УДК 517.9
Г16
ББК 22.16

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 01-01-14009

Галкин В. А. **Уравнение Смолуховского**. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 336 с. — ISBN 5-9221-0208-7.

Изложена теория корректности задач для уравнения Смолуховского, моделирующего процессы коагуляции (слияния) частиц в дисперсных системах. Рассмотрены пространственно однородные и неоднородные задачи. Доказаны теоремы глобальной разрешимости и корректности задачи Коши. Описываются эффекты перехода соотношения сохранения в соотношение диссипации и выявляется их связь с возникновением негладких особенностей решений. Предложены приближенные методы решения задач и приведено их обоснование. В классах функциональных решений описан подход к выделению условий корректности задач для уравнений больцмановского типа, включающих в себя классические уравнения Больцмана кинетической теории газов и Смолуховского кинетической теории коагуляции.

Для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов, занимающихся математическими исследованиями моделей в физической кинетике, коллоидной химии, биологии.

Научное издание

ГАЛКИН Валерий Алексеевич

УРАВНЕНИЕ СМОЛУХОВСКОГО

Оригинал-макет: *В. А. Галкин*

ЛР № 071930 от 06.07.99
Подписано в печать 07.12.01. Формат 60×90/16
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная
Усл. печ. л. 21. Уч.-изд. л. 21. Тираж 400 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117864 Москва, Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru

ISBN 5-9221-0208-7

Отпечатано с готовых диапозитивов в Московской типографии № 6 Министерства РФ по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций
109088 Москва, Южнопортовая ул., 24

ISBN 5-9221-0208-7

© ФИЗМАТЛИТ, 2001

Оглавление

Введение

«Весьма поучительно следить за изменчивыми судьбами научных теорий. Они более интересны, чем изменчивые судьбы людей, ибо каждая из них включает в себя что-то бессмертное, хотя бы частицу вечной истины».

М. Смолуховский[1]

«Суть истины вся в том, что нам она — навечно,
Когда хоть раз в прозрении ее увидим свет,
И теорема Пифагора через столько лет
Для нас, как для него, бесспорна, безупречна».

А. Шамиссо

[1] Мариан Смолуховский (фон Смолан–Смолуховский, M. v. Smoluchowski, 28. 5. 1872 — 25. 9. 1917) — польский физик и математик, ученик Людвига Больцмана. Работал во Львове и Кракове. Изучал броуновское движение и для описания распределения положения броуновской частицы вывел нелинейное интегральное эволюционное уравнение, играющее важную роль в современной теории марковских процессов (в статистической физике оно называеся уравнением Смолуховского — по имени истинного изобретателя математической модели процесса броуновского блуждания, см. [106, 107], а в теории случайных процессов его называют уравнением Колмогорова–Чэпмена [108]. Следуя методу, предложенному Л. С. Понтрягиным, указанное уравнение можно преобразовать в линейное параболическое уравнение с частными производными второго порядка, называемое в теоретической физике уравнением Фоккера–Планка для функции распределения броуновских частиц в фазовом пространстве, или мономолекулярным кинетическим уравнением [107]. В 1916 г. М. Смолуховский, изучая процессы коагуляции коллоидных частиц, находящихся в состоянии броуновского блуждания, записал кинетическое уравнение коагуляции (Смолуховского), которому посвящена настоящая книга. По своей математической структуре это уравнение, подобно уравнению Больцмана, является интегродифференциальным эволюционным уравнением с квадратичной нелинейностью [11, 16, 78]. — *Здесь и далее — прим. автора.*

Результаты, полученные автором в течение 1974–2000 г г. и включенные в предлагаемую читателю в книгу, составили основу специального курса «Методы решения задач физической кинетики» [103] для студентов-математиков Обнинского филиала МИФИ (1979–1985), а затем — Института атомной энергетики (1985–2001).

Не так уж много в природе фундаментальных процессов, которые лежат в основе чудесного многообразия наших ощущений и видения жизни. А, в конечном счете, это, зачастую, — взаимодействия пар элементов, составляющих очень сложную систему, например, атмосферу, облака, межзвездное вещество, кровь, биологические колонии клеток, человеческое общество, экологические системы, ноосферу и т. п. Два важных случая таких взаимодействий в механике — это упругое и неупругое столкновения биллиардных шаров, рассматриваемых как элементы сложной системы. Когда таких шариков очень много (т. е. их число сравнимо с количеством молекул в кубическом сантиметре идеального газа при нормальных условиях $\sim 2.68 \times 10^{19}$ см$^{-3}$)[1], то применяют, например, математические модели кинетической теории газов упруго сталкивающихся молекул (теория Л. Больцмана)[2] либо рассматривают газ как сплошную среду, которую мы ощущаем в ласковом дуновении ветерка, или в грохоте грома во время грозы, или в ударной волне, сметающей все на своем пути после взрыва! Другой крайний случай — неупругие соударения, которые порождают дождь из атмосферных облаков, тополиный пух, катящийся по земле длинными косами в июньскую жару, осадки в пробирках во время школьных опытов и т. д. Все это яркие и запоминающиеся явления природы, заставляющие биться сердца влюбленных, студентов и будущих ученых!

[1] В статистической физике эта величина называеся числом Лошмидта.

[2] Людвиг Больцман (L. Boltzmann) — один из величайших физиков XIX в., автор фундаментальных исследований по кинетической теории газов, термодинамике и теории излучения, убежденный и страстный борец за атомистические взгляды в науке. Судьбу Л. Больцмана как одного из основоположников современной физики можно сравнить только с судьбой великого творца теории множеств — Георга Кантора (1845–1918). Их идеи не были поняты надлежащим образом при жизни, что трагически сказалось на судьбах этих гениальных людей. Родился Больцман 20 февраля 1844 г. в Вене. Во время депрессии, находясь на летнем отдыхе в Дуино близ Триеста (входившего до первой мировой войны в состав Австрии, а затем отошедшего к Италии), Больцман покончил жизнь самоубийством 5 сентября 1906 г. По выражению Фламма, Больцман умер как мученик за свои идеи. В июле 1933 г. община города Вены в знак особых научных заслуг этого гениального человека взяла под свое попечительство могилу Больцмана на Центральном венском кладбище. Атомистические идеи Больцмана нашли замечательное подтверждение и продолжение в трудах Альберта Эйнштейна (1905) и знаменитого ученика Л. Больцмана, польского физика Мариана Смолуховского (1906), см. [109].

Математической теории газов посвящена обширная литература [30, 31, 48, 51–53, 106, 107, 109–112], а исследования математических моделей систем слипающихся частиц до сих пор сосредоточены в специальных журналах, что и побудило автора к написанию этой книги. Физическим аспектам теории коагуляции посвящены книги [1, 11, 16, 17, 82, 113].

От неупругого столкновения элементов сложных систем очень многое зависит в нашей повседневной жизни, примером тому служит явление свертываемости (коагуляции) крови при порезах (отсутствие коагуляции крови грозит смертельной опасностью так же, как и ее чрезмерная интенсивность, ведущая к образованию тромбов с последующей закупоркой кровеносных сосудов!), створаживание молока и образование киселя — это тоже коагуляция; процессы полимеризации, т. е. очень интенсивной коагуляции частичек, лежат в основе производства полимерных нитей, использующихся при изготовлении современных материалов, в частности, для колготок и платьев, мыла и различных парфюмерных принадлежностей, без которых немыслима жизнь современной женщины!

Напрямую с этими явлениями связаны процессы роста трещин в структуре материалов за счет их взаимных пересечений (коагуляция растущих трещин с образованием дефектов, сопоставимых с размерами детали — явление разрушения). Это имеет прямое отношение к задачам динамики разрушения деталей и прогноза развития дефектов с целью предотвращения возможных катастроф на аэрокосмических аппаратах, разрушения трубопроводов первого контура ядерноэнергетических установок при их циклическом замораживании–размораживании и т. д. Последнее особенно актуально для ядерных реакторов с тяжелым металлическим теплоносителем (свинец, свинец–висмут), где фазовые переходы служат источником скачков давления на стенки каналов теплоносителя, что ведет к развитию трещин и разрушению конструкций.

Вышеперечисленные процессы имеют глубокую связь с динамикой развития нелокальных связей в нейронных сетях (формирование ассоциативных образов и развитие мозга ребенка) и, вполне возможно, что явление высокотемпературной сверхпроводимости имеет прямое отношение к образованию цепочек аномальной проводимости за счет объединения (коагуляции) локальных бездефектных зон в монокристалле с последующим формированием макроскопической сверхпроводящей структуры. Аналогичные явления можно наблюдать при установлении коммуникаций в телефонной сети, при передаче сообщений по всемирной паутине интернета.

Вообще говоря, все вышесказанное допускает следующее математическое обобщение. Предположим, что дано некоторое множество элементов M, на котором определен однопараметрический поток[1] отношений эквивалентности[2] R_t (по определению, наличие свойства потока для однопараметрического семейства отношений эквивалентности R_t на M означает, что эквивалентные между собой элементы в момент времени t сохраняют это свойство в каждый последующий момент времени $s \geq t$)[3]. Множество M при каждом t распадается на непересекающиеся классы эквивалентности, и мощность каждого класса[4] является монотонно возрастающей функцией времени. Пусть $a \in M$ и $[a]_t$ — класс эквивалентности, порожденный элементом a в эквивалентности R_t; обозначим $x \stackrel{def}{=} \operatorname{card}[a]_t$ Поскольку свойство потока обеспечивает появление с ростом времени элементов из других классов, которые эквивалентны a, то в силу свойств отношения эквивалентности (если классы имеют эквивалентные между собой элементы, то они совпадают) происходит их объединение (коагуляция)! Таким образом, можно рассматривать задачу об отыскании функции распределения $f(x,t)$ классов по их размерам (мощности) x в каждый момент времени t[5].

Приведенная абстрактная схема имеет важное приложение в задаче прогноза распространения грозной чумы конца XX в. — AIDS (СПИДа). Примем, что вышеупомянутое абстрактное множество M — это человечество, обозначим $A_t \subset M$ — множество людей, заболевших СПИДом до момента времени t. Два человека a и b (элементы множества M) считаем связанными, если они находятся в устойчивых (т. е. постоянно возобновляющихся после начала) сексуальных отношениях. Полагаем $c, d \in M$ эквивалентными (т. е. cR_td), если можно указать конечный набор элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n \in M$ ($a_1 = c,\ a_n = d$), таких, что каждая пара a_i, a_{i+1}, $1 \leq i \leq n-1$,

---

[1] С параметром $t \in \mathbb{R}$ — время.

[2] См. дополнение 2.

[3] Указанное требование означает выполнение следующих соотношений: если $a\,R_t\,b$, то при каждом $s \geq t$ имеет место $a\,R_s\,b$.

[4] Мощность отождествляется с числом элементов в классе, если класс состоит из конечного количества элементов.

[5] Более общо, для описания процесса коагуляции следует изучать свойства пространства, состоящего из тройки объектов: множества M, потока отношений эквивалентности R_t, $(t \in \mathbb{R})$ и вероятности P на σ-алгебре кардинальных чисел. Описание процесса коагуляции — это исследование функции распределения классов эквивалентности по их мощности $\operatorname{card}[a]_t$, $a \in M$. Аналогичная постановка вопроса возможна, когда вместо непрерывных значений t рассматривается дискретное время $t \in \mathbb{N}$; тогда говорят о каскаде отношений эквивалентности (аналогично соответствующим определениям в теории динамических систем [45]).

в этой цепочке является связанной. Тем самым, на M порождается поток отношений эквивалентности. Очевидно, что человечество M распадается на классы эквивалентности людей, находившихся к данному моменту времени в указанных отношениях; эти классы растут за счет появления новых связей (гибель и рождение людей в рассматриваемой модели мы не учитываем для упрощения изложения). Считаем, что каждая связь в классе, содержащем больного, ведет к заболеванию всего класса. Тогда множество больных представимо в следующем виде:

$$A_t = \bigcup_{a \in A_0} [a]_t, \quad t \geq 0.$$

Ясно, что гибель человечества становится неизбежной, когда мощность множества A_t становится сравнимой с числом всех людей во множестве M. Подчеркнем, что рост классов, содержащих здоровых людей и больных, обусловлен процессом коагуляции. Интересно отметить, что в случае классов, содержащих конечное число элементов, скажем, x и y, при безразличном выборе не более одного партнера в заданном классе (в предположении, что партнеры находятся в разных классах) вероятность слияния указанных классов за время Δt пропорциональна $\Phi(x,y)\Delta t$, где интенсивность (или так называемое ядро) процесса коагуляции $\Phi(x,y) = xy$ (это равенство определяется числом возможных комбинаций для образования пары элементов в указанных классах). Исследованию решений уравнения Смолуховского с этим специальным ядром посвящена гл. 5. Следует подчеркнуть, что рассмотренная модель коагулирующей системы, состоящей из элементов разной природы (в нашем примере — здоровые и больные люди), приводит к необходимости изучать систему уравнений Смолуховского для функций распределения для каждой отмеченной компоненты.

Приведенная упрощенная модель имеет прямое отношение к моделированию роста дефектов в материалах и последующему их разрушению. Те же рассуждения могут быть применены при описании распределения банковского капитала в предположении возможного слияния банков с течением времени.

Одним из основных механизмов эволюции дисперсных систем, под которыми понимают механическую смесь среды (газообразной или жидкой), является механизм *коагуляции* (слияния) частиц системы. Это явление наблюдается в различных физических ситуациях: в растворах — броуновская коагуляция, при образовании звезд — коагуляция гравитирующих масс; явление, подобное коагуляции, характерно для таких физических процессов как рост кристаллов, рост газовых пузырей в твердом теле.

Детальное изучение процессов коагуляции особенно важно в метеорологии, в частности, при анализе таких атмосферных явлений как загрязнение и самоочищение атмосферы, образование облаков, туманов и осадков. Коагуляция аэрозольных частиц играет значительную роль в протекании различных атмосферных процессов, включая эволюцию спектра тонкодисперсной аэрозольной компоненты и образование осадков. Поэтому при исследовании кинетических процессов, в которых допускается слияние частиц, следует иметь четкое представление о вкладе, вносимом коагуляцией в то или иное физическое явление, уметь рассчитывать с требуемой точностью эволюцию функции распределения частиц по размерам, обусловленную коагуляцией. В свете возрастающего количества исследований в области активных воздействий на атмосферные явления в связи с потребностями человечества, увеличивающимся загрязнением атмосферы большое практическое значение приобретают правильные качественные и количественные оценки влияния различных факторов на взаимодействие частиц, приводящих к возникновению условий, при которых коагуляция возможна, либо препятствующих ей; оценки скорости коагуляции, асимптотическое поведение функции распределения при больших размерах частиц, выпадающих обычно в виде осадков или образующих в коагулирующей системе выделенную структуру — аналог новой фазы.

Следуя монографии [1], остановимся на некоторых физических аспектах процессов коагуляции, наблюдающихся в атмосфере. Нижеуказанные механизмы, как правило, действуют совместно.

«*Броуновская коагуляция.* Мелкие аэрозольные частицы (для нижней тропосферы Земли их размеры не более 1 мкм) реагируют на случайные флуктуации плотности и средней скорости молекул воздуха, они пребывают все время в нерегулярном (броуновском) движении. Броуновское блуждание приводит к их взаимному столкновению и поэтому оно является одним из основных постоянно действующих факторов, способствующих коагуляции аэрозольных частиц.

Броуновская диффузия. Броуновское блуждание частиц приводит к так называемой броуновской диффузии и способствует их осаждению на более крупные объекты, в частности, на крупные атмосферные частицы, физически не находящиеся в состоянии броуновского блуждания, например, на крупные частицы атмосферной пыли, частицы облаков, осадков. Однако вследствие седиментации (падения в атмосфере под действием силы тяжести) крупных частиц последние обтекаются воздухом, который содержит в себе мелкие аэрозольные частички. Таким образом, имеет место одновременно конвективный перенос и броуновская диффузия аэрозольных частиц, т. е. конвективная броуновская диффузия. Этот процесс является одной из основных причин влажного вымывания тонкодисперсной аэрозольной компоненты из атмосферы.

Эффект зацепления. Конвективный перенос мелких аэрозольных частичек в окрестности падающей крупной частицы сам по себе, без влияния других причин, практически не может привести к захвату. Это связано с тем, что нормальная составляющая скорости воздуха на поверхности этой частицы исчезает. Следовательно, безынерционная неброуновская частичка, вообще говоря, должна крупную частицу обойти таким же образом, как ее обтекает воздух. Однако обтекающие частички обладают конечными размерами. И поскольку на расстоянии порядка радиуса частички от поверхности крупной частицы нормальная составляющая скорости воздуха конечна, при конвективном переносе возможно «зацепление» мелкой частицы за крупную. Эффект зацепления играет основную роль при влажном вымывании каплями облаков и осадков мелких аэрозольных частиц в диапазонах размеров, где броуновская диффузия уже неэффективна, а влияние инерции на осаждение еще мало.

Влияние седиментации осаждающихся частичек. Если крупные частицы и частички находятся в состоянии падения, то сила тяжести всегда приводит к уменьшению осаждения, поскольку она направлена против конвективного переноса частичек воздухом, обтекающим крупную частицу. Влияние седиментации сравнимо по порядку величины с влиянием эффекта зацепления.

Инерционное осаждение. Поскольку гидродинамическое поле крупной частицы неоднородно, на движение мелких частичек в этом поле всегда оказывает влияние их инерция. Влияние инерции проявляется в уменьшении в некоторых областях течения кривизны траекторий частичек по сравнению с кривизной линий тока среды. Возможны два различных режима движения частичек под влиянием инерции в неоднородном поле среды: докритический, когда траектории частичек и линий тока среды не совпадают, но их поведение аналогично, и сверхкритический, когда влияние инерции столь велико, что траектории частиц пересекают поверхность крупных частиц. В первом случае инерция частиц либо усиливает, либо уменьшает действие других механизмов коагуляции, например, эффекта зацепления. При сверхкритическом режиме имеет место новый механизм коагуляции, действующий самостоятельно, — инерционное осаждение».

Все указанные выше процессы действуют совместно при *гравитационной коагуляции* падающих в атмосфере частиц сравнимых размеров. Гравитационная коагуляция является одним из основных микрофизических механизмов образования осадков. Кратко укажем иные важные эффекты, приводящие к коагуляции. Это прежде всего гидродинамическое взаимодействие частиц, возникающее из-за взаимного искажения гидродинамических полей: эффект «втягивания частиц в гидродинамический след», связанный с тем, что падающее в среде тело увлекает часть среды за собой; электростатическая коагуляция, обусловленная естественной электризацией частиц в атмосфере; наличие турбулентности в среде (атмосфере); температурная неоднородность среды (термофорез и термопреципитация); отталкивание испаряющихся частиц и притяжение растущих (силы Фасси) и т. д. — таков далеко неполный перечень микрофизических явлений, имеющих отношение к коагуляции.

Перейдем теперь к математическим соотношениям, моделирующим процессы коагуляции. Мы не будем останавливаться на физически строгом выводе уравнения коагуляции, т. к. он достаточно сложен (использует диаграммную технику и опирается на методы неравновесной статистической механики) и поэтому ограничимся ссылками на соответствующую литературу. Будем рассматривать физическую систему, состоящую из достаточно большого числа хаотически движущихся частиц, каждой из которых можно приписать неотрицательную скалярную величину, скажем, массу или объем. В определенных предположениях, считая физическую систему пространственно однородной и неограниченной, учитывая только парные взаимодействия, записывая соотношение баланса взаимодействующих частиц, приходим к уравнению Смолуховского (*уравнение пространственно однородной коагуляции*) [1–6]

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\int\limits_0^x \Phi(x-y,y)f(x-y,t)f(y,t)\,dy\ -$$
$$-f(x,t)\int\limits_0^\infty \Phi(x,y)f(y,t)\,dy, \quad 0 \le x < \infty,\ t > 0. \tag{0.1}$$

Считается, что указанное уравнение моделирует процессы коагуляции, протекающие, например, в теплом кучевом облаке, в коллоидных растворах, в космических пылевых облаках [2, 3, 7–16, 78]. Функция распределения f определяется так, что $f(x,t)\,dx$ описывает среднюю концентрацию частиц физической системы, массы которых в момент времени t лежат в интервале $(x,\ x+dx)$ (см. §6 гл. 5). По своему физическому содержанию функция $f(x,t)$ должна быть неотрицательной. Ядро $\Phi(x, y)$ уравнения (0.1) считается известной функцией слияния частиц с массами x и y, а ее численное значение пропорционально частоте слияний таких частиц в единице объема системы, т. е. величине, обратной среднему времени жизни частиц с указанными массами. Конкретный вид ядра Φ получается на основании анализа микрофизических явлений, обуславливающих взаимодействие частиц моделируемой физической системы. Отметим, что из физики явления коагуляции вытекает симметричность и неотрицательность ядра:

$$\Phi(x, y) = \Phi(y, x) \geq 0.$$

Для изучения реальных атмосферных процессов коагуляции большой практический интерес представляет рассмотрение решений уравнения (0.1) со следующими ядрами:

1) $x + y$, 2) $|x - y|$,

3) $(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})^3$, 4) $|x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}|(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})^2$,

5) $\left(1 + \dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{(y+a)^{\frac{1}{3}}} + \dfrac{y^{\frac{1}{3}}}{(x+a)^{\frac{1}{3}}}\right)^3$, 6) $\left[(x^{-\frac{1}{3}} + y^{-\frac{1}{3}})(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})\right]^3$,

которые соответствуют различным схемам взаимодействия капель в облаке (параметр a в ядре 5 предполагается положительным) [8].

Первый член в правой части уравнения коагуляции описывает рост числа частиц массы x за счет слияний частиц с массами $(x - y)$ и y, а второй член — убыль частиц массы x из-за слияний этих частиц с частицами массы y. Среднее число частиц, отнесенное к объему коагулирующей системы (при этом предполагается предельный переход, когда объем системы стремится к бесконечности), в момент времени t дается интегралом

$$n(t) = \int_0^\infty f(x, t)\, dx,$$

а средняя масса частиц, отнесенная к объему системы (эту величину в физике облаков принято называть водностью), получается интегрированием функции распределения f с весом x:

$$m(t) = \int_0^\infty x f(x, t)\, dx.$$

В гл. 1 эти величины обозначены как $n(t) = \sigma_0(t)$, $m(t) = \sigma_1(t)$, — первые два коэффициента тейлоровского разложения по степеням λ производящей функции $\sigma(\lambda, t)$ последовательности интегральных моментов

$$\sigma_i(t) = \int\limits_0^\infty x^i f(x,t)\,dx, \quad i = 1,\, 2, \ldots,$$

для функции распределения частиц по массам $f(x,t)$.

При рассмотрении эволюции конкретной коагулирующей системы к уравнению (0.1) следует добавить начальную функцию распределения частиц

$$f(x,0) = f_0(x) \geq 0, \quad 0 \leq x < \infty, \tag{0.2}$$

и, таким образом, перейти к изучению задачи Коши для уравнения коагуляции (0.1), (0.2).

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае упоминавшейся выше упрощенной модели распространения СПИДа (составная коагулирующая система) система уравнений Смолуховского для функций распределения $f_1(x,t)$ классов здоровых людей и $f_2(x,t)$ классов больных соответственно приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial f_1(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\int\limits_0^x \Phi(x-y,y) f_1(x-y,t) f_1(y,t)\,dy\; -$$

$$-f_1(x,t)\int\limits_0^\infty \Phi(x,y) f_1(y,t)\,dy - f_1(x,t)\int\limits_0^\infty \Phi(x,y) f_2(y,t)\,dy,$$

$$\frac{\partial f_2(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\int\limits_0^x \Phi(x-y,y) f_2(x-y,t) f_2(y,t)\,dy\; +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^x \Phi(x-y,y) f_1(x-y,t) f_2(y,t)\,dy\; - f_2(x,t)\int\limits_0^\infty \Phi(x,y) f_1(y,t)\,dy -$$

$$- f_2(x,t)\int\limits_0^\infty \Phi(x,y) f_2(y,t)\,dy, \quad 0 \leq x < \infty,\; t > 0,$$

где ядро коагуляции задано соотношением

$$\Phi(x,y) = xy, \quad x,\, y \geq 0.$$

Сделаем несколько замечаний относительно начальной функции $f(x,0) = f_0(x)$. Согласно монографии [1], с физической точки зрения считается ясным, что в атмосфере не могут устойчиво существовать частицы выше некоторого размера. Капли, достигая некоторой величины, разбрызгиваются, но основным фактором является седиментация, приводящая к тому, что как твердые, так и жидкие частицы по мере укрупнения быстро выпадают на землю. Поэтому класс начальных распределений, которые, следуя физике явления, разумно использовать при решении задачи Коши для уравнения коагуляции, удовлетворяет условию экспоненциального спада в области больших значений масс коагулирующих частиц, когда значения масс $x \to +\infty$.

Следует указать наиболее существенные физические ограничения, несколько отдаляющие рассматриваемую модель процесса коагуляции от реальных процессов:

а) не учтены процессы конденсации и пространственная неоднородность среды;

б) не учитывается выпадение частиц в виде осадков;

в) система предполагается неограниченной, в то время как для крупных частиц может иметь значение конечность размеров системы.

Однако изучение этой модели важно и полезно прежде всего из-за того, что основные трудности, возникающие при попытке учета многочисленных явлений, сопутствующих коагуляции (дробление частиц, конденсация и т. п.), сосредоточены прежде всего в математической природе уравнения Смолуховского. Следует подчеркнуть, что процессы коагуляции являются одним из основных факторов, ответственных за эволюцию спектра частиц. Настоящую модель следует рассматривать как часть большой общей задачи описания эволюции коагулирующих систем, которая весьма далека от своего завершения и связана непосредственно с нуждами человечества, например, созданием аэрозольных облаков с заданными характеристиками в засушливых сельскохозяйственных районах, быстрым осаждением облаков и туманов в окрестности аэропортов, управлением процессом полимеризации в химических реакторах, прогнозом ливней и т. п.

Уравнение коагуляции используется давно, начиная с классической работы Смолуховского [11], рассмотревшего его в дискретной форме по x, и Мюллера [13], записавшего это уравнение в непрерывных аргументах. Вопросам его обоснования, а также корректности задачи Коши (0.1), (0.2) занимаются последние пятьдесят лет.

Математические задачи для уравнения Смолуховского аналогичны по своей сложности задачам для уравнения Больцмана кинетической теории газов, т. к. структура этих уравнений и способ их физического вывода очень близки. Поэтому зачастую проблемы кинетической теории газов и кинетической теории коагуляции являются тесно связанными и прогресс в одной области исследований порождает аналогичные достижения в смежной области.

Известно лишь несколько явных решений уравнения коагуляции, полученных при помощи преобразования Лапласа для специальных ядер и начальных функций (см. [7–10, 14, 15, 17–21]):

$$\Phi(x, y) \equiv 1, \quad \Phi(x, y) = x + y,$$

$$f_0(x) = \exp(-x);$$

сравнительно недавно построены решения в случае ядра

$$\Phi(x, y) = xy$$

при начальных данных

$$f_0(x) = \alpha x^{-1} \exp(-\alpha x), \quad \alpha > 0,$$

$$f_0(x) = a \exp(-bx), \quad a \geq 0, \ b > 0,$$

см. [79, 90]. В частности, для ядра $\Phi = 1$ и начальной функции $f_0 = \exp(-x)$ имеет место формула, получающаяся применением преобразования Лапласа в уравнении (0.1) по переменной $x \geq 0$,

$$f(x, t) = \frac{1}{(1 + \frac{1}{2}t)^2} \exp\left(-\frac{x}{1 + \frac{t}{2}}\right), \qquad x \geq 0, \ t \geq 0.$$

Впервые вопрос о корректности задачи Коши (0.1), (0.2) исследовался Мелзаком [24–27], который рассмотрел уравнение (0.1) с ограниченными непрерывными ядрами

$$0 \leq \Phi(x, y) = \Phi(x, y) \leq \sup_{0 \leq x, y < \infty} \Phi(x, y) < \infty,$$

$$0 \leq x, y < \infty,$$

с непрерывной начальной функцией f_0, удовлетворяющей следующим условиям:

$$0 \le f_0(x) \le \sup_{0 \le x < \infty} f_0(x) < \infty, \quad 0 \le x < \infty,$$

$$\int_0^\infty f_0(x)\,dx = n_0 < \infty.$$

При этих допущениях доказывается существование единственного ограниченного, интегрируемого по x, аналитического по t при $t \ge 0$ решения задачи Коши (0.1), (0.2). В связи с таким сильным ограничением на рост ядра Φ в монографии [1] подчеркивается: «поскольку в физически правдоподобных схемах, как правило, приходится встречаться с неограниченной функцией $\Phi(x, y)$, вопрос о существовании и свойствах решения в этом случае имеет важное практическое значение».

Абстрактное уравнение в банаховом пространстве, включающее в себя как частный случай уравнение (0.1) с ограниченными ядрами, рассматривалось Моргенштерном [28] в связи с уравнением Больцмана для псевдомаксвелловских молекул.

В дальнейшем предпринимались попытки распространить утверждение о разрешимости задачи Коши для уравнения коагуляции на неограниченное ядро $\Phi(x, y) = xy$, см. [22]. В указанной работе построено лишь локальное решение задачи Коши (0.1), (0.2), что существенно связано с ростом этого ядра при $x, y \to \infty$ быстрее линейной функции. Глобальное существование, единственность и неотрицательность решения были доказаны значительно позднее на основе исследования сопутствующего квазилинейного скалярного закона сохранения в [79, 103].

В монографии [1] подчеркнуто, что «...вопросы, связанные с существованием и единственностью решения, ограничениями, накладываемыми на вид функции $\Phi(x, y)$, свойствами решения и возможностью их отыскания, до сих пор не решены в требуемом практикой объеме».

Предлагаемая книга является попыткой заполнить некоторые пробелы в теории задачи Коши для уравнения Смолуховского с неограниченными ядрами, включая чрезвычайно сложные и интересные проблемы для пространственно неоднородных процессов коагуляции, а также для стационарных задач с источником частиц.

Содержание естественным образом разбивается на две части. Первая часть, состоящая из гл. 1–5, посвящена пространственно однородным задачам для уравнения (0.1), а вторая, состоящая из гл. 6–9, — более сложному и интересному пространственно неоднородному случаю, модели которого определены и описаны ниже.

Ядра, для которых проведено исследование решений задачи (0.1), (0.2), в гл. 1–3 удовлетворяют следующим условиям (A) (см. [49, 88]):

A_1) $0 \le \Phi(x,y) = \Phi(y,x) \le c\,(1+x+y), \quad c>0, \quad 0 \le x,y < \infty;$

A_2) функция $\Phi(x,y)$ непрерывная при $0 \le x,y < \infty$.

Этот класс содержит в себе ядра, представляющие интерес для физики атмосферы, например, ядра 1)–5), перечисленные выше. Изучается также вопрос о разрешимости задачи Коши (0.1), (0.2) в случае ядер, имеющих особенности на осях координат $x = 0$, $y = 0$, причем предполагается, что вне некоторой окрестности осей координат выполнены условия (A). Необходимость рассмотрения ядер с особенностями на осях координат обусловлена, прежде всего, тем, что особенности такого рода имеются у ядра броуновской коагуляции (ядро 6).

Кратко опишем основные результаты и методы, применявшиеся в книге.

В гл. 1 подробно изучается задача Коши для уравнения коагуляции с ограниченными ядрами. В отличие от работ Мелзака [24–27] решение рассматривается в иных классах функций, удовлетворяющих более сильным условиям суммируемости по x на $[0,\infty)$, причем отброшено условие ограниченности начальной функции f_0, что позволяет построить более полную теорию задачи Коши для уравнения Смолуховского с ядрами из класса (A). Схема построения локального решения задачи Коши (0.1), (0.2) в виде ряда по степеням t, идейно восходящая еще к работам Коши и Ковалевской по аналитической теории дифференциальных уравнений [37], и метод продолжения решения вдоль неотрицательной части оси времени t принадлежат Мелзаку [24].

На основании результатов, полученных в гл. 1, во второй главе строится нелокальная теория задачи Коши для уравнения коагуляции в случае ядер, удовлетворяющих условиям (A). Доказательство разрешимости задачи Коши (0.1), (0.2) примыкает по своим методам к работе А. Я. Повзнера [29], посвященной специальной регуляризации пространственно неоднородного уравнения Больцмана (регуляризация состоит в нефизическом сглаживании оператора столкновений Больцмана до липшиц-непрерывного за счет введения в него дополнительных операций интегрирования по пространственным переменным, что означает пространственную нелокальность столкновений частиц, см. [52]). Однако в отличие от указанной работы рассмотрение уравнения (0.1) проводится в иных функциональных пространствах с учетом специфики уравнения Смолуховского, которое по сравнению с уравнением Больцмана допускает значительно меньший набор сумматорных инвариантов, — если в случае уравнения Больцмана таких инвариантов пять, см. [30, 31, 52], то уравнение коагуляции имеет только один такой инвариант, соответствующий сохранению первого момента решения,

$$\sigma_1(t) = \int_0^\infty x f(x,t)\, dx = \text{const} .$$

Следует подчеркнуть, что метод построения решения уравнения Больцмана в [29] существенно опирается на закон сохранения энергии, который по сути своей означает сохранение второго момента функции распределения

$$\sigma_2(t) = \int_0^\infty x^2 f(x,t)\, dx.$$

Аналогичного соотношения сохранения для уравнения коагуляции не имеется. Указанное соотношение сохранения существенно используется и для доказательства единственности решения упомянутого выше сглаженного нефизического уравнения Больцмана.

Вкратце опишем схему построения решения уравнения коагуляции с неограниченным ядром. Ядро Φ, удовлетворяющее условиям (A), аппроксимируется последовательностью ограниченных ядер Φ_n, $n \geq 1$, которые равномерно сходятся к Φ на каждом компакте в квадранте $0 \leq x, y < \infty$. Рассматривается соответствующая последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ решений задачи Коши для уравнения Смолуховского (0.1) с ядрами Φ_n. Используя оценки, получаемые для этой последовательности в различных нормах в случае, когда начальная функция имеет ограниченный второй момент

$$\sigma_2(0) = \int_0^\infty x^2 f(x,0)\, dx < \infty,$$

строим искомое решение задачи Коши с неограниченным ядром. Существование и единственность решения задачи (0.1), (0.2) с неограниченным ядром Φ из класса (A) доказывается при более жестких условиях, накладываемых на суммируемость начальной функции — требуется, чтобы при некотором $\lambda > 0$ выполнялось условие

$$\int_0^\infty \exp(\lambda x) f(x,0)\, dx < \infty, \quad f \geq 0.$$

Необходимо подчеркнуть, что методы построения решения в фундаментальных работах Мелзака [24, 28], указанных выше, в случае ядер из класса (А) не применимы, т. к. значения правой части уравнения (0.1) в этом случае принадлежат, вообще говоря, более широкому функциональному пространству, нежели пространство ее определения, а именно, факт принадлежности значений правой части исходному пространству существенно использовался при построении решения уравнения коагуляции с ограниченными ядрами.

Отдельный параграф главы посвящен доказательству утверждения о непрерывной зависимости решения задачи Коши (0.1), (0.2) относительно возмущений начальной функции f_0 и ядра Φ; тем самым завершается доказательство корректности задачи Коши для уравнения коагуляции с неограниченными ядрами, имеющими физическое содержание. Важным практическим следствием теорем о корректности задачи Коши (0.1), (0.2) является то, что решение задачи с неограниченным ядром на каждом конечном отрезке изменения t и x можно сколь угодно точно приблизить решением задачи с финитным ядром, т. е. ядром, имеющим компактный носитель, что существенно для применения вычислительной техники при численном моделировании процессов коагуляции.

В третьей главе, основанной на работах [50, 88], проводится изучение свойств решения задачи Коши (0.1), (0.2). Укажем наиболее существенные из них. Сначала рассматривается вопрос о расположении участков нулей и участков положительности решения. Доказано, что множества положительности и нулей решения мгновенно устанавливаются при $t > 0$ и не изменяются в течение всего процесса коагуляции (теорема 3.6). Отмечено, что в случае физически реальных ядер взаимодействия частиц коагуляционный спектр мгновенно размывается при $t > 0$, т. е. появляется положительная вероятность обнаружить в спектре сколь угодно крупные частицы, даже если при $t = 0$ начальная функция распределения была финитной, см. теоремы 3.1, 3.2, 3.4. Указанное явление совершенно аналогично размыванию спектров частиц в кинетической теории газов, описываемых уравнением Больцмана [31, с. 52]. Одним из важнейших следствий рассматриваемых свойств знакоопределенности решений в окрестности начала координат $x = 0$ является доказательство корректности задачи Коши (0.1), (0.2) в случае броуновской коагуляции (ядро 6), которое включается в более общий класс ядер с особенностями на осях координат, упоминавшийся выше. Далее выделяется подкласс ядер в классе (A), для которого решения задачи Коши (0.1), (0.2) удовлетворяют условиям «принципа максимума», являющегося одним из основных средств при изучении асимптотических свойств решений этой задачи как при $x \to +\infty$, так и при $t \to +\infty$. Важно подчеркнуть, что ядра, встречающиеся в реальных процессах коагуляции, попадают в указанный класс. С помощью принципа максимума получены оценки сверху решения уравнения коагуляции при $0 \le x < \infty$, равномерные относительно изменения времени $0 \le t < \infty$. Эти оценки позволяют грубо судить о характере спада спектра к нулю при больших временах для больших частиц. Указана зависимость получаемых оценок от строения ядра на основе примеров, интересных для физики атмосферы. Затем изучается характер поведения решения при $t \to +\infty$. В случае физически реальных ядер установлено, что плотность числа частиц в коагулирующей системе с ростом времени стабилизируется к нулю, т. е. процесс развивается при $t \to +\infty$ в направлении укрупнения частиц до полного их слияния. Таким образом, в отличие от больцмановского газа, функция распределения которого эволюционирует к равновесному максвелловскому распределению [31], физически реальные пространственно однородные коагулирующие системы обладают только тривиальным равновесным распределением $f = 0$, к которому стабилизируется каждое решение рассматриваемого уравнения коагуляции с соответсвующими ядрами. На основании принципа максимума устанавливается убывание к нулю функций распределения для реальных систем, причем отмечается его экспоненциальность при $t \to +\infty$. Сделан вывод о том, что характер стабилизации решения к нулю при $t \to +\infty$, главным образом, определяется водностью системы, т. е. средней массой частиц, заключенной в единице объема коагулирующей системы $m_0 = \int\limits_0^\infty x f_0(x)\,dx$

$$f(x,t) \sim \exp(-m_0 t), \quad t \to +\infty.$$

На основании полученных свойств выделяются «типичные» свойства решений задачи Коши (0.1), (0.2), т. е. свойства, которыми обладают решения при f_0 и Φ, лежащих в некотором бэровском подмножестве входных данных задачи в соответствующей топологии.

В связи с изучением асимптотических свойств решений уравнения коагуляции особый интерес представляет вопрос о существовании автомодельных решений этого уравнения, который ставился различными авторами [32–34]. В работе Баканова и Мартынова [34] было получено интегродифференциальное уравнение для нахождения начальной функции, выводящей решения на автомодельный режим в предположении однородности ядра Φ относительно аргументов x, y. В гл. 3 устанавливается, что условия однородности ядра не достаточно для наличия автомодельного решения уравнения (0.1). На примере ядра $\Phi = 1$, обладающего порядком однородности нуль, при котором уравнение коагуляции имеет автомодельное решение

$$f(x,t) = \frac{1}{(1+\frac{1}{2}t)^2} \exp\left(-\frac{x}{1+\frac{t}{2}}\right), \qquad x \geq 0,\ t \geq 0,$$

показано, что свойство существования нетривиального автомодельного решения не является устойчивым: при сколь угодно малом возмущении ядра $\Phi = 1$ в классе однородных ядер (с тем же показателем однородности) это решение может исчезать. Описан один класс однородных ядер, для которых уравнение, предложенное Бакановым и Мартыновым, имеет только тривиальное решение $f = 0$ в классе неотрицательных функций.

В гл. 4 рассматривается общее эволюционное уравнение в банаховом пространстве, к которому в некоторых конкретных случаях приводят задачи пространственно однородной физической кинетики

$$\frac{d}{dt}f = S(f), \qquad t > 0,$$

где функция $f(.,t)$, как правило, является вероятностной характеристикой физической системы, например, плотностью функции распределения частиц системы по скоростям для уравнения Больцмана или плотностью функции распределения частиц по массам или объемам для уравнения коагуляции. В кинетических задачах такое уравнение является выражением баланса, выполняющегося при взаимодействии элементов физической системы, например, это может быть соотношение, связанное с сохранением среднего числа молекул для больцмановского газа. На основании таких важных для физической кинетики примеров как уравнение Больцмана и уравнение Смолуховского выделяется естественный класс эволюционных уравнений рассматриваемого вида, выражающих свойство сохранения или невозрастания (диссипации) некоторой интегральной характеристики функции $f(.,t)$, определяющей состояния физической системы [83, 102, 103]. То, что уравнение определяет закон сохранения, означает выполнение следующих соотношений для суммируемых по мере μ функций, на которых определено отображение S (оператор столкновений частиц) со значениями в том же функциональном пространстве:

$$\int\limits_{\Omega} S(f)(\omega)\,\mu(d\omega) = 0,$$

т. е. мера μ является сумматорным инвариантом [52] эволюционного уравнения. В этом случае на решениях уравнения выполняется тождество $\int\limits_{\Omega} f(\omega, t)\,d\mu(\omega) \equiv \mathrm{const}$, которое легло в основу определения соотношения сохранения. Выделяется специальный класс операторов S, названный операторами больцмановского типа, и при некоторых дополнительных ограничениях на оператор S, обладающий свойством μ-сохранения или диссипации, доказывается теорема существования и единственности неотрицательного решения задачи Коши для вышеуказанного эволюционного уравнения при всех временах $t \geq 0$. Предлагается итерационный метод построения решения этой задачи, являющийся аналогом итерационного процесса, примененного Т. Карлеманом [31] для решения уравнения Больцмана, но в отличие от последнего наш метод обладает нелокальной сходимостью, причем представляется важным подчеркнуть, что на каждой итерации выполняются те же соотношения сохранения, которые имеют место для исходной задачи. В рассматриваемый класс задач включается уравнение Больцмана для псевдомаксвелловских молекул, рассмотренное в [28], и уравнение Смолуховского (0.1) с ограниченными ядрами Φ. В случае уравнения коагуляции устанавливается сходимость итерационного процесса в метрике пространства непрерывных функций C, причем значительная простота формул для итераций позволяет использовать их для практических вычислений.

Гл. 5, основанная на работах [79, 90, 103], посвящена принципиально новому явлению — переходу соотношения сохранения в соотношение диссипации, которое возникает на решениях уравнения Смолуховского с быстро растущими ядрами. В частности, это явление имеет место при ядре взаимодействия частиц

$$\Phi(x, y) = xy, \quad x,\ y \geq 0.$$

Доказывается теорема существования и единственности глобального решения задачи Коши, выведены формулы для интегральных моментов функции распределения частиц. Аналогичные явления устанавливаются для стационарной задачи с источником частиц

$$S(f) + q = 0,$$

где $q \geq 0$ — заданный источник частиц.

В дополнение к результатам для пространственно однородного случая, вошедшим в книгу, представляют интерес ряд публикаций, которые, однако, требуют существенной дальнейшей разработки. Это относится, прежде всего, к вопросам математического обоснования уравнения Смолуховского, связи решений задачи Коши (0.1), (0.2) и реальных процессов коагуляции, включая точный физический смысл решения уравнения (0.1). На этом пути в [87, 93] уже получен значительный прогресс. К упомянутой фундаментальной проблеме примыкают задачи обоснования прямого моделирования процессов коагуляции методом Монте–Карло [93], а также исследования, посвященные возможности возникновения периодических режимов в коагулирующих системах под действием стационарного источника [91], вопросы устойчивости стационарных решений уравнения Смолуховского при наличии в его правой части стационарного неотрицательного источника частиц [105], выявление нетривиальных стационарных решений уравнения (0.1) без источника частиц для ядер $\Phi(x, y)$, имеющих сингулярности [97]. Уравнение Смолуховского (0.1) записывается на основе рассуждений о столкновениях, аналогичных получению уравнения Больцмана кинетической теории газов [31, 52]. В то же время существуют модели, основанные на идеях А. А. Власова[1] для теории плазмы [112], приводящие к иным формам кинетических уравнений. Поэтому несомненый интерес представляет исследование моделей пространственно однородной коагуляции в рамках власовского подхода в модели непрерывного роста частиц [92, 100].

В §6, завершающем гл. 5, приведены результаты прямого численного моделирования процессов пространственно однородной коагуляции методом Монте–Карло [93], в частности, обсуждается физический смысл функций в уравнении Смолуховского.

Содержание гл. 6–9, главным образом, направлено на выявление и анализ основных математических структур, связанных с пространственно неоднородными задачами для уравнений Смолуховского и Больцмана. Предложены принципы выделения классов корректности и обоснования приближенных методов.

[1] Власов Анатолий Александрович (1908–1975) — выдающийся советский физик-теоретик. Основные труды посвящены теории плазмы. Им предложено кинетическое уравнение для описания плазмы, названное его именем. Лауреат Ленинской премии 1970 г.

Значительное внимание уделено теории решений задачи Коши для уравнений больцмановского типа и обобщенным решениям пространственно неоднородных уравнений Смолуховского.

Эволюция физических систем, состоящих из статистически большого количества сталкивающихся в процессе движения (в некотором смысле локально) элементов, моделируется *пространственно неоднородным уравнением больцмановского типа*

$$\frac{\partial u^{(\omega)}(x,t)}{\partial t} + \operatorname{div}_x(v^{(\omega)}u^{(\omega)}(x,t)) = S^{(\omega)}(u^{(\cdot)}(x,t)), \tag{0.3}$$

$$\omega \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}_1^+, \quad x \in \mathbb{R}_n,$$

где подлежащая отысканию функция u описывает состояния физической системы в каждый момент времени $t \geq 0$ в точках с пространственными координатами $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а множество параметров $\{\omega\} = \Omega$ описывает возможные состояния элементов физической системы. Величины $v^{(\omega)} \in \mathbb{R}_n$ определяют скорость движения элементов физической системы между столкновениями, т. е. *скорость свободного переноса.* Ограничения на оператор столкновений S, в основном, связаны со свойствами постоянства либо невозрастания нормы решения в пространстве L_1, а также неотрицательностью решения u, которое по своему физическому содержанию характеризует распределение числа частиц в системе среди возможных состояний.

Следует выделить два важных с точки зрения приложений оператора S, идейно восходящих к Дж. К. Максвеллу[1] [76], определившему в 1859 г. основное понятие кинетической теории — функцию распределения f, и Л. Больцману [77], записавшему в 1872 г. первое кинетическое уравнение вида (0.3), которое описывает эволюцию функции распределения молекул газа по скоростям в случае близости системы к состоянию термодинамического равновесия. Итак, первый пример — это уравнение Больцмана кинетической теории газов. Второй пример исторически связан с теорией коагуляции. В 1916 г. выдающийся польский физик М. Смолуховский, исследуя эволюцию слипающихся (коагулирующих) частиц в электролитах,

[1] Джеймс Клерк Максвелл (J. C. Maxwell) (1831–1879) — английский физик, создатель классической электродинамики, один из основоположников статистической физики, организатор и первый директор (с 1871) Кавендишевской лаборатории; предсказал существование электромагнитных волн, установил статистическое распределение, названное его именем [119].

записал кинетическое уравнение коагуляции для функции распределения частиц по массам [11, 16, 78]. Для уравнения Больцмана кинетической теории газов оператор S в уравнении (0.3) задается соотношением

$$S^{(\omega)}(u^{(\cdot)}) = \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Sigma_2} \Phi(\omega,\xi,q)[u^{(\omega')}u^{(\xi')} - u^{(\omega)}u^{(\xi)}]\,d\xi dq, \tag{0.4}$$

$$\omega \in \Omega = \mathbb{R}_3,$$

$$\omega' = \omega - q(\omega-\xi,q)_{\mathbb{R}_3}, \quad \xi' = \xi + q(\omega-\xi,q)_{\mathbb{R}_3},$$

$$\Sigma_2 = \{q \in \mathbb{R}_3 : (q,q)_{\mathbb{R}_3} = 1\}.$$

Операция $(.,.)_{\mathbb{R}_3}$ означает здесь обычное скалярное произведение в $\mathbb{R}_3$. Интенсивность (ядро) столкновений частиц Φ считается известной функцией.

Для моделей вида (0.3) кинетической теории коагуляции (Смолуховского), где фазовое пространство $\Omega = \mathbb{R}_1^+$ — неотрицательные действительные числа (массы частиц), а оператор столкновений S определен соотношениями

$$S^{(\omega)}(u^{(\cdot)}) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\omega} \Phi(\omega-\omega',\omega')u^{(\omega-\omega')}u^{(\omega')}\,d\omega' -$$

$$-u^{(\omega)}\int\limits_0^{\infty} \Phi(\omega,\omega')u^{(\omega')}\,d\omega', \quad \omega \in \mathbb{R}_1^+. \tag{0.5}$$

Заданная интенсивность столкновений $\Phi(\omega,\omega') = \Phi(\omega',\omega) \geq 0$ при ω, $\omega' \in \mathbb{R}_1^+$. Аналогично выглядит оператор столкновений Смолуховского в теории коагуляции частиц с дискретными массами

$$S^{(\omega)}(u^{(\cdot)}) = \frac{1}{2}\sum_{\omega'=1}^{\omega-1} \Phi(\omega-\omega',\omega')u^{(\omega-\omega')}u^{(\omega')} -$$

$$-u^{(\omega)}\sum_{\omega'=1}^{\infty} \Phi(\omega,\omega')u^{(\omega')}, \quad \omega \in \Omega = \mathbb{N}. \tag{0.6}$$

Наличие в физической системе источников частиц, действующих с неотрицательной интенсивностью q, соответствует замене в кинетическом уравнении (0.3) оператора S на $S + q$.

Несмотря на то, что первые кинетические уравнения записаны для специальных систем, область их приложений оказалась весьма широкой. Аналоги уравнений Больцмана и Смолуховского используются при моделировании процессов переноса излучения в веществе, нейтронов в ядерном реакторе, при исследовании роста капель в облаках, дефектов в материалах реакторов на быстрых нейтронах, газовых пор в металлах и т. д. [52, 53].

Задача Коши для уравнения (0.3) с операторами столкновений (0.4)–(0.6) подробно исследована с точки зрения корректности в целом в классах начальных данных, которые не зависят от пространственных координат x. Случай пространственно неоднородных задач весьма трудный и число содержательных результатов здесь относительно невелико. Основная трудность заключается в отсутствии непрерывности операторов столкновений вида (0.4)–(0.6) в нормах, связанных с соотношениями сохранения или диссипации, специфических для этих задач.

Такая же проблема возникает при рассмотрении уравнений (0.3), когда интенсивность столкновений частиц Φ обладает достаточно большим порядком роста на бесконечности даже при условии пространственной однородности задачи Коши (см. гл. 5, а также [79]). Аналогичные трудности связаны с пространственно однородными задачами при наличии источников частиц. В частности, в этом случае имеет место пример, когда задача Коши для уравнения Смолуховского не обладает классическим или обобщенным решением (даже локальным!), но имеет глобальное функциональное решение [93, 103].

Следующие простейшие примеры для уравнений больцмановского типа служат тому иллюстрацией.

ПРИМЕРЫ. 0.1. Положим состояния частиц описываются их массой $0 \le \omega < \infty$, частицы при парных столкновениях «гибнут» с интенсивностью $\Phi = 1$, но в то же время в системе действует постоянный источник частиц с интенсивностью $q = 1$. Для концентрации частиц $u^{(\omega)}(t)$ в системе имеем следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial u^{(\omega)}(t)}{\partial t} = -u^{(\omega)}(t) \int\limits_{\mathbb{R}^+} u^{(\omega')}(t)\, d\omega' + q^{(\omega)}, \quad t > 0, \quad \omega \in \mathbb{R}^+,$$

$$u^{(\omega)}(0) = u_0.$$

Считаем, что в начальный момент времени частицы в системе отсутствуют, т. е. $u_0 = 0$.

Покажем, что данная задача Коши не имеет классических и обобщенных решений. Обозначим

$$n(t) = \int\limits_{\mathbb{R}+} u^{(\omega')}(t)\, d\omega'.$$

Если предположить существование решения, то справедливо тождество

$$u^{(\omega)}(t) = \int\limits_0^t \exp\left(-\int\limits_\tau^t n(s)\, ds\right) d\tau > 0, \quad t > 0.$$

Правая часть полученного тождества не зависит от ω и, следовательно, величина $n(t) = +\infty$ при любом $t > 0$. Но тогда $u(t) \equiv 0$ при $t \geq 0$. Очевидно, полученная функция не является решением рассматриваемой задачи Коши. Но тем не менее, это функциональное решение, которое является пределом аппроксимаций, основанных на замене бесконечных пределов интегрирования в интегральном члене на конечные с последующим устремлением их в бесконечность, что естественно с физической точки зрения при моделировании рассматриваемой системы. Такой же результат получается для приближений, полученных при решении неявной разностной схемы.

0.2. Задача Коши для уравнения Смолуховского с постоянным источником $q = 1$, постоянной интенсивностью слияния частиц $\Phi = 1$ и нулевыми начальными условиями полностью воспроизводит результат предыдущего примера, что можно установить аналогичными рассуждениями.

(Подход к построению классов корректности для подобных случаев, основанный на применении теории функциональных решений для систем законов сохранения, приводится в гл. 8).

Содержание гл. 6 (см. [69, 83, 99, 102, 103]) посвящено исследованию обобщенных решений уравнений больцмановского типа на основе нелинейных операторных уравнений типа Вольтерра в предположении малости уклонения начальных данных от нуля — «вакуума». Доказывается глобальная сходимость итерационного метода к непрерывному единственному решению задачи. Рассмотрены приложения для уравнения Больцмана кинетической теории газов.

В гл. 7 на базе [67, 68, 69, 84, 103] подробно изложена теория обобщенных решений кинетического уравнения Смолуховского для пространственно неоднородных коагулирующих систем. В частности, разрешимость задачи в случае частиц с дискретными массами установлена на основе метода компенсированной компактности Л. Тартара [70].

Важно подчеркнуть, что содержательность теории обобщенных решений уравнений физической кинетики обусловлена возможностью появления с течением времени недифференцируемых особенностей решения, возникающих при сколь угодно гладких суммируемых начальных данных задачи Коши [68]. Пример такого рода особенностей приведен для уравнения Смолуховского в случае дискретных масс. Главной причиной формирования особенности служит отсутствие непрерывности оператора столкновений S относительно нормы, определяемой соотношениями сохранения в данной задаче.

Важные практические приложения теории функциональных решений [74, 99, 103, 104] связаны с доказательством в гл. 8 теоремы существования глобального неотрицательного функционального решения задачи Коши для обобщенного уравнения Больцмана (0.3) при условии, что скорость свободного переноса v является локально ограниченной борелевой функцией, а начальные данные u_0 — неотрицательные суммируемые функции по лебеговой мере на $\mathbb{R}_n$. Доказательство основывается на исследовании аппроксимаций, задаваемых разностной схемой, для которой устанавливается ряд равномерных оценок относительно шагов сетки при некотором условии Куранта. Рассмотрены примеры для реальных физических систем с операторами (0.4)–(0.6). Для выделения классов корректности в классах функциональных решений в случае пространственно неоднородных уравнений Смолуховского и Больцмана достаточно потребовать локальную ограниченность ядра взаимодействия частиц Φ (его симметричность и неотрицательность обязательны) и скорости свободного переноса частиц v.

Гл. 9 (дополнение 1) посвящена изложению теории функциональных решений задачи Коши для систем законов сохранения, в которую включаются пространственно неоднородные постановки для уравнений Смолуховского и Больцмана, рассматривавшиеся в гл. 8 (см. также [74, 99, 103, 104]).

Рассматривается общий класс *систем законов сохранения*, включающий в себя математические модели физических систем, состоящих из статистически большого количества частиц (разреженные газы, дисперсные системы, плазма), а также модели механики сплошной среды, основывающиеся на фундаментальных соотношениях баланса

$$\frac{\partial u^{(\omega)}(x,t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j^{(\omega)}(u,x,t)}{\partial x_j} = S^{(\omega)}(u,x,t) \tag{0.7}$$

с независимыми переменными

$$x \in \mathbb{R}_n, \quad t > 0, \quad \omega \in \Omega;$$

$u = \{u^{(\omega)}\}$ — неизвестная вектор-функция; вид потоков f_j и источника S считаются заданными характером моделируемого физического процесса, $x \in \mathbb{R}_n$ — пространственные координаты; t — время, Ω — множество параметров, нумерующих уравнения, причем его элементы — это возможные состояния отдельных частиц.

Приложения систем вида (0.7) широко известны, в частности, в связи с уравнениями газодинамики и гидродинамики, кинетическими уравнениями Больцмана и Смолуховского, теорией плазмы и др. [51–53].

Гл. 9, в основном, посвящена проблеме разрешимости в целом для задачи Коши и эффективному обоснованию сходимости приближенных методов в случае нелинейных систем (0.7), отражающих соотношения сохранения в моделях физических процессов.

Наиболее полные результаты для задачи Коши в случае нелинейных уравнений (0.7) были получены при $\operatorname{card}\Omega = 1$ в работах А. Н. Тихонова и А. А. Самарского [54], Э. Хопфа [55], О. А. Олейник [56, 57], С. Н. Кружкова [58, 59, 122], а также для некоторых классов систем (0.7) при $\operatorname{card}\Omega < \aleph_0$ с жесткими ограничениями на исходные данные задачи Коши (Б. Л. Рождественский [60], Дж. Глимм [61], Н. С. Бахвалов [62], Н. Н. Кузнецов и В. А. Тупчиев [63] и др. [51]).

Для полулинейных уравнений (0.7), когда $\operatorname{card}\Omega \le \aleph_1$, наиболее интенсивные исследования традиционно связаны с теорией уравнения Больцмана кинетической теории газов (Т. Карлеман, Н. Б. Маслова, R. DiPerna и P. L. Lions, ряд японских и итальянских математиков и др. [52, 64–66]).

Сюда же относятся исследования о разрешимости и классах корректности для уравнения Смолуховского, описывающего процессы коагуляции в дисперсных системах [67–69]. В течение 80-х годов сформировался ряд серьезных новых подходов к исследованию законов сохранения (0.7), прежде всего, благодаря усилиям Л. Тартара, Ф. Мюрата, Р. ДиПерна и др. [70, 71], развившим концепцию компенсированной компактности и определившим ее применения в теории уравнений с частными производными. На этом направлении зародилась идея дальнейшего расширения понятия соболевских обобщенных решений, приводящая к определению мерозначного решения, основанная на использовании вместо неизвестных функций u параметрических семейств вероятностных мер Янга [72]. В дальнейшем эти исследования получили развитие в работе В. А. Галкина и В. А. Тупчиева [73], где введено и эффективно применено понятие решения в среднем, а затем в [74, 99, 103, 104] разработана теория функциональных решений законов сохранения (0.7) при любом $\operatorname{card}\Omega$. Теория функциональных решений, в свою очередь, смыкается с теорией решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, построенной А. Ф. Филипповым [75]. Весьма важно подчеркнуть, что уравнения физической кинетики вида (0.7) непосредственно приводят к примерам с разрывными в естественных нормах операторами S.

Новые концепции в теории компактности и расширение понятия решения систем законов сохранения позволили установить содержательные теоремы о разрешимости задачи Коши в целом для систем (0.7), в частности, для уравнений больцмановского типа, а также для квазилинейных систем.

Центральными, не решенными в настоящее время проблемами, для указанного подхода являются эффективное построение классов корректности, доказательство теорем единственности и получение теорем типа «вложения» С. Л. Соболева [37].

Один из возможных вариантов решения этого вопроса предложен Л. Тартаром [70] на примере скалярного закона сохранения с одномерной пространственной переменной.

Основной целью гл. 9 является построение теории глобальной разрешимости (иначе говоря, разрешимости в целом или, что то же самое, разрешимости при всех рассматриваемых значениях независимых аргументов) задачи Коши для нелинейных систем законов сохранения (0.7) с произвольными $\operatorname{card}\Omega$, в особенности, в ситуациях, связанных с физической кинетикой и механикой сплошной среды, выявлением и анализом основных математических структур для этого круга проблем.

Система законов сохранения (0.7) дополняется начальными данными, т. е. рассматривается задача Коши для уравнения (0.7) с начальным условием

$$u|_{t=0} = u_0. \tag{0.8}$$

Множество параметров $\Omega = \{\omega\}$ может быть конечным либо бесконечным. (Оно считается метрическим локально компактным счетно-конечным пространством, в частности, когда Ω — конечный набор индексов, то Ω снабжается дискретной метрикой). Уравнения (0.7) возникают при моделировании естественных процессов как соотношения баланса, выполняющегося при взаимодействии элементов, составляющих моделируемую систему, скажем, молекул газа, капель в аэрозольном облаке и т. д. При этом состояния моделируемого объекта в каждый момент времени t задаются вектором u, а операторы $\{f_j\}$ и S в уравнениях (0.7) задаются характером моделируемого явления. Как правило, эти операторы нелинейные, что отражает наличие взаимодействия между элементами описываемого объекта. Кроме того, они могут не обладать даже свойством непрерывности в естественных пространствах, связанных с исследуемым процессом. Все эти факторы определяют значительный уровень сложности математического исследования упомянутых задач.

Практические задачи, связанные с вычислением конкретных физических параметров, предъявляют соответствующие требования к обоснованию приближенных методов, что, в свою очередь, приводит к вопросам об определении понятия решения и отыскании функциональных пространств, в которых имеет место сходимость приближенных методов. Вопросы эти становятся особенно трудными, когда нелинейные операторы $\{f_j\}$ и S в (0.7) разрывные, ибо отсутствие их непрерывности может повлечь отсутствие классических и даже обобщенных решений задачи Коши в целом, т. е. при всех $t > 0$. Простейшим примером тому служит задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с разрывной правой частью

$$\frac{du}{dt} = f(u), \quad t > 0,$$

где функция f задана соотношением

$$f(u) = \begin{cases} -1, & u \geq 0, \\ +1, & u < 0. \end{cases}$$

Несложно установить, что функция $u(t) \equiv 0$ является решением этого уравнения по определению А. Ф. Филиппова [75], но не относится к классическим и обобщенным решениям. При этом разностный метод Эйлера

$$\frac{u_h(t+h) - u_h(t)}{h} = f(u_h(t)), \quad t \geq 0,$$

$$u_h(t) = u_0, \quad 0 \leq t < h,$$

равномерно сходится к решению А. Ф. Филиппова на всей полуоси $t \geq 0$, когда $h \to 0$.

То же самое явление имеет место в случае задачи Коши для уравнений с частными производными

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{xu(x,t)}{|u(x,t)|} \right) = 0.$$

Непрерывное регулярное глобальное решение этого уравнения с начальными даными u_0 определяется следующей формулой:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_0(x) - \operatorname{sgn}(u_0(x))t, & 0 \leq t \leq |u_0(x)| \, , \\ 0, & t \geq |u_0(x)|. \end{cases}$$

Наряду с приведенными причинами отсутствие решения в целом для законов сохранения (0.7) может быть обусловлено тем, что закон эволюции (0.7) не оставляет вектор u в заранее выбранном функциональном пространстве, т. е. за конечное время вектор u покидает множество определения операций в (0.7) (*формирование особенности решения*).

Следует подчеркнуть, что исследование особенностей не является чисто математической проблемой, поскольку выбор способа моделирования объекта включает в себя выбор пространств, в которых следует рассматривать задачу. Наличие математических особенностей служит указанием на возникновение каких-то физических аспектов моделируемого явления, не нашедших учета на стадии создания модели. Поэтому исследование особенностей может повлечь дальнейший пересмотр модели, применяемых методов и т. д. либо изменить концепцию решения, например, посредством продолжения операторов в (0.7) на более широкие функциональные пространства. На этом пути обычно задача обретает решение в целом, теряя его единственность. Итак, весьма серьезное значение приобретает *вопрос отбора* таких решений, которые соответствуют моделируемому процессу (физике явления). Здесь важна роль *метода построения решения*, который представляет собой разновидность регуляризации задачи. Выбор классов корректности для задач с упомянутым выше продолжением операторов $\{f_j\}$ и S без учета происхождения задачи, как правило, является схоластическим.

Занимающее центральное место в гл. 8 и 9 расширение понятия решения (*функциональное решение*) позволяет обосновать разрешимость в целом и в некотором смысле выделить *классы однозначной глобальной разрешимости* (корректности) для задачи Коши (0.7), (0.8) при наличии априорной оценки приближений в пространстве L_1^{loc} [74, 99, 101, 103, 104].

Завершает изложение гл. 10 (дополнение 2), содержащая сведения из теории множеств и общей топологии, существенно использовавшиеся в построениях гл. 7–9.

В заключение хочу выразить глубокую признательность А. Н. Тихонову, А. А. Самарскому, Н. С. Бахвалову, Б. Н. Четверушкину, В. А. Тупчиеву Б. Л. Рождественскому, Н. Н. Кузнецову, С. Н. Кружкову, А. С. Калашникову, А. В. Бобылеву и Н. Б. Масловой за постоянную поддержку моих научных исследований[1], вошедших в книгу.

В. Галкин

Обнинск, Гамбург
сентябрь 2001 г.

[1] Часть исследований, включенных в книгу, выполнена при поддержке РФФИ (гранты №00-01-00282а, 00-01-81057Бел-а, 99-01-10642, 00-01-10938, 01-01-14009).

1. Нелокальная теория задачи Коши для уравнения Смолуховского с ограниченными ядрами

§ 1. Основные функциональные пространства

Определим функциональные пространства, в которых будем изучать вопросы, связанные с разрешимостью задачи Коши (0.1), (0.2), единственностью решения этой задачи, свойствами решения. Для определенности отметим, что все операции интегрирования, встречающиеся в книге, понимаются в лебеговском смысле. Вложение двух нормированных пространств B_1 и B_2 будем обозначать символом $B_1 \hookleftarrow B_2$ (т. е. пространство B_2 вложено в B_1), если выполняются соотношения $B_1 \supset B_2$ и $\| \, . \, \|_2 \geq k \, \| \, . \, \|_1$, где k — некоторое положительное число, $\| \, . \, \|_1$, $\| \, . \, \|_2$ — соответствующие нормы на B_1 и B_2.

Фиксируем произвольные числа $0 \leq T < \infty$, $0 \leq \lambda < \infty$ и обозначим $\Omega_\lambda(T)$ нормированное пространство вещественных функций f, определенных и непрерывных в полосе

$$\Pi_T = \{(x,t) : \, 0 \leq x < \infty, \;\; 0 \leq t \leq T\},$$

удовлетворяющих условию

$$\| \, f \, \|_\lambda^{(T)} = \sup_{0 \leq t \leq T} \int\limits_0^\infty \exp(\lambda x) |f(x,t)| \, dx < \infty.$$

В пространстве $\Omega_0(T)$ выделим подмножества $\Omega_{0,k}(T)$ (k — неотрицательное целое), которые снабдим более сильной нормированной структурой

$$\| f \|_{0,k}^{(T)} = \sup_{0 \le t \le T} \int_0^\infty (1 + x + x^2 + \ldots + x^k)|f(x,t)|\, dx < \infty.$$

Отметим, что определенные таким образом нормированные пространства не являются полными; для них справедливы следующие цепочки вложений:

$$\Omega_{\lambda_1}(T) \hookleftarrow \Omega_{\lambda_2}(T), \qquad 0 < \lambda_1 < \lambda_2;$$

$$\Omega_0(T) = \Omega_{0,0}(T) \hookleftarrow \Omega_{0,1}(T) \hookleftarrow \ldots \hookleftarrow \Omega_{0,k}(T) \hookleftarrow \ldots \hookleftarrow \Omega_\lambda(T),$$

$$k \in \mathbb{N}, \quad \lambda > 0.$$

Положим

$$\Omega(T) = \bigcup_{\lambda > 0} \Omega_\lambda(T)$$

и обозначим $\Omega_\lambda^+(T)$, $\Omega_{0,k}^+(T)$, $\Omega^+(T)$ — конусы неотрицательных функций в $\Omega_\lambda(T)$, $\Omega_{0,k}(T)$, $\Omega(T)$ соответственно.

Имеет место включение

$$\Omega(T) \subset \bigcap_{k=0}^\infty \Omega_{0,k}(T).$$

В дальнейшем нами будет использоваться естественная метрическая структура на $\Omega_\lambda(T)$, $\Omega_{0,k}(T)$, в которой эти пространства являются полными. Метрики, описанные ниже, порождают на рассматриваемых классах функций более сильную топологию, чем соответствующие нормы.

Введем на множестве $C(T)$ всех непрерывных функций в полосе Π_T счетное семейство разделяющих полунорм $\{p_i^{(T)}(f)\}_{i=1}^\infty$, определенных так, что

$$\forall f \in C(T):\ p_i^{(T)}(f) = \max_{\substack{0 \le x \le i,\\ 0 \le t \le T}} |f(x,t)|, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Топология равномерной сходимости на компактах, лежащих в Π_T, порождаемая этим семейством, метризуема при помощи следующей метрики (см. [35]):

$$d^{(T)}(f,g) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} p_i^{(T)}(f-g)(1+p_i^{(T)}(f-g))^{-1}, \quad f,g \in C(T).$$

Поскольку $\Omega_{0,k}(T)$, $\Omega_\lambda(T)$, $\Omega(T)$ являются подмножествами в $C(T)$, то возникают соответствующие метрические структуры:

на $\Omega_{0,k}(T)$ — метрика $\rho_{0,k}^{(T)} = d^{(T)}(f,g) + \| f-g \|_{0,k}^{(T)}, \ \ k \geq 0;$

на $\Omega_\lambda(T)$ — метрика $\rho_\lambda^{(T)}(f,g) = d^{(T)}(f,g) + \| f-g \|_\lambda^{(T)}, \ \lambda \geq 0;$

на $\Omega(T)$ индуцируется метрическая структура пространства непрерывных функций $C(T)$.

Отметим, что метрические пространства

$$(\Omega_{0,k}(T), \rho_{0,k}^{(T)}), \quad (\Omega_\lambda(T), \rho_\lambda^{(T)})$$

являются полными, а $(\Omega(T), d^{(T)})$ таковым не является. В дальнейшем под метрическими пространствами $\Omega_{0,k}(T)$, $\Omega_\lambda(T)$ будем понимать соответствующие пары $(\Omega_{0,k}(T), \rho_{0,k}^{(T)})$, $(\Omega_\lambda(T), \rho_\lambda^{(T)})$, а под нормированными пространствами тех же символов — следующие пары:

$$(\Omega_{0,k}(T), \ \| \cdot \|_{0,k}^{(T)}),$$

$$(\Omega_\lambda(T), \ \| \cdot \|_\lambda^{(T)}).$$

Определим классы ядер Φ, которые рассматриваются в этой главе. Обозначим $\mathcal{K}_0$ нормированное пространство вещественных функций, определенных и непрерывных на

$$\mathbb{R}_2^+ = \{(x,y) : 0 \leq x, y < \infty\}$$

таких, что выполняются соотношения

$$\| \Phi \|_{\mathcal{K}_0} = \sup_{\mathbb{R}_2^+} |\Phi(x,y)| < \infty;$$

$$\Phi(x,y) = \Phi(y,x).$$

В $\mathcal{K}_0$ выделим подмножество неотрицательных функций $\Phi \geq 0$, которое обозначим $\mathcal{K}_0^+$. Следует подчеркнуть, что все основные результаты этой главы связаны с ядрами из класса $\mathcal{K}_0^+$, поскольку условия симметричности, неотрицательности и ограниченности ядра Φ позволяют строить нелокальные решения задачи Коши для уравнения коагуляции, что не имеет места для произвольных ядер $\Phi \in \mathcal{K}_0$ (см. §6 гл. 5).

§ 2. Основные результаты для ограниченных ядер. Вспомогательные построения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. В этой главе под решением задачи Коши (0.1), (0.2) в полосе $\Pi(T)$ понимается функция $f \in \Omega_0(T)$, непрерывно дифференцируемая по t при $0 \le t \le T$, обращающая уравнение (0.1) в тождество на $\Pi(T)$ и совпадающая с f_0 при $t = 0$.

Естественно, что, главным образом, нас будут интересовать неотрицательные решения уравнения коагуляции, поскольку именно они имеют физический смысл.

ТЕОРЕМА 1.1 (основная 1-й главы). *Предположим, что ядро $\Phi \in \mathcal{K}_0^+$, а начальная функция f_0 принадлежит одному из следующих классов*:

а) $f_0 \in \Omega_{0,k}^+(0), \quad k \ge 0$;
б) $f_0 \in \Omega^+(0)$.

Тогда, соответственно, задача Коши $(0,1)$, $(0,2)$ *в полосе* $\Pi(T)$ *имеет*:

а) *решение, принадлежащее $\Omega_{0,k}^+(T)$, единственное в $\Omega_0(T)$*;

б) *решение, принадлежащее $\Omega^+(T)$, единственное в $\Omega_0(T)$.*

Указанное решение непрерывно зависит от входных данных задачи, т. е. от пары (f_0, Φ) при отображении из топологического произведения $\Omega_0^+(0) \times \mathcal{K}_0^+$ в $\Omega_0^+(T)$, переводящего каждую точку

$$(f_0, \Phi) \in \Omega_0^+(0) \times \mathcal{K}_0^+$$

в решение задачи Коши для уравнения коагуляции в полосе $\Pi(T)$.

Прежде чем доказывать эту теорему, сделаем ряд предварительных построений и утверждений. Фиксируем ядро $\Phi \in \mathcal{K}_0$ и рассмотрим билинейное отображение

$$[.,*]_\Phi : \Omega_0(0) \times \Omega_0(0) \to \Omega_0(0),$$

которое определим для $f, g \in \Omega_0(0)$ соотношением

$$[f,g]_\Phi(x) \overset{def}{=} \frac{1}{2}\left\{\int_0^x \Phi(x-y,y)f(x-y)g(y)\,dy - \right.$$

$$-f(x)\int\limits_0^\infty \Phi(x,y)g(y)\,dy - g(x)\int\limits_0^\infty \Phi(x,y)f(y)\,dy\Bigg\}, \tag{1.1}$$

позволяющим записать задачу Коши (0.1), (0.2) в более компактном виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,t)}{\partial t} = [f,f]_\Phi, & (x,t)\in\Pi_T, \\ f(x,0) = f_0(x). \end{cases} \tag{1.2}$$

Отметим ряд важных свойств введенного отображения $[.,*]_\Phi$ (билинейной формы). Имеет место симметричность формы $[.,*]_\Phi$ по аргументам, вытекающая из симметричности ядра Φ: $[f,g]_\Phi = [g,f]_\Phi$. Легко можно убедиться, что классы $\Omega_{0,k}(0)$, $\Omega_\lambda(0)$, $\Omega(0)$ инвариантны относительно $[.,*]_\Phi$:

$$\begin{aligned} &[.,*]_\Phi{:}\Omega_{0,k}(0)\times\Omega_{0,k}(0)\to\Omega_{0,k}(0), && k\ge 0,\\ &[.,*]_\Phi{:}\ \Omega_\lambda(0)\times\Omega_\lambda(0)\to\Omega_\lambda(0), && \lambda\ge 0,\\ &[.,*]_\Phi{:}\ \Omega(0)\times\Omega(0)\to\Omega(0). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Непосредственным интегрированием соотношения (1.1) по x с весами x^k $(k\ge 0)$, $\exp(\lambda x)$ $(\lambda\ge 0)$ получаем следующие равенства:

$$\int\limits_0^\infty x^k[f,g]_\Phi(x)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \Phi(x,y)\left\{(x+y)^k - x^k - y^k\right\} f(x)g(y)\,dxdy, \tag{1.4}$$

$$f,g\in\Omega_{0,k}(0);$$

$$\int\limits_0^\infty \exp(\lambda x)[f,g]_\Phi(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \Phi(x,y)\left\{\exp(\lambda(x+y) - \exp(\lambda x) - \exp(\lambda y)\right\} f(x)g(y)\,dxdy, \tag{1.5}$$

$$f, g \in \Omega_\lambda(0), \quad \lambda \geq 0.$$

Следует особо выделить два важных соотношения, получающихся из (1.4) при $k = 0$ и $k = 1$ и имеющих физическое содержание

$$\int\limits_0^\infty [f, f]_\Phi \, dx = -\frac{1}{2} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \Phi(x, y) f(x) f(y) \, dx dy \leq 0, \tag{1.6}$$

$$\Phi \in \mathcal{K}_0^+, \quad f \in \Omega_0^+(0);$$

$$\int\limits_0^\infty x[f, f]_\Phi \, dx = 0, \quad f \in \Omega_{0,1}(0). \tag{1.7}$$

Первое из указанных соотношений означает убывание со временем плотности числа частиц в коагулирующей системе, а второе — сохранение с течением времени общей массы частиц в единице объема системы. В этом можно убедиться формальным интегрированием по x с соответствующими весами обеих частей уравнения (0.1)

Получим необходимые для дальнейших построений оценки билинейной формы $[f, g]_\Phi$ в различных нормах. Положим $c = \| \Phi \|_{\mathcal{K}_0}$. Очевидно, что

$$|[f, g]_\Phi(x)| \leq \frac{c}{2} \left\{ \int\limits_0^x |f(x - y)||g(y)| \, dy + \right.$$

$$\left. + |f(x)| \int\limits_0^\infty |g(y)| \, dy + |g(x)| \int\limits_0^\infty |f(y)| \, dy \right\}. \tag{1.8}$$

Следовательно, на каждом отрезке $[0, a]$, $0 \leq a < \infty$, имеет место неравенство

$$\max_{0 \leq x \leq a} |[f, g]_\Phi| \leq$$

$$\leq \frac{c}{2} \left\{ \min \left(\max_{0 \leq x \leq a} |f(x)| \int\limits_0^\infty |g(y)| \, dy, \max_{0 \leq x \leq a} |g(x)| \int\limits_0^\infty |f(y)| \, dy \right) + \right.$$

$$+ \max_{0\le x\le a} |f(x)| \int_0^\infty |g(y)|\,dy + \max_{0\le x\le a} |g(x)| \int_0^\infty |f(y)|\,dy \Bigg\}.$$

Поскольку выполнено соотношение $\min(a,b) \le \frac{1}{2}(a+b)$, то окончательно

$$\max_{0\le x\le a} |[f,g]_\Phi| \le \frac{3}{4} c \left\{ \max_{0\le x\le a} |f(x)| \int_0^\infty |g(y)|\,dy + \max_{0\le x\le a} |g(x)| \int_0^\infty |f(y)|\,dy \right\}.$$

В дальнейшем нами будут использоваться усиленные варианты этой оценки в случае, когда $f,g \in \Omega_{0,k}(0)$ и $f,g \in \Omega_\lambda(0)$:

$$\max_{0\le x\le a} |[f,g]_\Phi| \le \frac{3}{4} c \Bigg\{ \max_{0\le x\le a} |f(x)| \parallel g \parallel_{0,k}^{(0)} +$$

$$+ \max_{0\le x\le a} |g(x)| \parallel f \parallel_{0,k}^{(0)} \Bigg\}, \quad k = 0, 1 \ldots, \tag{1.9}$$

$$\max_{0\le x\le a} |[f,g]_\Phi| \le \frac{3}{4} c \Bigg\{ \max_{0\le x\le a} |f(x)| \parallel g \parallel_{\lambda}^{(0)} +$$

$$+ \max_{0\le x\le a} |g(x)| \parallel f \parallel_{\lambda}^{(0)} \Bigg\}, \quad \lambda \ge 0. \tag{1.10}$$

Перейдем к получению оценок значений формы $[f,g]_\Phi$ в нормах $\parallel . \parallel_{0,k}^{(0)}$ и $\parallel . \parallel_\lambda^{(0)}$. Предполагая, что $f,g \in \Omega_{0,k}(0)$, проинтегрируем неравенство (1.8) по x на $[0,\infty)$ с весом $1 + x + x^2 + \ldots + x^k$:

$$\int_0^\infty (1 + x + x^2 + \ldots + x^k)|[f,g]_\Phi|\,dx \le$$

$$\le \frac{c}{2} \Bigg\{ \int_0^\infty \int_0^\infty (1 + (x+y) + \ldots + (x+y)^k)|f(x)||g(y)|\,dxdy +$$

$$+ \int_0^\infty \int_0^\infty (1 + x + x^2 + \ldots + x^k)|f(x)||g(y)|\,dxdy +$$

$$+\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty (1+x+x^2+\ldots+x^k)|g(x)||f(y)|\,dxdy\Bigg\}.$$

Усиливая это неравенство, получаем необходимую оценку

$$\|\,[f,g]_\Phi\,\|_{0,k}^{(0)}\leq A(c,k)\,\|\,f\,\|_{0,k}^{(0)}\|\,g\,\|_{0,k}^{(0)},\quad k\geq 0, \tag{1.11}$$

где $A(c,k)$ — неотрицательная константа, зависящая только от чисел c и k. Совершенно аналогичными рассуждениями устанавливаем, что

$$\|\,[f,g]_\Phi\,\|_\lambda^{(0)}\leq \frac{3}{2}c\,\|\,f\,\|_\lambda^{(0)}\|\,g\,\|_\lambda^{(0)},\quad f,g\in\Omega_\lambda(0),\quad \lambda\geq 0. \tag{1.12}$$

Отметим, что линейность формы $[.,*]_\Phi$ по каждому из аргументов в сочетании с соотношениями (1.9) и (1.11), (1.10) и (1.12) означает непрерывность отображений (1.3) в соответствующих метрических пространствах.

§ 3. Единственность решения задачи Коши для уравнения коагуляции с ограниченным ядром в классе $\Omega_0(T)$. Непрерывная зависимость решения от входных данных задачи

В этом параграфе предполагается наличие решения задачи Коши (1.2) в классе $\Omega_0(T)$ при входных данных задачи $(f_0,\Phi)\in\Omega(0)\times\mathcal{K}_0$. Сначала докажем единственность этого решения в классе $\Omega_0(T)$.

ЛЕММА 1.1. *Пусть функция $f\in\Omega_0(T)$ является решением задачи Коши* (1.2) *с ядром $\Phi\in\mathcal{K}_0$ и начальной функцией $f_0\in\Omega_0(0)$. Тогда это решение единственное в классе $\Omega_0(T)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем доказывать исходя от противного утверждению леммы, т. е. предположим наличие в классе $\Omega_0(T)$, по крайней мере, двух решений задачи Коши (1.2), которые мы обозначим f и g, тогда выполняются тождества

$$f(x,t) = f_0(x) + \int\limits_0^t [f,f]_\Phi \, ds, \quad (x,t) \in \Pi_T;$$

$$g(x,t) = f_0(x) + \int\limits_0^t [g,g]_\Phi \, ds, \quad (x,t) \in \Pi_T.$$

Вычитая из первого тождества второе, приходим к следующему соотношению:

$$|f(x,t) - g(x,t)| \le \int\limits_0^t |[f-g, f+g]_\Phi| \, ds, \quad (x,t) \in \Pi_T.$$

Интегрируя полученное неравенство по x на $[0,\infty)$, воспользовавшись теоремой Фубини [36] и оценкой (1.11) при $k=0$, получаем

$$\| f - g \|_0^{(0)} (t) \le K \int\limits_0^t \| f - g \|_0^{(0)} (s) \, ds, \quad 0 \le t \le T,$$

где K — неотрицательная константа, зависящая только от $\| \Phi \|_{\mathcal{K}_0}$, $\| f \|_0^{(T)}$, $\| g \|_0^{(T)}$. Таким образом, при достаточно малом $\tau > 0$ $(K\tau < 1)$ справедливо неравенство

$$\| f - g \|_0^{(\tau)} \le K\tau \, \| f - g \|_0^{(\tau)},$$

из которого в силу непрерывности функций f и g следует их совпадение на полосе Π_T. Повторяя эти рассуждения на интервалах времени $[\tau, 2\tau]$, $[2\tau, 3\tau]$ и т. д., заключаем, что $f = g$ на Π_T. Лемма доказана.

Перейдем теперь к вопросу устойчивости решения задачи Коши (1.2) относительно возмущения входных данных задачи, т. е. начальной функции $f_0 \in \Omega_0(0)$ и ядра $\Phi \in \mathcal{K}_0$. Этот вопрос со значительно большей полнотой будет разобран в следующей главе для неограниченных ядер, удовлетворяющих условиям (A).

ЛЕММА 1.2. *Пусть f и g — решения задачи Коши* (1.2), *принадлежащие классу $\Omega_0(T)$, которые соответствуют входным данным задачи (f_0, Φ) и $(g_0, \overline{\Phi})$ из пространства $\Omega_0(0) \times \mathcal{K}_0$, причем выполняются неравенства*

$$\max\{\| f \|_0^{(T)}, \; \| g \|_0^{(T)}\} \le M,$$

$$\max\{\| \Phi \|_{\mathcal{K}_0}, \ \| \overline{\Phi} \|_{\mathcal{K}_0}\} \le C,$$

где M, C — положительные числа. Тогда можно указать такое число $\alpha > 0$, зависящее от M, T, C, что справедливо следующее неравенство:

$$\| f - g \|_0^{(T)} \le \alpha \left(\| f_0 - g_0 \|_0^{(0)} + \| \Phi - \overline{\Phi} \|_{\mathcal{K}_0} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждая аналогично доказательству предыдущей леммы, получаем тождество

$$f(x,t) - g(x,t) = f_0(x) - g_0(x) + \int\limits_0^t \left\{ [f-g, f+g]_\Phi + [g,g]_{\Phi - \overline{\Phi}} \right\} ds,$$

из которого, с учетом сделанных оценок, следует неравенство

$$\| f - g \|_0^{(0)} (t) \le \| f_0 - g_0 \|_0^{(0)} + K \int\limits_0^t \| f - g \|_0^{(0)} (s)\, ds +$$

$$+ T \left(\| g \|_0^{(T)} \right)^2 \| \Phi - \overline{\Phi} \|_{\mathcal{K}_0}, \quad 0 \le t \le T, \quad K = K(M, C) \ge 0.$$

Отсюда получаем, что

$$\| f - g \|_0^{(0)} (t) \le \{ \| f_0 - g_0 \|_0^{(0)} + T \left(\| g \|_0^{(T)} \right)^2 \| \Phi - \overline{\Phi} \|_{\mathcal{K}_0} \} \exp(Kt),$$

и, следовательно,

$$\| f - g \|_0^{(T)} \le \alpha \{ \| f_0 - g_0 \|_0^{(0)} + \| \Phi - \overline{\Phi} \|_{\mathcal{K}_0} \},$$

где $\alpha = \exp(KT)(1 + TM^2)$. Лемма доказана.

§ 4. Неотрицательные решения задачи Коши (1.2)

В этом параграфе устанавливается важный факт, имеющий физическое содержание, что неотрицательным входным данным задачи Коши (1.2) соответствуют неотрицательные решения этой задачи. Как и ранее, это утверждение доказывается в предположении существования решения в классе $\Omega(T)$.

ЛЕММА 1.3. *Пусть функция $f \in \Omega_0(T)$ — решение задачи Коши (1.2) с начальной функцией $f \in \Omega_0^+(0)$ и ядром $\Phi \in \mathcal{K}_0^+$. Тогда функция $f \in \Omega_0^+(T)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем утверждение леммы при более сильных предположениях, а именно, дополнительно к условиям леммы потребуем выполнение следующих неравенств:

$f_0(x) > 0$ при $0 \le x < \infty$;

$\Phi(x, y) > 0$ при $(x, y) \in \mathbb{R}_2^+$.

Отметим, что при $x = 0$ решение уравнения коагуляции удовлетворяет тождеству

$$\frac{\partial}{\partial t} f(0, t) = -f(0, t) \int_0^\infty \Phi(0, y) f(y, t)\, dy.$$

Интегрируя это соотношение по t, получаем

$$f(0, t) = f_0(0) \exp\left(-\int_0^t \int_0^\infty \Phi(0, y) f(y, s)\, dyds \right) > 0, \quad 0 \le t \le T.$$

Покажем, что функция f нигде не обращается в нуль на полосе Π_T. Предположим противное: т. к. $f_0(x) > 0$ и $f(0, t) > 0$, $0 \le t \le T$, то нули функции f имеют строго положительные координаты. Выберем во множестве нулей функции f в Π_T точку с наименьшей координатой x (это возможно, поскольку множество нулей непрерывной функции замкнутое) и обозначим ее (x_0, t_0). В силу нашего выбора справедливо равенство $f(x_0, t_0) = 0$, причем $f(x, t_0) > 0$ при $0 \le x < x_0$. Тогда из уравнения коагуляции (0.1) получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x_0, t_0) = \frac{1}{2} \int\limits_0^{x_0} \Phi(x_0 - y, y) f(x_0 - y, t_0) f(y, t_0)\, dy > 0.$$

Но в этом случае из-за гладкости функции f по t при достаточно малых $t_0 - t > 0$ справедливо неравенство $f(x_0, t) < 0$, а поскольку $f(0, t) > 0$, то можно указать точку

$$(\bar{x}, \bar{t}) \in \Pi_T,\ 0 < \bar{x} < x_0,\ 0 < \bar{t} < t_0,$$

в которой $f(\bar{x}, \bar{t}) = 0$, что противоречит способу выбора точки (x_0, t_0). Следовательно, функция f не обращается в нуль на Π_T и, значит, $f > 0$ на Π_T.

Теперь перейдем непосредстенно к доказательству леммы. Прежде всего отметим, что для неотрицательных решений уравнения (0.1) выполняется неравенство

$$\int\limits_0^\infty f(x, t)\, dx \leq \int\limits_0^\infty f_0(x)\, dx, \quad t \geq 0, \tag{1.13}$$

которое получается применением соотношения (1.6) к интегральной форме записи уравнения (0.1) по t. В силу неотрицательности, предполагаемой у функции f, из соотношения (1.13) следует неравенство

$$\| f \|_0^{(T)} \leq \| f_0 \|_0^{(0)}. \tag{1.14}$$

Пусть входные данные задачи Коши (1.2) (f_0, Φ) удовлетворяют условиям настоящей леммы. Сделаем такое возмущение входных данных, чтобы они стали строго положительными, например,

$$f_0^{(\varepsilon)}(x) = f_0(x) + \varepsilon \exp(-x), \quad \Phi^{(\varepsilon)}(x, y) = \Phi(x, y) + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leq 1.$$

Очевидно, $\| f_0 - f_0^{(\varepsilon)} \|_0^{(0)} = \| \Phi - \Phi^{(\varepsilon)} \|_{\mathcal{K}_0} = \varepsilon$. В силу выше сделанных рассуждений входным данным $(f_0^{(\varepsilon)}, \Phi^{(\varepsilon)})$ задачи Коши (1.2) соответствуют положительные решения этой задачи $f^{(\varepsilon)}$, которые ввиду неравенства (1.14) равномерно ограничены относительно $0 < \varepsilon \leq 1$ по норме $\| \,.\, \|_0^{(T)}$

$$\| f^{(\varepsilon)} \|_0^{(T)} \leq \| f_0 \|_0^{(0)} + 1, \quad 0 < \varepsilon \leq 1,$$

причем

$$\| \Phi^{(\varepsilon)} \|_{\mathcal{K}_0} \leq \| \Phi \|_{\mathcal{K}_0} +1, \quad 0 < \varepsilon \leq 1.$$

Устремляя $\varepsilon \to 0$ и воспользовавшись результатом леммы 1.2, условия которой здесь выполнены, получаем

$$\| f - f^{(\varepsilon)} \|_0^{(T)} \leq \alpha(\| f_0 - f_0^{(\varepsilon)} \|_0^{(0)} + \| \Phi - \Phi^{(\varepsilon)} \|_{\mathcal{K}_0}) = 2\alpha\varepsilon \to 0,$$

где число α зависит только от $\| f \|_0^{(T)}$, $\| \Phi \|_{\mathcal{K}_0}$, функция f является решением задачи Коши (1.2) с входными данными (f_0, Φ). Поскольку $f^{(\varepsilon)} > 0$ и функция f непрерывная, то указанная сходимость семейства решений $f^{(\varepsilon)}$ к функции f обеспечивает ее неотрицательность на полосе Π_T. Лемма доказана.

§ 5. Построение локального решения уравнения коагуляции

Кратко опишем применяемый метод построения локального решения (в достаточно малой окрестности точки $t = 0$) для уравнения (0.1) с ограниченным ядром Φ. Отметим сразу, что применяемая конструкция аналогична методам, применявшимся еще Коши и Ковалевской в аналитической теории дифференциальных уравнений [37]. Локальное решение в окрестности точки $t = 0$ строится в виде формального тейлоровского ряда по степеням t, далее получаются оценки коэффициентов ряда в различных нормах, что позволяет установить положительную оценку снизу для радиуса сходимости ряда, т. е. его сходимость. Затем показываем, что построенная функция решает в малой окрестности точки $t = 0$ задачу Коши для уравнения коагуляции.

ЛЕММА 1.4. *Пусть ядро $\Phi \in \mathcal{K}_0$, а начальная функция f_0 принадлежит одному из следующих классов*:

а) $f_0 \in \Omega_{0,k}(0), \quad k \geq 0$;

б) $f_0 \in \Omega_\lambda(0), \quad \lambda \geq 0$.

Тогда можно указать такое положительное число m, что на каждой полосе Π_τ, $0 < \tau < \dfrac{1}{m}$, существует решение задачи Коши *для уравнения коагуляции, которое в случае* а) *принадлежит классу* $\Omega_{0,k}(\tau)$, *а в случае* б) *принадлежит классу* $\Omega_\lambda(\tau)$.

В обоих случаях это решение аналитическое по t *в интервале* $0 \le t \le \tau$ *при каждом фиксированном* $x \in [0, \infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем искать решение задачи Коши (1.2) в окрестности точки $t = 0$ в виде формального ряда по степени t

$$f(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x) t^i. \tag{1.15}$$

Формальной подстановкой этого ряда в (1.2) получаем рекуррентные соотношения для коэффициентов a_i, для $i \ge 0$:

$$\begin{cases} a_0(x) = f_0(x), \\ a_{n+1}(x) = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{i+j=n} [a_i, a_j]_\Phi, \quad n \ge 0. \end{cases} \tag{1.16}$$

Воспользовавшись свойствами (1.3) билинейного отображения $[., *]_\Phi$, индукцией по номеру $n \ge 0$ получаем, что коэффициенты

$$a_n \in \Omega_{0,k}(0),$$

если начальная функция $f_0 \in \Omega_{0,k}(0)$, и $a_n \in \Omega_\lambda(0)$, если $f_0 \in \Omega_\lambda(0)$. Примем следующие обозначения:

$$A_n = \| a_n \|_{0,k}^{(0)}, \quad \text{если } a_0 \in \Omega_{0,k}(0),\ n \ge 0,\ k \ge 0;$$

$$A_n(\lambda) = \| a_n \|_{\lambda}^{(0)}, \quad \text{если } a_0 \in \Omega_\lambda(0),\ n \ge 0,\ \lambda \ge 0;$$

$$B_n(a) = \max_{0 \le x \le a} |a_n(x)|, \quad 0 < a < \infty, \quad n \ge 0.$$

Из соотношений (1.9–(1.16) получаются следующие неравенства для чисел A_n и B_n:

в случае а)

$$\begin{cases} A_{n+1} \leq \dfrac{A(c,k)}{n+1} \displaystyle\sum_{i+j=n} A_i A_j, \\ B_{n+1}(a) \leq \dfrac{A(c,k)}{n+1} \displaystyle\sum_{i+j=n} A_i B_j(a), \quad n \geq 0; \end{cases} \tag{1.17}$$

в случае б)

$$\begin{cases} A_{n+1}(\lambda) \leq \dfrac{A(c,k)}{n+1} \displaystyle\sum_{i+j=n} A_i(\lambda) A_j(\lambda), \\ B_{n+1}(a) \leq \dfrac{A(c,k)}{n+1} \displaystyle\sum_{i+j=n} A_i(\lambda) B_j(a), \quad n \geq 0, \end{cases} \tag{1.18}$$

где $A(c,k)$, $B(c)$ — неотрицательные константы, зависящие только от величин, указанных у них в качестве аргументов. Проводя индукцию по номеру $n \geq 0$, легко можно убедиться в справедливости следующих оценок, вытекающих из неравенств (1.17) и (1.18):

в случае а)

$$\begin{cases} A_n \leq A_0 m^n, \quad n \geq 0, \quad m = A(c,k) A_0, \\ B_n(a) \leq B_0(a) m^n; \end{cases} \tag{1.19}$$

в случае б)

$$\begin{cases} A_n(\lambda) \leq A_0(\lambda) m^n, \quad n \geq 0, \quad m = A(c,k) A_0(\lambda), \\ B_n(a) \leq B_0(a) m^n. \end{cases} \tag{1.20}$$

Выберем произвольное число τ в интервале $0 < \tau < \dfrac{1}{m}$ и отметим, что частичные суммы ряда (1.15) принадлежат пространству $\Omega_{0,k}(\tau)$, когда функция $f_0 \in \Omega_{0,k}(0)$, и принадлежат пространству $\Omega_\lambda(\tau)$, если $f_0 \in \Omega_\lambda(0)$. В силу оценок (1.19), (1.20) и полноты метрических пространств $\Omega_{0,k}(\tau)$, $\Omega_\lambda(\tau)$ последовательность частичных сумм ряда (1.15) сходится по метрике $\rho_{0,k}^{(\tau)}$ к некоторой функции $f \in \Omega_{0,k}(\tau)$ в случае а), а в случае б) сходится по метрике $\rho_\lambda^{(\tau)}$ к функции $f \in \Omega_\lambda(\tau)$. Покажем, что построенная функция f является решением уравнения коагуляции (0.1) в полосе Π_τ. По построению функция $f \in \Omega_0(\tau)$ и является гладкой по t, $0 \le t \le \tau$. В силу свойств непрерывности билинейной формы $[.,*]_\Phi$, установленных в §2, при подстановке ряда (1.15) в правую часть уравнения (0.1) с учетом (1.16) получаем

$$[f,f]_\Phi = \sum_{i,j\ge 0} [a_i, a_j]_\Phi t^{i+j} = \sum_{i=0}^{\infty} t^i \sum_{s+k=i} [a_k, a_s]_\Phi =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} i\, t^{i-1} a_i \equiv \frac{\partial f}{\partial t},$$

$$(x,t) \in \Pi_\tau.$$

Таким образом, функция f удовлетворяет уравнению (0.1) и поскольку $f|_{t=0} = f_0$, то f является решением задачи Коши (1.2) в полосе Π_τ. Лемма доказана.

Отметим, что в процессе доказательства этой леммы была установлена зависимость радиуса сходимости ряда (1.15) от нормы начальной функции, рассмотренной в соответствующем нормированном пространстве

$$\tau \ge \frac{1}{m} = \frac{1}{A \parallel f_0 \parallel},$$

где A — константа, определяемая $\parallel \Phi \parallel_{\mathcal{K}_0}$ в случае б), и дополнительно номером k, если начальная функция удовлетворяет условию а); вид нормы здесь не конкретизируется. Полученная зависимость в дальнейшем будет существенно использована для построения продолжения неотрицательного решения задачи Коши (1.2) на все положительные времена t.

Подчеркнем также, что лемма 1.1 обеспечивает единственность построенного решения в классе $\Omega_0(\tau)$, а из леммы 1.3 следует неотрицательность этого решения при условии, что неотрицательны функции f_0 и Φ.

§ 6. Равномерные оценки норм неотрицательного решения. Доказательство теоремы 1.1

Оценка радиуса сходимости ряда (1.15), полученная в предыдущем параграфе, указывает на то, что при наличии равномерной оценки нормы решения уравнения коагуляции вплоть до правой границы интервала $\left[0, \dfrac{1}{m}\right)$ можно осуществить продолжение решения на больший интервал в направлении возрастания времени t. Это, оказывается, можно сделать для неотрицательного решения уравнения (0.1), отвечающего неотрицательным f_0 и Φ. При входных данных, не обладающих этим свойством, задача Коши для уравнения коагуляции в целом, вообще говоря, неразрешима, на что указывает следующий пример.

ПРИМЕР 1.1. Рассмотрим задачу Коши (1.2) со следующими входными данными:

$$f_0(x) = \exp(-x), \quad \Phi(x,y) = -1.$$

В этом случае точное решение можно получить методом преобразования Лапласа по переменной x, оно имеет следующий вид:

$$f(x,t) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}t)^2}\exp\left(-\frac{x}{1-\dfrac{t}{2}}\right), \qquad x \geq 0,\ t \geq 0.$$

Несложно убедиться в том, что в этом случае непрерывное по (x,t) продолжение этого решения на неотрицательную полуось времени t существует лишь локально при $t < t_c = 2$.

В следующей лемме получим необходимые равномерные оценки решения задачи Коши (1.2).

ЛЕММА 1.5. *Предположим, что ядро* $\Phi \in \mathcal{K}_0^+$ *и функция* $f(x,t)$, *определенная и непрерывная при* $0 \leq x < \infty$, $0 \leq t < T$, *является решением уравнения* (0.1) *на каждой полосе* Π_τ, $0 < \tau < T$, *причем* $f \in \Omega_{0,k}^+(\tau)$ *при каждом указанном* τ. *Тогда справедливо следующее неравенство*:

$$\sup_{0<\tau<T} \| f \|_{0,k}^{(\tau)} < \infty, \quad k \geq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку функция f — решение уравнения (0.1), то при $0 \le x < \infty$, $0 \le t \le T$ выполняется тождество

$$f(x,t) = f_0(x) + \int_0^t [f,f]_\Phi \, ds.$$

Интегрируя это соотношение по x с весами x^i, $0 \le i \le k$, на $[0,\infty)$, получаем

$$\int_0^\infty x^i f(x,t)\,dx = \int_0^\infty x^i f_0(x)\,dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^\infty\int_0^\infty \Phi(x,y)\left\{(x+y)^i - x^i - y^i\right\} f(x,s)f(y,s)\,dxdyds.$$

Здесь при перестановке порядка интегрирования мы воспользовались теоремой Фубини [36] и соотношениями (1.4). Из полученного соотношения в силу неотрицательности функций f и Φ и ограниченности ядра Φ вытекают следующие неравенства и тождество:

$$\int_0^\infty f(x,t)\,dx \le \int_0^\infty f_0(x)\,dx, \quad 0 \le t \le T; \tag{1.21}$$

$$\int_0^\infty x f(x,t)\,dx = \int_0^\infty x f_0(x)\,dx, \quad 0 \le t \le T; \tag{1.22}$$

$$\int_0^\infty x^i f(x,t)\,dx \le \int_0^\infty x^i f_0(x)\,dx +$$

$$+L \sum_{\substack{1 \le l,m \le i-1 \\ l+m=i}} \int_0^t ds \int_0^\infty x^l f(x,s)\,dx \int_0^\infty y^m f(y,s)\,dy, \tag{1.23}$$

при $0 \le t < T$, $2 \le i \le k$; L — неотрицательная константа, зависящая от номера i и $\| \Phi \|_{\mathcal{K}_0}$. Применением индукции по номеру $0 \le i \le k$ в неравенствах (1.21)–(1.23) устанавливаем, что каждая величина

$$\sup_{0\le t<T}\int\limits_0^\infty x^i f(x,t)\,dx<\infty.$$

Поскольку неотрицательность функции f обеспечивает справедливость равенства

$$\| f \|_{0,k}^{(\tau)}=\sup_{0\le t\le\tau}\sum_{i=0}^k\int\limits_0^\infty x^i f(x,t)\,dx,$$

то полученные равномерные относительно $0\le t<T$ оценки моментов решения

$$\int\limits_0^\infty x^i f(x,t)\,dx,\quad i\ge 0,$$

гарантируют конечность величин

$$\sup_{0<\tau<T}\| f \|_{0,k}^{(\tau)},\quad k\ge 0.$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1.

а). Сначала проведем рассуждение в случае, когда функция $f\in\Omega_{0,k}(0)$. На основании результатов лемм 1.1, 1.2, 1.4 можно утверждать, что в каждой полосе Π_τ, $0<\tau<\dfrac{1}{m}$ существует решение задачи Коши (1.2), принадлежащее классу $\Omega_{0,k}^{+}(\tau)$, единственное в классе $\Omega_0(\tau)$. В силу леммы 1.5 для указанного решения справедливо неравенство

$$\sup_{0<\tau<\frac{1}{m}}\| f \|_{0,k}^{(\tau)}<\infty.$$

Выберем точку $t_0\in\left[0,\dfrac{1}{m}\right)$ достаточно близко к правому краю этого интервала и, приняв $f(.,t_0)$ за начальную функцию, построим в окрестности точки t_0 решение уравнения (0.1) в виде ряда по степеням $(t-t_0)$ аналогично ряду (1.15). Сходимость такого ряда гарантируется в круге

$$|t-t_0|<\frac{1}{A(c,k)\sup\limits_{0\le\tau<\frac{1}{m}}\| f \|_{0,k}^{(\tau)}},$$

причем следует подчеркнуть, что радиус рассматриваемого круга не зависит от выбора точки $t_0 \in \left[0, \dfrac{1}{m}\right)$. Таким образом, за счет указанного выбора точки t_0 можно продолжить решение за правую границу интервала $0 \le t < \dfrac{1}{m}$ и, повторяя эти рассуждения по шагам, строим продолжение решения на любой отрезок времени $0 \le t \le T,\ T > 0$.

б). Теперь перейдем к построению продолжения решения, когда функция $f_0 \in \Omega^+(0)$. Поскольку $f_0 \in \Omega^+(0)$, то можно указать число $\lambda > 0$, при котором $f_0 \in \Omega^+_\lambda(0)$. Тогда на полосе $\Pi_\tau,\ 0 < \tau < \dfrac{1}{m}$ существует единственное в классе $\Omega_0(\tau)$ решение задачи Коши (1.2) $f \in \Omega^+_\lambda(\tau)$ (см. леммы 1.1, 1.3, 1.4). Воспользовавшись теоремой Б. Леви [36], неравенством (1.21), получаем следующие соотношения:

$$\| f(.,t) \|^{(0)}_\lambda = \int\limits_0^\infty \exp(\lambda x) f(x,t)\, dx =$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \lambda^k \int\limits_0^\infty \frac{x^k}{k!} f(x,t)\, dx \le \sigma^{(0)}_0 + \sum_{k=1}^\infty \lambda^k \int\limits_0^\infty \frac{x^k}{k!} f(x,t)\, dx,$$

где $\sigma^{(0)}_0 = \int\limits_0^\infty f_0(x)\, dx$. Выберем число $\lambda_0 > 0$ достаточно малым, чтобы выполнялось неравенство $\| f_0 \|^{(0)}_{\lambda_0} \le 2\sigma^{(0)}_0$. В этом случае величина $m = k\sigma^{(0)}_0$, где k — неотрицательная константа, зависящая только от $\| \Phi \|_{\mathcal{K}_0}$. Положим $t_1 = \dfrac{1}{2m}$. Функция $f(., \dfrac{1}{2m}) \in \Omega^+_{\lambda_0}(0)$ и в силу вложений, указанных в §1, функция $f(., \dfrac{1}{2m}) \in \Omega^+_\lambda(0)$, где $0 < \lambda < \lambda_0$. Выберем число $\lambda_1 \in (0, \lambda_0)$ настолько малым, чтобы выполнялось следующее неравенство:

$$\| f(., \frac{1}{2m}) \|^{(0)}_{\lambda_1} \le 2\sigma^{(0)}_0.$$

Принимая $f(., \dfrac{1}{2m})$ в качестве начальной функции, построим в окрестности точки $t_1 = \dfrac{1}{2m}$ решение уравнения (0.1) в виде ряда по степеням $(t - t_1)$, сходимость которого гарантируется в круге

$|t - t_1| < \dfrac{1}{k\sigma_0^{(0)}}$, и, таким образом, продолжаем решение на интервал времени $0 \le t < \dfrac{3}{2m}$. Повторяя эти рассуждения в точках $t_i = \dfrac{i}{2m}$, $i \ge 1$, строим продолжение решения на любой отрезок времени $0 \le t \le T$, $T > 0$.

Лемма 1.2 гарантирует непрерывную зависимость построенного в пунктах а) и б) решения задачи Коши (1.2) от входных данных задачи (f_0, Φ). Утверждение о единственности и неотрицательности суть лемм 1.1, 1.3. Теорема доказана.

2. Нелокальная теория задачи Коши для уравнения Смолуховского с неограниченными ядрами

§ 1. Класс неограниченных ядер

Как уже отмечалось во введении, теория задачи Коши для уравнения коагуляции с ограниченными ядрами не содержит в себе случаев, важных с точки зрения приложений в кинетике коагуляции дисперсных систем, поскольку в реальных процессах ядра Φ обладают существенной неограниченностью при $x, y \to \infty$. Можно убедиться, что, как правило, такие ядра принадлежат следующему нормированному пространству $\mathcal{K}$ вещественных функций, определенных и непрерывных на $\mathbb{R}_2^+$:

$$1^\circ \quad \Phi(x,y) = \Phi(y,x) \geq 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}_2^+;$$

$$2^\circ \quad \| \Phi \|_{\mathcal{K}} = \sup_{\mathbb{R}_2^+} \Phi(x,y)(1+x+y)^{-1} < \infty.$$

Выделим в пространстве $\mathcal{K}$ открытые шары радиуса $c > 0$:

$$\mathcal{K}_c = \{\Phi \in \mathcal{K} : \| \Phi \|_{\mathcal{K}} < c\},$$

которые в дальнейшем будут использоваться при изучении вопросов, связанных с устойчивостью решения задачи Коши для уравнения коагуляции. Отметим, что ядра, принадлежащие шару $\mathcal{K}_c$, во введении выделялись условиями (A).

Наряду с нормированной структурой на $\mathcal{K}$ рассмотрим метрическую структуру, определяющую топологию равномерной сходимости на компактах, принадлежащих $\mathbb{R}_2^+$, которую введем следующей метрикой:

$$r(\Phi, \bar{\Phi}) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(\Phi - \bar{\Phi})(1 + q_i(\Phi - \bar{\Phi}))^{-1},$$

где полунормы q_i определены соотношениями

$$q_i(\Phi - \bar{\Phi}) = \sup_{0 \le x, y \le i} |\Phi(x, y) - \bar{\Phi}(x, y)|,$$

$$\Phi, \bar{\Phi} \in \mathcal{K}.$$

Метрическая топология на $\mathcal{K}$, легко видеть, грубее топологии, порождаемой нормой $\| \, . \, \|_{\mathcal{K}}$. Метрика r индуцирует на шарах $\mathcal{K}_c$ структуру метрического пространства $(\mathcal{K}_c, r)$.

§ 2. Предварительные замечания. Формулировка теоремы существования и единственности решения с ядрами $\Phi \in \mathcal{K}$

Укажем на некоторые важные моменты, связанные с вопросом разрешимости задачи Коши для уравнения коагуляции в случае неограниченного ядра $\Phi \in \mathcal{K}$. Прежде всего следует подчеркнуть, что область определения билинейной формы $[., *]_\Phi$ с ядром $\Phi \in \mathcal{K}$, вообще говоря, уже, чем область определения этой формы с ядрами из класса $\mathcal{K}_0$. Нетрудно убедиться, что естественной областью определения $[., *]_\Phi$ при $\Phi \in \mathcal{K}$ является множество $\Omega_{0,1}(0) \times \Omega_{0,1}(0)$. В отличие от случая ограниченных ядер $\Phi \in \mathcal{K}_0$, когда пространства $\Omega_{0,k}(0)$ инвариантны относительно $[., *]_\Phi$, это не имеет места, вообще говоря, если ядро $\Phi \in \mathcal{K} \backslash \mathcal{K}_0$. Действительно, предположим, что ядро $\Phi(x, y) = x + y$, а функция $f \in \Omega^+_{0,1}(0)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$f \notin \Omega_{0,2}(0),$$

$$f(x) > 0, \qquad x \in I = \bigcup_{k=0}^{\infty} (1 + 3k, 2 + 3k),$$

$$f(x) = 0, \qquad x \in [0, \infty) \backslash I.$$

Тогда в точках x, в которых $f(x) > 0$, имеет место соотношение

$$\int_0^x \Phi(x-y,y)f(x-y)f(y)\,dy = 0,$$

и, следовательно, выполнено неравенство

$$|[f,f]_\Phi(x)| \geq f(x)\left(x\int_0^\infty f(y)\,dy + \int_0^\infty yf(y)\,dy\right).$$

Поскольку правая часть этого неравенства — несуммируемая функция на $[0,\infty)$ с весом x, то функция $[f,f]_\Phi \notin \Omega_{0,1}(0)$. Таким образом, при $f \in \Omega_{0,1}(0)$, $\Phi \in \mathcal{K}$ для правой части уравнения (0.1) не имеет места, вообще говоря, важное с физической точки зрения соотношение (1.7), определяющее закон сохранения массы частиц в коагулирующей системе (см. соотношение (1.22), а также обсуждение этого явления в гл. 5). В случае ядер $\Phi \in \mathcal{K}$ справедливы следующие свойства билинейного отображения $[.,*]_\Phi$:

$$\begin{gathered}[.,*]_\Phi : \Omega_{0,k}(0)\times\Omega_{0,k}(0) \to \Omega_{0,k-1}(0), \quad k \geq 1;\\ [.,*]_\Phi : \Omega(0)\times\Omega(0)\to\Omega(0).\end{gathered} \tag{2.1}$$

Важным следствием этих свойств является то, что для формы $[.,*]_\Phi$ выполняется соотношение (1.7) при любой функции $f \in \Omega_{0,2}(0)$ и произвольном ядре $\Phi \in \mathcal{K}$; поэтому естественно пытаться строить решение уравнения (0.1) в классе $\Omega_{0,2}(T)$, поскольку для решений уравнения коагуляции, принадлежащих этому классу, непременно выполняется закон сохранения (1.22).

В связи с сужением области определения правой части уравнения коагуляции, возникшим из-за расширения класса рассматриваемых ядер до класса $\mathcal{K}$, следует дать новое определение решения задачи Коши (1.2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Под решением задачи Коши (1.2) с ядром $\Phi \in \mathcal{K}$ будем понимать функцию $f \in \Omega_{0,1}(T)$, непрерывно дифференцируемую по t, $0 \leq t \leq T$, обращающую уравнение (0.1) в тождество на полосе Π_T и совпадающую при $t = 0$ с начальной функцией f_0.

Подчеркнем, что для доказательства разрешимости задачи Коши (1.2) с ядром $\Phi \in \mathcal{K}\backslash\mathcal{K}_0$, т. е. с неограниченным ядром, методы, применявшиеся в работах [24, 28], а также в предыдущей главе, не пригодны, т. к. они существенно опираются на инвариантность классов $\Omega_{0,k}(0)$ относительно отображения $[.,*]_\Phi$, что в нашем случае, как указано выше, не имеет места. В связи с этим возникают особые трудности при рассмотрении вопросов как существования, так и единственности решения, которые доказываются иными методами, основанными на аппроксимации исходной задачи с неограниченным ядром $\Phi \in \mathcal{K}$ последовательностью задач с ограниченными ядрами $\Phi_n \in \mathcal{K}_0^+$, изученными в гл. 1.

Сформулируем основную теорему настоящей главы.

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть ядро $\Phi \in \mathcal{K}$, а начальная функция f_0 принадлежит одному из следующих классов:*

а) $f_0 \in \Omega_{0,k}^+(0), \quad k \geq 2;$

б) $f_0 \in \Omega^+(0).$

Тогда соответственно задача Коши (1.2) *в полосе* Π_T *имеет*

а)*по крайней мере, одно решение из класса* $\Omega_{0,k}^+(T)$, $k \geq 2$;

б)*решение из класса* $\Omega^+(T)$, *причем это решение единственное в классе* $\Omega(T)$.

Прежде чем доказывать эту теорему, необходимо сделать некоторые построения и доказать ряд предварительных утверждений. Отметим, что в следующей главе на основании рассматриваемых там свойств решения уравнения коагуляции мы пополним класс ядер, для которых доказана разрешимость задачи Коши (1.2), ядрами, имеющими особенности на осях координат в $\mathbb{R}_2^+$. Одним из таких ядер является ядро броуновской коагуляции

$$\Phi(x,y) = [(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})(x^{-\frac{1}{3}} + y^{-\frac{1}{3}})]^3, \quad x, y > 0.$$

§ 3. Аппроксимация задачи с неограниченным ядром. Оценки норм решений аппроксимирующих задач

Для ядра Φ, принадлежащего классу $\mathcal{K}$, построим последовательность ядер $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ таких, что $\Phi_n \in \mathcal{K}_0^+$ при каждом номере n $(n \geq 1)$ и на квадратах $0 \leq x, y \leq n$ выполняются соотношения

$$\Phi_n(x,y) = \Phi(x,y).$$

Легко проверить, что указанными свойствами обладает, например, следующая последовательность ядер:

$$\Phi_n(x,y) = \begin{cases} \Phi(x,y), & 0 \le x, y \le n, \\ \Phi(x,n), & 0 \le x \le n, \quad n \le y < \infty, \\ \Phi(n,y), & n \le x < \infty, \quad 0 \le y \le n, \\ \Phi(n,n), & n \le x, y \le \infty, \quad n \ge 1. \end{cases} \tag{2.2}$$

С последовательностью ядер $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ связана последовательность функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, являющихся решениями следующих задач Коши для уравнений коагуляции:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_n(x,t)}{\partial t} = [f_n, f_n]_{\Phi_n}, & (x,t) \in \Pi_T, \\ f_n(x,0) = f_0(x), & n \ge 1. \end{cases} \tag{2.3}$$

Здесь и в дальнейшем предполагается, что начальная функция f_0 принадлежит одному из классов $\Omega^+_{0,k}(0)$ $(k \ge 0)$, $\Omega^+(0)$.

Получим оценки норм решений задачи Коши (2.3).

ЛЕММА 2.1. *Пусть начальная функция f_0 принадлежит одному из следующих классов*:

а) $f_0 \in \Omega^+_{0,k}(0), \quad k \ge 0$;

б) $f_0 \in \Omega^+(0)$.

Тогда для построенной последовательности функций можно указать такие константы $0 \le M(T) < \infty$, $\bar\lambda(T) > 0$, *что соответственно каждому из рассмотренных случаев выполняются неравенства*

а) $\| f_n \|^{(T)}_{0,k} \le M(T), \quad n \ge 1$;

б) $\| f_n \|^{(T)}_{\bar\lambda(T)} \le M(T), \quad n \ge 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку рассматриваемые нормы связаны с моментами функций f_n, то сначала получим равномерные оценки моментов этих функций. Воспользовавшись соотношениями (1.4) для решений f_n задачи Коши (2.3), получаем, что при $t \ge 0$ выполняются тождества

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^\infty x^k f_n(x,t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty ((x+y)^k - x^k - y^k) \Phi_n(x,y) f_n(x,t) f_n(y,t)\, dxdy, \tag{2.4}$$

$$n \geq 1, \ k \geq 0.$$

Обозначим моменты

$$\sigma_{k,n}(t) = \int\limits_0^\infty \frac{x^k}{k!} f_n(x,t)\, dx.$$

Ясно, что функции $\sigma_{k,n}(t) \geq 0$ при $0 \leq t \leq T$. Из соотношений (2.4) следует справедливость неравенств и тождеств:

$$\sigma_{0,n}(t) \leq \sigma_0^{(0)} = \int\limits_0^\infty f_0(x)\, dx, \quad t \geq 0, \ n \geq 1; \tag{2.5}$$

$$\sigma_{1,n}(t) \equiv \sigma_1^{(0)} = \int\limits_0^\infty x f_0(x)\, dx, \quad t \geq 0, \ n \geq 1. \tag{2.6}$$

Поскольку ядра $\{\Phi_n\}_{n=1}^\infty$, определенные соотношениями (2.2), принадлежат некоторому шару $\mathcal{K}_c, \ c > 0$, из пространства $\mathcal{K}$, то при каждом номере $n \geq 1$ выполняется оценка

$$\Phi_n(x,y) \leq c\,(1 + x + y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}_2^+, \quad c > 0, \tag{2.7}$$

где число c не зависит от номера n.

В силу соотношений (2.4) и неравенств (2.7) имеем

$$\frac{d}{dt}\sigma_{k,n}(t) \leq c \sum_{i=1}^{k-1} \left((k-i+1)\sigma_{k-i+1,n}(t) + \frac{1}{2}\sigma_{k-i,n}(t) \right) \sigma_{i,n}(t)$$

при значениях $n \geq 1$, $k \geq 2$, причем

$$\sigma_{k,n}(0) = \sigma_k^{(0)} = \int\limits_0^\infty \frac{x^k}{k!} f_0(x)\, dx.$$

Введем функции $\sigma_k(t), \ k \geq 1$ как решения следующей задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\sigma_k(t){=}c\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}\left((k-i+1)\sigma_{k-i+1}(t)+\frac{1}{2}\sigma_{k-i}(t)\right)\sigma_i(t), \\ \sigma_1(t){\equiv}\sigma_1^{(0)}, \\ \sigma_k(0){=}\sigma_k^{(0)}, \quad 0\le t\le T,\ k\ge 2. \end{cases}$$

Очевидно, что выполняются оценки

$$\sigma_{k,n}(t)\le\sigma_k(t), \quad t\ge 0,$$

при $n,\ k\ge 1$. Поскольку функции f_n неотрицательные и выполняются соотношения (2.5), то

$$\|\, f_n\,\|_{0,k}^{(T)}{=}\sup_{0\le t\le T}\sum_{i=0}^{k} i!\,\sigma_{n,i}(t)\le\sigma_0^{(0)}+\sum_{i=1}^{k} i!\ \sigma_i(T)=M(T).$$

Отметим, что в последнем неравенстве сумму по i в правой части следует отбросить при $k=0$. Таким образом, в случае а) лемма доказана.

Перейдем к случаю, когда функция $f_0\in\Omega^+(0)$. Построим производящую функцию для $\sigma_k(t)$ в виде формального ряда

$$\sigma(\lambda,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k\sigma_k(t). \tag{2.8}$$

Вопрос о сходимости ряда (2.8) свяжем с изучением области существования аналитического по (λ,t) в окрестности точки $(\lambda,t)=(0,0)$ решения следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\sigma(\lambda,t){=}c\left(\sigma\dfrac{\partial}{\partial\lambda}\sigma-\sigma_1^{(0)}\sigma+\dfrac{1}{2}\sigma^2\right), \\ \sigma(\lambda,0){=}\sigma^{(0)}(\lambda), \end{cases} \tag{2.9}$$

где начальная функция определяется интегралом от f_0

$$\sigma^{(0)}(\lambda)=\int_0^{\infty}(\exp(\lambda x)-1)f_0(x)\,dx.$$

Очевидно, что функция $\sigma^{(0)}(\lambda)$ аналитична в круге $|\lambda| < \lambda_0$, т. к. ввиду условия б) функция f_0 принадлежит классу $\Omega^{+}_{\lambda_0}(0)$ при некотором $\lambda_0 > 0$. Непосредственно изучая задачу Коши (2.9), можно получить следующую неявную формулу для ее решения σ:

$$\sigma = \exp(-c\sigma_1^{(0)}t)\sigma^{(0)}\left(\lambda + 2\,\ln\left(1 + \frac{\sigma}{2\sigma_1^{(0)}}\left(\exp(c\sigma_1^{(0)}t) - 1\right)\right)\right) \times$$
$$\times \left\{1 - \frac{1}{2\sigma_1^{(0)}}\left(1 - \exp(-c\sigma_1^{(0)}t)\right) \times\right.$$
$$\left.\times\, \sigma^{(0)}\left(\lambda + 2\,\ln\left(1 + \frac{\sigma}{2\sigma_1^{(0)}}\left(\exp(c\sigma_1^{(0)}t) - 1\right)\right)\right)\right\}^{-1}. \qquad (2.10)$$

Покажем, что для любого круга

$$U_T = \{t:\, |t| \le T,\ T > 0\}$$

можно указать такой круг $\Lambda = \{\lambda:\, |\lambda| < \tilde{\lambda},\ \tilde{\lambda} > 0\}$, что в поликруге $\Lambda \times U_T$ существует аналитическое по λ, t решение неявного относительно σ уравнения (2.10), причем это решение является решением задачи (2.9). Рассмотрим функцию

$$R(\sigma, \lambda, t) \equiv$$

$$\equiv \sigma - \exp(-c\sigma_1^{(0)}t)\sigma^{(0)}\left(\lambda + 2\,\ln\left(1 + \frac{\sigma}{2\sigma_1^{(0)}}\left(\exp(c\sigma_1^{(0)}t) - 1\right)\right)\right) \times$$
$$\times \left\{1 - \frac{1}{2\sigma_1^{(0)}}\left(1 - \exp(-c\sigma_1^{(0)}t)\right) \times\right.$$
$$\left.\times\, \sigma^{(0)}\left(\lambda + 2\,\ln\left(1 + \frac{\sigma}{2\sigma_1^{(0)}}\left(\exp(c\sigma_1^{(0)}t) - 1\right)\right)\right)\right\}^{-1},$$

которая определена на каждом круге U_T по переменной t при достаточно малых по абсолютной величине λ и σ. Действительно, т. к. функция $\sigma^{(0)}(\lambda)$ голоморфна в окрестности точки $\lambda = 0$, причем

$\sigma^{(0)}(0) = 0$, то для любого круга U_T можно указать достаточно малую окрестность точки $(\lambda = 0,\ \sigma = 0)$

$$\Lambda_T \times \Sigma_T = \Big\{(\lambda, \sigma) : |\lambda| < \tilde{\lambda},\ |\sigma| < \tilde{\sigma},\ \tilde{\lambda} > 0,\ \tilde{\sigma} > 0\Big\}$$

такую, что функция R является аналитической в поликруге $\Sigma_T \times \Lambda_T \times U_T$, причем

$$R(0, 0, t) \equiv 0, \quad t \in U_T. \tag{2.11}$$

В точках $(0, 0, t), t\ \in U_T$ выполняется также соотношение

$$\frac{\partial}{\partial\sigma} R(0, 0, t) \equiv \exp(-c\sigma_1^{(0)} t) \neq 0.$$

Следовательно, по теореме о неявной функции [38] в окрестности каждой точки $(0, t_0) \in \Lambda_T \times U_T$ существует единственное аналитическое решение уравнения (2.10) — функция $\sigma^{(t_0)}(\lambda, t)$, удовлетворяющая условию $\sigma^{(t_0)}(0, t_0) = 0$. Таким образом, возникает семейство открытых кругов $\Lambda^{(t_0)} \times U^{(t_0)}$ с центром в точках $(\lambda, t) = (0, t_0)$, в каждом из которых уравнение (2.10) обладает аналитическим решением $\sigma^{(t_0)}$. Отметим, что в силу соотношения (2.11) построенные функции $\sigma^{(t_0)}$ необходимо должны удовлетворять тождествам

$$\sigma^{(t_0)}(0, t) \equiv 0, \quad t \in U^{(t_0)},\ t_0 \in U_T. \tag{2.12}$$

Система открытых кругов $U^{(t_0)}$ $(t_0 \in U_T)$ образует покрытие замкнутого круга U_T. Выберем из указанного покрытия конечное подпокрытие $U^{(t_1)}, U^{(t_2)}, \ldots, U^{(t_n)}$. Положим $\Lambda = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \Lambda^{(t_i)}$. Итак, в каждом поликруге $\Lambda \times U^{(t_i)}$ существует единственное аналитическое по (λ, t) решение уравнения (2.10) $\sigma^{(t_i)}$, которое удовлетворяет соотношению (2.12). Поскольку система кругов $\{U^{(t_i)}\}_{i=1}^{n}$ покрывает U_T, то для каждого круга $U^{(t_i)}$ можно указать круг $U^{(t_j)}$, $i \neq j$, такой, что $U^{(t_i)} \bigcap U^{(t_j)} \neq \emptyset$. Фиксируем произвольную точку $\bar{t} \in U^{(t_i)} \bigcap U^{(t_j)}$. В силу соотношений (2.12) выполняется равенство

$$\sigma^{(t_i)}(0, \bar{t}) = \sigma^{(t_j)}(0, \bar{t}). \tag{2.13}$$

Ввиду аналитичности функций $\sigma^{(t_i)}$ и $\sigma^{(t_j)}$ на $\Lambda \times (U^{(t_i)} \bigcap U^{(t_j)})$ и локальной единственности решения уравнения (2.10) соотношение (2.13) обеспечивает совпадение функций $\sigma^{(t_i)}$ и $\sigma^{(t_j)}$ на указанном множестве, т. е. существует аналитическое продолжение $\sigma^{(t_i)}$ и $\sigma^{(t_j)}$

на область $\Lambda \times (U^{(t_i)} \bigcup U^{(t_j)})$. Воспользовавшись связностью покрытия $\{U^{(t_i)}\}_{i=1}^n$ получаем, что существует аналитическое продолжение функций $\sigma^{(t_1)}, \sigma^{(t_2)}, \ldots, \sigma^{(t_n)}$ на $\Lambda \times U_T$; построенное аналитическое продолжение обозначим σ. Таким образом, доказано существование аналитического на $\Lambda \times U_T$ решения уравнения (2.10), удовлетворяющего соотношению

$$\sigma(0,t) \equiv 0, \quad t \in U_T.$$

Последнее тождество обеспечивает единственность такого решения.

Подставляя (2.10) в уравнение (2.9), убеждаемся, что построенная функция σ является решением задачи Коши (2.9). Коэффициенты разложения функции σ в ряд Тейлора по степеням λ совпадают с коэффициентами формального ряда (2.8). Следовательно, ряд (2.8) сходится в некоторой области $(|\lambda| \le \bar\lambda,\ 0 \le t \le T)$, $\bar\lambda > 0$, а т.к. функция σ ограничена на указанном множестве, то имеет место оценка

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bar\lambda^k \sigma_k(t) \le M_1 < \infty$$

равномерно относительно $0 \le t \le T$. Эта оценка обеспечивает выполнение следующих неравенств:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bar\lambda^k \sigma_{k,n}(t) \le M_1, \quad n \ge 1,$$

равномерно относительно $0 \le t \le T$. Воспользовавшись теоремой Б. Леви [36], получаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bar\lambda^k \sigma_{k,n}(t) = \int_0^{\infty} [\exp\left(\bar\lambda x\right) - 1] f_n(x,t)\, dx \le M_1,$$

$$0 \le t \le T,\ n \ge 1.$$

Ввиду неравенства (2.5) имеем

$$\int_0^{\infty} \exp(\bar\lambda x) f_n(x,t)\, dx \le M_1 + N_0 = M(T),$$

$$0 \le t \le T,\ n \ge 1$$

и окончательно

$$\| f_n \|_{\lambda}^{(T)} \leq M(T) < \infty, \quad n \geq 1.$$

Лемма доказана.

Отметим два важных неравенства, вытекающих из леммы 2.1 в случае, когда начальная функция $f_0 \in \Omega_{0,2}^{+}(0)$:

$$\int_{a}^{\infty} f_n(x,t)\,dx \leq \frac{\sigma_1^{(0)}}{a}, \quad \int_{a}^{\infty} x f_n(x,t)\,dx \leq \frac{2\sigma_2(T)}{a}, \tag{2.14}$$

$$0 \leq t \leq T, \;\; a > 0, \;\; n \geq 1.$$

§ 4. Компактность семейства аппроксимаций в пространстве непрерывных функций

В этом параграфе рассматривается вопрос о компактности семейства решений $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ задачи Коши (2.3) с ограниченными ядрами Φ_n, которые согласно соотношениям (2.2) аппроксимируют неограниченное ядро $\Phi \in \mathcal{K}$.

Обозначим

$$\Pi_T(X) = \{(x,t) : 0 \leq x \leq X, \; 0 \leq t \leq T, \; X, T \geq 0\}.$$

ЛЕММА 2.2. *Пусть начальная функция* $f_0 \in \Omega_{0,2}^{+}(0)$. *Тогда последовательность* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *решений задачи Коши* (2.3) *с ядрами, определенными соотношениями* (2.2), *компактна в пространстве непрерывных функций* C *на каждом прямоугольнике* $\Pi_T(X)$, *где величины* X, $T > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем равномерную ограниченность последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ на прямоугольнике $\Pi_T(X)$, который считается фиксированным при всех последующих рассуждениях. Воспользовавшись неотрицательностью решений f_n задачи Коши (2.3), получаем неравенство

$$f_n(x,t) \leq f_0(x) + \frac{1}{2}\int_{0}^{t}\int_{0}^{x} \Phi_n(x-y,y) f_n(x-y,s) f_n(y,s)\,dy ds \tag{2.15}$$

при $(x,t) \in \Pi_T(X)$, $n \geq 1$. Примем обозначения:

$$L_0 = \sup_{0 \leq x \leq X} f_0(x),$$

$$L_n(t) = \sup_{0 \leq x \leq X} f_n(x,t), \quad 0 \leq t \leq T, \; n \geq 1.$$

В этих обозначениях неравенство (2.15), усиленное за счет того, что ядра Φ_n удовлетворяют соотношению (2.7) при всех номерах $n \geq 1$, приобретает вид

$$L_n(t) \leq L_0 + K \int_0^t L_n(s)\, ds, \quad 0 \leq t \leq T, \; n \geq 1,$$

где $K = \dfrac{1}{2} c\, \sigma_0^{(0)}(1+X)$. Пользуясь леммой Гронуолла [39], получаем оценку

$$L_n(t) \leq L_0 \exp(KT) = M, \quad 0 \leq t \leq T, \; n \geq 1. \tag{2.16}$$

Поскольку число M не зависит от номера $n \geq 1$, то последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно ограничена на $\Pi_T(X)$.

Далее покажем равностепенную непрерывность последовательности решений задачи Коши (2.3) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ по t. Предположим, что $0 \leq t \leq t' \leq T$. Непосредственно из (2.3) следует оценка

$$|f_n(x,t') - f_n(x,t)| \leq \int_t^{t'} |[f_n, f_n]_{\Phi_n}|\, ds, \quad 0 \leq t \leq T, \; n \geq 1.$$

Воспользовавшись соотношениями (2.5), (2.6), получаем

$$\sup_{0 \leq x \leq X} |[f_n, f_n]_{\Phi_n}| \leq cM \left(\sigma_1^{(0)} + \frac{3}{2}\sigma_0^{(0)}(1+X) \right) = M_1,$$

следовательно,

$$\sup_{0 \leq x \leq X} |f_n(x,t') - f_n(x,t)| \leq M_1 |t' - t|, \quad n \geq 1. \tag{2.17}$$

Отсюда вытекает равностепенная непрерывность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ по t.

Теперь установим равностепенную непрерывность последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ по x, $0 \leq x \leq X$. Отметим, что выполнено неравенство

$$|f_n(x',t) - f_n(x,t)| \le |f_0(x') - f_0(x)| +$$

$$+ \int_0^t ds \left\{ \frac{1}{2} \int_x^{x'} \Phi_n(x'-y,y) f_n(x'-y,s) f_n(y,s)\, dy + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^x |\Phi_n(x'-y,y) - \Phi(x-y,y)| f_n(x-y,s) f_n(y,s)\, dy +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^x \Phi_n(x'-y,y) |f_n(x'-y,s) - f_n(x-y,s)| f_n(y,s)\, dy +$$

$$+ |f_n(x',s) - f_n(x,s)| \int_0^\infty \Phi_n(x',y) f_n(y,s)\, dy +$$

$$\left. + f_n(x,s) \int_0^\infty |\Phi_n(x',y) - \Phi_n(x,y)| f_n(y,s)\, dy \right\}. \qquad (2.18)$$

Здесь предполагается, что $0 \le x \le x' \le X$. Последовательность ядер $\{\Phi_n\}_{n=1}^\infty$, определенная соотношениями (2.2), равностепенно непрерывна на любом прямоугольнике $[0, X] \times [0, a]$, $a > 0$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть $a = \varepsilon^{-1}$. Выберем $0 < \delta(\varepsilon) < \varepsilon$ так, чтобы были выполнены неравенства

$$\begin{gathered} \sup_{\substack{|x'-x|<\delta, \\ 0 \le x, x' \le X}} |f_0(x') - f_0(x)| < \varepsilon, \\ \sup_{\substack{|x'-x|<\delta, \\ 0 \le x, x' \le X}} |\Phi_n(x',y) - \Phi_n(x,y)| < \varepsilon \end{gathered} \qquad (2.19)$$

равномерно относительно $n \ge 1$ и $0 \le y \le a$. Воспользовавшись оценками (2.5), (2.14), получаем

$$\int_0^\infty |\Phi_n(x',y) - \Phi_n(x,y)| f_n(y,t)\, dy =$$

$$= \int\limits_0^a |\Phi_n(x',y) - \Phi_n(x,y)| f_n(y,t)\, dy +$$

$$+ \int\limits_a^\infty |\Phi_n(x',y) - \Phi_n(x,y)| f_n(y,t)\, dy \le$$

$$\le \varepsilon\sigma_0^{(0)} + c(1+X)\frac{\sigma_1^{(0)}}{a} + 2\frac{c\sigma_2(T)}{a} = M_2\varepsilon, \tag{2.20}$$

где константа $M_2 \ge 0$ зависит только от c, $\sigma_0^{(0)}$, $\sigma_1^{(0)}$, $\sigma_2(T)$, X, T. Обозначим

$$\omega_n(t,\varepsilon) = \sup_{\substack{|x'-x|<\delta(\varepsilon),\\ 0\le x,x'\le X}} |f_n(x',t) - f_n(x,t)|$$

— модуль непрерывности функции f_n по x на $\Pi_T(X)$. Усиливая неравенство (2.18) при помощи соотношений (2.19), (2.20), получаем

$$\omega_n(t,\varepsilon) \le K_1\varepsilon + K_2 \int\limits_0^t \omega_n(s,\varepsilon)\, ds, \quad 0 \le t \le T,\ n \ge 1,$$

где константы $K_1 \ge 0$ и $K_2 \ge 0$ зависят только от c, M, X, T, $\sigma_0^{(0)}$, $\sigma_1^{(0)}$, $\sigma_2(T)$. Применением леммы Гронуолла [39] устанавливаем справедливость следующего неравенства:

$$\omega_n(t,\varepsilon) \le K_1 \exp(K_2 T)\varepsilon = M_3\varepsilon, \quad 0 \le t \le T,\ n \ge 1.$$

Константа M_3 от номера $n \ge 1$ и $\varepsilon > 0$ не зависит. Итак, окончательно имеем

$$\sup_{0\le t\le T} |f_n(x',t) - f_n(x,t)| \le M\varepsilon \tag{2.21}$$

при $|x'-x| < \delta(\varepsilon)$ равномерно относительно n, $n \ge 1$. Из оценок (2.16), (2.17), (2.21) и теоремы Арцела [36] следует утверждение леммы. Лемма доказана.

§ 5. Доказательство разрешимости задачи Коши для уравнения коагуляции с неограниченным ядром

ЛЕММА 2.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1. *Тогда задача Коши* (1.2) *в полосе* Π_T *имеет решение* f,

а) *принадлежащее классу* $\Omega^+_{0,k}(T)$, $k \geq 2$, *если начальная функция* $f_0 \in \Omega^+_{0,k}(0)$, $k \geq 2$;

б) *принадлежащее классу* $\Omega^+(T)$, *если начальная функция* $f_0 \in \Omega^+(0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим последовательность прямоугольников $\Pi^{(i)} = \Pi_T(i)$, где $i = 1, 2, \ldots$ В силу леммы 2.2 последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ решений задачи Коши (2.3), соответствующая последовательности ограниченных ядер $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ (2.2), компактна в C на каждом прямоугольнике $\Pi^{(i)}$, $i \geq 1$. Выберем из последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ подпоследовательность $\{f_{n_k^{(1)}}\}_{k=1}^{\infty}$, равномерно сходящуюся на $\Pi^{(1)}$. Из $\{f_{n_k^{(1)}}\}_{k=1}^{\infty}$ выберем подпоследовательность $\{f_{n_k^{(2)}}\}_{k=1}^{\infty}$, равномерно сходящуюся на $\Pi^{(2)}$, из $\{f_{n_k^{(i)}}\}_{k=1}^{\infty}$ выберем подпоследовательность $\{f_{n_k^{(i+1)}}\}_{k=1}^{\infty}$, равномерно сходящуюся на прямоугольнике $\Pi^{(i+1)}$, и т. д. Очевидно, что диагональная последовательность $\{f_{n_k^{(k)}}\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно сходится на каждом прямоугольнике $\Pi^{(i)}$, $i \geq 1$ к некоторой функции f. Ввиду того, что функции $f^{(k)} \overset{def}{=} f_{n_k^{(k)}}$ непрерывные и неотрицательные, этими свойствами обладает функция f. По лемме 2.1 все функции $f^{(i)}$ принадлежат классу $\Omega^+_{0,k}(T)$, $k \geq 2$, если начальная функция $f_0 \in \Omega^+_{0,k}(T)$, $k \geq 2$, либо $f^{(i)} \in \Omega^+(T)$, если начальная функция $f_0 \in \Omega^+(0)$. Воспользовавшись оценками из леммы 2.1 и леммой Фату [36], получаем, что $f \in \Omega^+_{0,k}(T)$, $k \geq 2$, если $f_0 \in \Omega^+_{0,k}(0)$, $k \geq 2$, либо $f \in \Omega^+(T)$, если $f_0 \in \Omega^+(0)$, причем для функции f в силу соотношений (2.14) выполнены следующие неравенства:

$$\int_a^{\infty} f(x,t)\,dx \leq \frac{\sigma_1^{(0)}}{a}, \quad \int_a^{\infty} x f(x,t)\,dx \leq \frac{2\sigma_2(T)}{a}, \tag{2.22}$$

$$0 \leq t \leq T, \quad a > 0.$$

Поскольку на каждом прямоугольнике $\Pi^{(k)}$, $k \geq 1$ функции $f^{(i)}$ равномерно сходятся к f и выполнены неравенства (2.14), (2.22), то

$$\int\limits_0^\infty |f(x,t) - f^{(i)}(x,t)|\,dx, \quad \int\limits_0^\infty x|f(x,t) - f^{(i)}(x,t)|\,dx \to 0, \qquad (2.23)$$

$$i \to \infty,$$

равномерно относительно $0 \leq t \leq T$.

Рассмотрим невязку $\delta(x,t)$:

$$\delta(x,t) = f(x,t) - f_0(x) - \int\limits_0^\infty [f,f]_\Phi\,ds.$$

Обозначим $\Phi^{(i)}$ ядра в последовательности $\{\Phi_n\}_{n=1}^\infty$, соответствующие функциям $f^{(i)}$, $i \geq 1$. Очевидно, что

$$\delta(x,t) = f(x,t) - f^{(i)}(x,t) - \int_0^t \Big\{[f - f^{(i)}, f - f^{(i)}]_\Phi +$$

$$+2[f - f^{(i)}, f^{(i)}]_\Phi + [f^{(i)}, f^{(i)}]_{\Phi - \Phi^{(i)}}\Big\}\,ds.$$

Поскольку $\Phi^{(i)}(x,y) = \Phi(x,y)$ $(0 \leq x, y \leq n_i,\ n_i \geq 1)$, $n_i \to \infty$ при $i \to \infty$ и имеют место соотношения (2.23), то $\delta(x,t) \to 0$ при $i \to \infty$, $(x,t) \in \Pi_T$, откуда получаем

$$f(x,t) = f_0(x) + \int\limits_0^t [f,f]_\Phi\,ds.$$

Ввиду того, что подынтегральное выражение непрерывно по t, функция f является решением задачи Коши (1.2) для уравнения коагуляции с ядром $\Phi \in \mathcal{K}$. Тем самым завершается доказательство леммы.

§ 6. Доказательство теоремы существования и единственности решения задачи Коши с неограниченным ядром

Докажем одну лемму, на которую существенно опирается доказательство утверждения о единственности решения задачи Коши (1.2) в классе $\Omega(T)$. Метод доказательства предлагаемой леммы аналогичен методу, применявшемуся при доказательстве известной леммы Хаара [39].

ЛЕММА 2.4. *Пусть $v(\lambda, t)$ — непрерывная вещественная функция на множестве*

$$D = \{(\lambda, t) : 0 \le \lambda \le \lambda_0,\ 0 \le t \le T\}$$

и имеет в этой области непрерывные частные производные v_λ, $v_{\lambda\lambda}$. Предположим, что функции v, v_λ, $v_{\lambda\lambda} \ge 0$ на D. Пусть $\alpha(\lambda)$, $\beta(\lambda, t)$, $\gamma(\lambda, t)$ — вещественные непрерывные на D функции и имеют там непрерывные частные производные $\alpha_\lambda, \beta_\lambda$, γ_λ. Пусть на множестве D выполнены неравенства

1) $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \alpha_\lambda,\ \beta_\lambda,\ \gamma_\lambda \ge 0;$

2) $$v(\lambda, t) \le \alpha(\lambda) + \int\limits_0^t [\beta(\lambda, s) v_\lambda(\lambda, s) + \gamma(\lambda, s) v(\lambda, s)]\, ds;$$

3) $$v_\lambda(\lambda, t) \le \alpha_\lambda(\lambda) + \int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial \lambda}[\beta(\lambda, s) v_\lambda(\lambda, s) + \gamma(\lambda, s) v(\lambda, s)]\, ds.$$

Обозначим $c_0 = \sup\limits_D \alpha,\ c_1 = \sup\limits_D \beta,\ c_2 = \sup\limits_D \gamma.$

Тогда в области $R \subset D$

$$R = \left\{(\lambda, t) : 0 \le t \le T',\ 0 \le \lambda \le \lambda_0 - c_1 t,\ T' = \min\left(\frac{\lambda_0}{c_1}, T\right)\right\}$$

выполнено неравенство

$$v(\lambda, t) \le c_0 \exp(c_2 t).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим правую часть неравенства 2) в условии теоремы величиной V:

$$V(\lambda, t) = \alpha(\lambda) + \int_0^t [\beta(\lambda, s) v_\lambda(\lambda, s) + \gamma(\lambda, s) v(\lambda, s)]\, ds, \quad (\lambda, t) \in D. \tag{2.24}$$

Из этого тождества следует справедливость следующих соотношений для функции V:

$$\begin{cases} V_t(\lambda, t) = \beta(\lambda, t) v_\lambda(l, t) + \gamma(\lambda, t) v(\lambda, t), \\ V(\lambda, 0) = \alpha(\lambda), \quad (\lambda, t) \in D. \end{cases} \tag{2.25}$$

Дифференцируя тождество (2.24) по переменной λ, получаем

$$V_\lambda(\lambda, t) = \alpha_\lambda(\lambda) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial \lambda} [\beta(\lambda, s) v_\lambda(\lambda, s) + \gamma(\lambda, s) v_\lambda(\lambda, s)]\, ds, \tag{2.26}$$

$$(\lambda, t) \in D.$$

В силу условий теоремы 2), 3) и полученных тождеств (2.25), (2.26) выполнены неравенства

$$\begin{aligned} &0 \le v(\lambda, t) \le V(\lambda, t), \\ &0 \le v_\lambda(\lambda, t) \le V_\lambda(\lambda, t), \qquad (\lambda, t) \in D. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Подставляя (2.27) в соотношение (2.25), получаем неравенство

$$\begin{cases} V_t(\lambda, t) \le \beta(\lambda, t) V_\lambda(\lambda, t) + \gamma(\lambda, t) V_\lambda(\lambda, t), \\ V(\lambda, 0) = \alpha(\lambda), \qquad (\lambda, t) \in D, \end{cases}$$

из которого окончательно следует

$$\begin{cases} V_t(\lambda, t) \le c_1 V_\lambda(\lambda, t) + c_2 V(\lambda, t), \\ V(\lambda, 0) \le c_0, \quad (\lambda, t) \in D, \end{cases} \tag{2.28}$$

причем функции $V,\ V_t,\ V_\lambda \geq 0$ на множестве D. Пусть $c' > c_0$, $\varepsilon > 0$. Положим

$$u(\lambda, t) \equiv c' \exp(c_2 t) + \varepsilon \frac{\exp(c_2 t) - 1}{c_2}.$$

Поскольку $u_\lambda \equiv 0$, то на D выполняется тождество

$$u_t(\lambda, t) = c_1 u_\lambda(\lambda, t) + c_2 u(\lambda, t) + \varepsilon. \tag{2.29}$$

Покажем, что на множестве R, определенном в условиях леммы, имеет место неравенство

$$u(\lambda, t) - V(\lambda, t) > 0, \tag{2.30}$$

откуда предельным переходом $c' \to c_0,\ \varepsilon \to 0$ получается

$$V(\lambda, t) \leq c_0 \exp{(c_2 t)}, \qquad (\lambda, t) \in R,$$

что в силу соотношений (2.27) дает утверждение леммы.

Построение функции u обеспечивает при малых $t > 0$ выполнение неравенства

$$u(\lambda, t) - V(\lambda, t) > 0.$$

Если во множестве R неравенство (2.30) неверное, то можно указать точку $(\lambda', t') \in R$, где $0 < t' \leq T'$, такую, что неравенство (2.29) остается справедливым в части множества R с условием $0 < t \leq T'$, а в точке (λ', t') будет иметь место равенство.

Рассмотрим отрезок

$$\mathcal{L} = (t, \lambda' + c_1(t' - t)), \quad 0 \leq t \leq t'.$$

Он находится, очевидно, во множестве R, причем разность $u - V$ в точках отрезка $\mathcal{L}$ положительная при $0 \leq t \leq t'$ и равна нулю при $t = t'$. Следовательно, производная разности $u - V$ вдоль отрезка $\mathcal{L}$ в точке $t = t'$ неположительная. Таким образом, получаем

$$u_t - V_t - c_1 \frac{\partial}{\partial \lambda}(u - V) \leq 0, \quad t = t', \ \ \lambda = \lambda'.$$

Из соотношения (2.28) имеем

$$u_t = c_2 u + \varepsilon,$$

так что $u_t = c_2 V + \varepsilon$ при $t = t',\ \ \lambda = \lambda'$. А т.к. выполняется тождество $u_\lambda \equiv 0$, то

$$V_t \geq c_1 V_\lambda + c_2 V + \varepsilon, \quad (t = t',\ \lambda = \lambda')$$

и поскольку $\varepsilon > 0$, получаем

$$V_t > c_1 V_\lambda + c_2 V, \quad (t = t', \quad \lambda = \lambda').$$

Но это неравенство противоречит неравенству (2.28).

Следовательно, соотношение (2.30) выполняются всюду на множестве R и, значит,

$$v(\lambda, t) \leq c_0 \exp(c_2 t), \qquad (\lambda, t) \in R.$$

Лемма доказана.

Теперь докажем теорему существования и единственности решениия задачи Коши для уравнения коагуляции с неограниченным ядром $\Phi \in \mathcal{K}$, т. е. теорему 2.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Утверждение о существовании решения задачи Коши (1.2) в классе $\Omega^+_{0,k}(T)$, $k \geq 2$, когда начальная функция $f_0 \in \Omega^+_{0,k}(0)$, и в классе $\Omega^+(T)$, когда $f_0 \in \Omega^+(0)$, доказанно в лемме 2.3.

Докажем единственность решения $f_0 \in \Omega^+(T)$ в классе $\Omega(T)$. Предположим, что существует два различных решения задачи Коши (1.2) f и g, которые лежат в классе $\Omega(T)$, тогда выполняется тождество

$$f - g = \int\limits_0^t [f - g, f + g]_\Phi \, ds.$$

Вводя обозначения $u = |f - g|$, $\psi = |f + g|$ и воспользовавшись тем, что ядро Φ принадлежит шару $\mathcal{K}_c$ при некотором $c > 0$, получаем из этого тождества следующее неравенство:

$$\begin{gathered} u(x,t) \leq \frac{c}{2} \int\limits_0^t ds \left\{ (1+x) \int\limits_0^x u(x-y,s)\psi(y,s)\,dy + \right. \\ + u(x,s) \int\limits_0^\infty (1+x+y)\psi(y,s)\,dy + \\ \left. + \psi(x,s) \int\limits_0^\infty (1+x+y)u(y,s)\,dy \right\}, \quad (x,t) \in \Pi_T. \qquad (2.31) \end{gathered}$$

Поскольку функции $f,\ g \in \Omega(T)$, то и $\psi \in \Omega^{+}(T)$. Пусть число $\tilde{\lambda} > 0$ выбрано таким, что

$$\int\limits_0^\infty \exp(\tilde{\lambda}x)u(x,t)\,dx, \quad \int\limits_0^\infty \exp(\tilde{\lambda}x)\psi(x,t)\,dx \le M < \infty \tag{2.32}$$

равномерно относительно $0 \le t \le T$. Пусть $0 \le \lambda < \tilde{\lambda}$, тогда интегрируя неравенство (2.31) с весом $\exp(\lambda x)$, получаем

$$\int\limits_0^\infty \exp(\lambda x)u(x,t)\,dx \le \frac{c}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty [\exp(\lambda(x+y))+$$

$$+\exp(\lambda x)+\exp(\lambda y)]\,(1+x+y)u(x,s)\psi(y,s)\,dxdyds.$$

При интегрировании в правой части этого неравенства мы сделали перестановку порядка интегрирования, пользуясь теоремой Фубини [36]. Усилим полученное неравенство:

$$\int\limits_0^\infty \exp(\lambda x)u(x,t)\,dx \le \frac{3}{2}c\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \exp[\lambda(x+y)]\times$$

$$\times(1+x+y)u(x,s)\psi(y,s)\,dxdyds. \tag{2.33}$$

Аналогичным образом получим следующее неравенство:

$$\int\limits_0^\infty x\exp(\lambda x)u(x,t)\,dx \le \frac{3}{2}c\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \exp[\lambda(x+y)]\times$$

$$\times(x+y)(1+x+y)u(x,s)\psi(y,s)\,dxdyds. \tag{2.34}$$

Обозначим

$$U(\lambda,t) = \int\limits_0^\infty \exp(\lambda x)\,u(x,t)\,dx;$$

$$\Psi(\lambda,t) = \int\limits_0^\infty \exp(\lambda x)\,\psi(x,t)\,dx.$$

Функции U и Ψ аналитичны в полуплоскости Re $\lambda < \tilde{\lambda}$ при любом фиксированном $0 \le t \le T$. Пусть число λ лежит на вещественной оси и удовлетворяет условиям $0 \le \lambda \le \lambda_0$ $(0 < \lambda_0 < \tilde{\lambda})$, тогда оценки (2.32) гарантируют, что для любого целого i $(i \ge 1)$ справедливы неравенства

$$\sup_{\substack{0 \le t \le T, \\ 0 \le \lambda \le \lambda_0}} \left\{ \frac{\partial^i}{\partial \lambda^i} U(\lambda, t),\ \frac{\partial^i}{\partial \lambda^i} \Psi(\lambda, t) \right\} \le M_i < \infty. \tag{2.35}$$

Далее, поскольку функции u и ψ непрерывны на Π_T и выполнены оценки (2.32), то по заданному $\varepsilon > 0$ можно выбрать $\delta(\varepsilon) > 0$, $\delta_i(\varepsilon) > 0$, $i \ge 1$, такие, что для $0 \le t,\ t' \le T,\ i \ge 1$ справедливы соотношения

$$\sup_{\substack{0 \le \lambda \le \lambda_0, \\ |t - t'| < \delta}} \{|U(\lambda, t') - U(\lambda, t)|,\ |\Psi(\lambda, t') - \Psi(\lambda, t)|\} < \varepsilon,$$

$$\sup_{\substack{0 \le \lambda \le \lambda_0, \\ |t - t'| < \delta_i}} \left\{ |\frac{\partial^i}{\partial \lambda^i} U(\lambda, t') - \frac{\partial^i}{\partial \lambda^i} U(\lambda, t)|,\ |\frac{\partial^i}{\partial \lambda^i} \Psi(\lambda, t') - \frac{\partial^i}{\partial \lambda^i} \Psi(\lambda, t)| \right\} < \varepsilon. \tag{2.36}$$

В силу оценок (2.35), (2.36) функции U и Ψ непрерывны вместе со своими частными производными по λ при $0 \le \lambda \le \lambda_0$, $0 \le t \le T$. Из неравенств (2.33), (2.34) следует, что для $0 \le \lambda \le \lambda_0$ $(0 < \lambda_0 < \tilde{\lambda})$, $0 \le t \le T$ выполнены сооношения

$$U(\lambda, t) \le \frac{3}{2} c \int_0^t \{\Psi(\lambda, s) U_\lambda(\lambda, s) + [\Psi(\lambda, s) + \Psi_\lambda(\lambda, s)] U(\lambda, s)\}\, ds,$$

$$U_\lambda(\lambda, t) \le \frac{3}{2} c \int_0^t \frac{\partial}{\partial \lambda} \{\Psi(\lambda, s) U_\lambda(\lambda, s) + [\Psi(\lambda, s) + \Psi_\lambda(\lambda, s)] U(\lambda, s)\}\, ds,$$

причем функции U и Ψ неотрицательные вместе со своими частными производными по λ в указанной области. Мы находимся в условиях применимости леммы 2.4 в области

$$\mathcal{D} = \{0 \le \lambda \le \lambda_0,\ 0 \le t \le T\}.$$

Обозначим

$$c_1 = \frac{3}{2}c \sup_{\mathcal{D}} \Psi, \quad c_2 = \frac{3}{2}c \sup_{\mathcal{D}}(\Psi + \Psi_\lambda).$$

Тогда в области R, определенной в лемме 2.4, имеем

$$U(\lambda, t)=0.$$

Поскольку $U(x,t)$ — непрерывная функция, то $u(x,t) = 0$ для $0 \le t \le \tau < T'$, $0 \le x < \infty$, а, значит, $U(\lambda,t)=0$ в области $0 \le \lambda \le \lambda_0$, $0 \le t \le \tau$. Применяя эти рассуждения на отрезке времени $[\tau, 2\tau]$ приходим к тому, что $U(x,t) = 0$ при $0 \le \tau \le 2\tau$, $0 \le x < \infty$ и, продолжая эту процедуру дальше, заключаем, что $U(x,t) = 0$ на полосе Π_T, т. е. $f = g$ на полосе Π_T. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Из компактности в пространстве непрерывных функций последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ на любом прямоугольнике $\Pi_T(X)$, $0 < X < \infty$, и единственности построеного решения в классе $\Omega(T)$ следует, что последовательность $f_n \to f$ равномерно на каждом прямоугольнике $\Pi_T(X)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность решений задачи Коши (2.3) при начальной функции $f_0 \in \Omega^+(0)$. В силу свойств компактности этой последовательности, указанных в лемме 2.2, она компактна в метрическом пространстве $C(T)$, которое определенно в §1 гл. 1. Из метода построения решения задачи Коши (1.2) в лемме 2.3 следует, что все предельные точки последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $C(T)$ являются решениями уравнения (0.1), принадлежащими классу $\Omega^+(T)$. Теорема 2.1 гарантирует наличие только одной предельной точки у этой последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ в метрике пространства $C(T)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Вместо последовательности ядер, определенных соотношениями (2.2), можно было использовать произвольную последовательность ядер $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ из класса $\mathcal{K}_0^+$, принадлежащих фиксированному шару $\{\Phi: \ \Phi \in \mathcal{K}_c\}$, при условии, что $r(\Phi_n, \Phi) \to 0$, $n \to \infty$.

Использование финитных ядер $\Phi_n \to \Phi$, сходящихся в шаре $\mathcal{K}_c$, дает возможность построить приближенное решение уравнения (0.1), обрезая бесконечные пределы интегрирования в правой части этого уравнения. Это вытекает из утверждения следствия 2.1. Данное замечание имеет особую ценность для применения вычислительной техники в случая построения приближенного решения уравнения коагуляции с физически реальными ядрами взаимодействия коагулирующих частиц.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Неограниченность ядра с порядком роста, превосходящим линейный, приводит к совершенно необычным по своим свойствам решениям уравнения Смолуховского. В частности, эволюция начального финитного неотрицательного спектра в случае мультипликативного ядра $\Phi(x, y) = xy$ приводит к несуществованию интегральных моментов решения, начиная со второго момента. Это влечет за собой такое необычное свойство решения как нарушение соотношения сохранения массы. Она начинает монотонно убывать. Подробнее эти свойства изложены в гл. 5. Косвенным свидетельством тому служит простая выкладка, приводящая к противоречию с неотрицательностью решения уравнения Смолуховского, если предположить выполнение соотношения сохранения при всех неотрицательных значениях времени. Действительно, предполагая существование неотрицательного решения $f \in \Omega^+_{0,2}(T)$ у уравнения (0.1) при $t \geq 0$ с ядром $\Phi(x, y) = xy$, получаем, что на этом решении необходимо выполняется следующее тождество:

$$\int\limits_0^\infty f(x,t)\,dx = \sigma_0^{(0)} - \frac{1}{2}(\sigma_1^{(0)})^2 t,$$

где коэффициенты в правой части заданы формулами

$$\sigma_0^{(0)} = \int\limits_0^\infty f_0(x)\,dx, \quad \sigma_1^{(0)} = \int\limits_0^\infty x f_0(x)\,dx.$$

Очевидно, при $t > \dfrac{2\sigma_0^{(0)}}{(\sigma_1^{(0)})^2}$ оно противоречит неотрицательности функции f. Таким образом, число T не может превосходить величины $\dfrac{2\sigma_0^{(0)}}{(\sigma_1^{(0)})^2}$. Это означает, что решение в классе $\Omega^+_{0,2}(T)$ может существовать лишь локально. Подробно данные эффекты разобраны в гл. 5.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Решение задачи Коши (1.2), построенное в теореме 2.1 с начальной функцией $f_0 \in \Omega(0)$ (случай б) в ее формулировке), является локально аналитическим по t в окрестности каждой точки $t \geq 0$. Это утверждение получается буквальным повторением рассуждений леммы 1.4 (применявшейся для ограниченных ядер Φ), когда решение задачи Коши ищется в виде формального ряда (1.15) с коэффициентами (1.16). Но для неограниченных ядер $\Phi \in \mathcal{K}$ из теоремы 2.1 в отличие от леммы 1.4 мажоранта для ряда (1.15) получается уже не на основе оценок (1.18), а за счет построения локально аналитического в окрестности точки ($\lambda = 0$, $t = 0$) решения задачи Коши вида (2.9). Коэффициенты тейлоровского разложения при $t = 0$ ее решения $\sigma(\lambda, t)$ мажорируют соответствующие коэффициенты формального ряда (1.15), что обеспечивает его сходимость в норме пространства

$$(\Omega_\lambda^{(0)},\ \|\,.\,\|_\lambda^{(0)})$$

при некотором положительном λ. Поскольку решение задачи Коши (1.2) в случае б) теремы 2.1 не покидает множество $\Omega(0)$ при всех $t \geq 0$, то приведенное локальное рассуждение для окрестности точки $t = 0$ распространяется на все неотрицательные значения времени. Следует подчеркнуть, что это свойство не имеет места для ядер с порядком роста на бесконечности, превосходящим линейный. Пример тому дает точное решение задачи Коши (1.2) с ядром $\Phi(x, y) = xy$, детально исследованное в гл. 5 (см. теоремы 5.1, 5.2). В случае этого ядра при любой суммируемой неотрицательной начальной функции $f_0 \neq 0$ существует критический момент времени $t_c = (\sigma_2(0))^{-1}$, когда происходит потеря гладкости решения по времени t в точности до класса C^1. Последнее напрямую связано с возникновением градиентной катастрофы при $t = t_c$ у решения квазилинейного уравнения хопфовского вида (5.16) — вещественного аналога уравнения для производящей функции σ в задаче (2.9).

Отметим, что обоснование локальной аналитичности решения удобно проводить в норме

$$\|\,\varphi\,\|_\lambda \stackrel{def}{=} \|\,\varphi\,\|_\lambda^0 \exp(\lambda), \quad \lambda > 0.$$

Локально аналитическое решение задачи Коши для уравнения Смолуховского (0.1) с ядром $\Phi \in \mathcal{K}_c$ мажорируется производящей функцией [125]

$$u(\lambda, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(\lambda) t^k$$

с коэффициентами u_k, определяемыми по формулам

$$u_{k+1}(\lambda) = \frac{3c}{2(n+1)} \sum_{i+j=k} \frac{d}{d\lambda}(u_i(\lambda) u_j(\lambda)), \quad k \geq 0,$$

$$u_0(\lambda) = \|\, f_0 \,\|_\lambda, \quad f_0 \in \Omega_{\lambda_0}^+,\ \lambda_0 > 0.$$

По теореме Коши–Ковалевской [37] эти формальные соотношения определяют локальное аналитическое решение в окрестности начала координат для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 3cu\frac{\partial u}{\partial \lambda} = 0$$

с начальным условием

$$u(\lambda, 0) = u_0(\lambda).$$

§ 7. Устойчивость решения при возмущении входных данных

Остановимся на вопросе о непрерывной зависимости решения задачи Коши для уравнения коагуляции с неограниченными ядрами $\Phi \in \mathcal{K}$ относительно возмущения начальной функции и ядра. Доказательство устойчивости завершает круг проблем, связанных с корректностью задачи Коши (1.2) в данном классе ядер.

Примем следующие удобные для дальнейших рассуждений обозначения. Положим $\mathfrak{M} = \Omega^+(0)\times\mathcal{K}$ — пространство входных данных задачи Коши (1.2), снабженное естественной топологией произведения. Пусть

$$B_\lambda(M) \stackrel{def}{=} \Big\{ f_0 \in \Omega^+(0) : \| f \|_\lambda^{(0)} < M,\ M > 0 \Big\};$$

$$\mathfrak{M}_\lambda^{(c)}(M) = (B_\lambda(M), \| \,.\, \|_\lambda^{(0)}) \times (\mathcal{K}_c, r)$$

— усеченное пространство входных данных с «грубой» топологией;

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_\lambda^{(c)}(M) = (B_\lambda(M),\, d_\lambda^{(0)}) \times (\mathcal{K}_c, r)$$

— усеченное пространство входных данных с «тонкой» топологией.

В силу утверждения б) теоремы 2.1 возникает отображение

$$S : \mathfrak{M} \to \Omega^+(T),$$

переводящее каждую точку $(f_0, \Phi) \in \mathfrak{M}$ в решение f задачи Коши (1.2) при ядре Φ и начальной функции f_0:

$$f = S(f_0, \Phi).$$

Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 2.5. *Для любых* $\lambda^* > 0$, $c > 0$, $M > 0$, $T > 0$ *можно указать такое число* $\widetilde{\lambda}(\lambda^*, c, M, T) > 0$ *и функцию* $R(\lambda, t)$ *аналитическую при* $|\lambda| \le \widetilde{\lambda}$, $|t| \le T$, *что для образа множества* $\widetilde{\mathfrak{M}}^{(c)}_{\lambda^*}(M)$ *при отображении* S *выполняется включение*

$$S(\widetilde{\mathfrak{M}}^{(c)}_{\lambda^*}(M)) \subset \Omega^+_{\widetilde{\lambda}}(T)$$

и для каждого $f \in S(\widetilde{\mathfrak{M}}^{(c)}_{\lambda^*}(M))$ *справедливы неравенства*

$$\int\limits_0^\infty \exp(\lambda x) f(x,t)\, dx \le R(\lambda, t),$$

$$\frac{\partial^i}{\partial \lambda^i} \int\limits_0^\infty \exp(\lambda x) f(x,t)\, dx \le \frac{\partial^i}{\partial \lambda^i} R(\lambda, t) \quad (i = 1, 2 \ldots),$$

при аргументах $0 \le t < T,\ 0 \le \lambda \le \widetilde{\lambda}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждой функции $f_0 \in B_{\lambda^*}(M)$ справедлива оценка

$$\int\limits_0^\infty \exp(\lambda^* x) f_0(x)\, dx \le M$$

и, следовательно, выполняются следующие неравенства для моментов функции f_0:

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^k}{k!} f_0(x)\, dx \le M(\lambda^*)^{-k}, \quad k \ge 0. \tag{2.37}$$

Поскольку рассматриваемые ядра $\Phi \in \mathcal{K}_c$, то

$$\Phi(x,y) \le c(1 + x + y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^+_2. \tag{2.38}$$

Отметим, что при $t \ge 0$ на каждом решении уравнения (0.1) $f \in \Omega^+(T)$ имеют место тождества

$$\frac{d}{dt} \int\limits_0^\infty x^k f(x,t)\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty [(x+y)^k - x^k - y^k] \Phi(x,y) f(x,t) f(y,t)\, dx dy \tag{2.39}$$

при аргументах $0 \le t \le T,\ k \ge 0$. Обозначим

$$\sigma_k(t,f)=\int\limits_0^\infty \frac{x^k}{k!}f(x,t)\,dx,\quad k\geq 0.$$

Для решений уравнения (0.1), удовлетворяющих условию

$$f|_{t=0}\in B_{\lambda^*}(M),$$

в силу соотношений (2.37), (2.39) выполняются оценки

$$\sigma_0(t,f)\leq M,\quad \sigma_1(t,f)\leq M(\lambda^*)^{-1}, \tag{2.40}$$

$$0\leq t\leq T.$$

Сочетая неравенство (2.38) с тождествами (2.39), имеем

$$\frac{d}{dt}\sigma_k(t,f)\leq c\sum_{i=1}^{k-1}\left((k-i+1)\sigma_{k-i+1}(t,f)+\frac{1}{2}\sigma_{k-i}(t,f)\right)\sigma_i(t,f),$$

$$0\leq t\leq T,\quad k\geq 2,$$

причем соотношение (2.37) обеспечивает справедливость следующих неравенств:

$$\sigma_k(0,f)\leq M(\lambda^*)^{-k},\quad k\geq 0.$$

Определим функции $\sigma_k(t)$ как решения задачи

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\sigma_k(t)=\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}\left((k-i+1)\sigma_{k-i+1}(t)+\frac{1}{2}\sigma_{k-i}(t)\right)\sigma_i(t), \\ \sigma_1(t)\equiv M(\lambda^*)^{-1}, \\ \sigma_k(0)=M(\lambda^*)^{-k},\quad 0\leq t\leq T,\quad k\geq 2. \end{cases} \tag{2.41}$$

Очевидно, что выполняются неравенства

$$\begin{gathered} \sigma_k(t,f)\leq\sigma_k(t),\qquad t\geq 0,\ k\geq 1,\\ (f_0,\Phi)\in\mathfrak{M}^{(c)}_{\lambda^*}(M),\qquad f=S(f_0,\Phi). \end{gathered} \tag{2.42}$$

Рассуждая аналогично доказательству леммы 2.1, построим производящую функцию для $\sigma_k(t)$ в виде ряда (2.8). Вопрос о сходимости этого ряда свяжем с изучением области существования аналитического по (λ, t) в окрестности точки $(\lambda = 0,\ t = 0)$ решения следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\sigma}{\partial t} = c\left(\sigma\dfrac{\partial\sigma}{\partial\lambda} - M(\lambda^*)^{-1}\sigma + \dfrac{1}{2}\sigma^2\right), \\ \sigma(\lambda, 0) = M\dfrac{\lambda}{\lambda^*}\left(1 - \dfrac{\lambda}{\lambda^*}\right)^{-1}. \end{cases} \tag{2.43}$$

Соответственно последующим рассуждениям леммы 2.1, изучая решение задачи (2.43), можно указать такое число

$$0 < \widetilde{\lambda}(\lambda^*, c, M, T) < \lambda^*,$$

что в окрестности $|\lambda| \le \widetilde{\lambda},\ |t| \le T$ существует аналитическое по (λ, t) решение задачи Коши (2.43), причем коэффициенты разложения решения по степеням λ совпадают с функциями $\sigma_k(t)$. Следовательно, ряд (2.8) с коэффициентами (2.41) сходится в указанной области, а т.к. решение задачи (2.43) ограниченно при $|\lambda| \le \widetilde{\lambda}$, $|t| \le T$, то выполняется оценка

$$\sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{\lambda}^k \sigma_k(t) \le M_1 < \infty,$$

равномерно относительно $0 \le t \le T$. Эта оценка обеспечивает выполнение следующих неравенств:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \sigma_k(t, f) \le M_1, \quad 0 \le \lambda \le \widetilde{\lambda},$$

равномерно относительно $0 \le t \le T$ на каждом решении уравнения (0.1) $f \in \Omega^+(T)$ при входных данных $(f_0, \Phi) \in \mathfrak{M}^{(c)}_{\lambda^*}(M)$. Воспользовавшись теоремой Б. Леви [36], получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \sigma_k(t, f) = \int_0^{\infty} [\exp(\lambda x) - 1] f(x, t)\, dx \le \sigma(\lambda, t),$$

$$0 \le \lambda \le \widetilde{\lambda},\ 0 \le t \le T.$$

Следующим соотношением определим функцию $R(\lambda, t)$:

$$R(\lambda, t) \equiv M + \sigma(\lambda, t)$$

Ввиду неравенств (2.40), (2.42) в области $0 \le \lambda \le \widetilde{\lambda}$, $0 \le t \le T$ справедливы соотношения

$$\int\limits_0^\infty \exp(\lambda x) f(x,t)\, dx \le R(\lambda, t), \ \frac{\partial^i}{\partial \lambda^i} \int\limits_0^\infty \exp(\lambda x) f(x,t)\, dx \le \frac{\partial^i}{\partial \lambda^i} R(\lambda, t),$$

$$i = 1, 2, \ldots$$

Поскольку на каждом решении уравнения (0.1) со входными данными $(f_0, \Phi) \in \mathfrak{M}^{(c)}_{\lambda^*}(M)$ выполнено неравенство $\| f \|^{(T)}_{\widetilde{\lambda}} \le M_1$, то

$$S(\mathfrak{M}^{(c)}_{\lambda^*}(M)) \subset \Omega^{+}_{\widetilde{\lambda}}(T).$$

Лемма доказана.

Подчеркнем, что вопрос об устойчивости решений уравнения (0.1) рассматривается при возмущениях входных данных (f_0, Φ) в пространстве $\mathfrak{M}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть $(f_0, \Phi) \in \mathfrak{M}$ и $f = S(f_0, \Phi)$. Назовем f устойчивым решением уравнения (0.1), если для любых $\lambda > 0$, $c > 0$, $M > 0$, $T > 0$ таких, что точка $(f_0, \Phi) \in \widetilde{\mathfrak{M}}^{(c)}_{\lambda}(M)$, можно указать число $\bar{\lambda}(\lambda, c, M, T) > 0$, при котором образ

$$S(\widetilde{\mathfrak{M}}^{(c)}_{\lambda}(M)) \subset \Omega^{+}_{\bar{\lambda}}(T)$$

и сужение отображения S

$$S : \widetilde{\mathfrak{M}}^{(c)}_{\lambda}(M) \to (\Omega^{+}_{\bar{\lambda}}(T), d^{(T)}_{\bar{\lambda}})$$

является непрерывным в точке (f_0, Φ).

Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.2. *Каждое решение уравнения* (0.1) $f \in S(\mathfrak{M})$ *является устойчивым.*

Прежде чем доказывать теорему 2.2, сделаем ряд предварительных утверждений.

ЛЕММА 2.6. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda\}$ *— область в комплексной плоскости* $\mathbb{C}$, $H(\Lambda) = \{f\}$ *— семейство аналитических в области* Λ *функций таких, что*

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} |f(\lambda)| \le c < \infty.$$

Пусть бесконечное подмножество $\Lambda' \subset \Lambda$ *имеет предельную точку, лежащую в области* Λ,

$$H_\delta(\Lambda) = \left\{ f \in H(\Lambda) : \sup_{\lambda \in \Lambda'} |f(\lambda)| < \delta, \ \delta > 0 \right\}.$$

Тогда на любом компакте $K \subset \Lambda$ *для каждого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое число* $\delta(\varepsilon, K)$, *что как только* $f \in H_\delta(\Lambda)$, *так сейчас же*

$$\sup_{\lambda \in K} |f(\lambda)| < \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что справедливо включение

$$H_{\delta_1}(\Lambda) \subset H_{\delta_2}(\Lambda), \quad 0 < \delta_1 < \delta_2.$$

Будем доказывать лемму, исходя от противного ее утверждению. Тогда существует такой компакт $K \subset \Lambda$ и число $\varepsilon > 0$, что при любом сколь угодно малом $\delta > 0$ найдется функция $f \in H_\delta(\Lambda)$, для которой справедливо неравенство

$$\sup_{\lambda \in K} |f(\lambda)| \ge \varepsilon. \tag{$*$}$$

Рассмотрим последовательность семейств $H_{\delta_i}(\Lambda)$, где $\delta_i = 2^{-i}$, $i = 1, 2, \ldots$ В силу вышеуказанных рассуждений этой последовательности соответствует последовательность функций $\{f_i\}_{i=0}^{\infty}$, для которых выполняется неравенство $(*)$, причем $f_i \in H_{\delta_i}(\Lambda)$. Теорема Монтеля [40] обеспечивает компактность последовательности $\{f_i\}_{i=0}^{\infty}$, и без ограничения общности можно считать эту последовательность сходящейся на каждом компакте, лежащем в $\Lambda: \ f_i \to f$, а, значит, для функции f выполнено неравенство $(*)$. Поскольку

$$\lim_{i \to \infty} \sup_{\lambda \in \Lambda'} |f_i(\lambda)| = 0,$$

то $f|_{\Lambda'} = 0$, и в силу ее аналитичности — $f = 0$ на Λ. Следовательно, функция f обращается в нуль на компакте K, что противоречит неравенству $(*)$. Это противоречие доказывает лемму. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.7. *Для любых* $\lambda^* > 0$, $c > 0$, $M > 0$, $T > 0$ *можно указать такое число* $\bar{\lambda}(\lambda^*, c, M, T) > 0$, *что*

$$S(\mathfrak{M}^{(c)}_{\lambda^*}(M)) \subset \Omega^+_{\bar\lambda}(T),$$

и сужение отображения S, задаваемое как

$$S : \mathfrak{M}^{(c)}_{\lambda^*}(M) \to (\Omega^+_{\bar\lambda}(T), \| \,.\, \|^{T)}_{\bar\lambda}),$$

является непрерывным на $\mathfrak{M}^{(c)}_{\lambda^*}(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть число $\bar\lambda > 0$ таково, что $0 < \bar\lambda < \widetilde\lambda$, где $\widetilde\lambda > 0$ — величина, определенная в лемме 2.5. В силу леммы 2.5 и включения $\Omega^+_{\widetilde\lambda}(T) \subset \Omega^+_{\bar\lambda}(T)$ выполняется следующее включение:

$$S(\mathfrak{M}^{(c)}_{\lambda^*}(M)) \subset \Omega^+_{\bar\lambda}(T).$$

Фиксируем произвольную точку $(f_0,\Phi) \in \mathfrak{M}^{(c)}_{\lambda^*}(M)$. Рассмотрим в пространстве $\mathfrak{M}^{(c)}_{\lambda^*}(M)$ последовательность сужающихся окрестностей точки (f_0,Φ)

$$V_i = \left\{(\widetilde f_0,\widetilde\Phi) \in \mathfrak{M}^{(c)}_{\lambda^*}(M) : \| \, f_0 - \widetilde f_0 \, \|^{(0)}_{\lambda^*} < 2^{-i},\ r(\Phi,\widetilde\Phi) < 2^{-i}\right\},$$

$$i = 1, 2, \ldots$$

Очевидно, что для всех ядер $\widetilde\Phi \in \mathcal{K}_c$ справедливо неравенство

$$\widetilde\Phi(x,y) \le c(1+x+y), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^+_2.$$

Введем обозначение

$$\rho(\lambda,t,\widetilde f) = \int\limits_0^\infty \exp(\lambda x)|\widetilde f(x,t) - f(x,t)|\,dx,$$

где

$$f = S(f_0,\Phi), \quad \widetilde f \in S(\widetilde{\mathfrak{M}}^{(c)}_{\lambda^*}(M)).$$

Семейство, состоящее из функций ρ при различных фиксированых функциях $\widetilde f \in S(V_i)$ и моментах времени $0 \le t \le \alpha \le T$, будем обозначать $U_{i,\alpha}$, $i = 0, 1, \ldots$ Выполнены следующие включения:

$$U_{i,\alpha} \supset U_{i,\beta}, \quad 0 \le \beta \le \alpha \le T;$$

$$U_{0,\alpha} \supset U_{1,\alpha} \supset \ldots \supset U_{n,\alpha} \supset \ldots$$

Построим для пространства $\widetilde{\mathfrak{M}}^{(c)}_{\lambda^*}(M)$ функцию $R(\lambda, t)$, определенную в лемме 2.5. Эта функция аналитическая в области $(|\lambda| \le \widetilde{\lambda},\ |t| \le T)$. В силу леммы 2.5 каждая функция $\rho \in U_{0,T}$ — аналитическая по λ в полуплоскости $\Lambda = \{\lambda :\ \mathrm{Re}\,\lambda < \widetilde{\lambda}\}$ и семейство $U_{0,T}$ равномерно ограничено на Λ величиной

$$L = 2 \sup_{\substack{|\lambda| \le \widetilde{\lambda}, \\ |t| \le T}} |R(\lambda, t)|.$$

Справедливо следующее неравенство:

$$|f(x,t) - \widetilde{f}(x,t)| \le |f_0(x) - \widetilde{f}_0(x)| +$$

$$+\frac{c}{2}\int_0^t ds \left\{ (1+x)\int_0^x |f(x-y,s) - \widetilde{f}(x-y,s)|[f(y,s) + \widetilde{f}(y,s)]\,dy + \right.$$

$$+|f(x,s) - \widetilde{f}(x,s)| \int_0^\infty (1+x+y)[f(y,s) + \widetilde{f}(y,s)]\,dy +$$

$$\left. +[f(x,s) + \widetilde{f}(x,s)] \int_0^\infty (1+x+y)|f(y,s) - \widetilde{f}(y,s)|\,dy \right\} +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^T ds \left\{ \int_0^x |\Phi(x-y,y) - \widetilde{\Phi}(x-y,y)| f(x-y,s)\widetilde{f}(y,s)\,dy + \right.$$

$$+f(x,s)\int_0^\infty |\Phi(x,y) - \widetilde{\Phi}(x,y)|\widetilde{f}(y,s)\,dy +$$

$$\left. +\widetilde{f}(x,s)\int_0^\infty |\Phi(x,y) - \widetilde{\Phi}(x,y)| f(y,s)\,dy \right\}, \qquad (2.44)$$

где $f = S(f_0, \Phi)$, $\widetilde{f} = S(\widetilde{f}_0, \widetilde{\Phi})$. Из неравенства (2.44) в области

$$D = \{(\lambda, t) :\ 0 \le \lambda \le \bar{\lambda},\ 0 \le t \le T\}$$

следует выполнение двух соотношений при $\widetilde{f} \in S(\widetilde{\mathfrak{M}}_{\lambda^*}^{(c)}(M))$:

$$\rho(\lambda, t, \widetilde{f}) \le \rho^{(0)}(\lambda, \widetilde{f}_0, \widetilde{\Phi}) + 3c \int\limits_0^t \Big\{ R(\lambda, s)\rho(\lambda, s, \widetilde{f}) +$$

$$+ [R(\lambda, s) + R_\lambda(\lambda, s)]\rho(\lambda, s, \widetilde{f}) \Big\}\, ds,$$

$$\rho_\lambda(\lambda, t, \widetilde{f}) \le \rho_\lambda^{(0)}(\lambda, \widetilde{f}_0, \widetilde{\Phi}) + 3c \int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial \lambda} \Big\{ R(\lambda, s)\rho_\lambda(\lambda, s, \widetilde{f}) +$$

$$+ [R(\lambda, s) + R_\lambda(\lambda, s)]\rho(\lambda, s, \widetilde{f}) \Big\}\, ds,$$

где значения $\rho^{(0)}$ определяются формулой

$$\rho^{(0)}(\lambda, \widetilde{f}_0, \widetilde{\Phi}) = \int\limits_0^\infty \exp(\lambda x) |f_0(x) - \widetilde{f}_0(x)|\, dx +$$

$$+ \frac{3}{2} \int\limits_0^T \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \exp[\lambda(x+y)] |\Phi(x,y) - \widetilde{\Phi}(x,y)| f(x,s) \widetilde{f}(y,s)\, dx dy ds.$$

Рассмотрим последовательность чисел

$$\varepsilon_i = \sup_{(\widetilde{f}_0, \widetilde{\Phi}) \in V_i} \rho^{(0)}(\bar{\lambda}, \widetilde{f}_0, \widetilde{\Phi}).$$

Покажем, что эта последовательность стремится к нулю при $i \to \infty$. Для каждой функции $f \in S(\widetilde{\mathfrak{M}}_{\lambda^*}^{(c)}(M))$ имеют место оценки

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty \exp(\bar\lambda x) f(x,t)\,dx \le \sup_D R, \quad 0 \le t \le T;\\
&\int_0^\infty x\exp(\bar\lambda x) f(x,t)\,dx \le \sup_D R_\lambda, \quad 0 \le t \le T;\\
&\int_a^\infty \exp(\bar\lambda x) f(x,t)\,dx \le a^{-1}\sup_D R_\lambda, \quad 0 \le t \le T,\ a>0;\\
&\int_a^\infty x\exp(\bar\lambda x) f(x,t)\,dx \le a^{-1}\sup_D R_{\lambda\lambda}, \quad 0 \le t \le T,\ a>0.
\end{aligned}
\tag{2.45}
$$

Отметим, что

$$
\rho^{(0)}(\bar\lambda, \widetilde f_0, \widetilde\Phi) \le \| f_0 - \widetilde f_0 \|_{\bar\lambda}^{(0)} +
$$

$$
+\frac{3}{2}\int_0^T \sup_{0\le x,y\le a} |\Phi(x,y) - \widetilde\Phi(x,y)| \times
$$

$$
\times \int_0^a \int_0^a \exp[\bar\lambda(x+y)] f(x,s)\widetilde f(y,s))\,dxdy+
$$

$$
+2c\int_0^\infty \int_a^\infty (1+x+y)\exp(\bar\lambda(x+y)) f(x,s)\widetilde f(y,s))\,dxdy+
$$

$$
\left.+2c\int_a^\infty \int_0^\infty (1+x+y)\exp(\bar\lambda(x+y)) f(x,s)\widetilde f(y,s))\,dxdy\right\}, \quad a>0.
$$

Сочетая полученное неравенство с соотношениями (2.45), получаем

$$
\rho^{(0)}(\bar\lambda, \widetilde f_0, \widetilde\Phi) \le \| f_0 - \widetilde f_0 \|_{\bar\lambda}^{(0)} +
$$

$$+\frac{3}{2}T(\sup_D R)^2 \sup_{0\le x,y\le a}|\Phi(x,y)-\widetilde{\Phi}(x,y)|+$$

$$+6\,cT\,a^{-1}\left(\sup_D R\ \sup_D R_\lambda+\sup_D R\ \sup_D R_{\lambda\lambda}+c\,(\sup_D R)^2\right).$$

Пусть дано произвольное число $\varepsilon>0$. Выберем число $a>0$ так, чтобы последнее слагаемое в данном неравенстве было меньше $\varepsilon/3$. За счет выбора достаточно узкой окрестности V_i (при достаточно большом номере i) первое и второе слагаемые правой части неравенства меньше $\varepsilon/3$ равномерно по всей окрестности V_i. Таким образом,

$$\sup_{(\widetilde{f}_0,\widetilde{\Phi})\in V_i}\rho^{(0)}(\bar\lambda,\widetilde{f}_0,\widetilde{\Phi})<\varepsilon$$

при достаточно больших номерах i, т.е. $\varepsilon_i\to 0$.

Обозначим

$$c_1=3c\sup_D R,\quad c_2=3c\sup_D(R+R_\lambda).$$

В силу леммы 2.4 в каждой области

$$R_\tau=\left\{(\lambda,t):\ 0\le t\le\tau,\ 0\le\lambda\le\bar\lambda-c_1t,\ \tau<T'=\min\left(\frac{\bar\lambda}{c_1},T\right)\right\}$$

выполнены неравенства

$$\rho(\lambda,t,\widetilde{f})\le\varepsilon_i\exp(c_2\tau),\quad \widetilde{f}\in S(V_i).$$

Следовательно, для любой функции $\rho\in U_{i,\tau}$ на отрезке

$$\Lambda'=\{\lambda:\ 0\le\lambda\le\bar\lambda-c_1\tau\}$$

имеют место сотношения

$$\sup_{\lambda\in\Lambda'}\rho<\varepsilon_i\exp(c_2\tau).$$

Применяя результат леммы 2.6 на отрезке $K=\{\lambda:\ 0\le\lambda\le\bar\lambda\}$, который лежит в области Λ, заключаем, что для любого $\varepsilon>0$ можно указать такой номер $i(\varepsilon)$, что при $\rho\in U_{i,\tau}$ выполняется неравенство $\sup_K\rho<\varepsilon$. Повторяя эти рассуждения на отрезках времени $[\tau,2\tau]$,

$[2\tau, 3\tau]$ и т. д. для заданного $\varepsilon > 0$ подбираем номер $i(\varepsilon)$, при котором для любых $(\widetilde{f}_0, \widetilde{\Phi}) \in V_i$ справедливо следующее неравенство:

$$\| S(f_0, \Phi) - S(\widetilde{f}_0, \widetilde{\Phi}) \|_{\lambda}^{(T)} < \varepsilon.$$

Поскольку точка (f_0, Φ) из усеченного пространства входных данных $\mathfrak{M}_{\lambda^*}^{(c)}(M)$ выбиралась произвольно, то утверждение леммы доказано.

ЛЕММА 2.8. *Сужение отображения* S

$$S : \widetilde{\mathfrak{M}}_{\lambda}^{(c)}(M) \to (\Omega^+(T), d^{(T)})$$

является непрерывным на $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\lambda}^{(c)}(M)$ *при любых значениях величин* $\lambda > 0$, $c > 0$, $M > 0$, $T > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$f = S(f_0, \Phi), \quad (f_0, \Phi) \in \widetilde{\mathfrak{M}}_{\lambda}^{(c)}(M).$$

Зададимся произвольным отрезком $0 \le x \le a < \infty$ и обозначим

$$w_a(\varphi, t) = \sup_{0 \le x \le a} |\varphi(x, t)|, \quad \varphi \in \Omega(T).$$

Из неравенства (2.44) с учетом лемм 2.5, 2.7 получаем, что для решений уравнения (0.1) $\widetilde{f} = S(\widetilde{f}_0, \widetilde{\Phi})$ при входных данных $(\widetilde{f}_0, \widetilde{\Phi})$, лежащих в достаточно малой окрестности точки (f_0, Φ) (указанная окрестность рассматривается в пространстве $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\lambda}^{(c)}(M)$), справедливо неравенство

$$w_a(f - \widetilde{f}, t) \le \varepsilon + k \int_0^t w_a(f - \widetilde{f}, s)\, ds, \quad 0 \le t \le T,$$

где ε — заданное положительное число; неотрицательная постоянная k зависит только от выбора чисел a, λ, c, M. Воспользовавшись неравенством Гронуолла [39], получаем оценку

$$\sup_{0 \le t \le T} w_a(f - \widetilde{f}, t) \le \varepsilon \exp(kT).$$

Из последнего неравенства следует утверждение леммы. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2. В справедливости теоремы убеждаемся, сочетая результаты лемм 2.7 и 2.8.

Совокупность утверждений теорем 2.1 и 2.2 означает корректность задачи Коши (0.1), (0.2).

СЛЕДСТВИЕ 2.2. *Решение задачи Коши* (0.1), (0.2) *на полосе* Π_T

$$f = S(f_0, \Phi)$$

можно сколь угодно точно аппроксимировать решением этой задачи с финитными входными данными $(\widetilde{f}_0, \widetilde{\Phi})$.

Последнее утверждение весьма важно для применения ЭВМ при численном моделировании процессов коагуляции с ядрами из класса $\mathcal{K}$, т. к. можно использовать конечные сетки для решения соответствующей разностной задачи.

С физической точки зрения утверждение следствия 2.2 означает, что на фиксированном конечном отрезке времени достаточно большие частицы не вносят существенного вклада в течение процесса коагуляции. В гл. 3, 5 показано, что эти частицы существенно влияют на эволюцию спектра при больших временах t для рассматриваемого класса исходных данных (f_0, Φ). Но ситуация существенно меняется, если ядро растет быстрее линейной функции либо начальная функция достаточно медленно стремится к нулю при $x \to \infty$, см. замечания 5.6 и 5.7.

3. Качественные свойства и асимптотика при больших аргументах решений уравнения Смолуховского с физически реальными ядрами

§ 1. Предварительные замечания

Прежде чем переходить к вопросам, рассматриваемым в настоящей главе, сделаем несколько важных замечаний о содержании ее результатов [49, 50, 125]. Подчеркнем, что основные результаты этой главы связаны с изучением качественного поведения решений уравнения (0.1) со следующими ядрами $\Phi(x, y)$, представляющими интерес для моделирования различных процессов коагуляции:

1) $x + y$, 2) $|x - y|$,

3) $(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})^3$, 4) $|x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}|(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})^2$,

5) $\left(1 + \dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{(y+a)^{\frac{1}{3}}} + \dfrac{y^{\frac{1}{3}}}{(x+a)^{\frac{1}{3}}}\right)^3$, 6) $\left[(x^{-\frac{1}{3}} + y^{-\frac{1}{3}})(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})\right]^3$,

где параметр $a > 0$. Одним из важнейших следствий рассматриваемых свойств решений является доказательство разрешимости задачи Коши (0.1), (0.2) для случая броуновской коагуляции, т. е. для ядра 6) в указанном списке ядер. Таким образом, к ядрам из класса $\mathcal{K}$, для которых доказана разрешимость задачи Коши (0.1), (0.2), добавляются ядра, имеющие особенности на осях координат в $\mathbb{R}_2^+$.

Отметим, что в данной главе предполагается всюду, где это особо не оговорено, выполнение условий теоремы 2.1, а решение уравнения Смолуховского (0.1) понимается в рамках этой теоремы.

Сначала рассмотрим круг вопросов, касающихся знакоопределенности решения уравнения Смолуховского (0.1).

§ 2. Участки нулей и положительности решений уравнения коагуляции

ЛЕММА 3.1. *Пусть*

$$P_t = \{x : f(x,t) > 0,\ t \geq 0,\ 0 \leq x < \infty\},$$

где функция f является решением уравнения Смолуховского (0.1). *Тогда выполняется включение $P_t \supset P_0$ при $t \geq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку функция f неотрицательная, то из тождества (0.1) следует неравенство

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} \geq -f(x,t) \int_0^\infty \Phi(x,t) f(y,t)\, dy,$$

и, значит, справедливо соотношение

$$f(x,t) \geq f_0(x) \exp\left(-\int_0^t \int_0^\infty \Phi(x,y) f(y,t)\, dyds\right). \tag{3.1}$$

Следовательно, если в точке x функция $f_0(x) > 0$, то для всех $t \geq 0$ выполняется неравенство $f(x,t) > 0$. Поскольку точка $x \in P_0$ выбиралась произвольно, то имеет место включение $P_t \supset P_0$. Лемма доказана.

С физической точки зрения утверждение леммы 3.1 означает, что в коагулирующей системе частиц в каждый момент времени $t > 0$ вероятность обнаружить частицы в диапазоне размеров, в котором начальная функция распределения $f_0(x)$ отлична от нуля, непременно положительная независимо от характера процесса коагуляции, связанного с ядром Φ уравнения (0.1).

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Рассмотрим множество нулей решения уравнения* (0.1) *в каждый момент времени $t \geq 0$:*

$$A_t = \{x : f(x,t) = 0,\ 0 \leq x < \infty\}.$$

При $t \geq 0$ справедливо включение $A_t \subset A_0$.

Это утверждение является двойственным к утверждению леммы 3.1, поскольку множества P_t и A_t взаимно дополнительные на неотрицательной части вещественной числовой прямой.

Сформулируем без доказательства ввиду его простоты следующее полезное утверждение.

ЛЕММА 3.2. *Пусть ядро $\Phi \in \mathcal{K}$ такое, что при каждом $x \geq 0$ линейная мера Лебега*

$$\operatorname{mes}\{y:\ \Phi(x-y,y)=0,\ 0 \leq y \leq x\} = 0, \tag{3.2}$$

а непрерывная функция $f(x,t) \geq 0$ — строго положительная на некотором интервале (x_0,x_1), $0 \leq x_0 < x_1 < \infty$, за исключением, быть может, множества меры нуль. Тогда величина

$$\int_0^x \Phi(x-y,y) f_0(x-y) f_0(y)\, dy > 0$$

при всех аргументах, принадлежащих интервалу $(2x_0, 2x_1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Условию (3.2) удовлетворяют ядра 1)–6), указанные в начале настоящей главы.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть ядро $\Phi \in \mathcal{K}$ таково, что для каждого $x > 0$ линейная мера*

$$\operatorname{mes}\{y:\ \Phi(x-y,y)=0,\ 0 \leq y \leq x\} < x,$$

а начальная функция f_0 положительная при $x=0$. Тогда решение уравнения Смолуховского (0.1) $f(x,t) > 0$ при $0 \leq x < \infty$, $t > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 3.1 функция $f(0,t) > 0$ при $t \geq 0$. Предположим противное утверждению леммы, т. е. что существует точка (x_0,t_0), $0 < x_0, t_0 < \infty$, в которой $f(x_0,t_0) = 0$. Рассмотрим точку $(\bar{x}, t_0)$, где $\bar{x} = \inf\{x \in A_{t_0}\}$. Очевидно, что $\bar{x} > 0$ и в силу непрерывности функции f выполняется равенство $f(\bar{x},t_0) = 0$. Воспользовавшись тождеством (0.1) для функции $f(x,t)$, получаем

$$\frac{\partial f(\bar{x},t_0)}{\partial t} = \frac{1}{2}\int_0^{\bar{x}} \Phi(\bar{x}-y,y) f(\bar{x}-y,t_0) f(y,t_0)\, dy. \tag{3.3}$$

Поскольку значения $f(x,t_0) > 0$ при $0 \leq x < \bar{x}$, то $\dfrac{\partial f(\bar{x},t_0)}{\partial t} > 0$. Но тогда при достаточно малых $t_0 - t > 0$ выполняется неравенство $f(\bar{x},t) < 0$, которое противоречит неотрицательности функции f.

Таким образом, функция f нигде при $x \geq 0$, $t > 0$ в нуль не обращается. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3.2. *Пусть ядро Φ удовлетворяет условию* (3.2), *а f_0 — начальная функция такова, что точка $x = 0$ является предельной для множества $P_0 = \{x : f_0(x) > 0\}$. Тогда решение уравнения Смолуховского* (0.1) *$f(x,t)$ — строго положительная функция при аргументах $x > 0$, $t > 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если точка $x = 0$ принадлежит множеству P_0, то утверждение настоящей теоремы сводится к предыдущей теореме. Поэтому предположим, что точка $x = 0$ принадлежит множеству $A_0 = \{x : f_0(x) = 0\}$, дополнительному к P_0 на неотрицательной части вещественной оси. Ввиду утверждения леммы 3.1 точка $x = 0$ является предельной для точек множества P_t при каждом $t \geq 0$. Аналогично доказательству теоремы 3.1 предположим наличие нуля функции f в некоторой точке (x_0, t_0), где x_0, $t_0 > 0$, тогда из-за непрерывности функции f можно указать такую точку $\bar{x} > 0$, что $f(\bar{x}, t_0) = 0$ и $f(x, t_0) > 0$ при достаточно малых $\bar{x} - x > 0$. В силу вышеупомянутого свойства точки $x = 0$ можно указать $y > 0$, для которого справедливо неравенство $f(\bar{x} - y, t_0) f(y, t_0) > 0$. Поскольку в точке $(\bar{x}, t_0)$ выполняется соотношение (3.3), то полученное неравенство, непрерывность функций f и Φ, условие (3.2) в совокупности обеспечивают выполнение следующего соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\bar{x}, t_0) > 0.$$

Это аналогично ситуации, рассмотренной в предыдущей теореме, которая приводит к противоречию с неотрицательностью f. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3.3. *Пусть начальная функция $f_0 \equiv 0$ на некотором отрезке $0 \leq x \leq x_0$. Тогда решение уравнения Смолуховского $f(x,t) \equiv 0$ при $0 \leq x \leq x_0$, $t \geq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем это утверждение в случае ядра $\Phi \in \mathcal{K}_0^+$. Если $\Phi \in \mathcal{K}_0^+$, то результаты, полученные в гл. 1, обеспечивают аналитичность решения уравнения Смолуховского (0.1) по переменной t при каждом фиксированном x. Дифференцируя тождество (0.1) по t, получаем, что все частные производные $\dfrac{\partial^k f(x,0)}{\partial t^k} = 0$, $k \geq 1$, при $0 \leq x \leq x_0$. Тогда из-за аналитичности $f(x,t) \equiv 0$ при $0 \leq x \leq x_0$, $t \geq 0$. Теперь рассмотрим ядро $\Phi \in \mathcal{K}$. Обозначим f — решение задачи Коши (0.1), (0.2) с этим ядром и рассматриваемой начальной функцией, построенное при доказательстве теоремы 2.1 как предел последовательности решений задачи Коши (0.1), (0.2) с ограниченными ядрами и начальной функцией f_0. Поскольку утверждение теоремы для решений с ограниченными ядрами доказано, то предельный переход переносит указанное свойство на функцию f. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3.4. *Пусть ядро* Φ *удовлетворяет условию* (3.2), *а начальная функция* $f_0(x) \not\equiv 0$, *т. е. в некоторой точке* x_0 *выполняется неравенство* $f_0(x_0) > 0$. *Тогда можно указать такое число* $\bar{x} \geq x_0$, *что* $f(x,t) > 0$ *при* $x > \bar{x}$, $t > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x_0 = 0$, то настоящее утверждение сводится к теореме 3.1. Поэтому предположим, что $x_0 > 0$. В силу непрерывности функции f_0 имеет место неравенство $f_0(x) > 0$ на некотором интервале (x_0, x_1), $x_1 > x_0$. Тогда на интервале $(2x_0, 2x_1)$ могут выполняться следующие альтернативные случаи:

либо $f_0(x) > 0$ при $x \in (2x_0, 2x_1)$;

либо в данной точке производная $\dfrac{\partial f(x,0)}{\partial t} > 0$ и $f_0(x) = 0$.

Действительно, если $f_0(x) = 0$ при $x \in (2x_0, 2x_1)$, то воспользовавшись тождеством (0.1), получаем

$$\frac{\partial f(x,0)}{\partial t} = \frac{1}{2}\int\limits_0^x \Phi(x-y,y) f_0(x-y) f_0(y)\, dy > 0.$$

Выполнение этого неравенства обеспечивает лемма 3.2. Следовательно, $f(x,t) > 0$, когда $x \in (2x_0, 2x_1)$ при достаточно малых t. Лемма 3.1 гарантирует, что множество P_t с увеличением времени не убывает и, значит, $f(x,t) > 0$ при всех $t > 0$, $x \in (2x_0, 2x_1)$. Фиксируем произвольный момент времени $\bar{t} > 0$. Повторяя предыдущие рассуждения, получаем, что $f(x,t) > 0$ при $t > \bar{t}$, $x \in (4x_0, 4x_1)$. Т. к. число $\bar{t} > 0$ выбиралось произвольно, то $f(x,t) > 0$ при $t > 0$ и $x \in (4x_0, 4x_1)$. Аналогичными рассуждениями приходим к выводу, что функция $f(x,t) > 0$ при $t > 0$ и $x \in \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(i\,x_0, i\,x_1)$. Данное множество содержит полубесконечный интервал $(\bar{x}, \infty)$, где

$$\bar{x} \geq x_0\left[1 + \frac{x_0}{x_1 - x_0}\right].$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3.5. *Пусть ядро* Φ *удовлетворяет условию* (3.2), *а начальная функция* f_0 *определяется соотношениями*

$$\begin{cases} f_0(x) > 0 & x \in (x_0, x_1), \ 0 < x_0 < x_1 \le 2x_0; \\ \\ f_0(x) = 0, & x \notin (x_0, x_1). \end{cases}$$

Тогда соответствующее решение задачи Коши для уравнения Смолуховского (0.1) *с этими входными данными строго положительное при* $t > 0$ *и аргументах* x*, которые попадают во множество, соостоящее из интервалов* $(i\,x_0, i\,x_1)$*,* $1 \le i \le \dfrac{x_0}{x_1 - x_0}$*, и полубесконечного интервала* $\left(x_0\left[1 + \dfrac{x_0}{x_1 - x_0}\right], \infty\right)$*. Вне указанного множества аргументов функция* $f(x,t) = 0$ *при* $t > 0$*. Если же* $f_0(x) > 0$ *при* $x \in (x_0, 2x_0]$*, то* $f(x,t) > 0$ *при* $t > 0$*,* $x > x_0$*.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение о положительности решения доказывается аналогично предыдущей теореме. Обращение решения в нуль устанавливается тем же методом, что в теореме 3.3.

Перейдем теперь к общему описанию структуры множества положительности P_t и нулей A_t для решения уравнения Смолуховского (0.1) при $t > 0$. Для этого потребуются дополнительные построения, которые сделаем ниже. Обозначим $\mathbb{R}^+$ неотрицательные числа, C^+ — множество неотрицательных функций, определенных и непрерывных на $\mathbb{R}^+$. Фиксируем произвольное ядро $\Phi \in \mathcal{K}$. Это ядро определяет бинарную операцию

$$(.,*)_\Phi : C^+ \times C^+ \to C^+,$$

которая задана следующим соотношением:

$$(\varphi, \psi)_\Phi(x) \stackrel{def}{=} \int\limits_0^x \Phi(x-y, y)\varphi(x-y)\psi(y)\,dy, \quad \varphi, \psi \in C^+.$$

В силу симметричности ядра Φ для любых $\varphi, \psi \in C^+$ выполняется равенство $(\varphi, \psi)_\Phi = (\psi, \varphi)_\Phi$. Таким образом, на множестве C^+ возникает алгебраическая структура, порожденная введенной операцией $(.,*)_\Phi$. Обозначим эту алгебру $U_\Phi = \{C^+, (.,*)_\Phi\}$. Алгебра U_Φ коммутативна, но, вообще говоря, не является ассоциативной. Наряду с алгеброй U_Φ будем рассматривать алгебру $\bar{U}_\Phi = \{C^+, (.,*)_\Phi, +\}$, которая получается добавлением к сигнатуре алгебры U_Φ бинарной операции «+» — обычного сложения функций. Обозначим $U_\Phi(\varphi)$ — подалгебру в алгебре U_Φ, порожденную конечными $(.,*)_\Phi$ словами над алфавитом, соостоящим из одного символа $\varphi \in C^+$. Определим индуктивно длину слова в $U_\Phi(\varphi)$

φ — слово длины 1;

пусть a и b — слова из $U_\Phi(\varphi)$ длины $i \geq 1$ и $j \geq 1$ соответственно. Тогда $(a, b)_\Phi$ — слово длины $i + j$.

Пусть функция $g \in U_\Phi(\varphi)$. Рассмотрим множество слов в алгебре $U_\Phi(\varphi)$, тождественно совпадающих с функцией g на $\mathbb{R}^+$. Назовем порядком элемента g длину наименьшего слова из $U_\Phi(\varphi)$, совпадающего с g в вышеуказанном смысле. Обозначим $\bar{U}_\Phi(\varphi)$ подалгебру в алгебре $\bar{U}_\Phi$, порожденную всевозможными линейными комбинациями элементов алгебры $U_\Phi(\varphi)$ с коэффициентами из $\mathbb{R}^+$. Примем обозначения:

$$G(\varphi, \Phi) = \bigcup_{g \in U_\Phi(\varphi)} \left\{x \in \mathbb{R}^+ : g(x) > 0\right\},$$

$$\bar{G}(\varphi, \Phi) = \bigcup_{g \in \bar{U}_\Phi(\varphi)} \left\{x \in \mathbb{R}^+ : g(x) > 0\right\}.$$

ЛЕММА 3.3. *Справедливо равенство*

$$G(\varphi, \Phi) = \bar{G}(\varphi, \Phi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\bar{U}_\Phi(\varphi) \supset U_\Phi(\varphi)$, то выполняется включение $\bar{G}(\varphi, \Phi) \supset G(\varphi, \Phi)$. Докажем справедливость обратного включения. Пусть точка $x \in \bar{G}(\varphi, \Phi)$. Тогда найдется элемент $g \in \bar{U}_\Phi(\varphi)$ такой, что $g(x) > 0$. По построению алгебры $\bar{U}_\Phi(\varphi)$ имеет место представление

$$g = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}^+, \quad g_i \in U_\Phi(\varphi).$$

Но тогда существует элемент $g_i \in U_\Phi(\varphi)$ такой, что $g_i(x) > 0$. Следовательно, точка $x \in G(\varphi, \Phi)$. Поскольку точка $x \in \bar{G}(\varphi, \Phi)$ выбиралась произвольно, то выполняется включение $\bar{G}(\varphi, \Phi) \subset G(\varphi, \Phi)$, из которого следует совпадение множеств $\bar{G}(\varphi, \Phi)$ и $G(\varphi, \Phi)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.4. *Пусть функции g_1, g_2, g_3, $g_4 \in C^+$, причем для носителей этих функций* (носитель непрерывной функции g, т. е. совокупность точек x, где $g(x) \neq 0$, обозначается символом $\operatorname{supp} g$), выполнены включения

$$\operatorname{supp} g_1 \subset \operatorname{supp} g_3, \quad \operatorname{supp} g_2 \subset \operatorname{supp} g_4.$$

Тогда из неравенства $(g_1, g_2)_\Phi(x) > 0$ в некоторой точке $x \in \mathbb{R}^+$ следует неравенство $(g_3, g_4)_\Phi(x) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению

$$(g_1, g_2)_\Phi(x) = \int\limits_0^x \Phi(x-y, y) g_1(x-y) g_2(y)\, dy > 0.$$

Следовательно, можно указать такую точку $\bar{y} \in [0, x]$, в которой выполняется неравенство

$$\Phi(x-\bar{y}, \bar{y}) g_1(x-\bar{y}) g_2(\bar{y}) > 0.$$

В силу имеющегося включения носителей, открытости множества знакоопределенности непрерывных функций и непрерывности ядра $\Phi(x, y)$, в некоторой окрестности точки $\bar{y}$ справедливо соотношение

$$\Phi(x-y, y) g_3(x-y) g_4(y) > 0,$$

что приводит к положительности выражения $(g_3, g_4)_\Phi(x)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.5. *Пусть (f_0, Φ) — входные непрерывные неотрицательные данные задачи Коши* (0.1), (0.2) *с симметричным ядром Φ, при которых существует ее непрерывное неотрицательное решение $f(.,t)$ для $t \geq 0$. Тогда для множества положительности P_t решения f этой задачи справедливо следующее включение:*

$$P_t \supset G(f_0, \Phi), \quad t > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что для доказательства достаточно показать положительность функции f на каждом множестве

$$\left\{x \in \mathbb{R}^+ :\ g(x) > 0,\ g \in U_\Phi(f_0)\right\}.$$

Это утверждение будем доказывать индукцией по порядку элементов $g \in U_\Phi(f_0)$. Для элементов первого порядка, множество которых состоит из одного представителя f_0, утверждение сводится к лемме 3.1. Предположим справедливость сделанного утверждения для элементов алгебры $U_\Phi(f_0)$, имеющих порядок, не превосходящий числа $k > 1$. Пусть $g \in U_\Phi(f_0)$ имеет порядок $k+1$. Очевидно, что справедливо представление $g = (g_1, g_2)_\Phi$, где элементы $g_1, g_2 \in U_\Phi(f_0)$ имеют порядок, не превосходящий числа k. Предположим существование точки $\bar{x} \in \{x \in \mathbb{R}^+, \ g(x) > 0\}$, в которой $f(\bar{x}, \bar{t}) = 0$ при некотором $\bar{t} > 0$. Тогда, воспользовавшись тождеством (0.1), получаем

$$\frac{\partial f}{\partial t}(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{1}{2}(f(., \bar{t}), f(., \bar{t}))_\Phi(\bar{x}).$$

Ввиду индуктивного предположения справедливо включение носителей

$$\operatorname{supp} f(., t) \supset \operatorname{supp} g_1 \bigcup \operatorname{supp} g_2, \quad t > 0.$$

В силу леммы 3.4 получаем $(f(., \bar{t}), f(., \bar{t}))_\Phi(\bar{x}) > 0$ и, значит,

$$\frac{\partial f}{\partial t}(\bar{x}, \bar{t}) > 0.$$

Но тогда $f(\bar{x}, t) < 0$ при достаточно малом $\bar{t} - t > 0$, что противоречит неотрицательности функции f. Следовательно, функция $f(x, t) > 0$ при $t > 0$, $x \in \{x \in \mathbb{R}^+ : g(x) > 0\}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.6. *Пусть ядро $\Phi \in \mathcal{K}_0^+$. Тогда на решении уравнения Смолуховского* (0.1) *выполняются следующие равенства*:

$$A_t = A_s, \quad P_t = P_s$$

при любых t, $s > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что для доказательства достаточно установить справедливость утверждения леммы для множества нулей решения A_t, поскольку при каждом $t \geq 0$, $A_t \bigcup P_t = \mathbb{R}^+$. Предположим, что точка $\bar{x} \in A_{\bar{t}}$ в некоторый момент времени $\bar{t} > 0$. Тогда все частные производные решения уравнения Смолуховского (0.1) обращаются в нуль

$$\frac{\partial^k f(\bar{x}, \bar{t})}{\partial t^k} = 0, \quad k \geq 1,$$

т. к. в противном случае возникает противоречие с неотрицательностью функции f. Ввиду аналитичности по t функции $f(\bar{x}, t)$ выполняется тождество $f(\bar{x}, t) \equiv 0$. Следовательно, $A_t = A_s$ при любых $t, s > 0$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *В случае ядра $\Phi \in \mathcal{K}_0^+$ для каждой точки $\bar{x} \in P_{\bar{t}}$, $\bar{t} > 0$, можно указать такой номер $k \geq 0$, что в данной точке при $t = 0$ выполняется неравенство*

$$\frac{\partial^k f(\bar{x}, 0)}{\partial t^k} > 0,$$

где k — номер первой по порядку производной, отличной от нуля (под производной нулевого порядка понимается значение функции в данной точке).

ЛЕММА 3.7. *Пусть ядро $\Phi \in \mathcal{K}_0^+$. Тогда для решения уравнения Смолуховского f с этим ядром и начальной функцией $f_0 \in \Omega_0^+(0)$ справедливо следующее соотношение*: $P_t = G(f_0, \Phi)$, $t > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим билинейное отображение

$$[.,*]_\Phi^+ : \Omega_0^+(0) \times \Omega_0^+(0) \to \Omega_0^+(0),$$

которое определим соотношением

$$[g_1, g_2]_\Phi^+(x) \stackrel{def}{=} \frac{1}{2}\Big\{(g_1, g_2)_\Phi(x) + \| \Phi \|_{\mathcal{K}_0} \Big(g_1(x) \| g_2 \|_0^{(0)} +$$

$$+ g_2(x) \| g_1 \|_0^{(0)}\Big)\Big\}, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

где функции $g_1, g_2 \in \Omega_0^+(0)$. Рассмотрим последовательность функций $a_i \in \Omega_0^+(0)$, $i \geq 0$, которые задаются следующими рекуррентными соотношениями:

$$\begin{cases} a_0 = f_0, \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{i+j=n} [a, a]_\Phi^+, \quad n \geq 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Индукцией по номеру n устанавливаем, что функции a_i являются элементами алгебры $\bar{U}_\Phi(f_0)$. Сравнивая функции (3.4) с коэффициентами ряда (1.15), определяемые формулами (1.16), убеждаемся в справедливости неравенств

$$\frac{\partial^k f(x,0)}{\partial t^k} \leq k!\, a_k(x), \quad k \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^+.$$

Пусть точка $\bar{x} \in P_t$, $t > 0$. Тогда в силу следствия 3.2 при $k' \geq 0$ производная $\dfrac{\partial^{k'} f(\bar{x}, 0)}{\partial t^{k'}} > 0$ и, значит, $a_{k'}(\bar{x}) > 0$. Поэтому $\bar{x} \in \bar{G}(f_0, \Phi)$, а лемма 3.3 обеспечивает включение $\bar{x} \in G(f_0, \Phi)$. Таким образом, $P_t \subset G(f_0, \Phi)$, $t > 0$. Комбинируя результат леммы 3.5 с полученным соотношением, имеем равенства

$$A_t = A_s, \quad P_t = P_s$$

при любых $t, s > 0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.8. *Пусть ядра Φ_1 и $\Phi_2 \in \mathcal{K}_0^+$ совпадают на треугольнике*

$$\tau = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}_2^+,\ 0 \le x+y \le a\right\}.$$

Тогда при любых $\varphi \in C^+$ выполняются следующие равенства:

$$G(\varphi,\Phi_1)\bigcap[0,a] = G(\varphi,\Phi_2)\bigcap[0,a].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим очевидное тождество, которое выполняется для любых $\varphi,\psi \in C^+$:

$$(\varphi,\psi)_{\Phi_1}(x) = (\varphi,\psi)_{\Phi_2}(x), \quad x \in [0,a]. \tag{3.5}$$

Для доказательства достаточно показать, что каждому элементу $g \in U_{\Phi_1}(\varphi)$ можно сопоставить элемент $\widetilde{g} \in U_{\Phi_2}(\varphi)$, для которого выполнено соотношение $\widetilde{g}(x) = g(x)$, $x \in [0,a]$, и наоборот, каждому элементу $g \in U_{\Phi_2}(\varphi)$ соответствует $\widetilde{g} \in U_{\Phi_1}(\varphi)$ такой, что $g(x) = \widetilde{g}(x)$ при $x \in [0,a]$. Указанное утверждение докажем индукцией по порядку элементов алгебр $U_{\Phi_1}(\varphi)$ и $U_{\Phi_2}(\varphi)$. Для элементов порядка 1 утверждение является тривиальным. Пусть указанное свойство имеет место для элементов с порядком, не превосходящим числа $k > 1$. Возьмем элемент $g \in U_{\Phi_1}(\varphi)$ порядка $k+1$. Тогда справедливо представление $g = (g_1,g_2)_{\Phi_1}$, где $g_1,g_2 \in U_{\Phi_1}(\varphi)$ имеют порядок, не превосходящий k. Им соответствуют элементы $\widetilde{g}_1$ и $\widetilde{g}_2$ из алгебры $U_{\Phi_2}(\varphi)$, совпадающие с g_1 и g_2 соответственно на отрезке $[0,a]$. Тогда в силу соотношения (3.5)

$$(g_1,g_2)_{\Phi_1}(x) = (\widetilde{g}_1,\widetilde{g}_2)_{\Phi_2}(x), \quad x \in [0,a],$$

т. е. выполняются тождества

$$g(x) = \widetilde{g}(x) = (\widetilde{g}_1,\widetilde{g}_2)_{\Phi_2}(x), \quad x \in [0,a].$$

Поскольку $\widetilde{g} \in U_{\Phi_2}(\varphi)$, то индукция доказана. Повторяя рассуждения, поменяв ролями $U_{\Phi_1}(\varphi)$ и $U_{\Phi_2}(\varphi)$, получаем требуемое соответствие между элементами алгебр $U_{\Phi_1}(\varphi)$ и $U_{\Phi_2}(\varphi)$ на отрезке $[0,a]$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3.6. *Пусть ядро $\Phi \in \mathcal{K}$, а начальная функция $f_0 \in \Omega_{0,2}^+(0)$, тогда решение f задачи Коши* (0.1), (0.2), *построенное во гл. 2, обладает следующими свойствами:*

$$f(x,t) > 0, \qquad t > 0, \quad x \in G(f_0, \Phi),$$

$$f(x,t) = 0, \qquad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^+ \backslash G(f_0, \Phi),$$

т. е. имеют место равенства

$$P_t = G(f_0, \Phi), \qquad t > 0,$$

$$A_t = \mathbb{R}^+ \backslash G(f_0, \Phi), \qquad t > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 3.5 для множества положительности решения f справедливо включение

$$P_t \supset G(f_0, \Phi), \quad t > 0.$$

Построим для ядра Φ последовательность ограниченных ядер $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$, определенных соотношениями (2.2). Пусть $\{f_n\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность решений задачи Коши (2.3) с ядрами Φ_n, сходящаяся к решению задачи Коши (0.1), (0.2) — функции f. Фиксируем произвольное натуральное число n. Поскольку ядра Φ_{n_k}, начиная с некоторого номера $k = k^*$, совпадают на прямоугольнике $[0,n]\times[0,n]$ с ядром Φ, то из лемм 3.7 и 3.8 следует, что множество положительности функций f_{n_k} при $k \geq k^*$ на отрезке $[0,n]$ и при условии $t > 0$, состоит из точек $[0,n] \bigcap G(f_0, \Phi)$ и, значит, множество нулей каждой функции f_{n_k}, где $k \geq k^*$, состоит из точек $[0,n] \backslash G(f_0, \Phi)$ при любом фиксированном $t > 0$. Ввиду равномерной сходимости $f_{n_k} \to f$ функция f может обращаться в нуль при каждом фиксированном $t > 0$ лишь на множестве $[0,n] \backslash G(f_0, \Phi)$. Поскольку число n выбиралось произвольно, то $f(x,t) = 0$ при $t > 0$, когда

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} ([0,n] \backslash G(f_0, \Phi)) = \mathbb{R}^+ \backslash G(f_0, \Phi).$$

Но т. к. при этом $P_t \supset G(f_0, \Phi)$, когда $t > 0$, то $P_t = G(f_0, \Phi),\ t > 0$, и $A_t = \mathbb{R}^+ \backslash G(f_0, \Phi),\ t > 0$. Теорема доказана.

Остановимся на физическом содержании полученных результатов. Прежде всего отметим, что в случае физически реальных ядер спектр частиц мгновенно размывается при $t > 0$, т. е. появляется положительная вероятность обнаружить сколь угодно крупные частицы. На это указывают теоремы 3.1, 3.2, 3.4. Теорема 3.3 является подтверждением естественного физического факта невозможности появления в коагуляционом спектре частиц, имеющих размеры меньшие, чем самая маленькая частица в начальной стадии процесса коагуляции. Теорема 3.5 указывает на одну из возможных причин возникновения в облаках устойчивых многомодальных спектров (т. е. спектров, содержащих набор резко выраженных максимумов, положение которых устойчиво во времени). Как видно из условия теоремы, данное явление имеет место, если в начальной стадии процесса коагуляции отсутствуют маленькие частички и начальный спектр f_0 в достаточной степени узкий, т. е. в нем присутствуют только частицы близких размеров. И, наконец, теорема 3.6 показывает, что в каждый момент времени $t > 0$ вероятность возникновения частиц, которые могут появиться в данной коагулирующей системе, строго положительная, а диапазон размеров возникающих частиц дается множеством $G(f_0, \Phi)$, который не меняется на протяжении всего процесса коагуляции.

§ 3. Решения уравнения коагуляции с ядрами, имеющими особенности на осях координат в $\mathbb{R}_2^+$

В настоящем параграфе предметом нашего изучения будет уравнение коагуляции (0.1) в случае ядер Φ, которые не являются непрерывными и ограниченными на осях координат $x = 0$, $y = 0$ в $\mathbb{R}_2^+$. Необходимость такого рассмотрения основывается прежде всего на том, что особенности такого рода имеются у ядра броуновской коагуляции

$$\Phi(x, y) = \left[(x^{-\frac{1}{3}} + y^{-\frac{1}{3}})(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})\right]^3, \quad x, y > 0.$$

Выбор класса решений уравнения коагуляции с этими ядрами обусловлен теоремой 3.3, прозрачное физическое содержание которой указано в предыдущем параграфе. Идея построения состоит в том, чтобы особенности ядра сделать несущественными за счет обращения в нуль решения в окрестности точки $x = 0$ равномерно относительно $t \geq 0$. С физической точки зрения изучение решений такого вида означает рассмотрение коагулирующих систем, не имеющих в начальной стадии процесса коагуляции достаточно маленьких частичек. В дальнейшем на основании принципа максимума в спектр будут включены малые частицы, однако для более узкого класса ядер с особенностями на осях координат.

Положим $\mathring{\mathrm{R}}_2^+ = \{(x, y) : 0 < x, y < \infty\}$. Рассмотрим на $\mathring{\mathrm{R}}_2^+$ семейство непрерывных функций $\rho_\delta(x, y)$, $\delta > 0$, удовлетворяющих следующим соотношениям:

$$\rho_\delta(x,y)=\begin{cases}0, & 0<x<\dfrac{\delta}{2},\ 0<y<\infty;\ 0<y<\frac{\delta}{2},\ 0<x<\infty,\\[2ex] 1, & x\geq\delta,\ y\geq\delta,\ \delta>0.\end{cases}$$

Пусть ψ произвольная непрерывная функция на $\mathring{\mathrm{R}}_2^+$. Каждой такой функции поставим в соответствие семейство непрерывных на $\mathring{\mathrm{R}}_2^+$ функций ψ_δ, $\delta>0$

$$\psi_\delta(x,y)=\begin{cases}\rho_\delta(x,y)\psi(x,y), & (x,y)\in\mathring{\mathrm{R}}_2^+,\ \delta>0,\\[2ex] 0, & x=0,\ 0\leq y<\infty;\ y=0,\ 0\leq x<\infty.\end{cases}$$

Обозначим $\mathcal{K}^{(s)}$ — класс ядер $\Phi(x,y)$ определенных и непрерывных на $\mathring{\mathrm{R}}_2^+$ таких, что при каждом фиксированном числе $\delta>0$ ядро $\Phi_\delta\in\mathcal{K}$. Отметим, что ядро броуновской коагуляции включается в класс $\mathcal{K}^{(s)}$. Пусть

$$\Omega_{0,k}(\delta,T),\ \Omega_{0,k}^+(\delta,T)\ (k\geq 0),\ \Omega(\delta,T),\ \Omega^+(\delta,T)\ (\delta>0),$$

— функции из соответствующих классов $\Omega_{0,k}(T)$, $\Omega_{0,k}^+(T)$, $\Omega(T)$, $\Omega^+(T)$, удовлетворяющие соотношению $f(x,t)\equiv 0$ при $0\leq x\leq\delta$, $0\leq t\leq$T. Положим

$$\bar\Omega_{0,k}(T)=\bigcup_{\delta>0}\Omega_{0,k}(\delta,T),\quad \bar\Omega_{0,k}^+(T)=\bigcup_{\delta>0}\Omega_{0,k}^+(\delta,T),$$

$$\bar\Omega(T)=\bigcup_{\delta>0}\Omega(\delta,T),\quad \bar\Omega^+(T)=\bigcup_{\delta>0}\Omega^+(\delta,T).$$

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ 2.1. *Пусть ядро* $\Phi\in\mathcal{K}^{(s)}$, *а начальная функция* f_0 *принадлежит одному из следующих классов*:

а) $f_0\in\bar\Omega_{0,k}^+(0)$, $\quad k\geq 2$;

б) $f_0\in\bar\Omega^+(0)$.

Тогда, соответственно, задача Коши (0.1), (0.2) *в полосе* Π_T *имеет*:

а) *по крайней мере одно решение, принадлежащее классу* $\bar\Omega_{0,k}^+(T)$;

б) *решение, принадлежащее классу* $\bar{\Omega}^+(T)$*, причем это решение единственное в классе* $\bar{\Omega}(T)$*.*

Эту теорему мы доказывать не будем, т. к. метод ее доказательства полностью повторяет доказательство теоремы 2.1. При этом следует учитывать результат теоремы 3.3, а вместо последовательности ограниченных ядер (2.2) нужно воспользоваться следующей последовательностью ядер $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\Phi_n(x,y) = \begin{cases} \Phi(x,y), & \dfrac{1}{n+1} \le x, y \le n, \\ \Phi(x,n), & \dfrac{1}{n+1} \le x \le n, \quad n \le y < \infty, \\ \Phi(n,y), & n \le x < \infty, \quad \dfrac{1}{n+1} \le y \le n, \\ \Phi(\dfrac{1}{n+1}, n), & 0 \le x \le \dfrac{1}{n+1}, \quad n \le y < \infty, \\ \Phi(n, \dfrac{1}{n+1}), & n \le x < \infty, \quad 0 \le y \le \dfrac{1}{n+1}, \\ \Phi(n,n), & n \le x, y < \infty \quad n = 1, 2, \dots \end{cases} \tag{3.6}$$

Отметим, что все ранее сделанные утверждения для решений уравнения коагуляции с ядрами из класса $\mathcal{K}$ легко распространяются на решения этого уравнения с ядрами из класса $\mathcal{K}^{(s)}$.

§ 4. Принцип максимума

В этом параграфе устанавливается важный для наших дальнейших рассуждений «принцип максимума» [88, 102, 103], область применимости которого не исчерпываются только уравнением коагуляции.

ТЕОРЕМА 3.7 (принцип максимума). *Пусть* G *— открытое множество в метрическом пространстве, имеющее компактное замыкание* $\bar{G}$, ∂G *— граница множества* G, $(0,T]$, $[0,T]$ *— полуоткрытый и замкнутый отрезки вещественной числовой оси,*

$$Q(T) = G \times (0,T], \quad \bar{Q}(T) = G \times [0,T],$$

$$\partial Q = (\bar{G} \times \{0\}) \cup (\partial G \times (0, T]).$$

Пусть вещественная функция f *непрерывна на* $\bar{Q}(T)$ *и имеет в каждой точке* $Q(T)$ *производную по переменной* t, $0 < t \le T$. *Если при каждом фиксированном* $t \in (0, T]$ *в точках* $\omega^* \in G$, *в которых*

$$f(\omega^*, t) = \max_{\omega \in G} f(\omega, t)$$

выполнено неравенство

$$\frac{\partial f(\omega^*, t)}{\partial t} \le 0, \tag{$*$}$$

то

$$\max_{\bar{Q}(T)} f = \max_{\partial Q} f.$$

Если же производная $\dfrac{\partial}{\partial t} f$ *существует на* $G \times [0, T]$ *и неравенство* $(*)$ *выполняется в точках* $\omega^* \in G$, *то в этом случае*

$$\max_{\bar{Q}(T)} f = \max_{\omega \in G} f(\omega, 0).$$

Доказательство этой теоремы основывается на следующей лемме.

ЛЕММА 3.9. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.7. *Потребуем, чтобы в точках* $\omega^* \in G$, *в которых*

$$f(\omega^*, t) = \max_{\omega \in G} f(\omega, t),$$

выполнялось строгое неравенство

$$\frac{\partial f(\omega^*, t)}{\partial t} < 0.$$

Тогда максимум функции f *на* $\bar{Q}(T)$ *достигается только на* ∂Q.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим противное утверждению леммы, т. е. пусть существует точка $(\omega_0, t_0) \in Q(T)$ такая, что

$$f(\omega_0, t_0) = \max_{\bar{Q}(T)} f. \tag{$**$}$$

Тогда по требованию леммы

$$\frac{\partial f(\omega_0, t_0)}{\partial t} < 0.$$

Таким образом, найдется точка $t_1 \in (0, t_0)$, в которой

$$f(\omega_0, t_1) > f(\omega_0, t_0),$$

что противоречит $(**)$. Значит, максимальное значение f достигается только на ∂Q. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.7. Функцию f, удовлетворяющую условиям теоремы, аппроксимируем последовательностью функций

$$f_n(\omega, t) = f(\omega, t) + n^{-1}(T - t), \quad n \in \mathbb{N},$$

равномерно сходящейся к f на $\bar{Q}(T)$. Для каждой f_n, $n \in \mathbb{N}$, выполнены требования леммы 3.9. Поскольку

$$\max_{\bar{Q}(T)} f_n = \max_{\partial Q} f_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

то предельный переход $n \to \infty$ в этом равенстве приводит к соотношению

$$\max_{\bar{Q}(T)} f = \max_{\partial Q} f,$$

которым завершим доказательство первой части теоремы.

Аналогично проводится рассуждение для второй части теоремы. Теорема доказана.

В заключение отметим, что доказанный принцип максимума легко обобщается на вектор-функции.

В следующей лемме получим одно полезное неравенство.

ЛЕММА 3.10. *Пусть $v(x, t)$ — непрерывная неотрицательная функция, заданная на прямоугольнике*

$$\Pi = \{(x, t) : 0 \le x \le a,\ 0 \le t \le T\},$$

имеющая на Π непрерывную частную производную v_t. Пусть при каждом фиксированном $\bar{t} \in [0, T]$ в точках $\{\bar{x}\}$, в которых

$$v(\bar{x}, \bar{t}) = \max_{0 \le x \le a} v(x, \bar{t}),$$

выполняется неравенство

$$v_t(\bar{x}, \bar{t}) \le -g(\bar{t})\, v(\bar{x}, \bar{t}),$$

где $g(t)$ — непрерывная неотрицательная функция при $0 \le t \le T$. Тогда для $t \in [0, T]$ справедливо соотношение

$$\max_{0\le x\le a} v(x,t) \le \max_{0\le x\le a} v(x,0)\,\exp\left(-\int\limits_0^t g(s)\,ds\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что

$$\max_{0\le x\le a} v(x,0) > 0,$$

т. к. в случае обращения этой величины в нуль теорема 3.7 обеспечивает выполнение тождества

$$\max_{0\le x\le a} v(x,t) \equiv 0, \quad t \ge 0.$$

Поэтому без ограничения общности будем считать, что максимальный интервал положительности величины $\max\limits_{0\le x\le a} v(x,t)$ составляет весь отрезок $0 \le t \le T$. Сначала рассмотрим случай, когда функция $g(t)$ является неотрицательной константой. Если эта постоянная равна нулю, тогда для v справедлива теорема 3.7. Поэтому положим постоянную $g(t) \equiv k > 0$. Фиксируем точку $\bar t \in [0,T]$. В тех же точках, $\{\bar x\} \subset [0,a]$, для которых справедливо равенство $v(\bar x,\bar t) = \max\limits_{0\le x\le a} v(x,\bar t)$ выполнено следующее строгое неравенство:

$$v_t(\bar x,\bar t) < -v(\bar x,\bar t)k(1-2^{-n}),$$

при каждом натуральном $n \ge 1$. Поскольку рассматриваемые функции непрерывные, то в малой окрестности каждой точки $(\bar x,\bar t)$ выполняется неравенство

$$v_t(x,t) < -k(1-2^{-n})v(x,t), \quad n = 1,2,\ldots$$

В силу компактности множества $\{\bar x\}$ можно указать конечный набор открытых прямоугольников, покрывающих множество $\{\bar x\}\times\{\bar t\}$, в каждом из которых справедливы неравенства

$$v > 0,$$

$$v_t < -k(1-2^{-n})v, \qquad n = 1,2,\ldots$$

В силу непрерывности производной v_t она ограничена на компактах

$$\max_{\substack{0\le x\le a,\\ 0\le t\le T}} |v_t| < \infty,$$

и можно указать такое число $\tau > 0$, что при $\bar{t} \le t \le \bar{t}+\tau$ выполняется неравенство

$$\max_{0\le x\le a} v(x,t) \le \max_{0\le x\le a} v(x,\bar{t}) \exp[-k(1-2^{-n})(t-\bar{t})]$$

и, следовательно, на всем отрезке $0 \le t \le T$ имеем

$$\max_{0\le x\le a} v(x,t) \le \max_{0\le x\le a} v(x,0) \exp(-kt). \qquad (***)$$

Перейдем к окончательному доказательству леммы. Разобьем отрезок $[0,t] \subset [0,T]$ точками $t_n = \dfrac{n}{N}t$, $n = 0,1,\ldots,N$. Обозначим

$$g_n = \min_{t_n \le s \le t_{n+1}} g(s).$$

Тогда на каждом отрезке $t_n \le s \le t_{n+1}$, $0 \le n \le N-1$, в точках $\{\bar{x}\}$ справедливо неравенство $v_t(\bar{x},s) \le -g_n v(\bar{x},s)$. Применяя на этих отрезках соотношение $(***)$, получаем

$$\max_{0\le x\le a} v(x,t) \le \max_{0\le x\le a} v(x,0) \exp\left(-\sum_{n=0}^{N-1} g_n \Delta t\right), \quad \Delta t = \frac{t}{N}.$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$, получаем утверждение леммы. Лемма доказана.

Применим принцип максимума к нашему случаю уравнения коагуляции. Выделим в рассматривавшихся классах ядер подкласс ядер, удовлетворяющих следующему условию:

$$\Phi(x-y,y) \le \Phi(x,y), \qquad 0 < y \le \frac{1}{2}x,\ 0 < x < \infty. \qquad \text{(M)}$$

Достаточным условием для выполнения (M) является монотонный рост функции $\Phi(x,y)$ при фиксированном $y > 0$ и x, меняющемся в пределах $y \le x < \infty$. Условию (M) удовлетворяют ядра 1)–6), перечисленные в §1 настоящей главы, которые представляют интерес для описания реальных физических процессов коагуляции.

ТЕОРЕМА 3.8. *Пусть ядро* Φ *удовлетворяет условию* (M). *Тогда решение задачи Коши* (0.1), (0.2) *при начальной функции* f_0 *подчиняется принципу максимума, т. е.*

1) *на каждом отрезке* $0 \le x \le a < \infty$ *выполнено соотношение*

$$\max_{0\le x\le a} f(x,t) \le \max_{0\le x\le a} f_0(x), \quad t \ge 0;$$

2) *для всякого* $t \geq 0$ *справедливо неравенство*

$$\sup_{0 \leq x < \infty} f(x,t) \leq \sup_{0 \leq x < \infty} f_0(x),$$

если $\sup\limits_{0 \leq x < \infty} f_0(x,t) < \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Нарушение условия (M) может привести, вообще говоря, к неограниченным решениям уравнения (0.1), примером чего служит ядро

$$\Phi(x,y) = \begin{cases} 1, & x + y = x_0 > 0, \\ \\ 0, & x + y \neq x_0, \quad x,\, y \geq 0. \end{cases}$$

Действительно, легко проверить, что решение уравнения (0.1) с начальным условием f_0 при этом ядре имеет следующий вид:

$$f(x,t) = \begin{cases} f_0(x) + ct, & x = x_0,\ t \geq 0, \\ \\ f_0(x), & x \neq x_0,\ t \geq 0, \end{cases}$$

где постоянная определяется интегралом

$$c = \frac{1}{2} \int\limits_0^{x_0} f_0(x_0 - y) f_0(y)\, dy.$$

Очевидно, если $c > 0$, то $f(x,t) \to \infty$ при $t \to \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.8. Фиксируем произвольный момент времени $t > 0$. Пусть в точках $\{\bar{x}\} \subset [0,a]$, $0 < a < \infty$, имеет место равенство

$$f(\bar{x},t) = \max_{0 \leq x \leq a} f(x,t).$$

Воспользовавшись симметричностью ядра $\Phi(x,y)$ и разбивая второй член в правой части тождества (0.1) на два слагаемых, перепишем это соотношение в следующем виде:

$$\frac{\partial f(\bar{x},t)}{\partial t} = \int\limits_0^{\bar{x}/2} \left[\Phi(\bar{x} - y, y) f(\bar{x} - y, t) - \Phi(\bar{x}, y) f(\bar{x}, t)\right] f(y,t)\, dy -$$

$$-f(\bar{x},t)\int\limits_{\bar{x}/2}^{\infty}\Phi(\bar{x},y)f(y,t)\,dy.$$

Поскольку справедливо неравенство

$$f(\bar{x}-y,t)\le f(\bar{x},t)$$

при $0\le y\le\bar{x}$, выполняется условие (M), функции f и Φ неотрицательные, то

$$\frac{\partial}{\partial t}f(\bar{x},t)\le 0.$$

Воспользовавшись принципом максимума (теорема 3.7) получаем

$$\max_{0\le x\le a} f(x,t)\le\max_{0\le x\le a} f_0(x),\quad t\ge 0.$$

Т. к. это соотношение справедливо на каждом отрезке $0\le x\le a$, то в случае, когда

$$\sup_{0\le x<\infty} f_0(x,t)<\infty,$$

имеем

$$\sup_{0\le x<\infty} f(x,t)\le\sup_{0\le x<\infty} f_0(x),\quad t\ge 0.$$

Здесь мы учли то, что

$$\sup_{0\le x<\infty} f=\lim_{a\to\infty}\max_{0\le x\le a} f.$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. *Если начальная функция f_0 мажорируется при $x\ge 0$ неубывающей функцией $g(x)$ так, что $f_0(x)\le g(x)$, $x\ge 0$, то для решения уравнения коагуляции с ядром $\Phi(x,y)$, удовлетворяющим условию* (M), выполняется неравенство

$$f(x,t)\le g(x),\quad x\ge 0,\ t\ge 0.$$

Это утверждение вытекает непосредственно из пункта 1) условия теоремы 3.8.

Укажем на один физический аспект принципа максимума для уравнения коагуляции. В работе [41] отмечалось, что для ядер, обращающихся в нуль на диагонали, т. е. $\Phi(x,x) \equiv 0$, вообще говоря, возможен случай, когда решение уравнения коагуляции $f(x,t)$ образует δ-образную последовательность при $t \to \infty$. Доказанный принцип максимума указывает на то, что в физически реальных ситуациях этот случай не имеет места.

§ 5. Решения уравнения коагуляции с ядрами из класса $\mathcal{K}^{(\mathrm{s})}$, удовлетворяющими условию (M)

В настоящем параграфе на основании принципа максимума для уравнения коагуляции расширяется класс начальных функций f_0, для которых разрешима задача Коши (0.1), (0.2) с ядрами, имеющими особенности на осях координат. В §2 этой главы данный вопрос рассматривался в случае ядер $\Phi(x,y)$ для коагулирующих систем без малых частичек в спектре, т. е. $f_0(x) = 0$ в некоторой окрестности $x = 0$. Указанное ограничение на начальный спектр удается снять за счет условия (M), которое дополнительно накладывается на ядро Φ. Следует подчеркнуть, что в рассматриваемом случае не доказана пока теорема единственности решения.

ТЕОРЕМА 3.9. *Пусть ядро* $\Phi \in \mathcal{K}^{(s)}$ *таково, что можно указать непрерывную монотонную на* $[0,\infty)$ *функцию* $g(x)$, *для которой выполнены следующие условия*:

$g(0) = 0$;

$g(x)$ *монотонно возрастает при* $x > 0$;

$g(x) \equiv g(1)$ *при* $x \geq 1$,

и, наконец,

$$\Phi(x,y) \leq \frac{1}{g(x)} + \frac{1}{g(y)} + c\,(1+x+y), \quad x,y > 0,\ c > 0. \tag{3.7}$$

Предположим, что ядро Φ *удовлетворяет условию* (M) *принципа максимума, а начальная функция* $f_0 \in \Omega^{+}_{0,2}(0)$ *и выполняется неравенство* $f_0(x) \leq g(x)$, $0 \leq x \leq x_0$, $x_0 > 0$. *Тогда существует решение задачи Коши* (0.1), (0.2) *в полосе* Π_T, *принадлежащее классу* $\Omega^{+}_{0,2}(T)$. *Указанное решение подчиняется неравенствам, перечисленным в теореме* 3.8 *и следствии* 3.3.

Вкратце перечислим основные моменты доказательства этой теоремы, которое подробно проводить не станем, т. к. оно полностью следует методам доказтельства теоремы 2.1. Сначала строится последовательность ограниченных ядер $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$, определенная соотношениями (3.6). Рассмотрение такой последовательности важно именно потому, что каждое ядро Φ_n, $n \geq 1$, удовлетворяет условию (M) принципа максимума, если это условие выполняется для ядра Φ. С последовательностью ядер $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ связана последовательность решений уравнения (0.1) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ с входными данными (f_0, Φ_n). В силу следствия 3.3 каждая функция f_n, $n \geq 1$, удовлетворяет следующему неравенству:

$$f_n(x,t) \leq g(x),$$

$$0 \leq x \leq x_0, \quad t \geq 0, \quad n \geq 1.$$

Комбинируя эту равномерную относительно $t \geq 0$ и $n \geq 1$ оценку с методами, применявшимися при доказательстве теоремы 2.1, устанавливаем компактность в пространстве непрерывных функций последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ на каждом прямоугольнике $\Pi_T(X)$, а также справедливость равномерных оценок вида (2.14). При помощи диагонального процесса, применявшегося в лемме 2.3, из последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ выбираем подпоследовательность, которая сходится на каждом прямоугольнике $\Pi_T(X)$. Предел этой подпоследовательности является искомым решением задачи Коши (0.1), (0.2) с входными данными, указанными в условиях теоремы. Наконец, подчеркнем, что условиям сформулированной теоремы удовлетворяет ядро броуновской коагуляции.

§ 6. Асимптотика решений при больших аргументах

В этом параграфе на основе принципа максимума получаются равномерные относительно $0 \leq t < \infty$ оценки решения уравнения коагуляции в случае конкретных ядер, представляющих интерес для описания реальных процессов коагуляции. Такие оценки позволяют грубо судить о характере поведения спектра при больших размерах частиц на протяжении всего процесса коагуляции, поскольку оценки не меняются с течением времени. Затем изучается поведение решения и функционалов от него при $t \to +\infty$.

Пусть функция f — решение уравнения (0.1) с ядром Φ, $c(x)$ — вещественная функция, определенная и непрерывная при $x \geq 0$, причем $c(x) > 0$, если $x > 0$. Отметим, что преобразование $f \mapsto \varphi$, где $\varphi(x,t) \equiv c(x) f(x,t)$, приводит к следующему тождеству:

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,t) = c(x)\,[\varphi,\varphi]_{\bar{\Phi}},$$

$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x),$$

где $\varphi_0(x) = c(x) f(x,0)$, а ядро

$$\bar{\Phi}(x,y) = c^{-1}(x)\Phi(x,y)\,c^{-1}(y), \quad x,\ y > 0.$$

Если ядро $\bar{\Phi}$ удовлетворяет условию (M) и $\sup\limits_{0\leq x<\infty} \varphi_0(x) = K < \infty$, то повторяя рассуждения теоремы 3.8 в применении к функции φ, заключаем, что $\sup\limits_{0\leq x<\infty} \varphi(x,t) \leq K,\ t \geq 0$. Следовательно, справедлива оценка для решения f уравнения (0.1), которая не зависит от t:

$$f(x,t) \leq \frac{k}{c(x)}, \quad t \geq 0,\ 0 < x < \infty. \tag{3.8}$$

Продемонстрируем возможность получения оценок вида (3.8) на примере ядра $\Phi(x,y) = |x-y|$. Получим степенные оценки, положив $c(x) = x^\alpha$, $\alpha \geq 0$. Найдем наибольшее значение параметра α, при котором ядро $x^{-\alpha}|x-y|y^{-\alpha}$ является монотонно растущей функцией по аргументу x при $0 < y \leq x < \infty$, т.е. удовлетворяет условию (M). Данное условие в нашем случае эквивалентно выполнению соотношения

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x-y}{x^\alpha y^\alpha}\right) \geq 0, \quad 0 < y \leq x < \infty.$$

Отсюда легко получаем, что имеет место неравенство

$$(1-\alpha)x + \alpha y \geq 0$$

для всех $0 < y \leq x < \infty$. Таким образом, искомое значение параметра $\bar{\alpha} = 1$. Следовательно, ядро $x^{-\alpha}|x-y|y^{-\alpha}$ удовлетворяет условию (M) при параметрах $0 \leq \alpha \leq 1$, а при $\alpha > 1$ это утверждение не имеет места. Если начальная функция задачи Коши (0.1), (0.2) такова, что

$$\sup_{0\leq x<\infty} x^\alpha f_0(x) = K < \infty, \quad \alpha \geq 0, \tag{3.9}$$

при каком-нибудь $\alpha \in [0,1]$, то решение этой задачи в случае ядра $\Phi(x,y) = |x-y|$ подчиняется неравенству

$$f(x,t) \le Kx^{-\alpha}, \quad 0 < x < \infty, \ t \ge 0. \tag{3.10}$$

Аналогичными рассуждениями можно показать, что при выполнении условия (3.9) оценка (3.10) справедлива для решения задачи Коши (0.1), (0.2) со следующими ядрами:

а) $x+y$ при $0 \le \alpha \le \dfrac{1}{2}$;

б) $(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})^3$ при $0 \le \alpha \le \dfrac{1}{2}$;

в) $|x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}|(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})^2$ при $0 \le \alpha \le \dfrac{27}{32}$.

Отметим, что верхняя граница для параметра α в случае в) может быть уточнена: она находится в интервале $\dfrac{27}{32} < \bar{\alpha} < 1$. Для решений уравнения коагуляции с ядром броуновской коагуляции

$$\Phi(x,y) = \Big[(x^{-\frac{1}{3}} + y^{-\frac{1}{3}})(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})\Big]^3$$

оценка вида (3.10) возможна лишь при $\alpha = 0$, т. е. имеет место обычный принцип максимума.

Отметим возможность получения грубых априорной оценки неотрицательного решения уравнения Смолуховского (0.1), основанной на решении неравенства

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} \le \frac{1}{2}\int\limits_0^x \Phi(x-y,y) f(x-y,t) f(y,t)\,dy \quad x \ge 0, \ t > 0,$$

получающегося из (0.1) отбрасыванием отрицательных членов в операторе столкновений Смолуховского. Обозначим

$$c(x) = \max_{0 \le \xi,\, \eta \le x} \Phi(\xi,\eta), \quad x \ge 0.$$

Тогда непрерывное решение f этого неравенства мажорируется решением следующей задачи:

$$\frac{\partial \bar{f}(x,t)}{\partial t} \le \frac{1}{2} c(x) \int\limits_0^x \bar{f}(x-y,t)\bar{f}(y,t)\,dy, \quad x \ge 0, \ t > 0,$$

$$\bar f(x,0) = \max_{0\le\xi\le x} f_0(\xi), \quad x \ge 0.$$

Используя неотрицательность и монотонное возрастание функций $c(x)$ и $\max\limits_{0\le\xi\le x} f_0(\xi)$ при $x \ge 0$, получаем неравенство

$$f(x,t) \le \bar f(x,t) \le \bar f(x,0)\exp\left[xc(x)\bar f(x,0)t\right], \quad x \ge 0,\ t \ge 0,$$

которое позволяет в ряде случаев получать равномерные оценки аппроксимаций задачи Коши (0.1), (0.2) на компактах, не прибегая к принципу максимума. Аналогичное неравенство устанавливается в лемме 7.1 для пространственно неоднородного уравнения Смолуховского с дискретными массами.

Теперь перейдем к асимптотическому поведению решений уравнения коагуляции при $t \to \infty$. Подчеркнем, что в формулировках теорем ядро Φ предполагается элементом пространства $\mathcal{K}$, однако без существенных изменений результаты переносятся на случай ядер, имеющих особенности на осях координат.

ТЕОРЕМА 3.10. *Пусть ядро $\Phi \in \mathcal{K}$ удовлетворяет одному из требований*:

1) *функция $\Phi(x,y) > 0$ на $\mathbb{R}_2^+$ за исключением быть может осей координат*;

2) *функция $\Phi(x,y)$ удовлетворяет условию* (M) *принципа максимума и плоская мера Лебега* $\operatorname{mes}\{(x,y)\in\mathbb{R}_2^+ : \Phi(x,y)=0\} = 0$.
Тогда при любой начальной функции $f_0 \in \Omega_{0,2}^+(0)$ соответствующее решение уравнения (0.1) *стабилизируется к* 0 *в метрике пространства $\mathcal{L}_{[0,\infty)}^{(1)}$* (*пространство суммируемых функций на* $[0,\infty)$) *при $t \to \infty$, т. е.*

$$\| f(.,t) \|_0^{(0)} \to 0, \quad t \to \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольное число $0 < a < \infty$. Интегрируя тождество (0.1) по x, получаем

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^a f(x,t)\,dx = \frac{1}{2}\iint\limits_{D_a} \Phi(x,y)f(x,t)f(y,t)\,dxdy -$$

$$-\int\limits_0^a\int\limits_0^\infty \Phi(x,y)f(x,t)f(y,t)\,dxdy,$$

где область интегрирования D_a интегрирования задана соотношениями

$$D_a = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}_2^+ : x + y \leq a\right\}.$$

Отсюда получается следующее неравенство:

$$\frac{d}{dt} \int\limits_0^a f(x,t)\,dx \leq -\frac{1}{2} \int\limits_0^a \int\limits_0^a \Phi(x,y) f(x,t) f(y,t)\,dxdy, \quad t \geq 0.$$

Очевидным следствием этого соотношения является «слабый» принцип максимума

$$\int\limits_0^a f(x,t)\,dx \leq \int\limits_0^a f_0(x)\,dx, \quad t \geq 0. \tag{3.11}$$

Рассмотрим квадрат $\Pi_a = [0, a] \times [0, a]$ и в нем множество

$$M = \{(x, y) \in \Pi_a : \Phi(x, y) = 0\}.$$

Т. к. плоская мера Лебега $\operatorname{mes} M = 0$, то для любого заданного числа $\varepsilon > 0$ найдется открытое множество $O_\varepsilon \supset M$ такое, что $\operatorname{mes} O_\varepsilon < \varepsilon$. Обозначим постоянную

$$\mu = \frac{1}{2} \inf_{\Pi_a \setminus O_\varepsilon} \Phi.$$

Очевидно, что $\mu > 0$. Справедливо следующее неравенство:

$$\frac{d}{dt} \int\limits_0^a f(x,t)dx \leq -\mu \int\!\!\int\limits_{\Pi_a \setminus O_\varepsilon} f(x,t) f(y,t)\,dxdy,$$

из которого получаем

$$\frac{d}{dt} \int\limits_0^a f(x,t)dx \leq -\mu \left(\int\limits_0^a f(x,t)\,dx\right)^2 + \mu \iint\limits_{O_\varepsilon} f(x,t) f(y,t)\,dxdy.$$

В случае, когда ядро Φ удовлетворяет условию 1), положим

$$O_\varepsilon = \left\{0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y < \frac{\varepsilon}{2a}\right\} \bigcup \left\{0 \leq x < \frac{\varepsilon}{2a},\ 0 \leq y \leq a\right\}.$$

В силу неравенства (3.11) имеет место оценка

$$\iint\limits_{O_\varepsilon} f(x,t)f(y,t)\,dxdy \le 2\int\limits_0^{\varepsilon/2a} f_0(x)\,dx\int\limits_0^a f_0(y)\,dy = \gamma_a(\varepsilon).$$

Ясно, что $\gamma_a(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. В случае 2) оценим

$$\iint\limits_{O_\varepsilon} f(x,t)f(y,t)\,dxdy,$$

воспользовавшись принципом максимума

$$\iint\limits_{O_\varepsilon} f(x,t)f(y,t)\,dxdy \le [\max_{0\le x\le a} f_0(x)]^2\ \operatorname{mes} O_\varepsilon = \gamma_a(\varepsilon).$$

Таким образом, в обоих случаях на каждом отрезке $[0,a]$ справедливо неравенство

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^a f(x,t)\,dx \le -\mu\left\{\left(\int\limits_0^a f(x,t)\,dx\right)^2 + \gamma_a(\varepsilon)\right\},\quad t\ge 0,$$

где $\gamma_a(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. По лемме о дифференциальных неравенствах [39] функция $\int\limits_0^a f(x,t)\,dx$ мажорируется решением следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{du}{dt} = \mu\,\left[-u^2+\gamma_a(\varepsilon)\right],\quad t\ge 0,$$

с начальным условием

$$u|_{t=0} = \int\limits_0^a f_0(x)\,dx.$$

Поскольку $u(t)\to\gamma_a^{1/2}(\varepsilon),\ t\to\infty$, то для достаточно больших t

$$\int\limits_0^a f(x,t)\,dx < 2\gamma_a^{1/2}(\varepsilon).$$

В силу произвольности выбора чисел $a > 0$, $\varepsilon > 0$ интеграл

$$\int_0^a f(x,t)\,dx \to 0, \quad t \to +\infty, \tag{3.12}$$

для каждого $0 < a < \infty$. Поскольку на рассматриваемом решении уравнения коагуляции сохраняется величина

$$\int_0^\infty xf(x,t)\,dx \equiv \int_0^\infty xf_0(x,t)\,dx, \quad t \geq 0,$$

то выполняется неравенство

$$\int_a^\infty f(x,t)\,dx \leq a^{-1} \int_0^\infty xf_0(x,t)\,dx, \quad t \geq 0,\ a > 0.$$

Сочетая это неравенство с (3.12), получаем, что

$$\int_0^\infty f(x,t)\,dx \to 0$$

при $t \to +\infty$. Теорема доказана.

Отметим, что условиям этой теоремы удовлетворяют ядра 1)–6), перечисленные в §1 этой главы.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. *Если ядро* Φ *удовлетворяет условиям теоремы* 3.10, *то уравнение* (0.1) *имеет в* $\Omega^+_{0,2}(T)$, $0 < T < \infty$, *только одно стационарное решение* $f = 0$, *причем все остальные решения притягиваются к нему при* $t \to +\infty$ *в метрике пространства* $\mathcal{L}^{(1)}_{[0,\infty)}$.

Теперь перейдем к утверждениям о поведении решений уравнения коагуляции при $t \to +\infty$ в метрике пространства непрерывных функций. Введем обозначение

$$G_\delta(a) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^+_2 \,:\, |x-y| \geq \delta > 0,\ 0 \leq x \leq a\right\}.$$

ТЕОРЕМА 3.11. *Пусть ядро* $\Phi \in \mathcal{K}$ *удовлетворяет условию* (M) *принципа максимума, а также*

$$\Phi(x,y) \geq \psi(x,y)\,|x-y|, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^+_2,$$

где функция ψ *такова, что*

$$0 \le \psi(x,y) = \psi(y,x) \le \sup_{\mathbb{R}_2^+} \psi < \infty,$$

причем при каждом $\delta > 0$, $0 < a < \infty$ *выполнено неравенство*

$$\inf_{G_\delta(a)} \psi > 0.$$

Тогда на любом отрезке $[0,a]$

$$\max_{0\le x\le a} f(x,t) \to 0, \quad t \to +\infty.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Условиям теоремы 3.11 удовлетворяют ядра 1)–6), перечисленные в начале настоящей главы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.11. Фиксируем отрезок $0 \le x \le a$, момент времени $t > 0$. В точках $\{\bar{x}\} \subset [0,a]$, в которых

$$f(\bar{x},t) = \max_{0\le x\le a} f(x,t),$$

имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\bar{x},t) \le -f(\bar{x},t) \int\limits_{1/2\bar{x}}^{\infty} \Phi(\bar{x},y) f(y,t)\,dy.$$

Здесь мы воспользовались тем, что ядро Φ удовлетворяет условию (M). Усилим полученное неравенство:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\bar{x},t) \le -f(\bar{x},t)\,\mu(\delta,a) \int\limits_{a+\delta}^{\infty} (y-a) f(y,t)\,dy,$$

где величины

$$\delta > 0, \quad \mu(\delta,a) = \inf_{G_\delta(a)} \psi.$$

Для $y \ge a+\delta$ при $a > 0$ справедливо неравенство $a \le (a+\delta)^{-1} ay$. Действительно, при $a > 0$ и $y \ge a+\delta$ величина $y(a+\delta \ge 1$. Умножая обе части этого соотношения на a, устанавливаем указанное выражение. Следовательно,

$$y - a \ge y - (a+\delta)^{-1} ay = y\left(1 - \frac{a}{a+\delta}\right) = y\frac{\delta}{a+\delta}.$$

С учетом этого неравенства, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\bar{x},t) \le -f(\bar{x},t)\frac{\delta\,\mu(\delta,a)}{a+\delta}\int\limits_{a+\delta}^{\infty} y f(y,t)\,dy.$$

Пусть число $M = \max\limits_{0\le x\le a+\delta} f_0(x)$. Выберем числа $a>0$, $\delta>0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$m_0 - M(a+\delta)^2 > 0,$$

где величина m_0 определяется интегралом

$$m_0 = \int\limits_0^{\infty} y f_0(y)\,dy.$$

Тогда в силу принципа максимума и сохранения первого момента $\int\limits_0^{\infty} x f(x,t)\,dx$ на решении уравнения коагуляции имеем

$$\int\limits_{a+\delta}^{\infty} y f(y,t)\,dy = \int\limits_0^{\infty} y f(y,t)\,dy - \int\limits_0^{a+\delta} y f(y,t)\,dy \ge$$

$$\ge m_0 - M\,(a+\delta)^2 > 0, \quad t\ge 0.$$

Обозначим постоянную

$$k = \frac{\delta\mu(\delta,a)}{a+\delta}\left[m_0 - M(a+\delta)^2\right],$$

применением лемму 3.10 к функции f на отрезке $0\le x\le a$. В результате получаем

$$\max_{0\le x\le a} f(x,t) \le \max_{0\le x\le a} f_0(x,t)\exp(-kt) \to 0, \quad t\to+\infty.$$

Покажем, что $\max\limits_{0\le x\le a} f(x,t) \to 0$ при $t\to+\infty$ на каждом отрезке $0\le x\le a$, $a>0$. Рассмотрим все отрезки $[0,a]$, на которых

$$\max_{0\le x\le a} f(x,t)\to 0$$

при $t\to+\infty$. Обозначим a^* точную верхнюю грань правых концов таких отрезков. Предположим, что $a^*<\infty$. Пусть число $a^{'} > a^*$. Тогда в точках $\{\bar{x}\}\subset[0,a']$, для которых справедливо равенство

$$f(\bar{x}, t) = \max_{0 \le x \le a'} f(x, t),$$

имеем

$$\frac{\partial f(\bar{x}, t)}{\partial t} \le -f(\bar{x}, t) \frac{\delta\, \mu(\delta, a')}{a' + \delta} \int\limits_{a'+\delta}^{\infty} y f(y, t)\, dy, \quad \delta > 0.$$

Поскольку на каждом отрезке $[0, a^* - \delta]$, $\delta > 0$, величина

$$\max_{0 \le a \le a^* - \delta} f(x, t) \to 0$$

при $t \to +\infty$, то в силу принципа максимума

$$\int\limits_0^{a^*} y f(y, t)\, dy \to 0, \quad t \to +\infty.$$

Тогда для достаточно больших $t \ge T > 0$ выполнено неравенство

$$\int\limits_0^{a^*} y f(y, t)\, dy < \frac{m_0}{4}.$$

Выберем числа $a' > a^*$, $\delta > 0$ так, чтобы имело место следующее неравенство:

$$\int\limits_{a^*}^{a'+\delta} y f(y, t)\, dy < \frac{m_0}{4}$$

равномерно относительно $0 \le t < \infty$. Это можно сделать, воспользовавшись принципом максимума для решения уравнения коагуляции, за счет малости $a' - a^*$ и $\delta > 0$. Значит, при $t \ge T$ выполняется соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\bar{x}, t) \le -k f(\bar{x}, t),$$

где постоянная k определяется следующим выражением:

$$k = \frac{1}{2} \frac{\delta\, \mu(\delta, a^{'})}{a' + \delta}\, m_0 > 0.$$

Применяя лемму 3.10, получаем, что

$$\max_{0 \le x \le a'} f(x,t) \to 0$$

при $t \to +\infty$. Таким образом, приходим к противоречию с предположением об ограниченности величины a^*. Отсюда следует утверждение теоремы. Представляется важным подчеркнуть экспоненциальность стремления к нулю решения уравнения (0.1) в рассматриваемом случае при $t \to +\infty$ на каждом конечном отрезке $0 \le x \le a$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.5. *В случае ядер* 1)–4), *перечисленных в начале главы, и начальных функций f_0, удовлетворяющих условию* (3.9) *при некотором $\alpha > 0$, соответствующие решения уравнения коагуляции притягиваются при $t \to +\infty$ к единственному стационарному решению $f = 0$ в норме пространства C:*

$$\sup_{0 \le x < \infty} f(x,t) \to 0, \quad t \to +\infty.$$

Это утверждение вытекает из теоремы 3.11 в сочетании с оценкой (3.10).

Следующая теорема детализирует характер асимптотической скорости стабилизации к нулю решения уравнения коагуляции при $t \to +\infty$ для ядер 1)–4).

ТЕОРЕМА 3.12. *Пусть ядро Φ удовлетворяет условию* (M) *принципа максимума, а также*

$$y - x^{1-\mu} y^{\mu} \le \Phi(x,y) \le y + \alpha(x) y^q + \beta(x), \quad 0 \le x \le y < \infty,$$

где непрерывные функции $\alpha(x) \ge 0$, $\beta(x) \ge 0$ при $0 \le x < \infty$, а константы $0 \le \mu, q < 1$. Тогда для любых $0 < a < \infty$, $0 < \varepsilon < m_0$ можно указать такое числа $T > 0$, $k > 0$ и функции K_1, $K_2 = kI_{G(f_0,\Phi)}$ ($I_{G(f_0,\Phi)}$ — характеристическая функция множества положительности решения уравнения коагуляции f, т.е. на множестве $G(f_0,\Phi)$) функция $f > 0$, см. §2 настоящей главы) что для $t \ge T$, $0 \le x \le a$ справедливы неравенства

$$K_1(x) \exp[-(m_0 + \varepsilon)t] \le f(x,t) \le K_2(x) \exp[-(m_0 - \varepsilon)t],$$

причем функция $K_1(x) > 0$ на множестве $G(f_0,\Phi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для построения оценок функции f, указанных в формулировке теоремы, сразу отметим, что все дальнейшие построения относятся только к точкам $x \in G(f_0, \Phi)$ множества положительности решения f уравнения Смолуховского (0.1) с ядром Φ, ибо в остальных точках — $f = 0$. Легко проверить, что рассматриваемое ядро удовлетворяет условиям теоремы 3.11, причем выполняется оценка $\Phi(x, y) \geq |x - y|$. Фиксируем отрезок изменения аргумента $0 \leq x \leq a$. Рассуждая аналогично доказательству теоремы 3.11, при каждом фиксированном $t \geq 0$ в точках $\{\bar{x}\}$, где

$$f(\bar{x}, t) = \max_{0 \leq x \leq a} f(x, t),$$

выполняется неравенство

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\bar{x}, t) \leq -f(\bar{x}, t) \int_a^\infty (y - a) f(y, t)\, dy.$$

В силу теоремы 3.11 имеют место следующие соотношения:

$$\int_a^\infty y f(y, t)\, dy \to m_0 = \int_0^\infty x f_0(x)\, dx, \quad t \to +\infty;$$

$$\int_a^\infty f(y, t)\, dy \to 0, \quad t \to +\infty.$$

Таким образом, для достаточно больших $t \geq T$ выполняется неравенство

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\bar{x}, t) \leq -f(\bar{x}, t)(m_0 - \varepsilon),$$

где ε — произвольное наперед заданное положительное число. Выполнение условия (М) обеспечивает справедливость неравенства

$$\max_{0 \leq x \leq a} f(x, T) \leq \max_{0 \leq x \leq a} f_0(x) = k(a).$$

Применяя результат леммы 3.10 к функции f при $0 \leq x \leq a$, $t \geq T$, получаем оценку

$$f(x, t) \leq k \exp[-(m_0 - \varepsilon)t], \quad 0 \leq x \leq a,\ t \geq T.$$

Перейдем к оценке решения снизу. Очевидно, что на решении уравнения (0.1) выполняется неравенство

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) \geq -f(x,t) \int\limits_0^\infty \Phi(x,y) f(y,t)\, dy, \quad x \geq 0,\ t \geq 0.$$

Ввиду теоремы 3.11 по заданному числу $\varepsilon > 0$ для отрезка $0 \leq x \leq a$ можно указать такое число $T > 0$, что для $t \geq T$ имеет место оценка

$$\int\limits_0^\infty \Phi(x,y) f(y,t)\, dy \leq \frac{\varepsilon}{2} + \int\limits_a^\infty \left(y + \bar{\alpha} y^q + \bar{\beta}\right) f(y,t)\, dy,$$

где

$$\bar{\alpha} = \sup_{0 \leq x \leq a} \alpha, \quad \bar{\beta} = \sup_{0 \leq x \leq a} \beta.$$

Получим равномерные относительно $0 \leq t < \infty$ оценки моментов функции f. При $0 \leq q < 1$ справедливо неравенство

$$\int\limits_a^\infty y^q f(y,t)\, dy \leq \int\limits_a^\infty y^q \frac{y^{1-q}}{y^{1-q}} f(y,t)\, dy \leq$$

$$\leq \int\limits_a^\infty \frac{y}{a^{1-q}} f(y,t)\, dy, \quad a > 0.$$

Таким образом, искомые оценки имеют следующий вид:

$$\int\limits_a^\infty y^q f(y,t)\, dy \leq a^{-1+q} m_0, \quad a > 0.$$

Следовательно, т. к.

$$\max_{0 \leq x \leq a} f(x,t) \to 0 \quad t \to +\infty,$$

то справедливо соотношение

$$\int\limits_0^\infty y^q f(y,t)\, dy \to 0$$

при $t \to +\infty$. Выбирая число $T > 0$ достаточно большим, получаем

$$\int\limits_0^\infty \Phi(x,y) f(y,t)\, dy \leq \varepsilon + m_0, \quad t \geq T.$$

Таким образом, при $t \geq T$ имеет место неравенство

$$f(x,t) \geq f(x,T)\exp[-(m_0+\varepsilon)t], \quad 0 \leq x \leq a, \ t \geq T.$$

Обозначая $K_1(x) = f(x,T)$ и воспользовавшись теоремой 3.6, получаем утверждение теоремы. Теорема доказана.

Кратко резюмируем физическое содержание результатов этого параграфа.

Прежде всего следует подчеркнуть отсутствие нетривиальных стационарных распределений в коагулирующей системе при физически реальных ядрах взаимодействия частиц. Для решений уравнения коагуляции при $t \to +\infty$ с такими ядрами характерно стремление к нулю с экспоненциальной скоростью, причем характер стабилизации главным образом определяется удельной массой системы (т. е. средней массой частиц в единице объема коагулирующей системы)

$$m_0 = \int\limits_0^\infty x f_0(x)\, dx$$

и, таким образом, выполняется асимптотическое соотношение

$$f(x,t) \sim \exp(-m_0 t), \quad t \to +\infty.$$

Получены оценки скорости убывания при больших аргументах функции распределения частиц по размерам, причем эти оценки существенно зависят от геометрии ядра, что указывает на возможное наличие связи между строением ядра на диагонали $x = y$ и характером убывания спектра при $x \to \infty$. Повидимому, обращение ядра в нуль на диагонали приводит к более быстрому стремлению функции распределения к нулю, чем в случае ядер не имеющих нулей на диагонали, на что указывает попарное сравнение оценок решений уравнения (0.1) с ядрами

$$x + y \text{ и } |x - y|;$$

$$(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})^3 \text{ и } |x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}|(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})^2.$$

Это явление отмечалось в работах [3, 42–44], основанных на численных экспериментах, проводившихся для соответствующих ядер.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Наличие особенностей у ядра Φ на осях координат может привести к возникновению нетривиальных стационарных решений уравнения Смолуховского (0.1), т. е. в этом случае решение не стремится к 0 с ростом времени t.

Примером тому служит ядро вида

$$\Phi(x,y) = \frac{\alpha(x)\alpha(y)}{(x+y)^3} \quad x,\, y > 0.$$

Действительно, рассмотрим стационарное уравнение (0.1)

$$S(f) = 0,$$

где S — оператор столкновений Смолуховского, задаваемый правой частью уравнения (0.1). Найдем ядра вида

$$\Phi(x,y) = \alpha(x)\alpha(y)\Psi(x+y),$$

при которых стационарное уравнение Смолуховского (0.1) имеет нетривиальное решение f. Для этого положим $\alpha(x)f(x) \equiv 1$ при $x \geq 0$. Тогда для неизвестной функции Ψ имеем уравнение

$$\frac{1}{2}x\Psi(x) - \int\limits_0^\infty \Psi(x+y)\,dy = 0, \quad x > 0.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2}x\Psi(x) - \int\limits_x^\infty \Psi(y)\,dy = 0, \quad x > 0.$$

Полагая Ψ гладкой суммируемой функцией при $x > 0$, дифференцированием этого тождества получаем

$$x\Psi'(x) + 3\Psi(x) = 0, \quad x > 0.$$

Следовательно,

$$\Psi(x) = Cx^{-3} \quad x > 0,$$

что приводит к вышеуказанному примеру.

§ 7. Типичные свойства решений уравнения коагуляции

В настоящем параграфе мы остановимся на наиболее типичных ситуациях, которые имеют место для решений урвнения (0.1) (понятие типичности формулируется ниже). Здесь рассматриваются решения $f \in \Omega^+(T)$, $0 < T < \infty$, соответствующие входным данным $(f_0, \Phi) \in \mathfrak{M}$. Как обычно, понятие типичности основывается на выделении достаточно обширного множества решений, которые обладают тем или иным свойством, см., например, [45].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Будем называть некоторое свойство решений уравнения (0.1) типичным, если этим свойством обладают решения при входных данных (f_0, Φ), лежащих в некотором бэровском подмножестве пространства входных данных $(\Omega^+(0), d^{(0)}) \times (\mathcal{K}, r)$, т. е. во множестве, представимом в виде счетного пересечения открытых всюду плотных в $(\Omega^+(0), d^{(0)}) \times (\mathcal{K}, r)$ множеств.

Следующие свойства типичны для решений уравнения коагуляции:

а) сохранение первого момента

$$\int\limits_0^\infty x f(x,t)\,dx = \int\limits_0^\infty x f_0(x)\,dx, \quad t \ge 0;$$

б) «слабый» принцип максимума: на каждом отрезке $[0, a]$

$$\| f(.,t) \|_{\mathcal{L}^{(1)}_{[0,a]}} = \int\limits_0^a f(x,t)\,dx \le \| f_0 \|_{\mathcal{L}^{(1)}_{[0,a]}}, \quad t \ge 0;$$

в) стабилизация решений к нулю в норме пространства $\mathcal{L}^{(1)}_{[0,\infty)}$ при $t \to +\infty$

$$\| f(.,t) \|_{\mathcal{L}^{(1)}_{[0,\infty)}} \to 0, \quad t \to +\infty;$$

г) положительность решений

$$f(x,t) > 0, \quad 0 \le x < \infty,\ t > 0.$$

Отметим, что свойствами а) и б) обладают решения уравнения (0.1) при всех входных данных $(f_0, \Phi) \in \mathfrak{M}$, см. соотношения (2.6) и (3.11). Утверждения пунктов в) и г) следуют из теорем 3.10 и 3.1 соответственно, поскольку множество строго положительных входных данных (f_0, Φ) является бэровским подмножеством топологического пространства $\mathfrak{M}$. Таким образом, возмущения входных данных задачи Коши (0.1), (0.2), как правило, приводят к тому, что решение возмущенной задачи обладает указанными типичными свойствами. С точки зрения введенного понятия типичности большинство коагулирующих систем таковы, что плотность числа частиц в системе ассимптотически стремится к нулю при $t \to \infty$, т.е. процесс эволюционирует в направлении укрупнения частиц до полного их слияния, причем в каждый момент времени $t > 0$ в спектре системы представлены частицы всех размеров.

§ 8. Автомодельные решения уравнения коагуляции

В связи с изучением асимптотических свойств решений уравнения (0.1) представляет интерес вопрос о существовании автомодельных решений уравнения (0.1) в той форме, как это было предложено в работе [34]. Воспроизведем метод получения интегро-дифференциального уравнения для нахождения начальной функции f_0, выводящей на автомодельный режим решения. Обозначим

$$n(t) = \int\limits_0^\infty f(x,t)\,dx, \quad n_0 = n(0),$$

$$m_0 = \int\limits_0^\infty x f_0(x)\,dx.$$

Перейдем к новым переменным

$$\tau = 1 - \frac{n(t)}{n_0},$$

$$\varphi(x,\tau) = \frac{m_0}{n_0^2}\, f\left(\frac{m_0}{n_0}x, t\right),$$

$$\bar{\Phi}(x,y) = \Phi\left(\frac{m_0}{n_0}x, \frac{m_0}{n_0}y\right).$$

Тогда для функции φ имеем следующую задачу Коши:

$$F(\tau)\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} = [\varphi,\varphi]_{\bar{\Phi}}, \quad 0<\tau<1,\ x\in\mathbb{R}^+, \tag{3.13}$$

$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x), \tag{3.14}$$

где начальная функция определяется соотношением

$$\varphi_0(x) = \frac{m_0}{n_0^2} f_0\left(\frac{m_0}{n_0}x\right),$$

$$F(\tau) = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \bar{\Phi}(x,y)\varphi(x,\tau)\varphi(y,\tau)\,dxdy.$$

Отметим, что в силу вышеуказанных преобразований начальная функция φ_0 подчиняется условиям

$$\int\limits_0^\infty \varphi_0(x)\,dx = \int\limits_0^\infty x\varphi_0(x)dx = 1.$$

Относительно ядра $\bar{\Phi}$ будем предполагать наличие у него свойства однородности, т. е. для любой положительной постоянной ρ выполняется следующее тождество с некоторым показателем степени μ

$$\bar{\Phi}(\rho x,\rho y) = \rho^\mu \bar{\Phi}(x,y), \quad \rho>0.$$

(Если оставаться в рамках теоремы существования и единственности 2.1, то следует предположить, что величина μ (показатель однородности ядра Φ) удовлетворяет неравенствам $0\le\mu\le 1$). Будем искать автомодельное решение уравнения (3.13) в виде

$$\varphi(x,\tau) = \alpha(\tau)\psi(\beta(\tau)x).$$

Поскольку выполнены тождества

$$\int\limits_0^\infty \varphi(x,\tau)dx = 1-\tau, \quad 0\le\tau<1,$$

$$\int\limits_0^\infty x\varphi(x,\tau)dx = 1, \quad 0\le\tau<1,$$

то необходимо должны иметь место соотношения

$$\alpha(\tau) = (1-\tau)^2, \quad \beta(\tau) = 1-\tau, \quad 0 \le \tau < 1.$$

Следовательно, автомодельное решение имеет следующий вид:

$$\varphi(x,\tau) = (1-\tau)^2 \psi(x(1-\tau)).$$

Легко заметить, что $\psi(x) = \varphi_0(x)$, если функция φ — автомодельное решение уравнения (3.13) при начальной функции φ_0. После замены переменных

$$(1-\tau)x \mapsto x, \quad (1-\tau)y \mapsto y,$$

получаем уравнение Баканова–Мартынова для функции ψ

$$-\left[x\psi'(x) + 2\psi(x)\right] \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \bar{\Phi}(z,y)\psi(z)\psi(y)\,dzdy = 2\left[\psi,\psi\right]_{\bar{\Phi}}. \qquad (3.15)$$

Таким образом, приходим к задаче отыскания нетривиальных решений этого уравнения, удовлетворяющих условиям:

i) $\psi \in C^{(1)}_{[0,\infty)} \bigcap \Omega^+_{0,2}(0)$;

ii) $\int\limits_0^\infty \psi(x)\,dx = \int\limits_0^\infty x\psi(x)\,dx = 1.$

Эти условия естественным образом вытекают из свойств решения уравнения коагуляции. В дальнейшем класс функций, удовлетворяющих условиям i), ii), будем обозначать (S). Известно, что в случае ядра $\bar{\Phi} = 1$, когда показатель однородности ядра $\mu = 0$, существует, причем только одно, решение уравнения (3.15) в классе (S) (см. [34])

$$\psi(x) = \exp(-x). \qquad (3.16)$$

Ниже доказывается, что решение уравнения Баканова–Мартынова в классе (S) существует не для всех однородных ядер $\bar{\Phi}$.

ТЕОРЕМА 3.13. *Пусть $\bar{\Phi}$ — однородное ядро, непрерывное в первом квадранте плоскости x, y за исключением, быть может, начала координат и для него выполняется неравенство*

$$\bar{\Phi}(x,y) > \bar{\Phi}(0,y), \quad 0 < x, y < \infty.$$

Тогда не существует решения уравнения (3.15) *в классе* (S).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем доказывать от противного. Допустим, что в случае ядра $\bar{\Phi}$, удовлетворяющего условиям сформулированной теоремы, уравнение (3.15) разрешимо в классе (S). Для каждой функции $\psi \in (S)$ справедливо соотношение

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \bar{\Phi}(x,y)\psi(x)\psi(y)\,dxdy > \int\limits_0^\infty \bar{\Phi}(0,y)\psi(y)\,dy, \tag{3.17}$$

а в силу условия $i)$ интеграл

$$\int\limits_0^\infty \bar{\Phi}(x,y)\psi(y)\,dy$$

является непрерывной функцией аргумента $x \in \mathbb{R}$. Значит, в малой окрестности $x \geq 0$ выполнено неравенство

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \bar{\Phi}(z,y)\psi(z)\psi(y)\,dzdy > \int\limits_0^\infty \bar{\Phi}(x,y)\psi(y)\,dy.$$

Пусть решение $\psi(x)$ таково, что $\psi(0) > 0$. Тогда предельным переходом при $x \to 0$ в тождестве (3.15) получаем

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \bar{\Phi}(z,y)\psi(z)\psi(y)\,dzdy = \int\limits_0^\infty \bar{\Phi}(0,y)\psi(y)\,dy,$$

что противоречит соотношению (3.17). Наконец, предположим, что $\psi(0) = 0$. При $x > 0$ выполняется неравенство $\psi(x) > 0$, т.к. в силу теоремы 3.6 множество нулей функции $\varphi(x,\tau)$ не изменяется при $\tau > 0$. Из тождества (3.15) следует, что для $x > 0$ имеет место соотношение

$$\psi'(x) = -\frac{1}{px}\left\{\int\limits_0^x \bar{\Phi}(x-y,y)\psi(x-y)\psi(y)\,dy + \right.$$

$$\left. +2\psi(x)\left(\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \bar{\Phi}(z,y)\psi(z)\psi(y)\,dzdy - \int\limits_0^\infty \bar{\Phi}(x,y)\psi(y)\,dy\right)\right\},$$

$$p = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \bar{\Phi}(z,y)\psi(z)\psi(y)\,dzdy.$$

Отсюда вытекает справедливость оценки

$$\psi'(x) < -\frac{2\psi(x)}{px}\left\{\int_0^\infty\int_0^\infty \bar{\Phi}(z,y)\psi(z)\psi(y)\,dzdy - \right.$$

$$\left. -\int_0^\infty \bar{\Phi}(x,y)\psi(y)\,dy\right\}.$$

Воспользовавшись этой оценкой и соотношением (3.17), получаем для достаточно малых $x > 0$ неравенство $\psi'(x) < 0$, из которого следует, что в малой окрестности точки $x = 0$ функция $\psi(x) < 0$. Получаем противоречие с неотрицательностью функции ψ. Таким образом, в рассматриваемом случае уравнение (3.15) не обладает решением в классе (S). Теорема доказана.

Итак, задача нахождения автомодельных решений уравнения коагуляции состоит в отыскании таких однородных ядер $\bar{\Phi}$, при которых уравнение (3.15) имеет решение в классе (S) и последующем определении этих решений. Подчеркнем, что уже отмечалось при доказательстве теоремы 3.13, наличие нулей решений уравнения (3.15), которые рассматриваются в классе (S), возможно только в начале координат $x = 0$, а в остальных точках необходимо $\psi(x) > 0$.

Покажем на примере ядра $\bar{\Phi} = 1$, в случае которого уравнение (3.15) имеет нетривиальное решение (3.16), что при сколь угодно малых возмущениях ядра в классе однородых ядер, автомодельное решение может исчезать. Действительно, для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать ядро Φ_ε с показателем однородности нуль $(\mu = 0)$, удовлетворяющее условиям теоремы 3.13, такое, что

$$\sup_{\mathbb{R}_2^+} |\Phi_\varepsilon(x,y) - 1| < \varepsilon.$$

Отметим, что из теоремы 3.13 следует отсутствие автомодельных решений уравнения коагуляции для следующих ядер с показателем однородности $\mu = 1$, представляющих интерес для моделирования природных процессов:

$$\Phi(x,y) = x + y, \quad \Phi(x,y) = (x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})^3.$$

Остается открытым вопрос о разрешимости уравнения (3.15) для ядер, имеющих нули на диагонали в $\mathbb{R}_2^+$, а также для ядра броуновской коагуляции. Имеющиеся экспериментальные исследования [46] и численные результаты моделирования процессов коагуляции на

ЭВМ [47] указывают на возможность существования автомодельных спектров для физически реальных ядер взаимодействия. Поэтому описание класса ядер, для которых уравнение (3.15) имеет нетривиальные решения представляется с практической точки зрения весьма важным.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Иной подход к отысканию автомодельных решений уравнения Смолуховского (0.1), основанный не на решении уравнения Баканова–Мартынова (3.15), а на специальной обратной задаче (5.37)–(5.40), рассмотрен в замечании 5.17. Здесь следует также выделить специальный класс диссипативных автомодельных решений для ядра $\Phi(x, y) = xy$, указанный в замечании 5.6, а также «унификацию» диссипативных решений, описанную в замечании 5.7.

4. Приближенное решение пространственно однородных задач

§ 1. Математические модели процессов в физической кинетике

Математические модели физических систем, состоящих из статистически большого количества частиц (разреженные газы, дисперсные системы, плазма), а также модели механики сплошной среды основываются на фундаментальных соотношениях баланса, носящих общее название — *законы сохранения*. Значительное количество современных исследований по теории законов сохранения связано с вопросами корректности задач для систем нелинейных дифференциальных и интегродифференциальных уравнений

$$\frac{\partial f^{(\omega)}(x,t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_j^{(\omega)}(f,x,t)}{\partial x_j} = S^{(\omega)}(f,x,t), \tag{4.1}$$

$$x \in \mathbb{R}_n, \quad t > 0, \quad \omega \in \Omega,$$

где $f = \{f^{(\omega)}\}$ — неизвестная вектор-функция, вид потоков F_j и источника S считаются заданными характером моделируемого физического процесса, $x \in \mathbb{R}_n$ — пространственные координаты, t — время, Ω — параметры, нумерующие уравнения.

Приложения этих уравнений широко известны, в частности, в связи с газодинамикой и гидродинамикой, физической кинетикой [51–53].

Система законов сохранения (4.1) дополняется начальными данными

$$f|_{t=0} = f_0, \quad x \in \mathbb{R}_n, \quad \omega \in \Omega. \tag{4.2}$$

Задача (4.1), (4.2) называется *пространственно однородной*, если она рассматривается в классе решений f, не зависящих от пространственных переменных x. В этом случае функция f является решением более простой задачи

$$\frac{\partial f^{(\omega)}, t)}{\partial t} = S^{(\omega)}(f(.,t)), \quad t > 0, \quad \omega \in \Omega, \tag{4.1_0}$$

$$f|_{t=0} = f_0 \quad \omega \in \Omega. \tag{4.2_0}$$

В данной главе изучается только пространственно однородная задача Коши (4.1_0), (4.2_0), которая включает в себя уравнение (0.1) с ограниченными ядрами $\Phi \in \mathcal{K}_0^+$ и регуляризуемые задачи с ядрами $\Phi \in \mathcal{K}$ (см. §4), а более сложному случаю — *пространственно неоднородным* задачам для уравнения (4.1), содержащим уравнения Больцмана и Смолуховского для пространственно неоднородных физических систем, посвящены гл. 6–9. Важно подчеркнуть, что в пространственно однородной задаче для уравнения Смолуховского с ядром Φ, растущим на бесконечности быстрее линейной функции, возникают эффекты, приводящие к особенностям моментов решения и самого решения, что аналогично эффектам, возникающим в пространственно неоднородной задаче. Подробнее эти вопросы освещены в гл. 5 на примере ядра $\Phi(\omega, \omega_1) = \omega\omega_1$ и стационарной задачи с источником частиц, когда ядро может быть ограниченной функцией ($\Phi \in \mathcal{K}_0^+$). Главной чертой абстрактного пространственно однородного уравнения (4.1_0), рассматриваемого в настоящей главе, является свойство гладкости (локальной липшиц-непрерывности) оператора S в уравнении (4.1_0) в нормах сохранения или диссипации (см. определения ниже). Для пространственно неоднородной задачи (4.1), (4.2) такие свойства, вообще говоря, отсутствуют, т. к. нелинейный оператор S в этих нормах разрывен. Это влечет возникновение особенностей неизвестной функции f, отсутствие классических, а в ряде случаев — даже обобщенных решений. Поэтому класс пространственно неоднородных задач требует применения особых методов, расширения понятия решения (обобщенные и функциональные решения систем законов сохранения), к которым мы обратимся в гл. 6–9.

Наряду с корректностью в круге задач для системы уравнений (4.1) (*законов сохранения*) традиционно особую роль играют такие проблемы нелинейной математической физики как обоснование приближенных методов, используемых в процессе отыскания неизвестного решения. Подчеркнем, что практические надобности, связанные с вычислением конкретных физических параметров, приводят к вопросам определения понятия решения и отыскания функциональных пространств, в которых имеет место сходимость приближенных методов. Вопросы эти становятся особенно трудными, когда нелинейные операторы $\{F_j\}$ и S в уравнениях (4.1), (4.1_0) разрывны, что может повлечь неразрешимость задачи Коши во множестве классических или обобщенных решений в целом, т. е. при всех $t > 0$.

Эволюция физических систем, состоящих из статистически большого количества сталкивающихся (в процессе движения, в некотором смысле, локально) элементов, моделируется обобщенным уравнением Больцмана

$$\frac{\partial f^{(\omega)}(x,t)}{\partial t} + \operatorname{div}_x(v^{(\omega)} f^{(\omega)}(x,t)) = S^{(\omega)}(f^{(\cdot)}(x,t)), \tag{4.3}$$

$$\omega \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}_1^+, \quad x \in \mathbb{R}_n,$$

где подлежащая отысканию функция f описывает состояния физической системы в каждый момент времени $t \geq 0$ в точках с пространственными координатами $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Величины $v^{(\omega)} \in \mathbb{R}_n$ определяют скорость движения элементов физической системы между столкновениями, т. е. *скорость свободного переноса.* Множество параметров $\Omega = \{\omega\}$ может быть конечным либо бесконечным (оно считается метрическим локально компактным счетно-конечным пространством, в частности, когда Ω — конечный набор индексов, то Ω снабжается дискретной метрикой). Уравнения (4.1), (4.1_0), (4.3) возникают при моделировании естественных процессов как соотношения баланса, выполняющегося при взаимодействии элементов, составляющих моделируемую систему, скажем, молекул газа, капель в аэрозольном облаке и т. д. При этом состояния моделируемого объекта в каждый момент времени t задаются вектором f, а операторы потоков $\{F_j\}$ и операторы столкновений S в уравнениях (4.1), (4.1_0), (4.3) задаются характером моделируемого явления. Как правило, эти операторы нелинейные, что отражает наличие взаимодействия между элементами описываемого объекта. Указанные факторы определяют значительный уровень сложности математического исследования упомянутых задач.

Уравнение (4.3) включается в *обобщенное уравнение больцмановского типа*

$$\frac{\partial f^{(\omega)}(x,t)}{\partial t} + \mathcal{L}(f) = S^{(\omega)}(f^{(\cdot)}(x,t)), \tag{4.4}$$

с независимыми аргументами $\omega \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}_1^+$, $x \in \mathbb{R}_n$. Это уравнение в общем случае относится к *полулинейным законам сохранения.*

Специфика уравнений больцмановского типа определяется ниже дополнительными ограничениями на оператор S, называемый в физической кинетике *оператором столкновений.*

Линейный оператор $\mathcal{L}$ является производящим для полугруппы (группы) преобразований, определяющей модель *свободного переноса частиц* (т. е. без взаимных столкновений) как действие однопараметрической группы (полугруппы) линейных преобразований T_t, применяемых к функции f — спектру частиц на Ω. Такие задачи в банаховом пространстве с малыми начальными данными подробно рассматриваются в гл. 6. Обычно $\mathcal{L}$ — *дифференциальный оператор дивергентного вида*, т. е. его значение равно дивергенции некоторого векторного поля, но бывают ситуации, когда $\mathcal{L}$ — линейный интегродифференциальный оператор. Последнее характерно для марковских моделей спонтанного распада частиц [1, 24, 25] и их конденсационного роста [1], что сопутствует коагуляции капель в облаках.

Ограничения на оператор столкновений S в основном связаны со свойствами постоянства, либо невозрастания нормы решения в пространстве L_1, а также неотрицательностью решения f, которое по своему физическому содержанию характеризует распределение числа частиц в системе среди возможных состояний.

§ 2. Операторы столкновений больцмановского типа

Следует выделить два важных с точки зрения приложений оператора S, идейно восходящих к Дж. К. Максвеллу [76], определившему в 1859 г. основное понятие кинетической теории — функцию распределения, и Л. Больцману [77], записавшему в 1872 г. первое кинетическое уравнение, которое описывает эволюцию функции распределения молекул газа по скоростям в случае близости системы к состоянию термодинамического равновесия. Первый пример — это уравнение Больцмана кинетической теории газов. Второй важный пример исторически связан с теорией коагуляции. В 1916 г. выдающийся польский физик М. Смолуховский, исследуя эволюцию слипающихся (коагулирующих) частиц в электролитах, записал кинетическое уравнение коагуляции для функции распределения частиц по массам [11, 16, 78]. Для уравнения Больцмана кинетической теории газов оператор S в уравнении (4.3) задается соотношениями

$$S^{(\omega)}(f^{(\cdot)}) = \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Sigma_2} \Phi(\omega,\xi,q)\left[f^{(\omega')}f^{(\xi')} - f^{(\omega)}f^{(\xi)}\right]\, d\xi dq, \tag{4.5}$$

$$\omega \in \Omega = \mathbb{R}_3\,,$$

$$\omega' = \omega - q(\omega-\xi,q)_{\mathbb{R}_3}, \quad \xi' = \xi + q(\omega-\xi,q)_{\mathbb{R}_3},$$

$$\Sigma_2 = \{q \in \mathbb{R}_3 : (q,q)_{\mathbb{R}_3} = 1\}.$$

Интенсивность столкновений частиц (ядро) Φ считается известной функцией.

Для моделей вида (4.3) кинетической теории коагуляции (Смолуховского), где фазовое пространство $\Omega = \mathbb{R}_1^+$ — это массы частиц, оператор столкновений S определен соотношениями

$$S^{(\omega)}(f^{(\cdot)}) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\omega} \Phi(\omega-\omega',\omega')f^{(\omega-\omega')}f^{(\omega')}\, d\omega' -$$

$$-f^{(\omega)}\int\limits_0^{\infty} \Phi(\omega,\omega')f^{(\omega')}\, d\omega', \quad \omega \in \mathbb{R}_1^+\,, \tag{4.6}$$

$$\Phi(\omega,\omega') = \Phi(\omega',\omega) \geq 0,$$

$$\omega,\ \omega' \in \mathbb{R}_1^+\,.$$

Аналогично выглядит оператор столкновений Смолуховского в теории коагуляции частиц с дискретными массами

$$S^{(\omega)}(f^{(\cdot)}) = \frac{1}{2}\sum_{\omega'=1}^{\omega-1} \Phi(\omega-\omega',\omega')f^{(\omega-\omega')}f^{(\omega')} -$$

$$-f^{(\omega)}\sum_{\omega'=1}^{\infty} \Phi(\omega,\omega')f^{(\omega')}, \quad \omega \in \Omega = \mathbb{N}. \tag{4.7}$$

Наличие в физической системе источников частиц, действующих с неотрицательной интенсивностью q отражается добавлением этой величины к оператору столкновений S.

Несмотря на то, что первые кинетические уравнения записаны для специальных систем, область их приложений оказалась весьма широкой. Аналоги уравнений Больцмана и Смолуховского используются при моделировании процессов переноса излучения в веществе, нейтронов в ядерном реакторе, при исследовании роста капель в облаках, дефектов в материалах реакторов на быстрых нейтронах, газовых пор в металлах и т. д. [52, 53].

Задача Коши для уравнения (4.3) с операторами столкновений (4.5)–(4.7) подробно исследована с точки зрения корректности в целом в классах начальных данных, которые не зависят от пространственных координат x. Случай пространственно неоднородных задач весьма трудный и число содержательных результатов здесь относительно невелико. Основная трудность заключается в отсутствии непрерывности операторов столкновений вида (4.5)–(4.7) в нормах, связанных с соотношениями сохранения или диссипации, характерных для этих задач.

Применяемый ниже математический аппарат для уравнения (4.1_0), включающегося в (4.4), обобщает содержание гл. 1 и 2, которое основывается на свойствах сохранения и диссипации процесса коагуляции. Эти результаты получают свое развитие в гл. 6–9.

Выделим класс операторов столкновений S в уравнении (4.1), который включает в себя при некоторых ограничениях на ядро взаимодействия Φ операторы (4.5)–(4.7).

Определим требования на множество Ω, являющиеся естественным обобщением свойств множества состояний частиц для моделей Больцмана и Смолуховского.

Положим Ω — локально компактное сепарабельное метрическое пространство, которое σ-конечно относительно плотной борелевой меры μ. Эта мера предполагается конечной на компактах в Ω, строго положительной на открытых множествах в Ω. (Борелева мера называется *плотной*, если $\mu(E) = \sup\limits_{E\supset K\in\mathcal{K}} \mu(K)$, где $\mathcal{K}$ — класс компактных подмножеств из пространства Ω).

Назовем борелевой σ-алгеброй на Ω наименьшую σ-алгебру, содержащую в себе все открытые и, следовательно, замкнутые подмножества заданной топологии τ на множестве Ω. Функцию f на заданом топологическом пространстве $\{\Omega,\, \tau\}$ со значениями во множестве действительных или комплексных чисел называем борелевой, если прообразы f^{-1} борелевых подмножеств во множестве чисел являются элементами борелевой σ-алгебры на Ω.

Обозначим символами d_x и d_t лебеговы меры на пространствах $\mathbb{R}_n = \{x = (x_1, \dots, x_n)\}$ и $\mathbb{R}_1 = \{t\}$ соответственно; $\overset{\circ}{B}$ — множество финитных ограниченных борелевых функций на топологическом произведении $Q = \Omega \times \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_1$; $Q_0 = \Omega \times \mathbb{R}_n$; $\overset{\circ}{B}{}^{\infty}$ — бесконечно дифференцируемые по переменным $(x, t) \in \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_1$ функции из пространства $\overset{\circ}{B}$, производные которых лежат в $\overset{\circ}{B}$; $L_1^{loc}(A, \nu)$ — множество борелевых функций на множестве A, локально суммируемых по борелевой мере ν.

Кроме того, пусть $B(\Omega)$ — совокупность борелевых функций на множестве $\Omega = \{\omega\}$ состояний элементов моделируемой физической системы, $L_1(\Omega, \mu)$ — множество функций из $L_1^{loc}(\Omega, \mu)$, суммируемых по борелевой мере μ на множестве Ω; $\langle\, f,\, \mu\,\rangle$ — интеграл Лебега функции f из $L_1(\Omega, \mu)$ по мере μ на множестве Ω . Индекс «+» у символа множества функций означает, что рассматриваются только неотрицательные функции.

Пусть S — частично определенное на $B(\Omega)$ отображение со значениями в $B(\Omega)$. Положим

$$G_\mu(S) = S^{-1}(L_1(\Omega, \mu)), \quad \|\, f\, \|_{L_1} \overset{def}{=} \langle\, f,\, \mu\,\rangle,$$

пусть множество $\overset{\circ}{B}$ плотное в L_1 относительно топологии, заданной нормой $\|\, f\, \|_{L_1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Множество $K_\mu \subset G_\mu(S)$ назовем множеством μ-сохранения оператора S, если для каждого $f \in K_\mu$ справедливо равенство (соотношение сохранения)

$$\langle\, S(f),\, \mu\,\rangle = 0.$$

Считаем, что оператор $S : G_\mu(S) \to B(\Omega)$ обладает свойством μ-сохранения, если множество $\overset{\circ}{B}(\Omega) \cap G_\mu(S) \subset K_\mu$ плотное в $G_\mu(S)$ относительно нормы $\|\, f\, \|_{L_1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Множеством μ-диссипации оператора

$$S : G_\mu(S) \to B(\Omega)$$

назовем семейство $D_\mu \subset G_\mu(S)$ такое, что для каждого $f \in D_\mu$ выполнено соотношение диссипации

$$\langle\, S(f),\, \mu\,\rangle \le 0.$$

Если множество $\overset{\circ}{B}{}_+(\Omega) \cap G_\mu(S) \subset D_\mu$ плотное в $G_\mu(S) \cap L_1^+(\Omega, \mu)$ в норме $\|\, .\, \|_{L_1}$, то S считаем обладающим свойством μ-диссипации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Пусть $G_\mu(S)$ — область определения оператора S, содержит множество $\overset{\circ}{B}$. Будем говорить, что оператор S

удовлетворяет условию положительности, если для каждой функции $f \in \overset{\circ}{B}_+$ можно указать такое число

$$H(\| f \|_{L_1},\ \mathrm{supp}\, f) \geq 0$$

(символ supp означает носитель функции f), что выполнено неравенство

$$S(f) + Hf \geq 0.$$

ЗАМЕЧАНИЯ. 4.1. Операторы (4.4)–(4.7) удовлетворяют свойствам, перечисленным в определениях 4.1–4.3 при условии, что ядро взаимодействия частиц Φ является измеримой локально ограниченной неотрицательной симметричной функцией по аргументам, задающим состояния взаимодействующих частиц.

4.2. Функционал H без ограничения общности можно считать монотонно возрастающим по своим аргументам.

Действительно, достаточно рассмотреть новый функционал $\mathcal{H}$, равный супремуму значений функционала H на шаре $\| f \|_{L_1} \leq r$.

ЛЕММА 4.1. *Пусть оператор S удовлетворяет свойствам, перечисленным в определениях* 4.1–4.3. *Тогда* $S(0) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу определения 4.3 значения $S(0) \geq 0$ из-за неотрицательности $f = 0$. Требования определений 4.1 или 4.2 приводят к неравенству

$$\langle\, S(0),\, \mu \,\rangle \leq 0.$$

Таким образом, неотрицательная функция $S(0)$ имеет неположительный интеграл, т. е. почти везде $S(0) = 0$. Лемма доказана.

Обозначим

$$\chi_M^{(\omega)} \;=\; \begin{cases} 1, & \omega \in M \subset \Omega; \\ 0, & \omega \notin M, \end{cases}$$

$$\theta_N(y) \;=\; \begin{cases} |y|, & |y| \leq N \in \mathbb{N}; \\ N, & |y| \geq N, \quad y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.4. Назовем S оператором больцмановского типа, если он обладает свойствами μ-сохранения или диссипации и положительности, а для каждого компакта M во множестве Ω суперпозиция

$$S_M(.) \stackrel{def}{=} \chi_M \times S \circ (\chi_M \times |\,.\,|)$$

(где «$\times$» — оператор умножения, «$\circ$» — оператор суперпозиции) такова, что $S_M(L_1(M,\mu)) \subset L_1(M,\mu)$, причем отображение

$$S_M : L_1(M,\mu) \to L_1(M,\mu)$$

является непрерывным в метрике этого пространства.

ЛЕММА 4.2. *Если оператор S — больцмановского типа, то таким же свойством обладает S_M для каждого компакта $M \subset \Omega$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы следует из общего факта, что каждый оператор S со свойством сохранения либо диссипативности порождает свойство диссипативности у операторов S_M. Действительно, финитная неотрицательная функция $\chi_M \times |f|$, где $f \in \overset{\circ}{B}(\Omega)$, входит в область определения оператора S.

Рассмотрим интеграл

$$\langle\, S_M(f),\, \mu\,\rangle = \int\limits_M S(\chi_M \times |f|)\, \mu(d\omega).$$

Отметим, что интегрирование в правой части этого равенства распространяется только по носителю неотрицательной функции, стоящей под знаком оператора S. Но требование положительности в определении 4.3 означает неотрицательность значений $S^{(\omega)}(f)$ при любой неотрицательной функции f, если аргументы ω находятся вне носителя функции f, ибо

$$S(f) + fH \geq 0,$$

а последнее слагаемое в левой части этого неравенства обращается в нуль вне носителя f. Поскольку для операторов со свойством сохранения или диссипации на неотрицательных функциях значения интеграла $\langle\, S(f),\, \mu\,\rangle \leq 0$, то учитывая неотрицательность $S(\chi_M \times f)$ вне множества M, заключаем, что

$$\int\limits_M S(\chi_M \times |f|)\, \mu(d\omega) \leq 0$$

для любой ограниченной борелевой функции f. Но множество таких функций плотно в $L_1(M,\mu)$. Воспользовавшись свойством непрерывности S_M на $L_1(M,\mu)$, заключаем, что это неравенство распространяется на все $L_1(M,\mu)$.

Свойство положительности S_M автоматически следует из такого же свойства оператора S. Лемма доказана.

§ 3. Итерационный метод решения пространственно однородной задачи

Простейшей математической моделью для задач физической кинетики является пространственно однородное уравнение (4.1_0) для плотности функции распределения частиц $f(\omega,t)$, рассматриваемое как обыкновенное дифференциальное уравнение в банаховом пространстве $L_1(\mu)$ (т. е. на совокупности классов эквивалентности суммируемых по абсолютной величине функций на множестве Ω по регулярной борелевой мере μ)

$$\frac{df(t)}{dt} = S(f), \quad t > 0. \tag{4.8}$$

На множестве $L_1(\mu)$ введена структура банахова пространства с нормой

$$\| f \|_\mu \overset{def}{=} \langle |f|, \mu \rangle.$$

Производная $\dfrac{df(t)}{dt}$ отображения $t \mapsto f(t)$, $t > 0$ определяется условием

$$\| f(t+h) - f(t) - h\frac{df(t)}{dt} \|_\mu = o(h), \quad h \to 0.$$

Вероятностная природа рассматриваемых задач определяет естественный класс решений уравнения (4.8) в конусе неотрицательных классов $L_1^+(\mu) \subset L_1(\mu)$.

Для описания эволюции конкретного ансамбля кинетических пространственно однородных систем к уравнению (4.8) следует добавить начальную плотность распределения

$$f|_{t=0} = f^{(0)} \in L_1^+(\mu), \tag{4.9}$$

и, таким образом, приходим к рассмотрению задачи Коши (4.8), (4.9) в конусе $L_1^+(\mu)$.

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть оператор столкновений*

$$S : L_1^+(\mu) \to L_1(\mu)$$

обладает свойством μ-сохранения или диссипации, а также свойством положительности с постоянной H, общей для каждого шара $B_+(r) = \{f :\| f \|_\mu \leq r\}$. Пусть оператор S является локально липшиц-непрерывным, т. е. на каждом шаре $B_+(r)$ справедливо соотношение

$$\sup_{f,g \in B_+(r)} \| S(f) - S(g) \|_\mu \| f - g \|_\mu^{-1} = L(S,r) < \infty.$$

Тогда для любой начальной функции $f^{(0)} \in L_1^+(\mu)$ существует единственное решение задачи Коши (4.8), (4.9). *На этом решении* (в соответствии со свойствами оператора S — диссипации или сохранения)*убывает или сохраняется неизменным значение интеграла $\langle f(t), \mu \rangle$. При этом указанное решение можно получить как предел в норме $\| \, . \, \|_\mu$ следующих итераций:*

$$f_{n+1} = f^{(0)} \exp(-Ht) + \int\limits_0^t \exp\left[-H(t-\tau)\right] \{S(f_n) + f_n H\} \, d\tau, \quad (4.10)$$

$$n \geq 0, \quad t \geq 0,$$

где начальное приближение f_0 задается произвольным кусочно-непрерывным отображением $t \mapsto f_0 \in B_+(r)$. Сходимость итераций f_n равномерная на каждом отрезке $0 \leq t \leq T$.

ЗАМЕЧАНИЯ. 4.3. Решением уравнения (4.8) называем гладкое относительно нормы $\| \, . \, \|_\mu$ отображение $t \mapsto f(t)$ из $\mathbb{R}^+$ в $L_1^+(\mu)$, обращающее (4.8) в тождество.

4.4. Описанный в теореме 4.1 класс задач содержит уравнение Больцмана для псевдомаксвелловских молекул, исследованное впервые Моргенштерном [2], и уравнение Смолуховского с ограниченной интенсивностью взаимодействия частиц, рассмотренное Мелзаком [25–28].

4.5. Из предположений теоремы 4.1 следует равенство $S(0) = 0$.

Действительно, в силу условия положительности имеем

$$S(0) + 0H \geq 0,$$

т. е. $S(0) \geq 0$, но в силу соотношения диссипации интеграл $\int\limits_{\Omega} S(0)\,\mu(d\omega) \leq 0$ и, значит, почти всюду на Ω выполняется соотношение $S(0) = 0$.

4.6. Аналог итерационного процесса (4.10) впервые для кинетических уравнений применен Т. Карлеманом [31] и Д. Моргенштерном [28] в случае кинетического уравнения Больцмана. В отличие от последнего метод (4.10) обладает нелокальной сходимостью.

4.7. Если оператор S обладает свойством сохранения и на начальном приближении f_0 выполнено тождество

$$\langle\, f_0(t),\, \mu\,\rangle \equiv \mathrm{const}\,,$$

то для последующих приближений f_n, $n \geq 1$, справедливо такое же соотношение

$$\langle\, f_n(t),\, \mu\,\rangle \equiv \mathrm{const}\,, \quad n \geq 1.$$

4.8. Если же при $t \geq 0$ выполнено неравенство

$$\langle\, f_0(t),\, \mu\,\rangle \leq \langle\, f_0(0),\, \mu\,\rangle,$$

то на каждой итерации выполняется неравенство

$$\langle\, f_n(t),\, \mu\,\rangle \leq \langle\, f_0(0),\, \mu\rangle, \quad t \geq 0, \;\; n = 0,\; 1, \ldots$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $L_1^{(T)}(\mu)$ пространство непрерывных отображений $t \mapsto f(t)$ из $\mathbb{R}^+$ в $L_1^+(\mu)$ при $0 \leq t \leq T$, которое снабдим нормой

$$\|\, f\,\|_{\mu}^{(T)} = \sup_{0 \leq t \leq T} \|\, f(t)\,\|_{\mu}\,.$$

Функции из $L_1^{(T)}(\mu)$, принадлежащие при фиксированных $0 \leq t \leq T$ шару $B_+(r) = B(r) \bigcap L_1^+(\mu)$, обозначим $B_+^{(T)}(r)$.

Фиксируем произвольную точку $g \in B_+(r)$ и рассмотрим отображение

$$R_g : \, B_+^{(T)}(r) \to L_1^{(T)}(\mu),$$

определенное соотношением

$$R_g(f) = g\exp(-Ht) + \int_0^t \exp[-H(t-\tau)]\,[S(f)+fH]\,d\tau, \qquad (4.11)$$

$$0 \le t \le T.$$

Отметим некоторые важные свойства определенного таким образом семейства отображений $\{R_g\}$.

a) При каждом $g \in B_+(r)$ отображение

$$R_g : B_+^{(T)}(r) \to L_1^{(T)}(\mu).$$

b) Если справедливо неравенство

$$\langle f(t),\, \mu \rangle \le \langle g,\, \mu \rangle, \quad t \ge 0,$$

то в этом случае

$$\langle R_g(f)(t),\, \mu \rangle \le \langle g,\, \mu\rangle, \quad t \ge 0.$$

c) Если оператор S обладает свойством μ-сохранения и

$$\langle f(t),\, \mu \rangle = \langle g,\, \mu \rangle, \quad t \ge 0,$$

то при $t \ge 0$ выполнено тождество

$$\langle R_g(f)(t),\, \mu \rangle \equiv \langle g,\, \mu \rangle.$$

Перечисленные свойства отображения R_g получаются непосредственным интегрированием выражения (4.8). Следствием указанных свойств служит инвариантность шара $B_+^{(T)}(r)$ для отображения R_g при $g \in B_+(r)$:

d) при любых $g \in B_+(r)$, φ, $\psi \in B_+^{(T)}(r)$ при целых неотрицательных n выполняются следующие неравенства:

$$\|\, [R_g^n(\varphi) - R_g^n(\psi)](.,t)\, \|_\mu \le 2\, r \min\left\{\frac{[K(r)t]^n}{n!}, 1\right\}, \quad t \ge 0, \qquad (4.12)$$

с постоянной

$$K(r) = L(S,r) + H.$$

Установим справедливость неравенства (4.12). Из неравенства (4.11) получаем оценку при $t \geq 0$

$$\| [R_g(\varphi) - R_g(\psi)](.,t) \|_\mu \leq \int\limits_0^t [\| S(\varphi) - S(\psi) \|_\mu + H \| \varphi - \psi \|_\mu] \, d\tau.$$

Таким образом, имеет место неравенство

$$\| [R_g(\varphi) - R_g(\psi)](.,t) \|_\mu \leq K(r) \int\limits_0^t \| \varphi - \psi \|_\mu \, d\tau, \quad t \geq 0.$$

Воспользовавшись инвариантностью шара $B_+(r)$ для отображения R_g в сочетании с этим неравенством, окончательно имеем

$$\| [R_g(\varphi) - R_g(\psi)](.,t) \|_\mu \leq \min \left\{ K(r) \int\limits_0^t \| \varphi - \psi \|_\mu \, d\tau, \, 2r \right\}, \quad t \geq 0.$$

Применяя математическую индукцию по степеням отображения $n \geq 0$, убеждаемся в справедливости свойства d).

Рассмотрим произвольный шар $B_+^{(T)}(r)$ при $r \geq \| f^{(0)} \|_\mu$. Отображение $R_{f^{(0)}}$ переводит этот шар в себя. Из соотношения (4.12) следует сжатость степени $R^n_{f^{(0)}}$ при достаточно большом показателе n и по теореме о неподвижной точке [36] существует единственое решение уравнения $f = R_{f^{(0)}}(f)$.

Таким образом, выполняется тождество

$$f = f^{(0)} \exp(-Ht) + \int\limits_0^t \exp\left[-H(t-\tau)\right] \left[S(f) + fH\right] d\tau,$$

$$0 \leq t \leq T.$$

Непосредственным дифференцированием этого тождества убеждаемся, что функция f — решение задачи Коши (4.8), (4.9) при $0 \leq t \leq T$.

Отметим, что итерационный процесс (4.10) можно записать в следующем виде:

$$f_n = R^n_{f(0)}(f_0), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Применяя по индукции соотношения из свойств c), d), устанавливаем наличие неравенств и тождеств, указанных в формулировке теоремы для итераций f_n, $n \in \mathbb{N}$. Поскольку для неподвижной точки отображения $R_{f(0)}$ выполнено равенство

$$f = R_{f(0)}(f),$$

то применяя неравенство (4.12), получаем оценку

$$\| f_n - f \|_\mu \leq 2r \min \left\{ \frac{[K(r)t]^n}{n!}, 1 \right\}, \quad t \geq 0, \ n \geq 0,$$

из которой следует равномерная сходимость итерационного процесса (4.10) на каждом конечном отрезке времени. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЯ. 4.9. Утверждение теоремы 4.1 распространяется на задачи, где оператор S обладает свойствами сохранения или диссипации, но при этом параметрически зависит от времени t. Можно учесть также наличие в физической системе источников частиц, распределенных с плотностью $q(\omega, t)$, записывая правую часть уравнения (1) в виде $S(f) + q$. В этих случаях в формулировке теоремы 4.1 требуется равномерная ограниченность локальных постоянных Липшица для S относительно t на каждом конечном промежутке $0 \leq t \leq T$, а функцию q следует положить неотрицательной из класса $L_1^{(T)}(\mu)$. Подчеркнем, что постоянная H в условии положительности должна быть общей для параметрически зависящего от времени семейства операторов S на каждом конечном промежутке изменения времени t.

4.10. Если известна асимптотика $\tilde{f}(., t)$ решения f задачи (4.8), (4.9) при $t \to +\infty$, то сочетая ее с итерационным процессом (4.10), можно получить равномерную сходимость приближений $\tilde{f}_n$ к решению f при $0 \leq t < +\infty$, полагая

$$\tilde{f}_{n+1}(., t) = \begin{cases} R^{l_n}_{f(0)}(f_0), & 0 \leq t \leq n+1, \\ \tilde{f}(., t), & t > n+1, \quad n = 0, 1, \ldots, \end{cases}$$

где неотрицательные целые величины l_n определяются из условия

$$\max \left\{ 2r \, \min \, \frac{[K(r)\, t]^{l_n}}{l_n!}, 1 \right\} \leq \sup_{t \geq n+1} \| f(., t) - \tilde{f}(., t) \|_\mu .$$

В этом случае уклонение приближения $\tilde{f}_n$ от решения f задачи (4.8), (4.9) оценивается сверху величиной

$$\alpha_n = \sup_{t \geq n} \| \tilde{f}(.,t) - f(.,t) \|_\mu .$$

Поскольку

$$\lim_{t \to +\infty} \| f(.,t) - \tilde{f}(.,t) \|_\mu = 0,$$

то справедливо равенство

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0$$

и, следовательно, приближения $\tilde{f}_n$ равномерно сходятся к функции f при $t \in \mathbb{R}_1^+$.

Отметим, что для решений пространственно однородного уравнения Больцмана асимптотикой является максвелловское распределение [30], а для решений уранения коагуляции — распределение $f = 0$ (см. [50] и гл. 3).

§ 4. Регуляризуемые задачи

Перейдем к построению итерационного процесса решения задачи Коши (4.8), (4.9) в случае, когда для оператора S нарушаются условия гладкости, сформулированные в теореме 4.1.

Рассмотрим оператор

$$S : L_1^+(\mu) \longrightarrow L_1^+(\nu),$$

предполагая выполненным включение $L_1^+(\mu) \subset L_1^+(\nu)$, а также считаем, что для оператора S выполняется соотношение сохранения или диссипации относительно меры ν.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.5. Назовем задачу Коши (4.8), (4.9) с оператором $S : L_1^+(\mu) \longrightarrow L_1^+(\nu)$ регуляризуемой, если существует последовательность операторов

$$S_n : L_1^+(\nu) \longrightarrow L_1^+(\nu), \quad n \in \mathbb{N},$$

обладающих свойством сохранения или диссипации относительно меры ν, таких, что

1) при каждом номере $n \in \mathbb{N}$ для S_n выполнены условия теоремы 4.1 на конусе $L_1^+(\nu)$;

2) последовательность решений $\{\bar{f}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ задачи

$$\frac{df}{dt} = S_n(f), \quad t > 0, \qquad f|_{t=0} = f^{(0)} \in L_1^+(\mu), \tag{4.13}$$

компактная в пространстве $L_1^{(T)}(\nu)$ при любых $f^{(0)}$, $T > 0$, причем каждая предельная точка этой последовательности является решением задачи Коши (4.8), (4.9) с оператором S.

Построение итерационного метода решения регуляризуемой задачи (4.8), (4.9) опирается на следующее утверждение [83].

ЛЕММА 4.3. *Пусть (U, ρ) — полное метрическое пространство, на котором действует последовательность равностепенно сжимающих операторов*

$$A_n : U \longrightarrow U, \quad n \in \mathbb{N},$$

т. е. постоянные сжатия для A_n не превосходят величины $0 \le q < 1$. Пусть последовательность неподвижных точек $\bar{x}_n$, $n \in \mathbb{N}$, отображений A_n сходится к некоторой точке $\bar{x} \in U$. Тогда точка $\bar{x}$ может быть найдена как предел итераций

$$x_{n+1} = A_{n+1}(x_n), \quad n = 0,\ 1, \ldots,$$

где начальная точка $x_0 \in U$ выбирается произвольно.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.11. Достаточным условием сходимости точек $\bar{x}_n$ является поточечная сходимость отображений A_n на U.

Действительно, это является непосредственным следствием того, что предел $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ является сжимающим отображением на (U, ρ) (т. к. по условию теоремы операторы A_n обладают общей постоянной сжатия $0 \le q < 1$). Обозначим неподвижную точку $\bar{x} = A(\bar{x})$. Тогда

$$\rho(\bar{x}, \bar{x}_n) = \rho(A(\bar{x}), A_n(\bar{x}_n)) \le$$

$$\le \rho(A(\bar{x}), A_n(\bar{x})) + \rho(A_n(\bar{x}), A_n(\bar{x})) \le$$

$$\le \varepsilon + q\rho(\bar{x}, \bar{x}_n)$$

(последнее неравенство выполнено при достаточно больших значениях n). Таким образом, для больших n

$$\rho(\bar{x}, \bar{x}_n) \le \frac{\varepsilon}{1-q},$$

что доказывает утверждение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливы неравенства

$$\rho(x_{n+1}, \bar{x}) \le \rho(A_{n+1}(x_n), \bar{x}_{n+1}) + \rho(\bar{x}_{n+1}, \bar{x}) =$$

$$= \rho(A_{n+1}(x_n), A_{n+1}(\bar{x}_{n+1})) + \rho(\bar{x}_{n+1}, \bar{x}) \quad n = 0,\ 1, \ldots$$

В силу равностепенной сжатости отображений A_n имеем

$$\rho(x_{n+1}, \bar{x}) \le q\rho(x_n, \bar{x}_{n+1}) + \rho(\bar{x}_{n+1}, \bar{x}) \le$$

$$\le q\rho(x_n, \bar{x}) + (1+q)\rho(\bar{x}_{n+1}, \bar{x}).$$

Выберем номер n достаточно большим, чтобы при $m \ge 0$ для произвольного положительного ε выполнялись неравенства

$$(1+q)\rho(x_{n+k}, \bar{x}) < \varepsilon.$$

Тогда для $k \ge 1$ справедливо соотношение

$$\rho(x_{n+k}, \bar{x}) \le q\rho(x_{n+k-1}, \bar{x}) + \varepsilon.$$

Индукцией по номеру $k \ge 1$ устанавливаем, что

$$\rho(x_{n+k}, \bar{x}) \le q^k\rho(x_n, \bar{x}) + \varepsilon(1-q)^{-1}.$$

Устремляя $\varepsilon \to 0$, $k \to \infty$, получаем, что $\rho(x_n, \bar{x}) \to 0$ при $n \to \infty$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 4.2. *Пусть регуляризуемая задача Коши* (4.8), (4.9) *с оператором* $S : L_1^+(\mu) \longrightarrow L_1^+(\nu)$, *имеет единственное решение* f *с начальным значением* $f|_{t=0} = f^{(0)} \in L_1^+(\mu)$. *Тогда это решение может быть получено как предел в норме* $\|\ .\ \|_\nu^{(T)}$ *следующих итераций:*

$$f_{n+1} = R_n^{\lambda_n}(f_n), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.14}$$

где R_n — *оператор* (4.11), *записанный при* $g = f^{(0)}$; *показатель степени* λ_n *определяется из условия*

$$\frac{[K_n(r)T]^{\lambda_n}}{\lambda_n!} \le q < 1, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.15}$$

в котором величина $K_n(r)$ определяется для оператора S_n аналогично такой же постоянной $K(r)$ в соотношении (4.12).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие (4.15) обеспечивает равностепенную сжатость отображений

$$R_n^{\lambda_n} : B_+^{(T)}(r) \longrightarrow B_+^{(T)}(r)$$

в норме $\| \ . \ \|_\nu^{(T)}$. Единственность решения решения задачи Коши (4.8), (4.9) обеспечивает сходимость неподвижных точек отображений $R_n^{\lambda_n}$ к этому решению. Из леммы 4.3 следует сходимость итераций (4.14) к функции f. Теорема доказана.

Отметим, что условиям теоремы 4.2 удовлетворяют пространственно однородные задачи для уравнений Больцмана и Смолуховского, рассматривавшиеся в [49, 88, 31].

§ 5. Сходимость итераций во вложенных пространствах

В этом параграфе выделяется класс операторов столкновений со свойством μ-сохранения или диссипации, для которых итерации (4.10) сходятся к решению задачи (4.8), (4.10) в более сильных нормах, чем $\| \ . \ \|_\mu$, что важно с вычислительной точки зрения [102].

Рассмотрим цепочку вложенных пространств

$$L_1(\mu) = U_0 \supset U_1 \supset \ldots \supset U_n \supset \ldots, \tag{4.16}$$

таких, что нормы $\| \ . \ \|_{U_k}$, $k \geq 0$, определенные на пространствах U_k, удовлетворяют неравенствам

$$\| \ . \ \|_\mu = \| \ . \ \|_{U_0} \leq k_1 \| \ . \ \|_{U_1} \leq \ldots \leq k_n \| \ . \ \|_{U_n} \leq \ldots, \tag{4.17}$$

где k_n — положительные постоянные вложения. Положим

$$U_k^+ = U_k \bigcap L_1^+(\mu);$$

ограниченные шары в пространстве U_k^+ обозначим

$$B^+(k, r) = \{f \in U_k^+ : \| f \|_{U_k} \leq r\};$$

относительный радиус $r_{l,k}(r)$ шара $B^+(k, r)$ в пространстве U_l, $l \leq k$, определим соотношенинем

$$r_{l,k}(r) = \sup_{f \in B^+(k,r)} \| f \|_{U_l} .$$

Символом $B_T^+(k,r)$ обозначим непрерывные отображения

$$t \mapsto f(.,t) \in B^+(k,r), \quad 0 \le t \le T,$$

множество которых снабдим нормой

$$\| \ . \ \|_{U_k}^{(T)} = \sup_{0 \le t \le T} \| \ . \ \|_{U_k} .$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.6. Пусть оператор

$$S : U_0^+ \longrightarrow U_0$$

такой, что образ его сужения $S|_{U_k^+}$, $k \in \mathbb{N}$, принадлежит пространству U_k. Назовем этот оператор квазилинейным на цепочке вложенных пространств (4.16), (4.17), если для каждого номера $k \ge 0$ можно указать такую неотрицательную функцию $\gamma_k(\rho)$, неубывающую и ограниченную при $0 \le \rho < +\infty$, что для $r > 0$ выполняется неравенство

$$\sup_{f \in B^+(k+1,r)} \| S(f) \|_{U_{k+1}} \| f \|_{U_{k+1}}^{-1} \le \gamma_k(r_{k,k+1}(r)).$$

ТЕОРЕМА 4.3. *Пусть оператор*

$$S : U_0^+ \longrightarrow U_0$$

удовлетворяет условиям теоремы 4.1 *и является квазилинейным на цепочке вложенных пространств* (4.16), (4.17). *Предположим, что его сужение* $S|_{U_k^+}$ *при* $k \ge 0$ *является локально липшиц-непрерывным, т. е. на каждом шаре* $B^+(k,r)$ *выполнено соотношение*

$$\sup_{\varphi,\psi \in B^+(k,r)} \| S(\varphi) - S(\psi) \|_{U_k} \| \phi - \psi \|_{U_k}^{-1} \stackrel{def}{=} L_k(r) < \infty.$$

Тогда задача Коши (4.8), (4.9) *при начальной функции* $f^{(0)} \in U_k^+$, $k \ge 0$,*имеет единственное решение* f, *которое при каждом* $t \ge 0$ *принадлежит конусу* U_k^+. *Это решение можно получить как равномерный предел итераций* (4.10), *причем на любом отрезке времени* $0 \le t \le T$ *справедлива оценка*

$$\| f - f_n \|_{U_k}^{(T)} \leq \frac{m_k^n(T)}{m!}, \quad n \geq 0,$$

где ограниченная неотрицательная величина $m_k(T)$ определяется локальной постоянной Липшица оператора S на шаре $B^+(k,r)$, содержащем начальную функцию $f^{(0)}$ и начальное приближение $f_0(.,t)$ при $0 \leq t \leq T$, а также длиной отрезка времени T и значением постоянной H, которая используется в итерациях (4.10).

Метод доказательства теоремы 4.3 в основном повторяет доказательство теоремы 4.1. Поэтому подробное доказательство ее проводить не будем, а укажем, что утверждение теоремы получается применением математической индукции по номеру итераций, а затем по номеру k оценок норм $\| R_g^n(f) \|_{U_k}^{(T)}$ из следующей леммы.

ЛЕММА 4.4. *Пусть оператор S — квазилинейный на цепочке вложенных пространств* (4.16), (4.17) *и для каждой функции $g \in B^+(k,r)$ справедливо неравенство*

$$\sup_{f \in B^+(0,r)} \sup_{n \geq 0} \| R_g^n(f) \|_{U_0}^{(T)} < \infty, \quad r \geq 0.$$

Тогда для каждого $k \in \mathbb{N}$ и любой функции $g \in B^+(k,r)$ выполняются неравенства

$$\sup_{f \in B^+(k,r)} \sup_{n \geq 0} \| R_g^n(f) \|_{U_k}^{(T)} < \infty, \quad r \geq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что для

$$g \in B^+(k+1,r), \quad f \in B^+_{(T)}(k+1,r),$$

при $0 \leq t \leq T$ справедлива оценка

$$\| R_g^n(f) \|_{U_{k+1}}^{(T)} \leq \exp(-Ht) \Bigg\{ r +$$

$$+ \widetilde{\gamma}_k(r_{k,k+1}(r)) \int_0^t \exp(H\tau) \| f(.,\tau) \|_{U_{k+1}} \, d\tau \Bigg\}, \tag{4.18}$$

где величина

$$\widetilde{\gamma}_k(r_{k,k+1}(r)) = \gamma_k(r_{k,k+1}(r)) + H.$$

Рассмотрим последовательность значений норм $\| R_g^n(f) \|_{U_k}^{(T)}$, $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что при некотором $k \geq 0$ выполнено неравенство

$$\sup_{f \in B^+(k,r)} \sup_{n \geq 0} \| R_g^n(f) \|_{U_k}^{(T)} = \rho < \infty.$$

Тогда из неравенства (4.18) получаем

$$\| R_g^n(f)(.,t) \|_{U_{k+1}} \leq r + \widetilde{\gamma}_k(\rho) \int\limits_0^t \| R_g^{n-1}(f)(.,\tau) \|_{U_{k+1}} \, d\tau,$$

$$0 \leq t \leq T, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, имеет место оценка

$$\| R_g^n(f)(.,t) \|_{U_{k+1}} \leq \exp(\widetilde{\gamma}_k(\rho) t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Применяя математическую индукцию по номеру $k \geq 0$, устанавливаем утверждение леммы. Лемма доказана.

Проиллюстрируем утверждение теоремы 4.3 на примере уравнения Смолуховского (0.1). Предположим в соответствии с обозначениями §1 гл. 1, что в этом уравнении ядро $\Phi \in \mathcal{K}_0^+$. Поскольку оператор столкновений Смолуховского (0.5) обладает $d\omega$ свойством диссипации, то положим, что $L_1(\mu) = \Omega_{0,0}$ — пространство суммируемых функций на множестве $\Omega = \mathbb{R}_1^+$.

Рассмотрим цепочку вложенных нормированных пространств U_k, $k \geq 0$, которые снабдим нормами

$$\| f \|_{U_k} = \sup_{\omega \in \mathbb{R}_1^+} |f(\omega)| + \int\limits_{\mathbb{R}_1^+} (\omega + \omega^2 + \ldots + \omega^k) |f(\omega)| \, d\omega, \quad k \geq 0.$$

Для применения теоремы 4.3 уточним теперь оценку (1.11). Отметим, что для $\omega, \omega_1 \geq 0$ при $k \in \mathbb{N}$ справедливо следующее неравенство

$$1 + (\omega + \omega_1) + \ldots + (\omega + \omega_1)^k \leq$$

$$\leq \omega^k + \omega_1^k + A(k)(\omega + \omega^2 + \ldots + \omega^{k-1})(\omega_1 + \omega_1^2 + \ldots + \omega_1^{k-1}), \quad (4.19)$$

где $A(k)$ — натуральное число. Полагая для оператора Смолуховского $S(f) = [f, f]_\Phi$, $c = \| \Phi \|_{\mathcal{K}_0}$, проинтегрируем неравенство (1.8) по ω на $\mathbb{R}_1^+$ с весом $(\omega+\omega^2+\ldots+\omega^k)$ и учитывая соотношение (1.19), получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}_1^+} (\omega + \omega^2 + \ldots + \omega^k)|S(f)(\omega)|\, d\omega \leq$$

$$\leq \frac{3}{2} c A(k) \int\limits_{\mathbb{R}_1^+} (\omega + \omega^2 + \ldots + \omega^{k-1})|f(\omega)|\, d\omega \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}_1^+} (\omega_1 + \omega_1^2 + \ldots + \omega_1^k)|f(\omega_1)|\, d\omega_1, \quad k \geq 0. \tag{4.20}$$

Усиливая оценки (1.9) при $k = 0$, имеем

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}_1^+} |[f, g]_\Phi(\omega)| \leq \frac{3}{4} c \left\{ \sup_{\omega \in \mathbb{R}_1^+} |f(\omega)| \int\limits_{\mathbb{R}_1^+} |g(\omega)|\, d\omega + \right.$$

$$\left. + \sup_{\omega \in \mathbb{R}_1^+} |g(\omega)| \int\limits_{\mathbb{R}_1^+} |f(\omega)|\, d\omega \right\}. \tag{4.21}$$

Сочетая оценки (4.20) и (4.21), получаем

$$\| S(f) \|_{U_k} \leq A_1 \| f \|_{U_{k-1}} \| f \|_{U_k},$$

$$k \geq 1,$$

где постоянная $A_1 = \dfrac{3}{2} A(k)$. Следовательно, выполняется соотношение

$$\sup_{B^+(k+1,r)} \| S(f) \|_{U_{k+1}} \| f \|_{U_{k+1}}^{-1} \leq A_1 \sup_{B^+(k+1,r)} \| f \|_{U_k} = A_1 r_{k,k+1}(r),$$

$$k \geq 0,$$

и, значит, оператор Смолуховского (0.1) с ограниченным ядром Φ — квазилинейный на цепочке пространств U_k.

Усилим оценку (4.21), сочетая ее с (1.11). Тем самым получаем неравенство

$$\| [f,g]_\Phi \|_{U_k} \le A_1 \| f \|_{U_k} \| g \|_{U_k}, \quad k \ge 0. \tag{4.22}$$

Поскольку справедливо тождество

$$[f,f]_\Phi - [g,g]_\Phi = [f-g, f+g]_\Phi,$$

то из (4.22) получаем оценку

$$\| S(f) - S(g) \|_{U_k} \le A_1(\| f \|_{U_k} + \| g \|_{U_k}) \| f-g \|_{U_k}, \quad k \ge 0,$$

т. е. оператор столкновений Смолуховского (0.5) при сделанных предположениях о ядре слияний частиц Φ — локально липшиц-непрерывный. Следовательно, для уравнения Смолуховского (0.1) в этом случае выполняются условия теоремы 4.3 и оно имеет решение в каждом конусе U_k^+ при $t \ge 0$, если в этому конусу принадлежит начальная функция (0.2). Указанное решение можно получить как предел итераций (4.10) в норме $\| \ . \ \|_{U_k}^{(T)}, \quad k \ge 0$, при каждом положительном T.

§ 6. Разностный метод для уравнения Смолуховского с источником частиц

Рассмотрим случай, когда в ситеме коагулирующих частиц действует внешний источник, поставляющий в нее частицы с интенсивностью $q^{(\omega)}(t) \ge 0$, что учитывается добавлением этой величины в правую часть уравнения Смолуховского (0.1):

$$\frac{\partial u^{(\omega)}(t)}{\partial t} = S^{(\omega)}(u^{(\cdot)}(t)) + q^{(\omega)}(t), \quad \omega \in \mathbb{R}_1^+, \ \ t > 0, \tag{4.23}$$

где S — оператор Смолуховского (4.6), а $q^{(\omega)}(t) \ge 0$ — плотность источника частиц такая, что $q^{(\omega)}(t) \ge 0$, $0 \le t \le T$, $q \in L_1^{(T)}$ и при этом ядро $\Phi \in \mathcal{K}$ в соответствии с результатами гл. 1, 2. К уравнению (4.23) добавим начальные данные

$$u^{(\omega)}\Big|_{t=0} = u_0^{(\omega)}, \quad \omega \in \mathbb{R}_1^+. \tag{4.24}$$

Дополнительно к требованиям, накладываемым на начальную функцию u_0 в этих главах, потребуем выполнение условия непосредственной интегрируемости, а именно, будем всюду в этом параграфе предполагать, что значения сеточной нормы

$$\| u_0 \|_{l_1} \stackrel{def}{=} h \sum_{i=0}^{\infty} u_0^{(\omega_i)}, \quad h = \omega_{i+1} - \omega_i, \ i = 0, \ 1, \ldots,$$

стремятся к $\| u_0^{(\cdot)} \|_{L_1(\mathbb{R}_1^+)}$ при $h \to 0$. Такие же предположения распространяются на источник частиц q по переменной ω.

ЛЕММА 4.5. *Пусть $u_0^{(\omega)} \geq 0$, $u_0^{(\omega)} \in L_1(\mathbb{R}_1^+)$, а плотность источника частиц q такая, что $q^{(\omega)}(t) \geq 0$, $0 \leq t \leq T$, $q \in L_1^{(T)}$. Тогда решение задачи Коши* (4.23), (4.24) *неотрицательно и ограничено при $t \in [0, T]$, причем выполнено неравенство*

$$\| u^{(\cdot)} \|_{L_1(\mathbb{R}_1^+)} \leq \| u_0^{(\cdot)} \|_{L_1(\mathbb{R}_1^+)} + QT,$$

где $Q = \| q \|^{(T)}$.

Доказательство указанных свойств решения задачи (4.23), (4.24) полностью повторяет случай $q = 0$, рассмотренный в гл. 1, 2, 4, и поэтому мы его опускаем.

Следующая разностная схема задает приближенный численный метод решения задачи Коши (4.23), (4.24):

$$\begin{cases} \dfrac{u_\alpha^{(\omega_i)}(t+\tau) - u_\alpha^{(\omega_i)}(t)}{\tau} = S_h^{(\omega_i)}(u_\alpha^{(\cdot)}(t)) + q_n^{(\omega_i)}, \\ t \in \mathbb{R}_1^+, \quad \omega \in \mathbb{R}_1^+, \\ u_\alpha^{(\omega_i)}(t) = u_0^{(\omega_i)}, \quad 0 \leq t < \tau, \end{cases} \tag{4.25}$$

где сеточный оператор Смолуховского

$$S_h^{(\omega_i)}(u_\alpha^{(\cdot)}(t)) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\frac{\omega_i - h}{h}} h\Phi(\omega_i - \omega_j, \omega_j) u_\alpha^{(\omega_i - \omega_j)}(t) u_\alpha^{(\omega_j)}(t) -$$

$$- \sum_{j=0}^{M} h\Phi(\omega_i, \omega_j) u_\alpha^{(\omega_i)}(t) u_\alpha^{(\omega_j)}(t);$$

h — шаг сетки по переменной ω, $h > 0$, $M = \left[\frac{N}{h}\right], 0 \le i \le M$; τ — шаг сетки по переменной t, $\tau > 0$; $u_\alpha^{(\omega)}(t) = u_\alpha^{(\omega_i)}(n\tau)$ при

$$\omega_i \le \omega \le \omega_{i+1}, \quad n\tau \le t < (n+1)\tau, \quad K = \left[\frac{T}{\tau}\right], \quad 0 \le n \le K-1,$$

$\alpha = (\tau, h)$ — параметры разностного метода.

Рассмотрим сначала вспомогательную задачу

$$\frac{\partial u^{(\omega)}(t)}{\partial t} = S_N^{(\omega)}(u^{(\cdot)}(t)) + q^{(\omega)}(t), \quad \omega \in [0, N], \ t > 0, \tag{4.26}$$

$$u^{(\omega)}\Big|_{t=0} = u_0^{(\omega)}, \tag{4.27}$$

где оператор

$$S_N^{(\omega)}(u^{(\cdot)}(t)) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\omega \Phi(\omega-\omega_1, \omega_1)u^{(\omega-\omega_1)}(t)u^{(\omega_1)}(t)\,d\omega_1 -$$

$$-u^{(\omega)}(t)\int\limits_0^N \Phi(\omega, \omega_1)u^{(\omega_1)}\,d\omega_1, \quad 0 \le \omega \le N.$$

ЛЕММА 4.6. *Пусть выполнены условия леммы* 4.5. *Тогда при любом натуральном* N *для решения задачи* (4.26), (4.27) *выполнены оценки, приведенные в лемме* 4.5, *которые равномерны по номеру* $N \in \mathbb{N}$.

Доказательство этого утверждения полностью повторяет соответствующие рассуждения в лемме 4.5, т. к. S_N является оператором больцмановского типа.

Покажем, что разностная схема (4.25) аппроксимирует вспомогательную задачу (4.26), (4.27).

Обозначим $u_n^{(\omega_i)} = u_\alpha^{(\omega_i)}(n\tau)$, где $u_\alpha^{(\omega_i)}(n\tau)$ — решение разностной схемы (4.25) на n-м шаге по времени.

Для удобства дальнейших рассуждений продолжим область определения аргументов ω в операторе S_N на все неотрицательные числа, полагая его равным тождественному нулю вне отрезка $[0, N]$. Положим

$$Lu^{(\omega)} = \begin{cases} \dfrac{\partial u^{(\omega)}}{\partial t} - S_N^{(\omega)}(u^{(\cdot)}(t)), & t > 0,\ \omega \in \mathbb{R}_1^+, \\ u^{(\omega)}(0), & \omega \in \mathbb{R}_1^+, \end{cases}$$

$$f^{(\omega)} = \begin{cases} q^{(\omega)}(t), \\ u_0^{(\omega)}, & \omega \in \mathbb{R}_1^+. \end{cases}$$

Тогда задачу (4.26), (4.27) можно записать в виде

$$Lu^{(\omega)} = f^{(\omega)}, \quad t > 0,\ \ \omega \in \mathbb{R}_1^+.$$

Кроме того, положим

$$L^\alpha u_\alpha = \begin{cases} \dfrac{u_{n+1}^{(\omega_i)} - u_n^{(\omega_i)}}{\tau} - S_h^{(\omega_i)}(u_n^{(\cdot)}), & 0 \le n \le K,\ \ 0 \le i \le M, \\ u^{(\omega_i)}(t), & 0 \le t < \tau, \end{cases}$$

$$f^\alpha = \begin{cases} q_n^{(\omega_i)}, \\ u_0^{(\omega_i)}, & 0 \le i \le M. \end{cases}$$

Тогда разностная схема (4.25) может быть переписана в виде

$$L^\alpha u_\alpha = f^\alpha. \tag{4.28}$$

В качестве сетки D_α выберем совокупность точек пересечения прямых

$$t = n\tau,\ 0 \le n \le K, \quad \omega = ih,\ 0 \le i \le M,$$

где $\tau,\ h > 0$.

Пусть U^α — пространство функций, определенных на сетке D_α,

$$\| u_\alpha \|_{U^\alpha} \stackrel{def}{=} \max_{D_\alpha} \left| u_n^{(\omega_i)} \right|.$$

Обозначим F_1^α — линейное пространство, состоящее из элементов

$$g^\alpha = \begin{pmatrix} \varphi^\alpha \\ \\ \psi^\alpha \end{pmatrix},$$

с конечной нормой

$$\| \, g^\alpha \, \|_{F_1^\alpha} \stackrel{def}{=} \max_{i,n} |\varphi^\alpha| + \max_i |\psi^\alpha| \, .$$

Правая часть f^α разностной схемы (4.28) принадлежит пространству $F^\alpha \stackrel{def}{=} L_\alpha(U_1^\alpha)$ — образу разностного оператора, который, вообще говоря, не является линейным подпространством в F_1^α. Здесь

$$U_1^\alpha = \{u_\alpha \in U^\alpha : \; u_\alpha \geq 0\}.$$

Множество F^α снабжено индуцированной метрикой, которая порождена нормой $\| \, . \, \|_{F_1^\alpha}$:

$$\rho_{F^\alpha}(g^\alpha, \, g_1^\alpha) \stackrel{def}{=} \| \, g^\alpha - g_1^\alpha \, \|_{F_1^\alpha} \, .$$

Поскольку в классической теории разностных схем [124] определения устойчивости и аппроксимации разностной схемы сформулированы для нормированного пространства F^α, переформулируем указанные определения для рассматриваемого случая метрических пространств (не являющихся в нашем случае линейными нормируемыми пространствами).

Обозначим $[u]_{D_\alpha}$ — оператор сужения точного решения u дифференциальной задачи (4.26, (4.27) на сетку D_α.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.7. Разностная схема (4.28) аппроксимирует дифференциальную задачу, если невязка

$$\rho_{F^\alpha}(L_\alpha[u]_{D_\alpha}, f^\alpha) \to 0$$

при $\tau \to 0$, $h \to 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.8. Разностная схема (4.28) называется устойчивой на подмножестве $\widetilde{F}_\alpha \subset F^\alpha$, если существуют такие числа τ_0, h_0, что при параметрах сетки $\tau < \tau_0$, $h < h_0$ и исходных данных f^α, принадлежащих $\widetilde{F}_\alpha$, существует единственное решение разностной задачи (4.28), а для любых f_1^α, $f_2^\alpha \in \widetilde{F}_\alpha$, находящихся в замкнутом шаре радиуса $r > 0$ с центром в $f^\alpha = 0$, выполняется неравенство

$$\| \, v_\alpha^{(\cdot)} - u_\alpha^{(\cdot)} \, \|_{U^\alpha} \leq C \rho_{F^\alpha}(f_1^\alpha, f_2^\alpha),$$

где $v_n^{(\omega_i)}$ и $u_n^{(\omega_i)}$ — решения разностной схемы (4.28), соответствующие сеточным исходным данным f_1^α и f_2^α, C — постоянная, зависящая от величин τ_0, h_0, r.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.12. Столь сложное определение устойчивости обусловлено тем, что разностные схемы для нелинейных задач физической кинетики обладают «хорошими» свойствами только при наличии неотрицательности решения, а в противном случае развивается вычислительная неустойчивость, связанная, вообще говоря, с некорректностью задачи Коши при отрицательных (знакопеременных) исходных данных (начальной функции, источнике или ядре).

Для уравнения Смолуховского с источником множество $\widetilde{F}_\alpha$ состоит из векторов с неотрицательными компонентами, которые принадлежат пространству l_1 при каждом n.

Сходимость разностной схемы понимается в обычном смысле [124], а именно, погрешность приближения сужения точного решения $[u]_{D_\alpha}$ на сетке D_α разностным решением u_α такова, что

$$\max_{D_\alpha} |u_\alpha - [u]_{D_\alpha}| \to 0,$$

при $\tau \to 0$, $h \to 0$.

Понятие порядка аппроксимации и порядка точности разностной схемы аналогичны определениям в [124].

В рамках сделанных определений сформулируем теорему, которая доказывается дословным повторением соответствующей классической теоремы о сходимости разностных схем [124] и поэтому ее доказательство не приводится.

ТЕОРЕМА 4.4. *Если разностная задача* (4.28) *аппроксимирует дифференциальную задачу и устойчива на множестве $\widetilde{F}_\alpha$, то разностное решение u_α сходится к решению u дифференциальной задачи.*

Таким образом, для доказательства сходимости решения разностной схемы (4.28) к решению задачи (4.26), (4.27) достаточно доказать устойчивость (4.28) и то, что она аппроксимирует дифференциальную задачу на $\widetilde{F}_\alpha$.

Докажем сначала вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 4.7. *Пусть выполнены условия леммы* 4.5, *а шаг по времени $\tau > 0$ подчинен требованию*

$$\tau:\ \tau \le \frac{1}{\sup\limits_{\omega,\omega_1 \le N} \Phi(\omega,\omega_1)(\| u_0^{(\cdot)} \|_{l_1} + Q_h^{(T)} T)} \tag{4.29}$$

Тогда решение разностной схемы (4.28) *на любом шаге по времени* $n\tau \leq T$ *ограничено и неотрицательно, причем выполнено следующее соотношение*

$$\| u_n^{(\cdot)} \|_{l_1} \leq \| u_0^{(\cdot)} \|_{l_1} + Q_h^{(T)} T, \tag{4.30}$$

где величина $Q_h^{(T)} T$ *определена формулой*

$$Q_h^{(T)} = \| [q]_{D_\alpha} \|_{l_1}^{(T)} \stackrel{def}{=} \max_{0 \leq n \leq K} \| q^{(\cdot)}(n\tau) \|_{l_1}$$

— *сеточная норма источника.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства применим метод математической индукции по номеру n, т. е. по времени. Ограниченность и неотрицательность $u_0^{(\omega_i)}$ следуют из условия теоремы.

Пусть утверждение леммы верно для всех $n : 0 \leq n \leq n^* < K$. Покажем, что утверждение леммы верно для $n = n^* + 1$. Из (4.28) следует равенство

$$u_{n^*+1}^{(\omega_i)} = u_{n^*}^{(\omega_i)} + \tau(S_h^{(\omega_i)}(u_{n^*}^{(\cdot)}) + q_n^{(\omega_i)}),$$

Отбросив в правой части равенства неотрицательные слагаемые, получаем

$$u_{n^*+1}^{(\omega_i)} \geq u_{n^*}^{(\omega_i)} - \tau \sum_{j=0}^{M} h\Phi(\omega_i, \omega_j) u_{n^*}^{(\omega_i)} u_{n^*}^{(\omega_j)}.$$

Воспользовавшись тем, что $\Phi(\omega, \omega_1) \leq \sup\limits_{\omega, \omega \leq N} \Phi(x, y) = C$, а также тем, что в силу неотрицательности $u_{n^*}^{(\omega_i)}$, справедливо соотношение

$$\| u_{n^*}^{(\cdot)} \|_{l_1} = \sum_{j=0}^{M} h u_{n^*}^{(\omega_j)},$$

имеем

$$u_{n^*+1}^{(\omega_i)} \geq u_{n^*}^{(\omega_i)} \left(1 - \tau C \left\| u_{n^*}^{(\cdot)} \right\|_{L_1(\mathbb{R}_1^+)}\right) \tag{4.31}$$

Из (4.28) получаем

$$u_{n^*}^{(\omega_i)} = u_{n^*-1}^{(\omega_i)} + \tau \left(S_h^{(\omega_i)}(u_{n^*-1}^{(\cdot)}) + q_n^{(\omega_i)} \right).$$

Просуммировав обе части этого равенства по i и умножив их на h, имеем

$$\sum_{i=0}^{M} hu_{n^*}^{(\omega_i)} = \sum_{i=0}^{M} hu_{n^*-1}^{(\omega_i)} + \tau \left(\sum_{i=0}^{M} hS_h^{(\omega_i)}(u_{n^*-1}^{(\cdot)}) + \sum_{i=0}^{M} hq_n^{(\omega_i)} \right).$$

Учитывая неотрицательность $u_n^{(\omega_i)}$ при $n : 0 \le n \le n^*$, а также наличие свойства диссипативности оператора S на неотрицательных функциях, что означает выполнение неравенства

$$\sum_{i=0}^{M} hS_h^{(\omega_i)}(u_{n^*-1}^{(\cdot)}) \le 0,$$

устанавливаем

$$\| u_{n^*}^{(\cdot)} \|_{l_1} \le \| u_{n^*-1}^{(\cdot)} \|_{l_1} + \tau Q_h^{(T)}.$$

Тогда справедливо соотношение

$$\| u_{n^*}^{(\cdot)} \|_{l_1} \le \| u_{n^*-1}^{(\cdot)} \|_{l_1} + \tau Q_h^{(T)} \le \ldots \le \| u_1^{(\cdot)} \|_{l_1} + \tau Q_h^{(T)} \le$$

$$\le \| u_0^{(\cdot)} \|_{l_1} + \tau Q_h^{(T)}.$$

Отсюда выводим

$$\| u_{n^*}^{(\cdot)} \|_{l_1} \le \| u_0^{(\cdot)} \|_{l_1} + \tau n^* Q_h^{(T)}$$

и, таким образом, для всех рассматриваемых значений номера n

$$\| u_{n^*}^{(\cdot)} \|_{l_1} \le \| u_0^{(\cdot)} \|_{l_1} + T Q_h^{(T)}. \tag{4.32}$$

По индукционному предположению $u_{n^*}^{(\omega_i)} \ge 0$. Тогда из (4.31) следует, что $u_{n^*+1}^{(\omega_i)} \ge 0$, если выполнено условие

$$\tau : \tau \le \frac{1}{\sup\limits_{\omega,\omega_1 \le N} \Phi(\omega,\omega_1) \left\| u_{n^*}^{(\cdot)} \right\|_{l_1}},$$

которое обеспечивается (4.29) и соотношением (4.32). Таким образом, доказана неотрицательность $u_{n^*+1}^{(\omega_i)}$.

Докажем теперь ограниченность $u_{n^*+1}^{(\omega_i)}$. Воспользовавшись предыдущими рассуждениями и учитывая доказанную неотрицательность $u_{n^*+1}^{(\omega_i)}$, получаем

$$\| u^{(\cdot)}_{n^*+1} \|_{l_1} \le \| u^{(\cdot)}_0 \|_{l_1} + TQ^{(T)}_h,$$

что также означает ограниченность $u^{(\omega_i)}_{n^*+1}$.

Таким образом, утверждение леммы верно для $n = n^* + 1$, а, значит, при всех рассматриваемых значений n. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству устойчивости разностной схемы (4.28).

ТЕОРЕМА 4.5. *Разностная схема* (4.28) *устойчивая на* $\widetilde{F}_\alpha$*, причем*

$$\sup_n \| v^{(\cdot)}_n - u^{(\cdot)}_n \|_{l_1} \le (\| b^{(\cdot)} - a^{(\cdot)} \|_{l_1} + T \| q_b - q_a \|^{(T)}_{l_1}) \exp{(C_2 T)} \tag{4.33}$$

где $v^{(\omega_i)}_n$ *и* $u^{(\omega_i)}_n$ *— решения разностной схемы* (4.28)*, соответствующие исходным данным* $f^\alpha_a = (a^{(\omega_i)}, q_a)$ *и* $f^\alpha_b = (b^{(\omega_i)}, q_b)$*, которые принадлежат* $\widetilde{F}^\alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство существенно использует неотрицательность разностного решения, что приводит к выполнению оценки (4.30), если имеет место (4.29).

В силу ограниченности решения разностной схемы (4.28) на каждом шаге существование и единственность ее решения очевидны. Таким образом, для доказательства устойчивости (4.28) достаточно доказать справедливость неравенства

$$\| v^{(\cdot)}_\alpha - u^{(\cdot)}_\alpha \|_{U^\alpha} \le C\rho_{F^\alpha}(f^\alpha_a, f^\alpha_b)$$

Покажем справедливость неравенства (4.33).

По лемме 4.6 функции $v^{(\cdot)}_\alpha$ $u^{(\cdot)}_\alpha$ неотрицательны и ограничены в норме пространства l_1.

Составим их разность и обозначим ее $z^{(\omega_i)}_n$: $z^{(\omega_i)}_n = v^{(\omega_i)}_n - u^{(\omega_i)}_n$, где $0 \le n \le K$, $0 \le i \le M$, причем $z^{(\omega_i)}_0 = b^{(\omega_i)} - a^{(\omega_i)}$. Положим $\Delta q = q_b - q_a$.

Тогда, воспользовавшись (4.28) для $z^{(\omega_i)}_n$, получаем следующие соотношения:

$$\frac{z^{(\omega_i)}_{n+1} - z^{(\omega_i)}_n}{\tau} = S^{(\omega_i)}_h(v^{(\cdot)}_n) - S^{(\omega_i)}_h(u^{(\cdot)}_n) + \Delta q^i_n, \tag{4.34}$$

$$0 \le i \le M, \quad 0 \le n \le K,$$

$$z_0^{(\omega_i)} = b^{(\omega_i)} - a^{(\omega_i)}, \quad 0 \le i \le M.$$

В силу симметричности ядра $\Phi(\omega, \omega_1)$, имеем

$$S_h^{(\omega_i)}(v_n^{(\cdot)}) - S_h^{(\omega_i)}(u_n^{(\cdot)}) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\frac{\omega_i - h}{h}} h\Phi(\omega_i - \omega_j, \omega_j) \left\{ (u_n^{(\omega_i - \omega_j)} + v_n^{(\omega_i - \omega_j)})(v_n^{(\omega_j)} - u_n^{(\omega_j)}) \right\} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{M} h\Phi(\omega_i, \omega_j) \left\{ (u_n^{(\omega_i)} + v_n^{(\omega_i)})(v_n^{(\omega_j)} - u_n^{(\omega_j)}) \right\}. \tag{4.35}$$

Из (4.34) следует, что

$$z_{n+1}^{(\omega_i)} = z_n^{(\omega_i)} + \tau(S_h^{(\omega_i)}(v_n^{(\cdot)}) - S_h^{(\omega_i)}(u_n^{(\cdot)})).$$

Тогда, учитывая (4.35), получаем

$$\left| z_{n+1}^{(\omega_i)} \right| \le \left| z_n^{(\omega_i)} \right| + \tau \left| \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\frac{\omega_i - h}{h}} h\Phi(\omega_i - \omega_j, \omega_j) \times \right.$$

$$\times \left\{ (u_n^{(\omega_i - \omega_j)} + v_n^{(\omega_i - \omega_j)})(v_n^{(\omega_j)} - u_n^{(\omega_j)}) \right\} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{M} h\Phi(\omega_i, \omega_j) \left\{ (u_n^{(\omega_i)} + v_n^{(\omega_i)})(v_n^{(\omega_j)} - u_n^{(\omega_j)}) \right\} \tag{4.36}$$

Умножая обе части полученного неравенства на h и суммируя по $i : 0 \le i \le M$, выводим

$$\| z_{n+1}^{(\cdot)} \|_{l_1} \le \| z_n^{(\cdot)} \|_{l_1} +$$

$$+ \tau \left| \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{M} \sum_{j=0}^{\frac{\omega_i - h}{h}} h^2 \Phi(\omega_i - \omega_j, \omega_j) \{ (v_n^{(\omega_j)} - u_n^{(\omega_j)})(v_n^{(\omega_i - \omega_j)} + u_n^{(\omega_i - \omega_j)}) \} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{M} \sum_{j=0}^{M} h^2 \Phi(\omega_i, \omega_j) \{ (u_n^{(\omega_i)} + v_n^{(\omega_i)})(v_n^{(\omega_j)} - u_n^{(\omega_j)}) \} \right|.$$

$$\| z_{n+1}^{(\cdot)} \|_{l_1} \leq \| z_n^{(\cdot)} \|_{l_1} +$$

$$+\tau \left| \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{M} \sum_{j=0}^{M} h^2 \Phi(\omega_i, \omega_j) \{ (u_n^{(\omega_i)} + v_n^{(\omega_i)})(v_n^{(\omega_j)} - u_n^{(\omega_j)}) \} \right|.$$

$$\| z_{n+1}^{(\cdot)} \|_{l_1} \leq \| z_n^{(\cdot)} \|_{l_1} +$$

$$+\frac{\tau}{2} \sum_{i=0}^{M} \sum_{j=0}^{M} h^2 \Phi(\omega_i, \omega_j) \left| u_n^{(\omega_i)} + v_n^{(\omega_j)} \right| \cdot \left| v_n^{(\omega_j)} - u_n^{(\omega_j)} \right|.$$

$$\| z_{n+1}^{(\cdot)} \|_{l_1} \leq \| z_n^{(\cdot)} \|_{l_1} \ (1 + \frac{\tau C}{2} (\| u_n^{(\cdot)} \|_{l_1} + \| v_n^{(\cdot)} \|_{l_1}), \tag{4.37}$$

где постоянная $C = \sup\limits_{0 \leq \omega, \omega_1 \leq N} \Phi(\omega, \omega_1)$ Воспользовавшись неравенством (4.32), имеем

$$\| z_{n+1}^{(\cdot)} \|_{l_1} \leq \| z_n^{(\cdot)} \|_{l_1} \ (1 + \tau C \max(\| a^{(\cdot)} \|_{l_1} + Q_h^{(T)} T, \| b^{(\cdot)} \|_{l_1} + Q_h^{(T)} T)).$$

Обозначив

$$C_2 = C \max(\| a^{(\cdot)} \|_{l_1} + Q_h^{(T)} T,$$

$$\| b^{(\cdot)} \|_{l_1} + Q_h^{(T)} T),$$

получаем

$$\| z_{n+1}^{(\cdot)} \|_{l_1} \leq \| z_n^{(\cdot)} \|_{l_1} \ (1 + \tau C_2).$$

По индукции

$$\| z_{n+1}^{(\cdot)} \|_{l_1} \leq \| z_0^{(\cdot)} \|_{l_1} \ (1 + \tau C_2)^n,$$

$$\| z_{n+1}^{(\cdot)} \|_{l_1} \leq \| z_0^{(\cdot)} \|_{l_1} \ (1 + \tau C_2)^{\frac{t}{\tau}}.$$

Устремляя τ к нулю и учитывая, что $(1+\tau C_2)^{\frac{t}{\tau}}$ монотонно возрастая стремится к $\exp(C_2 t)$, $t \geq 0$, имеем

$$\| z_n \|_{l_1} \leq \| z_0 \|_{l_1} \exp(C_2 T).$$

Тогда

$$\max_{0 \leq n \leq K} \| z_n^{(\cdot)} \|_{l_1} \leq \| z_0 \|_{l_1)} \exp(C_2 T),$$

т. е. справедливо неравенство (4.33) сформулированное в теореме.

Перейдем теперь к устойчивости разностной схемы (4.28) в пространствах U^α, F^α.

Повторяя процесс получения неравенств (4.36), (4.37), приходим к следующим соотношениям:

$$\left| z_{n+1}^{\omega_i} \right| \leq \max_i | z_n^{\omega_i} | \cdot (1 + \frac{3\tau\, C}{2} \| \; u_n^{(\cdot)} + v_n^{(\cdot)} \|_{l_1}).$$

Учитывая здесь неравенство (4.30), заключаем

$$\left| z_{n+1}^{\omega_i} \right| \leq \max_i | z_n^{\omega_i} | \cdot (1 + \tau\, C_3),$$

где постоянная определяется выражением

$$C_3 = 3C \max(\left\| a^{(\cdot)} \right\|_{L_1(\mathbb{R}_1^+)} + QT, \left\| b^{(\cdot)} \right\|_{L_1(\mathbb{R}_1^+)} + QT).$$

Таким образом,

$$\max_i \left| z_{n+1}^{(\omega_i)} \right| \leq \max_i \left| z_n^{(\omega_i)} \right| (1 + \tau\, C_3).$$

Продолжая оценки по индукции, получаем

$$\max_i \left| z_n^{(\omega_i)} \right| \leq \max_i \left| z_0^{(\omega_i)} \right| (1 + \tau\, C_3)^n,$$

и, следовательно,

$$\sup_n \max_i \left| z_n^{(\omega_i)} \right| \leq \max_i \left| z_0^{(\omega_i)} \right| \exp\,(C_3 T),$$

что влечет выполнение соотношения

$$\left\| v_\alpha^{(\cdot)} - u_\alpha^{(\cdot)} \right\|_{U^\alpha} \leq C \rho_{F^\alpha}(f_a^\alpha, f_b^\alpha),$$

которое означает наличие искомой устойчивости. Теорема доказана.

Покажем теперь, что разностная схема (4.28) аппроксимирует задачу (4.26), (4.27).

ЛЕММА 4.7. *Пусть для задачи Коши* (4.26), (4.27) *выполнены условия леммы* 2.2, *а неотрицательный источник* q *является непрерывной суммируемой функцией, причем произведение* $(1+\omega)q^{\omega}(t)$ *имеет с ограниченную норму в пространстве* $L_1^{(T)}$ *при каждом положительном* T. *Тогда семейство решений задачи Коши* (4.26), (4.27), *занумерованных параметром* $N \in \mathbb{N}$, *равностепенно непрерывное по* $\omega \in [0, a]$ $\forall a > 0$, *на каждом отрезке изменения времени* $0 \le t \le T$.

Доказательство этого утверждения практически дословно повторяет рассуждения леммы 2.2, проведенные для получения модуля непрерывности решения уравнения Смолуховского (0.1) без источника частиц, поэтому мы его опускаем.

ТЕОРЕМА 4.6. *Пусть выполнены условия леммы* 4.7 *и значения оператора сужения решения* $[u]_{D_\alpha}$ *на сетку* D_α *определяются как значения решения* u *в узлах сетки. Тогда разностная схема* (4.28) *аппроксимирует задачу* (4.26), (4.27).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим невязку в метрике пространства F^α, которая возникает в разностной схеме (4.28) при подстановке точного решения задачи (4.26), (4.27).

$$\delta_\alpha \stackrel{def}{=} \rho_{F^\alpha}(L_\alpha([u]_{D_\alpha}), f^\alpha) \le$$

$$\le \sup_{\tau,h} \left| \frac{u^{(\omega_i)}((n+1)\tau) - u^{(\omega_i)}(n\tau)}{\tau} - S_h^{(\omega_i)}(u^{(\cdot)}(n\tau)) - q^{(\omega_i)} \right| +$$
$$+ \sup_h \left| u^{(\omega_i)}(0) - u_0^{(\omega_i)} \right|.$$

Поскольку решение задачи (4.26), (4.27) является дважды непрерывно дифференцируемой функцией по t, то

$$\delta_\alpha \le \sup_{\tau,h} \left| u_t^{(\omega_i)}(n\tau) + \frac{u_{tt}^{(\omega_i)}(\xi)\tau}{2} - S_h^{(\omega_i)}(u^{(\cdot)}(n\tau)) - q^{(\omega_i)} \right| +$$
$$+ \sup_h \left| u^{(\omega_i)}(0) - u_0^{(\omega_i)} \right|,$$

где $\xi \in [n\tau, (n+1)\tau]$.

Учитывая, что u — точное решение задачи (4.26), (4.27), имеем

$$\delta_\alpha \le \sup_{\tau,h} \left| \frac{u_{tt}^{(\omega_i)}(\xi)\tau}{2} + S_N^{(\omega_i)}(u^{(\cdot)}(n\tau)) - S_h^{(\omega_i)}(u^{(\cdot)}(n\tau)) \right|,$$

а поскольку решение задачи (4.26), (4.27) является функцией дважды непрерывно дифференцируемой по t и непрерывной по ω, имеем

$$\delta_\alpha \le \sup_{\substack{t\in[0,T]\\ \omega\in[0,N]}} \left| u_{tt}^{(\omega)}(t) \right| \frac{\tau}{2} + \sup_{\tau,h} \left| S_N^{(\omega_i)}(u^{(\cdot)}(n\tau)) - S_h^{(\omega_i)}(u^{(\cdot)}(n\tau)) \right|.$$

Поскольку суммы в S_h на сужении точного решения аппроксимируют интегралы в S_N с погрешностью $\mathcal{O}w(h)$, то справедливо соотношение

$$\rho(\delta_\alpha, 0)_{F^\alpha} \le \sup_{\substack{t\in[0,T]\\ \omega\in[0,N]}} \left| u_{tt}^{(\omega)}(t) \right| \frac{\tau}{2} + C_{10}w(h).$$

Последнее неравенство означает наличие свойства аппроксимации. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Разностный метод* (4.28) *сходится к решению задачи Коши* (4.26), (4.27).

ТЕОРЕМА 4.7. *Решение разностного метода* (4.28) *сходится при* $N \to \infty$ *к решению задачи Коши* (4.23), (4.24), *если исходные даные задачи в задаче без источника подчиняются требованиям теоремы* 2.1, *а непрерывный неотрицательный источник* $q \in \Omega^+(T)$ *при каждом положительном* T.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку в силу следствия 4.1 решение разностного метода (4.28) сходится к решению задачи (4.26), (4.27), то для доказательства настоящей теоремы достаточно установить, что последовательность решений этой задачи, занумерованных параметром N, равномерно сходится на компактах при $N \to \infty$ к решению задачи (4.23), (4.24). Метод доказательства этого утверждения полностью повторяет рассуждения главы 2 в теоремах 2.1, 2.2 и следствии 2.2. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.13. Рассмотрим приближенный численный метод решения задачи Коши (4.23), (4.24), основанный на применении неявной разностной схемы

$$\frac{u_\alpha^{(\omega_i)}(t+\tau)-u_\alpha^{(\omega_i)}(t)}{\tau} = S_h^{(\omega_i)}(u_\alpha^{(\cdot)}(t))+q^{(\omega_i)}, \tag{4.38}$$

$$t\in\mathbb{R}_1^+, \quad \omega\in\mathbb{R}_1^+,$$

$$u_\alpha^{(\omega_i)}(t)=u_0^{(\omega_i)}, \quad 0\le t<\tau.$$

где операторы S_h определены формулами

$$S_h^{(\omega_i)}(u_\alpha^{(\cdot)}(t)) = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\frac{\omega_i-h}{h}} h\,\Phi(\omega_i-\omega_j,\omega_j)\,u_\alpha^{(\omega_i-\omega_j)}(t)\,u_\alpha^{(\omega_j)}(t) -$$

$$-\sum_{j=0}^{M} h\,\Phi(\omega_i,\omega_j)\,u_\alpha^{(\omega_i)}(t+\tau)\,u_\alpha^{(\omega_j)}(t),$$

h — шаг разбиения по переменной ω, $h>0$, $M=\left[\frac{N}{h}\right]$, номера $0\le i\le M$, τ — шаг разбиения по переменной t, $\tau>0$, $\omega_i=i\,h$, $u_\alpha^{(\omega)}(t) = u_\alpha^{(\omega_i)}(n\tau)$ при $\omega_i\le\omega\le\omega_{i+1}$, $n\tau\le t\le(n+1)\tau$, $0\le n\le\left[\frac{T}{\tau}\right]$, $\alpha=(\tau,h)$ — параметры метода. Функция источника $q^{(\omega_i)}$ удовлетворяет условию $q^{(\omega_i)}\ge 0$, $\quad q\in L_1(\mathbb{R}_1^+)$, на функцию ядра налагаем условия (A). Приближенный метод (4.38) также сходится к решению (3.1), (3.2).

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 4.7. Ограничения на шаг для неявной разностной схемы не требуется, т. к. условие неотрицательности функции $u^{(\omega)}(t)$ выполняется при любом положительном шаге по времени τ.

Приближенный метод (4.28), а также приближенный метод (4.38) были численно реализованы и тестированы [93].

Необходимость использования в разностной схеме (4.25) «модифицированного» оператора Смолуховского, а также связь разностных решений в (4.25) с прямым моделированием процесса коагуляции методом Монте-Карло обсуждается в §6 гл. 5.

Обоснование разностного метода (4.25) для ядер Φ с произвольным порядком роста проводится для более общего метода (8.3). Метод (8.3) обоснован в теореме 8.3 во множестве функциональных решений уравнения Смолуховского (0.1).

5. Переход сохранения в диссипацию для пространственно однородного уравнения Смолуховского

§ 1. Постановка задач

В главе 4 исследован класс задач, содержащий примеры из кинетической теории коагуляции и теории газов, для которых в каждый момент времени $t > 0$ оставалось неизменным значение интеграла $\langle f, \mu \rangle$ на решении f по мере μ, порожденной соотношением сохранения массы для сталкивающихся частиц. Существенной чертой, характеризующей операторы столкновений для этих задач, является их локальная липшиц-непрерывность в норме $\| \,.\, \|_\mu$, связанной с соответствующим законом сохранения, либо регуляризуемость задачи.

Проводимое ниже исследование случая пространственно однородной коагуляции, который не вкладывается в результаты предыдущих глав, позволяет выявить интересное явление, когда соотношение сохранения $\langle S, \mu \rangle = 0$ переходит в строгое неравенство $\langle S, \mu \rangle < 0$, которое выполняется при всех временах, больших некоторого критического времени t_c. Т. е. отмеченное свойство характеризует оператор столкновений. В критический момент времени t_c, когда соотношение сохранения переходит в диссипацию, решение кинетического уравнения теряет порядок гладкости.

Настоящая глава посвящена исследованию решений двух математических моделей процесса коагуляции. Первая модель — это задача Коши для эволюционного уравнения Смолуховского

$$\frac{\partial f(\mu,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\int\limits_0^\mu \Phi(\mu-\mu_1,\mu_1)f(\mu-\mu_1,t)f(\mu_1,t)d\mu_1 -$$

$$-f(\mu,t)\int\limits_0^\infty \Phi(\mu,\mu_1)f(\mu_1,t)\,d\mu_1 \qquad t>0,\quad \mu\ge 0, \tag{5.1}$$

$$f(\mu,0)=f_0(\mu)\ge 0,\quad \mu\ge 0,$$

где интенсивность столкновений определена формулой

$$\Phi(\mu,\mu_1)=\mu\mu_1, \qquad \mu,\ \mu_1\ge 0.$$

Вторая модель связана с процессами коагуляции при наличии внешнего источника частиц $q(\mu)\ge 0$ в предположении стационарности спектра f, что приводит к рассмотрению уравнения

$$S^{(\omega)}(f)+q^{(\omega)}=0,\quad \omega\in\Omega, \tag{5.2}$$

где S — оператор столкновений Смолуховского для непрерывных или дискретных масс, $q\ge 0$ — интенсивность появления в коагулирующей системе частиц под действием стационарного внешнего источника. Когда интенсивность столкновений частиц в этом уравнении строго положительная, его решения не могут принадлежать множеству консервативности K_μ оператора столкновений S, ибо $S(f)<0$ для $q>0$. Ниже доказывается существование таких неотрицательных решений при произвольном суммируемом неотрицательном источнике q.

В первой модели выбор функции слияния частиц обусловлен прежде всего тем, что удается получить ряд формул, полезных для анализа рассматриваемого круга явлений. Следует подчеркнуть специфику ядра $\Phi(\mu,\mu_1)=\mu\mu_1$, состоящую в том , что для него не применимы методы, развитые в гл. 1, 2. Причина — в росте Φ на бесконечности быстрее линейной функкции, что характерно также для ядра гравитационной коагуляции, имеющем огромное значение для физики атмосферы [1].

Задача (5.1) с непрерывным, симметричным, неотрицательным ядром $\Phi(\mu,\mu_1)$, удовлетворяющим условию роста на бесконечности

$$\sup_{\mathbb{R}_2^+}\Phi(\mu,\mu_1)(1+\mu+\mu_1)^{-1}<\infty,$$

исследована в [79, 90, 103], где установлена ее корректность.

Вкратце остановимся на особенностях решения задачи (5.1) с мультипликативным ядром $\Phi(\mu,\mu_1)=\mu\mu_1$. Коагуляционный оператор столкновений обладает $\mu\,d\mu$ свойством сохранения и $d\mu$ свойством диссипации, при этом он непрерывен в норме, связанной с соотношением сохранения, на классе неотрицательных функций с ограниченным вторым моментом

$$\sigma = \int\limits_{\mathbb{R}_1^+} \mu^2 f(\mu)\, d\mu < \infty.$$

Обозначим

$$n(t) = \int\limits_{\mathbb{R}_1^+} f(\mu)\, d\mu, \qquad m(t) = \int\limits_{\mathbb{R}_1^+} \mu f(\mu)\, d\mu,$$

где $n(t)$ — концентрация частиц; $m(t)$ — средняя плотность вещества, заключенная в коагулирующих частицах. Для решений уравнения (5.1) с ограниченным вторым моментом σ справедлива следующая связь между $n(t)$, $m(t)$:

$$n(t) = n(0) - m^2(0)\frac{t}{2}, \quad t \geq 0, \tag{5.3}$$

при этом

$$m(t) = m(0). \tag{5.4}$$

Формулы (5.3), (5.4) имеют место до тех пор, пока $\sigma < \infty$, ибо тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}_1^+} \mu S(f)\, d\mu = 0 \quad (\sigma < \infty). \tag{5.5}$$

Когда же $\sigma = +\infty$, то справедливо лишь неравенство

$$\lim_{a\to+\infty} \int\limits_{o}^{a} \mu S(f)\, d\mu < 0 \quad (f \geq 0, \;\; \sigma = +\infty),$$

что означает переход соотношения сохранения $\langle\, S(f), \nu \,\rangle = 0$, где мера $\nu = \mu\, d\mu$ в соотношение диссипации

$$\langle\, S(f), \nu \,\rangle < 0 \quad (f \geq 0, \; \sigma = +\infty) \tag{5.6}$$

и, следовательно, $m(t)$ в этом случае монотонно убывает.

Непосредственным интегрированием устанавливается, что закон изменения второго момента решения задачи (5.1) с ядром $\Phi(\mu, \mu_1) = \mu\mu_1$ подчиняется соотношению

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma(0)[1 - t\sigma(0)]^{-1}, & 0 \le t < \sigma^{-1}(0), \\ +\infty, & t \ge \sigma^{-1}(0). \end{cases}$$

Таким образом, величина $\sigma(t) < \infty$ только в промежутке

$$0 \le t < \sigma^{-1}(0)$$

и, следовательно, только в этом интервале времени выполняется соотношение сохранения (5.5).

Локальная по времени теория задачи Коши (5.1) с ядром коагуляции $\Phi(\mu, \mu_1) = \mu\mu_1$ для интервала $0 \le t < t_c \stackrel{def}{=} \dfrac{1}{\sigma^(0)}$ построена в [22]. На этом отрезке времени задача (5.1) эквивалентна следующей задаче:

$$\frac{\partial f(\mu, t)}{\partial t} = \bar{S}(f), \quad t > 0,\ \mu \ge 0, \tag{5.7}$$

$$f(\mu, 0) = f_0(\mu) \ge 0, \quad \mu \ge 0,$$

где оператор $\bar{S}$ определен соотношениями

$$\bar{S}(f) = \frac{1}{2} \int\limits_0^\mu \Phi(\mu - \mu_1, \mu_1) f(\mu - \mu_1, t) f(\mu_1, t)\, d\mu_1 - \mu f(\mu, t) m(0),$$

$$m(0) = \int\limits_{\mathbb{R}_1^+} \mu f_0(\mu)\, d\mu.$$

Таким образом, при $t \ge t_c$ задачи (5.1) и (5.7) различны.

Ниже доказывается корректность задачи (5.1) при всех $t \ge t_c$. При этом получены формулы для концентрации $n(t)$ и плотности массы $m(t)$, когда $t \ge t_c$, установлена связь перехода соотношения сохранения (5.5) в диссипацию (5.6) с формированием градиентной катастрофы на оси $p = 0$ у следующего функционала решения:

$$F(p, t) = \int\limits_{\mathbb{R}_1^+} \mu \exp(-p\mu) f(\mu, t)\, d\mu, \quad p \ge 0, \quad t \ge 0.$$

Физическим аспектам упоминавшихся явлений посвящена обширная литература [1, 82].

§ 2. Формулировка основного результата

Обозначим $\mathcal{E}$ множество непрерывных функций $f(\mu, t)$, определенных на $(\mu, t) \in \mathbb{R}_2^+$ и имеющих при $t \in \mathbb{R}^+$ непрерывный интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}_1^+} (1+\mu)|f(\mu,t)|\, d\mu,$$

$\mathcal{E}_0$ — множество сужений функций $f \in \mathcal{E}$ на оси $t = 0$. Символами $\mathcal{E}^+$, $\mathcal{E}_0^+$ обозначим неотрицательные функции из $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}_0$ соответственно.

Справедлива следующая теорема о корректности задачи Коши (5.1) с мультипликативным ядром $\Phi(\mu, \mu_1) = \mu\mu_1$.

ТЕОРЕМА 5.1. *Уравнение* (5.1) *с ядром* $\Phi(\mu, \mu_1) = \mu\mu_1$ *имеет единственное решение* $f \in \mathcal{E}^+$ *при любой начальной функции* $f_0 \in \mathcal{E}^+$, *причем это решение гладкое по* $t \in \mathbb{R}^+$.

ТЕОРЕМА 5.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.1. *Тогда справедливы соотношения*

$$n(t) = G(\pi(t)) - G_p^2(\pi(t))\frac{t}{2}, \quad t \geq 0, \tag{5.8}$$

$$m(t) = -G_p(\pi(t)), \quad t \geq 0, \tag{5.9}$$

где функция

$$G(p) = \int\limits_{\mathbb{R}_1^+} \exp(-p\mu) f_0(\mu)\, d\mu, \quad p \geq 0,$$

— *вещественное преобразование Лапласа начального спектра* f_0, *а неотрицательная функция* $\pi(t)$ *определяется формулами*

$$\pi(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq t_c = G_{pp}^{-1}(0); \tag{5.10}$$

$$G_{pp}(\pi(t)) = t^{-1}, \quad t \geq t_c. \tag{5.11}$$

ЗАМЕЧАНИЯ. 5.1. Второй момент начального распределения вычисляется по формуле

$$\sigma(0) = G_{pp}(0).$$

Поэтому в силу (5.10) при $0 \le t < t_c$ теоремы 5.1 и 5.2 приводят к известным формулам [22]. В этом случае формулы (5.8), (5.9) совпадают с формулами (5.3), (5.4). Для $t > t_c$ происходит непрерывный переход соотношения сохранения плотности массы (5.4) в соотношение диссипации (5.9). Поскольку корень уравнения (5.11) $\pi(t) \to +\infty$, когда $t \to +\infty$, то

$$m(t) \to 0, \quad t \to +\infty.$$

Характер убывания $m(t)$ существенно зависит от поведения $G(p)$ при больших аргументах, т. е. в силу свойств преобразования Лапласа для начальной функции f_0 он определяется спектром малых частиц. Если $\sigma(0) = +\infty$, то диссипация массы начинается мгновенно с критического момента времени $t_c = 0$.

5.2. Условия теоремы 5.1 можно ослабить, потребовав лишь непрерывность неотрицательной функции $\mu f(\mu, t)$ и соответственно непрерывность интеграла

$$\int\limits_{\mathbb{R}_1^+} \mu f(\mu, t)\, d\mu, \quad t \ge 0.$$

Тогда, вообще говоря, концентрация $n(t)$ может быть бесконечной из-за расходимости в нуле интеграла

$$\int\limits_{\mathbb{R}_1^+} f_0(\mu)\, d\mu.$$

Плотность массы $m(t)$ определяется формулами (5.9), (5.10), (5.11), где функция $G_p(p)$ задана следующим соотношением:

$$G_p(p) = \int\limits_{\mathbb{R}_1^+} \exp(-p\mu) f_0(\mu)\mu\, d\mu, \quad p \ge 0.$$

5.3. Для функционала решения f задачи Коши (5.1)

$$F(p, t) = \int\limits_{\mathbb{R}_1^+} \mu \exp(-p\mu) f(\mu, t)\, d\mu, \qquad p \ge 0, \qquad t \ge 0,$$

справедлива следующая неявная формула:

$$F = F_0 \left(p - tF + \int_0^t m(s)\, ds \right), \quad p \geq 0, \quad t \geq 0, \tag{5.12}$$

где $F_0 = -G_p$, а значение $m(t)$ находится из (5.9), (5.10), (5.11). Для того, чтобы удовлетворить начальным условиям, из множества решений уравнения (5.12) следует выделить функцию, стремящуюся к F_0 при $t \to +0$.

5.4. Теоремы, аналогичные теоремам 5.1, 5.2, справедливы для решения $\bar{f}(\mu, t)$ задачи (5.7). В этом случае функция

$$\bar{F}(p,t) = \int_{\mathbb{R}_1^+} \mu \exp(-p\mu) \bar{f}(\mu, t)\, d\mu, \quad p \geq 0, \quad t \geq 0$$

удовлетворяет неявной формуле

$$\bar{F}(p,t) = F_0 \left(p - t\bar{F} + F_0(0)t \right), \quad p \geq 0, \quad t \geq 0, \tag{5.13}$$

где $F_0 = -G_p$. Формулы (5.12), (5.13) при $0 \leq t \leq t_c$ совпадают. Плотность массы $\bar{m}(t)$ в этом случае отыскивается из соотношения

$$\bar{m}(t) = -G_p(\bar{\pi}(t)), \quad t \geq 0, \tag{5.14}$$

где функция $\bar{\pi}(t)$ — наибольший неотрицательный корень уравнения

$$F_0(\bar{\pi})t + \bar{\pi} = F_0(0)t, \quad t \geq 0.$$

Очевидно, $\bar{\pi}(t) = 0$ в интервале $0 \leq t \leq t_c$. Когда $t > t_c$, функция $\bar{\pi}(t) \geq \pi(t)$.

Следует подчеркнуть, что уравнение (5.14) имеет на неотрицательной части вещественной оси ровно два корня, если $t > t_c$, $f_0 \not\equiv 0$, причем один из них равен нулю, а второй — положительный $\bar{\pi}(t)$, который ответвляется от нулевого в критический момент времени t_c. Эта бифуркация нулевого корня порождает переход соотношения сохранения массы в ее диссипацию. Таким образом, для $0 \leq t \leq t_c$ решения задач (5.1) и (5.7) совпадают, а в дальнейшем они различаются. Решение задачи (5.1) по прошествии критического времени t_c приводит к меньшим значениям концентрации и плотности массы по сравнению с задачей (5.7), т. к. в силу монотонного убывания вещественного преобразования Лапласа для неотрицательной функции f_0 выполнено неравенство

$$F_0(\bar{\pi}(t)) \geq F_0(\bar{\pi}(t)), \quad t > t_c.$$

Физическим объяснением этого эффекта служит то, что уравнение (5.7) наряду со столкновительным оператором коагуляции S содержит сток частиц, действующий с интенсивностью

$$-\mu \bar{f}(\mu, t)\,[m(0) - \bar{m}(t)].$$

5.5. Для решений f уравнения (5.1) и $\bar{f}$ для уравнения (5.7), соответствующих одинаковым начальным данным, справедливы следующие соотношения:

$$f = \bar{f}, \qquad 0 \leq t \leq t_c,$$

$$f \geq \bar{f}, \qquad t > t_c.$$

Последнее неравенство есть результат действия стока, упомянутого в замечании 5.4.

ПРИМЕР 5.1. Для наглядного сравнения результатов решения уравнений (5.1) и (5.7) рассмотрим пример с начальным распределением частиц

$$f_0(\mu) = \mu^{-1}\exp(-\mu), \quad \mu \geq 0,$$

который вкладывается в условия для теоремы 5.1, указанные в замечании 5.2. Решим уравнения (5.12), (5.13) с учетом требования примыкания решения к начальной функции и аналитически продолжим по аргументу p в комплексную плоскость полученные выражения. Используя обратное преобразование Лапласа [89], имеем

$$\bar{f}(\mu, t) = \mu^{-2} t^{-1/2} I_1(2\mu\, t^{-1/2}) \exp[-\mu(1+t)], \quad \mu,\ t \in \mathbb{R}^+,$$

для оригинала $\bar{f}(\mu, t)$ решения уравнения (5.13), а для оригинала $f(\mu, t)$ решения уравнения (5.12) —

$$f(\mu, t) = \begin{cases} \bar{f}(\mu, t), & \mu \in \mathbb{R}^+,\ 0 \leq t \leq t_c, \\ \mu^{-2} t^{-1/2} I_1(2\mu t^{-1/2}) \exp[-2\mu t^{-1/2}], & \mu \in \mathbb{R}^+,\ t > t_c, \end{cases}$$

где I_1 — фунция Бесселя мнимого аргумента. Критический момент времени t_c определяется равенством $t_c = 1$. Очевидно, $f > \bar{f}$, если $t > t_c$. Соответствующие формулы для плотности массы имеют вид

$$\bar{m}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le t_c = 1, \\ t^{-1}, & t > t_c, \end{cases} \qquad m(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le t_c = 1, \\ t^{-1/2}, & t > t_c. \end{cases}$$

Концентрация частиц в обоих случаях равна бесконечности из-за расходимости интеграла (по мере $d\mu$) начальной функции f_0 в окрестности точки $\mu = 0$.

ЗАМЕЧАНИЯ. 5.6. Выражение для коагуляционного спектра в примере 5.1 указывает на то, что начиная с t_c решение уравнения Смолуховского (0.1) с ядром $\Phi(x, y) = xy$ выходит на автомодельный режим, а именно

$$f(x,t) = t^{\frac{1}{2}}\psi(\Theta), \quad \Theta = 2xt^{\frac{1}{2}},\ t \ge t_c,$$

где

$$\psi(\Theta) = 4\Theta^{-1}I_1(\Theta)\exp(-\Theta), \quad (\Theta) > 0.$$

Следует подчеркнуть, что при $t < t_c$ решение не является автомодельным и при этих значениях времени не существует автомодельных решений в смысле уравнения Баканова–Мартынова (3.15), что устанавливается на основе теоремы 3.13. (Однородное ядро $\Phi = xy$ удовлетворяет ее условиям). На приведенном автомодельном решении не выполняется соотношение сохранения. Поэтому этот класс автомодельных решений следует называть диссипативным. Иные примеры диссипативных автомодельных решений приведены в замечании 5.16 для ядер, отыскиваемых методом обратной задачи.

5.7. Когда $t > t_c$, существует бесконечное множество начальных функций с различной плотностью массы $m(0)$, которые переходят в заданное решение f при достаточно больших значениях времени $t > t_c$. Действительно, по формулам (5.9)–(5.12) прямыми вычислениями устанавливаем, что в случае ядра $\Phi = xy$ для семейства начальных данных

$$f_0^{\varepsilon}(x) = \exp(-\varepsilon)f_0(x) \quad \varepsilon \ge 0,$$

при функции f_0, удовлетворяющей условиям теоремы 5.1, решения уравнения Смолуховского (0.1) совпадают при достаточно больших $t > 0$. При этом следует использовать следующую формулу, которая эквивалентна (5.12):

$$F = F_0[p + t(m(t) - F) + \pi(t)], \quad p \ge 0, \quad t \ge 0,$$

Неединственность начальных данных, приводящих к значениям решения f при $t > t_c$, означает нарушение локальной аналитичности решения по времени в точке $t = t_c$, что существенно отличает рассматриваемый случай ядра $\Phi = xy$ от результатов, полученных в гл. 1, 2. Решения, построенные в этих главах являются локально аналитическими по времени в окрестности множества $t \geq 0$ при достаточно быстро спадающих начальных данных при $x \to \infty$.

5.8. Для ядра $\Phi = xy$ при начальной функции $f_0 \sim cx^\alpha$ при $x \to 0$ справедлива формула [79, 90]

$$m(t) \sim c^{\frac{5+2\alpha}{3+\alpha}}\Gamma(2+\alpha)\Gamma^{\frac{2+\alpha}{3+\alpha}}(3+\alpha)t^{\frac{2+\alpha}{3+\alpha}}, \quad t \to 0.$$

В случае, когда $f_0 = 0$ при $0 \leq x \leq x_0$ и $f_0 \sim c(x - x_0)^\alpha$ при $x \to x_0 + 0$, имеет место формула

$$m(t) \sim x_0 t^{-1}, \quad t \to \infty, \quad \alpha > -1.$$

Асимптотическое поведение решения при $t \to \infty$, $x \to \infty$ описывается формулами

$$f(x,t) \sim A(c,\alpha)t^{\frac{5+2\alpha}{2(3+\alpha)}}x^{-\frac{5}{2}}, \quad \alpha > -2,$$

если $f_0 \sim cx^\alpha$ при $x \to 0$ ($A(c,\alpha)$ — положительная постоянная). Если же $f_0 = 0$ при $0 \leq x \leq x_0$ и $f_0 \sim c(x - x_0)^\alpha$ при $x \to x_0 + 0$, то

$$f(x,t) \sim 2^{\frac{1}{2}}\pi^{-1}t^{-1}x^{-\frac{5}{2}}, \quad x_0 > 0.$$

§ 3. Формулы для моментов (доказательство теоремы 5.2)

Установим справедливость формул (5.9)–(5.14), априори предполагая существование решения уравнения (5.1), указанное в теореме 5.1. Положим $\varphi = \mu f$, где $f \in \mathcal{E}^+$ является решением уравнения (5.1) с ядром коагуляции $\Phi(\mu, \mu_1) = \mu\mu_1$. Очевидно, имеет место тождество

$$\frac{\partial\varphi(\mu,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\mu\varphi * \varphi - \mu\,\varphi\, m(t), \quad \mu,\ t \in \mathbb{R}^+, \tag{5.15}$$

где операция $*$ — свертка по переменной $\mu \in \mathbb{R}^+$. Тогда вещественное преобразование Лапласа

$$F(p,t) = \int\limits_{\mathbb{R}_1^+} \exp(-p\mu)\varphi(\mu,t)\,d\mu, \quad p \geq 0, \quad t \geq 0,$$

удовлетворяет уравнению хопфовского вида [51]

$$\frac{\partial F}{\partial t} + [F - m]\frac{\partial F}{\partial p} = 0 \quad (p > 0, \quad t > 0), \tag{5.16}$$

$$m(t) = F(0,t).$$

В силу свойств преобразования Лапласа и требования $f \in \mathcal{E}^+$ функция $F(p,t)$ при $p \geq 0$, $t \geq 0$ — непрерывная неотрицательная монотонно убывающая по аргументу $p \in \mathbb{R}^+$. Запишем уравнение характеристик для уравнения (5.16)

$$p(t) = p_0 + tF_0(p_0) - \int\limits_0^t m(s)\,ds, \quad p_0 > 0, \quad t \geq 0, \tag{5.17}$$

$$F_0(p) = F(p,0).$$

Поскольку $m(t) \equiv F(0,t)$, то координатная ось

$$\{(p,t) : p = 0,\ t \geq 0\}$$

также является характеристикой. Характеристики, выходящие из точки $p_0 > 0$, пересекаются с другими характеристиками в силу свойства убывания начальной функции F_0 по аргументу p, причем точная нижняя грань моментов времени пересечения определяется соотношением

$$t_{p_0} = \frac{-1}{F_0'(p_0)}, \quad p_0 \geq 0, \tag{5.18}$$

где t_{p_0} — момент времени образования особенности функции F на рассматриваемой характеристике. Ввиду того, что $\sigma(0) = -F_0'(0)$, наименьший момент времени возникновения особенности равен

$$t_c = \sigma^{-1}(0). \tag{5.19}$$

Поле характеристик уравнения (5.16) в первой четверти плоскости (p,t) направлено справа налево из-за неотрицательности функции f. Поэтому из требования непрерывности функции F при $p \geq 0$, $t \geq 0$

вытекает, что значения $F(0,t)$ определяются значениями начальной функции F_0, переносимыми вдоль характеристик, выходящих из точек ($p_0 > 0$, $t = 0$). Из условия пересечения характеристики, выходящей из точки ($\pi > 0$, $t = 0$) с вертикальной характеристикой ($p = 0$, $t \geq 0$), получаем

$$1 + tF_0'(\pi) = 0. \tag{5.20}$$

Сравнивая (5.18), (5.19), (5.20), убеждаемся, что начиная с момента времени t_c на оси $p = 0$ возникет особенность функции F, вызванная пересечениями характеристик. Отметим, что для любой характеристики формирование особенности на ней начинается в момент пересечения с осью $p = 0$, $t \geq 0$, что определяется формулами (5.18), (5.20). В силу непрерывности F в окрестности линии $p = 0$, $t \geq 0$, имеем

$$F(0,t) = \begin{cases} F_0(0), & 0 \leq t \leq t_c, \\ F_0(\pi(t)), & t \geq t_c, \end{cases}$$

где $\pi(t)$ — положительный корень уравнения (5.20). Поскольку функции F_0, $-F_0'$ строго монотонно убывают (в предположении, что решение $f > 0$), стремясь к нулю при $p \to +\infty$, то нетрудно установить, что при $t > t_c$ для положительной начальной функции f_0 существует единственный положительный корень $\pi(t) \to +\infty$, когда $t \to +\infty$. Этот корень примыкает к нулю при $t \to +0$. Итак, установлена формула (5.9) для плотности массы $m(t)$.

Перейдем теперь к получению формулы для концентрации частиц. Очевидно,

$$n(t) = \int\limits_{\mathbb{R}+} F(p,t)\,dp, \quad t \geq 0. \tag{5.21}$$

На характеристиках (5.17) выполняется тождество

$$F(p(t),t) = F_0(p_0), \quad p_0 > 0, \quad t \geq 0. \tag{5.22}$$

Заменим в (5.21) функцию $F(p,t)$ ее значением $F_0(p_0)$ и выразим переменную интегрирования через p_0

$$n(t) = \int\limits_{\pi(t)}^{+\infty} F_0(p_0)\,(1 + F_0'(p_0))\,dp_0, \quad t \geq 0.$$

Выполняя интегрирование, получаем

$$n(t) = G(\pi(t)) - G_p^2(\pi(t))\frac{t}{2}, \quad t \geq 0,$$

где функция

$$G(p) = \int\limits_{\mathbb{R}_1^+} \exp(-p\mu) f_0(\mu)\, d\mu, \quad p \geq 0.$$

Неявная формула (5.12) из замечания 5.3 устанавливается сочетанием тождества (5.22) и уравнения характеристик (5.17).

Покажем, что особенность функции F, находящаяся на линии

$$p = 0, \quad t \geq t_c = \sigma^{-1}(0),$$

является градиентной катастрофой, а именно, в этих точках

$$\frac{\partial F(p,t)}{\partial p}|_{p=0} = -\infty,$$

что соответствует обращению в бесконечность второго момента решения уравнения (5.1). Дифференцируя (5.9) по переменной p в точке $p = 0$, имеем

$$\frac{\partial F(p,t)}{\partial p}|_{p=0} = F_0'(\pi(t))\left[1 + tF_0'(\pi(t))\right]^{-1}, \quad t \geq 0,$$

где $\pi(t)$ определяется соотношениями (5.10), (5.11). Таким образом,

$$\frac{\partial F(p,t)}{\partial p}|_{p=0} = \begin{cases} -\sigma(0)[1 - t\sigma(0)]^{-1}, & 0 \leq t < t_c, \\ -\infty, & t \geq t_c. \end{cases}$$

Поскольку $\sigma(t) = -F_p(0,t)$, то значения второго момента функции f с точностью до знака определяются полученной формулой.

§ 4. Доказательство теоремы 5.1

В предыдущем параграфе получены выражения для $m(t)$, при условии принадлежности решения задачи (5.1) классу $\mathcal{E}^+$. Подчеркнем, что величина $m(t)$ определяется по формулам (5.9)–(5.11) для данного класса решений единственным образом, причем указанные формулы являются необходимым условием существования такого решения.

Вместо задачи (5.1) будем рассматривать задачу Коши для уравнения (5.15), предполагая, что задана соответствующая начальная функция

$$\varphi^{(0)}(\mu) = \mu f_0(\mu), \quad f_0 \in \mathcal{E}_0^+.$$

Доказательству теоремы 5.1 предпошлем ряд предварительных утверждений.

ЛЕММА 5.1. *Последовательность функций* $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$, *определенная формулами*

$$\frac{\partial\varphi_{n+1}(\mu,t)}{\partial t} = \int\limits_0^\mu \mu_1\varphi_n(\mu-\mu_1,t)\varphi_{n+1}(\mu_1,t)\,d\mu_1 - \mu\varphi_{n+1}(\mu,t)m(t), \tag{5.23}$$

$$\mu, t \in \mathbb{R}^+,$$

$$\varphi_{n+1}(\mu,0) = \varphi^{(0)}(\mu), \quad \varphi_0 \equiv 0, \quad n \geq 0,$$

монотонно возрастает с номером $n \geq 0$ *при условии, что функция* $m(t)$ *определяется формулами* (5.9)–(5.11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы получим методом математической индукции по номеру $n \geq 0$. Корректность задачи (5.23) при каждом $n \geq 0$ устанавливается методом сжимающих отображений, обычным для уравнения Вольтерра [36]. Поэтому остановимся на вопросе монотонности последовательности $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$. Полагая $n = 0$ в (5.23), имеем

$$\frac{\partial\varphi_1(\mu,t)}{\partial t} = -\mu\varphi_1(\mu,t)m(t), \quad \mu, t \in \mathbb{R}^+.$$

Поскольку $\varphi_1(\mu,0) \geq 0$, то $\varphi_1(\mu,t) \geq 0 \equiv \varphi_0(\mu,t)$. Таким образом, на первом шаге индукции утверждение леммы справедливо.

Положим теперь, что

$$\varphi_0(\mu,t) \leq \varphi_1(\mu,t) \leq \ldots \leq \varphi_n(\mu,t), \quad \mu, t \in \mathbb{R}^+, \quad n > 0.$$

Покажем при этих условиях справедливость неравенства

$$\varphi_n(\mu,t) \le \varphi_{n+1}(\mu,t), \quad \mu,t \in \mathbb{R}^+.$$

Обозначим

$$u = \varphi_{n+1}(\mu,t) - \varphi_n(\mu,t), \quad z = \varphi_n(\mu,t) - \varphi_{n-1}(\mu,t).$$

Очевидно,

$$\frac{\partial u(\mu,t)}{\partial t} = \int_0^\mu \mu_1\varphi_n(\mu-\mu_1,t)u(\mu_1,t)d\mu_1 + \int_0^\mu \mu_1\varphi_n(\mu-\mu_1,t)z(\mu_1,t)\,d\mu_1 -$$

$$-\mu u(\mu,t)m(t), \quad \mu,\ t \in \mathbb{R}^+,$$

$$u(\mu,0) \ge 0.$$

По индукционному предположению функции $\varphi_n(\mu,t) \ge 0$, $z \ge 0$. Таким образом, справедливо неравенство

$$\frac{\partial u(\mu,t)}{\partial t} \ge \int_0^\mu \mu_1\varphi_n(\mu-\mu_1,t)u(\mu_1,t)\,d\mu_1 - \mu u(\mu,t)m(t), \quad \mu,t \in \mathbb{R}^+,$$

$$u(\mu,0) \ge 0.$$

Полагая

$$u(\mu,t) = \psi(\mu,t)\exp\left(-\mu\int_0^t m(s)\,ds\right),$$

имеем

$$\frac{\partial \psi(\mu,t)}{\partial t} \ge \int_0^\mu G(\mu,\mu_1,t)\psi(\mu_1,t)\,d\mu_1, \quad \psi(\mu,0) \ge 0, \quad \mu,t \in \mathbb{R}^+, \tag{5.24}$$

где функция $G(\mu,\mu_1,t) \ge 0$ является непрерывной по совокупности аргументов. Покажем, что непрерывная гладкая по t функция ψ, удовлетворяющая этому неравенству, обязательно неотрицательная, что завершит доказательство.

Рассмотрим непрерывную функцию $\bar{\psi}$, определенную следующим соотношением

$$\frac{\partial\bar{\psi}(\mu,t)}{\partial t} = \int\limits_0^{\mu} G(\mu,\mu_1,t)\bar{\psi}(\mu_1,t)\,d\mu_1, \quad \bar{\psi}(\mu,0) \geq 0, \quad \mu,t \in \mathbb{R}^+,$$

которое эквивалентно интегральному уравнению Вольтерра

$$\bar{\psi}(\mu,t) = \bar{\psi}_{|_{t=0}} + \int\limits_0^t \int\limits_0^{\mu} G(\mu,\mu_1,\tau)\bar{\psi}(\mu_1,\tau)\,d\mu_1 d\tau \stackrel{def}{=} A(\bar{\psi}),$$

$$\bar{\psi}(\mu,0) \geq 0, \quad \mu,\ t \in \mathbb{R}^+.$$

Применяя метод последовательных приближений

$$\psi^{(k)} = A(\psi^{(k+1)}), \quad k \in \mathbb{N}, \quad \psi^{(0)} = 0,$$

устанавливаем, что

$$\bar{\psi}(\mu,t) = \lim_{k\to\infty} \psi^{(k)}(\mu,t),$$

а поскольку $\psi^{(k)} \geq 0$, то функция $\bar{\psi} \geq 0$. Покажем, что непрерывная функция ψ, подчиняющаяся неравенству (5.24), удовлетворяет неравенству $\psi \geq \bar{\psi}$, если $\psi(\mu,0) \geq \bar{\psi}(\mu,0)$. Для этого перейдем к интегральной форме неравенства (5.24), полагая $\psi(\mu,0) = \bar{\psi}(\mu,0) \geq 0$,

$$\psi(\mu,t) \geq \psi_{|_{t=0}} + \int\limits_0^t \int\limits_0^{\mu} G(\mu,\mu_1,\tau)\psi(\mu_1,\tau)\,d\mu_1 d\tau = A(\psi), \quad \mu,t \in \mathbb{R}^+.$$

Поскольку оператор A монотонный ($A(\psi_1) \geq A(\psi_2)$, если $\psi_1 \geq \psi_2$), то в силу последнего неравенства

$$\psi \geq A^n(\psi), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку $A^n(\psi) \to \bar{\psi}$ при $n \to \infty$, то справедливо неравенство $\psi \geq \bar{\psi}$, которое доказывает утверждение индукции. Лемма доказана.

ЛЕММА 5.2. *Пусть $F_n(p,t)$ — вещественное преобразование Лапласа функции φ_n, $n \in \mathbb{N}$, определенной в лемме* 5.1. *Тогда при любом номере $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство*

$$F_n(p,t) \leq F(p,t), \quad p,t \in \mathbb{R}^+,$$

где функция F — гладкое решение задачи Коши

$$\frac{\partial F(p,t)}{\partial t} + [F(p,t) - m(t)]\frac{\partial F(p,t)}{\partial p} = 0, \quad p > 0, \quad t > 0,$$

$$m(t) = F(0,t),$$

$$F_{|t=0} = \int\limits_{\mathbb{R}_1^+} \exp(-p\mu)\varphi^{(0)}(\mu)\,d\mu, \quad p \geq 0, \tag{5.25}$$

$$\mu^{-1}\varphi^{(0)} \in \mathcal{E}_0^+.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построение решения задачи (5.25) методом характеристик рассмотрено выше в §2. Поэтому перейдем к установлению справедливости неравенства $F_n(p,t) \leq F(p,t)$, $n \geq 0$ $(p,\, t \in \mathbb{R}^+$. Обозначим $\Delta_n = F - F_n$. Имеет место тождество

$$\frac{\partial \Delta_{n+1}(p,t)}{\partial t} + [F(p,t) - m(t)]\frac{\partial \Delta_{n+1}(p,t)}{\partial p} =$$

$$= -\Delta_n(p,t)\frac{\partial F_{n+1}(p,t)}{\partial p}, \quad p > 0,\ t > 0,\ n \geq 0.$$

Поскольку $F_0 \equiv 0$, а функция $F \geq 0$ в силу формулы (5.22), то $\Delta_0 \geq 0$. Доказательство проведем индукцией по номеру $n \geq 0$. Если $\Delta_n \geq 0$, то в силу монотонного убывания функции $F_{n+1}(p,t)$ по аргументу $p \in \mathbb{R}^+$, имеем

$$\frac{d\Delta_{n+1}(p(t),t)}{dt} = -\left[\Delta_n(p,t)\frac{\partial F_{n+1}(p,t)}{\partial p}\right]_{|(p(t),t)} \geq 0,$$

где $p(t)$ — характеристика (5.17) для уравнения (5.25). Поскольку $\Delta_{n+1}(p,0) = 0$, то на каждой характеристике $\Delta_{n+1}(p,t) \geq 0$, и, значит, всюду $F \geq F_{n+1}$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. *Функции $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$, определенные в лемме 5.1, удовлетворяют неравенству*

$$\int\limits_0^\infty \varphi_n(\mu,t)\,d\mu \leq m(t), \quad t \geq 0, \quad n \geq 0, \tag{5.26}$$

где $m(t) = F(0,t)$.

ЛЕММА 5.3 (Принцип максимума). *На каждом отрезке* $0 \le \mu \le a$ *выполняется неравенство*

$$\max_{0 \le \mu \le a} \varphi_n(\mu, t) \le \max_{0 \le \mu \le a} \varphi^{(0)}(\mu), \quad n \ge 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольное $t > 0$. Пусть в точке $\bar{\mu}$, лежащей в отрезке $0 \le \mu \le a$, справедливо соотношение

$$\varphi_{n+1}(\bar{\mu}, t) = \max_{0 \le \mu \le a} \varphi_{n+1}(\mu, t).$$

Тогда в указанной точке

$$\frac{\partial \varphi_{n+1}(\bar{\mu}, t)}{\partial t} = \int\limits_0^{\bar{\mu}} \mu_1 \varphi_n(\bar{\mu} - \mu_1, t) \varphi_{n+1}(\mu_1, t)\, d\mu_1 - \bar{\mu} \varphi_{n+1}(\bar{\mu}, t) m(t) \le$$

$$\le \bar{\mu} \left[\int\limits_0^{\bar{\mu}} \varphi_n(\bar{\mu} - \mu_1, t) \varphi_{n+1}(\mu_1, t)\, d\mu_1 - \varphi_{n+1}(\bar{\mu}, t) m(t) \right].$$

Поскольку операция свертки симметричная, то

$$\frac{\partial \varphi_{n+1}(\bar{\mu}, t)}{\partial t} \le \bar{\mu} \left[\int\limits_0^{\bar{\mu}} \varphi_{n+1}(\bar{\mu} - \mu_1, t) \varphi_n(\mu_1, t)\, d\mu_1 - \varphi_{n+1}(\bar{\mu}, t) m(t) \right] \le$$

$$\le \bar{\mu} \varphi_{n+1}(\bar{\mu}, t) \left[\int\limits_0^{\bar{\mu}} \varphi_n(\mu_1, t)\, d\mu_1 - m(t) \right].$$

Учитывая неравенство (5.26) из следствия 5.1, имеем

$$\frac{\partial \varphi_{n+1}(\bar{\mu}, t)}{\partial t} \le 0.$$

В силу принципа максимума из теоремы 3.7 получаем утверждение леммы. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.1. В силу лемм 5.1 и 5.3 последовательность функций $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ монотонно возрастая, сходится к пределу $\varphi(\mu, t)$. Перепишем задачу Коши для уравнения (5.15) в интегральной форме

$$\varphi_{n+1}(\mu,t) = \varphi^{(0)}(\mu) + \int\limits_0^t \left[\int\limits_0^\mu \mu_1 \varphi_n(\mu-\mu_1,\tau)\varphi_{n+1}(\mu_1,\tau)\,d\mu_1 - \right.$$

$$\left. -\mu\varphi_{n+1}(\mu,\tau)m(\tau)\right]\,d\tau, \quad \mu,t \geq 0, \quad n \geq 0.$$

Основываясь на теореме Лебега [36] о предельном переходе под знаком интеграла, устремим $n \to \infty$. Таким образом,

$$\varphi(\mu,t) =$$

$$= \varphi^{(0)}(\mu) + \int\limits_0^t \left[\int\limits_0^\mu \mu_1 \varphi(\mu-\mu_1,\tau)\varphi(\mu_1,\tau) - \mu\varphi(\mu,\tau)m(\tau) \right]\,d\tau d\mu_1,$$

$$\mu,t \geq 0, \quad n \geq 0. \tag{5.27}$$

Учитывая соотношение

$$\int\limits_0^\mu \mu_1 \varphi(\mu-\mu_1,\tau)\varphi(\mu_1,\tau)d\mu_1 \equiv \frac{\mu}{2}\int\limits_0^\mu \varphi(\mu-\mu_1,\tau)\varphi(\mu_1,\tau)\,d\mu_1,$$

устанавливаем, что построенная функция φ удовлетворяет интегральной форме задачи (5.15). Следовательно, функция $f = \mu^{-1}\varphi$ является решением задачи (5.1) в интегральной форме.

Единственность решения уравнения (5.27) устанавливается аналогично доказательству единственности для интегрального уравнения Вольтерра [36].

Отметим, что измеримая ограниченная функция φ, удовлетворяющая соотношению (5.27), является непрерывной, если непрерывна функция $\varphi^{(0)}$. Действительно, для модуля непрерывности функции φ по аргументу μ

$$\omega(\varepsilon,t) = \sup_{|\mu-\mu_1|\leq\varepsilon} |\varphi(\mu,t) - \varphi(\mu_1,t)|$$

получаем неравенство

$$\omega(\varepsilon,t)\le\omega(\varepsilon,0)+\mathcal{O}(\varepsilon)+C\int\limits_0^t\omega(\varepsilon,\tau)\,d\tau,\quad \varepsilon>0,\ t\ge 0,$$

с некоторой постоянной C, откуда следует

$$\omega(\varepsilon,t)\le[\omega(\varepsilon,0)+\mathcal{O}(\varepsilon)]\exp{(CT)},\quad 0\le t\le T. \tag{5.28}$$

В силу ограниченности φ из (5.27) получаем оценку

$$\sup_{\mu\in[0,M]}|\varphi(\mu,t_1)-\varphi(\mu,t_2)|\le C_1|t_1-t_2|, \tag{5.29}$$

где постоянная C_1 зависит от M, T, $\sup\varphi$. Сочетая (5.28), (5.29), убеждаемся в непрерывности функции φ. Таким образом, для φ справедливо дифференциальное тождество

$$\frac{\partial\varphi(\mu,t)}{\partial t}=\frac{1}{2}\mu\varphi*\varphi|_{(\mu,t)}-\mu\varphi(\mu,t)m(t),\quad \mu,\ t\in\mathbb{R}^+.$$

Повторяя рассуждения из §3 для решения уравнения (5.15), устанавливаем, что вещественное преобразование Лапласа для функции φ, которое задается формулой

$$F(p,t)=\int\limits_{\mathbb{R}_1^+}\exp(-p\mu)\varphi(\mu,t)\,d\mu,\quad p\ge 0,\quad t\ge 0,$$

удовлетворяет соотношениям (5.17), (5.22). Поскольку $F(0,t)$ определяется значением начальной функции F_0, переносимым вдоль характеристики до пересечения с осью $p=0$, $t\ge 0$, то

$$F(0,t)\equiv m(t),$$

т. е. справедливо тождество

$$\int\limits_0^\infty\varphi(\mu,t)\,d\mu\equiv m(t),\quad t\ge 0.$$

Теорема доказана.

§ 5. Стационарное уравнение Смолуховского с источником частиц

В связи с рассмотренным выше явлением перехода соотношения сохранения в соотношение диссипации представляет интерес изучение решений стационарной задачи (5.2), которая в случае коагуляции непрерывных масс записывается в виде [82]

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{\mu} \Phi(\mu-\mu_1,\mu_1)f(\mu-\mu_1)f(\mu_1)\,d\mu_1 -$$

$$-f(\mu)\int\limits_0^{\infty} \Phi(\mu,\mu_1)f(\mu_1)\,d\mu_1 + q(\mu) = 0, \quad \mu\in\mathbb{R}^+, \tag{5.30}$$

где неотрицательная величина $q(\mu)$ определяет интенсивность, с которой частицы массы $\mu \geq 0$ вводятся в коагулирующую систему. Отметим, что решения уравнения (5.30) автоматически должны удовлетворять требованию

$$S(f) = -q < 0,$$

если $q > 0$, где S — оператор столкновений коагуляции (0.5). Ясно, что такие решения не принадлежат множеству консервативности оператора столкновений, а лежат во множестве диссипативности в силу неотрицательности источника.

Такого рода задачи возникают при описании роста пор в металлах при облучении потоком быстрых нейтронов, которые, выбивая атомы из кристаллической решетки, служат причиной возникновения пор. При описании работы реактивных двигателей приходится учитывать коагуляцию слипающихся частичек, которые возникают в процессе горения топлива, т. е. здесь источником коагулирующих частиц является химическая реакция, протекающая во внешней среде.

В настоящем параграфе рассматривается вопрос о построении решения уравнения коагуляции (5.30) в частном случае, когда ядро Φ имеет мультипликативное представление

$$\Phi(\mu,\mu_1) = \alpha(\mu)\alpha(\mu_1), \quad \alpha(\mu) > 0, \quad \mu,\mu_1\in\mathbb{R}^+.$$

Сразу подчеркнем, что в случае мультипликативной функции Φ следующая замена независимой переменной

$$\alpha f \mapsto f$$

приводит уравнение (5.30) к стандартному виду:

$$\frac{1}{2}(f * f)(\mu) - f(\mu)\int\limits_0^\infty f(\mu_1)\,d\mu_1 + q(\mu) = 0, \quad \mu \in \mathbb{R}^+, \tag{5.31}$$

где символ $*$ означает свертку. Очевидно, вопрос о построении решения интегрального уравнения (5.31) связан с определением величины интеграла $\int\limits_0^\infty f(\mu_1)\,d\mu_1$. Если функция f удовлетворяет (5.31), то непосредственным интегрированием по $\mu \in \mathbb{R}^+$ получаем

$$\int\limits_0^\infty f(\mu_1)\,d\mu_1 = \left\{2\int\limits_0^\infty q(\mu)\,d\mu\right\}^{1/2} \overset{def}{=} Q,$$

если считать заданную функцию $q \geq 0$ суммируемой на $\mathbb{R}^+$. Для построения решения уравнения (5.31) рассмотрим вспомогательную задачу

$$\frac{1}{2}\varphi * \varphi - Q\varphi + q = 0, \quad \mu \in \mathbb{R}^+, \tag{5.32}$$

ЛЕММА 5.4. *При любой суммируемой неотрицательной функции $q \neq 0$ на $\mathbb{R}^+$ решение задачи (5.32) может быть найдено как предел в метрике пространства $L^1_{[0,\infty]}$ при $n \to \infty$ монотонно возрастающей последовательности функций $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$, где*

$$\begin{cases} \varphi = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n, \\ \varphi_0 = 0, \\ \varphi_{n+1} = Q^{-1}\left[\dfrac{1}{2}\varphi_n * \varphi_n + q\right], \quad n \geq 0, \end{cases} \tag{5.33}$$

при условии, что величина $Q > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу неотрицательности q и положительности Q последовательность функций $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$ является монотонно возрастающей, ибо для неотрицательных функций φ оператор, определенный правой частью (5.33), монотонно возрастающий. Таким образом, справедливы соотношения

$$\varphi_n \geq 0, \quad \varphi_n \in L^1_{[0,\infty]}, \quad n \geq 0.$$

Обозначим

$$y_n = \int\limits_0^\infty \varphi_n \, d\mu, \quad n \geq 0.$$

Из соотношения (5.33) получаем

$$y_{n+1} = \frac{1}{2} Q^{-1} \left[y_n^2 + Q^2 \right], \quad n \geq 0, \quad y_0 = 0. \tag{5.34}$$

Покажем, что при каждом номере $n \geq 0$ справедливо неравенство

$$y_n \leq Q.$$

Действительно, величина $Q > 0$ является единственным корнем квадратного уравнения

$$y^2 - 2Qy + Q^2 = 0. \tag{5.35}$$

Обозначим $z_n = Q - y_n$ и воспользовавшись равенством

$$Q = (Q^2 + Q^2)(2Q)^{-1},$$

имеем

$$z_{n+1} = \frac{1}{2} Q^{-1} z_n \left[Q + y_n \right], \quad n \geq 0.$$

ПОскольку $y_n \geq 0$, $Q > 0$, $z_0 > 0$, то при каждом номере $n \geq 0$ величины $z_n \geq 0$. Следовательно, выполняется неравенство

$$y_n \leq Q, \quad n \geq 0.$$

Применяя теорему Б. Леви [36] о предельном переходе под знаком интеграла, устремляя $n \to \infty$ в соотношении (5.33), получаем утверждение леммы. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.9. В случае $Q = 0$ почти везде функция $q = 0$ и, значит, уравнение (5.32) имеет единственное решение $f = 0$ в классе неотрицательных функций (с точностью до эквивалентности на множестве меры нуль).

ТЕОРЕМА 5.3. *Пусть функция q неотрицательная суммируемая на $\mathbb{R}^+$. Тогда уравнение* (5.31) *имеет неотрицательное суммируемое решение f, являющееся пределом монотонно возрастающих итераций* (5.33) *при $Q > 0$, и решение $f = 0$ при $Q = 0$. Это решение единственное с точностью до эквивалентности в пространстве $L^1_{[0,\infty]}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно убедиться, что для функции

$$\varphi = \lim_{n\to\infty} \varphi_n$$

интеграл на $\mathbb{R}^+$ равен Q. В силу теоремы Б. Леви [36]

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^\infty \varphi_n \, d\mu = \int\limits_0^\infty \varphi \, d\mu.$$

Следовательно, достаточно установить равенство

$$\lim_{n\to\infty} y_n = Q,$$

где величины $\{y_n\}$ определены соотношениями (5.34). Очевидно, монотонно возрастающая ограниченная последовательность $\{y_n\}$ имеет предел, который обозначим y. Но этот предел совпадает с единственным корнем уравнения (5.35), который равен Q. Значит, $y = Q$ и, следовательно,

$$\int\limits_0^\infty \varphi \, d\mu = Q.$$

Итак, решение вспомогательной задачи (5.32) является решением задачи (5.31). Единственность решения вытекает из единственности решения задачи (5.32). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЯ. 5.10. Если в условии теоремы 5.3 дополнительно потребовать непрерывность функции q, то таким же свойством обладает решение уравнения (5.31).

5.11. Построенное решение уравнения (5.31) является пределом при $t \to \infty$ решения следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial f(\mu,t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \int\limits_0^\mu f(\mu - \mu_1, t) f(\mu_1, t) \, d\mu_1 - f(\mu,t) \int\limits_0^\infty f(\mu_1, t) \, d\mu_1 + q(\mu),$$

$$f(\mu, 0) = f_0(\mu) \geq 0, \quad t > 0, \quad \mu \geq 0,$$

где f_0 — произвольная суммируемая неотрицательная функция на множестве $\mathbb{R}^+$.

5.12. Вопрос об устойчивости стационарного решения для нестационарной задачи в общем случае не решен. Можно показать, что для ядра Φ, равного положительной постоянной, устойчивость имеет место. Если порядок роста ядра на бесконечности равен единице, т. е. $\Phi(\mu, .) \sim \mu$ при $\mu \to \infty$, то стационарное решение неустойчиво, ибо решение нестационарной задачи притягивается к нулю. Тождественный нуль, естественно, не удовлетворяет стационарной задаче с ненулевым источником.

5.13. Если предположить разрешимость (в классическом смысле) кинетического уравнения коагуляции при наличии стационарного источника в случае ядер с порядком роста на бесконечности большим единицы, то решение задачи Коши с нулевыми начальными условиями может быть периодическим по времени, ибо в силу оценок из [91] это решение за конечное время обращается в нуль. Однако вопрос о классических решениях пространственно однородной задачи Коши для уравнения Смолуховского с такими ядрами не изучен. Корректность этой задачи исследована в главах 1–3 для ядер с порядком роста на бесконечности не выше первого [49, 83, 88, 102].

Функциональные решения для произвольных неотрицательных симметричных ядер построены в целом в главе 7.

5.14. Решение стационарного уравнения в случае дискретной коагуляции

$$[\, S(f)\,]_i + q_i = 0$$

с неотрицательной функцией q может быть построено для ряда симметричных положительных ядер Φ на основе теоремы Брауэра [45] о неподвижных точках непрерывных преобразований конечномерного симплекса, если рассматривается задача при $1 \leq i \leq N$, [84]. Действительно, пусть функция $\Phi_{i,j} = \Phi_{j,i} > 0$, $q_i \geq 0$ и рассмотрим уравнение

$$F_N(u) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} \Phi_{i-j,j} u_{i-j} u_j - u_i \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_{i,j} u_j + q_i$$

$$1 \leq i \leq N.$$

Гладкое векторное поле F_N на $\mathbb{R}_N$ таково, что его i-я компонента неотрицательная при $u_i = 0$ $u \in \mathbb{R}_N^+$ и справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{N} F_N \leq \frac{1}{2} \min_{1 \leq i,j \leq N} \Phi_{i,j} \left(\sum_{i=1}^{N} u_i \right)^2 + \sum_{j=1}^{N} q_j .$$

Таким образом, векторное поле F_N направлено внутрь симплекса

$$C_N = \left\{ u \in \mathbb{R}_N^+ : \sum_{i=1}^{N} u_i \leq \left[\left((\min_{1 \leq i,j \leq N} \Phi_{i,j})^{-1} 2 \sum_{j=1}^{N} q_j \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}$$

на его границе. Следовательно, по теореме Брауэра существует по крайней мере одна точка в C_N, в которой $F_N(u) = 0$.

В бесконечномерном случае решение не является финитной функцией, поскольку наличие свойства сохранения обеспечивает для финитных функций равенство

$$\sum_{j=1}^{\infty} i \, [S(f)\,]_i = 0, \tag{5.36}$$

которое не выполняется на решении задачи с источником.

5.15. Наличие решений стационарного уравнения Смолуховского при действии источника обусловлено отсутствием непрерывности оператора столкновений коагуляции относительно нормы, определяемой соотношения сохранения, ибо множество финитных функций всюду плотное в этом нормированном пространстве. Но равенство (5.36), выполняющееся для финитных функций, не имеет места для решений уравнения

$$S(f) + q = 0,$$

при положительном q.

5.16. Наличие особенности ядра Φ в окрестности $\mu, \mu_1 = 0$ для коагуляции непрерывных масс может обусловить существование стационарного положительного решения при нулевом источнике. Пример такой ситуации дает ядро

$$\Phi(\mu, \mu_1) = \alpha(\mu)\alpha(\mu_1)(\mu + \mu_1)^{-3}, \quad \mu, \quad \mu_1 > 0, \quad \alpha > 0,$$

которому соответствует решение

$$f(\mu) \equiv \alpha^{-1}(\mu), \quad \mu > 0, \quad \alpha > 0,$$

для уравнения

$$S(f) = 0.$$

(Доказательство этого утверждения приведено в замечании 3.4).

5.17. Результаты теоремы 5.3 и замечания 5.13 дают возможность построения явных решений уравнения Смолуховского (0.1), обладающих свойством автомодельности, но монотонно убывающих по времени в отличие от класса, определяемого уравнением Баканова–Мартынова (3.15). (На этих решениях первый момент не сохраняется, что существенно используется в (3.15), а монотонно убывает).

Действительно, рассмотрим решение уравнения Смолуховского (0.1) в виде

$$f(x,t) = q(x)(t+1)^{-1}, \quad x,\ t \geq 0, \tag{5.37}$$

где $q(x) > 0$ при $x \geq 0$ и удовлетворяет условиям теоремы 5.3. Подставляя (5.37) в (0.1), получаем, что функция q необходимо должна удовлетворять уравнению

$$[q,q]_\Phi + q = 0, \quad x \geq 0. \tag{5.37}$$

где оператор $[.,.]_\Phi$ определен формулой (1.1). При заданном положительном q найдем симметричные неотрицательные ядра Φ, для которых (5.37) обращается в тождество, т. е. решаем обратную задачу. Рассмотрим ее решение в классе мультипликативных ядер, полагая

$$\Phi(x,y) = \alpha(x)\alpha(y), \quad x,\, y \geq 0. \tag{5.38}$$

Обозначим

$$f(x) = \alpha(x)q(x), \quad x \geq 0, \tag{5.39}$$

и подставим (5.39) в (5.37), выражая величины α и q в операторе $[.,.]_\Phi$ через неизвестную f. Тем самым получаем уравнение

$$[f,f]_1 + q = 0, \quad x \geq 0, \tag{5.40}$$

которое совпадает с уравнением (5.31), исследованным в теореме 5.3. Следовательно, для рассматриваемых положительных q существует единственное положительное решение уравнения (5.40) f и, значит, ядро Φ отыскивается по формулам (5.38), (5.39).

Класс построенных мультипликативных ядер можно расширить за счет замечания 5.15, добавляя к мультипликативному ядру функцию

$$\bar{\Phi}(x,y) = \frac{1}{q(x)q(y)(x+y)^3}, \quad x,\, y > 0,$$

поскольку справедливо тождество

$$[q,q]_{\bar{\Phi}} = 0, \quad x > 0,$$

и, соответственно,

$$[q,q]_{\bar{\Phi}+\Phi} + q = 0, \quad x > 0.$$

§ 6. Прямое моделирование процесса коагуляции

Теперь рассмотрим модель коагуляции, которая описывает процесс коагуляции на уровне взаимодействия (слияния) частиц системы.

Пусть в системе имеется N частиц, пронумерованных натуральными числами от 1 до N. Каждая из частиц имеет массу $x_i \geq 0$. Состояние системы в момент t задается вектором $(x_1(t), \ldots, x_N(t))$. Определим состояние, в котором будет находиться система по прошествии времени τ, где τ — шаг по времени. Пусть за промежуток времени $\tau > 0$ в системе коагулирует не более одной пары частиц. Определим эту пару, претендующую на последующую коагуляцию, случайным образом, предполагая, что вероятность выбора для каждой пары частиц одинаковая.

Пусть выбраны частицы с номерами i и j. С вероятностью P позволяем этим частицам слиться в частицу суммарной массы (акт коагуляции), и с дополнительной вероятностью $(1-P)$ частицы не коагулируют. Вероятность P связана с ядром $\Phi(x,y)$, фигурирующем в уравнении Смолуховского (0.1), числом частиц N и шагом τ следующим образом:

$$P = \tau(N)N\Phi(x_i,x_j), \quad P < 1, \tag{5.41}$$

где запись $\tau(N)$ означает, что шаг по времени τ в рассматриваемой модели зависит от числа частиц N. (Отметим, что (5.41) задает ограничение на шаг по времени).

Если слияние состоялось, то из i-й и j-й частиц образовалась частица с массой $x_i(t)+x_j(t)$. Частица с такой массой получает номер наибольший из i и j. Частице с наименьшим из i иj номером в момент $(t+\tau)$ присваивается масса, равная нулю. Таким образом, если в момент времени t система задавалась вектором $(x_1(t),\ldots,x_N(t))$, то в момент $(t+\tau)$, при выборе i-й и j-й частиц в качестве кандидатов на коагуляцию, состояние системы определяется вектором

$$(x_1(t+\tau),\ldots,x_N(t+\tau)) =$$

$$= \begin{cases} x_1(t), x_2(t),\ldots, 0,\ldots, x_i(t)+x_j(t),\ldots, x_N(t)), \\ (x_1(t),\ldots, x_N(t)), \end{cases} \tag{5.42}$$

где первое значение вектора принимается с вероятностью P, а второе — с вероятностью $1-P$. Здесь 0 стоит на i-м месте, а $x_i(t)+x_j(t)$ на j-м месте при $i<j$.

Очевидно, что в начальный момент времени $t{=}0$ общая масса системы вычисляется следующим образом:

$$M = \sum_{i=1}^{N} x_i(0).$$

Относительное число частиц системы, соответствующее, нулевому моменту $\sigma_0 = \int\limits_0^\infty u(x,t)\,dx$ для уравнения Смолуховского (где переменная x — масса), вычисляется по формуле

$$N_{отн} = \frac{1}{N}\sum_{i:\, x_i>0} 1$$

Относительную массу системы, соответствующую первому моменту $\sigma_1 = \int\limits_0^\infty x(t)u(x,t)\,dx$ для уравнения Смолуховского (0.1), определим соотношением

$$M_{отн} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i.$$

Рассмотрим важное свойство описанной модели.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Будем новорить, что коагулирующая система (5.41)–(5.43) обладает свойством хаоса, если для любых борелевых множеств $A_i \subset \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, N$, выполнено условие независимости компонент случайного вектора x

$$P(\bigcap_{i=1}^{N}\{x_i \in A_i\}) = \prod_{i=1}^{N} P\{x_i \in A_i\}. \tag{5.44}$$

ТЕОРЕМА 5.4. *Если в момент времени t в в коагулирующей системе* (5.41)–(5.43) *имеется хаос, то в момент времени* $(t+\tau)$ *хаос сохраняется. Таким образом, модель* (5.41)–(5.43) *сохраняет свойство хаоса.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в момент времени t система описывается вектором $(x_1(t), \ldots, x_N(t))$. Если за время τ не произошло слияния пары частиц, то из наличия хаоса в момент t следует его наличие в момент времени $(t + \tau)$.

Пусть за время τ произошло слияние k-й и j-й частиц. Без потери общности можно считать, что $j > k$. Тогда в момент $(t+\tau)$ система будет описываться вектором

$$(x_1(t), x_2(t), \ldots, 0, \ldots, x_k(t) + x_j(t), \ldots, x_N(t)),$$

где 0 стоит на k-м, а $x_k(t) + x_j(t)$ стоит на j-м месте.

Соотношение (5.44) в момент времени $(t + \tau)$ справедливо, поскольку постоянная $x_k(t + \tau) = 0$ независима с любой случайной величиной, а остальные компоненты вектора $x(t + \tau)$ попарно независмые. Значит, рассматриваемая модель процесса коагуляции сохраняет хаос во времени. Теорема доказана.

Тестирование описанной модели было проведено в [93] при для различных ядер Φ. Сравнение зависимости относительного числа частиц и высших моментов распределения частиц σ_k, $k \geq 1$, системы как функций времени, полученных в описанном вычислительном эксперименте методом Монте-Карло и аналитически из уравнения Смолуховского (0.1), показало, что ядру $\Phi(\omega, \omega_1)$ в модели Монте-Карло (5.41)–(5.43) в точности соответствует ядро $2\,\Phi(\omega, \omega_1)$ в уравнении Смолуховского (0.1), что, повидимому, связано с неразличимостью пар (i, j) и (j, i) в модели Смолуховского. При таком принципе соответствия между ядрами в уравнении (0.1) и в вычислительном эксперименте [93] наблюдалось быстрое сближение результатов моделирования с точным решениями уравнения Смолуховского (0.1). Аналогичное хорошее соответствие для широкого класса ядер и начальных данных справедливо для результатов непосредственного моделирования и расчетов, основанных на применении разностных схем (4.25) и (8.3)–(8.4).

Следует подчеркнуть, что принципиально важным моментом при проведении вычислений методом разностных схем (4.25) в случае быстро растущих ядер Φ (например, $\Phi = xy$) является использование модифицированного оператора столкновений Смолуховского S_N (см. §6 гл. 4). Если же в разностной схеме схеме (4.25) использовать операторы Смолуховского (0.5), (0.6), то при значениях времени $t > t_c$ для ядра $\Phi = xy$ приближенное решение сходится к решению задачи (5.7), но не к решению задачи (5.1) при $t > t_c$. В замечании 5.5 и в примере 5.1 отмечалось, что решение задачи (5.7) не является решением уравнения Смолуховского (0.1)!

Действительно, рассмотрим разностную схему 4.25 с правой частью (0.5). Пусть неотрицательная функция f_0 является финитной и отличной от тождественного нуля. Определим приближенное решение формулами

$$\frac{f_{n+1} - f_n}{\tau_n} = S(f_n), \quad n \geq 0,$$

где шаги сетки по времени τ_n выбираются из условия неотрицательности сеточного решения $\{f_n\}$. Тогда свойство сохранения (1.7) обеспечивает выполнение равенств

$$\int_0^\infty x f_n \, dx = \int_0^\infty x f_0 \, dx \quad n \geq 0.$$

Следовательно, приближенное решение при $\tau \to 0$ сходится к решению задачи (5.7).

Таким образом, процедура «срезки» оператора Смолуховского в разностной схеме (4.25) имеет важное значение для сходимости алгоритма к искомому решению и соответствует приближениям, основанным на прямом моделировании процесса коагуляции методом Монте-Карло (5.41)–(5.43) для исходных данных, рассмотренных в гл. 5.

Результаты прямого моделирования процесса коагуляции методом Монте-Карло (5.41)–(5.43) и их сравнение с аналитическими методами и разностными решениями дают представление о физическом смысле решения f уравнения Смолуховского (0.1) и ядра Φ.

6. Уравнения с малыми начальными данными

В ряде случаев использование специфических начальных данных u_0 в задаче Коши для уравнения больцмановского типа (4.7) позволяет установить разрешимость этой задачи в целом в классе обобщенных (соболевских) решений. В частности, этому способствует свойство локальной устойчивости решения, тождественно равного нулю (вакуума), всегда являющегося решением уравнений больцмановского типа. Ниже доказывается разрешимость в целом интегральной формы упомянутой задачи Коши в классе непрерывных функций при соблюдении специального условия согласования действия операторов S и $\mathcal{L}$. Оператор $\mathcal{L}$ считаем производящим для группы или полугруппы T_t, действие которой определим ниже.

§ 1. Функциональные пространства и условия согласования операторов столкновения и свободного переноса

Пусть Ω — локально компактное метрическое пространство,

$$\Sigma_\sigma = \{t \in \mathbb{R}_1 \,:\, 0 \le t \le \sigma\}, \quad \Sigma_\infty \overset{def}{=} \mathbb{R}_1^+ .$$

Пространство $\Omega \times \Sigma_\sigma$, $0 \le \sigma \le \infty$ снабдим топологией произведения. Обозначим $C_{b,\sigma}$, $0 \le \sigma \le \infty$, пространство ограниченных, непрерывных на $\Omega \times \Sigma_\sigma$ вещественных функций, которое снабдим нормой

$$\| \, f \, \|^\sigma = \sup_{\Omega \times \Sigma_\sigma} |f(\omega, t)|.$$

На $C_b \overset{def}{=} C_{b,0}$ введем отношение частичного порядка $\geq$, полагая $f_1 \geq f_2$, если в каждой точке $\omega \in \Omega$ выполняется неравенство

$$f_1(\omega) \geq f_2(\omega).$$

Неотрицательные функции $f \geq 0$ образуют конус C_b^+. Для функций $\varphi \in C_b$ символом $d(\varphi)$ обозначим носитель функции φ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Однопараметрическая полугруппа линейных преобразований

$$T_t : C_b \to C_b, \quad t \in \mathbb{R}_1^+$$

считается принадлежащей классу SG^+, если она оставляет инвариантным конус C_b^+ (т. е. T_t сохраняет отношение порядка $\geq$), и для каждой функции

$$f \in \bigcup_{\sigma \in \mathbb{R}_1^+} C_{b,\sigma}$$

суперпозиция $T_t \circ f(.,\tau)(\omega)$ является непрерывной функцией по совокупности аргументов $(\omega,\ \tau,\ t)$ в топологии произведения $\Omega \times \mathbb{R}_1^+ \times \mathbb{R}_1^+$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2. Однопараметрическая группа линейных преобразований

$$T_t : C_b \to C_b, \quad t \in \mathbb{R}_1$$

считается принадлежащей классу G^+, если

$$\{T_t\}_{t \in \mathbb{R}_1^+} \in SG^+, \quad \{T_{-t}\}_{t \in \mathbb{R}_1^+} \in SG^+.$$

Пусть $\{T_t\}$ принадлежит SG^+ или G^+. С положительной полуорбитой $\{T_t\varphi\}_{t \in \mathbb{R}_1^+}$ элемента $\varphi \in C_b^+$ свяжем пространства функций

$$\mathcal{B}_\sigma(\varphi) = \{f \in C_{b,\sigma} : \exists\ a(f) \in \mathbb{R}_1^+,\ |f(\omega,t)| \leq a\ T_t(\varphi)(\omega),$$

$$0 \leq t \leq \sigma,\ \omega \in \Omega\},$$

которые снабдим структурой банахова пространства посредством нормы

$$\| f \|_\varphi^\sigma = \sup_{t \in \Sigma_\sigma} \sup_{\omega \in d(T_t(\varphi))} |(T_t(\varphi)^{-1}(\omega)) f(\omega,t)|.$$

Положим $\mathcal{B}(\varphi) \overset{def}{=} \mathcal{B}_0(\varphi)$. Ограниченные шары в $\mathcal{B}_\sigma(\varphi)$ обозначим

$$B_\sigma(\varphi, r) = \{f : \| f \|_\varphi^\sigma \leq r,\ r \geq 0\}.$$

Пусть на множестве $\mathcal{D} \subset C_b$ определено отображение

$$S : \mathcal{D} \to C_b,$$

подчиненное требованиям согласования с полугруппой $\{T_t\} \in SG^+$:

$$(S_1) \qquad \exists \varphi \in C_b^+ : \bigcup_{t \in \mathbb{R}_1^+} \mathcal{B}_\sigma(T_t(\varphi)) \subset \mathcal{D};$$

при каждом значении $t \geq 0$ отображение $S : \mathcal{B}_\sigma(T_t(\varphi)) \to \mathcal{B}_\sigma(T_t(\varphi))$ является локально липшиц-непрерывным, т. е.

$$(S_2) \qquad \sup_{u,v \in B_0(T_t\varphi, r)} \| S(u) - S(v) \|_{T_t\varphi}^0 \, (\| u - v \|_{T_t\varphi}^0)^{-1} = L(r,t) < \infty;$$

при значениях аргументов $r \geq 0,\ t \geq 0$;

$$(S_3) \qquad S(0) = 0.$$

§ 2. Формулировка основных результатов

На фазовом пространстве C_b рассматривается уравнение (аналог интегральной формы пространственно неоднородной задачи Коши для уравнения больцмановского типа)

$$f_t = T_t f^{(0)} + \int_0^t T_{t-\tau} \circ S(f_\tau) d\tau, \quad t \geq 0,\ f_t \overset{def}{=} f(.,t). \tag{6.1}$$

.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.3. Назовем решением уравнения (6.1) непрерывную при $t \geq 0$, $\omega \in \Omega$ функцию $f(\omega, t)$, обращающую (6.1) в тождество.

В следующей теореме устанавливаются условия, обеспечивающие однозначную разрешимость уравнения (6.1) при всех $t \geq 0$, когда оператор S и полугруппа $\{T_t\}_{t\in\mathbb{R}^+} \in SG^+$ согласованы посредством условий (S_1), (S_2), (S_3).

ТЕОРЕМА 6.1. *Пусть однопараметрическая полугруппа*

$$\{T_t\}_{t\in\mathbb{R}_1^+} \in SG^+$$

и оператор S удовлетворяют требованиям $(S_1), (S_2), (S_3)$, причем локальная постоянная Липшица $L(r,t)$ в условии (S_2) мажорируется при $r \geq 0$, $t \geq 0$ функцией $q(r,t)$, суммируемой по $t \in \mathbb{R}_1^+$ при каждом значении параметра $r \geq 0$. Если для любой функции $f \in \mathcal{B}_\sigma(\varphi)$ суперпозиция $S(f)$ принадлежит $\mathcal{B}_\sigma(\varphi)$ $\forall\sigma \geq 0$, то для каждого $r \geq 0$ можно указать неотрицательные числа r_0, δ такие, что в случае $f^{(0)} \in B_0(T_\delta\varphi, r_0)$ уравнение (6.1) *имеет единственное решение $f \in B_\infty(T_\delta\varphi, r)$. Связь между величинами r, r_0, δ может быть задана соотношениями*

$$\lambda = \int_\delta^{+\infty} q(r,\tau)d\tau < 1, \quad r_0 \leq r(1-\lambda), \quad r,\ r_0,\ \delta \in \mathbb{R}_1^+. \tag{6.2}$$

ТЕОРЕМА 6.2. *Пусть в дополнение к условиям теоремы* 6.1 *однопараметрическая группа $\{T_t\}_{t\in\mathbb{R}} \in G^+$, а оператор S удовлетворяет требованию*

$$(S_4) \qquad \forall\sigma, r \in \mathbb{R}_1^+ \quad \exists h(\sigma,r) \in \mathbb{R}_1^+ :\ S(f) + fh \geq 0,$$

$$\forall f \geq 0, \quad f \in \bigcup_{0\leq t\leq\sigma} B_0(T_t\varphi, r).$$

Тогда решение уравнения (6.1), *указанное в теореме* 6.1, *является неотрицательным при всех $t \geq 0$, если функция $f^{(0)} \geq 0$.*

ПРИМЕР 6.1. (Кинетическое уравнение Больцмана для псевдомаксвелловских молекул). Пусть пространство аргументов

$$\Omega = \{(v,x) : v \in \mathbb{R}_3, \ \ x \in \mathbb{R}_3\} = \mathbb{R}_6.$$

Однопараметрическая группа $\{T_t^a\}_{t\in\mathbb{R}_1}$, $a \in \mathbb{R}_3$, задана следующим соотношением:

$$T_t^a(f)(v,x) = f(v + at, x - vt - \frac{1}{2}at^2), \quad a \in \mathbb{R}_3, \quad f \in C_b.$$

Группа $\{T_t^a\}$ соответствует движению частиц единичной массы в $\mathbb{R}_3$ под действием постоянной силы с потенциалом (a, x)

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = -a.$$

Больцмановский оператор столкновений частиц определен формулой (0.4).

Для того, чтобы удовлетворить теореме 6.1, примем требования:

1^o функция Φ, определяющая интенсивность столкновений частиц, ограничена и непрерывна;

2^o $\varphi(v,x) = \exp\left[-\alpha(x - v\beta - \frac{1}{2}a\beta^2)^2\right]$, где α, β — положительные числа.

Действие однопараметрической группы свободного переноса частиц T_t^a на функцию φ определено формулой

$$T_t\varphi = \exp\left[-\alpha\left(x - v(t+\beta) - \frac{1}{2}a(t+\beta)^2\right)^2\right]. \tag{6.3}$$

Проверим выполнение условий согласования, накладываемых на оператор столкновений и группу свободного переноса. Непосредственно из формулы (6.3) следует, что группа свободного переноса сохраняет отношение порядка на C_b. Для каждой функции

$$f \in \bigcup_{\sigma \in \mathbb{R}_1^+} C_{b,\sigma}$$

суперпозиция $T_t(f(.,.,\tau))(v,x)$ является непрерывной функцией аргументов v, x, t, τ. Таким образом, группа $\{T_t^a\} \in G^+$.

Для $\varphi \in C_b^+$, определенной соотношением 2^o, банаховы пространства $\mathcal{B}_\sigma(\varphi)$ приобретают следующее конкретное содержание:

$$\mathcal{B}_\sigma(\varphi) = \left\{ f \in C_{b,\sigma} : \| f \|_\varphi^\sigma = \sup_{\substack{0 \le t \le \sigma, \\ (v,x) \in \mathbb{R}_6}} |f(v,x,t)| \times \right.$$
$$\left. \times \exp\left[\alpha\left(x - v(t+\beta) - \frac{1}{2}a(t+\beta)^2\right)^2\right] < \infty \right\},$$

т. е. функции из $\mathcal{B}_\sigma(\varphi)$ удовлетворяют оценке

$$|f(v,x,t)| \leq K \exp\left[-\alpha\left(x - v(t+\beta) - \frac{1}{2}a(t+\beta)^2\right)^2\right],$$

где K — неотрицательная постоянная. Принимая требования 1^o, 2^o, проверим условия согласования (S_1), (S_2), (S_3).

Поскольку пространства $\mathcal{B}_\sigma(T_t^a\varphi)$ состоят из функций, принадлежащих области определения оператора столкновений Больцмана S_B, то условие (S_1) выполнено.

Перейдем к проверке условия (S_2). Пусть u, $v \in \mathcal{B}_\sigma(T_t^a\varphi)$, т. е.

$$|u|,\ |v| \leq K \exp\left[-\alpha\left(x - v(t+\beta) - \frac{1}{2}a(t+\beta)^2\right)^2\right],$$

где K — неотрицательная постоянная. В силу выполнения законов сохранения полного импульса и кинетической энергии при столкновении пары частиц имеем

$$v' + v_1' = v + v_1, \quad v'^{\,2} + v_1'^{\,2} = v^2 + v_1^2, \tag{6.4}$$

откуда следует тождество

$$T_t^a(\varphi)|_{(v',x)} T_t^a(\varphi)|_{(v_1',x)} = T_t^a(\varphi)|_{(v,x)} T_t^a(\varphi)|_{(v_1,x)}.$$

Значит, для $u \in \mathcal{B}_\sigma(T_t^a\varphi)$ выполняется оценка

$$|S_B(u)|_{(v,x)}| \leq 8\pi M \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left[-\alpha\left(x - v_1(t+\beta) - \frac{1}{2}a(t+\beta)^2\right)^2\right] dv_1 \times$$

$$\times \exp\left[-\alpha\left(x - v(t+\beta) - \frac{1}{2}a(t+\beta)^2\right)^2\right] (\| u \|^0_{T_t\varphi})^2,$$

где $M = \sup|\Phi|$. Выполняя интегрирование, получаем

$$|S_B(u)|_{(v,x)}| \leq \frac{8\pi^{5/2} M \alpha^{-3/2}}{(t+\beta)^3} \times$$

$$\times\ \exp\left[-\alpha\left(x - v(t+\beta) - \frac{1}{2}a(t+\beta)^2\right)^2\right] (\| u \|^0_{T_t\varphi})^2,$$

следовательно,

$$\sup_{u,v\in B_0(T_t\varphi,r)} \| S_B(u) - S_B(v) \|^0_{T_t\varphi} \, [\, \| u - v \|^0_{T_t\varphi} \,]^{-1} \leq \tag{6.5}$$

$$\leq \frac{16\pi^{5/2} M\alpha^{-3/2} r}{(t+\beta)^3} = L(r,t).$$

Таким образом, отображение

$$S_B : \mathcal{B}(T_t\varphi) \to \mathcal{B}(T_t\varphi)$$

является локально липшиц-непрерывным и выполняется условие (S_2). Очевидно, $S_B(0) = 0$, т. е. справедливо условие (S_3). Итак, условия согласования S_B и T_t^a имеют место. Локальная постоянная Липшица оператора S_B

$$L(r,t) = \frac{16\pi^{5/2} M\alpha^{-3/2} r}{(t+\beta)^3}, \quad t \geq 0$$

обладает всеми свойствами, указанными в условии теоремы 6.1.

Остановимся на проверке последнего требования теоремы 6.1, связанного с принадлежностью функции $S_B(f)$ пространству $\mathcal{B}_\sigma(\varphi)$, если f находится в том же пространстве. В силу оценки (6.5) для $f \in \mathcal{B}_\sigma(\varphi)$ справедливо неравенство

$$\sup_{0\leq t\leq\sigma} |S_B(f(.,x,t))(v)| [\, T_t(\varphi) \,]^{-1} \leq 8\pi^{5/2} M\alpha^{-3/2}\beta^{-3} \| f \|^\sigma_\varphi < \infty. \tag{6.6}$$

Следовательно, осталось убедиться в непрерывности суперпозиции $S_B(f(.,x,t))(v)$ по тройке аргументов $(v,x,t) \in \mathbb{R}_3 \times \mathbb{R}_3 \times \Sigma_\sigma$. Отметим, что из требования непрерывности $\Phi(v,v_1,q)$ и f вытекает непрерывность подынтегрального выражения в формуле для значения оператора $S_B(f)$. Для доказательства непрерывности упомянутых интегралов по (v,x,t) достаточно установить их равномерную сходимость относительно изменения этих параметров на компактах в $\mathbb{R}_3 \times \mathbb{R}_3 \times \Sigma_\sigma$. Для функций $f \in \mathcal{B}_\sigma(\varphi)$ справедлива оценка

$$|f(v,x,t)| \leq K \exp(-\gamma v^2), \quad \| x \|_{\mathbb{R}_3} \leq X, \quad t \in \Sigma_\sigma, \tag{6.7}$$

где постоянные K, $\gamma > 0$ определяются значениями величин

$$\| f \|^\sigma_\varphi, \quad \alpha, \quad \beta, \quad a, \quad \sigma, \quad X.$$

Таким образом, подынтегральное выражение в операторе столкновений Больцмана оценивается при $\| x \|_{\mathbb{R}_3} \leq X$, $t \in \Sigma_\sigma$ следующим выражением:

$$K\,[\exp(-\gamma v'^{\,2})\exp(-\gamma v_1'^{\,2}) + \exp(-\gamma v^2)\exp(-\gamma v_1^2)],$$

где K — неотрицательная постоянная, а аргументы

$$v,\ v_1 \in \mathbb{R}_3, \quad \| x \|_{\mathbb{R}_3} \leq X, \quad t \in \Sigma_\sigma.$$

Итак,

$$\Big| \qquad \int\limits_{\substack{\|v_1\|_{\mathbb{R}_3} \geq R,\\ \|\theta\|_{\mathbb{R}_3}=1}} \int W(v, v_1, \theta)\,[f(v', x, t)\,f(v_1', x, t) -$$

$$- f(v, x, t)\,f(v_1, x, t)]\;dv_1 d\theta\;\Big| \leq$$

$$\leq C\exp(-\gamma v^2) \int\limits_{\|v_1\|_{\mathbb{R}_3} \geq R} \exp(-\gamma v_1^2)\,dv_1,$$

$$\| x \|_{\mathbb{R}_3} \leq X, \quad t \in \Sigma_\sigma$$

с некоторой постоянной C. Поскольку

$$\int\limits_{\|v_1\|_{\mathbb{R}_3} \geq R} \exp(-\gamma v_1^2) dv_1 \to 0, \quad R \to \infty,$$

то интегралы в выражении для оператора столкновений Больцмана сходятся равномерно относительно изменения параметров (v, x, t) на компактах в $\mathbb{R}_3 \times \mathbb{R}_3 \times \Sigma_\sigma$, поэтому делаем заключение о непрерывности суперпозиции $S_B(f(., x, t)(v)$ по указанным аргументам. Сочетая это утверждение с оценкой (6.6), устанавливаем принадлежность суперпозиции $S_B(f)$ пространству $\mathcal{B}_\sigma(\varphi)$, если в этом пространстве находится функция f. Итак, полагая в соответствии с обозначениями теоремы 6.1

$$q(r, t) = \frac{16\pi^{5/2} M \alpha^{-3/2} r}{(t+\beta)^3},$$

можно воспользоваться ее результатом для уравнения Больцмана в интегральной форме, которое однозначно разрешимо в $\mathcal{B}_\infty(\varphi)$, если имеют место условия $1^o, 2^o$. При этом начальная функция $f^{(0)}$ удовлетворяет неравенству

$$|f^{(0)}| \le r_0 \exp\left[-\alpha(x - v\beta - a\beta^2/2)^2\right],$$

где связь между постоянными выбирается из соотношения

$$\lambda = 8\pi^{5/2} M \alpha^{-3/2} r \beta^{-2} < 1, \quad r_0 \le r(1-\lambda) \quad \forall r \ge 0.$$

На решении уравнения Больцмана выполняется оценка

$$|f(v,x,t)| \le r \exp\left[-\alpha\left(x - v(t+\beta) - \frac{1}{2}a(t+\beta\right)^2)^2\right],$$

$$t \ge 0, \quad v \in \mathbb{R}_3, \quad x \in \mathbb{R}_3.$$

Если дополнительно предположить, что функция $\Phi \ge 0$, то неотрицательной начальной функции соответствует неотрицательное единственное решение интегрального уравнения Больцмана при всех $t \ge 0$ (утверждение теоремы 6.2).

Впервые утверждения такого типа для уравнения Больцмана кинетической теории газов были получены Bellomo и Toskani [65].

§ 3. Свойства интегрального оператора, определенного правой частью нелинейного вольтерровского уравнения

Нижеследующее доказательство теоремы 6.1 основано на рассмотрении отображения

$$\Phi : \mathcal{B}_\sigma(\varphi) \to \mathcal{B}_\sigma(\varphi),$$

определенного формулами

$$\psi = \Phi(f),$$

$$\psi_t = T_t f^{(0)} + \int_0^t T_{t-\tau} \circ S(f_\tau)\, d\tau, \quad 0 \le t \le \sigma. \tag{6.8}$$

Отметим здесь важность требований теоремы 6.1 о принадлежности суперпозиции $S(f)$ пространству $\mathcal{B}_\sigma(\varphi)$, ибо в этом случае f

является непрерывной ограниченной функцией из $C_{b,\sigma}$, а в силу требований на T_t суперпозиция $T_{t-\tau} \circ S(f_\tau)$ — непрерывная функция. Пусть $K(\omega_0)$ — компактная окрестность точки $\omega_0 \in \Omega$. Таким образом, $T_{t-\tau} \circ S(f_\tau(.))(\omega)$ является равномерно непрерывной функцией на компакте

$$K(\omega_0) \times \{(\tau, t) : 0 \le \tau \le t, \quad t \in \Sigma\}.$$

Значит, интеграл

$$\int_0^t T_{t-\tau} \circ S(f_\tau(.))(\omega)\, d\tau$$

является непрерывной функцией параметров (ω, t), т. е. значения оператора Φ лежат в пространстве непрерывных функций по аргументам $(\omega, t) \in \Omega \times \Sigma_\sigma$. Покажем теперь, что $\Phi(f) \in \mathcal{B}_\sigma(\varphi)$. Для этого воспользуемся тем, что $S(f) \in \mathcal{B}_\sigma(\varphi)$, т. е. имеет место оценка

$$|S(f_\tau)| \le \| S(f) \|_\varphi^\sigma T_\tau(\varphi), \quad 0 \le \tau \le \sigma.$$

Поскольку $\{T_t\} \in SG^+$, то из предыдущего неравенства следует

$$|T_{t-\tau} \circ S(f_\tau)| \le C T_{t-\tau} \circ T_\tau(\varphi) = C T_t(\varphi), \quad 0 \le t \le \sigma$$

с некоторой постоянной C. Интегрируя по времени, получаем

$$|\int_0^t T_{t-\tau} \circ S(f_\tau)\, d\tau| \le C T_t(\varphi), \quad 0 \le t \le \sigma,$$

откуда вытекает оценка

$$\sup_{\substack{0 \le t \le \sigma, \\ \omega \in d(T_t \varphi)}} [\, T_t(\varphi)\,]^{-1} |\int_0^t T_{t-\tau} \circ S(f_\tau)\, d\tau| \le C,$$

означающая, что $\Phi(f) \in \mathcal{B}_\sigma(\varphi)$.

ЛЕММА 6.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 6.1. *Если*

$$f^{(0)} \in B_0(T_\delta(\varphi), r_0), \quad f \in B_\sigma(T_\delta(\varphi), r), \quad \delta \ge 0,$$

то для функции $\psi = \Phi(f)$ *справедливо неравенство*

$$\| \psi \|^{\sigma}_{T_\delta(\varphi)} \le r_0 + r \int\limits_0^{\sigma} q(r, \tau + \delta)\, d\tau, \tag{6.9}$$

и, следовательно, при выполнении соотношений (6.2) *шар* $B_\infty(T_\delta(\varphi), r)$ *инвариантен относительно отображения* Φ *для начальной функции* $f^{(0)} \in B_0(T_\delta(\varphi), r_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу формулы (6.8) имеем

$$|\psi_t| \le T_t(|f^{(0)}|) + \int\limits_0^t T_{t-\tau} \circ |S(f)|\, d\tau, \quad 0 \le t \le \sigma. \tag{6.10}$$

Условия леммы гарантируют выполнение неравенств

$$\begin{cases} |f^{(0)}| \le r_0\, T_\delta(\varphi), \\ |f_\tau| \le r\, T_{\tau+\delta}(\varphi), \quad 0 \le \tau \le \sigma. \end{cases} \tag{6.11}$$

Сочетая (S_2), (S_3), получаем

$$\sup_{u \in B_0(T_t\varphi, r)} \| S(u) \|^0_{T_t\varphi}\, [\, \| u \|^0_{T_t\varphi}]^{-1} \le L(r, t) \le q(r, t), \quad r \ge 0,\ t \ge 0.$$

Заменяя в этом неравенстве функцию φ на $T_\delta\varphi$, имеем

$$\| S(u) \|^0_{T_t T_\delta\varphi} \le q(r, t + \delta)\, \| u \|^0_{T_t T_\delta \varphi}\, .$$

Применим это неравенство к функции $f \in B_\sigma(T_\delta(\varphi), r)$ и, таким образом,

$$|S(f_\tau)| \le q(r, \tau + \delta)\, \| f \|^0_{T_t T_\delta\varphi}\, T_{\tau+\delta}(\varphi), \quad 0 \le \tau \le \sigma.$$

Поскольку

$$\| f \|^0_{T_\tau T_\delta\varphi} \le r, \quad 0 \le \tau \le \sigma,$$

ибо $f \in B_\sigma(T_\delta(\varphi), r)$, то

$$|S(f_\tau)| \le q(r, \tau + \delta)\, r\, T_{\tau+\delta}(\varphi), \quad 0 \le \tau \le \sigma.$$

Сочетая это неравенство с (6.10) и (6.11), имеем

$$|\psi_t| \le r_0\, T_t(T_\delta(\varphi)) + \int\limits_0^t T_{t-\tau}\left[q(r,\tau+\delta) r T_{\tau+\delta}(\varphi)\right] d\tau$$

и, значит,

$$|\psi_t| \le T_{t+\delta}(\varphi)\left[r_0 + r\int\limits_0^t q(r,\tau+\delta)\,d\tau\right], \quad 0 \le t \le \sigma.$$

Воспользовавшись определением $\|\,\psi\,\|^{\sigma}_{T_\delta\varphi}$, получаем

$$\|\,\psi\,\|^{\sigma}_{T_\delta\varphi} \le r_0 + r\int\limits_0^\sigma q(r,\tau+\delta)\,d\tau, \quad \delta,\ \sigma \ge 0. \tag{6.12}$$

Этим неравенством обосновывается первая часть утверждения леммы. Устремляя значения параметра $\sigma \to +\infty$ в соотношении (6.12), приходим к оценке

$$\|\,\psi\,\|^{\infty}_{T_\delta\varphi} \le r_0 + r\int\limits_0^\infty q(r,\tau+\delta)\,d\tau = r_0 + r\lambda.$$

Подчиним величины r, r_0, λ требованиям теоремы 6.1, вследствие чего предыдущее неравенство переходит в неравенство

$$\|\,\psi\,\|^{\infty}_{T_\delta\varphi} \le r,$$

что означает $\Phi(f) \in B_\infty(T_\delta(\varphi), r)$, если $f \in B_\infty(T_\delta(\varphi), r)$. Таким образом, шар $B_\infty(T_\delta(\varphi), r)$ инвариантен относительно Φ. Лемма доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 6.1

Для доказательства воспользуемся результатом леммы 6.1. Выполнение условий (6.2) обеспечивает инвариантность шара $B_\infty(T_\delta(\varphi), r)$ относительно отображения Φ. Установим, что указанные условия обеспечивают сжатость отображения Φ на метрическом пространстве $B_\infty(T_\delta(\varphi), r)$. Для произвольных $u, v \in B_\infty(T_\delta(\varphi), r)$ справедливо неравенство

$$|\Phi(u)_{|_t} - \Phi(v)_{|t}| \leq \int\limits_0^t T_{t-\tau}\left[|S(u)_{|\tau} - S(v)_{|\tau}|\right] d\tau, \quad 0 \leq t < \infty. \quad (6.13)$$

Учитывая,что для $u,\, v \in B_\infty(T_\delta(\varphi), r)$ выполняется оценка

$$\max\{|u_\tau|, |v_\tau|\} \leq r\, T_{\tau+\delta}(\varphi), \quad 0 \leq \tau < +\infty,$$

имеем

$$u_\tau,\ v_\tau \in B_0(T_{\tau+\delta}(\varphi), r), \quad \tau \in \mathbb{R}_1^+.$$

Применяя условие (S_2), получаем

$$\|\, S(u_\tau) - S(v_\tau)\, \|^0_{T_{\tau+\delta}(\varphi)}\, [\|\, u_\tau - v_\tau\, \|^0_{T_{\tau+\delta}(\varphi)}]^{-1} \leq L(r, \tau+\delta) \quad (6.14)$$

и, следовательно,

$$|S(u_\tau) - S(v_\tau)| \leq \|\, u_\tau - v_\tau\, \|^0_{T_{\tau+\delta}(\varphi)}\, q(r, \tau+\delta) T_{\tau+\delta}(\varphi), \quad 0 \leq \tau < +\infty.$$

Усилим за счет этого соотношения неравенство (6.13):

$$|\Phi(u)_{|_t} - \Phi(v)_{|_t}| \leq T_{\tau+\delta}(\varphi) \int\limits_0^t \|\, u_\tau - v_\tau\, \|^0_{T_{\tau+\delta}(\varphi)}\, q(r, \tau+\delta)\, d\tau, \quad (6.15)$$

$$0 \leq t < \infty.$$

Поскольку

$$\|\, u_\tau - v_\tau\, \|^0_{T_{\tau+\delta}(\varphi)} \leq \sup_{\tau \in \mathbb{R}^+} \|\, u_\tau - v_\tau\, \|^0_{T_{\tau+\delta}(\varphi)} \stackrel{def}{=} \|\, u - v\, \|^\infty_{T_\delta(\varphi)},$$

то выполняются оценки

$$|\Phi(u)_{|_t} - \Phi(v)_{|_t}| \leq T_{\tau+\delta}(\varphi)\, \|\, u - v\, \|^\infty_{T_\delta(\varphi)} \int\limits_0^t q(r, \tau+\delta)\, d\tau, \quad 0 \leq t < \infty$$

следовательно,

$$\| \Phi(u) - \Phi(v) \|^{\infty}_{T_\delta(\varphi)} \leq \| u - v \|^{\infty}_{T_\delta(\varphi)} \int\limits_{\delta}^{+\infty} q(r,\tau)\, d\tau = \lambda \| u - v \|^{\infty}_{T_\delta(\varphi)} .$$

Условие (6.2) гарантирует, что постоянная $\lambda < 1$, т. е. отображение

$$\Phi : \ B_\infty(T_\delta(\varphi), r) \to B_\infty(T_\delta(\varphi), r)$$

— сжимающее. Итак, уравнение (6.1) имеет единственное решение в $B_\infty(T_\delta(\varphi), r)$, если выполнены условия теоремы 6.1. Очевидно, это решение единственное в классе функций $\mathcal{B}_\infty(T_\delta(\varphi))$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Решение уравнения (6.1) при выполнении условий теоремы 6.1 может быть найдено как предел последовательных приближений

$$f = \lim_{n\to\infty} f^{(n)},$$

$$f_t^{(n+1)} = T_t f^{(0)} + \int\limits_0^t T_{t-\tau} \circ S(f_\tau^{(n)})\, d\tau, \quad t \geq 0, \ n \geq 0,$$

где начальное приближение $f^{(0)}$ — произвольная функция из $B_\infty(T_\delta(\varphi), r)$; в частности, для вычислений удобно положить начальное приближение совпадающим с начальными данными в интегральном уравнении (6.1).

§ 5. Неотрицательные решения интегрального уравнения. Доказательство теоремы 6.2

Для построения неотрицательных решений задачи (6.1), указанных в теореме 6.1, докажем следующую лемму.

ЛЕММА 6.2. *Пусть положительные числа r_0, r связаны соотношением $r_0 < r$. Тогда для $f^{(0)} \in B_0(T_\delta(\varphi), r_0)$ отображение*

$$\Phi : B_\sigma(T_\delta(\varphi), r) \to B_\sigma(T_\delta(\varphi), r), \quad \delta > 0$$

является сжимающим при достаточно малом положительном числе $\sigma(r, r_0, \delta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства леммы воспользуемся оценкой (6.3) при $0 \le t \le \sigma$, предполагая, что функции

$$u,\ v \in B_\sigma(T_\delta(\varphi), r).$$

Таким образом,

$$|\Phi(u)_{|_t} - \Phi(v)_{|_t}| \le T_{\tau+\delta}(\varphi) \int\limits_0^t \| u_\tau - v_\tau \|^0_{T_{\tau+\delta}(\varphi)}\, q(r, \tau+\delta)\, d\tau, \quad (6.16)$$

$$0 \le t < \infty.$$

Величину $\sigma > 0$ выберем так, чтобы отображение подчинялось требованию

$$\Phi :\ B_\sigma(T_\delta(\varphi), r) \to B_\sigma(T_\delta(\varphi), r).$$

Существование такого $\sigma(r, r_0, \delta)$ обеспечивается оценкой

$$\| \Phi(u) \|^\sigma_{T_\delta(\varphi)} \le r_0 + r \int\limits_0^\sigma q(r, \tau+\delta)\, d\tau,$$

установленной в лемме 6.1. Действительно, по условию леммы 6.2 $r_0 < r$ и, значит, при достаточно малом $\sigma(r, r_0, \delta) > 0$ выполнено неравенство

$$r_0 + r \int\limits_0^\sigma q(r, \tau+\delta)\, d\tau \le r,$$

что обеспечивает инвариантность шара $B_\sigma(T_\delta(\varphi), r)$ относительно отображения Φ. Для такого выбора $\sigma(r, r_0, \delta)$ достаточно удовлетворить неравенству

$$\int\limits_0^\sigma q(r, \tau+\delta)\, d\tau \le \left(1 - \frac{r_0}{r}\right).$$

В этом случае из (6.16) следует соотношение

$$\| \Phi(u) - \Phi(v) \|_{T_\delta(\varphi)}^{\sigma(r,r_0,\delta)} \leq \lambda \| u - v \|_{T_\delta(\varphi)}^{\sigma(r,r_0,\delta)}, \quad 0 \leq \lambda < 1,$$

обеспечивающее сжатость Φ на $B_\sigma(T_\delta(\varphi), r)$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. Для доказательства леммы 6.2 достаточно вместо суммируемости функции q по переменной $\tau \in \mathbb{R}^+$ потребовать ее локальную суммируемость.

СЛЕДСТВИЕ 6.1. *При выполнении условий теоремы* 6.1 *для любой функции* $f^{(0)} \in \mathcal{B}(T_\tau(\varphi))$ *уравнение* (6.1) *имеет единственное решение* $f \in \mathcal{B}_\sigma(T_\tau(\varphi))$, *где* σ *— достаточно малое положительное число. В этом случае достаточно требовать лишь локальную суммируемость функции* q.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.2. Достаточно установить локальное сохранение свойства положительности решения при положительных значениях времени t, ибо сочетание свойства локального наследования неотрицательности с результатом теоремы 6.1 позволяет утверждать неотрицательность решения в целом при всех $t \geq 0$.

Рассмотрим оператор

$$\tilde{S} : B_0(T_t(\varphi), r) \to \mathcal{B}(T_t(\varphi)), \quad 0 \leq t \leq \sigma,$$

определенный формулой

$$\tilde{S}(f) = S(|f|) + |f|h - fh,$$

где постоянная h выбрана для семейства шаров

$$\bigcup_{0 \leq t \leq \sigma} B_0(T_t(\varphi), r)$$

в соответствии с условием (S_4). Рассмотрим вопрос о разрешимости уравнения

$$f_t = T_t f^{(0)} + \int_0^t T_{t-\tau} \circ \tilde{S}(f_\tau)\, d\tau, \quad t \geq 0 \tag{6.17}$$

на $B_\sigma(\varphi, r)$ при достаточно малом положительном σ и $\| f^{(0)} \|_\varphi < r$. Для этой цели воспользуемся следствием 6.1 в случае операторов, у которых постоянная Липшица в условии (S_2) на $B_0(T_t(\varphi), r)$ оценивается величиной $L(r,t) + 2h$, где $L(r,t)$ — локальная постоянная

Липшица оператора S на указанном шаре. Таким образом, учитывая требования теоремы 6.1 на оператор S, заключаем, что $\tilde{S}$ имеет на $B_0(T_t(\varphi), r)$ постоянную Липшица, локально суммируемую на $\mathbb{R}^+$. В силу следствия к лемме 6.2 при любой функции

$$f^{(0)} \in \mathcal{B}(T_\tau(\varphi)), \quad \tau \geq 0$$

уравнение (6.17) имеет единственное решение $f \in \mathcal{B}_\sigma(T_\tau(\varphi))$, где σ — достаточно малое положительное число. В частности, если $r_0 < r$, то при достаточно малом $\sigma > 0$ решение $f \in B_\sigma(T_\tau(\varphi), r)$, если $f^{(0)} \in B_0(T_\tau(\varphi), r_0)$. По условию (S_4), входящему в требования теоремы 6.2, в этом случае справедливо соотношение

$$S(|f_t|) + |f_t|h \geq 0, \quad 0 \leq t \leq \sigma. \tag{6.18}$$

Из тождества (6.16), выполняющегося при $0 \leq t \leq \sigma$, следует, что

$$T_{-t}(f_t) + h\int_0^t T_{-\tau}(f_\tau)\,d\tau = f^{(0)} + \int_0^t T_{-\tau}\left[\,S(|f_\tau|) + |f_\tau|h\,\right]\,d\tau, \quad t \geq 0.$$

В силу (6.18) подынтегральное выражение справа неотрицательное, а все суперпозиции под символом интегралов непрерывные. Значит,

$$T_{-t}(f_t) \geq f^{(0)}\exp(-ht), \quad t \geq 0$$

и потому

$$f_t \geq T_t f^{(0)}\exp(-ht), \quad t \geq 0.$$

Правая часть последнего неравенства неотрицательная, если $f^{(0)} \geq 0$. Итак, на построенном решении уравнения (6.17) справедливо тождество $|f_t| \equiv f_t$, из которого следует $\tilde{S}(f_t) \equiv S(f_t)$, $0 \leq t \leq \sigma$. Значит, решение уравнения (6.17) совпадает с решением уравнения (6.1) при $0 \leq t \leq \sigma$, которое, таким образом, является неотрицательным. Теорема доказана.

7. Обобщенные решения уравнения Смолуховского пространственно неоднородной коагуляции

§ 1. Пространственно неоднородная коагуляция

Коагуляция (слияние) частиц является одной из основных причин эволюции пространственно неоднородных дисперсных систем, под которыми понимают механическую смесь среды (газообразной или жидкой) с частицами диспергированной фазы (твердой или жидкой), причем свойства фаз существенно зависят от переноса вещества между различными точками координатного пространства. При этом важно подчеркнуть наличие дисперсии скоростей переноса для частиц, находящихся в различных состояниях (иначе заменой системы пространственно-временнных координат описание сводится к модели, подобной пространственно однородному случаю, который подробно рассмотрен в гл. 1–5).

Пространственно неоднородная коагуляция наблюдается в различных физических ситуациях: в растворах — броуновская коагуляция, при образовании капель дождя — гравитационная коагуляция. Следует подчеркнуть, что наличие пространственной неоднородности значительно усложняет исследование математических моделей коагуляции. В частности, это обусловлено новым эффектом (по сравнению с пространственно однородными задачами), а именно, возникновением недифференцируемых особенностей решения по пространственно-временным переменным. Эти особенности, в свою очередь, порождают пространственно-временные зоны, в которых соотношение сохранения для оператора столкновений

Смолуховского переходит в соотношение диссипации (эти области можно интерпретировать как зоны интенсивного образования осадков, не взаимодействующих с дисперсной фазой). Процесс пространственно неоднородной коагуляции оказывает воздействие на рост кристаллов в растворах, газовых пузырей и пор в тведом теле. Серьезное влияние оказывает пространственно неоднородная коагуляция продуктов горения топлива на тягу реактивных двигателей.

Физическим аспектам явления коагуляции посвящена обширная литература [1, 3, 28, 82].

Физический формализм получения уравнений пространственно неоднородной кинетической теории коагуляции описан в [4–6].

Математически строгий вывод кинетического уравнения, приводящего к оператору столкновений Смолуховского, осуществлен в [87] для случая дискретных масс в предположении броуновского блуждания частиц. При этом интенсивность столкновений частиц является константой.

Основные предположения физического характера, накладываемые на систему коагулирующих частиц, состоят в следующем. Частиц достаточно большое количество, чтобы можно было применять функцию распределения частиц по массам и в координатном пространстве. Считается, что частицы испытывают только парные столкновения и образуют локально хаотическое множество [11, 16, 78, 87].

Математические вопросы корректности задач кинетической теории коагуляции весьма сложные и большинство результатов относится, как правило, к теории пространственно однородных систем либо близких к ним. Пространственно неоднородные задачи, в особенности связанные со свободным переносом частиц, осуществляемым посредством однопараметрической группы сдвигов по пространственной переменной, являются наиболее трудными с математической точки зрения и составляют предмет исследования этой главы [67, 68, 99, 103]. В отличие от результатов гл. 6, относящихся к решениям пространственно неоднородных задач в малой окрестности нуля (вакуума) [69], здесь получены глобальные результаты с произвольными неотрицательными суммируемыми начальными данными. Возникновение недифференцируемых особенностей решений при сколь угодно гладких начальных данных приводит к необходимости использования понятия обобщенного решения. Построены примеры возникновения особенностей и указана их связь с явлением перехода соотношения сохранения в соотношение диссипации для оператора столкновений Смолуховского. Следует подчеркнуть, что указанное явление имеет место даже для случая ограниченных ядер взаимодействия частиц, что указывает на существенные отличия пространственно неоднородных задач от пространственно однородных, для которых подобные явления связаны с быстрым ростом ядра или медленным спадом начальной функции на бесконечности (см. гл. 5).

§ 2. Негладкие особенности решения уравнения Смолуховского в случае дискретных масс

Рассмотрим математическую модель процесса коагуляции в дисперсной системе, состоящей из вязкой среды, в которой вдоль оси $Ox = \{x \in \mathbb{R}\}$ под действием внешней силы с постоянной скоростью движутся частицы, которые состоят из объединений мономеров, имеющих массу $\mu_1 > 0$. Частицу, порожденную объединением i мономеров (т. е. ее масса равна $i\mu_1$, $i \in \mathbb{N}$), будем для краткости именовать «*i-мер*», слово *полимер* примем для обозначения бесконечного объединения мономеров. Пусть скорость движения i-мера равна v_i, а при столкновении пары частиц происходит их слияние в единый конгломерат, состоящий из суммарного количества мономеров обеих частиц (*коагуляция*). Для описания эволюции концентрации i-меров $f_i \overset{def}{=} f(i,x,t)$ в такой системе используется кинетическое уравнение Смолуховского

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial f_i}{\partial x} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i-1} \Phi_{i-j,j} f_{i-j} f_j - f_i \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_{i,j} f_j, \quad i \in \mathbb{N}, \tag{7.1}$$

где $\Phi_{i,j} = \sigma_{i,j}|v_i - v_j|$ — интенсивность слияния i и j-меров; $\sigma_{i,j}$ — сечение захвата, являющееся симметричной, неотрицательной функцией на $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Оператор столкновений, определяемый правой частью уравнения (7.1), обозначим $S_i(f)$, $f = \{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Первое слагаемое в $S_1(f)$ считаем по определению равным нулю. Выражение для $S_i(f)$ задает локальный баланс между рождением i-меров из-за слияния $i-j$ и j-меров и уничтожением i-меров. Оператор столкновений определяет локальный закон сохранения количества вещества, заключенного в частицах, состоящих из конечного числа мономеров, ибо для финитных наборов концентраций f справедливо равенство

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} iS_i(f) = 0.$$

Для уравнения (7.1) рассматривается задача Коши с начальными данными

$$f(i,x,0) = \varphi_i(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{7.2}$$

Ниже указываются достаточные условия, когда на решении уравнения (7.1) возникают негладкие особенности по переменным x, t при сколь угодно гладкой начальной функции $\varphi = \{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Интегральной формой задачи (7.1), (7.2) является нелинейное интегральное уравнение вольтерровского вида

$$f|_t = T_t\varphi + \int\limits_0^t T_{t-\tau} \circ S(f)|_\tau d\tau, \quad t \geq 0, \tag{7.3}$$

где T_t — однопараметрическая группа сдвигов, действие которой определено формулой

$$T_t(\varphi)(i,x) = \varphi_i(x - v_i t), \quad \varphi = \{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}. \tag{7.4}$$

Уравнение (7.3) определяет обобщенное решение задачи Коши для уравнения Смолуховского (7.1). Существование обобщенного решения доказывается в §6 настоящей главы.

Примем обозначение $\bar{f} = T_t\varphi$ для набора концентраций при свободном преносе частиц. Положим

$$\bar{I}_i(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_{i,j}\bar{f}(j,x,t),$$

$$I_i(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_{i,j} f(j,x,t).$$

ТЕОРЕМА 7.1. *Пусть сечение захвата частиц* $\sigma_{i,j}$ $(i,\ j \in \mathbb{N})$ *удовлетворяет неравенствам*

$$0 < \inf_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \sigma_{i,j} \leq \sup_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \sigma_{i,j} < \infty,$$

скорость свободного переноса частиц v_i *является строго монотонной функцией аргумента* $i \in \mathbb{N}$. *Предположим, что начальные* *концентрации* $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *в условии* (7.2) — *положительные гладкие по* $x \in \mathbb{R}$ *функции, имеющие конечные интегралы*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^{\infty} (1+\Phi_{i,j}) j\varphi_j(x)\,dx < \infty,$$

и $\varphi_j(x) \to 0$ *при* $|x| \to \infty$. *Пусть набор начальных концентраций* $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *в каждой точке* $x \in \mathbb{R}$ *удовлетворяет локальному соотношению сохранения*

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} iS_i(f|_{t=0}) = 0.$$

Тогда, если существуют точки (x,t), *в которых величина* $\bar{I}(x,t) = +\infty$, *то независимо от класса гладкости начальных концентраций решение уравнения* (7.1) *с этими начальными данными не может быть гладким по* (x,t) *для всех* $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. В точках, где $\bar{I}(x,t) = +\infty$, решение задачи Коши (7.1), (7.2) имеет особенность типа «градиентная катастрофа», т. е. производные обращаются в бесконечность. При этом в указанных точках $S_i(f) = -\infty$ и, следовательно, справедливо неравенство

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} iS_i(f) < 0. \tag{7.5}$$

Значит, локальное соотношение сохранения (7.4) с течением времени преобразуется в локальное соотношение диссипации (7.5).

Перед доказательством теоремы 7.1 сделаем ряд предварительных утверждений.

ЛЕММА 7.1. *Пусть последовательность непрерывных неотрицательных функций* $u_i(x,t)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ *подчиняется неравенствам*

$$u_i(x,t) \leq T_t u_i(.,0) + C_i \int\limits_0^t \sum_{j=1}^{i-1} T_{t-\tau}(u_{i-j}(.,\tau)u_j(.,\tau))\,d\tau, \quad i \in \mathbb{N}, \tag{7.6}$$

где $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — *монотонно возрастающая последовательность неотрицательных чисел. Положим по определению сумму в правой части неравенства при* $i = 1$ *тождественно равной нулю. Если начальные функции* $u_i(x,0)$ *удовлетворяют неравенствам*

$$u_i(x,0) \le F_0 = \text{const} < \infty, \quad x \in \mathbb{R}, \quad i \in \mathbb{N},$$

то справедливы соотношения

$$u_i(x,t) \le F_0 \exp(F_0 i C_i t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad i \in \mathbb{N}, \quad t \ge 0. \tag{7.7}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы получим методом математической индукции, применяемым по индексу $i \in \mathbb{N}$. При $i = 1$ имеем очевидное неравенство, из которого следует первая часть принципа математической индукции. Если соотношение (7.7) справедливо для функций $u_j, 1 \le j \le i-1$, $i > 2$, то выполняется неравенство

$$u_i(x,t) \le F_0 + C_i \int\limits_0^t \sum_{j=1}^{i-1} F_0^2 \exp(F_0(jC_j + (i-j)C_{i-j})\tau)\, d\tau.$$

Поскольку $C_j \le C_i$, $(i-j)C_{i-j} \le (i-j)C_i$ при $i \ge j$, то

$$u_i(x,t) \le F_0 + C_i\, i\, F_0^2 \int\limits_0^t \exp(F_0 i C_i \tau)\, d\tau = F_0 \exp(F_0 i C_i t),$$

что завершает доказательство леммы. Лемма доказана.

ЛЕММА 7.2. *Пусть выполнены условия леммы* 7.1 *и в дополнение к ним функции* $u_i(x,0) \to 0$ *при* $x \to \infty$ $\forall i \in \mathbb{N}$. *Тогда* $u_i(x,t) \to 0$, $x \to \infty$, *при каждом* $i \in \mathbb{N}$ *равномерно относительно изменения значений* t *на любом конечном промежутке в* $\mathbb{R}_1^+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы получается методом математической индукции по номеру $i \in \mathbb{N}$. При $i = 1$ имеем

$$u_1(x,t) \le u_1(x - v_1 t, 0).$$

Поскольку $u_1(x,0) \to 0$, когда $x \to \infty$, то $u_1(x,t) \to 0$ при $x \to \infty$ равномерно относительно $0 \le t \le T$ $\forall T \in \mathbb{R}_1^+$. Предположим, что функции $u_j(x,t)$ обладают таким свойством для $1 \le j \le i-1$, тогда из неравенства (7.6) вытекает утверждение леммы для u_i. Лемма доказана.

ЛЕММА 7.3. *Пусть* $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ — *гладкое неотрицательное решение задачи Коши* (7.1), (7.2), *соответствующее начальным данным, для* *которых выполнены условия теоремы* 7.1. *Тогда при* $t \geq 0$ *справедливы следующие неравенства*:

$$\int\limits_{\mathbb{R}_1} \sum_{i\in\mathbb{N}} f_i(x,t)dx \leq \int\limits_{\mathbb{R}_1} \sum_{i\in\mathbb{N}} \varphi_i(x)\,dx = N_0, \tag{7.8}$$

$$\int\limits_0^t \sum_{j\in\mathbb{N}} |a - v_j| f_j(x + a\tau, \tau)\,d\tau \leq 2N_0 \quad \forall a \in \mathbb{R}_1. \tag{7.9}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7.2. Неравенства (7.8), (7.9) имеют простой физический смысл. Оценка (7.8) означает, что в коагулирующей системе число частиц с ростом времени уменьшается, а оценка (7.9) показывает, что через сечение потока коагулирующих частиц, движущееся со скоростью a вдоль оси Ox, может пройти не более $2N_0$ частиц за время t при монотонной функции v_i, поскольку каждая частица проходит через это сечение не более двух раз.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Получим сначала неравенство (7.8). Суммируя в (7.1) по индексу $1 \leq i \leq M$, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{i=1}^{M} f_i(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\sum_{i=1}^{M} v_i f_i(x,t) \leq 0,$$

ибо $\sum\limits_{i=1}^{M} S_i(f) \leq 0 \; \forall M \in \mathbb{N}$. Интегрируя это неравенство по времени, получаем

$$\sum_{i=1}^{M} f_i(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\sum_{i=1}^{M} v_i \int\limits_0^t f_i(x,\tau)\,d\tau \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \varphi_i(x).$$

Дальнейшее интегрирование по переменной x при $|x| \leq A$ приводит к соотношению

$$\int\limits_{-A}^{A} \sum_{i=1}^{M} f_i(x,t)\,dx + \sum_{i=1}^{M} v_i \int\limits_0^t [f_i(A,\tau) - f_i(-A,\tau)]\,d\tau \leq N_0.$$

Воспользовавшись результатом леммы 7.2, перейдем к пределу при $A \to +\infty$. Таким образом,

$$\int_{\mathbb{R}_1} \sum_{i=1}^{M} f_i(x,t)\,dx \le N_0.$$

Переходя к пределу $M \to \infty$ на основании леммы Б. Леви [36], получаем окончательно неравенство (7.8).

Теперь установим справедливость оценки (7.9). Поскольку функция $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ монотонная, то без ограничения общности можно считать ее монотонно возрастающей (в противном случае следует сделать замену переменных $x \mapsto -x$ в уравнении (7.1)). Итак, при монотонно возрастающей функции v_i в тождестве (7.1) сделаем замену переменных:

$$t \mapsto t, \quad x \mapsto x + at, \quad a = \text{const},$$

тогда для функций

$$\tilde{f}_i(x,t) \stackrel{def}{=} f_i(x+at,t), \quad i \in \mathbb{N}$$

имеет место тождество

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{f}_i + (v_i - a)\frac{\partial}{\partial x}\tilde{f}_i = S_i(\tilde{f}_i), \quad i \in \mathbb{N}. \tag{7.10}$$

Обозначим i_0 наибольшее значение индекса i, для которого $v_i < a$. Тогда суммированием по номеру i получаем неравенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{i=1}^{i_0}\tilde{f}_i(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\sum_{i=1}^{i_0}(v_i - a)\tilde{f}_i(x,t) \le 0.$$

После интегрирования обеих частей этого неравенства по времени на промежутке $(0,t)$ и по пространственной переменной на интервале $(x,+\infty)$, учитывая лемму 7.2, имеем

$$\int_0^t \sum_{i=1}^{i_0}(a - v_i)\tilde{f}_i(x,\tau)\,d\tau \le \int_x^{+\infty}\sum_{i\in\mathbb{N}}\varphi_i(\xi)\,d\xi = N_0^+. \tag{7.11}$$

Повторим те же рассуждения для сумм по номеру $1 \le i \le M$ в соотношении (7.10), интегрируя теперь по пространственной переменной на промежутке $(-\infty,x)$. Таким образом, получаем

$$\int_0^t \sum_{i=1}^{M}(v_i - a)\tilde{f}_i(x,\tau)\,d\tau \le \int_{-\infty}^{x}\sum_{i\in\mathbb{N}}\varphi_i(\xi)\,d\xi = N_0^-.$$

Полагая $M > i_0$ и учитывая (7.11), приходим к неравенству

$$\int_0^t \sum_{i=i^0+1}^{M} (v_i - a)\tilde{f}_i(x,\tau)\,d\tau \le N_0^+ + N_0^- = N_0. \tag{7.12}$$

Сочетая неравенства (7.11), (7.12) и переходя к пределу $M \to \infty$, устанавливаем справедливость неравенства

$$\int_0^t \sum_{i\in\mathbb{N}} |v_i - a|\tilde{f}_i(x,\tau)\,d\tau \le 2N_0.$$

Возвратимся в этом соотношении к исходным функциям f_i и тем самым получаем (7.9). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7.1. Предположим, что при условиях теоремы существует гладкое решение задачи (7.1), (7.2) при всех $t \ge 0$, $x \in \mathbb{R}$. Отбрасывая в правой части тождества (7.1) неотрицательные слагаемые, приходим к неравенству

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + v_i\frac{\partial f_i}{\partial x} \ge -f_i\sum_{j=1}^{\infty}\Phi_{i,j}f_j, \quad i \in \mathbb{N},$$

и, таким образом,

$$f_i(x,t) \ge \bar{f}_i(x,t)\exp\left[-\int_0^t I_i(\xi,\tau)|_{\xi=x-v_i(t-\tau)}\,d\tau\right],$$

$$i \in \mathbb{N}, \quad t \ge 0.$$

Воспользовавшись неравенством (7.9) из леммы 7.3, получаем оценку интеграла

$$\int_0^t I_i(\xi,\tau)|_{\xi=x-v_i(t-\tau)}\,d\tau \le 2N_0, \quad i \in \mathbb{N},$$

$$t \ge 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

которая в сочетании с предыдущим неравенством приводит к соотношению

$$f_i(x,t) \ge \bar{f}_i(x,t)\exp(-2\sup_{i,j\in\mathbb{N}}\sigma_{i,j}N_0), \quad i \in \mathbb{N}, \quad t \ge 0, \ x \in \mathbb{R}. \tag{7.13}$$

В силу положительности начальных данных φ имеем положительность функций $\bar{f}_i, i \in \mathbb{N}$ и, значит, $f_i > 0$ при $t \geq 0$. Кроме того, подставляя правую часть оценки (7.13) в выражение для $I_i(x,t)$, имеем неравенство

$$I_i(x,t) \geq c_1 \bar{I}_i(x,t),$$

где постоянная $c_1 > 0$ не зависит от $i \in \mathbb{N}$. Итак, в точках, где значения $\bar{I} = +\infty$, значения оператора столкновений

$$S_i(f(x,t)) = -\infty$$

из-за строгой положительности и ограниченности величин f_i. Тем самым доказано, что в указанных точках значение характеристической производной

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial f_i}{\partial x} = -\infty, \quad i \in \mathbb{N},$$

т. е. возникает «градиентная катастрофа», причем в этих точках

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} S_i(f) = -\infty.$$

Теорема доказана.

Возникновение особенностей решения уравнения (7.1), установленное в теореме 7.1, обусловлено тем, что значения скорости свободного переноса частиц $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ различные при бесконечном наборе индексов $i \in \mathbb{N}$. В противном случае утверждение теоремы не имеет места, поскольку задача становится практически пространственно однородной (за исключением конечного набора индексов i), и указанный эффект, связанный с перемешиванием частиц из различных точек пространства, взятых в бесконечном количестве, не возникает. Таким образом, рассмотренное явление связано с существенной пространственной неоднородностью кинетической системы и основано на дисперсии скоростей свободного переноса частиц.

Остановимся на построении начальных данных для теоремы 7.1. Отметим, что значения $\bar{I}$ отыскиваются по формуле

$$\bar{I}_i(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_{i,j} \, |v_i - v_j| \, \varphi_j(x - v_i t).$$

Пусть функции $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ являются гладкими, неотрицательными, финитными, причем $\bar{I}_i(x,0) < \infty \ \forall i$. Фиксируем $x_0 \in \mathbb{R}$, $t_0 > 0$ и положим, значения начального распределения подчиняются условию

$$\varphi_i(x_0 + v_i t_0) = 1, \quad i \in \mathbb{N},$$

считая при этом последовательность v_i строго монотонно возрастающей; ширину носителя функции φ_i подберем так, чтобы сходились все интегралы, указанные в формулировке теоремы 7.1. Очевидно, что при таком выборе начальных данных в точке (x_0, t_0) значение $\bar{I}_i(x_0, t_0) = +\infty$. Естественно, от финитности φ_i можно легко отказаться, заменяя это требование на строгую положительность и достаточно быстрое стремление к нулю $\varphi_i(x)$ при $x \to \infty$. Для ограниченных монотонных скоростей свободного переноса частиц можно указать начальные данные, удовлетворяющие условиям теоремы 7.1, когда функция $\bar{I} = +\infty$ на линии, выходящей из (x_0, t_0) и трансверсальной к характеристическим направлениям уравнения (7.1).

Подчеркнем еще раз, что приведенная конструкция основана на дисперсии скоростей свободного переноса для бесконечного набора индексов $i \in \mathbb{N}$. Возникающие при этом особенности спектров обусловлены взаимодействием свободного переноса и столкновений частиц, что связано с нарушением соотношения сохранения.

§ 3. Обобщенное решение кинетического уравнения Смолуховского в случае дискретных масс

Возникновение негладких особенностей решения задачи (7.1), (7.2) при сколь угодно гладкой начальной функции приводит к необходимости расширения понятия решения задачи. Пусть Ψ — семейство гладких функций, определенных на полуплоскости

$$\Pi = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\},$$

имеющих компактный носитель.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Назовем обобщенным решением задачи Коши (7.1), (7.2) упорядоченный набор $f = \{f_i\}$ ограниченных на каждом компакте в Π измеримых функций, удовлетворяющий при любых $\psi \in \Psi$ и $i \in \mathbb{N}$ интегральному соотношению

$$\iint\limits_{\Pi} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + v_i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) f_i + \psi S_i(f) \right] dx dt + \int\limits_{\mathbb{R}} \psi(x, 0) \varphi_i(x)\, dx = 0, \quad (7.14)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7.3. Обобщенное решение задачи (7.1), (7.2) почти везде в П по отношению к плоской мере Лебега удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению вольтерровского вида (7.3).

ТЕОРЕМА 7.2. *Пусть скорости свободного переноса* $v_i \geq 0$, $i \in \mathbb{N}$, *сечение взаимодействия частиц* $\sigma_{i,j}$ $(i,j \in \mathbb{N})$ — *симметричная неотрицательная функция, которая удовлетворяет неравенству*

$$\sup_{i,j\in\mathbb{N}} \sigma_{i,j}\left(i^\gamma + j^\gamma\right)^{-1} < \infty$$

при некотором $0 \leq \gamma < 1$. *Предположим, что* φ_i *при каждом номере* $i \in \mathbb{N}$ — *измеримая неотрицательная функция, ограниченная на каждом компакте в* $\mathbb{R}$, *и справедливо соотношение*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \sum_{i\in\mathbb{N}} i\varphi_i(x)\,dx = M < \infty. \tag{7.15}$$

Тогда при этих условиях существует обобщенное решение задачи (7.1), (7.2), *неотрицательное в* П.

ЗАМЕЧАНИЯ. 7.4. Указанным условиям удовлетворяет случай гравитационной коагуляции облачных капель в предположении справедливости закона Стокса [1] для падения их в воздухе под действием силы тяжести, когда

$$\sigma_{i,j} = \mathcal{O}\left(i^{\frac{2}{3}} + j^{\frac{2}{3}}\right), \quad v_i = \mathcal{O}(i^{\frac{2}{3}}) \quad (i,\ j \in \mathbb{N}). \tag{7.16}$$

7.5. Условия теоремы 7.1 содержатся в требованиях теоремы 7.2.

7.6. Условие (7.15) означает ограниченность количества вещества в коагулирующей системе.

7.7. Требование неотрицательности скоростей свободного переноса $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ можно заменить односторонней ограниченностью этих величин.

Для доказательства теоремы установим свойства решений, аппроксимирующих (7.1), (7.2) конечных по индексу i задач

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t} + v_i \dfrac{\partial u_i}{\partial x} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{i-1} \Phi_{i-j,j} u_{i-j} u_j - u_i \sum\limits_{j=1}^{n} \Phi_{i,j} u_j, \\ u_i|_{t=0} = \varphi_i(x), \quad (x,t) \in \Pi, \quad 1 \leq i \leq n, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{7.17}$$

где функции $\Phi_{i,j}$, φ_i удовлетворяют условиям теоремы 7.2.

§ 4. Гладкие решения аппроксимирующих задач (7.17)

ЛЕММА 7.4. *Пусть* φ_i, $i \in \mathbb{N}$ *— гладкие неотрицательные на* $\mathbb{R}$ *функции,* $\Phi_{i,j} = \Phi_{j,i} \geq 0$. *Тогда задача* (7.17) *при любом номере* $n \in \mathbb{N}$ *имеет единственное гладкое в* Π *решение. Это решение неотрицательное и устойчивое в топологии равномерной сходимости на компактах в полосе* Π.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$V_{\min} = \min_{1\leq i\leq n} v_i, \quad V_{\max} = \max_{1\leq i\leq n} v_i.$$

Рассмотрим трапецию

$$K_X^\tau = \{(x,t) : 0 \leq t \leq \tau,\ -X - V_{\min}(t-\tau) \leq x \leq \\ \leq X + V_{\max}(t-\tau),\ X > 0\}.$$

При заданном X можно указать такое положительное число

$$\tau(X, n, \sup_{|x|\leq X} \max_{1\leq i\leq n} \varphi_i(x)),$$

при котором полулинейная гиперболическая система (7.17) имеет единственное гладкое решение на K_X^τ [51], которое строится методом последовательных приближений на характеристиках. Это решение непрерывно зависит от исходных данных в топологии равномерной сходимости на компактах в общей области существования такого решения. Гладкость локального решения обеспечивается гладкостью начальных данных и полиномиальной формой нелинейности системы. Покажем, что неотрицательным функциям $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ соответствует неотрицательное решение задачи (7.17) на K_X^τ. Для этого аппроксимируем неотрицательные начальные данные строго положительными гладкими функциями на

$$\{x : -X - V_{\min}\tau \leq x \leq X + V_{\max}\tau,\ X > 0\}.$$

Сначала установим, что положительным $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ соответствует положительное решение задачи (7.17) на K_X^τ. В силу равномерной непрерывности решения на K_X^τ можно указать такое τ' $(0 < \tau' < \tau)$, что функции $u_i(x,t) > 0$, $1 \leq i \leq n$, при

$$0 \leq t \leq \tau', \quad -X - V_{\min}t \leq x \leq X + V_{\max}t, \quad X > 0.$$

Предположим, что существуют точки, где обращается в нуль одна из компонент решения $\{u_i\}_{i=1}^n$ на K_X^τ. Среди множества нулей функций $\{u_i\}_{i=1}^n$ выберем на K_X^τ точку с наименьшим значением аргумента t, обозначив ее координаты (x_0, t_0). Итак, функции $u_i > 0$, $1 \le i \le n$, на $K_X^{\bar\tau}$ $\forall \bar\tau < t_0$. Обозначим i_0 минимальное значение индекса i, для которого $u_i(x_0, t_0) = 0$. Поскольку при $i = 1$ справедливо тождество

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = -u_1 \sum_{j=1}^n \Phi_{i,j}\, u_j,$$

то $u_1 > 0$ при всех $(x,t) \in K_X^\tau$, следовательно, $i_0 > 1$. Таким образом,

$$\left(\frac{\partial u_{i_0}}{\partial t} + v_{i_0} \frac{\partial u_{i_0}}{\partial x}\right)\Big|_{(x_0,t_0)} = \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i_0-1} \Phi_{i_0-j,j} u_{i_0-j} u_j\right)\Big|_{(x_0,t_0)} > 0,$$

ибо $u_{i_0}(x_0,t_0) = 0$, $u_j(x_0,t_0) > 0$, $1 \le j < i_0$. Поскольку величина $t_0 > 0$, то

$$u_{i_0}(x_0 + s v_{i_0}, t_0 + s) < 0$$

при достаточно малых $s < 0$, что противоречит требованиям выбора t_0. Полученное противоречие доказывает положительность решения в области его существования. Предельный переход к неотрицательным начальным данным с учетом свойства устойчивости решения позволяет установить неотрицательность соответствующего решения. Применяя рассуждения из леммы 7.1 на компакте K_X^τ, убеждаемся, что имеет место оценка

$$0 \le u_i(x,t) \le F_0 \exp\left(F_0 i C_i t\right), \quad (x,t) \in K_X^\tau, \tag{7.18}$$

$$F_0 = \max_{1 \le i \le n} \max_{\substack{-X - V_{\min}\tau \le x, \\ x \le X + V_{\max}\tau}} \varphi_i(x),$$

$$C_i = \max_{1 \le j,k \le n} \Phi_{k,j}, \quad 1 \le i \le n,$$

позволяющая продолжить решение системы на треугольник

$$\Delta_X = \left\{(x,t):\ -X_1 + V_{\min} t \le x \le X_2 - V_{\max} t,\ 0 \le t \le \frac{2X}{V_{\min} + V_{\max}},\right.$$

$$\left. X_1 = X + V_{\min}\tau, \quad X_2 = X + V_{\max}\tau\right\}.$$

Устремляя $X \to +\infty$, получаем решение на П. Лемма доказана.

ЛЕММА 7.5. *Пусть $\{u_i\}_{i=1}^n$ — гладкое неотрицательное решение задачи (7.17) в П. Тогда для любого компакта $\Omega \subset \Pi$ и номера $1 \le i \le n$ можно указать такую постоянную $C(i,\Omega)$, не зависящую от $n \in \mathbb{N}$, что $u_i \le C(i,\Omega)$ при $(x,t) \in \Omega$.*

Утверждение этой леммы является непосредственным следствием оценки (7.1), полученной при доказательстве леммы 7.4.

ЛЕММА 7.6. *Пусть выполнены условия леммы 7.4. Тогда на любом компакте $\Omega \subset \Pi$ имеет место неравенство*

$$\int_0^t \left| \frac{d}{d\tau} u_i(x + v_i\tau, \tau) \right| d\tau \le C(i,\Omega), \quad (x,t) \in \Omega,$$

где постоянные $C(i,\Omega)$ не зависят от номера $n \in \mathbb{N}$ и свойств гладкости начальных данных $\{\varphi_i\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно получить утверждение в каждом параллелограмме

$$\Omega_{X,T} = \{(x,t) : \ -X + v_i t \le x \le X + v_i t, \ 0 \le t \le T\}.$$

В силу леммы 7.5 функции $\{u_i\}_{i=1}^n$ ограничены на $\Omega_{X,T}$ постоянными $C_1(i,\Omega_{X,T})$, которые не зависят от номера $n \in \mathbb{N}$ и определяются максимальными значениями начальных данных $\{\varphi_i\}$ на конечном отрезке изменения $x \in \mathbb{R}$. Таким образом, имеем неравенство

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + v\frac{\partial u_i}{\partial x} \le L_i, \quad (x,t) \in \Omega_{X,T},$$

где постоянная

$$L_i = (i-1) \max_{1 \le l,k \le i} \Phi_{k,l} \max_{1 \le j \le i} C_1(j, \Omega_{X,T}).$$

Следовательно, функция $g_i(x,t) \equiv u_i(x,t) - L_i t$ подчиняется неравенству

$$\frac{\partial g_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial g_i}{\partial x} \le 0.$$

Поскольку функция g_i на $\Omega_{X,T}$ ограничена и монотонно убывает вдоль характеристического направления, то справедлива оценка

$$\int_0^t \left| \frac{dg_i(x + v_i\tau, \tau)}{d\tau} \right| d\tau \le C_2, \quad (x,t) \in \Omega_{X,T},$$

где постоянная $C_2 = C_1(j, \Omega_{X,T}) + L_i$. Учитывая неравенство

$$\left|\frac{du_i(x+v_i\tau,\tau)}{d\tau}\right| \le \left|\frac{dg_i(x+v_i\tau,\tau)}{d\tau}\right| + L_i$$

в сочетании с предыдущим соотношением, приходим к утверждению леммы. Лемма доказана.

§ 5. Слабая непрерывность произведения функций

Доказательство существования обобщенного решения задачи (7.1), (7.2) опирается на возможность слабого предельного перехода под знаком оператора столкновений S по некоторой подпоследовательности решений задачи (7.17), продолженных тождественным нулем при $i > n$. Это устанавливается на основе нижеследующей теоремы 7.3, идейно связанной с работами Л. Тартара по компенсированной компактности [70].

Пусть u — вещественная борелева функция на $\mathbb{R}_2$. Выделим компактную область $\Omega \subset \mathbb{R}_2$. Для Ω определим на соответствующих классах эквивалентных функций следующие нормы:

$$\| u \|_0 \, (\Omega) = \left[\int\limits_\Omega |u|^2 \, dx_1 dx_2 \right]^{1/2},$$

$$\| u \|_1 \, (\Omega) = \left[\int\limits_a^b \left(\int\limits_{\Omega\cap(x_2=\mathrm{const}\,)} |u| \, dx_1 \right)^2 dx_2 \right]^{1/2},$$

$$a = \inf_\Omega x_2, \quad b = \sup_\Omega x_2,$$

$$\| u \|_2 \, (\Omega) = \left[\int\limits_c^d \left(\int\limits_{\Omega\cap(x_1=\mathrm{const}\,)} |u| \, dx_2 \right)^2 dx_1 \right]^{1/2},$$

$$c = \inf_\Omega x_1, \quad d = \sup_\Omega x_1,$$

$$\| u \|_\infty \, (\Omega) = \mathrm{vrai} \ \max_\Omega |u|.$$

Символы $\partial_i u$, $i = 1, 2$, присвоим обобщенным производным функции u на $\mathbb{R}_2$ по аргументам x_i соответственно.

ТЕОРЕМА 7.3. *Пусть при любом номере $m \in \mathbb{N}$ функции u_m, w_m, принадлежащие $L_2^{loc}(\Omega)$, обладают обобщенными производными $\partial_1 u_m$, $\partial_1 w_m$ соответственно, причем для любой компактной области $\Omega \subset \mathbb{R}_2$ выполнено соотношение*

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \{\| u_m \|_\infty (\Omega),\ \| \partial_1 u_m \|_1 (\Omega)\} < \infty,$$

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \{\| w_m \|_\infty (\Omega),\ \| \partial_2 w_m \|_2\ (\Omega)\} < \infty.$$

Предположим, что $u_m \to u$ и $w_m \to w$ при $m \to \infty$ слабо в $L_2(\Omega)$ для любой компактной области $\Omega \subset \mathbb{R}_2$. Тогда произведение $u_m w_m$ стремится к uw при $m \to \infty$ слабо в $L_2(\Omega)$ на Ω.

Докажем сначала утверждение теоремы 7.3 для гладких финитных функций.

ЛЕММА 7.7. *Пусть u_m, w_m, $m \in \mathbb{N}$, — гладкие финитные функции на квадрате*

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_2 :\ -\pi \le x_1, x_2 \le \pi\},$$

обращающиеся в нуль на границе $\partial\Omega$. Пусть для u_m, w_m выполняются условия теоремы 7.3. Тогда $u_m w_m$ сходятся слабо в $L_2(\Omega)$ при $m \to \infty$ к функции uw, где u, w — слабые пределы в $L_2(\Omega)$ последовательностей функций $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, $\{w_m\}_{m\in\mathbb{N}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем на Ω базис Фурье в $L_2(\Omega)$

$$\varphi_{k_1,k_2} = \frac{1}{2\pi} \exp\left(i(k_1x_1 + k_2x_2)\right) \qquad (k_1, k_2 \in \mathbb{Z}), \tag{7.19}$$

образующий ортонормированную систему по отношению к скалярному произведению

$$(f, g) \overset{def}{=} \int\limits_\Omega f\, \bar{g}\ dx_1 dx_2,$$

где $\bar{g}$ — комплексно сопряженная к g функция. Разложим функции u_m, $\partial_1 u_m$, w_m, $\partial_2 w_m$ в ряды Фурье по системе (7.19). Введем обозначения для коэффициентов Фурье:

$$\left\{\begin{array}{l} a^{(m)}_{k_1,k_2} = (u_m, \varphi_{k_1,k_2}), \\[2ex] a'^{(m)}_{k_1,k_2} = (\partial_1 u_m, \varphi_{k_1,k_2}), \\[2ex] a_{k_1,k_2} = (u, \varphi_{k_1,k_2}), \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} b^{(m)}_{k_1,k_2} = (w_m, \varphi_{k_1,k_2}), \\[2ex] b'^{(m)}_{k_1,k_2} = (\partial_2 w_m, \varphi_{k_1,k_2}), \\[2ex] b_{k_1,k_2} = (w, \varphi_{k_1,k_2}),\ \ (k_1, k_2 \in \mathbb{Z}). \end{array}\right. \tag{7.20}$$

При этом имеет место связь

$$a'^{(m)}_{k_1 k_2} = ik_1 a^{(m)}_{k_1,k_2}, \quad (k_1, k_2 \in \mathbb{Z}),$$
$$b'^{(m)}_{k_1 k_2} = ik_1 b^{(m)}_{k_1,k_2}, \quad (k_1, k_2 \in \mathbb{Z}). \tag{7.21}$$

Поскольку $u_m \to u$ и $w_m \to w$ при $m \to \infty$ слабо в $L_2(\Omega)$, то справедливы соотношения

$$\lim_{m\to\infty} a^{(m),}_{k_1 k_2} = a_{k_1,k_2}, \quad (k_1, k_2 \in \mathbb{Z}),$$
$$\lim_{m\to\infty} b^{(m),}_{k_1 k_2} = b_{k_1,k_2}, \quad (k_1, k_2 \in \mathbb{Z}). \tag{7.22}$$

Кроме того, функции u и w имеют ограниченную норму $\| \;.\; \|_\infty$ на Ω Доказательство проведем для u, т. к. для w оно такое же. Рассмотрим множество

$$A_\varepsilon = \left\{(x_1, x_2) \in \Omega : \, u(x_1, x_2) \geq \sup_{m\in\mathbb{N}} \| \, u_m \, \|_\infty \, (\Omega) + \varepsilon\right\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Оценим величину лебеговой меры $\mathrm{mes}\,(A_\varepsilon)$. В силу слабой сходимости u_m для характеристической функции множества A_ε, заданной формулой

$$\chi_{A_\varepsilon}(x) = \begin{cases} 1, & x \in A_\varepsilon, \; x = (x_1, x_2), \\ 0, & x \notin A_\varepsilon, \end{cases}$$

имеет место равенство

$$\lim_{m\to\infty} (\chi_{A_\varepsilon}, u_m) = (\chi_{A_\varepsilon}, u).$$

Таким образом, учитывая, что

$$(\chi_{A_\varepsilon}, u_m) \leq \; \mathrm{mes}\,(A_\varepsilon) \sup_{m\in\mathbb{N}} \| \, u_m \, \|_\infty \, (\Omega),$$

имеем неравенство

$$(\chi_{A_\varepsilon}, u) \leq \mathrm{mes}\,(A_\varepsilon) \sup_{m\in\mathbb{N}} \| \, u_m \, \|_\infty \, (\Omega).$$

Но в силу определения множества A_ε справедлива оценка

$$(\chi_{A_\varepsilon}, u) \geq \mathrm{mes}\,(A_\varepsilon) \left[\sup_{m\in\mathbb{N}} \| \, u_m \, \|_\infty \, (\Omega) + \varepsilon\right], \quad \varepsilon > 0,$$

которая в сочетании с предыдущим соотношением приводит к тому, что $\varepsilon \operatorname{mes}(A_\varepsilon) \le 0$ при $\varepsilon > 0$, т. е. $\operatorname{mes}(A_\varepsilon) = 0\ \forall \varepsilon > 0$.

Аналогичным образом убеждаемся, что мера множества

$$B_\varepsilon = \left\{(x_1, x_2) \in \Omega:\ u(x_1, x_2) \le -\sup_{m\in\mathbb{N}} \| u_m \|_\infty (\Omega) - \varepsilon\right\}, \quad \varepsilon > 0.$$

тоже равна нулю. На основании этого заключаем, что

$$\| u \|_\infty (\Omega) \le \sup_{m\in\mathbb{N}} \| u_m \|_\infty (\Omega).$$

Следовательно, произведение слабых пределов uw принадлежит пространству $L_2(\Omega)$.

Для доказательства леммы достаточно установить сходимость при $m \to \infty$ коэффициентов Фурье произведений $u_m w_m$ (которые принадлежат $L_2(\Omega)\ \forall m \in \mathbb{N}$) к коэффициентам Фурье функции uw (это эквивалентно слабой сходимости в $L_2(\Omega)$). Поэтому рассмотрим вопрос о предельном переходе при $m \to \infty$ под символом скалярного произведения $(u_m w_m, \varphi_{k_1 k_2})$, которое обозначим $\Psi^{(m)}_{k_1,k_2}$. Положим

$$\Psi_{k_1,k_2} = (uw, \varphi_{k_1,k_2}).$$

Итак, если

$$\Psi^{(m)}_{k_1,\,k_2} \to \Psi_{k_1,k_2}, \quad m \to \infty$$

при любых целых k_1, k_2, то имеет место утверждение леммы.

Справедливы равенства

$$\Psi^{(m)}_{l_1,l_2} = \sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}} a^{(m)}_{k_1,k_2} \bar{b}^{(m)}_{k_1-l_1,k_2-l_2} \qquad (l_1, l_2 \in \mathbb{Z}), \tag{7.23}$$

$$\Psi_{l_1,l_2} = \sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}} a_{k_1,k_2} \bar{b}_{k_1-l_1,k_2-l_2} \qquad (l_1, l_2 \in \mathbb{Z}). \tag{7.24}$$

В силу соотношения (7.22) частичные конечные суммы ряда (7.23) сходятся при $m \to \infty$ к соответствующим суммам ряда (7.24). Получим равномерные относительно $m \in \mathbb{N}$ оценки «хвоста» ряда (7.23). Из формул для связи коэффициентов Фурье (7.21) имеем

$$|a^{(m)}_{k_1,k_2}| = \frac{|{a'}^{(m)}_{k_1,k_2}|}{|k_1|}, \quad k_1 \ne 0;$$

$$|b^{(m)}_{k_1,k_2}| = \frac{|b'^{(m)}_{k_1,k_2}|}{|k_2|}, \quad k_2 \neq 0.$$

Следовательно, выполняются оценки

$$\sum_{|k_1|\geq M}\sum_{k_2\in\mathbb{Z}} |a^{(m)}_{k_1,k_2}||b^{(m)}_{k_1-l_1,k_2-l_2}| \leq$$

$$\leq \sum_{|k_1|\geq M}\sum_{k_2\in\mathbb{Z}} \frac{|a'^{(m)}_{k_1,k_2}|}{|k_1|}|b^{(m)}_{k_1-l_1,k_2-l_2}|, \qquad M > 0, \tag{7.25}$$

$$\sum_{|k_2|\geq M}\sum_{k_1\in\mathbb{Z}} |a^{(m)}_{k_1,k_2}||b^{(m)}_{k_1-l_1,k_2-l_2}| \leq$$

$$\leq \sum_{|k_2-l_2|\geq M}\sum_{k_1\in\mathbb{Z}} |a^{(m)}_{k_1,k_2}|\frac{|b'^{(m)}_{k_1-l_1,k_2-l_2}|}{|k_2-l_2|}, \qquad M > 0. \tag{7.26}$$

Неравенства (7.25) и (7.26) аналогичны, поэтому ограничимся получением оценок для правой части (7.25), перенося результат автоматически на (7.26). Для усиления неравенства (7.25) воспользуемся неравенством Коши–Буняковского, которое применим к правой части (7.25), получим

$$\sum_{|k_1|\geq M}\sum_{k_2\in\mathbb{Z}} |a^{(m)}_{k_1,k_2}||b^{(m)}_{k_1-l_1,k_2-l_2}| \leq$$

$$\leq \left\{\sum_{|k_1|\geq M}\sum_{k_2\in\mathbb{Z}} \frac{|a'^{(m)}_{k_1,k_2}|^2}{|k_1|^2}\right\}^{1/2} \left\{\sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}} |b^{(m)}_{k_1-l_1,k_2-l_2}|^2\right\}^{1/2}, \quad M > 0.$$

Т. к. выполняется равенство

$$\| w_m \|_0 (\Omega) = \left\{\sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}} |b^{(m)}_{k_1,k_2}|^2\right\}^{1/2},$$

то в силу ограниченности $\sup\limits_{m\in\mathbb{N}} \| w_m \|_\infty (\Omega)$ справедливо неравенство

$$\sum_{|k_1|\geq M}\sum_{k_2\in\mathbb{Z}} |a^{(m)}_{k_1,k_2}||b^{(m)}_{k_1-l_1,k_2-l_2}| \leq C\left\{\sum_{|k_1|\geq M}\sum_{k_2\in\mathbb{Z}} \frac{|a'^{(m)}_{k_1,k_2}|^2}{|k_1|^2}\right\}^{1/2}, \tag{7.27}$$

при каждом $M > 0$; постоянная C от номера $m \in \mathbb{N}$ не зависит.

Рассмотрим функцию

$$\xi_{k_1}^{(m)}(x_2) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\partial_1 u_m) \exp(-ik_1 x_1)\, dx_1,$$

$$|x_2| \le \pi, \quad k_1 \in \mathbb{Z}.$$

Очевидно,

$$a'^{(m)}_{k_1,k_2} = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \xi_{k_1}^{(m)}(x_2) \exp(-ik_2 x_2)\, dx_2,$$

$$k_1,\ k_2 \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, при каждом фиксированном k_1 величины $\{a'^{(m)}_{k_1,k_2}\}$ ($k_2 \in \mathbb{Z}$) являются коэффициентами Фурье функции $\xi_{k_1}^{(m)}$ по ортонормированной системе в $L_2[-\pi,\pi]$

$$\left\{ \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \exp(-ik_2 x_2) \right\}_{k_2 \in \mathbb{Z}}.$$

В силу равенства Парсеваля [36] имеем

$$\sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} |a'^{(m)}_{k_1,k_2}|^2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\xi_{k_1}^{(m)}(x_2)|^2\, dx_2, \quad k_1 \in \mathbb{Z}. \tag{7.28}$$

Оценивая интеграл в правой части этого соотношения, получаем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\xi_{k_1}^{(m)}(x_2)|^2\, dx_2 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\, \partial_1 u_m\,) \exp(-ik_1 x_1)\, dx_1 \right|^2 dx_2 \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\partial_1 u_m\, dx_1 \right)^2 dx_2 = \frac{1}{2\pi} \parallel \partial_1 u_m \parallel_1^2 (\Omega),$$

$$k_1 \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку по условию леммы

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \parallel \partial_1 u_m \parallel_1 (\Omega) < \infty,$$

имеем оценку

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\xi_{k_1}^{(m)}(x_2)|^2\,dx_2 \le c_1 < \infty \quad (k_1 \in \mathbb{Z}\ m \in \mathbb{N}),$$

где постоянная c_1 от номеров k_1, m не зависит. Учитывая это неравенство в (7.28), имеем

$$\sum_{k_2\in\mathbb{Z}} |a'^{(m)}_{k_1,k_2}|^2 \le c_1 \quad (k_1 \in \mathbb{Z}\ m \in \mathbb{N}),$$

и усиливая (7.27), получаем

$$\sum_{|k_1|\ge M}\ \sum_{k_2\in\mathbb{Z}} |a^{(m)}_{k_1,k_2}||b^{(m)}_{k_1-l_1,k_2-l_2}| \le c_2 \sum_{|k_1|\ge M} \frac{1}{|k_1|^2}, \quad M>0,$$

где постоянная c_2 от номера $m \in \mathbb{N}$ не зависит. Аналогичные оценки получаются для (7.26). Найденные оценки для мажоранты ряда (7.23) означают, что ряд сходится равномерно относительно номера $m \in \mathbb{N}$, следовательно,

$$\Psi^{(m)}_{k_1,k_2} \to \Psi_{k_1,k_2} \quad m \to \infty$$

при любых целых k_1, k_2. Это соотношение эквивалентно утверждению леммы. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7.3. Пусть Ω — компактная область в $\mathbb{R}_2$. Погрузим множество Ω в квадрат Ω' так, чтобы $\partial\Omega \cap \partial\Omega' = \emptyset$. Очевидно, результат леммы 7.7 распространяется на Ω' заменой переменных, отображающей квадрат Ω' на квадрат $[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi] \subset \mathbb{R}_2$. Используя средние функции на Ω, аппроксимируем гладкими функциями $\widetilde{u}_m$, $\widetilde{w}_m$, $m \in \mathbb{N}$, на Ω' соответствующие элементы последовательностей u_m, и w_m $m \in \mathbb{N}$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\|\, u_m - \widetilde{u}_m \,\|_\infty\,(\Omega') \le 2\,\|\, u_m \,\|_\infty\,(\Omega'),$$

$$\|\, w_m - \widetilde{w}_m \,\|_\infty\,(\Omega') \le 2\,\|\, w_m \,\|_\infty\,(\Omega'),$$

$$\max\Big\{\|\, u_m - \widetilde{u}_m \,\|_0\,(\Omega'),\ \|\, \partial_1 u_m - \partial_1\widetilde{u}_m \,\|_1\,(\Omega'),$$

$$\|\, w_m - \widetilde{w}_m \,\|_0,\ \|\, \partial_2 w_m - \partial_2\widetilde{w}_m \,\|_2\,(\Omega')\Big\} \le \frac{1}{m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, для функций $\widetilde{u}_m, \widetilde{w}_m$ $(m \in \mathbb{N})$ имеет место утверждение леммы 7.7 на квадрате Ω', т. е. для любой функции $\varphi \in L_2(\Omega')$ справедливо соотношение

$$\int\limits_{\Omega'} \widetilde{u}_m \widetilde{w}_m \bar{\varphi}\, dx_1 dx_2 \to \int\limits_{\Omega} uw\bar{\varphi}\, dx_1 dx_2, \quad m \to \infty,$$

где u, w — слабые пределы в $L_2(\Omega')$ последовательностей функций $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ и $\{w_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ соответственно. Поскольку

$$\| \widetilde{u}_m \widetilde{w}_m - u_m w_m \|_0 \, (\Omega') \to 0, \quad m \to \infty,$$

то аналогичное утверждение справедливо для произведений $u_m w_m$:

$$\int\limits_{\Omega'} u_m w_m \bar{\varphi}\, dx_1 dx_2 \to \int\limits_{\Omega'} uw\bar{\varphi}\, dx_1 dx_2, \quad m \to \infty \ \ \forall \varphi \in L_2(\Omega').$$

Переходя к окончанию доказательства, положим теперь пробную функцию $\varphi = \chi_\Omega \psi$, где χ_Ω — характеристическая функция компактной области Ω, ψ — произвольная непрерывная на $\mathbb{R}_2$ функция. Тогда имеем

$$\int\limits_{\Omega} u_m w_m \psi\, dx_1 dx_2 \to \int\limits_{\Omega} u^1 u^2 \psi\, dx_1 dx_2, \quad m \to \infty \ \ \forall \psi \in C(\Omega).$$

Поскольку множество непрерывных на Ω функций $C(\Omega)$ всюду плотное в $L_2(\Omega)$, то, следовательно, в последнем соотношении функцию ψ можно считать принадлежащей $L_2(\Omega)$. Теорема доказана.

§ 6. Доказательство теоремы 7.2. Существование обобщенного решения задачи (7.1), (7.2)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7.2. Отметим, что правая часть уравнений (7.17), которую обозначим $S_{i,n}(u)$, при неотрицательных $\{u_i\}_{i=1}^n$ удовлетворяет неравенству

$$\sum_{i=1}^{n} i\, S_{i,n} \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

из-за симметричности и неотрицательности $\Phi_{i,j}$ $(i, j \in \mathbb{N})$. Положим в дополнение к требованиям теоремы, что функции $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ гладкие, стремящиеся к нулю при $|x| \to \infty$. Тогда, интегрируя (7.17) по переменным x, t с учетом лемм 7.2, 7.4, 7.5, получим

$$\int\limits_0^t \sum_{j=1}^n j v_j u_j(x,\tau)\, d\tau \le \int\limits_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^n j\varphi_j(x)\, dx \le M, \tag{7.29}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^n j u_j(x,\tau)\, dx \le \int\limits_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^n j\varphi_j(x)\, dx \le M, \tag{7.30}$$

Введем обозначения

$$f_i^{(n)}(x,t) = \begin{cases} u_i(x,t), & 1 \le i \le n, \\ 0, & i > n, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

при помощи которых неравенства (7.29), (7.30) приобретают следующий вид:

$$\begin{cases} \displaystyle\int\limits_0^t \sum_{j=1}^\infty j v_j f_j^{(n)}(x,\tau)\, d\tau \le M, \\ \displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^\infty j f_j^{(n)}(x,\tau)\, dx \le M, \qquad n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{7.31}$$

В силу утверждения леммы 7.5 о равномерной ограниченности относительно номера $n \in \mathbb{N}$ (при фиксированных значениях индекса i) функций $f_i^{(n)}$ $(i,\, n \in \mathbb{N})$ на каждом компакте Ω в $\mathbb{R}_2$ из последовательности функций $\{f_i^{(n)}\}_{i=1}^\infty$, зависящей от номера $n \in \mathbb{N}$, выберем стандартным диагональным процессом подпоследовательность $\{f_i^{(n_k)}\}_{i=1}^\infty$, $n_k \in \mathbb{N}$, слабо сходящуюся в $L_2(\Omega)$ при $n_k \to \infty$ на каждом компакте Ω, принадлежащем Π. Слабые пределы последовательностей $f_i^{(n_k)}, i \in \mathbb{N}$, получаюшиеся при $n_k \to \infty$, обозначим f_i. Очевидно, функции f_i $\forall i \in \mathbb{N}$ имеют ограниченный существенный максимум на каждом компакте в Π и почти везде неотрицательны. Рассмотрим значения индексов i, $j \in \mathbb{N}$, для которых $v_i \ne v_j$. В функциях $f_i^{(n_k)}$ и $f_j^{(n_k)}$ перейдем к новым аргументам, определенным соотношениями

$$\begin{cases} t = x_1 + x_2, \\ x = v_i x_1 + v_j x_2. \end{cases} \tag{7.32}$$

Обозначим

$$\begin{cases} u_{n_k}(x_1, x_2) = f_i^{(n_k)}(x, t), \\ w_{n_k}(x_1, x_2) = f_j^{(n_k)}(x, t). \end{cases} \tag{7.33}$$

Замена переменных (7.32) переводит прямую $(x + v_i\tau, \tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$ в линию $x_2 = \mathrm{const}$, а прямую $(x+v_j\tau, \tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$ — в линию $x_1 = \mathrm{const}$. Поскольку в силу (7.32), (7.33) выполнены соотношения

$$\frac{d}{d\tau} f_i^{(n_k)}(x + v_i\tau, \tau) = \partial_1 u_{n_k}, \quad x_2 = \mathrm{const}\,,$$

$$\frac{d}{d\tau} f_j^{(n_k)}(x + v_j\tau, \tau) = \partial_2 w_{n_k}, \quad x_1 = \mathrm{const}\,,$$

то из леммы 7.6 следует равномерная ограниченность относительно $n_k \in \mathbb{N}$ следующих интегралов:

$$\int\limits_{\Omega \cap (x_2 = \mathrm{const}\,)} |\partial_1 u_{n_k}|\, dx_1, \qquad \int\limits_{\Omega \cap (x_1 = \mathrm{const}\,)} |\partial_1 w_{n_k}|\, dx_2, \quad n_k \in \mathbb{N},$$

для любой компактной области Ω в $\mathbb{R}_2$. Тем самым устанавливается, что равномерно по $n_k \in \mathbb{N}$ ограничены нормы

$$\| \, \partial_1 u_{n_k} \, \|_1 \; (\Omega), \quad \| \, \partial_2 w_{n_k} \, \|_2 \; (\Omega).$$

Применяя к произведению функций $u_{n_k} w_{n_k}$ результат теоремы 7.3, получаем, что

$$f_i^{(n_k)} f_j^{(n_k)} \to f_i f_j, \quad n_k \to \infty \tag{7.34}$$

слабо в $L_2(\Omega)$ для любого компакта Ω в Π, если $v_i \neq v_j$.

Проинтегрируем (7.17) на Π с весом $\psi \in \Psi$. Учитывая принятые ранее обозначения, имеем

$$\iint\limits_{\Pi} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + v_i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) f_i^{(n_k)} + \psi S_{i,n_k} \right] dx dt +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}} \psi(x, 0) \varphi_i(x)\, dx = 0, \quad 1 \leq i \leq n_k. \tag{7.35}$$

Учитывая требования теоремы на $\sigma_{i,j}$, v_i в неравенстве (7.31) получаем оценку

$$\iint\limits_{\Pi} \sum_{j \geq l} \sigma_{i,j} |v_i - v_j| f_j^{(n_k)}(x, t) \psi(x, t)\, dx dt \leq \frac{C(i, \psi, M)}{l^{1-\gamma}}, \tag{7.36}$$

$$0 \le \gamma < 1, \quad l \in \mathbb{N},$$

где постоянная $C(i, \psi, M)$ от номера $n_k \in \mathbb{N}$ не зависит. Поскольку коэффициент $\Phi_{i,j} = 0$ для значений индексов i, j, когда $v_i = v_j$, то соотношение (7.34) обеспечивает слабую непрерывность операторов $S_{i,n}$ на последовательности $f^{(n_k)}$ при любых значениях индексов i, n, т. е. справедливо соотношение

$$S_{i,n}(f^{(n_k)}) \to S_{i,n}(f), \quad i \in \mathbb{N} \tag{7.37}$$

слабо в $L_2(\Omega)$ при $n_k \to \infty$, где $f = \{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, Ω — произвольный компакт в Π. Сочетая (7.36) и (7.37), имеем на Ω

$$S_i(f^{(n_k)}) \to S_i(f), \quad i \in \mathbb{N} \tag{7.38}$$

слабо в $L_2(\Omega)$ при $n_k \to \infty$. Переходя к пределу $n_k \to \infty$ в (7.35), с учетом (7.38) окончательно получаем

$$\iint\limits_{\Pi} \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + v_i\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) f_i + \psi S_i(f)\right] dxdt + \int\limits_{\mathbb{R}} \psi(x,0)\varphi_i(x)\,dx = 0$$
$$\forall\psi \in \Psi, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{7.39}$$

Значит, $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — обобщенное решение задачи (7.1), (7.2) при гладких начальных данных $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Переход к функциям $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, указанным в условиях теоремы, осуществляется посредством аппроксимации в метрике $L_2^{loc}(\mathbb{R})$ измеримых начальных данных гладкими функциями, на которых равномерно выполнены требуемые условиями теоремы оценки функций $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Переходя к пределу в (7.39) по подпоследовательности решений, соответствующих гладким начальным данным с учетом слабой непрерывности оператора S, получаем окончательное утверждение теоремы. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.8. Если последовательность скоростей свободного переноса $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, указанная в теореме, является ограниченной, то вместо условия (7.15) достаточно потребовать локальную суммируемость по мере Лебега dx на $\mathbb{R}$ ряда

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} i\varphi_i(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

СЛЕДСТВИЕ 7.1. *Обобщенное решение задачи* (7.1), (7.2) *почти везде на* Π *удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению вольтерровского вида*

$$f = T_t\varphi + \int\limits_0^t T_{t-\tau} \circ S(f(.,\tau)\,d\tau, \quad t \geq 0. \tag{7.40}$$

Действительно, соотношение (7.39) выполняется, если в качестве пробных функций ψ выбрать ограниченные почти везде на Π дифференцируемые финитные функции. Положим $x_0 \in \mathbb{R}$, $t_0 > 0$, $0 < h < t_0$. Обозначим

$$\theta_h(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq t_0 - h, \\ \dfrac{1}{h}(t_0 - t), & t_0 - h \leq t \leq t_0, \\ 0, & t \geq t_0. \end{cases}$$

Пусть ω_h — семейство $C^\infty(\mathbb{R})$ гладких финитных, неотрицательных усредняющих ядер в точке $x = 0$ и

$$\psi(x,t) = \omega_h(x - x_0 + v_i(t_0 - \tau))\theta_h(\tau).$$

Очевидно, ψ — ограниченная финитная почти везде дифференцируемая функция на Π. Подставляя ее в (7.39) и устремляя $h \to 0$, почти для всякой точки в Π получаем равенство (7.40). Последнее утверждение вытекает из теоремы Лебега [36, 81] для средних функций.

§ 7. Обобщенное решение пространственно неоднородного уравнения Смолуховского для непрерывных масс

Пусть в пространстве $\mathbb{R}_3$ в вязкой среде, заполненной частицами различной массы $\mu \in \mathbb{R}^+$, происходит процесс коагуляции при парных соударениях частиц с интенсивностью $\Phi(\mu,\mu_1) \geq 0$, где μ и μ_1 — массы сталкивающихся частиц. Если при этом частицы движутся между столкновениями вдоль оси $\mathcal{O}x = \{x, 0, 0\}$, $x \in \mathbb{R}_1$ под действием внешней силы с установившейся скоростью $\{v(\mu), 0, 0\}$, то принятой математической моделью указанного процесса является кинетическое уравнение Смолуховского для непрерывных масс [1]

$$\frac{\partial f(\mu,x,t)}{\partial t}+v(\mu)\frac{\partial f(\mu,x,t)}{\partial x}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\mu}\Phi(\mu-\mu_1,\mu_1)f(\mu-\mu_1,x,t)f(\mu_1,x,t)\,d\mu_1-$$

$$-f(\mu,x,t)\int\limits_0^{\infty}\Phi(\mu,\mu_1)f(\mu_1,x,t)\,d\mu_1,\quad x,\mu\geq 0,\quad t>0. \tag{7.41}$$

Для уравнения (7.41) рассматривается задача Коши с начальной функцией

$$f(\mu,x,0)=f^{(0)}(\mu,x),\quad \mu,x\in\Pi_0=\mathbb{R}_1^+\times\mathbb{R}_1. \tag{7.42}$$

Скорость начального переноса частиц v в физически реальных ситуациях имеет степенной характер [1], например, для сфер, падающих по закону Стокса,

$$v(\mu)\sim\mu^{2/3},\quad \mu\to\infty.$$

Аналогично рассмотренному выше случаю дискретных коагулирующих масс в задаче Коши (7.41), (7.42) также имеет место возникновение негладких особенностей решения при сколь угодно гладких начальных данных. Причина возникновения особенностей — взаимодействие свободного переноса частиц и их соударений. Поскольку конструкция примера, демонстрирующего механизм возникновения особенностей решения задачи (7.41), (7.42), полностью повторяет идеи §2 настоящей главы, то его описание опускаем.

Предметом дальнейшего исследования являются обобщенные решения задачи (7.41), (7.42), которые определим как решения нелинейного интегрального уравнения вольтерровского вида, получающегося из (7.41), (7.42) интегрированием вдоль характеристик. В отличие от случая дискретных масс условие обращения ядра коагуляции в нуль при одинаковых значениях аргументов ниже не накладывается, но взамен появляются ограничения на его рост и монотонность по каждому аргументу, что позволяет доказать корректность задачи Коши в подходящих пространствах. Кроме того, важным моментом для построения устойчивого решения является требование степенного роста скорости свободного переноса частиц на бесконечности. Подчеркнем, что математические методы построения обобщенного решения в рассматриваемой ситуации непрерывных масс коагулирующих частиц совершенно отличны от случая дискретных масс, что, прежде всего, обусловлено различной топологической природой пространства Ω состояний частиц в указанных задачах.

Фиксируем класс скоростей свободного переноса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.2. Непрерывная на $\mathbb{R}^+$ функция v принадлежит классу $\mathcal{V}$, если для нее можно указать такое число $a \in \mathbb{R}^+$, что при $\mu \geq a$ существует непрерывная производная v', поведение которой подчиняется неравенству

$$|v'(\mu)| \geq c(a)\mu^\gamma, \quad \mu \geq a$$

с постоянными $c(a) > 0$, $\gamma > -1$.

На пространстве $L_\infty(\Pi_0)$ функций f, имеющих ограниченный существенный максимум $\| f \|_\infty$ (Π_0), определим действие однопараметрической группы преобразований свободного переноса

$$T_t^v : L_\infty \to L_\infty,$$

$$t \in \mathbb{R}, \quad v \in \mathcal{V}$$

следующей формулой:

$$T_t^v(f)(\mu, x) = f(\mu, x - v(\mu)t), \quad (\mu, x) \in \Pi_0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.3. Множество начальных данных Σ_0 состоит из функций $f_0 \in L_\infty(\Pi_0)$ почти везде неотрицательных на Π_0 и подчиняющихся условиям

$$\int\limits_{\Pi_0} (1+\mu) f^{(0)}(\mu, x)\, d\mu \otimes dx < \infty, \quad \sup_{0 \leq t \leq T} \int\limits_{\mathbb{R}+} T_t^v f^{(0)}\, d\mu < \infty,$$

$$\forall T \in \mathbb{R}^+, \quad v \in \mathcal{V}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.4. Обозначим $\mathcal{K}$ класс непрерывных, симметричных, ограниченных на $\mathbb{R}_2^+$ функций $\Phi : \mathbb{R}_2^+ \to \mathbb{R}_1^+$ таких, что при каждом $\mu_1 \in \mathbb{R}_1^+$ функция $\Phi(.,\mu_1) : \mu \mapsto \Phi(\mu,\mu_1)$ неубывающая, когда $\mu \geq \mu_1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.5. Назовем обобщенным решением задачи (7.41), (7.42) измеримую функцию f на множестве

$$\Pi = \{(\mu, x, t) \in \mathbb{R}_1^+ \times \mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}_1^+\},$$

удовлетворяющую почти везде (в смысле лебеговой меры $d\mu \otimes dx \otimes dt$) на Π интегральному уравнению вольтерровского вида

$$f(\mu,x,t) = T_t^v(f^{(0)})(\mu,x) + \int\limits_0^t T_{t-\tau}^v \circ S(f(.,.,t)(\mu,x)\, d\tau, \quad t \geq 0, \tag{7.43}$$

где S — оператор столкновений коагуляции, определенный соотношением (0.5).

Пусть Θ — функция Хевисайда на $\mathbb{R}$,

$$\chi_n(\mu) \stackrel{def}{=} 1 - \Theta(\mu - n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для построения решения уравнения (7.43) рассмотрим вспомогательные задачи, которые получены из (7.43) заменой оператора $S(f)$ на $S_n(f) \stackrel{def}{=} \chi_n S(\chi_n f)$ $(n \in \mathbb{N})$:

$$f_n = T_t^v(\chi_n f^{(0)}) + \int\limits_0^t T_{t-\tau}^v \circ S_n(f_n(.,.,\tau))\, d\tau, \tag{7.44}$$

$$t \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Перейдем к рассмотрению условий корректности задачи (7.44) при $t \geq 0$. Построение решения в целом существенно использует принцип максимума (теорема 3.7).

§ 8. Корректность задачи (7.44)

В этом параграфе основным результатом является доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 7.4. *Пусть функция $f^{(0)} \in L_\infty(\Pi_0) \cap C(\Pi_0)$ имеет на Π_0 непрерывную производную по переменной $x \in \mathbb{R}$ и предположим,* *что* $f^{(0)} \geq 0$, $\Phi \in \mathcal{K}$. *Тогда при каждом номере* $n \in \mathbb{N}$ *уравнение* (7.44) *обладает на*

$$\Pi_n = I_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \qquad I_n = \{\mu : 0 \leq \mu \leq n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

единственным непрерывным решением f_n, *которое непрерывно дифференцируемое по* x, t, *неотрицательное на* Π_n, $n \in \mathbb{N}$ *и подчиняется неравенству*

$$\| f_n \|_\infty (\Pi_n) \leq \| f^{(0)} \|_\infty (\Pi_0) \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{7.45}$$

Доказательству этой теоремы предпошлем ряд вспомогательных утверждений.

При каждом номере $n \in \mathbb{N}$ оператор S_n, определенный в §7, действует как отображение

$$S_n : L_\infty(\Pi_0) \to L_\infty(\Pi_0),$$

и является локально липшиц-непрерывным в норме $\| \ . \ \|_\infty \ (\Pi_0)$ в силу своей квадратичности и конечности области интегрирования за счет обрезающего множителя χ_n, $n \in \mathbb{N}$. Поскольку носители $S_n(f)$ и $\chi_n f^{(0)}$ сосредоточены на интервале $I_n = \{\mu : 0 \leq \mu \leq n, n \in \mathbb{N}\}$, то уравнение (7.44) можно рассматривать на множестве аргументов Π_n, ибо на $\Pi \backslash \Pi_n$ решение $f_n \equiv 0$. Отметим, что в силу требований на класс ядер $\Phi \in \mathcal{K}$ оператор S_n переводит множество непрерывных функций $C(I_n)$ в себя.

ЛЕММА 7.8. *Пусть непрерывная неотрицательная функция* f *на отрезке* I_n, $n \in \mathbb{N}$ *достигает наибольшее значение в точке* $\mu^* \in I_n$. *Тогда при любом ядре* $\Phi \in \mathcal{K}$ *справедливо неравенство* $S_n(f)(\mu^*) \leq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу симметричности функции Φ справедливо равенство

$$S_n(f)(\mu) = \int\limits_0^{\mu/2} \Phi(\mu - \mu_1, \mu_1) f(\mu - \mu_1) f(\mu_1)\, d\mu_1 -$$

$$-f(\mu) \int\limits_0^{n} \Phi(\mu, \mu_1) f(\mu_1)\, d\mu_1,$$

$$0 \leq \mu \leq n \in \mathbb{N}.$$

Выделим из вычитаемого в правой части этого соотношения величину

$$-f(\mu)\int\limits_0^{\mu}\Phi(\mu,\mu_1)f(\mu_1)\,d\mu_1,$$

которую объединим с уменьшаемым. Таким образом,

$$S_n(f)(\mu^*)=\int\limits_0^{\mu^*/2}[\Phi(\mu^*-\mu_1,\mu_1)f(\mu^*-\mu_1)-$$

$$-\Phi(\mu^*,\mu_1)f(\mu^*)]\,f(\mu_1)\,d\mu_1-f(\mu^*)\int\limits_{\mu^*}^{n}\Phi(\mu^*,\mu_1)f(\mu_1)\,d\mu_1.$$

Первое слагаемое в правой части полученного равенства неположительное, т. к.

$$f(\mu^*)\geq f(\mu^*-\mu_1),\quad 0\leq\mu_1\leq\mu^*,$$

и кроме того

$$\Phi(\mu^*-\mu_1,\mu_1)\leq\Phi(\mu^*,\mu_1),\quad 0\leq\mu_1\leq\frac{\mu^*}{2}$$

за счет монотонного возрастания функции $\Phi(\mu,\mu_1)$ по аргументу μ при $\mu\geq\mu_1$. Из неотрицательности f и Φ следует неположительность второго слагаемого. Таким образом,

$$S_n(f)(\mu^*)\leq 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 7.9. *Пусть $v\in C(\mathbb{R})$, $f^{(0)}\in L_\infty(\Pi_0)\cap C(\Pi_0)$ и имеет на Π_0 непрерывную производную по переменной $x\in\mathbb{R}$. Тогда уравнение* (7.44) *имеет локальное решение при $t\geq 0$, причем интервал существования решения пропорционален $\parallel f^{(0)}\parallel_\infty^{-1}(\Pi_0)$, а само решение непрерывно зависит от $f^{(0)}$ в топологии равномерной сходимости на компактах.*

Утверждение леммы получается применением теоремы о неподвижной точке для локально сжимающего в L_∞ оператора, определенного правой частью (7.44). Поскольку постоянная сжатия пропорциональна $\tau\parallel f^{(0)}\parallel_\infty(\Pi_0)$, где $\tau>0$ — длина интервала существования решения, то $\tau\sim\parallel f^{(0)}\parallel_\infty^{-1}(\Pi_0)$. Характер зависимости решения от начальных данных обусловлен ограниченностью функции v при $0 \leq \mu \leq n$, что определяет наклон поля характеристик для оператора переноса

$$\frac{\partial}{\partial t} + v(\mu)\frac{\partial}{\partial x}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7.4. Неотрицательность локального решения доказывается посредством аппроксимации неотрицательных начальных данных строго положительными функциями. Свойство положительности наследуется на решении при $t > 0$, что устанавливается методом, аналогичным рассуждениям леммы 7.4. В силу устойчивости локального решения предельный переход по положительным начальным данным, стремящимся к неотрицательной начальной функции, приводит к неотрицательности соответствующего решения.

Получим теперь оценку (7.45), которая позволяет построить продолжение локального неотрицательного решения на все $t \in \mathbb{R}^+$.

Рассмотрим сначала случай начальной функции $f^{(0)}$, являющейся финитной по $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям теоремы. В силу ограниченности функции v при $\mu \in I_n$, $n \in \mathbb{N}$, локальное решение наследует свойства начальных данных на интервале существования. Пусть величина $T > 0$ находится внутри интервала существования этого решения. Рассмотрим цилиндр

$$\bar{Q}(T) = \left\{(\mu, x, t) : |x| \leq X,\ \mu \in I_n,\ 0 \leq t \leq T,\ T > 0,\ X > 0\right\},$$

который выберем так, чтобы $f_n \equiv 0$ при $|x| \geq X$, $0 \leq t \leq$T. Фиксируем $t \in (0, T]$ и рассмотрим точки $(\mu^*, x, t) \in \bar{Q}(T)$, в которых

$$f_n(\mu^*, x, t) = \max_{\substack{(\mu, x) \\ (\mu^*, x, t) \in \bar{Q}(T) \cap t = \text{const}}} f_n(\mu, x, t \in \bar{Q}(T)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Очевидно,

$$\frac{\partial f_n(\mu^*, x, t)}{\partial x} = 0,$$

а в силу леммы 7.8

$$S_n(f_n)(\mu^*, x, t) \leq 0.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial f_n(\mu^*, x, t)}{\partial t} \leq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Применяя принцип максимума из теоремы 3.7, имеем

$$\max_{\bar{Q}(T)} f_n \leq \max_{(\mu,x)\in\bar{Q}(0)} f_n^{(0)}(\mu, x), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{7.46}$$

Аппроксимируем начальные данные $f^{(0)}$ в теореме 7.4 последовательностью финитных неотрицательных функций, равномерно сходящихся к $f^{(0)}$ на компактах в Π_0. Сочетая свойство устойчивости решения и оценку (7.46) для финитных начальных данных, получаем оценку (7.45). Тем самым имеем возможность продолжения локального решения на неотрицательные значения времени t. Теорема доказана.

§ 9. Оценки решения задачи (7.44)

Обозначим $L_1^{(T)}$, $T \geq 0$ пространство классов эквивалентности вещественных измеримых функций на $\Pi(T) = \Pi_0 \times [0, T]$, имеющих ограниченную норму

$$\| f \|^{(T)} = \sup_{0\leq t\leq T} \int\limits_{\Pi_o} |f(\mu, x, t)|\, d\mu \otimes dx.$$

ЛЕММА 4.10. *При каждом номере $n \in \mathbb{N}$ и $T \geq 0$ для непрерывных на Π_n неотрицательных решений уравнения* (7.44) $f_n^{(1)}$ *и* $f_n^{(2)}$ *справедлива оценка*

$$\| f_n^{(1)} - f_n^{(2)} \|^{(T)} \leq c \| f_n^{(1)}(.,0) - f_n^{(2)}(.,0) \|^{(0)}, \tag{7.47}$$

где постоянная c зависит от n, $\| \Phi \|_\infty$, а также от значений

$$\max\{\| f_n^{(1)}(.,0) \|_\infty (\Pi_0), \ \| f_n^{(2)}(.,0) \|_\infty (\Pi_0)\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливо равенство

$$(f_n^{(1)} - f_n^{(2)})|_{(\mu,x,t)} = T_t^v[\chi_n(f_n^{(1)}(.,0) - f_n^{(2)}(.,0))]|_{(\mu,x)} +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^t T^v_{t-\tau}\left\{\int\limits_0^\mu \Phi(\mu-\mu_1,\mu_1)[f_n^{(1)}(\mu-\mu_1,.,\tau)-f_n^{(2)}(\mu-\mu_1,.,\tau)]\times\right.$$

$$\times[f_n^{(1)}(\mu,.,\tau)+f_n^{(2)}(\mu,.,\tau)]\,d\mu_1-$$

$$-[f_n^{(1)}(\mu,.,\tau)-f_n^{(2)}(\mu,.,\tau)]\times$$

$$\times\int\limits_0^n \Phi(\mu,\mu_1)[f_n^{(1)}(\mu_1,.,\tau)+f_n^{(2)}(\mu_1,.,\tau)]\,d\mu_1-$$

$$-[f_n^{(1)}(\mu,.,\tau)+f_n^{(2)}(\mu-,.,\tau)]\times$$

$$\left.\times\int\limits_0^n \Phi(\mu,\mu_1)[f_n^{(1)}(\mu_1,.,\tau)-f_n^{(2)}(\mu_1,.,\tau)]\,d\mu_1\right\}|_x\,d\tau,\qquad n\in\mathbb{N}.$$

В силу оценки (7.45) получаем

$$|f_n^{(1)}-f_n^{(2)}|\le T_t^v|\chi_n(f_n^{(1)}(.,0)-f_n^{(2)}(.,0))|+$$

$$+\parallel\Phi\parallel_\infty\max\{\parallel f_n^{(1)}(.,0)\parallel_\infty(\Pi_0),\parallel f_n^{(2)}(.,0)\parallel_\infty(\Pi_0)\}\times$$

$$\times\int\limits_0^t T^v_{t-\tau}\chi_n\left\{\int\limits_0^\mu |f_n^{(1)}(\mu_1,.,\tau)-f_n^{(2)}(\mu_1,.,\tau)|\,d\mu_1+\right.$$

$$+|f_n^{(1)}(\mu,.,\tau)-f_n^{(2)}(\mu,.,\tau)|n+$$

$$\left.+\int\limits_0^n |f_n^{(1)}(\mu_1,.,\tau)-f_n^{(2)}(\mu_1,.,\tau)|\,d\mu_1\right\}d\tau,\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Учитывая, что $f_n^{(1)}$и $f_n^{(2)}$ обращаются в нуль при $\mu>n$, проинтегрируем обе части последнего неравенства по мере $d\mu\otimes dx$ на Π_0:

$$\int\limits_{\Pi_0} |f_n^{(1)}(\mu,x,t) - f_n^{(2)}(\mu,x,t)|\, d\mu \otimes dx \leq$$

$$\leq \int\limits_{\Pi_0} |f_n^{(1)}(\mu,x,0) - f_n^{(2)}(\mu,x,0)|\, d\mu \otimes dx +$$

$$+ \parallel \Phi \parallel_\infty \max\{\parallel f_n^{(1)}(.,0) \parallel_\infty (\Pi_0), \parallel f_n^{(2)}(.,0) \parallel_\infty (\Pi_0)\}\times$$

$$\times 3n \int\limits_0^t \int\limits_{\Pi_0} |f_n^{(1)}(\mu,x,\tau) - f_n^{(2)}(\mu,x,\tau)|\, d\mu \otimes dx d\tau, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Применяя в этом неравенстве лемму Гронуолла [39] к переменной

$$\int\limits_{\Pi_0} |f_n^{(1)}(\mu,x,t) - f_n^{(2)}(\mu,x,t)|\, d\mu \otimes dx,$$

предполагая финитность и гладкость $f_n^{(1)}(.,0)$, $f_n^{(2)}(.,0)$, имеем

$$\int\limits_{\Pi_0} |f_n^{(1)}(\mu,x,t) - f_n^{(2)}(\mu,x,t)|\, d\mu \otimes dx \leq \parallel f_n^{(1)}(.,0) - f_n^{(2)}(.,0) \parallel^{(0)} \times$$

$$\times \exp\{3n \parallel \Phi \parallel_\infty \max[\parallel f_n^{(1)}(.,0) \parallel_\infty (\Pi_0), \parallel f_n^{(2)}(.,0) \parallel_\infty (\Pi_0)]T\},$$

$$0 \leq t \leq T, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Прямым следствием этой оценки является (7.47). Аппроксимируя начальные данные последовательностью финитных функций, предельным переходом получаем утверждение леммы. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 7.2. *Поскольку множество начальных данных* $f^{(0)}$ *из теоремы* 7.4 *всюду плотное в* $L_1^{(0)}(\Pi_0) \cap L_\infty^+(\Pi_0)$ *относительно нормы* $\| \,.\, \|^{(0)}$, *то в силу оценки* (7.47) *уравнение* (7.44) *имеет единственное решение в* $L_\infty(\Pi)$ *при начальной функции* $f^{(0)} \in L_\infty^+(\Pi_0)$, *которая почти везде неотрицательная на* Π_0, *причем на этом решении выполняется оценка, указанная в теореме* 7.4.

ЛЕММА 7.11. *На неотрицательных решениях f_n, $n \in \mathbb{N}$, уравнения* (7.44) *имеют место оценки*

$$\int\limits_{\Pi_0} (1+\mu) f_n(\mu, x, t)\, d\mu \otimes dx \leq \int\limits_{\Pi_0} (1+\mu) f^{(0)}(\mu, x)\, d\mu \otimes dx, \quad t \geq 0. \tag{7.48}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что для неотрицательной функции f справедливы неравенства

$$\int\limits_0^n S_n(f)\, d\mu \leq 0, \qquad \int\limits_0^n S_n(f)\mu\, d\mu \leq 0, \tag{7.49}$$

$$n \in \mathbb{N},$$

обусловленные неотрицательностью и симметричностью Φ. Для финитных по переменной $x \in \mathbb{R}$ решений уравнения (7.44) имеют место формулы

$$\int\limits_{\mathbb{R}} (1+\mu) f_n(\mu, x, t)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}} (1+\mu) \chi_n f^{(0)}(\mu, x)\, dx + \tag{7.50}$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} (1+\mu) S_n(f^{(n)}(., x, \tau))\, dx d\tau, \quad t \geq 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Это соотношение обусловлено тем, что группа T_t^v действует на функции только по переменной x как оператор сдвига

$$x \mapsto x - v(\mu)t.$$

Интегрируя тождество (7.50) по переменной μ с учетом неравенства (7.49), получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_0^n (1+\mu) f_n(\mu, x, t)\, d\mu dx \leq \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}^+} (1+\mu) f^{(0)}(\mu, x, t)\, d\mu dx, \tag{7.51}$$

$$t \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство леммы завершаем предельным переходом по последовательности финитных начальных данных, сходящихся в норме $\| \,.\, \|^{(0)}$, поскольку (7.51) переходит в (7.48). Лемма доказана.

Перейдем теперь к получению оценки интегралов

$$\int\limits_{\mathbb{R}^+} f_n(\mu, x, t)\, d\mu,$$

равномерной по $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, что является ключевым моментом для построения решения задачи (7.43).

ЛЕММА 7.12. *Пусть* $(v, \Phi) \in \mathcal{V} \times \mathcal{K}$, $f^{(0)} \in \Sigma_0 \cap C(\Pi_0)$. *Тогда для последовательности решений задачи* (7.44) *на любом промежутке изменения времени* $0 \le t \le T$ *можно указать такую постоянную* $c(T) < \infty$, *не зависящую от номера* $n \in \mathbb{N}$, *что*

$$\sup_{\substack{0 \le t \le T,\\ x \in \mathbb{R}}} \int\limits_{\mathbb{R}^+} f_n(\mu, x, t)\, d\mu \le c(T), \quad n \in \mathbb{N}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу неотрицательности функции f_n отбрасыванием неположительных членов в правой части (7.44) получаем неравенство

$$f_n(\mu, x, t) \le f^{(0)}(\mu, x - v(\mu)t) + \frac{1}{2} \| \Phi \|_\infty \times \tag{7.52}$$

$$\times \chi_n(\mu) \int\limits_0^t T^v_{t-\tau} \left\{ \int\limits_0^\mu f_n(\mu - \mu_1, ., \tau) f_n(\mu_1, ., \tau)\, d\mu_1 \right\} d\tau,$$

$$n \in \mathbb{N}, \quad t \ge 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Обозначим

$$g_n(\mu, x, t) = \chi_n(\mu) \int\limits_0^\mu f_n(\mu - \mu_1, x, \tau) f_n(\mu_1, x, \tau)\, d\mu_1.$$

Пусть величины $1 < p, q < +\infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Из неравенства Гельдера следует соотношение [36]

$$\int_a^\infty T^v_{t-\tau} g_n(\mu,.,\tau)\,d\mu \le \left\{\int_a^\infty T^v_{t-\tau} g_n(\mu,.,\tau)[|v'(\mu)|(1+\mu)]^{1-p}\,d\mu\right\}^{1/p} \times$$

$$\times \left\{\int_a^\infty T^v_{t-\tau} g_n(\mu,.,\tau)|v'(\mu)|(1+\mu)\,d\mu\right\}^{1/q},$$

$$a>0, \quad n\in\mathbb{N}, \quad t\ge 0, \quad x\in\mathbb{R}.$$

При получении этого неравенства в левой части его использовалось тождество

$$\frac{[|v'(\mu)|(1+\mu)]^{1/q}}{[|v'(\mu)|(1+\mu)]^{1/q}} \equiv 1,$$

причем знаменатель возводился в степень p в правой части оценки, а числитель соответственно — в степень q. Усилим имеющуюся оценку

$$\int_a^\infty T^v_{t-\tau} g_n(\mu,.,\tau)\,d\mu \le \left\{\int_a^\infty \sup_{\xi\in\mathbb{R}} g_n(\mu,\xi,\tau)[|v'(\mu)|(1+\mu)]^{1-p}\,d\mu\right\}^{1/p} \times$$

$$\times \left\{\int_a^\infty T^v_{t-\tau} \sup_{\eta\in\mathbb{R}}(1+\eta) g_n(\eta,.,\tau)|v'(\mu)|(1+\mu)\,d\mu\right\}^{1/q}, \qquad (7.53)$$

$$a>0, \quad n\in\mathbb{N}, \quad t\ge 0, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Оценим выражения, входящие в правую часть неравенства (7.53). Поскольку для функций $\{f_n\}$ имеет место неравенство

$$\| f_n \|_\infty (\Pi) \le \| f^{(0)} \|_\infty (\Pi_0), \quad n\in\mathbb{N},$$

то справедлива оценка

$$g_n(\mu,x,t) \le \| \Phi \|_\infty \| f^{(0)} \|_\infty (\Pi_0)\mu,$$

при $n \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}^+$. Учитывая требования на класс $\mathcal{V}$ скоростей свободного переноса и предыдущее соотношение, получаем

$$\int\limits_a^\infty \sup_{\xi\in\mathbb{R}} g_n(\mu,\xi,\tau)[|v'(\mu)|(1+\mu)]^{1-p}\,d\mu \leq C\int\limits_a^\infty \chi_n(\mu)[(1+\mu)\mu^\gamma]^{1-p}\mu\,d\mu, \tag{7.54}$$

$$a>0,\quad n\in\mathbb{N},\quad \tau\geq 0,\quad x\in\mathbb{R},\quad \gamma>-1,$$

где постоянная C от номера $n \in \mathbb{N}$ не зависит.

Перейдем к оцениванию второго сомножителя в правой части соотношения (7.53):

$$(1+\eta)g_n(\eta,x,\tau) \leq \|\,\Phi\,\|_\infty\,(1+\eta)\int\limits_0^\eta f_n(\eta-\mu_1,x,\tau)f_n(\mu_1,x,\tau)\,d\mu_1 =$$

$$=\|\,\Phi\,\|_\infty\int\limits_0^\eta (1+\eta-\mu_1+\mu_1)f_n(\eta-\mu_1,x,\tau)f_n(\mu_1,x,\tau)\,d\mu_1 =$$

$$=\|\,\Phi\,\|_\infty\left[\int\limits_0^\eta (1+\eta-\mu_1)f_n(\eta-\mu_1,x,\tau)f_n(\mu_1,x,\tau)\,d\mu_1+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^\eta \mu_1 f_n(\eta-\mu_1,x,\tau)f_n(\mu_1,x,\tau)\,d\mu_1\right],$$

$$n\in\mathbb{N},\quad \eta,\quad \tau\geq 0,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Пользуясь симметричностью свертки, преобразуем правую часть этого соотношения:

$$(1+\eta)g_n(\eta,x,\tau) \leq \|\,\Phi\,\|_\infty\left[\int\limits_0^\eta (1+\mu_1)f_n(\eta-\mu_1,x,\tau)f_n(\mu_1,x,\tau)\,d\mu_1+\right.$$

$$+\int\limits_0^\eta \mu_1 f_n(\eta-\mu_1,x,\tau) f_n(\mu_1,x,\tau)\,d\mu_1\Bigg].$$

Увеличивая второе слагаемое и пользуясь равномерной оценкой (7.45) существенного максимума функций $\{f_n\}$, имеем

$$\sup_{\eta\in\mathbb{R}}(1+\eta)g_n(\eta,x,\tau)\le 2\parallel\Phi\parallel_\infty\parallel f^{(0)}\parallel_\infty(\Pi_0)\int\limits_0^\eta(1+\mu)f_n(\mu,x,\tau)\,d\mu, \tag{7.55}$$

$$n\in\mathbb{N},\quad \tau\ge 0,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Усилим неравенство (7.53) за счет (7.54), (7.55).

$$\int\limits_a^\infty T^v_{t-\tau}g_n(\mu,.,\tau)\,d\mu\le C\left\{\int\limits_a^\infty \chi_n(\mu)[(1+\mu)\mu^\gamma]^{1-p}\mu\,d\mu\right\}^{1/p}\times$$

$$\times\left\{\int\limits_{\Pi_0}(1+\mu)f_n(\mu,x,\tau)\,d\mu d\xi\right\}^{1/q}(t-\tau)^{-1/q},\quad 1<p,q<+\infty,$$

$$p^{-1}+q^{-1}=1,\quad \gamma>-1,\quad a>0,\quad n\in\mathbb{N},\quad t-\tau>0,\quad x\in\mathbb{R}.$$

В этом неравенстве постоянная C от номера $n\in\mathbb{N}$ не зависит. При получении выражения во втором сомножителе во время интегрирования выполнена замена переменных

$$\mu\mapsto\xi=x-v(\mu)(t-\tau),$$

где величины x,t,τ считаются фиксированными параметрами, причем область интегрирования по переменной ξ расширена на все ее допустимые значения. Равномерная оценка (7.48) из леммы 7.11 в сочетании с предыдущим выражением приводит к неравенству

$$\int\limits_a^\infty T^v_{t-\tau}g_n(\mu,.,\tau)\,d\mu\le C\left\{\int\limits_a^\infty \chi_n(\mu)[(1+\mu)\mu^\gamma]^{1-p}\mu\,d\mu\right\}^{1/p}(t-\tau)^{-1/q},$$

при $a > 0,\ n \in \mathbb{N},\ t - \tau > 0,\ x \in \mathbb{R}$; постоянная C не зависит от номера $n \in \mathbb{N}$. Выберем величину $p > 1$ достаточно большой, при которой сходится интеграл

$$\int_a^\infty [(1+\mu)\mu^\gamma]^{1-p}\mu\, d\mu, \quad a > 0.$$

Тем самым обеспечивается равномерная относительно номера $n \in \mathbb{N}$ оценка

$$\int_a^\infty T^v_{t-\tau} g_n(\mu, ., \tau)\, d\mu \le \text{ const } (t-\tau)^{-1/q}, \tag{7.56}$$

$$a > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad t - \tau > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

где величина $q > 1$.

Учитывая оценки (7.45), (7.56), устанавливаем

$$\int_0^t \int_a^\infty T^v_{t-\tau} g_n(\mu, ., \tau)\, d\mu d\tau \le C \quad n \in \mathbb{N},\ t \ge 0,\ x \in \mathbb{R}, \tag{7.57}$$

где постоянная C не зависит от $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Интегрируя неравенство (7.52) по переменной $\mu \in \mathbb{R}^+$ с применением (7.57) и условий на класс начальных данных Σ_0, убеждаемся в справедливости леммы. Лемма доказана.

§ 10. Корректность задачи (7.43)

ТЕОРЕМА 7.5. *Пусть* $(f^{(0)}, v, \Phi) \in (\Sigma_0 \cap C(\Pi_0)) \times \mathcal{V} \times \mathcal{K}$. *Тогда последовательность* $\{f_n\}$ *решений задачи* (7.44) *фундаментальная в пространстве* $L_1^{(T)}$ *при любом* $T \in \mathbb{R}^+$, *а предел этой последовательности в* $L_1^{(T)}$ *состоит из класса эквивалентных по мере Лебега* $d\mu \otimes dx \otimes dt$ *на* Π *обобщенных решений задачи Коши* (7.41), (7.42).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим разность $z = f_n - f_m$, где f_n и f_m — решения задачи (7.44), $m \ge n$. Обозначим

$$z^{(0)} = (f_n - f_m)|_{t=0}, \quad \psi = f_n + f_m,$$

$$\| \cdot \| \stackrel{def}{=} \| \cdot \|^{(0)} .$$

Из (7.44) следует неравенство

$$\| z(.,.,t) \| \leq \| z^{(0)} \| + \int\limits_0^t \| S_n(f_n) - S_m(f_m) \| \, d\tau, \quad t \geq 0. \tag{7.58}$$

Подчеркнем, что операторы S_n, S_m действуют на функции только по аргументу $\mu \in \mathbb{R}^+$. Поэтому в дальнейших выкладках аргументы x, t всюду, где они являются формальными параметрами, будем опускать, восстанавливая их по мере необходимости. В силу определения операторов S_n, S_m имеем

$$|S_n(f_n) - S_m(f_m)| = |\chi_n S_n(f_n) - \chi_m S_m(f_m)| \leq$$

$$\leq \chi_n |S_n(f_n) - S_m(f_m)| + (\chi_n - \chi_m)|S_n(f_n)|,$$

$$m \geq n, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Интегрируя это неравенство по $\mu \in \mathbb{R}^+$, получаем

$$\int\limits_0^\infty |S_n(f_n) - S_m(f_m)| \, d\mu \leq \int\limits_0^\infty |S(f_n) - S(f_m)| \, d\mu +$$

$$+ \int\limits_0^\infty (\chi_m - \chi_n)|S_m(f_m)| \, d\mu, \tag{7.59}$$

$$m \geq n, \quad m, \; n \in \mathbb{N}.$$

Для суммируемых на множестве $\{\mu\} \in \mathbb{R}^+$ функций u, w справедливо неравенство

$$\int\limits_0^\infty |S(u) - S(w)| \, d\mu \leq \frac{3}{2} \| \Phi \|_\infty \int\limits_0^\infty |u + w| \, d\mu \int\limits_0^\infty |u - w| \, d\mu. \tag{7.60}$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty |S(f_n) - S(f_m)|\, d\mu \le \frac{3}{2} \parallel \Phi \parallel_\infty \int_0^\infty \psi \, d\mu \int_0^\infty |z| \, d\mu, \quad t \ge 0.$$

Учитывая здесь равномерную ограниченность интегралов

$$\int_0^\infty f_n(\mu, x, \tau)\, d\mu$$

относительно изменения $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0, T]$, что установлено в лемме 7.12, получаем

$$\int_0^\infty |S(f_n) - S(f_m)|\, d\mu \le C \int_0^\infty |z| \, d\mu, \quad t \in [0, T],$$

где постоянная C не зависит от m, n, x, t. Интегрируя это соотношение по x на $\mathbb{R}$, имеем

$$\int_{\Pi_0} |S(f_n) - S(f_m)|\, d\mu \otimes dx \le \text{ const } \parallel z \parallel, \quad t \in [0, T]. \tag{7.61}$$

Оценивая последнее слагаемое в правой части (7.59), приходим к соотношению

$$\int_0^\infty (\chi_m - \chi_n)|S(f_m)|\, d\mu \le \int_n^\infty |S(f_m)|\, d\mu \le$$

$$\le \frac{1}{2} \int\int_{\mu+\mu_1 \ge n} \Phi(\mu_1, \mu)|f_m(\mu)||f_m(\mu_1)|\, d\mu d\mu_1 +$$

$$+ \int_n^\infty \int_0^\infty \Phi(\mu_1, \mu)|f_m(\mu)||f_m(\mu_1)|\, d\mu d\mu_1,$$

$$m \ge n, \quad m,\ n \in \mathbb{N}.$$

Усилим это неравенство, увеличивая область интегрирования в слагаемых его правой части:

$$\int\limits_0^\infty (\chi_m - \chi_n)|S(f_m)|\,d\mu \le 2 \int\limits_{n/2}^\infty \int\limits_0^\infty \Phi(\mu_1, \mu)|f_m(\mu)||f_m(\mu_1)|\,d\mu d\mu_1 \le$$

$$\le 2 \parallel \Phi \parallel_\infty \int\limits_0^\infty |f_m(\mu)|\,d\mu \int\limits_{n/2}^\infty |f_m(\mu_1)|\,d\mu_1,$$

$$m \ge n, \quad m,\ n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^\infty (\chi_m - \chi_n)|S(f_m)|\,d\mu \le 2 \parallel \Phi \parallel_\infty \int\limits_0^\infty f_m(\mu)\,d\mu \int\limits_{n/2}^\infty f_m(\mu_1)\,d\mu_1,$$

$$m \ge n, \quad m,\ n \in \mathbb{N}.$$

Дальнейшее усиление этого неравенства произведем за счет равномерной оценки интегралов из леммы 7.12. При $t \in [0, T]$ имеем

$$\int\limits_0^\infty (\chi_m - \chi_n)|S(f_m)|\,d\mu \le C \int\limits_{n/2}^\infty f_m(\mu_1)\,d\mu_1, \quad m \ge n,\ m,\ n \in \mathbb{N},$$

где постоянная C не зависит от $m \ge n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, следовательно,

$$\parallel (\chi_m - \chi_n) S(f_m)|_t \parallel \le C \int\limits_{-\infty}^\infty dx \int\limits_{n/2}^\infty f_m(\mu, x, t)\,d\mu, \tag{7.62}$$

$$m \ge n, \quad m,\ n \in \mathbb{N}, \quad t \in [0, T],$$

(постоянная C от номеров не зависит). Интегрируя неравенство (7.59) по аргументу $x \in \mathbb{R}$ с учетом соотношений (7.61), (7.62), получаем

$$\parallel S(f_n)|_t - S(f_m)|_t \parallel \le C[\parallel z(.,.,t) \parallel + \int\limits_{-\infty}^\infty dx \int\limits_{n/2}^\infty f_m(\mu, x, t)\,d\mu], \tag{7.63}$$

где $m \geq n$, $m, n \in \mathbb{N}$, $t \in [0, T]$, а постоянная C от номеров не зависит. Последнее слагаемое в правой части (7.63) оценим, воспользовавшись леммой 7.11:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{n/2}^{\infty} \Big(1 + \frac{n}{2}\Big) f_m(\mu, x, t)\, d\mu \leq \int_{\Pi_0} (1+\mu) f_m(\mu, x, t) d\mu \otimes dx \leq$$

$$\leq \int_{\Pi_0} (1+\mu) f^{(0)}(\mu, x, t)\, d\mu \otimes dx,$$

$$m \geq n, \quad m,\ n \in \mathbb{N}, \quad t \in [0, T].$$

Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{n/2}^{\infty} f_m(\mu, x, t)\, d\mu \leq C \Big(1 + \frac{n}{2}\Big)^{-1}, \tag{7.64}$$

$$m \geq n, \quad m,\ n \in \mathbb{N}, \quad t \in [0, T].$$

где постоянная C от номеров не зависит. Сочетая (7.58), (7.63), (7.64), получаем

$$\| z(.,.,t) \| \leq \| z^{(0)} \| + C\Big[\Big(1 + \frac{n}{2}\Big)^{-1} T + \int_0^t \| z(.,.,\tau) \|\ d\tau\Big], \tag{7.65}$$

$$n \in \mathbb{N}, \quad t \in [0, T]$$

(постоянная C от номеров не зависит). Применением леммы Гронуолла [39] на отрезке $t \in [0, T]$ обеспечиваем оценку

$$\sup_{[0,T]} \| z(.,.,t) \| \leq (\| z^{(0)} \| + \Big(1 + \frac{n}{2}\Big)^{-1} T) \exp(CT), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку $\| z^{(0)} \| \to 0$ при $n \to \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ можно указать $N(\varepsilon)$ такое, что при $m \geq n \geq N(\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$\sup_{[0,T]} \| z(.,.,t) \| < \varepsilon.$$

Следовательно, последовательность $\{f_n\}$ фундаментальная в пространстве $L_1^{(T)}$ при каждом $T > 0$. В силу полноты $L_1^{(T)}$ последовательность $\{f_n\}$ сходится в $L_1^{(T)}$. Таким образом, можно указать подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, которая почти везде на Π сходится к неотрицательной функции f, причем в силу (7.45)

$$\| f \|_\infty (\Pi) \leq \| f^{(0)} \|_\infty (\Pi_0).$$

Примененив теорему Фату [36] в сочетании с леммой 7.12, получаем

$$\sup_{\substack{0 \leq t \leq T, \\ x \in \mathbb{R}}} \int_0^\infty f(\mu, x, \tau)\, d\mu \leq C(T). \tag{7.66}$$

Из неравенства (7.64) следует оценка

$$\int_{-\infty}^\infty dx \int_{n/2}^\infty f(\mu, x, t)\, d\mu \leq \text{ const } \left(1 + \frac{n}{2}\right)^{-1}, \tag{7.67}$$

$$n \in \mathbb{N}, \quad t \in [0, T].$$

Теперь рассмотрим вопрос о сходимости значений $S(f_n)$ к $S(f)$ при $n \to \infty$. Справедливо следующее неравенство:

$$\int_0^\infty |S(f) - S_n(f_n)|\, d\mu \leq \int_0^\infty |S(f) - S(f_n)|\, d\mu + \int_0^\infty (1 - \chi_n)|S(f)|\, d\mu, \tag{7.68}$$

$$n \in \mathbb{N}.$$

Сочетая (7.60), (7.66), равномерную оценку из леммы 7.12, имеем

$$\int_{\mathbb{R}} dx \int_0^\infty |S(f) - S_n(f_n)|\, d\mu dx \leq C \int_{\Pi_0} |f - f_n|\, d\mu \otimes dx, \tag{7.69}$$

$$t \in [0, T], \ n \in \mathbb{N},$$

с постоянной C, не зависящей от номера $n \in \mathbb{N}$. Поскольку

$$\int_0^\infty (1 - \chi_n)|S(f)|\, d\mu \leq 2 \| \Phi \|_\infty \int_0^\infty |f(\mu)|\, d\mu \int_{n/2}^\infty |f(\mu_1)| d\mu_1, \quad n \in \mathbb{N},$$

то учитывая (7.66), (7.67), получаем

$$\int\limits_{\Pi_0} (1-\chi_n)|S(f)|\,d\mu \otimes dx \le C\left(1+\frac{n}{2}\right)^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{7.70}$$

где постоянная C от номера n не зависит. Интегрируя (7.68) по $x \in \mathbb{R}$ с учетом (7.69), (7.70), имеем

$$\| \, S(f_n) - S(f) \, \|^{(T)} \le C\left\{\| \, f_n - f \, \|^{(T)} + \left(1+\frac{n}{2}\right)^{-1}\right\} \to 0, \quad n \to \infty,$$

(постоянная C от номеров не зависит). Значит, существует подпоследовательность $\{f_{n_{k_j}}\} \subset \{f_{n_k}\}$, для которой

$$S_{n_{k_j}}(f_{n_{k_j}}) \to S(f), \quad n_{k_j} \to \infty,$$

почти везде на Π.

Переходя к пределу $n = n_{k_j} \to \infty$ в (7.44), получаем, что функция f почти везде на Π удовлетворяет уравнению (7.43). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.9. Класс эквивалентных решений уравнения (7.43), выделенный в доказанной теореме, содержит неотрицательную функцию f, которая при каждом $t \in \mathbb{R}^+$ принадлежит классу Σ_0, что вытекает из оценок для f, полученных в процессе доказательства теоремы.

Класс корректности для задачи (7.41), (7.42) выделяется следующим утверждением.

ТЕОРЕМА 7.6. *Пусть f и g — решения уравнения* (7.43) *в* Π *такие, что при каждом $T \in \mathbb{R}^+$ ограничены величины*

$$\begin{gathered}\sup_{\substack{0\le t\le T,\\ x\in\mathbb{R}}} \int\limits_0^\infty |f|\,d\mu + \sup_{0\le t\le T} \int\limits_{\Pi_0} |f|\,d\mu\otimes dx \le d,\\ \sup_{\substack{0\le t\le T,\\ x\in\mathbb{R}}} \int\limits_0^\infty |g|\,d\mu + \sup_{0\le t\le T} \int\limits_{\Pi_0} |g|\,d\mu\otimes dx \le d.\end{gathered} \tag{7.71}$$

Тогда можно указать такую постоянную $C(T,d) < \infty$, что

$$\| f - g \|^{(T)} \leq C(T,d) \| f(.,0) - g(.,0) \|^{(0)} . \tag{7.72}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из тождества (7.43), выполняющегося для функций f, g почти везде на Π, получаем

$$|f-g| \leq T_t^v |f(.,0) - g(.,0)| + \int_0^t T_{t-\tau}^v \circ |S(f) - S(g)| \, d\tau,$$

$$0 \leq t \leq T.$$

Интегрируя это неравенство на Π_0 с учетом (7.60), (7.71), имеем

$$\int_{\Pi_0} |f-g| \, d\mu \otimes dx \leq \int_{\Pi_0} |f(.,0) - g(.,0)| \, d\mu \otimes dx +$$

$$+\frac{3}{2} \| \Phi \|_\infty \int_0^t \left[\int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_0^\infty (|f| + |g|) \, d\mu \int_0^\infty |f-g| \, d\mu \right\} dx \right] d\tau, \quad t \geq 0.$$

Учитывая ограниченность величин (7.71), приходим к неравенству

$$\| f(.,t) - g(.,t) \|^{(0)} \leq \| f(.,0) - g(.,0) \|^{(0)} +$$

$$+3d \| \Phi \|_\infty \int_0^t \| f(.,\tau) - g(.,\tau) \| \, d\tau,$$

$$0 \leq t \leq T,$$

из которого в силу леммы Гронуолла [39] следует соотношение

$$\| f - g \|^{(T)} \leq C(T,d) \| f(.,0) - g(.,0) \|^{(0)},$$

$$C(T,d) = \exp(3dT \| \Phi \|_\infty).$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 7.3. *Сочетая результаты теорем* 7.5 *и* 7.6, *устанавливаем, что теорема* 7.5 *имеет место, если*

$$(f^{(0)}, v, \Phi) \in \Sigma_0 \times \mathcal{V} \times \mathcal{K}.$$

ЗАМЕЧАНИЯ. 7.10. Утверждение о непустоте класса корректности, выделяемого соотношениями (7.71), доказано в теореме 7.5. Единственность построенного решения с точностью до класса эквивалентности функций, отличающихся на множестве лебеговой меры нуль на П, есть прямое следствие неравенства (7.71).

7.11. Гладкие аппроксимации решения уравнения (7.43) могут быть в свою очередь приближенно найдены методом разностных схем. Основной проблемой здесь является переработка чрезмерно больших массивов данных из-за малости сеточных шагов. Существенные трудности возникают при расчетах в окрестности особенностей, область расположения которых априори неизвестна. При этом приходится существенно уменьшать шаги разностной сетки в окрестности особенностей решения предельной задачи, ибо значения правой части здесь отрицательные и весьма велики по абсолютной величине. Поскольку устойчивость разностных схем для уравнения Смолуховского имеет место только на неотрицательных сеточных функциях, то в окрестности особенностей решения значения оператора столкновений приходится умножать при вычислениях на малые шаги. Подчеркнем, что область расположения особенностей решения предельной задачи априори не является известной.

Обоснование разностного метода для решения пространственно неоднородной задачи Коши проводится в следующей главе для локально ограниченных ядер Φ с произвольным порядком роста на бесконечности. Глобальной разрешимости задачи Коши в классе функциональных решений посвящена теорема 8.2.

8. Разностный метод решения пространственно неоднородных уравнений больцмановского типа

§ 1. Разностная схема

Пространственно неоднородное уравнение Смолуховского, рассмотренное в главе 7, является примером уравнения больцмановского типа (4.7). Предлагаемая ниже разностная схема для приближенного решения в случае такого класса уравнений позволяет установить корректность задачи Коши с ядрами взаимодействия частиц и начальными данными, представляющими интерес для физики реальных процессов. В частности, для пространственно неоднородных уравнений Больцмана и Смолуховского достаточным условием глобальной корректности задачи Коши задачи является локальная ограниченность (т. е. ограниченность на каждом компакте) неотрицательных симметричных ядер взаимодействия и скорости свободного переноса частиц, а также суммируемость неотрицательных начальных данных.

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial u^{(\omega)}(x,t)}{\partial t} + \mathcal{L}(u) = S^{(\omega)}(u^{(\omega)}(x,t)), \tag{8.1}$$

$$\omega \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}_1^+, \quad x \in \mathbb{R}_n,$$

$$\mathcal{L}(u)|_{(x,t)}^{(\omega)} \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{n} v_i^{(\omega)} \frac{\partial u^{(\omega)}(x,t)}{\partial x_j},$$

$$u|_{t=0} = u_0, \tag{8.2}$$

с оператором S больцмановского типа. Следующая разностная схема задает приближенный метод решения задачи Коши (8.1), (8.2):

$$\frac{u_\alpha^{(\omega)}(x,t+\tau)-u_\alpha^{(\omega)}(x,t)}{\tau}-$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\theta_{n_1}(v_j^{(\omega)})\frac{u_\alpha^{(\omega)}(x-he_j\operatorname{sgn}(v_j^{(\omega)}),t)-u_\alpha^{(\omega)}(x,t)}{h}=$$

$$=S_{M_1}^{(\omega)}(u_\alpha^{(\omega)}(x,t)),\tag{8.3}$$

$$\omega\in\Omega,\quad x\in\mathbb{R}_n,\quad t\geq 0,\quad \tau>0,\quad h>0,$$

$$u_\alpha^{(\omega)}(x,t)=\chi_{M_1}^{(\omega)}\chi_{M_2}^{(x)}\theta_{n_2}(u_0^{(\omega)}(x)),$$

$$0\leq t<\tau,\ \alpha=(n_1,n_2,M_1,M_2,\tau,h),$$

где компакты $M_1\subset\Omega$, $M_2\subset\mathbb{R}_n$, $\{e_j\}_{j=1}^n$ — координатные орты в $\mathbb{R}_n$. Шаги сетки τ, h подчиняются *условию Куранта–Фридрихса–Леви*

$$nn_1\tau h^{-1}+$$

$$+\tau H\left(\sup_{x\in\mathbb{R}_n}\sum_{k\in\mathbb{Z}_n}\int_{\mathbb{R}_n}\chi_{M_1}^{(\omega)}\chi_{M_2}^{(x)}\theta_{n_1}(u_0^{(\omega)}(x+h\sum_{j=1}^{n}k_je_j))\mu(d\omega)),\ M_1\right)\leq 1,\tag{8.4}$$

$$k=(k_1,...,k_n).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 8.1. Оценку (8.4) можно использовать в более грубой форме

$$nn_1\tau h^{-1}+\tau\,H((2D/h)^n\,n_2\,\mu(M_1),M_1)\leq 1,$$

если компакт M_2 положить n-мерным кубом со стороной D.

ЛЕММА 8.1. *При любых положительных* τ,h, *удовлетворяющих соотношению* (8.4), *разностная схема* (8.3) *имеет неотрицательное решение* u_α.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы получим методом математической индукции, применяемой к отрезкам времени, длины которых кратны шагу τ. Очевидно, что на первом шаге $0 \le t < \tau$ утверждение о неотрицательности u_α является прямым следствием формул (8.3). Дальнейшее доказательство основывается на применении неравенства (8.4) в сочетании с формулами (8.3) и предположением о больцмановости оператора S. А именно, в силу задания приближения u_α соотношениями (8.3) имеем

$$u_\alpha^{(\omega)}(x, t+\tau) = \left\{ u_\alpha^{(\omega)}(x,t) \left[1 - \frac{\tau}{h} \sum_{j=1}^{n} \theta_{n_1}(v_j^{(\omega)}) \right] + \tau S_{M_1}^{(\omega)}(u_\alpha^{(\cdot)}(x,t)) \right\} +$$

$$+ \frac{\tau}{h} \sum_{j=1}^{n} \theta_{n_1}(v_j^{(\omega)}) u_\alpha^{(\omega)}(x - he_j \operatorname{sgn}(v_j^{(\omega)}), t). \tag{8.5}$$

Предположение о неотрицательности u_α при $0 \le t < m\tau$ ($m > 1$) в сочетании с (8.5) приводит к неравенству

$$u_\alpha^{(\omega)}(x, t+\tau) \ge u_\alpha^{(\omega)}(x,t) \left[1 - \frac{\tau}{h} \sum_{j=1}^{n} n_1 \right] + \tau S_{M_1}^{(\omega)}(u_\alpha^{(\cdot)}(x,t)),$$

$$x \in \mathbb{R}_n, \quad 0 \le t < m\tau,$$

которое усилим за счет условия (8.4):

$$u_\alpha^{(\omega)}(x, t+\tau) \ge \tau \left[u_\alpha^{(\omega)}(x,t) H + S_{M_1}^{(\omega)}(u_\alpha^{(\cdot)}(x,t)) \right], \tag{8.6}$$

$$x \in \mathbb{R}_n, \quad 0 \le t < m\tau,$$

где аргументы величины H такие же, как в формуле (8.4).

Проинтегрируем выражение (8.3) по мере μ, относительно которой определялись больцмановские свойства оператора S, а затем просуммируем полученное выражение по пространственным переменным, находящимся на кубической решетке в $\mathbb{R}_n$ со стороной, равной шагу сетки h. Отметим, что разностный оператор, заменяющий пространственные производные, обладает свойством сохранения относительно такого процесса суммирования. Действительно, рассмотрим меру $\nu(dx)$, сосредоточенную на узлах $\{x_i\}$ целочисленной решетки в $\mathbb{R}_n$ с шагом по каждой координате, равным h. Зададим значения этой меры, положив для каждого ограниченного множества $A \in \mathbb{R}_n$

$$\nu(A) \stackrel{def}{=} \sum_{i:\, x_i \in A} 1.$$

Очевидно, для каждой финитной ограниченной функции f на $\mathbb{R}_n$ определен интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}_n} f(x)\, \nu(dx) = \sum_i f(x_i).$$

Учитывая то, что операция сдвига $\Delta_h^{(j)}$ аргумента функции f на шаг h по j-й координатной оси

$$\Delta_h^{(j)} f(x) \stackrel{def}{=} f(x + h\, e_j)$$

не меняет значение правой части этой формулы, т. е.

$$\int\limits_{\mathbb{R}_n} \Delta_h^{(j)} f(x)\, \nu(dx) = \sum_i f(x_i),$$

для разностного оператора $\Delta_h^{(j)} f(x) \stackrel{def}{=} f(x+h) - f(x)$ получаем свойство сохранения

$$\int\limits_{\mathbb{R}_n} \Delta_h^{(j)} f(x)\, \nu(dx) = 0.$$

Таким образом, учитывая утверждение леммы 4.2, заключаем

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_n} \int\limits_{\Omega} u_\alpha^{(\omega)}(x + h \sum_{j=1}^{n} k_j e_j, t + \tau)\, \mu(d\omega) \le$$

$$\le \sum_{k \in \mathbb{Z}_n} \int\limits_{\Omega} u_\alpha^{(\omega)}(x + h \sum_{j=1}^{n} k_j e_j, t)\, \mu(d\omega),$$

$$k = (k_1, k_2, \ldots, k), \quad x \in \mathbb{R}_n, \quad t \ge 0.$$

Итак, в области $0 \le t < m\tau$, $m > 1$, где значения $u_\alpha \ge 0$, выполняется неравенство

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_n} \int\limits_{\Omega} u_\alpha^{(\omega)}(x + h \sum_{j=1}^{n} k_j e_j, t)\, \mu(d\omega) \le$$

$$\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}_n} \int_\Omega u_\alpha^{(\omega)}(x + h\sum_{j=1}^n k_j e_j, 0)\, \mu(d\omega).$$

Учитывая свойство монотонного возрастания функционала H по каждому аргументу, получаем оценку

$$H\left(\int_\Omega u_\alpha^{(\omega)}(x,t)\,\mu(d\omega), M_1\right) \leq$$

$$\leq H\left(\sup_{y\in\mathbb{R}_n} \sum_{k\in\mathbb{Z}_n} \int_\Omega u_\alpha^{(\omega)}(y + h\sum_{j=1}^n k_j e_j, 0)\,\mu(d\omega), M_1\right),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_n.$$

Сочетая это неравенство с требованием определения 4.3 в неравенстве (8.6), устанавливаем неотрицательность его правой части, а значит, и функции $u_\alpha^{(\omega)}(x,t)$ при $m\tau \leq t < (m+1)\tau$. Тем самым завершается процесс математической индукции. Утверждение доказано.

ЗАМЕЧАНИЯ. 8.2. Решение разностной схемы (8.3) при выполнении условия (8.4) удовлетворяет тождеству

$$u_\alpha^{(\omega)}(x,t) \equiv \chi_{M_1}^{(\omega)} |u_\alpha^{(\omega)}(x,t)|_., \tag{8.7}$$

$$x \in \mathbb{R}_n, \quad t \geq 0.$$

8.3. Неотрицательное решение разностной схемы (8.3) подчиняется неравенству

$$\int_\Omega \int_{\mathbb{R}_n} u_\alpha^{(\omega)}(x,t)\,\mu(d\omega)dx \leq \int_\Omega \int_{\mathbb{R}_n} u_\alpha^{(\omega)}(x,0)\,\mu(d\omega)dx, \quad t \geq 0. \tag{8.8}$$

Вопрос о разрешимости задачи (8.1) рассматривается ниже в классах функциональных решений [90, 99, 103].

§ 2. Доказательство сходимости разностного метода к функциональному решению задачи Коши

ТЕОРЕМА 8.1. *Пусть в задаче Коши* (8.1), (8.2) *оператор* S — *больцмановского типа,* v — *локально ограниченная борелева функция со значениями в* $\mathbb{R}_n$, $u_0 \in L_{1,+}(\Omega \times \mathbb{R}_n, \mu \otimes d_x)$, *где* Ω *представимо в виде счетного объединения компактов, оператор* S *обладает свойством* μ*-сохранения или диссипации. Тогда задача Коши* (8.1), (8.2) *имеет неотрицательное функциональное решение в целом, т. е. при всех значениях* $t \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приближенный метод решения задачи Коши (8.1), (8.2) основывается на применении разностной схемы (8.3), (8.4). Наличие свойства μ-сохранения или диссипации у оператора S обеспечивает оценку (8.8). Отметим, что суперпозиция $(S_{M_1} \circ u_\alpha)$ является локально суммируемой функцией на $\Omega \times \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_1^+$. Действительно, по построению в силу (8.7) и (8.8) функция u_α обладает свойством локальной суммируемости на $\Omega \times \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_1^+$. Т.к. функция v по условию теоремы локально ограничена, то все слагаемые в левой части тождества (8.3) также локально суммируемые функции, а значит, такая же его правая часть $(S_{M_1} \circ u_\alpha)$.

Отметим также, что соотношения (8.7) и (8.8) означают слабую устойчивость разностного метода (8.3), (8.4), т.к. из них следует неравенство

$$\sup_\alpha \int\limits_{\Omega \times \mathbb{R}_n \times [0,T]} |u_\alpha| \, \mu \otimes d_x \otimes d_t \leq T \sup_\alpha \int\limits_{\Omega \times \mathbb{R}_n} |u_0| \, \mu \otimes d_x, \quad \forall T \geq 0,$$

что по определению является свойством слабой устойчивости приближенного метода (см. дополнение 1, определение 9.5).

Тождество (8.7) в сочетании со способом задания операторов S_{M_1} в определении 4.4 приводит к равенству

$$\int\limits_{\Omega \times \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_1^+} \varphi^{(\omega)}(x,t) S_{M_1} \circ u_\alpha \, \mu \otimes d_x \otimes d_t =$$

$$= \int\limits_{\Omega \times \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_1^+} \varphi^{(\omega)}(x,t) S \circ u_\alpha \, \mu \otimes d_x \otimes d_t, \tag{8.9}$$

для любой функции $\varphi \in \overset{\circ}{B}(\Omega \times \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_1^+)$, у которой носитель содержится внутри множества $M_1 \times \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_1^+$. Требование локальной ограниченности функции v означает, что на каждом компакте $K \subset \Omega$ при достаточно больших значениях параметра n_1 значения функций

$$\theta_{n_1}(v_j^{(\omega)}), \quad v_j^{(\omega)} \quad (1 \le j \le n,\ \omega \in K),$$

совпадают при каждом j. Следовательно, для любой функции $\varphi \in \overset{\circ}{B}(\Omega \times \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_1^+)$ при достаточно больших значениях параметра n_1 справедливы равенства

$$\int\limits_{\Omega\times\mathbb{R}_n\times\mathbb{R}_1^+} \varphi^{(\omega)}(x,t)\theta_{n_1}(v_j^{(\omega)})u_\alpha(x,t)\,\mu\otimes d_x\otimes d_t = \tag{8.10}$$

$$= \int\limits_{\Omega\times\mathbb{R}_n\times\mathbb{R}_1^+} \varphi^{(\omega)}(x,t)v_j^{(\omega)}u_\alpha^{(\omega)}(x,t)\,\mu\otimes d_x\otimes d_t.$$

Перейдем к вычислению слабой невязки разностного метода (8.3), (8.4) с учетом соотношений (8.9), (8.10). Естественно, предполагается, что условия, обеспечивающие справедливость этих соотношений, выполнены. Для этого достаточно положить, что значения параметра n_1 последовательно пробегают натуральные числа, а компакты M_1 образуют счетную последовательность, исчерпывающую Ω. Последняя существует в силу предположений теоремы. Умножим тождество (8.3) на пробную функцию $\varphi \in \overset{\circ}{B}{}^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_1^+)$ и проинтегрируем его на $\Omega \times \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_1^+$ по мере $\mu\otimes d_x\otimes d_t$. Сходимость интегралов в данном случае обусловлена локальной суммируемостью всех членов в (8.3). Предполагая n_1 и M_1 достаточно большими, получаем

$$\int\limits_{\Omega\times\mathbb{R}_n\times\mathbb{R}_1^+} \Big\{\tau^{-1}\Big[\ \chi_\tau(t)\varphi^{(\omega)}(x,t-\tau) - \varphi^{(\omega)}(x,t)\Big]\,u_\alpha^{(\omega)}(x,t) -$$

$$-h^{-1}\sum_{j=1}^{n}\Big[\ \varphi^{(\omega)}(x+he_j\,\mathrm{sgn}\,(v_j^{(\omega)}),t) - \varphi^{(\omega)}(x,t)\Big]\,|v_j^{(\omega)}|u_\alpha^{(\omega)}(x,t) -$$

$$-\varphi^{(\omega)}(x,t)S^{(\omega)}(u_\alpha^{(\cdot)}(x,t))\Big\}\ \mu\otimes d_x\otimes d_t = 0, \tag{8.11}$$

где функция $\chi_\tau(t)$ равна 1 при $0 \le t \le \tau$, а при остальных аргументах обращается в нуль.

Разложим по формуле Тейлора до второй производной включительно конечные разности для функции φ в этом выражении, что возможно из-за включения $\varphi \in \overset{\circ}{B}{}^{\infty}$. Таким образом, подставляя указанные разложения в (8.11), имеем

$$\int\limits_{\Omega\times\mathbb{R}_n\times\mathbb{R}_1^+\setminus[0,\tau)} \Big[-\varphi_t^{(\omega)}(x,t) + \frac{\tau}{2}\varphi_{tt}^{(\omega)}(x,\eta)\Big]u_\alpha^{(\omega)}(x,t)\,\mu\otimes d_x\otimes d_t -$$

$$-\int\limits_{\Omega\times\mathbb{R}_n\times\mathbb{R}_1^+}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[\varphi_{x_j}^{(\omega)}(x,t) + \frac{h}{2}\varphi_{x_jx_j}^{(\omega)}(\xi_j,t)\right]v_j^{(\omega)}u_\alpha^{(\omega)}(x,t) -\right.$$

$$\left. -\,\varphi^{(\omega)}(x,t)S^{(\omega)}(u^{(\cdot)}(x,t))\right\}\mu\otimes d_x\otimes d_t -$$

$$-\tau^{-1}\int\limits_0^\tau d_t\int\limits_{\mathbb{R}_n} d_x\int\limits_\Omega \varphi^{(\omega)}(x,t)u_\alpha^{(\omega)}(x,t)\,d\mu = 0,$$

$$t-\tau\le\eta\le t,\quad \xi_j\in[x_j-h, x_j+h]\quad 1\le j\le n.$$

Итак, величина невязки в соответствии с этим выражением определяется следующей формулой:

$$\delta(F) = |\int\limits_\tau^\infty\int\limits_{\mathbb{R}_n}\int\limits_\Omega \frac{\tau}{2}\varphi_{tt}^{(\omega)}(x,\eta)u_\alpha^{(\omega)}(x,t)\,dtdx\mu(d\omega)+$$

$$+\int\limits_{\Omega\times\mathbb{R}_n\times\mathbb{R}_1^+}\frac{h}{2}\varphi_{x_jx_j}^{(\omega)}(\xi_j,t)v_j^{(\omega)}u_\alpha^{(\omega)}(x,t)\,dtdx\mu(d\omega)+$$

$$+\tau^{-1}\int\limits_0^\tau\int\limits_{\mathbb{R}_n}\int\limits_\Omega \varphi^{(\omega)}(x,t)u_\alpha^{(\omega)}(x,t)\,dtdx\mu(d\omega)-$$

$$-\int\limits_{\mathbb{R}_n}\int\limits_\Omega \varphi^{(\omega)}(x,0)u_\alpha^{(\omega)}(x,0)\,dx\mu(d\omega)+$$

$$+\int_0^\tau\int_{\mathbb{R}_n}\int_\Omega \varphi_t^{(\omega)}(x,t)u_\alpha^{(\omega)}(x,t)\,dtdx\mu(d\omega)|+$$

$$+|\int_{\mathbb{R}_n}\int_\Omega \varphi^{(\omega)}(x,0)u_\alpha^{(\omega)}(x,0)\,dx\mu(d\omega)-\int_{\mathbb{R}_n}\int_\Omega \varphi^{(\omega)}(x,0)u_0^{(\omega)}(x)\,dx\mu(d\omega)|.$$

Неравенство (8.8) с учетом неотрицательности u_α, ограниченности производных финитной функции φ для первых двух слагаемых в выражении для невязки приводит к оценке невязки величиной $\mathcal{O}(\tau+h)$, где постоянная не зависит от параметра метода α. Перейдем к оценке остальных слагаемых невязки. Отметим, что справедливо равенство

$$u_\alpha^{(\omega)}(x,t)=u_0^{(\omega)}(x,0),\quad 0\le t<\tau.$$

Учитывая это соотношение в следующей паре слагаемых невязки, получаем

$$|\tau^{-1}\int_0^\tau\int_{\mathbb{R}_n}\int_\Omega \varphi^{(\omega)}(x,t)u_\alpha^{(\omega)}(x,t)\,dtdx\mu(d\omega)-$$

$$-\int_{\mathbb{R}_n}\int_\Omega \varphi^{(\omega)}(x,0)u_\alpha^{(\omega)}(x,0)\,dx\mu(d\omega)|\le$$

$$\le\tau^{-1}\int_0^\tau\int_{\mathbb{R}_n}\int_\Omega |\varphi^{(\omega)}(x,t)-\varphi^{(\omega)}(x,0)|u_\alpha^{(\omega)}(x,0)\,dtdx\mu(d\omega)\le$$

$$\le\tau\sup|\varphi_t|\int_{\mathbb{R}_n}\int_\Omega u_\alpha^{(\omega)}(x,0)\,dx\mu(d\omega)\le$$

$$\le\tau\sup|\varphi_t|\int_{\mathbb{R}_n}\int_\Omega u_0^{(\omega)}(x)\,dx\mu(d\omega)=\mathcal{O}(\tau).$$

Следующее слагаемое оценивается аналогично:

$$|\int_0^\tau\int_{\mathbb{R}_n}\int_\Omega \varphi_t^{(\omega)}(x,t)u_\alpha^{(\omega)}(x,t)\,dtdx\mu(d\omega)|\le$$

$$\leq \tau \sup |\varphi_t| \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\Omega} u_0^{(\omega)}(x)\, dx \mu(d\omega) = \mathcal{O}(\tau).$$

Величина в правой части этого неравенства не зависит от параметра приближенного метода α.

Оценим теперь последнюю пару слагаемых невязки, связанных с начальными данными,

$$|\int\limits_{\mathbb{R}_n} \int\limits_{\Omega} \varphi^{(\omega)}(x,0) u_\alpha^{(\omega)}(x,0)\, dx \mu(d\omega) - \int\limits_{\mathbb{R}_n} \int\limits_{\Omega} \varphi^{(\omega)}(x,0) u_0^{(\omega)}(x)\, dx \mu(d\omega)| \leq$$

$$\leq \sup |\varphi| \int\limits_{\mathbb{R}_n} \int\limits_{\Omega} |\chi_{M_1}^{(\omega)} \chi_{M_2}^{(x)} \theta_{n_2}(u_0^{(\omega)}(x)) - u_0^{(\omega)}(x)|\, dx \mu(d\omega).$$

Правая часть этого неравенства стремится к нулю для любых последовательностей компактов M_1 и M_2, исчерпывающих соответственно Ω и $\mathbb{R}_n$, при условии, что значения $n_2 \to \infty$. Итак, выбирая таким образом α — параметры метода, и устремляя τ, h к нулю при соблюдении условия Куранта (8.4), устанавливаем стремление невязки метода (8.3) к нулю. Тем самым установлено свойство слабой аппроксимации разностного метода (8.3), (8.4) (дополнение 1, определение 9.3). Сочетая это свойство со слабой устойчивостью метода (дополнение 1, определение 9.5), заключаем, что он сходится к функциональному решению задачи Коши (8.1), (8.2) (см. дополнение 1, теорема 9.1). Утверждение доказано.

Очевидные по своей важности приложения этой теоремы к задачам, связанным с кинетическими уравнениями Больцмана и Смолуховского рассматриваются ниже.

ТЕОРЕМА 8.2. *Пусть интенсивность столкновений частиц* Φ *в операторах столкновений Больцмана и Смолуховского* (0.4)–(0.6) *являются локально ограниченными борелевыми симметричными неотрицательными функциями, а начальные данные задачи Коши — суммируемые неотрицательные функции на множестве* $\Omega \times \mathbb{R}_n$. *Предположим, что скорость свободного переноса* v *— борелева локально ограниченная вектор-функция. Тогда задача Коши* (8.1), $(8,2)$ *обладает глобальным неотрицательным функциональным решением, которое является пределом аппроксимаций, определенных разностным методом* (8.3), (8.4).

Доказательство этой теоремы получается прямой проверкой условий сохранения, диссипативности и положительности для упомянутых выше операторов столкновений.

ТЕОРЕМА 8.3. *Пусть рассматривается задача Коши* (0.1), (0.2) (пространственно однородная задача) *с измеримым неотрицательным симметричным ядром* Φ, *обладающим свойством локальной ограниченности* (т. е Φ ограничена на каждом компакте). *Предположим, что начальная функция является неотрицательной и суммируемой. Тогда указанная задача Коши, рассматриваемая как задача* (8.1), (8.2) *со скоростью свободного переноса* $v \equiv 0$, *обладает глобальным неотрицательным функциональным решением, которое включается в класс корректности, порождаемый предельными точками разностной схемы* (8.3) *в тихоновской топологии.*

Доказательство очевидным образом сводится к теореме 8.2, если положить начальные данные пространственно неоднородной постановки равными произведению пространственно однородных начальных данных на характеристическую функцию компакта ненулевой лебеговой меры в координатном пространстве $x \in \mathbb{R}_n$. Вложенная таким образом пространственно однородная задача в задачу (8.1), (8,2) удовлетворяет условиям теоремы (8.2). При этом на указанном компакте пространственных переменных решение не зависит от пространственных переменных и прямым вычислением находим, что оно соответствует определению функционального решения пространственно однородной задачи.

9. Дополнение 1. Функциональные решения систем законов сохранения

§ 1. Основные обозначения, пространства и определения

Определения и утверждения из общей топологии, используемые в данной главе, приведены в дополнении 2 (гл. 10), а основные положения теории функциональных решений соответствуют [99].

Пусть Ω — локально компактное сепарабельное метрическое пространство, являющееся σ-конечным относительно плотной борелевой меры μ, конечной на компактах, строго положительной на открытых множествах в Ω. (Борелева мера называется *плотной*, если $\mu(E) = \sup\limits_{E \supset K \in \mathcal{K}} \mu(K)$, где $\mathcal{K}$ — класс компактных подмножеств из пространства Ω). Обозначим символами d_x и d_t лебеговы меры на $\mathbb{R}_n = \{x = (x_1, \ldots, x_n)\}$ и $\mathbb{R}_1 = \{t\}$ соответственно; $\overset{\circ}{B}$ — множество финитных ограниченных борелевых функций на топологическом произведении $Q = \Omega \times \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_1$; $Q_0 = \Omega \times \mathbb{R}_n$; $\overset{\circ}{B}{}^{\infty}$ — бесконечно дифференцируемые по переменным $(x, t) \in \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_1$ функции из пространства $\overset{\circ}{B}$, производные которых лежат в $\overset{\circ}{B}$; $L_1^{loc}(A, \nu)$ — множество борелевых функций на множестве A, локально суммируемых по борелевой мере ν. Пусть на множестве $\mathcal{D} \subset L_1^{loc}(\Omega, \nu)$ определены отображения

$$f_j : \mathcal{D} \times \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_1^+ \to L_1^{loc}(\Omega, \nu), \quad 0 \le j \le n,$$

где $\nu = \mu \otimes d_x \otimes d_t$. На множестве борелевых локально суммируемых по мере ν функций

$$M = \Big\{ u \in L_1^{loc}(Q,\nu) : u|_{(x,t)\in\mathbb{R}_n\times\mathbb{R}_1^+} \in \mathcal{D},$$
$$(f_j \circ u) \in L_1^{loc}(Q,\nu),\ 0 \le j \le n+1 \Big\}$$

рассматривается система интегральных уравнений относительно неизвестной переменной $u \in M$

$$\int\limits_Q [(f_0 \circ u)\partial_t g + \sum_{j=1}^n (f_j \circ u)\partial_{x_j} g + (f_{n+1} \circ u) g]\, \nu(dQ) +$$
$$+ \int\limits_{Q_0} g|_{t=0} (f_0 \circ u_0)|_{t=0}\, \nu_0(dQ_0) = 0, \qquad (9.1)$$
$$\forall g \in \overset{\circ}{B}{}^{\infty},$$

где мера $\nu_0 = \mu \otimes d_x$, u_0 — заданная функция из множества $L_1^{loc}(Q_0,\nu_0)$ такая, что суперпозиция $(f_0 \circ u_0)|_{t=0}$ принадлежит $L_1^{loc}(Q_0,\nu_0)$. Система соотношений (9.1) служит для определения обобщенного решения $u \in M$ задачи Коши

$$J(u) \overset{def}{=} \frac{\partial f_0^{(\omega)}(u,x,t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j^{(\omega)}(u,x,t)}{\partial x_j} - f_{n+1}^{(\omega)}(u,x,t) = 0, \qquad (9.2)$$
$$\omega \in \Omega, \quad x \in \mathbb{R}_n, \quad t > 0,$$
$$u|_{t=0} = u_0, \quad \omega \in \Omega, \quad x \in \mathbb{R}_n. \qquad (9.3)$$

Наиболее содержательное описание класса корректности для этой задачи получено в [58, 59, 122], когда $\operatorname{card}\Omega = 1$. Для случая $\operatorname{card}\Omega > 1$ понятие обобщенного решения, определяемого системой соотношений (9.1), является стеснительным с точки зрения обоснования корректности задачи и вычислительных методов. Предлагаемое ниже расширение понятия решения (функциональные решения) позволяет обосновать сходимость приближенных методов при наличии равномерной по параметру априорной оценки аппроксимаций в пространствах L_p^{loc}, $1 \le p \le \infty$. Обозначим $\mathcal{E}$ векторное пространство, состоящее из линейных комбинаций

$$F_{g,g_1} = \sum_{j=0}^n f_j \partial_{x_j} g + f_{n+1} g + u g_1, \quad u \in \mathcal{D},$$
$$x_0 \overset{def}{=} t,$$

с произвольными $g \in \overset{\circ}{B}{}^{\infty}$, $g_1 \in \overset{\circ}{B}$. Для каждого вектора $F \in \mathcal{E}$ определим операторы π, π_0, π_1 следующими соотношениями:

$$\pi(F) \overset{def}{=} F_{g,0}, \quad \pi_1(F) \overset{def}{=} g|_{t=0} f_0|_{t=0} + g_1|_{t=0} u, \qquad \pi_0(F) = \pi_1(F_{g,0}). \tag{9.4}$$

Пусть $\mathcal{E}^+ = \{l\}$ — алгебраически сопряженное пространство к $\mathcal{E}$ ($\mathcal{E}^+$ по определению состоит из конечных линейных функционалов на линейном пространстве $\mathcal{E}$). На $\mathcal{E}^+$ зададим топологию $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$ посредством системы полунорм $\{p_F\}_{F \in \mathcal{E}}$, где $p_F(l) = |l(F)|$ $\forall l \in \mathcal{E}^+$, $F \in \mathcal{E}$. Топологическое пространство $\mathcal{E}^+$, $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$ локально выпуклое, хаусдорфово. В указанной топологии каждое отображение $l \mapsto l(F)$, $l \in \mathcal{E}^+$, непрерывное (здесь переменными являются l, а произвольные значения $F \in \mathcal{E}$ фиксированы). Это следует из определения этой топологии, см. дополнение 2, §6).

Ниже существенно используется критерий из теоремы 10.5 для относительной компактности множеств в построенном таким образом топологическом пространстве $\mathcal{E}^+$, $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$:

$$\sup_{l \in G} p_F(l) < \infty \tag{9.5}$$

для каждого элемента $F \in \mathcal{E}$.

Рассмотрим вложение множества M в $\mathcal{E}^+$, которое определим формулой

$$\forall u \in M: \ u \mapsto l_u \in \mathcal{E}^+, \quad l_u(F) \overset{def}{=} \int\limits_Q (F \circ u)\, \nu(dQ), \quad F \in \mathcal{E}. \tag{9.6}$$

Следует отметить, что интеграл в правой части этой формулы для функций $u \in M$ конечный, т. к. в силу финитности пробных функций g и g_1, входящих в F, интегрирование распространяется лишь по компактному носителю этих функций. Таким образом, интегралы от слагаемых, которые составляют подынтегральное выражение в (9.6), конечные из-за их локальной суммируемости, обусловленной требованиями на класс M и ограниченностью пробных функций g, g_1. Итак, каждый функционал l_u, задаваемый формулой (9.6), принадлежит пространству $\mathcal{E}^+$.

ЛЕММА 9.1. *Вложение* (9.6) *мономорфно на классах эквивалентности функций из M, совпадающих почти везде на множестве Q относительно меры ν.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что борелевы функции u_1 и u_2 не совпадают на множестве E, имеющем положительную меру $\nu(E)$. В силу плотности меры μ и мер d_x, d_t произведение $\nu = \mu \otimes d_x \otimes d_t$ также является плотным, а значит, существует компактное множество $K \subset E$ положительной меры $\nu(K) > 0$. Положим $\varphi = \operatorname{sgn}(u_1 - u_2)$. Тогда справедливо соотношение

$$\int\limits_Q u_1 \varphi \chi_K \, \nu(dQ) \neq \int\limits_Q u_2 \varphi \chi_K \, \nu(dQ),$$

где χ_K — характеристическая функция множества K. Поскольку $\varphi, \chi_K \in \overset{\circ}{B}$, то на векторе $F_{0,g_1}, g_1 = \varphi\chi_K$ функционалы l_{u_1} и l_{u_2} не совпадают, т. к.

$$(l_{u_1} - l_{u_2})(F_{0,g_1}) = \int\limits_K |u_1 - u_2| \nu(dK) > 0,$$

следовательно, функции u_1 и u_2 могут не совпадать лишь на множестве меры нуль. Лемма доказана.

Положим $[M]$ — замыкание образа вложения (9.6) множества M в пространство $\{\mathcal{E}^+, \sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})\}$. На множестве $[M]$ рассмотрим индуцированную тихоновскую топологию $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$ (в которой открытыми множествами служат пересечения элементов системы $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$ с множеством $[M]$).

Аналогичным способом вложим множество начальных данных M_0, состоящее из функций u_0, которые вместе с суперпозициям $(f_0 \circ u_0)|_{t=0}$ принадлежат пространству $L_1^{loc}(Q_0, \nu_0)$, в пространство $\mathcal{E}_0^+$, являющееся алгебраически сопряженным к векторному пространству $\mathcal{E}_0 \overset{def}{=} \pi_1(\mathcal{E})$. При этом считаем, что на $\mathcal{E}_0^+$ введена топология $\sigma(\mathcal{E}_0^+, \mathcal{E}_0)$, задававаемая множеством полунорм $\{p_F^{(0)}\}_{F \in \mathcal{E}}$, где

$$p_F^{(0)} = |l^{(0)}(\pi_1(F))|, \quad l^{(0)} \in \mathcal{E}_0^+.$$

Соответствующее вложение множества M_0 в $\mathcal{E}_0^+$ осуществляется отображением

$$\forall u_0 \in M_0: \ u_0 \mapsto l_{u_0}^{(0)} \in \mathcal{E}_0^+,$$

$$l_u^{(0)}(F) \overset{def}{=} \int\limits_{Q_0} (\pi_1(F) \circ u_0) \, \nu_0(dQ_0), \quad F \in \mathcal{E}.$$

Свойство его мономорфности формулируется и доказывается так же, как в лемме 9.1. На образе этого вложения множества M_0 в $\mathcal{E}_0^+$ введена топология $\sigma(\mathcal{E}_0^+, \mathcal{E}_0)$.

Если функция $u \in M$ является решением задачи (9.1) (т. е. обобщенным решением задачи Коши (9.2), (9.3)), то равенства (9.1) эквивалентны соотношениям

$$l_u(\pi(F)) + l^{(0)}_{u_0}(\pi_0(F)) = 0, \quad \forall F \in \mathcal{E}. \tag{9.7}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.1. Элемент $l \in [M]$ назовем функциональным решением уравнения (9.2) с начальным условием $u_0 \in M_0$, если для каждого элемента $F \in \mathcal{E}$ справедливо равенство

$$l(\pi(F)) + l^{(0)}_{u_0}(\pi_0(F)) = 0. \tag{9.8}$$

Назовем классом однозначной разрешимости задачи (9.1), (9.2) такое подмножество $\mathcal{US} \subset [M] \subset \mathcal{E}^+$, что каждому начальному данному $u_0 \in M_0$ соответствует только одно функциональное решение этой задачи, принадлежащее $\mathcal{US}$.

В дальнейшем вместо соотношений (9.1), (9.2), (9.3), (9.7) рассматривается задача (9.8) относительно неизвестной $l \in [M]$.

Будем говорить, что задан приближенный метод решения задачи (9.8), обозначаемый $\mathfrak{M}$, если указан выбор параметрического семейства элементов во множестве M:

$$\alpha \mapsto u_\alpha \in M, \quad \alpha \in A.$$

Приближенный метод $\mathfrak{M}$ назовем регулярным, если выбор обобщенной последовательности $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ сделан на основе решения семейства уравнений, заменяющих (9.2),

$$J_\alpha(u_\alpha) = 0, \quad \alpha \in A,$$

и область определения совокупности операторов $\{J_\alpha\}_{\alpha \in A}$ содержит множество $V \subset M$ плотное в топологии L_1^{loc} во множестве определения $U (V \subset U \subset M)$ оператора J из уравнения (9.2). Предполагается, что для каждого $v \in V$ справедливо соотношение

$$\lim_\alpha J_\alpha(v) = J(v)$$

всюду на Q, где предел рассматривается на направленном множестве A параметров метода $\mathfrak{M}$.

Ниже вместо термина «регулярный метод» иногда будем пользоваться термином «метод» (там, где это не вызовет недоразумений).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.2. Функциональное решение $l \in [M]$ назовем регулярным, если оно является пределом последовательности аппроксимаций, задаваемых регулярным методом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.3. Регулярный метод $\mathfrak{M}$ слабо аппроксимирует задачу (9.8), если можно указать заданную этим методом обобщенную последовательность приближений $u_\alpha \in M$, для которой значения невязки

$$\delta_\alpha(F) \stackrel{def}{=} |l_{u_\alpha}(\pi(F)) + l^{(0)}_{u_\alpha|_{t=0}}(\pi_0(F))| + |(l^{(0)}_{u_0} - l^{(0)}_{u_\alpha|_{t=0}})(\pi_0(F))|,$$

стремятся к нулю при каждом $F \in \mathcal{E}$ на направленности параметров A. Назовем регулярный приближенный метод $\mathfrak{M}$ равномерно слабо аппроксимирующим задачу (9.8), если невязка стремится к нулю при всех значениях $u_0 \in M_0$ на общей для этой совокупности направленности параметров A.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.4. Метод $\mathfrak{M}$ сходится, если он определяет сходящуюся в пространстве $[M]$, $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$ обобщенную подпоследовательность $\{l_{u_{\alpha_n}}\}$, пределом которой является функциональное решение задачи (9.8).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.5. Назовем метод $\mathfrak{M}$ слабо устойчивым, если

$$\sup_{\alpha\in A} \;|\int\limits_Q g u_\alpha \, \nu(dQ)| < \infty, \quad g \in \overset{\circ}{B}. \tag{9.9}$$

Метод назовем равномерно слабо устойчивым, если соотношение (9.9) имеет место сразу для всех начальных данных $u_0 \in M_0$ на общей для этой совокупности направленности параметров A.

ЗАМЕЧАНИЕ 9.1. В силу теоремы Банаха–Штейнгауза (теорема 10.13) условие устойчивости (9.9) эквивалентно следующей равномерной оценке приближений u_α в пространстве $L_1^{loc}(Q, \nu)$:

$$\sup_{\alpha\in A} \int\limits_K |u_\alpha| \, \nu(dQ) < \infty,$$

выполняющейся на каждом компакте $K \subset Q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, условие устойчивости (9.9) на пробных функциях g с фиксированным носителем, сосредоточенным на компакте K, означает слабую ограниченность семейства $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$, что эквивалентно его ограниченности. Утверждение доказано.

ЛЕММА 9.2. *Для методов, основанных на решении однородных линейных разностных схем, необходимым условием выполнения* (9.9) *является спектральный признак устойчивости Неймана, приводящий к условиям Куранта, Фридрихса, Леви* [124].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим решение разностной схемы в виде

$$u_\alpha(x,t) = \lambda^{[t/\tau]}(\alpha) v_h(x), \quad 0 \le t \le T, \quad x \in \mathbb{R}_n,$$
$$\alpha = (\tau, h), \quad \| v_h \|_\infty = 1.$$

Условие устойчивости разностного метода с учетом замечания 9.1 приводит к оценке

$$\sup_\alpha \int\limits_0^T |\lambda(\alpha)|^{[t/\tau]}\, dt < \infty,$$

выполняющейся на каждом отрезке времени $0 \le t \le T$. Таким образом,

$$\sup_{0<\tau<\tau_0} \tau \sum_{j=0}^{[T/\tau]} |\lambda|^j = c < \infty. \qquad (*)$$

Убедимся, что точки спектра $\lambda(\alpha)$ оператора перехода разностной схемы необходимо удовлетворяют неравенству

$$|\lambda| \le 1 + c_1 \tau,$$

при $0 < \tau < \tau_0$ и постоянной c_1, не зависящей от τ_0. Действительно, предположим, что последняя оценка не имеет места, т. е. существует монотонно убывающая последовательность значений $\tau_m \to 0$ такая, что для соответствующих значений λ_m выполняется неравенство

$$|\lambda_m| \ge 1 + m\tau_m, \quad m \ge m_0,$$

значит,

$$\tau_m \sum_{j=0}^{[T/\tau_m]} |\lambda_m|^j \ge \frac{1}{2}[T/\tau_m](1 + m\tau_m)^{\frac{1}{2}[T/\tau_m]} \ge$$
$$\ge \frac{1}{2}[T/\tau_m](1 + m_0\tau_m)^{\frac{1}{2}[T/\tau_m]}, \quad m \ge m_0.$$

Но тогда

$$\sup_{0<\tau<\tau_0} \tau \sum_{j=0}^{[T/\tau]} |\lambda|^j \ge \frac{T}{2} \exp\left(\frac{m_0 T}{2}\right),$$

с произвольным натуральным m_0, что влечет неограниченность правой части последнего неравенства. Это противоречит условию $(*)$. Лемма доказана.

§ 2. Сходимость в целом приближенных методов

Эффективность понятий, введенных в §1, обусловлена их проверяемостью и возможностью доказательства существования в целом функциональных решений, являющихся предельными точками методов со свойствами слабой аппроксимации и слабой устойчивости, а также обоснованием наличия классов однозначной разрешимости задачи Коши.

ТЕОРЕМА 9.1. *Пусть регулярный метод* $\mathfrak{M}$ *слабо аппроксимирует задачу* (9.8) *и является слабо устойчивым. Тогда он сходится к функциональному решению задачи* (9.8). *Если метод является равномерно слабо аппроксимирующим и равномерно слабо устойчивым, то можно указать класс однозначной разрешимости и по нему построить класс корректности задачи* (9.8) $\mathcal{US}$ *такой, что на некоторой направленности параметров метода аппроксимации сходятся к точкам из* $\mathcal{US}$ *сразу при всех начальных данных из* M_0. *При этом класс корректности задачи* (9.8) *может быть задан произвольным компактом* $K \subset \mathcal{US}$ *в топологии, индуцированной* $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$ *на* $\mathcal{US}$, *при начальных данных, принадлежащим множеству, которое порождает функциональные решения в* K.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу требования слабой аппроксимации существует последовательность приближений u_α по методу $\mathfrak{M}$, для которой невязка $\delta_\alpha(F)$ стремится к нулю на направленности параметров A данного метода. Т. к. справедливо представление

$$l^{(0)}_{u_\alpha|_{t=0}}(F) = l^{(0)}_{u_\alpha|_{t=0}}(\pi_0(F_{g,g_1})) + l^{(0)}_{u_\alpha|_{t=0}}(\pi_1(F_{0,g_1})),$$

то на этой последовательности величины

$$\sup_{\alpha \in A} |l_{u_\alpha}(\pi(F))| < \infty,$$

при каждом $F \in \mathcal{E}$. Сочетая эти неравенства с условием слабой устойчивости метода, заключаем, что

$$\sup_{\alpha \in A} p_F(l_{u_\alpha}) < \infty, \quad F \in \mathcal{E},$$

т. е. выполняется условие теоремы 10.9, совпадающее с (9.5), что обеспечивает относительную компактность множества приближений $\{l_{u_\alpha}\}_{\alpha \in A}$ в пространстве $[M]$, $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$. Итак, имеется сходящаяся обобщенная подпоследовательность $\{l^{(\beta)}\} \subset \{l_{u_\alpha}\}$. Предел

этой обобщенной подпоследовательности $l \in [M]$. Поскольку отображение
$$l \mapsto l(F) \in \mathbb{R} \quad \forall F \in \mathcal{E}$$
непрерывно на $[M]$, σ, то, переходя к пределу в выражении для невязки с учетом ее стремления к нулю, устанавливаем, что указанный предел $l \in [M]$ является функциональным решением задачи (9.8).

Перейдем ко второй части утверждения теоремы. Для этого рассмотрим тихоновское произведение топологических пространств $\{\mathcal{E}^+, \sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})\}$, взятых M_0 раз (M_0 — совокупность начальных данных), которое обозначим $\{\mathcal{E}^+, \sigma\}^{M_0}$. В силу требований равномерной слабой аппроксимации и равномерной слабой устойчивости (в соответствии с доказательством первой части теоремы) аппроксимации при каждом фиксированном начальном условии u_0 находятся в бикомпактном подмножестве пространства $\{\mathcal{E}^+,\ \sigma\}$. По теореме А. Н. Тихонова о произведении бикомпактов (теорема 10.8) совокупность аппроксимаций при всевозможных начальных данных из M_0 принадлежит бикомпактному подмножеству в $\{\mathcal{E}^+, \sigma\}^{M_0}$. (Здесь существенно используется наличие общей для всех начальных данных направленности параметров метода, на которой выполняются условия теоремы 9.1). Далее выбираем в тихоновском произведении из совокупности аппроксимаций обобщенную сходящуюся подпоследовательность. Поскольку тихоновская топология есть топология поточечной сходимости (где аргументами служат начальные данные M_0), то дальше повторяются рассуждения первой части доказательства. Таким образом, для каждого начального условия из M_0 построено однозначно функциональное решение задачи, являющееся пределом аппроксимаций по некоторой общей для всех начальных данных направленности параметров метода. Очевидно, тем самым построен искомый класс однозначной разрешимости задачи Коши.

Отметим, что по построению начальные данные в задаче (9.8) непрерывно зависят от функционального решения в тихоновской топологии. Таким образом, на каждом компакте в классе однозначной разрешимости $\mathcal{US}$, снабженном индуцированной тихоновской топологией, имеется непрерывное взаимно однозначное отображение на множество начальных данных. Образ указанного компакта является компактом во множестве начальных данных. Следовательно, применима в этом случае теорема 10.7 о гомеоморфизме, обеспечивающая непрерывность обратного отображения из построенного компакта во множестве начальных данных в класс однозначной разрешимости. Тем самым построен искомый класс корректности. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЯ. 9.2. Регулярное функциональное решение однозначно отождествляется с локально суммируемой функцией $u \in L_1^{loc}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, регулярное функциональное решение является пределом последовательности элементов множества M в топологии $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$ при вложении (9.6), задаваемой по определению 9.1 регулярным методом. Значит, существует последовательность $u_n \in M$, $n \in \mathbb{N}$, для которой величины

$$l_{u_n} \to l, \quad n \to \infty.$$

Но в силу определения функционального решения l справедливо равенство

$$l(F_{g,g_1}) = l(g_1 u) - l_{u_0}^{(0)}(f_0|_{t=0} g|_{t=0})$$

$$g \in \overset{\circ}{B}{}^{\infty}, \quad g_1 \in \overset{\circ}{B}.$$

Т. к. пространство L_1^{loc} слабо полно [80], то существует элемент $u \in L_1^{loc}$ такой, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_Q g_1 u_n \, \nu(dQ) = \int\limits_Q g_1 u \, \nu(dQ),$$

и, следовательно,

$$l(F_{0,g_1}) = \int\limits_Q g_1 u \, \nu(dQ), \quad g_1 \in \overset{\circ}{B},$$

$$l(F_{g,g_1}) = l(F_{0,g_1}) - l_0^{(0)}(\pi_0(F_{g,g_1})), \quad g \in \overset{\circ}{B}{}^{\infty}, \quad g_1 \in \overset{\circ}{B}. \tag{9.10}$$

Посредством этих соотношений регулярные функциональные решения отождествляются с элементами пространства L_1^{loc} .

9.3. Если последовательность u_n, $n \in \mathbb{N}$, задаваемая регулярным методом, слабо сходится в пространстве L_1^{loc} к функции u и при этом значения невязки δ_n, соответствующие этой последовательности, стремятся к нулю при $n \to \infty$, то слабый предел u является регулярным функциональным решением задачи (9.8) в смысле формулы (9.10), приведенной в замечании 9.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение является прямым следствием теоремы 10.13 Банаха–Штейнгауза об ограниченности слабо ограниченных множеств и замечания 9.2.

9.4. Топология $\{\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})\}$ сильнее топологии слабой сходимости в $L_1^{loc}(Q, \nu)$.

9.5. Отождествление (9.10) регулярных функциональных решений с функциями позволяет вычислять интегральные средние неизвестной, но в то же время ее нелинейные суперпозиции, вообще говоря, не являются слабыми пределами нелинейных суперпозиций приближений метода, т. е. существуют функциональные решения, которые не являются обобщенными в смысле С. Л. Соболева.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Данное утверждение иллюстрируется методом, основанным на решении разностной схемы Эйлера для задачи Коши в случае обыкновенного дифференциального уравнения с разрывной правой частью

$$\frac{du}{dt} = f(u), \quad t > 0, \quad u(0) = u_0, \tag{9.11}$$

$$f(u) = \begin{cases} -1, & u \geq 0, \\ +1, & u < 0. \end{cases}$$

Приближенный метод Эйлера определим посредством соотношений

$$\frac{u_h(t+h) - u_h(t)}{h} = f(u_h(t)), \quad t \geq 0,$$

$$u_h(t) = u_0, \quad 0 \leq t < h, \ h > 0.$$

Решение задачи Коши (9.11) в классическом смысле существует лишь до момента попадания его на точку разрыва функции f. Далее это решение не может быть продолжено как классическое либо обобщенное. Приближение, задаваемое методом Эйлера после момента времени t_c попадания его на точку разрыва функции f, вычисляется по следующим формулам:

$$u_h(t) = \begin{cases} 0, & 2nh \leq t < (2n+1)h, \\ \\ -h, & (2n+1)h \leq t < 2(n+1)h, \quad 2nh > t_c. \end{cases}$$

Очевидно, что метод Эйлера является регулярным, он равномерно сходится, его невязка слабо стремится к нулю и, таким образом, функция $u(t) = 0$, $t \geq 0$, в силу замечания 9.3 является регулярным функциональным решением задачи Коши (9.11) с начальным условием $u(0) = 0$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что это решение удовлетворяет определению А. Ф. Филиппова [75]. При этом последовательность суперпозиций $(f \circ u_h)$, $h > 0$ слабо сходится к нулю, когда $h \to 0$, но в то же время $(f \circ u) = 1$.

Указанный пример служит отражением глубокой связи решений А. Ф. Филиппова для обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями и регулярных функциональных решений, которую установим ниже.

§ 3. Достаточные условия сходимости приближенных методов для ОДУ

Следуя [75], воспроизведем некоторые обозначения, определения и формулировки теорем, позволяющие связать функциональные решения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с определением решения А. Ф. Филиппова в [75].

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{dt} = f(t,u), \quad u = (u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(n)}) \in \mathbb{R}_n, \tag{9.12}$$

$$f = (f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(n)}) \in \mathbb{R}_n.$$

Фазовое пространство $\mathbb{R}_n$ считаем снабженным евклидовой метрикой, через $U_u(\delta)$ обозначим замкнутый шар радиуса $\delta > 0$ с центром в точке $u \in \mathbb{R}_n$, выпуклое замыкание множества E обозначим $\operatorname{conv} E$. Положим

$$\begin{gathered} M\{\varphi(u)\} = \lim_{\delta\to 0} \operatorname{vrai} \max_{u' \in U_u(\delta)} \varphi(u'), \\ m\{\varphi(u)\} = \lim_{\delta\to 0} \operatorname{vrai} \min_{u' \in U_u(\delta)} \varphi(u'), \end{gathered} \tag{9.13}$$

где операции существенного максимума и минимума применяются к скалярной функции φ относительно меры Лебега d_u на $\mathbb{R}_n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.6. Вектор-функция $u(.)$, определенная на интервале (t_1, t_2), называется Ф-решением (решением А. Ф. Филиппова [75]), если она абсолютно непрерывна и если при почти всех $t \in (t_1, t_2)$ значения

$$\frac{du}{dt} \in \bigcap_{\delta>0} \bigcap_{d_u(N)=0} \operatorname{conv} \ f(t, U_{u(t)}(\delta) \backslash N) \overset{def}{=} K\{f, u(t)\}. \tag{9.14}$$

Эквивалентную формулировку понятия Ф-решения дает следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.7. Вектор-функция $u(.)$, определенная на интервале (t_1, t_2), называется Ф-решением уравнения (9.12), если она абсолютно непрерывна и если при почти всех $t \in (t_1, t_2)$ при любом выборе ортогональной системы координат в пространстве $\mathbb{R}_n$

$$m\{f^{(i)}(t, u(t))\} \leq \frac{du^{(i)}}{dt} \leq M\{f^{(i)}(t, u(t))\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{9.15}$$

где $f^{(i)}$ — правые части системы уравнений (9.12), которая соответствует выбранной ортогональной системе координат.

Равносильность обоих определений Ф-решения установлена в [75] на основании следующей леммы.

ЛЕММА 9.3. *Для того, чтобы абсолютно непрерывная вектор-функция $u(.)$ являлась Ф-решением уравнения (9.12) в смысле определения 9.5, необходимо и достаточно, чтобы почти при всех t для каждого вектора $v \in \mathbb{R}_n$ выполнялось неравенство*

$$\left(\frac{du}{dt}, v\right)_{\mathbb{R}_n} \leq M\{(f(t, u(t)), v)_{\mathbb{R}_n}\}. \tag{9.16}$$

Сравнение Ф-решений с другими определениями решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений (классическими, по Каратеодори, по Розенталю, по Викторовскому, др.) проведено А. Ф. Филипповым [75].

Вопросы предельного перехода в дифференциальном уравнении рассмотрены в теореме 3 работы [75], которую ниже несколько изменим для целей настоящего исследования.

ТЕОРЕМА 9.2. *Пусть последовательность абсолютно непрерывных функций $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ при $t_1 \leq t \leq t_2$ содержится в замкнутой ограниченной области $D \subset \mathbb{R}_n$ и удовлетворяет соотношениям*

$$\frac{du_k(t)}{dt} = f_k(t, u_k(.)) + q_k(t, u_k(.)), \quad k = 1,\, 2, \ldots, \tag{9.17}$$

с измеримыми правыми частями. Пусть операторы $f_k(t, .)$, $q_k(t, .)$, $k \in \mathbb{N}$, определенные на множестве непрерывных функций $C_{[t_1,t_2]}$, таковы, что на каждом компактном в топологии пространства $C_{[t_1,t_2]}$ семействе G имеют место соотношения

$$\forall \delta > 0 \quad \exists k_0(\delta, G) : \forall k \geq k_0, \quad \forall u \in G :$$

$$f_k(t, u(.)) \in \bigcap_{d_u(N)=0} \operatorname{conv}\ f(t, U_{u(t)}(\delta) \backslash N), \tag{9.18}$$

$$\| q(t) \|_{\mathbb{R}_n} \leq \psi_k(t), \quad \int_{t_1}^{t_2} \psi_k(t)\, dt \leq \delta, \tag{9.19}$$

и при этом справедливы неравенства

$$\| f \|_{\mathbb{R}_n} \leq \text{const}\,, \quad \sup_{k \in \mathbb{N}} \| f_k \|_{\mathbb{R}_n} \leq \text{const},$$

где f — правая часть системы (9.12). *Тогда*:

а) *приближения $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ образуют компактное семейство в пространстве $C_{[t_1, t_2]}$*;

б) *предельная функция и любой равномерно сходящейся при $k \to \infty$ подпоследовательности приближений u_k есть Ф-решение системы* (9.12).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойство компактности семейства $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ очевидно. Пусть последовательность $u_k \to u$ равномерно на отрезке $[t_1, t_2]$. Значит, для заданного положительного числа $\delta > 0$ существует такое $k(\delta)$, что при $k \geq k(\delta)$ выполняются неравенства

$$\sup_{t_1 \leq t \leq t_2} |u_k(t) - u(t)| < \frac{\delta}{2}.$$

В силу соотношений (9.17) для каждого вектора $v \in \mathbb{R}_n$ и любых $t_1 \leq t' \leq t'' \leq t_2$ справедливо равенство

$$(u_k(t'') - u_k(t'), v)_{\mathbb{R}_n} = \int_{t'}^{t''} (f_k(t, u_k(.)), v)_{\mathbb{R}_n} dt + \int_{t'}^{t''} (q_k(t, u_k(.)), v)_{\mathbb{R}_n}\, dt.$$

Учитывая близость u_k и u при достаточно больших k и условия (9.18), (9.19), получаем

$$(u_k(t'') - u_k(t'), v)_{\mathbb{R}_n} \leq \int_{t'}^{t''} \operatorname{vrai} \max_{u' \in U_{u(t)}(\delta)} (f(t, u'), v)_{\mathbb{R}_n}\, dt +$$

$$+ \| v \|_{\mathbb{R}_n} \int_{t'}^{t''} \psi_k(t)\, dt.$$

Таким образом, для любого положительного δ можно указать такой номер $k_0(\delta, v)$, что при всех $k \geq k_0$ имеем

$$(u_k(t'') - u_k(t'), v)_{\mathbb{R}_n} \leq \int\limits_{t'}^{t''} M\{(f(t, u(t)), v)_{\mathbb{R}_n}\}\, dt + \delta.$$

Переходя к пределу $k \to \infty$, $\delta \to 0$, получаем неравенство

$$(u(t') - u(t''), v)_{\mathbb{R}_n} \leq \int\limits_{t'}^{t''} M\{(f(t, u(t)), v)_{\mathbb{R}_n}\}\, dt,$$

которое в силу определения 9.7 означает, что предельная функция u есть Ф-решение системы (9.12). Теорема доказана.

На основании этой теоремы ниже устанавливается связь Ф-решений и регулярных функциональных решений для приближенных методов, основанных на соотношениях (9.17)–(9.19).

ТЕОРЕМА 9.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 9.2 *и для последовательности приближений* $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, *задаваемой регулярным приближенным методом* (9.17), *в случае построения решения задачи Коши для системы* (9.12) *имеет место слабая аппроксимация, причем на последовательности* $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *значения невязки стремятся к нулю при* $k \to \infty$ *в смысле определения* 9.2. *Тогда каждая предельная точка последовательности* $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *в пространстве* $C_{[0,T]}$ *одновременно является Ф-решением и регулярным функциональным решением задачи Коши для системы* (9.12).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что предельные точки последовательности $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ принадлежат множеству Ф-решений, составляет содержание предыдущей теоремы. Принадлежность предельных точек последовательности $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ классу регулярных функциональных решений обусловлена замечанием 9.3 к теореме 9.1. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. 9.6. Разностный метод Эйлера, основанный на кусочно постоянных и кусочно линейных аппроксимациях неизвестной, в случае ограниченной измеримой функции f в правой части системы (9.12) является регулярным сходящимся методом.

Очевидно, что на каждом конечном промежутке изменения аргумента приближения, определяемые обеими формами метода Эйлера, равномерно близки в метрике пространства L_1 относительно шага сетки. Поэтому предельные точки равномерно сходящихся приближений этих методов совпадают. Отметим, что метод ломаных Эйлера равномерно сходится к Ф-решению системы (9.12), что устанавливается непосредственным применением теоремы 9.2. Что касается кусочно постоянных аппроксимаций по методу Эйлера, то этот регулярный метод обладает слабой аппроксимацией, причем невязка метода подчиняется оценке

$$\delta_\tau = \mathcal{O}(\tau), \quad \tau > 0.$$

Таким образом, каждая равномерно сходящаяся последовательность кусочно постоянных приближений метода Эйлера сходится к регулярному функциональному решению задачи Коши для системы (9.12). Но в силу вышеприведенного замечания о совпадении предельных точек обеих форм метода, заключаем, что в рассматриваемом случае Ф-решения системы совпадают с регулярными функциональными решениями, получаемыми по методу Эйлера. Более того, такой же результат справедлив и для метода усреднения.

§ 4. Метод исчезающей вязкости для конечномерной квазилинейной системы законов сохранения

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial u^{(i)}(x,t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j^{(i)}(u,x,t)}{\partial x_j} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0, \tag{9.20}$$

$$t > 0, \quad x \in \mathbb{R}_n, \quad 1 \le i \le m.$$

Для ее приближенного решения используется метод исчезающей вязкости, основанный на решении следующих аппроксимирующих задач:

$$\frac{\partial u^{(i)}(x,t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j^{(i)}(u,x,t)}{\partial x_j} = \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial x_j^2}, \quad u|_{t=0} = u_0, \tag{9.21}$$

$$t > 0, \quad x \in \mathbb{R}_n, \quad 1 \le i \le m, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m), \quad \alpha_i \ge 0.$$

ТЕОРЕМА 9.4. *Пусть при каждом* $\alpha = \{\alpha_i\}_1^m$ *задача* (9.21) *имеет гладкое решение, которое удовлетворяет требованию равномерной локальной суммируемости*

$$\sup_{\substack{0\le\alpha_i\le\alpha_0,\\ 1\le i\le m}} \int_K \| u_\alpha \|_{\mathbb{R}_m}\, d_x \otimes d_t < \infty \tag{9.22}$$

на каждом компакте $K \subset \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_1^+$. *Тогда для некоторой обобщенной подпоследовательности* $\alpha^{(k)} \to 0$ *приближения* $u_{\alpha^{(k)}}$ *сходятся к функциональному решению задачи Коши* (9.20).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие (9.22) означает слабую устойчивость метода исчезающей вязкости. Величина невязки метода оценивается выражением

$$\delta \le \max_{1\le i\le m} \alpha_i \int_{\mathbb{R}_m\times\mathbb{R}_1^+} \left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j^2} \right| \| u_\alpha \|_{\mathbb{R}_m}\, d_x \otimes d_t = \mathcal{O}(\alpha).$$

Применяя теорему 9.1, получаем искомое утверждение.

ЗАМЕЧАНИЕ 9.7. Простейший пример получения такого рода оценок связан с градиентной системой, где

$$f_j^{(i)}(u) = \frac{\partial \mathcal{F}_j(u)}{\partial u^{(i)}},$$

$$u \in \mathbb{R}_m, \quad \mathcal{F}_j \in C^2(\mathbb{R}_m, \mathbb{R}_1), \quad 1 \le i \le m, \quad 1 \le j \le n,$$

а начальная функция u_0 принадлежит пространству $L_2^{(m)}(\mathbb{R}_n)$ [73, 74]. В этом случае сходимость метода исчезающей вязкости имеет место на некоторой подпоследовательности значений параметра вязкости α, стремящейся к нулю, соответственно предельное функциональное решение является регулярным. Таким свойством обладают функциональные решения задач, когда априорные оценки обеспечивают принадлежность аппроксимаций рефлексивным сепарабельным пространствам, к которым, в частности, относится $L_2(\mathbb{R}_n)$.

§ 5. Выделение классов корректности регулярных функциональных решений

Положим в уравнениях (9.1), (9.2) оператор $f_0(u, x, t) \equiv u$. Предлагаемая ниже конструкция классов корректности для задачи (9.8) основывается на выделении непустых множеств регулярных функциональных решений, определяемых однозначно начальными данными задачи Коши и обладающих непрерывной зависимостью в топологии слабой сходимости в L_1^{loc} относительно изменения начальных данных в той же топологии.

Обозначим символом A отображение, сопоставляющее регулярным функциональным решениям, заданных методом $\mathfrak{M}$, соответствующие им начальные данные. При этом, естественно, предполагается существование таких решений, что может быть установлено, например, на основании теоремы 9.1. Положим X — совокупность регулярных функциональных решений для метода $\mathfrak{M}$, которую снабдим индуцированной топологией $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$. На множестве M_0 введем топологию слабой сходимости. Отметим, что индуцированная топология на X в силу формулы представления регулярных функциональных решений (9.10) может быть задана системой полунорм, определяющих слабую сходимость в L_1^{loc} вместе со слабой сходимостью в пространстве начальных данных M_0:

$$|l(F_{g,g_1})| = \left| \int\limits_Q g_1 u\, \nu(dQ) - \int\limits_Q g|_{t=0} u_0 \nu_0\, (dQ_0) \right|. \tag{9.23}$$

ЛЕММА 9.4. *Отображение $A : X \to M_0$ непрерывное во введенных выше топологиях.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение является очевидным следствием способа задания топологии на X и M_0 посредством системы полунорм (9.23). Лемма доказана.

Пусть множество $K \subset X$ является компактом в топологическом пространстве $\{[M], \sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})\}$ и отображение $A : K \to A(K)$ — взаимно однозначное. (Такой компакт всегда можно выбрать). Тогда обратное отображение $A^{-1} : A(K) \to K$ является непрерывным. Последнее утверждение вытекает из теоремы о гомеоморфизме (теорема 10.7).

ЛЕММА 9.5. *Пусть множество начальных данных $Y \subset M_0$ слабо компактное в пространстве $L_1^{loc}(Q_0, \nu_0)$, а соответствующее ему непустое множество регулярных функциональных решений K слабо компактное в пространстве $L_1^{loc}(Q, \nu)$. Тогда множество K относительно компактное в топологии $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Данное утверждение получим на основании формулы (9.10), представляющей регулярные функциональные решения. Справедлива оценка

$$\sup_l p_F(l) \leq \sup_{u \in K} |\int\limits_Q g_1 u \nu(dQ)| + \sup_{u_0 \in Y} |\int\limits_{Q_0} g|_{t=0} u_0 \nu_0(dQ_0)|.$$

Таким образом, множество K слабо ограничено в топологическом пространстве $\{\mathcal{E}^+, \sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})\}$ и, значит, оно слабо компактное. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 9.8. Свойства решений, указанные в лемме 9.5, устанавливаются на основании энтропийных оценок в L_p, $p \geq 1$.

СЛЕДСТВИЕ 9.1. *Если семейство K регулярных функциональных решений в условиях леммы* 9.5 *соответствует замкнутому множеству начальных данных Y, то семейство K является компактом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Данное утверждение есть непосредственное следствие свойства непрерывности отображения A, которое установлено в лемме 9.4, и слабой компактности слабо ограниченных множеств в топологии $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$.

ТЕОРЕМА 9.5. *Пусть компактное множество K регулярных функциональных решений соответствует компакту Y во множестве начальных данных M_0. Предположим, что каждому элементу множества Y соответствует единственный элемент множества K. Тогда при этих условиях функциональные решения из множества K непрерывно зависят от начальных данных из множества Y в топологии слабой сходимости в пространстве L_1^{loc}.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предположения о единственности прообразов отображения A во множестве K, когда образы находятся в Y, с учетом свойства непрерывности A, установленного в лемме 9.4, и следствия к лемме 9.5, можно применить теорему 10.7 о гомеоморфизме. Таким образом, обратное отображение $A^{-1} : Y \to K$ — непрерывное. Но, т.к. топология слабой сходимости на K слабее топологии, задаваемой полунормами (9.23), то тем более $A^{-1} : Y \to K$ непрерывно в слабых топологиях. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 9.9. Выделение компактов, указанных в формулировке теоремы 9.5, естественно осуществлять в классах однозначной разрешимости, существование которых установлено в теореме 9.1.

10. Дополнение 2. Сведения из общей теории множеств и топологии, используемые в книге

Эта глава содержит сводку основных сведений из теории множеств и топологии, в той или иной степени используемых в математических построениях, связанных с обобщенными и функциональными решениями систем законов сохранения. Формулировки утверждений и определения в основном соответствуют книгам [80, 118], а также учебникам [36, 81].

§ 1. Множества, отношения

Далее используются следующие понятия: *класс, множество, пространство, семейство, совокупность, элемент, точка.*

Проблемы, связанные с непротиворечивостью построений, приводят к необходимости различать два типа совокупностей. Более общий — *класс.* Термин *множество* сохраняется за теми из классов, которые могут быть элементами классов. Нетривиальность понятия класса следует из следующего важного утверждения: класс всех множеств не является множеством. Поскольку на протяжении этой книги (при единственном вышеупомянутом исключении) все используемые классы одновременно являются множествами, то без ограничения общности можно считать синонимами *класс, множество, пространство, семейство, совокупность.* Неопределяемыми также понятиями являются синонимы *элемент, точка.* Разделение всевозможных мыслимых совокупностей на множества и классы, не являющиеся множествами, позволяет избежать широко известных парадоксов, возникших в «наивной» теории множеств, созданной в конце XIX века Георгом Кантором[1].

ОТНОШЕНИЯ. Понятие отношения является центральным, т. к. оно позволяет определить остальные понятия через понятие множества. В частности, это относится к понятиям упорядочения и функции.

Предположим, что задано некоторое отношение (в интуитивно ясном смысле) между определенными парами объектов. Это отношение реализуем в виде множества всех пар связанных им объектов. Например, множество пар, состоящих из чисел и их квадратов естественно именовать квадратической зависимостью, графиком квадратической функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.1. Назовем декартовым произведением $A \times B$ множеств A и B множество

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.2. Пусть A и B — произвольные непустые множества. Отношением на множестве $A \times B$ называется подмножество $R \subset A \times B$. Если пара $(x, y) \in R$, то будем говорить, что элементы x и y находятся в отношении R и писать xRy. Обратное отношение R^{-1} к отношению R получается изменением порядка в каждой из пар отношения R:

$$R^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in R\}.$$

Область определения отношения

$$R = \{x : \text{ для некоторого } y \ (x, y) \in R\}.$$

Область значений отношения

$$R^{-1} = \{y : \text{ для некоторого } x \ (x, y) \in R\}.$$

[1] Георг Кантор (3.3.1845–6.1.1918) — великий немецкий математик, создатель теории множеств. Родился в Петербурге. Кантор разработал теорию бесконечных множеств и теорию трансфинитных чисел; доказал несчетность множества всех действительных чисел (1874), сформулировал общее понятие мощности множества (1878) и развил принципы сравнения мощностей. Канторовская теория множеств послужила причиной общего пересмотра логических основ математики и оказала влияние на всю структуру современной математики. Работам Кантора предшествовали основополагающие труды Больцано, а также Вейерштрасса, Коши, Дедекинда и Мерэ (см. [119]).

Пусть R — отношение и A — некоторое множество. Назовем множество $R(A)$ *образом* множества A под действием отношения R множество точек y таких, что yRx для некоторого $x \in A$.

Композицией отношений R и S называется отношение $R \circ S$, состоящее из всех пар (x, z) таких, что $(x, y) \in S$ и $(y, z) \in R$.

Пусть R, S, T — отношения, A — непустое множество индексов a, для каждого из которых определено множество X_a. Тогда выполнены следующие соотношения:

(1) $(R^{-1})^{-1} = R, \qquad (R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.
(2) $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$.
(3) $(R \circ S)(A) = R(S(A))$ для каждого множества A.
(4) $R(\bigcup\{X_a : a \in A\}) = \bigcup\{R(X_a) : a \in A\})$.
(5) $R(\bigcap\{X_a : a \in A\}) \subset \bigcap\{R(X_a) : a \in A\})$.

Отношение на $P \times P$, состоящее из всех пар (x, x), $x \in P$, назовем *диагональю или тождественным отображением.* Отношение на $P \times P$ называется *рефлексивным*, если оно содержит диагональ. Если же из xRy и yRx следует $x = y$, то отношение R назовем *антисимметричным.* Если из xRy следует yRx, то отношение R назовем *симметричным.* Отношение R на $P \times P$ назовем *транзитивным*, если xRy и yRz влечет xRz.

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ. Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение на $P \times P$ называется *отношением эквивалентности* или *эквивалентностью.* Эквивалентности играют важнейшую роль во всех разделах математики, т. к. они связаны с разбиениями множества P на классы эквивалентности, которые состоят из попарно непересекающихся подмножеств (т. е. имеющих пустое пересечение).

ФУНКЦИЯ. Функция — это такое отношение F, что из xFy и xFz следует $y = z$. В этой книге функция по определению совпадает с ее *графиком* F. Слова *соответствие, отображение, оператор, преобразование* означают то же, что понятие функции. Примем правило, по которому точку y, для которой справедливо xFy обозначать $y = F(x)$, называя x аргументом, а $F(x)$ — значением функции в точке x. Иногда используется символ $x \mapsto F(x)$ — x переходит в $F(x)$. Отображение F, определенное на множестве A со значениями во множестве B принято записывать в следующем виде

$$F : A \to B.$$

Образом множества A при отображении F называется множество точек $y = F(x)$, когда аргумент x пробегает все значения во множестве A.

Полным прообразом $F^{-1}(A)$ множества A при отображении F называется множество всех аргументов x, при которых значения $F(x)$ принадлежат множеству A.

Множество A называется *инвариантным* для отображения F, если $F(A) \subset A$. Если инвариантное множество состоит из одной точки, то она называется *неподвижной точкой* отображения F.

Функция F называется *продолжением* функции G, а G — *сужением* отображения F, если область определения функции F содержит область определения функции G и при этом $F(x) = G(x)$ для всех x из области определения G.

Если обратное отношение F^{-1} к функции F также является функцией, то F называется *взаимно-однозначным отображением.*

Примером взаимно однозначного отображения является диагональ, т.е. *тождественное отображение* $E(x) = x$.

Пусть R, S, T — отображения, A — непустое множество индексов a, для каждого из которых определено множество X_a. Тогда:

(1) $(R^{-1})^{-1} = R, \qquad (R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

(2) $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$.

(3) $(R \circ S)(A) = R(S(A))$ для каждого множества A.

(4) $R(\bigcup\{X_a : a \in A\}) = \bigcup\{R(X_a) : a \in A\})$.

(5) $R(\bigcap\{X_a : a \in A\}) \subset \bigcap\{R(X_a) : a \in A\})$.

(6) $R^{-1}(\bigcup\{X_a : a \in A\}) = \bigcup\{R^{-1}(X_a) : a \in A\})$.

(7) $R^{-1}(\bigcap\{X_a : a \in A\}) = \bigcap\{R^{-1}(X_a) : a \in A\})$.

(8) $R^{-1}(A\backslash B) = R^{-1}(A)\backslash R^{-1}(B)$.

(9) $R^{-1} \cdot R = R \cdot R^{-1} = E$, где E — тождественное отображение.

ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ. Важную роль в анализе играет обобщение понятия декартового произведения множеств на случай произвольной совокупности сомножителей, которое основывается на понятии отображения. Пусть каждому элементу $\alpha \in A$ поставлено в соответствие множество X_α. Назовем *нитью* любое отображение x, определенное на A, в силу которого каждому элементу α из множества A однозначно сопоставляется некоторый элемент $x(\alpha) \in X_\alpha$, который далее обозначим x_α. (При построении указанного отображения в соответствии с определением можно считать, что рассматривается отображение x из множества A в объединение множеств X_α). При этом значение x_α называется *α-координатой нити x.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.3. Множество всех нитей называется произведением множеств X_α и обозначается $\Pi\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ или просто ΠX_α, если ясно о котором множестве индексов идет речь.

Для каждого $x \in \Pi X_\alpha$ и каждого $\alpha \in A$ полагаем $\pi_\alpha(x) = x_\alpha$. Очевидно, π_α — отображение множества $X = \Pi X_\alpha$ во множество X_α и оно называется *проектированием произведения на α-й сомножитель.*

На практике пользуются следующими частными случаями понятия произведения. Пусть X и Y — множества, положим Y^X — *множество всех отображений множества X в Y*. Тогда, очевидно,

$$Y^X = \Pi\{Y_\alpha : Y_\alpha = Y,\ \alpha \in X\}.$$

Если для каждого $\alpha \in A$ задано отображение $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$, то произведение $f = \Pi\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ отображений f_α является отображением произведения $X = \Pi X_\alpha$ во множество $Y = \Pi Y_\alpha$ по следующему правилу: $f(x) = y$ тогда и только тогда, когда $f_\alpha(x_\alpha) = y_\alpha$ при всех $\alpha \in A$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.4. Назовем смежным классом отношения R, определяемым элементом $a \in P$, множество таких $x \in P$, что xRa.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.5. Систему подмножеств множества P назовем разбиением, если эти множества попарно непересекаются, а их объединение совпадает с P.

ТЕОРЕМА 10.1. *Совокупность смежных классов эквивалентности на данном множестве является разбиением.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду рефлексивности каждый элемент данного множества P содержится в определяемом им смежном классе. Рассмотрим смежные классы A и B, определяемые элементами a и b, соответственно. Пусть существует элемент, т. е. пересечение классов предполагается не пустым: $z \in A \bigcap B$. Тогда справедливо, что

$$xRa, \quad zRa, \quad zRb, \quad yRb,$$

а в силу симметричности эквивалентности, имеем

$$aRz, \qquad bRz.$$

Теперь воспользуемся транзитивностью, на цепочках xRa, aRz, zRb и yRb, bRz, zRa, из которой следует xRb, yRa. Таким образом, элемент $x \in B$, а $y \in A$, т. е. $A = B$. Следовательно, пересекающиеся классы совпадают и, значит, несовпадающие классы не пересекаются. Теорема доказана.

Рассмотрим в универсальном классе U класс множеств $\operatorname{card} A$ (кардинальное число множества A), для которых существует взаимно-однозначное отображение между элементами из A и элементами этих множеств. $\operatorname{card} A \times \operatorname{card} A$ задает отношение эквивалентности в классе U.

ЧИСЛА. Понятие отображения может использоваться для определения понятия числа. На этом пути определяются не только натуральные числа, но и бесконечные, т. е. кардинальные и порядковые числа, подробные сведения о которых излагаются в стандартном курсе теории множеств. Приведем для напоминания лишь основные термины. Множество называется *счетным*, если оно состоит из конечного числа элементов (в том числе — пустого множества элементов), или если существует взаимно-однозначное отображение этого множества на множество $\mathbb{N} = \{1,\ 2, \ldots,\ n, \ldots\}$ всех натуральных чисел. Множества X и Y называются *равномощными или эквивалентными*, если существует взаимно-однозначное отображение множества X на множество Y, и пишут $\operatorname{card} X = \operatorname{card} Y$. Класс всех множеств, равномощных данному множеству X, называется *мощностью* множества X и обозначается $\operatorname{card} X$. Мощности именуются также термином *кардинальные числа.*

Выделим специальный класс отношений, называемый *порядком.*

ОТНОШЕНИЯ ПОРЯДКА. Отношение называется порядком, если оно является рефлексивным, антисимметричным и транзитивным отношением.

ПРИМЕРЫ. 10.1. Отношение включения $\subset$ на 2^M — *множестве всех подмножеств множества M.*

10.2. Порядком всегда является диагональ.

Множество вместе с заданным на нем порядком называется (*частично*) *упорядоченным множеством.*

Порядок R называется *линейным*, если для каждой пары $x, y \in P$ истинно по крайней мере одно из соотношений: xRy или yRx.

В дальнейшем отношение порядка R будем обозначать символом нестрогого неравенства $\leq$, если при этом не возникают недоразумения. Таким образом, частичное упорядоченние на множестве E — это пара $(E, \leq)$.

Пусть F — подмножество частично упорядоченного множества $(E, \leq)$; элемент $x \in E$ называется *мажорантой* множества F, если $f \leq x$ для всех $f \in E$. Мажоранта x множества F называется его *верхней гранью*, если $x \leq g$ для любой мажоранты g множества F. Миноранта множества и его нижняя грань определяются аналогично заменой «знаков неравенства» на противоположные. Верхнюю грань множества F будем обозначать символом $\sup F$, а нижнюю грань — $\inf F$. Элемент $x \in E$ называется *максимальным*, если из $x \leq y$ следует $y \leq x$.

ТЕОРЕМА 10.2. *Пусть дано отображение $f : E \to E$ такое, что $x \leq f(x)$, причем $(E, \leq)$ — непустое частично упорядоченное множество, обладающее следующими свойствами*:

1) *Если $a \leq b$ и $b \leq a$, то $a = b$.*

2) *Каждое линейно упорядоченное подмножество из E имеет верхнюю грань.*

Тогда в E существует неподвижная точка отображения f, т. е. такой элемент w, что $w = f(w)$.

Доказательство этой теоремы приведено в [118].

ТЕОРЕМА 10.3 (Хаусдорф). *Пусть семейство $\mathcal{E}$ линейно упорядоченных подмножеств частично упорядоченного множества $(E, \leq)$ рассматривается как частично упорядоченное множество $(\mathcal{E}, \subset)$ с отношением включения между элементами множества $\mathcal{E}$ (являющимися подмножествами в E.) Тогда $\mathcal{E}$ имеет максимальный элемент. Т. е. каждое частично упорядоченное множество содержит максимальное линейно упорядоченное подмножество.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathcal{E}$ не имеет максимального элемента, то для каждого $A \in\mathcal{E}$ существует соответствующее ему $f(A) \in\mathcal{E}$, в котором является подмножеством, не совпадающим с $f(A)$. Но это противоречит предыдущей теореме. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 10.4 (Цорн). *Если каждое линейно упорядоченное подмножество частично упорядоченного множества $(E, \leq)$ имеет мажоранту, то в E существует максимальный элемент.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x является мажорантой существующего по предыдущей теореме максимального линейно упорядоченного подмножества E_0 частично упорядоченного множества $(E, \leq)$. Допустим, что $x \leq y$. Тогда если $y \notin E_0$, тогда множество $E_0 \cup \{y\}$ будет линейно упорядоченным множеством, содержащим E_0 как собственное подмножество (т. е. подмножества, которое не совпадает с данным множеством). Поэтому из максимальности E_0 выводим принадлежность $y \in E_0$, так что $y \leq x$. Теорема доказана.

Теорема Цорна эквивалентна аксиоме выбора Цермело, которая постулирует для любой системы непересекающихся множеств $\{X_i\}_{i\in I}$ существование такого множества C, что $X_i \cap C$ $\forall i \in I$, состоящего ровно из одного элемента. Аксиома Цермело и теорема Цорна эквивалентны теореме Цермело о существовании вполне упорядоченной структуры на любом заданном множестве.

ТЕОРЕМА 10.5 (Цермело). *Каждое множество может быть вполне упорядочено.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зададимся на множестве E каким-либо отношением порядка $\leq_0$ и рассмотрим семейство $\{\mathcal{E}\}$ всех вполне упорядоченных множеств $(E_0, \leq_0)$ таких, что $E_0 \subset E$. Определим на $\mathcal{E}$ отношение порядка $\prec$, полагая

$$(E_0, \leq_0) \prec (E_0, \leq_1)$$

в том и только том случае, если выполняются следующие условия:
1) $E_0 \subset E_1$,
2) из $x, y \in E_0$ и $x \leq_0 y \Rightarrow x \leq_1 y$,
3) из $x \in E_0$ и $y \notin E_1 \Rightarrow x \leq_1 y$.

При этом упорядочении каждое линейно упорядоченное подмножество $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}$ имеет мажоранту. Эта мажоранта может быть определена следующим соотношением

$$(\bigcup \mathcal{E}_0, \leq'),$$

где $x \leq' y$, если $E_0 \in \mathcal{E}_0$ и $x \leq_0 y$ в упорядоченности $\leq_0$ на E_0. Очевидно, что доказательство принадлежности $(\bigcup \mathcal{E}_0, \leq')$ семейству $\mathcal{E}$ будет означать это и есть искомая мажоранта. Перейдем к доказательству, что упомянутое множество является вполне упорядоченным, а, значит, принадлежит $\mathcal{E}$. Действительно, то, что $x \leq' x$ для $x \in \bigcup \mathcal{E}_0$, ясно. Если $x \leq' y$ и $y \leq' z$, то $x, y \in E_0 \in \mathcal{E}_0$

$y, z \in E_0 \in \mathcal{E}_0$, $x \leq_0 y$ и $y \leq_0 z$. Т. к. $\mathcal{E}_0$ – линейно упорядоченное множество,то можно считать, что $(E_0, \leq_0) \prec (E_0, \leq_1)$, откуда ясно, что $x \leq_1 z$ и, следовательно, что $x \leq' z$. Если $x \leq' y$ и $y \leq' z$, то $x, y \in E_0$ и $x, y \in E_1$, причем $x \leq_0 y$ и $y \leq_1 x$. Отсюда, считая, что $(E_0, \leq_0) \prec (E_0, \leq_1)$, получаем, что $x = y$.

Пусть теперь множество $F \subset \bigcup \mathcal{E}_0$, причем F непусто. Тогда для некоторого $E_0 \in \mathcal{E}_0 F \bigcap E_0 \neq \emptyset$. Частично упорядоченное множество $(E_0, \leq_0)$ является вполне упорядоченным. Пусть $x_0 F \bigcap E_0$ будет минорантой множества $F \bigcap E_0$ в упорядоченности $\leq_0$. Тогда, если $y \in F, y \notin F \bigcap E_0$, то $x_0, y \in E_1$, где $(E_0, \leq_0) \prec (E_0, \leq_1)$, так что $x_0 \leq_1 y$. Следовательно, x_0 будет минорантой множества F в упорядоченности $\leq'$. Тем самым доказано существование мажоранты для множества $\mathcal{E}_0$.

Теперь применим теорему Цорна, в силу которой существует максимальное вполне упорядоченное подмножество E_0. Но тогда $E_0 = E$, т. к. если в E найдется элемент x не принадлежащий E_0, то упорядоченность $\leq_0$ множества E_0 можно распространить на множество $E_0 \bigcup \{x\}$, полагая, по определению, что $y \leq_0 x$ для всех $y \in E_0$. Теорема доказана.

§ 2. Основные понятия топологии

Пусть X — множество. *Топологией* в X назовем некоторую систему $\mathcal{F}$ подмножеств из X, удовлетворяющую следующим условиям:

(1) $\emptyset$ и X принадлежит $\mathcal{F}$;

(2) объединение любого семейства множеств из $\mathcal{F}$ принадлежит $\mathcal{F}$;

(3) пересечение любого конечного семейства множеств из $\mathcal{F}$ принадлежит $\mathcal{F}$.

Элементы системы $\mathcal{F}$ называются *открытыми* множествами топологии $\mathcal{F}$. Пару, состоящую из $(X, \mathcal{F})$, назовем *топологическим пространством.*

Если $\mathcal{F}$ — топология во множестве X, то под *базой* топологии $\mathcal{F}$ понимают такую подсистему $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$, что каждый элемент из $\mathcal{F}$ является объединением некоторого подмножества элементов из $\mathcal{A}$. Топологическое пространство со счетной базой называется *пространством со второй аксиомой счетности.*

Замкнутыми называются множества из X, являющиеся дополнениями открытых во множестве X.

Назовем *замыканием* множества A в топологическом пространстве X наименьшее замкнутое множество $[A]$, содержащее A (которое совпадает с пересечением всех замкнутых множеств, содержащих множество A).

Окрестностью точки $x \in X$ называется любое подмножество из X, содержащее открытое множество из $\mathcal{F}$, в которое входит точка x. Задание окрестностей точек в топологическом пространстве полностью определяет его топологию.

Базой окрестностей точки $x \in X$ назовем такую совокупность окрестностей $\mathcal{B}_x$ точки x, что для каждой ее окрестности V_x сущесвует окрестность $U_x \in \mathcal{B}_x$, которая принадлежит V_x. Топологическое пространство удовлетворяет *первой аксиоме счетности,* если каждая его точка имеет счетную базу окрестностей. Совокупность открытых баз окрестностей всех точек данного топологического пространства задает базу топологии.

Удобным способом определения топологических векторных пространств служит задание их топологии в терминах систем окрестностей каждой точки. Благодаря векторной структуре систему окрестностей нуля можно превратить в систему окрестностей произвольной точки за счет сдвигов этих окрестностей (операцией сложения с фиксированным вектором).

Топологическое пространство называется *отделимым* или *хаусдорфовым*, если любые две различные точки x и y во множестве X имеют непересекающиеся окрестности.

Точка x называется *точкой прикосновения множества* A в топологическом пространстве X, если каждая окрестность точки x содержит точки множества A. Точка x называется *предельной точкой множества* A в топологическом пространстве X, если каждая окрестность точки x содержит точки множества A, отличные от x.

ЛЕММА 10.1. *Замыкание множества A в топологическом пространстве состоит из точек прикосновения A (иначе говоря, замыкание — это объединение A и всех его предельных точек).*

Пусть $(X, \mathcal{F})$ — топологическое пространство и $Y \subset X$. *Индуцированной топологией в* Y называется топология, в которой открытыми множествами по определению являются пересечения Y с $\mathcal{F}$ — открытыми множествами из X.

Пусть X, Y — топологические пространства и f — отображение пространства X в Y. Отображение f называется *непрерывным*, если множество $f^{-1}(V)$ открыто в X всякий раз, когда множество V

открыто в Y. Для этого достаточно, чтобы прообразы $f^{-1}(V)$ были открыты в X для любого элемента V, принадлежащего некоторой базе топологии в Y.

ЛЕММА 10.2. *Для того,чтобы отображение было непрерывным необходимо и достаточно, чтобы прообраз каждого замкнутого множества был замкнут.*

Отображение $f : X \to Y$ называется *гомеоморфизмом* пространства X на пространство Y, если оно взаимно однозначное, а отображения f и f^{-1} — непрерывные.

Иногда возникает потребность наделения множества X такой топологией, в которой становятся непрерывными заданные отображения множества X в некоторые топологические пространства. Предположим, что задано семейство топологических пространств $(Y_i)_{i\in I}$ и для каждого $i \in I$ задано отображение $f_i : X \to Y_i$. Рассмотрим такие топологии, при которых для каждого индекса $i \in I$ отображение $f_i : X \to Y_i$ непрерывное. Очевидно, такие топологии существуют, например, сильнейшая или дискретная топология. Среди таких топологий существует слабейшая. Ее база может быть задана следующим образом. Если множество V_i открытое в топологическом пространстве Y_i, то положим элементами базы искомой топологии всякое множество вида

$$U = \bigcap\{f^{-1}(V_i) : i \in I\},$$

где $V_i = Y_i$ для всех значений i, кроме конечного или пустого набора индексов i. Топология, задаваемая этой базой — слабейшая, в которой каждое из отображений $f_i : X \to Y_i$ непрерывное. Будем ее называть *топологией, определенной заданным семейством отображений* $\{f_i\}$.

Направленным множеством назовем частично упорядоченное множество I с отношением порядка $\geq$, в котором любые два элемента обладают общей *мажорантой*, т. е. для каждой пары α_1, $\alpha_2 \in I$ можно указать элемент $\alpha_3 \in I$ такой, что

$$\alpha_3 \geq \alpha_1, \quad \alpha_3 \geq \alpha_2.$$

Направленность (сеть) — это параметрическое семейство элементов, множество индексов которых направленно. Иногда сеть называют *обобщенной последовательностью.* Каждая последовательность является сетью. Приводимое ниже определение подсети обобщает понятие подпоследовательности .

Поднаправленностью (подсетью) направленности $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ назовем такую направленность $\{y_\beta\}_{\beta\in J}$, для которой существует функция $F : (J, \geq) \to (I, \geq_1)$ со следующими свойствами:
1) $y_\beta = x_{F(\beta)} \quad \forall\beta \in J$;
2) для каждого $\alpha' \in I$ существует такое $\beta' \in J$, что при $\beta \geq \beta'$ значения $F(\beta) \geq_1 \alpha'$.

Назовем сеть *сходящейся* к элементу x топологического пространства X, если для каждой окрестности точки x можно указать такой индекс, начиная с которого элементы сети принадлежат данной окрестности. Если множество индексов сети отождествляется с множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$, то сеть называется *последовательностью.*

ЛЕММА 10.3. *Топологическое пространство является хаусдорфовым* (*отделимым*) *тогда и только тогда, когда каждая сходящаяся сеть имеет не более одного предела.*

ЛЕММА 10.4 (Свойства топологических пространств в терминах направленностей). *Пусть топологическое пространство является хаусдорфовым. Тогда*

точка x принадлежит замыканию данного множества A, если существует сеть элементов из A, сходящаяся к x;

точка является предельной для сети, если существует подсеть, сходящаяся к этой точке;

если сеть сходится к некоторой точке, то и каждая ее подсеть сходится к той же точке;

отображение $f : X \to Y (X$ и Y — хаусдорфовы пространства$)$ непрерывно в точке x тогда и только тогда, когда сеть $f(x_\alpha)$ сходится к $f(x)$ для любой сети $\{x_\alpha\}$ из X, сходящейся к точке x.

§ 3. Произведение топологий

Пусть $\{X_i\}_{i\in I}$ — некоторое семейство топологических пространств. Образуем произведение множеств $X = \prod X_i$, т. е. всех таких наборов $x = (x_i)$, что $x_i \in X_i$ для каждого $i \in I$. Рассмотрим отображения π_i произведения $X = \prod X_i$ на множества X_i, определенные равенствами $\pi_i(x) = x_i$ (так называемые проекции).

Если топологические пространства $X_i = Y$ для каждого $i \in I$, где Y — фиксированное пространство, то произведение $\prod X_i$ есть не что иное как множество всех отображений, определенных на I со значениями в Y. В этом случае будем пользоваться естественным обозначением $Y^I \stackrel{def}{=} \prod X_i$. Топология в $X = \prod X_i$, заданная семейством проекций π_i, называется *произведением топологий пространств* X_i. Множество X, наделенное такой топологией, называется *топологическим произведением семейства пространств* $\{X_i\}_{i \in I}$, а сами пространства X_i — его *сомножителями.*

ЛЕММА 10.5. *Отображение f топологического пространства S в произведение X непрерывно тогда и только тогда, когда каждая суперпозиция $\pi_i \circ f : S \to X_i$ непрерывна.*

ЛЕММА 10.6. *Если каждый из сомножителей X_i произведения X — отделимое пространство, то произведение X также отделимое пространство.*

Если $X_i = Y$ для всех i, то топологию произведения $X = Y^I$ обычно называют *топологией поточечной сходимости на I*, ибо произведение в этом случае естественно отождествляется со множеством всех отображений из I в Y.

§ 4. Компактные пространства

Покрытием множества X называют систему Σ подмножеств в X, объединение которых совпадает с X. Покрытие Σ' называется *подпокрытием покрытия* Σ, если $\Sigma' \subset \Sigma$.

Покрытие Σ называют *открытым*, если оно состоит из открытых множеств в X.

Систему Σ подмножеств множества X называют *центрированной*, если каждая непустая конечная подсистема в Σ имеет непустое пересечение.

Топологическое пространство называется *компактным*, если оно отделимое и каждое открытое покрытие в нем содержит конечное подпокрытие.

ТЕОРЕМА 10.6. *Пусть X — топологическое хаусдорфово пространство. Следующие четыре утверждения эквивалентны.*
(a) *Каждое открытое покрытие пространства X содержит конечное подпокрытие.*

(b) *Если система Σ замкнутых множеств пространства X центрирована, то пересечение всех множеств системы Σ непусто.*
(c) *Каждая сеть точек из X имеет в X предельную точку.*
(d) *Каждая сеть точек из X содержит сходящуюся подсеть.*

Очевидно, топологические пространства, обладающие одним из свойств (a) — (d) (и, следовательно, каждым) являются компактными.

Множество A топологического пространства X называется *компактным*, если оно является компактным в индуцированной топологии. Множество A называется *относительно компактным*, если его замыкание компактно.

СЛЕДСТВИЯ. 10.1. *Если X — компактное пространство, то каждое его бесконечное подмножество содержит предельную точку.*
10.2. *Замкнутое подмножество компактного пространства компактно.*
10.3. *Компактные подмножества хаусдорфовых пространств замкнуты в содержащих их пространствах.*
10.4. *Пусть X — компактное пространство. Если сеть в X имеет не более одной предельной точки, то она сходится.*
10.5. *Хаусдорфово пространство компактно тогда и только тогда, когда любая его центрированная система подмножеств имеет общую точку прикосновения.*

§ 5. Теорема о гомеоморфизме

Следующая теорема играет существенную роль в построении классов корректности среди глобальных функциональных решений систем законов сохранения.

ТЕОРЕМА 10.7 (теорема о гомеоморфизме). *Если X — компактное, а Y — отделимое топологическое пространство и отображение $f : X \to Y$ непрерывно, то множество $f(X)$ компактно в Y. Если, кроме того отображение f взаимно однозначное, то f — гомеоморфизм пространства X на пространство $f(X)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{V_i\}$ — открытое покрытие множества $A = f(X)$. Система множеств $\{f^{-1}(V_i)\}$ является тогда открытым покрытием пространства аргументов X, так как для непрерывного отображения прообразы открытых множеств открыты. В силу компактности X система $\{f^{-1}(V_i)\}$ содержит конечное подпокрытие. Очевидно, образы этой конечной подсистемы составляют искомое конечное подпокрытие для множества A. Таким образом, $f(X)$ компактно в индуцированной топологии.

Допустим теперь, что f является взаимно однозначным отображением компактного пространства X на пространство Y. Пусть F — произвольное замкнутое подмножество в X, т. е. оно компактное (следствие 10.2). Значит, в силу первой части доказательства его образ компактен в хаусдорфовом пространстве Y и, следовательно, по следствию 10.3 множество $f(F)$ замкнутое в пространстве Y, что в свою очередь приводит к его замкнутости в индуцированной топологии на $f(X)$. Итак, для обратного отображения $f^{-1} : f(X) \to X$ прообраз каждого замкнутого множества — замкнут, т. е. f^{-1} — непрерывно. Тем самым установлено, что f — гомеоморфизм. Теорема доказана.

§ 6. Теорема А. Н. Тихонова

Приводимая ниже теорема А. Н. Тихонова[1] [123], является центральным результатом теории компактных топологических пространств и играет фундаментальную роль в обосновании глобальной сходимости приближенных методов для излагаемой в дополнении 1 теории функциональных решений систем законов сохранения.

ТЕОРЕМА 10.8. *Топологическое произведение семейства компактных топологических пространств есть компактное пространство.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{X_i\}_{i\in I}$ — семейство компактных топологических пространств и X — его произведение. По следствию

---

[1] Андрей Николаевич Тихонов (30.10.1906–7.10.1903) — выдающийся советский математик и геофизик, академик АН СССР, дважды Герой Социалистического Труда (1953, 1986). Родился в Гжатске. Окончил Московский университет (1927). С 1936 работал в МГУ и в Институте прикладной математики АН СССР. Ученик П. С. Александрова. А. Н. Тихонов получил важные результаты и в наиболее абстрактных областях чистой математики и в математических дисциплинах, непосредственно связанных с практикой. В теоретико-множественной топологии он ввёл понятия бесконечного произведения топологических пространств, так называемое тихоновское произведение, и понятие вполне регулярных пространств — тихоновских пространств, являющихся центральными результатом теории компактных пространств, см. [119, 123].

5 к теореме 10.2 достаточно показать, что каждая центрированная система подмножеств произведения имеет непустое пересечение, т. е. $\bigcap\{A : A \in \Sigma\} \neq \emptyset$, где Σ — произвольная центрированная система множеств в X. Не нарушая общности, можно считать, что Σ — максимальная центрированная система множеств произведения, ибо по лемме Цорна любую центрированную систему можно расширить до максимальной. Из условия максимальности центрированной системы Σ получаем следуюшие следствия:

(a) система Σ замкнута относительно конечных пересечений;

(b) всякое множество в X, пересекающее каждое множество системы Σ, само принадлежит системе Σ.

При каждом фиксированном индексе i система проекций $\pi_i(\Sigma)$ подмножеств пространства X_i центрирована. В силу компактности X_i система проекций $\pi_i(\Sigma)$ множеств из системы Σ имеет общую точку прикосновения $x_i \in X_i$. Поэтому, если $U_i \subset X_i$ — некоторая окрестность точки x_i, то пересечение $U_i \cap \pi_i(A)$ непусто для любого множества $A \subset \Sigma$. Другими словами, множество $\pi^{-1}(U_i)$ пересекает каждое множество системы Σ. В силу свойства (b) множество $\pi^{-1}(U_i) \in \Sigma$, а из свойства (a) следует, что таким же свойством обладают любые конечные пересечения таких множеств. Однако совокупность конечных пересечений множеств вида $\pi^{-1}(U_i)$ образует базу окрестностей точки $x = \{x_i\}_{i \in I} \in X = \prod X_i$ в топологии произведения X.

Таким образом, каждая окрестность точки x принадлежит системе Σ, т. е. x является точкой прикосновения любого множества системы Σ. Теорема доказана.

§ 7. Слабые топологии в сопряженных пространствах

ТОПОЛОГИИ $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{L})$. Пусть $\mathcal{E}$ — векторное пространство без топологии, $\mathcal{L}$ — векторное подпространство в $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}^+$ — алгебраическое сопряженное пространства $\mathcal{E}$. Среди топологий в $\mathcal{E}^+$, среди которых каждая из функций $l(F)$ (где $F \in \mathcal{L}$ фиксированное, а переменными являются $l \in \mathcal{E}^+$) с числовыми значениями непрерывна при произвольном фиксированном $F \in \mathcal{E}$, существует слабейшая топология. Эта топология обозначается $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{L})$ и называется слабой топологией, порожденной подпространством $\mathcal{L}$. Топология $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{L})$

согласуется со структурой векторного пространства $\mathcal{E}^+$, превращает $\mathcal{E}^+$ в локально выпуклое пространство. Базу окрестностей нуля в $\mathcal{E}^+$ образуют множества вида

$$U^+(D, \varepsilon) = \{l \in \mathcal{E}^+ : |l(F)| < \varepsilon, F \in D\},$$

где $\varepsilon > 0$, а D — конечное подмножество в подпространстве $\mathcal{L}$. Семейство полунорм

$$p_F(l) \stackrel{def}{=} \sup\{|l(F)| : F \in \mathcal{L}\}$$

является определяющим для топологии $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{L})$.

В случае $\mathcal{L} = \mathcal{E}$ говорят о слабой топологии в $\mathcal{E}^+$.

Топология $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$ всегда отделима в смысле Хаусдорфа.

ТЕОРЕМА 10.9. *Пусть $\mathcal{E}$ — векторное пространство. Множество $G \subset \mathcal{E}^+$ относительно компактно в топологии $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$ тогда и только тогда, когда оно слабо ограничено, т. е. когда*

$$\sup\{p_F(l) : l \in G\} < \infty$$

для каждого $F \in \mathcal{E}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть множество G относительно компактное, т. е. его замыкание — компактное подмножество в $\mathcal{E}^+$. Но тогда по теореме Коши каждая непрерывная функция ограничена на $[G]$ и, следовательно, при любом $F \in \mathcal{E}$ ограничены на G полунормы p_F. Необходимость доказана.

Достаточность. Заметим, что пространство $\mathcal{E}^+$ является замкнутым подмножеством в $\mathbb{R}^{\mathcal{E}}$, снабженным топологией поточечной сходимости (произведения), ибо предельные точки множества конечных линейных функционалов также являются конечными линейными функционалами. Далее, топология $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$ индуцирована на $\mathcal{E}^+$ топологией произведения $\mathbb{R}^{\mathcal{E}}$. Таким образом, множество G, рассматриваемое как подмножество в $\mathbb{R}^{\mathcal{E}}$, имеет ограниченные проекции, т. е. их замыкания лежат в компактах пространства $\mathbb{R}$. Следовательно, по теореме 10.8 (А. Н. Тихонова) множество G принадлежит компактному подмножеству $T \subset \mathbb{R}^{\mathcal{E}}$, состоящему из произведения компактных подмножеств в $\mathbb{R}$, которые содержат проекции G. Таким образом, замыкание множества G в произведении $\mathbb{R}^{\mathcal{E}}$ принадлежит T и в силу следствия 10.2 множество $[G]$ само является компактным подмножеством в $\mathbb{R}^{\mathcal{E}}$. Но поскольку $\mathcal{E}^+$ — замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^{\mathcal{E}}$, то $[G] \subset \mathcal{E}^+$. А так как топология $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$ индуцирована на $\mathcal{E}^+$ топологией произведения $\mathbb{R}^{\mathcal{E}}$, то G относительно компактное в $\mathcal{E}^+, \sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$. Теорема доказана.

§ 8. Пространства суммируемых функций

Назовем *мерой* счетно-аддитивную функцию подмножеств множества Ω с неотрицательными значениями, которая определена на некоторой σ-алгебре. Мера называется *борелевой*, если областью ее определения служат борелевы множества. Тройку (Ω, σ, μ) назовем *пространством с мерой*; оно *σ-конечное* (счетно-конечное), если Ω может быть представлено как объединение счетного набора множеств конечной меры. Ниже всюду предполагается σ-конечность пространств с мерой.

Пространство $L_p(\Omega, \mu)$, $1 \le p < \infty$, состоит из классов эквивалентности относительно меры μ измеримых функций f на множестве Ω, имеющих конечный интеграл Лебега

$$\int\limits_{\Omega} |f|^p \, d\mu < \infty.$$

При $p = 1$ классы эквивалентности состоят из функций с ограниченным существенным максимумом. Пространства L_p, $1 \le p < \infty$, являются банаховыми в нормах, задаваемыми интегралами

$$\| f \|_p = \left\{ \int\limits_{\Omega} |f|^p \, d\mu \right\}^{1/p} < \infty,$$

где f — произвольный представитель данного класса эквивалентности. При $p = \infty$ соответствующая норма задается существенным максимумом представителя класса f

$$\| f \|_\infty = \operatorname{vrai} \sup_{\Omega} |f|.$$

Сопряженные пространства (т. е. пространства линейных непрерывных функционалов) на пространствах L_p, $1 \le p < \infty$, изометрически отождествляются с прстранствами L_q, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. *Слабая топология на* L_p, $1 \le p < \infty$, задается как топология $\sigma(L_p, L_q)$.

Пространство полагается *слабо полным,* если его каждая *слабо фундаментальная последовательность* слабо сходится (т. е. сходится в слабой топологии данного пространства).

ТЕОРЕМА 10.10. *Пусть* $1 < p < \infty$. *Тогда пространство* $L_p(\Omega, \mu)$ *рефлексивно и слабо полно. Для того, чтобы множество в* $L_p(\Omega, \mu)$ *было слабо компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным по норме.*

ТЕОРЕМА 10.11. *Пространство* $L_1(\Omega, \mu)$ *слабо полно. Последовательность* $\{f_n\}$ *в том и только том случае слабо сходится к некоторому элементу* f *из* $L_1(\Omega, \mu)$, *если она ограничена и*

$$\int\limits_E f(s)\,\mu(ds) = \lim_n \int\limits_E f_n(s)\,\mu(ds)$$

на каждом множестве E *из* σ*-алгебры, на которой определена мера* μ. *Подмножество* $K \subset L_1(\Omega, \mu)$ *в том и только том случае является слабо компактным, если оно ограничено и счетная аддитивность интегралов* $\int\limits_E f(s)\,\mu(ds)$ *равномерна относительно* $f \in K$.

Если Ω является сепарабельным метрическим пространством, то пространства $L_p(\Omega, \mu)$, $1 \le p < \infty$, с борелевой мерой μ также сепарабельные.

§ 9. Теоремы Бэра и Банаха–Штейнгауза

Множество S в топологическом пространстве M называется *нигде не плотным*, если его замыкание не содержит непустых открытых множеств.

ТЕОРЕМА 10.12 (теорема Бэра о категории). *Полное метрическое пространство не может быть объединением счетного числа нигде не плотных множеств.*

На практике теорема 10.12 впрямую используется редко, а пользуются одним из ее следствий, одно из которых известно под названием теорема Банаха–Штейнгауза.

ТЕОРЕМА 10.13 (теорема Банаха–Штейнгауза или принцип равномерной ограниченности.) *Пусть X — банахово пространство. Пусть $\mathcal{F}$ — семейство ограниченных линейных преобразований из X в какое-либо нормированное пространство Y. Допустим, что для всякого $x \in X$ множества $\{\| Tx \|_Y \colon T \in \mathcal{F}\}$ ограничены. Тогда множество $\{\| T \| \colon T \in \mathcal{F}\}$ ограничено.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$B_n = \{x : \| Tx \|_Y \leq n, T \in \mathcal{F}\}.$$

По предположению каждый элемент x принадлежит некоторому B_n и, значит, пространство

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Более того, каждое множество B_n замкнуто, так как каждое $T \in \mathcal{F}$ непрерывное. По теореме Бэра о категории какое-либо B_n содержит открытое множество и, следовательно, имеется открытый шар, на котором ограничены значения $\| Tx \|_Y$ общей постоянной для всего множества $\mathcal{F}$. Таким образом, выполнив сдвиг центра этого шара в нуль, получаем на нем равномерную ограниченность значений $\| Tx \|_Y$ относительно $\mathcal{F}$. Но это означает ограниченность норм семейства отображений $\mathcal{F}$. Теорема доказана.

Литература

1. Волощук В. М., Седунов Ю. С. Процессы коагуляции в дисперсных системах. - Л.: Гидрометеоиздат. - 1975.

2. Warshaw M. Cloud droplet coalescence. Statistical foundations and one-dimentional sedimentional model // Journal of the Atmospheric Sciences, 1967, V. 24, P. 278—286.

3. Berry E. X. Cloud droplet growth by collection // Journal of the Atmospheric Sciences, 1967, V. 24, P. 688—701.

4. Степанов А. С. К выводу уравнения коагуляции // Труды ИЭМ, 1971, вып. 23, С. 3—16 .

5. Степанов А. С. Вывод уравнения коагуляции для броуновски движущихся частиц // Труды ИЭМ, 1971, вып. 23, С. 42—64.

6. Степанов А. С. Кинетическое уравнение диффузионного роста капель // Изв. АН СССР , Физ. атмосферы и океана, 1972, Т. 8, №8, С. 853—865.

7. Головин А. М. К вопросу о решении уравнения коагуляции дождевых капель с учетом конденсации // ДАН СССР, 1963, Т. 148, №6, С. 1290—1293.

8. Головин А. М. Решение уравнения коагуляции облачных капель в восходящем потоке воздуха // Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1963, №5, С. 783—791.

9. Головин А. М. О спектре коагулирующих облачных капель. 2 // Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1963, №9, С. 1438—1447.

10. Головин А. М. О кинетическом уравнении коагулирующих облачных капель с учетом конденсации. 3 // Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1963, №10, С. 1571—1580.

11. Смолуховский М. Опыт математической теории кинетики коагуляции коллоидных растворов // М.: ОНТИ, в кн: Коагуляция коллоидов. - 1936. С. 7—39.

12. Чандрасекар С. Стохастические проблемы в физике и астрономии. - М.: ИЛ. - 1947.

13. Muller H. Zar allgemeinen theoric cler rashen Koagulation // Kolloidchem. Beil., 1928, Bd 27.

14. Сафронов В. С. Частный случай решения уравнения коагуляции // ДАН СССР, 1962, Т. 147, №1, С. 64—67.

15. Сафронов В.С. Эволюция допланетарного облака и образование Земли и планет. - М.: Наука. - 1969.

16. Smoluchowski M. Drei Vorträge über Diffusion, Brounsche Molekularbewengung und Koagulation von Kolloidteilchen // Phys. Zeits. XVII, 1916, P. 557—585 und 585—559.

17. Мюллер Х. Коагуляция коллоидов с частицами, имеющими форму «палочек» и «листочков», теория любых полидисперсных систем и коагуляция при течении // М.: ОНТИ, в кн: Коагуляция коллоидов. 1936, С. 74—98.

18. Туницкий Н. Н. О коагуляции полидисперсных систем // ЖЭТФ, 1938, Т. 8, Вып. 4, С. 418—424.

19. Melzak Z. A. The effect of coalescence in certain collision processes // Quart. Appl. Math., 1953, V. 2, №2, P. 231—234.

20. Shumann T. E. W. Theoretical aspects of the size distributions of fog particles // Quart. J. Rog. Met. Soc., 1940, V. 66, №285, P. 197—207.

21. Scott W. I. Analytical studies of cloud droplet coalescence // Journal of the Atmospheric Sciences, 1968, V. 25, P. 54—65.

22. McLeod I. B. On the scalar transport equation // Proc. London Math. Soc., 1964, V. 14, P. 445—458.

23. Drake R. L. The scalar transport equation of coalescense theory. Moments and Kernels // Journal of the Atmospheric Scienses, 1972, V. 29, №3, 537—547.

24. Melzak Z. A. A scalar transport equation. 1 // Trans. Amer. Math. Soc., 1957, V. 85, P. 547—560.

25. Melzak Z. A. A scalar transport equation. 2 // Michigan Math. J., 1957, V. 4, P. 193—206.

26. Melzak Z. A. Entire operators and functional equations // Proc. Amer. Math. Soc., 1959, V. 10, P. 438—447.

27. Melzak Z. A. The possibility set of the solutions of a transport equation // Michigan Math. J., 1959, V. 6, P. 331—334.

28. Morgenstern D. Analytical studies related to the Maxwell–Boltzmann equation // Journal of Rational Mechanics and Analysis, 1955, V. 4, P. 533—554.

29. Повзнер А. Я. Об уравнении Больцмана кинетической теории газов // Матем. сборник, 1962, Т. 58, №1, С. 65—86.

30. Черчиньяни К. Математические методы в кинетической теории газов. - М.: Мир. - 1973.

31. Карлеман Т. Математические задачи кинетической теории газов. М.: ИЛ, 1960.

32. Тодес О. М. Кинетика коагуляции и укрупнения частиц в золях // М.: Из-во АН СССР. В кн: Проблемы кинетики и катализа, 1949, С. 127—132.

33. Friedlander S. K. Theoretical considerations for the particle size spectrum of the stratospherie aerosol // J. Met., 1961, v. 18, 753-759.

34. Мартынов Г. А., Баканов С. П. О решении кинетического уравнения коагуляции // М.: Из - во АН СССР. В кн: Исследования в области поверхностных сил. 1961, 220—229.

35. Рудин У. Функциональный анализ. - М.: Мир. - 1975.

36. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука. - 1972.

37. Курант Р. Уравнения с частными производными. - М.: Мир. - 1964.

38. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления нелинейных уравнений. - М.: Наука. - 1969.

39. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Мир. - 1970.

40. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. - М.: Наука. - 1969.

41. Тупчиев В.А. Об асимптотических свойствах решения уравнения коагуляции // Труды ИЭМ, 1971, вып. 23, С. 17—27.

42. Berry E. X., Reinhardt R. L. Droplet collection rates for double initial Gaussian distributions // In Proc. Intern. Conf. Cloud Phys. London, 1972, P. 78—79.

43. Berry E. X., Reinhardt R. L. An analysis of cloud drop growth by collections // Journal of the Atmospheric Scienses, 1974, V. 31, №7, P. 1814—1831.

44. Chin E. H. C., Neifurger M. A. A numerical simulation of gravitational coagulation process for cloud droplets // Journal of the Atmospheric Scienses, 1972, V. 19, P. 718—727.

45. Нитецки З. Введение в дифференциальную динамику. - М.: Мир. - 1975.

46. Swift D., Friedlander S. K. The coagulation of hydrosols by brownian motion and laminar shear flow // J. Colloid. Sc., 1964, V. 19, №7, P. 621—647.

47. Hidy J. M. On the theory of coagulation of noninteracting particles in brownian motion //J. Colloid. Sc., 1965, V. 20, P. 123—144.

48. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. - М.: Наука. - 1967.

49. Галкин В. А. О существовании и единственности решения уравнения коагуляции // Дифференц. уравнения, 1977, Т. 13, №8, С. 1460—1470.

50. Галкин В. А., Тупчиев В. А. Об асимптотическом поведении решения уравнения коагуляции // Труды института экспериментальной метеорологии. Сер. Физика нижней атмосферы, 1978, вып. 1972, С. 31—41.

51. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. - М.: Наука. - 1978.

52. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. - М.: Мир. - 1973.

53. Неравновесные явления. Уравнение Больцмана. Под редакцией Д. Л. Либовица и Е. У. Монтролла. - М.: Мир. - 1986.

54. Тихонов А. Н., Самарский А. А. О разрывных решениях квазилинейных уравнений первого порядка // ДАН СССР, 1954, Т. 99, №1, С. 27—30.

55. Hopf E. The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ // Comm. Pure Appl. Math., 1950, V. 3, P. 201—230.

56. Олейник О. А. О задаче Коши для нелинейных уравнений в классе разрывных функций // УМН, 1954, Т. 9, №3, С. 231—233.

57. Олейник О. А. Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений // УМН, 1957, Т. 12, №3, С. 3—73.

58. Кружков С. Н. К методам построения обобщенных решений задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка // УМН, 1965, Т. 20, №6, С. 112—118.

59. Кружков С. Н. Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными // Матем. сб., 1970, Т. 81, №2, С. 228—255.

60. Рождественский Б. Л. Разрывные решения систем квазилинейных уравнений гиперболического типа // УМН, 1960, Т. 15, №6, С. 59—116.

61. Glimm J. Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations // Comm. Pure Appl. Math., 1965, V. 18, P. 697—715.

62. Бахвалов Н. С. О существовании в целом регулярного решения квазилинейной гиперболической системы // ЖВМ и МФ, 1970, Т. 10, №4, С. 969—980.

63. Кузнецов Н. Н., Тупчиев В. А. Об одном обобщении теоремы Глимма // ДАН СССР, 1975, Т. 221, №2, С. 287—290.

64. Ukai S. Les solutions de’l equation de Boltzmann dans l’espace tout en tier et dans demi espace // C.R. Acad. Sc. Paris, 1976, t. 282.

65. Bellomo N., Toskani G. On the Cauchy problem for the nonlinear Boltzmann equation: global existence, uniqueness and asymptotic stability // J. Math. Phys., 1985, V. 26, №2, P. 334—338.

66. DiPerna R. J., Lions P. L. Solutions globales de l’equation de Boltzmann // C. R. Acad. Sc. Paris, 1988, t. 306, P. 343—346.

67. Галкин В. А. Уравнение Смолуховского для пространственно неоднородных систем // ДАН СССР, 1985, Т. 285, N5, С. 1087—1091.

68. Галкин В. А. Обобщенное решение уравнения Смолуховского для пространственно неоднородных систем // ДАН СССР, 1987, Т. 293, №1, С. 74—77.

69. Галкин В. А. Решение уравнений, связанных с физической кинетикой // ДАН СССР, 1988, Т. 298, №1, С. 1362—1367.

70. Tartar L. Compensated compactness and applications to the partial differential equations // Res. Notes in Math., 1979, №39, P. 136—212.

71. DiPerna R. J. Compensated compactness and general systems of conservation laws // Trans. Amer. Math. Soc., 1985, V. 292, №2, P. 383—420.

72. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теория оптимального управления. - М.: Мир. - 1974.

73. Галкин В. А., Тупчиев В. А. О разрешимости в среднем систем квазилинейных законов сохранения // ДАН СССР, 1988, Т. 300, №6, С. 1300—1304.

74. Галкин В. А. Функциональные решения законов сохранения // ДАН СССР, 1990, Т. 310, №4, С. 834—839.

75. Филиппов А. Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения с разрывными правыми частями // Матем. сб., 1960, Т. 51, №4, С. 101—128.

76. Maxwell J. C. The Scientific letters of J. C. Maxwell. New York, Dover, 1965.

77. Boltzmann L. Weitere studien über das Warmgleichwicht unter gas molekulen // Ber. Acad. Wiss. Wien, GG V. 300, №6, 1872, P. 275—370

78. Smoluchowski M. v. Versuch Einer Mathematichen Theorie der Koagulationskinetik Kolloider Lösungen // Z. physikalische Chemie, 92, 1917, 129—168.

79. Галкин В. А. О решении уравнения коагуляции с ядром $\Phi = xy$ // Метеорология и гидрология, 1984, №5, С. 33—39.

80. Эдвардс Р. Е. Функциональный анализ. Теория и приложения. - М.: Мир. - 1969.

81. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т1. - М.: Мир. - 1977.

82. Волощук В. М. Кинетическая теория коагуляции. - Л.: Гидрометеоиздат. - 1984.

83. Галкин В. А. Итерационный метод решения одного класа эволюционных уравнений,связанных с физической кинетикой // ЖВМ и МФ, 1981, Т. 21, №2, С. 385—399.

84. Галкин В. А. Решения уравнений физической кинетики с нелинейными операторами столкновений // Обнинск: из-во ИАТЭ. В сб. «Исследование нелинейных и стохастических моделей математической физики», 1992, С. 4—13.

85. Вишик М. И., Фурсиков А. В. Математические задачи статистической гидромеханики. - М.: Наука. - 1980.

86. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов. Т.1. - М.: Наука. - 1971.

87. Lang R., Xanh N. X. Smoluchowski's theory of coagulation in colloids holds rigorously in Boltzmann-Grad limit // Z. Wahrscheinlinchkeitstheorie verw. Gebiette, 54, 1980, 227—280.

88. Галкин В. А. Об устойчивости и стабилизации решения уравнения коагуляции // Дифференц. уравнения, 1978, Т. 14, №10, С. 1863—1874.

89. Диткин В. А, Прудников А. П. Операционное исчисление. - М.: Высшая школа. - 1966.

90. Галкин В. А. Об одном свойстве коагуляции атмосферного аэрозоля // Метеорология и гидрология, 1983, №12, С. 11—19.

91. Багдасарова И. Р., Галкин В. А. Моделирование периодических структур в распределении дефектов, возникающих в конструкционных материалах ЯЭУ, под действием стационарного источника // Известия вузов. Ядерная энергетика, 1999, №1, С. 85—93.

92. Галкин В. А., Забудько М. А. Точные и численные решения уравнений теплопроводности и кинетических уравнений // Известия вузов. Ядерная энергетика, 2000, №1, С. 19—28.

93. Багдасарова И. Р., Галкин В. А. Моделирование процесса коагуляции в пространственно однородном случае // Математическое моделирование, 1999, Т. 11, №6, С. 82—112.

94. Галкин В. А., Русских В. А. Сходимость приближенных методов для уравнений гидродинамики //Математическое моделирование, 1994, №3, С. 101—113.

95. Galkin V. A. Convergence and numerical stability of approximate methods for conservation laws // World Scientific Publishing Co. International Journal of Modern Physics C, 1994, V. 5, №2, P. 207—214.

96. Galkin V. A., Russkikh V. V. On the background of limit path for the Korteweg de Vries Equatuon as the Dispertion Vanishes // Kluwer Academic Publishers/Netherlands. Acta Applicande Matematicae, V. 39, 1995, P. 307—314.

97. Galkin V. A., Dubovskii P. B. and Stewart I. W. Exact solution for the coagulation-fragmentation equation // Printed in UK. J. Physics A: Math. Gen., 1992, V. 25, P. 4737—4744.

98. Галкин В. А. Обоснование приближенных методов для систем законов сохранения // Вестник Московского университета, математика, механика, 1995, №6, P. 55—59.

99. Галкин В. А. Теория функциональных решений систем законов сохранения и ее приложения // М: из-во МГУ. Труды семинара им. И. Г. Петровского, 2000, Т. 20, С. 81—120.

100. Галкин В. А, Ткаченко М. Г. Численное решение уравнений власовского типа, возникающих при моделировании ЯЭУ // Известия высших учебных заведений, Ядерная энергетика, №1, 1999, С. 94—103.

101. Galkin V. A. Global correctness of Cauchy problem for nonlinear conservation laws system and one Example for the Gas Dynamics // Birkhauser, Verlag Basel/Switzerland. International Series of Numerical Mathematics, 1999, V. 129, P. 361—368.

102. Галкин В. А. Методы расчета задач физической кинетики. - Обнинск: из-во МИФИ. - 1981, 60 с.

103. Галкин В. А. Методы решения задач физической кинетики. - Обнинск: из-во ИАТЭ. - 1995, 171 с.

104. Галкин В. А. Выбор глобальных классов корректности функциональных решений для систем законов сохранения // Фундаментальная и прикладная математика, 1998, Т. 4, №8, С. 853—868.

105. Галкин В. А., Шепелина Ю. О. Существование решений для стационарного уравнения Смолуховского // Обнинск:
Из-во ИАТЭ, Тезисы международной конф.«Математическая

физика, математическое моделирование и приближенные методы, посвященной памяти академика А. Н. Тихонова», Обнинск, 15–19 мая 2000. С. 72—73.

106. Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. - М.: Мир. - 1965.

107. Румер Ю. Б., Рывкин М. Ш. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. - М.: Наука. Физматлит. - 1977.

108. Вентцель А. Д. Курс теории случайных процессов. - М.: Наука. Физматлит. - 1975.

109. Людвиг Больцман. Статьи и речи. - М.: Наука. - 1970.

110. Кац М. Несколько вероятностных задач физики и математики. - М.: Наука. - 1967.

111. Четверушкин Б. Н. Кинетически согласованные схемы в газовой динамике. - М.: из-во МГУ. - 1999.

112. Власов А. А. Нелокальная статистическая механика. - М.: Наука. - 1978.

113. Иванов И., Платиканов Д. Коллоиды. - Л.: Химия. - 1975.

114. Математика в современном мире. - М.: Мир. - 1968.

115. Галкин В. А. Дополнительные главы функционального анализа. - Обнинск: из-во ИАТЭ. - 1997.

116. Рид К. Гильберт. - М.: Наука. - 1977.

117. Кушнер Б. А. Лекции по конструктивному математическому анализу. - М.: Наука. - 1973.

118. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. - М.: ИЛ. - 1962.

119. Бородин А. И., Бугай А. С. Биографический словарь деятелей в области математики. - Киев: Радяньска школа. - 1979.

120. Hilbert D. Math. Ann., 72, 562 (1912).

121. Hilbert D. Grundzüge einer algemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. - New York: Chelsea. - 1953.

122. Кружков С. Н. Труды. - М.: Наука. Физматлит. - 2000.

123. Тихонов А. Н. Избранные труды. - М.: Макс ПРЕСС. - 2001.

124. Годунов С.К., Рябенький В. С. Разностные схемы. - М.: Наука. - 1973.

125. Галкин В. А. и др. О решениях уравнения коагуляции // Дифференц. уравнения, 1981, Т. 17, №4.

126. Галкин В. А. Разрешимость в целом законов сохранения // Обнинск: из-во ИАТЭ. В сб. «Исследование нелинейных моделей математической физики», 1990, С. 4—22. С. 4—13.

Предметный указатель