n}}\,(\cos\frac{\arg w+2\pi k}{n}+i\cdot\sin\frac{\arg w+2\pi k}{n}),\;\; k\in\mathbb{Z}_n:$$
z_k թվերի բազմությունն ընդունված է նշանակել $\sqrt[n]{w}$-ով.

$$\sqrt[n]{w}=\{\,|w|^{\frac{1}{n}}\,(\cos\frac{\arg w+2\pi k}{n}+i\cdot\sin\frac{\arg w+2\pi k}{n})\,;\,k\in\mathbb{Z}_n\}:$$

Եվ այսպես, կոմպլեքս թվերի բազմությունում յուրաքանչյուր թվից կարելի է արմատ հանել, նույնիսկ՝ բացասական թվերից:

Թ ե ո ր ե մ 3: ($(\mathbb{C}_n,\cdot)$-ի խմբային հատկությունները) *Դիցուք $n\in\mathbf{N}$: Այդ դեպքում տեղի ունեն հետևյալ հատկությունները.*

ա. $\forall x\forall y(\,x\in\mathbb{C}_n\wedge y\in\mathbb{C}_n\Rightarrow\ x\cdot y\in\mathbb{C}_n)$,

($\mathbb{C}_n$-ը փակ է $\cdot_n$ գործողության նկատմամբ)

1. $\forall x\forall y\forall z\,[x\in\mathbb{C}_n\wedge y\in\mathbb{C}_n\wedge z\in\mathbb{C}_n\Rightarrow(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)\,]$,

($\mathbb{C}_n$-ում $\cdot$ գործողությունը բավարարում է զուգորդական օրենքին)

2. $1\in\mathbb{C}_n\ \wedge\ \forall x\,(x\in\mathbb{C}_n\ \Rightarrow 1\cdot x=x)$,

($\mathbb{C}_n$-ում 1-ը $\cdot$ գործողության համար չեզոք տարր է)

3. $\forall x\,[x\in\mathbb{C}_n\ \Rightarrow\ x^{-1}\in\mathbb{C}_n\,]$,

($\mathbb{C}_n$-ում յուրաքանչյուր տարրն ունի հակադարձ)

4. $\forall x\forall y\,[\,x\in\mathbb{C}_n\wedge y\in\mathbb{C}_n\ \Rightarrow\ x\cdot y=y\cdot x]$,

($\mathbb{C}_n$-ում $\cdot$ գործողությունը բավարարում է տեղափոխական օրենքին)

Ա պ ա ց ո ւ յ ց ո ւ մ: ա. $(x^n=1\wedge y^n=1)\Rightarrow(x\cdot y)^n=x^n\cdot y^n=1$:

1. -ը, 2.-ը և 4.-ը ակնհայտ են:

3. $x^n=1\Rightarrow(x^n)^{-1}=1$: Մնում է տեսնել, որ $(x^n)^{-1}=(x^{-1})^n$:□

9. Եռանկյան անհավասարություն

Թ ե ո ր ե մ 4: *Կամայական z_1 և z_2 կոմպլեքս թվերի համար*

ա. $|\,z_1+z_2\,|\le|\,z_1\,|+|\,z_2\,|$,

բ. $|\,z_1-z_2\,|\ge||\,z_1\,|-|\,z_2\,||$:

Ա պ ա ց ո ւ յ ց ո ւ մ: ա. Դիցուք $z_1=a_1+b_1i$ և $z_2=a_2+b_2i$: Նախ նկատենք, որ

$$(a_1a_2+b_1b_2)^2=(a_1^{\,2}+b_1^{\,2})(a_2^{\,2}+b_2^{\,2})-(a_1b_2-b_1a_2)^2\le(a_1^{\,2}+b_1^{\,2})(a_2^{\,2}+b_2^{\,2}):$$

Ուրեմն՝ $(a_1a_2+b_1b_2)\le\sqrt{(a_1^{\,2}+b_1^{\,2})}\cdot\sqrt{(a_2^{\,2}+b_2^{\,2})}=|\,z_1\,|\cdot|\,z_2\,|$: Այստեղից հետևում է, որ

$$(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2\le(a_1^2+b_1^2)+(a_2^2+b_2^2)+2|\,z_1\,|\cdot|\,z_2\,|=(|\,z_1\,|+|\,z_2\,|)^2,$$

այսինքն՝ $|\,z_1+z_2\,|^2\le(|\,z_1\,|+|\,z_2\,|)^2$: Այսպիսով, $|\,z_1+z_2\,|\le|\,z_1\,|+|\,z_2\,|$:

բ. $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$ անհավասարությունում z_1-ը փոխարինելով z_1-z_2 թվով, կստանանք $|z_1|\le|z_1-z_2|+|z_2|$, ապա, փոխելով z_1-ի ու z_2-ի տեղերը, կստանանք $|z_2\,|\le|z_1-z_2|+|z_1|$:□

ա. անհավասարությունը վերածվում է հավասարության միայն ու միայն այն դեպքում, երբ $a_1b_2-b_1a_2=0$, այսինքն, երբ $z_1=\lambda z_2$ ինչ-որ λ իրական թվի համար: Թեորեմ 4-ում նկարագրված անհավասարությունները կոչվում են ***եռանկյան անհավասարություններ***, քանի որ դրանցից հետևում է երկբաչափության այն պնդումը, որ եռանկյան յուրաքանչյուր կողմի երկարությունը փոքր է մյուս երկու կողմերի գումարից:

10. Կոմպլեքս թվերի հաջորդականություններ

Սահմանում: *Կասենք, որ կոմպլեքս թվերի z_m $(m \in \mathbb{N})$ հաջորդականությունը զուգամիտում է z կոմպլեքս թվին և կգրենք $z_m \to z$, եթե $|z_m - z| \to 0$:*

Լեմմա 10.1: *Դիցուք $z_m = x_m + y_m i$ և $z = x + yi$: Այդ դեպքում՝*

$$z_m \to z \quad \Leftrightarrow \quad (x_m \to x \ \wedge \ y_m \to y):$$

Ապացույց: $(\Leftarrow)$ Ըստ սահմանման, $|z_m - z| = \sqrt{|x_m - x|^2 + |y_m - y|^2}$, որտեղ՝ $|x_m - x| \to 0$ և $|y_m - y| \to 0$ պայմաններից բխում է $|z_m - z| \to 0$:

$(\Rightarrow)$ Հետևում է $|x_m - x| \le |z_m - z|$ և $|y_m - y| \le |z_m - z|$ անհավասարություններից: □

Հետևանք 4.1: $z_m \to z \ \Rightarrow \ |z_m| \to |z|$:

Ապացույց: Հետևում է $||z_m| - |z|| \le |z_m - z|$ անհավասարությունից: □

Հետևանք 4.2: *Եթե $z_m \to z$ և $w_m \to w$, ապա*

ա. $z_m + w_m \to z + w$,

բ. $z_m \cdot w_m \to z \cdot w$:

Ապացույց: Ինչպես և իրական թվերի դեպքում, հետևում են

$$|(z_m + w_m) - (z + w)| \le |z_m - z| - |w_m - w|$$

$$|(z_m \cdot w_m) - (z \cdot w)| \le |z_m - z| \cdot |w_m| + |z| \cdot |w_m - w|$$

անհավասարություններից: □

Հետևանք 4.3: *Եթե $z_m \to z$, ապա*

ա. $\forall\, a \in \mathbb{C}, \forall k \in \mathbb{N}(\, a \cdot z_m^k \to a \cdot z^k\,)$,

բ. *կամայական $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ կոմպլեքս թվերի համար*

$$a_0 + a_1 z_m + a_2 z_m^2 + \ldots + a_n z_m^n \to a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n:$$

Ապացույց: ա. Հետևում է հետևանք 4.2, բ.-ից:

բ. Բխում է ա. պնդումից և հետևանք 4.2, ա.-ից: □

Հետևանք 4.4: *Եթե $|z_m| \to \infty$, ապա կամայական $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ կոմպլեքս թվերի համար $|a_0 + a_1 z_m + a_2 z_m^2 + \ldots + a_n z_m^n| \to \infty$:*

Ապացույց: Օգտվենք թեորեմ 4, բ.-ից.

$$|a_0 + a_1 z_m + a_2 z_m^2 + \ldots + a_n z_m^n| = |z_m^n| \cdot |a_n + a_{n-1} z_m^{-1} + \ldots + a_1 z_m^{1-n} + a_0 z_m^{-n}| \ge$$

$$\ge |z_m^n| \cdot (|a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z_m|} - \ldots - \frac{|a_1|}{|z_m|^{n-1}} - \frac{|a_0|}{|z_m|^n}):$$

Վերջին փակագծերում գրված արտահայտությունը ձգտում է $|a_n|$-ին: Հետեսաքար, $|z_m^n|\cdot(|a_n|-\frac{|a_{n-1}|}{|z_m|}-\ldots-\frac{|a_1|}{|z_m|^{n-1}}-\frac{|a_0|}{|z_m|^n})\to\infty$ և, առվել ևս՝

$$|a_0+a_1z_m+a_2z_m^2+\ldots+a_nz_m^n|\to\infty:\ \Box$$

Հետևանքներ 4.1-4.4-ին մենք կանդրադառնանք գլուխ 6-ում, կոմպլեքս գործակիցներով բազմանդամների ուսումնասիրության ժամանակ:

11. Կոմպլեքս թվերի կարգավորման խնդիրը

Իրական թվերի բազմությունը բաղկացած է դրական իրական թվերից, որոնց բազմությունը նշանակվում է $\mathbb{R}_+$-ով, բացասական իրական թվերից, որոնց բազմությունը նշանակվում է $\mathbb{R}_-$-ով, և 0-ից. $\mathbb{R}=\mathbb{R}_+\cup\mathbb{R}_-\cup\{0\}$: $\mathbb{R}_+$ և $\mathbb{R}_-$ բազմությունները բավարարում են հետևյալ պայմանին. $x\in\mathbb{R}_+\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -x\in\mathbb{R}_-$: Ասում են, որ x իրական թիվը մեծ է y իրական թվից և գրում են $x>y$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $x-y\in\mathbb{R}_+$: Ցանկացած երկու՝ x և y իրական թվերի համար տեղի ունի հետևյալ երեք առնչություններից մի-այն ու միայն մեկը. $y>x$, $x=y$, $x>y$, այսինքն՝ երկու իրական թվեր կամ հավասար են, կամ նրանցից մեկը մեծ է մյուսից: Ահա այս վերջին փաստի շնորհիվ է, որ ասում են, թե իրական թվերի ***բազմությունը գծորեն կարգավորված է***:

Իսկ հնարավոր չէ արդյո՞ք կոմպլեքս թվերի բազմությունը նույնպես տրոհել $\mathbb{C}_+$, $\mathbb{C}_-$ և $\{0\}$ ենթաբազմությունների, այսինքն՝ ներկայացնել $\mathbb{C}=\mathbb{C}_+\cup\mathbb{C}_-\cup\{0\}$ տեսքով, այնպես, որ

$$\forall x[\ x\in\mathbb{C}_+\Leftrightarrow -x\in\mathbb{C}_-]: \qquad (\triangleleft)$$

Դա հնարավորություն կտա, ինչպես և իրական թվերի դեպքում, կոմպլեքս թվերը իրար հետ համեմատել, x և y կոմպլեքս թվերի համար սահմանելով, որ x-ը մեծ է y-ից՝ $x>y$, երբ $x-y\in\mathbb{C}_+$:

$x\in\mathbb{C}_+\Leftrightarrow -x\in\mathbb{C}_-$ պայմանը նշանակում է, որ $\mathbb{C}_+$ և $\mathbb{C}_-$ բազմությունների պատկերները հարթության վրա պետք է սիմետրիկ լինեն կոորդինատական համակարգի սկզբնակետի նկատմամբ: Այդպիսին են, օրինակ հետևյալ բազմությունները.

$$\mathbb{C}_+=\{a+bi;\ a>0\vee(a=0\wedge b>0)\},$$
$$\mathbb{C}_-=\{a+bi;\ a<0\vee(a=0\wedge b<0)\}:$$

Դժվար չէ հասկանալ, որ $(\triangleleft)$ պայմանին բավարարող բազմաթիվ այլ տրոհումներ ևս կան: Յուրաքանչյուր այդպիսի տրոհում կանվանենք կոմպլեքս թվերի ***բազմության գծային կարգավորում***:

Սակայն իրական թվերի կարգավորումը մի կարևոր առանձնահատկություն էլ ունի. այն «համաձայնեցված» է իրական թվերի + և · գործողությունների հետ, ավելի ճշգրիտ, տեղի ունի հետևյալ պայմանը.

$$\forall x\forall y[(x>0\wedge y>0)\Rightarrow(x+y>0\wedge x\cdot y>0)]:$$

(Այս հատկության շնորհիվ, իրական թվերի դաշտն անվանում են ***գծորեն կարգավորված դաշտ***):

Թ ե ո ր ե մ 5: *Կոմպլեքս թվերի դաշտը չունի այնպիսի գծային կարգավորում, որի համար տեղի ունենա նաև*

$$\forall x \forall y[(x>0 \wedge y>0) \Rightarrow \ x\cdot y>0] \qquad (>)$$

պայմանը:

Ապացուցում: Ենթադրենք հակառակը. դիցուք գոյություն ունի կոմպլեքս թվերի բազմության գծային կարգավորում՝ $\mathbb{C}=\mathbb{C}_+\cup\mathbb{C}_-\cup\{0\}$, որի միջոցով սահմանել ենք, որ $x>y \ \Leftrightarrow \ x-y\in\mathbb{C}_+$, և տեղի ունի (>) պայմանը: i կոմպլեքս թվի համար երկու հնարավորություն կա. կամ $i\in\mathbb{C}_+$, այսինքն՝ $i>0$, կամ $i\in\mathbb{C}_-$, այսինքն՝ $i<0$:

Եթե $i>0$, ապա ըստ (>) պայմանի,

$$i\cdot i>0 \Rightarrow -1>0 \Rightarrow (-1)\cdot(-1)>0 \Rightarrow 1>0:$$

Ստացվում է, որ $-1\in\mathbb{C}_+$ և $1\in\mathbb{C}_+$, իսկ սա հակասում է (⊲) պայմանին: Իսկ եթե $i<0$, ապա $-i>0$, որեմն $(-i)\cdot(-i)>0 \Rightarrow -1>0$ և կրկնելով վերևում բերված դատողությունները, դարձյալ կստանանք հակասություն: □

12. Կոմպլեքս թվերի դաշտի միակությունը

Թ ե ո ր ե մ 6: *Դիցուք՝*

1. $(\mathbf{k},+,\cdot)$ *եռյակը դաշտ է (տե՛ս սահմանում 4.1-ը),*

2. $\mathbb{R}\subset\mathbf{k}$,

3. $\mathbf{k}$ *-ում կա մի այնպիսի* j *տարր, որ* $j^2=-1$ *:*

Այդ դեպքում, եթե $\mathbf{k}_1=\{a+b\cdot j\ ;\ \forall a\in\mathbb{R},\forall b\in\mathbb{R}\}\subset\mathbf{k}$, *ապա*

ա. $(a+b\cdot j)+(c+d\cdot j)=(a+c)+(b+d)\cdot j$,

բ. $(a+b\cdot j)\cdot(c+d\cdot j)=(a\cdot c-b\cdot d)+(a\cdot d+b\cdot c)\cdot j$,

գ. $(\mathbf{k}_1,+,\cdot)$ *եռյակը դաշտ է,*

դ. $a+b\cdot j=c+d\cdot j \Leftrightarrow (a=c\wedge b=d)$:

Ապացուցում: ա.-ն բխում է նրանից, որ դաշտում +-ը զուգորդական և տեղափոխական է, իսկ բազմապատկումը՝ ·-ը, բաշխական է +-ի նկատմամբ:

բ. –ն բխում է բաշխականությունից, $j^2=-1$ պայմանից և գումարման տեղափոխականությունից:

գ. Որպեսզի ապացուցենք, որ $(\mathbf{k}_1,+,\cdot)$-ը դաշտ է, բավական է տեսնել, որ $(a+b\cdot j)+(0+0\cdot j)=a+b\cdot j$, $(a+b\cdot j)+((-a)+(-b)\cdot j)=0+0\cdot j$,

$(a+b\cdot j)\cdot(1+0\cdot j)=a+b\cdot j$ և $(a+b\cdot j)\cdot(\dfrac{a}{a^2+b^2}+(-\dfrac{b}{a^2+b^2}\cdot j))=1+0\cdot j$,

եթե $a^2+b^2\neq 0$: Ավելորդ չէ նշել, որ $0\cdot j=0$: Իրոք.

$$0\cdot j=0+0\cdot j=(-0\cdot j+0\cdot j)+0\cdot j=-0\cdot j+(0\cdot j+0\cdot j)=$$
$$=-0\cdot j+(0+0)\cdot j=-0\cdot j+0\cdot j=0 \ :$$

Նպես որ $0+0\cdot j=0$ և $1+0\cdot j=1$:

դ. Եթե $a+b\cdot j=c+d\cdot j$,ապա $a-c=(d-b)\cdot j$: Այս հավասարության երկու կողմերը քառակուսի բարձրացնելով, կստանանք. $(a-c)^2=-(b-d)^2$, որտեղից $a-c=d-b=0$: □

Թեորեմ 6-ը տալիս է այն հարցերի պատասխանը, թե մենք ինչից ելնելով կառուցեցինք կոմպլեքս թվերի բազմությունը, ինչու կոմպլեքս թվերի հավասարությունը տրվեց այնպես, ինչպես նկարագրված է սահմանում 2.1-ում և ինչու կոմպլեքս թվերի գումարումն ու բազմապատկումը սահմանեցինք հենց (3) և (8) բանաձևերով:

13. Զուգահեռներ կոմպլեքս թվերի և մատրիցների միջև

Յուրաքանչյուր $a+bi$ կոմպլեքս թվի համապատասխանեցնենք $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ տեսք ունեցող մի մատրից.

$$a+bi\mapsto\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Ամեն մի այդպիսի մատրից միարժեքորեն է որոշվում իր առաջին տողով՝ $(a\ \ b)$ զույգով, և, ուրեմն՝ $a+bi$ կոմպլեքս թվով: Հետաքրքիրն այն է, որ այս համապատասխանության դեպքում $a+bi$ և $c+di$ կոմպլեքս թվերի գումարին՝ $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$, կհամապատասխանի

$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix}$$

մատրիցը, որը հանդիսանում է այդ թվերին համապատասխանող մատրիցների՝ $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ և $\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$ գումարը.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix}:$$

Ավելին, $a+bi$ և $c+di$ կոմպլեքս թվերի արտադրյալին՝

$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

կհամապատասխանի այդ նույն մատրիցների արտադրյալը.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix}:$$

Այնուհետև, $0=0+0i$ թվին կհամապատասխանի $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ մատրիցը, $1=1+0i$ թվին՝ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\mathrm{E}$ մատրիցը, իսկ $i=0+1i$ թվին՝ $J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ մատրիցը, ընդ որում՝ $J^2 = -\mathrm{E}$: Վերջապես, $(a+bi)^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$ թվին

համապատասխանի $\begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & -\frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1}$ մատրիցը:

Ինչպես տեսնում ենք, կոմպլեքս թվերի գործողությունները և նշված տեսքի մատրիցների հետ կատարվող գործողությունները ենթարկվում են մի ընդհանուր տրամաբանության: Այդ տրամաբանության մասին է վկայում նաև $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = a \cdot \mathrm{E} + b \cdot J$ հավասարությունը, որը հիշեցնում է $a + bi = a \cdot 1 + b \cdot i$ նույնությունը: Եթե այս կապակցությամբ, անդրադառնանք քառյակ 6-ում ձևակերպված պնդման ապացուցմանը, ապա կտեսնենք, որ

$$\mathbb{C}_1 = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}; \forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} \}$$

բազմությունը 2×2 չափի մատրիցների գումարում և մատրիցների բազմապատկում գործողությունների նկատմամբ հանդիսանում է դաշտ: Թե այս դաշտը, թե քառյակ 6-ում նկարագրված $(\mathbb{k}_1, +, \cdot)$ դաշտը, օժտված են բացարձակապես նույն հատկություններով, ինչ որ կոմպլեքս թվերի դաշտը, որից տարբերվում են ընդամենը իրենց տարրերի տեսքերով: Օրինակ, $\mathbb{C}_1$ բազմության կամայական $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ մատրիցից կարելի է n աստիճանի արմատ հանել: Դրա համար բավական է գտնել $a + bi$ կոմպլեքս թվի n աստիճանի արմատների բազմությունը, ապա վերադառնալ $\mathbb{C}_1$, ամեն մի արմատին համապատասխանեցնելով իր մատրիցը: Այսպես, քանի որ $(1+i)^8 = 8$, ապա $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^8 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$:

Գլուխ 6
Բազմանդամներ

1. Բազմանդամի սահմանումը

Դիտարկենք $x^1, x^2, x^3, ..., x^n, ...$ բնական թվերով համարակալված նշանները: Կառուցենք հետևյալ բազմությունը.

$$\mathbb{R} \cup \{+\} \cup \{x^1, x^2, x^3, ..., x^n, ...\}:$$

Այս բազմության յուրաքանչյուր տարր կանվանենք տառ, իսկ ամբողջ բազմությունը՝ ***իրական գործակիցներով բազմանդամների այբուբեն*** (տառ, այբուբեն, արտահայտություն (բառ), արտահայտության երկարություն գաղափարները սահմանվել են գլուխ 2, մաս 1.-ում) : Եվ այսպես, մեր այբուբենի տառերն են՝ իրական թվերը, + նշանը, և, վերջապես, $x^1, x^2, x^3, ..., x^n, ...$ տառերը: Դիցուք $n \in \mathbb{N}_0$: Վերցնենք կամայական $n+1$ իրական թվեր. $a_0, a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, և դրանց միջոցով գրենք հետևյալ արտահայտությունը (բառը).

$$a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n, \qquad (1)$$

որի երկարությունը հավասար է $3n+1$: Եթե $n=0$, ապա (1) բառը կունենա a_0 տեսքը և, դրանով իսկ, մեկ երկարություն: Պահանջվում է, որ (1) արտահայտության գրության մեջ մասնակցող $x^1, x^2, x^3, ..., x^n$ նշանների վերևում գրված բնական թվերը, ձախից աջ, գրված լինեն աճման կարգով:

Սահմանում 1.1: (1) ***տեսքի յուրաքանչյուր արտահայտություն, որտեղ*** $n \in \mathbb{N}_0$, իսկ $a_0, a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ ***թվերը կամայական իրական թվեր են, կանվանենք իրական գործակիցներով բազմանդամ:*** $a_0, a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ ***թվերը կոչվում են այդ բազմանդամի գործակիցներ,*** a_0 ***-ն՝ ազատ անդամ:***

Օրինակ. -5, $7 + 1x^1 + (-3)x^2 + (-\sqrt{0,3})x^3 + 0x^4$, $0 + 0x^1 + 0x^2$, արտահայտությունները բազմանդամներ են, իսկ $2 + x^14 + 3x^2$ բառը՝ ոչ: Իրական գործակիցներով բոլոր հնարավոր բազմանդամների բազմությունը ընդունված է նշանակել $\mathbb{R}[x]$-ով: Համաձայն սահմանման, յուրաքանչյուր a_0 իրական թիվ (1) տեսքի մեկ երկարությամբ արտահայտություն է, որեմն՝ նաև բազմանդամ է: Այսպիսով. $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}[x]$:

Սահմանում 1.2: ***Եթե*** $a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ ***բազմանդամի բոլոր գործակիցները հավասար են զրոյի, այսինքն՝*** $a_0 = a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$, ***ապա այդ բազմանդամը կոչվում է զրոյական բազմանդամ:***

Սահմանում 1.3: $0+0x^1+0x^2+0x^3+...+0x^{n-1}+a_nx^n$ $(a_n \neq 0)$ ***տեսքի բազմանդամը կոչվում է միանդամ: Միանդամ է կոչվում նաև*** a_0 $(a_0 \neq 0)$ ***բազմանդամը:***

$0+0x^1+0x^2+0x^3+...+0x^{n-1}+a_nx^n$ միանդամը միարժեքորեն է որոշվում a_nx^n արտահայտությամբ: Դա հնարավորություն է տալիս միանդամների համար ներմուծել ավելի կարճ նշանակում՝ $a_n x^n$: Եվ այսպես, այսուհետ, $0+0x^1+0x^2+...+0x^{n-1}+a_n x^n$ միանդամի փոխարեն կգրենք $a_n x^n$.

$$0+0x^1+0x^2+...+0x^{n-1}+a_n x^n \equiv a_n x^n:$$

2. Բազմանդամի աստիճան: Հավասար բազմանդամներ

Սահմանում 2.1: *Երբ $a_0+a_1x^1+a_2x^2+a_3x^3+...+a_nx^n$ բազմանդամը զրոյական բազմանդամ չէ, ապա* $\max\{k\ ;\ a_k \neq 0\}$ *բնական թիվը կոչվում է $a_0+a_1x^1+a_2x^2+a_3x^3+...+a_nx^n$ բազմանդամի աստիճան և նշանակվում է այսպես.* $\deg(a_0+a_1x^1+a_2x^2+a_3x^3+...+a_nx^n)$:

Այսպիսով, եթե $a_0+a_1x^1+a_2x^2+a_3x^3+...+a_nx^n$-ը զրոյական բազմանդամ չէ, ապա $\deg(a_0+a_1x^1+a_2x^2+a_3x^3+...+a_nx^n)=\max\{k\ ;\ a_k \neq 0\} \geq 0$:

Զրոյական բազմանդամի համար աստիճան չի սահմանվում:

Օրինակ, $\deg(5+3x^1+2x^2+4x^3+0x^4+0x^5)=3$, $\deg(-\sqrt{2}+0x^1+1x^2)=2$:

Լեմմա 2.1: *Եթե* $\deg(a_0+a_1x^1+a_2x^2+a_3x^3+...+a_nx^n)=k$, *ապա* $k \leq n$, $a_k \neq 0$ *և* $[n \geq s > k \Rightarrow a_s = 0]$: □

Դիտարկենք որևէ բազմանդամ՝ $a_0+a_1x^1+a_2x^2+a_3x^3+...+a_nx^n$: Հարմարության համար այն նշանակենք f տառով.

$$f = a_0+a_1x^1+a_2x^2+a_3x^3+...+a_nx^n: \qquad (2)$$

Տվյալ f բազմանդամի և յուրաքանչյուր i բնական թվի համար՝ $i \in \mathbf{N}_0$, f_i-ով նշանակենք հետևյալ թիվը.

$$f_i = \begin{cases} a_i, & 0 \leq i \leq n \\ 0, & i > n \end{cases}: \qquad (3)$$

Օգտագործելով (3) առնչությունները, մենք (2) հավասարությամբ տրված f բազմանդամը կարող ենք գրել

$$f = f_0 + f_1x^1 + f_2x^2 + f_3x^3 + ... + f_nx^n \qquad (4)$$

տեսքով: Այսպիսով, (2) տեսքի յուրաքանչյուր f բազմանդամ կարելի է ներկայացնել (4) տեսքով, որտեղ f_i թվերը որոշվում են (3) հավասարություններով: Մասնավորապես, եթե f-ը տրված է (4) տեսքով, ապա

$$i > n \Rightarrow f_i = 0:$$

f_i թվերի (3) սահմանումից բխում է, որ f-ը զրոյական բազմանդամ է այն և միայն դեպքում, երբ

$$\forall i\ [i \in \mathbf{N}_0 \Rightarrow f_i = 0]:$$

Դիցուք տրենք երկու բազմանդամներ՝

$$f = f_0+f_1x^1+f_2x^2+f_3x^3+...+f_nx^n \text{ և } g = g_0+g_1x^1+g_2x^2+g_3x^3+...+g_mx^m:$$

Սահմանում 2.2: *f և g բազմանդամները կանվանենք իրար հավասար և կգրենք $f = g$ այն և միայն այն դեպքում, երբ*

$$\forall i\ [i \in \mathbf{N}_0 \Rightarrow f_i = g_i]: \qquad (5)$$

Լեմմա 2.2: *Յուրաքանչյուր երկու զրոյական բազմանդամ իրար հավասար են:* □

Մասնավորապես, բոլոր զրոյական բազմանդամները հավասար են 0 բազմանդամին:

Հավասարության սահմանումից անմիջապես բխում է հետևյալը:

Լեմմ ա: *Կամայական f, g և h բազմանդամների համար.*

ա. $f=f$, բ. $f=g \Rightarrow g=f$, գ. $(f=g \wedge g=h) \Rightarrow f=h$: □

Լեմմա 2.3: ա. *Եթե* $f=g\neq 0$, *ապա* $\deg f=\deg g$ *:*

բ. *Եթե* $\deg f=\deg g=k$, *ապա* $i>k \Rightarrow f_i=g_i=0$ *:*

գ. *Եթե* $\deg f=k$, *ապա* $f=f_0+f_1x^1+f_2x^2+f_3x^3+\ldots+f_kx^k$ *:* *Ավելին կամայական $t\geq 1$ բնական թվի համար՝*

$$f=f_0+f_1x^1+f_2x^2+f_3x^3+\ldots+f_kx^k+0x^{k+1}+0x^{k+2}+\ldots+0x^{k+t}: \qquad (4)$$

դ. *Եթե* $\deg g=0$, *ապա* $g=g_0\in\mathbb{R}$ *:*

Ապացույց: ա. Ակնհայտ է:

բ. Բխում է լեմմա 2.1-ից:

գ. Եթե $i\leq k=\deg f$, ապա

$$(f_0+f_1x^1+f_2x^2+f_3x^3+\ldots+f_kx^k)_i=f_i:$$

Իսկ եթե $i>k$, ապա

$$(f_0+f_1x^1+f_2x^2+f_3x^3+\ldots+f_kx^k)_i=0=f_i:$$

Ուրեմն՝ $f=f_0+f_1x^1+f_2x^2+f_3x^3+\ldots+f_kx^k$: Նույն ձևով ապացուցվում է (4) հավասարությունը:

դ. Բխում է գ.-ից: □

Սահմանում 2.3: *Եթե* $\deg(f_0+f_1x^1+f_2x^2+f_3x^3+\ldots+f_nx^n)=k$, *ապա*

$$f_0+f_1x^1+f_2x^2+f_3x^3+\ldots+f_kx^k$$

բազմանդամը կոչվում է $f_0+f_1x^1+f_2x^2+f_3x^3+\ldots+f_nx^n$ *բազմանդամի կանոնավոր տեսք:*

Հետևանք: *Հավասար բազմանդամներն ունեն միևնույն կանոնավոր տեսքը:*

Ապացույց: Բխում է լեմմա 2.3, ա.-ից և գ.-ից: □

3. Բազմանդամների գումարումը

Դիտարկենք երկու բազմանդամներ՝

$f=f_0+f_1x^1+f_2x^2+f_3x^3+\ldots+f_nx^n$ և $g=g_0+g_1x^1+g_2x^2+g_3x^3+\ldots+g_mx^m$:

Նկատենք, որ եթե խոսքը չի գնում f և g բազմանդամների կանոնավոր տեսքի մասին, ապա միշտ էլ կարելի է համարել, որ $m=n$, քանի որ, եթե, ասենք թե, $m<n$, ապա g բազմանդամը, ըստ լեմմա 2.3, գ.-ի, միարժեքորեն կարելի է ներկայացնել

$$g=g_0+g_1x^1+g_2x^2+g_3x^3+\ldots+g_mx^m+0x^{m+1}+0x^{m+2}+\ldots+0x^n,$$

կամ, որ նույնն է,

$$g=g_0+g_1x^1+g_2x^2+g_3x^3+\ldots+g_mx^m+g_{m+1}x^{m+1}+g_{m+2}x^{m+2}+\ldots+g_nx^n$$

տեսքով, որտեղ $s>0\Rightarrow g_{m+s}=0$: Եվ այսպես, դիցուք

$f=f_0+f_1x^1+f_2x^2+f_3x^3+\ldots+f_nx^n$ և $g=g_0+g_1x^1+g_2x^2+g_3x^3+\ldots+g_nx^n$:

Սահմանում 3.1: $f=f_0+f_1x^1+f_2x^2+\ldots+f_nx^n$ *և*

$$g=g_0+g_1x^1+g_2x^2+\ldots+g_nx^n$$

բազմանդամների համար

$$(f_0+g_0)+(f_1+g_1)x^1+(f_2+g_2)x^2+(f_3+g_3)x^3+\ldots+(f_n+g_n)x^n$$

բազմանդամը, որտեղ (f_i+g_i)*-ն* f_i *և* g_i *իրական թվերի գումարն է* $(i=0,1,2,\ldots,n)$, *կոչվում է* f *և* g *բազմանդամների գումար և նշանակվում է* $f\oplus g$ *-ով*.

$$f\oplus g=(f_0+g_0)+(f_1+g_1)x^1+(f_2+g_2)x^2+(f_3+g_3)x^3+\ldots+(f_n+g_n)x^n:$$

Այսպիսով, ըստ $f\oplus g$ բազմանդամի սահմանման, $(f\oplus g)_i=f_i+g_i$: Օրինակ՝

$$(7+1x^1+(-3)x^2+(-2)x^3+0x^4)\oplus(0+5x^1+3x^2)=7+6x^1+0x^2+(-2)x^3+0x^4:$$

Լեմմա 3.1: Եթե $f=f^*$ և $g=g^*$, ապա $f\oplus g=f^*\oplus g^*$:

Ապացույց: Քանի որ կամայական i բնական թվի համար տեղի ունի $(f\oplus g)_i=f_i+g_i=f^*_i+g^*_i=(f^*\oplus g^*)_i$ հավասարությունը, ապա

$$f\oplus g=f^*\oplus g^*:$$

Թեորեմ 1: 1. $\forall f\,\forall g\,\forall h[(f\oplus g)\oplus h=f\oplus(g\oplus h)]$,

2. $\forall f[f\oplus 0=f]$,

3. $\forall f\,\exists g[f\oplus g=0]$

4. $\forall f\,\forall g[f\oplus g=g\oplus f]$:

Ապացույց: 1. Բխում է $(f_i+g_i)+h_i=f_i+(g_i+h_i)$ նույնություններից $(i=0,1,2,3,\ldots)$:

2. $\forall i\,[f_i+0=f_i]$:

3. Եթե $-f$ -ով նշանակենք $-f=(-f_0)+(-f)_1x^1+(-f_2)x^2+\ldots+(-f_n)x^n$ բազմանդամը, ապա $f\oplus -f=0$: $-f$ -ը կոչվում է f -ին *հակադիր բազմանդամ*.

4. $\forall i\,[f_i+g_i=g_i+f_i]$ $(i=0,1,2,3,\ldots)$: □

Հետևանք: *Կամայական* $f=f_0+f_1x^1+f_2x^2+f_3x^3+\ldots+f_nx^n$ *բազմանդամի համար տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը.*

$$f_0+f_1x^1+f_2x^2+f_3x^3+\ldots+f_nx^n=f_0\oplus f_1x^1\oplus f_2x^2\oplus f_3x^3\oplus\ldots\oplus f_nx^n,\quad(5)$$

որտեղ աջ մասի յուրաքանչյուր f_kx^k *գումարելին միանդամ է*՝

$$f_kx^k=0+0x^1+0x^2+0x^3+\ldots+0x^{k-1}+f_kx^k:$$

Ապացույց: Նախորդ թեորեմի 1. պնդումից հետևում է, որ (5) հավասարության աջ մասի գումարը կախված չէ գումարման հերթականությունից, այսինքն՝ փակագծեր կարելի է չդնել: Մնում է օգտվել բազմանդամների գումարի սահմանումից և հաշվել գրված միանդամների գումարը: □

Այսպիսով, $f=f_0+f_1x^1+f_2x^2+f_3x^3+\ldots+f_nx^n$ բազմանդամը հավասար է f_0, f_1x^1, $f_2x^2,\ldots,$ f_nx^n միանդամների գումարին:

(5) հավասարության շնորհիվ, բազմանդամների սահմանման մեջ օգտագործված + նշանը կարելի է փոխարինել գումարման $\oplus$ նշանով: Մենք կանենք հակառակը. այսուհետև $\oplus$ նշանի փոխարեն կօգտագործենք + նշանը: Քանի որ $f=f_0+f_1x^1+f_2x^2+f_3x^3+\ldots+f_nx^n$ բազմանդամը միանդամների գումար է, ապա կարող ենք գրոյի հավասար միանդամները չգրել: Օրինակ,

$$7+x^1+0x^2+2x^3+0x^4+5x^5=7+x^1+2x^3+5x^5:$$

+ նշանի յուրաքանչյուր գործածության ժամանակ միանգամայն պարզ կլինի, թե որ իմաստով պետք է այն հասկանալ: Մասնավորապես.

$$f+g=(f_0+g_0)+(f_1+g_1)x^1+(f_2+g_2)x^2+(f_3+g_3)x^3+\ldots+(f_n+g_n)x^n$$

արտահայտության մեջ յուրաքանչյուր + նշան միարժեքորեն է մեկնաբանվում: Բացի այդ, այսուհետ, $f+(-g)$-ի փոխարեն կգրենք $f-g$:

4. Բազմանդամների բազմապատկումը

Իսկ այժմ, կամայական երկու բազմանդամների միջոցով՝

$f=f_0+f_1x^1+f_2x^2+f_3x^3+\ldots+f_nx^n$ և $g=g_0+g_1x^1+g_2x^2+g_3x^3+\ldots+g_mx^m$,

կառուցենք մի նոր բազմանդամ: Այդ նպատակով, յուրաքանչյուր i ($i\in\mathbb{N}_0$) բնական թվի համար h_i-ով նշանակենք հետևյալ թիվը.

$$h_i=f_0g_i+f_1g_{i-1}+f_2g_{i-2}+\ldots+f_{i-1}g_1+f_ig_0: \qquad (5)$$

Բերված բանաձևից երևում է, որ (5) հավասարության աջ մասի գումարը կազմված է բոլոր հնարավոր f_kg_s տեսքի այն գումարելիներից, որոնց համար $k+s=i$: Սրանից ելնելով, (5)-ը կարելի է գրել նաև հետևյալ տեսքով.

$$h_i=\sum_{k+s=i}f_kg_s: \qquad (6)$$

Սահմանում 4.1: *f և g բազմանդամների արտադրյալ կոչվում է հետևյալ h բազմանդամը՝*

$$h=h_0+h_1x^1+h_2x^2+h_3x^3+\ldots+h_{n+m}x^{n+m},$$

որտեղ յուրաքանչյուր i ($i\in\mathbb{N}_0$) թվի համար h_i իրական թիվը որոշվում է (5) բանաձևով: f և g բազմանդամների արտադրյալը կնշանակենք $f\cdot g$-ով:

Օրինակ,

$$(7+1x^1+-3x^2+2x^3+0x^4)\cdot(0+5x^1+3x^2)=0+35x^1+26x^2+-12x^3+1x^4:$$

(5) հավասարություններից անմիջապես բխում է հետևյալը:

Լեմմա 4.1: Եթե $f=f^*$ և $g=g^*$, ապա $f\cdot g=f^*\cdot g^*$: □

Թեորեմ 2: I. $\forall f\forall g\forall h[(f\cdot g)\cdot h=f\cdot(g\cdot h)]$,

II. 2. $\forall f[f\cdot 1=f]$,

IV. $\forall f\forall g[f\cdot g=g\cdot f]$,

բ. $\forall f\forall g\forall h[f\cdot(g+h)=(f\cdot g)+(f\cdot h)]$:

Ապացուցում: I. $((f\cdot g)\cdot h)_i=\sum\limits_{m+s=i}(f\cdot g)_m\cdot h_s=$

$$\sum_{m+s=i}\Big(\sum_{p+q=m}f_p\cdot g_q\Big)\cdot h_s=\sum_{m+s=i}\sum_{p+q=m}(f_p\cdot g_q)\cdot h_s=\sum_{p+q+s=i}f_p\cdot g_q\cdot h_s:$$

Մյուս կողմից, $(f\cdot(g\cdot h))_i=\sum\limits_{p+r=i}f_p\cdot(g\cdot h)_r=$

$$\sum_{p+r=i}f_p\cdot\Big(\sum_{q+s=r}g_q\cdot h_s\Big)=\sum_{p+r=i}\sum_{q+s=r}f_p\cdot(g_q\cdot h_s)=\sum_{p+q+s=i}f_p\cdot g_q\cdot h_s:$$

Ուրեմն՝ $\forall i\ [\ ((f\cdot g)\cdot h)_i=(f\cdot(g\cdot h))_i\ ]$:

II. $\forall i\,[(f\cdot 1)_i=f_i]$:

IV. $(f\cdot g)_i=\sum_{m+s=i} f_m g_s=\sum_{m+s=i} g_s f_m=(g\cdot f)_i$:

բ. $(f\cdot(g+h))_i=\sum_{m+s=i} f_m\cdot(g+h)_s=\sum_{m+s=i} f_m\cdot(g_s+h_s)=$

$$=\sum_{m+s=i}(f_m\cdot g_s+f_m\cdot h_s)=\sum_{m+s=i} f_m\cdot g_s+\sum_{m+s=i} f_m\cdot h_s=(f\cdot g)_i+(f\cdot h)_i:\square$$

Յուրաքանչյուր $f=f_0+f_1x^1+f_2x^2+f_3x^3+\ldots+f_nx^n$ բազմանդամ, համաձայն թեորեմ 1-ի հետևանքի, $f_0, f_1x^1, f_2x^2, \ldots, f_nx^n$ միանդամների գումար է: Ուրեմն երկու բազմանդամների արտադրյալը հաշվելու համար կարելի է, ըստ թեորեմ 2, բ.-ի, բաշխական օրենքով փակագծերը բացել, և հետո, դարձյալ թեորեմ 1-ից ու թեորեմ 2-ից օգտվելով, կատարել «նման անդամների միացում», այսինքն՝ հավասար աստիճան ունեցող միանդամների գործակիցներն իրար գումարել:

Դիցուք f_kx^k-ն որևէ միանդամ է: Պայմանավորվենք, որ երբ $f_k=1$, ապա f_kx^k-ի փոխարեն կգրենք ուղղակի x^k: Ընդունված է նաև x^1-ի փոխարեն գրել x՝ $x^1\equiv x$:

Հետևանք 2.1: ա. $f_kx^k\cdot f_mx^m=f_kf_mx^{k+m}$, *որտեղ հավասարության ձախ մասում գրված է միանդամների արտադրյալ:*

բ. $f_k\cdot x^k=f_kx^k$:

Ապացույց: ա. Ըստ բազմանդամների արտադրյալի սահմանման՝

$$f_kx^k\cdot f_mx^m=$$
$$=(0+0x^1+0x^2+\ldots+0x^{k-1}+f_kx^k)\cdot(0+0x^1+0x^2+\ldots+0x^{m-1}+f_mx^m)=$$
$$0+0x^1+0x^2+\ldots+0x^{k+m-1}+f_kf_mx^{k+m}=f_kf_mx^{k+m}:$$

բ. Բխում է ա.-ից:$\square$

Հետևանք 2.2: ա. $x^k\cdot x^m=x^{k+m}$,

բ. $x^k=\underbrace{x^1\cdot x^1\cdots x^1}_{k}=\underbrace{x\cdot x\cdots x}_{k}:\square$

Հետևանք: $f_0+f_1x^1+f_2x^2+\ldots+f_nx^n=f_0+f_1\cdot x^1+f_2\cdot x^2+\ldots+f_n\cdot x^n:\square$

4. Բազմանդամների գումարի և արտադրյալի աստիճանը: Բազմանդամների օղակ

Թեորեմ 3: Երբ $f\neq 0$ և $g\neq 0$, ապա

ա. $\deg(f+g)\leq\max\{\deg f, \deg g\}$,

բ. $\deg(f\cdot g)=\deg f+\deg g$:

Ապացույց: ա. $f_i=g_i=0\Rightarrow(f+g)_i=f_i+g_i=0$:

բ. Դիցուք $\deg f=k$ և $\deg g=m$: Համաձայն լեմմա 2.1-ի,

$s>k\Rightarrow f_s=0$ և $t>m\Rightarrow g_t=0$: Ուրեմն՝

$$i>k+m\Rightarrow(f\cdot g)_i=\sum_{p+q=i} f_pg_q=0,$$

քանի որ $p+q=i>k+m\Rightarrow(p>k$ կամ $q>m)$: Բացի այդ, $f_k\neq 0$ և $g_m\neq 0$ պայմաններից հետևում է, որ $f_kg_m\neq 0$: Ուրեմն՝ $(f\cdot g)_{k+m}=\sum_{p+q=k+m} f_pg_q=$

$= f_0 g_{k+m} + f_1 g_{k+m-1} + \ldots + f_{k-1} g_{m+1} + f_k g_m + f_{k+1} g_{m-1} + \ldots f_{k+m-1} g_1 + f_{k+m} g_0 = f_k g_m$:
Այսպիսով, $(f \cdot g)_{k+m} = f_k g_m \neq 0$, այսինքն՝ $\deg(f \cdot g) = k + m$:□

Հետևանք 3.1: $f \cdot g = 0 \Rightarrow (f = 0 \vee g = 0)$:

Ապացուցում: Իրոք, եթե $f \neq 0$ և $g \neq 0$, ապա

$$\deg f + \deg g = \deg(f \cdot g) \geq 0 :$$

Ուրեմն, $f \cdot g \neq 0$:□

Թեորեմ 1-ը և թեորեմ 2-ը համադրելով, նկատում ենք, որ $(\mathbb{R}[x],+,\cdot)$ եռյակի դաշտ լինելու համար պակասում է միայն III. հատկությունը. (տե՛ս գլուխ 5, սահմանում 4.1)

III. $\forall f \ (f \in \mathbb{R}[x] \Rightarrow \exists g \ (f \cdot g = 1))$:

Սակայն, այս հատկությունը տեղի չունի: Օրինակ, $(0 + 2x) \cdot g = 1$ հավասարումը g-ի նկատմամբ լուծում չունի, քանի որ $(0 + 2x) \cdot g$ բազմանդամի ազատ անդամը, անկախ g բազմանդամից, 0 է: Հակիրճ նշելու համար, որ $(\mathbb{R}[x],+,\cdot)$ եռյակը բավարարում է թեորեմ 1-ի 1.-4. և թեորեմ 2-ի I.,II.,IV. և բ. պայմաններին, կասենք, որ $(\mathbb{R}[x],+,\cdot)$ եռյակը հանդիսանում է ***օղակ*** : Այս օղակը կոչում են ***իրական գործակիցներով բազմանդամների օղակ***[1] :

Իրական գործակիցներով բազմանդամների $(\mathbb{R}[x],+,\cdot)$ օղակի կառուցման հիմքում ընկած է $\mathbb{R} \cup \{+\} \cup \{=\} \cup \{x^1, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots\}$ այբուբենը: Եթե այս այբուբենում իրական թվերի $\mathbb{R}$ բազմությունը փոխարինենք $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ կամ $\mathbb{C}$ բազմությամբ ու առաջիորեն կրկնենք այս գլխի 1.-3. մասերը, ապա, համապատասխանաբար, կստանանք ***ամբողջ գործակիցներով***՝ $(\mathbb{Z}[x],+,\cdot)$, ***ռացիոնալ գործակիցներով***՝ $(\mathbb{Q}[x],+,\cdot)$, ***և կոմպլեքս գործակիցներով***՝ $(\mathbb{C}[x],+,\cdot)$, ***բազմանդամների օղակները:*** Այդ բազմանդամների օղակների սահմանումներից անմիջապես հետևում է, որ

$$\mathbb{Z}[x] \subset \mathbb{Q}[x] \subset \mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x] :$$

Բացի այդ,

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[x] \ , \ \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[x] \ , \ \mathbb{R} \subset \mathbb{R}[x] \ , \ \mathbb{C} \subset \mathbb{C}[x] :$$

Մյուս կողմից, դժվար չէ հասկանալ, որ ամբողջ նախորդող տեքստում իրական թվերի $\mathbb{R}$ բազմությունը փոխարինելով $\mathbb{Z}_n$ մնացքների բազմությամբ (որտեղ n-ը մեկից մեծ կամայական բնական թիվ է), իրական թվերի գումարման $+$ նշանը փոխարինելով $+_n$ նշանով, իրական թվերի բազմապատկումը՝ $\cdot$, փոխարինելով $\cdot_n$-ով և մնացած շարադրանքը նույնությամբ կրկնելով կարող ենք ապացուցել այս գլխի բոլոր պնդումները, ընդհուպ՝ թեորեմ 1-ն ու թեորեմ 2-ը, ստանալով բազմանդամների մի նոր օղակ՝ $(\mathbb{Z}_n[x], +, \cdot)$: Մասնավորապես, այս օղակում երկու՝

---

[1] Հիշենք, որ մինչ այժմ ***օղակ*** բառը մենք օտագործել ենք գլուխ 1, մաս 10-ում, օղակ անվանելով $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ եռյակը ***(ամբողջ թվերի օղակ)*** և, բաղադրյալ n թվերի դեպքում՝ $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ եռյակները ***(մնացքների օղակ)***, ինչպես նաև՝ գլուխ 4, մաս 7-ում, որտեղ $(\mathrm{M}_{n \times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ եռյակն անվանել ենք մատրիցների ***ոչ տեղափոխական օղակ.***

$f = f_0 + f_1x^1 + f_2x^2 + f_3x^3 + \ldots + f_mx^m$ և $g = g_0 + g_1x^1 + g_2x^2 + g_3x^3 + \ldots + g_mx^m$ բազմանդամների գումարը կսահմանենք

$$f + g = (f_0 +_n g_0) + (f_1 +_n g_1)x^1 + (f_2 +_n g_2)x^2 + \ldots + (f_m +_n g_m)x^m$$

բանաձևով, իսկ արտադրյալի սահմանման մեջ օգտագործված (5) բանաձևերով որոշվող h_i թվերը այժմ կորոշվեն

$$h_i = f_0 \cdot_n g_i +_n f_1 \cdot_n g_{i-1} +_n f_2 \cdot_n g_{i-2} +_n \ldots +_n f_{i-1} \cdot_n g_1 +_n f_i \cdot_n g_0$$

առնչություններով: Օրինակ, բազմանդամների $(\mathbb{Z}_4[x], +, \cdot)$ օղակում

$$(2 + 2x^1 + 3x^2) \cdot (2 + 2x^1 + x^2) = 0 + 0x^1 + 0x^2 + 0x^3 + 3x^4 = 3x^4$$

և

$$(2 + 2x^1 + 3x^2) + (2 + 2x^1 + x^2) = 0 + 0x^1 + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 = 0:$$

6. Բաժանման գաղափարը: Մնացորդով բաժանում

Գլուխ 1.-ում ամբողջ թվերի համար ներմուծված մի շարք գաղափարներ և պնդումներ՝ բաժանարար, պարզ թիվ, մնացորդով բաժանում, էվկլիդեսի ալգորիթմը, թվի վերլուծումը պարզ արտադրիչների և այլն, ունեն բազմանդամներին վերաբերող իրենց կրկնօրինակները:

Սահմանում 6.1: *Դիցուք $f \in \mathbb{R}[x]$, $g \in \mathbb{R}[x]$ և $g \neq 0$: Կասենք, որ f բազմանդամը բաժանվում է g բազմանդամի վրա, եթե գոյություն ունի մի h բազմանդամ՝ $h \in \mathbb{R}[x]$, այնպիսին, որ $f = g \cdot h$: Այս դեպքում կասենք նաև, որ g-ն f-ի բաժանարար է, իսկ f-ը՝ g-ի բազմապատիկ և այդ փաստը կգրառենք այսպես. $g \mid f$:*

Օրինակ, $(1-x) \cdot x = x - x^2$, ուրեմն՝ $1 - x \mid x - x^2$:

Լեմմա 6.1: ա. $(g \mid f \wedge h \neq 0) \Rightarrow gh \mid fh$,

բ. $(h \mid g \wedge g \mid f) \Rightarrow h \mid f$,

գ. $(f = g + h \wedge d \mid f \wedge d \mid g) \Rightarrow d \mid h$,

դ. $(g \mid f \wedge f \neq 0) \Rightarrow \deg g \leq \deg f$,

ե. $(g \mid f \wedge \lambda \neq 0 \wedge \lambda \in \mathbb{R}) \Rightarrow \lambda \cdot g \mid f$:

Ապացուցում: ա., բ., գ. պնդումներն անմիջապես բխում են սահմանումից: դ.-ն բխում է թեորեմ 3, բ.-ից: ե. $f = g \cdot h \Rightarrow f = (\lambda \cdot g) \cdot (\lambda^{-1} \cdot h)$: □

Թեորեմ 4: *Կամայական f և g բազմանդամների համար, եթե $g \neq 0$, ապա գոյություն ունեն միարժեքորեն որոշված այնպիսի q և r բազմանդամներ, որոնց համար տեղի ունի $f = g \cdot q + r$ հավասարությունը, ընդ որում՝ կամ $0 \leq \deg r < \deg g$, կամ՝ $r = 0$:*

Ապացուցում: Եթե $f = 0$, ապա կվերցնենք $q = r = 0$, իսկ եթե $\deg g = 0$, ապա $g = g_0 \in \mathbb{R}$, ուրեմն՝ $f = g \cdot (g_0^{-1} \cdot f) + 0$:

Այժմ ենթադրենք, թե $f \neq 0$ և $\deg g \geq 1$ ու թեորեմն ապացուցելու համար ըստ $\deg f$ թվի կիրառենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը:

Դիցուք $\deg f < \deg g$: Այս դեպքում $f = g \cdot 0 + f$:

Վերջապես, դիտարկենք $f = f_0 + f_1x^1 + f_2x^2 + f_3x^3 + \ldots + f_nx^n$ ($f_n \neq 0$) և $g = g_0 + g_1x^1 + g_2x^2 + g_3x^3 + \ldots + g_mx^m$ ($g_m \neq 0$) բազմանդամները: Ենթադրենք, որ $\deg f \geq \deg g$ և f-ի աստիճանից փոքր աստիճանի կամայական բազմանդամի համար թեորեմը ճիշտ է: $f_1 = f - g\cdot g_m^{-1} f_n x^{n-m}$ բազմանդամի աստիճանը փոքր է f-ի աստիճանից (երբ $n = m$, ապա կհամարենք, որ $x^0 = 1$): Համաձայն ինդուկցիայի ենթադրության, գոյություն ունեն q_1 և r այնպիսի բազմանդամներ, որոնց համար $f_1 = g\cdot q_1 + r$, որտեղ կամ $r = 0$ կամ $0 \le \deg r < \deg g$: Արդյունքում ստացվեց, որ $f = g\cdot(q_1 + g_m^{-1} f_n x^{n-m}) + r$:

Մնում է ապացուցել q և r բազմանդամների միակությունը: Ենթադրենք, թե $f = g\cdot q_1 + r_1$ և $f = g\cdot q_2 + r_2$: Այստեղից բխում է, որ $g\cdot(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$: $q_1 - q_2 \neq 0 \Leftrightarrow r_2 - r_1 \neq 0$ (հետևանք 3.1) պայմանից և թեորեմ 3-ից հետևում է, որ

$$\deg(r_2 - r_1) = \deg(g\cdot(q_1 - q_2)) = \deg g + \deg(q_1 - q_2) \ge \deg g,$$

ինչը հակասում է $\deg(r_2 - r_1) \le \max\{\deg r_1, \deg r_2\} < \deg g$ անհավասարությանը: Ուրեմն՝ $q_1 - q_2 = 0$ և $r_2 - r_1 = g\cdot(q_1 - q_2) = 0$: □

Հետևանք 4.1: $g \mid f \Leftrightarrow$ *f-ը g-ի վրա բաժանելուց ստացված r մնացորդը հավասար է 0-ի:* □

7. Բազմանդամների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար

Սահմանում 7.1: *d բազմանդամը կոչվում է f և g բազմանդամների ընդհանուր բաժանարար, եթե $d \mid f$ և $d \mid g$: f-ի և g-ի ընդհանուր բաժանարարների մեջ ամենամեծ աստիճան ունեցող բազմանդամը կոչվում է նրանց ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար:*

Եթե $f = 0$ և $g = 0$, ապա f և g բազմանդամները ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար չունեն, իսկ մնացած դեպքերում, ակնհայտորեն՝ ունեն:

Լեմմա 7.1: ա. *Եթե d_1-ը և d_2-ը f և g բազմանդամների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար են, ապա $\deg d_1 = \deg d_2$:*

բ. *Եթե d_1-ը f և g բազմանդամների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար է, ապա զրոյից տարբեր կամայական λ իրական թվի համար $d_2 = \lambda\cdot d_1$-ը նույնպես այդ բազմանդամների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար է:*

Ապացուցում: ա. Բխում է սահմանումից:

բ. Բխում է լեմմա 6.1, ե.-ից: □

Այս լեմմայի բ. կետից երևում է, որ ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը միակը չէ, չնայած, ըստ ա.-ի, նրա աստիճանը միարժեքորեն է որոշվում:

Լեմմա 7.2: *Եթե $r_1 = r_2 q + r_3$, ապա r_1-ն ու r_2-ն ունեն նույն ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարները, ինչ որ՝ r_2-ն ու r_3-ը:*

Ապացուցում: r_1-ն ու r_2-ն ունեն նույն ընդհանուր բաժանարարները, ինչ որ՝ r_2-ն ու r_3-ը: □

Թեորեմ 5 (ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը գտնելու Էվկլիդեսի ալգորիթմը): *Տրված r_1 և r_2 բազմանդամների համար, որտեղ $\deg r_1 \ge \deg r_2 \ge 0$, կամ $r_2 \mid r_1$, և այդ դեպքում r_2-ը r_1-ի և r_2-ի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար է, կամ $r_2 \nmid r_1$, և այս դեպքում գոյություն ունի մի $k \ge 2$ բնական թիվ և, դրան համապատասխան, գոյություն ունեն միարժեքորեն* *որոշված $q_1, q_2, \dots, q_k$ և $r_3, \dots, r_k, r_{k+1}$ այնպիսի բազմանդամներ, որոնց համար տեղի ունեն $r_1 = r_2q_1 + r_3$, $r_2 = r_3q_2 + r_4, \dots$, $r_{k-1} = r_kq_{k-1} + r_{k+1}$, $r_k = r_{k+1}q_k$ հավասարությունները ու $\deg r_2 > \deg r_3 > \dots > \deg r_{k+1} \ge 0$ անհավասարությունները, ընդ որում՝ r_{k+1}-ը r_1-ի և r_2-ի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար է:*

Ապացուցում: Երբ $\deg r_i > \deg r_{i+1} \ge 0$, ապա, ըստ թեորեմ 4-ի, կգտնվեն միարժեքորեն որոշված q_i և r_{i+2} բազմանդամներ, որոնց համար տեղի ունի $r_i = r_{i+1}q_i + r_{i+2}$ հավասարությունը, ընդ որում, կամ $r_{i+2} = 0$ կամ $\deg r_{i+1} > \deg r_{i+2} \ge 0$: Հարկավոր է, սկսելով r_1 և r_2 թվերից, թեորեմ 4-ը հաջորդաբար այնքան անգամ կիրառել r_i և r_{i+1} ($i = 1, 2, 3, \dots$) թվերի նկատմամբ, մինչև որ ստացվի 0 մնացորդ: Ակնհայտորեն, կիրառվող քայլերի քանակը՝ k-ն, բավարարում է $1 \le k \le \deg r_2$ անհավասարությանը: Թեորեմի վերջին պնդումը հետևում է լեմմա 7.2-ից: □

8. Ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարների նկարագրությունը

Վերցնենք կամայական f և g բազմանդամներ: $\langle f,g\rangle$-ով նշանակենք բազմանդամների հետևյալ բազմությունը.

$$\langle f,g\rangle = \{ f\cdot a + g\cdot b\ ;\quad \forall a\in\mathbb{R}[x] \wedge \forall b \in \mathbb{R}[x]\}:$$

$\langle f,g\rangle$-ն անվանում են f և g բազմանդամներով առաջացած *իդեալ*: Դժվար չէ տեսնել, որ $\{0, f, g\}\subset\langle f,g\rangle$:

Լեմմա 8.1: ա. $\forall h\forall r[h\in\langle f,g\rangle \wedge r\in\langle f,g\rangle \Rightarrow h+r\in\langle f,g\rangle]$

բ. $r\in\langle f,g\rangle \Rightarrow \forall h\,(r\cdot h\in\langle f,g\rangle)$: □

Թեորեմ 6: *Երբ d-ն f և g բազմանդամների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար է, ապա $d\in\langle f,g\rangle$, այսինքն, գոյություն ունեն այնպիսի u և v բազմանդամներ, որ*

$$d = f\cdot u + g\cdot v:$$

Ապացուցում: Դիցուք r_1-ը և r_2-ը $\langle f,g\rangle$ բազմությունից վերցված կամայական երկու բազմանդամներ են՝ $r_1 \in\langle f,g\rangle$, $r_2 \in\langle f,g\rangle$: Այդ դեպքում, երբ q-ն և r-ը այնպիսի բազմանդամներ են, որ $r_1 = r_2q + r$, ապա $r = r_1 - r_2q \in \langle f,g\rangle$ (լեմմա 8.1): Ուրեմն, r_1 և r_2 բազմանդամների նկատմամբ Էվկլիդեսի ալգորիթմը կիրառելու ընթացքում յուրաքանչյուր քայլում ստացված մնացորդը կպատկանի $\langle f,g\rangle$ բազմությանը: Այստեղից, ըստ թեորեմ 5-ի, կստանանք, որ r_1-ի և r_2-ի r_{k+1} ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը պատկանում է $\langle f,g\rangle$-ին: Մասնավորապես, ընտրելով $r_1 = f$ և $r_2 = g$, կստանանք, որ f և g բազմանդամների r_{k+1} ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը պատկանում է $\langle f,g\rangle$-ին: Սա նշանակում է, որ կգտնվեն այնպիսի a և b բազմանդամներ, որ $r_{k+1} = f\cdot a + g\cdot b$: Այս հավասարությունից հետևում է, որ $d \mid r_{k+1}$, այսինքն՝ $r_{k+1} = d\cdot q$: Բայց, քանի որ, ըստ լեմմա 7.1-ի, $\deg d = \deg r_{k+1}$, ապա $\deg q = 0$, այսինքն՝ $q\in\mathbb{R}^* = \mathbb{R}-\{0\}$: Այսպիսով, $d = f\cdot(q^{-1}a) + g\cdot(q^{-1}b)$: Ապացուցումն ավարտելու համար մնում է կատարել նշանակում. $u = q^{-1}a$ և $v = q^{-1}b$: □

Հետևանք 6.1: ա. $(c|f \wedge c|g) \Rightarrow c|d$, *որտեղ* d-*ն* f-*ի և* g-*ի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար է:*

բ. *Եթե* d_1-*ը և* d_2-*ը* f *և* g *բազմանդամների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար են, ապա գոյություն ունի այնպիսի* λ *իրական թիվ, որի համար* $d_2 = \lambda \cdot d_1$*:*

գ. $\langle f,g \rangle$ *բազմության ամենափոքր աստիճանի բազմանդամները* f *և* g *բազմանդամների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարներն են:*

դ. $\langle f,g \rangle$ *բազմությունը բաղկացած է բոլոր այն բազմանդամներից, որոնք հանդիսանում են* f *և* g *բազմանդամների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարի բազմապատիկներ:*

Ապացույց: ա. Ինչ-որ u և v բազմանդամների համար տեղի ունի $d = f \cdot u + g \cdot v$ հավասարությունը, իսկ $c| f \cdot u + g \cdot v$:

բ. Համաձայն ա. պնդման, $d_1 | d_2$, և, քանի որ $\deg d_1 = \deg d_2$, ուրեմն՝ $d_2 = d_1 \cdot q$, որտեղ $\deg q = 0$, այսինքն՝ $q = \lambda \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$:

գ. Դիցուք $a \cdot f + b \cdot g$ բազմանդամը $\langle f,g \rangle$ բազմության ամենափոքր աստիճանի բազմանդամ է, իսկ d-ն՝ f և g բազմանդամների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար: Ակնհայտորեն, $a \cdot f + b \cdot g$-ն բաժանվում է f-ի ու g-ի յուրաքանչյուր ընդհանուր բաժանարարի վրա, մասնավորապես՝ d-ի վրա: Հետևաբար, $a \cdot f + b \cdot g = d \cdot q$ և տեղի ունի $\deg(a \cdot f + b \cdot g) \geq \deg d$ անհավասարությունը: Սակայն, ըստ $a \cdot f + b \cdot g$ բազմանդամի ընտրության, $\deg(a \cdot f + b \cdot g) \leq \deg d$ $(d \in \langle f,g \rangle)$: Ուրեմն, $\deg q = 0$, այսինքն՝ $q = \lambda \in \mathbb{R}$ և $a \cdot f + b \cdot g = \lambda d$: Մնում է կիրառել լեմմա 7.1, բ.-ն:

դ. Դիցուք $a \cdot f + b \cdot g$ բազմանդամը $\langle f,g \rangle$ բազմության ամենափոքր աստիճանի բազմանդամ է, իսկ h-ը՝ $\langle f,g \rangle$ բազմության կամայական բազմանդամ: h-ը $a \cdot f + b \cdot g$-ի վրա բաժանելուց ստացված մնացորդը պատկանում է $\langle a,b \rangle$-ին և, քանի որ չի կարող լինել $a \cdot f + b \cdot g$-ի աստիճանից ավելի փոքր աստիճանի, անհրաժեշտաբար հավասար է 0-ի: Ուրեմն՝ $a \cdot f + b \cdot g | h$: Հակառակն ակնհայտ է. $a \cdot f + b \cdot g$ բազմանդամի կամայական բազմապատիկ պատկանում է $\langle f,g \rangle$-ին: □

Սահմանում 7.1: d *բազմանդամը կոչվում է* $f_1, f_2, \dots, f_{m-1}, f_m$ *բազմանդամների* ***ընդհանուր բաժանարար***, *եթե* $d | f_1, d | f_2, \dots, d | f_m$*:* $f_1, f_2, \dots, f_{m-1}, f_m$ *բազմանդամների ընդհանուր բաժանարարների մեջ ամենամեծ աստիճան ունեցող բազմանդամը կոչվում է նրանց* ***ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար:***

Հետևանք: : *Եթե* d *-ն* $f_1, f_2, \dots, f_{m-1}, f_m$ *բազմանդամների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար է, ապա գոյություն ունեն այնպիսի* $u_1, u_2, \dots, u_{m-1}, u_m$ *բազմանդամներ, որ*

$$d = f_1 \cdot u_1 + f_2 \cdot u_2 + \dots + f_{m-1} \cdot u_{m-1} + f_m \cdot u_m :$$

Ապացույց: Սահմանումից բխում է, որ եթե d-ն $f_1, f_2, \dots, f_{m-1}, f_m$ բազմանդամների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար է, ապա d-ն նաև ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար է f_m-ի ու $f_1, f_2, \ldots, f_{m-1}$ բազմանդամների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարի համար: Մնում է, հենվելով թեորեմ 6-ի վրա, կիրառել մաթեմատիկական ինդուկցիա ըստ m-ի: □

9. Փոխադարձաբար պարզ բազմանդամներ

Սահմանում 9.1: *Դիցուք d-ն f և g բազմանդամների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար է: f և g բազմանդամները կոչվում են փոխադարձաբար պարզ, եթե* $\deg d = 0$:

Եթե երկու բազմանդամներ փոխադարձաբար պարզ են, ապա յուրաքանչյուր թիվ, մասնավորապես՝ 1-ը, նրանց համար ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար է (տես 7.1, բ.): Նշելու համար, որ f և g բազմանդամները փոխադարձաբար պարզ են, կգրենք. $(f,g)=1$:

Հետևանք 6.2: ա. $(f,g)=1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \exists a \exists b\,(a \in \mathbb{R}[x] \wedge b \in \mathbb{R}[x] \wedge f\cdot a + g\cdot b = 1),$$

բ. $[(c,g)=1 \wedge c \mid f\cdot g\ ] \Rightarrow c \mid f$,

գ. $[\,(f,g)=1 \wedge f \mid c \wedge g \mid c\ ] \Rightarrow f\cdot g \mid c$,

դ. $[(a_1,c)=1 \wedge (a_2,c)=1] \Rightarrow (a_1a_2,c)=1$

ե. *Եթե $a_1, a_2, \ldots, a_n$ բազմանդամներից յուրաքանչյուրը փոխադարձաբար պարզ է c բազմանդամի հետ, ապա $(a_1a_2\ldots a_n, c)=1$:*

Ապացույց: ա. $(\Rightarrow)$ Բխում է թեորեմ 6-ից: $(\Leftarrow)$ Եթե d-ն f և g բազմանդամների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարն է, ապա $d \mid f\cdot a + g\cdot b$, ուրեմն՝ $d \mid 1$: Ուրեմն՝ $\deg d = 0$:

բ. Եթե $c\cdot u + g\cdot v = 1$, ապա $f\cdot c\cdot u + f\cdot g\cdot v = f$: Մյուս կողմից՝ $c \mid f\cdot c\cdot u + f\cdot g\cdot v$:

գ. Եթե $f\cdot a + g\cdot b = 1$, ապա $f\cdot c\cdot a + c\cdot g\cdot b = c$: Բայց $f\cdot g \mid f\cdot c$ և $f\cdot g \mid c\cdot g$, ուրեմն՝ $f\cdot g \mid f\cdot c\cdot a + c\cdot g\cdot b$:

դ. Բազմապատկելով $a_1\cdot u_1 + c\cdot v_1 = 1$ և $a_2\cdot u_2 + c\cdot v_2 = 1$ հավասարությունների ձախ մասերը միմյանց հետ, իսկ աջ մասերը՝ միմյանց հետ, կստանանք $a_1\cdot a_2\cdot u_1\cdot u_2 + c\cdot(a_1\cdot u_1\cdot v_2 + a_2\cdot u_2\cdot v_1 + c\cdot v_1\cdot v_2) = 1$, որը, համաձայն ա. կետի, նշանակում է $(a_1\cdot a_2, c) = 1$:

ե. $n-1$ անգամ հաջորդաբար կիրառելով դ. պնդումը, կստանանք, որ $(a_1\cdot a_2,c)=1$, $((a_1\cdot a_2)\cdot a_3,c)=1$, $((a_1\cdot a_2\cdot a_3)\cdot a_4,c)=1$, ...,

$$((a_1\cdot a_2\cdots a_{n-1})\cdot a_n, c) = 1: \square$$

Հետևանք 6.3: $(f,g)=1 \Leftrightarrow \langle f,g\rangle = \mathbb{R}[x]$: □

10. Չբերվող (պարզ) բազմանդամներ

Բազմանդամների բազմության մեջ չբերվող (պարզ) բազմանդամները կատարում են նույն դերը, ինչ որ պարզ թվերը՝ ամբողջ թվերի բազմության մեջ: Ուշադիր ընթերցողը կնկատի, որ այս 6.-10. մասերում ապացուցված գրեթե բոլոր պնդումները գլուխ 1-ում ունեն իրենց նմանակները:

Սահմանում 10.1: *f բազմանդամը ($f \in \mathbb{R}[x]$) կոչվում է իրական գործակիցներով չբերվող կամ պարզ բազմանդամ, եթե* $\deg f \geq 1$ *և f-ը չի* *բաժանվում որևէ $g \in \mathbb{R}[x]$ բազմանդամի վրա, որի համար $0 < \deg g < \deg f$:*

Օրինակ, $1+0x^1+x^2=1+x^2$ բազմանդամը պարզ (չբերվող) է, քանի որ

$$1+0x^1+x^2=(a_0+a_1x^1)\cdot(b_0+b_1x^1)$$

պայմանից հետևում է, որ $a_0^2+a_1^2=0$, ինչը հնարավոր չէ: Հետևյալ լեմման անմիջապես բխում է սահմանումից:

Լեմմա: *f բազմանդամը ($f \in \mathbb{R}[x]$) իրական գործակիցներով չբերվող բազմանդամ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\deg f \ge 1$ և*

$$\forall g \forall h[(g \in \mathbb{R}[x] \wedge h \in \mathbb{R}[x] \wedge f = g\cdot h) \Rightarrow (\deg g = 0 \vee \deg h = 0)] : \square$$

Լեմմա 10.1: ա. *Եթե $\deg f = 1$, ապա f-ը չբերվող բազմանդամ է:*

բ. *Եթե f բազմանդամը չբերվող է և λ-ն զրոյից տարբեր թիվ է, ապա $\lambda \cdot f$-ը նույնպես չբերվող է:*

Ապացուցում: ա. Բխում է նրանից, որ 0-ի ու 1-ի միջև բնական թիվ չկա:

բ. Եթե $\lambda\cdot f = g\cdot h$, ապա $f=(\lambda^{-1}\cdot g)\cdot h = g\cdot(\lambda^{-1}\cdot h)$: Եվ, քանի որ $\deg(\lambda^{-1}\cdot g)=\deg g$ ու $\deg(\lambda^{-1}\cdot h)=\deg h$, ապա $\deg g=0$ կամ $\deg h=0$: □

Լեմմա 10.2: *Եթե $\deg f \ge 1$, ապա f-ը բաժանվում է որևէ չբերվող (պարզ) բազմանդամի վրա:*

Ապացուցում: Քանի որ $f=1\cdot f$, ապա $f \mid f$: Դիտարկենք f-ի բոլոր այն բաժանարարները, որոնցից յուրաքանչյուրի աստիճանը դրական թիվ է: Այդ բաժանարարներից ընտրենք ամենափոքր աստիճան ունեցող մի բազմանդամ և այն նշանակենք g-ով: g-ն չբերվող բազմանդամ է: Իրոք, եթե $g=g_1\cdot g_2$, ապա $\deg g=\deg g_1+\deg g_2$ (թեորեմ 3, բ.), և, եթե $\deg g_1 \ne 0$ և $\deg g_2 \ne 0$, ապա $1 \le \deg g_1 < \deg g$ և $1 \le \deg g_2 < \deg g$: Սա հակասում է g-ի ընտրությանը, քանի որ g_1-ը, լինելով g-ի բաժանարար, հանդիսանում է նաև f-ի բաժանարար (լեմմա 6.1, բ.): □

Թեորեմ 7: *Եթե $\deg f \ge 1$, ապա կամ f-ը չբերվող (պարզ) բազմանդամ է կամ հավասար է վերջավոր քանակությամբ չբերվող (պարզ) բազմանդամների արտադրյալի:*

Ապացուցում: Կիրառենք ինդուկցիա ըստ $\deg f$-ի: Եթե $\deg f = 1$, ապա f-ը չբերվող բազմանդամ է: Դիցուք $\deg f = n \ge 2$ և ենթադրենք, թե թեորեմը ճիշտ n-ից փոքր աստիճան ունեցող բոլոր բազմանդամների համար: Ըստ լեմմա 6.3-ի, f-ը բաժանվում է որևէ g_1 չբերվող բազմանդամի վրա՝ $f=g_1\cdot g_2$: Այդ դեպքում $\deg g_1 \ge 1$ (լեմմա 6.2,ա.,բ.) և եթե f-ը պարզ բազմանդամ չէ, ապա $1 \le \deg g_2 = \deg f - \deg g_1 < \deg f$: Համաձայն ինդուկցիայի ենթադրության, կարող ենք պնդել, որ g_2-ը վերլուծվում է վերջավոր քանակությամբ չբերվող բազմանդամների արտադրյալի. $g_2 = p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot\ldots\cdot p_k$: Սրանից էլ բխում է, որ $f=g_1\cdot p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot\ldots\cdot p_k$: □

Լեմմա 10.3: ա. *Եթե p-ն և q-ն պարզ բազմանդամներ են և $(p,q) \ne 1$, ապա գոյություն ունի մի λ իրական թիվ, որի համար $p=\lambda\cdot q$:*

բ. $((\alpha+x),(\beta+x))\neq 1 \Rightarrow \alpha=\beta$:

գ. Եթե $\alpha\neq\beta \Rightarrow ((\alpha+x)^k,(\beta+x)^m)=1$:

Ապացուցում։ա. Դիցուք d-ն p-ի և q-ի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար է: $p=d\cdot a$ և $q=d\cdot b$ հավասարություններից, պարզ բազմանդամի սահմանումից և $(p,q)\neq 1$ պայմանից բխում է, որ $\deg a=\deg b=0$: Ըստ լեմմ 6.2-ի, $a\in\mathbb{R}^*$ և $b\in\mathbb{R}^*$, որտեղից հետևում է, որ $p=(b^{-1}a)\cdot q$:

բ. $\lambda(\alpha+x)=\beta+x \Rightarrow (\lambda\alpha=\beta\wedge\lambda=1)$: Ուրեմն՝ $\alpha=\beta$:

գ. Ըստ բ. պնդման, $((\alpha+x),(\beta+x))=1$: Այստեղից, համաձայն հետևանք 6.2, ե.-ի, նախ կստանանք, որ $((\alpha+x)^k,(\beta+x))=1$, և ապա՝

$$((\alpha+x)^k,(\beta+x)^m)=1:\square$$

Լեմմ 10.4: *Դիցուք $f=p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_n$-ը տրված f բազմանդամի որևէ վերլուծություն է պարզ (չբերվող) բազմանդամների արտադրյալի, իսկ q-ն՝ նույն f բազմանդամի ինչ-որ պարզ բաժանարար է: Այդ դեպքում, գոյություն ունի $p_j\in\{p_1,p_2,\ldots,p_n\}$ և գոյություն ունի մի λ իրական թիվ, որի համար $p_j=\lambda\cdot q$:*

Ապացուցում: Քանի որ $q\mid p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_n$, ապա $(q,p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_n)\neq 1$: Կիրառելով հետևանք 6.2,ե.-ն, կստանանք, որ q-ն փոխադարձաբար պարզ չէ $p_1,p_2,\ldots,p_n$ բազմանդամներից գոնե մեկի, ասենք թե՝ p_j-ի հետ. $(p_j,q)\neq 1$: Բայց քանի որ q-ն և p_j-ն պարզ (չբերվող) բազմանդամներ են, ապա $p_j=\lambda\cdot q$ (լեմմ 10.3):$\square$

Թ ե ո ր ե մ 8: *Յուրաքանչյուր f բազմանդամ վերլուծվում է պարզ բազմանդամների արտադրյալի, այն էլ միակ ձևով, այսինքն, եթե $f=p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_n=q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_m$, որտեղ $p_1,p_2,\ldots,p_n,q_1,q_2,\ldots,q_m$ բազմանդամներից յուրաքանչյուրը պարզ է, ապա $m=n$ և $p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_n$ արտադրյալի արտադրիչները կարելի է այնպես վերադասավորել, որ $p_1=\lambda_1 q_1$, , $p_2=\lambda_2 q_2,\ldots,p_n=\lambda_n q_n$, որտեղ λ_1-ը, λ_2-ը, ..., λ_n-ը իրական թվեր են:*

Ա պ ա ց ու ց ու մ: f բազմանդամի վերլուծումը պարզ բազմանդամների արտադրյալի արդեն ցույց ենք տվել (թեորեմ 4): Այդ վերլուծության միակությունն ապացուցելու համար օգտվենք լեմմ 10.4-ից: Քանի որ $q_1\mid f$, ապա, ըստ այդ լեմմայի, ինչ-որ p_j բազմանդամի համար $p_j=\lambda_1\cdot q_1$: Կարող ենք համարել, որ $j=1$՝ $p_1=\lambda_1\cdot q_1$: Այստեղից բխում է, որ

$$q_1[(\lambda_1 p_2)\cdot\ldots\cdot p_n-q_2\cdot\ldots\cdot q_m]=0:$$

Կիրառելով հետևանք 3.1-ը և $\lambda_1 p_2$-ը նշանակելով p_2^*-ով (լեմմ 10.1), կստանանք. $p_2^*\cdot p_3\cdot\ldots\cdot p_n=q_2\cdot q_3\cdot\ldots\cdot q_m$: Կրկնելով նախորդ դատողությունները, կհանգենք նրան, որ $p_2^*=\lambda_2^* q_2$, որտեղից՝ $p_2=(\lambda_1^{-1}\lambda_2^*)q_2=\lambda_2 q_2$: Ենթադրելով, որ $m>n$, նույն կերպ ցույց կտանք, որ $p_3=\lambda_3 q_3,\ldots,p_n=\lambda_n q_n$:

Այս հավասարությունները համադրելով $p_1p_2...p_n = q_1q_2...q_m$ հավասարության հետ, կստանանք. $q_{n+1}q_{n+2}...q_m = \lambda_1\lambda_2...\lambda_n$, որն անհնար է, քանի որ $\deg(\lambda_1\lambda_2...\lambda_n) = 0$, իսկ $\deg(q_{n+1}q_{n+2}...q_m) > 0$: Նույն ձևով ժխտվում է $m < n$ անհավասարությունը: □

11. Ռացիոնալ և կոմպլեքս գործակիցներով չբերվող (պարզ) բազմանդամների մասին

Դիցուք $(\mathbf{k}, +, \cdot)$ եռյակը դաշտ է (տես գլուխ 5, սահմանում 4.1): Եթե 1.-10. մասերում, ամենուրեք իրական թվերի $\mathbb{R}$ բազմության թվերը փոխարինենք $\mathbf{k}$ բազմության տարրերով, իրական թվերի գումարման $+$ նշանը փոխարինենք $\mathbf{k}$ դաշտի $+$-ով, իրական թվերի բազմապատկումը՝ $\cdot$, փոխարինենք $\mathbf{k}$ դաշտի $\cdot$-ով, «իրական թիվ» բառերի փոխարեն գործածելով «$\mathbf{k}$ դաշտի տարր» բառերը և մնացած շարադրանքը նույնությամբ կրկնենք, կստանանք բազմանդամների մի նոր օղակ՝ $(\mathbf{k}[x], +, \cdot)$, որի համար կապացուցվեն այս գլխի բոլոր պնդումները, ընդհուպ՝ մինչև թեորեմ 8-ը: Պարզ բազմանդամների նկարագրությունը $(\mathbf{k}[x], +, \cdot)$ օղակում էապես կախված է $(\mathbf{k}, +, \cdot)$ դաշտից և տարբեր $\mathbf{k}$-երի դեպքում տարբեր մոտեցումներ է պահանջում: Մաս 10.-ում մեր ապացուցած պնդումներն արժեքավոր են նրանով, որ դրանք բնորոշ են բոլոր $(\mathbf{k}[x], +, \cdot)$ օղակներին և բոլորի համար էլ ապացուցումները նույն են:

Մասնավորապես, եթե սահմանում 10.1-ում $\mathbb{R}[x]$-ը փոխարինենք $\mathbb{Q}[x]$-ով ($\mathbb{C}[x]$-ով), իսկ իրական թվերի փոխարեն գործածենք ռացիոնալ թվեր (կոմպլեքս թվեր) բառերը, ապա կստանանք ռացիոնալ գործակիցներով (կոմպլեքս գործակիցներով) չբերվող բազմանդամների սահմանումը: Բացի այդ, նախորդ՝ 10-րդ մասի բոլոր պնդումները, նշված փոփոխություններից հետո, նույնությամբ կապացուցվեն: Հաջորդ մասերում (մաս 14.-15.) մենք կստանանք թե $\mathbb{R}[x]$-ի, և թե $\mathbb{C}[x]$-ի պարզ բազմանդամների նկարագրությունը:

Ինչպես արդեն ցույց ենք տվել, $1 + 0x^1 + x^2 = 1 + x^2$ բազմանդամը $\mathbb{R}[x]$-ի պարզ բազմանդամ է: Ակնհայտ է, որ այն պարզ կլինի նաև $\mathbb{Q}[x]$-ի նկատմամբ: Ի տարբերություն սրա, նույն $1 + x^2$ բազմանդամը պարզ չէ $\mathbb{C}[x]$-ի նկատմամբ. $1 + x^2 = (-i + x)\cdot(i + x)$: Մյուս կողմից, $2 - x^2$ բազմանդամը $\mathbb{R}[x]$-ի նկատմամբ պարզ չէ. $2 - x^2 = (\sqrt{2} - x)\cdot(\sqrt{2} + x)$, չնայած պարզ է $\mathbb{Q}[x]$-ի նկատմամբ: Այս վերջին պնդումն առանց դժվարության կարելի է ապացուցել, հենվելով միայն պարզ բազմանդամի սահմանման վրա, բայց կարելի է բխեցնել նաև թեորեմ 7-ից: Իրոք, եթե $2 - x^2 = p_1 \cdot p_2$, որտեղ p_1-ն ու p_2-ը ռացիոնալ գործակիցներով մեկ աստիճանի բազմանդամներ են, ապա դրանք կլինեն նաև իրական գործակիցներով պարզ բազմանդամներ:

Ըստ թեորեմ 7-ի, կգտնվի մի λ իրական թիվ, որի համար $p_1 = \lambda(\sqrt{2} + x^1)$, այսինքն՝ $\sqrt{2}\lambda$ -ն և λ -ն պետք է լինեն ռացիոնալ թվեր, որը հնարավոր չէ:

Հասկանալի է, որ եթե բազմանդամը չբերվող է $\mathbb{R}[x]$ -ի նկատմամբ, ապա այն չբերվող կլինի նաև $\mathbb{Q}[x]$ -ի նկատմամբ, և եթե բերվող է $\mathbb{Q}[x]$ -ի նկատմամբ, ապա բերվող կլինի նաև $\mathbb{R}[x]$ -ի նկատմամբ:

12. Բազմանդամը որպես արտապատկերում, բազմանդամի արժեք և արմատ

Սահմանում 11.1: *Կամայական* $f = f_0 + f_1x^1 + f_2x^2 + f_3x^3 + \ldots + f_nx^n$ *բազմանդամի և* α *իրական թվի համար*

$$f(\alpha) = f_0 + f_1\alpha^1 + f_2\alpha^2 + f_3\alpha^3 + \ldots + f_n\alpha^n$$

թիվը կոչվում է f ***բազմանդամի արժեք*** α ***թվի վրա:***

Այսպիսով, իրական գործակիցներով յուրաքանչյուր f բազմանդամի միջոցով առաջանում է մի $\overline{f}$ արտապատկերում $\mathbb{R}$ -ից դեպի $\mathbb{R}$ (տես գլուխ 1, էջ 8)՝ $\overline{f}:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, որի համար $\overline{f}:\alpha \mapsto f(\alpha)$: Բազմանդամների գումարման և բազմապատկման գործողություններից բխում է հետևյալը:

Լեմմա 11.1: ա. $(f+g)(\alpha) = f(\alpha)+g(\alpha)$

բ. $(f \cdot g)(\alpha) = f(\alpha)g(\alpha)$: □

Շատ բնական մի հարց է ծագում. եթե f -ն ու g -ն ***տարբեր*** բազմանդամներ են, ապա կարող են արդյո՞ք նրանց համապատասխան $\overline{f}$ և $\overline{g}$ արտապատկերումները ***համընկնել***: Այլ կերպ ասած, եթե

$$\forall\alpha[f(\alpha) = g(\alpha)],$$

ապա դրանից բխում է արդյո՞ք, որ $f = g$:

Սահմանում 11.2: α ***թիվը կոչվում է*** f ***բազմանդամի արմատ, եթե***

$$f(\alpha) = 0:$$

Թեորեմ 9 (Բեզու): f *բազմանդամը* $x-\alpha$ *-ի վրա բաժանելուց առաջացած մնացորդը հավասար է* $f(\alpha)$ *թվին:*

Ապացույց: Կատարելով մնացորդով բաժանում (թեորեմ 4), կգտնենք միարժեքորեն որոշված այնպիսի q և r բազմանդամներ, որոնց համար $f = (x-\alpha)\cdot q + r$, որտեղ կամ $r = 0$ կամ $\deg r < \deg(x-\alpha) = 1$: Այսպիսով, կամ $r = 0$ կամ $\deg r = 0$: Այդ դեպքում համաձայն լեմմա 11.1-ի,

$$f(\alpha) = ((x-\alpha)\cdot q + r)(\alpha) = r(\alpha):$$

$$\deg r = 0 \Rightarrow r = r_0 = r(\alpha): \square$$

Հետևանք 9.1: α *-ն հանդիսանում է* f *բազմանդամի արմատ այն և միայն այն դեպքում, երբ* $x-\alpha \mid f$:

Ապացույց: Ըստ նախորդ թեորեմի, $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow r = 0$: □

Սահմանում 11.3: α *թիվը կոչվում է* f *բազմանդամի* k *-պատիկ արմատ, եթե* f *-ը բաժանվում է* $(x-\alpha)^k$ *-ի վրա և չի բաժանվում* $(x-\alpha)^{k+1}$ *-ի վրա: Եթե* $k > 1$, *ապա* α *-ն կոչվում է բազմապատիկ արմատ:*

Թ ե ո ր ե մ 10: *Եթե $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ -ը f բազմանդամի զույգ առ զույգ իրարից տարբեր արմատներ են, որոնց պատիկությունները համապատասխանաբար $k_1, k_2, ..., k_m$ են, ապա f -ը բաժանվում է*

$$(x-\alpha_1)^{k_1} \cdot (x-\alpha_2)^{k_2} \cdots (x-\alpha_m)^{k_m}$$

բազմանդամի վրա: Մասնավորապես՝ $k_1 + k_2 + ... + k_m \leq \deg f$:

Ա պ ա ց ո ւ ց ո ւ մ: Դիցուք $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ -ը f բազմանդամի զույգ առ զույգ իրարից տարբեր արմատներն են: Ըստ լեմմ 10.3, գ-ի, $(x-\alpha_1)^{k_1}$, $(x-\alpha_2)^{k_2}, \cdots, (x-\alpha_m)^{k_m}$ բազմանդամները զույգ առ զույգ փոխադարձաբար պարզ բազմանդամներ են: Համաձայն հետևանք 6.2, ե.-ի, $(x-\alpha_s)^{k_s}$ բազմանդամը փոխադարձաբար պարզ է $(x-\alpha_1)^{k_1} \cdot (x-\alpha_2)^{k_2} \cdots (x-\alpha_{s-1})^{k_{s-1}}$ արտադրյալի հետ $(s \geq 2)$: Ըստ թեորեմի պայմանի, f -ը բաժանվում է $(x-\alpha_s)^{k_s}$ -ի վրա $(1 \leq s \leq m)$: s -ին հաջորդաբար տալով 2, 3, ..., m արժեքներ և ամեն անգամ կիրառելով հետևանք 6.2, գ.-ն, կստանանք, որ կամայական s -ի համար f -ը բաժանվում է $(x-\alpha_1)^{k_1} \cdot (x-\alpha_2)^{k_2} \cdots (x-\alpha_s)^{k_s}$ բազմանդամի վրա: □

Հ ե տ և ա ն ք 10.1: *Եթե $f \in \mathbb{R}[x]$ և $\deg f = n$, ապա f -ը չի կարող ունենալ n -ից ավելի արմատներ:*

Ա պ ա ց ո ւ ց ո ւ մ: Դիցուք $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ -ը f բազմանդամի զույգ առ զույգ իրարից տարբեր արմատներն են: Համաձայն թեորեմ 10-ի, f -ը բաժանվում է $(x-\alpha_1) \cdot (x-\alpha_2) \cdots (x-\alpha_m)$ բազմանդամի վրա, որտեղ՝

$$\deg(x-\alpha_1) \cdot (x-\alpha_2) \cdots (x-\alpha_m) \leq \deg f :$$

Քանի որ $\deg(x-\alpha_1) \cdot (x-\alpha_2) \cdots (x-\alpha_m) = m$, ստացվում է, որ $m \leq n$: □

Հ ե տ և ա ն ք 10.2: *Եթե $\deg f \leq n$, $\deg g \leq n$ ($f, g \in \mathbb{R}[x]$), և $n+1$ տարբեր թվերի վրա նրանք ընդունում են հավասար արժեքներ՝*

$$f(\alpha_1) = g(\alpha_1),\ f(\alpha_2) = g(\alpha_2),\ ...,\ f(\alpha_n) = g(\alpha_n),\ f(\alpha_{n+1}) = g(\alpha_{n+1}),$$

ապա $f = g$:

Ա պ ա ց ո ւ ց ո ւ մ: Ենթադրենք, թե $f - g \neq 0$: Քանի որ (թեորեմ 3, ա.) $\deg(f-g) \leq n$, ապա $f-g$ բազմանդամը չի կարող ունենալ n -ից ավելի արմատներ (հետևանք 10.1): Բայց, ըստ պայմանի,

$$(f-g)(\alpha_1) = ... = (f-g)(\alpha_{n+1}) = 0,$$

այսինքն՝ $n+1$ իրարից տարբեր $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n+1}$ թվեր հանդիսանում են $f-g$ -ի արմատներ: Ստացված հակասությունն ապացուցում է, որ $f - g = 0$: □

Հ ե տ և ա ն ք 10.3: $f = g \Leftrightarrow \overline{f} = \overline{g}$ $(f, g \in \mathbb{R}[x])$: □

Այս՝ 12. –րդ, մասի բոլոր սահմանումներն ու պնդումները նույնությամբ կարելի է շարադրել, եթե մենք $\mathbb{R}[x]$ -ը փոխարինենք $\mathbb{Q}[x]$ -ով ($\mathbb{C}[x]$ -ով), իսկ իրական թվերի փոխարեն գործածենք ռացիոնալ թվեր (կոմպլեքս թվեր) բառերը: Դրանով իսկ կսահմանվի ռացիոնալ և կոմպլեքս գործակիցներով բազմանդամների արժեքի ու արմատի գաղափարը:

Վերևում ասվածից հետևում է, որ $(\mathbb{Q}[x],+,\cdot)$, $(\mathbb{R}[x],+,\cdot)$ և $(\mathbb{C}[x],+,\cdot)$ բազմանդամների օղակներում երկու բազմանդամների հավասար լինելը համարժեք է նրանց համապատասխան ֆունկցիաների հավասարությանը (հետևանք 10.3)։ Սակայն նույնը չի կարելի ասել բազմանդամների $(\mathbf{Z}_n[x], +, \cdot)$ օղակի մասին։ Ավելի ճշգրիտ, այս օղակում երկու տարբեր բազմանդամների կարող է համապատասխանել միևնույն արտապատկերումը։ Օրինակ, $(\mathbf{Z}_n[x], +, \cdot)$ օղակում n աստիճանի

$$f = x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdots(x+(n-1))$$

բազմանդամի արժեքը $\mathbf{Z}_n$ բազմության յուրաքանչյուր թվի վրա ակնհայտորեն հավասար է 0-ի, այսինքն՝ $\overline{f} : \mathbf{Z}_n \to \mathbf{Z}_n$ արտապատկերման համար տեղի ունի

$$\forall\alpha[\overline{f}(\alpha) = \overline{0}(\alpha) = 0]$$

պայմանը, մինչդեռ $f \neq 0$[2]։

13. Բազմանդամների ածանցում

Սահմանում 13.1։ *Կամայական* $f = f_0 + f_1x^1 + f_2x^2 + f_3x^3 + \ldots + f_nx^n$ *բազմանդամի համար*

$$f' = f_1 + 2f_2x^1 + 3f_3x^2 + \ldots + (n-1)f_{n-1}x^{n-2} + nf_nx^{n-1}$$

բազմանդամը կոչվում է f *բազմանդամի ածանցյալ*։

Օրինակ, $f = 3+5x^1+3x^2+2x^3+3x^4 \in \mathbb{R}[x]$ բազմանդամի ածանցյալը հավասար է. $f' = 5+6x^1+6x^2+12x^4$ բազմանդամին։ Մյուս կողմից,

$$f = 3 +_6 5x^1 +_6 3x^2 +_6 2x^3 +_6 3x^4 \quad \in \mathbf{Z}_6[x]$$

բազմանդամի ածանցյալը կլինի $f' = 5$ բազմանդամը։

Հատկություն։ 1. $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$, որտեղ α-ն և β-ն կամայական թվեր են։

2. $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$ ։

Ապացույց։ 1. Անմիջապես բխում է բազմանդամների գումարի սահմանումից։

2. $(x^{k+m})' = (k+m)x^{k+m-1} = kx^{k-1}\cdot x^m + x^k\cdot mx^{m-1} = (x^k)'\cdot x^m + x^k\cdot(x^m)'$ ։

Այստեղից և հատկություն 1.-ից, ինչպես նաև բաշխականությունից (թեորեմ 2, բ.) հետևում է, որ

$$(f\cdot x^m)' = ((f_0 + f_1x^1 + f_2x^2 + f_3x^3 + \ldots + f_nx^n)\cdot x^m)' = f'\cdot x^m + f\cdot(x^m)' :$$

Սրանից էլ բխում է հատկություն 2.-ը։ □

Թեորեմ 11։ α *թիվը հանդիսանում է* f *բազմանդամի բազմապատիկ արմատ այն և միայն այն դեպքում, երբ* $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$ ։

---

[2] $(\mathbf{Z}_n[x], +, \cdot)$ օղակի տարբեր բազմանդամների քանակն անվերջ է, մինչդեռ $\mathbf{Z}_n \to \mathbf{Z}_n$ բոլոր հնարավոր արտապատկերումների քանակը վերջավոր է՝ հավասար է n^n-ի։ Այստեղից հետևում է, որ $\mathbf{Z}_n[x]$-ում անթիվ քանակությամբ տարբեր բազմանդամներ կան, որոնց համապատասխան արտապատկերումները համընկնում են։

Ա պ ա ց ո ւ ց ո ւ մ: Ենթադրենք, թե $f=(x-\alpha)^k\cdot g$, որտեղ g-ն չի բաժանվում $x-\alpha$-ի վրա: Եթե $k>1$, ապա օգտագործելով հատկություններ 1.-ը և 2.-ը, կստանանք.

$$f'=(x-\alpha)^k\cdot g'+k(x-\alpha)^{k-1}\cdot g=(x-\alpha)^{k-1}\cdot[(x-\alpha)\cdot g'+kg]:$$

Քանի որ $k-1>0$, ապա $f'(\alpha)=0$: Հակառակը, եթե $k=1$, ապա $f'=(x-\alpha)\cdot g'+kg$, որտեղից $f'(\alpha)=g(\alpha)\neq 0$: Ուրեմն, $f'(\alpha)=0$ պայմանից հետևում է, որ $k>1$: □

Թ ե ո ր ե մ 12: *Կամայական* $f=f_0+f_1x+f_2x^2+f_3x^3+\ldots+f_nx^n$ ($\deg f\geq 1$) *բազմանդամի և կամայական* α *-ի համար, գոյություն ունեն* $b_1,b_2,\ldots,b_n$ *այնպիսի թվեր, որ*

$$f=f(\alpha)+b_1(x-\alpha)+b_2(x-\alpha)^2+b_3(x-\alpha)^3+\ldots+b_n(x-\alpha)^n: \tag{7}$$

Ա պ ա ց ո ւ ց ո ւ մ:Կիրառենք ինդուկցիա ըստ $\deg f$-ի: Եթե $\deg f=1$, ապա $f(\alpha)=f_0+f_1\alpha$ և $f=(f_0+f_1\alpha)+f_1(x-\alpha)$: Դիցուք $\deg f=n$ և թեորեմը ճիշտ է n-ից ցածր աստիճան ունեցող բոլոր բազմանդամների համար: f-ը ներկայացնենք $f=(x-\alpha)\cdot q+f(\alpha)$ տեսքով (թեորեմ 9): Քանի որ $\deg q=\deg f-1$, ապա q բազմանդամի համար գոյություն ունի պահանջվող վերլուծությունը: Այն տեղադրելով $f=(x-\alpha)\cdot q+f(\alpha)$ արտահայտության մեջ և փակագծերը բացելով, կստանանք (7)-ը: □

Հ ե տ և ա ն ք 12.1: *Եթե*

$$f=b_0+b_1(x-\alpha)+b_2(x-\alpha)^2+b_3(x-\alpha)^3+\ldots+b_n(x-\alpha)^n,$$

ապա $b_m\cdot m!=f^{(m)}(\alpha)$, *որտեղ* $f^{(m)}$ *-ը* f *բազմանդամի* m *-րդ ածանցյալն է:*

Ա պ ա ց ո ւ ց ո ւ մ: Հարկավոր է, օգտվելով գումարի և արտադրյալի ածանցյալի հատկություններից, m անգամ ածանցել (7)-ը, ապա հաշվել ստացված բազմանդամի արժեքը α-ի վրա: □

$$f=f(\alpha)+\frac{f'(\alpha)}{1!}(x-\alpha)+\frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n$$ բանաձևը

կոչվում է f բազմանդամի ***Թեյլորի բանաձև:*** Հաջորդ պնդումը բխում է Թեյլորի բանաձևից:

Հ ե տ և ա ն ք 12.2: $f\in\mathbb{C}[x]$ *բազմանդամի համար* α *թիվը* k *-պատիկ արմատ է*$(k\geq 2)$, *այն և միայն այն դեպքում, երբ*

$$f(\alpha)=f'(\alpha)=f''(\alpha)=\ldots=f^{(k-1)}(\alpha)=0 \;\; և \;\; f^{(k)}(\alpha)\neq 0: □$$

Հ ե տ և ա ն ք 12.3: *Եթե* $f\in\mathbb{C}[x]$ *բազմանդամի համար* α *թիվը* k *-պատիկ արմատ է*$(k\geq 2)$, *ապա* f *բազմանդամի ածանցյալի համար* α *-ն* $(k-1)$ *-պատիկ արմատ է:*

Ա պ ա ց ո ւ ց ո ւ մ: Բխում է հետևանք 12.2-ից: □

14. Կոմպլեքս գործակիցներով բազմանդամների վերաբերյալ հանրահաշվի հիմնական թեորեմը

Ինչպես արդեն ապացուցել ենք (գլուխ 5, մաս 8.), $w+x^n$ տեսքի յուրաքանչյուր բազմանդամ ունի n կոմպլեքս արմատներ: Պարզվում է, որ այս փաստը ճիշտ է n աստիճանի կոմպլեքս գործակիցներով կամայական բազմանդամի համար։ Հենց սա է կոմպլեքս գործակիցներով բազմանդամների վերաբերյալ հանրահաշվի հիմնական թեորեմի բովանդակությունը։

Նախքան այդ թեորեմին անցնելն ապացուցենք հետևյալ լեմմը։

Լեմմա։ *Դիցուք f-ը կոմպլեքս գործակիցներով՝ $f \in \mathbb{C}[x]$, դրական աստիճանի բազմանդամ է, և α-ն այնպիսի կոմպլեքս թիվ է, որ $f(\alpha) \neq 0$։ Այդ դեպքում կամայական $\delta > 0$ իրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի z կոմպլեքս թիվ, որի համար $|z-\alpha| < \delta$ և $|f(z)| < |f(\alpha)|$։*

Ապացույց։ $f \in \mathbb{C}[x]$ բազմանդամը ներկայացնենք (7) տեսքով. $f = f(\alpha) + b_1(x-\alpha) + b_2(x-\alpha)^2 + b_3(x-\alpha)^3 + \ldots + b_n(x-\alpha)^n$։ k-ով նշանակելով $\min\{s; b_s \neq 0\}$ թիվը, $\frac{1}{f(\alpha)} \cdot f$ բազմանդամը կարող ենք ներկայացնել

$$\frac{1}{f(\alpha)} \cdot f = 1 + d_k(x-\alpha)^k + d_{k+1}(x-\alpha)^{k+1} + \ldots + d_n(x-\alpha)^n \quad (d_k \neq 0)$$

տեսքով։ Մենք ուզում ենք գտնել այնպիսի z կոմպլեքս թիվ, որի համար

$$\left|\frac{1}{f(\alpha)} \cdot f(z)\right| < 1:$$

Դիցուք w-ն այնպիսի կոմպլեքս թիվ է (գլուխ 5, մաս 8), որ $w^k = -\frac{1}{d_k}$, իսկ λ-ն՝ $0 < \lambda < 1$ անհավասարությանը բավարարող իրական թիվ։ Որպես z ընտրենք $z = \lambda w + \alpha$ թիվը և λ-ն փոփոխելով փորձենք գտնել թեորեմին բավարարող z-ը։ Ակնհայտորեն՝

$$\frac{1}{f(\alpha)} \cdot f(z) = 1 - \lambda^k + d_{k+1}(\lambda w)^{k+1} + \ldots + d_n(\lambda w)^n =$$

$$= 1 - \lambda^k + \lambda^{k+1}(d_{k+1}w^{k+1} + d_{k+1}w^{k+1}\lambda + \ldots + d_n w^n \lambda^{n-k-1}):$$

Քանի որ $0 < \lambda < 1$, ապա նշանակելով $r = |d_{k+1}w^{k+1}| + \ldots + |d_n w^n|$, կստանանք.

$$|d_{k+1}w^{k+1} + d_{k+1}w^{k+1}\lambda + \ldots + d_n w^n \lambda^{n-k-1}| \leq |d_{k+1}w^{k+1}| + \ldots + |d_n w^n \lambda^{n-k-1}| <$$

$$< |d_{k+1}w^{k+1}| + \ldots + |d_n w^n| = r:$$

Ուրեմն՝ $\left|\frac{1}{f(\alpha)} \cdot f(z)\right| = |1 - \lambda^k + d_{k+1}(\lambda w)^{k+1} + \ldots + d_n(\lambda w)^n| \leq$

$$\leq |1-\lambda^k| + |d_{k+1}(\lambda w)^{k+1} + \ldots + d_n(\lambda w)^n| \leq |1-\lambda^k| + \lambda^{k+1}r = 1 - \lambda^k + \lambda^{k+1}r,$$

հետևաբար՝ $\left|\frac{1}{f(\alpha)} \cdot f(z)\right| \leq 1 - \lambda^k + \lambda^{k+1}r = 1 - \lambda^k(1 - \lambda r) < 1$, եթե $\lambda < \frac{1}{r}$:

Այսպիսով, եթե $\delta < \min\{\frac{|w|}{r}, |w|\}$, ապա $0 < \lambda < \frac{\delta}{|w|}$ անհավասարությանը բավարարող կամայական λ թվի համար $z=\lambda w+\alpha$ թիվը կբավարարի պահանջվող անհավասարություններին: □

Թ ե ո ր ե մ 13 (Հիմնական): *Կոմպլեքս գործակիցներով դրական աստիճանի յուրաքանչյուր բազմանդամ ունի կոմպլեքս արմատ:*

Ա պ ա ց ո ւ ց ո ւ մ: Դիցուք $f=a_0+a_1x^1+a_2x^2+a_3x^3+...+a_nx^n\in\mathbb{C}[x]$ և $\deg f\geq 1$: Նշանակենք

$$\mu=\inf\{\,|f(z)|\,;\,z\in\mathbb{C}\,\}:$$

Ցույց տանք, որ գոյություն ունի մի α կոմպլեքս թիվ, որի համար $|f(\alpha)|=\mu$: Սրանից կհետևի, որ $|f(\alpha)|=0$, քանի որ, եթե $|f(\alpha)|\neq 0$, ապա նախորդ լեմայի համաձայն, $|f(\alpha)|$-ն $\{|f(z)|;\,z\in\mathbb{C}\}$-ի համար ստորին եզր չի լինի:

Ստորին եզրի սահմանումից հետևում է, որ գոյություն ունի կոմպլեքս թվերի այնպիսի z_m հաջորդականություն, որ $|f(z_m)|\to\mu$: Եթե $|z_m|$ հաջորդականությունից հնարավոր լինեն ընտրել անվերջության ձգտող $|z_{m_s}|$ ենթահաջորդականություն, ապա ըստ հետևանք 4.4-ի (գլուխ 5. մաս 10.),

$$|\,a_0+a_1z_{m_s}+a_2z_{m_s}{}^2+a_3x^3+...+a_nz_{m_s}{}^n\,|\to\infty,$$

ինչը հակասում է $|f(z_m)|\to\mu$ պայմանին: Ուրեմն՝ $|z_m|$-ը սահմանափակ հաջորդականություն է. գոյություն ունի այնպիսի $A>0$ թիվ, որ $|z_m|<A$ բոլոր m-երի համար: Ենթադրենք $z_m=u_m+v_mi$, որտեղ $u_m,v_m\in\mathbb{R}$: Քանի որ $|u_m|<|z_m|<A$, ապա u_m հաջորդականությունից կարելի է ընտրել u_{mk} զուգամետ ենթահաջորդականություն՝ $u_{mk}\to u$: Նույն ձևով, քանի որ $|v_{mk}|<|z_{mk}|<A$, v_{mk} հաջորդկանությունից կարելի է ընտրել v_{mk_s} զուգամետ ենթահաջորդականություն՝ $v_{mk_s}\to v$: Կիրառելով լեմա 10.1-ը (գլուխ 5), կստանանք. $z_{mk_s}\to\alpha=u+vi$, ուրեմն՝ $f(z_{mk_s})\to f(\alpha)$ (հետևանք 4.3, բ., գլուխ 5. մաս 10.): $||f(z_{mk_s})|-|f(\alpha)||\leq|f(z_{mk_s})-f(\alpha)|$ անհավասարությունից այդ դեպքում կբխի, որ $|f(z_{mk_s})|\to|f(\alpha)|$: Մյուս կողմից, $|f(z_m)|\to\mu$, որտեղից հետևում է, որ $|f(\alpha)|=\mu$:

Այսպիսով, $|f(\alpha)|=\inf\{\,|f(z)|\,;\,z\in\mathbb{C}\,\}=0$, այսինքն՝ $f(\alpha)=0$: □

Հ ե տ և ա ն ք 13.1: *Կոմպլեքս գործակիցներով f բազմանդամը պարզ է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն 1 աստիճանի բազմանդամ է:*

Ա պ ա ց ո ւ ց ո ւ մ: Համաձայն թեորեմ 13-ի և հետևանք 9.1-ի, գոյություն ունի այնպիսի α կոմպլեքս թիվ, որ $f=(x-\alpha)\cdot f_1$: Ուրեմն՝ $\deg f_1=0$: □

Հ ե տ և ա ն ք 13.2: *Կոմպլեքս գործակիցներով n $(n\geq 2)$ աստիճանի յուրաքանչյուր f բազմանդամ վերլուծվում է n առաջին աստիճանի բազմանդամների արտադրյալի:*

Ապացույց: Չնայած այս պնդումը անմիջապես բխում է թեորեմ 7-ից ու նախորդ հետևանքից, այն կարելի է ապացուցել նաև ավելի պարզ, ըստ n-ի ինդուկցիայի մեթոդը կիրառելով: Եթե $\deg f=2$, ապա ըստ թեորեմ 13-ի և հետևանք 9.1-ի, $f=(x-\alpha)\cdot f_1$, որտեղ $\deg f_1=1$: Ենթադրենք թեորեմը ճիշտ է կամայական f_1 բազմանդամի համար, որը բավարարում է $\deg f_1<\deg f$ պայմանին: Դարձյալ f-ը ներկայացնելով $f=(x-\alpha)\cdot f_1$ տեսքով և օգտվելով ինդուկցիայի ենթադրությունից, համաձայն որի՝ f_1-ը վերլուծվում է 1 աստիճանի բազմանդամների արտադրյալի, կստանանք f-ի վերլուծությունը: □

15. Իրական գործակիցներով չբերվող բազմանդամները

$f\in\mathbb{R}[x]$ իրական գործակիցներով n աստիճանի բազմանդամը n-ից ավելի արմատներ ունենալ չի կարող (հետևանք 10.1), սակայն, որպես կոմպլեքս գործակիցներով բազմանդամ, այն կունենա n կոմպլեքս արմատներ (պատիկությունները ներառյալ):

Թեորեմ 14: *Եթե $\alpha\in\mathbb{C}$ թիվը $f\in\mathbb{R}[x]$ բազմանդամի k-պատիկ արմատ է, ապա $\overline{\alpha}$-ը (α-ի համալուծը) նույնպես հանդիսանում է f-ի k-պատիկ արմատ:*

Ապացույց: Ենթադրենք $f=a_0+a_1x^1+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n\in\mathbb{R}[x]$, $\deg f\geq 1$ և $f(\alpha)=0$: Այդ դեպքում, քանի որ $\forall i\,(a_i=\overline{a_i})$, կստանանք.

$$f(\overline{\alpha})=a_0+a_1\overline{\alpha}+a_2\overline{\alpha}^2+a_3\overline{\alpha}^3+\ldots+a_n\overline{\alpha}^n=\overline{a_0}+\overline{a_1}\,\overline{\alpha}+\overline{a_2}\,\overline{\alpha}^2+\overline{a_3}\,\overline{\alpha}^3+\ldots+\overline{a_n}\,\overline{\alpha}^n:$$

Կիրառելով լեմմա 3.1-ը և լեմմա 4.1-ը (գլուխ 5), ի վերջո եզրակացնում ենք, որ

$$\overline{a_0}+\overline{a_1}\,\overline{\alpha}+\overline{a_2}\,\overline{\alpha}^2+\overline{a_3}\,\overline{\alpha}^3+\ldots+\overline{a_n}\,\overline{\alpha}^n=\overline{f(\alpha)}=\overline{0}=0:$$

Ճիշտ սրա նման, $f^{(m)}(\alpha)=0\Leftrightarrow\overline{f^{(m)}(\alpha)}=0$ $(m=1,2,\ldots,k-1)$, ինչը, համաձայն հետևանք 12.2-ի, ապացուցում է α-ի և $\overline{\alpha}$-ի պատիկությունների հավասարությունը: □

Հետևանք 14.1: n $(n\geq 1)$ *աստիճանի կամայական $f\in\mathbb{R}[x]$ բազմանդամ վերլուծվում է իրական գործակիցներով առաջին աստիճանի բազմանդամների և երկրորդ աստիճանի բացասական դիսկրիմինանտով բազմանդամների արտադրյալի:*

Ապացույց: Դիցուք $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\overline{\alpha_1},\overline{\alpha_2},\ldots,\overline{\alpha_m},\alpha_{m+1},\alpha_{m+2},\ldots,\alpha_{m+s}$ կոմպլեքս թվերը, որտեղ $\alpha_{m+1},\alpha_{m+2},\ldots,\alpha_{m+s}\in\mathbb{R}$ և $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m\in\mathbb{C}-\mathbb{R}$, տվյալ f բազմանդամի բոլոր իրարից տարբեր արմատներն են, որոնց պատիկությունները համապատասխանաբար հավասար են հետևյալ բնական թվերին. $k_1,k_2,\ldots,k_m,k_1,k_2,\ldots,k_m,k_{m+1},k_{m+2},\ldots,k_{m+s}$ (թեորեմ 14): Ըստ թեորեմ 10-ի,

$$f=(x-\alpha_1)^{k1}\cdot(x-\alpha_2)^{k2}\cdots(x-\alpha_m)^{km}(x-\overline{\alpha_1})^{k1}\cdot(x-\overline{\alpha_2})^{k2}\cdots(x-\overline{\alpha_m})^{km}\cdot$$

$$\cdot(x-\alpha_{m+1})^{km+1}\cdot(x-\alpha_{m+2})^{km+2}\cdots(x-\alpha_{m+s})^{km+s}\cdot q:$$

Համաձայն α_j և k_j թվերի ընտրության, $\deg q = 0$: Քանի որ

$$(x-\alpha_i)(x-\overline{\alpha_i}) = \alpha_i\overline{\alpha_i} - (\alpha_i + \overline{\alpha_i})x + x^2$$

բազմանդամը իրական գործակիցներով այնպիսի բազմանդամ է, որի դիսկրիմինանտը բացասական է, ապա հետևանքն ապացուցված է: □

Հ ե տ և ա ն ք 14.2: *Իրական գործակիցներով բազմանդամը պարզ է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն կամ առաջին աստիճանի է, կամ երկրորդ աստիճանի բացասական դիսկրիմինանտով բազմանդամ է:*

Ա պ ա ց ո ւ ց ո ւ մ: Համաձայն թեորեմ 14-ի, բավական է համոզվել, որ երկրորդ աստիճանի բացասական դիսկրիմինանտով բազմանդամները պարզ են: Իրոք, եթե այդպիսի բազմանդամը վերածվի առաջին աստիճանի իրական գործակիցներով երկու բազմանդամների արտադրյալի, ապա այն կունենա իրական արմատներ, ինչը հակասում է դիսկրիմինանտի վերաբերյալ պայմանին: □

Հ ե տ և ա ն ք 14.3: *Կենտ աստիճանի իրական գործակիցներով յուրաքանչյուր բազմանդամ ունի գոնե մեկ իրական արմատ:*

Ա պ ա ց ո ւ ց ո ւ մ: Անմիջապես հետևում է նրանից, որ

$$(x-\alpha_1)^{k1}\cdot(x-\alpha_2)^{k2}\cdots(x-\alpha_m)^{km}(x-\overline{\alpha_1})^{k1}\cdot(x-\overline{\alpha_2})^{k2}\cdots(x-\overline{\alpha_m})^{km}$$

բազմանդամը զույգ աստիճանի իրական գործակիցներով բազմանդամ է: □

16. Վիետի բանաձևերը

Դիցուք $f=(x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$: f-ը գրենք կանոնավոր տեսքով, այսինքն, օգտվելով բաշխականությունից, $(x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$ արտադրյալի փակագծերը բացենք և կատարենք «նման անդամների միացում» (թեորեմ 2): Կստանանք.

$$f = f_0 + f_1x^1 + f_2x^2 + f_3x^3 + \ldots + f_{n-1}x^{n-1} + x^n,$$

որտեղ

$$f_0 = (-1)^n\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_k = (-1)^k \sum_{i1<i2<i3<\ldots<ik} \alpha_{i1}\alpha_{i2}\alpha_{i3}\cdots\alpha_{ik} \qquad (\text{Վ})$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_{n-1} = -(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n):$$

(Վ) բանաձևերը կոչվում են ***Վիետի բանաձևեր***: Օրինակ,

$$(x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)\cdot(x-\alpha_3) =$$
$$= -\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + (\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)x^1 - (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)x^2 + x^3$$

Վիետի բանաձևերը հնարավորություն են տալիս բազմանդամի գործակիցներն արտահայտել նրա արմատների միջոցով: Առավել հետաքրքիր է հակառակ հարցը. հնարավոր է արդյո՞ք բազմանդամի արմատներն արտահայտել նրա գործակիցների միջոցով: Երկու աստիճանի բազմանդամի արմատների բանաձևերը հայտնի են դպրոցից: Երեք և չորս աստիճանի բազմանդամների արմատների բանաձևերը հայտնաբերվել են 16-րդ դարում:

Այդ բանաձևերի միջոցով բազմանդամի արմատներն ստացվում են նրա գործակիցների հետ գումարման, հանման, բազմապատկման, բաժանման գործողություններ կատարելով և արմատ հանելով:

Մինչև 18-րդ դարի վերջը կամայական բազմանդամի արմատները նրա գործակիցների միջոցով գտնելու հարցը եղել է հանրահաշվի կենտրոնական խնդիրը: Բազմաթիվ մեծավաստակ մաթեմատիկոսներ, այդ թվում՝ Էյլերը և Լագրանժը, կարծում էին, որ այդպիսի բանաձևեր պետք է, որ գոյություն ունենան: 1824թ. նորվեգացի մաթեմատիկոս Ն. Աբելը (1802-1829) ապացուցեց նման բանաձևերի գոյության անհնարինությունը հինգ և բարձր աստիճան ունեցող բազմանդամների համար: Մյուս կողմից, քանի որ, ակնհայտորեն, կան բազմանդամներ, որոնց արմատներն արտահայտվում են գործակիցների հետ վերևում նկարագրած գործողությունները կատարելով, բաց էր մնում մի այնպիսի հայտանիշ գտնելու հարցը, որին բավարարելու դեպքում հավասարման արմատները «ռադիկալների» միջոցով կարտահայտվեն: Ն. Աբելի թեորեմի հրապարակումից մի քանի տարի անց, մեկ այլ վաղամեռիկ մաթեմատիկոս, ֆրանսիացի Էվարիստ Գալուան (1811-1832) գտավ անհրաժեշտ և բավարար պայման, որի դեպքում բազմանդամի արմատները կգտնվեն նրա գործակիցների հետ գումարման, հանման, բազմապատկման, բաժանման և արմատ հանելու գործողություններ կատարելով: Աբելի և Գալուայի թեորեմները մնում են որպես անգերազանցելի հայտնագործություններ:

Գալուայի թեորեմից հետևում է, որ, օրինակ, x^5-x-1 բազմանդամի արմատներն իր գործակիցներով հնարավոր չէ արտահայտել:

17. Երկու փոփոխականով բազմանդամներ

Համաձայն հետևանք 2.2, բ.-ի, $x^k=\underbrace{x\cdot x\cdots x}$: Սա նկատի ունենալով, երբ խոսք է գնում մի քանի փոփոխականի բազմանդամների մասին, ապա $\mathbb{R}[x]$ բազմությունը ***անվանում են նաև մեկ՝ x փոփոխականով բազմանդամների բազմություն***, իսկ յուրաքանչյուր

$$a_0+a_1x^1+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n$$

բազմանդամ՝ x ***փոփոխականով բազմանդամ***: Այս տերմինաբանությամբ, x-ն ինքը x փոփոխականով բազմանդամ է:

Երկու փոփոխականով բազմանդամների օղակը կառուցվում է մեկ փոփոխականով բազմադամների միջոցով հետևյալ կերպ: Դիտարկենք $y^1, y^2, y^3, \ldots, y^n, \ldots$ բնական թվերով համարակալված նշանները: Որպես այբուբեն ընտրենք

$$\mathbb{R}[x]\cup\{+\}\cup\{y^1, y^2, y^3, \ldots, y^n, \ldots\}$$

բազմությունը: Փաստորեն, մեր այբուբենի տառերն են՝ իրական գործակիցներով x փոփոխականով բազմանդամները, + նշանը, և, վերջապես, $y^1, y^2, y^3, \ldots, y^n, \ldots$ տառերը: Վերցնենք $n+1$ $(n\in\mathbb{N}_0)$ կամայական բազմանդամներ. $p_0, p_1, p_2, p_3, ..., p_n \in \mathbb{R}[x]$, և նրանց միջոցով գրենք հետևյալ արտահայտությունը (բառը).

$$p_0 + p_1y^1 + p_2y^2 + p_3y^3 + ... + p_ny^n, \qquad (8)$$

որի երկարությունը հավասար է $3n+1$: Եթե $n=0$, ապա (8) բառը կունենա p_0 տեսքը և, դրանով իսկ, մեկ երկարություն:

Սահմանում 17.1: (8) *տեսքի յուրաքանչյուր արտահայտություն, որտեղ $n \in \mathbb{N}_0$, իսկ $p_0, p_1, p_2, p_3, ..., p_n \in \mathbb{R}[x]$ բազմանդամներն իրական գործակիցներով կամայական բազմանդամներ են, կանվանենք իրական գործակիցներով երկու՝ x և y փոփոխականներով բազմանդամ:*

Իրական գործակիցներով բոլոր հնարավոր երկու՝ x և y փոփոխականով բազմանդամների բազմությունը ընդունված է նշանակել $\mathbb{R}[x, y]$-ով: Համաձայն սահմանման, յուրաքանչյուր $p_0 \in \mathbb{R}[x]$ բազմանդամ (8) տեսքի մեկ երկարությամբ արտահայտություն է, ուրեմն՝ նաև երկու փոփոխականով բազմանդամ է: Այսպիսով. $\mathbb{R}[x] \subset \mathbb{R}[x, y]$:

Սահմանում 17.2: *Եթե $p_0 + p_1y^1 + p_2y^2 + ... + p_ny^n$ բազմանդամի բոլոր գործակիցները հավասար են զրոյի, այսինքն՝ $p_0 = p_1 = p_2 = ... = p_n = 0$, ապա այդ բազմանդամը կոչվում է զրոյական բազմանդամ:*

Սահմանում 17.3: $0+0y^1+0y^2+0y^3+...+0y^{n-1}+p_ny^n$ *բազմանդամը, որտեղ p_n-ը $\mathbb{R}[x]$-ի միանդամ է, կոչվում է երկու փոփոխականով միանդամ: Երկու փոփոխականով միանդամ է կոչվում նաև յուրաքանչյուր $p_0 \in \mathbb{R}[x]$ միանդամ:*

Համաձայն սահմանման, երկու փոփոխականով միանդամը կամ ունի ax^m տեսքը, կամ էլ՝ $0+0y^1+0y^2+...+0y^{n-1}+ax^my^n$ $(a \neq 0, a \in \mathbb{R})$ տեսքը, (եթե $m=0$, ապա կհամարենք $ax^0 \equiv a$): Միանդամը միարժեքորեն է որոշվում ax^my^n արտահայտությամբ: Դա հնարավորություն է տալիս միանդամների համար ներմուծել ավելի կարճ նշանակում.

$$0+0y^1+0y^2+...+0y^{n-1}+ax^my^n \equiv ax^my^n:$$

Ոչ միայն միանդամների, այլ ընդհանրապես, կամայական $p_n \in \mathbb{R}[x]$ բազմանդամների համար հարմար է $0+0y^1+0y^2+0y^3+...+0y^{n-1}+p_ny^n$ տեսքի բազմանդամները նշանակել p_ny^n-ով.

$$0+0y^1+0y^2+0y^3+...+0y^{n-1}+p_ny^n \equiv p_ny^n:$$

Սահմանում 17.4: *Եթե $p_0 + p_1y^1 + p_2y^2 + ... + p_ny^n$ բազմանդամը զրոյական բազմանդամ չէ, ապա* $\max\{k\,;\, p_k \neq 0\}$ *բնական թիվը կոչվում է $p_0 + p_1y^1 + p_2y^2 + ... + p_ny^n$ բազմանդամի աստիճան ըստ y-ի և նշանակվում է այսպես.* $\deg(p_0 + p_1y^1 + p_2y^2 + ... + p_ny^n)_y$ *:*

Զրոյական բազմանդամի համար աստիճան չի սահմանվում:

Դիտարկենք որևէ բազմանդամ՝ $p_0 + p_1y^1 + p_2y^2 + ... + p_ny^n$: Հարմարության համար այն նշանակենք f տառով.

$$f = p_0 + p_1y^1 + p_2y^2 + ... + p_ny^n:$$

Տվյալ f բազմանդամի և յուրաքանչյուր i բնական թվի համար՝ $i \in \mathbb{N}_0$, f_i-ով նշանակենք հետևյալ բազմանդամը.

$$f_i = \begin{cases} p_i, & 0 \le i \le n \\ 0, & i > n \end{cases}:$$

Օգտագործելով այս առնչությունները, մենք f բազմանդամը կարող ենք գրել

$$f = f_0 + f_1 y^1 + f_2 y^2 + f_3 y^3 + \ldots + f_n y^n$$

տեսքով: f_i բազմանդամների սահմանումից բխում է, որ f-ը զրոյական բազմանդամ է այն և միայն դեպքում, երբ

$$\forall i\, [i \in \mathbb{N}_0 \;\Rightarrow\; f_i = 0]:$$

Դիցուք ունենք երկու բազմանդամներ՝

$f = f_0 + f_1 y^1 + f_2 y^2 + f_3 y^3 + \ldots + f_n y^n$ և $g = g_0 + g_1 y^1 + g_2 y^2 + g_3 y^3 + \ldots + g_m y^m$:

Սահմանում 17.5: *f և g բազմանդամները կանվանենք իրար հավասար և կգրենք $f = g$ այն և միայն այն դեպքում, երբ*

$$\forall i\, [i \in \mathbb{N}_0 \;\Rightarrow\; f_i = g_i]:$$

Լեմմա: *Յուրաքանչյուր երկու զրոյական բազմանդամ իրար հավասար են:* □

Մասնավորապես, բոլոր զրոյական բազմանդամները հավասար են 0 բազմանդամին:

Հավասարության սահմանումից անմիջապես բխում է հետևյալը:

Լեմմա: *Կամայական f, g և h բազմանդամների համար.*

ա. $f = f$, բ. $f = g \Rightarrow g = f$, գ. $(f = g \wedge g = h) \Rightarrow f = h$: □

Լեմմա: ա. *Եթե $f = g \neq 0$, ապա* $\deg f_y = \deg g_y$*:*

բ. *Եթե* $\deg f_y = \deg g_y = k$*, ապա* $i > k \Rightarrow f_i = g_i = 0$*:*

գ. *Եթե* $\deg f_y = k$*, ապա* $f = f_0 + f_1 y^1 + f_2 y^2 + f_3 y^3 + \ldots + f_k y^k$*:*

Ավելին կամայական $t \ge 1$ բնական թվի համար՝ $t \in \mathbb{N}$,

$$f = f_0 + f_1 y^1 + f_2 y^2 + f_3 y^3 + \ldots + f_k y^k + 0y^{k+1} + 0y^{k+2} + \ldots + 0y^{k+t}: \tag{4}$$

դ. *եթե* $\deg g_y = 0$*, ապա* $g = g_0 \in \mathbb{R}[x]$*:* □

Սահմանում: *Եթե* $\deg(f_0 + f_1 y^1 + f_2 y^2 + f_3 y^3 + \ldots + f_n y^n)_y = k$*, ապա*

$$f_0 + f_1 y^1 + f_2 y^2 + f_3 y^3 + \ldots + f_k y^k$$

բազմանդամը կոչվում է $f_0 + f_1 y^1 + f_2 y^2 + f_3 y^3 + \ldots + f_n y^n$ բազմանդամի կանոնավոր տեսք ըստ y-ի:

Հետևանք: *Հավասար բազմանդամներն ունեն միևնույն կանոնավոր տեսքը:* □

Դիտարկենք երկու բազմանդամներ՝

$f_0 + f_1 y^1 + f_2 y^2 + f_3 y^3 + \ldots + f_n y^n$ և $g = g_0 + g_1 y^1 + g_2 y^2 + g_3 y^3 + \ldots + g_n y^n$:

Սահմանում 17.6: $f_0 + f_1 y^1 + f_2 y^2 + f_3 y^3 + \ldots + f_n y^n$ *և*

$$g = g_0 + g_1y^1 + g_2y^2 + ... + g_ny^n$$

բազմանդամների համար

$$(f_0 + g_0) + (f_1 + g_1)y^1 + (f_2 + g_2)y^2 + ... + (f_n + g_n)y^n$$

բազմանդամը, որտեղ $(f_i + g_i)$*-ն* $f_i \in \mathbb{R}[x]$ *և* $g_i \in \mathbb{R}[x]$ *բազմանդամների գումարն է* $(i = 0,1,2,...,n)$*, կոչվում է* f *և* g ***բազմանդամների գումար*** *և նշանակվում է* $f \oplus g$ *-ով.*

$$f \oplus g = (f_0 + g_0) + (f_1 + g_1)x^1 + (f_2 + g_2)x^2 + (f_3 + g_3)x^3 + ... + (f_n + g_n)x^n:$$

Այսպիսով, ըստ $f \oplus g$ բազմանդամի սահմանման, $(f \oplus g)_i = f_i + g_i$:

Եթե $f = f^*$ և $g = g^*$, ապա $f \oplus g = f^* \oplus g^*$:

Թեորեմ 15: 1. $\forall f \forall g \forall h[(f \oplus g) \oplus h = f \oplus (g \oplus h)]$,

2. $\forall f [f \oplus 0 = f]$,

3. $\forall f \exists g [f \oplus g = 0]$

4. $\forall f \forall g [f \oplus g = g \oplus f]$:□

$-f = (-f_0) + (-f)_1x^1 + (-f_2)x^2 + ... + (-f_n)x^n$ բազմանդամը կոչվում է f-ին ***հակադիր բազմանդամ***.

Հետևանք 15.1: *Կամայական* $f_0 + f_1y^1 + f_2y^2 + f_3y^3 + ... + f_ny^n$ *բազմանդամի համար տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը.*

$$f_0 + f_1y^1 + f_2y^2 + f_3y^3 + ... + f_ny^n = f_0 \oplus f_1y^1 \oplus f_2y^2 \oplus f_3y^3 \oplus ... \oplus f_ny^n,$$

որտեղ աջ մասի յուրաքանչյուր գումարելին

$$f_ky^k = 0 + 0y^1 + 0y^2 + 0y^3 + ... + 0y^{k-1} + f_ky^k$$

տեսքի բազմանդամ է:□

Համաձայն այս հետևանքի, երկու փոփոխականով բազմանդամների սահմանման մեջ օգտագործված + նշանը կարելի է փոխարինել գումարման $\oplus$ նշանով: Ինչպես և մեկ փոփոխականի դեպքում, մենք կանենք հակառակը. այսուհետև $\oplus$ նշանի փոխարեն մենք կօգտագործենք + նշանը: Բացի այդ, $f + (-g)$-ի փոխարեն կգրենք $f - g$:

Իսկ այժմ, կամայական երկու բազմանդամների միջոցով՝

$$f = f_0 + f_1y^1 + f_2y^2 + ... + f_ny^n \text{ և } g = g_0 + g_1y^1 + g_2y^2 + ... + g_my^m,$$

կառուցենք մի նոր բազմանդամ: Այդ նպատակով, յուրաքանչյուր i $(i \in \mathbb{N}_0)$ թվի համար h_i-ով նշանակենք հետևյալ բազմանդամը.

$$h_i = f_0g_i + f_1g_{i-1} + f_2g_{i-2} + ... + f_{i-1}g_1 + f_ig_0:$$

կամ, որ նույնն է, $h_i = \sum_{k+s=i} f_kg_s$

Սահմանում 17.7: *f և g **բազմանդամների արտադրյալ** կոչվում է հետևյալ h բազմանդամը՝*

$$h = h_0 + h_1y^1 + h_2y^2 + h_3y^3 + ... + h_{n+m}y^{n+m},$$

որտեղ յուրաքանչյուր i $(i \in \mathbb{N}_0)$ *թվի համար* h_i *բազմանդամը որոշվում է* $h_i = \sum_{k+s=i} f_kg_s$ *բանաձևով:* f *և* g *բազմանդամների արտադրյալը կնշանակենք* $f \cdot g$ *-ով:*

Լեմա: Եթե $f=f^{*}$ և $g=g^{*}$, ապա $f\cdot g=f^{*}\cdot g^{*}$: □

Թեորեմ 16: I. $\forall f\forall g\forall h[(f\cdot g)\cdot h=f\cdot(g\cdot h)]$,

II. 2. $\forall f[f\cdot 1=f]$,

IV. $\forall f\forall g[f\cdot g=g\cdot f]$,

բ. $\forall f\forall g\forall h[f\cdot(g+h)=(f\cdot g)+(f\cdot h)]$: □

Դիցուք $ax^{m}y^{n}$-ն որևէ միանդամ է: Պայմանավորվենք, որ եթե $a=1$, ապա $ax^{m}y^{n}$-ի փոխարեն կգրենք ուղղակի $x^{m}y^{n}$ (իսկ $1y^{n}$-ի փոխարեն՝ y^{n}):

Հետևանք 16.1: ա. $f_k\cdot y^k=f_ky^k$, *որտեղ* $f_k\in\mathbb{R}[x]$

բ. $ax^{m}y^{n}\cdot bx^{k}y^{s}=abx^{m+k}y^{n+s}$,

գ. $a\cdot x^{m}y^{n}=ax^{m}y^{n}=ax^{m}\cdot y^{n}$: □

Յուրաքանչյուր $f=f_0+f_1y^1+f_2y^2+f_3y^3+\ldots+f_ny^n$ բազմանդամ, համաձայն հետևանքներ 15.1-ի և 16.1-ի, $f_0, f_1y^1, f_2y^2,\ldots,f_ny^n$ բազմանդամների գումար է, որտեղ ամեն մի f_k հանդիսանում է x փոփոխականի բազմանդամ: $f_k\cdot y^k$ արտադրյալը հաշվելու համար կարելի է, ըստ թեորեմ 16, բ.-ի, բաշխական օրենքով փակագծերը բացել, արդյունքում ստանալով միանդամների գումար: Ավելին, $f=f_0+f_1y^1+f_2y^2+f_3y^3+\ldots+f_ny^n$ բազմանդամի յուրաքանչյուր գումարելի վերածելով միանդամների գումարի, դրանով իսկ, ամբողջ բազմանդամը կվերածվի միանդամների գումարի: Դարձյալ թեորեմ 15-ից ու թեորեմ 16-ից օգտվելով, այնուհետև կարող ենք կատարել «նման անդամների միացում», այսինքն՝ հավասար աստիճան ունեցող միանդամների գործակիցները իրար գումարել:

Թեորեմ 17: *Երկու փոփոխականով յուրաքանչյուր f բազմանդամ կարելի է ներկայացնել իրարից տարբեր միանդամների գումարի տեսքով: Ավելին, այդ միանդամների գործակիցները տվյալ բազմանդամով որոշվում են միարժեքորեն:*

Ապացույց: Վերևում մենք արդեն բացատրեցինք թե ինչպես կարելի է բազմանդամը ներկայացնել միանդամների գումարի տեսքով: Այդ տեսքի միակությունն ապացուցելու համար օգտվենք բաշխական հատկությունից (թեորեմ 16, բ.) և տրված բազմանդամը բերենք ըստ y-ի կանոնավոր տեսքի՝ $f=f_0+f_1y^1+f_2y^2+f_3y^3+\ldots+f_ny^n$, որը որոշվում է միարժեքորեն (տե՛ս մաս 18): Մնում է տեսնել, որ որևէ $ax^{m}y^{k}$ միանդամի a գործակիցը ճիշտ համընկնում է f_k բազմանդամի ax^{m} միանդամի գործակցի հետ: □

Օրինակ, $(2+x^2)+(3-x+x^2)y+(x-x^3)y^2$ բազմանդամը ներկայացնենք միանդամների գումարի տեսքով.

$$(2+x^2)+(3-x+x^2)y+(x-x^3)y^2=2+3y+x^2-xy+x^2y+xy^2-x^3y^2:$$

18. Մի քանի փոփոխականով բազմանդամներ

Ճիշտ այնպես, ինչպես մեկ փոփոխականով բազմանդամների վրա հենվելով կառուցեցինք երկու փոփոխականներով բազմանդամների օղակը, կարող ենք երկու փոփոխականի բազմանդամների միջոցով կառուցել երեք փոփոխականով բազմանդամները և այդպես շարունակ:

Այսպես, ենթադրենք, թե արդեն կառուցել ենք $m-1$ $(m-1\geq 1)$ փոփոխականի բազմանդամների օղակը: Հեշտության համար $x, y, z, \ldots$ փոփոխական տառերի փոխարեն վերցնենք $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ փոփոխական տառերը և $\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}]$-ով նշանակենք $m-1$ փոփոխականով բազմանդամների բազմությունը:

Դիտարկենք $x_m{}^1, x_m{}^2, x_m{}^3, \ldots, x_m{}^n, \ldots$ բնական թվերով համարակալված նշանները: Որպես այբուբեն ընտրենք

$$\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}] \cup \{+\} \cup \{x_m{}^1, x_m{}^2, x_m{}^3, \ldots, x_m{}^n, \ldots\}$$

բազմությունը: Փաստորեն, մեր այբուբենի տառերն են՝ իրական գործակիցներով $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ փոփոխականով բազմանդամները, $+$ նշանը, և, վերջապես, $x_m{}^1, x_m{}^2, x_m{}^3, \ldots, x_m{}^n, \ldots$ տառերը: Վերցնենք $n+1$ հատ $(n \in \mathbb{N}_0)$ կամայական բազմանդամներ. $p_0, p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}]$, և նրանց միջոցով գրենք հետևյալ արտահայտությունը (բառը).

$$p_0 + p_1 y^1 + p_2 y^2 + p_3 y^3 + \ldots + p_n y^n, \tag{9}$$

որի երկարությունը հավասար է $3n+1$: Եթե $n=0$, ապա (9) բառը կունենա p_0 տեսքը և, դրանով իսկ, մեկ երկարություն:

Սահմանում 21.1: (9) *տեսքի յուրաքանչյուր արտահայտություն, որտեղ $n \in \mathbb{N}_0$, իսկ $p_0, p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}]$ բազմանդամներն իրական գործակիցներով կամայական բազմանդամներ են, կանվանենք իրական գործակիցներով և $x_1, x_2, \ldots, x_m$ փոփոխականներով բազմանդամ:*

Մաս 17.-ում բերված բոլոր սահմանումներն ու պնդումները նույնությամբ կրկնվում են m փոփոխականներով բազմանդամների համար: Բացի այդ, մեկ փոփոխականով բազմանդամների համար նախորդ մասերում ապացուցված բազմաթիվ պնդումներ ճշմարիտ են նաև $\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_m]$ օղակի համար և, որպես կանոն, ապացուցվում են ինդուկցիայի մեթոդով՝ ըստ m-ի:

$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}$ միանդամի համար $k_1 + k_2 + \ldots + k_m$ թիվը կոչվում է *(լրիվ) աստիճան*: Իսկ $f \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_m]$ բազմանդամի *աստիճան* $\deg f$, կոչվում է նրա միանդամների աստիճաններից մեծագույնը:

Թեորեմ 18: $m\,(m \geq 1)$ *փոփոխականով յուրաքանչյուր f բազմանդամ կարելի է ներկայացնել իրարից տարբեր միանդամների գումարի տեսքով: Ավելին, այդ միանդամների գործակիցները տվյալ բազմանդամով որոշվում են միարժեքորեն:* □

Առարկայական ցանկ

Գրականություն

1. Атья М., Макдональд И. Введение в коммутативную алгебру. М., Мир, 1972.
2. Виноградов И.М. Основы теории чисел. М., Наука, 1972.
3. Винберг Э. Курс алгебры. М., 2002.
4. Ван дер Варден. М., Мир, 1979.
5. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М., Наука, 1975.
6. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть 1-2. М., 2000.
7. Ленг С. Алгебра. М., Мир, 1968.
8. Фадеев Д.К. Лекции по алгебре. М., Наука, 1984.
9. Чандракесхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. М., Мир, 1974.
10. Մովսիսյան Յու. Մ. Հանրահաշիվ և թվերի տեսություն, Երևան, 2004
11. Միքայելյան Հ.Ս. Բարձրագույն հանրահաշվի դասընթաց, մաս 1-2, Երևան, 2004

Բովանդակություն

Վ.Ս. Աթաբեկյան

ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԻ ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Ստորագրված է տպագրության 23.12.04 թ.:
Չափսը՝ 60×84 1/16: Թուղթ օֆսեթ: Հրատ. 7,3 մամուլ, տպագր. 7,75 մամուլ= 7,2 պայմ. մամուլի:
Պատվեր 1: Տպաքանակ 200:

Երևանի համալսարանի հրատարակչություն
Երևան, Ալ. Մանուկյան 1:

Երևանի համալսարանի «Ռոտապրինտ» տպագրական արտադրամաս
Երևան, Ալ. Մանուկյան, 1