МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М. В. ЛОМОНОСОВА

Малый механико-математический факультет

МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА ВЕЧЕРНЕГО ОТДЕЛЕНИЯ МММФ

А. В. Спивак

Математический кружок
7 класс

Москва
2001

УДК 51(023)
С72
ББК 22.1

Александр Васильевич Спивак

С72 Математический кружок. 7 класс. Методическая разработка вечернего отделения МММФ. — М.: Изд-во механико-математического факультета и центра прикладных исследований, 2001, — 72 с.

Брошюра написана по материалам математического кружка для 6–7 классов, работавшего в 1999–2000 учебном году в аудитории 14–08 главного здания МГУ.

Формат 60 × 90 1/16. Объём 4,5 печ. л. Тираж 500 экз. Заказ 26.

Подписано к печати 17 февраля 2001 г.
Оригинал-макет изготовлен автором.

Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, г. Москва, Воробьёвы горы
Лицензия на издательскую деятельность ЛР №040746 от 12.03.1996 г.

Отпечатано с оригинал-макета на типографском оборудовании механико-математического факультета и франко-русского центра им. А. М. Ляпунова

Предисловие

Цель нашей жизни столь бесспорна,
что зря не мучайся, приятель:
мы сеем будущего зёрна,
а что взойдёт — решит Создатель.
И. Губерман

Первую субботу октября каждый год в высотном здании МГУ в 16 часов лифты переполнены — Малый мехмат начинает свою работу. Это значит, что сотни школьников опять пришли в университет заниматься математикой.

Первое своё занятие математического кружка я провёл в 1984 году, будучи студентом третьего курса. Многие бывшие мои кружковцы поступили в МГУ и другие вузы, некоторые успели закончить учёбу, у кого-то даже кончилась аспирантура. Время быстротечно: страна, в которой работает МММФ, успела изменить площадь, название и другие атрибуты (некоторые — более одного раза). На Малом мехмате нет уже никого из тех, с кем я когда-то начинал.

Хотя уровень приносимых из школы знаний на глазах падает, всё ещё есть главное — жадные до знаний школьники, некоторые из которых ездят на занятия не на автобусе и даже не на метро, а на электричке. Не истреблён искренний интерес к науке. И хотя в нескольких математических классах Москвы удаётся изучать математику на более высоком уровне, чем на кружках МММФ (впрочем, к сожалению, таких школ очень мало), энтузиазм Малого мехмата дорогого стоит.

Эта брошюра — конспект занятий моего кружка. Тут важно слово «моего»: свобода выбора тем и методики занятий на МММФ довольно велика, другие кружки занимались совсем по-другому. Одно из главных отличий — бóльшая часть времени на моём кружке уходит не на попытки школьников решать задачи, а на обсуждение решений и рассказ о связанных с темой занятия теоремах и понятиях. Как только кто-то решил какую-то из предложенных задач, он выходит к доске.

Иногда решение оказывается ошибочным, тогда к доске идёт другой участник кружка, и так далее. (А если в течение долгого времени ничего не получается, то я, отчаявшись дождаться, рассказываю решение сам.)

Два часа в неделю — это очень мало, особенно если учесть, что во время студенческой сессии Малый мехмат не работает. Поэтому основная задача кружка — не научить, а заинтересовать. Рассказ о журнале «Квант», об интересных книгах, олимпиадах — важная часть работы МММФ.

Не менее важна домашняя работа — без неё занятия мало чем отличались бы от походов в цирк или зоопарк. И хотя посмотреть на живого математика, оказаться среди умных сверстников и подышать университетским воздухом само по себе полезно, лучше самому научиться решать задачи. Чтобы помочь в этом своему ребёнку, некоторые родители даже сидят на задних рядах аудитории 14–08 и затем дома обсуждают содержание занятия, пытаются дорешать те задачи, которые мы не успели разобрать. (Между прочим, когда один замечательный математик, оказавшийся за пределами СССР, попытался устроить что-то вроде кружка МММФ в одной из западных столиц, то после первых двух занятий у него спросили, когда — через одно, два или три занятия — уважаемый профессор планирует закончить свой курс и чему он уже успел научить школьников. К счастью, пока российские родители не ждут заметного результата от двух-трёх раз и согласны на трудную и долгую многолетнюю работу!)

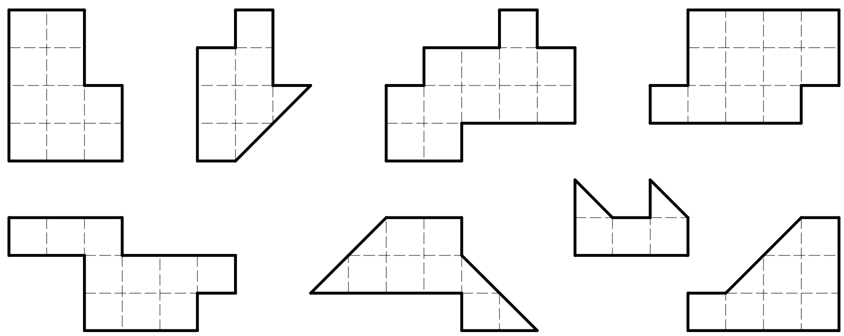
В течение всего учебного года проходила домашняя олимпиада: школьники на очередном занятии сдавали письменные работы и получали очередную порцию задач. Можно было сдавать задачи не только предыдущего занятия, но и любого более раннего — это давало участникам олимпиады возможность исправлять свои ошибки.

Номера задач, к которым в конце брошюры есть ответ, указание или решение, выделены жирным курсивом.

Знакомство

Тот, кто не знает математики, не может
узнать никакой другой науки и даже не может
обнаружить своего невежества, а потому
не ищет от него лекарства.
Роджер Бэкон, 1267 г.

1. Разрежьте каждую из фигур на две одинаковые и по площади, и по форме части.



2. Почему водопроводные и канализационные люки круглые, а не квадратные?

3. Можно ли прорезать в тетрадном листе бумаги дыру, в которую пролезет взрослый человек?

4. а) Положите на стол 3 спички, чтобы головки не касались стола.[*]

   б) Разрежьте треугольник на 4 треугольника, каждый из которых имеет общий отрезок границы с каждым из трёх других.

   в) Разрежьте квадрат на 5 прямоугольников, никакие два из которых не имеют общей стороны.[†]

---

[*] Ставить спички «шалашиком» или пользоваться стенами, стульями и тому подобным запрещено. Нельзя использовать и край стола, свешивая с него головки спичек.

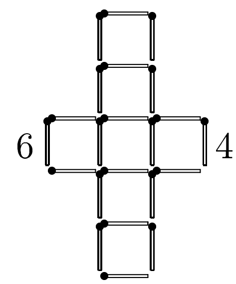
[†] Сторона одного прямоугольника может быть частью стороны другого; нельзя лишь допустить *точного* совпадения сторон.

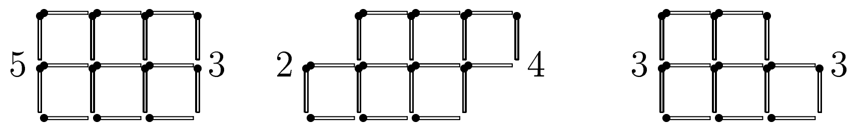
5. После 7 стирок длина, ширина и высота куска мыла уменьшились вдвое. На сколько стирок хватит оставшегося куска?
6. Предложил чёрт лодырю: “Всякий раз, как перейдёшь этот волшебный мост, твои деньги удвоятся. За это ты, перейдя мост, должен будешь отдать мне 24 копейки.” Трижды перешёл лодырь мост — и остался совсем без денег. (То есть отдал в третий раз чёрту точно те 24 копейки, что оказались у него к этому моменту.) Сколько денег было у него первоначально?
7. Над озёрами летели гуси. На каждом садилась половина гусей и ещё полгуся, остальные летели дальше. Все сели на 7 озёрах. Сколько было гусей?
8. Можно ли отмерить 8 литров воды, находясь у ручья и имея два ведра вместимостью 15 литров и 16 литров соответственно?
9. Купец на 540 рублей купил 138 аршин сукна (чёрного и синего). Сколько купил он чёрного сукна и сколько синего, если синее стоило 5 рублей за аршин, а чёрное — 3 рубля за аршин?
10. Задержанный признался, что у него три сына, произведение их возрастов равно 36, а сумма равна числу окон дома, около которого произошло задержание. Милиционер сказал, что для определения возраста детей этого недостаточно. Когда задержанный добавил, что его старший сын рыжий, милиционер определил возрасты детей. Сколько им было лет?
11. В кружке, где занимается Миша, более 93% участников — девочки. Чему равно наименьшее возможное число участников?
12. У Ивана было 3 лепёшки, а у Петра — 4. Прохожий присоединился к их трапезе, заплатив 7 копеек. Все ели поровну.
Как следует распределить деньги между Петром и Иваном?
13. Вот семь венгерских существительных: **nyírfa, körte, alma, almak, körtefa, nyírfak, almafa.** А вот их переводы на русский язык: **берёза, груша, яблоня, яблоко, берёзы, яблоки.** (Заметьте: этими шестью русскими словами переведены все семь венгерских!) Установите, какое венгерское слово какому русскому соответствует.

Перекладывания спичек

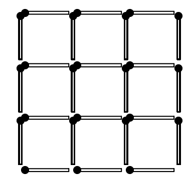
Делая что-нибудь бесполезное,
ограничивайтесь лишь
самым необходимым.
Шамфор

14. Уберите указанное слева от каждого из рисунков число спичек, чтобы осталось указанное справа число квадратов со стороной в одну спичку.*)

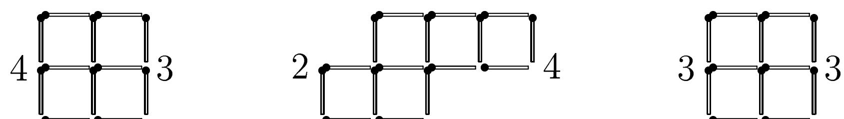




15. На рисунке из спичек сложен квадрат 3×3. Уберите
   а) 4 спички, чтобы осталось 5 квадратов;
   б) 8 спичек, чтобы осталось 2 квадрата;
   в) 6 спичек, чтобы осталось 3 квадрата.



16. Переложите указанное слева на рисунках число спичек, чтобы получилось указанное справа число квадратов.*)



17. Положите 12 спичек, чтобы получились четыре маленьких квадрата и один большой.
18. Из 10 спичек составьте три квадрата.

*) Никаких болтающихся без дела спичек не должно быть!

Шутки

Не любо — не слушай,
а врать не мешай.

19. В корзине лежат 5 яблок. Разделите их между пятью лицами, чтобы каждый получил по яблоку, и при этом одно яблоко осталось бы в корзине.

20. В семье 5 братьев. У каждого из них есть одна сестра. Сколько всего детей в семье?

21. Два отца и два сына съели за завтраком три яйца, причём каждому досталось целое яйцо. Могло ли так случиться?

22. В двух кошельках лежат две монеты, причём в одном кошельке монет вдвое больше, чем в другом. Может ли так быть?

23. Яблоко стоило 5 копеек, а груша — 10. Вова купил яблоко, а потом подумал: “Я уже заплатил 5 копеек, и у меня есть яблоко, которое стоит 5 копеек. Если я дам его продавцу, то он получит от меня в сумме 10 копеек. Значит, я смогу взять грушу. Это славно!” Прав ли он?

24. Подряд стоят шесть стаканов: три с водой и три пустых. Дотронувшись рукой лишь до одного стакана, добейтесь, чтобы пустые и полные стаканы чередовались.

25. Почему в поездах все стоп-краны всегда красные, а в самолётах все стоп-краны голубые?

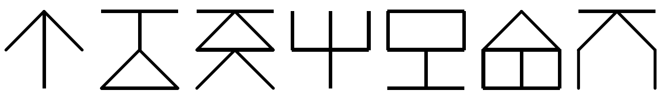
26. Один господин написал о себе: « ... пальцев у меня двадцать пять на одной руке, столько же на другой, да на ногах десять ... » Что он забыл?

27. Представьте себе корабль со спущенной на воду верёвочной лестницей вдоль борта. У лестницы 10 ступенек. Расстояние между ступеньками 30 см. Самая нижняя ступенька касается воды. Начинается прилив, который поднимает воду каждый час на 20 см. Через какое время покроется водой третья снизу ступенька лестницы?

28. Большой, зелёный, живёт под землёй и питается камнями. Кто это?

29. Остап Бендер решил дать сеанс одновременной игры Карпову и Каспарову. Один из них должен играть белыми, а другой — чёрными. Остап уверен, что он или сведёт вничью обе партии, или одну выиграет. Как он собирается играть?

30. Угадайте закономерность форм фигурок рисунка. Какую фигурку надо поставить следующей? А после неё?



А всё, однако же, как поразмыслишь,
во всём этом, право, есть кое-что.
Что ни говори, а подобные происшествия
бывают на свете; редко, но бывают.
Н. В. Гоголь

31. Король пожелал сместить своего министра, не слишком обидев его. Он подозвал министра к себе и предложил выбрать один из двух листочков, пояснив, что на одном написано «Останьтесь», а на другом — «Уходите». Листок, который вытащит министр, решит его судьбу. Министр догадался, что на обоих листках написано «Уходите». Помогите министру сохранить его место!

32. Из Москвы в Петербург помчал на «Volvo» предприниматель Вася. Навстречу в то же время на велосипеде выехал доцент Иван Петрович.
Кто из них в момент встречи был ближе к Москве?

33. Какое наибольшее число сторон может иметь многоугольник, являющийся пересечением четырёхугольника и треугольника?

34.* Сын отца профессора разговаривает с отцом сына профессора, а профессор в разговоре не участвует. Может ли так быть?

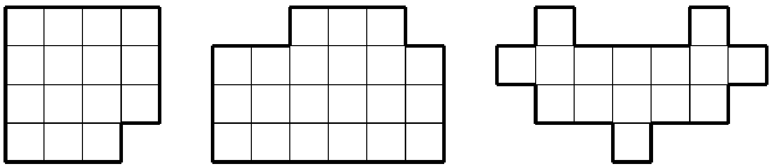
Подсказка. Сын отца — это брат. А вот кто отец сына?..

Разрезания

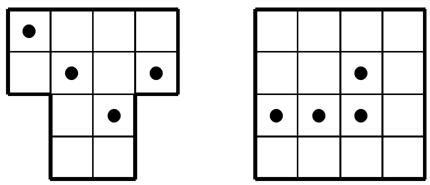
Такой уже ты дряхлый и больной,
трясёшься, как разбитая телега,
— На что ты копишь деньги, старый Ной?
— На глупости. На доски для ковчега.

И. Губерман

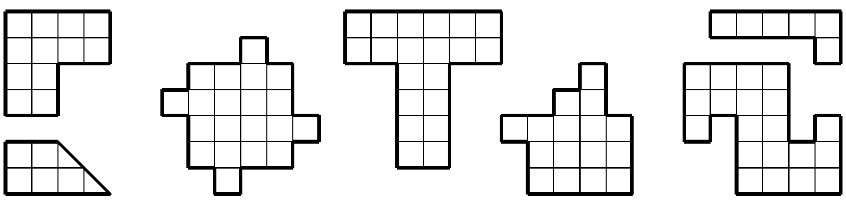
35. Разрежьте каждую из фигур на три равные части. (Резать можно только по сторонам клеточек. Части должны быть равны не только по площади, но и по форме.)



36. Разделите каждую из фигур по линиям сетки на четыре одинаковые части, чтобы в каждой части был ровно один кружок.



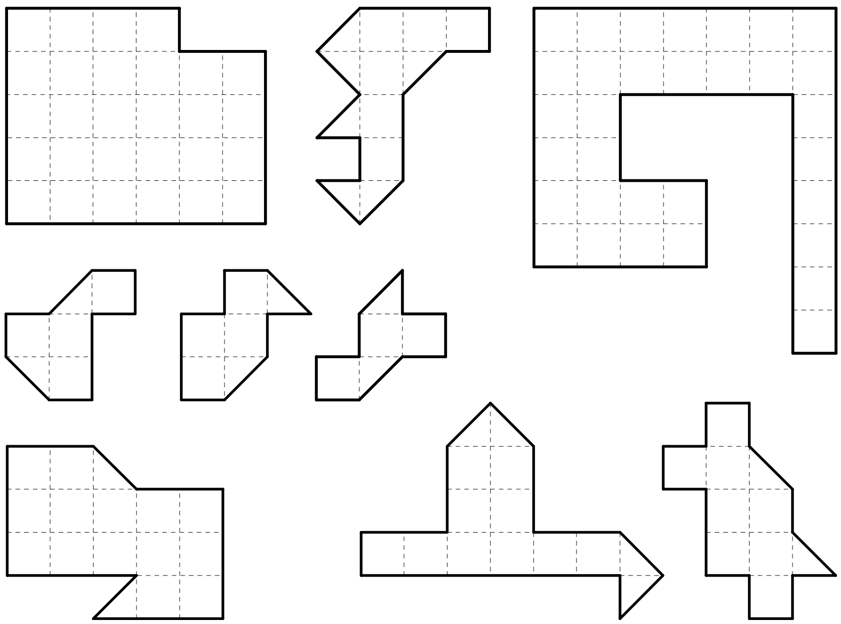
37. Разрежьте каждую из фигур на четыре равные части. (Резать можно только по сторонам и диагоналям клеточек.)



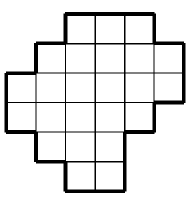
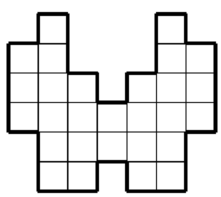
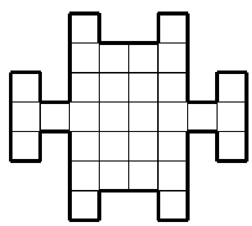
38. Разрежьте квадрат на два равных а) пятиугольника; б) шестиугольника; в) семиугольника.

39. Разрежьте квадрат на три (не обязательно равных) шестиугольника.

40. Разрежьте каждую из фигур пополам.



41. Разрежьте каждую из фигур на четыре равные (и по площади, и по форме) части.

а)  б)  в) 

42*. Разрежьте квадрат 7×7 на пять частей и переложите их так, чтобы получились три квадрата: 2×2, 3×3 и 6×6. Постарайтесь сделать это несколькими способами.

Возрасты

Некая дама на вопрос, сколько ей лет,
ответила: “Когда я выходила замуж,
мужу было 40, а мне 20. Сейчас ему 60.
Значит, мне 30.”

43. Серёже 11 лет, Вове 1 год. Сколько лет будет Серёже, когда он станет втрое старше Вовы?

44. Если к половине моих лет прибавите 7, то получите мой возраст 13 лет тому назад. Сколько мне лет?

45. а) Когда отцу было 27 лет, сыну было 3 года. Сейчас сыну в три раза меньше лет, чем отцу. Сколько лет каждому из них?
б) Решите уравнение $27 + x = 3(x + 3)$.

46. Абдулла вчетверо старше Махмуда. Сумма их возрастов — 50 лет.
Через сколько лет Абдулла будет втрое старше Махмуда?

47. Отец старше сына в 4 раза. Через 20 лет он будет старше сына в 2 раза. Сколько сейчас лет отцу?

48. Некто сказал: “Когда я проживу ещё половину, да треть, да четверть моих лет, мне станет 100 лет.” Сколько ему лет?

49. Москва старше Петербурга на 556 лет. В 1981 году Москва была втрое старше Петербурга. а) В каком году основана Москва и в каком году основан Петербург?
б) Когда Москва станет ровно вдвое старше Петербурга?

50. Отцу 32 года, сыну 5 лет.
Через сколько лет отец будет в 10 раз старше сына?

Решение. Обозначим искомый срок через x. Спустя x лет отцу будет $32 + x$ лет, а сыну — $(5 + x)$. Поскольку отец должен быть в 10 раз старше сына, то $32 + x = 10(5 + x)$.

Решая это уравнение, получаем ответ: $x = -2$. «Через минус 2 года» означает «два года назад». Составляя уравнение, мы не думали о том, что возраст отца никогда в будущем не окажется в 10 раз больше возраста сына. Уравнение оказалось вдумчивее нас и позаботилось обо всём само.

51. Отцу столько лет, сколько сыну и дочери вместе; сын вдвое старше сестры и на 20 лет моложе отца. Сколько лет дочери?

52. Эльдару через 2 года будет вдвое больше лет, чем ему было 2 года назад, а Элина через 3 года будет втрое старше, чем была 3 года назад. Кто из них старше?

53. Мне вдвое больше лет, чем было Вам тогда, когда мне было столько лет, сколько Вам сейчас. Сколько мне лет, если нам вместе 70 лет?

Решение. Составим таблицу*):

	Мой возраст	Ваш возраст
Сейчас	x	y
Тогда	y	$x/2$

Посчитав двумя способами время, отделяющее «сейчас» от «тогда», составим уравнение:

$$x - y = y - \frac{x}{2},$$

откуда $\frac{3}{2}x = 2y$. Значит, $3x = 4y$. Поскольку $x + y = 70$, ответ очевиден: $x = 40$, $y = 30$. Мне сейчас 40 лет.

54. Зульфие и Минисе вместе 35 лет. Сейчас Зульфие вдвое больше лет, чем было Минисе тогда, когда Зульфие было столько лет, сколько Минисе сейчас. Сколько лет Зульфие?

55. Альфире втрое больше лет, чем было Эльдару, когда она была в его нынешнем возрасте. Когда он будет в её нынешнем возрасте, им вместе будет 28 лет.
Сколько сейчас лет Альфире и сколько — Эльдару?

56. Игнату сейчас вчетверо больше лет, чем было его сестре в тот момент, когда она была вдвое моложе его. Сколько лет сейчас Игнату, если через 15 лет ему и сестре вместе будет 100 лет?

57. Юре и Юле сейчас вместе 26 лет, причём Юле в три раза меньше лет, чем будет Юре тогда, когда им вместе будет в пять раз больше лет, чем Юре сейчас. Сколько лет Юре?

*) «Тогда» относится ко времени, когда мне было столько лет, сколько Вам сейчас.

Сколько надо взять?

Если из книги вытекает какой-нибудь поучительный вывод, это должно получаться помимо воли автора, в силу самих изображённых фактов.

Ги де Мопассан

58. В коробке лежат 10 красных и 10 синих воздушных шариков. Продавец, не глядя, достаёт по одному шарику. Сколько шариков надо вытащить, чтобы среди вынутых из коробки шариков обязательно нашлись два шарика одного цвета?

59. Сколько карандашей надо взять в темноте из коробки с 7 красными и 5 синими карандашами, чтобы было взято не меньше двух красных и не меньше трёх синих?

60. В пакете перемешали конфеты трёх сортов, неразличимых на ощупь. Какое наименьшее число конфет надо взять наугад из пакета, чтобы среди взятых конфет обязательно были хотя бы а) две; б) три одного сорта?

61. Сколько карандашей можно взять в темноте из коробки, в которой 10 красных, 8 синих, 8 зелёных и 4 жёлтых карандашей, чтобы в коробке заведомо осталось
    а) не меньше 6 синих карандашей?
    б) хотя бы по одному карандашу каждого цвета?
    в) не больше 6 синих карандашей?

62. В ящике 28 красных, 20 зелёных, 12 жёлтых, 20 синих, 10 белых и 10 чёрных шариков. Сколько шариков надо вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди вытащенных шариков обязательно оказалось не менее 15 шариков одного цвета?

    Наводящий вопрос. Сколько шариков может выбросить из ящика забравшийся в него недоброжелатель, чтобы среди выброшенных не было 15 одноцветных шариков?

63. В тёмной кладовой в беспорядке лежат ботинки: 10 пар чёрных и 10 пар коричневых. Сколько ботинок надо взять, что-

бы среди них оказалась хотя бы одна пара (левый и правый ботинок) одного цвета? (В темноте нельзя отличить не только цвет ботинка, но и левый от правого.)

Указание. Если возьмём 20 ботинок, то может оказаться, что все они на левую ногу: 10 левых коричневых и 10 левых чёрных. Значит, надо взять 21 ботинок. Осталось понять, почему при любом способе выбора 21 ботинка из 40 имеющихся найдётся хотя бы одна пара. Это кажется очевидным. Но как убедительно и немногословно обосновать это утверждение?

64. В гости пришло 6 человек в галошах разного размера. Расходились по одному, и некоторые надевали галоши большего размера. Сколько могло остаться гостей, не сумевших надеть галоши? А если гостей не 6, а 17?

65. Винни-Пух, Пятачок, Кролик и ослик Иа-Иа вместе съели 70 бананов, причём каждому сколько-то досталось. Винни-Пух съел больше каждого из остальных, а Кролик и Пятачок вместе съели 45 бананов. Сколько бананов досталось ослику?

Даже если объяснение настолько ясно, что
исключает всякое ложное толкование,
всё равно найдётся человек,
который всё перепутает.

66.* В погребе 8 банок клубничного варенья, 7 малинового и 5 вишнёвого. Сколько банок можно в темноте вынести из погреба с уверенностью, что там останутся ещё хотя бы 4 банки одного сорта варенья и 3 банки другого?

67. Какое минимальное число фишек надо взять, чтобы при любой их расстановке на клетках шахматной доски обязательно встретились бы 4 фишки, стоящие друг за другом по горизонтали?

68. Какое наибольшее число клеток можно отметить на шахматной доске, чтобы среди отмеченных клеток не было соседних (ни по стороне, ни по вершине) и чтобы добавление к этим клеткам любой другой клетки нарушало бы это условие?

Гонки

Корабль на мели — моряку маяк.
(Голландская пословица)

69. Машина едет со скоростью 60 км/ч. На сколько следует увеличить скорость, чтобы выиграть на каждом километре по одной минуте?

70. Между лисой и зайцем 10 м. Когда лиса поймает зайца, если она бежит со скоростью 8 м/с, а он — со скоростью 7 м/с?

71. Послан человек из Москвы в Вологду, и проходит он каждый день 40 вёрст. На следующий день вслед послан другой человек, проходящий 45 вёрст в день. Когда второй догонит первого?

72. В дневнике у Вовочки уже записано 200 замечаний, а у Машеньки — 112.
Через сколько недель они сравняются, если Машенька получает на 22 замечания в неделю больше, чем Вовочка?

73. Я иду от дома до школы 30 минут, а мой брат — 40 минут. Через сколько минут я догоню брата, если он вышел из дома на 5 минут раньше меня?

74. Пассажир, проезжая в трамвае, заметил знакомого, который шёл вдоль линии трамвая в противоположную сторону. Через 10 секунд пассажир вышел из трамвая и пошёл догонять своего знакомого.
Через сколько секунд он догонит знакомого, двигаясь в два раза быстрее знакомого и в пять раз медленнее трамвая?

75. Грузовик проезжает некоторое расстояние за 10 часов. Если бы он проезжал в час на 10 км больше, то тот же путь занял бы 8 часов. Какова скорость грузовика?

76. Два автомобиля одновременно выехали из пунктов A и B навстречу друг другу. Через 7 часов езды они находились на расстоянии 136 км один от другого.
Найдите расстояние между A и B, если всё расстояние один автомобиль может проехать за 10 часов, а другой — за 12.

77. За 5 часов мотоциклист проезжает на 259 км больше, чем велосипедист за 4 часа. За 10 часов велосипедист проезжает на 56 км больше, чем мотоциклист за 2 часа. Определите скорость велосипедиста.

77.' Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 5m = 4v + 259, \\ 10v = 56 + 2m. \end{cases}$$

78. Из городов A и B навстречу друг другу выехали два автомобиля и встретились через 8 часов. Если бы скорость автомобиля, выехавшего из A, была больше на 14%, а скорость автомобиля, выехавшего из B, была больше на 15%, то встреча произошла бы через 7 часов.
Скорость какого автомобиля больше и во сколько раз?

Указание. Составьте уравнение $8(x+y) = 7(1{,}14x + 1{,}15y)$.

79. Пройдя $3/8$ длины моста, ослик Иа-Иа заметил автомобиль, приближающийся со скоростью 60 км/ч. Если ослик побежит назад, то встретится с автомобилем в начале моста; если вперёд, автомобиль нагонит его в конце моста.
С какой скоростью бегает Иа-Иа?

80. Дорога от дома до школы занимает у Вовы 20 минут. Однажды он по дороге в школу вспомнил, что забыл дома ручку. Вова знал, что если он продолжит путь в школу с той же скоростью, то придёт туда за 8 минут до звонка, а если вернётся домой за ручкой, то, двигаясь с той же скоростью, опоздает к началу урока на 10 минут. Какую часть пути он прошёл?

81. Поезд проходит*) мост длиной 450 метров за минуту и полминуты идёт мимо телеграфного столба.
Найдите длину и скорость поезда.

82. На доске были написаны 10 последовательных натуральных чисел. Когда стёрли одно из них, то сумма девяти оставшихся оказалась равна 2002. Какие числа остались на доске?

*) Считая с момента, когда поезд начал въезжать на мост, до момента, когда он целиком съехал с него.

Чётность

Я делаю из мухи слона, но муха
должна быть настоящей.
Фазиль Искандер

83. Представьте каждое из чисел 1101 и -1101 в виде а) $2n+1$; б) $2n-1$; в) $2n+333$.

84. Произведение любых двух нечётных чисел нечётно, а сумма двух нечётных чисел — чётна. Докажите это.

85. Докажите, что если сумма двух целых чисел нечётна, то произведение этих чисел чётно.

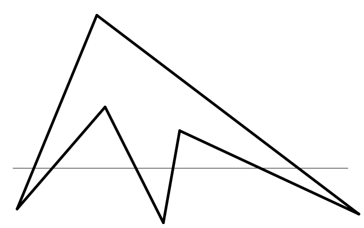
86. Разность двух целых чисел умножили на их произведение. Могло ли получиться число 45 210 181 543?

87. Двадцать лет тому назад в ходу были купюры достоинством 1, 3, 5, 10 и 25 рублей. Докажите, что если 25 рублей разменяли десятью такими купюрами, то хотя бы одна из этих десяти купюр — десятка.

88. Чётов пишет на доску одно целое число, а Нечётов — другое. Если произведение чётно, победителем объявляется Чётов, если нечётно, то Нечётов. Может ли один из них играть так, чтобы непременно выиграть?

89. По кругу зацеплены 9 шестерёнок: первая со второй, вторая с третьей, ... , девятая с первой. Могут ли они вращаться?

90. На рисунке прямая пересекает все стороны шестиугольника. Может ли прямая пересекать все стороны 11-угольника, не проходя ни через одну его вершину?



91. 100 фишек поставлены в ряд. Разрешено менять местами любые две фишки, стоящие через одну. Можно ли поставить фишки в обратном порядке?

92. В роте 100 человек. Каждую ночь дежурят трое. Можно ли так организовать дежурство, чтобы через некое время каждый единожды подежурил с каждым?

93. Николай с сыном и Пётр с сыном были на рыбалке. Николай поймал столько же рыб, сколько его сын, а Пётр — втрое больше, чем его сын. Всего поймали 25 рыб.
Сколько рыб поймал Николай?

94. В ряд выписаны числа от 1 до 10.
Можно ли расставить между ними знаки «$+$» и «$-$» так, чтобы значение полученного выражения было равно нулю?

95. Можно ли стереть одно из данных а) 1992; б) 1993 целых чисел так, чтобы сумма оставшихся чисел была чётна?

96. Можно ли натуральные числа $1, 2, \ldots, 21$ разбить на несколько групп, в каждой из которых наибольшее число равно сумме всех остальных чисел этой группы?

97. Даны шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Разрешается к любым двум числам прибавить по единице.
Можно ли сделать все числа равными?

98. На 99 карточках пишут числа $1, 2, \ldots, 99$, перемешивают их, раскладывают чистыми сторонами вверх и снова пишут числа $1, 2, \ldots, 99$. Для каждой карточки складывают два её числа и 99 полученных сумм перемножают.
Докажите, что результат чётен.

99. На кубе отмечены вершины и центры граней, а также проведены диагонали всех граней. Можно ли по отрезкам диагоналей обойти все отмеченные точки, побывав в каждой из них ровно по одному разу?

100. На некотором поле шахматной доски стоит король. Двое по очереди передвигают его по доске. Запрещено возвращать короля на поле, где он только что был. Выигрывает тот игрок, кто поставит короля на поле, где он когда-то уже побывал.
Кто из игроков может обеспечить себе победу при любой игре противника?

Логика

А что у мух всегда вид пасмурный бывает,
И часто голова ногою подперта,
И бровь насуплена, тому причина та,
Что мухи много разумеют
И в глубину вещей стараются входить,
А не одни вершки учёности схватить.

Иван Хемницер

101. Встретились три друга: Белов, Чернов и Рыжов. "Волосы одного из нас белые, другого — чёрные, третьего — рыжие, но ни у кого цвет волос не соответствует фамилии", — заметил черноволосый. "Ты прав", — подтвердил Белов.
Какие у кого волосы?

102. За сутки до дождя Петин кот всегда чихает. Сегодня кот чихнул. "Завтра будет дождь",— подумал Петя. Прав ли он?

103. Рядом сидят мальчик и девочка.
— Я мальчик,— говорит черноволосый ребёнок.
— Я девочка,— говорит рыжий ребёнок.
Если хотя бы кто-то из них врёт, кто мальчик, а кто девочка?

104. В тетради написано 100 утверждений:

В этой тетради ровно одно ложное утверждение.
В этой тетради ровно два ложных утверждения.
. . . .
. . . .
В этой тетради ровно сто ложных утверждений.

Какое из этих утверждений верно?

105. а) В коробке карандаши не все одной длины и не все одного цвета. Докажите, что есть два карандаша, отличающиеся и по цвету, и по длине.
б) В магазин привезли платья трёх цветов и трёх фасонов. Можно ли выбрать для витрины 3 платья, чтобы были представлены все цвета и фасоны?

106. — У Вовы больше тысячи книг, — сказал Ваня.
— Нет, книг у него меньше тысячи,— возразила Аня.
— Одна-то книга у него наверняка есть,— сказала Маня.
Если истинно только одно из этих утверждений, сколько книг у Вовы?

107. Один из попугаев A, B, C всегда говорит правду, другой всегда врёт, а третий хитрец — иногда говорит правду, иногда врёт. На вопрос *«Кто B?»* они ответили:
A: — Лжец.
B: — Я хитрец!
C: — Абсолютно честный попугай.
Кто из попугаев лжец, а кто хитрец?

108. До царя дошла весть, что кто-то из трёх богатырей убил Змея Горыныча. Приказал царь им явиться ко двору. Молвили богатыри:
Илья Муромец: — Змея убил Добрыня Никитич.
Добрыня Никитич: — Змея убил Алёша Попович.
Алёша Попович: — Я убил змея.
Известно, что только один богатырь сказал правду, а двое слукавили. Кто убил змея?

109. В конференции участвовало 100 человек — химики и алхимики. Каждому был задан вопрос: «Если не считать Вас, то кого больше среди остальных участников — химиков или алхимиков?» Когда опросили 51 участника, и все ответили, что алхимиков больше, опрос прервался. Алхимики всегда лгут, а химики всегда говорят правду. Сколько химиков среди участников?

110. Алёша, Боря, Ваня и Гриша соревновались в беге. На вопрос, кто какое место занял, они ответили:
Алёша: — Я не был ни первым, ни последним.
Боря: — Я не был последним.
Ваня: — Я был первым.
Гриша: — Я был последним.
Известно, что три из этих ответов правильные, а один — неверный. Кто сказал неправду?

Проценты

Цент — одна сотая часть
условной единицы.

111. Ученик прочитал 138 страниц, что составляет 23% числа всех страниц в книге. Сколько страниц в книге?

112. Разложите 80 тетрадей на две стопки так, чтобы число тетрадей одной из них составило 60% числа тетрадей другой стопки.

113. Когда из первого бидона перелили во второй 12,5% находившегося в первом бидоне молока, то молока в бидонах стало поровну, по 35 литров. Сколько молока было во втором бидоне?

114. Множимое увеличили на 50%, а множитель уменьшили на 50%. Как изменилось произведение?

115. Что больше: 15,43% от 5 или 5% от 15,43?

116. Как изменится цена товара, если сначала её увеличить на 100%, а затем уменьшить на 50%?

117. Цена картофеля повысилась на 20%. Через некоторое время цена понизилась на 20%. Когда картофель стоил дешевле: до повышения или после снижения?

118. A, B и C состязались в беге на 100 м. Когда A финишировал, B отставал от него на 10 м. Когда B финишировал, C отставал на 10 м.
На сколько отставал C от A, когда A закончил бег?

118.′ В одном магазине цены уменьшили на 10%, а потом ещё на 10% (от нового уровня). А в другом цены просто сразу снизили на 20%. Что выгоднее для покупателя?

119. За весну Обломов сбавил в весе 25%, за лето прибавил 20%, за осень похудел на 10%, а за зиму прибавил 20%.
Похудел он или поправился за год?

120. Вода Тихого Океана содержит 3,5% соли (по весу). Сколько пресной воды надо прибавить к 40 кг такой воды, чтобы содержание соли в смеси составило 0,5%?

121. Из 22 кг свежих грибов получается 2,5 кг сухих грибов, содержащих 12% воды. Каков процент воды в свежих грибах?

122. Какое наименьшее число участников может быть в кружке левитации, если мальчиков в нём меньше 50%, но больше 40%?

122.′ Для какого наименьшего натурального числа n существует дробь со знаменателем n, находящаяся между числами 0,4 и 0,5?

123. Алик, Боря и Вася собирали грибы. Боря собрал грибов на 20% больше, чем Алик, но на 20% меньше, чем Вася.
На сколько процентов больше, чем Алик, собрал грибов Вася?

124. Предприятие получило задание за два года снизить на 51% объём выпускаемой продукции. Каждый год требуют снижать на одно и то же число процентов. На сколько?

125. В сосуде было 20 литров спирта. Часть его отлили и долили столько же воды. Затем, перемешав, отлили такую же часть и сосуд опять долили водой. В сосуде спирта оказалось втрое меньше, чем воды. Какую часть отливали?

126. Число 51,2 трижды увеличивали на одно и то же число процентов, а затем трижды уменьшали на то же самое число процентов. В результате получилось число 21,6. На сколько процентов увеличивали, а затем уменьшали это число?

127. М. В. Ломоносов тратил одну денежку на хлеб и квас. Когда цены выросли на 20%, на ту же денежку он приобретал полхлеба и квас. Хватит ли той же денежки хотя бы на квас, если цены ещё раз вырастут на 20%?

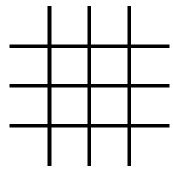
128. Пройдя половину пути, катер увеличил скорость на 25% и поэтому прибыл на полчаса раньше.
Сколько времени он двигался?

129. В сентябре проездной билет на метро стоил 800 рублей. В октябре стоимость билета увеличили, в результате чего число проданных билетов уменьшилось на 25%, а выручка от их продажи уменьшилась на 6,25%.
Сколько стал стоить проездной билет в октябре?

Восемь задач

Пик истины высок неимоверно;
Придётся покружить по склону, чтоб
Достичь вершины — нет дороги в лоб!
Спеши, доколе день, а тьма сгустится —
Тогда уж будет поздно торопиться.
Джон Донн (1572–1631)

130. На рисунке 6 отрезков расположены так, что каждый пересекает три других отрезка. Расположите 8 отрезков, чтобы каждый пересекал три других отрезка.



131. Трём хирургам необходимо последовательно прооперировать в полевых условиях больного, страдающего заразным заболеванием. Сами хирурги тоже больны, причём все — разными болезнями. В распоряжении хирургов есть лишь две пары стерильных перчаток. Подскажите план операции, после которой ни хирурги, ни больной не заразятся друг от друга. (Помогать друг другу во время операций хирурги не должны. Оперировать одной рукой нельзя.)

132. Восстановите по сохранившимся номерам путь коня, побывавшего по одному разу на всех клетках доски размером 6×6. (То есть расставьте числа от 1 до 36 так, чтобы отличающиеся на 1 были связаны ходом коня.)

17				11	
2			25		
23	16	1			
30			19		
15				13	
8					35

133. Покройте семью синими квадратными ковриками красный квадратный коврик такого же размера так, чтобы синие коврики не налегали друг на друга, но каждый синий покрывал какую-то часть красного.

134. Дама сдавала в багаж диван, чемодан, саквояж, картину, корзину, картонку и маленькую собачонку. Диван весил столько же, сколько чемодан и саквояж, вместе взятые, и столько же, сколько картина, корзина и картонка вместе. Картина, корзина и картонка весили поровну; каждая из них весила больше, чем собачонка. Когда выгружали багаж, дама заявила, что собака не той породы. При проверке оказалось, что собака перевешивает диван, если к ней на весы добавить саквояж или чемодан. Докажите, что претензия дамы была справедлива.

135. Три человека — A, B и C — пересчитали кучу шариков четырёх цветов.

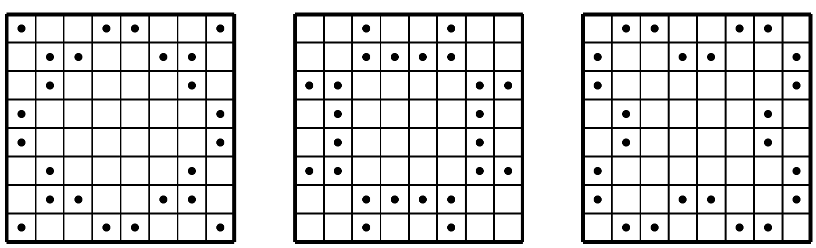
	красный	оранжевый	жёлтый	зелёный
A	2	5	7	9
B	2	4	9	8
C	4	2	8	9

Каждый из них правильно различал два цвета, а два других не различал: кто-то один из них не различал красный и оранжевый, другой не различал оранжевый и жёлтый, а ещё один не различал жёлтый и зелёный.

Глядя на таблицу, узнайте, сколько каких шариков было.

136. Первая слева цифра десятизначного числа равна числу единиц в записи этого числа, вторая — числу двоек, третья — числу троек, четвёртая — числу четвёрок, … , девятая — числу девяток, десятая — числу нулей. Придумайте такое число.

137. На рисунках показаны разные способы расставить на шахматной доске 24 коня, каждый из которых бьёт двух других. Расставьте на доске 32 коня, чтобы каждый из них бил ровно двух других.



Сумма и среднее арифметическое

— Какая сегодня средняя температура по больнице? — спросил ревизор главврача.

138. Два человека отправились на рынок продавать яблоки. У них было по 30 яблок. Один собирался продавать по 2 яблока за 1 рубль, а другой — по 3 яблока за 1 рубль. Перед началом торговли первого продавца вызвали домой, и он попросил второго продавца продать его яблоки. Тот стал продавать по 5 яблок за 2 рубля. Если бы они торговали порознь, то выручили бы 10 рублей и 15 рублей, а продавая по 5 яблок за 2 рубля, они получили 24 рубля. Куда исчез рубль?

139. Разбейте $\{1, 2, 9, 25, 49, 64\}$ на два подмножества, чтобы сумма чисел одного из них была равна сумме чисел другого.

140. Разделите полоску на 4 одинаковые части, чтобы все части имели одну и ту же сумму входящих в них чисел.

1	9	16	7	12	5	4	3
8	15	10	2	13	6	11	14

141. Аня и Таня вместе весят 40 кг, Таня и Маня — 50 кг, Маня и Ваня — 90 кг, Ваня и Даня — 100 кг, Даня и Аня — 60 кг. Сколько весит Аня?

142. Четверо купцов заметили, что если они сложатся без первого, то соберут 90 рублей, без второго — 85, без третьего — 80, без четвёртого — 75 рублей. Сколько у кого денег?

142′. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} y + z + t = 90, \\ x + z + t = 85, \\ x + y + t = 80, \\ x + y + z = 75. \end{cases}$$

143. Средний возраст 11 игроков футбольной команды — 22 года. Во время матча один игрок получил травму и ушёл с поля. Средний возраст оставшихся игроков — 21 год. Сколько лет получившему травму?

144. Когда Миша поступал в МГУ, учитывался средний балл аттестата о среднем образовании по двенадцати предметам. У Миши средний балл был равен 3,5. По скольким предметам ему нужно было повысить оценку на один балл, чтобы средний балл оказался равен 4?

145. Учитель проводит урок в классе. Возраст учителя на 24 года больше среднего возраста учеников и на 22 года больше среднего возраста всех присутствующих в классе.
Сколько в классе учеников?

146. Прямоугольник разбит прямыми на 25 прямоугольников. Площади некоторых из них указаны на рисунке. Найдите площадь прямоугольника, отмеченного вопросительным знаком.

?				20
			14	10
		32	28	
	35	40		
9	21			

147. Катя, Лена, Маша, Нина участвовали в концерте. Каждую песню пели 3 девочки. Катя пела 8 песен — больше всех; Нина меньше всех — 5 песен. Сколько песен было спето?

148. Можно ли натуральные числа от 1 до 30 записать в таблицу из 5 строк и 6 столбцов, чтобы все шесть сумм чисел, стоящих в столбцах, были равны?

149. Можно ли заполнить числами таблицу а) 5×5; б) 6×6 так, чтобы произведение всех чисел любой строки было отрицательно, а произведение всех чисел любого столбца — положительно?

149.′ Можно ли расставить числа в таблице 19×66 так, чтобы в каждой строке сумма чисел была положительна, а в каждом столбце — отрицательна?

Составление уравнений

Математики похожи на французов: что бы вы ни сказали, они всё переведут на свой собственный язык. Получится нечто противоположное.
И. В. Гёте

150. Голова рыбы весит столько, сколько хвост и половина туловища, туловище — столько, сколько голова и хвост вместе. Хвост её весит 1 кг. Сколько весит рыба?

151. Ученик должен был разделить число на 2 и к результату прибавить 3, а он, по ошибке, умножил число на 2 и от полученного частного отнял 3.
Ответ всё равно получился правильный. Какой?

152. Один сапфир и два топаза ценней, чем изумруд, в три раза. А семь сапфиров и топаз его ценнее в восемь раз.
Определить прошу я вас, сапфир ценнее иль топаз?

153. Четверо товарищей покупают лодку. Первый вносит половину суммы, вносимой остальными; второй — треть суммы, вносимой остальными; третий — четверть суммы, вносимой остальными; четвёртый — 130 рублей. Сколько стоит лодка?

154. Офеня*) купил на оптовом рынке партию ручек и предлагает покупателям либо одну ручку за 5 рублей, либо три ручки за 10 рублей. От каждого покупателя офеня получает одинаковую прибыль. Какова оптовая цена ручки?

155. Представьте число 45 в виде суммы четырёх чисел так, что после прибавления 2 к первому числу, вычитания 2 от второго числа, умножения третьего числа на 2 и деления четвёртого числа на 2 эти числа становятся равными.

156. Турист поднялся в лодке вверх по реке на 20 км и спустился обратно, затратив на всё 10 часов. Путь против течения занял в полтора раза больше времени, чем обратный путь.
Найдите скорость течения реки.

---

*) Продавец в разнос, коробейник.

157. Артели косцов предстояло скосить два луга, из которых один вдвое больше другого. Полдня артель косила большой луг, а на вторую половину дня разделилась пополам. Одна половина осталась докашивать большой луг, а другая принялась за малый. К вечеру большой луг скосили, а от малого остался участок, который был скошен за другой день одним косцом.
Сколько косцов в артели?

158. Два велосипедиста выехали одновременно из одного пункта в одном направлении. Первый из них едет со скоростью 15 км/ч, второй — со скоростью 12 км/ч. Спустя полчаса из того же пункта выехал третий велосипедист, который через некоторое время догнал второго, а ещё через полтора часа догнал и первого. Найдите скорость третьего велосипедиста.

159. Из горячего крана ванна заполняется за 23 минуты, из холодного — за 17 минут. Пьер открыл сначала горячий кран.
Через сколько минут он должен открыть холодный, чтобы к моменту наполнения ванны горячей воды налилось в 1,5 раза больше, чем холодной?

160. Турист, идущий из деревни на железнодорожную станцию, пройдя за первый час 3 км, рассчитал, что опоздает к поезду на 40 минут. Поэтому остальной путь он шёл со скоростью 4 км/ч и пришёл на станцию за 45 минут до отправления поезда. Каково расстояние от деревни до станции?

161. Истратив половину денег, я заметил, что осталось вдвое меньше рублей, чем было первоначально копеек, и столько же копеек, сколько было первоначально рублей. Сколько денег я истратил? (Подразумевается, что число копеек меньше 100.)

162. Управдом Остап Бендер собирал с жильцов деньги на установку новых квартирных номеров. Адам Козлевич из 105-й квартиры поинтересовался, почему у них во втором подъезде надо собрать денег на 40% больше, чем в первом, хотя квартир там и тут поровну. Не растерявшись, Остап объяснил, что двузначные номера стоят вдвое, а трёхзначные — втрое больше, чем однозначные. Сколько квартир в подъезде?

Принцип Дирихле

Многие вещи нам непонятны не потому,
что наши понятия слабы; но потому,
что сии вещи не входят
в круг наших понятий.
Козьма Прутков

В несерьёзной форме принцип Дирихле[*] *гласит: "Нельзя посадить 7 кроликов в 3 клетки, чтобы в каждой было не больше 2 кроликов."*

Более общая формулировка: "Если z зайцев сидят в k клетках, то найдётся клетка, в которой не менее z/k зайцев." *Не надо бояться дробного число зайцев — если получается, что в ящике не меньше 7/3 зайцев, значит, их больше двух.*

Один математик сказал, что Дирихле по частоте упоминаний школьниками навсегда обеспечено одно из самых высших мест. И добавил: "Пожалуй, есть способ лишить его лидерства — назвать чьим-нибудь именем принцип «никакое чётное число не равно никакому нечётному»."

Доказательство принципа Дирихле очень простое, но заслуживает внимания, поскольку похожие рассуждения «от противного» часто встречаются. Допустим, что в каждой клетке число зайцев меньше, чем z/k. *Тогда в* k *клетках зайцев меньше, чем* $k \cdot (z/k) = z$. *Противоречие!*

163. В школе 400 учеников.
Докажите, что хотя бы двое из них родились в один день года.

164. В классе 40 учеников. Найдётся ли такой месяц в году, в котором отмечают свой день рождения не меньше чем 4 ученика этого класса?

---

[*] Петер Густав Лежён Дирихле (1805–1859), великий немецкий математик, изучал арифметику (теорема Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии), математический анализ (признак сходимости Дирихле, ряды Дирихле), механику и математическую физику (принцип Дирихле в теории гармонических функций). Он, разумеется, и не подозревал, что его именем назовут столь простой и важный принцип.

165. В классе 30 учеников. В диктанте Вова сделал 13 ошибок, остальные меньше. Докажите, что по крайней мере три ученика сделали ошибок поровну.

166. Из любых трёх целых чисел можно выбрать два, сумма которых чётна. Докажите это.

Решение. Все числа можно разбить на два класса: чётные и нечётные. Невозможно распределить три числа по двум классам так, чтобы ни в какой класс не попало более одного числа. Значит, среди любых трёх целых чисел найдутся два числа одинаковой чётности. Их сумма чётна.

167. Среди любых шести целых чисел найдутся два числа, разность которых кратна 5. Докажите это.

168. Докажите, что из любых $n+1$ целых чисел можно выбрать два числа, разность которых нацело делится на n.

169. Даны 12 различных двузначных чисел. Докажите, что из них можно выбрать два числа, разность которых — двузначное число, записываемое двумя одинаковыми цифрами.

170. Из любых ли ста целых чисел можно выбрать два числа, сумма которых кратна 7?

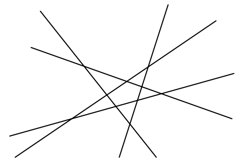
171. Существуют ли а) пятьдесят; б) более пятидесяти различных двузначных чисел, сумма никаких двух из которых не равна 100?

172. Из любых ли а) 51; б) 52 целых чисел можно выбрать два числа, сумма или разность которых кратна 100?

173. На шахматной доске стоят 44 ферзя. Докажите, что каждый из них бьёт какого-нибудь другого ферзя.

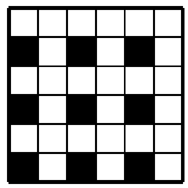
174. Каждый из 10 участников переговоров послал по их окончании поздравительные открытки пятерым другим участникам. Докажите, что какие-то двое послали открытки друг другу.

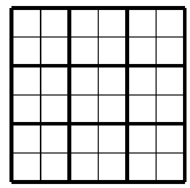
175. В группе 30 человек. Каждому нравятся ровно k людей из этой группы. При каком наименьшем k обязательно найдутся два человека из этой группы, которые нравятся друг другу?



176. На плоскости нарисовали 5 прямых. Докажите, что угол между какими-то двумя из них не больше 36°. (Если какие-нибудь прямые параллельны, считайте, что угол между ними равен 0°.)

177. Какое наибольшее число клеток доски 6×6 можно покрасить, чтобы никакие две покрашенные клетки не соприкасались (даже в одной точке)?





Решение. Ответ очевиден из рисунка, на котором никакие две из девяти закрашенных клеток не соприкасаются, а десятую клетку с соблюдением условия не покрасишь. Но как доказать, что никаким другим способом нельзя расположить на доске десять несоприкасающихся клеток? Перебором? Вариантов гораздо больше, чем кажется на первый взгляд. И уж совсем невозможно решение методом перебора, если доску 6×6 заменить, например, на доску размером 2000×2000. Оказывается, можно разбить доску на квадратики размером 2×2. Больше одной окрашенной клетки в таком квадратике быть не может!

178. На шахматной доске нельзя разместить более 32 не бьющих друг друга коней. Докажите это.

179. Найдите значение дроби а) $\dfrac{\texttt{В}\cdot\texttt{А}\cdot\texttt{Р}\cdot\texttt{Е}\cdot\texttt{Н}\cdot\texttt{Ь}\cdot\texttt{Е}}{\texttt{К}\cdot\texttt{А}\cdot\texttt{Р}\cdot\texttt{Л}\cdot\texttt{С}\cdot\texttt{О}\cdot\texttt{Н}}$;
б) $\dfrac{\texttt{Г}\cdot\texttt{Р}\cdot\texttt{У}\cdot\texttt{З}\cdot\texttt{И}\cdot\texttt{Я}}{\texttt{Т}\cdot\texttt{Б}\cdot\texttt{И}\cdot\texttt{Л}\cdot\texttt{И}\cdot\texttt{С}\cdot\texttt{И}}$, где разные буквы — это разные цифры.

180. Из любых а) пяти; б) восьми; в) девяти целых чисел можно выбрать два таких, разность квадратов которых делится на а) 7; б) 13; в) 16. Докажите это.

181. В какое наибольшее число цветов можно раскрасить клетки доски 8×8 так, чтобы у каждой клетки среди её соседей (по стороне) были хотя бы две клетки, окрашенные в тот же цвет?

Обходы

Когда судьба, дойдя до перекрёстка,
колеблется, куда ей повернуть,
не бойся неназойливо, но жёстко
слегка её коленом подтолкнуть.

И. Губерман

182. В кабине лифта 20-этажного дома есть две кнопки. При нажатии на одну из них лифт поднимается на 13 этажей, а при нажатии на другую — опускается на 8 этажей. Как попасть с 13-го этажа на 8-й?

183. Обойдите конём доску а) 4×5; б) 4×6; в) 4×7, побывав на каждом поле по одному разу. (Возвращаться на исходное поле не обязательно.)

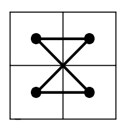
184. Из шахматной доски выпилено угловое поле. Может ли конь обойти все оставшиеся поля по одному разу и вернуться на исходное поле?

185. Кузнечик прыгает на 1 см, потом прыгает на 3 см в том же или противоположном направлении, затем в том же или противоположном направлении на 5 см, и так далее. Может ли он после 25-го прыжка оказаться в исходной точке?

186. Из шахматной доски вырезаны клетки $f3$ и $c6$. Можно ли обойти оставшиеся клетки, на каждой побывав ровно один раз и каждым ходом переходя на клетку, у которой общая сторона с предыдущей?

187. Муравей ползает по проволочному каркасу куба, никогда не поворачивая назад. Может ли оказаться, что в одной вершине он уже побывал 25 раз, а в каждой из остальных — по 20 раз?

188. На рисунке изображён маршрут короля, обошедшего доску размером 2×2, чередуя диагональные и недиагональные ходы и побывав на каждой клетке по одному разу. Нарисуйте такой маршрут для доски 8×8.



Совместная трапеза, совместная работа

Живёт же кот Василий
на свете без усилий.
Лариса Миллер

189. Лошадь съедает копну сена за 2 суток, корова — за 3, овца — за 6 суток. За какое время съедят копну сена лошадь, корова и овца вместе?

190. На мельнице имеются три жернова. На первом за сутки можно смолоть 60 четвертей зерна, на втором — 54, а на третьем — 48. Некто хочет смолоть 81 четверть зерна.
За какое наименьшее время он сможет смолоть зерно?

191. В комнате оказалось 300 вёдер воды. Два насоса стали выкачивать воду. Один насос за 2 часа выкачивает 48 вёдер, другой за 6 часов — 129 вёдер. Через сколько часов выкачают всю воду, если ежечасно с потолка поступает 8 вёдер воды?

192. В бак вмещается 60 литров воды. К нему проведены две трубы. Через первую трубу за 10 минут можно наполнить пустой бак. Через вторую трубу за 15 минут можно опорожнить полный бак. Сколько воды окажется в баке через 5 минут, если открыть обе трубы?

193. Через кран вода заполняет бак за 3 часа, а через сливное отверстие вся вода из бака выливается за 5 часов. За какое время вода заполнит бак при открытых кране и отверстии?[*)]

194. Шерлок Холмс и доктор Ватсон, работая вместе, могут вырыть канаву за 6 часов. Если бы Холмс рыл 4 часа, а затем Ватсон — 6 часов, то канава была бы вырыта на 80%. За сколько часов Холмс, работая в одиночку, вырыл бы эту канаву?

195. Одна снегоуборочная машина могла бы убрать всю улицу за 1 час, а другая — за 45 минут. Начав работу одновременно, ма-

[*)] Считайте, что скорость вытекания воды из бака не зависит от его наполненности.

шины проработали вместе 20 минут, после чего первая сломалась. Через сколько минут вторая машина закончила работу?

196. За $3\frac{1}{2}$ часа работы первый штамповочный пресс может изготовить 42% всех заказанных деталей. Второй пресс за 9 часов работы может изготовить 60% всех деталей. Скорость работы третьего пресса на 20% больше скорости второго пресса. За какое время будет выполнен весь заказ при одновременной работе всех трёх прессов?

197. Три тракторные бригады вместе вспахали поле за 4 дня. Это же поле первая и вторая бригады вместе вспахали бы за 6 дней, а первая и третья вместе — за 8 дней. Во сколько раз больше площадь, вспахиваемая за три дня второй бригадой, по сравнению с площадью, вспахиваемой за два дня третьей бригадой?

198. Иван, Пётр и Кирилл косили траву. Пётр и Кирилл скосили бы всю траву вдвое быстрее, чем Иван. Иван и Кирилл скосили бы всю траву втрое быстрее, чем Пётр. Во сколько раз быстрее, чем Кирилл, скосили бы всю траву Иван и Пётр?

199. Четыре чёрненьких чумазеньких чертёнка чертили чёрными чернилами чертёж четыре часа. Если бы первый чертёнок чертил вдвое быстрее, а второй — вдвое медленнее, то им потребовалось бы столько же времени; если бы, наоборот, первый чертил вдвое медленнее, а второй — вдвое быстрее, то они управились бы за два часа сорок минут. За какое время начертили бы чертёж первые три чертёнка без помощи четвёртого?

200*. Три каналоармейца копали канаву. Сначала первый каналоармеец проработал половину времени, необходимого двум другим, чтобы вырыть всю канаву, затем второй проработал половину времени, необходимого двум другим, чтобы вырыть всю канаву, наконец, третий проработал половину времени, необходимого двум другим, чтобы вырыть всю канаву. В результате канава была вырыта.

Во сколько раз быстрее была бы вырыта канава, если бы с самого начала работали все трое вместе?

Делимость

Целое число a делится на *целое число* b, *если существует такое целое число* k, *что* $a = kb$.

201. К числу 15 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 15.

201.$'$ К числу 10 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы получилось число, кратное 72.

202. Некоторое число делится на 4 и на 6. Обязательно ли оно делится на 24?

203. Найдите наибольшее натуральное число, делящееся на 36, в записи которого участвуют все 10 цифр по одному разу.

204. На доске написано: $645{*}7235$. Замените звёздочку цифрой так, чтобы полученное число делилось на 3.

205. Замените звёздочки в записи числа $72{*}3{*}$ цифрами так, чтобы число делилось без остатка на 45.

206. В стране Анчурии в обращении имеются купюры следующих достоинств: 1 анчур, 10 анчуров, 100 анчуров, 1000 анчуров. Можно ли отсчитать миллион анчуров так, чтобы получилось ровно полмиллиона купюр?

207. Найдите двузначное число, первая цифра которого равна разности между этим числом и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке.

$$\begin{array}{r} \text{АБ} \\ -\,\underline{\text{БА}} \\ \text{А} \end{array}$$

208. Верно ли, что если записать в обратном порядке цифры любого целого числа, то разность исходного и нового чисел будет делиться на 9?

209. Найдите все двузначные числа, сумма цифр которых не меняется после умножения ни на 2, ни на 3, ..., ни на 8, ни на 9.

210. Существует ли целое число, произведение цифр которого равно 528?

211. Сколько цифр в числе $11\ldots11$, если оно делится без остатка на $999\,999\,999$?

212. В числе переставили цифры и получили число, в 3 раза меньшее исходного. Докажите, что исходное число делится на 27.

213. К числу прибавили сумму его цифр. К полученному числу прибавили сумму его цифр, и так далее. Когда в седьмой раз к числу прибавили сумму его цифр, получили 1000.
С какого числа начали?

214. Незнайка перемножил все числа от 1 до 100. Посчитал сумму цифр произведения. У полученного числа он снова посчитал сумму цифр, и так далее. В конце концов Незнайка получил однозначное число. Какое?

З а м е ч а н и е. На компьютере легко посчитать, что число 100! — произведение первых 100 натуральных чисел — равно 93326215443944152681699238856266700490715968264381621468592963895217599993229915608941463976156518286253697920827223758251185210916864000000000000000000000000, всего 158 цифр. Зная это, нетрудно вычислить, что сумма цифр числа 100! равна 648, так что сумма цифр суммы цифр равна 18, а сумма цифр суммы цифр суммы цифр числа 100! равна 9. Но нельзя ли решить задачу без таких вычислений?

215. У каждого из чисел от 1 до $1\,000\,000\,000$ подсчитали сумму его цифр, у каждого из получившегося миллиарда чисел снова подсчитали сумму цифр, и так до тех пор, пока не получили миллиард однозначных чисел.
Каких чисел получили больше всего?

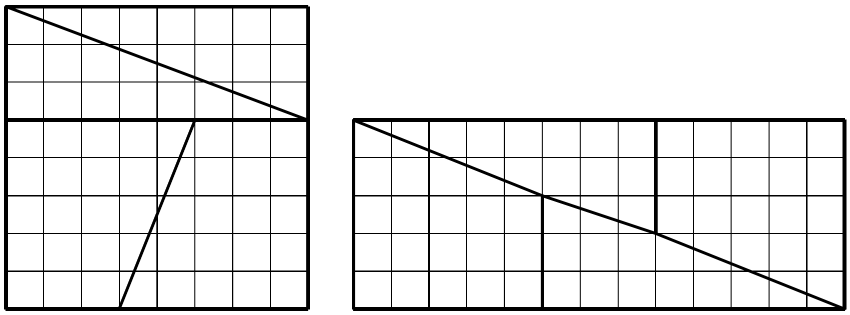
216. Петя заменил в примере на умножение одинаковые цифры одинаковыми буквами, а разные — разными. Докажите, что он ошибся.

$$\mathrm{АБ}\cdot\mathrm{ВГ}=\mathrm{ДДЕЕ}$$

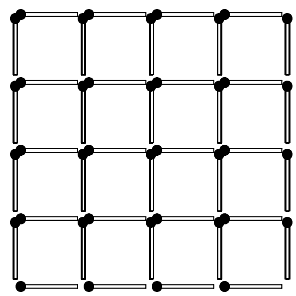
217. а) Докажите, что числа вида $\overline{aa}$, $\overline{abcabc}$, $\overline{abcdeabcde}$ делятся на 11.
б) Если к произвольному числу приписать число, записанное теми же цифрами в обратном порядке, то полученное число без остатка разделится на 11: например, числа вида $\overline{aa}$, $\overline{abba}$, $\overline{abccba}$ кратны 11. Докажите это.

Семь задач

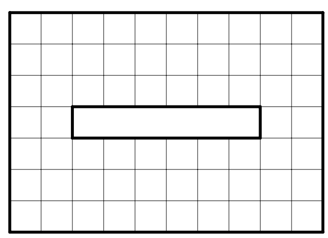
218. Доску размером 8×8 разрезали на четыре части и сложили из них прямоугольник размером 5×13. Откуда появилась лишняя клетка?



219. Из 40 спичек образована квадратная решётка (каждая сторона маленького квадратика — одна спичка). Снимите 9 спичек, чтобы полностью не сохранилось контура ни одного квадрата (состоящего из одного или большего количества маленьких квадратиков). Достаточно указать один способ, как это сделать.



220. Из прямоугольника размером 10×7 вырезали прямоугольник 1×6, как показано на рисунке. Разрежьте полученную фигуру на две равные части, из которых можно сложить квадрат.



221. Решите ребусы: а) $+\begin{array}{r}\text{УМ}\\ \underline{\text{ШУМ}}\\ \text{ВМШ}\end{array}$; б) $+\begin{array}{r}\text{ДУРАК}\\ \underline{\text{УДАР}}\\ \text{ДРАКА}\end{array}$; в) $+\begin{array}{r}\text{ОДИН}\\ \underline{\text{ОДИН}}\\ \text{МНОГО}\end{array}$; г) $+\begin{array}{r}\text{FORTY}\\ \text{TEN}\\ \underline{\text{TEN}}\\ \text{SIXTY}\end{array}$.

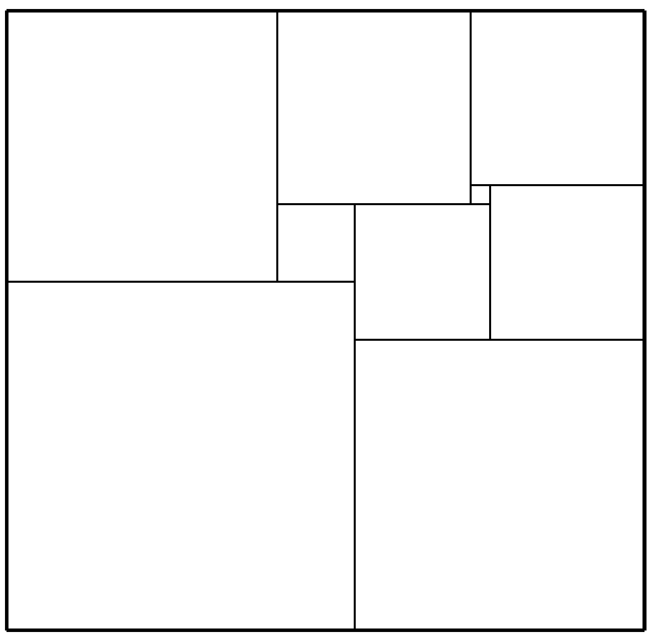
222. Известно, что a и b — натуральные числа, а из следующих четырёх утверждений —

1) $a+1$ делится на b, 2) $a=2b+5$,
3) $a+b$ делится на 3, 4) $a+7b$ — простое число

— три верных, а одно неверное. Найдите все возможные пары чисел a, b.

223. Илье Муромцу, Добрыне Никитичу и Алёше Поповичу за верную службу дали 6 монет: 3 золотые и 3 серебряные. Каждому досталось по две монеты. Илья Муромец не знает, какие монеты достались Добрыне, а какие Алёше, но знает, какие монеты достались ему самому. Придумайте вопрос, на который Илья Муромец ответит «да», «нет» или «не знаю» и по ответу на который вы сможете понять, какие монеты ему достались.

224. Нарисуйте на клетчатой бумаге прямоугольник шириной 33 и высотой 32 клетки и разрежьте его на квадраты, как показано на рисунке. (Резать можно только вдоль линий сетки!)



Разбиение прямоугольника на *разные* квадраты

Индукция

... выпросился остаться одну ночку; от одной ночки две ночки, от двух ночек две недели, от двух месяцев два года, а от двух годов жил тридцать лет.

225. Придумайте 10 различных натуральных чисел, сумма которых делится на каждое из них.

Указание. Сначала придумайте три числа, сумма которых делится на каждое из них. Потом подумайте, нельзя ли получить четыре таких числа, ...

226. Делится ли число $11\ldots11$ (восемьдесят одна единица) на 81?

Решение. 111 делится на 3, 111 111 111 делится на 9, $111\,111\,111\,111\,111\,111\,111\,111\,111 = 111\,111\,111 \cdot 1\,000\,000\,001\,000\,000\,001$ делится на $9 \cdot 3 = 27$. Далее, представляя записанное 81 единицей число в виде произведения числа, записанного 27 единицами, и числа, три цифры которого — единицы, а остальные — нули, ответьте на вопрос задачи.

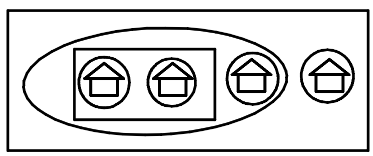
Второй способ: $111\,111\,111 : 9 = 12345679$. Значит, частное от деления числа $11\ldots11$ (81 единица) на 9 равно 1234567901234567901234567901234567901234567901234579012345679012345679012345679. Осталось вспомнить признак делимости на 9.

227. Разрежьте квадрат на а) 6; б) 7 квадратов.

в) Укажите все значения n, для которых квадрат нельзя разрезать на n меньших квадратов.

г) При каких n равносторонний треугольник нельзя разрезать на n меньших равносторонних треугольников?

228. В посёлке 100 домов. Сколько заборов, не пересекающих друг друга, можно построить, чтобы каждый забор огораживал хотя бы один дом и никакие два забора не огораживали бы одну и ту же совокупность домов?



Указание. Решите задачу сначала не для 100, а для меньших чисел: 1, 2, 3, ...

Игры

Есть вещи, которые спокойно можно объяснить дважды и трижды, не опасаясь, что тебя поймут.
Премудрая Сова

229. Двое по очереди ставят на шахматную доску ладьи (за один ход — одну ладью), чтобы они не били друг друга. (Кто какую ладью поставил, не учитывается. Нельзя ставить ладью даже под бой своей ладьи.) Кто не может поставить ладью, проигрывает.
Кто выиграет при правильной игре — первый или второй?

230. Аня и Таня выписывают 8-значное число, ставя цифры по очереди, начиная со старшего разряда. Начинает Аня.
Может ли Таня добиться, чтобы число делилось на 9?

231. Ладья стоит на поле $a1$. За ход разрешается сдвинуть её на любое число количество клеток вправо или на любое число клеток вверх. Выигрывает тот, кто поставит ладью на поле $h8$. У кого есть выигрышная стратегия?

232. Имеются а) 2; б) 3 одинаковые кучи камней. Двое играющих берут по очереди любое число камней из любой кучи, но только из одной. Выигрывает взявший последние камни.
Кто выиграет при правильной игре?

233. Двое играют, передвигая короля по шахматной доске. Допускаются ходы на одно поле влево, вниз или по диагонали влево-вниз. Выигрывает тот, кто ставит короля на поле $a1$. При каких начальных положениях короля выигрывает начинающий, а при каких — его партнёр?

233.′ Имеются две кучи камней. Двое играющих берут по очереди камни. Разрешается взять один камень из любой кучи или по одному камню из обеих куч. Выигрывает взявший последние камни. Исследуйте эту игру.

234. Двое по очереди берут из кучи камней 1, 2 или 4 камня. Выигравшим считается взявший последние камни.
При каком числе камней в куче начинающий может победить, как бы ни играл его партнёр?

235. В ряд расположены 12 клеток. На самой правой клетке стоит белая фишка, на самой левой — чёрная. Два игрока по очереди передвигают свою фишку на одно поле — вперёд или назад. (Пропустить ход нельзя.) Проигравшим считают того, у кого нет хода. Кто выигрывает: начинающий или его партнёр?

236. На доске сначала написано число 1. Каждым ходом к числу можно прибавить 3, 5 или 7. Чуня и Проня ходят по очереди так, что после любого хода Чуни получаются чётные числа, а после любого хода Прони — нечётные. Требуется, чтобы все эти нечётные числа были *простыми.*[*)] Цель Прони — назвать число, большее ста. Цель Чуни — помешать Проне. (Если первым назовёт число, большее 100, Чуня, выигравшим всё равно считается Проня.) Кто выиграет при правильной игре?

237. Двое играющих по очереди переводят часовую стрелку на 2 или 3 часа вперёд. Если в начале часовая стрелка указывает 12, а победителем объявляется тот, после чьего хода она указала на 6, узнайте, кто победит при правильной игре.[†)]

238.* Играют двое. Первый называет произвольное целое число от 2 до 9. Второй умножает это число на произвольное целое число от 2 до 9. Затем первый умножает результат на любое целое число от 2 до 9, и т. д. Выигрывает тот, кто первым получит произведение больше 1 000.
Кто при правильной игре выигрывает — начинающий или его партнёр?

[*)] Простое число — это натуральное число p, которое имеет ровно два различных делителя: 1 и p. Первые простые числа таковы: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37 ... .

[†)] Стрелка может сделать несколько оборотов, прежде чем остановится на цифре 6.

239. Двое по очереди ставят по одному коню на шахматную доску. Нельзя ставить фигуру под бой ранее (не важно, самим игроком или его противником) поставленной фигуры. Кто не может сделать ход, проигрывает.
Кто победит при правильной игре?

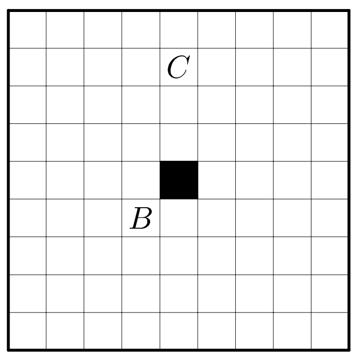
240. В строчку написано несколько минусов. Два игрока по очереди переправляют один или два соседних минуса на плюс. Выигрывает переправивший последний минус. Кто выиграет при правильной игре: начинающий или его партнёр?

241. Двое по очереди обрывают лепестки у ромашки, причём за один раз можно оборвать 1 или 2 соседних (рядом растущих) лепестка. Выигрывает тот, кто сделает последний ход.
Кто выиграет при правильной игре?

242. На доске размером 7×7 двое по очереди закрашивают клетки так, чтобы они не имели общих а) сторон; б) точек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.
Кто выигрывает при правильной игре?

243. На окружности даны 20 точек. Играют двое. Каждым ходом игрок проводит хорду с концами в данных точках так, чтобы хорды не пересекались внутри круга. (Иметь общие концы хорды могут.) Проигрывает тот, кто не может провести хорду. Кто победит при правильной игре?

244. Соты имеют форму квадрата 9×9. Все квадратики, кроме центрального, заполнены мёдом. В центре — дёготь. За один ход разрешается разломить соты вдоль любой вертикальной или горизонтальной линии и съесть ту часть, где нет дёгтя. Проигрывает тот, кому остался только дёготь.

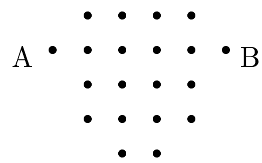


а) Кто выиграет при правильной игре?
А если дёготь находится не в центре, а в клетке б) B; в) C?

Деревья

Дурак видит не то самое дерево,
что видит умный.
*Вильям Блейк**)

245. В доску вбито 20 гвоздиков. Расстояние между соседними равно 1 см. Натяните нитку длиной 19 см от A до B так, чтобы она прошла через все гвоздики.

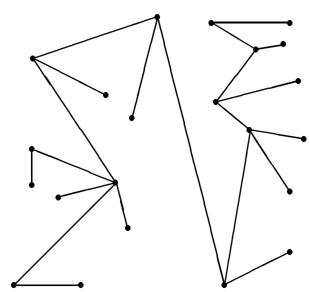


246. Сколько было брёвен, если пятьюдесятью двумя распилами из них получили 72 полена?

247. а) Имеется лист бумаги. Его можно разорвать на 5 частей. Каждый новый кусок можно разорвать на 5 частей или оставить целым, и т. д. Можно ли получить таким образом 50 кусков?

б) Если всякий раз лист можно рвать на 8 или на 12 частей, выясните, можно ли из одного листа получить 60 кусков; докажите, что любое число кусков, большее 60, получить можно.

248. N точек соединены непересекающимися отрезками так, что из каждой можно пройти в каждую из остальных по отрезкам, причём единственным путём.
Сколько отрезков?

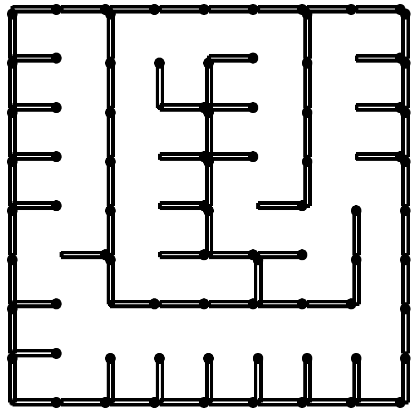


249. На столе лежат две кучки: в одной 7 спичек, а в другой 8. Начинающий делит кучку на две кучки, затем второй делит одну из кучек на две, и т. д. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередного хода. Зависит ли результат этой игры от того, кто как играет, или важно лишь, кто ходит первым?

---

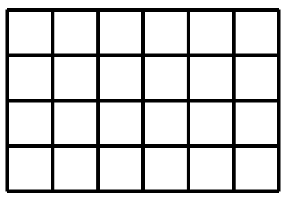
*)Вильям Блейк (1757 – 1827) — английский поэт и художник.

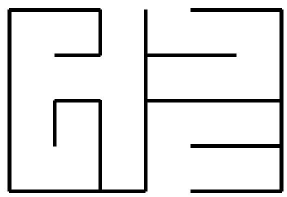
250. Вдоль границ клеток шахматной доски положили спички. Сколько спичек необходимо убрать, чтобы ладья могла добраться с любого поля на любое, не перепрыгивая через спички?



251. В землю вбили 19 колышков. Двое по очереди связывают пары колышков бечевой: каждым ходом — одну пару. Выигравшим считается игрок, при ходе которого образовалась замкнутая ломаная, составленная из бечёвок (вершинами ломаной должны быть колышки). Не разрешается связывать два уже ранее соединенных колышка.
Кто выиграет при правильной игре?

252. Какое наибольшее число верёвочек, соединяющих соседние узлы сетки размера 4×6, можно разрезать, чтобы сетка не распалась на отдельные куски?





253. Всё началось с одной курицы, которая снесла два яйца. Из них вывелись цыплята: петух и курица. Когда они подросли, петуха съели сразу, а курицу — после того, как она снесла два яйца. Так делали и дальше: из яиц выводили цыплят, ели кур и петухов, ... Всё прекратилось, когда из яиц вылупились одни только петухи. Зная, что были съедены 1994 петуха, выясните, сколько съели кур.

Лингвистические задачи

Если надо — язык суахили,
сложный звуком и словом обильный,
чисто выучат внуки Рахили
и фольклор сочинят суахильный.

И. Губерман

254. Даны французские слова **tour, face, coucher, attacher, passage, orange, variété, chance, torche, rager, image, courage, révérence** и их переводы в перепутанном порядке: **факел, смелость, проход, лицо, почтение, привязывать, поездка, образ, разнообразие, лежать, удобный случай, апельсин, неистовствовать**. Установите, какое французское слово какому русскому соответствует.

255. Вот обозначения некоторых дат на языке суахили: **tarehe tatu Disemba jumamosi; tarehe pili Aprili jumanne; tarehe nne Aprili jumanne; tarehe tano Octoba jumapili; tarehe tano Octoba jumatatu; tarehe tano Octoba jumatano.** А вот их переводы на русский язык (в перепутанном порядке): **5 октября, понедельник; 2 апреля, вторник; 5 октября, среда; 5 октября, воскресенье; 3 декабря, суббота; 4 апреля, вторник.**

Как написать на языке суахили следующие даты: а) 3 апреля, среда; б) 2 декабря, воскресенье; в) 1 ноября, понедельник?

256. Вот несколько айнских числительных (в латинской транскрипции):

3 — re;
11 — shine ikashma wan;
22 — tu ikashma hotne;
37 — arwan ikashma wan e tu hotne;
47 — arwan ikashma tu hotne;
93 — re ikashma wan e ashikne hotne;
135 — ashikne ikashma wan e arwan hotne.

Определите, какое число записывается по-айнски как **wan e re hotne**. Запишите по-айнски числа: 1, 5, 12, 53, 100, 200.

Периодичность

Я повторяю путь земной
былых людских существований;
ничто не ново под луной,
кроме моих переживаний.
И. Губерман

257. Начнём считать пальцы на руке следующим образом: пусть 1-м будет большой, 2-м — указательный, 3-м — средний, 4-м — безымянный, 5-м — мизинец, 6-м — снова безымянный, 7-м — средний, 8-м — указательный, 9-м — большой, 10-м — указательный, и так далее. Какой палец будет 2017-м?

258. Убедитесь, что а) $1/3 = 0{,}(3)$; б) $1/6 = 0{,}1(6)$; в) $7/30 = 0{,}2(3)$; г) $7/11 = 0{,}(63)$.

259. Найдите сотую цифру после запятой в десятичной записи числа $1/7$.

260. Разделите «уголком» число 1 на а) 9; б) 99; в) 9 999.
г) Докажите общее правило: $1/\underbrace{99\ldots9}_{n} = 0{,}(\underbrace{0\ldots0}_{n-1}1)$.
д) Чисто периодическая правильная дробь равна такой обыкновенной дроби, в числителе которой — период, а в знаменателе — число $10^r - 1 = \underbrace{9\ldots9}_{r}$, где r — длина периода. Докажите это.

261. Обратите в десятичные дроби числа: а) $23/99$; б) $1234/999999$.

262. Сколько чисел, кратных 13, имеется среди первых ста чисел последовательности 1, 11, 111, 1111, … ?

263. Если число вида $11\ldots11$ кратно 7, то оно кратно и 11, и 13, и 15873. Докажите это.

264. Первую цифру k-значного числа, кратного 13, стёрли и записали позади последней цифры этого числа. При каких k полученное число кратно 13? (Например, из кратных 13 чисел 503906 и 7969 таким образом получаем числа 39065 и 9697, первое из которых кратно 13, а второе — нет.)

265. а) Решите ребус $\texttt{ПЛОМБА} \cdot 5 = \texttt{АПЛОМБ}$.

б) Найдите шестизначное число, уменьшающееся в 5 раз при переносе первой цифры в конец числа.

в) Решите ребус: $\texttt{НИКЕЛЬ} \cdot 6 = \texttt{ЕЛЬНИК}$. (*Указание.* В словах ребуса использованы два слога: НИК и ЕЛЬ. Обозначьте $\texttt{НИК} = x$ и $\texttt{ЕЛЬ} = y$.)

г) Существует ли шестизначное число, которое при умножении на 2, 3, 4, 5 и 6 даёт числа, записанные теми же цифрами, что и само число, но в другом порядке?

д) Найдите все шестизначные числа, которые увеличиваются в целое число раз при переносе последней цифры из конца в начало.

266. Число оканчивается на 2. Если эту цифру перенести в начало числа, оно удвоится. Найдите наименьшее такое число.

267. Какой цифрой оканчивается число $33^{77} + 77^{33}$?

268. Найдите две последние цифры числа 2^{2000}.

269. Какова последняя цифра числа $9999^{999999^{9}}$?

270. Пятизначное число делится на 41. Докажите, что если его цифры циклически переставить, то полученное число тоже будет делиться на 41. (Например, зная, что 93 767 делится на 41, можно утверждать, что 37 679 тоже делится на 41.)

271*. а) Рассмотрим числа: 1, 11, 111, 1111, ... Докажите, что среди них найдутся два числа, разность которых делится на 196 673.

б) Докажите, что существует число, записываемое одними только единицами и кратное числу 196 673.

в) Для любого натурального числа a, не делящегося ни на 2, ни на 5, существует такое натуральное число b, что произведение ab записывается в десятичной системе счисления одними только единицами. Докажите это.

*272**. Если натуральные числа a и m взаимно просты, то существует такое натуральное n, что $a^n - 1$ делится на m. Докажите это.

Комбинаторика

Отец даёт двухлетней дочери ложку и спрашивает:
— Сколько у тебя ложек?
— Одна.
Даёт другую:
— Теперь сколько?
— Две.
Даёт третью.
— Теперь сколько?
— Много.
— Нет, ты скажи.
Девочка с преувеличенным выражением брезгливости отодвигает от себя третью ложку:
— Возьми, она грязная!
К. Чуковский, «От двух до пяти»

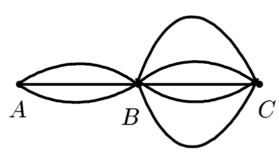
Комбинаторика — это раздел математики, в котором изучают, сколько комбинаций, подчинённых тем или иным условиям, можно составить из данных объектов. Прежде чем переходить к общим принципам, рассмотрим несколько примеров.

1) Сколько существует трёхзначных чисел?

Самое большое трёхзначное число — это 999. Самое большое двузначное — 99. Поэтому существует $999 - 99 = 900$ трёхзначных чисел.

Тот же ответ можно получить и другим способом. Вообразите, что мы пишем, цифра за цифрой, трёхзначное число. Сначала напишем любую из девяти цифр 1, 2, ... , 9 в разряд сотен. Затем любую из десяти цифр — в разряд десятков; наконец, какую-нибудь (любую) цифру — в разряд единиц. Ответ: $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$.

2) Сколько способов проехать из A в C, если система дорог такова, как показано на рисунке?



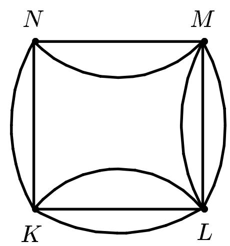
Прежде чем попасть из A в C, надо любым из трёх возможных способов попасть из A в B, а затем — любым из пяти способов из B в C. Общее количество способов равно $3 \cdot 5 = 15$.

3) Сколькими способами можно расположить на шахматной доске белую и чёрную ладьи, чтобы они не били одна другую?

Сначала поставим на любую из 64 клеток доски белую ладью. Для чёрной ладьи останется 49 полей. Ответ: $64 \cdot 49 = 3136$.

Заметьте: мы перемножаем числа 64 и 49, а не складываем их. Одна из стандартных ошибок, которую делает начинающие, состоит в том, что они путают, когда надо складывать, а когда умножать. Между тем всё просто: сумма $m + n$ есть количество элементов объединения двух непересекающихся множеств, одно из которых состоит из m, а другое из n элементов. А произведение mn — это количество пар вида $(x; y)$, где x может быть любым из m элементов некоторого множества (например, это может быть множество 64 возможных полей для белой ладьи), а y, при каждом фиксированном x, может быть любым из некоторых n элементов (например, y — одно из 49 возможных полей для чёрной ладьи).

Иногда необходимо использовать и сумму, и произведение: например, количество путей, ведущих на рисунке из точки K в точку M, равно $2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 13$.

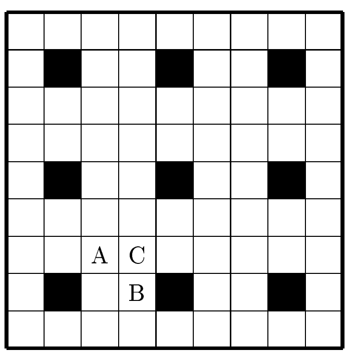


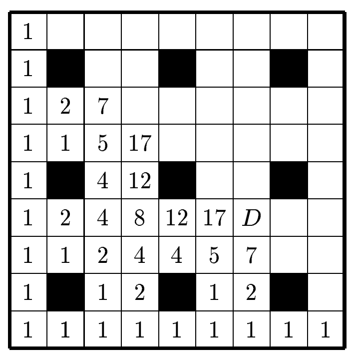
4) Сколькими способами можно выложить в ряд красный, жёлтый и зелёный шарики?

Вот все 6 способов:

к ж з	ж к з	з к ж
к з ж	ж з к	з ж к

5) Сколькими способами можно пройти из левой нижней клетки изображённого на рисунке квадрата 9×9 в правую верхнюю, ни разу не побывав ни на одной закрашенной клетке и двигаясь только вверх или вправо?





Нет ни сил, ни желания рисовать все варианты: это пример не так прост, как предыдущий! Что же делать? Давайте поставим перед собой более скромную цель: найдём количество путей из левой нижней клетки не в правую верхнюю, а, например, в клетку A. Очевидно, таких путей два. Столько же путей ведут в точку B. Теперь легко понять, что в клетку C можно пройти четырьмя способами (два из них ведут через A, а два — через B).

Таким образом, клетку за клеткой, мы можем заполнять доску, используя правило суммы: если в некоторую клетку Z можно попасть справа из клетки X и снизу — из Y, то количество способов попасть в клетку Z есть сумма количеств способов попасть в X и Y. Например, в клетку D можно попасть $17+7=24$ способами.

Так потихонечку и заполним всю доску. *Ответ:* 678.

6) Сколько слов (не обязательно осмысленных) можно получить, переставляя буквы слова МАМА*?*

МАМА, МААМ, ММАА, АМАМ, АММА и ААММ — всего 6 способов.

7) Сколько среди первых 1000 натуральных чисел таких, которые не кратны ни 2, ни 5?

Как известно, число не кратно ни 2, ни 5, если его последняя цифра — это одна из четырёх цифр 1, 3, 7, 9. Значит, в каждом десятке ровно четыре интересующих нас числа, а всего таких чисел 400.

Есть и другой способ. Рассмотрим множество $U=\{1,2,3,\ldots,1000\}$ и два его подмножества: $A=\{2,4,6,\ldots,1000\}$ и $B=\{5,10,15,\ldots,1000\}$. Нас интересует число элементов множества U, не принадлежащих ни A, ни B. Легко видеть, что ответ $|U|-|A|-|B|$ (где $|U|$, $|A|$ и $|B|$ — количества элементов множеств U, A и B соответственно) неправильный. Дело в том, что элементы, входящие в оба множества A и B (то есть числа, оканчивающиеся цифрой 0), были выброшены дважды, хотя следовало их выбросить только один раз. А вот правильный ответ:

$$|U|-|A|-|B|+|A\cap B|,$$

где $A\cap B$ — пересечение множеств A и B. Давайте проверим эту формулу:

$$1000-500-200+100=400.$$

8) Сколько сторон и диагоналей в выпуклом пятнадцатиугольнике?

Можно, конечно, нарисовать 15-угольник на большом листе бумаги, посчитать диагонали и прибавить к ответу 15 — число сторон. Но лучше найти общую формулу для числа сторон и диагоналей n-угольника.

Очевидно, в треугольнике 3 стороны и ни одной диагонали; в четырёхугольнике 4 стороны и 2 диагонали; в пятиугольнике 5 сторон и 5 диагоналей. Чуть сложнее увидеть, что у шестиугольника 6 сторон и 9 диагоналей.

Вообще, из каждой вершины n-угольника выходят $n-1$ отрезков (две стороны и $n-3$ диагонали). Умножив n на $(n-1)$ и не забыв разделить на 2 (ибо у каждого отрезка два конца), получим ответ: число сторон и диагоналей n-угольника равно

$$n(n-1)/2. \qquad (*)$$

В частности, у 15-угольника всего $15 \cdot 14/2 = 105$ сторон и диагоналей.

Любитель индукции может доказать формулу $(*)$ и другим способом. При $n = 3$ формула $(*)$ верна. Очевидно, $(n+1)$-угольник можно получить из n-угольника добавлением одной новой вершины. Из этой вершины выходят отрезки — стороны и диагонали — во все остальные n вершин. Значит, $(n+1)$-угольник имеет ровно на n больше сторон и диагоналей, чем n-угольник. Поскольку

$$\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{(n+1)n}{2},$$

мы видим, как преобразуется формула при переходе от n к $n+1$. Точнее говоря, если формула $(*)$ давала верное значение для n-угольника, то и для $(n+1)$-угольника всё будет правильно. Мы помним, что при $n = 3$ формула верна. Значит, по индукции, она верна при любом n.

Мы разобрали уже восемь разных комбинаторных задач. Пора перейти к более общим понятиям.

Перестановки. Факториал

Два элемента a и b могут быть выписаны в строчку всего двумя способами: ab и ba. Для трёх элементов, как мы знаем из четвёртого примера, существует 6 вариантов. Нетрудно посчитать и число перестановок множества из 4 элементов:

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

Всего 24 перестановки, расположенные в 4 столбца по 6 перестановок в каждом. Очевидно, перестановки на 5 элементах можно расположить в 5 столбцов, по 24 в каждом. Значит, всего существует $5 \cdot 24 = 120$ таких перестановок.

Для числа перестановок n элементов есть обозначение: $n!$ (читаем: «эн факториал»). Факториал равен произведению всех натуральных чисел от 1 до n. Например, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$. Функция $n!$ возрастает очень быстро. Так, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, ..., $10! = 3\,628\,800$. Факториалы возникают в комбинаторике очень часто. Поэтому принято считать, что если ответ выражен через факториалы, то всё сделано. (Этому в немалой степени способствует открытая в 1730 году английским математиком Дж. Стирлингом формула для приближённого вычисления:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n / e^n.$$

Относительная ошибка при пользовании этой формулой очень невелика и стремится к нулю при увеличении числа n. Что такое e и почему верна формула Стирлинга, семикласснику объяснить совершенно невозможно.)

Главное свойство факториала очевидно из определения:

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n!.$$

Подставим в эту формулу $n = 0$. Получим:

$$1! = 1 \cdot 0!,$$

откуда $0! = 1$. И действительно, во многих формулах для единообразной записи очень удобно пользоваться обозначением $0! = 1$. А вот определить $(-1)!$ никак нельзя: равенство $0! = 0 \cdot (-1)!$ невозможно ни при каком значении $(-1)!$.

Размещения

Следующее важное понятие комбинаторики — размещение. Давайте рассмотрим такую ситуацию: в классе, в котором 25 учеников, нужно выбрать старосту, его заместителя и помощника заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

Очевидно, сначала 25 способами можно выбрать любого ученика в старосты. Затем из 24 оставшихся — заместителя старосты, а после этого любой из 23 оставшихся может оказаться помощником заместителя. По правилу произведения, всего имеем

$$A_{25}^3 = 25 \cdot 24 \cdot 23$$

вариантов.

Вообще, через A_n^k (читаем: «а из эн по ка») обозначают число способов выбрать из данных n элементов сначала первый элемент, потом второй, третий, ..., k-й. Вычисляют его по формуле

$$A_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

Заметьте: в правой части ровно k множителей, и последний из них равен $n-k+1$, а вовсе не $n-k$, как могло показаться на первый взгляд. Формулу можно записать и через факториалы:

$$A_n^k = n!/(n-k)!.$$

Числа сочетаний

Представьте себе, что в классе из 25 человек нужно выбрать не старосту, его заместителя и помощника его заместителя, а тройку начальников, которые, обладая равными правами, будут управлять и судить класс, не выясняя, кто из троих главный, кто менее главный, а кто так себе. Тогда способов будет не A_{25}^3, а в 6 раз меньше. (Подумайте об этом хорошенько! Здесь $6 = 3!$ — количество способов ранжировать трёх начальников, то есть количество всех перестановок на множестве из 3 элементов.)

Вообще, очень важные для комбинаторики и теории вероятностей числа сочетаний C_n^k (читаем: «число сочетаний из эн по ка» или «це из эн по ка») можно вычислить по формуле

$$C_n^k = A_n^k/k! = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

К сожалению, ни для точного определения, ни для свойств чисел сочетаний в этой брошюре места не нашлось. Но для первого знакомства с комбинаторикой сказанного и так предостаточно. Вернёмся лучше к нашим обычным задачам, оставив теорию на будущее.

273. В киоске продают 5 видов конвертов и 4 вида марок. Сколькими способами можно купить конверт и марку?

274. В футбольной команде (11 человек) нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Капитаном может стать любой из 11 футболистов. После выбора капитана на роль его заместителя могут претендовать 10 оставшихся человек. Таким образом, есть $11 \cdot 10 = 110$ разных вариантов выбора.

Эта задача отличается от предыдущей тем, что выбор капитана ограничивает круг претендентов на роль заместителя: капитан не может быть своим заместителем. Таким образом, выборы капитана и его заместителя не являются независимыми — такими, как выборы конверта и марки.

275. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова конверт?

Пояснение. Гласную можно выбрать двумя способами (о или е), а согласную — пятью способами (к, н, в, р или т).

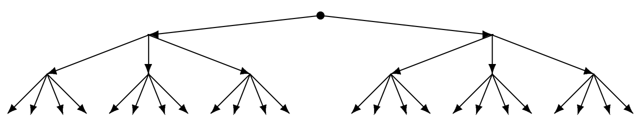
276. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и чёрную ладьи так, чтобы они не били друг друга?

277. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белого и чёрного короля, чтобы получилась допустимая правилами игры позиция?

278. Ранним утром на рыбалку улыбающийся Игорь мчался босиком. Сколько осмысленных предложений можно составить, вычёркивая некоторые слова этого предложения?
(Во все предложения обязательно должны входить подлежащее Игорь и сказуемое мчался.)

279. Начальник транспортного цеха пригласил несколько человек на совещание. Каждый участник совещания, входя в кабинет, пожимал руки всем присутствующим. Сколько человек участвовали в совещании, если было всего 78 рукопожатий?

280. Крыса бежит по лабиринту, который устроен так, что сначала она должна выбрать одну из двух дверей, затем одну из трёх дверей, а за каждой из них её ожидают четыре двери. Пройдя дверь, крыса не может вернуться через неё обратно. Сколькими различными путями крыса может пройти лабиринт от начала до конца?



281. В поход ходили 80% учеников класса, а на экскурсии было 60% класса, причём каждый был в походе или на экскурсии. Сколько процентов класса были и там, и там?

282. В классе 35 учеников. 20 из них занимаются в математическом кружке, 11 — в биологическом, а 10 ничем не занимаются. Сколько ребят занимаются и математикой, и биологией?

283. На дискотеке 80% времени был выключен свет, 90% времени играла музыка и 50% времени шёл дождь.

Какую наименьшую долю времени всё это обязано было происходить одновременно?

284. Из 100 человек 85 знают английский язык, 80 — испанский, 75 — немецкий.
Сколько человек заведомо знают все три языка?

Наводящий вопрос. Сколько человек не знают английский язык? испанский? немецкий?

285. Каких натуральных чисел от 1 до 1993 больше: тех, которые кратны 8, но не кратны 9, или тех, которые кратны 9, но не кратны 8?

286. Сколько существует натуральных чисел, меньших 1 000, которые не кратны ни 2, ни 5? А не кратных ни 2, ни 3, ни 5?

287. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна чётная цифра?

Подсказка. Вместо того, чтобы подсчитывать количество требуемых шестизначных чисел, определите количество шестизначных чисел, у которых все цифры нечётны.

288. Каких чисел больше среди первого миллиона: тех, в записи которых есть цифра 7, или тех, в записи которых её нет?

289. Сколько семизначных чисел не содержат цифры 2?

290. Сколькими способами 8 человек могут встать в очередь к театральной кассе?

291. Сколько существует 9-значных чисел, цифры которых расположены в порядке убывания (то есть каждая следующая меньше предыдущей)?

292. Сколько разных чисел можно получить, переставляя цифры чисел: а) 133; б) 9 854; в) 3 213; г) 98 561; д) 32 123?

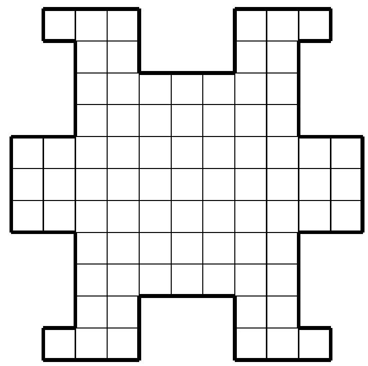
293. Сколько различных (не обязательно осмысленных) слов можно получить, переставляя буквы слов: а) крот; б) математика; в) наполеононенавистничество?

294. Сколько существует трёхзначных чисел, в запись которых входит ровно одна цифра 5?

295. Замените буквы в слове ТРАНСПОРТИРОВКА цифрами (разные буквы — разными цифрами, одинаковые — одинаковыми) так, чтобы выполнялись неравенства

$$\mathtt{Т} > \mathtt{Р} > \mathtt{А} > \mathtt{Н} < \mathtt{С} < \mathtt{П} < \mathtt{О} < \mathtt{Р} < \mathtt{Т} > \mathtt{И} > \mathtt{Р} > \mathtt{О} < \mathtt{В} < \mathtt{К} < \mathtt{А}.$$

296. Разрежьте фигуру на 9 равных (и по форме, и по площади) частей.



297. Каждый зритель, пришедший на спектакль «Королевский жираф», принёс с собой либо одну дохлую кошку, либо два кочана гнилой капусты, либо три тухлых яйца. Стоявший у входа Гекльберри Финн подсчитал, что кошек было 64 штуки. После спектакля оба артиста — король и герцог — были с ног до головы закиданы припасами, причём на долю каждого досталось поровну предметов (а промахов жители Арканзаса не делают). Правда, король принял на себя лишь пятую часть всех яиц и седьмую часть капусты, но все дохлые кошки полетели именно в него. Сколько зрителей пришло на представление?

298. В каждой клетке доски 4×4 лежит слива. Уберите 6 слив так, чтобы в каждом горизонтальном и в каждом вертикальном ряду осталось чётное число слив.

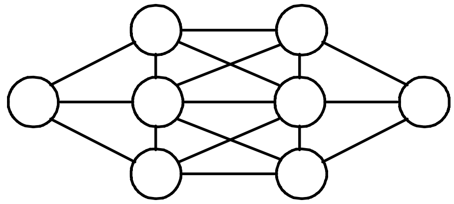
299. Решите ребус.

$$\begin{array}{r} \mathtt{А} \\ +\ \mathtt{АБ} \\ \mathtt{АБВ} \\ \hline \mathtt{БВБ} \end{array}$$

300. а) На доске размером 6×6 расставьте 8 ферзей так, чтобы каждый из них бил ровно одного ферзя.
б) Можно ли так расставить 9 ферзей?

301. В трамвае ехали 60 человек: контролёры, кондукторы, лжекондукторы (граждане, выдававшие себя за кондукторов), лжеконтролёры (граждане, выдававшие себя за контролеров), и, возможно, обычные пассажиры. Общее количество лжеконтролёров и лжекондукторов в 4 раза меньше числа настоящих кондукторов и контролёров. Общее число контролёров и лжеконтролёров в 7 раз больше общего числа кондукторов и лжекондукторов.
Сколько в трамвае обычных пассажиров?

302. Расставьте в кружочках числа 1, 2, 3, …, 8, чтобы ни в каких двух соединённых отрезком кружочках не оказались бы соседние (то есть отличающиеся на 1) натуральные числа.

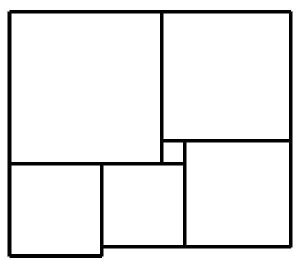


303. Для постройки типового дома не хватало места. Архитектор изменил проект: убрал 2 подъезда и добавил 3 этажа. Количество квартир увеличилось. Он обрадовался и решил убрать еще 2 подъезда и добавить ещё 3 этажа. Могло ли при этом квартир стать даже меньше, чем в типовом проекте? (В каждом подъезде одинаковое число этажей, на всех этажах во всех подъездах одинаковое число квартир.)

304. В озере плавает яблоко: 2/3 его под водой и 1/3 над водой. К нему подплывает рыбка и подлетает птичка, которые одновременно начинают кушать, причём птичка в два раза быстрее, чем рыбка.
Какую часть яблока скушает птичка и какую — рыбка?

305. Пять братьев делили наследство отца поровну. В наследстве было три дома. Поскольку дома пилить нельзя, их взяли три старших брата, а меньшим выделили деньги: каждый из трёх старших братьев заплатил по 800 рублей, а меньшие братья разделили эти деньги между собой. Сколько стоил один дом?

306. Фигура на рисунке составлена из квадратов. Найдите сторону левого нижнего, если сторона самого маленького равна 1.



307. Хозяин обещал работнику за 30 дней 9 рублей и кафтан. Через три дня работник уволился и получил кафтан. Сколько стоил кафтан?

308. Вычислите:
$$\frac{\left(4\frac{2}{3}+1\frac{1}{3}\cdot 3-9\frac{1}{6}\right)\cdot\left(4{,}17^2-(7{,}42^2+3\frac{1}{4}\cdot 0{,}41)\right)}{0{,}815\cdot(-\frac{2}{3})-\frac{1}{6}\cdot(-4{,}385)+0{,}815\cdot\frac{1}{6}-(-4{,}385)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}.$$

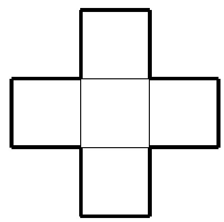
309. На мельнице есть три жернова. На первом за сутки можно смолоть 60 четвертей зерна, на втором — 54, а на третьем — 48. Некто хочет

смолоть 81 четверть зерна. За какое наименьшее время он сможет смолоть зерно?

310. В 336-ведёрную ёмкость всякий час одною трубою втекает 70 вёдер воды, а другою трубою вытекает 42 ведра. За какое время ёмкость наполнится?

311. а) Конь вышел с некоторого поля шахматной доски и через несколько ходов вернулся на него. Докажите, что он сделал чётное число ходов.
б) Из шахматной доски выпилено угловое поле. Может ли конь обойти все оставшиеся поля по одному разу и вернуться на исходное поле?
в) Может ли конь пройти из левого нижнего угла шахматной доски в правый верхний, побывав на каждом поле ровно один раз?

312. Крест составлен из пяти равных квадратов. Разрежьте его на такие части, из которых можно (без дыр и перекрытий) составить квадрат.



313. Если от некоторого двузначного числа отнять 2, то результат разделится нацело на 3, а если отнять не 2, а 3, то разделится не на 3, а на 2. Если к этому числу прибавить 4, то результат разделится нацело на 5, а если от него отнять 5, то разделится на 4. Более того, если от этого числа отнять 5, то разделится нацело на 6, а если же от нашего числа отнять 6, то разделится на 5. И это ещё не всё: если к этому замечательному числу прибавить 7, то результат разделится на 8, а если прибавить 8, то разделится на 7. Что же это за число?

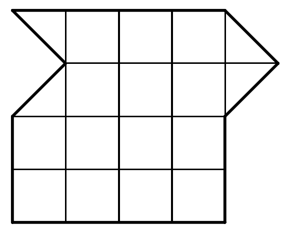
314. Придумайте 10 натуральных чисел, у которых и сумма, и произведение равны 20.

315. а) Когда комиссия приехала в больницу, там находились 3 врача и 1996 пациентов. Комиссия попросила каждого указать двух врачей. Каждый врач назвал двух других врачей, а пациенты называли кого угодно. Докажите, что комиссия смогла выявить хотя бы одного пациента.
б) В Конторе работают 200 психически здоровых и 1999 сумасшедших сотрудников. Однажды каждый сотрудник написал докладную записку, в которой перечислил 1999 своих коллег, по его мнению, сумасшедших. Каждый психически здоровый сотрудник верно указал всех сумасшедших, а каждый сумасшедший мог указать на кого угодно, кроме себя. Докажите, что на основании этих данных можно выявить по крайней мере 199 сумасшедших.

316. По кольцевой линии метро курсируют 24 поезда. Они идут в одном направлении с одинаковыми скоростями и равными интервалами. Сколько поездов надо добавить, чтобы при той же скорости уменьшить интервалы на $1/5$?

317. В одной из трёх комнат сидит принцесса, в другой — тигр, а в третьей нет никого. На двери левой комнаты написано: "Тигр в правой комнате", на двери средней: "Левая комната пуста", на двери правой: "Принцесса в средней комнате". Известно, что надпись на двери комнаты, где сидит принцесса, истинна, надпись на двери комнаты, где сидит тигр — ложна, а надпись на двери пустой комнаты может быть как истинной, так и ложной.
Где сидит принцесса, а где — тигр?

318. Разрежьте изображённую на рисунке фигуру на а) четыре; б) пять одинаковых частей. (Можно резать не только по сторонам и диагоналям клеток.)



319. Представьте число 203 в виде суммы нескольких натуральных чисел, произведение которых тоже равно 203.

320. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из набора 1, 2, ... , 1963, чтобы сумма любых двух выбранных чисел делилась на 26?

321. У Тани и Димы денег поровну. Какую часть своих денег должна Таня отдать Диме, чтобы у неё стало в два раза меньше, чем у него?

322. Несколько учащихся ушли из лицея и несколько пришли. В результате число учащихся уменьшилось на 10%, а доля мальчиков в лицее увеличилась с 50% до 55%.
Увеличилось или уменьшилось число мальчиков?

323. Сумма двух натуральных чисел равна 474. Одно из них оканчивается цифрой 1. Если эту цифру зачеркнуть, то получится второе число. Найдите эти числа.

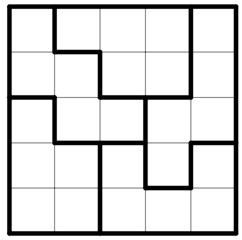
324. а) Закрасьте несколько клеток квадрата 4×4 так, чтобы любая закрашенная клетка имела общую сторону ровно с тремя незакрашенными, а любая незакрашенная — ровно с одной закрашенной.
б) Расставьте в клетках квадрата 4×4 знаки «$+$» и «$-$» так, чтобы для любой клетки ровно в одной клетке, соседней с ней по стороне, был противоположный знак.

325. В полдень самолёт вылетел из столицы в город Энск и приземлился там в 14 часов местного времени. В полночь по местному времени он вылетел обратно и оказался в столице в 6 часов утра.
Сколько времени длится полёт?

326. Найдите величину угла между минутной и часовой стрелками часов в 9 часов 20 минут.

327. За 11 тугриков дают 14 динаров, за 22 рупии — 21 динар, за 5 крон — 2 талера, а за 10 рупий — 3 талера. Сколько тугриков можно выручить за 13 крон?

328. Покрасьте клетки доски 5×5 в пять цветов так, чтобы в каждом горизонтальном ряду, в каждом вертикальном ряду и в каждом выделенном блоке все цвета встречались бы по одному разу.



329. Какое четырёхзначное число в 83 раза больше своей суммы цифр?

330. Числа 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 и 512 расставьте в клетках таблицы 3×3 так, чтобы произведения по всем вертикалям, горизонталям и обеим главным диагоналям были равны.

331. В одной куче 18 конфет, в другой — 23. Двое по очереди съедают одну из куч, а другую делят на две кучи. Кто не может поделить (если в куче одна конфета), проигрывает.
Есть ли у начинающего выигрышная стратегия?

332. Поля клетчатой доски размером 8×8 будем по очереди закрашивать в красный цвет так, чтобы после окраски каждой очередной клетки фигура, состоящая из закрашенных клеток, имела ось симметрии. Покажите, как можно закрасить 28 клеток, соблюдая это условие. (В качестве ответа расставьте на тех клетках, которые должны быть закрашены, числа от 1 до 28 в том порядке, в котором проводилось закрашивание.)

333. Мышка грызёт куб сыра с ребром 3, разбитый на 27 единичных кубиков. Когда мышка съедает какой-либо кубик, она переходит к кубику, имеющему общую грань с предыдущим.
Может ли мышка съесть весь куб кроме центрального кубика*)?
А если бы куб имел размеры $333\times333\times333$?

---

*) Именно там, в центральном кубике, спрятан крючок мышеловки.

ПАРАДОКСЫ и СОФИЗМЫ*)

Рефлексия

Сознание — это зажжённые фары
впереди идущего паровоза.
Обратите их светом внутрь, и
случится катастрофа.
Б. Пастернак

Все слышали нескончаемую историю о священнике и собаке. Это стихотворение интересно тем, что оно снова и снова возвращается к самому себе, подобно змее, заглатывающей собственный хвост.

У попа была собака,
Он её любил,
Она съела кусок мяса,
Он её убил.
В землю закопал, а
На могиле написал:
"У попа была собака, ... "

Следующая фраза — типичный пример предложения, говорящего о себе самом. Пересчитайте буквы, и Вы убедитесь, что это — чистая правда:

- В этой фразе двадцать восемь букв.

Вот другие примеры:

- Вы только что начали читать предложение, чтение которого Вы уже заканчиваете.
- В этой фразе два раза встречается слово «в», два раза встречается слово «этой», два раза встречается слово «фразе», четырнадцать раз встречается слово «встречается», четырнадцать раз встречается слово «слово», шесть раз встречается слово «раз», девять раз встречается слово «раза», семь раз встречается слово «два», три раза встречается слово «четырнадцать», три раза встречается слово «три», два

*) «Софизм» и «парадокс» — слова греческие. «Софизм» ($\sigma o\varphi\iota\sigma\mu\alpha$) означает рассуждение, формально кажущееся совершенно безупречным, но содержащее на самом деле ошибку, в результате чего конечный вывод оказывается абсурдным. Одним из наиболее известных софизмов является следующий: «То, что ты не терял, ты имеешь; ты не терял рогов, следовательно, ты их имеешь.»

В парадоксе ($\pi\alpha\rho\alpha\delta o\xi o\zeta$), наоборот, умозаключение, кажущееся неверным, противоречащим «здравому смыслу», на самом деле справедливо.

раза встречается слово «девять», два раза встречается слово «семь», два раза встречается слово «шесть».

- Only the fool would take trouble to verify that his sentence was composed of ten a's, three b's, four d's, forty-six e's, sixteen f's, four g's, thirteen h's, fifteen i's, two k's, nine l's, four m's, twenty-five n's, twenty-four o's, five p's, sixteen r's, forty-one s's, thirty-seven t's, ten u's, eight v's, eight w's, four x's, eleven y's, twenty-seven commas, twenty-three apostrophes, seven hyphens, and, last but not least, a single !
- In this sentence, the word *and* occurs twice, the word *eight* occurs twice, the word *four* occurs twice, the word *fourteen* occurs four times, the word *in* occurs twice, the word *occurs* occurs fourteen times, the word *sentence* occurs twice, the word *seven* occurs twice, the word *the* occurs fourteen times, the word *this* occurs twice, the word *times* occurs seven times, the word *twice* occurs eight times and the word *word* occurs fourteen times.
- Это предложение содержит двенадцать слов, двадцать шесть слогов и семьдесят три буквы.
- Когда за этим предложением не наблюдают, оно написано по-немецки.
- .иксбара-оп тюатич, овелан аварпс, кат оннемИ
- Девять слов назад это предложение ещё не началось.
- Это предложение состояло бы из десяти слов, если бы оно было на пять слов короче.
- Если бы это предложение не существовало, кто-нибудь придумал бы его.
- Если бы я дописал это предложение,
- Определение. Душевнобольным называется душевнобольной, вступивший в конфликт с обществом.
  (Из учебника психиатрии.)
- Как выглядело бы это предложение, если бы π равнялось 3?[*)]
- Где бы Вы ни встретили это предложение, уничтожьте его.
- Этот принцип настолько всеобъемлющ, что никакое частное его применение невозможно.

[*)] Заметьте, в мире, где π *действительно* равно 3, Вы сказали бы не «если бы $\pi = 3$», а «если бы $\pi = 2$» или «если бы $\pi \neq 3$». Впрочем, изменить π — значит глубочайшим образом изменить и всю математику, и весь мир. Пожалуй, ни понятие «предложение», ни «3» не выдержали бы такого потрясения.

- То, что я Вам сейчас предсказываю, сбудется.
- Вы меня помните? Я — тот самый человек, который не произвёл на Вас никакого впечатления.
- Почему все неприятности происходят в самое неподходящее время?
- Не напоминает ли это предложение о Пушкине?
- Представьте, что на последней, 500-й странице книги напечатано:

Опечатки

с. 500: Вместо «Опечатки» следует читать «Опечатка».

- *(Случай на экзамене.)* Билет включал в себя следующее: *"Напишите вопрос, подходящий для выпускного экзамена по этому курсу, а затем ответьте на него."*

  Для ответа достаточно дважды переписать этот вопрос!
- К переводу своей статьи Литлвуд написал примечания:

  Я весьма благодарен профессору Риссу за перевод этой статьи.
  Я также благодарю профессора Рисса за перевод последнего предложения.
  Я также благодарю профессора Рисса за перевод последнего предложения.

  Почему этот ряд благодарностей не нужно продолжать?

Самоотрицание

Плюрализм нужен нашей стране как воздух, и двух мнений об этом быть не может.
М. С. Горбачёв[*)]

- Лозунг *Короче!* сам следует тому, к чему призывает. А вот приказ *Не сметь командовать!* противоречит сам себе.
- Самозванцев нам не надо: командиром буду я.
- Вообразите майку с надписью *На этой майке ничего не написано.*?!
- Не противоречит ли само себе правило *Нет правил без исключения.*?
- Не слушайся меня!

[*)] Генеральный секретать ЦК КПСС, почти сумевший уничтожить коммунизм.

- Здес рровно три[†] ошибки.
- Как перевести на русский язык предложение "It's difficult to translate this English sentence into Russian"[‡]?

  Наверно, так: "Это предложение трудно перевести с русского на английский."
- Я вынужден был перевести это предложение на русский язык, поскольку не сумел прочитать его в оригинале — на санскрите.

Парадокс лжеца

Не зря ли знаньем бесполезным
свой дух дремотный мы тревожим?
В тех, кто заглядывает в бездну,
она заглядывает тоже.

И. Губерман

- Ещё в Древней Греции знали «парадокс лжеца». Представьте себе, что некто говорит: *«Я лгу.»* Или представьте, что Вы читаете в книге:

  То, что здесь написано, — неправда.[*]
- В одном полку брадобрею приказали брить всех тех, кто не бреется сам. Должен ли брадобрей брить сам себя?
- Может ли Всемогущий Бог создать камень, который он сам поднять не сможет?
- Что произойдёт, если всесокрушающее пушечное ядро попадёт в несокрушимую броню?
- Каждое натуральное число можно назвать, произнеся несколько слов. Например, число 2 задаётся одним словом, а число 22 — двумя.

  Давайте рассмотрим *наименьшее число, которое нельзя задать меньше чем десятью словами.* Его описание состоит всего из 9 слов, что противоречит его основному свойству.

[†] Слово «три» — ошибка или нет?

[‡] Дословный перевод: "Трудно перевести это английское предложение на русский язык."

[*] Так что же тут написано? Если правда, то тогда — это неправда; а если неправда — то это правда!

Софизмы

- Если равны половины, то равны и целые. Полупустой стакан равен полуполному; следовательно, пустой стакан равен полному.
- Рассмотрим равенство $1 = \dfrac{2}{3-1}$. Если единицу в знаменателе заменим на $\dfrac{2}{3-1}$, то получим:

$$1 = \cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{3-1}}.$$

Повторив эту операцию по отношению к новой единице, стоящей в знаменателе, и поступая далее подобным образом, мы построим бесконечную цепную дробь:

$$1 = \cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{3 - \ldots}}}}.$$

С другой стороны, $2 = \frac{2}{3-2}$, так что

$$2 = \frac{2}{3-2} = \cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{3-2}} = \cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{3 - \ldots}}}}.$$

Построенные дроби равны! Значит, равны и числа, из которых они получены, то есть $1 = 2$. Сильный и очень важный результат, который многие учителя скрывают от своих учеников!

- Обозначим

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \ldots$$

Очевидно,

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \ldots \qquad (*)$$

Вычитая это равенство из предыдущего, получаем:

$$S - \frac{S}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \ldots \qquad (**)$$

Поскольку $\frac{1}{2} < 1$, $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$, $\frac{1}{6} < \frac{1}{5}$, $\frac{1}{8} < \frac{1}{9}$, и вообще, $\frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1}$, то каждое слагаемое правой части формулы $(*)$ меньше соответствующего слагаемого формулы $(**)$. Следовательно,

$$\frac{S}{2} < S - \frac{S}{2},$$

что удивительно.

Потешные истории

Я спорю искренне и честно,
я чистой истины посредник,
и мне совсем не интересно,
что говорит мой собеседник.
И. Губерман

- Крестьянин шёл по дороге со своим сыном. Сын рассказывал что-то отцу и сказал ему неправду. Крестьянин догадался, что сын обманывает его. Тогда он сказал: "Сейчас, сынок, мы подходим к мосту. Этот мост не простой, а волшебный — он проваливается под теми, кто говорит неправду." Когда сын услышал это, он испугался и признался отцу, что обманул его. Хотите узнать, что было дальше? А дальше крестьянин со своим сыном вступили на мост, и мост провалился под крестьянином — *ведь никаких волшебных мостов на самом деле не бывает*.
- *(Юридический казус.)* Встретились в пустыне три путника. Двое, не сговариваясь, решили убить третьего. Ночью один из них отравил его воду, а другой (не зная о том!), проколол бурдюк с водой так, что вода вскорости вытекла и бедняга погиб от жажды.

  Кто убийца? В суде второй утверждал, что благодаря нему третий прожил даже дольше, чем если бы он выпил отраву. А отравитель оправдывался тем, что весь яд вытек и никак не повредил жертве.
- При строительстве моста через Неву несколько тысяч человек были заняты бойкою свай, что, не говоря уже о расходах, чрезвычайно замедляло работы. Искусный строитель генерал Корбец выдумал машину, значительно облегчившую и ускорившую этот труд. Сделав опыты, описание машины он представил Главноуправляющему путей сообщения и получил на бумаге официальный и строжайший *выговор:* зачем он этой машины прежде не изобрёл и тем ввёл казну в огромные и напрасные расходы.
- Начальник зырянского узла связи Ляпунов пожаловался в милицию: "Джемилев нарушает правила ведения междугородных разговоров ... Он утверждает, что мы подслушиваем его переговоры. Прошу разъяснить Джемилеву, что его действия носят оскорбительный характер, а подобные утверждения являются клеветой." В обоснование своей жалобы Ляпунов прилагает докладную телефонистки Пенягиной с изложением содержания разговора Джемилева. («Хроника текущих событий», 1980 г.)

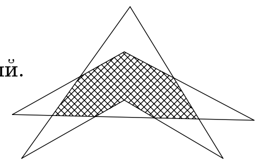
Ответы, указания, решения

Легко незаметно украсть карманные часы.
Настольные — сложнее. А фортепиано незаметно
украсть мне не удалось.
(Из воспоминаний карманника)

2. Крышка квадратного люка могла бы провалиться в него.

11. 14 девочек и Миша.

13. Груша (плод, который висит на дереве) и груша (дерево, на котором растут похожие на электрическую лампочку плоды, которые можно скушать) одинаково звучат по-русски, но не по-венгерски. Окончание k означает множественное число, а добавление букв fa превращает яблоко в яблоню, берёзовую серёжку — в березу, и вообще, плод — в дерево, на котором этот плод растёт.



21. Завтракали дед, его сын и внук.

22. Один кошелёк внутри другого.

24. Перелейте воду из второго стакана в пятый.

26. Двоеточие после слова «двадцать».

27. Лестница поднимается вместе с кораблём.

28. Большой зелёный подземный камнеед.

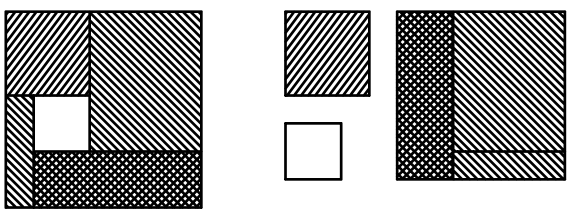
30. Разделите по вертикали фигурки пополам и вспомните, как пишут индекс на почтовом конверте.

31. Министр может вытащить листок бумаги и, не глядя, сжечь его. Поскольку на оставшемся листке написано «Уходите», королю придётся признать, что на уничтоженном листке было слово «Останьтесь».

33. 8 (см. рис.).

34. Может. Отец сына — это муж; профессор — женщина.

42.



93. Николай Петрович поймал 5 рыб.

100. Начинающий может победить при любом начальном положении короля. Суть стратегии в следующем. Подсчитаем число вертикальных ходов, которыми король может с исходного поля дойти до нижней (первой) горизонтали, а также количество «прямых» ходов, которыми король может дойти до верхней (восьмой) горизонтали. Поскольку сумма этих чисел равна $8 - 1 = 7$, то одно из них нечётно.

Пусть, для определённости, надо сделать нечётное число ходов, чтобы дойти до нижней горизонтали. Тогда первый игрок может пойти прямо вниз; номер горизонтали уменьшится на 1 и из чётного станет нечётным. Что делать второму? Если он сделает горизонтальный ход или вернётся диагональным ходом на исходную горизонталь, то первый игрок сразу сможет выиграть. Поэтому второй игрок будет вынужден сделать вертикальный или диагональный ход, спустившись ещё ниже.

В ответ первый игрок опять может пойти вертикально вниз. Второму, чтобы не проиграть, опять придётся опустить короля ещё ниже, и так будет продолжаться до того, как после очередного хода первого игрока король попадёт на нижнюю горизонталь. Тогда второму игроку придётся сделать горизонтальный ход или поднять короля по диагонали вверх, после чего первый игрок побеждает, ставя короля на ранее пройденное поле.

Заметим, что если бы размеры доски были иными (например, 9×9), то не каждое исходное положение короля приносило бы выигрыш тому, кто делает первый ход: 16 полей (подумайте, какие именно) были бы выигрышными для второго игрока.

106. 0 или 1000. **137.** Разрежьте доску на 4 доски 4×4 и на каждой из них в углу разместите 8 коней в виде квадрата 3×3.

181. Разобьём доску на 16 квадратиков 2×2 и покрасим их в разные цвета. Докажем, что больше 16 цветов получить нельзя. Рассмотрим клетку любого цвета. Рядом с ней есть ещё две клетки того же цвета. Эти две клетки имеют только одну соседнюю клетку того же цвета (среди рассмотренных), поэтому есть ещё одна клетка такого же цвета. Итак, каждого цвета не меньше четырёх клеток, а следовательно, цветов не больше 16.

194. За 10 часов. **196.** 3 часа 45 минут. **200.** В 2,5 раза. Если бы всё время копали все трое, то они выкопали бы $1 + 3 \cdot 0,5 = 2,5$ канавы.
214. Вспомните признак делимости на 9 и заметьте, что 100! делится на 9.

223. Вопрос может звучать так: «Верно ли, что и Алёше Поповичу, и Добрыне Никитичу досталось хотя бы по одной серебряной монете?» Если ответ утвердительный, то обе монеты Ильи Муромца — золотые. Если отрицательный, то Илье достались две серебряные монеты. А если Илья не сможет ответить ни «да», ни «нет», то он получил за службу золотую и серебряную монеты.

Можно было задать и другие вопросы, например:
— Верно ли, что хотя бы одному из двух других богатырей достались две серебряные монеты?
— У тебя больше золотых монет, чем у Алёши Поповича?
— Если я заберу одну из твоих монет и дам вместо неё золотую, то станет ли у тебя больше золотых? (Заметьте, что в этом вопросе не упомянуты монеты, доставшиеся двум другим богатырям!)

228. Ответ для n домов: можно построить $2n-1$ заборов. В самом деле, если дом один, то можно построить только один забор, что соответствует формуле $2 \cdot 1 - 1 = 1$. Дальше применим индукцию. Если для $k = 1, 2, \ldots, n-1$ домов формула $2k-1$ уже проверена, то рассмотрим n домов, вокруг которых построено максимально возможное количество заборов. Какой-то один забор огораживает все дома. Если этот внешний забор снести, то самыми внешними станут некоторые два забора. Пусть внутри одного из них будет k домов, а внутри другого — остальные $n-k$ домов. В силу предположения индукции вокруг k домов может быть построено не больше $2k-1$ заборов, а вокруг остальных $n-k$ домов — не больше, $2(n-k)-1$ заборов. Значит, всего заборов не более $(2k-1)+(2(n-k)-1)+1 = 2n-1$, что и требовалось доказать.

248. Назовём одну из точек *корнем.* Сопоставим каждой из остальных вершин последний отрезок (единственного по условию) пути, ведущего в эту точку из корня. Это соответствие между $N-1$ вершинами и отрезками взаимно-однозначное. Чтобы сделать это очевидным, удобно расставить на отрезках стрелки, ведущие от корня: в каждую точку, кроме вершины, ведёт одна стрелка.

Задачу можно решить также по индукции: удаляя любой лист[*)] дерева[†)], мы одновременно удаляем одно ребро. (Строго говоря, надо ещё доказать, что деревьев без листьев не бывает. Для этого рассмотрим граф, в котором из каждой вершины исходит не менее 2 рёбер. Из его вершины A_1 пройдём по ребру в A_2. Из A_2 выходит более одного ребра, поэтому можно пройти в вершину $A_3 \neq A_1$, из неё — в $A_4, \ldots$ Поскольку число вершин графа конечно, рано или поздно образуется цикл.)

250. 63 спички. **257.** Пальцы будут повторяться с периодом 8, поэтому достаточно рассмотреть остаток от деления 2001 на 8. Первым идёт указательный палец.

272. Рассмотрите числа 1, a, a^2, ..., a^m. Поскольку остатков от деления на m всего лишь m, то какие-то два из рассматриваемых чисел дают одинаковые остатки при делении на m. Разность этих чисел делится на m.

275. $2 \cdot 5 = 10$.

276. Белую ладью можно поставить на любую из 64 клеток. Независимо от своего расположения она бьёт 15 полей (включая поле, на котором она стоит). Поэтому остаётся 49 полей, на которые можно поставить чёрную ладью. Таким образом, всего есть $64 \cdot 49 = 3136$ разных способов.

277. Белого короля можно поставить на любое из 64 полей. Однако

[*)] Лист — это вершина, из которой исходит единственное ребро.

[†)] Дерево — это связный граф без циклов, то есть граф, в котором от любой вершины можно дойти, двигаясь по рёбрам, до любой другой вершины, причём единственным способом, если ни разу не возвращаться назад.

количество полей, которые он при этом будет бить, зависит от его расположения. Поэтому разберём три случая:

- если белый король стоит в углу (углов всего 4), то он бьёт 4 поля (включая то, на котором стоит) и остаётся 60 полей, на которые можно поставить чёрного короля;
- если белый король стоит на краю доски, но не в углу (таких полей — 24), то он бьёт 6 полей, и для чёрного короля остаётся 58 возможных полей;
- если же белый король стоит не на краю доски (таких полей — 36), то он бьёт 9 полей, и для чёрного короля остаётся 55 возможных полей.

Таким образом, всего есть $4 \cdot 60 + 24 \cdot 58 + 36 \cdot 55 = 3612$ способов.

283. Перейдём к дополнительным событиям: свет был включен 20% времени, музыка молчала 10%, а дождь не шёл 50% времени, так что дополнительные события не могли занять более $20 + 10 + 50 = 80\,\%$ времени. Следовательно, музыка под дождём в темноте звучала не меньше $100 - 80 = 20\,\%$ времени.

285. Добавьте к тем и другим числа, кратные и 8, и 9. Останется сравнить количество чисел, кратных 8 $\left(\left[\frac{1993}{8}\right] = 249\right)$, с количеством чисел, кратных 9 $\left(\left[\frac{1993}{9}\right] = 221\right)$.

287. Количество шестизначных чисел, в записи которых встречаются только нечётные цифры, равно $5^6 = 15\,625$. Всего шестизначных чисел $900\,000$. Поэтому количество шестизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна чётная цифра, равно $900\,000 - 15\,625 = 884\,375$.

291. 10. Выпишем все цифры в порядке убывания: 9876543210. Чтобы получить девятизначное число, нужно убрать одну цифру. Это можно сделать 10 способами.

1			20			13	
	2		21		12		
		3	22	11			
14	15	16	4	17	18	19	27
		10	23	5			
	9		24		6		
8			25			7	
			26				28

303. Да, могло. Например, если в исходном проекте было 5 подъездов, 4 этажа, а на каждом этаже — по одной квартире: $5 \cdot 4 = 20$, $3 \cdot 7 = 21$, $1 \cdot 10 = 10$.

319. $203 = 7 \cdot 29 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1$ (всего $203 - 7 - 29 = 167$ единиц).

327. Отношение стоимости тугрика к стоимости динара $14 : 11$, динара к рупии $22 : 21$, рупии к талеру $3 : 10$, талера к кроне $5 : 2$. Перемножьте эти дроби. **332.** Посмотрите на рисунок.

Содержание