В. И. СМИРНОВ

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ТОМ ЧЕТВЕРТЫЙ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ИЗДАНИЕ ШЕСТОЕ
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия для студентов
механико математических и физико математических
факультетов университетов*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА 1974

517
С 50
УДК 510 (022)

Владимир Иванович Смирнов
Курс высшей математики, том четвертый, часть первая

М., 1974 г., 336 стр. с илл.

Редактор *А. С. Чистопольский*
Техн. редактор *К. Ф. Брудно* Корректор *В. П. Сорокина*

Сдано в набор 18/IX 1973 г. Подписано к печати 11/I 1974 г. Бумага 60×90¹/₁₆, тип № 3.
Физ печ. л. 21. Условн. печ. л. 21. Уч.-изд. л. 20,43.
Тираж 50 000 экз. Цена книги 88 коп.
Заказ № 1021.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Гатчинская ул., 26.

С $\frac{20203-127}{053(02)-74}$ 21-74

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА II

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ГЛАВА III

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ L_1 И L_2. ОБОБЩЕННЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ. ПРОБЛЕМА МИНИМУМА КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА

ПРЕДИСЛОВИЕ К ШЕСТОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящее шестое издание четвертого тома существенно отличается от пятого издания. Это связано с тем, что четвертый том впервые печатается после изменения второго тома, в котором изложена теория интеграла Лебега и класс L_2 функций, интегрируемых с квадратом по Лебегу. Это повлекло изменение изложения первой главы IV тома — теории интегральных уравнений. Кроме того, добавлена третья глава, содержащая изложение новых точек зрения на некоторые основные понятия математического анализа. Вторая глава (вариационное исчисление) несколько расширена. В третьей главе уже с новых точек зрения рассмотрена задача о минимуме квадратичного функционала.

В предыдущем издании четвертый том содержал более 800 страниц. В настоящем издании его пришлось разбить на две части, и настоящая книга является первой его частью.

В заключение я приношу глубокую благодарность моим сотрудникам по университету М. Ш. Бирману, О. А. Ладыженской, М. З. Соломяку и Н. Н. Уральцевой за большую помощь при составлении этой книги.

В. Смирнов

ГЛАВА I

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Примеры составления интегральных уравнений. Интегральным уравнением называется всякое уравнение, содержащее искомую функцию под знаком интеграла. Пусть ищется решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$. Мы видели раньше [II; 51], что эта задача сводится к решению интегрального уравнения:

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx + y_0.$$

Совершенно так же задача интегрирования дифференциального уравнения порядка $y'' = f(x, y)$ с начальными данными $y(x_0) = y_0$; $y'(x_0) = y_0'$ приводится к интегральному уравнению

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f[z, y(z)]\, dz + y_0 + y_0'(x - x_0).$$

Преобразуя двукратный интеграл в простой [II; 17], можем переписать это уравнение в следующем виде:

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} (x - z) f[z, y(z)]\, dz + y_0 + y_0'(x - x_0).$$

Общее решение уравнения $y'' = f(x, y)$ получится из интегрального уравнения

$$y(x) = \int_{0}^{x} (x - z) f[z, y(z)]\, dz + c_1 + c_2 x, \tag{1}$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные, а нижний предел интегрирования мы положили равным нулю. Рассмотрим теперь для нашего уравнения второго порядка предельную задачу, а именно, будем искать решение уравнения, удовлетворяющее предельным условиям $y(0) = a$; $y(l) = b$. Полагая в уравнении (1) сначала

$x=0$, а потом $x=l$, получим два уравнения для определения произвольных постоянных, которые дадут нам

$$c_1=a;\ c_2=\frac{b-a}{l}-\frac{1}{l}\int_0^l (l-z)\,f[z,\ y(z)]\,dz.$$

Подставляя найденные значения в формулу (1), приведем нашу предельную задачу к интегральному уравнению:

$$y(x)=F(x)+\int_0^x (x-z)\,f[z,\ y(z)]\,dz-\frac{x}{l}\int_0^l (l-z)\,f[z,\ y(z)]\,dz, \qquad (2)$$

где

$$F(x)=a+\frac{b-a}{l}x.$$

Мы можем переписать уравнение (2) в следующем виде:

$$y(x)=F(x)-\int_0^x \frac{z(l-x)}{l}\,f[z,\ y(z)]\,dz-$$

$$-\int_x^l \frac{x(l-z)}{l}\,f[z,\ y(z)]\,dz. \qquad (3)$$

Введем функцию двух переменных:

$$K(x,\ z)=\begin{cases} \dfrac{z(l-x)}{l} & \text{при} \quad z\leqslant x, \\ \dfrac{x(l-z)}{l} & \text{при} \quad x\leqslant z. \end{cases} \qquad (4)$$

Уравнение (3) может быть переписано при помощи этой функции следующим образом:

$$y(x)=F(x)-\int_0^l K(x,\ z)\,f[z,\ y(z)]\,dz. \qquad (5)$$

Применим полученные результаты к линейному уравнению

$$y''+p(x)\,y=\omega(x). \qquad (6)$$

Мы можем утверждать, что задача нахождения решения этого уравнения при предельных условиях

$$y(0)=a;\quad y(l)=b \qquad (7)$$

равносильна нахождению функции $y(x)$ из линейного интегрального уравнения.

$$y(x)=F_1(x)+\int_0^l K(x,\ z)\,p(z)\,y(z)\,dz, \qquad (8)$$

где

$$F_1(x) = F(x) - \int_0^l K(x, z)\,\omega(z)\,dz$$

есть известная функция независимой переменной x.

Отметим, что в уравнении (1) верхний предел интегрирования переменный, тогда как в уравнении (8) оба предела интегрирования постоянны. Отметим еще, что как в уравнении (1), так и в уравнении (8) искомая функция входит не только под знак интеграла, но и вне знака интеграла. Это обстоятельство, как мы видели выше [II; 50], является существенным при применении к решению уравнения метода последовательных приближений.

Умножим коэффициент $p(x)$ в уравнении (6) на некоторый параметр λ и рассмотрим однородное уравнение

$$y'' + \lambda p(x)\,y = 0 \tag{9}$$

при однородных предельных условиях:

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0. \tag{10}$$

Эта однородная предельная задача приведет нас к однородному интегральному уравнению, содержащему параметр λ:

$$y(x) = \lambda \int_0^l K(x, z)\,p(z)\,y(z)\,dz. \tag{11}$$

Одним из основных вопросов в дальнейшем будет вопрос о том, при каких значениях параметра λ поставленная задача имеет решения, не равные тождественно нулю. Мы уже встречались с этой задачей раньше при применении метода Фурье к предельным задачам математической физики. Отметим еще некоторые характерные свойства функции $K(x, z)$, которая называется *ядром* нашего интегрального уравнения. Это ядро — непрерывная функция в квадрате k_0, определяемом неравенствами $0 \leqslant x \leqslant l$ и $0 \leqslant z \leqslant l$. На диагонали этого квадрата, т. е. при $x = z$, первая производная от ядра терпит разрыв:

$$K_x(x, z)\,|_{x=z+0} - K_x(x, z)\,|_{x=z-0} = -1.$$

Далее, упомянутое ядро, как функция от x, вне диагонали есть решение однородного уравнения $y'' = 0$, удовлетворяющее однородным предельным условиям (10). Отметим, наконец, свойство симметрии ядра, выражаемое равенством

$$K(z, x) = K(x, z). \tag{12}$$

Все эти свойства ядра непосредственно вытекают из формулы (4).

Ядро $K(x, z)$ имеет простой физический смысл. Напомним, что при действии сосредоточенной силы в точке $x = z$ на струну,

закрепленную на концах, мы должны иметь в точке приложения силы условие [II; 176]:

$$T_0\left[(u_x)_{x=z+0}-(u_x)_{x=z-0}\right]=-P,$$

где P — величина действующей силы. Нетрудно проверить, что функция

$$u(x)=\frac{P}{T_0}K(x,\ z)$$

дает форму статического прогиба струны под влиянием упомянутой выше сосредоточенной силы. Отметим при этом, что уравнение колебаний струны в статическом случае сводится просто к уравнению $u_{xx}=0$. Все эти идеи приведения предельной задачи к интегральному уравнению, изложенные нами здесь для простейшего случая, будут подробно развиты во 2-й части тома.

Укажем еще на один характерный метод приведения предельных задач математической физики к интегральному уравнению. Мы определили раньше потенциал сферического слоя следующей формулой:

$$u(M)=\iint\limits_S\frac{\rho(M')}{d}\,ds,$$

где $\rho(M')$ — заданная на поверхности сферы S функция, ds — элемент площади поверхности сферы и d — расстояние от переменной точки пространства M до переменной точки M' поверхности сферы. Пусть n — направление нормали в некоторой точке M_0 сферы. Обозначим через $\left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial n}\right)_i$ и $\left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial n}\right)_e$ предельные значения, которые имеет производная $\frac{\partial u(M)}{\partial n}$ при приближении переменной точки M пространства к точке M_0 изнутри или извне сферы. Мы вывели раньше [III$_2$; 139] следующие формулы:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial n}\right)_i&=-\iint\limits_S\rho(M')\frac{\cos\omega}{d^2}\,ds+2\pi\rho(M_0),\\ \left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial n}\right)_e&=-\iint\limits_S\rho(M')\frac{\cos\omega}{d^2}\,ds-2\pi\rho(M_0),\end{aligned}\tag{13}$$

где d — расстояние от точки M_0 до переменной точки M' сферы и ω — угол, образованный радиусом-вектором $M'M_0$ с направлением n.

В следующей главе мы увидим, что эти формулы справедливы не только для сферы. Поставим теперь внутреннюю задачу Неймана для сферы, т. е. положим, что ищется функция, гармони-

ческая внутри сферы, нормальная производная которой имеет заданные предельные значения на поверхности сферы:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f(M_0). \tag{14}$$

Будем искать функцию u в виде потенциала сферического слоя. Этот потенциал является гармонической функцией внутри сферы, и нам надо только подобрать плотность $\rho(M')$ этого потенциала так, чтобы удовлетворялось и предельное условие (14). Принимая во внимание первую из формул (13) и предельное условие (14), мы получаем для определения искомой плотности следующее интегральное уравнение:

$$2\pi\rho(M_0) = f(M_0) + \iint\limits_S \rho(M')\frac{\cos\omega}{d^2}\,ds.$$

Заметим, что в данном случае функции $f(M)$ и $\rho(M)$ должны быть определены на поверхности сферы, и интегрирование производится не по интервалу оси OX, как это было выше, а по поверхности сферы.

2. Классификация интегральных уравнений. Будем рассматривать пока линейные интегральные уравнения лишь для того случая, когда искомая функция должна быть определена на оси OX. Напишем интегральное уравнение

$$y(x) = \int_a^x K(x, z)\,y(z)\,dz + f(x), \tag{15}$$

где $y(x)$ — искомая функция, а $f(x)$ и $K(x, z)$ — заданные функции. Функция $K(x, z)$, как мы уже упоминали, называется *ядром интегрального уравнения.*

Написанное уравнение называется *уравнением Вольтерра второго рода.* Аналогичное уравнение с постоянными пределами

$$y(x) = \int_a^b K(x, z)\,y(z)\,dz + f(x) \tag{16}$$

называется *уравнением Фредгольма второго рода.* Если искомая функция входит только под знак интеграла, то мы получаем уравнения Вольтерра или Фредгольма *первого рода.* Они имеют вид

$$\int_a^x K(x, z)\,y(z)\,dz = f_1(x); \qquad \int_a^b K(x, z)\,y(z)\,dz = f_1(x). \tag{17}$$

Примером уравнения Вольтерра первого рода является уравнение Абеля, о котором мы говорили раньше **[II; 82]**:

$$\varphi(h) = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^h \frac{u(y)\,dy}{\sqrt{h-y}}.$$

Дадим пример уравнения Фредгольма первого рода. Пусть $u(x)$ есть статический прогиб струны при наличии непрерывно распределенной нагрузки $p(z)$, рассчитанной на единицу длины. Будем рассматривать эту непрерывно распределенную нагрузку как сумму сосредоточенных нагрузок $p(z)\,dz$. От каждой такой сосредоточенной нагрузки мы получаем, согласно сказанному в предыдущем параграфе, статический прогиб вида:

$$\frac{1}{T_0} K(x, z)\, p(z)\, dz,$$

где $K(x, z)$ определяется формулой (4). Интегрируя, получим статический прогиб при непрерывно распределенной нагрузке:

$$u(x) = \frac{1}{T_0} \int_0^l K(x, z)\, p(z)\, dz.$$

Это уравнение является интегральным уравнением Фредгольма первого рода, если задан прогиб $u(x)$ и ищется соответствующая нагрузка $p(z)$.

Отметим, что уравнение Вольтерра является частным случаем уравнения Фредгольма. Действительно, в уравнении Вольтерра мы можем интегрировать по z от $z=a$ до $z=b$, если предварительно доопределить ядро $K(x, z)$ условием $K(x, z)=0$ при $z>x$.

Мы будем заниматься в дальнейшем почти исключительно уравнениями второго рода, главным образом уравнениями Фредгольма второго рода. Именно эти уравнения встречаются наиболее часто при решении предельных задач математической физики. Теория интегральных уравнений второго рода значительно проще теории уравнений первого рода. Как мы уже упоминали выше, наличие искомой функции вне знака интеграла дает нам естественную возможность применения метода последовательных приближений.

Теория интегральных уравнений во многом аналогична вопросам линейной алгебры, которые мы излагали в т. III. Напомним, что линейное преобразование в n-мерном пространстве имеет вид

$$y_i = a_{i1}u_1 + \ldots + a_{in}u_n \qquad (i=1, \ldots, n),$$

и осуществляется матрицей, образованной коэффициентами a_{ik} написанного преобразования. Иначе это преобразование мы записывали в виде:

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{u},$$

где $\boldsymbol{u}(u_1, \ldots, u_n)$ — первоначальный вектор, $\boldsymbol{y}(y_1, \ldots, y_n)$ — преобразованный вектор и A — матрица, составленная из коэффициентов a_{ik}. В случае интегральных уравнений вместо вектора n-мерного пространства мы имеем функции, определенные обычно в некотором промежутке $[a, b]$. Вместо матрицы коэффициентов a_{ik} имеем

ядро $K(x, z)$ и вместо суммирования имеем процесс интегрирования, так что в рассматриваемом случае линейное преобразование выражается формулой

$$y(x) = \int_a^b K(x, z)\, u(z)\, dz, \tag{18}$$

где $u(z)$ — первоначальная функция и $y(x)$ — преобразованная функция.

Напомним далее, что собственными значениями матрицы A мы называли такие значения параметра μ, при которых уравнение

$$Ax = \mu x$$

имеет решения x, отличные от нуля. В дальнейшем будем называть собственными значениями ядра $K(x, z)$ или соответствующего преобразования такие значения параметра μ, при которых однородное интегральное уравнение

$$\int_a^b K(x, z)\, y(z)\, dz = \mu y(x)$$

имеет решения, не равные тождественно нулю. В теории интегральных уравнений наряду с собственными значениями μ принято рассматривать *характеристические* значения $\lambda = \mu^{-1}$. Таким образом, λ называется характеристическим значением, если уравнение

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, z)\, y(z)\, dz \tag{19}$$

имеет ненулевые решения. Сами эти решения $y(x)$ называют собственными функциями ядра.

Отметим еще, что тождественное преобразование, при котором функции $u(x)$ соответствует та же функция $u(x)$ [т. е. такое преобразование, при котором $y(x)$ совпадает с $u(x)$], не выражается в интегральной форме (18).

При изложении теории интегральных уравнений мы должны будем сделать, естественно, некоторые предположения относительно ядра $K(x, z)$, а также функций $f(x)$ и $y(x)$.

Пока, как мы уже упоминали, будем заниматься интегральными уравнениями в одномерном случае. Пути перехода к многомерному случаю будут указаны ниже.

Отметим, наконец, что в дальнейшем мы будем считать заданные и искомые функции комплексными:

$$K(x, z) = K_1(x, z) + K_2(x, z)\, i,$$
$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)\, i,$$
$$y(x) = y_1(x) + y_2(x)\, i,$$

где $K_s(x, z)$, $f_s(x)$, $y_s(x)$ $(s = 1, 2)$ — вещественные функции. Независимая переменная всегда вещественна. В дальнейшем мы часто

будем иметь дело с конечным замкнутым промежутком. Такой промежуток мы будем обозначать символом $[a, b]$.

3. Ортогональные системы функций. В теории интегральных уравнений нам часто придется иметь дело с ортогональными системами функций. Теория таких систем подробно изложена в томе II для вещественных и комплексных функций с использованием как интеграла Римана, так и Лебега [**II**; **160, 163**]. Здесь мы дополним эту теорию указанием на процесс ортогонализации систем линейно-независимых функций.

В [**III**$_1$; **31**] мы видели, что если имеется m линейно-независимых векторов, то всегда можно построить столько же попарно ортогональных и нормированных векторов так, что прежние векторы выражаются линейно через новые, и наоборот. Весь этот процесс дословно переносится и на функции. Пусть

$$\psi_1(x), \ldots, \psi_m(x)$$

— функции, непрерывные в $[a, b]$ и линейно-независимые, т. е. тождественное соотношение

$$\alpha_1\psi_1(x) + \ldots + \alpha_m\psi_m(x) \equiv 0$$

с постоянными коэффициентами α_k имеет место только в том случае, если все коэффициенты равны нулю. Построим новые функции, ортогональные и нормированные в $[a, b]$:

$$\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x),$$

так что $\varphi_k(x)$ выражается линейно через $\psi_1(x), \ldots, \psi_k(x)$ и, наоборот, всякое $\psi_k(x)$ выражается линейно через $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)$. Для краткости письма введем обозначение, аналогичное тому, которым мы уже пользовались в алгебре, а именно, обозначим через (f, F) интеграл от произведения $f(x)\overline{F(x)}$ по промежутку $[a, b]$:

$$(f, F) = \int_a^b f(x)\overline{F(x)}\,dx.$$

Процесс ортогонализации функций $\psi_k(x)$, т. е. процесс построения функций $\varphi_k(x)$, совершается следующим образом:

$$\varphi_1(x) = \frac{\psi_1(x)}{\sqrt{(\psi_1, \psi_1)}}$$

$$\chi_2(x) = \psi_2(x) - (\psi_2, \varphi_1)\varphi_1(x); \qquad \varphi_2(x) = \frac{\chi_2(x)}{\sqrt{(\chi_2, \chi_2)}}$$

$$\chi_3(x) = \psi_3(x) - (\psi_3, \varphi_2)\varphi_2(x) - (\psi_3, \varphi_1)\varphi_1(x); \qquad \varphi_3(x) = \frac{\chi_3(x)}{\sqrt{(\chi_3, \chi_3)}}$$

. . . . . .

$$\chi_m(x) = \psi_m(x) - (\psi_m, \varphi_{m-1})\varphi_{m-1}(x) - \ldots - (\psi_m, \varphi_1)\varphi_1(x);$$

$$\varphi_m(x) = \frac{\chi_m(x)}{\sqrt{(\chi_m, \chi_m)}}.$$

Функции $\varphi_k(x)$ отличаются от $\chi_k(x)$ лишь численным множителем, который добавляется к функции $\chi_k(x)$ для того, чтобы сделать эту функцию нормированной, т. е. для того, чтобы интеграл от ее квадрата по промежутку $[a, b]$ был равен единице. Из написанных формул непосредственно вытекает та линейная зависимость между $\psi_k(x)$ и $\varphi_k(x)$, о которой мы говорили выше. Заметим еще, что ни одна из функций $\chi_k(x)$ не может обратиться тождественно в нуль, так что $(\chi_k, \chi_k) \neq 0$, ибо если бы, например, мы имели $\chi_2(x) \equiv 0$, то это привело бы нас к линейной зависимости между $\varphi_1(x)$ и $\psi_2(x)$:

$$\psi_2(x) - (\psi_2, \varphi_1)\varphi_1(x) \equiv 0,$$

что сводится в линейной зависимости между $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$, а это противоречит предположенной линейной независимости функций $\psi_k(x)$. Из установленного сразу же следует, что $(\chi_k, \chi_k) \neq 0$, так как в противном случае должно было бы быть $\chi_k \equiv 0$. Таким образом, все формулы, по которым определяются функции φ_k, имеют смысл, ортогональность функции $\chi_k(x)$ к уже построенным функциям $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{k-1}(x)$ может быть проверена последовательно. Например,

$$(\chi_2, \varphi_1) = (\psi_2, \varphi_1) - (\psi_2, \varphi_1)(\varphi_1, \varphi_1) = (\psi_2, \varphi_1) - (\psi_2, \varphi_1) = 0.$$

Имея ортогональные и нормированные $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, получим

$$(\chi_3, \varphi_1) = (\psi_3, \varphi_1) - (\psi_3, \varphi_2)(\varphi_2, \varphi_1) - (\psi_3, \varphi_1)(\varphi_1, \varphi_1) = \\ = (\psi_3, \varphi_1) - (\psi_3, \varphi_1) = 0,$$

и точно так же $(\chi_3, \varphi_2) = 0$ и т. д.

Отметим еще тот элементарный факт, что ортогональные функции всегда линейно независимы. Действительно, положим, что

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \ldots + \alpha_m\varphi_m(x) = 0.$$

Умножая обе части на $\overline{\varphi_k(x)}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ и интегрируя, получим в силу ортонормированности $\alpha_k = 0$, т. е. все коэффициенты α_k должны быть действительно равны нулю.

Во всем предыдущем изложении мы рассматривали функции одной независимой переменной. Все изложенное выше можно повторить и для функций, определенных в некоторой конечной замкнутой области на плоскости, в трехмерном или n-мерном пространстве.

Пусть P — переменная точка конечной замкнутой области B на плоскости, в трехмерном пространстве или на поверхности. Функции $\varphi_k(P)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ образуют ортонормированную систему, если

$$\int_B \varphi_p(P)\overline{\varphi_q(P)}\, d\omega_P = \begin{cases} 0 & \text{при } p \neq q, \\ 1 & \text{при } p = q, \end{cases}$$

причем, хотя мы пишем только один знак интеграла, но интеграл считается двойным, тройным или взятым по поверхности. Через $d\omega_P$ мы обозначили элемент соответствующего интеграла, взятого по переменной точке P. Например, в случае двойного интеграла в декартовых координатах мы имеем $d\omega_P = dx\,dy$.

Коэффициентами Фурье функции $f(P)$ будут

$$c_k = \int_B f(P)\,\overline{\varphi_k(P)}\,d\omega_P \tag{20}$$

и неравенство Бесселя запишется так:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leqslant \int_B |f(P)|^2\,d\omega_P. \tag{21}$$

4. Уравнения Фредгольма второго рода. Начнем с изучения уравнения Фредгольма второго рода, содержащего параметр λ, в случае одного измерения:

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s,\ t)\,\varphi(t)\,dt. \tag{22}$$

Будем предполагать, что промежуток $[a,\ b]$ конечен, $f(s)$ непрерывна в нем и ядро $K(s,\ t)$ — непрерывная функция в квадрате k_0, определяемом неравенствами: $a \leqslant s \leqslant b$, $a \leqslant t \leqslant b$. При этих предположениях все те преобразования, которые мы будем делать в дальнейшем, допустимы, и мы будем обращать все внимание на принципиальную сторону вопроса. Функции $f(s)$ и $K(s,\ t)$ будем считать комплексными, если не оговорена особо их вещественность:

$$K(s,\ t) = K_1(s,\ t) + iK_2(s,\ t);$$
$$f(s) = f_1(s) + if_2(s);\quad \varphi(s) = \varphi_1(s) + i\varphi_2(s).$$

Решение будем искать в классе непрерывных функций. Затем мы исследуем интегральные уравнения с полярным ядром специального вида. В случае одного независимого переменного — это уравнения вида

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b \frac{L(s,\ t)}{|s-t|^{\alpha}}\,\varphi(t)\,dt \qquad (0 < \alpha < 1),$$

где $L(s,\ t)$ непрерывна в k_0; будем искать непрерывные решения, считая $f(s)$ непрерывной. В двумерном случае

$$\varphi(P) = f(P) + \lambda \iint_B \frac{L(P,\ Q)}{r^{\alpha}(P,\ Q)}\,\varphi(Q)\,dx\,dy,$$

где $0 < \alpha < 2$, $r(P,\ Q)$ — расстояние между точками P и Q, принадлежащими B, и интегрирование производится по точке Q.

Аналогичный вид имеют уравнения с полярным ядром в трехмерной области, на поверхности и вообще n-мерной области.

После этого, используя интеграл Лебега, мы рассмотрим интегральные уравнения в классе L_2 [II; 161] при предположениях, которые будут уточнены в дальнейшем.

Рассмотрим «интегральное преобразование» («интегральный оператор»)

$$\psi(s)=\int_a^b K(s,\ t)\,\varphi(t)\,dt. \tag{23}$$

В силу предполагаемой непрерывности $K(s,\ t)$ в k_0 всякая непрерывная в промежутке $[a,\ b]$ функция $\varphi(t)$ преобразуется в непрерывную функцию $\psi(s)$. Из (23) следует:

$$\psi(s+h)-\psi(s)=\int_a^b [K(s+h,\ t)-K(s,\ t)]\,\varphi(t)\,dt.$$

Считая только, что интеграл от $|\varphi(t)|^2$ имеет конечное значение и применяя неравенство Буняковского, получим

$$|\psi(s+h)-\psi(s)|^2\leqslant\int_a^b |K(s+h,\ t)-K(s,\ t)|^2\,dt\int_a^b |\varphi(t)|^2\,dt.$$

Второй множитель справа есть число, и из непрерывности $K(s,\ t)$ вытекает непрерывность $\psi(s)$, т. е. оператор (23) преобразует всякую функцию $\varphi(t)$ с указанным выше свойством в непрерывную в $[a,\ b]$ функцию $\psi(s)$. Из сказанного следует, что при непрерывности $K(s,\ t)$ и $f(s)$ естественно и решение $\varphi(s)$ искать в классе непрерывных функций.

Отметим еще, что оператор (23) «линеен», т. е. если c_i $(i=1,\ \ldots,\ m)$ — постоянные, то

$$\int_a^b K(s,\ t)\sum_{i=1}^m c_i\varphi_i(t)\,dt=\sum_{i=1}^m c_i\int_a^b K(s,\ t)\,\varphi_i(t)\,dt. \tag{24}$$

Если $f(s)\not\equiv 0$, то уравнение (22) называется неоднородным. Напишем соответствующее однородное уравнение:

$$\varphi(s)=\lambda\int_a^b K(s,\ t)\,\varphi(t)\,dt. \tag{25}$$

Оно имеет очевидное решение $\varphi(s)\equiv 0$, которое мы назовем нулевым решением. Как мы упоминали в [2], *значение* $\lambda=\lambda_0$, *при котором уравнение* (25) *имеет решения, отличные от нулевого, называется характеристическим значением ядра или соответствующего интегрального уравнения, а всякое ненулевое решение уравнения*

$$\varphi(s)=\lambda_0\int_a^b K(s,\ t)\,\varphi(t)\,dt \tag{26}$$

— *собственной функцией, соответствующей характеристическому значению* $\lambda = \lambda_0$. Отметим, что λ_0 не может быть, очевидно, равно нулю, ибо из $\lambda = 0$ следует согласно (25), что $\varphi(s) \equiv 0$. В силу линейности и однородности уравнения (25) относительно искомой функции, если $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$, ..., $\varphi_m(s)$ — собственные функции, соответствующие одному и тому же характеристическому значению $\lambda = \lambda_0$, то и функция

$$\varphi(s) = c_1\varphi_1(s) + c_2\varphi_2(s) + \ldots + c_m\varphi_m(s), \tag{27}$$

где c_l — произвольные постоянные, тоже собственная функция, соответствующая $\lambda = \lambda_0$, если только формула (27) не дает тождественно по s нуля. Если функции $\varphi_l(s)$ $(l = 1, \ldots, m)$ линейно независимы, то $\varphi(s) \equiv 0$ только в том случае, если все постоянные c_l равны нулю. Как мы покажем дальше, всякому характеристическому значению соответствует конечное число линейно независимых собственных функций $\varphi_p(s)$ $(p = 1, 2, \ldots, k)$, так что формула

$$\varphi(s) = c_1\varphi_1(s) + c_2\varphi_2(s) + \ldots + c_k\varphi_k(s), \tag{28}$$

где c_p — произвольные постоянные, не все равные нулю, дает все собственные функции, соответствующие характеристическому значению $\lambda = \lambda_0$. Обычно говорят, что функции $\varphi_p(s)$ $(p = 1, 2, \ldots, k)$ образуют *базис* решений однородного уравнения (26). Если совершить линейное преобразование базиса $\varphi_p(s)$

$$\psi_p(s) = a_{p1}\varphi_1(s) + a_{p2}\varphi_2(s) + \ldots + a_{pk}\varphi_k(s) \qquad (p = 1, 2, \ldots, k) \tag{29}$$

с определителем $\| a_{pq} \|$, отличным от нуля, то $\psi_p(s)$ образуют другой базис решений однородного уравнения. В частности, к системе функций $\varphi_p(s)$ можно применить процесс ортогонализации и тем самым можно считать, что базис образует конечную ортонормированную систему.

5. Итерированные ядра. Мы будем в дальнейшем часто иметь дело с интегральными операторами вида:

$$\psi(s) = \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt. \tag{30}$$

Для краткости часто пишут: $\psi = K\varphi$. Как мы упоминали выше, этот оператор линеен:

$$K(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1K\varphi_1 + c_2K\varphi_2, \tag{31}$$

где c_1 и c_2 — постоянные.

Пусть имеются два интегральных оператора с непрерывными ядрами:

$$v(s) = \int_a^b K(s, t)\,u(t)\,dt, \quad v_1(s) = \int_a^b L(s, t)\,u(t)\,dt. \tag{32}$$

Обозначим их символами K и L и пусть $LK[u(t)]$ или просто LKu — оператор, который получается путем последовательного применения к $u(t)$ сначала оператора K, а затем оператора L, и определим ядро этого оператора:

$$LK[u(t)] = \int_a^b L(s, t_1)\left[\int_a^b K(t_1, t)\, u(t)\, dt\right] dt_1 = \\ = \int_a^b \left[\int_a^b L(s, t_1)\, K(t_1, t)\, dt_1\right] u(t)\, dt.$$

Таким образом, ядро оператора LK определяется формулой

$$\tilde{K}(s, t) = \int_a^b L(s, t_1)\, K(t_1, t)\, dt_1. \tag{33}$$

Отметим, что ядро оператора KL определяется формулой

$$\tilde{L}(s, t) = \int_a^b K(s, t_1)\, L(t_1, t)\, dt_1, \tag{34}$$

и $\tilde{L}(s, t)$, вообще говоря, отлично от $\tilde{K}(s, t)$, т. е. оператор LK, вообще говоря, отличен от KL. Если оператор LK совпадает с KL, то говорят, что эти операторы *коммутируют*.

Введем *итерированные* ядра, соответствующие целым положительным степеням оператора K, причем основное ядро $K(s, t)$ обозначим для симметрии дальнейшего через $K_1(s, t)$:

$$K_1(s, t) = K(s, t); \quad K_n(s, t) = \int_a^b K_{n-1}(s, t_1)\, K(t_1, t)\, dt_1. \tag{35}$$

Ядро $K_n(s, t)$ есть ядро оператора K^n. В частности,

$$K_2(s, t) = \int_a^b K(s, t_1)\, K(t_1, t)\, dt_1,$$

$$K_3(s, t) = \int_a^b \int_a^b K(s, t_2)\, K(t_2, t_1)\, K(t_1, t)\, dt_1\, dt_2,$$

и вообще,

$$K_n(s, t) = \int_a^b \int_a^b \ldots \int_a^b K(s, t_{n-1})\, K(t_{n-1}, t_{n-2}) \ldots \\ \ldots K(t_2, t_1)\, K(t_1, t)\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_{n-1}.$$

Порядок квадратур здесь безразличен. Имеет место, очевидно, формула

$$K_{p+q}(s, t) = \int_a^b K_p(s, \tau)\, K_q(\tau, t)\, d\tau. \tag{36}$$

Для образования $K_p(s, \tau)$ надо выполнить $(p-1)$ квадратур, для $K_q(s, t)-(q-1)$ квадратур, и еще квадратуру по τ. Введем следующее обозначение:

$$P^2=\int_a^b\int_a^b |K(s, t)|^2\, ds\, dt, \tag{37}$$

причем $P>0$ (считается, очевидно, что $K(s, t)\not\equiv 0$). Приводя к последовательным квадратурам и обозначая для краткости

$$Q(s)=\left(\int_a^b |K(s, t)|^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}}, \quad R(t)=\left(\int_a^b |K(s, t)|^2\, ds\right)^{\frac{1}{2}},$$

получим

$$P^2=\int_a^b Q^2(s)\, ds=\int_a^b R^2(t)\, dt. \tag{38}$$

Будем последовательно определять и оценивать повторные ядра, пользуясь (35) и неравенством Буняковского **[II; 161]**:

$$|K_2(s, t)|^2=\left|\int_a^b K(s, t_1)\, K(t_1, t)\, dt_1\right|^2 \leqslant Q^2(s)\, R^2(t),$$

$$|K_3(s, t)|^2=\left|\int_a^b K_2(s, t_1)\, K(t_1, t)\, dt_1\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b Q^2(s)\, R^2(t_1)\, dt_1 \int_a^b |K(t_1, t)|^2\, dt_1,$$

откуда

$$|K_3(s, t)|^2 \leqslant Q^2(s) \int_a^b R^2(t_1)\, dt_1 \cdot R^2(t)=Q^2(s)\, R^2(t)\, P^2.$$

Далее

$$|K_4(s, t)|^2=\left|\int_a^b K_3(s, t_1)\, K(t_1, t)\, dt_1\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b Q^2(s)\, R^2(t_1)\, P^2\, dt_1 \cdot \int_a^b |K(t_1, t)|^2\, dt_1,$$

откуда

$$|K_4(s, t)|^2 \leqslant Q^2(s)\, R^2(t)\, P^4$$

и, вообще,

$$|K_{n+2}(s, t)|^2 \leqslant Q^2(s)\, R^2(t)\, P^{2n} \quad \text{или} \quad |K_{n+1}(s, t)| \leqslant Q(s)\, R(t)\, P^{n-1}$$
$$(n=1, 2, \ldots).$$

Рассмотрим ряд

$$R(s, t; \lambda)=\sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(s, t)\, \lambda^n \qquad (K_1(s, t)=K(s, t)). \tag{39}$$

При сделанном предположении непрерывности $K(s, t)$ в k_0, положительные функции $Q(s)$ и $R(t)$ непрерывны и тем самым ограничены в $[a, b]$, т. е. существует такое положительное число M, что $Q(s)$ и $R(t) \leqslant M$. Таким образом,

$$|K_{n+1}(s, t)| \leqslant M^2 P^{n-1} \tag{40}$$

и, следовательно, ряд, составленный из модулей членов ряда (39), сходится равномерно по s и t в k_0 при

$$|\lambda| < P^{-1}, \quad \text{т. е.} \quad |\lambda| < \left[\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 \, ds \, dt\right]^{-\frac{1}{2}}, \tag{41}$$

т. е. ряд (39) сходится абсолютно и равномерно при условии (41). Вообще, если модули членов некоторого ряда образуют равномерно сходящийся ряд, то говорят, что первоначальный ряд *сходится регулярно*. Из регулярной сходимости следует абсолютная и равномерная сходимость ряда (39).

Через $R(s, t; \lambda)$ мы обозначили сумму ряда (39), и эту функцию будем называть резольвентой ядра $K(s, t)$ или интегрального уравнения. Она непрерывна в k_0 при условии (41).

Применим теперь к уравнению

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) \, dt, \tag{42}$$

содержащему комплексный параметр λ, метод последовательных приближений, отыскивая его решение в виде

$$\varphi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(s) \lambda^n \tag{43}$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ. Если члены ряда (43) — непрерывные функции в $[a, b]$ и ряд равномерно сходится, то его сумма $\varphi(s)$ есть решение уравнения (42). Применяя указанный выше прием, получим

$$\varphi_0(s) = f(s), \quad \varphi_1(s) = \int_a^b K(s, t) \varphi_0(t) \, dt$$

и, вообще,

$$\varphi_n(s) = \int_a^b K(s, t) \varphi_{n-1}(t) \, dt.$$

Выразим теперь $\varphi_n(s)$ непосредственно через $f(s)$:

$$\varphi_1(s) = \int_a^b K(s, t) f(t) \, dt,$$

$$\varphi_2(s) = \int_a^b \int_a^b K(s, t) K(t, t_1) f(t_1) \, dt_1 \, dt = \int_a^b K_2(s, t_1) f(t_1) \, dt_1,$$

и, вообще,

$$\varphi_n(s) = \int_a^b K_n(s, t) f(t)\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{44}$$

Сумма (43) имеет, следовательно, вид

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b \left[\sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(s, t) \lambda^n \right] f(t)\, dt.$$

Принимая во внимание равномерную сходимость ряда (39) при условии (41), можем утверждать, что написанная формула дает непрерывное решение уравнения (42). Формулу эту можно переписать в виде

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b R(s, t; \lambda) f(t)\, dt. \tag{45}$$

6. Интегральные соотношения для резольвенты. Теоремы существования и единственности. Покажем, что резольвента $R(s, t; \lambda)$, определенная при условии (41), удовлетворяет как функция s или t следующим двум интегральным уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} R(s, t; \lambda) &= K(s, t) + \lambda \int_a^b K(s, t_1) R(t_1, t; \lambda)\, dt_1, \\ R(s, t; \lambda) &= K(s, t) + \lambda \int_a^b K(t_1, t) R(s, t_1; \lambda)\, dt_1. \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Чтобы проверить, например, второе уравнение, помножим обе части формулы (39) на $K(t, x)$ и проинтегрируем по t:

$$\int_a^b R(s, t; \lambda) K(t, x)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \int_a^b K_{n+1}(s, t) K(t, x)\, dt,$$

или

$$\int_a^b R(s, t; \lambda) K(t, x)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+2}(s, x) \lambda^n.$$

Умножим обе части на λ:

$$\lambda \int_a^b R(s, t; \lambda) K(t, x)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+2}(s, x) \lambda^{n+1},$$

или, заменяя переменную суммирования n на $(n-1)$ и начиная суммировать с $n = 1$, получим:

$$\lambda \int_a^b R(s, t; \lambda) K(t, x)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} K_{n+1}(s, x) \lambda^n.$$

В силу (39) мы можем переписать это равенство в виде

$$\lambda\int_a^b R(s, t; \lambda) K(t, x)\, dt = R(s, x; \lambda) - K(s, x),$$

что и дает второе из уравнений (46), но только при других обозначениях переменных. Аналогичным образом проверяется и первое из написанных интегральных уравнений для резольвенты.

До сих пор мы определили резольвенту только при значениях λ, удовлетворяющих условию (41). В дальнейшем увидим, что резольвента существует на всей плоскости комплексного переменного λ, кроме некоторых изолированных значений λ, и что она на всей плоскости λ удовлетворяет уравнениям (46). Поэтому представляется важным доказать теорему существования и единственности, исходя только из уравнений (46).

Теорема. *Если при некотором значении λ существует непрерывная в квадрате k_0 функция $R(s, t; \lambda)$, удовлетворяющая уравнениям* (46), *то уравнение* (42) *при этом значении λ имеет единственное решение, и это решение определяется формулой* (45).

Доказательство распадается на две части. Сначала мы докажем, что при наличии (46) всякое решение уравнения (42) должно выражаться формулой (45). Это даст нам единственность. Затем мы проверим, что формула (45) действительно дает решение уравнения (42).

Пусть $\varphi(s)$ — некоторое решение уравнения (42). Умножим обе части (42) на $\lambda R(x, s; \lambda)$ и проинтегрируем по s:

$$\lambda\int_a^b R(x, s; \lambda)\varphi(s)\, ds =$$
$$= \lambda\int_a^b R(x, s; \lambda) f(s)\, ds + \lambda\int_a^b \left[\int_a^b \lambda R(x, s; \lambda) K(s, t)\, ds\right]\varphi(t)\, dt.$$

Принимая во внимание второе из уравнений (46), мы можем написать:

$$\lambda\int_a^b R(x, s; \lambda) K(s, t)\, ds = R(x, t; \lambda) - K(x, t),$$

и предыдущая формула переписывается в виде

$$\lambda\int_a^b R(x, s; \lambda)\varphi(s)\, ds =$$
$$= \lambda\int_a^b R(x, s; \lambda) f(s)\, ds + \lambda\int_a^b R(x, t; \lambda)\varphi(t)\, dt - \lambda\int_a^b K(x, t)\varphi(t)\, dt.$$

Сокращая в этой формуле одинаковые члены слева и справа и заменяя в силу (42)

$$\lambda\int_a^b K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = \varphi(x) - f(x),$$

получим формулу (45).

Покажем теперь, что функция $\varphi(s)$, определяемая формулой (45), действительно удовлетворяет уравнению (42) при наличии (46).

Подставляя выражение (45) в уравнение (42), перенося в нем все члены в левую часть, получим:

$$f(s) + \lambda\int_a^b R(s, t; \lambda)\,f(t)\,dt -$$
$$- f(s) - \lambda\int_a^b K(s, t)\left[f(t) + \lambda\int_a^b R(t, t_1; \lambda)\,f(t_1)\,dt_1\right]dt = 0$$

или

$$\int_a^b R(s, t; \lambda)\,f(t)\,dt -$$
$$- \int_a^b K(s, t)\,f(t)\,dt - \lambda\int_a^b\int_a^b K(s, t)\,R(t, t_1; \lambda)\,f(t_1)\,dt\,dt_1 = 0,$$

что можно переписать в виде

$$\int_a^b\left[R(s, t; \lambda) - K(s, t) - \lambda\int_a^b K(s, t_1)\,R(t_1, t; \lambda)\,dt_1\right]f(t)\,dt = 0,$$

а это последнее равенство действительно имеет место, так как в квадратных скобках, в силу первого из уравнений (46), стоит тождественный нуль. Теорема, таким образом, полностью доказана.

Принимая во внимание, что при значениях λ, удовлетворяющих условию (41), мы построили резольвенту, удовлетворяющую уравнениям (46), мы можем утверждать, что *при значениях* λ, *удовлетворяющих условию* (41), *уравнение* (42) *имеет единственное решение и что это решение определяется формулой* (45). Это можно было бы доказать и непосредственно.

7. Знаменатель Фредгольма. Мы определили резольвенту только в круге $|\lambda| < P^{-1}$ плоскости комплексного переменного λ. Дальше мы покажем, что она может быть аналитически продолжена на всю плоскость λ, что ее особыми точками могут быть только полюсы, и что при всех λ, кроме полюсов, она удовлетворяет уравнениям (46). Для этого мы построим такую целую функцию $D(\lambda)$, что при умножении ряда (39) на $D(\lambda)$ получим также целую

функцию $D(s, t; \lambda)$ от λ. Резольвента окажется, таким образом, частным двух целых функций λ:

$$R(s, t; \lambda) = \frac{D(s, t; \lambda)}{D(\lambda)}, \tag{47}$$

т. е. дробной или мероморфной функцией λ [III_2; 64]. Если уравнение $D(\lambda) = 0$ не имеет корней, то $R(s, t; \lambda)$ есть целая функция λ и ряд (39) сходится на всей плоскости λ. Дальше мы, построив $D(\lambda)$ и $\mathcal{D}(s, t; \lambda)$, подробно исследуем правую часть (47). Для построения $D(\lambda)$ мы заменим интеграл, входящий в уравнение (42), конечной интегральной суммой. Такая замена является, строго говоря, недопустимой, но последующие выкладки не будут служить для нас доказательством, а будут являться лишь наведением, чтобы угадать вид $D(\lambda)$.

Разделим промежуток $[a, b]$ на n равных частей, длина каждой из которых будет $\delta = \frac{b-a}{n}$. Введем обозначение для точек деления и для значений, входящих в уравнение (42) функций в этих точках, а именно, положим

$$s_i = a + i\frac{b-a}{n}; \quad f_i = f(s_i); \quad \varphi_i = \varphi(s_i); \quad K_{pq} = K(s_p, s_q)$$
$$(i, p, q = 1, \ldots, n).$$

Заменяя интеграл соответствующей суммой Римана, будем иметь приближенное равенство:

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \sum_{q=1}^{n} K(s, s_q)\varphi_q\delta.$$

В этом равенстве мы заменим независимую переменную s на s_p. Таким образом получим систему n уравнений первой степени относительно неизвестных $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$:

$$\varphi_p = f_p + \lambda \sum_{q=1}^{n} K_{pq}\varphi_q\delta \qquad (p = 1, \ldots, n).$$

При решении этой системы по теореме Крамера [III_1; 8] будем иметь следующий знаменатель:

$$D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda K_{11}\delta & -\lambda K_{12}\delta & \ldots & -\lambda K_{1n}\delta \\ -\lambda K_{21}\delta & 1-\lambda K_{22}\delta & \ldots & -\lambda K_{2n}\delta \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\lambda K_{n1}\delta & -\lambda K_{n2}\delta & \ldots & 1-\lambda K_{nn}\delta \end{vmatrix}.$$

Применим к этому определителю формулу разложения, которую имели [III_1; 5] для определителя вида

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+x & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}+x \end{vmatrix},$$

полагая в этом последнем $x=1$ и $a_{ij}=-\lambda K_{ij}\delta$. Мы получим, таким образом:

$$D_n(\lambda)=1-\frac{\lambda}{1!}\sum_{p_1=1}^{n}K_{p_1p_1}\delta+\frac{\lambda^2}{2!}\sum_{p_1,\,p_2=1}^{n}\begin{vmatrix}K_{p_1p_1} & K_{p_1p_2}\\ K_{p_2p_1} & K_{p_2p_2}\end{vmatrix}\delta^2+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}\sum_{p_1,\,\ldots,\,p_n=1}^{n}\begin{vmatrix}K_{p_1p_1} & K_{p_1p_2} & \ldots & K_{p_1p_n}\\ K_{p_2p_1} & K_{p_2p_2} & \ldots & K_{p_2p_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ K_{p_np_1} & K_{p_np_2} & \ldots & K_{p_np_n}\end{vmatrix}\delta^n. \qquad (48)$$

Для удобства в дальнейших вычислениях введем следующее обозначение:

$$K\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \ldots & x_n\\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}K(x_1,\,y_1) & K(x_1,\,y_2) & \ldots & K(x_1,\,y_n)\\ K(x_2,\,y_1) & K(x_2,\,y_2) & \ldots & K(x_2,\,y_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ K(x_n,\,y_1) & K(x_n,\,y_2) & \ldots & K(x_n,\,y_n)\end{vmatrix}. \qquad (49)$$

$$(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

Рассмотрим последовательные члены правой части формулы (48). Сумма

$$\sum_{p_1=1}^{n}K_{p_1p_1}\delta=\sum_{i=1}^{n}K(x_i,\ x_i)\,\delta$$

представляет собой сумму Римана для интеграла

$$\int_a^b K(t_1,\ t_1)\,dt_1,$$

и при $n\to\infty$ она стремится к этому интегралу. Совершенно так же сумма

$$\sum_{p_1,\,p_2=1}^{n}\begin{vmatrix}K_{p_1p_1} & K_{p_1p_2}\\ K_{p_2p_1} & K_{p_2p_2}\end{vmatrix}\delta^2$$

представляет собой сумму Римана для интеграла

$$\int_a^b\int_a^b\begin{vmatrix}K(t_1,\ t_1) & K(t_1,\ t_2)\\ K(t_2,\ t_1) & K(t_2,\ t_2)\end{vmatrix}dt_1\,dt_2$$

и т. д.

Таким образом, формула (48) в пределе естественно приводит нас к следующему степенному ряду относительно λ:

$$D(\lambda)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}d_n, \qquad (50)$$

где

$$d_n=\int_a^b\int_a^b\ldots\int_a^b K\begin{pmatrix}t_1 & t_2 & \ldots & t_n\\ t_1 & t_2 & \ldots & t_n\end{pmatrix}dt_1\,dt_2\ldots dt_n, \qquad (51)$$

и

$$K\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \dots & t_n \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix}$$

определяется согласно формуле (49).

Мы пришли к ряду (50) путем неточных соображений. Возвращаясь к изложению строгой теории, мы должны будем доказать два факта: во-первых, что ряд (50) сходится на всей плоскости комплексного переменного λ, т. е. является целой функцией λ, и, во-вторых, что при умножении ряда (39) на ряд (50) мы получим также целую функцию λ.

Произведем оценку коэффициентов d_n. В формуле (51) под знаком интеграла стоит определитель порядка n, каждый элемент которого $K(t_i, t_k)$ по модулю не превышает положительного числа M. Применяя теорему Адамара [III_1; 16] и обычную оценку кратного интеграла, получим

$$|d_n| \leqslant n^{\frac{n}{2}} [M(b-a)]^n.$$

Таким образом, члены ряда (50) по модулю не превосходят положительных чисел:

$$\frac{|\lambda|^n}{n!} n^{\frac{n}{2}} [M(b-a)]^n. \tag{52}$$

Покажем, что эти числа образуют сходящийся ряд. Взяв отношение последующего числа к предыдущему, получим

$$\frac{|\lambda|}{n+1} \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{n^{\frac{n}{2}}} M(b-a) = \frac{|\lambda| M(b-a)}{\sqrt{n+1}} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

При беспредельном возрастании n выражение $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$ стремится к $\sqrt{e}$ [I; 38], а все написанное отношение стремится к нулю, откуда и вытекает сходимость при всяком λ ряда, образованного числами (52). Таким образом, функция (50) является целой функцией от λ.

Функция $D(\lambda)$ получилась предельным переходом из знаменателя Крамера. Естественно предположить, что она является знаменателем для резольвенты $R(s, t; \lambda)$, т. е., что, умножая ряд (39) на $D(\lambda)$, мы получим целую функцию от λ. В результате этого умножения получим ряд, члены которого уже не числа, как $D(\lambda)$, а функции от (s, t). Введем специальное обозначение для этого ряда:

$$D(s, t; \lambda) = K(s, t) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} d_n(s, t). \tag{53}$$

Оба степенных ряда (39) и (50) сходятся в круге (41). Поэтому и ряд (53), полученный от их перемножения, также сходится в этом круге. Степенные ряды, как абсолютно сходящиеся, можно перемножать почленно, и мы могли бы получить выражение для коэффициентов $d_n(s, t)$ при помощи простого перемножения упомянутых рядов, но для удобства в дальнейших вычислениях поступим иначе. Умножая обе части первого из уравнений (46) на $D(\lambda)$, получим

$$D(s, t; \lambda) = K(s, t) D(\lambda) + \lambda \int_a^b K(s, t_1) D(t_1, t; \lambda) dt_1. \qquad (54)$$

Подставляя в эту формулу вместо $D(\lambda)$ и $D(s, t; \lambda)$ ряды (50) и (53) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, придем к формуле:

$$d_n(s, t) = K(s, t) d_n - n \int_a^b K(s, t_1) d_{n-1}(t_1, t) dt_1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \qquad (55)$$

которая дает возможность последовательно вычислять коэффициенты $d_n(s, t)$, причем мы должны считать $d_0(s, t) = K(s, t)$. Заметим при этом, что ряд (53) во всяком случае сходится абсолютно и равномерно относительно (s, t) при условии (41), так как при этом члены перемножаемых рядов (39) и (50) меньше положительных чисел, образующих сходящийся ряд. Это дает нам возможность почленного интегрирования в правой части формулы (54). Полагая в (55) $n = 1$, будем иметь:

$$d_1(s, t) = K(s, t) \int_a^b K(t_1, t_1) dt_1 - \int_a^b K(s, t_1) K(t_1, t) dt_1 =$$

$$= \int_a^b \begin{vmatrix} K(s, t) & K(s, t_1) \\ K(t_1, t) & K(t_1, t_1) \end{vmatrix} dt_1,$$

т. е., принимая во внимание обозначение (49),

$$d_1(s, t) = \int_a^b K\begin{pmatrix} s & t_1 \\ t & t_1 \end{pmatrix} dt_1.$$

При $n = 2$ формула (55) даст:

$$d_2(s, t) = K(s, t) \int_a^b \int_a^b K\begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix} dt_1 dt_2 -$$

$$- 2 \int_a^b \int_a^b K(s, t_1) K\begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ t & t_2 \end{pmatrix} dt_1 dt_2.$$

Производя элементарные преобразования, получим формулу, аналогичную предыдущей формуле:

$$d_2(s, t) = \int_a^b \int_a^b K\begin{pmatrix} s & t_1 & t_2 \\ t & t_1 & t_2 \end{pmatrix} dt_1\, dt_2.$$

Докажем, что при любом целом положительном n мы имеем:

$$d_n(s, t) = \int_a^b \int_a^b \ldots \int_a^b K\begin{pmatrix} s & t_1 & t_2 & \ldots & t_n \\ t & t_1 & t_2 & \ldots & t_n \end{pmatrix} dt_1\, dt_2 \ldots dt_n. \qquad (56)$$

Выше мы доказали справедливость этой формулы при $n=1$. Обозначим через $d_n^*(s, t)$ выражение, стоящее в правой части формулы (56). Мы имеем в силу сказанного: $d_1^*(s, t) = d_1(s, t)$. Покажем сейчас, что $d_n^*(s, t)$ удовлетворяют тому же соотношению:

$$d_n^*(s, t) = K(s, t)\, d_n - n \int_a^b K(s, t_1)\, d_{n-1}^*(t_1, t)\, dt_1, \qquad (55_1)$$

что и $d_n(s, t)$. В силу (55) и (55_1) $d_n(s, t)$ и $d_n^*(s, t)$ $(n=2, 3, \ldots)$ определяются последовательно единственным образом, и из $d_1^*(s, t) = d_1(s, t)$ будет следовать, что $d_n^*(s, t) = d_n(s, t)$ при любом n. Таким образом, доказательство формулы (56) сводится к доказательству соотношения (55_1), где $d_n^*(s, t)$ есть правая часть формулы (56).

Заметим прежде всего, что если в символе, стоящем в левой части (49), мы совершим транспозицию двух букв x_i или двух букв y_i, то величина определителя (49) изменит лишь знак, ибо дело сведется к перестановке двух строк или столбцов этого определителя. Разлагая определитель, входящий в формулу (56), по элементам первой строки и принимая во внимание только что сделанное замечание, мы можем написать так:

$$K\begin{pmatrix} s & t_1 & \ldots & t_n \\ t & t_1 & \ldots & t_n \end{pmatrix} = K(s, t)\, K\begin{pmatrix} t_1 & \ldots & t_n \\ t_1 & \ldots & t_n \end{pmatrix} - K(s, t_1)\, K\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \ldots & t_n \\ t & t_2 & \ldots & t_n \end{pmatrix} -$$
$$- K(s, t_2)\, K\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \ldots & t_n \\ t_1 & t & \ldots & t_n \end{pmatrix} - \ldots - K(s, t_n)\, K\begin{pmatrix} t_1 & \ldots & t_{n-1} & t_n \\ t_1 & \ldots & t_{n-1} & t \end{pmatrix}.$$

Интегрируя обе части этого соотношения по всем t_i и меняя в правой части обозначение переменных интегрирования, а также пользуясь сделанным выше замечанием, получим

$$d_n^*(s, t) = K(s, t)\, d_n -$$
$$- n \int_a^b \int_a^b \ldots \int_a^b K(s, t_1)\, K\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \ldots & t_n \\ t & t_2 & \ldots & t_n \end{pmatrix} dt_1\, dt_2 \ldots dt_n,$$

что и приводит нас к соотношению (55_1). Таким образом, формула (56) доказана. Применяя к определителю, входящему в формулу (56), теорему Адамара, получим следующую оценку:

$$|d_n(s, t)| \leqslant (n+1)^{\frac{n+1}{2}} M^{n+1} (b-a)^n,$$

и отсюда, совершенно так же, как и для (50), покажем, что ряд (53) дает целую функцию от λ и что при любом λ он сходится абсолютно и равномерно относительно (s, t) в квадрате k_0.

Принимая во внимание, что при условии (41) мы имеем

$$R(s, t; \lambda) D(\lambda) = D(s, t; \lambda),$$

можем написать при этих значениях λ:

$$R(s, t; \lambda) = \frac{D(s, t; \lambda)}{D(\lambda)}. \tag{57}$$

Правая часть этой формулы дает аналитическое продолжение функции $R(s, t; \lambda)$ на всю плоскость комплексного переменного λ и показывает, что резольвента есть дробная функция от λ. Отметим, что знаменатель в формуле (57), называемый обычно *знаменателем Фредгольма*, не зависит от переменных (s, t).

Укажем некоторые следствия из написанных выше формул. Из (51) и (56) непосредственно следует:

$$d_{n+1} = \int_a^b d_n(s, s)\, ds. \tag{58}$$

Отметим еще возможность простого последовательного вычисления коэффициентов d_n и $d_n(s, t)$. Полагая в формуле (58) $n=0$ и принимая во внимание, что $d_0(s, t) = K(s, t)$, получим из этой формулы d_1. Рассматривая затем формулу (55) при $n=1$, получим из нее $d_1(s, t)$, помня, что $d_0 = 1$. Затем формула (58) при $n=1$ даст нам d_2, после чего формула (55) при $n=2$ даст $d_2(s, t)$ и т. д. Если в формуле (53) положить $t=s$ и проинтегрировать обе части по s, то, в силу (58) получим

$$\int_a^b D(s, s; \lambda)\, ds = d_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} d_{n+1},$$

т. е. в силу (50)

$$D'(\lambda) = -\int_a^b D(s, s; \lambda)\, ds. \tag{59}$$

Отметим, что из (56) следует непрерывность $d_n(s, t)$ в k_0, а из равномерной сходимости ряда (53) в k_0 следует непрерывность $D(s, t; \lambda)$ в k_0.

Принимая во внимание (57), (59) и вводя обозначения

$$A_n = \int_a^b K_n(s, s)\,ds, \qquad A_1 = \int_a^b K(s, s)\,ds,$$

будем иметь

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{n+1}\lambda^n = -\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)},$$

откуда в силу $D(0) = 1$

$$D(\lambda) = e^{-\left(A_1\lambda + A_2\frac{\lambda^2}{2} + A_3\frac{\lambda^3}{3} + \ldots\right)}.$$

Числа A_n называются обычно следами повторных ядер $K_n(s, t)$ $(n = 1, \ldots)$. Ряд, стоящий в показателе степени, сходится при условии (41). Но если мы разложим правую часть найденной формулы по степеням λ, пользуясь обычным разложением e^z,

$$D(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(A_1\lambda + A_2\frac{\lambda^2}{2} + A_3\frac{\lambda^3}{3} + \ldots\right)^n}{n!},$$

то получим разложение на всей плоскости λ (единственность разложения в степенной ряд), и коэффициенты d_n будут содержать лишь следы $A_1, A_2, \ldots$ Из формулы

$$D(s, t; \lambda) = R(s, t; \lambda)\,D(\lambda)$$

следует, что коэффициенты $d_n(s, t)$ в разложении $D(s, t; \lambda)$ могут быть выражены через следы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и ядра $K_1(s, t)$, $K_2(s, t), \ldots, K_{n-1}(s, t)$.

Целые функции $D(\lambda)$ и $D(s, t; \lambda)$ могут быть разложены на всей плоскости λ по целым неотрицательным степеням $(\lambda - \lambda_0)$, где λ_0 — любое фиксированное комплексное число. Например,

$$D(s, t; \lambda) = D(s, t; \lambda_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^k D(s, t; \lambda_0)}{\partial\lambda^k}\frac{(\lambda - \lambda_0)^k}{k!},$$

где

$$\frac{\partial^k D(s, t; \lambda)}{\partial\lambda^k} = \sum_{n=k}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!} d_n(s, t) \qquad (0! = 1).$$

Из оценок для $d_n(s, t)$ непосредственно следует, что последний ряд сходится равномерно в k_0 при любом λ, и мы можем утверждать, что коэффициенты в разложении $D(s, t; \lambda)$ по степеням $(\lambda - \lambda_0)$ также непрерывные в k_0 функции.

8. Уравнение Фредгольма при любом λ. Рассмотрим уравнение (54). Оно получилось из первого из уравнений (46) при помощи умножения на $D(\lambda)$. Уравнения (46) были нами получены лишь при условии (41) и, следовательно, мы можем утверждать, что обе части уравнения (54) совпадают при условии (41). Но в силу основного принципа аналитического продолжения, если две целые функции совпадают в некотором круге на плоскости комплексного переменного λ, то они совпадают и на всей плоскости комплексного переменного [III_2; 18]. Деля обе части (54) на $D(\lambda)$, мы видим, что резольвента удовлетворяет первому из уравнений (46) при любых значениях λ, которые не обращают в нуль $D(\lambda)$. В этом последнем случае отношение (57) теряет смысл. Точно так же, применяя аналитическое продолжение, мы убедимся, что резольвента удовлетворяет и второму из уравнений (46) при упомянутых значениях λ. Таким образом, если λ отлично от корня $D(\lambda)$, то мы имеем непрерывное решение обоих уравнений (46) и, применяя теорему существования и единственности из [6], получаем следующую теорему:

Теорема 1. *Если значение λ не есть корень $D(\lambda)$, то уравнение* (42) *при любом $f(s)$ имеет единственное решение, и это решение выражается формулой* (45), *где $R(s, t; \lambda)$ определяется формулой* (57).

Рассмотрим теперь такое значение $\lambda=\lambda_0$, которое является корнем $D(\lambda)$. Может оказаться, что оно же является корнем и функции $D(s, t; \lambda)$ при любых (s, t). Покажем сейчас, что кратность этого корня в числителе выражения (57) обязательно ниже его кратности в знаменателе, а отсюда будет следовать, что всякий корень $D(\lambda)$ является полюсом для резольвенты.

Теорема 2. *Всякий корень λ_0 функции $D(\lambda)$ является полюсом резольвенты.*

Пусть λ_0 есть корень $D(\lambda)$ кратности k, т. е.

$$D(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^k D_0(\lambda) \quad [D_0(\lambda_0)\neq 0].$$

Положим, что он же является корнем $D(s, t; \lambda)$ кратности l, т. е.

$$D(s, t; \lambda)=(\lambda-\lambda_0)^l D_0(s, t; \lambda),$$

где $D_0(s, t; \lambda)$ — ряд, расположенный по целым положительным степеням $(\lambda-\lambda_0)$, свободный член которого отличен от нуля при некоторых значениях s, t. Напомним, что производная $D'(\lambda)$ имеет корень $\lambda=\lambda_0$ кратности $(k-1)$. Применяя формулу (59), получим

$$D'(\lambda)=-(\lambda-\lambda_0)^l \int_a^b D_0(s, s; \lambda)\, ds.$$

Левая часть имеет корень $\lambda=\lambda_0$ кратности $(k-1)$, а в правой части уже имеется множитель $(\lambda-\lambda_0)^l$ и, кроме того, может слу-

читься, что после интегрирования по s выделится еще целая положительная степень $(\lambda-\lambda_0)$. Это рассуждение приводит нас к неравенству $l \leqslant k-1$, т. е. оказывается, что если $\lambda=\lambda_0$ и является корнем числителя выражения (57), то кратность этого корня во всяком случае ниже k, а потому вся дробь имеет полюс $\lambda=\lambda_0$. Заметим, что свободный член в разложении $D_0(s, t; \lambda)$ по степеням $(\lambda-\lambda_0)$ есть некоторая функция (s, t). Она может обращаться в нуль при некоторых частных значениях s и t, но не равна нулю тождественно, ибо если бы это было так, то $\lambda=\lambda_0$ явилось бы корнем $D(s, t; \lambda)$ кратности выше l. Доказанную теорему мы можем сформулировать более точно так: *найдутся такие значения s и t, при которых $\lambda=\lambda_0$ будет полюсом резольвенты.*

Мы доказали, что всякий корень λ_0 функции $D(\lambda)$ есть полюс резольвенты. Пусть это будет полюс кратности r. В окрестности точки $\lambda=\lambda_0$ будем иметь разложение вида:

$$R(s, t; \lambda)=\frac{a_{-r}(s, t)}{(\lambda-\lambda_0)^r}+\frac{a_{-r+1}(s, t)}{(\lambda-\lambda_0)^{r-1}}+\ldots+\frac{a_{-1}(s, t)}{\lambda-\lambda_0}+ \\ +\sum_{i=0}^{\infty} a_i(s, t)(\lambda-\lambda_0)^i,$$

где коэффициент $a_{-r}(s, t)$ не равен тождественно нулю в k_0.

Из сказанного в конце [7] следует, что $a_k(s, t)$ — непрерывные в квадрате k_0 функции.

Подставляя последнее разложение в первое из уравнений (46), умножая обе части на $(\lambda-\lambda_0)^r$ и полагая затем $\lambda=\lambda_0$, получим

$$a_{-r}(s, t)=\lambda_0 \int_a^b K(s, t_1)\, a_{-r}(t_1, t)\, dt_1.$$

Таким образом, оказывается, что коэффициент $a_{-r}(s, t)$ как функция от s при любом значении переменной t является решением однородного уравнения

$$\varphi(s)=\lambda_0 \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt. \tag{60}$$

Поскольку функция $a_{-r}(s, t)$ не есть тождественный нуль, мы приходим, таким образом, к следующей теореме:

Теорема 3. *Если λ_0 есть корень $D(\lambda)$, то однородное уравнение* (60) *имеет решения, не равные тождественно нулю.*

Таким образом, всякий корень $D(\lambda)$ является характеристическим значением интегрального уравнения, т. е. при этом однородное уравнение

$$\varphi(s)=\lambda \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt \tag{61}$$

имеет решения, отличные от нулевого. Если же λ не есть корень $D(\lambda)$, то в силу теоремы 1 уравнение (42) при любом $f(s)$ имеет единственное решение и, в частности, однородное уравнение (61) имеет при этом только нулевое решение. Иначе говоря, если λ — корень $D(\lambda)$, то это — характеристическое значение, а если λ — не корень $D(\lambda)$, то это не есть характеристическое значение.

Мы получаем, таким образом:

Теорема 4. *Характеристические значения интегрального уравнения суть корни $D(\lambda)$.*

Целая функция $D(\lambda)$ может иметь лишь конечное число корней во всякой ограниченной области плоскости комплексного переменного λ, т. е.

Теорема 5. *Во всякой ограниченной области плоскости λ может существовать лишь конечное число характеристических значений.*

Отметим еще одну формулу, которая бывает полезной в приложениях. Положим, что свободный член уравнения (42) может быть представлен в виде

$$f(s) = \int_a^b K(s, t)\,\omega(t)\,dt, \tag{62}$$

где $\omega(t)$ — некоторая функция.

Считая λ отличным от характеристического значения, получим согласно формуле (45) решение уравнения (42) в виде

$$\varphi(s) = \int_a^b K(s, t)\,\omega(t)\,dt + \lambda \int_a^b \int_a^b R(s, t; \lambda)\,K(t, t_1)\,\omega(t_1)\,dt\,dt_1.$$

Но второе из уравнений (46) дает нам

$$\lambda \int_a^b R(s, t; \lambda)\,K(t, t_1)\,dt = R(s, t_1; \lambda) - K(s, t_1);$$

подставляя это в предыдущую формулу, мы получаем окончательно следующее простое выражение для решения уравнения (42):

$$\varphi(s) = \int_a^b R(s, t; \lambda)\,\omega(t)\,dt, \tag{63}$$

если свободный член уравнения определен формулой (62).

9. Союзное интегральное уравнение. Для дальнейшего развития теории будем рассматривать наряду с уравнением (42) другое интегральное уравнение, которое отличается от уравнения (42) тем, что интегрирование производится по первой переменной

ядра. Свободный член этого уравнения обозначим через $g(s)$, а искомую функцию — через $\psi(s)$:

$$\psi(s) = g(s) + \lambda \int_a^b K(t, s)\psi(t)\,dt. \tag{64}$$

Это уравнение называется *союзным уравнению* (42).

Напишем и соответствующее однородное уравнение:

$$\psi(s) = \lambda \int_a^b K(t, s)\psi(t)\,dt. \tag{65}$$

При прежних обозначениях аргументов ядра мы должны определить ядро этого уравнения следующей формулой:

$$K_0(s, t) = K(t, s).$$

Символ (49) для ядра $K_0(s, t)$ получится из того же символа для $K(s, t)$ заменой x_i на y_i, и наоборот, т. е.

$$K_0\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}.$$

Формулы (51) показывают затем, что для ядра $K_0(s, t)$ коэффициенты d_n будут такими же, что и для ядра $K(s, t)$, а из (56) вытекает, что коэффициенты $d_n(s, t)$ ядра $K_0(s, t)$ получаются из аналогичных коэффициентов для $K(s, t)$ простой перестановкой аргументов s и t. Таким образом, мы видим, что числитель и знаменатель в формуле (57) для союзного уравнения (64) выражаются через аналогичные величины для уравнения (42) по формулам:

$$D_0(s, t; \lambda) = D(t, s; \lambda); \qquad D_0(\lambda) = D(\lambda),$$

т. е. числитель получается перестановкой аргументов s и t, а *знаменатель Фредгольма для союзного уравнения* (64) *будет тем же, что и для уравнения* (42). Отсюда следует, между прочим, что *союзное уравнение имеет те же характеристические значения, что и основное уравнение.*

Для союзного уравнения справедливы, конечно, все сформулированные в [8] теоремы. Кроме того, на основании сказанного выше можем утверждать:

Теорема 6. *Однородное уравнение* (60) *и союзное с ним уравнение* (65) *одновременно или имеют только нулевое решение или имеют решения, отличные от нуля.*

10. Случай характеристического значения. Теорема 1 дает полный ответ о решении уравнения (42) в том случае, когда λ не есть характеристическое значение. В настоящем параграфе мы займемся этим вопросом в том случае, когда λ есть характеристическое значение.

Пусть λ — характеристическое значение, и положим, что неоднородное уравнение (42) имеет решение $\varphi(s)$. Умножим обе его части на какое-либо решение $\psi(s)$ союзного однородного уравнения (65) и проинтегрируем по s:

$$\int_a^b \varphi(s)\psi(s)\,ds = \int_a^b f(s)\psi(s)\,ds + \int_a^b \left[\lambda \int_a^b K(s,\ t)\psi(s)\,ds\right]\varphi(t)\,dt.$$

Пользуясь (65), получим

$$\int_a^b \varphi(s)\psi(s)\,ds = \int_a^b f(s)\psi(s)\,ds + \int_a^b \psi(t)\varphi(t)\,dt,$$

откуда

$$\int_a^b f(s)\psi(s)\,ds = 0, \tag{66}$$

т. е. для разрешимости уравнения (42) необходимо, чтобы $f(s)$ удовлетворяла условию (66), где $\psi(s)$ — любое решение уравнения (65), среди решений которого наверно есть отличные от нуля, ибо λ, по условию, — характеристическое значение. Если же λ — не характеристическое значение, то уравнение (42) в силу теоремы 1 имеет решение при любом $f(s)$. Таким образом, справедлива

Теорема 7. *Имеются две возможности: или интегральное уравнение* (42) *разрешимо при любом* $f(s)$ *и однородное уравнение* (61) *имеет только нулевое решение, или однородное уравнение* (61) *имеет решения, отличные от нулевого, и уравнение* (42) *разрешимо не при всякой* $f(s)$.

При первой возможности неоднородное уравнение имеет единственное решение. Это следует из теоремы 1, а также из следующих простых соображений: если бы неоднородное уравнение имело два различных решения, то их разность была бы решением однородного уравнения, отличным от нулевого.

Замечание. Если известно, что при некотором λ и некоторой $f(s)$ неоднородное уравнение (42) имеет решение и притом только одно, то λ не есть характеристическое значение. Действительно, если бы λ было характеристическим значением, то мы, добавив к упомянутому решению неоднородного уравнения любое решение соответствующего однородного уравнения, отличное от нулевого, получили бы решение неоднородного уравнения, отличное от упомянутого.

Дальше мы увидим, что условие (66) не только необходимо, но и достаточно для разрешимости уравнения (42). Предварительно выясним вопрос о ранге характеристического значения [4].

Пусть λ — характеристическое значение и

$$\varphi_1(s),\ \varphi_2(s),\ \ldots,\ \varphi_m(s) \tag{67}$$

— какие-либо линейно-независимые собственные функции, т. е. решения уравнения (61), отличные от нулевого:

$$\frac{\varphi_j(s)}{\lambda} = \int_a^b K(s, t)\,\varphi_j(t)\,dt \qquad (j=1, 2, \ldots, m). \tag{68}$$

Если λ или ядро — не вещественны, то и функции (67) мы должны считать комплексными. Напомним, что $\lambda=0$ не может быть характеристическим значением [4]. Поскольку любая линейная комбинация с постоянными коэффициентами собственных функций (67) есть также собственная функция, мы можем применить к функциям (67) процесс ортогонализации. Таким образом, мы можем считать, что функции (67) взаимно ортогональны и нормированы, т. е.

$$\int_a^b \varphi_p(s)\,\overline{\varphi_q(s)}\,ds = 0 \qquad (p \neq q); \qquad \int_a^b |\varphi_p(s)|^2\,ds = 1. \tag{69}$$

Переходя к сопряженным величинам, можем переписать (68) в виде

$$\frac{\overline{\varphi_j(s)}}{\overline{\lambda}} = \int_a^b \overline{K(s, t)}\,\overline{\varphi_j(t)}\,dt.$$

Отсюда видно, что левая часть этого равенства есть коэффициент Фурье $\overline{K(s, t)}$ как функции аргумента t относительно ортогональной нормированной системы (67), состоящей из конечного числа функций. В силу неравенства Бесселя можем написать [3]:

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{|\varphi_j(s)|^2}{|\lambda|^2} \leqslant \int_a^b |K(s, t)|^2\,dt.$$

Отметим, что $|\alpha| = |\overline{\alpha}|$ при любом комплексном α. Интегрируя обе части этого неравенства по s и принимая во внимание (69), получим

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{|\lambda|^2} \leqslant \int_a^b \left[\int_a^b |K(s, t)|^2\,dt\right] ds,$$

или

$$\frac{m}{|\lambda|^2} \leqslant \int_a^b \left[\int_a^b |K(s, t)|^2\,dt\right] ds,$$

откуда

$$m \leqslant |\lambda|^2 \int_a^b \left[\int_a^b |K(s, t)|^2\,dt\right] ds,$$

причем в силу непрерывности ядра интеграл, стоящий справа, можно толковать и как двойной интеграл. Из написанного неравенства следует, что число линейно-независимых функций, соответствующих характеристическому значению λ, не может превышать числа, стоящего в правой части этого неравенства, т. е.

Теорема 8. *Всякому характеристическому значению соответствует лишь конечное число линейно-независимых собственных функций,* т. е. *ранг всякого характеристического значения конечен.*

Отметим, что для характеристических значений λ, далеких от начала $\lambda=0$, правая часть последнего неравенства становится большой ввиду множителя $|\lambda|^2$.

Пусть λ — характеристическое значение. Уравнения (61) и (65) одновременно имеют решения, отличные от нуля. Покажем, что ранг характеристических значений этих уравнений одинаков.

Теорема 9. *Однородное уравнение* (61) *и союзное уравнение* (65) *имеют одинаковое число линейно-независимых решений,* т. е. *ранг их совпадающих характеристических значений одинаков.*

Будем доказывать от обратного. Положим, что ранг уравнения (61) равен m, а ранг уравнения (65) равен n, и пусть $m<n$. Приведем это к противоречию. Пусть

$$\varphi_1(s),\ \varphi_2(s),\ \ldots,\ \varphi_m(s) \tag{70}$$

— линейно-независимые решения уравнения (61), и

$$\psi_1(s),\ \psi_2(s),\ \ldots,\ \psi_n(s) \tag{71}$$

— линейно-независимые решения уравнения (65). Как и выше, мы можем считать, что как функции (70), так и функции (71) образуют ортогональную нормированную систему. Мы имеем

$$\left.\begin{aligned} \varphi_j(s)&=\lambda\int_a^b K(s,\ t)\,\varphi_j(t)\,dt \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ m);\\ \psi_j(s)&=\lambda\int_a^b K(t,\ s)\,\psi_j(t)\,dt \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

Составим новое ядро:

$$L(s,\ t)=K(s,\ t)-\sum_{j=1}^{m}\overline{\varphi_j(t)}\,\overline{\psi_j(s)}, \tag{73}$$

и напишем два союзных уравнения:

$$\varphi(s)=\lambda\int_a^b L(s,\ t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{74}$$

$$\psi(s)=\lambda\int_a^b L(t,\ s)\,\psi(t)\,dt. \tag{75}$$

В силу (73) мы можем переписать эти уравнения в таком виде:

$$\varphi(s)=\lambda\int_a^b K(s,\ t)\,\varphi(t)\,dt-\lambda\sum_{j=1}^m\overline{\psi_j(s)}\int_a^b\overline{\varphi_j(t)}\,\varphi(t)\,dt, \qquad (74_1)$$

$$\psi(s)=\lambda\int_a^b K(t,\ s)\,\psi(t)\,dt-\lambda\sum_{j=1}^m\overline{\varphi_j(s)}\int_a^b\overline{\psi_j(t)}\,\psi(t)\,dt. \qquad (75_1)$$

Пусть $\varphi(s)$ есть какое-либо решение уравнения (74_1). Умножим обе части (74_1) на $\psi_k(s)$, где k — какое-либо из чисел $1,\ 2,\ \ldots,\ m$, и проинтегрируем по s:

$$\int_a^b\varphi(s)\,\psi_k(s)\,ds=\int_a^b\left[\lambda\int_a^b K(s,\ t)\,\psi_k(s)\,ds\right]\varphi(t)\,dt-$$
$$-\lambda\sum_{j=1}^m\int_a^b\overline{\varphi_j(t)}\,\varphi(t)\,dt\int_a^b\overline{\psi_j(s)}\,\psi_k(s)\,ds.$$

Принимая во внимание (72), а также ортогональность и нормированность функций (71), можем переписать это равенство в виде

$$\int_a^b\varphi(s)\,\psi_k(s)\,ds=\int_a^b\psi_k(s)\,\varphi(s)\,ds-\lambda\int_a^b\overline{\varphi_k(s)}\,\varphi(s)\,ds,$$

откуда в силу $\lambda\neq 0$ следует:

$$\int_a^b\overline{\varphi_k(s)}\,\varphi(s)\,ds=0 \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ m). \qquad (76)$$

Таким образом, всякое решение уравнения (74_1) удовлетворяет условиям (76). Но в силу этих условий уравнение (74_1) можно переписать в виде

$$\varphi(s)=\lambda\int_a^b K(s,\ t)\,\varphi(t)\,dt,$$

т. е. всякое решение уравнения (74_1) [т. е. (74)] удовлетворяет и уравнению (61). Тем самым $\varphi(s)$ должно представляться в виде линейной комбинации функций (70):

$$\varphi(s)=\sum_{j=1}^m c_j\varphi_j(s). \qquad (77)$$

Покажем, что все коэффициенты c_j должны равняться нулю. Умножим обе части (77) на $\overline{\varphi_k(s)}$ и проинтегрируем по s:

$$\int_a^b\varphi(s)\,\overline{\varphi_k(s)}\,ds=\sum_{j=1}^m c_j\int_a^b\varphi_j(s)\,\overline{\varphi_k(s)}\,ds.$$

Пользуясь (76) и ортогональностью и нормированностью функций (70), получим $0=c_k$. Таким образом, из (77) следует $\varphi(s)\equiv 0$, т. е. однородное уравнение (74) имеет только нулевое решение. Покажем, что союзное уравнение (75) имеет решения, отличные от нулевого. Подставим в (75_1) $\psi(s)=\psi_k(s)$, где $k>m$. Принимая во внимание, что функции (71) образуют ортогональную, нормированную систему, получим

$$\psi_k(s)=\lambda\int_a^b K(s,\ t)\,\psi_k(t)\,dt,$$

откуда в силу (72) и видно, что $\psi(s)=\psi_k(s)$ при $k>m$ удовлетворяет уравнению (75). Итак, мы получили противоречие с теоремой 7: уравнение (74) имеет только нулевое решение, а союзное уравнение (75) имеет решения, отличные от нулевого. Таким образом, случай $m<n$ невозможен.

Точно так же доказывается, что и случай $m>n$ невозможен и потому $m=n$, и теорема 9 доказана.

Отметим, что из сказанного выше вытекает, что однородные уравнения (74) и (75) имеют только нулевое решение, т. е. λ не есть характеристическое значение ядра $L(s,\ t)$.

Перейдем теперь к вопросу о решении неоднородного уравнения:

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,\ t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{78}$$

если λ — характеристическое значение. Мы видели, что для разрешимости уравнения (78) необходимо, чтобы $f(s)$ удовлетворяла условию:

$$\int_a^b f(s)\,\psi(s)\,ds=0, \tag{79}$$

где $\psi(s)$ — любое решение уравнения:

$$\psi(s)=\lambda\int_a^b K(t,\ s)\,\psi(t)\,dt. \tag{80}$$

Переходим теперь к доказательству достаточности условия (79). Пусть оно выполнено. Составляем ядро $L(s,\ t)$ согласно формуле (73). Как мы показали, λ уже не есть характеристическое значение этого ядра, так что уравнение

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\int_a^b L(s,\ t)\,\varphi(t)\,dt \tag{81}$$

имеет решение. Перепишем это уравнение в виде:

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,\ t)\,\varphi(t)\,dt-\lambda\sum_{j=1}^{m}\overline{\psi_j(s)}\int_a^b\overline{\varphi_j(t)}\,\varphi(t)\,dt. \tag{81_1}$$

Умножая, как и при доказательстве теоремы 9, на $\psi_k(s)$ и интегрируя по s, получим

$$\int_a^b \varphi(s)\psi_k(s)\,ds = \int_a^b f(s)\psi_k(s)\,ds + \int_a^b \psi_k(s)\varphi(s)\,ds - \lambda\int_a^b \overline{\varphi_k(t)}\,\varphi(t)\,dt,$$

откуда в силу (79) получаем:

$$\int_a^b \overline{\varphi_k(t)}\,\varphi(t)\,dt = 0 \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Таким образом, уравнение (81_1) или, что то же самое, уравнение (81), сводится к уравнению (78), т. е. решение $\varphi(s)$ уравнения (81) является и решением уравнения (78). Достаточность условия (79) доказана.

Если это условие выполнено, то, как всегда для линейных неоднородных уравнений, все решения этого уравнения представляют собой сумму какого-либо частного решения $\varphi_0(s)$ этого уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения:

$$\varphi(s) = \varphi_0(s) + \sum_{j=1}^{m} c_j\varphi_j(s), \tag{82}$$

где c_j — произвольные постоянные. Тем самым в этом случае уравнение (78) имеет бесчисленное множество решений. Решение $\varphi_0(s)$ можно построить при помощи резольвенты ядра $L(s,\ t)$.

Предыдущие рассуждения приводят нас к следующей теореме.

Теорема 10. *Если λ есть характеристическое значение, то для разрешимости уравнения* (78) *необходимо и достаточно, чтобы свободный член удовлетворял условию* (79), *в котором $\psi(s)$ — любая собственная функция союзного уравнения, т. е. любое решение уравнения* (80). *Если условие* (79) *выполнено, то уравнение имеет бесчисленное множество решений, а все эти решения выражаются формулой* (82).

Замечание. Достаточно проверить условие (79), подставляя вместо $\psi(s)$ полный набор линейно-независимых решений $\psi_1(s)$, $\psi_2(s)$, ..., $\psi_m(s)$ уравнения (80), ибо всякое другое решение есть их линейная комбинация. Таким образом, если условие (79) выполнено при $\psi(s) = \psi_k(s)$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$, то оно выполнено и для любого решения $\psi(s)$ уравнения (80).

Вместо уравнения, *союзного* с однородным уравнением

$$\varphi(s) = \lambda\int_a^b K(s,\ t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{83}$$

а именно, уравнения

$$\psi(s) = \lambda\int_a^b K(t,\ s)\,\psi(t)\,dt, \tag{84_1}$$

часто рассматривают *сопряженное* с (83) уравнение:

$$\omega(s) = \bar{\lambda} \int_a^b \overline{K(t, s)}\, \omega(t)\, dt. \qquad (84_2)$$

Уравнения (84) имеют комплексно-сопряженные решения: $\psi(s) = \bar{\omega}(s)$, и условие разрешимости (79) должно иметь вид

$$\int_a^b f(s)\, \overline{\omega(s)}\, ds = 0,$$

где $\omega(s)$ — любое решение уравнения (84_2).

Аппарат, на основании которого были доказаны основные теоремы, был впервые дан Фредгольмом (1903 г.). Эти теоремы аналогичны тем, которые были доказаны в алгебре при решении систем линейных уравнений [III_1; 15].

11. Миноры Фредгольма. Приведенные выше рассуждения позволяют получить и полную совокупность линейно-независимых собственных функций уравнения с ядром $K(s, t)$, соответствующих заданному характеристическому значению. Мы приведем только результаты, не останавливаясь на их доказательствах [1]). Пользуясь обозначением (49), введем следующие величины:

$$B_n\begin{pmatrix} s_1 \dots s_p \\ t_1 \dots t_p \end{pmatrix} = \int_a^b \dots \int_a^b K\begin{pmatrix} s_1 \dots s_p & r_1 \dots r_n \\ t_1 \dots t_p & r_1 \dots r_n \end{pmatrix} dr_1 \dots dr_n,$$

$$B_0\begin{pmatrix} s_1 \dots s_p \\ t_1 \dots t_p \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} s_1 \dots s_p \\ t_1 \dots t_p \end{pmatrix}.$$

По определению, p-й минор Фредгольма выражается рядом

$$D_p(s, t; \lambda) = D\left(\begin{matrix} s_1 \dots s_p \\ t_1 \dots t_p \end{matrix}; \lambda\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^{n+p-1}}{n!} B_n\begin{pmatrix} s_1 \dots s_p \\ t_1 \dots t_p \end{pmatrix}.$$

Заметим, что при $p=1$ этот ряд совпадает с (53). Пусть λ_0 — корень $D(\lambda)$ кратности r. Рассматривая последовательность

$$D(\lambda_0),\ D\left(\begin{matrix} s_1 \\ t_1 \end{matrix}; \lambda_0\right),\ D\left(\begin{matrix} s_1\ s_2 \\ t_1\ t_2 \end{matrix}; \lambda_0\right), \dots,$$

мы найдем в ней первый член, не равный тождественно нулю. Пусть

$$D\left(\begin{matrix} s_1 \dots s_q \\ t_1 \dots t_q \end{matrix}; \lambda_0\right) \not\equiv 0.$$

Число q, относительно которого можно показать, что оно не превосходит r, где r — кратность корня $\lambda = \lambda_0$ уравнения $D(\lambda) = 0$, есть *ранг характеристического значения* λ_0. Если s_i' и t_i' — такие значения переменных s_i и t_i, при которых имеет место численное неравенство

$$D\left(\begin{matrix} s_1' \dots s_q' \\ t_1' \dots t_q' \end{matrix}; \lambda_0\right) \neq 0,$$

---

[1]) См. И. И. Привалов, Интегральные уравнения, 1935 г., стр. 61.

то полная совокупность линейно-независимых (вообще говоря, не ортогональных и не нормированных) собственных функций, соответствующих характеристическому значению λ_0, определяется формулой:

$$\varphi_k(s) = D\begin{pmatrix} s'_1 & \dots & s'_{k-1} & s & s'_{k+1} & \dots & s'_q \\ t'_1 & \dots & t'_{k-1} & t'_k & t'_{k+1} & \dots & t'_q \end{pmatrix}; \ \lambda_0 \qquad (k=1, 2, \dots, q),$$

а для союзного уравнения тому же характеристическому значению будет соответствовать следующая совокупность собственных функций:

$$\psi_k(s) = D\begin{pmatrix} s'_1 & \dots & s'_{k-1} & s'_k & s'_{k+1} & \dots & s'_q \\ t'_1 & \dots & t'_{k-1} & s & t'_{k+1} & \dots & t'_q \end{pmatrix}; \ \lambda_0 \qquad (k=1, 2, \dots, q).$$

12. Вырожденные уравнения. Укажем теперь класс интегральных уравнений, решение которых сводится к алгебраическим уравнениям первой степени. Ядро $K(s, t)$ называется *вырожденным*, если оно представляет собой конечную сумму произведений функций только от s на функции только от t:

$$K(s, t) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k(s)\,\sigma_k(t). \tag{85}$$

Функции $\rho_k(s)$, так же как и функции $\sigma_k(t)$, мы можем считать линейно-независимыми. Если бы некоторое $\rho_p(s)$ выражалось линейно через остальные $\rho_k(s)$, то мы могли бы подставить это выражение $\rho_p(s)$ в (85). При этом число слагаемых уменьшилось бы.

Рассмотрим уравнение с таким ядром и союзное с ним уравнение:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(s) &= f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt, \\ \psi(s) &= g(s) + \lambda \int_a^b K(t, s)\,\psi(t)\,dt. \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

Принимая во внимание (85), получим

$$\left.\begin{aligned} \varphi(s) &= f(s) + \lambda \sum_{k=1}^{n} \rho_k(s) \int_a^b \sigma_k(t)\,\varphi(t)\,dt, \\ \psi(s) &= g(s) + \lambda \sum_{k=1}^{n} \sigma_k(s) \int_a^b \rho_k(t)\,\psi(t)\,dt, \end{aligned}\right\} \tag{87}$$

или

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k \rho_k(s), \quad \psi(s) = g(s) + \lambda \sum_{k=1}^{n} y_k \sigma_k(s), \tag{88}$$

где x_k и y_k — некоторые *числа*, определяемые равенствами

$$x_k = \int_a^b \sigma_k(t)\,\varphi(t)\,dt; \quad y_k = \int_a^b \rho_k(t)\,\psi(t)\,dt.$$

Таким образом, всякое решение уравнений (87) должно иметь вид (88), и все сводится к нахождению не функций, а чисел x_k и y_k.

Подставляя выражения (88) в уравнения (87) и приравнивая коэффициенты при линейно-независимых функциях $\rho_k(s)$ и $\sigma_k(s)$, получим для определения x_k и y_k две системы уравнений:

$$x_i - \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = f_i, \tag{89_1}$$

$$y_i - \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{ki} y_k = g_i, \tag{89_2}$$

где

$$a_{ik} = \int_a^b \sigma_i(s)\rho_k(s)\,ds; \quad f_i = \int_a^b f(s)\sigma_i(s)\,ds, \quad g_i = \int_a^b g(s)\rho_i(s)\,ds. \tag{90}$$

Определители систем (89_1) и (89_2) отличаются лишь заменой строк столбцами.

Если, например, определитель системы (89_1) отличен от нуля, то при любых f_i мы получим определенные значения для x_i. Подставляя их в (88), будем иметь $\varphi(s)$. Однородным уравнениям

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt; \qquad \psi(s) = \lambda \int_a^b K(t, s)\psi(t)\,dt$$

будут соответствовать однородные системы:

$$x_i - \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = 0, \tag{91_1}$$

$$y_i - \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{ki} y_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{91_2}$$

Приравнивая определитель одной из этих систем (все равно какой) нулю, мы получим алгебраическое уравнение для определения характеристических значений. Если $\lambda = \lambda_0$ — какой-либо корень этого уравнения, то система (91_1) имеет решение $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, отличное от нулевого, и, подставляя его в формулу

$$\varphi(s) = \lambda_0 \sum_{k=1}^{n} x_k \rho_k(s), \tag{92}$$

получим собственную функцию.

Доказанные выше теоремы сведутся в данном случае к известным теоремам линейной алгебры [III_1; 8, 9, 10, 15].

Отметим, что мы можем получить однородную систему (91_1) и для неоднородного уравнения (87), если только все числа f_i равны нулю, т. е.

$$\int_a^b f(s)\sigma_i(s)\,ds = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{93}$$

Если при этом λ не есть характеристическое значение, то система (91_1) даст нам только нулевое решение, и в силу (88) мы получим $\varphi(s)=f(s)$. Это решение можно проверить непосредственной подстановкой его в (87), если принять во внимание (93). Вырожденными ядрами пользуются для приближенного решения интегральных уравнений, заменяя данное ядро близким к нему вырожденным ядром и затем с помощью указанного выше алгебраического аппарата решая полученное вырожденное уравнение. Этот метод приближенного решения интегральных уравнений, как и другие методы, изложены в книге Л. В. Канторовича и В. И. Крылова «Приближенные методы высшего анализа» (1950 г.).

13. Примеры 1. Пусть

$$K(s,\ t)=\cos(s+t)=\cos s\cos t-\sin s\sin t\begin{pmatrix}0\leqslant s\leqslant\pi\\0\leqslant t\leqslant\pi\end{pmatrix}.$$

В данном случае

$$\rho_1(s)=\sigma_1(s)=\cos s;\qquad \rho_2(s)=\sigma_2(s)=i\sin s,$$

причем мнимый множитель i участвует только в промежуточных выкладках. Вычисляя a_{ik}, получим

$$a_{11}=\int_0^\pi\cos^2 s\,ds=\frac{\pi}{2};\qquad a_{12}=a_{21}=0;\qquad a_{22}=-\int_0^\pi\sin^2 s\,ds=-\frac{\pi}{2}.$$

Система (89_1) принимает вид

$$\left(1-\lambda\frac{\pi}{2}\right)x_1=f_1;\qquad \left(1+\lambda\frac{\pi}{2}\right)x_2=f_2.$$

Имеются два характеристических значения $\lambda_{1,2}=\pm\dfrac{2}{\pi}$ и соответствующие нормированные собственные функции:

$$\varphi_1(s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos s,\qquad \varphi_2(s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin s.$$

2. Пусть

$$K(s,\ t)=st+s^2t^2\qquad\begin{pmatrix}-1\leqslant s\leqslant 1\\-1\leqslant t\leqslant 1\end{pmatrix}.$$

В данном случае $\rho_1(s)=\sigma_1(s)=s$; $\rho_2(s)=\sigma_2(s)=s^2$ и

$$a_{11}=\frac{2}{3};\qquad a_{12}=a_{21}=0;\qquad a_{22}=\frac{2}{5}.$$

Имеются два характеристических значения $\lambda_1=\dfrac{3}{2}$ и $\lambda_2=\dfrac{5}{2}$ и соответствующие им собственные функции:

$$\varphi_1(s)=\sqrt{\frac{3}{2}}\,s;\qquad \varphi_2(s)=\sqrt{\frac{5}{2}}\,s^2.$$

В обоих примерах ядро $K(s,\ t)$ было вещественным и оно удовлетворяло условию $K(t,\ s)=K(s,\ t)$. Такие ядра имеют только вещественные характеристические значения.

Теорию интегральных уравнений с симметричными ядрами мы изложим ниже. Эти уравнения имеют широкие приложения в математической физике.

3. Дадим теперь пример вырожденного вещественного ядра с мнимыми характеристическими значениями. Пусть

$$K(s, t) = s - t \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqslant s \leqslant 1 \\ 0 \leqslant t \leqslant 1 \end{pmatrix}.$$

В данном случае можно считать:

$$\rho_1(s) = s; \quad \rho_2(s) = -1; \quad \sigma_1(t) = 1; \quad \sigma_2(t) = t,$$

и отсюда

$$a_{11} = \frac{1}{2}; \quad a_{12} = -1; \quad a_{21} = \frac{1}{3}; \quad a_{22} = -\frac{1}{2}.$$

Для определения характеристических значений получаем уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{2}\lambda & \lambda \\ -\frac{1}{3}\lambda & 1 + \frac{1}{2}\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{12}\lambda^2 + 1 = 0,$$

имеющее чисто мнимые корни. В приведенном примере вещественное ядро удовлетворяет условию $K(t, s) = -K(s, t)$.

Такие кососимметричные ядра имеют только чисто мнимые характеристические значения.

4. Дадим еще пример вырожденного ядра, не имеющего характеристических значений. Пусть

$$K(s, t) = \sin s \sin 2t \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqslant s \leqslant \pi \\ 0 \leqslant t \leqslant \pi \end{pmatrix}.$$

В данном случае $n = 1$ и единственный элемент a_{ik} будет:

$$a_{11} = \int_0^\pi \sin s \sin 2s \, ds = 0.$$

Однородные системы (91_1) и (92_2) дают нам $x_1 = y_1 = 0$, и однородное уравнение при всяком λ имеет только нулевое решение. Уравнение, дающее характеристические значения, превращается в данном случае в нелепое неравенство $1 = 0$.

14. Обобщение полученных результатов. При изложении теории интегральных уравнений мы предполагали, что искомая функция $\varphi(s)$ и свободный член $f(s)$ суть функции одной независимой переменной, которая может меняться в некотором промежутке $[a, b]$. Этот же промежуток был промежутком изменения и для обоих аргументов ядра $K(s, t)$. Вся теория останется совершенно неизменной, если мы будем предполагать, что функции $\varphi(M)$ и $f(M)$ суть функции точки в некоторой ограниченной области B любого числа измерений или на некоторой поверхности или на некоторой кривой. При этом ядро $K(M, N)$ будет функцией пары точек M и N, каждая из которых может меняться

в упомянутой области или на поверхности или на кривой, и знак интеграла в интегральном уравнении надо понимать как интегрирование по упомянутой области или поверхности или кривой, так что интегральное уравнение запишется в виде

$$\varphi(M) = f(M) + \int_B K(M, N)\,\varphi(N)\,d\omega_N. \tag{94}$$

Мы пишем лишь один знак интеграла, но надо помнить, что интеграл может быть кратным интегралом, распространенным по упомянутой области, и $d\omega_N$ обозначает элемент площади или объема этой области или элемент длины кривой. Например, если областью изменения является некоторая ограниченная область B на плоскости (x, y), то уравнение (94) в координатах может быть записано следующим образом:

$$\varphi(x, y) = f(x, y) + \iint_B K(x, y; \xi, \eta)\,\varphi(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Функцию $f(M)$ мы считаем непрерывной в замкнутой области B и ищем непрерывные в этой области решения $\varphi(M)$. Ядро $K(M, N)$ считается непрерывной функцией пары точек (M, N), причем каждая может меняться в замкнутой области B.

Рассмотрим теперь систему m интегральных уравнений относительно такого же числа искомых функций:

$$\varphi_i(s) = f_i(s) + \int_a^b \sum_{j=1}^{m} K_{ij}(s, t)\,\varphi_j(t)\,dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Вместо ядра мы имеем в данном случае матрицу функций $K_{ik}(s, t)$.

Нетрудно привести написанную систему к одному интегральному уравнению с одной искомой функцией. Чтобы не усложнять дело излишними обозначениями, положим, что $m = 2$:

$$\begin{aligned} \varphi_1(s) &= f_1(s) + \int_a^b [K_{11}(s, t)\,\varphi_1(t) + K_{12}(s, t)\,\varphi_2(t)]\,dt, \\ \varphi_2(s) &= f_2(s) + \int_a^b [K_{21}(s, t)\,\varphi_1(t) + K_{22}(s, t)\,\varphi_2(t)]\,dt. \end{aligned} \tag{95}$$

Выше мы говорили, что вся теория интегральных уравнений остается неизменной, если основной областью является не промежуток, а любая ограниченная область на плоскости, на поверхности или в пространстве. Можно считать также, что переменная точка пробегает не один отрезок или не одну область, а несколько отдельно лежащих отрезков или областей. Вся теория остается при этом совершенно неизменной. Для приведения системы (95) к одному уравнению возьмем за основную область промежуток

$[a, b]$, взятый два раза, или, иначе говоря, мы берем за основную область два экземпляра промежутка $[a, b]$. Эти экземпляры друг с другом никак не связаны. Мы считаем $f(M)=f_1(M)$, если точка M находится на первом экземпляре, и $f(M)=f_2(M)$, если точка M находится на втором экземпляре. Аналогично определяется и $\varphi(M)$ через $\varphi_1(M)$ и $\varphi_2(M)$. Ядро $K(M, N)$ определяется следующим образом:

$$\begin{array}{ll} K(M, N)=K_{11}(M, N) & K(M, N)=K_{12}(M, N) \\ (M \text{ и } N \text{ на 1-м экз.}) & (M \text{ на 1-м экз.; } N \text{ на 2-м экз.}), \\ K(M, N)=K_{21}(M, N) & K(M, N)=K_{22}(M, N) \\ (M \text{ на 2-м экз.; } N \text{ на 1-м экз.}) & (M \text{ и } N \text{ на 2-м экз.}). \end{array} \tag{96}$$

При этом система (94) приводится к одному интегральному уравнению с непрерывным ядром в основной области J, состоящей из двух экземпляров отрезка $[a, b]$:

$$\varphi(M)=f(M)+\int_J K(M, N)\,\varphi(N)\,d\omega_N. \tag{97}$$

Интегрирование производится по обоим экземплярам промежутка и можно считать $d\omega_N=dx$.

Изложенная теория остается справедливой и при более общих предположениях относительно ядра, чем его непрерывность. Можно, например, предположить, что $K(s, t)$ ограничено и имеет конечное число точек и линий разрыва непрерывности, причем линии имеют уравнения вида $t=\omega(s)$. Такие ядра мы будем называть в дальнейшем регулярными. Отметим, что если ядро $K(s, t)$ имеет разрыв вдоль прямой $s=s_0$ (ядро не регулярно), то и функция

$$\omega(s)=\int_a^b K(s, t)\,h(t)\,dt \tag{98}$$

будет, вообще говоря, иметь разрыв вдоль $s=s_0$ и при предположении непрерывности $h(t)$.

Пусть ядро регулярно и, для определенности, предположим, что его разрывы находятся на диагонали $t=s$ квадрата k_0, а функция $h(t)$, например, непрерывна и тем самым ограничена, т. е. $|h(t)|\leqslant m$, где m — некоторое положительное число. Мы имеем

$$|\omega(s)-\omega(s')|\leqslant m\int_a^b |K(s, t)-K(s', t)|\,dt. \tag{99}$$

При любом заданном положительном ε существует, ввиду ограниченности подынтегральной функции, такое положительное число δ, что написанный интеграл по промежутку $[s-\delta, s+\delta]$ будет меньше ε. Положим, что s' находится внутри этого промежутка. При интегрировании по оставшимся промежуткам $[a, s-\delta]$ и

$[s+\delta, b]$ подынтегральная функция будет непрерывной функцией двух переменных s' и t и, следовательно, при всех s', достаточно близких к s, интеграл по упомянутым двум промежуткам будет также меньше ε. Отсюда следует, что левая часть неравенства (99) при всех s', достаточно близких к s, будет меньше $3m\varepsilon$, а это дает, в силу произвольности ε, непрерывность функции $\omega(s)$. Аналогичным образом можно показать, что если $K'(s, t)$ и $K''(s, t)$ — два ядра, удовлетворяющих указанному выше условию, то функция

$$K'''(s, t)=\int_a^b K''(s, t_1)\, K'(t_1, t)\, dt_1$$

будет непрерывной функцией своих аргументов. Таким образом, если ядро $K(s, t)$ удовлетворяет указанным выше условиям, то второе повторное ядро будет уже непрерывным. Изменение порядка интегрирования, которым мы пользовались при доказательстве основных теорем, останется справедливым и при сделанном предположении об ядре.

Вопрос становится гораздо более сложным, если ядро неограничено. В дальнейшем мы исследуем этот вопрос и выделим те неограниченные ядра, для которых имеют место доказанные выше теоремы.

15. Компактные множества непрерывных функций. Существенным моментом теории интегральных уравнений является понятие компактности бесконечного множества функций. Мы займемся сейчас этим понятием для множества непрерывных функций. В томе V мы систематически исследуем это понятие для других классов функций и с более общих точек зрения. Предварительно напомним некоторые факты, изложенные в [**II; 92, 93**]. Если $\mathscr{E}$ есть бесконечное множество вещественных или комплексных чисел, модуль которых ограничен одним и тем же числом $M>0$, т. е. для всех чисел x из $\mathscr{E}$ имеет место неравенство $|x|\leqslant M$, то из всякой бесконечной последовательности чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots$ из $\mathscr{E}$ можно выделить подпоследовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots (n_1>n_2>n_3>\ldots)$, имеющую предел.

Все рациональные числа, принадлежащие какому-либо промежутку $[a, b]$, можно расположить в виде последовательности (не монотонной) [**II; 93**]

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

Всякое множество чисел или каких-либо объектов, члены которого можно расположить в виде последовательности, пронумерованной целыми положительными числами, называется *счетным множеством*. Отметим еще, что рациональные числа расположены на промежутке $[a, b]$ всюду плотно, т. е. любой сколь угодно

малый фиксированный промежуток $[\alpha, \beta]$, входящий в $[a, b]$, содержит бесконечное множество рациональных чисел. Таким образом, рациональные числа, расположенные на промежутке $[a, b]$, образуют счетное всюду плотное множество. Совершенно аналогично точки с рациональными координатами, расположенные в какой-либо области (конечной или бесконечной) плоскости, трехмерного или n-мерного пространства, образуют счетное всюду плотное множество. Перейдем теперь к рассмотрению бесконечных множеств непрерывных на конечном промежутке $[a, b]$ функций.

Определение 1. *Бесконечное множество $\mathscr{E}$ непрерывных на конечном промежутке $[a, b]$ функций называется компактным, если из любой бесконечной последовательности функций $\varphi_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots)$, принадлежащих $\mathscr{E}$, можно выделить подпоследовательность $\varphi_{n_k}(x)$, равномерно стремящуюся к предельной функции на $[a, b]$.*

Для компактности множества $\mathscr{E}$ непрерывных функций одной ограниченности функций недостаточно. Определим некоторое свойство множества $\mathscr{E}$ непрерывных функций $f(x)$, которое играет существенную роль для компактности. Известно, что любая непрерывная в $[a, b]$ функция обладает свойством равномерной непрерывности: при любом заданном $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$|f(x'') - f(x')| \leqslant \varepsilon \quad (x' \text{ и } x'' \text{ из } [a, b] \text{ и } |x'' - x'| \leqslant \delta). \tag{100}$$

При заданном $\varepsilon > 0$ число $\delta > 0$ может быть различным для различных $f(x)$ и, если $\mathscr{E}$ состоит из бесчисленного множества различных непрерывных функций, то при заданном $\varepsilon > 0$ числа $\delta > 0$, при котором для всех $f(x)$ из $\mathscr{E}$ выполняется (100), может и не быть.

Определение 2. *Говорят, что множество $\mathscr{E}$ состоит из равностепенно непрерывных функций, если при любом заданном $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$, одно и то же для всех функций $f(x)$ из $\mathscr{E}$ такое, что выполнено* (100).

Сформулируем теперь основную теорему, дающую достаточное условие компактности (теорема Арцела).

Теорема. *Если $\mathscr{E}$ есть множество функций $f(x)$, равностепенно непрерывных в $[a, b]$ и ограниченных по модулю одним и тем же числом L, т. е. $|f(x)| \leqslant L$ для всех $f(x)$ из $\mathscr{E}$, то множество $\mathscr{E}$ компактно.*

Предварительно докажем одну лемму.

Лемма. *Если $f_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ — некотороя бесконечная последовательность функций, заданных в $[a, b]$ и ограниченных по модулю одним и тем же числом L, то, каково бы ни было счетное множество точек x_k $(k=1, 2, \ldots)$ из $[a, b]$, можно из последовательности $f_n(x)$ выделить подпоследовательность, которая сходится во всех этих точках.*

По условию леммы $|f_n(x)| \leqslant L$ $(n=1, 2, \ldots)$ при $a \leqslant x \leqslant b$, и можно из последовательности чисел $f_n(x_1)$ выделить сходящуюся

подпоследовательность, т. е. из последовательности функций $f_n(x)$ можно выделить подпоследовательность

$$f_1^{(1)}(x),\ f_2^{(1)}(x),\ f_3^{(1)}(x),\ \ldots, \tag{I}$$

которая сходится в точке $x=x_1$. Если для функций (I) положить $x=x_2$, то получим числа $f_k^{(1)}(x_2)$, модули которых также не превосходят L. Поэтому из последовательности функций (I) можно выделить такую подпоследовательность

$$f_1^{(2)}(x),\ f_2^{(2)}(x),\ f_3^{(2)}(x),\ \ldots, \tag{II}$$

которая сходится не только в точке $x=x_1$, поскольку она выделена из последовательности (I), сходящейся при $x=x_1$, но и в точке $x=x_2$. Подставляя $x=x_3$, заметим, что все числа $f_k^{(2)}(x_3)$ по модулю меньше или равны L, и из последовательности (II) мы можем выделить новую подпоследовательность

$$f_1^{(3)}(x),\ f_2^{(3)}(x),\ f_3^{(3)}(x),\ \ldots, \tag{III}$$

которая будет сходиться в точках $x=x_1$, $x=x_2$, $x=x_3$. Продолжая это построение дальше, получим вообще последовательности

$$f_1^{(m)}(x),\ f_2^{(m)}(x),\ f_3^{(m)}(x),\ \ldots \quad (m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots), \tag{m}$$

которые сходятся в точках $x=x_1$, $x=x_2$, ..., $x=x_m$. Образуем теперь новую последовательность, взяв из последовательности (I) первую функцию, из последовательности (II) вторую функцию, из последовательности (III) третью функцию и т. д.:

$$f^{(1)}(x)=f_1^{(1)}(x),\ f^{(2)}(x)=f_2^{(2)}(x),\ f^{(3)}(x)=f_3^{(3)}(x),\ \ldots,$$
$$f^{(n)}(x)=f_n^{(n)}(x),\ \ldots \tag{*}$$

Покажем, что эта подпоследовательность уже сходится в любой точке $x=x_k$. Действительно, возьмем некоторую точку $x=x_k$. Все функции последовательности (*), начиная с номера $m=k$, т. е. все функции

$$f^{(k)}(x)=f_k^{(k)}(x),\ f^{(k+1)}(x)=f_{k+1}^{(k+1)}(x),\ \ldots, \tag{**}$$

согласно указанному выше построению образуют часть последовательности (m) при $m=k$, и, следовательно, при подстановке в эту последовательность (*) значения $x=x_k$ мы получим сходящуюся последовательность чисел, т. е. последовательность функций (**) сходится в точке $x=x_k$. То же самое можно утверждать и относительно последовательности (*), что и доказывает лемму.

Перейдем теперь к доказательству основной теоремы. Пусть имеется некоторая последовательность функций из $\mathscr{E}$. Применяя доказанную лемму, можно утверждать, что из этой последовательности можно выделить подпоследовательность, которая стремится к пределу во всех точках некоторого счетного множества

точек x_k ($k=1, 2, \ldots$), всюду плотного в $[a, b]$. Это может быть, например, последовательность всех точек из $[a, b]$, имеющих рациональные значения.

Пусть

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots$$

— та выделенная подпоследовательность, сходящаяся во всех точках x_k. Покажем, что она сходится равномерно во всем промежутке $[a, b]$. Составим разность $f_p(x)-f_q(x)$ и представим ее в виде

$$f_p(x)-f_q(x)=[f_p(x)-f_p(x')]+[f_p(x')-f_q(x')]+[f_q(x')-f_q(x)], \quad (\alpha)$$

где x' — одна из точек упомянутого выше множества, всюду плотного на $[a, b]$. Пусть ε — какое-либо заданное положительное число и δ — соответствующее ему число, входящее в определение равностепенной непрерывности. Возьмем конечное множество τ', состоящее из точек x_k, и такое, что точки этого конечного множества разбивают промежуток $[a, b]$ на частичные промежутки, длина каждого из которых $\leqslant\delta$. Это, очевидно, возможно, так как множество всех точек x_k всюду плотно на $[a, b]$. В каждой точке конечного множества точек τ' последовательность (*) имеет предел. Поэтому существует такое число N, что

$$|f_p(x')-f_q(x')|<\varepsilon \text{ при } p \text{ и } q>N, \quad (\beta)$$

если x' — одна из точек упомянутого выше конечного множества τ'. Будем считать, что точка x', входящая в формулу (α), есть одна из точек конечного множества τ', и напишем неравенство

$$|f_p(x)-f_q(x)|\leqslant|f_p(x)-f_p(x')|+|f_p(x')-f_q(x')|+ \\ +|f_q(x')-f_q(x)|, \quad (\gamma)$$

непосредственно следующее из (α). При любом положении x на $[a, b]$ мы можем указать такое x', принадлежащее τ', что $|f_n(x)-f_n(x')|<\varepsilon$ при любом n. Это x' будет одним из концов того частичного промежутка, которому принадлежит x. Кроме того, при p и $q>N$ мы имеем неравенство (β) для любых x', принадлежащих τ'. Таким образом, в силу (γ) мы можем утверждать следующее: при любом заданном положительном ε существует такое N, не зависящее от x, что $|f_p(x)-f_q(x)|<3\varepsilon$ при p и $q>N$ и любом x из $[a, b]$, а это и показывает, что последовательность (*) равномерно сходится на всем промежутке $[a, b]$, и тем самым теорема доказана.

Доказательство годится, очевидно, как для вещественных, так и для комплексных функций. Если нам известно, что последовательность $f_n(x)$ равностепенно непрерывных функций сходится во всякой точке промежутка $[a, b]$ или в точках x_k некоторого множества, всюду плотного в $[a, b]$, то отпадает необходимость

в выделении подпоследовательности, сходящейся во всех точках x_k, и можно утверждать следующее:

Теорема 2. *Если последовательность $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... функций, равностепенно непрерывных на промежутке $[a, b]$, сходится во всех точках этого промежутка (или даже только в точках x_k некоторого множества, всюду плотного в $[a, b]$), то эта последовательность сходится равномерно на $[a, b]$.*

Доказательство теорем буквально переносится и на случай множества $\mathscr{E}$ функций $f(P)$, определенных в некоторой замкнутой области B в n-мерном пространстве или на поверхности. Равностепенная непрерывность здесь, очевидно, определяется так: при любом заданном положительном ε существует такое положительное число η, одно и то же для всех функций из $\mathscr{E}$, что $|f(P) - f(Q)| \leqslant \varepsilon$, если P и Q принадлежат B и расстояние $|PQ| \leqslant \delta$.

Выше было доказано, что ограниченность всех функций множества $\mathscr{E}$ по модулю одним числом и равностепенная непрерывность суть достаточные условия компактности $\mathscr{E}$. Можно показать, что это и необходимые условия (см. т. V).

Пусть имеется интегральный оператор с непрерывным ядром

$$v(s) = \int_a^b K(s, t)\, u(t)\, dt. \tag{101}$$

Мы знаем, что он преобразует непрерывные функции $u(t)$ в непрерывные $v(s)$. Пусть $\mathscr{E}$ есть некоторое бесконечное множество ограниченных функций: $|u(t)| \leqslant m$. Ядро в силу непрерывности в k_0 также ограничено: $|K(s, t)| \leqslant M$, и, следовательно,

$$|v(s)| \leqslant Mm(b-a),$$

т. е. множество функций $v(s)$ ограничено. Имеет место неравенство

$$|v(s) - v(s')| \leqslant m \int_a^b |K(s, t) - K(s', t)|\, dt.$$

В силу непрерывности ядра при заданном $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, не зависящее от $v(s)$, что

$$|K(s, t) - K(s', t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{m(b-a)} \qquad \text{при } |s - s'| \leqslant \delta.$$

Из двух последних неравенств следует, что

$$|v(s) - v(s')| \leqslant \varepsilon \text{ при } |s - s'| \leqslant \delta.$$

Определение. *Оператор называется вполне непрерывным из*) C в C, если он преобразует всякое ограниченное множество*

*) Символом C или $C[a, b]$ обозначается множество (пространство) функций, непрерывных на $[a, b]$.

непрерывных функций $u(t)$ в $[a, b]$ в компактное множество непрерывных в $[a, b]$ функций.

Таким образом, нами доказано, что функции $v(s)$ ограничены и равностепенно непрерывны, а следовательно, и образуют компактное множество и интегральный оператор (101) вполне непрерывен. То же доказательство годится и для регулярного ядра.

16. Неограниченные ядра. Доказанные выше теоремы могут оказаться несправедливыми для неограниченных ядер. В этом и следующем параграфе мы докажем эти теоремы и для некоторого типа неограниченных ядер, а именно, для ядер вида

$$K(s, t) = \frac{L(s, t)}{|s-t|^{\alpha}}, \tag{102}$$

где $L(s, t)$ непрерывна в k_0 и $0 < \alpha < 1$. Такие ядра называются полярными. Непрерывная функция $L(s, t)$ ограничена по модулю в k_0 и

$$|K(s, t)| \leqslant \frac{A}{|s-t|^{\alpha}}, \tag{102$_1$}$$

где A — постоянная.

Предварительно оценим величину интеграла по некоторому конечному промежутку

$$\int_c^d \frac{1}{|s-t|^{\alpha}}\,dt = \int_c^s \frac{dt}{(s-t)^{\alpha}} + \int_s^d \frac{dt}{(t-s)^{\alpha}} \leqslant \frac{2(d-c)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \qquad (0 < \alpha < 1).$$

Рассмотрим интегральный оператор

$$v(s) = \int_a^b \frac{L(s, t)}{|s-t|^{\alpha}} u(t)\,dt, \tag{103}$$

где $u(t)$ принадлежит множеству $\mathscr{E}$ непрерывных функций, ограниченных по модулю определенным числом: $|u(t)| \leqslant m$, и покажем, что $v(s)$ образуют компактное множество в C, т. е. что оператор (103) — вполне непрерывный оператор из C в C. Ограниченность $v(s)$ одним и тем же числом следует из

$$|v(s)| \leqslant mD \qquad \left(D = \frac{2(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} A\right).$$

Остается доказать равностепенную непрерывность $v(s)$. Мы, очевидно, имеем

$$|v(s') - v(s)| \leqslant m \int_a^b \left| \frac{L(s', t)}{|s'-t|^{\alpha}} - \frac{L(s, t)}{|s-t|^{\alpha}} \right| dt. \tag{104}$$

Пусть $\delta > 0$ — некоторое число, малое по сравнению с $(b-a)$. Покроем точки s' и s числовой прямой отрезками $\omega_{2\delta}$ и $\omega'_{2\delta}$ длины 2δ, в середине которых находятся точки s и s'. Эти отрезки

могут перекрывать друг друга и выходить из промежутка $[a, b]$. В интеграле (104) модуль подынтегральной функции не больше

$$\frac{A}{|s'-t|^{\alpha}}+\frac{A}{|s-t|^{\alpha}}.$$

Интегрируя эту сумму по $\omega_{2\delta}$ и $\omega'_{2\delta}$ и складывая результаты, получим положительную величину, которая не больше

$$\frac{2^{3-\alpha}\delta^{1-\alpha}}{1-\alpha}A.$$

Остается проинтегрировать по оставшейся части $[a, b]$, на которой $|s'-t|$ и $|s-t|>\delta$, так что искомый интеграл не больше по абсолютной величине

$$\frac{1}{\delta^{2\alpha}}\int_a^b \left||s-t|^{\alpha}L(s', t)-|s'-t|^{\alpha}L(s, t)\right| dt. \tag{105}$$

Нам надо доказать, что при любом заданном $\varepsilon>0$ существует такое η (не зависящее от $u(t)$), что

$$|v(s')-v(s)|\leqslant\varepsilon \text{ при } |s'-s|\leqslant\eta.$$

Сначала выбираем δ так, чтобы иметь

$$m\frac{2^{3-\alpha}\delta^{1-\alpha}}{1-\alpha}A\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

В силу непрерывности подынтегральной функции в интеграле (105) существует такое η, что и интеграл по оставшейся части $[a, b]$ не больше $\frac{\varepsilon}{2}$, и окончательно мы получаем $|v(s')-v(s)|\leqslant\varepsilon$. Таким образом, доказано, что оператор (103) вполне непрерывен как оператор из C в C.

Исследуем еще некоторые свойства оператора. Введем непрерывное ядро, близкое, в известном смысле, к ядру $K(s, t)$. Пусть γ — малое положительное число. Положим:

$$K_{\gamma}(s, t)=\begin{cases} K(s, t) & \text{при } |s-t|\geqslant\gamma, \\ \dfrac{L(s, t)}{\gamma^{\alpha}} & \text{при } |s-t|<\gamma. \end{cases} \tag{106}$$

Ядро $K_{\gamma}(s, t)$ отличается от ядра $K(s, t)$ только при $|s-t|<\gamma$ и $|K_{\gamma}(s, t)|\leqslant|K(s, t)|$, так что

$$\int_a^b |K_{\gamma}(s, t)|\,dt\leqslant D \qquad \left(D=\frac{2(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}A\right).$$

Наряду с преобразованием (103) рассмотрим интегральное преобразование

$$v_{\gamma}(s)=\int_a^b K_{\gamma}(s, t)u(t)\,dt. \tag{107}$$

Повторяя те же оценки, что и выше, с учетом определения (106), легко получить следующую лемму:

Лемма. *Если непрерывные функции $u(t)$ ограничены по модулю одним и тем же числом, то формула* (107) *при* $0 \leqslant \gamma \leqslant \varepsilon$, *где* $\varepsilon > 0$ *и* $K_0(s, t) = K(s, t)$, *определяет класс равностепенно непрерывных функций, также ограниченных по модулю одним и тем же числом.*

В дальнейшем нам понадобится еще формула перестановки порядка интегрирования

$$\int_a^b \left[\int_a^b K_\gamma(s, t) u_1(t)\, dt\right] u_2(s)\, ds = \int_a^b \left[\int_a^b K_\gamma(s, t) u_2(s)\, ds\right] u_1(t)\, dt,$$

где $u_1(t)$ и $u_2(s)$ — непрерывные в $[a, b]$ функции. Для непрерывного ядра $K_\gamma(s, t)$ она известна [II; 81], и легко показать, что

$$\int_a^b K_\gamma(s, t) u_1(t)\, dt \to \int_a^b K(s, t) u_1(t)\, dt \quad \text{при} \quad \gamma \to +0 \tag{108}$$

равномерно по s. Нам нужна будет еще одна формула. Пусть $\varphi_\gamma(t)$ — непрерывные в $[a, b]$ функции, зависящие от положительного параметра γ, которые стремятся равномерно при $\gamma \to +0$ к функции $\varphi_0(t)$, также, очевидно, непрерывной. Тогда

$$\int_a^b K_\gamma(s, t) \varphi_\gamma(t)\, dt \to \int_a^b K(s, t) \varphi_0(t)\, dt. \tag{109}$$

Это доказывается при помощи очевидного неравенства

$$\left|\int_a^b [K(s, t) \varphi_0(t) - K_\gamma(s, t) \varphi_\gamma(t)]\, dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\int_a^b K(s, t) [\varphi_0(t) - \varphi_\gamma(t)]\, dt\right| + \left|\int_a^b [K(s, t) - K_\gamma(s, t)] \varphi_\gamma(t)\, dt\right|.$$

17. Интегральные уравнения с полярным ядром. Рассмотрим интегральное уравнение с ядром вида (102)

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t)\, dt, \tag{110}$$

где $f(s)$ — заданная и $\varphi(s)$ — искомая непрерывные в $[a, b]$ функции. Положим сначала, что λ не есть характеристическое значение, т. е. уравнение

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t)\, dt \tag{111}$$

имеет только нулевое решение. Покажем, что при этом и однородное уравнение

$$\varphi_\gamma(s) = \lambda \int_a^b K_\gamma(s, t)\, \varphi_\gamma(t)\, dt \tag{111$_1$}$$

имеет только нулевое решение при всех γ, достаточно близких к нулю. Доказываем от обратного. Пусть существует последовательность положительных чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots$, стремящихся к нулю, такая, что уравнения имеют решения

$$\varphi_{\gamma_n}(s) = \lambda \int_a^b K_{\gamma_n}(s, t)\, \varphi_{\gamma_n}(t)\, dt \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{112}$$

отличные от нулевого. Принимая во внимание, что эти решения определены с точностью до постоянного множителя, можно считать, что

$$|\varphi_{\gamma_n}(s)| \leqslant 1, \tag{113}$$

причем при некотором значении s достигается знак равенства. В силу леммы из [16] $\varphi_{\gamma_n}(s)$ равностепенно непрерывны, и из последовательности $\varphi_{\gamma_n}(s)$ можно выделить подпоследовательность, равномерно стремящуюся к некоторой предельной функции $\varphi_0(s)$. Переходя в формуле (112) к пределу, получим

$$\varphi_0(s) = \lambda \int_a^b K(s, t)\, \varphi_0(t)\, dt. \tag{114}$$

В силу равномерности предельного перехода и наличия знака равенства в (113) при некотором s, можем утверждать, что непрерывная функция $\varphi_0(s) \not\equiv 0$, т. е. λ есть характеристическое значение уравнения (111), а это противоречит выше сделанному предположению, т. е. уравнение (111$_1$) при всех $\gamma > 0$, достаточно близких к нулю, имеет только нулевое решение, и можно утверждать, что уравнения

$$\varphi_\gamma(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K_\gamma(s, t)\, \varphi_\gamma(t)\, dt \tag{115}$$

с непрерывным ядром имеют единственное решение при любой $f(s)$. Покажем, что эти решения при всех γ, достаточно близких к нулю, ограничены по модулю одним и тем же числом. Пусть $m_\gamma = \max\limits_{a \leqslant s \leqslant b} |\varphi_\gamma(s)|$. Надо показать, что не существует последовательности m_{γ_n}, которая стремилась бы к $(+\infty)$ при $\gamma_n \to 0$. Пусть такая последовательность есть. Мы имеем

$$\frac{|\varphi_{\gamma_n}(s)|}{m_{\gamma_n}} \leqslant 1, \tag{116}$$

причем при некотором выборе s достигается знак равенства. Полагаем в равенстве (115) $\gamma=\gamma_n$ и делим обе части на m_{γ_n}:

$$\frac{\varphi_{\gamma_n}(s)}{m_{\gamma_n}}=\lambda\int_a^b K_{\gamma_n}(s,\ t)\frac{\varphi_{\gamma_n}(t)}{m_{\gamma_n}}\,dt+\frac{f(s)}{m_{\gamma_n}}. \tag{117}$$

Второе слагаемое правой части стремится к нулю равномерно в $[a,\ b]$, первое слагаемое в силу (115) и леммы [16] дает последовательность равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных функций. Мы можем в силу теоремы Арцела считать, что первое слагаемое при $\gamma_n\to 0$ стремится равномерно в $[a,\ b]$ к предельной функции. Тем самым и левая часть должна стремиться равномерно в $[a,\ b]$ к некоторой предельной функции $\varphi_0(s)$, которая не есть тождественный нуль, так как в (116) достигается знак равенства. Переходя в (117) к пределу, получим (114), т. е. оказывается, что λ — характеристическое значение уравнения (111), что противоречит предположению. Итак, все функции $\varphi_\gamma(s)$ при γ, достаточно близких к нулю, ограничены по модулю одним и тем же числом. После этого из (110) и леммы [16] следует, что функции $\varphi_\gamma(s)$ равностепенно непрерывны. Пользуясь еще раз теоремой Арцела и переходя к пределу, получим

$$\omega(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,\ t)\,\omega(t)\,dt, \tag{118}$$

где $\omega(t)$ — некоторая непрерывная функция.

Таким образом, мы показали, что если λ не является характеристическим значением уравнения (110), то это уравнение имеет решение при любом свободном члене $f(s)$. Единственность решения непосредственно следует из того, что, по предположению, однородное уравнение (111) имеет только нулевое решение.

Рассмотрим теперь однородное уравнение, союзное с (111):

$$\psi(s)=\lambda\int_a^b K(t,\ s)\,\psi(t)\,dt, \tag{119}$$

и покажем, что оно имеет также только нулевое решение. Положим обратное, и пусть $\psi(s)$ — решение этого уравнения, отличное от нулевого. Умножим обе части (110) на $\psi(s)$, интегрируем по s и в повторном интеграле переставляем порядок интегрирования согласно [16]:

$$\int_a^b \varphi(s)\,\psi(s)\,ds=\int_a^b\left[\lambda\int_a^b K(s,\ t)\,\psi(s)\,ds\right]\varphi(t)\,dt+\int_a^b f(s)\,\psi(s)\,ds,$$

откуда в силу (119) получаем условие разрешимости уравнения

(110) (ср. вывод формулы (79) из [10]):

$$\int_a^b f(s)\psi(s)\,dt = 0. \tag{120}$$

Но мы видели, что уравнение (110) разрешимо при любой $f(s)$. Это противоречие показывает, что однородное уравнение (119) имеет только нулевое решение.

Таким образом, для ядер вида (102) мы доказали следующее. Представляются две возможности: или уравнения

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda\int_a^b K(s,\ t)\varphi(t)\,dt,$$

$$\psi(s) = g(s) + \lambda\int_a^b K(t,\ s)\psi(t)\,dt$$

одновременно имеют решения, и притом единственные, при любых свободных членах $f(s)$ и $g(s)$, или соответствующие однородные уравнения имеют решения, отличные от нулевого.

Замечание. Если λ — не характеристическое значение, то мы показали, что уравнение (115) имеет при каждом положительном γ, достаточно близком к нулю, единственное решение, и эти решения ограничены по модулю одним и тем же числом. Далее путем выделения подпоследовательности и предельного перехода мы получили решение исходного уравнения (110).

Нетрудно показать, пользуясь единственностью решения уравнения (110), что выделять подпоследовательность не надо. Действительно, если бы $\varphi_\gamma(x)$ при $\gamma \to +0$ не имело бы определенного предела в некоторой точке s, то мы могли бы выделить две подпоследовательности, которые стремились бы равномерно к двум непрерывным предельным функциям, имеющим различное значение в точке s. Таким образом, мы получили бы два различных решения уравнения (110), что невозможно, если λ — не есть характеристическое значение. Следовательно, $\varphi_\gamma(s)$ без всякого выбора стремится к предельной функции $\omega(s)$. Равномерность стремления к пределу вытекает из того, что функции $\varphi_\gamma(s)$ в силу (115) ограничены по модулю и равностепенно непрерывны.

18. Случай характеристического значения. Положим теперь, что λ есть характеристическое значение. Если одно из однородных уравнений

$$\varphi(s) = \lambda\int_a^b K(s,\ t)\varphi(t)\,dt, \tag{121$_1$}$$

$$\psi(s) = \lambda\int_a^b K(t,\ s)\psi(t)\,dt \tag{121$_2$}$$

имеет конечное число линейно-независимых решений, то, повторяя доказательство теоремы 9 [10], покажем, что и второе уравнение имеет столько же линейно-независимых решений. После этого, совершенно так же как и в [10], можно показать, что условие (120), где $\psi(s)$ — любое решение (121_2), является не только необходимым, но и достаточным условием разрешимости уравнения (110).

Остается показать, что число линейно-независимых решений, например, уравнения (121_1), конечно.

Доказываем от обратного. Положим, что уравнение (121_1) имеет бесконечное множество линейно-независимых решений

$$\varphi_n(s) = \lambda \int_a^b K(s, t)\, \varphi_n(t)\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{122}$$

Можно считать, что решения эти попарно ортогональны

$$\int_a^b \varphi_p(t)\, \overline{\varphi_q(t)}\, dt = 0 \quad \text{при} \quad p \neq q \tag{123}$$

и удовлетворяют неравенству

$$|\varphi_n(s)| \leqslant 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{124}$$

причем достигается знак равенства. Из (122) и (124) следует, что $\varphi_n(s)$ равностепенно непрерывны в $[a, b]$ и что существует в последовательности $\varphi_n(t)$ подпоследовательность, которая стремится равномерно в $[a, b]$ к некоторой предельной функции $\varphi_0(t)$. Переходя в формуле (123) по этой подпоследовательности $\varphi_p(x)$ к пределу, будем иметь

$$\int_a^b \varphi_0(t)\, \overline{\varphi_q(t)}\, dt = 0$$

и еще раз переходя к пределу по знаку q,

$$\int_a^b |\varphi_0(t)|^2\, dt = 0.$$

Но функция $\varphi_0(t)$ не может быть равна тождественно нулю, так как в (124) при всяком n имеет место знак равенства, и формула приводит нас к противоречию. Тем самым доказано, что уравнение имеет лишь конечное число линейно-независимых решений.

Таким образом, для ядер вида (102) доказано еше следующее: если λ — характеристическое значение уравнения (110), то уравнения (121_1) и (121_2) имеют одинаковое конечное число линейно-независимых решений, и для разрешимости уравнения (110) необходимо и достаточно, чтобы свободный член $f(s)$ удовлетворял условию (120), где $\psi(s)$ — любое решение уравнения (121_2).

В одном из следующих параграфов мы докажем, что для полярных ядер во всякой ограниченной части плоскости λ может существовать лишь конечное число характеристических значений и каждое из них может иметь лишь конечный ранг.

19. Многомерный случай. Все сказанное переносится без существенных изменений в доказательствах на многомерный случай. В двумерном случае интегральное уравнение с полярным ядром имеет вид

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_B \frac{L(s, t)}{r^\alpha} \varphi(t)\, dt, \tag{125}$$

где B — ограниченная плоская квадрируемая область; интеграл надо считать двойным по B, причем t — переменная точка интегрирования, dt — элемент площади (в декартовых координатах $dt = dx\, dy$), r — расстояние между точками s и t, $0 < \alpha < 2$ и $L(s, t)$ непрерывна при изменении s и t в замкнутой области B. Так же записывается интегральное уравнение с полярным ядром в трехмерном или вообще n-мерном пространстве $(0 < \alpha < n)$. Совершенно аналогично может быть построена теория интегральных уравнений и при интегрировании по гладким поверхностям. Точные условия гладкости мы сформулируем во второй части этого тома при применении интегральных уравнений в теории потенциала.

20. Интегральные уравнения с регулярным повторным ядром. Мы рассмотрим сейчас произведение двух интегральных операторов с полярным ядром в линейном случае $(n = 1)$. Подробное доказательство для любого числа измерений будет дано в томе V. Пусть два полярных ядра имеют вид

$$K_1 u_1 = v_1(s) = \int_a^b \frac{L_1(s, t)}{|s-t|^\alpha} u_1(t)\, dt;$$

$$K_2 u_2 = v_2(s) = \int_a^b \frac{L_2(s, t)}{|s-t|^\beta} u_2(t)\, dt,$$

где $L_i(s, t)$ непрерывны в k_0 и $0 \leqslant \alpha, \beta < 1$. Произведение $K_2 K_1$ этих операторов есть интегральный оператор с ядром

$$M(s, t) = \int_a^b \frac{L_2(s, \tau) L_1(\tau, t)}{|s-\tau|^\beta |\tau - t|^\alpha} d\tau.$$

Докажем, что $M(s, t)$ непрерывна в k_0 вне диагонали $s = t$. Пусть $s_0 \neq t_0$ и предположим, что точка (s_0, t_0) внутри k_0. Разделим промежуток $a \leqslant \tau \leqslant b$ на две части r_1 и r_2 такие, что r_1

содержит точку $\tau=s_0$, а r_2 — точку $\tau=t_0$ строго внутри себя. Выберем достаточно малое ε такое, что промежутки $|\tau-s_0|\leqslant\varepsilon$, $|\tau-t_0|\leqslant\varepsilon$ находятся строго внутри r_1 и r_2. Промежуток интегрирования $a\leqslant\tau\leqslant b$ разобьем на пять промежутков: $[a,\ s_0-\varepsilon]$, $[s_0-\varepsilon,\ s_0+\varepsilon]$, $[s_0+\varepsilon,\ t_0-\varepsilon]$, $[t_0-\varepsilon,\ t_0+\varepsilon]$, $[t_0+\varepsilon,\ b]$.

Интегралы по $[s_0-\varepsilon,\ s_0+\varepsilon]$ и $[t_0-\varepsilon,\ t_0+\varepsilon]$ сколь угодно малы по абсолютной величине при соответствующем выборе ε, а интегралы по остальным промежуткам — непрерывные функции $(s_0,\ t_0)$.

Отсюда следует, что $M(s,\ t)$ непрерывна в k_0 вне диагонали $s=t$. Если точка $(s_0,\ t_0)$ находится на стороне k_0, то доказательство аналогично.

Рассмотрим теперь, по-прежнему считая $s\neq t$, два случая: $\alpha+\beta>1$ и $\alpha+\beta<1$.

I. $\alpha+\beta>1$. Обозначим $|s-t|=\delta$ и введем новые координаты

$$s'=\frac{s}{\delta};\quad t'=\frac{t}{\delta};\quad \tau'=\frac{\tau}{\delta},\tag{126}$$

так что $|s'-t'|=1$. Мы будем иметь

$$\int\limits_a^b\frac{d\tau}{|s-\tau|^\beta|\tau-t|^\alpha}\leqslant\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\tau}{|s-\tau|^\beta|\tau-t|^\alpha}=\frac{\delta}{\delta^{\alpha+\beta}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\tau'}{|s'-\tau'|^\beta|\tau'-t'|^\alpha}.$$

В последнем интеграле поместим начало оси τ' в точку s' и направим ось из s' в t'. При этом получим

$$\int\limits_a^b\frac{d\tau}{|s-\tau|^\beta|\tau-t|^\alpha}\leqslant\delta^{-(\alpha+\beta-1)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\tau'}{|\tau'|^\beta|\tau'-1|^\alpha}.$$

Последний интеграл сходится, ибо α и $\beta<1$ и $\alpha+\beta>1$, и не зависит от s и t, т. е.

$$\int\limits_a^b\frac{d\tau}{|s-\tau|^\beta|\tau-t|^\alpha}\leqslant c\,|s-t|^{-(\alpha+\beta-1)}\tag{126$_1$}$$

и

$$M(s,\ t)=L(s,\ t)\,|s-t|^{-(\alpha+\beta-1)},\qquad(\alpha+\beta>1),$$

где $L(s,\ t)$ непрерывна при $s\neq t$, как доказано выше, и в силу (126$_1$) ограничена.

II. $\alpha+\beta<1$. Отметим, что при этом интеграл (126) сходится и при $s=t$. Покажем теперь, что имеет место неравенство

$$|s-\tau|^{-\beta}|\tau-t|^{-\alpha}\leqslant|s-\tau|^{-(\alpha+\beta)}+|\tau-t|^{-(\alpha+\beta)}.$$

Действительно, умножим обе части на $|s-\tau|^{\alpha+\beta}$ и обозначим $|s-\tau|\,|\tau-t|^{-1}=r$. Нетрудно видеть, что

$$r^\alpha\leqslant1+r^{\alpha+\beta},$$

ибо при $r \leqslant 1$ $r^{\alpha} \leqslant 1$, а при $r \geqslant 1$ $r^{\alpha} \leqslant r^{\alpha+\beta}$. Таким образом, для ядра $M(s, t)$ при $\alpha+\beta<1$ имеем неравенство

$$|M(s, t)| \leqslant c\left[\int_a^b \frac{d\tau}{|s-\tau|^{\alpha+\beta}}+\int_a^b \frac{d\tau}{|\tau-t|^{\alpha+\beta}}\right],$$

в правой части которого интегралы сходятся равномерно относительно $s \in [a, b]$, $t \in [a, b]$. Отсюда легко заключить, что несобственный интеграл

$$M(s, t)=\int_a^b \frac{L_1(s, \tau) L_2(\tau, t)}{|s-\tau|^{\alpha}|\tau-t|^{\beta}} d\tau$$

равномерно сходится во всем квадрате k_0, включая диагональ $s=t$, и следовательно, $M(s, t)$ — непрерывная в k_0 функция.

Рассмотрим теперь степени для оператора с полярным ядром

$$K(s, t)=\frac{L(s, t)}{|s-t|^{\alpha}}:$$

Для оператора K^2 ядро имеет вид

$$K^2(s, t)=\int_a^b \frac{L(s, \tau) L(\tau, t)}{|s-\tau|^{\alpha}|\tau-t|^{\alpha}} d\tau.$$

На основании сказанного выше для ядер $K^2(s, t)$, $K^3(s, t)$, ... показатели полярности ядра будут соответственно $2\alpha-1$, $3\alpha-2, \ldots$ Пусть p — такое натуральное число, что

$$(p-1)\alpha-(p-2)>0, \quad p\alpha-(p-1)<0.$$

Тогда ядро интегрального оператора $K^p(s, t)$ непрерывно в k_0. Отметим, что степень $K^l(s, t)$ есть не что иное, как повторное итерированное ядро $K_l(s, t)$. Выше мы не рассматривали случай $\alpha+\beta=1$. Этот случай всегда можно исключить, немного изменяя α или β. Это можно сделать, умножая числитель и знаменатель ядра на $|s-t|^{\varepsilon}$, где $\varepsilon>0$ — достаточно малое число.

При $\alpha+\beta=1$ оценка $M(s, t)$ имеет вид

$$|M(s, t)| \leqslant C_1|\lg|s-t||+C_2.$$

В томе V мы рассмотрим многомерный случай в полном объеме. Укажем здесь только результат. Пусть в n-мерном пространстве имеется композиция полярных ядер:

$$M(P, Q)=\int_B \frac{L_1(P, R)}{r_1^{\alpha}} \frac{L_2(R, Q)}{r_2^{\beta}} d\omega_R,$$

где r_1 — расстояние между точками P и R и r_2 — между R и Q, $0<\alpha<n$, $0<\beta<n$, $L_1(P, R)$ и $L_2(R, Q)$ непрерывны

в ограниченной области B n-мерного пространства. Ядро $M(P, Q)$ непрерывно, если P отлично от Q, и имеет оценку:

$$|M(P, Q)| \leqslant \frac{C}{r^{\alpha+\beta-n}}, \qquad \text{если} \quad \alpha+\beta>n;$$

$$|M(P, Q)| \leqslant C_1 |\lg|r|| + C_2, \quad \text{если} \quad \alpha+\beta=n,$$

где r — расстояние между P и Q. Если $\alpha+\beta<n$, то $M(P, Q)$ непрерывно в замкнутой области B.

Рассмотрим однородное уравнение с полярным ядром

$$\varphi(s)=\lambda\int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt. \tag{127}$$

Подставляя вместо $\varphi(t)$ его выражение из правой части, получим

$$\varphi(s)=\lambda^2\int_a^b K_2(s, t)\varphi(t)\,dt.$$

Продолжая так и дальше, будем иметь

$$\varphi(s)=\lambda^p\int_a^b K_p(s, t)\varphi(t)\,dt. \tag{128}$$

Положим, что $K_p(s, t)$ — уже регулярное ядро.

Очевидно, что всякое решение уравнения (127) есть и решение уравнения (128). Но последнее может иметь только конечное число характеристических значений во всякой ограниченной области плоскости λ, ранг характеристического значения конечен, и решение $\varphi(s)$ уравнения с регулярным ядром непрерывно. Следовательно, то же мы можем утверждать и относительно уравнения (127).

Можно показать, что всякая собственная функция уравнения (128) (если λ^p — характеристическое значение) есть линейная комбинация собственных функций уравнений

$$\varphi(s)=\lambda\varepsilon^k\int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt \quad \left(\varepsilon\equiv e^{\frac{2\pi i}{p}}\right) \quad (k=0, 1, \ldots, p-1).$$

21. Аппарат Фредгольма для полярных ядер. Рассмотрим интегральное уравнение с полярным ядром

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt, \tag{129}$$

где

$$K(s, t)=\frac{L(s, t)}{|s-t|^{\alpha}}. \tag{130}$$

В этом случае $K(s, s)$ не имеет смысла и мы не имеем первого следа ядра $K(s, t)$. Положим, что $\alpha<\frac{1}{2}$ *). При этом все повторные ядра, начиная со второго,

*) При $2\alpha<1$ полярные ядра называются слабо полярными.

$K_2(s, t)$, непрерывны и, следовательно, существуют следы

$$A_m = \int_a^b K_m(s, s)\, ds \qquad (m = 2, 3, \ldots). \tag{131}$$

Вернемся к непрерывному ядру и напомним, что резольвента $R(s, t; \lambda)$ определялась формулой

$$R(s, t; \lambda) = \frac{D(s, t; \lambda)}{D(\lambda)}, \tag{132}$$

где $D(s, t; \lambda)$ получалась перемножением двух степенных рядов:

$$D(s, t; \lambda) = [K(s, t) + \lambda K_2(s, t) + \lambda^2 K_3(s, t) + \ldots]\, D(\lambda). \tag{133}$$

Ряд для $D(\lambda)$ определялся при всех λ по формуле (50), а для $|\lambda|$, достаточно близких к нулю, по формуле

$$D(\lambda) = e^{-\left(A_1\lambda + A_2\frac{\lambda^2}{2} + A_3\frac{\lambda^3}{3} + \ldots\right)}.$$

Умножая числитель и знаменатель дроби (132) на $e^{A_1\lambda}$ и обозначая

$$D(s, t, \lambda)\, e^{A_1\lambda} = D_2(s, t, \lambda); \; D(\lambda)\, e^{A_1\lambda} = D_2(\lambda),$$

мы можем написать тождество, аналогичное (133):

$$D_2(s, t; \lambda) = [K(s, t) + \lambda K_2(s, t) + \ldots]\, D_2(\lambda). \tag{134}$$

Оно получается формально из (133), если выразить $D(\lambda)$ через следы и в (134) положить $A_1 = 0$.

Дробь

$$R_2(s, t; \lambda) = \frac{D_2(s, t; \lambda)}{D_2(\lambda)} \tag{135}$$

дает, очевидно, аналитическое продолжение выражения, стоящего в квадратных скобках формулы (134), на всю плоскость λ.

Пока мы говорили о непрерывном ядре. В рассматриваемом случае полярного ядра (130) при $\alpha < \frac{1}{2}$ можно показать, что

$$D_2(\lambda) = e^{-\left(A_2\frac{\lambda^2}{2} + A_3\frac{\lambda^3}{3} + \ldots\right)}$$

есть целая функция λ и что решение уравнения можно представить в виде

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b R_2(s, t; \lambda)\, f(t)\, dt,$$

причем нули $D_2(\lambda)$ суть полюсы $R_2(s, t; \lambda)$. Отметим еще, что все члены в $D(\lambda)$ и $D(s, t; \lambda)$, содержащие A_1, получаются только из элементов главной диагонали определителей, входящих в формулы для d_n и $d_n(s, t)$, и что можно получить $D_2(\lambda)$ и $D_2(s, t; \lambda)$ по упомянутым формулам, полагая $K(s, s) \equiv 0$.

Исследование указанного выше случая принадлежит Гильберту. Совершенно аналогично, если в полярном ядре α таково, что повторные ядра $K_n(s, t)$ непрерывны при $n \geqslant m$, то резольвенту можно представить в виде

$$R_{m+1}(s, t; \lambda) = \frac{D_{m+1}(s, t; \lambda)}{D_{m+1}(\lambda)},$$

где $D_{m+1}(\lambda)$ получается из $D(\lambda)$, если положить $A_1 = A_2 = \ldots = A_m = 0$ и

$$D_{m+1}(s, t, \lambda) = [K(s, t) + \lambda K_2(s, t) + \lambda^2 K_3(s, t) + \ldots]\, D_{m+1}(\lambda).$$

22. Интеграл Лебега. До сих пор мы рассматривали интегральные уравнения с непрерывными или полярными ядрами и искали решения в классе непрерывных функций на конечном промежутке или в конечной области. При этом везде применялся интеграл Римана. Прежде чем переходить к теории интегральных уравнений с интегралом Лебега, мы кратко напомним некоторые основные факты теории из тома II и несколько дополним ее.

Две непрерывные функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные, например, на некотором промежутке $[a, b]$, или в некоторой области, считаются совпадающими, если они тождественно равны, т. е. $f(x)=g(x)$ при всех x из $[a, b]$. В теории Лебега мы ввели понятие «эквивалентных» функций [II; 104], а именно две измеримые функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные на некотором измеримом множестве $\mathscr{E}$, называются эквивалентными на $\mathscr{E}$, если $f(x)=g(x)$ почти везде на $\mathscr{E}$, т. е. если мера множества тех x, при которых $f(x)\neq g(x)$, равна нулю. Нетрудно видеть, что если $f(x)$ эквивалентно $g(x)$, а $g(x)$ эквивалентно некоторой измеримой функции $\omega(x)$ на $\mathscr{E}$, то и $f(x)$ эквивалентно $\omega(x)$.

Две непрерывные функции $f(x)$ и $g(x)$, не равные в какой-либо точке $x=c$, не равны в силу непрерывности и в некотором промежутке, содержащем $x=c$, и, следовательно, не эквивалентны Множество эквивалентных между собой функций образует некоторый класс D, состоящий из бесчисленного множества функций. Каждый такой класс может содержать не больше одной непрерывной функции, но может и не содержать такой функции. В дальнейшем в теории Лебега знак равенства между двумя функциями будет соответствовать их эквивалентности. Было доказано, что эквивалентность $f(x)$ функции, тождественно равной нулю на $[a, b]$, можно выразить равенством

$$\int_a^b |f(x)|\,dx=0,$$

а эквивалентность функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — равенством

$$\int_a^b |\varphi(x)-\psi(x)|\,dx=0;$$

при этом, конечно, считается, что функции суммируемы.

Теория Лебега легко переносится и на комплексные функции

$$f(x)=f_1(x)+if_2(x).$$

Измеримость и суммируемость такой функции сводится к соответствующим свойствам $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

Интеграл определяется равенством:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + i\int_a^b f_2(x)\,dx.$$

Из неравенств

$$|f_1| \leqslant \sqrt{f_1^2+f_2^2};\quad |f_2| \leqslant \sqrt{f_1^2+f_2^2};\quad \sqrt{f_1^2+f_2^2} \leqslant |f_1|+|f_2|$$

следует, что для суммируемости $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы ее модуль $|f(x)|$ был суммируемой функцией. Принадлежность $f(x)$ к L_2 [**II; 161**] равносильна принадлежности f_1 и f_2 к L_2 или, иначе, принадлежности $|f(x)|$ к L_2.

Рассмотрим класс L_2 комплексных функций на некотором измеримом $\mathscr{E}$. Каждую такую функцию назовем элементом L_2 [**ср. II; 161, 162**]. Эквивалентные функции отождествляются как элементы L_2. Эти элементы можно умножать на произвольные комплексные постоянные и складывать.

Если при сложении заменить слагаемые эквивалентными им функциями, то и сумма заменится эквивалентной функцией.

Введем обозначение

$$(\varphi,\ \psi) = \int_a^b \varphi(s)\,\overline{\psi(s)}\,ds. \tag{136}$$

Число $(\varphi,\ \psi)$ называется *скалярным произведением* $\varphi(s)$ и $\psi(s)$. Оно обладает следующими очевидными свойствами:

$$\begin{gathered}(c\varphi,\ d\psi) = c\bar{d}\,(\varphi,\ \psi)\ \ (c \text{ и } d \text{ — постоянные}),\\ (\varphi_1+\varphi_2,\ \psi_1+\psi_2) = (\varphi_1,\ \psi_1)+(\varphi_2,\ \psi_1)+(\varphi_1,\ \psi_2)+(\varphi_2,\ \psi_2),\\ (\varphi,\ \psi) = \overline{(\psi,\ \varphi)}.\end{gathered} \tag{137}$$

Если $(\psi,\ \varphi) = (\varphi,\ \psi)$, то $(\varphi,\ \psi)$ — число вещественное. «Норма» элемента φ определяется равенством

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi,\ \varphi)} = \sqrt{\int_a^b |\varphi(s)|^2\,ds}. \tag{138}$$

Очевидно, что $\|\varphi\| \geqslant 0$, причем знак равенства имеет место только для нулевого элемента φ, т. е. для функции $\varphi(s)$, равной нулю почти везде в $[a,\ b]$ (эквивалентной нулю).

Элементы φ и ψ называются ортогональными, если $(\varphi,\ \psi) = 0$. Нулевой элемент φ ортогонален любому элементу. Имеют место следующие формулы.

$$\|c\varphi\| = |c|\ \|\varphi\|;\quad |(\varphi,\ \psi)| \leqslant \|\varphi\|\cdot\|\psi\|$$

и неравенство треугольника

$$\|\varphi+\psi\| \leqslant \|\varphi\|+\|\psi\|. \tag{139}$$

Если элементы $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ попарно ортогональны, то из (137) получаем теорему Пифагора:

$$\|\psi_1+\psi_2+\ldots+\psi_m\|^2=\|\psi_1\|^2+\|\psi_2\|^2+\ldots+\|\psi_m\|^2.$$

Последовательность элементов φ_n сходится в L_2 к элементу φ, если

$$\|\varphi-\varphi_n\|^2=\int_a^b|\varphi(s)-\varphi_n(s)|^2\,ds\to 0 \text{ при } n\to 0 \tag{140}$$

(сходимость в среднем). При этом будем писать $\varphi_n \Rightarrow \varphi$. Предел может быть только один. Если последовательность φ_n имеет предел, то она сходится в себе, т. е. $\|\varphi_m-\varphi_n\|\to 0$ при беспредельном возрастании m и n, и наоборот, из сходимости в себе вытекает существование предела последовательности φ_n [II; 162].

Это свойство называется обычно *полнотой пространства* L_2. Если бы мы взяли вместо L_2 пространство функций $\varphi(s)$, непрерывных на конечном промежутке $[a, b]$, то мы могли бы повторить для этого пространства все данные выше определения и свойства, кроме полноты, т. е. из $\|\varphi_m-\varphi_n\|\to 0$ при m и $n\to\infty$ не следует существование предела $\varphi(s)$ (непрерывной функции) для последовательности $\varphi_n(s)$ непрерывных функций $\varphi_n(s)$. Но из существования предела $\varphi_n(s)\Rightarrow\varphi(s)$ для последовательности непрерывных функций к непрерывной функции $\varphi(s)$ следует сходимость в себе, т. е. $\|\varphi_m-\varphi_n\|\to 0$ при m и $n\to\infty$. Это вытекает из формулы

$$\varphi_m-\varphi_n=(\varphi_m-\varphi)+(\varphi-\varphi_n)$$

и неравенства треугольника

$$\|\varphi_m-\varphi_n\|\leqslant\|\varphi_m-\varphi\|+\|\varphi-\varphi_n\|.$$

Выражения $c\varphi$, $\varphi+\psi$ и (φ, ψ) непрерывно зависят от числа c и элементов φ и ψ, т. е. если $c_n\to c$, $\varphi_n\Rightarrow\varphi$ и $\psi_n\Rightarrow\psi$, то

$$c_n\varphi_n\Rightarrow c\varphi;\quad \varphi_n+\psi_n\Rightarrow\varphi+\psi;\quad (\varphi_n, \psi_n)\to(\varphi, \psi). \tag{141}$$

Первое и второе утверждения следуют из равенств

$$c\varphi-c_n\varphi_n=(c-c_n)\varphi+c_n(\varphi-\varphi_n),$$
$$(\varphi+\psi)-(\varphi_n+\psi_n)=(\varphi-\varphi_n)+(\psi-\psi_n)$$

и неравенства треугольника. Третье из утверждений было доказано в [II; 162]. Из определения нормы (138) следует, что если $\varphi_n\Rightarrow\varphi$, то $\|\varphi_n\|\to\|\varphi\|$.

Сходимость рядов в L_2 есть сходимость в среднем, т. е.

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) \tag{142}$$

равносильно

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathscr{E}} |S(x)-S_n(x)|^2\,dx=0,$$

где

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x).$$

Все функции $u_k(x)$ можно заменить эквивалентными. При этом и функция $S(x)$ заменится эквивалентной. Из $(S_n, \bar{v})\to(S, \bar{v})$, где v — любая функция из L_2, следует, что члены ряда (142) можно почленно умножать на $v(x)$ и интегрировать почленно, т. е.

$$\int_{\mathscr{E}} S(x)\,v(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathscr{E}} u_k(x)\,v(x)\,dx. \tag{143}$$

Мы переходим теперь к изложению некоторых дополнительных сведений об ортонормированных системах в L_2. Основы этой теории изложены в [II; 163].

23. Ортонормированные в L_2 системы. Сформулируем сначала одну теорему, доказательство которой будет дано в гл. III.

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ — какая-либо функция из L_2 на конечном промежутке $[a, b]$ и $\varepsilon>0$ — какое-либо заданное число. Тогда существует такая непрерывная на $[a, b]$ функция $\varphi(x)$, что*

$$\|f-\varphi\|^2=\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|^2\,dx\leqslant\varepsilon. \tag{144}$$

Эта теорема имеет место и для ограниченных областей на плоскости или в пространстве. Ее обычно формулируют так: *множество всех непрерывных функций плотно в L_2 в случае ограниченной области.*

Мы рассмотрим подробно эту теорему в главе III. Она будет там доказана на основе свойства *непрерывности в среднем* функций из L_2, которое формулируется следующим образом: *для любой функции $f(x)$ из L_2 при любом заданном $\varepsilon>0$ существует такое $\eta>0$, что*

$$\int_a^b |f(x+h)-f(x)|^2\,dx<\varepsilon \text{ при } |h|<\eta.$$

При этом полагаем $f(x+h)=0$, если $x+h$ находится вне промежутка $[a, b]$. Доказательство этого утверждения дано в т. V.

Сформулируем результат для случая неограниченной области. В этом случае множество всех непрерывных функций надо заменить множеством всех непрерывных функций, равных нулю во всех достаточно удаленных точках прямой, плоскости или пространства. Например, в случае плоскости рассматриваемые функции

должны равняться нулю вне некоторого круга с центром в начале координат, причем радиус этого круга может быть различным для различных функций. Такие функции называются обычно *финитными*.

Рассмотрим теперь вопрос о замкнутости (полноте) ортонормированных систем функций в L_2 на конечном промежутке $[a, b]$.

Теорема 2. *Если ортонормированная система непрерывных функций* $\varphi_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots)$ *замкнута в классе непрерывных на* $[a, b]$ *функций, то она замкнута (полна) и в* L_2.

Для доказательства используем неравенство треугольника (139), которое запишем в интегральной форме:

$$\left[\int_a^b |g(x)+h(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \left[\int_a^b |g(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_a^b |h(x)|^2\right]^{\frac{1}{2}}, \quad (145)$$

т. е.

$$\|g+h\| \leqslant \|g\| + \|h\|,$$

где $g(x)$ и $h(x)$ — функции из L_2 в $[a, b]$.

Пусть задана функция $f(x)$ из L_2 и число $\varepsilon > 0$. В силу сформулированной выше теоремы 1 существует такая непрерывная функция $\varphi(x)$, что

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|^2 dx \leqslant \frac{\varepsilon^2}{4}. \quad (146)$$

Обозначим через a_k коэффициенты Фурье $\varphi(x)$ относительно ортонормированной системы $\varphi_k(x)$. Так как эта система, по предположению, замкнута в классе непрерывных функций, то существует такое число n, что

$$\int_a^b |\varphi(x) - s_n(x)|^2 dx \leqslant \frac{\varepsilon^2}{4}, \quad (147)$$

где

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x) \quad (148)$$

и a_k — коэффициенты Фурье $\varphi(x)$.

Заменяя в (145)

$$g(x) = f(x) - \varphi(x); \quad h(x) = \varphi(x) - s_n(x)$$

и используя (146) и (147), получим

$$\int_a^b |f(x) - s_n(x)|^2 dx \leqslant \varepsilon^2.$$

Если мы заменим в выражении $s_n(x)$ коэффициенты Фурье a_k функции $\varphi(x)$ на коэффициенты Фурье b_k:

$$b_k = \int_a^b f(x)\overline{\varphi_k(x)}\,dx,$$

то интеграл, стоящий слева, может только уменьшиться [II; 160], и следовательно,

$$\int_a^b |f(x) - \sigma_n(x)|^2\,dx \leqslant \varepsilon^2, \tag{149}$$

где $\sigma_n(x)$ — отрезок ряда Фурье $f(x)$:

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k\varphi_k(x)$$

и в силу произвольности $\varepsilon > 0$ и выбора $f(x)$ из L_2 в $[a, b]$ следует, что ортонормированная система $\varphi_k(x)$ замкнута, а следовательно, и полна в L_2.

В томе II была доказана замкнутость соответствующих систем тригонометрических функций на промежутке $[-l, l]$ или $[0, l]$ в классе непрерывных функций, а потому упомянутые системы замкнуты (и полны) и в L_2.

Укажем еще одну ортонормированную систему на промежутке $[-1, 1]$, а именно, систему

$$\varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2k+1}{2}}\,P_k(x) \quad (k = 0, 1, \ldots), \tag{150}$$

где $P_k(x)$ — полиномы Лежандра [III_2; 105]. Эта система может быть получена ортогонализацией степеней x^m $(m = 0, 1, \ldots)$, и всякий полином $Q_n(x)$ степени n выражается через $\varphi_k(x)$:

$$Q_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x). \tag{151}$$

Из теоремы Вейерштрасса [II; 168] следует, что класс всех полиномов всюду плотен в классе непрерывных функций во всяком конечном промежутке, в том числе и в $[-1, 1]$, т. е. при любой заданной непрерывной в промежутке $[-1, 1]$ функции $f(x)$ и числе $\varepsilon > 0$ существует такой полином $Q(x)$, что

$$|f(x) - Q(x)| \leqslant \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}},$$

причем $Q(x)$ представим по формуле (151), где n — его степень. Из сказанного следует

$$\int_{-1}^{1} |f(x) - Q(x)|^2\,dx \leqslant \varepsilon,$$

причем интеграл, стоящий слева, может только уменьшиться, если коэффициенты a_k формулы (151) заменить коэффициентами Фурье функции $f(x)$. Отсюда в виду произвольности ε следует, что ортонормированная система (150) замкнута в классе всех непрерывных в промежутке $[-1, 1]$ функций, а следовательно, и всех функций из L_2. При помощи линейной замены $x=\alpha t+\beta\ (\alpha\neq 0)$ мы можем заменить промежуток $[-1, 1]$ любым конечным промежутком $[a, b]$ подходящим выбором α и β. Подставляя $x=\alpha t+\beta$ в функции (150) и умножая их на $\alpha^{-1/2}$, получим ортонормированную систему в промежутке $[a, b]$, замкнутую в L_2. В дальнейшем мы докажем замкнутость функций Эрмита и Лагерра на промежутках $(-\infty, +\infty)$ и $(0, \infty)$.

До сих пор мы рассматривали ортонормированные системы на конечных промежутках оси X. Рассмотрим теперь квадрат k_0 на плоскости, определяемый неравенствами: $a\leqslant x\leqslant b$, $a\leqslant y\leqslant b$. Докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Если $\varphi_k(x)$ $(k=0, 1, \ldots)$ — ортонормированная замкнутая в L_2 система в промежутке $[a, b]$, то $\omega_{k,l}(x, y)=\varphi_k(x)\overline{\varphi_l(y)}$ $(k, l=0, 1, \ldots)$ — ортонормированная замкнутая в L_2 система в квадрате k_0.*

Приведем краткое доказательство результата. Мы имеем [II; 110]

$$\iint\limits_{k_0}\omega_{m,n}(x, y)\overline{\omega_{m_1,n_1}(x, y)}\,dx\,dy=\int\limits_a^b\varphi_m(x)\overline{\varphi_{m_1}(x)}\left[\int\limits_a^b\varphi_n(y)\overline{\varphi_{n_1}(y)}\,dy\right]dx,$$

и написанный интеграл равен единице при $m=m_1$, $n=n_1$ и нулю в остальных случаях в силу ортонормированности системы $\varphi_m(x)$. Далее в силу эквивалентности замкнутости и полноты нам надо доказать следующее: если $f(x, y)$ принадлежит L_2 в k_0 и

$$\iint\limits_{k_0}f(x, y)\overline{\omega_{m,n}(x, y)}\,dx\,dy=0\quad (m, n=0, 1, \ldots),\tag{152}$$

то $f(x, y)$ почти везде в k_0 равна нулю. Обозначим:

$$F_m(y)=\int\limits_a^b f(x, y)\overline{\varphi_m(x)}\,dx.$$

Из (152) следует

$$\int\limits_a^b F_m(y)\overline{\varphi_n(y)}\,dy=\iint\limits_{k_0}f(x, y)\overline{\omega_{m,n}(x, y)}\,dx\,dy=0$$

и в силу полноты системы $\varphi_n(y)$ можно утверждать, что $F_m(y)=0$ почти везде в $[a, b]$; зафиксировав такое y, получим

$$\int\limits_a^b f(x, y)\overline{\varphi_m(x)}\,dx=0.$$

В силу полноты $\varphi_m(x)$, $f(x, y)=0$ почти везде по x при указанных фиксированных y. Применяя теорему Фубини к интегралу по k_0 от $|f(x, y)|^2$, получим в силу сказанного выше, что этот интеграл равен нулю, т. е. $f(x, y)=0$ почти везде в k_0, что и требовалось доказать.

24. Линейные ограниченные операторы в L_2. Систематическое изучение теории линейных операторов будет проведено в томе V. Здесь мы вкратце остановимся на простейших свойствах таких операторов.

Рассмотрим интегральный оператор

$$v(s)=\int_a^b K(s, t)\, u(t)\, dt, \tag{153}$$

считая пока для простоты ядро непрерывным. В [4] было доказано, что оператор (153) преобразует любую функцию $u(t)$ из класса L_2 в непрерывную функцию $v(s)$. Эту последнюю можно также рассматривать как элемент пространства L_2. Таким образом, интегральный оператор (153) сопоставляет функции из L_2 функцию, также принадлежащую L_2 или, как говорят, *является оператором* в L_2. Связь между u и v условимся кратко записывать в виде $v=Ku$.

Оператор (153) обладает свойством линейности:

$$K(c_1u_1+c_2u_2)=c_1Ku_1+c_2Ku_2 \quad (c_1,\ c_2 - \text{постоянные}).$$

Выведем еще одно важное свойство оператора K. Обозначим через M наибольшее значение функции $|K(s, t)|$ в квадрате k_0. Оценивая подынтегральное выражение в (153), а затем применяя неравенство Буняковского, находим

$$|v(s)| \leqslant M\int_a^b 1\cdot|u(t)|\,dt \leqslant M\sqrt{b-a}\sqrt{\int_a^b |u(t)|^2\,dt}.$$

Возводя в квадрат и интегрируя, получаем

$$\int_a^b |v(s)|^2\,ds \leqslant M^2(b-a)^2\int_a^b |u(t)|^2\,dt,$$

или

$$\|v\|^2 \leqslant M^2(b-a)^2\|u\|^2.$$

Таким образом, мы доказали неравенство

$$\|Ku\| \leqslant C\|u\|, \tag{154}$$

где $C=M(b-a)$. Любой линейный оператор, для которого, при некоторой постоянной $C\geqslant 0$, выполнено неравенство (154),

называется *ограниченным*. В [25] будет указано более слабое, чем непрерывность ядра, условие ограниченности интегрального оператора вида (153). Заметим, что не всякий линейный ограниченный оператор в L_2 является интегральным. Примером может служить тождественный оператор, действующий по формуле $Ku=u$.

В неравенстве (154) число C, очевидно, можно заменить на любое большее. Определим наименьшее возможное значение C для данного оператора K. Пусть мы имеем

$$\|Ku\| \leqslant C \quad \text{при} \quad \|u\|=1. \tag{155}$$

Если $\|u\|>0$, то норма элемента $u/\|u\|$ равна единице и, следовательно,

$$\left\|K\left(\frac{1}{\|u\|}u\right)\right\| \leqslant C, \quad \text{т. е.} \quad \frac{1}{\|u\|}\|Ku\| \leqslant C,$$

и мы получаем неравенство (154), т. е., неравенства (154) и (155) эквивалентны. Множество неотрицательных чисел $\|Ku\|$ при $\|u\|=1$ имеет точную верхнюю границу, которая в силу (155) и является наименьшим возможным значением C. Она обозначается n_K или $\|K\|$ и называется нормой оператора K:

$$n_K=\|K\|=\sup_{\|u\|=1}\|Ku\|. \tag{156}$$

Для оператора (153) с непрерывным ядром

$$\|K\| \leqslant M(b-a).$$

Если $\|K\|=0$, то оператор K превращает любой элемент из L_2 в нулевой элемент (оператор аннулирования). Норма тождественного оператора ($Ku=u$), очевидно, равна единице.

Всякий линейный ограниченный оператор K непрерывен, т. е. для любой последовательности элементов $\varphi_n \Rightarrow \varphi$ будет $K\varphi_n \Rightarrow K\varphi$. В самом деле,

$$\|K\varphi-K\varphi_n\|=\|K(\varphi-\varphi_n)\| \leqslant \|K\|\,\|\varphi-\varphi_n\| \to 0.$$

Линейные ограниченные операторы можно складывать и умножать:

$$(K+L)u=Ku+Lu, \quad (LK)u=L(Ku),$$

причем произведение зависит, вообще говоря, от порядка сомножителей. Нетрудно проверить, что

$$\|K+L\| \leqslant \|K\|+\|L\|, \quad \|LK\| \leqslant \|L\|\,\|K\|.$$

При возведении в целую положительную степень имеем

$$\|K^m\| \leqslant \|K\|^m.$$

25. Интегральное уравнение с ядром из L_2. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,\ t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{157}$$

где $(a,\ b)$ — конечный или бесконечный промежуток, $f(s)$ из L_2 в $(a,\ b)$, $K(s,\ t)$ — измеримая функция в квадрате k_0, и существует интеграл

$$P^2=\int_a^b\int_a^b |K(s,\ t)|^2\,ds\,dt<\infty. \tag{158}$$

Решение $\varphi(s)$ ищем также в L_2.

Предварительно исследуем свойства оператора вида (153) с ядром, удовлетворяющим условию (158). Ядро $K(s,\ t)$ по t (по s) принадлежит L_2 в $(a,\ b)$ при почти всех s (при почти всех t). Интеграл (153), следовательно, существует при любой $u(t)$ из L_2 и определяет измеримую функцию $v(s)$ на $(a,\ b)$. Это замечание будет доказано в томе V при доказательстве теоремы Фубини.

Интегрируя по s и применяя неравенство Буняковского, получим

$$\int_a^b |v(s)|^2\,ds\leqslant P^2\int_a^b |u(t)|^2\,dt$$

или

$$\|Ku\|\leqslant P\|u\|,\quad \|K\|\leqslant P, \tag{159}$$

где P определяется формулой (158) Таким образом, интегральный оператор K вида (153) с ядром из L_2 является линейным ограниченным оператором в L_2 на $(a,\ b)$. Заметим, что промежуток $(a,\ b)$ может быть и бесконечным.

Вернемся к исследованию уравнения (157). Интеграл (158) согласно теореме Фубини [II; 110] сводится к двум последовательным квадратурам:

$$P^2=\int_a^b Q^2(s)\,ds=\int_a^b R^2(t)\,dt,$$

где

$$Q(s)=\left(\int_a^b |K(s,\ t)|^2\,dt\right)^{1/2},\quad R(t)=\left(\int_a^b |K(s,\ t)|^2\,ds\right)^{1/2},$$

и имеется оценка [5]:

$$|K_{n+1}(s,\ t)|\leqslant Q(s)\,R(t)\,P^{n-1}\quad (n=1,\ 2,\ldots).$$

Составим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(s,\ t)\,\lambda^n=K_1(s,\ t)+K_2(s,\ t)\,\lambda+\ldots \tag{160}$$

Обозначая через S_n сумму первых n его членов, получим

$$|S_{n+p}-S_n|^2 \leqslant Q^2(s)\,R^2(t)\,\frac{P^{n-1}|\lambda|^n - P^{n+p-1}|\lambda|^{n+p}}{1-P|\lambda|},$$

откуда

$$\int_a^b\int_a^b |S_{n+p}-S_n|^2\,ds\,dt \leqslant P^4\,\frac{P^{n-1}|\lambda|^n - P^{n+p-1}|\lambda|^{n+p}}{1-P|\lambda|}$$

и при $|\lambda|<P^{-1}$ правая часть $\to 0$ при $n\to\infty$ и любом $p>0$, т. е. последовательность S_n сходится в себе в L_2. Мы можем, следовательно, утверждать, что ряд сходится в L_2 на k_0 к некоторой функции $R(s,\ t;\ \lambda)$, которая по s и t принадлежит L_2 [II; 162]

$$R(s,\ t;\ \lambda)=\sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(s,\ t)\,\lambda^n \quad (|\lambda|<P^{-1}), \tag{161}$$

причем $R(s,\ t;\ \lambda)$ принадлежит L_2 в $[a,\ b]$ по t при почти всех s из $[a,\ b]$ [II; 110, 111]. Совершенно так же, как и выше [5], можно показать, что при $|\lambda|<P^{-1}$ уравнение (157) имеет решение из L_2, представимое формулой

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\int_a^b R(s,\ t;\ \lambda)\,f(t)\,dt. \tag{162}$$

Пользуясь неравенством Буняковского, легко показать, что интеграл, стоящий в правой части, имеет смысл при любой $f(t)$ из L_2 и определяет функцию от s также из L_2.

Покажем, что при условии $|\lambda|<P^{-1}$, т. е. $|\lambda|P<1$, уравнение (157) имеет единственное решение. Пусть имеются два решения, $\varphi=f+\lambda K\varphi$ и $\tilde{\varphi}=f+\lambda K\tilde{\varphi}$, откуда

$$\varphi-\tilde{\varphi}=\lambda K(\varphi-\tilde{\varphi}).$$

Принимая во внимание, что $\|\lambda K\|\leqslant\lambda P<1$, получаем

$$\|\varphi-\tilde{\varphi}\|_{L_2}<\theta\,\|\varphi-\tilde{\varphi}\|_{L_2} \quad (0<\theta<1),$$

откуда следует, что $\varphi-\tilde{\varphi}$ эквивалентна нулю.

26. Сопряженное уравнение. Часто вместо союзного уравнения рассматривают сопряженное уравнение. Уравнением, союзным с уравнением

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,\ t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{163}$$

мы называли уравнение

$$\psi(s)=g(s)+\lambda\int_a^b K(t,\ s)\,\psi(t)\,dt,$$

а сопряженным с уравнением (163) будем называть уравнение вида

$$\psi(s) = g(s) + \bar{\lambda} \int_a^b \overline{K(t, s)}\, \psi(t)\, dt. \tag{164}$$

Для «сопряженного ядра» обычно вводится обозначение:

$$K^*(s, t) = \overline{K(t, s)}$$

а для соответствующего сопряженного оператора:

$$v(s) = K^* u(t) = \int_a^b K^*(s, t)\, u(t)\, dt.$$

Определители, входящие в числитель и знаменатель резольвенты для сопряженного ядра, будут иметь вид

$$K^*\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix} = \overline{K\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}}.$$

Сопряженное ядро удовлетворяет, очевидно, условию

$$P^2 = \int_a^b \int_a^b |K^*(s, t)|^2\, ds\, dt < \infty$$

с тем же значением P и

$$Q^*(s) = \int_a^b |K^*(s, t)|^2\, dt = R(s);$$

$$R^*(t) = \int_a^b |K^*(s, t)|^2\, ds = Q(t).$$

Все рассуждения из [9] сохраняются.

Имеет место соотношение

$$(K\varphi, \psi) = (\varphi, K^*\psi), \tag{165}$$

или, в раскрытом виде,

$$\int_a^b \left[\int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt\right] \overline{\psi(s)}\, ds = \int_a^b \left[\overline{\int_a^b \overline{K(t, s)}\, \psi(t)\, dt}\right] \varphi(s)\, ds.$$

Проверяется оно заменой порядка интегрирования (теорема Фубини). Сопряженный оператор, очевидно, линеен и ограничен. Нетрудно показать, что

$$(K_1 + K_2)^* = K_1^* + K_2^*; \quad (\lambda K)^* = \bar{\lambda} K^*; \quad (K_1 K_2)^* = K_2^* K_1^*.$$

Докажем последнее равенство:

$$(K_1K_2)^* = \left[\int_a^b K_1(s, \tau) K_2(\tau, t)\, d\tau\right]^* = \int_a^b \overline{K_1(t, \tau)}\, \overline{K_2(\tau, s)}\, d\tau =$$

$$= \int_a^b K_2^*(s, \tau) K_1^*(\tau, t)\, d\tau = K_2^* K_1^*.$$

Из последней формулы следует:

$$(K^n)^* = (K^*)^n.$$

Для резольвенты ядра $K^*(s, t)$ имеем формулу

$$R^*(s, t; \bar{\lambda}) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}^*(s, t) \lambda^n,$$

где

$$K_1^*(s, t) = K^*(s, t); \quad K_{n+1}^*(s, t) = (K^*)^{n+1},$$

и для решения уравнения (164) имеем

$$\psi(s) = g(s) + \bar{\lambda} \int_a^b R^*(s, t; \bar{\lambda}) g(t)\, dt. \tag{166}$$

27. Вырожденное ядро. Рассмотрим вырожденное ядро

$$K_1(s, t) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k(s) \sigma_k(t),$$

где $\rho_k(s)$ и $\sigma_k(t)$ из L_2. Ему соответствует конечномерный оператор

$$v(s) = K_1 u(t) = \sum_{k=1}^{n} (u, \bar{\sigma}_k) \rho_k(s). \tag{167}$$

Сопряженное ядро

$$K_1^*(s, t) = \overline{K_1(t, s)} = \sum_{k=1}^{n} \overline{\sigma_k(s)}\, \overline{\rho_k(t)}$$

и соответствующий конечномерный оператор

$$v(s) = K_1^* u(t) = \sum_{k=1}^{n} (u, \rho_k) \overline{\sigma_k(s)}. \tag{168}$$

Уравнение

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K_1(s, t) \varphi(t)\, dt \tag{169}$$

принимает вид

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \sum_{k=1}^{n} (\varphi, \bar{\sigma}_k) \rho_k(s) \tag{170}$$

и неизвестные $x_k = (\varphi, \bar{\sigma}_k)$ определяются из системы уравнений

$$x_i - \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = f_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{171}$$

где $a_{ik} = (\rho_k, \bar{\sigma}_i)$ и $f_i = (f, \bar{\sigma}_i)$. Определитель этой системы имеет вид

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \ldots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1 - \lambda a_{22} & \ldots & -\lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \ldots & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{172}$$

Для сопряженного уравнения

$$\psi(s) = g(s) + \bar{\lambda} \int_a^b K_1^*(s, t) \psi(t)\, dt \tag{173}$$

решение имеет вид

$$\psi(s) = g(s) + \bar{\lambda} \sum_{k=1}^{n} (\psi, \rho_k) \overline{\sigma_k(s)} \tag{174}$$

и неизвестные $y_k = (\psi, \rho_k)$ определяются из системы уравнений

$$y_i - \bar{\lambda} \sum_{k=1}^{n} b_{ik} y_k = g_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{175}$$

где $b_{ik} = (\bar{\sigma}_k, \rho_i) = \bar{a}_{ki}$ и $g_i = (g, \rho_i)$. Определитель $D_0(\bar{\lambda})$ системы (175) получается из определителя $D(\lambda)$ заменой λ на $\bar{\lambda}$, a_{ik} на $\bar{a}_{ki}$, т. е. заменой строк столбцами наряду с заменой всех элементов сопряженными. Отсюда следует, что однородные уравнения

$$D(\lambda) = 0 \quad \text{и} \quad D_0(\bar{\lambda}) = 0 \tag{176}$$

имеют одинаковые корни, причем ранг обоих определителей при каждом общем корне одинаков, и, следовательно, каждое из уравнений имеет одинаковое число линейно-независимых решений при одинаковых корнях. Иначе говоря, уравнения (169) и (173) имеют одинаковые характеристические значения и одинаковое число соответствующих линейно-независимых собственных функций. Уравнения (176) могут не иметь ни одного корня (когда $D(\lambda) = \text{const} \neq 0$).

28. Решение уравнения с ядром из L_2 при любом λ. Рассмотрим уравнение

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt, \tag{177}$$

где $f(s) \in L_2$ в $[a, b]$ и $K(s, t) \in L_2$ в k_0. Пусть $\omega_k(s)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — какая-либо замкнутая ортонормированная система в $[a, b]$. При этом $\omega_k(s)\,\omega_l(t)$ $(k, l = 1, 2, \ldots)$ будет замкнутой ортонормированной системой в k_0. Для простоты письма считаем функции $\omega_k(s)$ вещественными. Мы имеем

$$K(s, t) = \sum_{k,\, l=1}^{\infty} b_{kl}\omega_k(s)\,\omega_l(t), \tag{178}$$

где b_{kl} — коэффициенты Фурье $K(s, t)$ относительно системы $\omega_k(s)\,\omega_l(t)$.

Ряд (178) сходится в среднем, что равносильно уравнению замкнутости:

$$\int_a^b\int_a^b |K(s, t)|^2\,ds\,dt = \sum_{k,\, l=1}^{\infty} |b_{k,l}|^2. \tag{179}$$

Разобьем ряд (178) на две части:

$$K'(s, t) = \sum_{k,\, l=1}^{n} b_{k,l}\omega_k(s)\,\omega_l(t); \quad K''(s, t) = \sum_{k \text{ или } l>n} b_{k,l}\omega_k(s)\,\omega_l(t).$$

Суммирование во второй сумме производится по таким парам (k, l), что по крайней мере одно из этих чисел $> n$. Соответственно имеем

$$K(s, t) = K'(s, t) + K''(s, t), \tag{180}$$

$$\int_a^b\int_a^b |K'(s, t)|^2\,ds\,dt = \sum_{k,\, l=1}^{n} |b_{k,l}|^2;$$

$$\int_a^b\int_a^b |K''(s, t)|^2\,ds\,dt = \sum_{k \text{ или } l>n} |b_{k,l}|^2.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — любое заданное малое число. Можно фиксировать n таким, что имеет место неравенство

$$\int_a^b\int_a^b |K''(s, t)|^2\,ds\,dt \leqslant \varepsilon^2. \tag{181}$$

Таким образом, ядро $K(s, t)$ разбито на два слагаемых, из которых одно $K'(s, t)$ — вырожденное, а другое, $K''(s, t)$, — малое

в смысле неравенства (181). Можно переписать основное интегральное уравнение в виде

$$\varphi(s) = \varphi_0(s) + \lambda \int_a^b K''(s, t)\, \varphi(t)\, dt, \tag{182}$$

где

$$\varphi_0(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K'(s, t)\, \varphi(t)\, dt. \tag{183}$$

Считая $|\lambda| < \varepsilon^{-1}$, можем выразить согласно (182) $\varphi(s)$ через резольвенту ядра $K''(s, t)$ и $\varphi_0(s)$:

$$\varphi(s) = \varphi_0(s) + \lambda \int_a^b R''(s, t; \lambda)\, \varphi_0(t)\, dt.$$

Подставляя вместо $\varphi_0(s)$ его выражение (183), получим

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K'(s, t)\, \varphi(t)\, dt + \lambda \int_a^b R''(s, t; \lambda)\, f(t)\, dt +$$
$$+ \lambda^2 \int_a^b \left[\int_a^b R''(s, \tau; \lambda)\, K'(\tau, t)\, d\tau \right] \varphi(t)\, dt$$

или, принимая во внимание вид $K'(s, t)$,

$$\varphi(s) = \tilde{f}(s, \lambda) + \lambda \int_a^b \sum_{k=1}^{n} \rho_k(s, \lambda)\, \omega_k(t)\, \varphi(t)\, dt, \tag{184}$$

где

$$\tilde{f}(s, \lambda) = f(s) + \lambda \int_a^b R''(s, t; \lambda)\, f(t)\, dt, \tag{185}$$

$$\rho_k(s, \lambda) = \sum_{m=1}^{n} b_{km} \left\{ \omega_m(s) + \lambda \int_a^b R''(s, \tau; \lambda)\, \omega_m(\tau)\, d\tau \right\}. \tag{186}$$

Функции $\tilde{f}(s, \lambda)$ и $\rho_k(s, \lambda)$ регулярны в круге $d_\varepsilon: |\lambda| < \varepsilon^{-1}$, где $\varepsilon > 0$ можно фиксировать произвольно малым. Уравнение (184) есть уравнение с вырожденным ядром и его решение можно свести к алгебраической задаче, как это мы делали в [27]. Определитель $D(\lambda)$ (ср. [27]) для уравнения (182) будет зависеть от λ как через посредство множителя при интеграле, так и через посредство λ, входящего в $\rho_k(s, \lambda)$. Этот определитель есть регулярная функция от λ в d_ε, и всякий корень его в d_ε есть характеристическое значение уравнения (185), и других характеристических значений в d_ε нет.

Отметим, что из свойств резольвенты следует, что уравнение (184) для $\varphi(s)$ равносильно исходному уравнению (177) в круге d_ε.

Отметим еще, что в силу определения резольвенты уравнение (185) равносильно уравнению

$$f(s)=\tilde{f}(s;\ \lambda)-\lambda\int_a^b K''(s,\ t)\tilde{f}(t;\ \lambda)\,dt. \tag{187}$$

Из этого уравнения и (185) следует, что $f(s)$ и $\tilde{f}(s;\ \lambda)$ лишь одновременно могут равняться нулю в d_ε т. е. характеристические значения уравнений (185) и (187) совпадают в d_ε, что вытекает и из их равносильности в этом круге.

Для сопряженного уравнения

$$\psi(s)=g(s)+\bar{\lambda}\int_a^b K^*(s,\ t)\psi(t)\,dt \tag{188}$$

имеем

$$K^*(s,\ t)=K'^*(s,\ t)+K''^*(s,\ t),$$

где

$$K'^*(s,\ t)=\sum_{k,\ l=1}^{n}\overline{b_{k,l}}\omega_l(s)\,\omega_k(t);\quad K''^*(s,\ t)=\sum_{k\ \text{или}\ l>n}\overline{b_{kl}}\omega_l(s)\,\omega_k(t),$$

и, рассуждая как и выше, получим для $\psi(s)$ уравнение с вырожденным ядром

$$\psi(s)=\tilde{g}(s,\ \lambda)+\bar{\lambda}\int_a^b\sum_{k=1}^{n}\overline{\omega_k(s)}\,\overline{\rho_k(t,\ \lambda)}\,\psi(t)\,dt,$$

сопряженным с ядром уравнения (184), и следовательно, можем утверждать, что уравнения (184) и (187) имеют одинаковые характеристические значения одного и того же ранга в круге $|\lambda|<\varepsilon^{-1}$. Конечность ранга m_0 любого характеристического значения λ_0 следует из неравенства $m_0\leqslant\lambda_0\int_a^b\int_a^b|K(s,\ t)|^2\,ds\,dt$. Остается еще рассмотреть условия разрешимости неоднородного уравнения, если λ — характеристическое значение. Именно, необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,\ t)\varphi(t)\,dt$$

является ортогональность $f(s)$ ко всем собственным функциям однородного сопряженного уравнения:

$$\psi(s)=\lambda\int_a^b K^*(s,\ t)\psi(t)\,dt,$$

т. е.

$$\int_a^b f(s)\overline{\psi(s)}\,ds=0.$$

В [10] содержится доказательство этого факта для непрерывных ядер. Оно сохраняется и для ядер из L_2, если заменить союзное ядро на сопряженное и внести соответствующие несущественные изменения в доказательство.

Таким образом, для ядер из L_2 в k_0 и свободных членов из L_2 в $[a, b]$ мы получаем следующие основные теоремы Фредгольма:

Теорема 1. *Во всякой ограниченной части плоскости λ может находиться лишь конечное число характеристических значений λ уравнения* (177) *и каждое из них имеет лишь конечный ранг.*

Теорема 2. *Если λ не есть характеристическое значение, то уравнение* (177) *разрешимо при любом свободном члене $f(s)$ и имеет единственное решение.*

Теорема 3. *Если λ — характеристическое значение уравнения* (177), *то $\bar{\lambda}$ — характеристическое значение уравнения* (188), *и оно имеет тот же ранг, что и λ. Других характеристических значений уравнение* (188) *не имеет.*

Теорема 4. *Если λ — характеристическое значение уравнения, то необходимым и достаточным условием его разрешимости является ортогональность $f(s)$ ко всем собственным функциям уравнения* (188), *соответствующим характеристическому значению λ. Если это условие выполнено, то уравнение* (187) *имеет бесчисленное множество решений.*

Отметим, что в последнем случае теоремы 4 решение уравнения есть сумма какого-либо частного решения этого уравнения $\varphi_0(x)$, сложенного с суммой какого-либо полного набора соответствующих собственных функций, умноженных на произвольные постоянные. Число собственных функций, входящих в упомянутый набор, равно рангу m характеристического значения λ:

$$\varphi(s) = \varphi_0(s) + C_1\varphi_1(s) + C_2\varphi_2(s) + \ldots + C_m\varphi_m(s).$$

Распространение аппарата Фредгольма на случай ядер из L_2 было проведено в работах Карлемана (Math. Annalen Bd.9 Heft 3/4, 1921 г.) и С. Г. Михлина (Доклады Академии наук СССР, т. XXII, № 9, 1944 г.).

Отметим в заключение, что полярные ядра при $\alpha < \frac{n}{2}$ есть ядра из L_2.

29. Вполне непрерывные в L_2 операторы. Вполне непрерывным в L_2 оператором называется такой оператор $v = Ku$ в L_2, который преобразует каждое ограниченное в L_2 множество $u(t)$

$$\int_a^b |u(t)|^2\, dt \leqslant C^2 \quad (C > 0 \text{ — постоянная})$$

в компактное множество, т. е. такое множество функций $v(s)$ из L_2, что во всякой последовательности этих функций существует сходящаяся в L_2 подпоследовательность. Цель настоящего пункта доказать следующую теорему.

Теорема. *Интегральный оператор с ядром $K(s, t)$ из $L_2(k_0)$ есть вполне непрерывный оператор в L_2.*

Предварительно будет доказана

Лемма 1. *Если B_n $(n=1, 2, \ldots)$ — бесконечная последовательность линейных ограниченных и вполне непрерывных операторов в L_2 и B — такой линейный ограниченный оператор в L_2, что норма разности $B-B_n$ стремится к нулю при $n\to\infty$, то и B — вполне непрерывный оператор.*

Пусть x_n $(n=1, 2, \ldots)$ — бесконечная последовательность элементов из ограниченного множества в L_2, т. е. $\|x_n\|\leqslant C$ при всех n. Нам надо доказать, что из последовательности Bx_n можно выбрать сходящуюся в L_2 подпоследовательность. Поскольку B_1 — вполне непрерывный оператор, из последовательности B_1x_n можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Пусть $x_{k\,1}$ $(k=1, 2, \ldots)$ — такая подпоследовательность x_n, что последовательность $B_1x_{k,1}$ сходится. Поскольку B_2 — вполне непрерывный оператор, из последовательности $B_2x_{k,1}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Пусть $x_{k,2}$ $(k=1, 2, \ldots)$ — такая подпоследовательность последовательности $x_{k,1}$, что последовательность $B_2x_{k,2}$ сходится. Из того, что $x_{k,2}$ есть подпоследовательность для $x_{k,1}$, следует, что и $B_1x_{k,2}$ — сходящаяся последовательность. Совершенно так же из последовательности $x_{k,2}$ можно выбрать такую подпоследовательность $x_{k,3}$, что $B_mx_{k,3}$ при $m=1$, 2, 3 будут сходящиеся подпоследовательности. Продолжая так и дальше, получим последовательности $x_{k,p}$ $(p=1, 2, \ldots; k=1, 2, \ldots)$. Возьмем теперь диагональную последовательность (ср. [15])

$$x_{1\,1},\ x_{2,2},\ x_{3,3},\ \ldots \tag{189}$$

Это есть подпоследовательность для начальной последовательности x_n $(n=1, 2, \ldots)$, и последовательность $B_mx_{k,k}$ $(k=1, 2, \ldots)$ есть сходящаяся последовательность при любом m. Остается доказать, что последовательность $Bx_{k,k}$ $(k=1, 2, \ldots)$ также сходится. Как мы знаем [II; 162], достаточно доказать, что эта последовательность сходится в себе, т. е. при любом заданном $\varepsilon>0$ существует такое N, что

$$\|Bx_{p,p}-Bx_{q,q}\|\leqslant\varepsilon,\quad p \text{ и } q\geqslant N. \tag{190}$$

По условию норма разности операторов $B-B_l$ стремится к нулю при $l\to\infty$, т. е. $\|B-B_l\|\to 0$ при $l\to\infty$.

Применяя теорему 4 из [II; 161], можем написать неравенство:

$$\|Bx_{p,p}-Bx_{q,q}\|\leqslant\|Bx_{p,p}-B_lx_{p,p}\|+$$
$$+\|B_lx_{p,p}-B_lx_{q,q}\|+\|B_lx_{q,q}-Bx_{q,q}\|.$$

Сначала фиксируем такое l, что имеет место неравенство

$$\|B-B_l\|\leqslant\frac{\varepsilon}{3C}.$$

При этом имеем

$$\|Bx_{p,p}-B_lx_{p,p}\|=\|(B-B_l)x_{p,p}\|\leqslant$$
$$\leqslant\|B-B_l\|\cdot C\leqslant\frac{\varepsilon}{3}\text{ и }\|B_lx_{q,q}-Bx_{q,q}\|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}.$$

Далее, поскольку последовательность $B_lx_{k,k}$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$ сходится, существует такое N, что

$$\|B_lx_{p,p}-B_lx_{q,q}\|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}\quad\text{при}\quad p\text{ и }q\geqslant N,$$

откуда и следует (190), что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Всякий конечномерный оператор вполне непрерывен.*

Конечномерный оператор имеет вид [27]

$$Lu=\sum_{k=1}^{m}(u,\ \sigma_k)\rho_k(s),$$

где функции $\rho_k(s)$, $\sigma_k(t)$, $u(t)$ из L_2 в $[a,\ b]$. Рассмотрим ограниченную последовательность u_n $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ из L_2, т. е. $\|u_n\|\leqslant C$.

Пусть D — наибольшая из норм $\|\sigma_k\|$. Мы можем написать так:

$$v_n(s)=Lu_n=\sum_{k=1}^{m}d_{k,n}\rho_k(s)\qquad(d_{k,n}=(u_n,\ \sigma_k)).$$

Из сказанного непосредственно следует оценка $|d_{k,n}|=|(u_n,\ \sigma_k)|\leqslant\leqslant CD$. Каждая из бесконечных последовательностей чисел $d_{k,n}$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ есть по доказанному ограниченная последовательность и, следовательно, имеется такая последовательность значков $n_1,\ n_2,\ \ldots,$ что и каждая из последовательностей d_{k,n_1}, $d_{k,n_2},\ \ldots$ имеет предел. Обозначим эти пределы:

$$\lim d_{k,n_l}\to d_k\quad\text{при}\quad n_l\to\infty$$

и пусть $u_{n_l}(t)$ — соответствующие этим d_{k,n_l} функции $u(s)$. Введем функцию из L_2

$$v_0(s)=\sum_{k=1}^{m}d_k\rho_k(s).$$

Применяя теорему 4 из [II, 161], получим

$$\|v_0(s)-v_{n_l}(s)\|=\left\|\sum_{k=1}^{m}(d_k-d_{k,n_l})\rho_k(s)\right\|\leqslant\sum_{k=1}^{m}|d_k-d_{k,n_l}|c_0,$$

где c_0 — наибольшая из норм $\|\rho_k\|$. Из написанного неравенства следует, что $\|v_0(s)-v_{n_l}(s)\|\to0$ при $n_l\to\infty$, ч. и т. д.

Обратимся теперь к доказательству основной теоремы. Мы видели, что если ядро $K(s, t)$ из L_2, то его можно представить в виде

$$K(s, t) = K_1(s, t) + K_2(s, t),$$

где $K_1(s, t)$ — вырожденное ядро и

$$\int_a^b \int_a^b |K_2(s, t)|^2 \, ds \, dt \leqslant \varepsilon^2, \tag{191}$$

где $\varepsilon > 0$ — любое малое число. Ядру $K_1(s, t)$ соответствует вырожденный, т. е. конечномерный оператор, а $K_2(s, t)$ соответствует оператор, норма которого в силу (191) и (159) не превышает ε. Фиксируя последовательность чисел $\varepsilon_n > 0$, стремящуюся к нулю, получаем последовательность конечномерных операторов, соответствующих ядру $K_1^{(\varepsilon_n)}(s, t)$, причем $\left\| K - K_1^{(\varepsilon_n)} \right\| \to 0$. Отсюда следует, что интегральный оператор, соответствующий ядру $K(s, t)$, вполне непрерывен, ч. и т. д.

Из лемм 1 и 2 следует, что если для любого $\varepsilon > 0$ линейный оператор K может быть представлен в виде суммы двух линейных операторов $K_{1,\varepsilon}$ и $K_{2,\varepsilon}$, из которых $K_{1,\varepsilon}$ — конечномерный, а $K_{2,\varepsilon}$ имеет норму, не превосходящую ε, то K является вполне непрерывным оператором. Оказывается, верно и обратное предложение: любой вполне непрерывный оператор K допускает такое представление для произвольного $\varepsilon > 0$, или, что то же, может быть приближен конечномерными операторами $K_{1,\varepsilon}$ в операторной норме. Это доказывается в п. 13 V тома. Это так не только в пространстве L_2, но и в любом гильбертовом пространстве H (имеются ввиду полные сепарабельные пространства H — см. п. 121 тома V).

Из доказательств теорем Фредгольма, данных в п. 28, видно, что они справедливы для операторных уравнений

$$\varphi = f + \lambda K \varphi$$

в произвольном (комплексном) гильбертовом пространстве H, если K является линейным вполне непрерывным оператором в H.

30. Симметричное ядро. Комплексное ядро $K(s, t)$ называется симметричным или эрмитовым, если

$$K^*(s, t) = \overline{K(t, s)} = K(s, t). \tag{192}$$

Из этого определения следует, что $K(s, s)$ вещественно. В случае вещественного ядра равенство (192) сводится к

$$K(t, s) = K(s, t). \tag{193}$$

Интегральный оператор $K\varphi$ с симметричным ядром удовлетворяет соотношению

$$(K\varphi,\ \psi) = (\varphi,\ K\psi) \tag{194}$$

или, в раскрытом виде,

$$\int_a^b \left[\int_a^b K(s,\ t)\,\varphi(t)\,dt\right]\bar{\psi}(s)\,ds = \int_a^b \varphi(s)\left[\overline{\int_a^b \overline{K(t,\ s)}\,\psi(t)\,dt}\right]ds,$$

которое легко проверяется изменением порядка интегрирования. В частности,

$$(K\varphi,\ \varphi) = (\varphi,\ K\varphi),$$

откуда видно, что $(K\varphi,\ \varphi)$ — число вещественное.

Интегральные операторы с симметричным ядром обычно называются самосопряженными. Для них характерно соотношение (194). В дальнейшем до n^0 [46] мы рассматриваем интегральные уравнения с симметричным ядром, не оговаривая этого, и для простоты письма считаем $n = 1$. В многомерном случае рассуждения такие же. Сначала установим два свойства рассматриваемых операторов. Пусть λ_0 — характеристическое значение и $\varphi_0(s)$ — соответствующая собственная функция, так что $\varphi_0 = \lambda_0 K\varphi_0$, откуда $(\varphi_0,\ \varphi_0) = \lambda_0(K\varphi_0,\ \varphi_0)$ или

$$\frac{1}{\lambda_0} = \frac{(K\varphi_0,\ \varphi_0)}{\|\varphi_0\|^2} \qquad (\|\varphi_0\|^2 = (\varphi_0,\ \varphi_0))$$

и, следовательно, *всякое характеристическое значение вещественно*. Пусть λ_1 и λ_2 — два различных характеристических значения, а $\varphi_1(s)$ и $\varphi_2(s)$ — соответствующие собственные функции:

$$\varphi_1 = \lambda_1 K\varphi_1; \qquad \varphi_2 = \lambda_2 K\varphi_2. \tag{195}$$

Из первого уравнения следует

$$\frac{1}{\lambda_1}(\varphi_1,\ \varphi_2) = (K\varphi_1,\ \varphi_2) \quad \text{или} \quad \frac{1}{\lambda_1}(\varphi_1,\ \varphi_2) = (\varphi_1,\ K\varphi_2).$$

Используя второе из уравнений (195), получим

$$\frac{1}{\lambda_2}(\varphi_1,\ \varphi_2) = (\varphi_1,\ K\varphi_2) = \frac{1}{\lambda_1}(\varphi_1,\ \varphi_2),$$

откуда

$$\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)(\varphi_1,\ \varphi_2) = 0,$$

и в силу $\lambda_1 \neq \lambda_2$ имеем $(\varphi_1,\ \varphi_2) = 0$, т. е. *собственные функции, соответствующие различным характеристическим значениям, взаимно ортогональны.*

Как мы раньше упоминали [4], можно считать, что собственные функции, соответствующие одному и тому же характеристическому значению, ортонормированы.

Принимая во внимание доказанное выше, мы видим, что множество всех собственных функций образуют ортонормированную систему.

Выше мы приводили пример интегрального уравнения с не симметричным ядром, которое не имеет ни одного характеристического значения. Для симметричных ядер этого не может быть, т. е. имеет место следующая основная теорема.

Теорема 1. *Всякое интегральное уравнение с симметричным ядром имеет характеристические значения (может быть и только одно).*

Эту теорему мы докажем позже.

Мы доказали раньше, что характеристические значения (в данном случае вещественные) имеют все конечный ранг, и число их на любом конечном промежутке конечно.

Отсюда следует, что если их бесчисленное множество, то они сгущаются на бесконечности, и их можно расположить в порядке неубывания абсолютных значений, т. е. имеем

$$|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant |\lambda_3| \leqslant \ldots \tag{196}$$

и соответствующую ортонормированную систему собственных функций

$$\varphi_1(s),\ \varphi_2(s),\ \varphi_3(s),\ \ldots \tag{197}$$

Очевидно, что и система

$$\overline{\varphi_1(s)},\ \overline{\varphi_2(s)},\ \ldots \tag{198}$$

ортонормирована. Если ядро вещественно, то и собственные функции (197) можно считать вещественными, и система (198) совпадает с (197).

Система (197) называется обычно *системой собственных функций ядра $K(s, t)$ или соответствующего ему интегрального уравнения.*

Для собственных функций имеем

$$\frac{\varphi_k(s)}{\lambda_k} = \int_a^b K(s, t)\,\varphi_k(t)\,dt,$$

откуда видно, что левую часть можно рассматривать как коэффициент Фурье $K(s, t)$, как функции от t, относительно системы (198). Неравенство Бесселя дает

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|\varphi_k(s)|^2}{\lambda_k^2} \leqslant \int_a^b |K(s, t)|^2\,dt. \tag{199}$$

Интегрируя по s, получим

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k^2} \leqslant \int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 \, dt \, ds,$$

и, переходя к пределу, если число характеристических значений бесконечно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} \leqslant \int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 \, ds \, dt.$$

Всякое характеристическое значение встречается в последовательности (196) число раз, равное его рангу. Знак равенства $|\lambda_k| = |\lambda_{k+1}|$ будет иметь место, если $\lambda_{k+1} = \lambda_k$ (ранг > 1), или если $\lambda_{k+1} = -\lambda_k$. При бесконечности последовательности (196) $|\lambda_k| \to \infty$ при $k \to \infty$.

Если мы рассмотрим вырожденное симметричное ядро

$$K(s, t) = \sum_{k=1}^{m} \sigma_k(s) \overline{\sigma_k(t)}, \tag{200}$$

то, как и в [27], докажем, что оно имеет конечное число характеристических значений. Дальше мы покажем, что если ядро не вырожденное, то интегральное уравнение имеет бесчисленное множество характеристических значений.

Все сказанное имеет место для ядер рассмотренных выше типов: непрерывных и полярных ядер на конечном промежутке и ядер из L_2 на конечном или бесконечном промежутке. В первых двух случаях собственные функции непрерывны, а для ядер из L_2 они также из L_2.

31. Разложение ядра по собственным функциям. Система (197) может и не быть замкнутой. Поэтому при разложении какой-либо функции в ряд Фурье по $\varphi_k(s)$ даже при равномерной сходимости ряда нельзя утверждать, что сумма ряда равна разлагаемой функции. Начнем с образования ряда Фурье для ядра.

Мы видели, что коэффициенты Фурье ядра относительно системы (198) равны отношениям $\varphi_k(s)/\lambda_k$, и ряд Фурье ядра имеет вид

$$\sum_k \frac{\varphi_k(s) \overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k}, \tag{201}$$

причем суммирование ведется по k или до бесконечности или до конечного числа, равного числу всех собственных функций системы $\varphi_k(s)$.

Отметим, что ряд (201) можно рассматривать как ряд Фурье $K(s, t)$, определенной в k_0, по функциям $\varphi_k(s)\overline{\varphi_l(t)}$ $(k, l=1, 2, \ldots)$, которые образуют в k_0 ортонормированную систему [23]. При этом

$$\iint\limits_{k_0} K(s, t)\overline{\varphi_k(s)}\varphi_l(t)\,ds\,dt=\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_a^b \overline{\varphi_k(s)}\varphi_l(s)\,ds=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad k\neq l, \\ \frac{1}{\lambda_k} & \text{при} \quad k=l. \end{cases}$$

Теорема 1. *Если ядро непрерывно и ряд* (201) *сходится равномерно в* k_0, *то его сумма равна ядру в* k_0, т. е.

$$K(s, t)=\sum_k \frac{\varphi_k(s)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k}. \tag{202}$$

Считая пока, что число характеристических значений бесконечно, рассмотрим разность

$$\omega(s, t)=K(s, t)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(s)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k}, \tag{202_1}$$

являющуюся непрерывной симметричной функцией в квадрате k_0. Если фиксировать s и рассматривать $\omega(s, t)$ как функцию от t на промежутке $[a, b]$, то ее коэффициенты Фурье относительно системы функций $\varphi_k(t)$ равны нулю [3]:

$$\int\limits_a^b \omega(s, t)\overline{\varphi_k(t)}\,dt=0 \quad (k=1, 2, \ldots). \tag{203}$$

Нам надо доказать, что $\omega(s, t)$ тождественно равна нулю в квадрате k_0. Будем доказывать это от обратного.

Положим, что функция $\omega(s, t)$ не обращается тождественно в нуль в квадрате k_0, и примем ее за ядро интегрального уравнения

$$\psi(s)=\lambda\int\limits_a^b \omega(s, t)\psi(t)\,dt.$$

В силу основной теоремы, сформулированной в предыдущем параграфе, это интегральное уравнение должно иметь по крайней мере одно характеристическое значение λ_0, которому соответствует некоторая собственная функция $\psi_0(s)$, не равная тождественно нулю:

$$\psi_0(s)=\lambda_0\int\limits_a^b \omega(s, t)\psi_0(t)\,dt. \tag{204}$$

Покажем, что эта функция $\psi_0(s)$ должна быть ортогональна ко всем собственным функциям $\varphi_k(s)$ ядра $K(s, t)$. Действительно,

умножая обе части (203) на $\lambda_0\psi_0(s)$ и интегрируя по s, получим

$$\lambda_0 \int_a^b \int_a^b \omega(s, t)\, \psi_0(s)\, \overline{\varphi_k(t)}\, ds\, dt = 0.$$

В силу (204) и симметрии $\omega(s, t)$ мы имеем отсюда

$$\int_a^b \psi_0(t)\, \overline{\varphi_k(t)}\, dt = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{205}$$

Мы можем переписать равенство (204) в виде

$$\psi_0(s) = \lambda_0 \int_a^b \left[K(s, t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(s)\, \overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k} \right] \psi_0(t)\, dt.$$

Принимая во внимание равномерную сходимость ряда (201) и формулы (205), получим

$$\psi_0(s) = \lambda_0 \int_a^b K(s, t)\, \psi_0(t)\, dt,$$

т. е. функция $\psi_0(s)$ должна быть собственной функцией первоначального ядра $K(s, t)$. Следовательно, она должна быть линейной комбинацией собственных функций $\varphi_k(s)$, соответствующих характеристическому значению λ_0. Но этого не может быть, поскольку $\psi_0(s)$ и все $\varphi_k(s)$ образуют ортогональную систему, а ортогональные функции не могут быть линейно зависимы [3]. Это противоречие показывает, что наше предположение $\omega(s, t) \not\equiv 0$ неверно, и следовательно, имеет место формула (202). В дальнейшем мы покажем, что ряд (201) сходится равномерно в k_0, если числа λ_k одного знака, кроме, может быть, их конечного числа.

Положим теперь, что ядро непрерывно или слабо полярно или из L_2, и образуем его ряд Фурье в k_0:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(s)\, \overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k}.$$

Как всякий ряд Фурье функции из L_2, он сходится в среднем, и мы можем говорить об его сумме в k_0. Составим разность (202_1), принадлежащую L_2 в k_0, и будем рассуждать дальше так же, как и выше. При этом надо принять во внимание, что ряд, сходящийся в среднем, можно умножать на функцию из L_2 и почленно интегрировать. Окончательно мы придем к тому, что $\omega(s, t) = 0$ (эквивалентна нулю). Таким образом, мы имеем такую теорему:

Теорема 2. *Для непрерывных, слабо полярных ядер и ядер из L_2 ряд* (201) *сходится в среднем в k_0 и его сумма равна ядру.*

Из сходимости в среднем следует уравнение замкнутости

$$\sum_k \frac{1}{\lambda_k^2} = \int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 \, ds \, dt. \tag{206}$$

Можно было бы доказать сначала теорему 2 и получить теорему 1, как ее непосредственное следствие.

Нетрудно видеть, что непрерывные и слабо полярные ядра суть также ядра из L_2.

Если ядро имеет конечное число характеристических значений, то ряд (201) содержит конечное число слагаемых, и имеет место равенство

$$K(s, t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\varphi_k(s)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k}. \tag{207}$$

Эта формула показывает, что $K(s, t)$ есть вырожденное ядро, если оно имеет конечное число характеристических значений. С другой стороны, раньше мы показали [27], что всякое вырожденное ядро имеет конечное число характеристических значений.

Таким образом, *конечность числа характеристических значений является необходимым и достаточным условием вырожденности симметричного ядра.*

32. Функции, представимые через ядро. Ортонормированная система $\varphi_k(s)$ ядра может, конечно, не быть замкнутой и ряд Фурье какой-либо функции $F(s)$ по этой системе, даже если он равномерно сходится, может иметь сумму, отличную от $F(s)$. Выше мы видели, что для ядра из равномерной сходимости ряда (201) следует, что его сумма равна ядру. Это естественно приводит к определению некоторого класса функций:

Определение. *Функция $f(s)$ называется функцией, представимой через ядро, если ее можно представить в виде*

$$f(s) = \int_a^b K(s, t) h(t) \, dt.$$

Если ядро непрерывно или слабо полярно на конечном промежутке, то будем считать $h(t)$ непрерывной, и при этом $f(s)$ есть также непрерывная функция. Если ядро из L_2, то и $h(t)$ будем считать из L_2. При этом и $f(s)$ из L_2. Определим коэффициенты Фурье $f(s)$:

$$a_k = \int_a^b f(s)\overline{\varphi_k(s)} \, ds = \int_a^b \int_a^b K(s, t) h(t) \overline{\varphi_k(s)} \, ds \, dt =$$

$$= \int_a^b \left[\int_a^b \overline{K(t, s)}\, \overline{\varphi_k(s)} \, ds \right] h(t) \, dt = \int_a^b \frac{\overline{\varphi_k(t)}\, h(t)}{\lambda_k} \, dt,$$

т. е.

$$a_k = \frac{h_k}{\lambda_k}, \tag{208}$$

где h_k — коэффициенты Фурье $h(t)$ относительно системы $\varphi_k(s)$. Таким образом, ряд Фурье $f(s)$ имеет вид

$$\sum_k \frac{h_k}{\lambda_k} \varphi_k(s). \tag{209}$$

Будем считать число собственных функций бесконечным. Применяя неравенство Коши, получим

$$\sum_{k=n}^{n+p} \left| h_k \frac{\varphi_k(s)}{\lambda_k} \right| \leqslant \left(\sum_{k=n}^{n+p} |h_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=n}^{n+p} \left| \frac{\varphi_k(s)}{\lambda_k} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{210}$$

Положим, что ядро удовлетворяет условию

$$\int_a^b |K(s, t)|^2 \, dt \leqslant C^2, \tag{211}$$

где C^2 — некоторая постоянная (не зависящая от s). В силу неравенства Бесселя имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\varphi_k(s)}{\lambda_k} \right|^2 \leqslant \int_a^b |K(s, t)|^2 \, dt \leqslant C^2,$$

и из (211) следует

$$\sum_{k=n}^{n+p} \left| h_k \frac{\varphi_k(s)}{\lambda_k} \right| \leqslant C \left(\sum_{k=n}^{n+p} |h_k|^2 \right)^{1/2}. \tag{212}$$

Но числовой ряд с общим членом $|h_k|^2$ сходится и из (212) следует

Теорема 1. *Ряд Фурье функции $f(s)$, представимой через ядро,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k}{\lambda_k} \varphi_k(s), \tag{213}$$

при условии (211) *регулярно сходится, т. е. ряд модулей его членов*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{h_k}{\lambda_k} \varphi_k(s) \right|$$

равномерно сходится. Отсюда следует, что сам ряд (213) сходится абсолютно и равномерно на промежутке $[a, b]$, если соблюдено

условие (211). Это условие соблюдается для непрерывных и слабо полярных ядер на конечном промежутке $[a, b]$. Оно может соблюдаться при почти всех s для ядер из L_2. Дальше будет доказана

Теорема 2. *При соблюдении условия* (211) *сумма ряда* (213) *равна* $f(s)$ *и в случае ядра из* L_2 *ряд* (213) *сходится в среднем к* $f(s)$.

Эта теорема называется обычно теоремой Гильберта — Шмидта. Мы переходим теперь к общей теории операторов, соответствующих вполне непрерывным интегральным операторам с симметричным ядром, как для семейства непрерывных функций на конечном промежутке, так и для L_2.

33. Пространство C_{L_2}. Выше мы рассматривали ограниченные операторы в L_2 и доказали ряд их свойств. Техника, связанная с использованием понятий скалярного произведения, ортогональности функций и т. п., полезна также в теории линейных операторов, действующих в классе C непрерывных на $[a, b]$ функций. К числу таких операторов, как мы знаем ([4], [16]), относятся, например, интегральные операторы с непрерывным или полярным ядром. Мы введем сейчас понятия, позволяющие рассматривать теорию таких операторов параллельно с теорией операторов, действующих в пространстве L_2.

Обозначим через C_{L_2} пространство функций, непрерывных на конечном промежутке $[a, b]$, с такими же, как в L_2, определениями скалярного произведения, нормы элемента и сходимости. Элементы этого функционального пространства, как и раньше, обозначаем через $\varphi(s)$, $\psi(s)$ и т. д. Основное отличие пространства C_{L_2} от C — отсутствие свойства полноты: если последовательность $\varphi_n(s)$ непрерывных на $[a, b]$ функций сходится в себе по норме пространства C_{L_2}: $\|\varphi_m - \varphi_n\| \to 0$, т. е.

$$\lim_{m,\, n \to \infty} \int_a^b |\varphi_m(s) - \varphi_n(s)|^2\, ds = 0,$$

то не всегда существует непрерывная функция $\varphi_0(s)$ такая, что $\|\varphi_m - \varphi_0\| \to 0$ (см. [22]).

Понятия ограниченного линейного оператора в C_{L_2}, а также самосопряженного оператора, вводятся так же, как и в классе L_2. То же относится и к понятию вполне непрерывного оператора: линейный оператор K в C_{L_2} называется вполне непрерывным, если он преобразует любое ограниченное по норме множество функций в компактное.

Из оценки, приведенной в [4], и из теоремы Арцела [15] следует, что интегральный оператор с непрерывным ядром вполне непрерывен в C_{L_2}. Тем же свойством обладают слабо полярные

ядра. В самом деле, пусть

$$v(s)=\int_a^b \frac{L(s,\ t)}{|s-t|^{\alpha}}u(t)\,dt, \tag{213$_1$}$$

причем $\alpha<{}^1/_2$ и функция $L(s,\ t)$ непрерывна. Пусть s и s' — две точки из промежутка $[a,\ b]$. С помощью неравенства Буняковского находим

$$|v(s')-v(s)|^2\leqslant\int_a^b\left|\frac{L(s',\ t)}{|s'-t|^{\alpha}}-\frac{L(s,\ t)}{|s-t|^{\alpha}}\right|^2 dt\cdot\|u\|^2.$$

Интеграл в правой части оценивается так же, как в [16], причем необходимо учесть условие $\alpha<1/2$. Из получаемой оценки следует, что функции $v(s)$, отвечающие функциям $u(t)$ с $\|u\|\leqslant C$, где C — любое число, равностепенно непрерывны. Из неравенства

$$|v(s)|^2\leqslant\int_a^b\frac{|L(s,\ t)|^2}{|s-t|^{2\alpha}}dt\cdot\|u\|^2$$

вытекает, что это семейство равномерно ограничено. Таким образом, оператор вида (213$_1$) переводит любое ограниченное в C_{L_2} (или даже в L_2) множество функций в компактное множество непрерывных функций. Тем более получающееся семейство функций компактно в C_{L_2}.

34. Теоремы о норме линейных операторов. Докажем теперь две теоремы о норме операторов.

Теорема 1. *Норма линейного оператора A есть точная верхняя граница чисел $|(A\varphi,\ \psi)|$ при $\|\varphi\|=\|\psi\|=1$*, т. е.

$$\|A\|=\sup\ |(A\varphi,\ \psi)|\ \textit{при}\ \|\varphi\|=\|\psi\|=1. \tag{214}$$

Если A — оператор аннулирования, то $(A\varphi,\ \psi)=0$ при всех φ и ψ, и теорема очевидна, ибо в этом случае $\|A\|=0$. Положим, что A — не оператор аннулирования. Из неравенства

$$|(A\varphi,\ \psi)|\leqslant\|A\varphi\|\|\psi\|\leqslant\|A\|\|\varphi\|\|\psi\|$$

следует, что

$$|(A\varphi,\ \psi)|\leqslant\|A\|\ \text{при}\ \|\varphi\|=\|\psi\|=1. \tag{215}$$

С другой стороны, если в скалярном произведении $(A\varphi,\ \psi)$ положить $\psi=\frac{1}{\|A\varphi\|}A\varphi$, где $A\varphi$ — ненулевой элемент, то получим $(A\varphi,\ \psi)=\|A\varphi\|$. В силу (161) можно выбрать φ так, чтобы $\|\varphi\|=1$

и $\|A\varphi\|$ было сколь угодно близко к $\|A\|$. Это утверждение совместно с (215) и дает (214).

В дальнейшем мы будем рассматривать операторы только с симметричным ядром $K^*(s, t) = \overline{K(t, s)} = K(s, t)$. Для них характерно следующее равенство:

$$(A\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi). \tag{216}$$

При этом $(A\varphi, \varphi)$ есть вещественное число. Такие линейные операторы называются *самосопряженными* [30]. Основным для дальнейшего будет следующая теорема.

Теорема 2. *Норма самосопряженного линейного оператора A выражается формулой*

$$\|A\| = \sup |(A\varphi, \varphi)| \text{ при } \|\varphi\| = 1. \tag{217}$$

Обозначим

$$d = \sup_{\|\varphi\|=1} |(A\varphi, \varphi)|.$$

Надо доказать, что $d = \|A\|$. Если φ — любой элемент, отличный от нулевого, то можем написать:

$$d = \sup \left| \left(A \frac{1}{\|\varphi\|} \varphi, \frac{1}{\|\varphi\|} \varphi \right) \right| = \sup \frac{|(A\varphi, \varphi)|}{\|\varphi\|^2},$$

откуда

$$|(A\varphi, \varphi)| \leqslant d \|\varphi\|^2. \tag{218}$$

Для нулевого элемента φ это соотношение очевидно. Пользуясь линейностью, можем написать

$$(A(\varphi+\psi), \varphi+\psi) - (A(\varphi-\psi), \varphi-\psi) = \\ = 2(A\varphi, \psi) + 2(A\psi, \varphi) = 2(A\varphi, \psi) + 2(\psi, A\varphi)$$

или

$$(A(\varphi+\psi), \varphi+\psi) - (A(\varphi-\psi), \varphi-\psi) = \\ = 2(A\varphi, \psi) + 2\overline{(A\varphi, \psi)} = 4 \operatorname{Re}(A\varphi, \psi),$$

где Re — обозначение вещественной части. С другой стороны, применяя (218), получим

$$|(A(\varphi+\psi), \varphi+\psi) - (A(\varphi-\psi), \varphi-\psi)| \leqslant |(A(\varphi+\psi), \varphi+\psi)| + \\ + |(A(\varphi-\psi), \varphi-\psi)| \leqslant d(\varphi+\psi, \varphi+\psi) + d(\varphi-\psi, \varphi-\psi) = \\ = 2d(\|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2),$$

откуда имеем неравенство при любых φ и ψ:

$$2|\operatorname{Re}(A\varphi, \psi)| \leqslant d(\|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2). \tag{219}$$

Пусть r — модуль и α — аргумент комплексного числа $(A\varphi, \psi)$, т. е. $(A\varphi, \psi) = e^{i\alpha} r$ $(r \geqslant 0)$. Поскольку элемент φ произволен, то

мы можем заменить φ на $e^{-i\alpha}\varphi$. При этом $(A\varphi, \psi)$ заменится на $e^{i\alpha}(A\varphi, \psi) = e^{i\alpha}e^{i\alpha}r$, т. е. $(A\varphi, \psi)$ заменится на $|(A\varphi, \psi)|$, а $\|\varphi\|^2$ останется без изменения, так что неравенство примет вид при любых φ и ψ:

$$2|(A\varphi, \psi)| \leqslant d(\|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2), \tag{220}$$

откуда $|(A\varphi, \psi)| \leqslant d$ при $\|\varphi\| = \|\psi\| = 1$ и, следовательно,

$$\|A\| = \sup_{\substack{\|\varphi\|=1 \\ \|\psi\|=1}} |(A\varphi, \psi)| \leqslant d, \text{ т. е. } \|A\| \leqslant d. \tag{221}$$

Остается доказать, что $d \leqslant \|A\|$. Мы имеем $|(A\varphi, \varphi)| \leqslant \|A\varphi\| \|\varphi\|$, откуда

$$|(A\varphi, \varphi)| \leqslant \|A\| \text{ при } \|\varphi\| = 1.$$

Но, по определению, d есть точная верхняя граница левой части написанного неравенства, т. е. $d \leqslant \|A\|$. Итак, для самосопряженного линейного оператора

$$\|A\| = \sup_{\|\varphi\|=1} |(A\varphi, \varphi)| = \sup \frac{|(A\varphi, \varphi)|}{\|\varphi\|^2} \quad (\|\varphi\| \neq 0). \tag{222}$$

Очевидно, доказанные теоремы справедливы, как в пространстве L_2, так и в C_{L_2}.

35. Существование собственного значения. Рассмотрим вполне непрерывный самосопряженный оператор A в L_2 или C_{L_2}, отличный от оператора аннулирования, и однородное уравнение с параметром μ:

$$A\varphi = \mu\varphi, \tag{223}$$

что соответствует записи однородного интегрального уравнения в виде (ср. [2])

$$\int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt = \mu\varphi(s). \tag{224}$$

Всякое число μ, для которого существует отличное от тождественного нуля решение уравнения (224), будем называть *собственным значением* (или *собственным числом*) этого уравнения. Характеристические значения связаны с собственными значениями соотношением $\mu = \lambda^{-1}$.

В силу (222) существует такая последовательность нормированных элементов ψ_n $(n = 1, 2, \ldots)$, что

$$|(A\psi_n, \psi_n)| \to \|A\| \quad (\|\psi_n\| = 1). \tag{225}$$

Поскольку $\|A\|>0$ (A — не оператор аннулирования), величины $(A\psi_n, \psi_n)$ при достаточно больших n отличны от нуля, и среди них имеется или бесконечно много положительных, или бесконечно много отрицательных, или бесконечно много и тех и других. Во всяком случае, мы можем выделить такую подпоследовательность из последовательности элементов ψ_n, что, удерживая прежнее обозначение значков, можем написать:

$$(A\psi_n, \psi_n) \to \mu_1, \tag{226}$$

где

$$\mu_1 = \|A\|$$

или

$$\mu_1 = -\|A\|.$$

Составим элемент

$$\tau_n = \mu_1\psi_n - A\psi_n$$

и определим квадрат его нормы:

$$\|\tau_n\|^2 = (\mu_1\psi_n - A\psi_n, \mu_1\psi_n - A\psi_n) = \\ = \mu_1^2(\psi_n, \psi_n) - 2\mu_1(A\psi_n, \psi_n) + (A\psi_n, A\psi_n),$$

или, принимая во внимание, что $\|\psi_n\| = 1$, $\|A\psi_n\|^2 \leqslant \|A\|^2 = \mu_1^2$,

$$\|\tau_n\|^2 \leqslant 2\mu_1[\mu_1 - (A\psi_n, \psi_n)].$$

В силу (226) правая часть стремится к нулю при $n \to \infty$, а потому и $\|\tau_n\| \to 0$, т. е.

$$\mu_1\psi_n - A\psi_n \Rightarrow 0. \tag{227}$$

До сих пор мы не использовали того факта, что A — вполне непрерывный оператор. Используем это сейчас.

Элементы ψ_n нормированы, так что множество их ограничено, стало быть, последовательность $A\psi_n$ — компактна. Из нее можно выделить подпоследовательность, имеющую предельный элемент. Сохраняя прежнее обозначение значков, можем считать, что последовательность $A\psi_n$ имеет предельный элемент. Но тогда из (227) следует, что последовательность ψ_n имеет предельный элемент ($\mu_1 \neq 0$). Пусть $\psi_n \Rightarrow \varphi_1$. Предельный элемент φ_1, так же как и ψ_n, нормирован в силу сходимости $(\psi_n, \psi_n) \to (\varphi_1, \varphi_1)$. Переходя в (227) к пределу и принимая во внимание непрерывность оператора A, получим $\mu_1\varphi_1 - A\varphi_1 = 0$, т е.

$$A\varphi_1 = \mu_1\varphi_1. \tag{228}$$

Таким образом, уравнение (223) имеет собственное число μ_1 и соответствующий нормированный собственный элемент φ_1. Из (228) следует

$$(A\varphi_1, \varphi_1) = \mu_1. \tag{229}$$

Предыдущие рассуждения приводят нас к следующей теореме существования собственного числа.

Теорема 1. *Если A — вполне непрерывный самосопряженный оператор, отличный от оператора аннулирования, то уравнение* (223) *имеет собственное число μ_1 такое, что $|\mu_1| = \|A\|$, а соответствующий собственный элемент φ_1 обращает в максимум $|(A\varphi, \varphi)|$ при условии $\|\varphi\| = 1$.*

Заметим, что при доказательстве сходимости элементов ψ_n мы не использовали полноты пространства, и рассуждения справедливы как для L_2, так и для C_{L_2}.

36. Последовательность собственных чисел и теорема разложения. Рассмотрим теперь вместо всего L_2 (или C_{L_2}) его часть, а именно множество тех его элементов φ, которые ортогональны φ_1, т. е. удовлетворяют условию

$$(\varphi, \varphi_1) = \int_a^b \varphi(s)\overline{\varphi_1(s)}\, ds = 0. \tag{230}$$

Это множество обозначим через F_2. Исходное пространство, т. е. L_2 или C_{L_2}, будем сейчас обозначать через F (или F_1). Отметим важные для нас факты, касающиеся F_2. Составляя линейные комбинации элементов F_2, мы опять получаем элементы F_2. Действительно, если $(\omega_1, \varphi_1) = (\omega_2, \varphi_1) = 0$, то и

$$(c_1\omega_1 + c_2\omega_2, \varphi_1) = c_1(\omega_1, \varphi_1) + c_2(\omega_2, \varphi_1) = 0.$$

Далее, если ω_n принадлежат F_2 и $\omega_n \Rightarrow \omega_0$, то и ω_0 принадлежит F_2. Действительно, из $(\omega_n, \varphi_1) = 0$ предельным переходом получаем $(\omega_0, \varphi_1) = 0$. Покажем еще, что если элемент τ принадлежит F_2, то и $A\tau$ принадлежит F_2. Действительно, по условию $(\tau, \varphi_1) = 0$, и мы имеем

$$(A\tau, \varphi_1) = (\tau, A\varphi_1) = (\tau, \mu_1\varphi_1) = \mu_1(\tau, \varphi_1) = 0.$$

Таким образом, мы можем рассматривать оператор A как самосопряженный, вполне непрерывный оператор, определенный на F_2. Он преобразует элементы F_2 опять в элементы F_2. Все наши рассуждения из [34] и [35] сохраняют свою силу с заменой F на F_2. Возникает вопрос о норме оператора A в F_2. Обозначим ее через γ_2 ($\gamma_1 = \|A\|$). Эта норма определяется согласно теореме 2 из [34]

$$\gamma_2 = \sup_{\|\varphi\| = 1,\ \varphi \in F_2} |(A\varphi, \varphi)|.$$

Норма $\|A\|$ того же оператора в более широком пространстве F определялась аналогичной формулой (217), где φ пробегало не F_2, а F. Таким образом, γ_2 есть верхняя граница более узкого множества чисел, и мы можем утверждать, что $\gamma_2 \leqslant \|A\|$.

В частности, может оказаться, что $\gamma_2=0$, т. е. может оказаться, что A есть оператор аннулирования в F_2. Положим, что это не так. Повторяя рассуждения из [35], мы убедимся в том, что при этом уравнение (223), рассматриваемое как уравнение в F_2, имеет собственное число μ_2 и соответствующий собственный нормированный элемент φ_2 из F_2: $A\varphi_2=\mu_2\varphi_2$. При этом $|\mu_2|=\gamma_2$ и $(A\varphi_2, \varphi_2)=$ $=\mu_2$. Из $\gamma_2\leqslant\|A\|$ следует $|\mu_1|\geqslant|\mu_2|$.

Строим теперь множество F_3 элементов F, удовлетворяющих двум условиям:

$$(\varphi, \varphi_1)=(\varphi, \varphi_2)=0.$$

Относительно F_3 можно утверждать то же, что мы показали выше для F_2, и A можно рассматривать как самосопряженный вполне непрерывный оператор в F_3. Если это не оператор аннулирования, то получаем, как и выше, собственное число μ_3 и нормированный собственный элемент φ_3 из F_3. При этом $|\mu_3|=\gamma_3$, где γ_3 — норма A как оператора в F_3. Очевидно, $|\mu_1|\geqslant|\mu_2|\geqslant|\mu_3|$.

Продолжая так и дальше, получим собственные числа $\mu_1, \mu_2, \ldots$ $\ldots, \mu_n$ и соответствующие попарно ортогональные и нормированные элементы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, причем

$$|\mu_1|\geqslant|\mu_2|\geqslant\ldots\geqslant|\mu_n|,$$

и $|\mu_k|$ есть норма A как оператора в F_k, откуда

$$|(A\varphi, \varphi)|\leqslant|\mu_k|\cdot\|\varphi\|^2,$$

если

$$(\varphi, \varphi_1)=(\varphi, \varphi_2)=\ldots=(\varphi, \varphi_{k-1})=0.$$

Положим, что процесс оборвется при построении следующего собственного числа, т. е. что A окажется оператором аннулирования на множестве F_{n+1}, определяемом условиями

$$(\varphi, \varphi_1)=(\varphi, \varphi_2)=\ldots=(\varphi, \varphi_n)=0. \tag{231}$$

Пусть ω — любой элемент из F. Построим элемент:

$$\varphi=\omega-\sum_{k=1}^{n}(\omega, \varphi_k)\varphi_k, \tag{232}$$

удовлетворяющий (231), т. е. принадлежащий F_{n+1}. По условию мы имеем

$$A\left[\omega-\sum_{k=1}^{n}(\omega, \varphi_k)\varphi_k\right]=0$$

или, раскрывая скобки и принимая во внимание, что $A\varphi_k=\mu_k\varphi_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, получим

$$A\omega=\sum_{k=1}^{n}(\omega, \varphi_k)\mu_k\varphi_k,$$

т. е. всякий элемент вида $A\omega$ разлагается по собственным элементам φ_k. Нетрудно проверить, что $(\omega, \varphi_k)\mu_k$ суть коэффициенты Фурье элемента $A\omega$:

$$(A\omega, \varphi_k) = (\omega, A\varphi_k) = (\omega, \mu_k \varphi_k) = \mu_k (\omega, \varphi_k).$$

Положим теперь, что указанный выше процесс построения μ_s, отличных от нуля, продолжается беспредельно. Покажем сначала, что последовательность μ_s стремится к нулю. Пусть, наоборот, невозрастающая последовательность положительных чисел μ_s^2 имеет предел a, бо́льший нуля. Поскольку все собственные элементы φ_s имеют норму, равную единице, последовательность $A\varphi_s$ должна быть компактна. С другой стороны, принимая во внимание, что φ_s попарно ортогональны, получим по теореме Пифагора

$$\| A\varphi_m - A\varphi_n \|^2 = \| \mu_m\varphi_m - \mu_n\varphi_n \|^2 = \mu_m^2 + \mu_n^2,$$

и при беспредельном возрастании m и n последняя сумма имеет предел $2a$, бо́льший нуля, откуда следует, что последовательность $A\varphi_s$ не может быть компактной. Полученное противоречие показывает, что $\mu_s \to 0$.

Рассмотрим опять элемент (232), принадлежащий F_{n+1}. Норма оператора A в F_{n+1} равна $|\mu_{n+1}|$ и, следовательно,

$$\left\| A\left(\omega - \sum_{k=1}^{n} (\omega, \varphi_k)\varphi_k\right)\right\|^2 \leqslant \mu_{n+1}^2 \left\| \omega - \sum_{k=1}^{n} (\omega, \varphi_k)\varphi_k \right\|^2. \tag{233}$$

Но, как легко проверить [3],

$$\left\| \omega - \sum_{k=1}^{n} (\omega, \varphi_k)\varphi_k \right\|^2 = \| \omega \|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(\omega, \varphi_k)|^2 \leqslant \| \omega \|^2,$$

так что из (233) следует:

$$\left\| A\left(\omega - \sum_{k=1}^{n} (\omega, \varphi_k)\varphi_k\right)\right\|^2 \leqslant \mu_{n+1}^2 \| \omega \|^2,$$

и правая часть стремится к нулю при $n \to \infty$, откуда

$$A\left[\omega - \sum_{k=1}^{n} (\omega, \varphi_k)\varphi_k\right] = A\omega - \sum_{k=1}^{n} (\omega, \varphi_k)\mu_k\varphi_k \Rightarrow 0,$$

т. е.

$$A\omega = \sum_{k=1}^{\infty} (\omega, \varphi_k)\mu_k\varphi_k, \tag{234}$$

причем сходимость бесконечного ряда надо понимать как сходимость в среднем отрезков этого ряда к $A\omega$.

Мы доказали выше, что собственные элементы, соответствующие различным μ_s, ортогональны, а собственные элементы, соответствующие одному и тому же μ_s, можно ортогонализовать. Указанным выше путем мы получаем последовательность собственных элементов, образующих ортонормированную систему.

Теорема 2. *Элементы φ_k суть все линейно-независимые собственные элементы, соответствующие собственным числам, отличным от нуля, т. е. если некоторый собственный элемент τ соответствует собственному числу $\mu_0 \neq 0$,* то *μ_0 должно совпадать с одним или несколькими μ_k (собственные значения с рангом >1) и τ есть линейная комбинация соответствующих φ_k с постоянными коэффициентами.*

Пусть τ — собственный элемент, соответствующий некоторому $\mu_0 \neq 0$. Покажем, что μ_0 должно совпадать с одним или несколькими из μ_k $(k=1, 2, \ldots)$ и что τ есть линейная комбинация собственных элементов φ_k, соответствующих тем собственным числам, с которыми совпадает μ_0. Если μ_0 отлично от всех μ_k, то τ ортогонально ко всем φ_k, т. е. $(\tau, \varphi_k)=0$ $(k=1, 2, \ldots)$. Подставляя в формулу (234) $\omega=\tau$ и принимая во внимание, что $A\tau=\mu_0\tau$ $(\mu_0 \neq 0)$, получим $\mu_0\tau=0$, т. е. τ — нулевой элемент, что противоречит тому, что τ — собственный элемент. Положим теперь, что $\mu_0=\mu_1$ и $\mu_0=\mu_2$, но отлично от остальных μ_k. Составим элемент

$$\tau'=\tau-[(\tau, \varphi_1)\varphi_1+(\tau, \varphi_2)\varphi_2]. \tag{235}$$

Выражение, стоящее в квадратной скобке, как и τ, удовлетворяет однородному уравнению

$$A\varphi=\mu_0\varphi \qquad (\mu_0=\mu_1=\mu_2). \tag{236}$$

При этом и τ', очевидно, удовлетворяет этому однородному уравнению. Если τ' есть нулевой элемент, то $\tau=(\tau, \varphi_1)\varphi_1+(\tau, \varphi_2)\varphi_2$, т. е. τ линейно выражается через φ_1 и φ_2. Из (235) непосредственно следует, что τ' ортогонально φ_1 и φ_2. Оно ортогонально также ко всем φ_k при $k>2$, так как τ' соответствует собственное число $\mu_0=\mu_1=\mu_2$, отличное от остальных μ_k $(k>2)$. Таким образом, подставляя $\omega=\tau'$ в (232), приходим, как и выше, к противоречию, и теорема 2 доказана.

В теории интегральных уравнений вместо (223) мы пользовались записью $\varphi=\lambda A\varphi$, т. е. $\lambda=\frac{1}{\mu}$. По доказанному, $|\mu_n|\to 0$, и потому $|\lambda_n|=\frac{1}{|\mu_n|}\to\infty$ при $n\to\infty$.

Из рассуждений настоящего параграфа следует:

Теорема 3. *Все собственные значения μ вполне непрерывного оператора A, отличные от нуля, имеют конечный ранг и вне любого промежутка $[-\varepsilon, \varepsilon]$ — их конечное число. Всякий элемент вида $A\omega$, где ω — любой элемент, разлагается в ряд Фурье*

по собственным элементам φ_k, причем сходимость этого ряда понимается как сходимость в среднем.

Кроме теоремы 3, отметим еще, что $|\mu_k|$ есть максимум значений $|(A\varphi, \varphi)|$ при условиях

$$\|\varphi\| = 1 \text{ и } (\varphi, \varphi_1) = (\varphi, \varphi_2) = \ldots = (\varphi, \varphi_{k-1}) = 0. \tag{237}$$

Рассмотрим еще вопрос о решениях уравнения

$$A\tau = 0 \tag{238}$$

и докажем следующую теорему.

Теорема 4. *Для того чтобы элемент τ был решением уравнения $A\tau = 0$, необходимо и достаточно, чтобы τ было ортогонально ко всем φ_k, т. е. $(\tau, \varphi_k) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$.*

Достаточность непосредственно следует из формулы (234) при $\omega = \tau$, ибо $(\tau, \varphi_k) = 0$ по условию. Докажем необходимость.

Пусть $A\tau = 0$. Принимая во внимание, что $A\varphi_k = \mu_k\varphi_k$, можем написать

$$(\tau, \varphi_k) = \frac{1}{\mu_k}(A\tau, \varphi_k) = 0,$$

так как по условию $A\tau = 0$, ч. и т. д.

Справедливо также следующее утверждение:

Теорема 5. *Если для симметричного вполне непрерывного оператора A уравнение $A\tau = 0$ имеет только нулевое решение, то для любого элемента f пространства L_2 ряд Фурье $\sum_{k=1}^{\infty}(f, \varphi_k)\varphi_k$, построенный по ортонормированной системе φ_k собственных элементов A, отвечающих отличным от нуля собственным числам, сходится к f в норме L_2.*

Это предложение верно не только для L_2, но и для любого другого гильбертова пространства. Как известно [II; 163], ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(f, \varphi_k)\varphi_k$ сходится в L_2 к некоторому элементу $\tilde{f} \in L_2$. Ясно, что $(f - \tilde{f}, \varphi_k) = 0$ при всех $k = 1, 2 \ldots$. Возьмем произвольный элемент $\omega \in L_2$. По теореме 3 данного пункта $A\omega$ разлагается в ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k$, сходящийся к $A\omega$ в норме L_2. Поэтому

$$(A(f - \tilde{f}), \omega) = (f - \tilde{f}, A\omega) = \left(f - \tilde{f}, \sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \bar{a}_k (f - \tilde{f}, \varphi_k) = 0,$$

т. е. $A(f - \tilde{f}) = 0$. В силу условий теоремы отсюда вытекает, что $f - \tilde{f} = 0$, ч. и т. д.

37. Формулировка полученных результатов в терминах интегральных операторов. При изложении теорем 1—4 мы не пользовались тем фактом, что рассматриваемый линейный, вполне непрерывный, самосопряженный оператор A есть интегральный оператор:

$$\psi(s) = A\varphi = \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt. \tag{239}$$

При непрерывном ядре и конечном промежутке $[a, b]$, считая, что $\varphi(t)$ из L_2, мы получаем непрерывную функцию $\psi(s)$. Поэтому уравнение

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt$$

с непрерывными $f(s)$, $K(s, t)$ имеет лишь непрерывные решения, даже если $\varphi(s)$ ищется из L_2. Этого нельзя утверждать об уравнении

$$\int_a^b K(s, t)\,\tau(t)\,dt = 0.$$

При непрерывности ядра оно может иметь решения $\tau(t)$ из L_2. Это надо иметь в виду в теореме 4. Если присоединить все линейно-независимые решения уравнения из L_2 (не непрерывные), предварительно ортогонализовав их, к собственным функциям $\varphi_k(s)$, то получится замкнутая (полная) система. Для оператора (239) рассматривалось уравнение с параметром $A\varphi = \mu\varphi$ и его собственные числа

$$|\mu_1| \geqslant |\mu_2| \geqslant |\mu_3| \geqslant \ldots,$$

причем $|\mu_1| = \|A\|$ и

$$|\mu_1| = \max \left| \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,\overline{\varphi(s)}\,dt\,ds \right| \quad \text{при} \quad \|\varphi\| = 1,$$

и этот максимум осуществляется при $\varphi(t) = \varphi_1(t)$. Величина μ_k определяется так:

$$|\mu_k| = \max \left| \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,\overline{\varphi(s)}\,dt\,ds \right|$$

при $\|\varphi\| = 1$ и

$$(\varphi_1, \varphi) = (\varphi_2, \varphi) = \ldots = (\varphi_{k-1}, \varphi) = 0,$$

и этот максимум осуществляется при $\varphi(t) = \varphi_k(t)$. Ортонормированная система $\varphi_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ может состоять как из конечного, так и из бесконечного числа функций, причем в последнем случае она может быть как замкнутой, так не замкнутой.

Теорема 3 заключается в том, что всякая функция $g(s)$, представимая через ядро

$$g(s)=\int_a^b K(s,\ t)\,\omega(t)\,dt,$$

разлагается в ряд Фурье по $\varphi_k(s)$, сходящийся в среднем к $g(s)$. Для непрерывных и слабо полярных ядер ($\omega(t)$ считаем непрерывной функцией) $g(s)$ — непрерывная функция, соблюдается условие

$$\int_b^b |K(s,\ t)|^2\,dt\leqslant C^2,$$

и было доказано, что упомянутый ряд Фурье сходится регулярно, а следовательно, и в среднем, и его сумма равна $f(s)$, поскольку предел в среднем единствен.

Ряд имеет вид

$$g(s)=\sum_k \frac{(\omega,\ \varphi_k)}{\lambda_k}\,\varphi_k(s).$$

Для L_2 считаем $\omega(t)$ из L_2 и написанный ряд сходится в среднем.

Рассмотрим полярные ядра без условия их слабой полярности. Было доказано, что соответствующий оператор

$$\psi(s)=\int_a^b \frac{L(s,\ t)}{|s-t|^\alpha}\,\varphi(t)\,dt \quad (0<\alpha<1)$$

преобразует непрерывные функции $\varphi(t)$ в непрерывные $\psi(s)$ и является вполне непрерывным оператором из C в C. При $\frac{1}{2}\leqslant\alpha<1$ ядро не принадлежит L_2. Рассмотрим интегральное уравнение с таким ядром:

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\int_a^b \frac{L(s,\ t)}{|s-t|^\alpha}\,\varphi(t)\,dt, \tag{240}$$

причем мы считаем, что $f(s)$ непрерывна в $[a,\ b]$ и $L(s,\ t)$ в k_0.

Подставим правую часть (240) вместо $\varphi(t)$ под знаком интеграла и проделаем эту подстановку несколько раз (ср. [20]); для краткости письма обозначая ядро через $K(s,\ t)$, мы получим

$$\varphi(s)=F(s)+\lambda^n\int_a^b K_n(s,\ t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{241}$$

где

$$F(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,\ t)\,f(t)\,dt+\ldots+\lambda^{n-1}\int_a^b K_{n-1}(s,\ t)\,f(t)\,dt$$

— непрерывная в $[a,\ b]$ функция.

Выбирая n достаточно большим, получим регулярное ядро. Всякое решение $\varphi(s)$ уравнения (240), непрерывное или из L_2, должно удовлетворять и уравнению (241), и следовательно, $\varphi(s)$ — непрерывная функция. Совершенно аналогично и собственные функции уравнения (240) должны быть непрерывными функциями.

38. Теорема Дини. Докажем одну теорему, которой будем пользоваться в дальнейшем.

Теорема. *Если члены ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \tag{242}$$

— непрерывные неотрицательные функции в промежутке $[a, b]$, *ряд сходится во всякой точке этого промежутка и его сумма есть непрерывная функция в упомянутом промежутке, то ряд* (242) *сходится равномерно в* $[a, b]$.

Обозначим через $R_n(x)$ остаточный член ряда (242):

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x).$$

Поскольку члены ряда и сумма ряда по условию являются непрерывными функциями, то и функция $R_n(x)$ будет непрерывной функцией в промежутке $[a, b]$. При любом фиксированном x она не может возрастать при возрастании n, так как члены ряда неотрицательны, т. е. мы имеем $R_{n+1}(x) \leqslant R_n(x)$. Обозначим через m_n наибольшее значение, которое принимает неотрицательная непрерывная функция $R_n(x)$ в промежутке $[a, b]$, и пусть ξ_n — та точка этого промежутка, в которой это значение достигается, т. е. $m_n = R_n(\xi_n)$. Покажем, что при возрастании n числа m_n не могут возрастать, т. е. $m_{n+1} \leqslant m_n$. Действительно, $m_{n+1} = R_{n+1}(\xi_{n+1}) \leqslant R_n(\xi_{n+1})$. Но значение $R_n(\xi_{n+1})$ не может быть больше наибольшего значения m_n функции $R_n(x)$ в промежутке $[a, b]$, откуда и следует, что $m_{n+1} \leqslant m_n$. Невозрастающая последовательность положительных чисел m_n должна иметь предел, который может быть нулем или положительным числом: если этот предел есть нуль, то равномерная сходимость ряда (242) обеспечена, поскольку наибольшее значение его остаточного члена стремится к нулю при $n \to \infty$. Остается доказать, что предел чисел m_n не может быть положительным числом. Будем доказывать от обратного. Все числа ξ_n, которые мы ввели выше, находятся на конечном промежутке $[a, b]$ и, следовательно, на этом промежутке будет существовать хотя бы одна точка $x = c$ сгущения этих чисел [II; 92], т. е. такая точка, что в любой малой ее окрестности находится бесчисленное множество чисел ξ_n. В точке $x = c$ ряд, по условию, сходится и,

следовательно, мы можем фиксировать такой достаточно большой значок N, что $R_N(c) < \frac{l}{2}$, где буквой l мы обозначали предполагаемый положительный предел последовательности m_n. Поскольку функция $R_N(x)$ есть непрерывная функция, мы можем найти точку ξ_n при $n > N$, настолько близкую к c, что и в этой точке ξ_n будет соблюдено неравенство $R_N(\xi_n) < \frac{l}{2}$. Так как, по условию, $n > N$, то мы имеем $m_n = R_n(\xi_n) \leqslant R_N(\xi_n)$, т. е. оказывается, что $m_n < \frac{l}{2}$, а это противоречит тому, что числа m_n стремятся, не возрастая, к пределу l. Установленное противоречие и доказывает теорему Дини.

Мы знаем, что если члены ряда — непрерывные функции и ряд сходится равномерно, то и сумма ряда непрерывная функция. В общем случае обратная теорема несправедлива, т. е. из непрерывности суммы нельзя заключать о равномерной сходимости ряда. Теорема Дини утверждает, что если члены ряда не только непрерывные, но и неотрицательные функции, то это обратное утверждение справедливо, т. е. из непрерывности суммы вытекает равномерная сходимость ряда.

39. Разложение повторных ядер. Будем считать ядро непрерывным (и симметричным). Тем самым и все повторные ядра — непрерывны. Из формулы

$$K_2(s, t) = \int_a^b K(s, t_1) K(t_1, t)\, dt_1 \tag{243}$$

мы видим, что $K_2(s, t)$ как функция от s представима через ядро, причем роль $h(t_1)$ играет функция $K(t_1, t) = \overline{K(t, t_1)}$, а t есть параметр. Как мы видели выше, коэффициенты Фурье $K(t, t_1)$ по отношению к системе функций (198) равны $\overline{\varphi_k(t)} : \lambda_k$, и, таким образом, теорема 2 из [32] дает:

$$K_2(s, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(s)\, \overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k^2}. \tag{244}$$

Формула эта доказана (на основании теоремы 2) при любом s из $[a, b]$ и при любом t из того же промежутка, т. е. эта формула справедлива во всем квадрате k_0.

Напомним формулу [5]:

$$K_n(s, t) = \int_a^b K(s, t_1) K_{n-1}(t_1, t)\, dt_1. \tag{245}$$

Из (245) следует, что коэффициенты Фурье $K_n(s, t)$ как функции

s равны коэффициентам Фурье $K_{n-1}(t_1, t)$ как функции t_1, деленным на λ_k. Для $K(s, t)$ — это $\frac{\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k}$, для $K_2(s, t)$ — это $\frac{\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k^2}$ и т. д.

Вообще для $K_n(s, t)$ — это $\frac{\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k^n}$, и теорема 2 дает:

$$K_n(s, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(s)\,\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k^n} \quad (n = 2, 3, \ldots), \tag{246}$$

причем, как и выше, ряд сходится в k_0. Исследуем характер сходимости этих рядов.

В силу теоремы 2 мы можем утверждать регулярную сходимость написанных рядов по отношению к переменной s в промежутке $[a, b]$ при любом фиксированном значении t из того же промежутка. В силу симметрии мы будем иметь регулярную сходимость и по отношению к переменной t при фиксированном s. Докажем, что *ряды будут регулярно сходящимися по отношению к обеим переменным в квадрате* k_0. Достаточно провести доказательство для ряда (244) Для остальных рядов (при $n > 2$) доказательство тем более сохранит свою силу, ибо $|\lambda_n| \to +\infty$. Применяя очевидное неравенство

$$\left|\frac{\varphi_k(s)\,\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k^2}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left[\frac{|\varphi_k(s)|^2}{\lambda_k^2} + \frac{|\varphi_k(t)|^2}{\lambda_k^2}\right],$$

мы видим, что достаточно доказать, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(s)|^2}{\lambda_k}$ равномерно сходится в промежутке $[a, b]$. Этот последний ряд получается из ряда (244) при $t = s$ и, следовательно, его сумма равна

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(s)|^2}{\lambda_k^2} = K_2(s, s).$$

Члены написанного ряда суть неотрицательные непрерывные функции, его сумма — непрерывная функция в промежутке $[a, b]$, так что равномерная сходимость этого ряда непосредственно вытекает из теоремы Дини.

Приведем некоторые следствия из полученных формул. Полагая в формуле (246) $t = s$ и интегрируя по s, получим, принимая во внимание нормированность функций $\varphi_k(s)$, выражение для так называемых *следов повторных ядер* через характеристические значения основного ядра:

$$\int_a^b K_n(s, s)\,ds = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^n}. \tag{247}$$

Принимая во внимание (243), можно написать

$$\int_a^b K_2(s, s)\,ds = \int_a^b\int_a^b |K(s, t)|^2\,ds\,dt,$$

и формула (247) при $n=2$ приводит нас к равенству:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} = \int_a^b\int_a^b |K(s, t)|^2\,ds\,dt. \tag{248}$$

Формула (246) может оказаться несправедливой при $n=1$. Мы покажем сейчас, что при любом фиксированном s из $[a, b]$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \left| K(s, t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(s)\,\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k} \right|^2 dt = 0 \tag{249}$$

равномерно относительно s в $[a, b]$. Для доказательства рассмотрим разложение $K(s, t)$, как функции t, по ортонормированной системе $\overline{\varphi_k(t)}$. Коэффициенты Фурье равны $\varphi_k(s)/\lambda_k$, и мы имеем

$$\int_a^b \left| K(s, t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(s)\,\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k} \right|^2 dt = \int_a^b |K(s, t)|^2\,dt - \sum_{k=1}^{n} \frac{|\varphi_k(s)|^2}{\lambda_k^2}.$$

Но мы видели, что

$$\int_a^b |K(s, t)|^2\,dt = K_2(s, s)$$

и согласно (244)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|\varphi_k(s)|^2}{\lambda_k^2} \to K_2(s, s) \qquad \text{при } n\to\infty$$

и при том, как мы видели, равномерно относительно s. Отсюда следует, что предел (249) имеет место равномерно относительно s. Положим, что ряд (201) сходится равномерно относительно t в промежутке $[a, b]$ при фиксированном s, и обозначим через $K_1(s, t)$ его сумму. Переходя в (249) к пределу, получим

$$\int_a^b |K(s, t) - K_1(s, t)|^2\,dt = 0,$$

откуда следует, что $K_1(s, t) \equiv K(s, t)$ в k_0, т. е. *для доказательства формулы* (202) *не надо предполагать равномерной сходимости ряда по отношению к обеим переменным в квадрате k_0, а достаточно лишь предположить, что ряд равномерно сходится относительно одной из переменных при любом фиксированном значении другой переменной.*

Рассмотрим разность

$$\omega_n(s, t) = K(s, t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(s)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k} \tag{250}$$

как ядро некоторого интегрального уравнения

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b \omega_n(s, t)\varphi(t)\,dt, \tag{251}$$

и докажем, что *числа* $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \ldots$ *и функции* $\varphi_{n+1}(s), \varphi_{n+2}(s), \ldots$ *представляют собой полную совокупность характеристических чисел и собственных функций уравнения* (251). Умножим обе части (250) на $\lambda_m \varphi_m(t)$, где $m > n$, и проинтегрируем по t. Принимая во внимание ортогональность функций $\varphi_p(t)$, получим

$$\lambda_m \int_a^b \omega_n(s, t)\varphi_m(t)\,dt = \lambda_m \int_a^b K(s, t)\varphi_m(t)\,dt,$$

или, принимая во внимание, что $\varphi_m(t)$ — собственная функция ядра $K(s, t)$, соответствующая характеристическому значению λ_m,

$$\lambda_m \int_a^b \omega_m(s, t)\varphi_m(t)\,dt = \varphi_m(s).$$

Мы видим, таким образом, что уравнение (251) имеет те же характеристические значения λ_m и соответствующие собственные функции $\varphi_m(s)$ при $m > n$, что и основное уравнение. Остается показать, что это есть полная система характеристических значений и собственных функций уравнения (251). Умножим обе части (250) на $\overline{\varphi_m(s)}$, где $m \leqslant n$. Принимая во внимание ортогональность и нормированность функций $\varphi_p(s)$, получим

$$\int_a^b \omega_n(s, t)\overline{\varphi_m(s)}\,ds = \int_a^b K(s, t)\overline{\varphi_m(s)}\,ds - \frac{\overline{\varphi_m(t)}}{\lambda_m}.$$

Разность, стоящая в правой части, равна нулю, ибо $\varphi_m(t)$ есть собственная функция ядра $K(s, t)$, соответствующая характеристическому значению λ_m, т. е.

$$\int_a^b \omega_n(s, t)\varphi_m(s)\,ds = 0 \quad (m \leqslant n). \tag{252}$$

Пусть λ — некоторое характеристическое значение уравнения (251) и $\varphi(s)$ — соответствующая собственная функция. Умножая обе части (251) на $\overline{\varphi_m(s)}$ и принимая во внимание (252), получим

$$\int_a^b \varphi(s)\overline{\varphi_m(s)}\,ds = 0 \quad (m \leqslant n). \tag{253}$$

Подставляя в (251) вместо $\omega_n(s, t)$ его выражение (250) и принимая во внимание формулы (252), можем записать (251) в виде

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt,$$

т. е. $\varphi(s)$ является собственной функцией основного ядра, в силу (253), ортогональной ко всем $\varphi_m(s)$ при $m \leqslant n$, а отсюда следует, что λ совпадает с одним из λ_k при $k > n$, а $\varphi_k(s)$ является с точностью до постоянного множителя одной из функций $\varphi_k(s)$ при $k > n$ или их линейной комбинацией в случае характеристического значения ранга больше единицы Таким образом, наше утверждение о характеристических значениях и собственных функциях ядра $\omega_n(s, t)$ доказано.

Из (246) следует, что ядра $K_n(s, t)$ симметричны. Это видно также непосредственно из их определения. Легко доказать, что λ_k^n и $\varphi_k(s)$ суть все характеристические значения и собственные функции уравнения

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K_n(s, t)\varphi(t)\,dt.$$

Если ядро слабо полярно, то $K_2(s, t)$ есть непрерывная функция [20], и мы имеем разложения (246).

Положим, что ядро удовлетворяет условию

$$\int_a^b |K(s, t)|^2\,dt \leqslant C^2, \tag{254}$$

из которого следует

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(s)|^2}{\lambda_k^2} \leqslant C^2.$$

В силу неравенства Коши получим

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(s)|\,|\varphi_k(t)|}{\lambda_k^n} \leqslant \frac{1}{|\lambda_{m+1}|^{n-2}} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(s)|^2}{\lambda_k^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(t)|^2}{\lambda_k^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C^2}{|\lambda_{m+1}|^{n-2}},$$

и можем утверждать, что при условии (254) повторные ряды (246) сходятся регулярно в k_0 при $n \geqslant 3$.

40. Решение интегрального уравнения через характеристические значения и собственные функции. Положим сначала, что в интегральном уравнении

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt, \tag{255}$$

λ отлично от характеристического значения, так что уравнение имеет единственное решение. Обозначим через f_k коэффициенты Фурье заданной функции $f(s)$ и через c_k — искомой функции $\varphi(s)$ относительно ортонормированной системы $\varphi_k(s)$ собственных функций. Представляя функцию в правой части, представимую через ядро, согласно [32], получим

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda_k} \varphi_k(s), \tag{256}$$

причем мы считаем, что имеется бесконечное число характеристических значений. Сравнивая коэффициенты Фурье левой и правой частей, получим уравнение для определения c_k:

$$c_k = f_k + \lambda \frac{c_k}{\lambda_k} \quad \text{или} \quad (\lambda_k - \lambda)\, c_k = f_k \lambda_k, \tag{257}$$

откуда, если λ не есть характеристическое значение,

$$c_k = \frac{\lambda_k f_k}{\lambda_k - \lambda}, \tag{258}$$

и формула (256) дает

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(s), \tag{259}$$

причем ряд, стоящий справа, сходится регулярно для непрерывных или слабо полярных ядер и в среднем для ядер из L_2. В этом легко убедиться и непосредственно, используя формулу

$$\left| \frac{f_k}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(s) \right| = |f_k| \cdot \left| \frac{\varphi_k(s)}{\lambda_k} \right| \cdot \frac{1}{\left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda_k} \right|},$$

неравенство Коши и тот факт, что

$$\frac{1}{\left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda_k} \right|} \to 1 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Положим теперь, что λ совпадает с одним из характеристических значений, ранг которого может быть любым. Положим для простоты письма, что λ совпадает с характеристическим значением λ_1 третьего ранга, т. е.

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3. \tag{260}$$

При этом вторая из формул (257) приведет нас к необходимому условию разрешимости (ср. [39]):

$$f_k = \int_a^b f(s)\,\overline{\varphi_k(s)}\,ds = 0 \quad (k = 1,\ 2,\ 3), \tag{261}$$

т. е. свободный член должен быть ортогонален к собственным функциям, соответствующим характеристическим значениям $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, а формула (258) определит коэффициенты c_k при $k > 3$. Положим, что условия (261) выполнены. При этом общее решение уравнения (255) в рассматриваемом случае будет суммой какого-либо решения уравнения и общего решения однородного уравнения (при $f(s) \equiv 0$), т. е.

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \sum_{k=4}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda_k - \lambda}\,\varphi_k(s) + c_1\varphi_1(s) + c_2\varphi_2(s) + c_3\varphi_3(s),$$

где c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные. Кратко говоря, если λ совпадает с характеристическим значением, то в одной или нескольких дробях (258) знаменатель обратится в нуль. При этом и соответствующий коэффициент Фурье f_k должен равняться нулю, а всю дробь надо заменить произвольной постоянной. Таким образом, условие (261) не только необходимо, но и достаточно для разрешимости уравнения.

41. Аппарат Фредгольма в случае симметричного ядра. Применим изложенный выше аппарат Фредгольма к случаю симметричного непрерывного ядра, считая λ вещественным,

В этом случае числитель Фредгольма (53) и резольвента также будут симметричными функциями. Мы имели раньше разложение повторных ядер [39]. Подставим эти разложения в формулу (39), причем мы считаем, что λ удовлетворяет условию (41) и, следовательно, $|\lambda| < |\lambda_1|$:

$$R(s,\ t;\ \lambda) = K(s,\ t) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(s)\,\overline{\varphi_n(t)}}{\lambda_n^2} + \lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(s)\,\overline{\varphi_n(t)}}{\lambda_n^3} + \ldots \tag{262}$$

Нетрудно видеть, что если в этом ряду мы заменим все величины их абсолютными значениями, то полученный двойной ряд с положительными членами будет сходящимся. Действительно, соединяя в нем в одну группу члены, содержащие $|\varphi_n(s)|\,|\varphi_n(t)|$, получим ряд:

$$|K(s,\ t)| + |\varphi_1(s)|\,|\varphi_1(t)| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\lambda|^k}{|\lambda_1|^{k+1}} + |\varphi_2(s)|\,|\varphi_2(t)| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\lambda|^k}{|\lambda_2|^{k+1}} +$$

$$+ \ldots = |K(s,\ t)| + \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(s)|\,|\varphi_n(t)| \frac{|\lambda|}{|\lambda_n|\,(|\lambda_n| - |\lambda|)}.$$

Но, сравнивая этот ряд с равномерно сходящимся рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\varphi_n(s)|\,|\varphi_n(t)|}{|\lambda_n|^2}, \tag{263}$$

мы видим, что отношение общих членов $\frac{|\lambda|\,|\lambda_n|^2}{|\lambda_n|\,(|\lambda_n|-|\lambda|)}$ не зависит от переменных (s, t) и стремится к $|\lambda|$, откуда и вытекает абсолютная сходимость двойного ряда (262). Мы можем, следовательно, в этом ряду собрать в одну группу члены, содержащие $\varphi_n(s)\,\overline{\varphi_n(t)}$. Таким образом, мы получим следующее разложение для резольвенты по собственным функциям:

$$R(s, t; \lambda) = K(s, t) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(s)\,\overline{\varphi_n(t)}}{\lambda_n(\lambda_n - \lambda)}. \tag{264}$$

Строго говоря, мы вывели это разложение, предполагая, что λ удовлетворяет условию (41) Но, заменяя в ряде (264) все члены их абсолютными значениями и сравнивая, как и выше, полученный ряд с рядом (263), мы убедимся в том, что ряд (264) сходится абсолютно и равномерно относительно (s, t) при любом λ, отличном от λ_n. Больше того, он сходится равномерно и относительно λ в любой ограниченной области плоскости λ, если отбросить в нем несколько первых слагаемых, имеющих полюсы в этой области. Таким образом, правая часть формулы (264) представляет собой разложение дробной функции на простейшие дроби и совершенно так же, как и формула (57), она дает аналитическое продолжение резольвенты $R(s, t, \lambda)$ на всю плоскость. В частности, из формулы (264) вытекает, что *в случае симметричного ядра всякое характеристическое значение есть простой полюс резольвенты.* Заметим, что если мы подставим разложение (264) в формулу (45), то получим формулу (259), дающую разложение решения по собственным функциям.

Положим в формуле (264) $t = s$ и проинтегрируем по s:

$$\int_a^b R(s, s; \lambda)\,ds = \int_a^b K(s, s)\,ds + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n(\lambda_n - \lambda)}.$$

Но, деля обе части (59) на $D(\lambda)$, получим

$$\int_a^b R(s, s; \lambda)\,ds = -\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)},$$

и, следовательно, предыдущая формула может быть переписана в виде

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = -\int_a^b K(s, s)\,ds + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n(\lambda - \lambda_n)}.$$

Пусть λ_0 — корень $D(\lambda)$ кратности r. Мы знаем [III_2; 21], что для левой части последней формулы значение $\lambda=\lambda_0$ будет простым полюсом с вычетом r. В правой части этой формулы некоторые из чисел λ_n будут совпадать с λ_0. Каждая из соответствующих дробей может быть переписана в виде

$$\frac{\lambda}{\lambda_n(\lambda-\lambda_n)}=\frac{1}{\lambda-\lambda_n}+\frac{1}{\lambda_n},$$

т. е. каждая из таких дробей даст в полюсе $\lambda=\lambda_0$ вычет, равный единице, следовательно, r из чисел λ_n должны равняться λ_0 Мы имеем, таким образом, следующую теорему: если, в случае симметричного ядра, λ_0 есть корень $D(\lambda)$ кратности r, то этому характеристическому значению соответствуют в точности r линейно-независимых собственных функций, т. е. *в случае симметричного ядра кратность корня $D(\lambda)$ равна рангу соответствующего характеристического значения.*

Мы видели выше, что ядро $K(s, t)$ имеет своим рядом Фурье относительно системы собственных функций $\varphi_n(t)$ ряд (201). Подставляя этот ряд вместо $K(s, t)$ в правую часть формулы (264), мы убедимся, что резольвента имеет рядом Фурье следующий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(s)\overline{\varphi_n(t)}}{\lambda_n-\lambda}. \tag{265}$$

Принимая во внимание, что ряд, стоящий в правой части формулы (264), является рядом равномерно сходящимся, мы можем утверждать, что равномерная сходимость ряда (265) имеет место одновременно с равномерной сходимостью ряда (201), и если это обстоятельство имеет место, то наряду с формулой (202) мы будем иметь и формулу:

$$R(s, t; \lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(s)\overline{\varphi_n(t)}}{\lambda_n-\lambda}. \tag{266}$$

Легко получить коэффициенты Фурье функции $R(s, t; \lambda)$ и непосредственно, умножая обе части (264) на $\varphi_n(t)$ и интегрируя по t. Принимая во внимание, что $\varphi_n(t)$ есть собственная функция ядра $K(s, t)$ и что $\varphi_n(t)$ ортогональны и нормированы, получим таким образом, коэффициенты ряда (265):

$$\int_a^b R(s, t; \lambda)\,\varphi_n(t)\,dt=\frac{1}{\lambda_n-\lambda}\,\varphi_n(s).$$

Это равенство показывает, что функции $\varphi_n(s)$ суть собственные функции ядра $R(s, t; \lambda)$, соответствующие характеристическим

значениям $(\lambda_n - \lambda)$, где вещественное λ мы фиксируем произвольным образом. Нетрудно видеть, что это есть полная система всех собственных функций вещественного симметричного ядра $R(s, t; \lambda)$.

Мы можем, таким образом, утверждать, что *если примем функцию* $R(s, t; \lambda)$ *за новое ядро, то это ядро имеет ту же совокупность собственных функций* $\varphi_n(s)$, *что и основное ядро, а соответствующие характеристические значения будут* $(\lambda_n - \lambda)$. Применяя формулу (264) к ядру $R(s, t; \lambda)$ и обозначая через μ параметр, входящий в резольвенту, убедимся, что резольвента этого ядра будет такой:

$$\tilde{R}(s, t, \lambda; \mu) = R(s, t; \lambda) + \mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(s)\overline{\varphi_n(t)}}{(\lambda_n - \lambda)(\lambda_n - \lambda - \mu)},$$

а раскладывая $R(s, t; \lambda)$ по формуле (264) и совершая элементарные преобразования, найдем без труда:

$$\tilde{R}(s, t, \lambda; \mu) = K(s, t) + (\lambda + \mu) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(s)\overline{\varphi_n(t)}}{\lambda_n[\lambda_n - (\lambda + \mu)]} = R(s, t; \lambda + \mu),$$

т. е. *если принять* $R(s, t; \lambda)$ *за новое ядро, то резольвентой для него будет функция* $R(s, t; \lambda + \mu)$.

Отметим, что поскольку для слабо полярных симметричных ядер мы получили разложение повторных ядер и доказали равномерную сходимость ряда (263), мы имеем для таких ядер и разложение (264). Если $K(s, t)$ из L_2, то нетрудно показать, что разложение (266) есть ряд Фурье для $R(s, t; \lambda)$, соответствующий характеристическим значениям $(\lambda_n - \lambda)$ и собственным функциям $\varphi_n(s)\overline{\varphi_n(t)}$ (ср. [31]).

42. Классификация симметричных ядер. Выше мы определили собственные значения и соответствующие собственные функции из задач о максимуме величины $|(A\psi, \psi)|$ [36]. В явном виде через ядро мы имеем:

$$(A\psi, \psi) = \int_a^b \left[\int_a^b K(s, t)\psi(t)\,dt\right]\overline{\psi(s)}\,ds. \tag{267}$$

Пусть c_k — коэффициенты Фурье $\psi(s)$ относительно собственных функций ядра $\varphi_k(s)$. Применяя к внутреннему интегралу теорему Гильберта — Шмидта, умножая полученный ряд на $\overline{\psi(t)}$ и почленно интегрируя, получим

$$(A\psi, \psi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k|^2}{\lambda_k}. \tag{268}$$

Положим, что все $\lambda_k > 0$. При этом

$$J = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k|^2}{\lambda_k} \geqslant 0 \tag{269}$$

и соответствующее ядро называется *положительным*. Знак равенства может получиться, если существует такое $\psi(s) \neq 0$ (из L_2), для которого все c_k равны нулю. Если же ортонормированная система $\varphi_k(s)$ замкнута, то этого не может быть, и $J > 0$. Такое ядро называется *определенно положительным*. Аналогично определяют отрицательные и определенно отрицательные ядра.

Если положить $\psi(t) = \varphi_m(t)$, то в формуле (268) имеем $|c_m| = 1$ и остальные $c_k = 0$ $(k \neq m)$. Отсюда следует, что если λ_k разных знаков, то и величина J может принимать значения разных знаков.

Собственные функции $\varphi_k(s)$ получались из условия максимума J при тех же условиях, что норма $\psi(s)$ равна единице (см. [36]). В дальнейшем нам нужна будет другая постановка экстремальных задач, а именно, мы требуем, чтобы была нормирована не сама функция $\psi(s)$, а ее преобразование через ядро:

$$\int_a^b \left| \int_a^b K(s, t)\, \psi(t)\, dt \right|^2 ds = 1. \tag{270}$$

Внутренний интеграл разлагается согласно теореме Гильберта — Шмидта в равномерно сходящийся ряд или ряд, сходящийся в среднем (для ядер из L_2), и условие (270) согласно уравнению замкнутости можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k|^2}{\lambda_k^2} = 1. \tag{271}$$

Будем считать ядро положительным и перепишем формулу (269) в виде

$$J = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k|^2}{\lambda_k^2} \lambda_k.$$

Заменяя λ_k его наименьшим значением, получим согласно (271)

$$J \geqslant \lambda_1. \tag{272}$$

Если мы положим $\psi(s) = \lambda_1 \varphi_1(s)$, то $c_1 = \lambda_1$ и $c_k = 0$ при $k > 1$, так что условие (271) соблюдено, и в формуле (272) мы имеем знак равенства. Таким образом, *первое характеристическое значение* λ_1 *есть наименьшее значение интеграла* (267) *при условии* (270). Это наименьшее значение достигается, если положить $\psi(s) = \lambda_1 \varphi_1(s)$. Совершенно так же, как и выше, мы можем показать что

характеристическое значение λ_2 *есть наименьшее значение интеграла* (267), *если функция* $\psi(s)$ *удовлетворяет следующим условиям*:

$$\int_a^b \left| \int_a^b K(s, t)\psi(t)\,dt \right|^2 ds = 1; \quad \int_a^b \psi(s)\overline{\varphi_1(s)}\,ds = 0,$$

и это наименьшее значение достигается, если положить $\psi(s) = \lambda_2\varphi_2(s)$.

Нетрудно видеть, что приведенный экстремальный принцип получения характеристических значений и собственных функций применим не только к положительному ядру, но и ко всякому ядру, которое имеет конечное число отрицательных характеристических значений, т. е. для которого характеристические значения могут быть расположены в неубывающем порядке, начиная с первого. Заметим, что если, например, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 < \lambda_4$, то интеграл (267) будет достигать наименьшего значения при условии $\|\psi\| = 1$ и для $\psi(s) = \lambda_1\varphi_1(s)$, и для $\psi(s) = \lambda_1\varphi_2(s)$, и для $\psi(s) = \lambda_1\varphi_3(s)$, а также для любой линейной комбинации $\psi(s) = \lambda_1(a_1\varphi_1(s) + a_2\varphi_2(s) + a_3\varphi_3(s))$, коэффициенты которой удовлетворяют условию

$$|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2 = 1.$$

Аналогичное замечание имеет место и для указанной выше первой экстремальной задачи.

43. Теорема Мерсера. Приведем формулировку теоремы.

Теорема. *Если* $K(s, t)$ *есть положительное или отрицательное непрерывное ядро, то его ряд Фурье по собственным функциям сходится регулярно в квадрате* k_0.

Будем считать ядро положительным и вещественным. Докажем сначала неравенство $K(s, s) \geqslant 0$.

Действительно, если бы на диагонали квадрата k_0 существовала такая точка $s = t = c$, в которой $K(c, c) < 0$, то существовала бы такая окрестность упомянутой точки $|s - c| < \varepsilon$ и $|t - c| < \varepsilon$, что во всей этой окрестности $K(s, t) < 0$. Мы можем определить такую непрерывную функцию $p(s)$, которая имеет положительные значения в промежутке $c - \varepsilon < s < c + \varepsilon$ и равна нулю везде вне этого промежутка. Для этой функции будем иметь:

$$J = \int_a^b\int_a^b K(s, t)\,p(s)\,p(t)\,ds\,dt = \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon}\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} K(s, t)\,p(s)\,p(t)\,ds\,dt < 0,$$

что противоречит положительности ядра. Образуем ядро

$$K(s, t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(s)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k}. \tag{273}$$

Его характеристические значения λ_{n+1}, λ_{n+2}, ... положительны. Применяя к этому ядру только что доказанный факт, получим

$$K(s, s) - \sum_{k=1}^{n} \frac{|\varphi_k(s)|^2}{\lambda_k} \geqslant 0, \text{ т. е. } \sum_{k=1}^{n} \frac{|\varphi_k(s)|^2}{\lambda_k} \leqslant K(s, s).$$

Отсюда непосредственно следует, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(s)|^2}{\lambda_k}$ с положительными членами сходится при всяком значении s и что его частичные суммы при любом значении s из промежутка $[a, b]$ остаются меньше положительного числа M. Применяя неравенство Коши, можно написать так:

$$\sum_{k=n}^{n+p} \left| \frac{\varphi_k(s)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k} \right| = \sum_{k=n}^{n+p} \left| \frac{\varphi_k(s)}{\sqrt{\lambda_k}} \right| \cdot \left| \frac{\varphi_k(t)}{\sqrt{\lambda_k}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{k=n}^{n+p} \frac{|\varphi_k(s)|^2}{\lambda_k}} \sqrt{\sum_{k=n}^{n+p} \frac{|\varphi_k(t)|^2}{\lambda_k}}, \qquad (274)$$

или

$$\sum_{k=n}^{n+p} \left| \frac{\varphi_k(s)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k} \right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=n}^{n+p} \frac{|\varphi_k(s)|^2}{\lambda_k}} \sqrt{M},$$

и отсюда в силу сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(s)|^2}{\lambda_k}$ непосредственно следует, что ряд (201) сходится регулярно по t в промежутке $[a, b]$ при фиксированном s. Совершенно аналогично доказывается регулярная сходимость по s при фиксированном t.

Из доказанного следует:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(s)|^2}{\lambda_k} = K(s, s),$$

причем в силу теоремы Дини ряд сходится равномерно, и из неравенства (274) следует регулярная сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(s)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k}$$

в k_0, r. и т. д.

44. Кососимметричное ядро и интегральные уравнения, приводимые к уравнениям с симметричным ядром. Ядро $K(s, t)$ называем кососимметричным, если

$$\overline{K(t, s)} = -K(s, t) \tag{275}$$

и в случае вещественности ядра:

$$K(t, s) = -K(s, t).$$

Если ввести ядро

$$L(s, t) = \imath K(s, t),$$

то в силу (275) получим

$$\overline{L(t, s)} = L(s, t),$$

и интегральное уравнение с кососимметричным ядром

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt \tag{276}$$

можно переписать в виде уравнения с симметричным ядром

$$\varphi(s) = f(s) + \mu \int_a^b L(s, t)\, \varphi(t)\, dt, \tag{277}$$

где $\mu = -\imath\lambda$, т. е. $\lambda = \mu\imath$. Отсюда следует, что уравнение (276) с кососимметричным ядром имеет по крайней мере одно характеристическое значение и что все его характеристические значения — чисто мнимые.

Мы укажем сейчас еще класс интегральных уравнений, которые простым преобразованием приводятся к уравнениям с симметричным ядром. Это уравнения вида

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s, t)\, p(t)\, \varphi(t)\, dt, \tag{278}$$

где $K(s, t)$ — симметричное ядро и непрерывная функция $p(t) > 0$ в промежутке $[a, b]$. Умножая обе части (278) на $\sqrt{p(s)}$ и вводя новую искомую функцию $\psi(s) = \sqrt{p(s)}\, \varphi(s)$, придем к интегральному уравнению

$$\psi(s) = f(s)\sqrt{p(s)} + \lambda \int_a^b L(s, t)\, \psi(t)\, dt \tag{279}$$

с симметричным ядром:

$$L(s, t) = K(s, t)\sqrt{p(s)\, p(t)}.$$

Пусть λ_k и $\psi_k(s)$ — характеристические значения и собственные функции уравнения (279), причем последние образуют ортонор-

мированную систему. Пользуясь формулой $\psi_k(s) = \sqrt{p(s)}\,\varphi_k(s)$, получим для собственных функций уравнения (278) ортонормированность с весом $p(s)$:

$$\int_a^b p(s)\,\varphi_k(s)\,\overline{\varphi_l(s)}\,ds = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq l, \\ 1 & \text{при } k = l. \end{cases}$$

При непрерывности или слабой полярности $K(s, t)$ получим для второго повторного ядра

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k(s)\,\overline{\psi_k(t)}}{\lambda_k^2} = L_2(s, t) = \int_a^b K(s, t_1)\,K(t_1, t)\,p(t_1)\sqrt{p(s)\,p(t)}\,dt_1$$

и, сокращая на множитель $\sqrt{p(s)\,p(t)}$, получим

$$H_2(s, t) = \int_a^b K(s, t_1)\,K(t_1, t)\,p(t_1)\,dt_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(s)\,\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k^2}.$$

Аналогичным образом для функций

$$H_p(s, t) = \int_a^b H_{p-1}(s, t_1)\,K(t_1, t)\,p(t_1)\,dt_1$$

будем иметь

$$H_p(s, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(s)\,\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k^p}.$$

Мы имеем, кроме того, формулу:

$$K(s, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(s)\,\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k},$$

если ряд, стоящий справа, сходится равномерно по отношению к одной из переменных при любом фиксированном значении второй переменной.

Положим, что функция $f(s)$ представима через ядро $L(s, t)$, т. е.

$$f(s) = \int_a^b L(s, t)\,h(t)\,dt. \tag{280}$$

Тогда

$$f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \psi_k(s), \tag{281}$$

где

$$f_k = \int_a^b f(s)\,\overline{\psi_k(s)}\,ds = \int_a^b f(s)\sqrt{p(s)}\,\overline{\varphi_k(s)}\,ds.$$

Сокращая обе части (280) и (281) на $\sqrt{p(s)}$, получим для функции

$$F(s)=f(s):\sqrt{p(s)}=\int_a^b K(s,\ t)\sqrt{p(t)}\,h(t)\,dt$$

разложение:

$$F(s)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k\varphi_k(s).$$

Мы могли бы также привести уравнение (278) к уравнению с симметричным ядром, вводя вместо s и t новые переменные x и y:

$$x=\int_a^s p(u)\,du;\quad y=\int_a^t p(u)\,du,$$

причем в силу $p(u)>0$ новые переменные возрастают при возрастании s и t, и последние — однозначные функции x и y. После замены переменных получим новые функции: $f_1(x)=f(s)$, $\omega(x)=\varphi(s)$ и новое симметричное ядро $K_1(x,\ y)=K(s,\ t)$, и уравнение (278) перепишется в виде

$$\omega(x)=f_1(x)+\lambda\int_0^l K_1(x,\ y)\,\omega(y)\,dy\quad\left(l=\int_a^b p(u)\,du\right).$$

45. Уравнения первого рода. Рассмотрим интегральное уравнение первого рода

$$\int_a^b K(s,\ t)\,\varphi(t)\,dt=f(s) \tag{282}$$

с симметричным ядром. Мы считаем, что $K(s,\ t)$ из L_2 в k_0, заданная функция $f(s)$ из L_2 в $[a,\ b]$ и ищется решение $\varphi(s)$ также из L_2. В дальнейшем будем называть симметричное ядро полным, если система его собственных функций полна (замкнута). Если ядро не полное, то уравнение

$$\int_a^b K(s,\ t)\,\varphi(t)\,dt=0 \tag{283}$$

имеет решение, не эквивалентное нулю, и если уравнение (282) разрешимо в L_2, то его решение не единственно. *Если же ядро $K(s,\ t)$ — полное, то уравнение* (282) *не может иметь более одного решения.* Если бы оно имело два не эквивалентных решения $\varphi_1(s)$ и $\varphi_2(s)$, то их разность $\varphi(s)=\varphi_1(s)-\varphi_2(s)$, не эквивалентная нулю, должна была бы удовлетворять уравнению (283), т. е. ядро оказалось бы не полным, что противоречит предположению.

Как и выше, через f_k будем обозначать коэффициенты Фурье $f(s)$ относительно ортонормированной системы $\varphi_k(s)$ собственных функций ядра и через λ_k — его характеристические значения.

Докажем теорему Пикара, дающую необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (282).

Теорема. *Пусть $K(s, t)$ — полное ядро. Тогда для разрешимости уравнения* (282) *необходимо и достаточно, чтобы ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |f_k|^2 \tag{284}$$

сходился.

Сначала докажем необходимость условия Пусть существует решение $\varphi(s)$ (из L_2) уравнения (282). Пусть a_k — коэффициенты Фурье $\varphi(s)$ относительно системы $\varphi_k(s)$. Как известно, коэффициенты Фурье функции $f(s)$, представимой согласно (282) через ядро, выражаются формулой

$$f_k = \frac{a_k}{\lambda_k}, \quad \text{т. е.} \quad a_k = \lambda_k f_k, \tag{285}$$

и из сходимости ряда с общим членом $|a_k|^2$ следует сходимость ряда (284).

Докажем достаточность условия. Пусть ряд (284) сходится. Тогда существует функция $\varphi(s)$ из L_2 с коэффициентами Фурье $\lambda_k f_k$ и в силу полноты системы $\varphi_k(s)$ такая функция единственна (с точностью до эквивалентности)

$$\varphi(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k f_k \varphi_k(s), \tag{286}$$

причем написанный ряд сходится в среднем. Функция (286) удовлетворяет уравнению (282), так как при ее подстановке в уравнение левая и правая части равенства (282) имеют одни и те же коэффициенты Фурье относительно полной ортонормированной системы $\varphi_k(s)$. Теорема доказана.

Полнота ядра, т. е. системы $\varphi_k(s)$, является существенной не только для единственности, но и для существования решения уравнения (282) из L_2. Действительно, положим, что система $\varphi_k(s)$ — не полная, т. е. существуют функции из L_2, не эквивалентные нулю и ортогональные ко всем $\varphi_k(s)$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Пусть $\omega(s)$ — такая функция. Покажем, что уравнение (282) при $f(s) = \omega(s)$ не имеет решений из L_2. В самом деле, пусть такое решение $\varphi(s)$ существует, и пусть h_k — коэффициенты Фурье функции $\varphi(s)$ относительно ортогональной системы $\{\varphi_k(s)\}$. Из

уравнения (282), вычисляя коэффициенты Фурье левой части согласно [32], находим

$$\omega(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k}{\lambda_k} \varphi_k(s),$$

причем ряд в правой части сходится в среднем. Умножая на $\overline{\varphi_m(s)}$ и интегрируя, получим, что $h_m = 0$ $(m = 1, 2, \ldots)$, т. е. $\omega(s) \equiv 0$. Это противоречит выбору $\omega(s)$.

Если же при неполном ядре для какой-либо $f(s)$ из L_2 уравнение (282) имеет решение $\varphi(t)$ из L_2, то, очевидно, функция $\varphi(t) + \omega(t)$, где $\omega(t)$ ортогональна ядру, также удовлетворяет уравнению. Следовательно, решение уравнения (282) в этом случае не единственно.

46. Симметризация ядра. Рассмотрим несимметричное ядро $K(s, t)$, которое будем для простоты считать непрерывным в k_0. Введем в рассмотрение два симметричных ядра

$$K_1(s, t) = \int_a^b \overline{K(\tau, s)}\, K(\tau, t)\, d\tau, \quad K_2(s, t) = \int_a^b K(s, \tau)\, \overline{K(t, \tau)}\, d\tau. \tag{287}$$

Покажем, что оба ядра положительны [42]:

$$\int_a^b\int_a^b K_1(s, t)\, \varphi(t)\, \overline{\varphi(s)}\, dt\, ds =$$

$$= \int_a^b\int_a^b\int_a^b \overline{K(\tau, s)}\, K(\tau, t)\, \varphi(t)\, \overline{\varphi(s)}\, ds\, d\tau\, dt =$$

$$= \int_a^b \left[\int_a^b \overline{K(\tau, s)}\, \overline{\varphi(s)}\, ds \int_a^b K(\tau, t)\, \varphi(t)\, dt\right] d\tau = \int_a^b \left|\int_a^b K(\tau, s)\, \varphi(s)\, ds\right|^2 d\tau \geqslant 0$$

и аналогично для $K_2(s, t)$. Характеристические значения положительного ядра $K_1(s, t)$ положительны; обозначим какое-либо характеристическое значение через Λ^2, и пусть $\varphi(s)$ — соответствующая собственная функция. Покажем, что

$$\psi(s) = \Lambda \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt \tag{288}$$

будет собственной функцией ядра $K_2(s, t)$, соответствующей тому же характеристическому значению Λ^2. Действительно, из формул (287) и (288) легко находим, что

$$\int_a^b K_2(s, t)\, \psi(t)\, dt = \Lambda \int_a^b\int_a^b\int_a^b K(s, \tau)\, \overline{K(t, \tau)}\, K(t, \sigma)\, \varphi(\sigma)\, d\sigma\, d\tau\, dt =$$

$$= \Lambda \int_a^b K_1(s, \tau) \left[\int_a^b K_1(\tau, \sigma)\, \varphi(\sigma)\, d\sigma\right] d\tau = \Lambda^3 \int_a^b K(s, \tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau = \Lambda^2 \psi(s).$$

Заметим, что функция (288) не эквивалентна нулю. В самом деле, из равенства $\psi(s)=0$ следовало бы:

$$0=\int_a^b \overline{K(t,\ s)}\,\psi(t)\,dt=\Lambda\int_a^b\int_a^b \overline{K(t,\ s)}\,K(t,\ \tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau\,dt=$$

$$=\Lambda\int_a^b K_1(s,\ \tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau=\Lambda^3\varphi(s),$$

а это противоречит тому, что $\varphi(s)$ — собственная функция.

Точно так же, если $\psi(s)$ — собственная функция ядра $K_2(s,\ t)$, отвечающая характеристическому значению Λ^2, то

$$\varphi(s)=\Lambda\int_a^b \overline{K(t,\ s)}\,\psi(t)\,dt \tag{289}$$

есть собственная функция ядра $K_1(s,\ t)$, отвечающая тому же характеристическому числу. Из доказанного следует, что ядра $K_1(s,\ t)$ и $K_2(s,\ t)$ имеют совпадающие характеристические значения Λ_k^2 $(k=1,\ 2,\ \ldots)$ одинакового ранга. Пусть $\varphi_k(s)$ — соответствующие собственные функции ядра $K_1(s,\ t)$, образующие ортонормированную систему. Тогда, пользуясь формулой (288), нетрудно показать:

$$\int_a^b \psi_k(s)\,\overline{\psi_l(s)}\,ds=\frac{\Lambda_k}{\Lambda_l}\int_a^b \varphi_k(s)\,\overline{\varphi_l(s)}\,ds=\begin{cases}0 & \text{при } k\neq l,\\ 1 & \text{при } k=l,\end{cases}$$

т. е. функции $\psi_k(s)$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$ образуют ортонормированную систему собственных функций ядра $K_2(s,\ t)$. При этом формулы (288), (289) дают

$$\psi_k(s)=\Lambda_k\int_a^b K(s,\ t)\,\varphi_k(t)\,dt;\quad \varphi_k(s)=\Lambda_k\int_a^b \overline{K(t,\ s)}\,\psi_k(t)\,dt \tag{290}$$

$$(\Lambda_k>0;\qquad k=1,\ 2,\ \ldots).$$

Так как ядра $K_1(s,\ t)$ и $K_2(s,\ t)$ непрерывны, то из теоремы Мерсера [43] следуют разложения в абсолютно и равномерно сходящиеся ряды:

$$K_1(s,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(s)\,\overline{\varphi_k(t)}}{\Lambda_k^2},\quad K_2(s,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi_k(s)\,\overline{\psi_k(t)}}{\Lambda_k^2}. \tag{291}$$

Докажем, что для ядра $K(s,\ t)$ мы имеем разложение

$$K(s,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(s)\,\overline{\psi_k(t)}}{\Lambda_k}. \tag{292}$$

Написанный ряд является рядом Фурье ядра по ортонормированным системам $\varphi_k(s)$ и $\overline{\psi_k(t)}$ и сходится в среднем по s и по t. Действительно, из (291) следует:

$$\int_a^b \left| K(s, t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(s)\overline{\psi_k(t)}}{\Lambda_k} \right|^2 ds = \int_a^b |K(s, t)|^2 ds - \sum_{k=1}^{n} \frac{\psi_k(t)^2}{\Lambda_k^2} =$$

$$= K_1(t, t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{|\psi_k(t)|^2}{\Lambda_k^2} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|\psi_k(t)|^2}{\Lambda_k^2}$$

и в силу равномерной сходимости ряда (291) полученное выражение равномерно стремится к нулю при $n \to \infty$. То же верно при перемене ролей s и t.

Пользуясь разложением (292), легко получить обобщение теоремы Гильберта — Шмидта на случай несимметричного ядра. Умножим обе части (292) на функцию $h(t)$ из L_2 и проинтегрируем почленно:

$$\int_a^b K(s, t)\, h(t)\, dt = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(s), \tag{293}$$

где

$$a_k = \frac{1}{\Lambda_k} \int_a^b h(t)\, \overline{\psi_k(t)}\, dt = \frac{h_k}{\Lambda_k}$$

и h_k — коэффициенты Фурье $h(t)$ относительно ортонормированной системы $\psi_k(t)$. Оценим отрезки ряда (293):

$$\sum_{k=n}^{n+p} \left| \frac{h_k}{\Lambda_k} \varphi_k(s) \right| \leqslant \left(\sum_{k=n}^{n+p} |h_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=n}^{n+p} \frac{|\varphi_k(s)|^2}{\Lambda_k^2} \right)^{1/2}. \tag{294}$$

В силу непрерывности ядра имеем

$$\sum_{k=n}^{n+p} \frac{|\varphi_k(s)|^2}{\Lambda_k^2} \leqslant \int_a^b |K(s, t)|^2 dt \leqslant C, \tag{295}$$

где C — постоянная, и, как и в [32], регулярная сходимость ряда (293) следует из (294) и (295). Аналогично доказывается регулярная сходимость ряда

$$\int_a^b \overline{K(t, s)}\, h(t)\, dt = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \psi_k(s).$$

Как и в [45], можно рассмотреть уравнение первого рода:

$$\int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt = f(s). \tag{296}$$

Если a_k — коэффициенты Фурье $f(s)$ относительно ортонормированной системы $\varphi_k(s)$, то необходимое условие разрешимости — сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^2 |a_k|^2.$$

Если система $\varphi_k(s)$ полна в L_2, то решение уравнения (296) существует и единственно в L_2. Если система $\varphi_k(s)$ не полна, то относительно разрешимости уравнения можно сделать те же замечания, что в [45].

47. Примеры. 1. Рассмотрим ядро из [1], причем для простоты письма положим $l=1$, т. е.

$$K(s, t)=\begin{cases} s(1-t) & \text{при } s \leqslant t \\ t(1-s) & \text{»} \quad s \geqslant t \end{cases} \begin{pmatrix} 0 \leqslant s \leqslant 1 \\ 0 \leqslant t \leqslant 1 \end{pmatrix}. \tag{297}$$

В данном случае мы можем найти в конечном виде все характеристические значения и собственные функции. В однородном интегральном уравнении

$$\varphi(s)=\lambda \int_0^1 K(s, t)\, \varphi(t)\, dt \tag{298}$$

нам надо при интегрировании от $t=0$ до $t=s$, т. е. при $t \leqslant s$, пользоваться вторым из выражений (297), а при интегрировании от $t=s$ до $t=1$ — первым из указанных выражений, т. е. уравнение переписывается в виде

$$\varphi(s)=\lambda \int_0^s t(1-s)\, \varphi(t)\, dt+\lambda \int_s^1 s(1-t)\, \varphi(t)\, dt.$$

Дифференцируем обе части по s:

$$\varphi'(s)=-\lambda \int_0^s t\varphi(t)\, dt+\lambda s(1-s)\, \varphi(s)+\lambda \int_s^1 (1-t)\, \varphi(t)\, dt-\lambda s(1-s)\, \varphi(s).$$

Внеинтегральные члены сокращаются, и, дифференцируя еще раз по s, получим

$$\varphi''(s)+\lambda\varphi(s)=0. \tag{299}$$

Ядро (297) удовлетворяет, очевидно, условию $K(0, t)=K(1, t)=0$, и формула (298) дает $\varphi(0)=\varphi(1)=0$, т. е. мы можем брать только те решения уравнения (299), которые удовлетворяют предельным условиям $\varphi(0)=\varphi(1)=0$. Уравнение (299) интегрируется в элементарных функциях и, как мы знаем [II; 180], поставленная для него предельная задача может иметь решения, отличные от нуля, только при $\lambda_n=n^2\pi^2$, и эти решения будут $\varphi_n(s)=\sqrt{2}\sin n\pi s$.

Непосредственной подстановкой в уравнение (298) нетрудно убедиться, что упомянутые числа и функции будут действительно характеристическими значениями и собственными функциями уравнения (298) В этом, впрочем, можно убедиться, замечая, что при наличии упомянутых предельных условий, мы не вводили посторонних решений, производя указанные выше операции дифференцирования обеих частей уравнения. Мы уже имели полученные характеристические значения и собственные функции при рассмотрении задачи колебания струны, закрепленной на концах [II; 180] Этот факт стоит в непосредственной связи с тем, что ядро (297), как мы показали в [1], дает статический прогиб

струны при наличии сосредоточенной силы. В дальнейшем мы разовьем эту идею для широкого класса задач математической физики. Для рассматриваемого примера ряд (201) будет равномерно сходящимся, и мы имеем следующую формулу:

$$\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\pi s\sin k\pi t}{k^2}=\begin{cases}s(1-t) & \text{при } s\leqslant t\\ t(1-s) & \text{при } s\geqslant t\end{cases}\quad\begin{pmatrix}0\leqslant s\leqslant 1\\ 0\leqslant t\leqslant 1\end{pmatrix}. \tag{300}$$

Положим, что некоторая функция $f(s)$ имеет непрерывные производные до второго порядка и удовлетворяет предельным условиям $f(0)=f(1)=0$. Мы имеем для такой функции представление через ядро, а именно:

$$f(s)=-\int_0^1 K(s,\ t)f'(t)\,dt=-\int_0^s t(1-s)f''(t)\,dt-\int_s^1 s(1-t)f''(t)\,dt,$$

что легко проверить, производя интегрирование по частям, и что вытекает также из того, что было сказано в [1] относительно определения прогиба при непрерывно распределенной нагрузке, которую в данном случае надо считать равной $f'(t)$. Теорема 2 показывает нам, таким образом, что всякая функция $f(s)$, удовлетворяющая указанным выше условиям, может быть разложена в промежутке [0, 1] в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье по функциям $\sqrt{2}\sin k\pi s$. В дальнейшем мы увидим, что можно значительно облегчить условия, налагаемые на функцию $f(s)$. Заметим, что формула (300) также представляет собой разложение ее правой части в ряд Фурье.

Этот ряд можно рассматривать или как ряд Фурье правой части как функции от s (t — параметр) по функциям $\sqrt{2}\sin k\pi s$ ($k=1,\ 2,\ \ldots$), или как ряд Фурье правой части как функции, определенной в квадрате ($0\leqslant s\leqslant 1$; $0\leqslant t\leqslant 1$), по функциям $2\sin k\pi s\sin l\pi t$ ($k,\ l=1,\ 2,\ \ldots$), образующим ортогональную нормированную систему в упомянутом квадрате. Аналогично предыдущему, можно рассмотреть ядра вида

$$K(s,\ t)=\begin{cases}ast+bs+ct+d & \text{при } s\leqslant t,\\ ast+bt+cs+d & \text{при } s\geqslant t\end{cases}$$

(см. И. И. Привалов, Интегральные уравнения, 1935 г., стр. 102).

2. Рассмотрим ядро $K(s,\ t)$, которое представляет собой функцию от разности $s-t$:

$$K(s,\ t)=\omega(s-t),$$

где $\omega(x)$ — непрерывная четная функция, имеющая период 2π. В силу четности функции $\omega(x)$ такое ядро будет симметричным ядром. Введем в рассмотрение коэффициенты Фурье функции $\omega(x)$:

$$c_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\omega(x)\cos kx\,dx\qquad(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots);$$

при этом в силу четности $\omega(x)$:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\omega(x)\sin kx\,dx=0.$$

Рассмотрим теперь интегралы

$$\int_{-\pi}^{\pi}\omega(s-t)\cos kt\,dt.$$

Совершая замену переменных $s-t=x$ и пользуясь четностью $\omega(x)$, получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} \omega(s-t)\cos kt\,dt = \cos ks \int_{s-\pi}^{s+\pi} \omega(x)\cos kx\,dx,$$

или, принимая во внимание, что длина пути интегрирования равна 2π, будем иметь окончательно:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \omega(s-t)\cos kt\,dt = \pi c_k \cos ks.$$

Точно так же получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} \omega(s-t)\sin kt\,dt = \pi c_k \sin ks.$$

Рассмотрим однородное интегральное уравнение:

$$\varphi(s) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \omega(s-t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Если все коэффициенты Фурье c_k функции $\omega(x)$ отличны от нуля, то из предыдущих вычислений следует, что это уравнение имеет характеристические значения:

$$\lambda_k = \frac{1}{\pi c_k} \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

которым соответствует следующая система ортогональных и нормированных собственных функций:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos s,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2s,\ \ldots$$
$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin s,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2s,\ \ldots$$

Никаких других собственных функций наше ядро не может иметь, поскольку указанные функции образуют замкнутую систему [II; 155]. Характеристическому значению λ_k при $k \geqslant 1$ отвечают две собственные функции. Если, например, $c_1=0$, а остальные c_k отличны от нуля, то из системы собственных функций отпадут две собственные функции: $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos s$ и $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin s$, и ядро перестанет быть полным.

При любых предположениях относительно коэффициентов c_n ряд (201) будет в данном случае иметь такой вид:

$$\frac{1}{2}c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\cos ks\cos kt + \sin ks\sin kt) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\cos k(s-t),$$

т. е. это будет ряд Фурье функции $\omega(s-t)$. В общем случае мы не можем утверждать, что он сходится. Но если коэффициенты Фурье c_k удовлетворяют условию $c_k \geqslant 0$, то из теоремы Мерсера непосредственно вытекает, что ряд сходится абсолютно и равномерно и дает $\omega(s-t)$. То же самое заключение будет иметь место, если среди коэффициентов c_k будет лишь конечное число положительных или отрицательных.

48. Ядра, зависящие от параметра. При изложении теории интегральных уравнений мы рассматривали параметр λ, входящий лишь в качестве множителя при ядре. Мы рассмотрели в [41] интегральное уравнение с ядром $R(s, t; \lambda)$, которое является аналитической функцией параметра.

При рассмотрении интегральных уравнений с ядрами, которые являются аналитическими функциями параметра, мы можем встретить существенные отклонения от тех закономерностей, которые мы имели в изложенной выше общей теории. В качестве простейшего примера рассмотрим один тип однородного интегрального уравнения, в котором ядро есть полином первой степени от λ:

$$\varphi(s)=\int_a^b [K_0(s, t)+K_1(s, t)\lambda]\,\varphi(t)\,dt,$$

где

$$K_0(s, t)=\rho(s)\overline{\rho(t)};\quad K_1(s, t)=\sigma(s)\overline{\rho(t)},$$

причем

$$\int_a^b |\rho(s)|^2\,ds=1;\quad \int_a^b \sigma(s)\overline{\rho(s)}\,ds=0.$$

Нетрудно проверить, что написанное однородное уравнение при всяком λ имеет решение

$$\varphi(s)=\rho(s)+\sigma(s)\lambda.$$

Рассмотрим теперь общий случай ядра $K(s, t; \lambda)$ при следующих условиях: 1) $K(s, t; \lambda)$ — непрерывная функция s, t, λ, когда (s, t) принадлежит k_0 и λ находится внутри некоторой области B плоскости комплексной переменной λ; 2) при всех (s, t), принадлежащих упомянутому квадрату, $K(s, t; \lambda)$ есть регулярная функция λ внутри B.

Напишем интегральное уравнение, вводя вспомогательный параметр μ перед знаком интеграла:

$$\varphi(s)=f(s)+\mu\int_a^b K(s, t; \lambda)\,\varphi(t)\,dt.$$

Мы можем повторить все рассуждения из [5] и [7], заменяя λ, фигурирующее в формулах этих параграфов, на μ. Мы придем, таким образом, к резольвенте

$$R(s, t; \mu)=\frac{D(s, t, \lambda; \mu)}{D(\lambda; \mu)}.$$

Числитель и знаменатель этой дроби — степенные ряды по переменной μ, и коэффициенты этих рядов — регулярные функции внутри B. Если λ заключается в какой-либо замкнутой области B_1, лежащей внутри B, то упомянутые ряды при любом значении μ сходятся абсолютно и равномерно относительно λ [7] и тем самым суммы этих рядов — регулярные функции λ внутри B [III_2; 12]. Полагая $\mu=1$, получим уравнение

$$\varphi(s)=f(s)+\int_a^b K(s, t; \lambda)\,\varphi(t)\,dt. \tag{301}$$

При этом возможны два случая: 1) регулярная внутри B функция $D(\lambda; 1)$ не равна тождественно нулю; 2) $D(\lambda; 1)\equiv 0$. В первом случае уравнение (301) имеет резольвенту:

$$R_1(s, t; \lambda)=\frac{D(s, t, \lambda; 1)}{D(\lambda; 1)}$$

при всех λ, отличных от корней $D(\lambda;\ 1)$, и в любой области B_1, лежащей внутри B, может содержаться лишь конечное число таких корней. Резольвента удовлетворяет, очевидно, уравнениям

$$\begin{aligned} R_1(s,\ t;\ \lambda) &= K(s,\ t;\ \lambda) + \int_a^b K(s,\ t_1;\ \lambda) R_1(t_1,\ t;\ \lambda)\, dt_1, \\ R_1(s,\ t;\ \lambda) &= K(s,\ t;\ \lambda) + \int_a^b K(t_1,\ t;\ \lambda) R_1(s,\ t_1;\ \lambda)\, dt_1, \end{aligned} \tag{302}$$

и если λ не есть корень $D(\lambda;\ 1)$, то уравнение (301) при любой $f(s)$ имеет единственное решение:

$$\varphi(s) = f(s) + \int_a^b R_1(s,\ t;\ \lambda) f(t)\, dt.$$

Если $\lambda = \lambda_0$ есть корень $D(\lambda;\ 1)$, то отсюда следует, что целая функция $D(\lambda_0;\ \mu)$ имеет корень $\mu = 1$, и из результатов [8] следует, что однородное уравнение

$$\varphi(s) = \int_a^b K(s,\ t;\ \lambda)\, \varphi(t)\, dt \tag{303}$$

имеет при $\lambda = \lambda_0$ решения, отличные от нулевого. Отсюда следует, между прочим, что $\lambda = \lambda_0$ есть полюс $R_1(s,\ t;\ \lambda)$. Действительно, в противном случае при всяких $(s,\ t)$ резольвента $R_1(s,\ t;\ \lambda)$ была бы регулярной в точке $\lambda = \lambda_0$ и удовлетворяла бы уравнениям (302), в чем легко убедиться непрерывным переходом в точку $\lambda = \lambda_0$ от близких значений λ, в которых равенства (302) имеют место. Но если равенства (302) имеют место при $\lambda = \lambda_0$, то отсюда следует, что уравнение (301) при всякой $f(s)$ имеет единственное решение [6], а следовательно, однородное уравнение (303) может иметь только одно нулевое решение. В случае $D(\lambda;\ 1) \equiv 0$ однородное уравнение (303) имеет, очевидно, решение, отличное от нулевого, при всяком λ, лежащем внутри B, и неоднородное уравнение (301) разрешимо не при всяком свободном члене.

Из предыдущих рассуждений следует, что при сделанных предположениях о ядре $K(s,\ t;\ \lambda)$ и $D(\lambda;\ 1) \not\equiv 0$ характеристические значения не могут сгущаться внутри B, т. е. во всякой замкнутой области B_1, лежащей внутри B, их может быть лишь конечное число. Если вместо регулярности ядра мы предположим, что оно может иметь полюсы, не зависящие от s и t, то возможно, что в любой малой окрестности каждого такого полюса находится бесконечное множество характеристических значений. Так, например, если уравнение

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b K(s,\ t)\, \varphi(t)\, dt$$

с непрерывным симметричным ядром имеет бесконечное множество характеристических значений λ_n, то $|\lambda_n| \to +\infty$, и у уравнения

$$\varphi(s) = f(s) + \frac{1}{\lambda} \int_a^b K(s,\ t)\, \varphi(t)\, dt$$

с ядром $K(s,\ t;\ \lambda)$, имеющим полюс $\lambda = 0$, характеристические значения λ_n^{-1} стремятся при $n \to \infty$ к $\lambda = 0$.

Но может случиться, что резольвента для ядра, которое имеет полюсы, не имеет вовсе особых точек. Так, например, пусть $R(s,\ t;\ \lambda)$ — резольвента

некоторого интегрального уравнения с симметричным ядром. Как мы знаем, она есть мероморфная функция λ, полюсы которой не зависят от s и t. Составим интегральное уравнение:

$$\varphi(s)=f(s)-\lambda\int_a^b R(s,\ t;\ \lambda)\,\varphi(t)\,dt$$

с ядром $R(s,\ t;\ \lambda)$ и параметром $\mu=-\lambda$. В силу сказанного в [41] резольвента этого уравнения равна

$$R(s,\ t;\ \lambda+\mu)\,|_{\mu=-\lambda}=R(s,\ t;\ 0)=K(s,\ t),$$

и она не зависит от λ.

В работе Я. Д. Тамаркина (Ann. of Mathem , 1927 г.) доказана следующая теорема для ядер из L_2:

Теорема. *Предположим, что ядро уравнения*

$$\varphi(s)=f(s)+\int_a^b K(s,\ t;\ \lambda)\,\varphi(t)\,dt$$

— регулярная функция λ внутри некоторой области B_0 плоскости λ для почти всех точек $(s,\ t)$ квадрата k_0 и что интегралы

$$\int_a^b |K(s,\ t;\ \lambda)|^2\,dt;\qquad \int_a^b |K(s,\ t;\ \lambda)|^2\,ds$$

существуют при почти всех s или соответственно t из $[a,\ b]$ и в любой замкнутой области B_0', лежащей внутри B_0,

$$\int_a^b |K(s,\ t;\ \lambda)|^2\,dt\leqslant F_0(s);\quad \int_a^b |K(s,\ t;\ \lambda)|^2\,ds\leqslant F_0(t),$$

где $F_0(x)$ — положительная функция, зависящая от выбора B_0' и интегрируемая по промежутку $[a,\ b]$. При этом резольвента $R(s,\ t;\ \lambda)$ есть дробная функция λ в B_0 почти при всех $(s,\ t)$ или не существует ни при каком λ. Если $K(s,\ t;\ \lambda)$ — целая функция λ, то $R(s,\ t;\ \lambda)$, если она существует хотя бы при одном λ, есть отношение двух целых функций.

В упомянутой работе доказана аналогичная теорема и для того случая, когда $K(s,\ t;\ \lambda)$ есть мероморфная функция внутри B_0, причем коэффициенты при полярных членах суть конечные суммы произведений функции только от s на функцию только от t.

Уравнения с ядрами, аналитически зависящими от параметра, были рассмотрены еще в ряде работ и, в частности в работах: Miranda (Circ. Matem. di Palermo, t. 608, 1937 г.), Iglisch (Math. Ann. Bd. 117, 1939 г.) и З. И. Халилов (ДАН СССР, т. 54, №7, 1946 г.). В этих работах указана и литература вопроса.

49. Случай функций нескольких переменных. Мы рассматривали теорию интегральных уравнений в основном для случая одного независимого переменного и областью интегрирования являлся конечный или бесконечный промежуток. Совершенно аналогично строится теория и для функций многих переменных

$$\varphi(P)=f(P)+\lambda\int_B K(P,\ Q)\,\varphi(Q)\,d\tau_Q,$$

где B — некоторая двумерная или трехмерная или, вообще, n-мерная область, по которой и совершается интегрирование (для простоты пишем один знак интеграла), $f(P)$ — заданная в этой области и $\varphi(P)$ — искомая функция. Ядро $K(P, Q)$ — заданная функция пары точек (P, Q), каждая из которых принадлежит B. Как и выше, можно рассматривать уравнения с непрерывными ядрами или с полярными ядрами вида

$$K(P, Q) = \frac{L(P, Q)}{r^{\alpha}}, \tag{304}$$

где $L(P, Q)$ — непрерывная или просто ограниченная функция, r — расстояние между точками P и Q и $0 < \alpha < n$, где n — размерность пространства. Слабо полярное ядро вида (304) определяется условием $0 < \alpha < \frac{n}{2}$. При рассмотрении уравнения для функций $f(P)$ и $\varphi(P)$ из L_2 в B ядро предполагается измеримой функцией в области $2n$ измерений, определяемой тем, что P и Q принадлежат n-мерной области B. Предполагается при этом, что

$$\int_B \int_B |K(P, Q)|^2 \, d\tau_P \, d\tau_Q < \infty.$$

Отметим, что для полярных ядер вида (304) при непрерывности $f(P)$ и $L(P, Q)$ решение ищется в классе непрерывных функций.

50. Уравнения Вольтерра. Переходим к рассмотрению уравнений Вольтерра второго рода в одномерном случае:

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_0^s K(s, t) \varphi(t) \, dt. \tag{305}$$

Как уже указывалось ранее, это уравнение является частным случаем уравнения Фредгольма, а именно, тем случаем, когда $K(s, t) = 0$ при $t > s$, т. е. когда ядро обращается в нуль в половине квадрата k_0, лежащей с одной стороны от его диагонали $s = t$. Считаем, что свободный член $f(s)$ — непрерывная функция в некотором промежутке $a \leqslant s \leqslant b$ и $K(s, t)$ — непрерывная функция при $a \leqslant s \leqslant b$, $a \leqslant t \leqslant s$ и $K(s, t) = 0$ при $t > s$. Таким образом, на диагонали $s = t$ ядро имеет разрыв первого рода, если $K(s, s) \neq 0$. Все основные теоремы и аппарат из [5—11] полностью сохраняются.

Ищем, как и раньше, решение в виде ряда

$$\varphi(s) = \varphi_0(s) + \varphi_1(s)\lambda + \varphi_2(s)\lambda^2 + \ldots \tag{306}$$

Для функций $\varphi_n(s)$ получаем формулы

$$\varphi_0(s) = f(s); \quad \varphi_n(s) = \int_a^s K(s, t) \varphi_{n-1}(t) \, dt \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

На конечном промежутке или квадрате имеем оценки для непрерывных функций:

$$|f(s)| \leqslant m; \quad |K(s, t)| \leqslant M$$

и, проводя оценки $\varphi_n(s)$, получаем последовательно:

$$|\varphi_0(s)| \leqslant m; \quad |\varphi_1(s)| \leqslant \int_a^s |K(s, t)| |\varphi_0(t)| dt \leqslant mM(s-a),$$

$$|\varphi_2(s)| \leqslant \int_a^s |K(s, t)| |\varphi_1(t)| dt \leqslant mM^2 \int_a^s (t-a) dt = mM^2 \frac{(s-a)^2}{2!}$$

и вообще,

$$|\varphi_n(s)| \leqslant m \frac{[M(s-a)]^n}{n!}.$$

При изменении s на конечном промежутке $[a, b]$ члены ряда (306) по модулю не превышают положительных чисел:

$$m \frac{[|\lambda| M(b-a)]^n}{n!},$$

образующих при любом λ сходящийся ряд и, следовательно, ряд (306) сходится абсолютно и равномерно на $[a, b]$, а его сумма $\varphi(s)$ есть непрерывная функция и удовлетворяет уравнению (305).

Совершенно так же, как и в [5], можно образовать резольвенту:

$$R(s, t; \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(s, t) \lambda^n, \tag{307}$$

где

$$K_1(s, t) = K(s, t); \quad K_n(s, t) = \int_a^s K_{n-1}(s, t_1) K(t_1, t) dt_1 \tag{308}$$

$$(n = 2, 3, \ldots),$$

причем из этих формул следует, что $K_n(s, t) = 0$ при $t > s$. Действительно, если $t > s$, то $t_1 < t$ и $K(t_1, t) = 0$.

Как и выше, доказывается абсолютная и равномерная сходимость ряда (307) при всех λ. Таким образом, для уравнения Вольтерра (305) резольвента есть целая функция, и при всяком λ это уравнение имеет единственное решение, которое определяется формулой [6]:

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^s R(s, t; \lambda) f(t) dt. \tag{309}$$

Можно, следовательно, утверждать, что уравнение Вольтерра не имеет характеристических значений, т. е. однородное уравнение

$$\varphi(s)=\lambda\int_a^s K(s,\ t)\,\varphi(t)\,dt$$

при любом λ имеет только нулевое решение. В связи с этим, если бы мы построили для уравнения (305) знаменатель Фредгольма $D(\lambda)$, то оказалось бы, что он вовсе не имеет корней [8].

Можно показать, что если ядро имеет вид

$$K(s,\ t)=\frac{L(s,\ t)}{(s-t)^{\alpha}}\ (s>t),$$

где $L(s,\ t)$ — непрерывная функция и $0<\alpha<1$, то уравнение (305) имеет по-прежнему единственное решение, и это решение может быть получено указанным выше методом последовательных приближений. При этом ядра $K_n(s,\ t)$, начиная с некоторого значения n, непрерывны. При $\alpha<1/2$ непрерывным будет уже ядро $K_2(s,\ t)$ [20].

Точно так же метод последовательных приближений применим и к системам уравнений:

$$\varphi_i(s)=f_i(s)+\lambda\sum_{k=1}^{m}\int_a^s K_{ik}(s,\ t)\,\varphi_k(t)\,dt. \tag{310}$$

Характерным для уравнения Вольтерра при сделанных предположениях является тот факт, что ряд, полученный по методу последовательных приближений, сходится при всех значениях λ в упомянутом промежутке. Если условие непрерывности соблюдено при всех $s\geqslant a$, то мы получим решение при всех $s\geqslant a$.

Рассмотрим уравнение с двумя переменными пределами:

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\int_{\omega(s)}^{s} K(s,\ t)\,\varphi(t)\,dt \tag{311}$$

или уравнение

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\int_{s}^{\omega(s)} K(s,\ t)\,\varphi(t)\,dt. \tag{312}$$

Положим, что s меняется в некотором промежутке $[a,\ b]$, причем соблюдены обычные условия непрерывности для $f(s)$ и $K(s,\ t)$ и, кроме того, пусть в указанном промежутке $a\leqslant\omega(s)\leqslant s$. Существуют, очевидно, такие положительные числа N и M, что при $a\leqslant s,\ t\leqslant b$ мы имеем

$$|f(s)|\leqslant N;\quad |K(s,\ t)|\leqslant M.$$

В уравнении (311) или (312) заменим $f(s)$ и $K(s, t)$ превосходящими положительными числам N и M и введем вместо $(\omega(s), s)$ или $(s, \omega(s))$ более широкий промежуток интегрирования (a, s):

$$\varphi(s) = N + \lambda M \int_a^s \varphi(t)\, dt. \tag{313}$$

Применение метода последовательных приближений к последнему уравнению приведет, как легко доказать, к степенно́му ряду относительно λ, коэффициенты которого положительны и не меньше, чем абсолютные величины коэффициентов степенно́го ряда, получаемого при решении уравнений (311) и (312). Уравнение (313) имеет обычный вид, причем роль $K(s, t)$ играет при $t \leqslant s$ постоянная M, и соответствующий степенной ряд сходится равномерно относительно s в промежутке $[a, b]$ при всяком λ. То же можно тем более утверждать о ряде, получаемом при решении уравнений (311) или (312), и этот ряд дает решение соответствующего уравнения. Отметим, что решение уравнения (313) выражается в конечном виде, а именно:

$$\varphi(s) = Ne^{\lambda M (s-a)}.$$

Заметим также, что, например, уравнение (311) может быть записано в обычной форме (305), причем ядро подчиняется условию: $K(s, t) = 0$ при $t < \omega(s)$.

В интеграле, входящем в уравнение (305), мы можем переставить пределы, изменив одновременно знак у ядра. Таким образом, тот факт, что переменным является верхний предел интеграла, не существен для теории. Точно так же вместо неравенства $s \geqslant a$ мы могли бы поставить условие $s \leqslant a$. При помощи простой замены $s' = -s$ и $t' = -t$ один случай переходит в другой. Аналогичным образом вместо указанных выше неравенств для $\omega(s)$, например, в уравнении (311), мы могли бы считать $s \leqslant \omega(s) \leqslant b$.

Рассмотрим еще уравнение:

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_{-s}^{s} K(s, t)\, \varphi(t)\, dt, \tag{314}$$

где $f(s)$ определена и непрерывна при $-b \leqslant s \leqslant b$, и ядро $K(s, t)$ определено при $-b \leqslant s \leqslant b$, $-b \leqslant t \leqslant b$. Разбивая промежуток интегрирования на две части, $(-s, 0)$ и $(0, s)$, и заменяя в первом случае переменную интегрирования t на $(-t)$, получим

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_0^s K(s, -t)\, \varphi(-t)\, dt + \lambda \int_0^s K(s, t)\, \varphi(t)\, dt;$$

заменяем s на $(-s)$ и t на $(-t)$:

$$\varphi(-s) = f(-s) - \lambda \int_0^s K(-s, t)\, \varphi(t)\, dt - \lambda \int_0^s K(-s, -t)\, \varphi(-t)\, dt.$$

Считая $0 \leqslant s \leqslant b$ и $0 \leqslant t \leqslant b$, положим:

$$\varphi(s) = \varphi_1(s), \quad \varphi(-s) = \varphi_2(s), \quad f(s) = f_1(s), \quad f(-s) = f_2(s),$$
$$K(s, t) = K_{11}(s, t), \; K(s, -t) = K_{12}(s, t), \; K(-s, t) = -K_{21}(s, t),$$
$$K(-s, -t) = -K_{22}(s, t).$$

Мы приведем интегральное уравнение (314) к системе уравнений обычного вида:

$$\varphi_1(s) = f_1(s) + \lambda \int_0^s K_{11}(s, t)\, \varphi_1(t)\, dt + \lambda \int_0^s K_{12}(s, t)\, \varphi_2(t)\, dt,$$

$$\varphi_2(s) = f_2(s) + \lambda \int_0^s K_{21}(s, t)\, \varphi_1(t)\, dt + \lambda \int_0^s K_{22}(s, t)\, \varphi_2(t)\, dt.$$

Если мы решим эту систему уравнений, то получим две функции $\varphi_1(s)$ и $\varphi_2(s)$, непрерывные в промежутке $0 \leqslant s \leqslant b$. Решение $\varphi(s)$ уравнения (314) мы получим теперь по формулам: $\varphi(s) = \varphi_1(s)$ при $0 \leqslant s \leqslant b$; $\varphi(s) = \varphi_2(-s)$ при $-b \leqslant s \leqslant 0$. При $s = 0$ применима любая из этих двух формул, потому что $\varphi_1(0) = f_1(0) = f(0)$ и $\varphi_2(0) = f_2(0) = f(0)$. Это доказывает, между прочим, что так полученное решение $\varphi(s)$ уравнения (314) будет непрерывно и в точке $s = 0$.

Указанный выше метод последовательных приближений применим и для случая нескольких независимых переменных. Так, например, в случае двух независимых переменных мы имеем уравнение

$$\varphi(x, y) = f(x, y) + \lambda \int_a^x \int_c^y K(x, y; s, t)\, \varphi(s, t)\, ds\, dt, \tag{315}$$

к которому приложимо все сказанное выше. Разложение по параметру λ, сходящееся при всех значениях λ, возможно и для более общих уравнений, когда в правой части, кроме двойного интеграла, стоят и простые интегралы:

$$\varphi(x, y) = f(x, y) + \lambda \int_a^x K_1(x, y; s)\, \varphi(s, y)\, ds +$$
$$+ \lambda \int_c^y K_2(x, y; s)\, \varphi(x, s)\, ds + \lambda^2 \int_a^x \int_c^y K_3(x, y; s, t)\, \varphi(s, t)\, ds\, dt.$$

Здесь параметр λ вводится лишь для удобства проведения метода последовательных приближений. Совершенно так же, как и выше, можно доказать существование и единственность решения уравнения

$$\varphi(x, y) = f(x, y) + \lambda \int_{\omega_2(y)}^{y} \int_{\omega_1(x)}^{x} K(x, y; s, t)\, \varphi(s, t)\, ds\, dt,$$

где $a \leqslant \omega_1(x) \leqslant x$ и $c \leqslant \omega_2(y) \leqslant y$.

Мы могли бы также считать функцию ω_2 зависящей от x, а не от y, и функцию ω_1 зависящей от y. Нетрудно доказать и единственность решения уравнений (311) и (312).

Замечание. Метод последовательных приближений применим для уравнений Вольтерра и в том случае, когда $K(s, t)$ из L_2 в k_0 и $K(s, t)=0$ при $s<t$ и $f(s)$ из L_2 в $[a, b]$. При этом получается степенной ряд относительно λ, сходящийся при любом λ почти везде в $[a, b]$. Аналогичный результат получается и для резольвенты $R(s, t; \lambda)$.

51. Преобразование Лапласа. Дальше мы займемся уравнениями Вольтерра в том специальном случае, когда ядро $K(s, t)$ зависит только от разности $(s-t)$. Предварительно мы изучим одно интегральное преобразование, близко связанное с преобразованием Фурье, а именно, так называемое преобразование Лапласа.

Напомним, что если функция $f(x)$, определенная на промежутке $-\infty<x<+\infty$, непрерывна, удовлетворяет условиям Дирихле на всяком конечном промежутке и существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx, \tag{316}$$

то преобразованием Фурье функции $f(x)$ называется функция

$$f_1(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{\alpha x i} dx, \tag{317}$$

и имеет место следующая формула обращения [II; 173]:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\alpha)\, e^{-\alpha x i}\, d\alpha, \tag{318}$$

равносильная формуле Фурье, причем последний интеграл надо понимать как интеграл в смысле главного значения, т. е.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{M\to+\infty}\int_{-M}^{M} f_1(\alpha)\, e^{-\alpha x i} d\alpha.$$

Положим, что не только интеграл (316), но и интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\beta x}\, |f(x)|\, dx \tag{319}$$

имеет конечное значение при $-m<\beta<m$. При этом функция $f_1(\alpha)$ определяется формулой (317) не только при вещественных, но и при комплексных $\alpha=\alpha_1+\alpha_2 i$, удовлетворяющих условию $-m<\alpha_2<m$, ибо

$$|f(x)\, e^{\alpha x i}|=|f(x)|\, e^{-\alpha_2 x},$$

и по условию этот интеграл имеет смысл при $-m<\alpha_2<m$. В преобразовании Лапласа величина α заменяется чисто мнимой величиной $\alpha=si$ и, кроме того, что не существенно, откидывается множитель $(\sqrt{2\pi})^{-1}$.

Мы переходим к подробному исследованию преобразования Лапласа. Совершенно аналогичное исследование можно было бы провести и для преобразования Фурье (317).

Положим, что функция $\varphi(x)$ в промежутке $(-\infty, +\infty)$ непрерывна, кроме точек разрыва непрерывности первого рода, причем число этих точек конечно во всякой ограниченной части упомянутого промежутка. Пусть, далее, эта функция имеет в каждой точке производную или же производные справа и слева, причем в точках разрыва под производными справа и слева мы подразумеваем пределы отношений:

$$\frac{\varphi(c-h)-\varphi(c-0)}{-h} \quad \text{и} \quad \frac{\varphi(c+h)-\varphi(c+0)}{h}$$

при $h\to+0$.

Положим, кроме того, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma x}\varphi(x)\,dx \tag{320}$$

абсолютно сходится, если σ удовлетворяет неравенству

$$\alpha<\sigma<\beta, \tag{321}$$

где α и β — некоторые фиксированные вещественные числа, которые могут быть равны и $(-\infty)$ или $(+\infty)$. При этом к функции $e^{-\sigma x}\varphi(x)$ применимы обычное предельное равенство для интеграла Дирихле и формула Фурье [ср. **II; 173**].

Рассмотрим функцию комплексного переменного $s=\sigma+\tau i$, определяемую равенством

$$f(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx}\varphi(x)\,dx. \tag{322}$$

На плоскости комплексного переменного $s=\sigma+\tau i$ неравенство (321) определяет полосу, параллельную мнимой оси, или полуплоскость (если одно из чисел α или β равно бесконечности), или даже всю плоскость. Пусть B — некоторая конечная замкнутая область, лежащая внутри полосы (321). Мы можем взять внутри (321) точку $s_0=\sigma_0+\tau_0 i$, лежащую левее области B, т. е. такую, что для всех точек $s=\sigma+\tau i$, принадлежащих B, имеет место неравенство $\sigma>\sigma_0$, и точку $s_1=\sigma_1+\tau_1 i$, лежащую правее B. Таким образом, для всех точек s из B и при всех вещественных x мы имеем неравенства

$$|e^{-sx}\varphi(x)|\leqslant e^{-\sigma_0 x}|\varphi(x)| \quad \text{при } x\geqslant 0;$$
$$|e^{-sx}\varphi(x)|\leqslant e^{-\sigma_1 x}|\varphi(x)| \quad \text{»} \quad x\leqslant 0.$$

Но, по условию, функции, стоящие в правой части написанных неравенств, интегрируемы по промежуткам $(0, +\infty)$ и $(-\infty, 0)$. Отсюда следует, что интеграл (322) в области B сходится абсолютно и равномерно относительно s и, следовательно, функция $f(s)$ является регулярной функцией в области B [III_2; 70], так что, ввиду произвольности выбора B, функция $f(s)$ регулярна внутри полосы (321).

Докажем сейчас теорему, которая даст нам выражение первоначальной функции $\varphi(x)$ через преобразованную функцию $f(s)$. Вообще, формула (322) представляет собой функциональное преобразование функции $\varphi(x)$ с указанными выше свойствами, причем в результате преобразования получается функция комплексного переменного $f(s)$, регулярная в упомянутой полосе.

Теорема 1. *При сделанных относительно $\varphi(x)$ предположениях имеет место формула обращения:*

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{sx} f(s)\, ds, \tag{323}$$

в которой интеграл берется по любой прямой, лежащей внутри полосы (321), *причем интеграл надо понимать в смысле главного значения.*

Произведение $e^{-\sigma x}\varphi(x)$ удовлетворяет указанным выше для $\varphi(x)$ условиям, и, в частности, интеграл (320) абсолютно сходится, а потому к функции $e^{-\sigma x}\varphi(x)$ применима формула Фурье:

$$e^{-\sigma x}\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x i}\, d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sigma - \alpha i)t} \varphi(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x i} f(\sigma - \alpha i)\, d\alpha.$$

Вводя вместо α новую переменную интегрирования $s = \sigma - \alpha i$, получим (323).

Функция $f(s)$, определяемая внутри полосы (321) формулой (322), ведет себя определенным образом при удалении точки s на бесконечность вверх или вниз внутри указанной полосы, а именно, пользуясь абсолютной сходимостью интеграла, нетрудно показать, что в любой полосе J_ε, определяемой неравенством $\alpha + \varepsilon < \sigma < \beta - \varepsilon$, где ε — заданное положительное число, функция $f(s)$ стремится к нулю при удалении точки на бесконечность. Мы можем, наоборот, задавать не $\varphi(x)$, а функцию $f(s)$, удовлетворяющую некоторым условиям внутри полосы (321), и при этом строить $\varphi(x)$ по формуле (323). Уточним наши предположения относительно $f(s)$. Мы предполагаем, что $f(s)$ регулярна внутри (321). Пусть, далее, для всякой полосы J_ε существует функция $\omega(\rho)$, определенная при $\rho > 0$, принимающая лишь положительные

значения, удовлетворяющая условию $\omega(\rho) \to 0$ при $\rho \to \infty$, имеющая сходящийся интеграл:

$$\int_0^\infty \omega(\rho)\, d\rho$$

и такая, что в J_ε имеет место неравенство:

$$|f(s)| \leqslant \omega(|\tau|) \quad (s = \sigma + \tau\imath). \tag{324}$$

Докажем теперь теорему, аналогичную теореме 1.

Теорема 2. *При сделанных предположениях формула* (323) *дает функцию* $\varphi(x)$, *определенную на всей вещественной оси, непрерывную и не зависящую от выбора* σ. *При этом первоначальная функция* $f(s)$ *определяется через преобразованную функцию* $\varphi(x)$ *по формуле* (322), *причем интеграл надо понимать в смысле главного значения.*

Полагая в правой части (323) $s = \sigma + \tau\imath$, получим

$$\varphi(x) = \frac{e^{x\sigma}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma + \tau\imath)\, e^{\tau x i}\, d\tau. \tag{325}$$

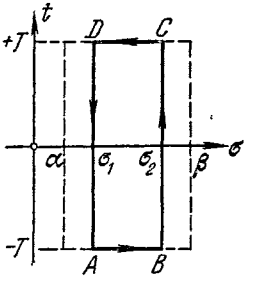

Рис 1

При любом выборе x модуль подынтегральной функции не превышает функции $\omega(\rho)$, имеющей сходящийся интеграл, и, следовательно, интеграл в (325) сходится абсолютно и равномерно относительно x. Таким образом, мы видим, что $\varphi(x)$ определена при любом вещественном x и является непрерывной функцией [**II**; 84].

Докажем теперь, что эта функция не зависит от выбора σ. Рассмотрим внутри полосы (321) какой-нибудь прямоугольник $ABCD$, ограниченный прямыми $\sigma = \sigma_1$; $\sigma = \sigma_2$; $t = \pm T$ (рис. 1). В силу теоремы Коши интеграл от $f(s)\, e^{xs}$ по контуру этого прямоугольника равен нулю. Рассмотрим величину этого интеграла по сторонам $t = \pm T$, параллельным вещественной оси. Например, для стороны $t = T$ будем иметь интеграл

$$\int_{\sigma_2}^{\sigma_1} f(\sigma + \imath T)\, e^{x(\sigma + \imath T)}\, d\sigma. \tag{326}$$

В силу (324) имеем для этого интеграла оценку:

$$\left| \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} f(\sigma + \imath T)\, e^{x(\sigma + \imath T)}\, d\sigma \right| \leqslant e^{\max |x\sigma_k|}\, \omega(T)\, (\sigma_2 - \sigma_1),$$

где $k = 1$ или 2. Отсюда, в силу того, что $\omega(\rho) \to 0$ при $\rho \to \infty$, видно, что интеграл (326) стремится к нулю при $T \to \infty$. Анало-

гичный результат получится и для интеграла по стороне $t=-T$. Применяя упомянутую выше теорему Коши, можем утверждать, что интеграл от функции $f(s)e^{xs}$ по прямой $\sigma=\sigma_1$ сверху вниз отличается лишь знаком от интеграла по прямой $\sigma=\sigma_2$, взятого снизу вверх, или оба эти интеграла равны один другому, если оба брать снизу вверх. Ввиду произвольности в выборе прямых $\sigma=\sigma_1$ и $\sigma=\sigma_2$ можем утверждать, что интеграл от функции $f(s)e^{xs}$ по прямой $\sigma=\sigma_0$ имеет одно и то же значение при любом выборе прямой внутри полосы, т. е. при любом выборе σ_0, лишь бы оно удовлетворяло неравенству $\alpha<\sigma_0<\beta$.

Остается еще доказать, что $f(s)$ выражается через $\varphi(x)$ по формуле (322). Полагая в формуле (323) $s=\sigma-\tau i$, будем иметь

$$e^{-x\sigma}\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma-\tau i)\,e^{-\tau x i}\,d\tau.$$

Умножим обе части на e^{xui} и проинтегрируем по x от $(-\infty)$ до $(+\infty)$. Принимая во внимание, что к функции $f(\sigma-\tau i)$ как функции вещественного переменного τ применима формула Фурье:

$$f(\sigma-ui)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{xui}\,dx\int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma-\tau i)\,e^{-\tau x i}\,d\tau,$$

мы получим

$$f(\sigma-ui)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,e^{-(\sigma-ui)x}\,dx,$$

а это и дает нам формулу (322), ввиду произвольности величины u. Формулы (322) и (323) являются обращением одна другой, в том смысле, как это указано в теоремах 1 и 2.

Покажем, что если в теореме 2 $\beta=\pm\infty$, т. е. если заданная функция $f(s)$ регулярна в полуплоскости $\sigma>\alpha$ и удовлетворяет в ней остальным условиям, то функция $\varphi(x)$, определяемая формулой (323), обращается в нуль при $x<0$. Заметим, что в данном случае, в частности, по условию, должна существовать при любом положительном ε в полуплоскости $\sigma>\alpha+\varepsilon$ функция $\omega(\rho)$ с указанными выше свойствами. Итак, докажем, что $\varphi(x)=0$ при $x<0$. Применяя к интегралу обычную оценку и неравенство (324), мы получим

$$|\varphi(x)|\leqslant e^{x\sigma}\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\omega(\rho)\,d\rho.$$

Если x — фиксированное отрицательное число, то при $\sigma\to+\infty$ правая часть стремится к нулю, а левая не зависит от выбора σ,

и, следовательно, действительно $\varphi(x)=0$ при $x<0$. В данном случае формула обращения преобразования (323) будет иметь вместо (322) следующий вид

$$f(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\varphi(x)\,dx. \tag{327}$$

Если считать, наоборот, $\varphi(x)$ заданной, то преобразование (322) называется обычно *двусторонним преобразованием Лапласа*, а преобразование (327) — *односторонним преобразованием Лапласа*. Это последнее преобразование является, очевидно, частным случаем первого и получается из него, если заданная функция $\varphi(x)$ равна нулю при отрицательных значениях x. В случае одностороннего преобразования Лапласа мы должны наложить на $\varphi(x)$ условие, что интеграл (327) абсолютно сходится в некоторой полуплоскости $\sigma>\alpha$. Если B — некоторая конечная замкнутая область, лежащая внутри этой полуплоскости, то мы можем взять прямую $\sigma=\sigma_0>\alpha$, лежащую внутри упомянутой полуплоскости и слева от B. По условию, интеграл

$$\int_0^\infty e^{-\sigma_0 x}\,|\varphi(x)|\,dx$$

сходится и, принимая во внимание, что переменная интегрирования $x>0$, мы имеем для s, принадлежащих B,

$$|e^{-sx}\varphi(x)|<e^{-\sigma_0 x}\,|\varphi(x)|,$$

т. е. интеграл (327) сходится абсолютно и равномерно относительно s для всех s, принадлежащих B, и дает функцию $f(s)$, регулярную в B, т. е. регулярную в полуплоскости $\sigma>\alpha$.

Из приведенных оценок вытекает непосредственно и следующее утверждение: если интеграл (327) сходится абсолютно в точке $s_0=\sigma_0+\tau_0 i$, то он сходится абсолютно и равномерно в полуплоскости $\sigma\geqslant\sigma_0$. Заметим, что сформулированные выше теоремы можно доказать и при более общих предположениях относительно $\varphi(x)$ и $f(s)$. Очень часто правые части формул (327) и (312) обозначают через $L_1(\varphi)$ и $L_2(\varphi)$:

$$L_1(\varphi)=\int_0^\infty e^{-sx}\varphi(x)\,dx;\quad L_2(\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx}\varphi(x)\,dx.$$

Преобразования $L_1(\varphi)$ и $L_2(\varphi)$ — линейны, т. е.

$$L_i(c_1\varphi)=c_1L_i(\varphi);\quad L_i(c_1\varphi_1+c_2\varphi_2)=c_1L_i(\varphi_1)+c_2L_i(\varphi_2),$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные и $\varphi_i(x)$ — функции, удовлетворяющие указанным выше условиям. Если вместо переменной x

ввести новую переменную $u=e^{-x}$ и положить $\varphi(x)=\psi(u)$, то преобразования (312) и (313) запишутся в виде

$$f(s)=\int_0^\infty u^{s-1}\psi(u)\,du;\quad \psi(u)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} u^{-s}f(s)\,ds.$$

Если бы мы провели соответствующие рассуждения для преобразования Фурье (317), то вместо вертикальной полосы, в которой $f(s)$ — регулярная функция, мы получили бы горизонтальную полосу регулярности (полосу, параллельную вещественной оси) для $f_1(\alpha)$ $(\alpha=si)$. В остальном результаты сохраняются с точностью до постоянного множителя перед интегралом.

52. Свертывание функций. Пусть $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — две непрерывные функции, определенные при $x\geqslant 0$. *Сверткой этих двух функций* называется функция $\varphi_3(x)$, определенная равенством

$$\varphi_3(x)=\int_0^x \varphi_1(t)\,\varphi_2(x-t)\,dt. \tag{328}$$

Эта функция, определенная при $x\geqslant 0$, будет также непрерывной функцией. Вводя вместо t новую переменную интегрирования $\tau=x-t$, мы можем представить $\varphi_3(x)$ в виде

$$\varphi_3(x)=\int_0^x \varphi_1(x-\tau)\,\varphi_2(\tau)\,d\tau. \tag{329}$$

Обычно обозначают свертку функций символом

$$\varphi_3=\varphi_1*\varphi_2,$$

причем из (328) и (329) непосредственно вытекает, что свертка не зависит от порядка функций, т. е. $\varphi_2*\varphi_1=\varphi_1*\varphi_2$. Операция получения свертки называется *свертыванием* функций.

Положим, что к функциям $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ применимо преобразование (327), абсолютно сходящееся в некоторой полуплоскости $\sigma>\alpha$. Мы покажем, что для $\varphi_3(x)$ преобразование (327) также будет сходящимся в упомянутой полуплоскости и что имеет место следующая формула:

$$L_1(\varphi_1*\varphi_2)=L_1(\varphi_1)\,L_1(\varphi_2), \tag{330}$$

т. е. *операции свертывания в области функций $\varphi_k(x)$ соответствует простое умножение в области преобразованных функций*:

$$f_k(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\varphi_k(x)\,dx. \tag{331}$$

Для доказательства составим произведение, стоящее в правой части формулы (330):

$$\int_0^\infty e^{-su}\varphi_1(u)\,du\cdot\int_0^\infty e^{-sv}\varphi_2(v)\,dv, \tag{332}$$

причем переменные интегрирования мы обозначили через u и v. Написанное произведение мы можем представить в виде двойного абсолютно сходящегося интеграла по первому координатному углу плоскости (u, v):

$$\int_0^\infty e^{-su}\varphi_1(u)\,du\cdot\int_0^\infty e^{-sv}\varphi_2(v)\,dv=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s(u+v)}\varphi_1(u)\,\varphi_2(v)\,du\,dv.$$

Возможность такого представления произведения (332) двойным интегралом непосредственно вытекает из абсолютной сходимости входящих в это произведение интегралов. Чтобы убедиться в этом, достаточно в этих интегралах совершить интегрирование по конечному промежутку $(0, m)$, преобразовать такое произведение в двойной интеграл, а затем устремить m к бесконечности и воспользоваться обычным определением несобственного двойного интеграла **[II; 89]**. В полученном двойном интеграле введем новые переменные интегрирования $x=u+v$ и $t=v$. Мы придем к абсолютно сходящемуся двойному интегралу

$$\iint_B e^{-sx}\varphi_1(x-t)\,\varphi_2(t)\,dt\,dx,$$

для которого область интегрирования, в старых переменных определяемая неравенствами $u\geqslant 0$; $v\geqslant 0$, будет теперь определяться неравенствами $t\geqslant 0$; $x-t\geqslant 0$, т. е. на плоскости (t, x) областью интегрирования будет часть первого координатного угла, лежащая над биссектрисой $t=x$. Сводя двойной интеграл к двум квадратурам, получим

$$\int_0^\infty e^{-su}\varphi_1(u)\,du\cdot\int_0^\infty e^{-sv}\varphi_2(v)\,dv=\int_0^\infty e^{-sx}\left[\int_0^x\varphi_1(x-t)\,\varphi_2(t)\,dt\right]dx,$$

что и доказывает формулу (330).

Для функции $\varphi_3(x)$ мы имеем оценку

$$|\varphi_3(x)|\leqslant\int_0^x|\varphi_1(x-t)|\,|\varphi_2(t)|\,dt,$$

из которой вытекает, между прочим, следующее неравенство:

$$\int_0^m e^{-\sigma x}|\varphi_3(x)|\,dx\leqslant\int_0^m dx\int_0^x e^{-\sigma x}|\varphi_1(x-t)|\,|\varphi_2(t)|\,dt,$$

или, производя преобразование Дирихле [II; 82]:

$$\int_0^m e^{-\sigma x} |\varphi_3(x)| \, dx \leqslant \int_0^m |\varphi_2(t)| \, dt \int_t^m e^{-\sigma x} |\varphi_1(x-t)| \, dx.$$

Вводя в правой части вместо x новую переменную интегрирования $\tau = x - t$, получим

$$\int_0^m e^{-\sigma x} |\varphi_3(x)| \, dx \leqslant \int_0^m e^{-\sigma t} |\varphi_2(t)| \, dt \cdot \int_0^{m-t} e^{-\sigma \tau} |\varphi_1(\tau)| \, d\tau,$$

или, тем более,

$$\int_0^m e^{-\sigma x} |\varphi_3(x)| \, dx \leqslant \int_0^\infty e^{-\sigma t} |\varphi_2(t)| \, dt \cdot \int_0^\infty e^{-\sigma \tau} |\varphi_1(\tau)| \, d\tau,$$

т. е. из абсолютной сходимости интегралов (332) в полуплоскости $\sigma > \alpha$ следует абсолютная сходимость такого же интеграла и для $\varphi_3(x)$. Отметим, что приведение двойного интеграла по углу к двум квадратурам легко оправдать обычным образом, рассматривая сначала конечную часть угла, лежащего над биссектрисой $t = x$, и затем переходя к пределу. Утверждение справедливости формулы (330) называется обычно *теоремой свертывания*.

Совершенно аналогично предыдущему, можно ввести понятие свертывания функций и доказать теорему свертывания и для двустороннего преобразования Лапласа, а именно, — имеет место следующее утверждение: если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — непрерывные функции, определенные в бесконечном промежутке $(-\infty, +\infty)$, и интегралы $L_2(\varphi_1)$ и $L_2(\varphi_2)$ абсолютно сходятся в некоторой полосе $\alpha < \sigma < \beta$, то интеграл

$$\varphi_3(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(t) \, \varphi_2(x-t) \, dt$$

будет абсолютно сходящимся при любом вещественном x. Преобразование Лапласа для полученной функции $\varphi_3(x)$ будет абсолютно сходящимся в упомянутой полосе, и будет иметь место формула свертывания:

$$L_2(\varphi_3) = L_2(\varphi_1) \cdot L_2(\varphi_2).$$

53. Уравнения Вольтерра специального вида. Рассмотрим уравнения Вольтерра с ядром, зависящим лишь от разности своих двух аргументов:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x-t) \, \varphi(t) \, dt. \tag{333}$$

Предположим, что непрерывные функции $f(x)$ и $K(x)$ стремятся к нулю при $x \to +\infty$ и имеют оценку

$$|f(x)| \leqslant Ae^{-ax}; \quad |K(x)| \leqslant Be^{-bx}, \tag{334}$$

где постоянные A и $B > 0$, а постоянные a и $b \geqslant 0$. Пусть f_0 и K_0 — верхние границы значений $|f(x)|$ и $|K(x)|$ при $x \geqslant 0$. Применяя к уравнению (333) метод последовательных приближений [50], получим для $\varphi(x)$ при $x \geqslant 0$ оценку $|\varphi(x)| \leqslant f_0 e^{K_0 x}$. Отсюда видно, что к функциям $\varphi(x)$, $f(x)$ и $K(x)$ применимо одностороннее преобразование Лапласа при $\sigma > \max(a, b, K_0)$, и мы получаем преобразованные функции:

$$\Phi(s) = L_1(\varphi); \; F(s) = L_1(f); \; L(s) = L_1(K), \tag{335}$$

регулярные в полуплоскости $\sigma > K_0$. Применяя к обеим частям (333) одностороннее преобразование Лапласа и пользуясь формулой свертывания, будем иметь

$$\Phi(s) = F(s) + L(s)\Phi(s),$$

откуда

$$\Phi(s) = \frac{F(s)}{1 - L(s)}. \tag{336}$$

Выше мы видели, что функция $\Phi(s)$ должна быть регулярной в полуплоскости $\sigma > K_0$. Отсюда ввиду полной независимости $L(s)$ и $F(s)$ вытекает, что знаменатель написанной дроби не должен иметь корней внутри упомянутой полуплоскости. Совершая обращение первой из формул (335), получим

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \Phi(s) e^{sx} ds \quad (\sigma > K_0). \tag{337}$$

Итак, определяя функции $F(s)$ и $L(s)$ по формулам (335) и $\Phi(s)$ по формуле (336), мы получим по формуле (337) решение уравнения (333) в явном виде. Заметим, что при определении функции $\varphi(x)$ в конечном промежутке $(0, l)$, мы согласно уравнению (333) используем значения $f(x)$ и $K(x)$ только из упомянутого выше промежутка, и можем, таким образом, продолжить эти функции вне указанного промежутка любым образом и, в частности, так, чтобы они удовлетворяли указанным выше условиям. Мы можем даже считать их тождественно равными нулю при достаточно больших положительных значениях x.

Покажем, что для уравнения (333) и все повторные ядра зависят лишь от разности $(x - t)$. Мы имеем [50]

$$K_2(x, t) = \int\limits_t^x K(x - t_1) K(t_1 - t) dt_1.$$

Введем вместо t_1 новую переменную интегрирования $\tau = t_1 - t$:

$$K_2(x, t) = \int_0^{x-t} K(x-t-\tau) K(\tau)\, d\tau,$$

откуда и следует непосредственно, что $K_2(x, t)$ есть функция разности $(x-t)$, т. е. $K_2(x, t) = K_2(x-t)$

Аналогично доказательство и для следующих повторных ядер. Таким образом, в силу формулы (307) при $\lambda = 1$ мы можем утверждать, что резольвента уравнения (333) будет зависеть только от упомянутой выше разности Обозначая ее через $R(x-t)$, мы, пользуясь формулой (309), можем написать решение уравнения (333) в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x R(x-t) f(t)\, dt. \tag{338}$$

Применяя к обеим частям этого уравнения преобразование Лапласа и вводя, наряду с (335), обозначение

$$M(s) = L_1(R), \tag{339}$$

мы получим

$$\Phi(s) = F(s) + M(s) F(s).$$

Пользуясь формулой (336), мы можем определить $M(s)$ через известную функцию $L(s)$:

$$M(s) = \frac{L(s)}{1 - L(s)}, \tag{340}$$

и обращение формулы (339) даст нам резольвенту $R(x)$:

$$R(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} M(s) e^{sx}\, ds. \tag{341}$$

Подставляя $R(x)$ в формулу (338), получим решение.

Указанный метод решения уравнения (333) приложим и к системам уравнений Вольтерра вида

$$\varphi_j(x) = f_j(x) + \sum_{k=1}^{p} \int_0^x K_{jk}(x-t) \varphi_k(t)\, dt \quad (j = 1, 2, \ldots, p).$$

Применяя к обеим частям преобразование Лапласа, получим

$$\Phi_j(s) = F_j(s) + \sum_{k=1}^{p} L_{jk}(s) \Phi_k(s) \quad (j = 1, 2, \ldots, p).$$

Решая эту систему уравнений первой степени, определим $\Phi_i(s)$, и решение нашей системы получится по формулам

$$\varphi_j(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \Phi_j(s) e^{sx}\, ds.$$

Заметим, что условия (334) для ядра $K(x)$ и свободного члена $f(x)$ можно значительно ослабить. Достаточно потребовать, чтобы существовала такая положительная постоянная c, чтобы $f(x)e^{-cx}$ и $K(x)e^{-cx}$ были ограниченными по абсолютной величине при $x>0$. При этом будут иметь место формулы (337) и (341) при всех достаточно больших значениях σ Для доказательства этого утверждения достаточно обе части (333) умножить на e^{-cx} и ввести новую искомую функцию $\varphi_1(x)=\varphi(x)e^{-cx}$, свободный член $f_1(x)=f(x)e^{-cx}$ и ядро $K_1(x)=K(x)e^{-cx}$.

54. Уравнения Вольтерра первого рода. До сих пор мы занимались исключительно интегральными уравнениями второго рода. Как мы сейчас увидим, в случае уравнения Вольтерра, при некотором дополнительном условии, уравнения первого рода легко могут быть преобразованы в уравнения второго рода. Рассмотрим уравнение Вольтерра первого рода:

$$\int_a^x K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt=f(x), \tag{342}$$

причем из самого вида уравнения непосредственно вытекает, что заданная функция $f(x)$ должна удовлетворять условию $f(a)=0$. Дифференцируя написанное уравнение по x и деля на $K(x,\ x)$, мы придем к следующему уравнению второго рода:

$$\varphi(x)+\int_a^x \frac{K_x(x,\ t)}{K(x,\ x)}\varphi(t)\,dt=\frac{f'(x)}{K(x,\ x)}, \tag{343}$$

причем мы считаем, что $f'(x)$ непрерывна и $K(x,\ x)\neq 0$. Рассмотрение общего случая можно найти в книге Г. Мюнтца «Интегральные уравнения».

Принимая во внимание условие $f(a)=0$, мы легко можем от уравнения (343) вернуться к уравнению (342), т. е. эти уравнения равносильны и, следовательно, уравнение (342) имеет единственное решение. Рассмотрим теперь уравнение первого рода с ядром следующего вида:

$$K(x,\ t)=\frac{H(x,\ t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\quad (0<\alpha<1),$$

где $H(x,\ t)$ — непрерывная функция, имеющая непрерывную производную по x. К этому типу уравнений принадлежит уравнение Абеля, которое мы рассматривали раньше. Итак, будем рассматривать интегральное уравнение

$$\int_0^x \frac{H(x,\ t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\varphi(t)\,dt=f(x), \tag{344}$$

причем так же, как в уравнении Абеля, мы взяли нижний предел интегрирования равным нулю. Умножив обе части этого уравнения на $(z-x)^{-\alpha}$, интегрируя по x от $x=0$ до $x=z$ и применяя формулу Дирихле [II; 82], мы придем к следующему интегральному уравнению:

$$\int_0^z \varphi(t)\,dt \int_t^z \frac{H(x,t)}{(z-x)^{\alpha}(x-t)^{1-\alpha}}\,dx = \int_0^z \frac{f(x)}{(z-x)^{\alpha}}\,dx, \tag{345}$$

ядро которого определяется формулой:

$$K_1(z,\ t) = \int_t^z \frac{H(x,t)}{(z-x)^{\alpha}(x-t)^{1-\alpha}}\,dx.$$

Это ядро уже не является сингулярным, как в этом нетрудно убедиться при помощи преобразования переменных интегрирования, а именно, вводя вместо x новую переменную интегрирования θ по формуле

$$x = \frac{z+t}{2} + \frac{z-t}{2}\cos\theta,$$

мы получим

$$K_1(z,\ t) = \int_0^{\pi} \frac{H\left(\frac{z+t}{2} + \frac{z-t}{2}\cos\theta,\ t\right)\sin\theta}{(1+\cos\theta)^{1-\alpha}(1-\cos\theta)^{\alpha}}\,d\theta, \tag{346}$$

откуда, принимая во внимание непрерывность ядра $H(x,\ t)$ и равномерную относительно z и t сходимость написанного интеграла, мы можем заключить, что $K_1(z,\ t)$ есть непрерывное ядро. Пользуясь формулами из теории функции $\Gamma(z)$ [III_2; 71, 72], мы можем написать

$$\int_0^{\pi} (1+\cos\theta)^{\alpha-1}(1-\cos\theta)^{-\alpha}\sin\theta\,d\theta = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha},$$

и формула (346) даст нам

$$K_1(z,\ z) = H(z,\ z)\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}.$$

Таким образом, новое непрерывное ядро $K_1(z,\ t)$ будет удовлетворять условию $K_1(z,\ z)\neq 0$, если только аналогичному условию удовлетворяет функция $H(x,\ t)$, т. е. $H(x,\ x)\neq 0$. Из формулы (346) непосредственно получается также, что $K_1(z,\ t)$ имеет непрерывную производную по z, если существует непрерывная

производная $H_x(x, t)$. Точно так же при наличии непрерывной производной $f'(x)$ из формулы

$$f_1(z) = \int_0^z \frac{f(x)}{(z-x)^\alpha}\,dx = \int_0^z \frac{(z-x)^{1-\alpha} f'(x)}{1-\alpha}\,dx$$

непосредственно вытекает, что правая часть уравнения (345) имеет непрерывную производную:

$$f_1'(z) = \int_0^z \frac{f'(x)}{(z-x)^\alpha}\,dx.$$

Таким образом, при сделанных предположениях уравнение (345) имеет решение $\varphi(x)$. Остается доказать, что эта функция удовлетворяет и первоначальному уравнению (344). Подставим $\varphi(x)$ в первоначальное уравнение и образуем разность

$$\omega(x) = f(x) - \int_0^x \frac{H(x, t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\varphi(t)\,dt.$$

Умножая обе части на $(z-x)^{-\alpha}$, интегрируя по x в пределах $0 \leqslant x \leqslant z$ и применяя формулу Дирихле [II; 82], получим в силу (344):

$$\int_0^z \frac{\omega(x)}{(z-x)^\alpha}\,dx = 0.$$

Умножая обе части на $(u-z)^{\alpha-1}$, интегрируя по z в пределах от $z=0$ до $z=u$ и меняя порядок интегрирования, будем иметь при любом u:

$$\int_0^u \omega(x)\,dx = 0,$$

откуда и вытекает непосредственно, что $\omega(x) \equiv 0$.

Положим теперь, что функция $K(x, t)$, фигурирующая в уравнении (342), зависит только от разности $(x-t)$, т. е. рассмотрим интегральное уравнение первого рода:

$$\int_0^x K(x-t)\,\varphi(t)\,dt = f(x). \tag{347}$$

Умножим обе части на e^{-sx} и проинтегрируем по x от $x=0$ до $x=\infty$. Вводя одностороннее преобразование Лапласа для заданных функций $f(x)$ и $K(x)$ и искомой $\varphi(x)$:

$$\Phi(s) = L_1(\varphi);\ F(s) = L_1(f);\ L(s) = L_1(K), \tag{348}$$

в силу теоремы о свертывании мы получим

$$L(s)\,\Phi(s) = F(s). \tag{349}$$

Мы считаем, что ядро $K(x, t)$ удовлетворяет условию $K(x, x) \neq 0$, о котором мы упоминали раньше и которое в данном случае имеет вид: $K(0) \neq 0$. Это гарантирует нам существование решения уравнения (347). Далее, как и раньше, мы можем считать, что $f(x)$ и $K(x)$ обращаются в нуль при больших положительных значениях x. Принимая во внимание произвольность $f(x)$, мы видим, как и в [53], что $L(s)$ не должна обращаться в нуль при значениях s с достаточно большой вещественной частью. Формула (349) дает нам $\Phi(s)$, и мы получим в конечном виде решение уравнения (347), применяя формулу обращения к первому из равенств (348):

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{st} \Phi(s)\, ds. \tag{350}$$

Указанный выше метод применим и к уравнению (344), если $H(x, t)$ зависит только от разности $(x-t)$, причем нетрудно проверить законность применения преобразования Лапласа и теоремы о свертывании, если $0 < \alpha < 1$.

55. Примеры. 1. Рассмотрим уравнение

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x (x-t)\, \varphi(t)\, dt. \tag{351}$$

В данном случае $K(x) = x$ и

$$L(s) = \int_0^\infty e^{-sx} x\, dx = \frac{1}{s^2},$$

причем вещественная часть s считается положительной. Формула (340) дает

$$M(s) = \frac{1}{s^2 - 1},$$

и в силу уравнения (351) резольвента определяется равенством:

$$R(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{e^{sx}}{s^2 - 1}\, ds \quad (x > 0), \tag{352}$$

где σ — любое достаточно большое вещественное число.

Рассмотрим интеграл по замкнутому контуру плоскости $s = \sigma + \tau i$, состоящему из отрезка прямой $\sigma = \sigma_0$, где $\sigma_0 > 1$, и полуокружности, лежащей слева от этой прямой и имеющей центр в точке пересечения этой прямой с вещественной осью. Вводя в интеграл (352) вместо s новую переменную интегрирования s_1 по формуле: $s - \sigma_0 = is_1$, мы получим на плоскости переменной s_1 контур интегрирования, состоящий из отрезка вещественной оси и полуокружности с центром в начале. Пользуясь хотя бы леммой Жордана [III_2; 60] и тем, что $x > 0$, убедимся, что интеграл по полуокружности будет стремиться к нулю при стремлении ее радиуса к бесконечности, и отсюда

непосредственно следует, что величина интеграла (352) при $\sigma > 1$ равна сумме вычетов подынтегральной функции в точках $s = \pm 1$, т. е.

$$R(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),$$

и решение уравнения (351) в силу (338) может быть написано в таком виде:

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{1}{2} e^x \int_0^x e^{-t} f(t)\, dt - \frac{1}{2} e^{-x} \int_0^x e^t f(t)\, dt.$$

2. Для уравнения

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x e^{x-t} \varphi(t)\, dt \tag{353}$$

мы имеем $K(x) = e^x$ и, следовательно:

$$L(s) = \int_0^\infty e^{(1-s)x}\, dx = \frac{1}{s-1},$$

откуда

$$M(s) = \frac{1}{s-2} \quad \text{и} \quad R(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{e^{sx}}{s-2}\, ds.$$

Применяя, как и в предыдущем примере, теорему о вычетах, получим

$$R(x) = e^{2x},$$

и решение уравнения (353) будет

$$\varphi(x) = f(x) + e^{2x} \int_0^x e^{-2t} f(t)\, dt.$$

3. Мы имели следующую формулу, содержащую функцию Бесселя $J_0(x)$ [III_2; 154]:

$$\int_0^\infty e^{-kz} J_0(k\rho)\, dk = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}},$$

откуда следует

$$\int_0^\infty e^{-sx} J_0(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}. \tag{354}$$

Принимая во внимание асимптотическую оценку функций Бесселя из [III_2; 153], мы можем утверждать, что формула (354) справедлива, если вещественная часть s положительна.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x J_0(x-t)\, \varphi(t)\, dt. \tag{355}$$

В данном случае $K(x)=\lambda J_0(x)$, и в силу (354)

$$L(s)=\frac{\lambda}{\sqrt{1+s^2}} \quad \text{и} \quad M(s)=\frac{\lambda}{\sqrt{1+s^2}-\lambda},$$

так что резольвента определится по формуле

$$R(x)=\frac{\lambda}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{sx}}{\sqrt{1+s^2}-\lambda}\,ds$$

или

$$R(x)=\frac{\lambda}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\sqrt{1+s^2}-s}{1-\lambda^2+s^2}\,e^{sx}\,ds+\frac{\lambda}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{s+\lambda}{1-\lambda^2+s^2}\,e^{sx}\,ds.$$

Второй из написанных интегралов может быть вычислен, как и выше, по теореме о вычетах. Займемся преобразованием первого интеграла. Наряду с формулой (354) совершенно так же можно доказать при целом положительном n формулу

$$\int\limits_0^\infty e^{-ax}J_n(x)\,dx=\frac{(\sqrt{1+a^2}-a)^n}{\sqrt{1+a^2}},$$

и, интегрируя это равенство по a от $a=s$ до $a=+\infty$, получим

$$\int\limits_0^\infty e^{-sx}\frac{J_n(x)}{x}\,dx=\frac{(\sqrt{1+s^2}-s)^n}{n}.$$

С другой стороны, применяя теорему о вычетах, получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{1}{1-\lambda^2+s^2}e^{sx}\,ds=\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}\sin(\sqrt{1-\lambda^2}x).$$

Мы можем, таким образом, написать

$$L_1\left(\frac{J_1(x)}{x}\right)=\sqrt{1+s^2}-s;\quad L_1\left(\frac{\sin\sqrt{1-\lambda^2}x}{\sqrt{1-\lambda^2}}\right)=\frac{1}{1-\lambda^2+s^2}.$$

Применяя теорему о свертке [52], получим

$$L_1\left(\frac{\sin(\sqrt{1-\lambda^2}x)}{\sqrt{1-\lambda^2}}*\frac{J_1(x)}{x}\right)=\frac{\sqrt{1+s^2}-s}{1-\lambda^2+s^2},$$

и, следовательно, для интеграла, входящего в выражение $R(x)$, получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\sqrt{1+s^2}-s}{1-\lambda^2+s^2}e^{sx}\,ds=\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}\int\limits_0^x\sin[\sqrt{1-\lambda^2}(x-t)]\cdot\frac{J_1(t)}{t}\,dt,$$

и резольвента уравнения (355) будет иметь выражение:

$$R(x)=\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\int\limits_0^x\sin[\sqrt{1-\lambda^2}(x-t)]\cdot\frac{J_1(t)}{t}\,dt+$$

$$+\lambda\cos(\sqrt{1-\lambda^2}x)+\frac{\lambda^2}{\sqrt{1-\lambda^2}}\sin(\sqrt{1-\lambda^2}x).$$

4. Рассмотрим уравнение первого рода:

$$\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt = x. \tag{356}$$

Совершая над обеими частями уравнения одностороннее преобразование Лапласа, получим

$$\frac{\Phi(s)}{s-1} = \frac{1}{s^2}, \quad \text{т. е.} \quad \Phi(s) = \frac{s-1}{s^2},$$

и

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{s-1}{s^2} e^{sx}\,ds = 1 - x.$$

5. Рассмотрим уравнение:

$$\int_0^x J_0(x-t)\,\varphi(t)\,dt = \sin x. \tag{357}$$

Принимая во внимание, что

$$L_1[J_0(x)] = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} \quad \text{и} \quad L_1(\sin x) = \frac{1}{s^2+1}, \tag{358}$$

мы получим

$$\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\Phi(s) = \frac{1}{s^2+1}, \quad \text{т. е.} \quad \Phi(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}},$$

и, следовательно,

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{sx}}{\sqrt{s^2+1}}\,ds,$$

или, принимая во внимание первую из формул (358),

$$\varphi(x) = J_0(x),$$

т. е. подставляя это решение в уравнение (357), получаем формулу

$$\int_0^x J_0(x-t)\,J_0(t)\,dt = \sin x.$$

6. Рассмотрим еще ядро, которое обращается в бесконечность при $t = x$,

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha}\varphi(t)\,dt \qquad (0 < \alpha < 1),$$

и построим соответствующую этому ядру резольвенту, причем мы не будем входить в обоснование применимости указанного выше метода в рассматриваемом сингулярном случае.

Вычисляем $L(s)$ и $M(s)$:

$$L(s)=\lambda\int_0^\infty \frac{e^{-sx}}{x^\alpha}\,dx=\lambda\Gamma(1-\alpha)\,s^{\alpha-1},$$

$$M(s)=\frac{\lambda\Gamma(1-\alpha)\,s^{\alpha-1}}{1-\lambda\Gamma(1-\alpha)\,s^{\alpha-1}},$$

и для резольвенты получаем выражение:

$$R(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{sx}\,\frac{\lambda\Gamma(1-\alpha)\,s^{\alpha-1}}{1-\lambda\Gamma(1-\alpha)\,s^{\alpha-1}}\,ds \qquad (x>0),$$

где σ — достаточно большое положительное число.

Разлагая в ряд, получим

$$\frac{\lambda\Gamma(1-\alpha)\,s^{\alpha-1}}{1-\lambda\Gamma(1-\alpha)\,s^{\alpha-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\,[\Gamma(1-\alpha)]^n\,s^{n(\alpha-1)},$$

и все сводится к вычислению интеграла:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{sx}\,s^{n(\alpha-1)}\,ds.$$

Совершая подстановку $sx=\tau$, видоизменяя соответствующим образом контур и пользуясь формулой (154) из [III$_2$; 74], получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{sx}\,s^{n(\alpha-1)}\,ds=\frac{x^{n(1-\alpha)-1}}{\Gamma[n(1-\alpha)]},$$

откуда

$$R(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[\lambda\Gamma(1-\alpha)\,x^{1-\alpha}]^n}{x\Gamma[n(1-\alpha)]}.$$

56. Нагруженные интегральные уравнения. При изложении теории интегральных уравнений с непрерывным ядром мы исходили из обычного понятия интеграла. Можно повторить всю теорию или ее часть, исходя из другого понятия об интеграле. Мы уже упоминали выше о возможности построения теории интегральных уравнений на основе интеграла Лебега. Существенным является то обстоятельство, чтобы интеграл, который мы рассматриваем при построении теории, обладал всеми теми свойствами, которые мы используем при построении теории. В настоящем

параграфе мы укажем на новое понятие об интеграле, на основе которого может быть построена вся изложенная в начале настоящей главы теория интегральных уравнений. Приведенные ниже результаты принадлежат Кнезеру.

Мы ограничимся лишь простейшим случаем. Пусть $f(x)$ — непрерывная в конечном промежутке $[a, b]$ функция, x_p $(p=1, 2, \ldots, m)$ — фиксированные точки в этом промежутке и a_p — некоторые положительные числа. Определим интеграл от $f(x)$ по промежутку $[a, b]$ как сумму обычного интеграла и произведений значений функции $f(x)$ в точках $x=x_p$ на числа a_p. В отличие от обычного интеграла, будем ставить над знаком интеграла черту. Данное выше определение выражается следующей формулой:

$$\int_a^{\bar{b}} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \sum_{p=1}^{m} a_p f(x_p). \tag{359}$$

Непосредственно очевидны следующие обычные свойства интеграла:

$$\int_a^{\bar{b}} [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \int_a^{\bar{b}} f_1(x)\,dx + \int_a^{\bar{b}} f_2(x)\,dx;$$

$$\int_a^{\bar{b}} cf(x)\,dx = c\int_a^{\bar{b}} f(x)\,dx.$$

Далее, при последовательном интегрировании по промежутку $[a, b]$ можно переставлять порядок, т. е.

$$\int_a^{\bar{b}}\left[\int_a^{\bar{b}} F(s, t)\,dt\right]ds = \int_a^{\bar{b}}\left[\int_a^{\bar{b}} F(s, t)\,ds\right]dt.$$

Действительно, применяя непосредственно определение (359), нетрудно привести обе части написанного равенства к виду

$$\int_a^b\int_a^b F(s, t)\,ds\,dt + \sum_{p=1}^{m}\int_a^b [F(s, x_p) + F(x_p, s)]\,ds + \sum_{p,q=1}^{m} F(x_p, x_q).$$

До сих пор мы не использовали положительность коэффициентов a_p. В следующем свойстве это уже будет для нас важно. Если $f(x) \geqslant 0$, то и интеграл (359) также имеет не отрицательную величину, и он может равняться нулю только в том случае, если $f(x) \equiv 0$. Совершенно такое же свойство имеет место и для повторного интеграла. Отсюда, как всегда, вытекает справедливость неравенства Буняковского для нового понятия интеграла. Если $|f(x)| \leqslant m$, то существует такая положительная постоянная k, что

имеет место неравенство

$$\left|\int_a^{\bar{b}} f(x)\,dx\right| \leqslant km.$$

При $a_p > 0$ мы можем, очевидно, считать $k = (b-a) + a_1 + \ldots + a_p$.

Из последнего свойства вытекает, как всегда [I; 145], что равномерно сходящийся ряд можно почленно интегрировать при новом понятии интеграла. Пользуясь этим понятием интеграла, можно повторить дословно всю теорию интегральных уравнений с непрерывным ядром. Если $K(t, s) = K(s, t)$, то, очевидно, мы имеем

$$\int_a^{\bar{b}} K(s, t)\,\varphi(t)\,dt = \int_a^{b} K(t, s)\,\varphi(t)\,dt.$$

Интегральное уравнение

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^{\bar{b}} K(s, t)\,\varphi(t)\,dt \tag{360}$$

равносильно, очевидно, следующему уравнению с обычным интегралом:

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^{b} K(s, t)\,\varphi(t)\,dt + \lambda \sum_{p=1}^{m} a_p K(s, x_p)\,\varphi(x_p). \tag{361}$$

Характеристические значения и собственные функции, как всегда, будут определяться из однородного уравнения:

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^{\bar{b}} K(s, t)\,\varphi(t)\,dt.$$

В случае симметрии ядра собственные функции можно считать ортогональными:

$$\int_a^{\bar{b}} \varphi_1(s)\,\overline{\varphi_2(s)}\,ds = 0,$$

или

$$\int_a^{b} \varphi_1(s)\,\overline{\varphi_2(s)}\,ds + \sum_{p=1}^{m} a_p \varphi_1(x_p)\,\overline{\varphi_2(x_p)} = 0.$$

Остаются, конечно, справедливыми теорема Гильберта — Шмидта и теорема Мерсера. Уравнения вида (360) называются *нагруженными интегральными уравнениями*.

Рассмотрим один пример. Возьмем симметричное ядро $K(s, t)$, равное s при $s \leqslant t$ и равное t при $s \geqslant t$, причем основным промежутком является промежуток $[0,1]$ Положим, что в формуле (359) $m=1$ и что единственное дополнительное слагаемое в правой части берется при $x=1$, т. е.

$$\int_a^{\bar{b}} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + af(1) \qquad (a>0).$$

Однородное уравнение

$$\varphi(s) = \lambda \int_0^1 K(s, t)\,\varphi(t)\,dt$$

может быть переписано в виде

$$\varphi(s) = \lambda \int_0^s t\varphi(t)\,dt + \lambda s \int_s^1 \varphi(t)\,dt + \lambda s a \varphi(1). \tag{362}$$

Дифференцируя по s, получим

$$\varphi'(s) = \lambda \int_s^1 \varphi(t)\,dt + \lambda a \varphi(1), \tag{363}$$

еще раз дифференцируя, придем к уравнению

$$\varphi''(s) + \lambda\varphi(s) = 0. \tag{364}$$

Из (362) и (363) вытекают следующие два предельных условия: $\varphi(0)=0$ и $\varphi'(1)=\lambda a\varphi(1)$. Наоборот, легко видим, что решение (364), удовлетворяющее указанным условиям, является решением интегрального уравнения (362). Если $a=0$, то мы имеем обычное интегральное уравнение, и предельные условия $\varphi(0)=\varphi'(1)=0$ не содержат параметра λ Полагая $\lambda=\mu^2$, мы в силу первого из предельных условии имеем: $\varphi(s)=C\sin\mu s$, и второе условие дает уравнение для определения μ, а именно: $\cos\mu = a\mu\sin\mu$.

Уравнения более общего типа были рассмотрены Лихтенштейном[1]).

Пусть B — некоторая область на плоскости и l — ее контур. Лихтенштейн рассматривал уравнения вида

$$\varphi(M) + \lambda \iint_B K_1(M, N)\,\varphi(N)\,d\sigma_N + \lambda \int_l K_2(M, N)\,\varphi(N)\,ds_N +$$

$$+ \lambda \sum_{k=1}^{m} K_3(M, P_k)\,\varphi(P_k) = f(M), \tag{365}$$

где P_k — фиксированные точки, принадлежащие замкнутой области B. Это уравнение можно записать в обычной форме, если ввести новое ядро и новый дифференциал: пусть M принадлежит замкнутой области B и N отлично от P_k. Полагаем:

$$K(M, N) = \begin{cases} K_1(M, N), & \text{если } N \text{ внутри } B, \\ K_2(M, N); & \text{» } N \text{ на } l, \end{cases} \qquad d\omega_N = \begin{cases} d\sigma_N & \text{в } B, \\ ds_N & \text{на } l, \end{cases}$$

[1]) Studia Mathematika, t. III, 1931.

и пусть

$$K(M, N) = K_3(M, P_k) \text{ и } d\omega_N = 1,$$

если N совпадает с P_k. При этом уравнение (365) запишется в виде

$$\varphi(M) + \lambda \int\limits_{B+l} K(M, N)\, \varphi(N)\, d\omega_N = f(M),$$

и может быть повторена вся теория Фредгольма. Отметим только, что при этом решение союзного уравнения

$$\psi(M) + \lambda \int\limits_{B+l} K(N, M)\, \psi(N)\, d\omega_N = f(M)$$

при непрерывности $f(M)$ будет иметь, вообще говоря, разрыв непрерывности при переходе на контур l и в точках P_k. То же можно сказать и о решениях однородного союзного уравнения.

Предыдущие результаты справедливы и в трехмерном пространстве. Другой метод исследования нагруженных интегральных уравнений дан в работе Н. М. Гюнтера[1]).

57. Интегральные уравнения первого рода с ядром Коши. Мы начнем сейчас исследование некоторых простейших интегральных уравнений в одномерном случае, в которых интеграл понимается в смысле главного значения [**III**$_2$; **26**]. При этом мы используем изложенные раньше результаты, касающиеся главного значения интеграла и интегралов типа Коши [**III**$_2$; **26, 27, 28**]. Основы теории таких сингулярных интегральных уравнений даны в работах Пуанкаре и Гильберта. Дальнейшее широкое развитие теория получила в работах советских математиков. Систематическое изложение в одномерном случае дано в книге Н. И. Мусхелишвили «Сингулярные интегральные уравнения» (Москва, 1968 г.) и в книге Н. П. Векуа «Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи» (Москва, 1972 г.). В многомерном случае теория сингулярных интегральных уравнений изложена в книге С. Г. Михлина «Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения» (1962 г.).

В дальнейшем, говоря о гладком контуре, мы будем считать, что его уравнения: $x = x(s)$, $y = y(s)$, где s — длина дуги и функции $x(s)$, $y(s)$ — имеют непрерывные производные до второго порядка.

Начнем с интегрального уравнения первого рода с ядром Коши:

$$\frac{1}{\pi i} \int\limits_{L} \frac{\omega(\tau)}{\tau - \xi}\, d\tau = f(\xi), \tag{366}$$

---

[1]) Studia Mathematika, t. IV, 1932.

где L — гладкий замкнутый контур, $f(\xi)$ — заданная на L функция, удовлетворяющая условию Липшица.

Относительно искомой функции $\omega(\tau)$ будем предполагать, что она удовлетворяет условию Липшица.

Мы имели раньше формулу [III_2; 29]:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{1}{\xi-\eta}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau\right]d\xi=\frac{1}{4}\,\omega(\eta), \tag{367}$$

из которой непосредственно следует, что функция

$$\omega(\tau)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{f(\xi)}{\xi-\tau}\,d\xi \tag{368}$$

удовлетворяет уравнению (366). Нетрудно видеть, что решение этого уравнения единственно. Действительно, умножая обе части (366) на $\frac{1}{\pi i}\cdot\frac{1}{\xi-\eta}$, интегрируя по ξ и принимая во внимание (367), мы получим (368). Короче говоря, формулы (367) и (368) являются следствием одна другой в силу (367). Отметим, что из (368) непосредственно следует, что $\omega(\tau)$ удовлетворяет условию Липшица, если этому условию удовлетворяет $f(\xi)$ [III_2; 27].

58. Предельные задачи для аналитических функций. Прежде чем переходить к решению интегральных уравнений с ядром Коши, займемся некоторыми предельными задачами для аналитических функций. Предварительно введем одно новое понятие и докажем вспомогательную теорему.

Пусть некоторая функция $f(z)$ регулярна в окрестности $z=\infty$. Говорят, что она *имеет на бесконечности конечный порядок*, если ее разложение в окрестности $z=\infty$ имеет вид

$$f(z)=z^m\left(a_0+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\ldots\right)\quad(a_0\neq 0), \tag{369}$$

и целое число m (положительное, отрицательное или нуль) называется *порядком $f(z)$ на бесконечности*. Если $m\leqslant 0$, то $f(z)$ регулярна в точке $z=\infty$, а если $m>0$, то $z=\infty$ есть полюс $f(z)$. При $m<0$ мы имеем $f(\infty)=0$.

Теорема. *Если $f(z)$ регулярна на всей плоскости z и имеет конечный порядок на бесконечности, то $f(z)$ есть полином.*

В рассматриваемом случае разложение (369) имеет место на всей плоскости z, и это разложение не должно содержать отрицательных степеней z, ибо $z=0$ должна быть точкой регулярности $f(z)$. Таким образом, при $m>0$ функция $f(z)$ будет полиномом, а при $m=0$ — постоянной (полином нулевой степени). В частности, эта постоянная может равняться нулю. Функция, тождественно равная нулю, также считается имеющей конечный

порядок на бесконечности. Ее порядок считается равным нулю, как и у постоянной, отличной от нуля. Доказанная теорема является, по существу, обобщением теоремы Лиувилля [III_2; 9].

Пусть L — гладкий замкнутый контур. Решим указанные ниже три предельные задачи.

Задача 1. *Найти функцию $\varphi^+(z)$, регулярную внутри L, и функцию $\varphi^-(z)$, регулярную вне L и имеющую конечный порядок на бесконечности, так, чтобы обе функции были непрерывны вплоть до L, и на L имело бы место соотношение:*

$$\varphi^+(\tau)-\varphi^-(\tau)=f(\tau) \qquad (\tau \text{ на } L), \tag{370}$$

где $f(\tau)$ — заданная на L комплексная функция, удовлетворяющая условию Липшица.

Формула

$$\varphi_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\tau-z}\,d\tau \tag{371}$$

определяет функцию $\varphi_0^+(z)$, регулярную внутри L, и $\varphi_0^-(z)$ — регулярную вне L и равную нулю на бесконечности. В силу формул для предельных значений интеграла типа Коши [III_2; 29]:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_0^+(\tau)&=\frac{1}{2}f(\tau)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\xi)}{\xi-\tau}\,d\xi,\\ \varphi_0^-(\tau)&=-\frac{1}{2}f(\tau)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\xi)}{\xi-\tau}\,d\xi,\end{aligned}\right\} \tag{372}$$

мы видим, что $\varphi_0^+(\tau)$ и $\varphi_0^-(\tau)$ удовлетворяют соотношению (370), т. е. формула (371) дает решение задачи 1. Нетрудно видеть, что $\varphi_0^+(\tau)$ и $\varphi_0^-(\tau)$ также удовлетворяют условию Липшица [III_2; 27]. Очевидно, что и

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\tau-z}\,d\tau+P(z), \tag{373}$$

где $P(z)$ — произвольный полином, дает решение задачи 1, причем $\varphi^+(\tau)$ и $\varphi^-(\tau)$ удовлетворяют условию Липшица.

Покажем, что эта формула дает все решения задачи 1. Пусть $\varphi^+(z)$ и $\varphi^-(z)$ — какое-нибудь решение задачи 1. Из (370) и такого же соотношения для $\varphi_0(z)$ следует:

$$\varphi^+(\tau)-\varphi_0^+(\tau)=\varphi^-(\tau)-\varphi_0^-(\tau) \qquad (\tau \text{ на } L),$$

т. е. разности

$$\varphi^+(z)-\varphi_0^+(z);\quad \varphi^-(z)-\varphi_0^-(z)$$

имеют одинаковые значения на L, и тем самым эти разности определяют функцию, регулярную на всей плоскости [III_2; 24] и

имеющую конечный порядок на бесконечности. В силу доказанной теоремы упомянутые разности равны одному и тому же полиному $P(z)$, откуда и следует формула (373).

Если поставить условие $\varphi^-(\infty)=0$, то в формуле (373) надо положить $P(z)\equiv 0$. Сформулируем теперь вторую задачу, впервые рассмотренную Гильбертом, причем мы будем в дальнейшем считать, что точка $z=0$ находится внутри L.

Задача 2 (однородная задача Гильберта). *Найти* $\varphi^+(z)$ *и* $\varphi^-(z)$ *при прежних условиях так, чтобы вместо* (370) *выполнялось условие*

$$\varphi^+(\tau)=g(\tau)\,\varphi^-(\tau) \qquad (\tau \text{ на } L), \tag{374}$$

где $g(\tau)$ *— заданная на* L *комплексная функция, удовлетворяющая условию Липшица и отличная от нуля.*

Пусть k — целое число, равное приращению аргумента $g(\tau)$ при обходе точкой τ контура L, деленному на 2π:

$$k=\frac{1}{2\pi}[\arg g(\tau)]_L. \tag{375}$$

Аргумент функции:

$$g_0(\tau)=\tau^{-k}g(\tau) \tag{376}$$

не получает приращения, когда τ обходит L, и $\lg g_0(\tau)$ — непрерывная на L функция. Мы фиксируем при этом какое-нибудь определенное значение логарифма.

Нетрудно показать, что $\lg g_0(\tau)$, так же как и $g_0(\tau)$, удовлетворяет условию Липшица, на чем мы не останавливаемся. Составим функцию:

$$\psi_0(z)=e^{\omega_0(z)}, \tag{377}$$

где

$$\omega_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\lg g_0(\tau)}{\tau-z}\,d\tau. \tag{378}$$

Эти формулы определяют различные, вообще говоря, регулярные функции при z, лежащих внутри и вне L:

$$\psi_0^+(z)=e^{\omega_0^+(z)} \quad \psi_0^-(z)=e^{\omega_0(z)}, \tag{379}$$

и, пользуясь формулой (372) для предельных значений интеграла Коши, непосредственно можно проверить, что функции (379) на L удовлетворяют соотношению:

$$\psi_0^+(\tau)=g_0(\tau)\,\psi_0^-(\tau). \tag{380}$$

Введем новые функции, регулярные внутри и вне L:

$$\varphi_0^+(z)=\psi_0^+(z); \quad \varphi_0^-(z)=z^{-k}\psi_0^-(z). \tag{381}$$

Принимая во внимание (376) и (380), мы видим, что $\varphi_0^+(z)$ и $\varphi_0^-(z)$ являются решением однородной задачи Гильберта. Из (378) и (379) следует, что $\omega_0(\infty)=0$ и $\psi_0(\infty)=1$, и в силу (381) можно утверждать, что порядок $\varphi_0(z)$ на бесконечности равен $(-k)$.

Отметим еще, что $\varphi_0^+(z)$ не обращается в нуль нигде, а $\varphi_0^-(z)$ может обращаться в нуль лишь при $z=\infty$. Если $P(z)$ — любой полином, то функции

$$\psi^+(z)=P(z)\,\varphi_0^+(z); \qquad \psi^-(z)=P(z)\,\varphi_0^-(z) \tag{382}$$

также являются решением однородной задачи Гильберта. Если m — степень $P(z)$, то порядок φ_0^- на бесконечности равен $(m-k)$. При этом, как и в задаче 1, $\varphi^+(\tau)$ и $\varphi^-(\tau)$ удовлетворяют условию Липшица.

Покажем еще, что формулы (382) определяют все решения упомянутой задачи. Действительно, пусть $\varphi^+(z)$ и $\varphi^-(z)$ — какое-нибудь решение задачи. Отношения

$$\frac{\varphi^+(z)}{\varphi_0^+(z)}, \qquad \frac{\varphi^-(z)}{\varphi_0(z)} \tag{383}$$

регулярны соответственно внутри и вне L и второе из них имеет конечный порядок на бесконечности. Кроме того, эти отношения совпадают на L Следовательно, отношения (383) определяют функцию, регулярную на всей плоскости и имеющую конечный порядок на бесконечности, и в силу доказанной выше теоремы эта функция есть полином, откуда и следуют формулы (382) для $\varphi^+(z)$ и $\varphi^-(z)$.

Задача 3 (неоднородная задача Гильберта). *Найти* $\varphi^+(z)$ *и* $\varphi^-(z)$ *при прежних условиях так, чтобы вместо* (374) *соблюдалось условие*

$$\varphi^+(\tau)=g(\tau)\,\varphi^-(\tau)+f(\tau) \quad (\tau \text{ на } L), \tag{384}$$

где $g(\tau)$ *и* $f(\tau)$ — *заданные на* L *функции, удовлетворяющие условию Липшица, и* $g(\tau)\neq 0$.

Пусть $\varphi_0^+(z)$ и $\varphi_0(z)$ — построенное выше решение задачи 2, не обращающееся в нуль. Из (374) следует: $g(\tau)=\varphi_0^+(\tau):\varphi_0^-(\tau)$; подставляя $g(\tau)$ в (384), перепишем это условие в виде

$$\frac{\varphi^+(\tau)}{\varphi_0^+(\tau)}-\frac{\varphi^-(\tau)}{\varphi_0^-(\tau)}=\frac{f(\tau)}{\varphi_0^+(\tau)},$$

т. е. мы пришли к первой задаче для отношения $\varphi(z)/\varphi_0(z)$, откуда в силу (373)

$$\frac{\varphi(z)}{\varphi_0(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\varphi_0^+(\tau)(\tau-z)}\,d\tau+P(z),$$

где $P(z)$ — любой полином, и, окончательно,

$$\varphi(z)=\frac{\varphi_0(z)}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\varphi_0^+(\tau)(\tau-z)}\,d\tau+P(z)\,\varphi_0(z). \tag{385}$$

Для области, находящейся внутри L, мы должны вместо $\varphi_0(z)$ взять $\varphi_0^+(z)$, а для внешней области — $\varphi_0^-(z)$. Формула (385) дает общее решение задачи 3. Функции $\varphi_0^+(z)$ и $\varphi_0^-(z)$ определяются формулой (381) и число k — формулой (375). Первое слагаемое правой части имеет порядок на бесконечности $(-k-1)$ и второе — $(m-k)$, где m — степень полинома $P(z)$. Как и в предыдущих задачах, $\varphi^+(\tau)$ и $\varphi^-(\tau)$ удовлетворяют условию Липшица.

Выясним теперь вопрос о тех решениях задачи 3, которые обращаются в нуль на бесконечности. Иначе говоря, мы ищем решения, имеющие отрицательный порядок на бесконечности. Рассмотрим случаи: $k>0$, $k=0$ и $k<0$. Если $k>0$, то первое слагаемое правой части формулы (385) имеет отрицательный порядок на бесконечности, а второе будет иметь отрицательный порядок в том и только в том случае, когда $m<k$, т. е. при $k>0$ формула (385) дает общий вид решений задачи 3, равных нулю на бесконечности, если за $P(z)$ взять любой полином степени, меньшей, чем k. Мы имеем в этом случае бесчисленное множество решений задачи 3, равных нулю на бесконечности. Общее решение содержит k произвольных постоянных [коэффициенты $P(z)$].

Если $k=0$, то первое слагаемое по-прежнему будет отрицательного порядка на бесконечности, а во втором слагаемом надо взять $P(z)\equiv 0$. Решение задачи 3 при этом, очевидно, единственно. Если $k<0$. то, принимая во внимание сказанное выше о порядках слагаемых правой части формулы (385), нетрудно видеть, что надо взять $P(z)\equiv 0$, и, кроме того, в первом слагаемом должны отсутствовать члены, содержащие $z^{-k-1}, z^{-k-2}, \ldots, z^0$, т. е. в разложении интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\varphi_0^+(\tau)(\tau-z)}\,d\tau = -\frac{z^{-1}}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\varphi_0^+(\tau)}\,d\tau - \frac{z^{-2}}{2\pi i}\int_L \frac{\tau f(\tau)}{\varphi_0^+(\tau)}\,d\tau + \ldots,$$

имеющем место при достаточно большом $|z|$, должны отсутствовать члены, содержащие $z^{-1}, z^{-2}, \ldots, z^{-k}$. Это приводит к следующим необходимым и достаточным условиям того, что задача 3 имеет решение, равное нулю на бесконечности:

$$\int_L \frac{\tau^s f(\tau)}{\varphi_0^+(\tau)}\,d\tau = 0 \quad (s=0,\ 1,\ \ldots,\ k-1). \tag{386}$$

При выполнении этих условий решение задачи 3, равное нулю на бесконечности, единственно и определяется формулой (385) при $P(z)\equiv 0$.

59. Интегральные уравнения второго рода с ядром Коши. Рассмотрим уравнение

$$A(\xi)\,\varphi(\xi) + \frac{B(\xi)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau = f(\xi), \tag{387}$$

где $A(\xi)$, $B(\xi)$, $f(\xi)$ — заданные на L функции, удовлетворяющие условию Липшица, причем считается, что

$$A(\xi)+B(\xi)\neq 0 \text{ и } A(\xi)-B(\xi)\neq 0 \quad (\xi \text{ на } L).$$

Решение $\varphi(\xi)$ ищется также среди функций, удовлетворяющих условию Липшица. Вводим функцию

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau. \tag{388}$$

Из формул (372) следует при указанных выше обозначениях:

$$\varphi(\xi)=\Phi^+(\xi)-\Phi^-(\xi), \tag{389}$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau=\Phi^+(\xi)+\Phi^-(\xi). \tag{390}$$

Подставляя (389) и (390) в (387), получим

$$[A(\xi)+B(\xi)]\,\Phi^+(\xi)-[A(\xi)-B(\xi)]\,\Phi^-(\xi)=f(\xi) \tag{391}$$

или

$$\Phi^+(\xi)=\frac{A(\xi)-B(\xi)}{A(\xi)+B(\xi)}\,\Phi^-(\xi)+\frac{f(\xi)}{A(\xi)+B(\xi)}, \tag{392}$$

т. е. $\Phi(z)$ должно быть решением задачи 3, равным нулю при $z=\infty$. Пусть, наоборот, имеется такое $\Phi(z)$. Определяя $\varphi(\xi)$ по формуле (389), мы будем иметь для $\Phi(z)$ формулу (388) [58], из которой вытекает (390). Определяя из (389) и (390) $\Phi^+(\xi)$ и $\Phi^-(\xi)$ и подставляя в (392), получим (387). Таким образом, решение уравнения (386) равносильно решению задачи 3 при предельном условии (392). При этом $\varphi(\xi)$ определяется формулой (389). Теперь остается обратиться к результатам из [58], чтобы получить полное решение задачи. Согласно формулам (375), вводим целое число

$$k=\frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{A(\xi)-B(\xi)}{A(\xi)+B(\xi)}\right]_L,$$

которое называется индексом уравнения (391).

Пусть $\Phi_0(z)$ — решение задачи 2 при условии

$$\Phi^+(\xi)=\frac{A(\xi)-B(\xi)}{A(\xi)+B(\xi)}\,\Phi^-(\xi),$$

отличное от нуля, которое мы построили в [58]. Рассмотрим три случая:

1) $k>0$. При этом мы имеем:

$$\Phi(z)=\frac{\Phi_0(z)}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{[A(\tau)+B(\tau)]\,\Phi_0^+(\tau)\,(\tau-z)}\,d\tau+P_{k-1}(z)\,\Phi_0(z), \tag{393}$$

где $P_{k-1}(z)$ — произвольный полином степени $(k-1)$.

2) $k=0$. Решение получается по (393) при $P_{k-1}(z)\equiv 0$, т. е.

$$\Phi(z)=\frac{\Phi_0(z)}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{[A(\tau)+B(\tau)]\,\Phi_0^+(\tau)(\tau-z)}\,d\tau. \tag{394}$$

3) $k<0$. Для разрешимости задачи 3 необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\int_L \frac{\tau^s f(\tau)}{[A(\tau)+B(\tau)]\,\Phi_0^-(\tau)}\,d\tau=0 \quad (s=0,\,1,\ldots,-k-1), \tag{395}$$

и если эти условия выполнены, то решение выражается формулой (394).

Пользуясь формулами (385) и (389), мы можем теперь получить решения $\varphi(\xi)$ уравнения (387). При этом надо использовать формулы для скачка интеграла типа Коши. Таким образом, получим при $k\geqslant 0$

$$\varphi(\xi)=\frac{\Phi_0^+(\xi)+\Phi_0(\xi)}{2[A(\xi)+B(\xi)]\,\Phi_0^+(\xi)}f(\xi)+$$
$$+\frac{\Phi_0^+(\xi)-\Phi_0(\xi)}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{[A(\tau)+B(\tau)]\,\Phi_0^+(\tau)(\tau-\xi)}\,d\tau+$$
$$+[\Phi_0^+(\xi)-\Phi_0^-(\xi)]\,P_{k-1}(\xi),$$

причем $P_{k-1}(z)\equiv 0$ при $k=0$. При $k<0$, если выполнены условия (395), получим тот же результат, где только $P_{k-1}(\xi)\equiv 0$.

Отсюда непосредственно следует, что однородное уравнение

$$A(\xi)\,\varphi(\xi)+\frac{B(\xi)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau=0 \tag{396}$$

при $k>0$ имеет общее решение:

$$\varphi(\xi)=[\Phi_0^+(\xi)-\Phi_0^-(\xi)]\,P_{k-1}(\xi), \tag{397}$$

а при $k\leqslant 0$ уравнение (396) имеет только нулевое решение. Формула (397) дает k линейно-независимых решений уравнения (396):

$$\varphi(\xi)=[\Phi_0^+(\xi)-\Phi_0^-(\xi)]\,\xi^s \quad (s=0,\,1,\,2,\ldots,\,k-1).$$

Итак, при $k>0$ неоднородное уравнение (387) разрешимо при любой $f(\xi)$, и однородное уравнение (396) имеет k линейно-независимых решений. При $k=0$ уравнение (387) разрешимо при любой $f(\xi)$ и имеет единственное решение, а однородное уравнение (396) имеет только нулевое решение. При $k<0$ мы имеем $(-k)$ условий (395) разрешимости уравнения (387) и при выполнении этих условий уравнение (387) имеет единственное решение. Однородное уравнение имеет при этом только нулевое решение. Мы имеем здесь результаты, отличные от тех, которые имели при решении обычных уравнений Фредгольма.

Отметим, что уравнение первого рода

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau = f(\xi)$$

получается как частный случай уравнения (387) при $A(\xi)=0$ и $B(\xi)=\frac{1}{2}$. В этом частном случае $k=0$.

60. Предельные задачи для случая отрезка. Рассмотрим сейчас задачи из [58] для того случая, когда вместо замкнутого контура L мы имеем отрезок $[a, b]$ вещественной оси. В дальнейшем через $\Phi(z)$ будем всегда обозначать функцию, регулярную вне $[a, b]$, конечного порядка на бесконечности, непрерывную вплоть до $[a, b]$ сверху и снизу, кроме, может быть, концов, и имеющую вблизи концов оценку

$$|\Phi(z)| \leqslant \frac{A}{|z-c|^{\alpha}}, \tag{398}$$

где A и α — постоянные, $0 \leqslant \alpha < 1$ и c — один из концов, т. е. $c=a$ или $c=b$. Через $\Phi^+(\xi)$ и $\Phi^-(\xi)$ будем обозначать предельные значения $\Phi(z)$ сверху и снизу на $[a, b]$.

Задача 1. *Найти $\Phi(z)$ так, чтобы при $a<\xi<b$ имело место соотношение*

$$\Phi^+(\xi) - \Phi^-(\xi) = f(\xi),$$

где $f(\xi)$ — заданная функция, удовлетворяющая условию Липшица на замкнутом отрезке $[a, b]$.

Как и в [58], формула

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{f(\tau)}{\tau-z}\,d\tau + P(z), \tag{399}$$

где $P(z)$ — произвольный полином, дает решение задачи. Условие (398) проверяется непосредственно на основании того, что вблизи концов $\Phi(z)$ имеет вид [III_2; 28]

$$\Phi(z) = \pm\frac{f(c)}{2\pi i}\lg\frac{1}{z-c} + F(z),$$

где $F(z)$ имеет конечный предел при $z \to c$. Можно показать, что формула (399) дает все решения задачи. Наметим доказательство этого. Пусть $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ — два решения задачи. Достаточно показать, что разность $\omega(z) = \Phi_2(z) - \Phi_1(z)$ есть полином. Как и в [58], эта разность регулярна на всей плоскости, кроме, может быть, точек $z=a$ и $z=b$, и имеет конечный порядок на бесконечности. Остается доказать, что $\omega(z)$ регулярна и в точках $z=a$ и $z=b$.

Примем во внимание, что $\omega(z)$ имеет вблизи $z=c$ оценку (398). Легко показать, что при наличии такой оценки $\omega(z)$ регулярна и в точке $z=c$. Чтобы убедиться в этом, достаточно повторить доказательство теоремы из [III_2; 10]: если $f(z)$ регулярна и однозначна в окрестности $z=a$ и ограничена по модулю, то она будет регулярной и в самой точке $z=a$. При этом условие ограниченности $|f(z)|\leqslant N$ можно, без ущерба для доказательства, заменить условием (398), т. е. $|f(z)|\leqslant \frac{C}{\rho^{\alpha}}$ $(0\leqslant\alpha<1)$.

Решение задачи 1, удовлетворяющее условию $\Phi(\infty)=0$, получается из (399) при $P(z)\equiv 0$.

Следующие задачи мы будем рассматривать в том частном случае, когда $g(\xi)=-1$.

Задача 2. *Найти* $\Phi(z)$ *так, чтобы при* $a<\xi<b$ *имело место соотношение*

$$\Phi^{+}(\xi)+\Phi^{-}(\xi)=0. \tag{400}$$

Принимая во внимание, что $\sqrt{z-c}$ меняет знак, когда z обходит вокруг c, мы можем написать следующие решения задачи 2:

$$\Phi_0(z)=\frac{1}{\sqrt{(z-a)(z-b)}}, \tag{401}$$

где значение радикала фиксируется любым образом. Это решение отлично на всей конечной плоскости от нуля и $\Phi(\infty)=0$.

Решением задачи будет также:

$$\Phi(z)=\frac{P(z)}{\sqrt{(z-a)(z-b)}}, \tag{402}$$

где $P(z)$ — произвольный полином. Эта формула дает все решения задачи. Действительно, если $\Phi(z)$ — какое-либо решение задачи, то нетрудно показать, аналогично тому, что мы делали в задаче 1, что отношение $\Phi(z)$: $\Phi_0(z)$ есть полином, откуда и следует (402).

Задача 3. *Найти* $\Phi(z)$ *так, чтобы при* $a<\xi<b$ *имело место соотношение*

$$\Phi^{+}(\xi)+\Phi^{-}(\xi)=f(\xi), \tag{403}$$

где $f(\xi)$ — *заданная функция, удовлетворяющая условию Липшица на замкнутом отрезке* $[a, b]$.

Пусть $\Phi_0(z)$ — функция (401). Принимая во внимание, что она удовлетворяет условию (400), мы можем переписать условие (403) в виде

$$\frac{\Phi^{+}(\xi)}{\Phi_0^{+}(\xi)}-\frac{\Phi^{-}(\xi)}{\Phi_0^{-}(\xi)}=\frac{f(\xi)}{\Phi_0^{+}(\xi)}, \tag{404}$$

т. е. для функции $\Phi(z)$: $\Phi_0(z)$ мы имеем задачу 1.

Определим значения радикала в формуле (401), например, так, чтобы разложение $\Phi_0(z)$ в окрестности $z=\infty$ началось с z^{-1}

При этом на верхнем берегу разреза $[a, b]$ радикал $\sqrt{(\xi-a)(\xi-b)}$ будет чисто мнимым с положительным коэффициентом при i. Понимая именно такое значение этого радикала, можем переписать условие (404) в виде

$$\frac{\Phi^+(\xi)}{\Phi_0^+(\xi)}-\frac{\Phi^-(\xi)}{\Phi_0^-(\xi)}=f(\xi)\sqrt{(\xi-a)(\xi-b)}. \tag{405}$$

Покажем, что функция

$$\sqrt{(\xi-a)(b-\xi)} \tag{406}$$

удовлетворяет на замкнутом отрезке $[a, b]$ условию Липшица с показателем, равным половине. Воспользуемся для этого очевидным неравенством

$$\sqrt{\alpha+\beta}-\sqrt{\alpha}\leqslant\sqrt{|\beta|} \text{ при } \alpha\geqslant 0,\ \alpha+\beta\geqslant 0. \tag{407}$$

Пусть ξ и η принадлежат $[a, b]$. Полагая

$$\alpha=(\eta-a)(b-\eta);\ \alpha+\beta=(\xi-a)(b-\xi),$$

получим из (407)

$$\sqrt{(\xi-a)(b-\xi)}-\sqrt{(\eta-a)(b-\eta)}\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{|(a+b)\xi-\xi^2-(a+b)\eta+\eta^2|}=$$
$$=\sqrt{|[(a+b)-(\xi+\eta)](\xi-\eta)|},$$

откуда, принимая во внимание $\xi+\eta\geqslant 2a$, будем иметь:

$$\sqrt{(\xi-a)(b-\xi)}-\sqrt{(\eta-a)(b-\eta)}\leqslant\sqrt{b-a}\sqrt{|\eta-\xi|}.$$

Совершенно аналогично мы могли бы доказать, что

$$\sqrt{(\eta-a)(b-\eta)}-\sqrt{(\xi-a)(b-\xi)}\leqslant\sqrt{b-a}\sqrt{|\eta-\xi|},$$

т. е.

$$\left|\sqrt{(\eta-a)(b-\eta)}-\sqrt{(\xi-a)(b-\xi)}\right|\leqslant\sqrt{b-a}\sqrt{|\eta-\xi|},$$

откуда и следует, что функция (406) удовлетворяет условию Липшица с показателем $\alpha=\frac{1}{2}$ на отрезке $[a, b]$. Следовательно, и вся правая часть формулы (405) также удовлетворяет условию Липшица [**III**$_2$; **27**]. Решая для $\Phi(z)/\Phi_0(z)$ задачу 1 с предельным условием (405), получим

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i\sqrt{(z-a)(b-z)}}\int_a^b\frac{f(\tau)\sqrt{(\tau-a)(b-\tau)}}{\tau-z}\,d\tau+$$
$$+\frac{P(z)}{\sqrt{(z-a)(b-z)}}, \tag{408}$$

где, как всегда, $P(z)$ — произвольный полином. Пользуясь оценкой интеграла Коши вблизи концов отрезка, легко проверить, что функция (408) удовлетворяет условию (398). Если мы хотим получить решение, удовлетворяющее условию $\Phi(\infty)=0$, то должны в формуле (408) положить $P(z)$ равным постоянной:

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i\sqrt{(z-a)(z-b)}}\int_a^b\frac{f(\tau)\sqrt{(\tau-a)(\tau-b)}}{\tau-z}\,d\tau+$$
$$+\frac{C}{\sqrt{(z-a)(z-b)}}. \qquad (409)$$

Можно при решении задачи 3 поставить дополнительное условие ограниченности $\Phi(z)$ в окрестности концов отрезка. При этом вместо решения (401) задачи 2 мы должны взять:

$$\Phi_0(z)=\sqrt{(z-a)(z-b)}, \qquad (410)$$

и вместо формулы (408) получим

$$\Phi(z)=\frac{\sqrt{(z-a)(z-b)}}{2\pi i}\int_a^b\frac{f(\tau)}{\sqrt{(\tau-a)(\tau-b)}\,(\tau-z)}\,d\tau+$$
$$+P(z)\sqrt{(z-a)(z-b)}. \qquad (411)$$

Чтобы получить решение, удовлетворяющее условию $\Phi(\infty)=0$, мы должны положить $P(z)\equiv 0$ и, кроме того, должно быть выполнено следующее условие:

$$\int_a^b\frac{f(\tau)}{\sqrt{(\tau-a)(\tau-b)}}\,d\tau=0. \qquad (412)$$

Если поставить условие ограниченности только на конце $z=a$, то вместо (410) мы должны взять

$$\Phi_0(z)=\sqrt{\frac{z-a}{z-b}},$$

и вместо формулы (411) получим

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\sqrt{\frac{z-a}{z-b}}\int_a^b\sqrt{\frac{\tau-b}{\tau-a}}\,\frac{f(\tau)}{\tau-z}\,d\tau+$$
$$+P(z)\sqrt{\frac{z-a}{z-b}}. \qquad (413)$$

В данном случае мы будем иметь при всякой $f(\xi)$ единственное решение, удовлетворяющее условию $\Phi(\infty)=0$:

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\sqrt{\frac{z-a}{z-b}}\int_a^b\sqrt{\frac{\tau-b}{\tau-a}}\,\frac{f(\tau)}{\tau-z}\,d\tau.$$

Мы не останавливаемся на доказательстве формул (411) и (413). Его можно найти в упомянутой выше книге Н. И. Мусхелишвили, которой мы и следовали при изложении последних параграфов.

61. Обращение интеграла типа Коши. Рассмотрим теперь задачу обращения интеграла:

$$\frac{1}{\pi i}\int_a^b \frac{\varphi(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau = f(\xi) \quad (a<\xi<b). \tag{414}$$

Поступаем, как в [58]. Вводя функцию

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau,$$

удовлетворяющую условию $\Phi(\infty)=0$, получим

$$\varphi(\xi) = \Phi^+(\xi) - \Phi^-(\xi), \tag{415}$$

$$\Phi^+(\xi) + \Phi^-(\xi) = \frac{1}{\pi i}\int_a^b \frac{\varphi(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau.$$

Таким образом, уравнение (414) эквивалентно следующему:

$$\Phi^+(\xi) + \Phi^-(\xi) = f(\xi) \quad (a<\xi<b).$$

Это есть задача 3 из [60] с дополнительным условием $\Phi(\infty)=0$. Построив решение этой задачи, мы получим $\varphi(\xi)$ по формуле (415). Используя формулу (409) и формулы для предельных значений интеграла типа Коши, получаем окончательно

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\pi i\sqrt{(\xi-a)(\xi-b)}}\int_a^b \frac{f(\tau)\sqrt{(\tau-a)(\tau-b)}}{\tau-\xi}\,d\tau + \frac{C}{\sqrt{(\xi-a)(\xi-b)}}.$$

Отметим, что эта функция удовлетворяет условию Липшица не на замкнутом промежутке $[a, b]$, но лишь на всяком замкнутом промежутке, лежащем внутри $[a, b]$, и может неограниченно расти при приближении ξ к a или к b. Если соблюдено условие (412), то можно получить решение уравнения (414), ограниченное на обоих концах:

$$\varphi(\xi) = \sqrt{(\xi-a)(\xi-b)}\int_a^b \frac{f(\tau)}{\sqrt{(\tau-a)(\tau-b)}\,(\tau-\xi)}\,d\tau.$$

Подробное изложение рассматриваемой задачи обращения находится в упомянутой выше книге Н. И. Мусхелишвили.

62. Преобразование Фурье в L_1. Мы рассматривали преобразование Фурье [II; 173] и родственное ему преобразование Лапласа, используя интегралы Римана. Сейчас мы кратко рассмотрим преобразование Фурье в интегралах Лебега.

Положим, что $\varphi(x)$ суммируема на промежутке $(-\infty, \infty)$ или, иначе говоря, принадлежит на этом промежутке классу L_1. Введем следующее обозначение:

$$\|\varphi\|_{L1} = \|\varphi\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|\, dx.$$

Так как при вещественных α и x $|\varphi(x) e^{-i\alpha x}| = |\varphi(x)|$, то при любом α из промежутка $(-\infty, \infty)$ существует интеграл

$$\Phi(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i\alpha x}\, dx \quad (-\infty < \alpha < \infty). \tag{416}$$

Функцию $\Phi(\alpha)$ называют *преобразованием Фурье функции* $\varphi(x)$; иногда (см., например, ниже [65]) множитель $1/\sqrt{2\pi}$ удобно отбрасывать.

Выясним некоторые свойства преобразований Фурье для функций из L_1.

1°. $\Phi(\alpha)$ — *ограниченная функция*; в самом деле, это вытекает из очевидного неравенства

$$|\Phi(\alpha)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\varphi\|_1.$$

2°. *Если* $\varphi_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — *последовательность функций из* L_1, *стремящаяся к некоторой предельной функции* $\varphi(x)$ *из* L_1 *в метрике* L_1, *т. е.*

$$\|\varphi_k - \varphi\|_1 \to 0,$$

то последовательность преобразований Фурье $\Phi_k(\alpha)$ *стремится к* $\Phi(\alpha)$ *равномерно на всей оси.*

Это свойство непосредственно вытекает из неравенства

$$|\Phi_k(\alpha) - \Phi(\alpha)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\varphi_k - \varphi\|_1. \tag{417}$$

Легко видеть, что если последовательность $\varphi_k(x)$ сходится в метрике L_1 к двум функциям $\varphi(x)$ и $\hat{\varphi}(x)$, то последние функции эквивалентны (единственность предела в L_1).

3°. *Преобразование Фурье* $\Phi(\alpha)$ *функции* $\varphi(x)$ *из* L_1 *есть равномерно непрерывная на всей оси функция.*

Из формулы

$$e^{-i(\alpha+h)x}-e^{-i\alpha x}=-2ie^{-i\left(\alpha+\frac{h}{2}\right)x}\sin\frac{hx}{2}$$

получаем неравенство

$$|\Phi(\alpha+h)-\Phi(\alpha)|\leqslant\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x)|\left|\sin\frac{hx}{2}\right|dx\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\int_{-\infty}^{-R}|\varphi(x)|\,dx+\int_{R}^{\infty}|\varphi(x)|\,dx+\frac{Rh}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x)|\,dx\right].$$

Теперь при любом ε сначала надо фиксировать R так, чтобы сумма первых двух интегралов в правой части была меньше $\varepsilon/2$, а затем выбрать δ таким, чтобы при $h<\delta$ и третье слагаемое было меньше $\varepsilon/2$. Тогда при $h<\delta$ и при любом α будет $|\Phi(\alpha+h)-\Phi(\alpha)|<\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\varepsilon$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим свертку двух функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ из L_1 (ср. [52]):

$$\varphi_3(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(t)\,\varphi_2(x-t)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(x-t)\,\varphi_2(t)\,dt. \qquad (418)$$

Функция $\varphi_3(x)$ также принадлежит классу L_1, так как по теореме Фубини

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi_3(x)|\,dx\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi_1(x-t)|\,|\varphi_2(t)|\,dt\,dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi_2(t)|\left[\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi_1(x-t)|\,dx\right]dt=\|\varphi_1\|_1\|\varphi_2\|_1,$$

т. е.

$$\|\varphi_3\|_1\leqslant\|\varphi_1\|_1\|\varphi_2\|_1.$$

Вычислим, снова пользуясь теоремой Фубини, преобразование Фурье $\Phi_3(\alpha)$ функции $\varphi_3(x)$

$$\Phi_3(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(x-t)\,\varphi_2(t)\,e^{-i\alpha x}\,dt\,dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_2(t)\,e^{-i\alpha t}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(x-t)\,e^{-i\alpha(x-t)}\,dx\right]dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_2(t)\,e^{-i\alpha t}\Phi_1(\alpha)\,dt=\sqrt{2\pi}\,\Phi_1(\alpha)\Phi_2(\alpha),$$

или

$$\Phi_3(\alpha)=\sqrt{2\pi}\,\Phi_1(\alpha)\Phi_2(\alpha).$$

Таким образом мы доказали следующее свойство преобразований Фурье.

4°. *Преобразование Фурье свертки* $\varphi_1(x)$ *и* $\varphi_2(x)$ *равно произведению преобразований Фурье этих функций, умноженному на* $\sqrt{2\pi}$.

Пусть функция $\psi(x)$ определена на всей оси, имеет производные всех порядков и обращается в нуль вне некоторого промежутка. Такие функции принято называть финитными. Класс всех финитных функций обозначают через C_0^∞. Ясно, что C_0^∞ содержится в L_1. Важное свойство класса L_1 дается следующей теоремой, которая будет доказана в [112].

Теорема 1. *Для всякой функции* $\varphi(x)$ *из класса* L_1 *по любому* $\varepsilon > 0$ *найдется такая финитная функция* $\psi(x)$, *что*

$$\|\varphi - \psi\|_1 < \varepsilon. \tag{419}$$

Отсюда легко выводится, что для всякой функции $\varphi(x)$ из L_1 найдется последовательность финитных функций $\psi_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, сходящаяся к $\varphi(x)$ в метрике L_1. Указанное свойство характеризуют, говоря, что класс C_0^∞ плотен в классе L_1.

Сформулированная теорема используется при доказательстве некоторых важных свойств преобразования Фурье в L_1.

5°. *Если* $\varphi(x)$ *принадлежит* L_1, *то* $\Phi(\alpha) \to 0$ *при* $\alpha \to \pm\infty$. Для доказательства фиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем такую финитную функцию $\psi(x)$, для которой выполнено (419). Пусть $\Psi(\alpha)$ — преобразование Фурье от $\psi(x)$. Согласно (417)

$$|\Phi(\alpha) - \Psi(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}. \tag{420}$$

Для функции $\Psi(\alpha)$ с помощью интегрирования по частям получаем

$$\sqrt{2\pi}\,\Psi(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, e^{-i\alpha x}\, dx = \frac{1}{i\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \psi'(x)\, e^{-i\alpha x}\, dx. \tag{421}$$

Интегрирование здесь фактически ведется по конечному промежутку, вне которого $\psi(x) = 0$, внеинтегральные члены, очевидно, пропадают. Из (421) вытекает, что $\Psi(\alpha) \to 0$ при $\alpha \to \pm\infty$. Следовательно, для достаточно больших $|\alpha|$ будет $|\Psi(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}$.

Отсюда и из (420) находим, что для таких $|\alpha|$ имеет место $|\Phi(\alpha)| < \varepsilon\sqrt{\frac{2}{\pi}}$. Тем самым $\Phi(\alpha) \to 0$, что и требовалось доказать.

Сложнее доказывается следующее свойство.

6° *Если для некоторой функции* $\varphi(x)$ *из* L_1 $\Phi(\alpha) \equiv 0$, *то функция* $\varphi(x)$ *эквивалентна нулю.* Докажем сначала, что

интеграл от $\varphi(x)$ по любому конечному промежутку равен нулю:

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt = 0, \quad -\infty < a < b < \infty. \tag{422}$$

С этой целью рассмотрим вспомогательную непрерывную функцию $p(x)$, построенную следующим образом. Пусть $l > 0$, $\delta > 0$ — фиксированные числа, и пусть $p(x) = 0$ при $|x| \geqslant l + \delta$, $p(x) = 1$ при $|x| \leqslant l$; в промежутках $l < |x| < l + \delta$ функция $p(x)$ линейна. Легко вычислить преобразование Фурье $P(\alpha)$ функции $p(x)$:

$$P(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\cos l\alpha - \cos(l+\delta)\alpha}{\alpha^2\delta}.$$

Из этой формулы видно, что $P(\alpha)$ — функция из L_1. Кроме того, так как функция $p(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле [II; 173], то она выражается через $P(\alpha)$ по формуле обращения

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} P(\alpha)\, e^{i\alpha x}\, d\alpha.$$

Покажем теперь, что свертка функции $\varphi(x)$, данной в условии, с функцией $p(x)$ равна нулю тождественно на $(-\infty, \infty)$. По теореме Фубини имеем:

$$\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, p(x-t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} P(\alpha)\, e^{i\alpha(x-t)}\, d\alpha \right] dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} P(\alpha)\, e^{i\alpha x} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, e^{-i\alpha t}\, dt \right] d\alpha = 0,$$

т. е., действительно, $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, p(x-t)\, dt = 0$.

Подставляя вместо функции $p(x)$ ее значение, можно представить последний результат в виде

$$\int_{x-l}^{x+l} \varphi(t)\, dt + \int_{x-l-\delta}^{x-l} \left(1 + \frac{t+l}{\delta}\right) \varphi(t)\, dt + \int_{x+l}^{x+l+\delta} \left(1 - \frac{t-l}{\delta}\right) \varphi(t)\, dt = 0.$$

При $\delta \to 0$ находим отсюда, что

$$\int_{x-l}^{x+l} \varphi(t)\, dt = 0$$

при любых $l > 0$ и x из $(-\infty, \infty)$. При $x = \frac{a+b}{2}$ и $l = \frac{b-a}{2}$ это приводит к требуемому равенству (422).

Из (422) уже без труда получается, что $\varphi(x)$ эквивалентна нулю. Пусть $\psi_k(x)$ — финитная функция, такая, что $\|\varphi-\psi_k\|_1 < 1/k$. Пусть $[a, b]$ — тот промежуток на числовой оси, вне которого $\psi_k(x)=0$. Разобьем его на произвольное конечное число частей точками $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$. Обозначим через ξ_j ту точку на промежутке $[x_{j-1}, x_j]$, в которой непрерывная функция $\psi_k(x)$ принимает свое среднее значение на этом промежутке, т. е.

$$\psi_k(\xi_j)=\frac{1}{x_j-x_{j-1}}\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j}\psi_k(t)\,dt, \quad j=1, \ldots, n.$$

Пользуясь (422), находим

$$\sum_{j=1}^{n}|\psi_k(\xi_j)|(x_j-x_{j-1})=\sum_{j=1}^{n}\left|\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j}\psi_k(t)\,dt\right|=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left|\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j}[\psi_k(t)-\varphi(t)]\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j}|\psi_k(t)-\varphi(t)|\,dt=\|\psi_k-\varphi\|_1<\frac{1}{k}.$$

При измельчении промежутка $[a, b]$ сумма, стоящая в левой части этого соотношения, стремится к интегралу $\int\limits_a^b|\psi_k(t)|\,dt$. Таким образом, мы доказали, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\psi_k(t)|\,dt=\int\limits_a^b|\psi_k(t)|\,dt\leqslant\frac{1}{k}.$$

Эта оценка показывает, что $\psi_k(x)\to 0$ в метрике L_1. Но так как одновременно $\psi_k(x)\to\varphi(x)$ в L_1, то $\varphi(x)$ эквивалентна нулю, что и требовалось доказать.

В заключение без доказательства приведены еще некоторые свойства преобразования Фурье в L_1.

7°. *Пусть $\varphi(x)$ — функция из L_1 и $\Phi(\alpha)$ — ее преобразование Фурье. Тогда для почти всех x (и, в частности, в каждой точке непрерывности $\varphi(x)$) справедлива формула*

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{k\to\infty}\int\limits_{-k}^{k}\left(1-\frac{|\alpha|}{k}\right)\Phi(\alpha)\,e^{i\alpha x}\,d\alpha. \tag{423}$$

Доказательство этой формулы имеется, например, в книге Титчмарша «Введение в теорию интеграла Фурье». Необходи-

мость в такой усложненной формуле обращения вызвана тем, что, хотя функция $\Phi(\alpha)$ и стремится к нулю при $\alpha \to \pm\infty$ (свойство 5°), но не обязательно $\Phi(\alpha)$ принадлежит классу L_1. Если $\Phi(\alpha)$ принадлежит L_1, то справедлива обычная формула обращения

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha.$$

Заметим, что из формулы обращения (423) свойство 6° преобразований Фурье вытекает непосредственно. Однако вывод формулы (423) довольно сложен, и мы дали поэтому независимое доказательство свойства 6°.

8°(теорема Винера). *Пусть функция $F(\alpha)$, определенная при $-\infty \leqslant \alpha \leqslant +\infty$, допускает представление в виде*

$$F(\alpha) = c + \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx,$$

где $f(x)$ из L_1, и пусть $F(\alpha) \neq 0$ при всех α и тем самым $c = F(\pm\infty) \neq 0$. Тогда функция $G(\alpha) = \frac{1}{F(\alpha)}$ также допускает представление в виде

$$G(\alpha) = c^{-1} + \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\alpha x} dx,$$

где $g(x)$ — функция из L_1.

Доказательства этой теоремы мы не приводим.

63. Преобразование Фурье в L_2. Полиномы Эрмита. Приведем основные результаты, касающиеся преобразования Фурье в классе L_2 на промежутке $(-\infty, \infty)$. Введем для краткости новое обозначение. Если

$$\|\varphi(x) - \varphi_k(x)\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x) - \varphi_k(x)|^2 dx \to 0 \text{ при } k \to \infty,$$

то будем писать

$$\varphi(x) = \text{l.i.m.}\, \varphi_k(x) \text{ при } k \to \infty.$$

Если $\varphi(x)$ из L_2 на промежутке $(-\infty, \infty)$, то она может и не принадлежать L_1 на этом промежутке, но принадлежит L_1 на любом конечном промежутке [II; 161]. Преобразование Фурье для класса L_2 определяется формулой

$$\Phi(\alpha) = \underset{k\to\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-k}^{k} \varphi(x) e^{-i\alpha x} dx, \tag{424}$$

причем доказывается, что существует предел, стоящий в правой части, для любой функции из L_2, и $\Phi(\alpha)$ тоже из L_2. Обращение формулы (424) имеет тот же вид:

$$\varphi(x) = \underset{k\to+\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-k}^{+k} \Phi(\alpha) e^{ix\alpha} d\alpha. \tag{425}$$

Отсюда следует, что $\Phi(\alpha)$ и $\varphi(x)$ только одновременно могут быть эквивалентны нулю. Формулы (424) и (425) устанавливают биоднозначное соответствие между функциями $\varphi(x)$ и $\Phi(\alpha)$ из L_2 на промежутке $(-\infty, +\infty)$ и соответствующие функции имеют одинаковую норму в L_2, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(\alpha)|^2 d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2 dx, \tag{426}$$

и если $\Phi_k(\alpha)$ — преобразования Фурье функций $\varphi_k(x)$ $(k=1, 2)$ из L_2, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(\alpha) \overline{\Phi_2(\alpha)} d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x) \overline{\varphi_2(x)} dx.$$

Далее, пользуясь последней формулой, неравенством Буняковского и тем фактом, что произведение двух функций из L_2 принадлежит L_1, можно показать, что для L_2 свертка (418) выполнима при всех x, причем при всех x имеет место формула

$$\varphi_3(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x-t)\varphi_2(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(\alpha)\Phi_2(\alpha) e^{ix\alpha} d\alpha$$
$$(-\infty < x < +\infty),$$

откуда следует, что $\varphi_3(x)$ равномерно непрерывна при $-\infty < x < +\infty$ и $\varphi_3(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$.

Если одна из функций $\varphi_k(x)$ $(k=1, 2)$ принадлежит L_2, а другая L_1, то $\varphi_3(x)$ принадлежит L_2.

Особую роль при преобразовании Фурье играют функции Эрмита, определенные формулой [III; 160]:

$$\psi_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) \qquad (n=0, 1, \ldots), \tag{427}$$

где $H_n(x)$ — полином степени n (полином Эрмита). Функции (427) образуют ортогональную систему на промежутке $(-\infty, +\infty)$. Пусть T — оператор преобразования Фурье

$$T\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-i\alpha x} dx.$$

Докажем, что функции Эрмита $\psi_n(x)$ суть собственные функции этого оператора, соответствующие собственным значениям $\lambda_n = (-i)^n$. Отметим, что $\psi_n(x)$ — непрерывные функции, абсолютно интегрируемые по промежутку $(-\infty, +\infty)$ как с первой степенью, так и с квадратом. Нам надо доказать, что

$$T\psi_n = (-i)^n \psi_n, \tag{428}$$

т. е. формулу

$$J_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha x + \frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right) dx = (-i)^n e^{\frac{\alpha^2}{2}} \frac{d^n}{d\alpha^n}\left(e^{-\alpha^2}\right).$$

Интегрируем по частям и учитываем обращение в нуль внеинтегральных членов:

$$J_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-i\alpha x + \frac{x^2}{2}}\right) dx.$$

Умножаем вне знака интеграла на $e^{\frac{\alpha^2}{2}}$ и под знаком на $e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$:

$$J_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\alpha^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{\frac{1}{2}(x-i\alpha)^2} dx =$$

$$= \frac{(-1)^n i^n}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\alpha^2}{2}} \int_{\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \frac{d^n}{d\alpha^n} e^{\frac{1}{2}(x-i\alpha)^2} dx =$$

$$= (-i)^n e^{\frac{\alpha^2}{2}} \frac{d^n}{d\alpha^n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2} - ix\alpha} dx.$$

Дифференцируя по параметру α, легко доказать, что последний интеграл равен $e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$, и, таким образом, формула (428) доказана. Точки $\lambda = \pm 1$ и $\lambda = \pm i$ суть точки спектра, а $\psi_n(x)$ — собственные функции, соответствующие значению $\lambda_n = (-i)^n$.

Наметим доказательство того, что ортогональные на промежутке $(-\infty, +\infty)$ функции Эрмита образуют полную (замкнутую) систему. Положим, что существует функция $\omega(x)$ из L_2, ортогональная ко всем функциям Эрмита. Поскольку степени x^n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ выражаются линейно через первые $(n+1)$ полиномов Эрмита $H_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, отсюда следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} x^n \omega(x)\, dx = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{429}$$

Мы можем, очевидно, предполагать $\omega(x)$ вещественной. Нам надо доказать, что $\omega(x)$ эквивалентна нулю.

Мы имеем очевидную оценку

$$e^{-\frac{1}{2}x^2} \leqslant Ce^{-\delta|x|},$$

где δ — фиксированное положительное число и постоянная C зависит от выбора δ. Составим функцию комплексного переменного $z = u + iv$, определенную в полосе $|v| \leqslant \delta_1$, где $0 < \delta_1 < \delta$,

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} \omega(x) e^{izx}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} \omega(x) e^{-vx} e^{iux}\, dx.$$

Мы имеем

$$\left| e^{-\frac{1}{2}x^2} \omega(x) e^{i(u+iv)x} \right| \leqslant Ce^{-(\delta-\delta_1)|x|} |\omega(x)| \tag{430}$$

и правая часть интегрируема, как произведение двух функций из L_2. Функция $F(z)$ регулярна в упомянутой полосе и для производных мы имеем

$$F^{(n)}(z) = i^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} x^n \omega(x) e^{izx}\, dx, \tag{431}$$

и в правой части оценки (430) добавится множитель x^n, который погасится множителем $e^{-(\delta-\delta_1)x}$, и интеграл будет сходиться равномерно относительно z в упомянутой полосе. Это дает возможность дифференцировать по z под знаком интеграла. Из (431) получаем

$$F^{(n)}(0) = i^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} x^n \omega(x)\, dx \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

и в силу (429) все производные $F^{(n)}(0) = 0$ в упомянутой полосе, а следовательно, $F(z)$ тождественно равна нулю в этой полосе и тем самым на вещественной оси:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} \omega(x) e^{-izx}\, dx = 0 \quad (-\infty < z < \infty),$$

т. е. преобразование Фурье функции

$$e^{-\frac{1}{2}x^2} \omega(x)$$

тождественно равно нулю, откуда следует, что эта функция эквивалентна нулю, а поэтому и $\omega(x)$ эквивалентна нулю. Совершенно аналогично доказывается, что функции Лагерра образуют замкнутую на промежутке $(0, \infty)$ систему.

64. Интегральное уравнение Фурье. Мы переходим теперь к рассмотрению интегральных уравнений с бесконечным промежутком интегрирования. В этом случае могут оказаться несправедливыми основные теоремы Фредгольма, полученные нами выше. Наиболее простым случаем являются интегральные уравнения, связанные с формулой Фурье. Напомним [II; 173] ранее доказанную формулу Фурье. Если $f(s)$ — непрерывная и абсолютно интегрируемая в промежутке $0 \leqslant s < \infty$ функция, и в любой конечной части этого промежутка имеет конечное число промежутков возрастания и убывания, то, строя функцию

$$f_1(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cos st \, dt,$$

можно выразить $f(s)$ по формуле

$$f(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f_1(t) \cos st \, dt.$$

Складывая две предыдущие формулы, получим

$$f(s) + f_1(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty [f(t) + f_1(t)] \cos st \, dt,$$

т. е. при любом выборе $f(s)$ с указанными выше свойствами функция $\varphi(s) = f(s) + f_1(s)$ является собственной функцией интегрального уравнения

$$\varphi(s) = \lambda \int_0^\infty \varphi(t) \cos st \, dt, \tag{432}$$

соответствующей характеристическому значению $\lambda = \sqrt{2} / \sqrt{\pi}$. Если, например, положить $f(s) = e^{-ps}$ $(p > 0)$, то

$$f_1(s) = \frac{2}{\pi} \frac{p}{p^2 + s^2},$$

и мы получаем при $\lambda = \sqrt{2} / \sqrt{\pi}$ бесчисленное множество решений уравнения (432)

$$e^{-ps} + \frac{2}{\pi} \frac{p}{p^2 + s^2},$$

зависящих от выбора параметра $p > 0$.

65. Уравнения в случае бесконечного промежутка. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} k(x - t) \varphi(t) \, dt \tag{433}$$

с ядром, зависящим от разности, в предположении, что функции $k(x)$ и $f(x)$ принадлежат L_1 на промежутке $(-\infty, +\infty)$ и что решение ищется в том же классе. Применяя к обеим частям преобразование Фурье, получим

$$\Phi(\alpha) = F(\alpha) + K(\alpha)\Phi(\alpha), \tag{434}$$

где $F(\alpha)$, $\Phi(\alpha)$, $K(\alpha)$ — преобразования Фурье $f(x)$, $\varphi(x)$ и $k(x)$, взятые в виде

$$K(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x) e^{i\alpha x} dx.$$

Из (434) следует

$$\Phi(\alpha) = F(\alpha)[1 - K(\alpha)]^{-1}. \tag{435}$$

Поскольку $\Phi(\alpha)$ должна быть непрерывной функцией, то для разрешимости уравнения (433) при любой $f(x)$ из L_1 необходимо

$$1 - K(\alpha) \neq 0 \quad (-\infty < \alpha < +\infty). \tag{436}$$

Условие (436) является и достаточным для разрешимости уравнения (433) в классе L_1. В самом деле, по теореме Винера (т. е. по свойству 8° из [62]) существует такая функция $k_1(x)$ из класса L_1, что

$$[1 - K(\alpha)]^{-1} = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} k_1(x) e^{-i\alpha x} dx = 1 + K_1(\alpha). \tag{437}$$

Из свойства 4° [62] (о преобразовании Фурье свертки) вытекает, что (435) равносильно формуле

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{-\infty}^{\infty} k_1(x-t) f(t)\, dt; \tag{438}$$

функция $\varphi(x)$ принадлежит L_1 как свертка двух функций того же класса. Отметим еще, что при условии (436) решение (438) уравнения (433) единственно в классе L_1: это следует из свойства 6° [62].

Рассмотрим теперь однородное уравнение

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-t)\varphi(t)\, dt \tag{439}$$

и будем искать его решение в виде $\varphi(x) = e^{ax}$. Подставляя $\varphi(x) = e^{ax}$ в уравнение и совершая замену переменной интегрирования, получаем уравнение для a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(s) e^{-as} ds = 1. \tag{440}$$

В упоминавшейся в [62] книге Титчмарша указаны условия, при которых все решения уравнения (439) являются линейными комбинациями функций $x^p e^{a_\nu x}$, где $p=0, 1, \ldots, q_\nu-1$, a_ν — корни уравнения (440), имеющие кратность q_ν. Отметим, что эти решения не принадлежат L_1, и на ядро $k(s)$ необходимо наложить условия, гарантирующие сходимость соответствующих интегралов.

66. Примеры. Для разъяснения изложенного выше мы приведем примеры и при их решении будем основываться главным образом на результатах предыдущего параграфа.

1. Положим, что в уравнении (433)

$$f(x)=e^{-|x|}; \quad k(x)=\begin{cases} \lambda e^x & \text{при } x\leqslant 0, \\ 0 & \text{при } x>0, \end{cases}$$

т. е. уравнение имеет вид

$$\varphi(x)=e^{-|x|}-\lambda\int_x^\infty e^{x-t}\varphi(t)\,dt.$$

Преобразования Фурье $f(x)$ и $k(x)$ имеют вид

$$F(\alpha)=\frac{2}{1+\alpha^2}; \quad K(\alpha)=\frac{\lambda}{1-i\alpha}; \quad 1-K(\alpha)=\frac{1-\lambda-i\alpha}{1-i\alpha}$$

и, следовательно, $K(\alpha)\neq 1$ при $\lambda-1$, отличном от нуля и чисто мнимого числа Преобразование Фурье $\Phi(\alpha)$ решения имеет вид (435):

$$\Phi(\alpha)=\frac{2}{(\alpha-i)(\alpha+i-\lambda i)}.$$

Мы можем написать

$$\varphi(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix\alpha}}{(\alpha-i)(\alpha+i-\lambda i)}\,d\alpha.$$

Этот интеграл легко вычисляется с помощью вычетов, причем необходимо различать случаи $x\geqslant 0$ и $x<0$, а также $\operatorname{Re}(1-\lambda)>0$ и <0. Окончательно получаем:

$$\varphi(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{2-\lambda}e^{-x} & (x>0) \\ \dfrac{2}{2-\lambda}e^{(1-\lambda)x} & (x\leqslant 0) \end{cases} \quad (\operatorname{Re}(1-\lambda)>0);$$

$$\varphi(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{2-\lambda}(e^{-x}-e^{(1-\lambda)x}) & (x>0) \\ 0 & (x\leqslant 0) \end{cases} \quad (\operatorname{Re}(1-\lambda)<0).$$

При $\lambda=2$ решение принимает вид $\varphi(x)=-2xe^{-x}$ $(x>0)$, $\varphi(x)=0$ $(x\leqslant 0)$.

2. Рассмотрим уравнение с симметричным ядром

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x-t|}\varphi(t)\,dt, \tag{441}$$

для которого $k(x)=\lambda e^{-|x|}$ и

$$K(\alpha)=\frac{2\lambda}{1+\alpha^2},$$

откуда

$$1-K(\alpha)=\frac{\alpha^2+1-2\lambda}{1+\alpha^2},$$

и, следовательно, $1-2\lambda$ должно быть отлично от тождественного нуля и отрицательного числа.

Находим согласно формуле (437)

$$K_1(\alpha)=\frac{K(\alpha)}{1-K(\alpha)}=\frac{2\lambda}{1-2\lambda+\alpha^2},$$

откуда

$$k_1(x)=\frac{\lambda}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix\alpha}}{1-2\lambda+\alpha^2}\,d\alpha.$$

Применяя теорему о вычетах, причем отдельно надо рассматривать случаи $x>0$ и $x<0$, получим

$$k_1(x)=\frac{\lambda}{\sqrt{1-2\lambda}}\,e^{-|x|\sqrt{1-2\lambda}},$$

вещественная часть $\sqrt{1-2\lambda}$ берется положительной. Окончательно,

$$\varphi(x)=f(x)+\frac{\lambda}{\sqrt{1-2\lambda}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x-t|\sqrt{1-2\lambda}}\,f(t)\,dt.$$

Если $f(x)$ — ограниченная функция, то такой же будет и $\varphi(x)$. Для однородного уравнения (441) получаются решения

$$\varphi(x)=C_1e^{\sqrt{1-2\lambda}\,x}+C_2e^{-\sqrt{1-2\lambda}\,x}\quad\left(\lambda\neq\frac{1}{2}\right)\tag{442}$$

и

$$\varphi(x)=C_1+C_2x\quad\left(\lambda=\frac{1}{2}\right).\tag{443}$$

Для того, чтобы при подстановке (442), (443) в правую часть (441) интеграл имел смысл, необходимо, чтобы вещественная часть радикала $\sqrt{1-2\lambda}$ лежала внутри промежутка $(-1,\ +1)$ или чтобы она была равна нулю $\left(\lambda=\frac{1}{2}\right)$. Если $1-2\lambda<0$, то формула (442) дает ограниченные решения $\sin\sqrt{2\lambda-1}\,x$ и $\cos\sqrt{2\lambda-1}\,x$.

67. Случай полубесконечного промежутка. В том случае, когда в интегральном уравнении с ядром, зависящем от разности, основной промежуток интегрирования не $(-\infty,\ +\infty)$ а $(0,\ \infty)$, задача становится гораздо более сложной. Однородные уравнения такого типа изучали Винер и Хопф (1931 г.), общие уравнения при предположении симметрии ядра, т. е. $k(s-t)=k(t-s)$, В. А. Фок (1944 г.) В работе И. М. Рапопорта (ДАН СССР, т. 59, № 8, 1948 г.) устанавливается связь такого рода уравнений с предельной задачей Гильберта. В данном пункте мы будем следовать этому методу,

ограничиваясь общими указаниями пути его применения. Рассмотрим уравнение

$$\varphi(x)=f(x)+\int_0^\infty k(x-t)\,\varphi(t)\,dt. \tag{444}$$

Функция $k(x)$ задана на промежутке $-\infty<x<+\infty$ и $f(x)$ на промежутке $0\leqslant x<+\infty$. Функция $\varphi(x)$ ищется на промежутке $0\leqslant x<+\infty$. Предполагается, что заданные функции непрерывны и что при некотором вещественном c произведения

$$k(x)\,e^{-cx},\quad f(x)\,e^{-cx}$$

абсолютно интегрируемы и имеют конечное число промежутков возрастания и убывания на соответствующих промежутках.

Доопределим $f(x)$ при $x<0$, полагая $f(x)=0$ при $x<0$, и будем искать такую функцию $\varphi(x)$, чтобы уравнение (444) удовлетворялось на всем промежутке $-\infty<x<+\infty$. Считаем также, что функция $\varphi(x)\,e^{-cx}$ абсолютно интегрируема на этом промежутке.

Для того чтобы применить теорему свертывания для двустороннего преобразования Лапласа, мы должны иметь пределы интегрирования $-\infty<x<+\infty$. Поступим следующим образом. Введем функции

$$\varphi_+(x)=\begin{cases}0 & (x>0),\\ \varphi(x) & (x<0),\end{cases}\quad \varphi_-(x)=\begin{cases}-\varphi(x) & (x>0),\\ 0 & (x<0).\end{cases} \tag{445}$$

Уравнение (444) можно при этом переписать в виде

$$\varphi_+(x)-\varphi_-(x)=f(x)-\int_{-\infty}^{+\infty} k(x-t)\,\varphi_-(t)\,dt. \tag{446}$$

Введем двустороннее преобразование Лапласа [51]

$$\Phi^+(s)=L_2(\varphi_+);\ \Phi^-(s)=L_2(\varphi_-),\ F(s)=L_2(f);\ L(s)=L_2(k),$$

полагая $s=c+\tau i$. В силу сделанных предположений об абсолютной сходимости интегралов указанные преобразования выполнимы, и в силу (446) получаем

$$\Phi^+(s)-\Phi^-(s)=F(s)-L(s)\,\Phi^-(s)\quad (s=c+\tau i). \tag{447}$$

Принимая во внимание, что $f(x)=0$ при $x<0$, имеем

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-sx}f(x)\,dx,$$

и написанный интеграл сходится абсолютно, если вещественная часть $s=\sigma+\tau i$ удовлетворяет неравенству $\operatorname{Re} s=\sigma\geqslant c$, а функция $F(s)$ регулярна справа от прямой $\sigma=c$ и непрерывна вплоть до этой прямой [51]. Совершенно аналогично, в силу предполагаемой абсолютной сходимости интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-cx}\varphi(x)\,dx,$$

интегралы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx}\varphi_+(x)\,dx \quad\text{и}\quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx}\varphi_-(x)\,dx$$

должны сходиться абсолютно, если σ удовлетворяет соответственно неравенствам $\sigma \leqslant c$ и $\sigma \geqslant c$, и можно утверждать, что функция $\Phi^+(s)$ должна быть регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} s = \sigma < c$, а функция $\Phi^-(s)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} s = \sigma > c$, причем обе они должны быть непрерывны вплоть до прямой $\sigma = c$. Можно также показать, что в упомянутых областях обе функции должны стремиться к нулю при $|s| \to +\infty$. Равенство (447) связывает предельные значения функций $\Phi^+(s)$ и $\Phi^-(s)$ на прямой $\sigma = c$. Переписывая его в виде

$$\Phi^+(s) = [1 - L(s)]\,\Phi^-(s) + F(s), \tag{448}$$

мы видим, что получена неоднородная задача Гильберта (см. [58]). От задачи (384) задача (448) отличается лишь тем, что вместо замкнутого контура L, содержащего внутри начало координат, а вне — бесконечно удаленную точку, контуром в задаче (448) является прямая $s = c + \tau i$. Это обстоятельство внесет некоторые изменения в формулы. Вместо множителя τ^{-k} [формула (376)] возьмем множитель

$$\left(\frac{s-\alpha}{s-\beta}\right)^{-k} \qquad (\alpha < c;\ \beta > c),$$

аргумент которого получает приращение $(-2k\pi)$, если двигаться снизу вверх по прямой $\sigma = c$. Формула (376) в рассматриваемом случае будет иметь вид

$$g_0(s) = \left(\frac{s-\alpha}{s-\beta}\right)^{-k} [1 - L(s)],$$

где

$$k = \frac{1}{\pi}\,\{\arg[1 - L(s)]\}_{c-i\infty}^{c+i\infty}$$

(мы предполагаем здесь и в дальнейшем, что $1 - L(c + \tau i) \neq 0$). Вместо формул (387) будем иметь

$$\varphi_0^+(s) = \psi_0^+(s); \quad \varphi_0(s) = \left(\frac{s-\alpha}{s-\beta}\right)^{-k} \psi_0^-(s),$$

а вместо полинома $P(z)$ — дробь

$$\frac{P(s)}{(s-\beta)^k},$$

так как мы должны теперь применять обобщенную теорему Лиувилля к функции, регулярной всюду, кроме точки $s = \beta$.

Предполагая, что функции $L(c + \tau i)$ и $F(c + \tau i)$ удовлетворяют условию Липшица, выпишем решение задачи (448), исчезающее на бесконечности:

$$\frac{\varphi_0(s)}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{F(\tau)}{\varphi_0^-(\tau)(\tau - s)}\,d\tau + \frac{P_{k-1}(s)}{(s-\beta)^k}\,\varphi_0(s) = \begin{cases} \Phi^+(s) & (\operatorname{Re} s < c), \\ \Phi^-(s) & (\operatorname{Re} s > c). \end{cases} \tag{449}$$

Здесь

$$\varphi_0(s) = \begin{cases} \varphi_0^+(s) & (\operatorname{Re} s < c), \\ \varphi_0^-(s) & (\operatorname{Re} s > c), \end{cases}$$

$$\varphi_0^+(s) = \exp \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \log\left\{\left(\frac{\tau-\alpha}{\tau-\beta}\right)^{-k} [1 - L(\tau)]\right\} \frac{d\tau}{\tau - s},$$

$$\varphi_0^-(s) = \left(\frac{s-\alpha}{s-\beta}\right)^{-k} \exp \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \log\left\{\left(\frac{\tau-\alpha}{\tau-\beta}\right)^{-k} [1 - L(\tau)]\right\} \frac{d\tau}{\tau - s}$$

$$(\exp x = e^x).$$

$P_{k-1}(s)$ — полином с произвольными коэффициентами степени не выше $k-1$; при $k \leqslant 0$ следует положить $P_{k-1}(s) \equiv 0$.

В соответствии с результатами, полученными в конце [58], будем иметь три случая:

$k > 0$. Задача (448) имеет решение, зависящее от k произвольных постоянных.

$k = 0$. Задача имеет единственное решение.

$k < 0$. Стоящий в формуле (449) интеграл должен иметь в точке $s = \beta$ нуль порядка $(-k)$, компенсирующий полюс множителя $\left(\frac{s-\alpha}{s-\beta}\right)^{-k}$, входящего в $\varphi_0^-(s)$. Это приводит к необходимым и достаточным условиям разрешимости

$$\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{F(\tau)}{\varphi_0^+(\tau)(\tau-\beta)^m}\, d\tau = 0 \qquad (m = 0,\ 1,\ \ldots,\ -k-1). \tag{450}$$

При выполнении этих условий задача имеет единственное решение.

Построив по формуле (449) функцию $\Phi^-(s)$, находим по формуле обращения (323) функцию $\varphi(x)$ при $x > 0$:

$$\varphi(x) = -\varphi_-(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{sx}\Phi^-(s)\, ds \qquad (\sigma > c,\ x > 0). \tag{451}$$

Можно показать, что произведение $\varphi(x)e^{-cx}$ абсолютно интегрируемо на промежутке $0 \leqslant x < +\infty$. Записав формулу обращения для функции $\Phi^+(s)$, можно найти $\varphi(x)$ при $x < 0$.

Сформулируем результат исследования. Если k — число, равное деленному на 2π приращению аргумента функции $1 - L(s)$, когда s меняется от $c - i\infty$ до $c + i\infty$, то при $k > 0$ уравнение (444) безусловно разрешимо, причем однородное уравнение имеет ровно k линейно-независимых решений. При $k = 0$ уравнение безусловно разрешимо и имеет единственное решение (нулевое решение для однородного уравнения). В случае $k < 0$ для разрешимости уравнения (444) необходимы и достаточны условия (450). При их соблюдении уравнение имеет единственное решение.

68. Примеры. 1. Рассмотрим симметричное ядро

$$k(x) = \lambda e^{-|x|},$$

где λ — вещественный параметр. В качестве c мы можем взять любое число, удовлетворяющее неравенству $-1 < c < 1$. Функция $L(s)$ будет

$$L(s) = \lambda \int\limits_0^\infty e^{-sx}e^{-x}\, dx + \lambda \int\limits_{-\infty}^0 e^{-sx}e^{x}\, dx = \frac{2\lambda}{1-s^2}$$

и

$$1 - L(s) = \frac{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)}{(s-1)(s+1)}, \tag{452}$$

где

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{1-2\lambda} \qquad (\operatorname{Re}\lambda_1 \geqslant \operatorname{Re}\lambda_2).$$

Величина k будет зависеть от λ и от класса решений, характеризуемого числом c. Если $\operatorname{Re}\lambda_1 < c$ и $\operatorname{Re}\lambda_2 < c$, то $k = +1$. Если $\operatorname{Re}\lambda_1 > c$, а $\operatorname{Re}\lambda_2 < c$, то $k = 0$; если $\operatorname{Re}\lambda_1 > c$ и $\operatorname{Re}\lambda_2 > c$, то $k = -1$

1) Случай $\lambda < 0$. При любом c, $|c| < 1$, имеем $k = 0$, так как $\lambda_1 \geqslant 1$, а $\lambda_2 \leqslant -1$. Задача (448) имеет вид

$$\Phi^+(s) = \frac{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)}{(s-1)(s+1)}\Phi^-(s) + F(s). \tag{453}$$

Ввиду особой простоты коэффициента (452) эту задачу можно решить, не пользуясь интегралами типа Коши. Очевидно, что

$$\varphi_0^+(s) = \frac{s-\lambda_1}{s-1}; \quad \varphi_0^-(s) = \frac{s+1}{s-\lambda_2}.$$

Перепишем условие (453) в виде

$$\frac{s-1}{s-\lambda_1}\Phi^+(s) - \frac{s-\lambda_2}{s+1}\Phi^-(s) = \frac{s-1}{s-\lambda_1}F(s). \tag{454}$$

Произведение

$$\frac{s-1}{s-\lambda_1}F(s)$$

мы легко можем представить как разность вида (370), если учтем, что $F(s)$ регулярна при $\operatorname{Re} s > c$:

$$\frac{s-1}{s-\lambda_1}F(s) = \frac{\lambda_1-1}{s-\lambda_1}F(\lambda_1) - \frac{(\lambda_1-1)F(\lambda_1)-(s-1)F(s)}{s-\lambda_1}.$$

Таким образом [ср. 58],

$$\frac{s-\lambda_2}{s+1}\Phi^-(s) = \frac{(\lambda_1-1)F(\lambda_1)-(s-1)F(s)}{s-\lambda_1},$$

откуда

$$\Phi^-(s) = \frac{(s+1)[(\lambda_1-1)F(\lambda_1)-(s-1)F(s)]}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)}, \tag{455}$$

и решение уравнения

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_0^\infty e^{-|x-t|}\varphi(t)\,dt \tag{456}$$

при $\lambda < 0$ имеет вид

$$\varphi(x) = -\varphi_-(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{sx}\,\frac{(s^2-1)F(s)-(\lambda_1-1)(s+1)F(\lambda_1)}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)}\,ds.$$

2) Рассмотрим случай $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ и положим, что c удовлетворяет условию $\sqrt{1-2\lambda} < c < 1$. Мы имеем $\lambda_2 < \lambda_1 < c$, откуда $k = +1$. Функция, стоящая в правой части формулы (453), может иметь в области $\sigma > c$ простой полюс $s = 1$ и должна стремиться к нулю при $|s| \to \infty$. Нетрудно видеть, что мы должны положить

$$\Phi^+(s) = \frac{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)}{(s-1)(s+1)}\Phi^-(s) + F(s) = \frac{A}{s-1},$$

где A — произвольная постоянная. Находим

$$\Phi^-(s) = -\frac{s^2-1}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)}F(s) + \frac{(s+1)A}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)},$$

и решение уравнения (456) при $0<\lambda<\frac{1}{2}$ и $\sqrt{1-2\lambda}<c<1$ будет таким:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{sx}\frac{s^2-1}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)}F(s)\,ds-\frac{A}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{sx}\frac{s+1}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)}\,ds.$$

Второе слагаемое является решением однородного уравнения. Добавляя слева от прямой интегрирования полуокружность большого радиуса, применяя лемму Жордана и теорему о вычетах, получим решение однородного уравнения в виде

$$\varphi_0(x)=-A\frac{\sqrt{1-2\lambda}+1}{2\sqrt{1-2\lambda}}e^{\sqrt{1-2\lambda}\,x}-A\frac{\sqrt{1-2\lambda}-1}{2\sqrt{1-2\lambda}}e^{-\sqrt{1-2\lambda}\,x}.$$

3) Случай $0<\lambda<\frac{1}{2}$, $-\sqrt{1-2\lambda}<c<\sqrt{1-2\lambda}$. Взяв этот, более узкий, класс решений, будем иметь $k=0$. Метод решения — тот же, что и в случае 1).

4) Случай $0<\lambda<\frac{1}{2}$, $-1<c<-\sqrt{1-2\lambda}$. Класс решений суже́н еще более ($k=-1$). Метод решения отличается от случая 1) только тем, что теперь в формуле (455) выражение, стоящее в квадратной скобке, должно обращаться в нуль при $s=\lambda_2$. Отсюда выводим необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (456) в рассматриваемом классе:

$$(\lambda_1-1)F(\lambda_1)-(\lambda_2-1)F(\lambda_2)=0. \tag{457}$$

5) Случай $\lambda\geqslant\frac{1}{2}$, $0<c<1$ ($k=1$). Метод решения тот же, как в случае 2). Решение однородного уравнения при $\lambda>\frac{1}{2}$ можно представить в виде

$$\varphi_0(x)=\cos\nu x+\frac{\sin\nu x}{\nu},$$

где $\nu^2=2\lambda-1$. При $\lambda=\frac{1}{2}$ однородное уравнение имеет решение

$$\varphi_0(x)=1+x.$$

6) Случай $\lambda\geqslant\frac{1}{2}$, $-1<c<0$ ($k=-1$). Метод решения тот же, как в случае 4). Будем иметь исчезающее на бесконечности решение, если выполнено условие (457). Можно показать, что это условие равносильно

$$\int\limits_0^\infty\left(\cos\nu x+\frac{\sin\nu x}{\nu}\right)f(x)\,dx=0\qquad\left(\lambda>\frac{1}{2}\right)$$

или

$$\int\limits_0^\infty(1+x)f(x)\,dx=0\qquad\left(\lambda=\frac{1}{2}\right).$$

2. Рассмотрим однородное уравнение, ядро которого определяется формулой (уравнение Милна):

$$K(x)=\frac{1}{2}\int\limits_{|x|}^\infty\frac{e^{-t}}{t}\,dt.$$

Эта функция при $x=0$ обращается в бесконечность порядка $\lg x$. Это обстоятельство не мешает применению предыдущего метода. Образуем функцию $L(s)$:

$$L(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx}\left[\frac{1}{2}\int_{|x|}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt\right]dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} e^{sx}\left[\int_{x}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt\right]dx+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{sx}\left[\int_{-x}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt\right]dx.$$

Повторное интегрирование в первом слагаемом равносильно вычислению двойного интеграла по той части первого координатного угла плоскости (x, t), в которой выполнено неравенство $t\geqslant x$. Производя перемену порядка интегрирования, можем переписать это первое слагаемое в виде

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}\left[\int_{0}^{t} e^{sx}\,dx\right]dt=\frac{1}{2s}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{(s-1)t}-e^{-t}}{t}\,dt.$$

Написанный интеграл может быть вычислен, например, дифференцированием по параметру s, и мы получаем

$$\frac{1}{2s}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{(s-1)t}-e^{-t}}{t}\,dt=-\frac{1}{2s}\lg(1-s),$$

причем мы считаем, что вещественная часть s меньше единицы. Точно так же вычисляется и второе слагаемое в выражении $L(s)$, и мы получаем

$$L(s)=\frac{1}{2}\lg\frac{1+s}{1-s}\qquad (s=\sigma+\tau i;\quad -1<\sigma<1),$$

причем надо брать то значение логарифма, которое обращается в нуль при $s=0$. Разлагая логарифм в степенной ряд, убедимся, что уравнение

$$1-\frac{1}{2s}\lg\frac{1+s}{1-s}=0$$

имеет двойной корень $s=0$. Можно показать, что оно не имеет других корней, у которых вещественная часть заключена внутри промежутка $(-1, 1)$.

Если взять $0<c<1$, то число

$$k=\frac{1}{2\pi}\left\{\arg\left[1-\frac{1}{2s}\lg\frac{1+s}{1-s}\right]\right\}_{c-i\infty}^{c+i\infty}=1,$$

и мы можем определить решения по формулам (449) и (451) при $F(s)\equiv 0$.

Изложение последних двух п°п° принадлежит Ю. И. Черскому.

69. Случай полубесконечного промежутка (продолжение). Большое исследование уравнений вида (444) и систем таких уравнений проведено при весьма общих условиях для одного уравнения в работе М. Г. Крейна (УМН, т. XIII, в. 5, 1958 г.) и для систем в совместных работах И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна. Мы сможем кратко изложить результаты работы М. Г. Крейна.

В дальнейшем широко используются классы функций, представимых как преобразование Фурье функций из $L_1(-\infty, \infty)$, $L_1(0, \infty)$ и $L_1(-\infty, 0)$. Для краткости вместо этих символов будем просто писать L, L_+ и L_-. Через R,

R_+ и R_- обозначим классы функций, представимых в виде

$$F(\lambda)=c+\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{i\lambda x}\,dx;$$

$$F_1(\lambda)=c+\int_{0}^{\infty} f_1(x)\,e^{i\lambda x}\,dx;\quad F_2(\lambda)=c+\int_{-\infty}^{0} f_2(x)\,e^{i\lambda x}\,dx,$$

где $f(x)$, $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответственно из L, L_+ и L_- и c — постоянная, различная для разных функций. Функции из R_+ продолжимы до функций, регулярных при $\operatorname{Im}\lambda>0$ и непрерывных вплоть до вещественной оси; аналогично и для R_-.

Большую роль в дальнейшем играет

Теорема Винера—Леви. *Пусть $F_0(z)$ — функция, регулярная в некоторой области $\mathscr{D}$ на плоскости или на римановой поверхности, $F(\lambda)$ — функция из R такая, что кривую $z=F(\lambda)$ $(-\infty\leqslant\lambda\leqslant\infty)$ можно рассматривать как лежащую внутри $\mathscr{D}$. Тогда и $F_0[F(\lambda)]$ также из R.*

Теорема Винера из [62] является частным случаем сформулированной теоремы Винера—Леви при $F_0(z)=z^{-1}$.

При формулировке дальнейшего понадобится понятие индекса непрерывной направленной линии на плоскости. Это есть деленное на 2π изменение аргумента при обходе этой кривой. Если она задана в виде

$$\zeta=\Phi(\lambda)\qquad(-\infty\leqslant\lambda\leqslant+\infty),$$

где $\Phi(\lambda)$ непрерывна, отлична от нуля и $\Phi(+\infty)=\Phi(-\infty)$, то индекс кривой (или функции $\Phi(\lambda)$) есть целое число:

$$\operatorname{ind}\Phi=\frac{1}{2\pi}\Big[\arg\Phi(\lambda)\Big|_{-\infty}^{+\infty}.$$

При $F_1(z)=\lg z$ теорема Винера—Леви дает такую теорему:

Теорема 1. *Пусть $g(x)$ из L, $G(\lambda)$ — ее преобразование Фурье,*

$$1-G(\lambda)\neq 0\qquad(-\infty<\lambda<+\infty)$$

и

$$\operatorname{ind}[1-G(\lambda)]=0.$$

Тогда существует такое $l(t)$ из L, что

$$\lg[1-G(\lambda)]=\int_{-\infty}^{+\infty} l(t)\,e^{i\lambda t}\,dt.$$

Из этой формулы непосредственно следует, что $\lg[1-G(\lambda)]\to 0$ при $\lambda\to\pm\infty$.

В дальнейшем широко используем факторизацию непрерывных на промежутке $-\infty\leqslant\lambda\leqslant+\infty$ функций $\omega(\lambda)$ класса R при $c=1$. Под этим термином понимаем представление $\omega(\lambda)$ в виде произведения

$$\omega(\lambda)=\omega_+(\lambda)\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^k\omega_-(\lambda)\qquad(-\infty\leqslant\lambda\leqslant+\infty),\tag{458}$$

где $\omega_-(\lambda)$, $\omega_+(\lambda)$ регулярны в соответствующих полуплоскостях $\operatorname{Im}\lambda>0$, $\operatorname{Im}\lambda<0$ и непрерывны вплоть до вещественной оси. Кроме того,

$$\omega_+(\lambda)\neq 0 \text{ при } \operatorname{Im}\lambda\geqslant 0 \text{ и } \omega_-(\lambda)\neq 0 \text{ при } \operatorname{Im}\lambda\leqslant 0.$$

Из (458) легко заключить, что

$$k=\operatorname{ind}\omega(\lambda).$$

Факторизация (458) называется канонической, если $k=0$.

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь функции вида

$$\omega(\lambda) = 1 - G(\lambda), \tag{459}$$

где $G(\lambda)$ — преобразование Фурье некоторой функции из L_1, так что $\omega(\pm\infty) = 1$. Можно считать, что

$$\omega_+(\pm\infty) = \omega_-(\pm\infty) = 1.$$

Сформулируем основные результаты, касающиеся указанной задачи факторизации.

Для того чтобы функция (459) допускала каноническую факторизацию, необходимо и достаточно наличие двух условий,

$$\omega(\lambda) \neq 0 \quad (-\infty \leqslant \lambda \leqslant +\infty), \qquad \operatorname{ind} \omega(\lambda) = 0. \tag{460}$$

При этом каноническая факторизация единственна. Кроме того, при выполнении условий (460) существует функция $M(t)$ из L_1 такая, что

$$\omega(\lambda) = \exp \int_{-\infty}^{+\infty} M(t)\, e^{i\lambda t}\, dt, \tag{461}$$

где $\exp \alpha = e^{\alpha}$, и

$$\omega_+(\lambda) = \exp \int_0^{\infty} M(t)\, e^{i\lambda t}\, dt; \quad \omega_-(\lambda) = \exp \int_{-\infty}^{0} M(t)\, e^{i\lambda t}\, dt. \tag{462}$$

Отсюда следует, что $\omega(\lambda) \in R$ и $\omega_{\pm}(\lambda) \in R_{\pm}$.

Множители в канонической факторизации определяются также формулами:

$$\lg \omega_+(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lg \omega(\mu)}{\mu - \lambda}\, d\mu \qquad (\operatorname{Im} \lambda > 0), \tag{463}$$

$$\lg \omega_-(\lambda) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lg \omega(\mu)}{\mu - \lambda}\, d\mu \qquad (\operatorname{Im} \lambda < 0). \tag{464}$$

В случае общей факторизации имеет место следующее предложение. Для того чтобы функция (459) допускала факторизацию (458), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\omega(\lambda) \neq 0 \qquad (-\infty \leqslant \lambda \leqslant +\infty).$$

В этом случае равенство (158) можно переписать в виде

$$\left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^{-k} \omega(\lambda) = \omega_-(\lambda)\, \omega_+(\lambda) \qquad (-\infty \leqslant \lambda \leqslant +\infty).$$

Последнее означает каноническую факторизацию для функции

$$\omega_1(\lambda) = \left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^{-k} \omega(\lambda).$$

Следовательно, для множителей $\omega_{\pm}(\lambda)$ справедливы формулы (461) — (464), если в них заменить $\omega(\lambda)$ на $\omega_1(\lambda)$.

Рассмотрим теперь уравнение (444):

$$\varphi(t) = f(t) + \int_0^{\infty} k(t - s)\, \varphi(s)\, ds \tag{444$_1$}$$

с ядром $k(t)$ из L_+ и введем его преобразование Фурье:

$$K(\lambda)=\int_0^\infty k(t)\,e^{i\lambda t}\,dt.$$

Прежде чем формулировать теоремы о решениях уравнения (444), введем некоторые функциональные пространства на промежутке $(0, \infty)$. пространства L_1 и L_2, пространство M измеримых ограниченных функций, пространство C непрерывных при $0\leqslant x\leqslant\infty$ функций и пространство C' таких функции из C, что $f(\infty)=0$. Буквой $\mathscr{E}$ обозначим одно из указанных пространств Все функции считаются комплекснозначными. В указанных ниже результатах, содержащих обозначение $\mathscr{E}$, можно подразумевать и некоторые другие пространства. Сформулируем теперь основные теоремы о решении уравнения.

Теорема 1. *Для того чтобы уравнение* (444) *при любом* $f(x)$ *из* $\mathscr{E}$ *имело одно и только одно решение из* $\mathscr{E}$, *необходимы и достаточны следующие условия:*

$$1-K(\lambda)\neq 0 \text{ при } -\infty\leqslant\lambda\leqslant+\infty, \tag{465}$$

$$\nu=-\operatorname{ind}[1-K(\lambda)]=0. \tag{466}$$

Теорема 2. *Если выполнено условие* (465), *то неравенство* $\nu>0$ *является необходимым и достаточным условием того, чтобы однородное уравнение*

$$\varphi(t)=\int_0^\infty k(t-s)\,\varphi(s)\,ds \tag{467}$$

имело решения, отличные от нуля, в каком-либо из пространств $\mathscr{E}$.

Эти решения во всех пространствах $\mathscr{E}$ *одни и те же, и их множество имеет базис, состоящий из* ν *функций* $\varphi_k(x)$ $(k=0, 1, \ldots, \nu-1)$, *стремящихся к нулю при* $x\to\infty$ *и связанных между собою следующими соотношениями:*

$$\varphi_k(t)=\int_0^t \varphi_{k+1}(s)\,ds \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ \nu-2),$$

$$\varphi_{\nu-1}(t)=\int_0^t \psi(s)\,ds+c,$$

где $c\neq 0$, $\varphi_k(t)$ $(k=0, 1, \ldots, \nu-2)$ и $\psi(t)$ из L_+.

Теорема 3. *Если выполнено условие* (465) *и* $\nu>0$, *то уравнение* (444) *при любом* $f(x)$ *из* $\mathscr{E}$ *имеет бесчисленное множество решений из* $\mathscr{E}$

Если же $\nu<0$, *то при данном* $f(x)$ *из* $\mathscr{E}$ *уравнение* (444) *либо вовсе не имеет решений из* $\mathscr{E}$, *либо имеет единственное решение. Для того чтобы имел место последний случай, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

$$\int_0^\infty f(t)\,\psi_k(t)\,dt=0 \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ |\nu|-1),$$

где $\psi_k(t)$ — *какой-либо базис множества всех решений транспонированного однородного уравнения*

$$\psi(t)=\int_0^\infty k(s-t)\,\psi(s)\,ds.$$

Укажем теперь на определение резольвент для решения основного интегрального уравнения.

1. Если выполнены условия (465), (466), то имеется единственная факторизация:

$$[1-K(\lambda)]^{-1}=\omega_+(\lambda)\,\omega_-(\lambda),$$

причем

$$\omega_+(\lambda)=1+\int_0^\infty \gamma_+(t)\,e^{i\lambda t}\,dt, \tag{468$_1$}$$

$$\omega_-(\lambda)=1+\int_0^\infty \gamma_-(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt. \tag{468$_2$}$$

Резольвента определяется формулой

$$\gamma(t,\ s)=\gamma_+(t-s)+\gamma_-(s-t)+\int_0^\infty \gamma_+(t-r)\,\gamma_-(s-r)\,dr \tag{469}$$

$$(0\leqslant t,\ s<\infty;\ \gamma_+(t)=0 \text{ и } \gamma_-(t)=0 \text{ при } t<0),$$

так что при $f(t)$ из $\mathscr{E}$ решение уравнения определяется формулой

$$\varphi(t)=f(t)+\int_0^\infty \gamma(t,\ s)\,f(s)\,ds.$$

Формулу (469) можно записать так:

$$\gamma(t,\ s)=\gamma(t-s,\ 0)+\gamma(0,\ s-t)+\int_0^\infty \gamma(t-r,\ 0)\,\gamma(0,\ s-r)\,dr. \tag{470}$$

Если $k(t-s)=k(s-t)$, то формула (470) имеет вид

$$\gamma(t,\ s)=\gamma(|t-s|,\ 0)+\int_0^{\min(t,\ s)} \gamma(t-r,\ 0)\,\gamma(s-r,\ 0)\,dr.$$

Отметим, что $\gamma_+(s)$ и $\gamma_-(s)$ суть единственные в классе L_+ решения уравнений

$$\left.\begin{aligned}\gamma_+(s)+\int_0^\infty k(s-t)\,\gamma_+(t)\,dt&=k(s),\\ \gamma_-(s)+\int_0^\infty k(t-s)\,\gamma_-(t)\,dt&=k(-s)\end{aligned}\right\}\quad(0\leqslant s\leqslant+\infty)$$

2. Положим, что выполнено условие (465), но

$$\nu=-\operatorname{ind}[1-K(\lambda)]>0.$$

В этом случае функция $(1-K(\lambda))^{-1}$ допускает следующую факторизацию:

$$(1-K(\lambda))^{-1}=G_-(\lambda)\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^\nu G_+(\lambda)\qquad(-\infty\leqslant\lambda\leqslant+\infty). \tag{471}$$

Для функций $\omega_-(\lambda)$ и $\omega_+(\lambda)$, определенных равенствами

$$\omega_-(\lambda)=G_-(\lambda)\ \text{ и }\ \omega_+(\lambda)=\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^\nu G_+(\lambda),$$

имеет место представление (468) и формула (469) для резольвенты.

Кроме того, для $l=1, 2, \ldots, \nu$ имеют место представления

$$\frac{i^l \omega_+(\lambda)}{(\lambda-i)^l}=\int_0^\infty g_l(t)\, e^{i\lambda t}\, dt,$$

причем $g_l(s)$ суть решения однородного уравнения (467). Через них можно, естественно, выразить и решения $\varphi_l(s)$, упомянутые в теореме 2.

3. Если $\nu=-\operatorname{ind}[1-K(\lambda)]<0$, то у транспонированного уравнения

$$\varphi(t)=f(t)+\int_0^\infty k(s-t)\,\varphi(s)\, ds$$

индекс $-\nu>0$. Если формула (471) определяет факторизацию для уравнения (444), то для транспонированного уравнения имеем факторизацию

$$[1-K(\lambda)]^{-1}=\omega_-(-\lambda)\,\omega_+(-\lambda),$$

причем $\omega_-(-\lambda)$ играет роль $\omega_+(\lambda)$ и $\omega_+(-\lambda)$ — роль $\omega_-(\lambda)$.

В указанной выше работе М. Г. Крейна указана возможность использования приведенных выше результатов в том случае, когда ядро $k(t)$ таково, что произведение $e^{-ht}k(t)$ при некотором выборе вещественного числа h принадлежит L. Полагая

$$\hat{k}(t)=e^{-ht}k(t);\quad \hat{\varphi}(t)=e^{-ht}\varphi(t);\quad \hat{f}(t)=e^{-ht}f(t),$$

мы вместо (444_1) получим уравнение

$$\hat{\varphi}(s)=\hat{f}(s)+\int_0^\infty \hat{k}(s-t)\,\hat{\varphi}(t)\, dt, \tag{444_2}$$

к которому применимы указанные выше результаты, и это даст соответствующие результаты для уравнения (444_1).

Сформулируем аналог первой теоремы. Для того чтобы уравнение (444_1) для любого $f(s)$ такого, что $e^{-hs}f(s)$ из L, имело одно и только одно решение $\varphi(s)$ ($e^{-hs}\varphi(s)$ из L), необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned}&1-K(\lambda+ih)\neq 0,\\ &\operatorname{ind}[1-K(\lambda+ih)]=0\end{aligned}\qquad(-\infty<\lambda<+\infty).$$

Отметим еще, что если $\hat{\gamma}(t, s)$ есть резольвента уравнения (444_2), то резольвента уравнения (444_1) будет выражаться формулой

$$\gamma_h(t, s)=e^{h(t-s)}\hat{\gamma}(t, s).$$

В работе М. Г. Крейна содержатся и дальнейшие исследования этого случая, в частности, для однородного уравнения.

Рассмотрим кратко один частный случай уравнения (444_1) при выполнении условий (465) и (466). Легко построить такие ядра $k(t)$ из L, что $K(\lambda)$ — рациональная функция от λ. Пусть n — степень знаменателя. При этом в силу $K(\pm\infty)=0$ степень числителя $\leqslant n-1$ и

$$1-K(\lambda)=\frac{(\lambda-\alpha_1)(\lambda-\alpha_2)\ldots(\lambda-\alpha_n)}{(\lambda-\beta_1)(\lambda-\beta_2)\ldots(\lambda-\beta_n)}.$$

В силу (465) и (466) числа α_k и β_k ($k=1, 2, \ldots, n$) должны быть комплексными, причем внутри верхней и нижней полуплоскостей должно быть одинаковое число нулей и полюсов дроби.

Пусть α_j, β_j ($j=1, 2, \ldots, m$) из нижней полуплоскости и α_j, β_j ($j=m+1, \ldots, n$) — из верхней, причем пусть α_j ($j=1, 2, \ldots, m$) различны. При этом

$$\omega_+(\lambda)=\prod_{j=1}^{m}\frac{\lambda-\beta_j}{\lambda-\alpha_j}=1+\sum_{j=1}^{m}\frac{A_j}{\lambda-\alpha_j}$$

и

$$\gamma(t, 0)=-i\sum_{j=1}^{m}A_j e^{-i\alpha_j t}.$$

Если ядро $k(t)$ симметрично, т. е. $k(-t)=k(t)$, то $\gamma(t, 0)=\gamma(0, t)$ и

$$\gamma(t, s)=i\sum_{j, l=1}^{m}\frac{A_jA_l}{\alpha_j+\alpha_l}e^{-i(\alpha_j t+\alpha_l s)}\left[e^{i(\alpha_j+\alpha_l)\min(t, s)}-1\right]+$$

$$+i\sum_{j=1}^{m}A_j e^{-\alpha_j(t-s)}.$$

ГЛАВА II

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

70. Постановка задач. Рассмотрим некоторые конкретные задачи, выясняющие предмет вариационного исчисления. Пусть имеется неоднородная изотропная среда, в каждой точке (x, y, z) которой определена скорость $v(x, y, z)$, не зависящая от направления. Рассчитаем время, необходимое для того, чтобы точка, двигаясь с указанной выше скоростью, описала некоторую линию l. Элемент пути ds будет пройден за время ds/v, а для прохождения всей линии l потребуется промежуток времени, выражаемый интегралом

$$T = \int_l \frac{ds}{v(x, y, z)}. \tag{1}$$

Закрепим крайние точки (x_0, y_0, z_0) и (x_1, y_1, z_1) линии l, а самую линию будем менять. Величина T будет при этом меняться в зависимости от l. При этом говорят, что T есть *функционал от линии* l. При определенном выборе l функционал T будет иметь определенное численное значение. Одной из задач геометрической оптики является следующая задача: при закрепленных концах (x_0, y_0, z_0) и (x_1, y_1, z_1) определить l так, чтобы функционал T имел наименьшее значение. Положим, что в уравнении линии l мы приняли x за параметр, так что y и z суть функции от x. При этом интеграл (1) запишется в виде

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{v(x, y, z)}\, dx, \tag{2}$$

где y' и z' — производные от упомянутых выше функций. Задача сводится к разысканию функций $y(x)$ и $z(x)$ таких, чтобы интеграл (2) имеет наименьшее значение, причем искомые функции должны удовлетворять следующим предельным условиям:

$$y(x_0) = y_0; \quad z(x_0) = z_0;$$
$$y(x_1) = y_1; \quad z(x_1) = z_1.$$

В случае плоскости функционал (2) будет иметь вид

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v(x, y)}\, dx, \tag{2$_1$}$$

и задача сведется к нахождению одной функции $y(x)$, удовлетворяющей двум предельным условиям:

$$y(x_0) = y_0; \quad y(x_1) = y_1.$$

Рассмотрим теперь задачу для кратного интеграла. В пространстве задана замкнутая кривая l; требуется натянуть на нее такую поверхность, которая имела бы наименьшую площадь. Пусть λ — проекция l на плоскость (x, y) и B — область, ограниченная λ. Уравнение искомой поверхности представим себе в явной форме $z = z(x, y)$. При этом площадь поверхности будет выражаться интегралом

$$S = \iint_B \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dx\, dy, \tag{3}$$

где z_x и z_y — частные производные от $z(x, y)$ по x и y.

При определенном выборе поверхности величина S будет иметь определенное значение, и мы имеем здесь функционал от поверхности. Задача сводится к такому выбору функции $z(x, y)$, при котором S имеет наименьшее значение. Предельным условием в данном случае является задание значений искомой функции на контуре λ. Эти значения должны давать ординаты z того контура l, на который должна быть натянута поверхность.

Основной задачей вариационного исчисления и является разыскание наибольших и наименьших значений функционалов от линий и поверхностей, выражаемых некоторыми определенными интегралами. Эта задача аналогична задаче дифференциального исчисления об отыскании наибольших и наименьших значений некоторой функции. Как мы знаем, эта последняя задача непосредственно связана с задачей разыскания экстремумов функции, а именно, — разыскиваются такие значения независимых переменных, при которых функция принимает наибольшее или наименьшее значение по сравнению со всеми достаточно близкими значениями. Аналогичным образом мы будем рассматривать задачу и для функционалов. Так, например, в случае функционала (2) мы будем искать такую линию l, чтобы T имело для этой линии значение не большее, чем для всех линий, к ней достаточно близких. Если функционал для некоторой линии или поверхности имеет значение не меньшее (или не большее), чем для всех близких к ней линий или поверхностей, то говорят просто, что для этой линии или поверхности функционал имеет экстремум.

В дальнейшем мы дадим точную постановку задачи и определим понятие близости для линий и поверхностей, которые играют роль независимых переменных обычного дифференциального исчисления. Мы знаем, что для нахождения тех значений x, при которых функция $f(x)$ достигает экстремума, нам необходимо решить уравнение $f'(x)=0$. В вариационном исчислении доказывается, что линия $y=y(x)$ или поверхность $z=z(x, y)$, дающая экстремум некоторому функционалу, должна удовлетворять некоторому дифференциальному уравнению. Нашей первой задачей является построение этих дифференциальных уравнений. Удовлетворение этим уравнениям представляет собой необходимое условие экстремума функционала, совершенно так же, как равенство $f'(x)=0$ является необходимым условием того, чтобы заданная функция $f(x)$ имела экстремум при некотором значении x. Для вывода упомянутых уравнений нам понадобятся две леммы, которые мы изложим в следующем пункте.

71. Основные леммы. Лемма 1. *Если интеграл*

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\eta(x)\,dx, \tag{4}$$

где $f(x)$ — фиксированная непрерывная в промежутке $[x_0, x_1]$ функция, обращается в нуль для всякой функции $\eta(x)$, непрерывной вместе со своей производной и равной нулю на концах, $\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$, то $f(x)$ тождественно равна нулю в промежутке $[x_0, x_1]$.

Доказываем от обратного. Пусть в некоторой точке $x=\xi$ внутри промежутка $f(x)$ отлична от нуля. Например, $f(\xi)>0$. Вследствие непрерывности $f(x)$ будет положительной и в некотором промежутке $[\xi_1, \xi_2]$, содержащем точку ξ внутри и лежащем внутри $[x_0, x_1]$. Определим теперь функцию $\eta(x)$ следующим образом:

$$\eta(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x_0\leqslant x\leqslant \xi_1, \\ (x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2 & \text{при } \xi_1\leqslant x\leqslant \xi_2, \\ 0 & \text{при } \xi_2\leqslant x\leqslant x_1. \end{cases} \tag{5}$$

Построенная таким образом функция $\eta(x)$ удовлетворяет всем условиям леммы. Действительно, по построению, $\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$. Произведение $(x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2$ и его производная по x обращаются в нуль при $x=\xi_1$ и $x=\xi_2$. Вне промежутка $[\xi_1, \xi_2]$ $\eta(x)$ есть тождественный нуль. Отсюда вытекает непрерывность функции и ее производной во всем промежутке $[x_0, x_1]$. Принимая во внимание, что вне $[\xi_1, \xi_2]$ функция $\eta(x)$ — тождественный нуль, можем написать интеграл (4) в виде

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\,(x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2\,dx,$$

откуда следует, что он имеет положительное значение, так как подынтегральная функция непрерывна и положительна внутри промежутка интегрирования. Но по условию леммы интеграл должен быть равен нулю. Это противоречие и доказывает лемму.

Приведем аналогичную лемму для двойного интеграла.

Лемма 2. *Если интеграл*

$$\iint\limits_B f(x, y)\,\eta(x, y)\,dx\,dy, \tag{6}$$

где $f(x, y)$ — фиксированная в области B непрерывная функция, обращается в нуль для всякой функции $\eta(x, y)$, непрерывной вместе со своими частными производными первого порядка в B и равной нулю на контуре l области B, то $f(x, y)$ тождественно равна нулю в области B.

Положим, что в некоторой точке (ξ, ζ) внутри B функция $f(x, y)$ положительна. Тогда она будет положительной и в некотором круге с центром (ξ, ζ) и радиусом ρ, лежащем внутри B. Определим $\eta(x, y)$ следующим образом:

$$\eta(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } (x-\xi)^2+(y-\zeta)^2 \geqslant \rho^2, \\ [(x-\xi)^2+(y-\zeta)^2-\rho^2]^2 & \text{при } (x-\xi)^2+(y-\zeta)^2 < \rho^2. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $\eta(x, y)$ удовлетворяет всем условиям леммы, а интеграл (6) сведется к интегралу по упомянутому кругу от непрерывной положительной функции и будет положительным, что противоречит условию леммы.

Замечание. Обе леммы останутся справедливыми, если мы наложим на функцию η более тяжелые ограничения, например, потребуем, чтобы она имела непрерывные производные до некоторого порядка n и чтобы на концах промежутка $[x_0, x_1]$, а в случае интеграла (6) — на контуре l, она обращалась в нуль вместе с производными до порядка $(n-1)$. Доказательство останется прежним и достаточно будет лишь, например, в формуле (5) показатель степени 2 заменить на $(n+1)$.

Отметим также, что лемма может быть легко доказана для трехкратных интегралов и вообще интегралов любой кратности.

Следующие две леммы имеют совершенно иной характер. По существу, они могут быть объединены в одну лемму, но для ясности мы разделим их на две.

Лемма 3. *Если $g(x)$ непрерывна в промежутке $[x_0, x_1]$ и*

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} g(x)\,\eta'(x)\,dx = 0 \tag{7}$$

для всякой функции $\eta(x)$, *непрерывной вместе со своей производной в* $[x_0, x_1]$ *и* $\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$, *то* $g(x)$ — *постоянная.*

Обозначив

$$c=\frac{1}{x_1-x_0}\int_{x_0}^{x_1} g(x)\,dx,$$

мы получим

$$\int_{x_0}^{x_1}[g(x)-c]\,dx=0, \tag{8}$$

и функция

$$\eta(x)=\int_{x_0}^{x}[g(t)-c]\,dt$$

удовлетворяет указанным в лемме условиям, так что

$$\int_{x_0}^{x_1} g(x)\,[g(x)-c]\,dx=0.$$

Умножая обе части (8) на c и вычитая из последнего равенства, получим

$$\int_{x_0}^{x_1}[g(x)-c]^2\,dx=0,$$

откуда $g(x)\equiv c$.

Лемма 4. *Если* $a(x)$ *и* $b(x)$ *непрерывны в* $[x_0, x_1]$ *и*

$$\int_{x_0}^{x_1}[a(x)\,\eta(x)+b(x)\,\eta'(x)]\,dx=0 \tag{9}$$

для всякой функции $\eta(x)$, *удовлетворяющей тем же условиям, что и в лемме 3, то* $b(x)$ *имеет непрерывную производную* $b'(x)\equiv a(x)$ *в* $[x_0, x_1]$.

Положив

$$A(x)=\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt,$$

получим, интегрируя по частям,

$$\int_{x_0}^{x_1} a(x)\,\eta(x)\,dx=-\int_{x_0}^{x_1} A(x)\,\eta'(x)\,dx,$$

и равенство (9) переписывается в виде

$$\int_{x_0}^{x_1}[-A(x)+b(x)]\,\eta'(x)\,dx=0,$$

и в силу леммы 3

$$b(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,dt + \text{const},$$

т. е. $b'(x) = a(x)$.

72. Уравнение Эйлера в простейшем случае. Рассмотрим простейший функционал

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x,\ y,\ y')\,dx, \tag{10}$$

где F — заданная функция всех трех аргументов. Мы будем считать ее непрерывной вместе с производными второго порядка в некоторой области B плоскости $(x,\ y)$ и при любых значениях аргумента y'. Функционал J получит определенное численное значение, если мы фиксируем функцию $y = y(x)$, или, что то же, кривую $y = y(x)$, которую всегда считаем лежащей внутри B.

Положим, что значения функции $y(x)$ на концах промежутка интегрирования заданы:

$$y(x_0) = y_0; \qquad y(x_1) = y_1. \tag{11}$$

Будем считать, что искомая функция имеет непрерывную производную. Такой класс функций, имеющих в промежутке $[x_0,\ x_1]$ непрерывную производную, назовем классом C_1 (соответственно этому класс функций, имеющих n непрерывных производных, будет обозначаться C_n), и в дальнейшем будем считать, что все функции, о которых мы будем говорить, принадлежат этому классу. Назовем ε-окрестностью кривой $y = y(x)$ всевозможные кривые $y_1(x)$, которые во всем промежутке $[x_0,\ x_1]$ удовлетворяют неравенству $|y_1(x) - y(x)| \leqslant \varepsilon$. Иногда, кроме этого неравенства, добавляют еще одно: $|y_1'(x) - y'(x)| \leqslant \varepsilon$, т. е. требуют ε-близости не только по ординате, но и по угловому коэффициенту касательной. В первом случае иногда говорят об ε-близости нулевого порядка, а во втором случае, при наличии двух неравенств, говорят об ε-близости первого порядка.

Определение. *Говорят, что функционал J достигает относительного экстремума для кривой $y(x)$, лежащей внутри упомянутой области B, принадлежащей классу C_1 и удовлетворяющей условию* (11), *если величина этого функционала для $y(x)$ не меньше (или не больше) его величины для любых других кривых класса C_1, находящихся в некоторой ε-близости к $y(x)$ и удовлетворяющих условию* (11).

Это понятие относительного экстремума совершенно аналогично понятию максимума и минимума функции [I; 58]. Наряду с понятием относительного экстремума можно ввести и понятие

абсолютного экстремума. Пусть имеется некоторый класс D функций $y(x)$, для которых интеграл (10) имеет смысл. Говорят, что функционал J достигает в классе D абсолютного экстремума для кривой $y(x)$, если величина этого функционала для $y(x)$ не меньше (или не больше) его величины для всех других кривых класса D.

Сейчас мы будем заниматься только относительным экстремумом и только в конце главы рассмотрим коротко вопрос об абсолютном экстремуме. Для краткости речи относительный экстремум будем называть просто экстремумом. В следующих параграфах мы будем рассматривать функционалы, отличные от функционала (10). Для таких функционалов также можно ставить вопрос как об относительных, так и об абсолютных экстремумах. Мы не будем об этом каждый раз упоминать и будем заниматься сначала только относительными экстремумами

Выведем необходимые условия, которым должна подчиняться $y(x)$ для того, чтобы функционал J имел экстремум. Возьмем любую функцию $\eta(x)$, равную нулю на концах промежутка интегрирования, и наряду с $y(x)$, которая должна давать экстремум функционалу J, образуем новую функцию $y(x)+\alpha\eta(x)$, где α — малый численный параметр. Это новая функция удовлетворяет тем же предельным условиям, что и $y(x)$. Подставив ее в функционал J, получим в результате интегрирования некоторую функцию параметра α.

$$J(\alpha)=\int_{x_0}^{x_1} F(x,\ y(x)+\alpha\eta(x),\ y'(x)+\alpha\eta'(x))\,dx. \tag{12}$$

При любом заданном положительном ε функция $y(x)+\alpha\eta(x)$ находится в ε-окрестности (даже первого порядка) линии $y(x)$ для всех значений параметра α, достаточно близких к нулю. Следовательно, раз $y(x)$ дает экстремум функционалу J, то функция (12) должна иметь экстремум при значении $\alpha=0$, а потому ее производная должна обращаться в нуль при $\alpha=0$. Дифференцируя под знаком интеграла и обозначая производные значками, поставленными снизу, будем иметь

$$J'(0)=\int_{x_0}^{x_1}[F_y(x,\ y,\ y')\,\eta(x)+F_{y'}(x,\ y,\ y')\,\eta'(x)]\,dx=0.$$

В коэффициенты при $\eta(x)$ и $\eta'(x)$ вместо $y(x)$ подставляется та функция, которая, по предложению, дает экстремум функционалу (10), так что эти коэффициенты суть некоторые непрерывные функции от x. Согласно лемме 4 коэффициент при $\eta'(x)$ имеет производную по x. Производя интегрирование по частям, получим

$$J'(0)=[F_{y'}\,\eta(x)]_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\eta(x)\left[F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right]dx=0. \tag{13}$$

Внеинтегральный член равен нулю, так как, по условию, $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ и, следовательно,

$$J'(0) = \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}\right] dx = 0.$$

Применяя лемму 1, можем утверждать, что функция $y(x)$, дающая экстремум интегралу (10), должна удовлетворять уравнению

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0, \tag{14}$$

причем, как мы видели, при подстановке $y(x)$ в функцию $F_{y'}(x, y, y')$ должна получиться функция, имеющая непрерывную полную производную по x. Но мы не можем раскрывать эту полную производную по правилу дифференцирования сложной функции, т. е. по формуле

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = F_{xy'} + F_{yy'} y' + F_{y'y'} y'', \tag{15}$$

поскольку мы не предположили существования непрерывной производной y'' второго порядка. Ниже мы покажем, что если вдоль исследуемой линии $y = y(x)$ производная $F_{y'y'} \neq 0$, то функция $y(x)$ имеет непрерывную производную y'' и тем самым уравнение (14) может быть переписано в виде

$$F_{y'y'} y'' + F_{yy'} y' + F_{xy'} - F_y = 0. \tag{16}$$

Это уравнение было дано Эйлером и называется обычно *уравнением Эйлера*. Оно представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка, и его общий интеграл содержит две произвольные постоянные, которые определяют из двух предельных условий (11). Произведение $J'(0)\alpha$, являющееся дифференциалом функции $J(\alpha)$ при $\alpha = 0$, называется обычно первой вариацией функционала (10) и обозначается δJ. Принимая во внимание (13), можем написать

$$\delta J = J'(0)\alpha = [F_{y'} \delta y]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}\right) \delta y \, dx \tag{17}$$

$$(\delta y = \alpha \eta(x)).$$

Приведем теперь доказательство существования непрерывной производной $y''(x)$ при условии $F_{y'y'} \neq 0$. Полная производная, входящая в уравнение (14), есть предел отношения

$$\frac{F_{y'}(x + \Delta x, y + \Delta y, y' + \Delta y') - F_{y'}(x, y, y')}{\Delta x} = [F_{xy'}] + \frac{\Delta y}{\Delta x} [F_{yy'}] + \frac{\Delta y'}{\Delta x} [F_{y'y'}]$$

при $\Delta x \to 0$, и квадратные скобки обозначают, что соответствующие производные надо брать при некоторых средних значениях

между (x, y, y') и $(x+\Delta x, y+\Delta y, y'+\Delta y')$. Напомним, что мы предположили непрерывность производных второго порядка у функции $F(x, y, y')$. В силу сказанного выше левая часть имеет при $\Delta x \to 0$ предел, равный полной производной от $F(x, y, y')$ по x. В правой части первые два слагаемые имеют пределы:

$$F_{xy'}(x, y, y') \text{ и } y'F_{yy'}(x, y, y')$$

и $[F_{y'y'}]$ имеет предел $F_{y'y'}(x, y, y')$. Если этот последний отличен от нуля, то существует предел

$$\lim \frac{\Delta y'}{\Delta x} = y'' = \frac{\frac{d}{dx} F_{y'}(x, y, y') - F_{xy'}(x, y, y') - y'F_{yy'}(x, y, y')}{F_{y'y'}(x, y, y')},$$

который является непрерывной функцией от x на тех участках кривой $y = y(x)$, на которых $F_{y'y'}(x, y, y') \neq 0$. Если $F_{y'y'} = 0$ лишь в отдельных точках кривой, то только в этих точках y'' может или не существовать, или потерять непрерывность.

Итак, предполагая, что функция $y(x)$ дает экстремум интегралу (10), мы пришли к уравнению (14) или (16) для этой функции, т. е. эти уравнения являются необходимыми условиями того, чтобы функция $y(x)$ давала экстремум интегралу (10). Напомним, что $y'(x)$ мы считали непрерывной функцией. В дальнейшем мы рассмотрим и те случаи, когда $y'(x)$ имеет в отдельных точках разрывы первого рода.

Основное уравнение Эйлера (16) является дифференциальным уравнением второго порядка и задача сводится к отысканию интегральной кривой, соединяющей две точки, (x_0, y_0), (x_1, y_1), с различными абсциссами x_0 и x_1. Сформулируем в связи с этим теорему С. Н. Бернштейна (1912 г.) для (16).

Если в дифференциальном уравнении

$$y'' = F(x, y, y'), \tag{18}$$

где F определена при всех значениях аргументов и функции F, F_y, $F_{y'}$ непрерывны в каждой точке (x, y) при любых значениях y' и существует такая постоянная $k > 0$ и такие ограниченные в каждой конечной части плоскости функции

$$\alpha(x, y) \geqslant 0, \ \beta(x, y) \geqslant 0,$$

что при любых аргументах

$$F_y(x, y, y') > k \text{ и } |F(x, y, y')| \leqslant \alpha(x, y)\, y'^2 + \beta(x, y),$$

то через любые две точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) с различными абсциссами проходит одна и только одна интегральная кривая $y(x)$ уравнения (18).

Доказательство этой теоремы можно найти в книге Н. И. Ахиезера «Лекции по вариационному исчислению».

73. Случай нескольких функций и производных высших порядков. Нетрудно написать уравнение Эйлера и для того случая, когда функционал зависит от нескольких функций, как это имело место, например, для функционала (2).

Ограничимся случаем двух функций:

$$J=\int_{x_0}^{x_1} F(x,\ y,\ y',\ z,\ z')\,dx. \tag{19}$$

Строим две функции, близкие к $y(x)$ и $z(x)$:

$$y(x)+\alpha\eta(x);\quad z(x)+\alpha_1\eta_1(x),$$

где $\eta(x)$ и $\eta_1(x)$ — произвольные функции, равные нулю на концах промежутка. Подставляя их в интеграл (19), получим функцию $J(\alpha,\ \alpha_1)$ от α и α_1, и для того, чтобы $y(x)$ и $z(x)$ давали экстремум функционалу (19), необходимо, чтобы частные производные от $J(\alpha,\ \alpha_1)$ по α и α_1 обращались в нуль при $\alpha=\alpha_1=0$. Производя вычисления, совершенно аналогичные предыдущим, получим для этих частных производных следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} J_\alpha(0,\ 0)&=[F_{y'}\eta]_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\eta(x)\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)dx,\\ J_{\alpha_1}(0,\ 0)&=[F_{z'}\eta_1]_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\eta_1(x)\left(F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}\right)dx,\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

и так как внеинтегральные члены обращаются в нуль, то, как и выше, мы убедимся в том, что для того, чтобы функции $y(x)$ и $z(x)$ давали экстремум функционалу (19), необходимо, чтобы они удовлетворяли следующей системе двух уравнений второго порядка:

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0;\quad F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}=0. \tag{21}$$

Кроме этих уравнений мы имеем еще предельные условия:

$$y(x_0)=y_0;\quad y(x_1)=y_1;\quad z(x_0)=z_0;\quad z(x_1)=z_1,$$

выражающие закрепление концов искомой пространственной кривой.

В силу (20) вариация интеграла (19) выразится следующей формулой:

$$\begin{aligned}\delta J&=J_\alpha(0,\ 0)\,\alpha+J_{\alpha_1}(0,\ 0)\,\alpha_1=\\ &=[F_{y'}\delta y+F_{z'}\delta z]_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\left[\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y+\left(F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}\right)\delta z\right]dx\end{aligned} \tag{22}$$

$$(\delta y=\alpha\eta(x);\ \delta z=\alpha_1\eta_1(x)).$$

Для функционала, зависящего от n функций: $y_1(x), \ldots, y_n(x)$,

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_1', y_2, y_2', \ldots, y_n, y_n')\, dx, \tag{23}$$

необходимые условия экстремума будут выражаться системой n уравнений второго порядка:

$$F_{y_k} - \frac{d}{dx} F_{y_k'} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{24}$$

а предельные условия закрепления на концах будут иметь вид

$$y_k(x_0) = y_k^{(0)}; \quad y_k(x_1) = y_k^{(1)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Первая вариация функционала (23) имеет вид

$$\delta J = \sum_{k=1}^{n} J_{\alpha_k}(0, 0, \ldots, 0)\, \alpha_k =$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{n} F_{y_k'} \delta y_k\right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \sum_{k=1}^{n} \left(F_{y_k} - \frac{d}{dx} F_{y_k'}\right) \delta y_k\, dx \qquad (\delta y_k = \alpha_k \eta_k(x)). \tag{25}$$

Рассмотрим теперь тот случай, когда интеграл содержит производные искомой функции выше первого порядка:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\, dx. \tag{26}$$

Как и выше, построим близкую кривую $y(x) + \alpha\eta(x)$, подставим в интеграл (26), продифференцируем по α и положим $\alpha = 0$. Таким образом мы получим

$$J'(0) = \int_{x_0}^{x_1} [F_y \eta(x) + F_{y'} \eta'(x) + \ldots + F_{y^{(n)}} \eta^{(n)}(x)]\, dx. \tag{27}$$

Преобразуем все слагаемые правой части, кроме первого, интегрируя несколько раз по частям:

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y^{(k)}} \eta^{(k)}(x)\, dx =$$

$$= \left[F_{y^{(k)}} \eta^{(k-1)}(x) - \frac{d}{dx} F_{y^{(k)}} \eta^{(k-2)}(x) + \ldots + (-1)^{k-1} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} F_{y^{(k)}} \eta(x)\right]_{x_0}^{x_1} +$$

$$+ (-1)^k \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^k}{dx^k} F_{y^{(k)}} \eta(x)\, dx. \tag{28}$$

Мы считаем, что $\eta(x)$ и ее производные до порядка $(n-1)$ обращаются в нуль на концах. Вследствие этого внеинтегральные

члены пропадут; приравнивая нулю $J'(0)$, получим условие:

$$J'(0)=\int_{x_0}^{x_1}\eta(x)\left[F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\ldots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}\right]dx=0,$$

которое в силу замечания к лемме 1 приводит нас к следующему уравнению Эйлера:

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\ldots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}=0. \tag{29}$$

Это есть дифференциальное уравнение порядка $2n$. Его общий интеграл содержит $2n$ произвольных постоянных, и мы должны иметь еще $2n$ предельных условий. В простейшем случае эти условия сводятся к заданию функции и ее производных до порядка $(n-1)$ на концах промежутка. Из этих предельных условий и вытекает, что аналогичные величины для $\eta(x)$ должны обращаться в нуль. Отметим еще, что мы считали непрерывными все те функции, которые входят в предыдущие формулы, так что, например, мы считаем, что искомая функция $y(x)$ имеет непрерывные производные порядка $2n$ (класс C_{2n}).

При рассмотрении функционалов (23) и (26) мы приходим к уравнениям (24) и (29), предполагая в первом случае, что функции $y_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ имеют непрерывные производные до второго порядка, а во втором случае, что $y(x)$ имеет непрерывные производные до порядка $2n$. Можно при некоторых предположениях доказать, что это будет действительно так. Для функционала (23) имеет место следующее утверждение: если функции $y_k(x)$ $(k=1, \ldots, n)$ дают экстремум функционалу (23), и определитель

$$\left\|F_{y_i y_k'}\right\| \quad (i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

отличен от нуля вдоль линии $y_k=y_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, то $y_k(x)$ имеют непрерывные производные второго порядка. В случае функционала (26) равенство нулю первой вариации приводит к уравнению:

$$F_{y^{(n)}}-\int_{x_0}^{x}F_{y^{(n-1)}}\,dx+\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}F_{y^{(n-2)}}\,dx\,dx+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^n\underbrace{\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\ldots\int_{x_0}^{x}}_{n}F_y\,dx\,dx\ldots dx=$$

$$=C_0+C_1(x-x_0)+\ldots+C_{n-1}(x-x_0)^{n-1}, \tag{30}$$

где $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$ — некоторые постоянные. Это основано на следующей лемме (ср. лемму 3 [71]).

Лемма. *Если для непрерывной функции $M(x)$ имеет место равенство*

$$\int_{x_0}^{x_1} M(x)\,\eta^{(n)}(x)\,dx = 0 \tag{31}$$

для всякой функции $\eta(x)$, имеющей непрерывные производные до порядка n и удовлетворяющей условиям

$$\eta(x_0) = \eta'(x_0) = \ldots = \eta^{(n-1)}(x_0) = 0,$$
$$\eta(x_1) = \eta'(x_1) = \ldots = \eta^{(n-1)}(x_1) = 0,$$

то $M(x)$ есть полином степени $(n-1)$.

Если $y(x)$ имеет непрерывные производные до порядка $2n$, то, дифференцируя уравнение (30) n раз, получаем уравнение (29). Если F имеет непрерывные производные до порядка $n+1$ по всем своим аргументам, то соответствующие полные производные по x можно раскрыть по правилу дифференцирования сложных функций [ср. (15)].

74. Случай кратных интегралов. Приведем теперь вывод необходимого условия экстремума для кратного интеграла. Впервые эти условия были указаны М. В. Остроградским. Рассмотрим двойной интеграл

$$J = \iint_B F(x, y, u, u_x, u_y)\,dx\,dy, \tag{32}$$

где u_x, u_y — частные производные функции $u(x, y)$, а B — некоторая конечная область на плоскости XY. Считается, что функция $F(x, y, u, p, q)$ имеет непрерывные производные до второго порядка, если точка (x, y, u) находится внутри некоторой трехмерной области $\mathcal{D}$, а p и q — любые ($p = u_x$; $q = u_y$). Ищется поверхность $u = u(x, y)$, лежащая внутри $\mathcal{D}$, с границей λ, однозначно проектирующаяся на плоскость XY в виде области B с границей l, дающая экстремум функционалу (32). Иными словами, ищется функция $u(x, y)$ в области B, дающая экстремум функционалу и принимающая данные значения на l. Мы предполагаем, что $u(x, y)$ имеет непрерывные производные до второго порядка в B. Составляем близкие функции $u(x, y) + \alpha\eta(x, y)$, где $\eta(x, y)$ — произвольная функция, обращающаяся в нуль на l. Подставляя эту функцию в интеграл (32), дифференцируя по α и полагая $\alpha = 0$, получим следующее выражение первой вариации функционала:

$$\delta J = J_\alpha(0)\,\alpha = \alpha \iint_B (F_u\eta + F_{u_x}\eta_x + F_{u_y}\eta_y)\,dx\,dy.$$

Преобразуем последние два слагаемых, пользуясь известной формулой Римана

$$\iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_l P\, dx + Q\, dy,$$

следующим образом:

$$\iint_B (F_{u_x}\eta_x + F_{u_y}\eta_y)\, dx\, dy =$$

$$= \iint_B \left[\frac{\partial}{\partial x}(\eta F_{u_x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\eta F_{u_y})\right] dx\, dy - \iint_B \eta\left(\frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} + \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y}\right) dx\, dy =$$

$$= \int_l (\eta F_{u_x}\, dy - \eta F_{u_y}\, dx) - \iint_B \eta\left(\frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} + \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y}\right) dx\, dy.$$

Таким образом, мы будем иметь следующее выражение первой вариации:

$$\delta J = \int_l \delta u\,(F_{u_x}\, dy - F_{u_y}\, dx) + \iint_B \left(F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y}\right) \delta u\, dx\, dy \tag{33}$$

$$(\delta u = \alpha\eta\,(x,\ y)).$$

Для экстремума необходимо, чтобы эта первая вариация обращалась в нуль, или, принимая во внимание, что $\eta\,(x,\ y)$ на l равно нулю, мы можем утверждать, что двойной интеграл, стоящий в правой части (33), должен равняться нулю, а отсюда в силу леммы 2 [71] мы получаем для искомой функции $u\,(x,\ y)$, дающей экстремум функционалу (32), следующее уравнение Остроградского:

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} = 0, \tag{34}$$

или, в раскрытом виде,

$$F_{u_x u_x} u_{xx} + 2F_{u_x u_y} u_{xy} + F_{u_y u_y} u_{yy} + F_{u_x u} u_x +$$
$$+ F_{u_y u} u_y + F_{x u_x} + F_{y u_y} - F_u = 0. \tag{35}$$

Мы получили уравнение с частными производными второго порядка, которое должно быть удовлетворено внутри области. Предельным условием, как мы уже говорили выше, является задание u на контуре l.

В случае кратного интеграла, зависящего от нескольких функций, мы будем искать систему таких уравнений. В случае тройного интеграла и функции $u\,(x,\ y,\ z)$, зависящей от трех независимых переменных, получится уравнение следующего вида:

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} - \frac{\partial}{\partial z} F_{u_z} = 0. \tag{36}$$

Если под знак интеграла входят производные функции $u(x, y)$ до порядка n, то уравнение Остроградского будет иметь вид

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{u_{xx}} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{u_{xy}} + \\ + \frac{\partial^2}{\partial y^2} F_{u_{yy}} - \ldots + (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial y^n} F_{u_{yy}\ldots y} = 0. \qquad (37)$$

Во всех предыдущих рассуждениях мы, как всегда, считаем непрерывными все функции, входящие в формулы. Кроме того, считается, что возможно применение при выводе формулы (33) преобразования двойного интеграла в криволинейный, что связано с поведением частных производных u_x и u_y в окрестности контура l области B. Мы еще вернемся с более общих точек зрения к вопросу об экстремуме кратных интегралов при заданных предельных условиях.

75. Замечания по поводу уравнений Эйлера и Остроградского. Рассмотрим сначала уравнение Эйлера (14) в простейшем случае. Положим, что функция F не содержит y. Уравнение принимает вид

$$\frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

и имеет очевидный первый интеграл $F_{y'} = C$. Если F не содержит x, то нетрудно проверить, что имеется первый интеграл:

$$F - y' F_{y'} = C. \qquad (38)$$

Действительно,

$$\frac{d}{dx}(F - y'F_{y'}) = F_y y' + F_{y'} y'' - F_{y'} y'' - F_{y'y} y'^2 - F_{y'y'} y' y'' = \\ = -y'(F_{y'y'} y'' + F_{y'y} y' - F_y).$$

Поскольку F не содержит x, множитель при $-y'$ является левой частью уравнения Эйлера и, следовательно, в силу этого уравнения

$$\frac{d}{dx}(F - y'F_{y'}) = 0,$$

т. е. мы имеем действительно интеграл (38).

Если F не содержит y', то уравнение Эйлера (14) будет

$$F_y(x, y) = 0,$$

т. е. мы имеем не дифференциальное, а конечное уравнение. Оно даст нам одну или несколько линий, а не семейство, зависящее от двух параметров, как это имело место в случае дифференциального уравнения, и мы не сможем, вообще говоря, удовлетворить предельным условиям.

Отметим теперь те случаи, когда уравнение Эйлера обращается в тождество. Положим, что $F = A(x, y) + B(x, y)y'$, причем имеет место тождество

$$\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} = 0. \tag{39}$$

Нетрудно проверить, что при этом левая часть уравнения (14) будет тождественно равна нулю, а интеграл (10) может быть записан в таком виде:

$$J = \int_l A\,dx + B\,dy, \tag{40}$$

причем в силу (39) он не зависит от пути, т. е. имеет одно и то же значение при любом выборе кривой l, соединяющей точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1), что и обуславливает тот факт, что уравнение Эйлера обращается в тождество. Нетрудно видеть, что в данном случае мы можем написать

$$F(x, y, y') = \frac{d}{dx} G(x, y),$$

где $G(x, y)$ определяется как интеграл (40) с переменным верхним пределом.

Совершенно так же, если подынтегральная функция в интеграле (26) будет полной производной по x от некоторой функции, зависящей от $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$,

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx} G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

то уравнение Эйлера (29) превратится в тождество.

Рассмотрим теперь функционал (32) и положим, что подынтегральная функция имеет вид

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}, \tag{41}$$

где A и B — некоторые функции от (x, y, u). Непосредственной подстановкой можно проверить, что при этом уравнение Остроградского превращается в тождество. По сути дела, это происходит от того, что в силу формулы Римана двойной интеграл от выражения (41) равен интегралу по контуру:

$$\int_l (A\,dy - B\,dx)$$

и, таким образом, значение этого двойного интеграла вполне определяется теми значениями, которые принимает функция u на контуре l области B. Если фиксировать значение u на контуре l, то двойной интеграл по области B будет иметь одно и то же значение при любом выборе функции u.

Выражения вида (41) можно назвать выражениями типа расходимости. Заметим, что если мы к подынтегральной функции какого-либо функционала (32) добавим выражение типа расходимости, то, очевидно, это вовсе не повлияет на уравнение Остроградского, т. е. новый функционал будет иметь то же самое уравнение Остроградского, что и прежде. Это непосредственно вытекает из того, что левая часть уравнения (34) есть линейная однородная форма от F и ее частных производных.

Выше мы видели, что если в интеграле (32) подынтегральное выражение есть выражение типа расходимости, то уравнение Остроградского обращается в тождество. Можно доказать и обратное утверждение.

Если подынтегральная функция F содержит частные производные выше первого порядка, то, как и выше, условие (41) является необходимым и достаточным для того, чтобы уравнение Остроградского (37) превращалось в тождество. Но при этом A и B могут содержать частные производные того же порядка, что и F. Так, например,

$$F = u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = (u_x u_{yy})_x - (u_x u_{xy})_y,$$

и нетрудно проверить, что при этом уравнение (37) превращается в тождество.

76. Примеры. 1. Рассмотрим функционал (2_1), полагая $v(x, y) = \sqrt{y}$:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\, dx. \tag{42}$$

К такому функционалу приводит так называемая задача о брахистохроне: среди линий, соединяющих две данные точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1), найти ту, двигаясь по которой, свободно пущенная материальная точка пройдет весь путь в кратчайшее время. При этом считается, что ось y направлена вертикально вниз, т. е. по направлению действия силы тяжести. В функционале (42) подынтегральная функция не содержит x, и мы можем сразу написать первый интеграл уравнения Эйлера:

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{C_1}},$$

или

$$y'^2 = \frac{C_1 - y}{y}. \tag{43}$$

Полагая

$$y = \frac{C_1}{2}(1 - \cos u),$$

откуда

$$y' = \frac{C_1}{2} u' \sin u,$$

после подстановки в (43) и упрощения найдем

$$\frac{C_1}{2}(1-\cos u)\,du=\pm\,dx,$$

и, следовательно,

$$x=\pm\,\frac{C_1}{2}\,(u-\sin u)+C_2;\qquad y=\frac{C_1}{2}\,(1-\cos u).$$

Отсюда видно, что экстремали функционала (42) суть циклоиды. Постоянные C_1 и C_2 определяются заданием начальной и конечной точек. Если одна из этих точек — начало координат, то надо положить $C_2=0$, и начало координат получается при значении параметра u, равном нулю. Отметим при этом тот факт, что рассмотренная задача обладает некоторой особенностью, а именно, при $u=0$, как нетрудно проверить, $y'=\dfrac{dy}{dx}$ обращается в бесконечность, и знаменатель в подынтегральной функции интеграла (42) обращается в нуль. Если в этом интеграле перейти к переменной u, то особенность при $u=0$ исчезает.

2. Пусть $(u,\ v)$ — координатные параметры, определяющие положение точки на некоторой поверхности, и

$$ds^2=E\,(u,\ v)\,du^2+2F\,(u,\ v)\,du\,dv+G\,(u,\ v)\,dv^2$$

— квадрат элемента длины линии на этой поверхности [II; 142].

Геодезическими линиями на поверхности называются линии, которые определяются из необходимого условия минимума интеграла

$$\int_{u_0}^{u_1}\sqrt{E+2Fv'+Gv'^2}\,du, \tag{44}$$

выражающего длину кривой, причем вдоль кривой мы считаем v функцией от u. Уравнение Эйлера будет иметь вид

$$\frac{1}{2}\,\frac{E_v+2F_vv'+G_vv'^2}{\sqrt{E+2Fv'+Gv'^2}}-\frac{d}{du}\,\frac{F+Gv'}{\sqrt{E+2Fv'+Gv'^2}}=0.$$

Рассмотрим сферу с центром в начале и радиусом единица:

$$x=\sin\theta\cos\varphi;\quad y=\sin\theta\sin\varphi;\quad z=\cos\theta.$$

При этом

$$ds^2=d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2,$$

и интеграл (44) будет

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1}\sqrt{1+\sin^2\theta\varphi'^2}\,d\theta,$$

где φ' — производная от φ по θ. Подынтегральная функция не содержит φ и, следовательно, мы имеем следующий интеграл:

$$\frac{\sin^2\theta\varphi'}{\sqrt{1+\sin^2\theta\varphi'^2}}=C_1.$$

Положив $C_1=0$, получим очевидное решение $\varphi=\text{const}$. Иначе говоря, геодезическими линиями будут все меридианы сферы, т. е. все большие круги, проходящие через полюсы сфер, в которых $\theta=0$ и π. Ввиду произвольности выбора полюса, очевидно, что все большие круги сферы будут ее геодезическими линиями.

3. Рассмотрим задачу геометрической оптики в пространстве:

$$J=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{v(y,\ z)}\,dx=\int_{x_0}^{x_1}n(y,\ z)\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx \tag{45}$$

для того случая, когда скорость v или показатель преломления $n=v^{-1}$ не зависят от x.

Если для интеграла (45) мы напишем уравнения Эйлера и решим их относительно y'' и z'', то получим уравнения

$$ny''=n_y(1+y'^2+z'^2);\quad nz''=n_z(1+y'^2+z'^2), \tag{46}$$

и мы имеем, как нетрудно проверить, первый интеграл:

$$n=C\sqrt{1+y'^2+z'^2}. \tag{47}$$

Если n не содержит и переменной y, то первое из уравнений (46) дает $y''=0$, т. е. $y=C_1x+C_2$, и, следовательно, всякая экстремаль есть плоская кривая, лежащая в плоскости, параллельной оси z. Если положить $v=\sqrt{z}$, то получим задачу о брахистохроне в пространстве, причем ось z имеет направление действия силы тяжести.

Положим теперь $n=z^{-1}$, причем мы будем рассматривать только полупространство, для точек которого z имеет положительное значение. Подставляя в формулу (47) $n=z^{-1}$ и $y=C_1x+C_2$, получим для функции z уравнение первого порядка с разделяющимися переменными:

$$\frac{Cz\,dz}{\sqrt{1-(1+C_1^2)\,C^2z^2}}=dx,$$

откуда

$$(x-C_3)^2+C_1^2(x-C_3)^2+z^2=\frac{1}{(1+C_1^2)\,C^2}.$$

Вводя вместо C новую произвольную постоянную, $C_4^2=\dfrac{1}{(1+C_1^2)\,C^2}$, и вместо C_2 — постоянную $C_2'=C_2+C_1C_3$ и заменяя, в силу $y=C_1x+C_2$,

$$C_1^2=\frac{(y-C_2')^2}{(x-C_3)^2},$$

можем переписать предыдущую формулу в виде

$$(x-C_3)^2+(y-C_2')^2+z^2=C_4^2. \tag{48}$$

Таким образом, для интеграла

$$J=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{z}\,dx$$

экстремалями будут полуокружности, являющиеся пересечением сфер (48), имеющих центр в плоскости $z=0$, с плоскостями $y=C_1x+C_2$, перпендикулярными к плоскости $z=0$.

Можно дать полученному результату интересное геометрическое толкование. Если в полупространстве $z>0$ мы определим элемент длины, т. е. метрику, формулой

$$ds=\frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{z},$$

то интеграл (45) будет выражать длину кривой при принятой метрике. В силу наличия z в знаменателе под знаком интеграла длина кривой будет беспредельно увеличиваться при приближении этой кривой к плоскости $z=0$, т. е. эта плоскость будет как бы бесконечно далекой плоскостью для геометрии с построенной метрикой.

Упомянутые выше полуокружности будут играть роль прямых в этой геометрии. Кроме этих полуокружностей, будем называть прямыми в этой геометрии полупрямые, перпендикулярные к плоскости $z=0$. Эти полупрямые являются вырождением упомянутых полуокружностей. Плоскостями назовем полусферы с центром в плоскости $z=0$ или полуплоскости, перпендикулярные к плоскости $z=0$. При таких определениях для точек, прямых и плоскостей этой новой геометрии будут выполнены, как нетрудно проверить, все аксиомы обычной евклидовой геометрии, кроме аксиомы о параллельных прямых, т. е. мы имеем, таким образом, в полупространстве $z>0$ просто осуществление геометрии Лобачевского. Отметим, что в случае прямой, перпендикулярной к плоскости $z=0$, мы не можем принимать x за независимую переменную. Для того чтобы не связывать себя выбором независимого переменного, мы должны искать уравнение экстремали в параметрической форме: $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. При этом указанный выше интеграл запишется в виде

$$J=\int_{t_0}^{t_1}\frac{\sqrt{\dot{x}_t^2+\dot{y}_t^2+\dot{z}_t^2}}{z}\,dt.$$

В дальнейшем мы рассмотрим основную задачу вариационного исчисления в случае параметрического задания линии. При таком параметрическом задании указанные выше полупрямые будут экстремалями интеграла J.

В плоском случае мы будем иметь интеграл вида

$$J=\int_{M_0}^{M_1}\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y}=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\,dx,$$

и экстремалями будут окружности, имеющие центр на оси x, или прямые, перпендикулярные к этой оси. В полуплоскости $y>0$ упомянутые полуокружности и полупрямые будут играть роль прямых, и мы будем иметь в упомянутой полуплоскости осуществление плоской геометрии Лобачевского. В частности, через всякие две точки M_0 и M_1 упомянутой полуплоскости будет проходить одна и только одна экстремаль.

4. Среди линий, соединяющих точки M_0 и M_1 плоскости XY, требуется найти ту, которая при вращении вокруг оси Ox образует поверхность с наименьшей площадью. Площадь поверхности вращения выражается интегралом [I; 106]:

$$S=2\pi\int_{M_0}^{M_1}y\sqrt{dx^2+dy^2}=2\pi\int_{x_0}^{x_1}\cdot y\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

и, откидывая постоянный множитель 2π, мы придем к задаче об экстремуме интеграла:

$$J=\int_{x_0}^{x_1}y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

В данном случае подынтегральная функция не содержит x, и мы можем написать интеграл (38) уравнения Эйлера:

$$y\sqrt{1+y'^2}-\frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}}=C_1,\quad\text{откуда}\quad\frac{C_1dy}{\sqrt{y^2-C_1^2}}=dx.$$

Интегрируя, найдем

$$x-C_2=C_1 \lg\left(y+\sqrt{y^2-C_1^2}\right)-C_1 \lg C_1$$

или

$$y+\sqrt{y^2-C_1^2}=C_1 e^{\frac{x-C_2}{C_1}},$$

и окончательно:

$$y=\frac{C_1}{2}\left(e^{\frac{x-C_2}{C_1}}+e^{-\frac{x-C_2}{C_1}}\right)=C_1 \operatorname{ch}\frac{x-C_2}{C_1}.$$

Таким образом, экстремали суть цепные линии, имеющие ось симметрии, параллельную оси OY [I; 178]. Можно показать, что в рассматриваемой задаче через две данные точки M_0 и M_1 не всегда проходит одна и только одна экстремаль. В зависимости от положения этих точек таких экстремалей может быть две, одна или ни одной.

Как мы видели выше, геодезическими линиями на сфере являются большие круги этой сферы. Если точки M_0 и M_1 сферы не являются концами одного и того же диаметра сферы, то их можно соединить двумя дугами одного и только одного большого круга. Если же точки M_0 и M_1 лежат на концах одного и того же диаметра, то их можно соединить бесчисленным множеством полуокружностей больших кругов сферы.

Уравнение Эйлера является лишь необходимым условием экстремума соответствующего функционала, так что мы не можем утверждать, что найденная экстремаль дает действительно экстремум соответствующему функционалу. В дальнейшем мы укажем и некоторые достаточные условия. В случае геодезических линий на сфере минимум расстояния будет давать меньшая из двух дуг большого круга, соединяющих точки M_0 и M_1. Никакая линия поверхности, соединяющая точки M_0 и M_1, не может давать наибольшего расстояния между точками M_0 и M_1. Очевидно, можно провести на поверхности сколь угодно близкую линию, соединяющую M_0 и M_1, с длиной большей, чем длина взятой линии.

5. Рассмотрим задачу на экстремум интеграла

$$J=\iint\limits_B \sqrt{1+u_x^2+u_y^2}\,dx\,dy.$$

Как мы видели [70], к этой задаче приводится задача отыскания поверхности с наименьшей площадью, натянутой на данный контур. Если мы натянем на заданный контур какую-нибудь поверхность, то совершенно очевидно, что мы можем построить сколь угодно близкую к ней поверхность, натянутую на тот же контур, с большей площадью, и, следовательно, в данном случае экстремум интеграла может сводиться только к его наименьшему значению. Подставляя подынтегральное выражение в уравнение (34), мы получим следующее дифференциальное уравнение второго порядка для искомых минимальных поверхностей:

$$r\,(1+q^2)-2spq+t\,(1+p^2)=0 \tag{49}$$

$$(p=u_x;\ q=u_y;\ r=u_{xx},\ s=u_{xy},\ t=u_{yy}).$$

Напомним, что средняя кривизна поверхности определяется формулой [II; 146]:

$$H=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=\frac{EN-2FM+GL}{2\,(EG-F^2)}, \tag{50}$$

где $E, F, \ldots, M, N$ суть коэффициенты первой и второй форм Гаусса. В случае явного задания уравнения поверхности мы имеем [II; 143]:

$$E=1+p^2;\ F=pq;\ G=1+q^2;$$

$$L=\frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}};\quad M=\frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}};\quad N=\frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

и уравнение (49) выражает тот же факт, что во всех точках минимальной поверхности средняя кривизна должна быть равна нулю. Этот результат был нами получен и раньше при помощи вариации элемента площади поверхности [II; 151].

Уравнение (49) есть уравнение в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными, аналогичное, в известном отношении, уравнению Лапласа. Покажем, что при помощи аналитических функций комплексного переменного мы можем получить решения уравнения (49), совершенно так же, как раньше мы получали решения уравнения Лапласа также при помощи аналитических функций комплексного переменного [III_2; 2]. Из формулы (50) непосредственно следует, что мы получим $H=0$, если для поверхности выполнены условия: $E=G=M=0$. Пусть $\mathbf{r}$ — радиус-вектор поверхности, имеющий составляющие (x, y, z). Предыдущие условия могут быть записаны в виде [II; 143]:

$$\mathbf{r}_u'^2=\mathbf{r}_v'^2=\mathbf{r}_{uv}''\cdot\mathbf{m}=0,$$

где $\mathbf{m}$ — единичный вектор нормали к поверхности. Эти условия будут наверное удовлетворены, если мы подчиним $\mathbf{r}$ следующим условиям:

$$\mathbf{r}_u'^2=0;\ \mathbf{r}_v'^2=0;\ \mathbf{r}_{uv}''=0.$$

Первые два из написанных равенств суть скалярные равенства, а третье — векторное. В развернутой форме они могут быть записаны следующим образом.

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2=0;\quad \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2=0; \tag{51}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}=0. \tag{52}$$

Равенство (51), очевидно, не выполняется, если производные от координат по u и v имеют вещественные значения. Допустим, что координаты суть аналитические функции комплексных переменных u и v. Равенства (52) показывают, что (x, y, z) должны представляться в виде суммы функции только от u и функции только от v [II; 177]:

$$x=\varphi_1(u)+\psi_1(v);\ y=\varphi_2(u)+\psi_2(v);\ z=\varphi_3(u)+\psi_3(v), \tag{53}$$

причем в силу (51) мы должны иметь

$$\sum_{s=1}^{3}\varphi_s'^2(u)=0;\quad \sum_{s=1}^{3}\psi_s'^2(v)=0.$$

Положим $u=\rho+\sigma i$. Для того чтобы иметь вещественную поверхность, мы допустим, что $\psi_s(v)$ имеет значения, комплексно сопряженные с $\varphi_s(u)$. Точнее говоря, мы будем считать, что $v=\rho-\sigma i$ и функции $\psi_s(v)$ имеют комплексно сопряженные значения по отношению к $\varphi_s(u)$ в точках, симметричных относительно вещественной оси. Формулы (53) при этом примут вид

$$x=2\operatorname{Re}\varphi_1(u);\quad y=2\operatorname{Re}\varphi_2(u);\quad z=2\operatorname{Re}\varphi_3(u),$$

где Re — знак вещественной части. Включая множитель 2 под знак вещественной части и функциональной зависимости, мы можем переписать наши формулы в виде

$$x = \operatorname{Re} \varphi_1(u); \quad y = \operatorname{Re} \varphi_2(u); \quad z = \operatorname{Re} \varphi_3(u), \tag{54}$$

где аналитические функции $\varphi_s(u)$ должны подчиняться условию:

$$\sum_{s=1}^{3} \varphi_s'^2(u) = 0. \tag{55}$$

В параметрическом представлении (54) роль вещественных параметров играют ρ и σ, т. е. вещественная и мнимая части комплексного переменного u. Мы можем принять за независимую комплексную переменную одну из функций $\varphi_s(u)$. Например, можем положить $t = \varphi_3(u)$ и считать, что первые две функции суть функции комплексного переменного t. Они должны быть связаны соотношением:

$$\varphi_1'^2(t) + \varphi_2'^2(t) + 1 = 0.$$

Мы видим, таким образом, что совокупность полученных нами минимальных поверхностей зависит от одной аналитической функции. Так, например, мы можем написать

$$x = \operatorname{Re} \varphi_1(t); \quad y = \operatorname{Re} i \int \sqrt{1 + \varphi_1'^2(t)}\, dt; \quad z = \operatorname{Re} t,$$

где $\varphi_1(t)$ — произвольная аналитическая функция комплексного переменного t.

Можно пользоваться более симметричной записью, а именно:

$$\left.\begin{aligned} x &= \operatorname{Re} i \left[f(u) - u f'(u) - \frac{1-u^2}{2} f''(u) \right], \\ y &= \operatorname{Re} \left[f(u) - u f'(u) + \frac{1+u^2}{2} f''(u) \right], \\ z &= \operatorname{Re} i \left[f'(u) - u f''(u) \right], \end{aligned}\right\}$$

где $f(u)$ — произвольная аналитическая функция. Нетрудно проверить, что функции, стоящие под знаком вещественной части, действительно удовлетворяют соотношению (55).

6. Рассмотрим функционал

$$D(u) = \iint_B (u_x^2 + u_y^2)\, dx\, dy, \tag{56}$$

где B — некоторая ограниченная область плоскости (x, y). В силу (34) уравнение Остроградского для этого функционала имеет вид

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

т. е. это есть уравнение Лапласа. Мы вправе ожидать, что гармоническая функция, имеющая заданные предельные значения на контуре l области B, дает функционалу (56) наименьшее значение, по сравнению со всеми другими функциями, непрерывными в замкнутой области B, имеющими внутри B непрерывные частные производные первого порядка и принимающими на l те же предельные значения, что и упомянутая выше гармоническая функция. Но мы не имеем строгого доказательства этого утверждения, поскольку уравнение Остроградского дает только необходимое условие экстремума и, кроме того, надо помнить, что при выводе этого уравнения мы предполагали существование непрерывных вторых производных у искомой функции. Будем считать, что B есть круг с центром в начале координат и радиусом единица.

Мы знаем, что при любых заданных непрерывных значениях на контуре существует единственная гармоническая функция v, решающая задачу Дирихле при заданных контурных значениях. Но мы ничего не можем утверждать о поведении первых производных этой функции при приближении к контуру, и, следовательно, не можем утверждать, что для построенной гармонической функции функционал (56) имеет конечное значение. Действительно, оказывается, что можно задать такие непрерывные предельные значения на контуре, что функционал (56) для построенной гармонической функции будет равен $(+\infty)$, т. е., точнее говоря, если мы возьмем интеграл (56) по концентрическому кругу B_r радиуса r, меньшего единицы, то при $r \to 1$ этот интеграл будет беспредельно возрастать. Можно показать, что при этом функционал (56) будет равен $(+\infty)$ и для любой функции с непрерывными производными первого порядка, имеющей те же предельные значения.

Вообще, имеет место следующая теорема. *если при заданных предельных значениях на контуре l функционал* (56) *имеет конечное значение для некоторой функции u, то он имеет конечное значение и для гармонической функции v с теми же предельными значениями, причем $D(v) \leqslant D(u)$ и знак равенства имеет место только в том случае, если u совпадает с v.*

Доказательство этого предложения будет дано ниже, а сейчас докажем эту теорему при дополнительном предположении, что гармоническая функция v имеет внутри круга ограниченные частные производные первого порядка. При этом интеграл (56) имеет для этой функции, очевидно, конечное значение. Функцию u мы можем представить в виде $u = v + \varphi$, где φ обращается в нуль на контуре области, а внутри имеет непрерывные производные первого порядка. Функционал (56) для этой функции может быть записан в виде

$$D(v+\varphi) = D(v) + D(\varphi) + 2\iint\limits_B (v_x\varphi_x + v_y\varphi_y)\,dx\,dy. \tag{57}$$

Применим формулу Грина к кругу B_r с радиусом $r < 1$:

$$\iint\limits_{B_r} (v_x\varphi_x + v_y\varphi_y)\,dx\,dy = -\iint\limits_{B_r} \varphi\Delta v\,dx\,dy + \int\limits_{C_r} \varphi\frac{\partial v}{\partial n}\,ds.$$

Поскольку v есть гармоническая функция, двойной интеграл в правой части обращается в нуль, а в криволинейном интеграле, взятом по окружности C_r радиуса $r < 1$, при стремлении r к единице, φ стремится к нулю равномерно по отношению к полярному углу, а $\partial v/\partial n$ остается ограниченной, и в пределе этот интеграл, очевидно, обращается в нуль. Таким образом, в пределе и интеграл, стоящий в левой части, обращается в нуль, и формула (57) может быть написана в виде

$$D(v+\varphi) = D(v) + D(\varphi).$$

Но мы имеем, очевидно, $D(\varphi) \geqslant 0$, причем знак равенства может иметь место только в том случае, если φ обращается тождественно в нуль в круге B. Таким образом, мы действительно имеем $D(v) \leqslant D(u)$, причем знак равенства может иметь место только в том случае, если u совпадает с v.

77. Изопериметрические задачи. Напомним задачу об относительных экстремумах в случае функций нескольких переменных [I; 167]. Совершенно аналогично и в вариационном исчислении ставятся задачи об экстремуме некоторого функционала, при условии, что искомая функция должна удовлетворять некоторым дополнительным соотношениям. В частности, поставим следующую

задачу: среди всех кривых $y(x)$, для которых интеграл

$$J_1 = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')\,dx = a \tag{58}$$

имеет заданное значение a, определить ту, которая дает экстремум интегралу

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx. \tag{59}$$

Задача эта носит обычно название *изопериметрической задачи*. Это название происходит от основной из задач указанного типа, а именно, от задачи нахождения замкнутой кривой, которая при заданной длине a ограничивает наибольшую площадь (окружность). Поставленная задача приводится к обычной задаче вариационного исчисления без дополнительного условия при помощи следующей теоремы:

Теорема Эйлера. *Если кривая $y(x)$ дает экстремум интегралу* (59) *при условии* (58) *и при обычных предельных условиях* (11), *и если $y(x)$ не является экстремалью интеграла* (58), *то существует такая постоянная λ, что кривая $y(x)$ есть экстремаль интеграла*

$$\int_{x_0}^{x_1} H(x, y, y')\,dx, \quad \text{где} \quad H = F + \lambda G. \tag{60}$$

Введем в рассмотрение функцию, близкую к $y(x)$:

$$y(x) + \alpha_1\eta_1(x) + \alpha_2\eta_2(x). \tag{61}$$

где α_1 и α_2 — малые параметры, а $\eta_1(x)$ и $\eta_2(x)$ — функции с обычными свойствами, равные нулю на концах промежутка интегрирования. Подставим эту функцию в интеграл (58):

$$J_1(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y + \alpha_1\eta_1 + \alpha_2\eta_2, y' + \alpha_1\eta_1' + \alpha_2\eta_2)\,dx.$$

Применяя обычные вычисления, можно написать:

$$\left.\frac{\partial J_1}{\partial \alpha_i}\right|_{\alpha_1=\alpha_2=0} = \int_{x_0}^{x_1} \left(G_y - \frac{d}{dx} G_{y'}\right)\eta_i\,dx \quad (i = 1, 2).$$

Раз $y(x)$ не есть экстремаль интеграла (58), то разность $G_y - \frac{d}{dx} G_{y'}$ не есть тождественный нуль в промежутке (x_0, x_1) и,

очевидно, можно выбрать функцию $\eta_2(x)$ так, чтобы интеграл

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(G_y-\frac{d}{dx}G_{y'}\right)\eta_2\,dx$$

был отличным от нуля.

Обратимся к уравнению $J_1(\alpha_1, \alpha_2)=a$ Оно удовлетворено при $\alpha_1=\alpha_2=0$, поскольку $y(x)$ есть, по предположению, решение нашей задачи, и в силу сделанного выбора η_2 частная производная от $J_1(\alpha_1, \alpha_2)$ по α_2 отлична от нуля при $\alpha_1=\alpha_2=0$. Таким образом, по теореме о неявных функциях [I; 159] уравнение $J_1(\alpha_1, \alpha_2)=a$ определяет α_2 как функцию от α_1 при всех значениях α_1, достаточно близких к нулю, причем производная от α_2 по α_1 при $\alpha_1=0$ определяется, очевидно, следующей формулой:

$$\left.\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1}\right|_{\alpha_1=0}=-\int_{x_0}^{x_1}\left(G_y-\frac{d}{dx}G_{y'}\right)\eta_1\,dx:\int_{x_0}^{x_1}\left(G_y-\frac{d}{dx}G_{y'}\right)\eta_2\,dx=k. \quad (62)$$

Подставим функцию (61) в интеграл (59) и продифференцируем полученный интеграл по α_1, помня, что α_2 есть функция от α_1:

$$\left.\frac{dJ}{d\alpha_1}\right|_{\alpha_1=0}=\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\eta_1\,dx+k\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\eta_2\,dx.$$

Пользуясь выражением (62) для постоянной k, можем написать:

$$\left.\frac{dJ}{d\alpha_1}\right|_{\alpha_1=0}=\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\eta_1\,dx+\lambda\int_{x_0}^{x_1}\left(G_y-\frac{d}{dx}G_{y'}\right)\eta_1\,dx,$$

где

$$\lambda=-\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\eta_2\,dx:\int_{x_0}^{x_1}\left(G_y-\frac{d}{dx}G_{y'}\right)\eta_2\,dx,$$

или

$$\left.\frac{dJ}{d\alpha_1}\right|_{\alpha_1=0}=\int_{x_0}^{x_1}\left[\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)+\lambda\left(G_y-\frac{d}{dx}G_{y'}\right)\right]\eta_1\,dx.$$

Раз $y(x)$ дает экстремум интеграла (59) при условии (58), то мы должны иметь $\left.\frac{dJ}{d\alpha_1}\right|_{\alpha_1=0}=0$, откуда, принимая во внимание произвольность $\eta_1(x)$ и основную лемму, получим, полагая $F+\lambda G=H$, уравнение

$$H_y-\frac{d}{dx}H_{y'}=0,$$

которое является уравнением Эйлера для интеграла (60). Общий интеграл написанного уравнения будет содержать три произвольные постоянные, а именно: две постоянные интегрирования и постоянную λ. Эти постоянные должны определяться из двух предельных условий и условия (58).

Сделаем одно замечание по поводу полученного результата. При умножении подынтегральной функции интеграла (59) на произвольную постоянную экстремали этого интеграла останутся, очевидно, прежними, и мы можем вследствие этого записать функцию H в симметричной форме $H=\lambda_1 F+\lambda_2 G$, где λ_1 и λ_2 — постоянные. Поскольку F и G входят в выражение H симметрично, мы можем утверждать, что при отыскании экстремума интеграла (59) при условии, что интеграл (58) сохраняет постоянное значение, мы получим те же самые экстремали, что и при разыскании экстремума интеграла (58), при условии, что интеграл (59) сохраняет постоянное значение. В этом состоит так называемый *принцип взаимности* в его простейшей форме. Мы считаем при этом, что постоянные λ_1 и λ_2 отличны от нуля, т. е. мы исключаем те кривые, которые являются экстремалями интеграла (58) или интеграла (59).

На примерах выясним смысл требования в теореме Эйлера, чтобы $y(x)$ не была экстремалью интеграла (58). В более общем случае изопериметрическая задача имеет следующий вид: найти функции $y_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, дающие экстремум интегралу

$$J=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_1', \ldots, y_n, y_n')\,dx,$$

при наличии связей

$$\int_{x_0}^{x_1} G_s(x, y, y_1', \ldots, y_n, y_n')\,dx=a_s \qquad (s=1, 2, \ldots, p)$$

и предельных условий

$$y_i(x_0)=y_i^{(0)};\ y_i(x_1)=y_i^{(1)} \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

При наличии некоторого дополнительного условия, обеспечивающего, как и выше, применимость теоремы о неявных функциях, мы можем утверждать, что функции $y_i(x)$, дающие решение поставленной задачи, должны быть экстремалями для интеграла

$$\int_{x_0}^{x_1} H(x, y_1, y_1', \ldots, y_n, y_n')\,dx,$$

где $H = F + \sum_{s=1}^{p} \lambda_s G_s$ и λ_s — постоянные. Доказательство этого утверждения аналогично предыдущему. Заметим, что число связей p может и превышать число искомых функций n.

78. Условный экстремум. Будем рассматривать теперь такие задачи, в которых дополнительные условия имеют вид, отличный от (58). Начнем с простейшей задачи. Найти две функции $y(x)$ и $z(x)$, дающие экстремум интегралу

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', z, z')\, dx \tag{63}$$

и удовлетворяющие уравнению

$$G(x, y, z) = 0 \tag{64}$$

и предельным условиям закрепления на концах:

$$y(x_0) = y_0; \quad z(x_0) = z_0,$$
$$y(x_1) = y_1; \quad z(x_1) = z_1,$$

причем координаты (x_0, y_0, z_0) и (x_1, y_1, z_1) должны, очевидно, удовлетворять уравнению (64).

Геометрически дело сводится к нахождению линий, лежащих на поверхности (64) и дающих экстремум интегралу (63). Можно было бы из уравнения (64) определить z как функцию от x и y и вставить эту функцию в интеграл (63); тогда мы пришли бы к обычной задаче вариационного исчисления без всяких дополнительных условий с одной искомой функцией $y(x)$. Используем это замечание для вывода того уравнения, которому должны удовлетворять функции $y(x)$ и $z(x)$, дающие решения поставленной задачи. Будем считать, что вдоль этого решения частная производная G_z отлична от нуля. При этом уравнение (64) будет разрешимо относительно z, и мы получим $z = \varphi(x, y)$. После подстановки этого выражения в интеграл (63) он примет вид

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', \varphi, \varphi_x + \varphi_y y')\, dx. \tag{65}$$

Плоская кривая l, являющаяся проекцией нашей пространственной кривой на плоскость (x, y), должна давать экстремум интегралу (65) при закрепленных концах и, следовательно, она должна удовлетворять уравнению Эйлера, написанному для этого интеграла. Произведем предварительные вычисления для составления этого уравнения. Обозначим через $[F]$ подынтегральную функцию в интеграле (65). Эта функция зависит от (x, y, y'). Через F без квадратных скобок мы обозначаем прежнюю

функцию $F(x, y, y', z, z')$, так что $[F]$ получается из F в результате подстановки $z=\varphi(x, y)$ и $z'=\varphi_x+\varphi_y y'$. Мы имеем

$$\frac{\partial[F]}{\partial y}=F_y+F_z\varphi_y+F_{z'}(\varphi_{xy}+\varphi_{yy}y'); \quad \frac{\partial[F]}{\partial y'}=F_{y'}+F_{z'}\varphi_y;$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial[F]}{\partial y'}=\frac{d}{dx}F_{y'}+\varphi_y\frac{d}{dx}F_{z'}+F_{z'}(\varphi_{xy}+\varphi_{yy}y').$$

Уравнение Эйлера для интеграла (65):

$$\frac{\partial[F]}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial[F]}{\partial y'}=0,$$

в силу написанных выше формул, приведется к виду

$$F_y+\varphi_y\left(F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}\right)-\frac{d}{dx}F_{y'}=0.$$

Из уравнения (64) следует равенство

$$\varphi_y=-\frac{G_y}{G_z}.$$

Подставляя его в предыдущее равенство, получим

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}-G_y\frac{F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}}{G_z}=0.$$

Вдоль линии $y=y(x)$, $z=z(x)$, дающей, по условию, экстремум функционалу (63) при условии (64), дробь, входящая в последнее равенство, есть некоторая функция от x:

$$-\frac{F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}}{G_z}=\lambda(x),$$

и два последних равенства приводят к дифференциальным уравнениям для $y(x)$ и $z(x)$, не содержащим производной функции $\lambda(x)$:

$$\frac{d}{dx}F_{y'}-[F_y+\lambda(x)G_y]=0,$$

$$\frac{d}{dx}F_{z'}-[F_z+\lambda(x)G_z]=0.$$

Таковы необходимые условия на $y(x)$, $z(x)$ для того, чтобы они давали экстремум функционалу (63) при условии (64). Нетрудно видеть, что последние уравнения можно записать в виде

$$\frac{d}{dx}F^*_{y'}-F^*_y=0; \quad \frac{d}{dx}F^*_{z'}-F^*_z=0, \tag{66}$$

где

$$F^*=F+\lambda(x)G,$$

т. е. экстремали рассматриваемой задачи должны быть безусловными экстремалями интеграла с подынтегральной функцией F^*. Заметим, что в рассматриваемой задаче вместо постоянного множителя λ изопериметрической задачи мы имеем множитель $\lambda(x)$, зависящий от x. Исключив из (64) и (66) функции $\lambda(x)$ и z, мы получим уравнение второго порядка для $y(x)$. Две произвольные постоянные определятся из предельных условий для $y(x)$.

Связи (64), не содержащие производных от искомых функций, называются обычно голономными связями. Высказанное выше утверждение оказывается справедливым и для функционала (23), зависящего от нескольких функций, для случая неголономных связей вида:

$$G_s(x, y_1, y_1', \ldots, y_n, y_n) = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, p), \tag{67}$$

т. е. при некоторых дополнительных условиях функции y_i, дающие экстремум интегралу (23) при условиях (67), должны удовлетворять уравнениям:

$$\frac{d}{dx} F^*_{y_i} - F^*_{y_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{68}$$

где

$$F^* = F + \sum_{s=1}^{p} \lambda_s(x) G_s(x, y_1, y_1', \ldots, y_n, y_n'). \tag{69}$$

Система (68) обладает одним существенным отличием от аналогичной системы для случая голономных связей. Так как функции (67) в рассматриваемом случае содержат производные y_i', то функции $F^*_{y_i'}$ будут содержать $\lambda_s(x)$, и уравнения (68) будут содержать производные от $\lambda_s(x)$ по x. Окончательно уравнения (67) и (68) дадут систему $(n+p)$ дифференциальных уравнений с $(n+p)$ неизвестными функциями y_i и $\lambda_s(x)$ второго порядка относительно y_i и первого — относительно $\lambda_s(x)$.

Введем в рассмотрение функции $z_i(x)$, определенные равенствами:

$$z_i(x) = y_i'(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{70}$$

После такой замены уравнения (67) дадут p голономных связей для функций y_i и z_i, а (68) и (70) обращаются в систему $2n$ уравнений первого порядка с $(2n+p)$ функциями y_i, z_i и $\lambda_s(x)$. Решив (67) относительно каких-либо p из функций y_i и z_i и подставив их выражение в уравнения (68) и (70), получим $2n$ уравнений первого порядка для $2n$ из функций y_i, z_i, $\lambda_s(x)$. Общее решение этой системы будет содержать $2n$ произвольных постоянных, которые должны определяться из $2n$ граничных условий.

79. Примеры. 1. Среди всех кривых длины l, соединяющих две данные точки A и B, определить кривую, ограничивающую вместе с прямолинейным отрезком AB наибольшую площадь. Проведем ось X через точки A и B и пусть

x_0 и x_1 — абсциссы этих точек. Считаем, что для искомой кривой y есть однозначная функция от x в промежутке $[x_0, x_1]$. Дело сводится к отысканию наибольшего значения интеграла

$$\int_{x_0}^{x_1} y\,dx \tag{71}$$

при дополнительном условии:

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx = l. \tag{72}$$

Последний интеграл выражает длину линии $y(x)$ между точками $x=x_0$ и $x=x_1$. Его экстремалями будут, очевидно, прямые линии. Это можно непосредственно проверить, составляя уравнение Эйлера для этого интеграла. Если $l < x_1 - x_0$, то условию (72) не удовлетворяет ни одна линия. Если $l = x_1 - x_0$, то условию (72) удовлетворяет только прямолинейный отрезок AB. В обоих случаях поставленная задача не имеет смысла, и в дальнейшем мы будем считать $l > x_1 - x_0$. В рассматриваемом случае

$$F^* = y + \lambda\sqrt{1+y'^2},$$

причем эта функция не содержит x, а потому первый интеграл соответствующего уравнения Эйлера будет

$$F^* - y'F^*_{y'} = y + \lambda\sqrt{1+y'^2} - \frac{\lambda y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = b,$$

откуда

$$y' = \frac{\sqrt{\lambda^2-(y-b)^2}}{y-b},$$

или

$$\frac{(y-b)\,dy}{\sqrt{\lambda^2-(y-b)^2}} = dx;$$

интегрируя, получим

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = \lambda^2,$$

т. е. экстремалями будут окружности радиуса $|\lambda|$.

Пусть ω будет угол, под которым виден отрезок AB из центра окружности:

$$x_1 - x_0 = 2\lambda \sin\frac{\omega}{2} \quad \text{и} \quad l = \lambda\omega.$$

Для определения ω имеем уравнение:

$$\sin\frac{\omega}{2} : \frac{\omega}{2} = (x_1 - x_0) : l,$$

решение которого всегда возможно при указанном выше условии. Пользуясь принципом взаимности, мы можем высказать предложение: среди кривых, ограничивающих площадь заданной величины, дуга окружности имеет экстремальную (очевидно, наименьшую) длину. Заметим еще, что если $l > \frac{\pi}{2}(x_1 - x_0)$, то y не будет однозначной функцией от x.

Пользуясь полученным результатом, можно показать, что если замкнутая кривая среди кривых данной длины ограничивает наибольшую площадь, то эта кривая должна быть окружностью.

2. Требуется определить положение равновесия тяжелой однородной нити данной длины l с закрепленными концами, находящейся под действием силы тяжести. Считаем направление силы тяжести совпадающим с отрицательным направлением оси y. Положение равновесия определяется требованием, чтобы центр тяжести нити находился возможно ниже. Мы считаем очевидным, что всякая прямая, параллельная оси y, встречает нить не больше, чем в одной точке. Задача сводится к нахождению экстремума интеграла [ср. пример 4 из п° 76]:

$$\int_{x_0}^{x_1} y\,ds = \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

при дополнительном условии

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx = l \tag{73}$$

и граничных условиях: $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$. В данном случае

$$F^* = y\sqrt{1+y'^2} + \lambda\sqrt{1+y'^2},$$

и первый интеграл уравнения Эйлера будет:

$$\frac{y+\lambda}{\sqrt{1+y'^2}} = a \quad \text{или} \quad \frac{dy}{\sqrt{(y+\lambda)^2-a^2}} = \frac{dx}{a}.$$

Если положить

$$y+\lambda = a\,\mathrm{ch}\,z = a\,\frac{e^z+e^{-z}}{2},$$

то уравнение легко интегрируется и дает

$$y+\lambda = a\,\mathrm{ch}\left(\frac{x}{a}+b\right) = a\,\frac{e^{\frac{x}{a}+b}+e^{-\left(\frac{x}{a}+b\right)}}{2}, \qquad (a>0),$$

т. е. экстремалями задачи будут цепные линии. Постоянные a, b и λ должны определяться из граничных условий:

$$y_0+\lambda = a\,\mathrm{ch}\left(\frac{x_0}{a}+b\right); \qquad y_1+\lambda = a\,\mathrm{ch}\left(\frac{x_1}{a}+b\right)$$

и условия (73). Вычитая одно граничное условие из другого и преобразуя разность гиперболических косинусов в произведение, будем иметь

$$y_1-y_0 = 2a\,\mathrm{sh}\,\mu\,\mathrm{sh}\,\nu, \tag{74}$$

где

$$\mu = \frac{x_1+x_0}{2a}+b; \qquad \nu = \frac{x_1-x_0}{2a}.$$

После подстановки найденного значения y в условие (73) оно приводится к виду

$$a\left[\mathrm{sh}\left(\frac{x_1}{a}+b\right)-\mathrm{sh}\left(\frac{x_0}{a}+b\right)\right] = l,$$

или

$$2a\,\mathrm{ch}\,\mu\,\mathrm{sh}\,\nu = l. \tag{75}$$

В силу (74) получаем

$$\operatorname{th}\mu=\frac{y_1-y_0}{l}. \tag{76}$$

Число l, очевидно, должно удовлетворять неравенству:

$$l>\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}>|y_1-y_0|,$$

и уравнение (76) имеет единственный корень. Из (74) и (75) получаем

$$\sqrt{l^2-(y_1-y_0)^2}=2a\operatorname{sh}\nu,$$

или

$$\frac{\operatorname{sh}\nu}{\nu}=\frac{\sqrt{l^2-(y_1-y_0)^2}}{x_1-x_0}. \tag{77}$$

Но

$$\frac{\operatorname{sh}x}{x}=1+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\ldots$$

есть монотонно возрастающая от 1 до $(+\infty)$ функция при $0\leqslant x<\infty$, принимающая один и только один раз всякое значение, большее единицы, а потому уравнение (77) имеет единственный положительный корень. После того как найдены ν и μ, нахождение a, b и λ не представляет затруднений.

3. Рассмотрим упругий однородный стержень, прямолинейный в недеформированном состоянии. Как известно из теории упругости, его потенциальная энергия в деформированном состоянии пропорциональна интегралу, взятому вдоль стержня, от квадрата его кривизны. Положим, что стержень имеет длину l и заделан в точках (x_0, y_0) и (x_1, y_1). Примем за независимую переменную длину стержня s, отсчитываемую от точки (x_0, y_0), и обозначим через $\theta(s)$ угол, образованный касательной к стержню с осью x. Кривизна будет выражаться производной $\theta'(s)$, и интеграл, экстремум которого ищется, имеет вид

$$\int_0^l \theta'^2\,ds. \tag{78}$$

Как известно,

$$\frac{dx}{ds}=\cos\theta;\quad \frac{dy}{ds}=\sin\theta,$$

и мы имеем, следовательно, следующие два уравнения связи:

$$\int_0^l \cos\theta\,ds=x_1-x_0;\quad \int_0^l \sin\theta\,ds=y_1-y_0. \tag{79}$$

Кроме того, заделанность стержня в конечных его точках равносильна заданию функции $\theta(s)$ при $s=0$ и $s=l$:

$$\theta(0)=a;\quad \theta(l)=b. \tag{80}$$

В данном случае:

$$F^*=\theta'^2+\lambda_1\cos\theta+\lambda_2\sin\theta,$$

и эта функция не содержит независимой переменной s, так что мы имеем непосредственно следующий первый интеграл уравнения Эйлера:

$$\theta'^2=C+\lambda_1\cos\theta+\lambda_2\sin\theta.$$

Введем две новые постоянные:

$$h=C+\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2};\quad k^2=\frac{2\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}{C+\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}},$$

и вместо θ введем новую переменную φ:

$$\varphi=\frac{\theta-\theta_0}{2},$$

где мы положили $\theta_0=\operatorname{arctg}\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$. При таких обозначениях написанный выше первый интеграл уравнения Эйлера приводится к виду

$$\frac{d\varphi}{ds}=\frac{\sqrt{h}}{2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi},$$

откуда мы получаем выражение s через φ в виде эллиптического интеграла:

$$s=\frac{2}{\sqrt{h}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}+s_0.$$

Постоянные k, h, θ_0 и s_0 должны определяться из условий (79) и (80). Для нахождения декартовых координат точек стержня достаточно в соотношения

$$\frac{dx}{ds}=\cos\theta=\cos(2\varphi+\theta_0);\quad \frac{dy}{ds}=\sin\theta=\sin(2\varphi+\theta_0)$$

подставить вместо ds его выражение:

$$dx=\frac{2\cos(2\varphi+\theta_0)}{\sqrt{h}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi;\quad dy=\frac{2\sin(2\varphi+\theta_0)}{\sqrt{h}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi,$$

откуда сейчас же определяются x и y при помощи квадратур.

4. Рассмотрим задачу о нахождении геодезических линий на заданной поверхности:

$$G(x,\ y,\ z)=0. \tag{81}$$

Дело сводится к нахождению экстремума интеграла

$$\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx$$

при дополнительном условии (81). Уравнения (66) в данном случае будут иметь вид

$$\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}-\lambda G_y=0;\quad \frac{d}{dx}\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}-\lambda G_z=0. \tag{82}$$

Чтобы выяснить основное геометрическое свойство геодезических линий, продифференцируем уравнение (81) полным образом по x:

$$G_x+G_y y'+G_z z'=0.$$

Умножая обе части на λ и подставляя вместо λG_y и λG_z их выражения из (82), после несложных преобразований придем к равенству:

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}-\lambda G_x=0,$$

аналогичному равенствам (82), причем дроби, стоящие под знаком производной по x, равны направляющим косинусам касательной к искомой геодезической кривой, так что мы можем переписать эти уравнения в виде

$$\frac{d\cos\alpha}{dx}=\lambda G_x;\quad \frac{d\cos\beta}{dx}=\lambda G_y;\quad \frac{d\cos\gamma}{dx}=\lambda G_z.$$

Пользуясь формулой $\frac{dx}{ds}=\cos\alpha$, мы можем заменить дифференцирование по x дифференцированием по s и получим таким образом:

$$\frac{d\cos\alpha}{ds}=\mu G_x;\quad \frac{d\cos\beta}{ds}=\mu G_y;\quad \frac{d\cos\gamma}{ds}=\mu G_z,$$

где $\mu=\lambda\cos\alpha$. Но, как известно [II; 136], левые части написанных уравнений пропорциональны направляющим косинусам главной нормали к кривой, а правые части — направляющим косинусам нормали к поверхности, откуда следует непосредственно, что *вдоль геодезической линии главная нормаль к линии будет одновременно и нормалью к поверхности.*

5. Рассмотрим задачу о брахистохроне в сопротивляющейся среде: среди линий, соединяющих две данные точки, A и B, найти ту, двигаясь по которой пущенная вниз с данной скоростью материальная точка пройдет весь путь в кратчайшее время, причем в среде имеется сопротивление, выражающееся заданной функцией $R(v)$ скорости v.

Из механических соображений непосредственно следует, что искомая кривая должна находиться в плоскости, проходящей через прямую AB и вертикальную прямую, проведенную из точки A. Примем эту плоскость за плоскость (x, y) и направим ось y вертикально вниз. Пусть (x_0, y_0) и (x_1, y_1) — координаты точек A и B. Приращение кинетической энергии при движении вдоль кривой будет происходить за счет положительной работы силы тяжести и отрицательной работы сопротивления, т. е.

$$d\frac{v^2}{2}=g\,dy-R(v)\,ds,$$

где g — ускорение силы тяжести и $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$. Принимая x за независимую переменную для функций v и y, получим

$$vv'-gy'+R(v)\sqrt{1+y'^2}=0, \tag{83}$$

и дело сводится к нахождению экстремума интеграла

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v}\,dx$$

при наличии неголономной связи (83), причем v и y являются искомыми функциями.

Предельные условия обычного типа должны сводиться к заданию функций на концах промежутка:

$$y(x_0)=y_0;\qquad y(x_1)=y_1, \tag{84}$$

$$v(x_0)=v_0;\qquad v(x_1)=v_1. \tag{85}$$

Первое из условий (85) равносильно заданию величины скорости, с которой выпущена точка из начального положения A. Второе из условий (85) сводится к заданию скорости в конечной точке кривой и не представляется естественным с механической точки зрения. В дальнейшем мы еще вернемся к этому

вопросу. Следуя общему приему, мы должны написать уравнения Эйлера для функции

$$F^* = \sqrt{1+y'^2}\, H + \lambda(x)\, vv' - \lambda(x)\, gy', \tag{86}$$

где

$$H = \frac{1}{v} + \lambda(x)\, R(v).$$

Функция F^* не содержит y, и ее уравнение Эйлера по отношению к y имеет очевидный первый интеграл $F^*_{y'} = C$, или

$$\frac{Hy'}{\sqrt{1+y'^2}} = C + \lambda(x)\, g, \tag{87}$$

а уравнение Эйлера для функции F^* по отношению к функции v будет

$$\sqrt{1+y'^2}\, H_v + \lambda(x)\, v' - \frac{d}{dx}[\lambda(x)\, v] = 0,$$

или

$$\frac{v\lambda'(x)}{\sqrt{1+y'^2}} = H_v. \tag{88}$$

Мы имеем, таким образом, систему трех уравнений, (83), (87) и (88), для функций y, v и λ. Непосредственно дифференцируя разность $H^2-(C+g\lambda)^2$ по x и пользуясь упомянутыми выше тремя уравнениями, убедимся в существовании следующего интеграла:

$$H^2-(C+g\lambda)^2 = a^2, \tag{89}$$

где a — новая произвольная постоянная. Из написанного уравнения можно определить λ как функцию от v: $\lambda = \lambda(v)$. Деля почленно (87) на (88), получим

$$dy = \frac{(C+g\lambda)\, v\, d\lambda}{HH_v}. \tag{90}$$

В силу уравнений (87) и (89)

$$y' = \frac{C+g\lambda}{a},$$

откуда

$$dx = \frac{av\, d\lambda}{HH_v}. \tag{91}$$

Подставляя в правые части равенств (90) и (91) $\lambda = \lambda(v)$ и производя квадратуры, будем иметь

$$x = d + \varphi(v,\ a,\ C); \quad y = e + \psi(v,\ a,\ C),$$

где d и e — произвольные постоянные. Написанные два уравнения и дают параметрическое представление искомой брахистохроны, причем v играет роль параметра. Произвольные постоянные должны определяться из предельных условий (84) и (85). Последнее из условий (85), как мы увидим в дальнейшем, должно быть заменено условием

$$F^*_{v'}\big|_{x=x_1} = 0,$$

которое выражает тот факт, что скорость v может иметь произвольное значение при $x = x_1$. Написанное выше условие в силу (86) имеет вид $\lambda v\big|_{x=x_1} = 0$. Считая скорость отличной от нуля, получим $\lambda\big|_{x=x_1} = 0$.

80. Инвариантность уравнений Эйлера и Остроградского. При разыскании экстремума функции одной переменной $y=f(x)$ мы можем совершать замену независимой переменной, вводя вместо x новую независимую переменную ξ: $x=\varphi(\xi)$, причем мы считаем $\varphi(\xi)$ монотонной и имеющей производную, отличную от нуля. Правило дифференцирования сложной функции дает

$$\frac{dy}{d\xi}=f'(x)\,\varphi'(\xi). \tag{92}$$

Необходимое условие экстремума в новой независимой переменной будет $f'(x)\varphi'(\xi)=0$, и в силу $\varphi'(\xi)\neq 0$ это новое условне равносильно прежнему $f'(x)=0$. Можно получить формулу, аналогичную формуле (92), и для левой части уравнения Эйлера в различных случаях. Начнем с рассмотрения простейшего функционала:

$$J=\int_{x_0}^{x_1} F(x,\ y,\ y')\,dx \tag{93}$$

и, для краткости письма, введем специальное обозначение для левой части уравнения Эйлера:

$$[F]_y=F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}.$$

Вводя новую независимую переменную ξ, можем написать

$$F(x,\ y,\ y')=F\left[x(\xi),\ y,\ \frac{dy/d\xi}{dx/d\xi}\right]=\Phi\left(\xi,\ y,\ \frac{dy}{d\xi}\right),$$

и интеграл J в новой независимой переменной принимает вид

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x,\ y,\ y')\,dx=\int_{\xi_0}^{\xi_1}\Phi\left(\xi,\ y,\ \frac{dy}{d\xi}\right)\frac{dx}{d\xi}\,d\xi\,.$$

Вводя близкую функцию $y+\alpha\eta$ и производя обычные вычисления, мы получим

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{x_0}^{x_1} F(x,\ y+\alpha\eta,\ y'+\alpha\eta')\,dx\,|_{\alpha=0}=\int_{x_0}^{x_1}[F]_y\,\eta\,dx.$$

Это же выражение в новой независимой переменной может быть записано в таком виде:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{\xi_0}^{\xi_1}\Phi\left(\xi,\ \ y+\alpha\eta,\ \ \frac{dy}{d\xi}+\alpha\frac{d\eta}{d\xi}\right)\frac{dx}{d\xi}\,d\xi\,\Big|_{\alpha=0}=\int_{\xi_0}^{\xi_1}\left[\Phi\,\frac{dx}{d\xi}\right]_y\eta\,d\xi.$$

Приравнивая оба полученные результата, можем написать

$$\int_{x_0}^{x_1}\left\{[F]_y-\left[\Phi\,\frac{dx}{d\xi}\right]_y\frac{d\xi}{dx}\right\}\eta\,dx,$$

откуда ввиду произвольности функции η согласно лемме 1 [71] будем иметь

$$[F]_y = \left[\Phi \frac{dx}{d\xi}\right]_y \frac{d\xi}{dx}, \tag{94}$$

причем символ, стоящий справа, должен быть раскрыт в предположении, что независимой переменной является ξ, т. е.

$$\left[\Phi \frac{dx}{d\xi}\right]_y = \frac{dx}{d\xi}\Phi_y - \frac{d}{d\xi}\left\{\Phi_{\frac{dy}{d\xi}} \frac{dx}{d\xi}\right\}.$$

Формула (94) совершенно аналогична формуле (92), о которой мы говорили выше, а уравнение Эйлера $\left[\Phi \frac{dx}{d\xi}\right]_y = 0$, очевидно, равносильно уравнению Эйлера $[F]_y = 0$. Все это может быть обобщено и на тот случай, когда подынтегральная функция содержит несколько искомых функций.

Рассмотрим функционал для случая двух независимых переменных:

$$J = \iint\limits_B F(x, y, u, u_x, u_y)\, dx\, dy.$$

Введем вместо (x, y) две новые независимые переменные (ξ, η):

$$x = x(\xi, \eta); \quad y = y(\xi, \eta),$$

причем мы считаем, что написанные функции имеют непрерывные производные и что соответствующий им функциональный определитель не обращается в нуль. Преобразуем подынтегральную функцию к новым независимым переменным:

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = F[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), u, u_\xi \xi_x + \\ + u_\eta \eta_x, u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y] = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

Вводя, как и выше, близкую функцию $u + \alpha\eta$, дифференцируя интеграл по α и полагая $\alpha = 0$, будем иметь

$$\iint\limits_B [F]_u \eta\, dx\, dy = \iint\limits_{B_1} \left[\Phi \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}\right]_u \eta\, d\xi\, d\eta, \tag{94_1}$$

где B_1 — результат преобразования области B при помощи указанной выше замены переменных, $\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}$ — обычное обозначение для функционального определителя, и символ $[\ ]_u$ обозначает левую часть уравнения Остроградского, т. е., например,

$$[F]_u = F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y}.$$

Совершая в интеграле, стоящем в правой части формулы (94_1), замену переменных и пользуясь произвольностью функции η, мы

получим следующую формулу преобразования левой части уравнения Остроградского к новым независимым переменным:

$$[F]_u = \left[\Phi \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}\right]_u \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)}.$$

Совершенно аналогичная формула получается и в случае большего числа независимых переменных. Уравнение Остроградского $[F]_u = 0$ равносильно уравнению Остроградского $\left[\Phi \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}\right]_u = 0$ в новых независимых переменных.

Можно совершать и одновременную замену независимых переменных и функции. Так, например, если мы в случае функционала (93) введем вместо (x, y) новые переменные (ξ, η):

$$x = \varphi(\xi, \eta); \quad y = \psi(\xi, \eta),$$

то вместо функции $y = y(x)$ в новых переменных будем иметь функцию $\eta = \eta(\xi)$. Преобразуя функционал (93) к новым переменным, получим

$$J = \int_{\xi_0}^{\xi_1} F\left[\varphi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta), \frac{\psi_\xi + \psi_\eta \eta'}{\varphi_\xi + \varphi_\eta \eta'}\right](\varphi_\xi + \varphi_\eta \eta')\, d\xi =$$

$$= \int_{\xi_0}^{\xi_1} \Phi(\xi, \eta, \eta')\, d\xi,$$

и, как и выше, уравнение Эйлера $[F]_y = 0$ будет равносильно уравнению Эйлера $[\Phi]_\eta = 0$.

В следующем параграфе мы исследуем уравнение Эйлера в том случае, когда функциональная зависимость $y(x)$ задается в параметрической форме.

81. Параметрическая форма. При разыскании экстремума функционала требование, чтобы искомая кривая имела явное уравнение $y = y(x)$, может существенно сузить задачу, так как может оказаться, что прямые, параллельные оси y, пересекают кривую, дающую решение задачи, более чем в одной точке. Перейдем к рассмотрению общего случая параметрической формы уравнения искомой линии. Считая x и y функциями некоторого параметра t, мы можем переписать интеграл (93) в виде

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right) x'\, dt, \tag{95}$$

где x' и y' — производные по t, а t_0 и t_1 — значения параметра, соответствующие концам кривой. Наш интеграл J имеет вид (95) при любом выборе параметра t.

Отметим тот факт, что подынтегральная функция не содержит независимой переменной t и является однородной функцией первого измерения от x' и y'. Рассмотрим, вообще, некоторый интеграл:

$$J=\int_{t_0}^{t_1} F(x,\ y,\ x',\ y')\,dt, \tag{96}$$

у которого подынтегральная функция не содержит независимой переменной t и является однородной функцией первого измерения от x' и y', т. е.

$$F(x,\ y,\ kx',\ ky')=kF(x,\ y,\ x',\ y'). \tag{97}$$

Покажем, что при этом интеграл (96) не изменит своего вида при любой замене параметра t. Введем вместо t другой параметр τ, полагая $\tau=\tau(t)$, причем мы считаем $\tau'(t)>0$, так что при возрастании t и τ также возрастает. Преобразуя интеграл (96) к переменной τ, получим

$$J=\int_{\tau_0}^{\tau_1} F(x,\ y,\ x'_\tau\tau'_t,\ y'_\tau\tau'_t)\,t'_\tau\,d\tau,$$

и, пользуясь формулой (97), можем написать

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} F(x,\ y,\ x'_\tau\tau'_t,\ y'_\tau\tau'_t)\,t'_\tau\,d\tau=\int_{\tau_0}^{\tau_1} F(x,\ y,\ x'_\tau,\ y'_\tau)\,d\tau,$$

т. е. интеграл (96) не изменил своей формы при замене параметра.

Отметим, что роль k в формуле (97) у нас играло τ'_t, так что достаточно потребовать, чтобы тождество (97) имело место при $k>0$. В дальнейшем мы будем считать, что для интеграла (96) выполнено условие (97).

Напомним, что при определении близости для кривых, заданных в явной форме, мы требовали близости ординат кривых, соответствующих одинаковым абсциссам. В общем случае параметрической формы уравнения можно определить близость независимо от выбора параметра, а именно: мы можем сказать, что кривая l находится в ε-близости нулевого порядка от кривой l_1, если между точками l и l_1 можно установить такое взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие, при котором расстояние между соответствующими точками не превосходит ε. Аналогично может быть определена ε-близость первого порядка.

Перейдем теперь к выводу необходимого условия экстремума. Пусть некоторая линия l дает интегралу экстремум. Производим каким-нибудь образом выбор параметрического уравнения линии l, так что уравнение l будет: $x=x(t)$, $y=y(t)$. Берем близкую кривую $x(t)+\alpha\eta(t)$, $y(t)+\alpha_1\eta_1(t)$, причем считаем соответствующими

точки, получаемые при одном и том же значении параметра. Подставляя уравнение близкой кривой в интеграл (96) и приравнивая нулю производные по α и α_1 при $\alpha=\alpha_1=0$, мы, как всегда, покажем, что функции $x(t)$ и $y(t)$ должны удовлетворять при любом выборе параметра t системе двух уравнений Эйлера:

$$F_x-\frac{d}{dt}F_{x'}=0;\quad F_y-\frac{d}{dt}F_{y'}=0. \tag{98}$$

Эти уравнения не содержат в явном виде самого параметра. Кроме того, отметим, что по существу дела одну из функций, $x(t)$ или $y(t)$, мы можем считать произвольной. Действительно, совершая замену параметра $t(\tau)$, мы получим $x[t(\tau)]$ и $y[t(\tau)]$, в силу произвольности выбора $t(\tau)$ мы можем считать одну из этих функций произвольной функцией от τ. Учитывая это обстоятельство, мы вправе ожидать, что два уравнения (98) сводятся к одному. Докажем это.

Дифференцируя обе части тождества

$$F=x'F_{x'}+y'F_{y'},$$

выражающего свойство однородной функции F [I; 154], по x, y, x', y' получим

$$\begin{aligned} F_x&=x'F_{xx'}+y'F_{xy'};\quad F_y=x'F_{yx'}+y'F_{yy'},\\ 0&=x'F_{x'x'}+y'F_{x'y'};\quad 0=x'F_{x'y'}+y'F_{y'y'}. \end{aligned} \tag{99}$$

Из последних двух равенств найдем

$$\frac{F_{x'x'}}{y'^2}=\frac{F_{x'y'}}{-x'y'}=\frac{F_{y'y'}}{x'^2}=F_1(x,\ y,\ x',\ y'), \tag{100}$$

где через F_1 мы обозначили общую величину написанных трех отношений. Возвращаясь к уравнениям (98) и производя дифференцирование, придадим им такой вид:

$$\begin{aligned} F_x-x'F_{xx'}-y'F_{yx'}-x''F_{x'x'}-y''F_{x'y'}&=0,\\ F_y-x'F_{xy'}-y'F_{yy'}-x''F_{x'y'}-y''F_{y'y'}&=0. \end{aligned}$$

Заменяя в этих уравнениях $F_{x'x'}$, $F_{x'y'}$ и $F_{y'y'}$ по формулам (100), а F_x, F_y — по формулам (99), преобразуем их к следующему виду:

$$y'T=0;\quad x'T=0,$$

где

$$T=F_1(x,\ y,\ x',\ y')(x'y''-y'x'')+F_{xy'}-F_{yx'}.$$

Мы считаем, что x' и y' одновременно в нуль не обращаются, так что написанные два уравнения действительно приводятся к одному:

$$T=F_1(x,\ y,\ x',\ y')(x'y''-y'x'')+F_{xy'}-F_{yx'}=0. \tag{101}$$

К этому одному уравнению с двумя искомыми функциями, равносильному системе (98), мы можем добавить еще одно уравнение, характеризующее конкретный выбор параметра t; например, если за параметр мы выберем длину дуги s искомой экстремали, то это добавочное уравнение будет иметь вид $x'^2+y'^2=1$. Принимая во внимание выражение радиуса кривизны плоской кривой [**1; 71**], можем переписать уравнение (101) в виде

$$\frac{1}{R}=\frac{F_{xy'}-F_{yx'}}{(x'^2+y'^2)^{3/2}F_1}. \tag{102}$$

Все сказанное без труда может быть распространено и на функционалы, зависящие от кривых в n-мерном пространстве. Рассмотрим интеграл:

$$J=\int_{t_0}^{t_1} F(x_1,\ x_1',\ \ldots,\ x_n,\ x_n')\,dt, \tag{103}$$

где x_i — функции от t, а x_i' — производные. Как и выше, мы считаем функцию F однородной функцией первого измерения от x_i'. При этом интеграл (103) не меняется при любой замене параметра t. Как и выше, нетрудно показать, что для того, чтобы кривая n-мерного пространства $(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ давала экстремум интегралу (103), необходимо выполнение следующих уравнений Эйлера:

$$F_{x_i}-\frac{d}{dt}F_{x_i'}=0 \tag{104}$$

или

$$F_{x_i}-\sum_{s=1}^{n} x_s'F_{x_i'x_s}-\sum_{s=1}^{n} x_s''F_{x_i'x_s'}=0 \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Нетрудно проверить, что левые части этих уравнений связаны следующим соотношением:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i'\left(F_{x_i}-\frac{d}{dt}F_{x_i'}\right)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n} x_i'F_{x_i}-\sum_{i\ s=1}^{n} x_i'x_s'F_{x_i'x_s}-\sum_{i,\ s=1}^{n} x_i'x_s''F_{x_i'x_s'}\equiv 0. \tag{105}$$

Действительно, в силу однородности F можно написать, согласно теореме Эйлера,

$$F=\sum_{i=1}^{n} x_i'F_{x_i'};$$

дифференцируя это тождество по x_s и x'_s, находим

$$F_{x_s} = \sum_{i=1}^{n} x'_i F_{x'_i x_s}; \quad 0 = \sum_{i=1}^{n} x'_i F_{x'_i x'_s}.$$

Из этих тождеств непосредственно вытекает, что действительно, сумма, стоящая в средней части формулы (105), тождественно равна нулю. Таким образом, в системе (104) одно из уравнений есть следствие остальных, и мы можем добавить к системе (104) еще одно уравнение, характеризующее выбор параметра. Отметим, что вся изложенная теория может быть распространена и на случай кратных интегралов.

82. Геодезические линии в n-мерном пространстве. Пусть в n-мерном вещественном пространстве определена некоторая метрика

$$ds^2 = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}\, dx_i\, dx_k \qquad (a_{ik} = a_{ki}), \tag{106}$$

где a_{ik} суть заданные функции аргументов x_s. Эти функции мы считаем непрерывными с их частными производными первого порядка. Задание метрики (106) равносильно тому, что длина кривой $x_s(t)$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ выражается интегралом

$$J = \int ds = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} x'_i x'_k}\, dt, \tag{107}$$

причем мы считаем выражение, стоящее под радикалом, положительным при любых значениях x_s и x'_s, если не все x'_s — нули, т. е. мы считаем, что заданная квадратичная форма (106) определенно положительна. Мы имеем, конечно, право считать, что коэффициенты a_{ik} и a_{ki}, стоящие при одинаковых произведениях дифференциалов, также одинаковы, т. е. $a_{ik} = a_{ki}$.

Геодезическими линиями называются экстремали интеграла (107). Это понятие является непосредственным обобщением понятия геодезической линии на заданной поверхности, о котором мы говорили выше. Обозначим, для краткости, через φ сумму, стоящую под знаком радикала:

$$\varphi = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} x'_i x'_k. \tag{108}$$

Мы имеем для экстремалей следующие уравнения Эйлера:

$$\frac{1}{2\sqrt{\varphi}}\, \varphi_{x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2\sqrt{\varphi}}\, \varphi_{x'_i}\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{109}$$

Одно из уравнений этой системы есть следствие остальных, и мы добавим еще одно уравнение, а именно:

$$\varphi = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} x'_i x'_k = 1, \tag{110}$$

и пусть s — то значение параметра t, которое определяется этим дополнительным уравнением. Из (107) непосредственно следует, что (110) равносильно

тому, что за параметр t мы выбираем длину дуги s кривой n-мерного пространства. Благодаря (110) система (109) упрощается и принимает вид

$$\varphi_{x_i} - \frac{d}{ds}\varphi_{x_i'} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{111}$$

Нетрудно проверить, что эта система имеет интеграл:

$$\varphi = \text{const}.$$

Действительно,

$$\frac{d\varphi}{ds} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{x_i} x_i' + \sum_{i=1}^{n} \varphi_{x_i'} x_i''.$$

Но в силу того, что φ — однородный полином второй степени от x_i', имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_{x_i'} x_i' = 2\varphi,$$

и, следовательно,

$$2\frac{d\varphi}{ds} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{x_i'} x_i'' + \sum_{i=1}^{n} x_i' \frac{d}{ds}\varphi_{x_i'}.$$

Пользуясь этим равенством, можем переписать выражение для $d\varphi/ds$ в виде

$$\frac{d\varphi}{ds} = 2\frac{d\varphi}{ds} + \sum_{i=1}^{n} x_i' \left(\varphi_{x_i} - \frac{d}{ds}\varphi_{x_i'}\right),$$

и в силу (111) имеем $\frac{d\varphi}{ds} = 0$, т. е. $\varphi = \text{const}$ есть интеграл системы (111), и дополнительное условие (110) получается, если положить произвольную постоянную равной единице.

Напишем теперь уравнения (111) в раскрытом виде:

$$\varphi_{x_i} - \sum_{s=1}^{n} \varphi_{x_i' x_s} x_s' - \sum_{s=1}^{n} \varphi_{x_i' x_s'} x_s'' = 0,$$

или, подставляя сюда выражение (108),

$$\frac{1}{2}\sum_{p,\, q=1}^{n} \frac{\partial a_{pq}}{\partial x_i} x_p' x_q' - \sum_{p,\, s=1}^{n} \frac{\partial a_{pi}}{\partial x_s} x_s' x_p' - \sum_{s=1}^{n} a_{si} x_s'' = 0.$$

Остановимся на второй сумме. В ней коэффициенты при $x_s' x_p'$ и $x_p' x_s'$ не одинаковы, но мы можем сделать их одинаковыми, заменив каждый из них на их полусумму:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{pi}}{\partial x_s} + \frac{\partial a_{si}}{\partial x_p}\right).$$

Соединив первую сумму со второй и переменив знак на обратный, мы приведем окончательно нашу систему к следующему виду:

$$\sum_{s=1}^{n} a_{si} x_s'' + \sum_{p,\, q=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{pi}}{\partial x_q} + \frac{\partial a_{qi}}{\partial x_p} - \frac{\partial a_{pq}}{\partial x_i}\right) x_p' x_q' = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{112}$$

В этих уравнениях производные берутся по длине дуги s. Выражение, стоящее в скобках во второй сумме, носит в дифференциальной геометрии название *символа Кристоффеля первого рода* и обозначается следующим образом:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{pi}}{\partial x_q}+\frac{\partial a_{qi}}{\partial x_p}-\frac{\partial a_{pq}}{\partial x_i}\right)=\begin{bmatrix} pq \\ i \end{bmatrix}.$$

Можно написать уравнения (112) в разрешенном относительно x_s'' виде. Обозначим через a^{ik} элементы матрицы, транспонированной по отношению к матрице $\| a_{ik} \|^{-1}$, т. е.

$$a^{ik}=\frac{A_{ik}}{D} \text{ или } \| a^{ik} \| = (\| a_{ik} \|^{-1})^*,$$

где D есть определитель матрицы $\| a_{ik} \|$, который будет отличным от нуля в силу определенности квадратичной формы (106), и A_{ik} — алгебраические дополнения элементов a_{ik} этого определителя. Мы имеем следующие основные равенства для элементов a^{ik}:

$$\sum_{s=1}^{n} a^{is}a_{ks}=\begin{cases} 0 & (i \neq k), \\ 1 & (i=k). \end{cases} \tag{113}$$

Умножая обе части (112) на a^{ji}, суммируя по i и меняя во втором слагаемом порядок суммирования, получим в силу (113):

$$x_j''+\sum_{p,\ q=1}^{n}\begin{Bmatrix} pq \\ j \end{Bmatrix} x_p'x_q'=0, \tag{114}$$

где

$$\begin{Bmatrix} pq \\ j \end{Bmatrix}=\sum_{i=1}^{n} a^{ji}\begin{bmatrix} pq \\ i \end{bmatrix}. \tag{115}$$

После использования соотношения (110) уравнения Эйлера приняли вид (111), и эти уравнения перестали уже быть зависимыми. Нам удалось решить их относительно x_s''.

В качестве примера рассмотрим задачу нахождения геодезических линий на произвольном цилиндре. Выбираем ось Z параллельно образующим цилиндра, и пусть уравнение направляющей в плоскости (x, y) будет $x=\varphi(\sigma)$; $y=\psi(\sigma)$, причем за параметр σ принята длина дуги направляющей, так что

$$\varphi'^2(\sigma)+\psi'^2(\sigma)=1.$$

Выберем за координатные параметры, определяющие положение точки на цилиндре, указанный выше параметр σ и координату z. При этом

$$ds^2=d\sigma^2+dz^2,$$

так что в данном случае мы будем иметь

$$a_{11}=a_{22}=1;\ a_{12}=a_{21}=0.$$

Уравнения (114) дадут нам $\sigma''=0$ при $(j=1)$ и $z''=0$ (при $j=2$), причем производные взяты по длине дуги s. Таким образом, мы получим

$$\sigma=As+B;\quad z=A_1s+B_1;\quad A^2+A_1^2=1.$$

Если $A \neq 0$, то мы можем написать уравнение этих линий в виде $z = C_1\sigma + C_2$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Эти линии, полное уравнение которых будет

$$x = \varphi(\sigma);\ y = \psi(\sigma);\ z = C_1\sigma + C_2, \tag{116}$$

суть те винтовые линии, которые мы рассматривали в [**II**; **139**]. Присутствие постоянного слагаемого в выражении z не играет, конечно, никакой роли.

83. Естественные граничные условия. До сих пор при рассмотрении экстремума функционала (93) мы принимали в качестве предельных условий закрепление искомой кривой на ее концах, т. е. задание значений $y(x_0)$ и $y(x_1)$. Укажем сейчас другой вид предельных условий. Положим, что мы ищем экстремум интеграла

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x,\ y,\ y')\,dx, \tag{117}$$

причем левый конец искомой кривой закреплен, т. е. на левом конце имеется предельное условие $y(x_0) = y_0$, а на правый конец никакого условия не наложено; кроме того, само собой очевидно, что этот конец должен находиться на прямой $x = x_1$, параллельной оси y. Мы покажем сейчас, что на таком свободном конце должно быть также выполнено некоторое предельное условие, которое непосредственно получится из условия экстремума интеграла (117). Действительно, если некоторая кривая дает экстремум интегралу (117) по сравнению со всеми близкими кривыми со свободным правым концом, то тем более она дает экстремум интегралу (117) при условии закрепления правого конца. Но тогда эта кривая, как мы показали выше, должна удовлетворять уравнению Эйлера, т. е. быть экстремалью интеграла (117). Обратимся теперь к общему выражению первой вариации интеграла [**72**]:

$$\delta J = [F_{y'},\ \delta y]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y\,dx \quad (\delta y = \alpha\eta).$$

Как и выше, эта первая вариация должна обращаться в нуль. Член, содержащий интеграл, равен нулю, поскольку функция $y(x)$, как мы только что показали, должна и в этом случае удовлетворять уравнению Эйлера. Внеинтегральный член должен обращаться в нуль при $x = x_0$, так как этот конец является закрепленным. Таким образом, равенство нулю первой вариации приводит нас к равенству $F_{y'}\eta = 0$ при $x = x_1$. На свободном конце η может быть произвольным, и окончательно мы получаем на свободном конце следующее предельное условие:

$$F_{y'}|_{x=x_1} = 0. \tag{118}$$

Оно дает нам некоторую связь между y и y' на свободном конце. Нетрудно проверить, что для интеграла (2_1) условие (118)

будет иметь вид $y'=0$, т. е. в случае интеграла (2_1) оно сводится к требованию, чтобы на конце $x=x_1$ экстремаль была перпендикулярна к прямой $x=x_1$. Предельное условие (118) называется обычно *естественным предельным* или *граничным условием*. Повторяя предыдущее рассуждение для случая интеграла

$$J=\int_{x_0}^{x_1} F(x,\ y_1,\ y_1',\ \ldots,\ y_n,\ y_n')\,dx,$$

получим на свободном конце следующие n предельных условий:

$$F_{y_i'}=0 \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Рассмотрим теперь интеграл, содержащий производные второго порядка:

$$J=\int_{x_0}^{x_1} F(x,\ y,\ y',\ y'')\,dx.$$

Принимая во внимание формулы (27) и (28), а также то обстоятельство, что на свободном конце $\eta(x)$ и $\eta'(x)$ произвольны, мы получаем следующие два естественных граничных условия на свободном конце:

$$F_{y'}-\frac{d}{dx}F_{y''}=0;\ \ F_{y''}=0. \tag{119}$$

Отметим, что первое из этих условий дает связь между величинами y, y', y'', y''' на свободном конце. Совершенно так же для двойного интеграла

$$J=\iint_B F(x,\ y,\ u,\ u_x,\ u_y)\,dx\,dy \tag{120}$$

естественные граничные условия на контуре l будут иметь такой вид:

$$F_{u_x}\frac{dy}{ds}-F_{u_y}\frac{dx}{ds}=0, \tag{121}$$

где s — длина дуги контура l. Это непосредственно вытекает из формулы (33) для первой вариации интеграла (120).

84. Функционалы более общего типа. Рассмотрим сейчас первую вариацию функционалов, которые, кроме обычных интегралов, содержат дополнительные слагаемые, зависящие от значений функций на концах промежутка интегрирования или на контуре области интегрирования. При исследовании экстремума таких функционалов мы придем к прежним уравнениям Эйлера, и дополнительные члены в этих функционалах окажут лишь влияние на форму естественных предельных условий. Вводя эти дополнитель-

ные члены, мы сможем получать различные формы естественных предельных условий, важные в приложениях вариационного исчисления к математической физике. Ограничимся рассмотрением отдельных частных случаев.

В качестве первого примера рассмотрим функционал:

$$J=\int_{x_0}^{x_1} F(x,\ y,\ y')\,dx-\varphi(y_0)+\psi(y_1), \tag{122}$$

где y_0 и y_1 — значения функции $y(x)$ на концах промежутка интегрирования, а $\varphi(y_0)$ и $\psi(y_1)$ суть заданные функции своих аргументов, причем знак минус перед $\varphi(y_0)$ поставлен для удобства дальнейших вычислений. Рассматривая близкие кривые $y(x)+$ $+\alpha\eta(x)$, подставляя в функционал, дифференцируя по α и полагая $\alpha=0$, получим следующее выражение первой вариации:

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}[F]_y\,\delta y\,dx+\{\psi'(y_1)+F_{y'}(x_1,\ y_1,\ y'(x_1))\}\,\delta y_1-$$
$$-\{\varphi'(y_0)+F_{y'}(x_0,\ y_0,\ y'(x_0))\}\,\delta y_0. \tag{123}$$

Если некоторая кривая $y(x)$ дает функционалу (122) экстремум при свободных концах, то тем более она должна давать экстремум при закрепленных концах, т. е. в последних формулах мы можем считать $\delta y_1=\delta y_0=0$, и основная лемма покажет нам, как всегда, что $y(x)$ должна удовлетворять обычному уравнению Эйлера. Если оба конца свободны, то в формуле (123) δy_1 и δy_0 произвольны, и мы получаем предельные условия вида

$$\varphi'(y)+F_{y'}|_{x=x_0}=0;\ \ \psi'(y)+F_{y'}|_{x=x_1}=0.$$

Полагая, например, $\varphi(y)=l(y-a)^2$, получим при $x=x_0$ предельное условие вида

$$\frac{1}{2l}F_{y'}|_{x=x_0}+y_0-a=0,$$

и, в пределе, при $l\to\infty$, будем иметь $y_0=a$, т. е. придем к случаю закрепленного конца.

В случае двойного интеграла в качестве дополнительного члена возьмем криволинейный интеграл по контуру l основной области интегрирования B, причем за независимую переменную в этом криволинейном интеграле мы примем длину дуги s контура l, отсчитываемую от некоторой определенной точки этого контура. Будем считать, что под знак интеграла в криволинейном интеграле входят: независимая переменная s, искомая функция u и ее касательная производная u_s, т. е.

$$J=\iint_B F(x,\ y,\ u,\ u_x,\ u_y)\,dx\,dy+\int_l \Phi(s,\ u,\ u_s)\,ds. \tag{124}$$

Производя обычные вычисления, придем к следующему выражению для первой вариации:

$$\delta J = \iint\limits_B [F]_u \, \delta u \, dx \, dy + \int\limits_l \left(F_{u_x} \frac{dy}{ds} - F_{u_y} \frac{dx}{ds} + \Phi_u - \frac{d}{ds} \Phi_{u_s} \right) \delta u \, ds. \quad (125)$$

Рассуждая как и выше, можно показать, что для того, чтобы функция $u(x, y)$ давала экстремум функционалу (124) при естественном граничном условии, необходимо, чтобы функция u удовлетворяла обычному уравнению Остроградского и чтобы на контуре l было выполнено предельное условие:

$$F_{u_x} \frac{dy}{ds} - F_{u_y} \frac{dx}{ds} + \Phi_u - \frac{d}{ds} \Phi_{u_s} \Big|_l = 0. \quad (126)$$

В качестве примера рассмотрим функционал:

$$J = \iint\limits_B (u_x^2 + u_y^2) \, dx \, dy + \int\limits_l p(s) \, u \, ds,$$

где $p(s)$ — заданная на l функция. В данном случае уравнение Остроградского превратится в уравнение Лапласа, а предельное условие будет иметь вид

$$2u_x \frac{dy}{ds} - 2u_y \frac{dx}{ds} + p(s) \Big|_l = 0.$$

Принимая во внимание, что $\frac{dx}{ds}$ и $\frac{dy}{ds}$ суть направляющие косинусы касательной к l, а следовательно, $\frac{dy}{ds}$ и $\left(-\frac{dx}{ds}\right)$ — направляющие косинусы внешней нормали к l, можем написать предельное условие в следующем виде

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_l = -\frac{1}{2} p(s).$$

Мы пришли, таким образом, к задаче интегрирования уравнения Лапласа при заданных значениях нормальной производной на контуре области, т. е. к задаче Неймана. Если бы мы взяли

$$\Phi = p(s) \, u + q(s) \, u^2,$$

то получили бы предельное условие вида

$$\frac{\partial u}{\partial n} + q(s) \, u \Big|_l = -\frac{1}{2} p(s).$$

Отметим еще одну возможность повлиять на естественные предельные условия, не меняя уравнений Эйлера и Остроградского. Этого можно достигнуть не путем добавления к функционалу дополнительных слагаемых, как это мы делали выше, а путем добавления к подынтегральной функции основного интеграла такого выражения, которое не оказывает влияния на уравнение

Эйлера или Остроградского. Мы построили такие выражения в [75]. Если, например, мы рассмотрим вместо интеграла

$$\int_{x_0}^{x} F(x, y, y')\,dx$$

интеграл

$$\int_{x_0}^{x_1} (F + A(x, y) + B(x, y)\,y')\,dx,$$

где $A_y = B_x$, то уравнение Эйлера не изменится, а естественное предельное условие вместо $F_{y'} = 0$ будет $F_{y'} + B = 0$.

Аналогичным образом можно поступать и в случае кратного интеграла.

85. Общая форма первой вариации. До сих пор при определении первой вариации мы предполагали, что промежуток или область интегрирования не меняются. Сейчас мы введем выражение первой вариации, не делая этого предположения. Это даст нам возможность рассмотреть основную задачу вариационного исчисления в общем случае подвижных концов. Будем сначала рассматривать простейший из интегралов, а именно интеграл (117). Раньше мы считали, что близкие кривые $y(x) + \alpha\eta(x)$ отличаются от основной кривой $y(x)$ добавлением слагаемого $\alpha\eta(x)$. Сейчас мы будем считать, что близкие кривые $y(x, \alpha)$ содержат параметр α любым образом, причем при $\alpha = 0$ получается основная кривая $y(x) = y(x, 0)$, для которой мы и вычисляем вариацию интеграла. Итак, рассмотрим интеграл

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx \tag{127}$$

и введем в этот интеграл измененную близкую кривую, считая, что и пределы интегрирования зависят от α:

$$J(\alpha) = \int_{x_0(\alpha)}^{x_1(\alpha)} F[x, y(x, \alpha), y_x(x, \alpha)]\,dx, \tag{128}$$

причем при $\alpha = 0$ мы имеем функцию и пределы, входящие в интеграл (127):

$$y(x, 0) = y(x); \quad x_1(0) = x_1; \quad x_0(0) = x_0.$$

В соответствии с общим определением вариации как произведения производной по α при $\alpha = 0$ на α, можно написать

$$\delta x_0 = \frac{dx_0(\alpha)}{d\alpha}\bigg|_{\alpha=0}\alpha; \quad \delta x_1 = \frac{dx_1(\alpha)}{d\alpha}\bigg|_{\alpha=0}\alpha; \quad \delta y = \frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=0}\alpha,$$

$$\delta y' = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{dy(x, \alpha)}{dx}\right]\bigg|_{\alpha=0}\alpha = \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial\alpha}\right]_{\alpha=0}\alpha = \frac{d}{dx}\delta y,$$

причем мы считаем, что $y(x, \alpha)$ имеет непрерывные производные до второго порядка. Беря от интеграла (128) производную по α, полагая в ней $\alpha=0$ и умножая на α, получим следующее выражение первой вариации интеграла:

$$\delta J = F(x_1, y_1, y_1)\,\delta x_1 - F(x_0, y_0, y_0)\,\delta x_0 + \int_{x_0}^{x_1} (F_y\,\delta y + F_{y'}\,\delta y')\,dx,$$

или

$$\delta J = [F(x, y, y')\,\delta x]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} (F_y\,\delta y + F_{y'}\,\delta y')\,dx. \qquad (129)$$

Преобразуем, как всегда, второе слагаемое, интегрируя по частям:

$$\int_{x_0}^{x_1} F_{y'}\,\delta y'\,dx = \int_{x_0}^{x_1} F_{y'}\frac{d}{dx}\,\delta y\,dx =$$

$$= F_{y'}(x_1, y_1, y_1')\,(\delta y)_1 - F_{y'}(x_0, y_0, y_0)\,(\delta y)_0 - \int_{x_0}^{x_1} \delta y\,\frac{d}{dx}F_{y'}\,dx, \qquad (130)$$

где $(\delta y)_1$ и $(\delta y)_0$ суть граничные значения вариации функции y:

$$(\delta y)_i = \left[\frac{\partial y(x_i, \alpha)}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=0}\alpha \qquad (i=0,\ 1). \qquad (131)$$

Найдем теперь первую вариацию ординат концов кривой, причем мы проведем все вычисления лишь для ординаты y_1 правого конца. Очевидно, что

$$y_1 = y[x_1(\alpha), \alpha],$$

и при изменении α будут меняться оба аргумента функции y, а не только второй, как это мы имели при определении $(\delta y)_1$, так что первая вариация δy_1 ординаты y_1 будет:

$$\delta y_1 = \left[\frac{d}{d\alpha}y[x_1(\alpha), \alpha]\right]_{\alpha=0}\alpha = \left[\frac{\partial y}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1}{d\alpha}\right]_{\alpha=0}\alpha + \left[\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=0}\alpha =$$

$$= y_1\,\delta x_1 + (\delta y)_1, \qquad (132)$$

где y_1' — угловой коэффициент касательной на правом конце кривой. Аналогично для вариации δy_0 ординаты левого конца кривой будем иметь

$$\delta y_0 = y_0'\,\delta x_0 + (\delta y)_0. \qquad (133)$$

Подстановка в (130) вместо $(\delta y)_1$ и $(\delta y)_0$ их значений из уравнений (132) и (133) даст нам следующее окончательное

выражение для первой вариации интеграла (127):

$$\delta J = [F(x_1, y_1, y_1) - y_1 F_{y'}(x_1, y_1, y_1)]\,\delta x_1 + \\ + F_{y'}(x_1, y_1, y_1)\,\delta y_1 - [F(x_0, y_0, y_0) - y_0 F_{y'}(x_0, y_0, y_0)]\,\delta x_0 - \\ - F_{y'}(x_0, y_0, y_0)\,\delta y_0 + \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}\right) \delta y\, dx, \qquad (134)$$

или

$$\delta J = [(F - y' F_{y'})\,\delta x + F_{y'}\,\delta y]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}\right) \delta y\, dx. \qquad (135)$$

Правая часть написанного равенства линейна относительно δx_i и δy_i и она сохранит свой смысл и для того случая, когда близкие кривые зависят от нескольких параметров, причем под первой вариацией надо понимать в этом случае первый полный дифференциал по упомянутым параметрам, вычисленный для исходных значений этих параметров, т. е.

$$\delta J = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial J}{\partial \alpha_i}\right)_{\alpha_1 = \quad = \alpha_n = 0} \alpha_i, \qquad (136)$$

если рассматриваемая кривая получается из семейства, зависящего от n параметров при $\alpha_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Вычисления, совершенно аналогичные предыдущим, в случае интеграла, зависящего от n неизвестных функций

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_1', \ldots, y_n, y_n')\, dx, \qquad (137)$$

приводят к следующей формуле для первой вариации:

$$\delta J = \left[F - \sum_{i=1}^{n} y_i' F_{y_i'}\right]_{x=x_1} \delta x_1 + \sum_{i=1}^{n} \left[F_{y_i'}\right]_{x=x_1} \delta y_i^{(1)} - \\ - \left[F - \sum_{i=1}^{n} y_i' F_{y_i'}\right]_{x=x_0} \delta x_0 - \sum_{i=1}^{n} \left[F_{y_i'}\right]_{x=x_0} \delta y_i^{(0)} + \sum_{i=1}^{n} \int_{x_0}^{x_1} \left(F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i}\right) \times \\ \times \delta y_i\, dx,$$

или

$$\delta J = \left[\left(F - \sum_{i=1}^{n} y_i' F_{y_i'}\right) \delta x + \sum_{i=1}^{n} F_{y_i'}\, \delta y_i\right]_{x=x_0}^{x=x_1} + \\ + \sum_{i=1}^{n} \int_{x_0}^{x_1} \left(F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y'}\right) \delta y_i\, dx, \qquad (137_1)$$

где δx_0, δx_1, $\delta y_i^{(0)}$, $\delta y_i^{(1)}$ — вариации координат концов кривой.

Выясним геометрически разницу между величинами δy_1 и $(\delta y)_1$, входящими в формулу (132). Координаты правого конца кривых сравнения $y=f(x, \alpha)$ будут: $x_1(\alpha)$ и $y_1(\alpha)=f[x_1(\alpha), \alpha]$. При изменении α правый конец опишет некоторую линию λ. Начальным значением α является значение $\alpha=0$, так что сама величина α является приращением этого параметра от начального значения $\alpha=0$. Согласно (132) δy_1 есть дифференциал функции $y_1(\alpha)=f[x_1(\alpha), \alpha]$ по отношению к переменной α, т. е. δy_1 есть главная часть приращения ординаты $y_1(\alpha)$ правого конца. На рис. 2 это приращение изображается отрезком CD. Согласно (131) $(\delta y)_1$ есть дифференциал функции $f[x_1(0), \alpha]$, причем в первом аргументе $x_1(\alpha)$ мы полагаем $\alpha=0$ до вычисления дифференциала. Таким образом, $(\delta y)_1$ есть главная часть приращения ординаты на конце $x_1(0)$ при переходе с основной кривой $y(x)$ на кривую сравнения $y=f(x, \alpha)$. На рис. 2 это приращение изображается отрезком AB.

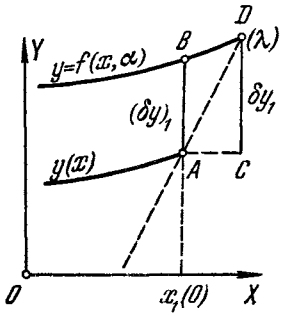

Рис. 2.

86. Условие трансверсальности. При рассмотрении естественных условий мы считали, что конец экстремали может перемещаться по прямой $x=x_0$ или $x=x_1$, параллельной оси y. Положим теперь, что он может перемещаться по любой заданной линии λ на плоскости (x, y).

Для определенности будем считать, что левый конец (x_0, y_0) закреплен, а правый может перемещаться по λ. Рассуждая, как и раньше, мы докажем, что если некоторая кривая $y(x)$ дает экстремум интегралу, то она должна удовлетворять уравнению Эйлера, т. е. быть экстремалью. Первая вариация должна обращаться в нуль: слагаемое, содержащее знак интеграла, будет равно нулю в силу уравнения Эйлера, а внеинтегральный член при $x=x_0$ будет равен нулю в силу условия закрепления конца. Таким образом, равенство нулю первой вариации приводит нас к следующему условию на подвижном конце:

$$[F(x, y, y')-y'F_{y'}(x, y, y')]\,\delta x+F_{y'}(x, y, y')\,\delta y=0, \quad (138)$$

где δx и δy — проекции на координатные оси бесконечно малого перемещения вдоль кривой λ. Если бы мы считали оба конца подвижными, то получили бы на обоих концах предельное условие (138). Достаточно повторить предыдущее рассуждение, помня, что если кривая дает экстремум интегралу при подвижных концах, то тем более она дает экстремум при неподвижных концах или при неподвижном одном конце.

Обозначая через $\overline{y'} = \frac{\delta y}{\delta x}$ угловой коэффициент касательной к кривой λ, можем переписать условие (138) в виде

$$F(x, y, y') + (\overline{y'} - y') F_{y'}(x, y, y') = 0. \tag{139}$$

Мы видим, таким образом, что это условие, называемое обычно *условием трансверсальности*, устанавливает связь между угловым коэффициентом y' касательной к экстремали и угловым коэффициентом $\overline{y'}$ касательной к кривой λ в каждой точке этой кривой. Если уравнение λ задано в неявной форме $\varphi(x, y) = 0$, то условие трансверсальности может быть переписано в виде

$$\frac{F - y'F_{y'}}{\varphi_x} = \frac{F_{y'}}{\varphi_y}. \tag{140}$$

Рассмотрим условие трансверсальности в трехмерном пространстве. Основной интеграл будет иметь вид

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', z, z')\, dx. \tag{141}$$

Принимая во внимание формулу (137_1) и рассуждая совершенно так же, как и выше, мы получим, что если один из концов может двигаться по заданной поверхности S, то на этом конце должно быть выполнено условие трансверсальности:

$$(F - y'F_{y'} - z'F_{z'})\,\delta x + F_{y'}\,\delta y + F_{z'}\,\delta z = 0, \tag{142}$$

где δx, δy, δz — составляющие бесконечно малого перемещения вдоль поверхности S. Написанное условие равносильно тому, что коэффициенты при δx, δy, δz должны быть пропорциональны направляющим косинусам нормали к S.

Если уравнение поверхности дано в неявной форме $\varphi(x, y, z) = 0$, то условие трансверсальности (142) записывается, очевидно, в виде

$$\frac{F - y'F_{y'} - z'F_{z'}}{\varphi_x} = \frac{F_{y'}}{\varphi_y} = \frac{F_{z'}}{\varphi_z}. \tag{143}$$

Оно дает нам два соотношения, связывающих x, y, z, z', y'. Эти соотношения заменяют два условия $y(x_0) = y_0$, $z(x_0) = z_0$ в случае закрепленного конца.

В общем случае интеграла (137) экстремаль представляет собой линию в $(n+1)$-мерном пространстве $(x, y_1, \ldots, y_n)$, и если ее конец может двигаться по заданной гиперповерхности

$\varphi(x, y_1, \ldots, y_n) = 0$, то на этом конце должно быть соблюдено следующее условие трансверсальности:

$$\left(F - \sum_{i=1}^{n} y_i' F_{y_i'}\right) \delta x + \sum_{i=1}^{n} F_{y_i'} \delta y_i = 0, \tag{144}$$

или

$$\frac{F - \sum_{i=1}^{n} y_i' F_{y_i'}}{\varphi_x} = \frac{F_{y_1'}}{\varphi_{y_1}} = \ldots = \frac{F_{y_n'}}{\varphi_{y_n}}. \tag{145}$$

Отметим один частный случай. Положим, что основной интеграл имеет вид

$$J = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{v(x, y, z)} dx = \int_{x_0}^{x_1} n(x, y, z) \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx,$$

что соответствует задаче геометрической оптики. Покажем, что в этом случае условия трансверсальности (145) совпадают с условием ортогональности, т. е. с тем условием, чтобы экстремаль была нормальна к поверхности S. Подставляя в условие (145) $F = n\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$ и производя очевидные сокращения, получим:

$$1 : \varphi_x = y' : \varphi_y = z' : \varphi_z.$$

Но 1, y', z' пропорциональны направляющим косинусам касательной к экстремали, а частные производные от φ пропорциональны направляющим косинусам нормали к S, и написанные равенства выражают указанное выше условие ортогональности. Аналогичное обстоятельство будет иметь место и для интеграла

$$J = \int_{x_0}^{x_1} n(x, y) \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

в плоском случае, только вместо поверхности S мы будем иметь линию λ на плоскости (x, y).

Заметим еще, что если мы в интеграле (141) перейдем к параметрической форме уравнения кривой $y(x)$, $z(x)$, так что подынтегральная функция будет иметь вид $\Phi(x, y, z, x', y', z')$, то, как нетрудно проверить, условие (145) записывается в виде

$$\frac{\Phi_{x'}}{\varphi_x} = \frac{\Phi_{y'}}{\varphi_y} = \frac{\Phi_{z'}}{\varphi_z}. \tag{146}$$

87. Канонические переменные. Условие трансверсальности лежит в основе очень важной в вариационном исчислении геометрической теории экстремальных задач, к изложению которой мы и переходим.

Предварительно мы совершим замену переменных в уравнениях Эйлера, а именно — перейдем к так называемым каноническим переменным. Начнем со случая трехмерного пространства, когда основной интеграл имеет вид

$$J=\int_{x_0}^{x_1} F(x,\ y,\ y',\ z,\ z')\,dx. \tag{147}$$

Уравнения Эйлера для этого интеграла

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0;\qquad F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}=0, \tag{148}$$

представляют собой систему двух уравнений второго порядка. Введем вместо y' и z' новые переменные, v и w, по формулам

$$v=F_{y'};\quad w=F_{z'}, \tag{149}$$

причем мы считаем, что написанные уравнения разрешимы относительно y' и z', т. е. что соответствующий функциональный определитель отличен от нуля:

$$\frac{D(F_{y'},\ F_{z'})}{D(y',\ z')}\neq 0.$$

Введем еще вместо F новую функцию H:

$$H(x,\ y,\ z,\ v,\ w)=y'v+z'w-F=y'F_{y'}+z'F_{z'}-F, \tag{150}$$

и эту новую функцию H будем считать выраженной через новые переменные v и w. Определим частные производные от функции $H(x,\ y,\ z,\ v,\ w)$ по последним четырем переменным:

$$H_y=\frac{dy'}{dy}v+\frac{dz'}{dy}w-F_y-F_{y'}\frac{dy'}{dy}-F_{z'}\frac{dz'}{dy},$$

или, в силу (149),

$$H_y=-F_y. \tag{151}$$

Точно так же при помощи простого дифференцирования получим

$$H_z=-F_z;\quad H_v=y';\quad H_w=z'. \tag{152}$$

Таким образом, вместо двух уравнений второго порядка (148) мы можем в новых переменных написать систему четырех уравнений первого порядка для функций y, z, v, w независимой переменной x:

$$\frac{dy}{dx}=H_v;\ \frac{dz}{dx}=H_w;\ \frac{dv}{dx}=-H_y;\ \frac{dw}{dx}=-H_z. \tag{153}$$

Система (153) обычно называется канонической системой. Из формул (150) и (152) непосредственно получается выражение подынтегральной функции F функционала через функцию H:

$$F=vH_v+wH_w-H. \tag{154}$$

Общий интеграл системы (148) или (153) будет содержать четыре произвольные постоянные. Через всякую точку пространства (x, y, z) при соблюдении обычных условий для теоремы существования и единственности теории дифференциальных уравнений мы можем провести пучок экстремалей, придавая произвольные начальные данные производным y' и z'. Такой пучок экстремалей будет представлять собой семейство кривых, зависящее от двух произвольных постоянных, а именно, от начальных значений упомянутых выше производных. Назовем вообще *семейством экстремалей* совокупность решений уравнения Эйлера, зависящую от двух произвольных постоянных и заполняющую без взаимных пересечений некоторую часть пространства, т. е. такую, что через каждую точку этой части пространства проходит одна и только одна экстремаль семейства. Таким образом, при наличии такого семейства экстремалей мы будем иметь в каждой точке определенные значения для y' и z' и тем самым в каждой точке части пространства, заполненного упомянутым семейством экстремалей, мы будем иметь определенные значения для v и w, т. е. мы можем считать, что в части пространства, заполненной семейством экстремалей, v и w определены как функции координат (x, y, z). Эти функции $v(x, y, z)$ и $w(x, y, z)$ мы назовем *функциями наклона упомянутого выше семейства экстремалей*. Покажем теперь, что эти функции должны удовлетворять уравнениям, содержащим частные производные от этих функций. Действительно, четыре функции:

$$y(x),\ z(x),\ v[x,\ y(x),\ z(x)],\ w[x,\ y(x),\ z(x)],$$

независимой переменной x должны удовлетворять системе (153).

Заменяя в последних двух уравнениях этой системы полные производные dv/dx и dw/dx их выражениями, можем переписать эти уравнения в виде

$$v_x + v_y \frac{dy}{dx} + v_z \frac{dz}{dx} = -H_y;\ w_x + w_y \frac{dy}{dx} + w_z \frac{dz}{dx} = -H_z. \qquad (155)$$

Воспользовавшись теперь двумя другими уравнениями системы (153), мы и получим систему в частных производных, которым должны удовлетворять функции наклона $v(x, y, z,)$ и $w(x, y, z)$:

$$v_x + v_y H_v + v_z H_w = -H_y;\ w_x + w_y H_v + w_z H_w = -H_z. \qquad (156)$$

Положим теперь, наоборот, что $v(x, y, z)$ и $w(x, y, z)$ появились не как функции наклона некоторого семейства экстремалей, а являются просто некоторым решением системы (156). Подставляя эти функции $v(x, y, z)$ и $w(x, y, z)$ в правые части первых двух уравнений системы (153), мы получим систему двух уравнений первого порядка для y и z. В результате интегрирования этой системы y и z окажутся функциями x и двух произвольных

постоянных. Подставляя эти выражения $y(x, C_1, C_2)$ и $z(x, C_1, C_2)$ в функции $v(x, y, z)$ и $w(x, y, z)$, мы и для этих функций получим выражение через x и две произвольные постоянные.

Нетрудно показать, что при этом будут удовлетворены и два последних уравнения системы (153). Действительно, пользуясь правилом дифференцирования сложных функций и первыми двумя уравнениями системы (153), мы можем написать

$$\frac{dv}{dx} = v_x + v_y H_v + v_z H_w,$$

откуда в силу первого из уравнений системы (156) мы и получим уравнение $\frac{dv}{dx} = -H_y$. Точно так же можно показать и справедливость последнего из уравнений системы (153).

Если экстремали $y(x, C_1, C_2)$ и $z(x, C_1, C_2)$ заполняют некоторую часть пространства без пересечений, т. е. образуют семейство экстремалей, то для этого семейства функции v и w, которые мы взяли как произвольные решения системы (156), будут являться функциями наклона для этого семейства экстремалей. Таким образом, мы показали, что, *имея решение системы* (156), *мы можем построить соответствующее семейство экстремалей, для которого это решение системы* (156) *будет являться функциями наклона.* При этом мы ограничиваемся, конечно, лишь той частью пространства, для которой $y(x, C_1, C_2)$ и $z(x, C_1, C_2)$ являются семейством экстремалей, т. е. которую они заполняют без взаимных пересечений.

Отметим еще, как выглядит условие трансверсальности в канонических переменных. В первоначальных переменных это было условие (142). Пользуясь формулами (150) и (152), мы можем переписать условие трансверсальности в виде

$$-H\delta x + v\delta y + w\delta z = 0. \tag{157}$$

88. Поле экстремалей в трехмерном пространстве. Переходим теперь к изложению геометрической теории для случая интеграла (147).

Будем рассматривать специальные семейства экстремалей, которые мы сейчас и определим. Пусть l — некоторая кривая в пространстве. Назовем ее *квазидлиной* или *J-длиной* величину интеграла (147), взятого вдоль этой кривой. Так, например, в случае интеграла (2), соответствующего задаче геометрической оптики, квазидлина будет выражать время, в которое точка проходит кривую l, двигаясь с заданной в пространстве скоростью $v(x, y, z)$.

Рассмотрим пучок экстремалей, выходящих из заданной точки M_0 в пространство, и пусть этот пучок образует семейство в некоторой окрестности точки M_0, т. е. положим, что в этой окрестности экстремали пучка взаимно не пересекаются, кроме точки M_0.

На каждой экстремали от точки M_0 отложим дугу M_0M так, чтобы квазидлина этой дуги для всех экстремалей была равна одному и тому же числу ρ. Геометрическое место точек M будет давать нам некоторую поверхность, которую мы назовем *квазисферой* с центром M_0. Меняя число ρ, мы получим семейство квазисфер, зависящее от одного параметра и заполняющее некоторую окрестность точки M_0. Нетрудно видеть, что экстремали нашего пучка будут пересекаться с квазисферами трансверсально, т. е. в каждой точке, принадлежащей некоторой окрестности точки M_0, функции наклона $v(x, y, z)$ и $w(x, y, z)$ нашего пучка экстремалей будут удовлетворять условию трансверсальности (157), где δx, δy, δz суть составляющие бесконечно малого перемещения по квазисфере, проходящей через упомянутую точку.

Действительно, обратимся к формуле, дающей выражение вариации функционала (147) в общем случае:

$$\delta J = [-H\delta x + v\delta y + w\delta z]_{x=x_0}^{x=x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left[\left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y + \right.$$
$$\left. + \left(F_z - \frac{d}{dx}F_{z'}\right)\delta z\right] dx, \qquad (158)$$

и положим, что конец M экстремали нашего пучка движется по поверхности квазисферы. При этом величина функционала J по построению остается постоянной, и, следовательно, $\delta J = 0$. В правой части формулы (158) интегральный член обращается в нуль, поскольку взятая кривая является экстремалью; внеинтегральный член обращается в нуль на нижнем пределе, так как точка M_0 закреплена и, следовательно, в этой точке $\delta x = \delta y = \delta z = 0$, а поэтому внеинтегральный член и на верхнем пределе должен обратиться в нуль, т. е. в точке M, движущейся по поверхности квазисферы, должно быть выполнено условие трансверсальности (157). Заметим, что весь наш пучок экстремалей зависит от двух произвольных постоянных, и движение точки M по поверхности квазисферы сводится к изменению значения этих постоянных, которые играют в данном случае роль параметров, о которых мы говорили в [86].

Пусть M — некоторая точка, принадлежащая окрестности точки M_0. Мы имеем определенную экстремаль, соединяющую M_0 с M, и величина интеграла (147) вдоль дуги M_0M этой экстремали является определенной функцией $\theta(x, y, z)$ координат точки M. При этом семейство квазисфер имеет, очевидно, уравнение

$$\theta(x, y, z) = \rho, \qquad (159)$$

где ρ — параметр, о котором мы говорили выше. Обычно говорят, что пучок экстремалей, выходящих из точки M_0, образует (в окре-

стности M_0) *центральное поле экстремалей*. Упомянутые выше квазисферы называются *трансверсальными поверхностями* этого поля и функция θ — основной функцией поля.

Перейдем теперь к построению общего поля экстремалей. Пусть S_0 — некоторая поверхность в трехмерном пространстве. В каждой точке этой поверхности условие трансверсальности (142) определяет значения y', z', или (157) определяет значения v и w в этой точке. Принимая эти значения y' и z' за начальные значения производных, мы можем из каждой точки поверхности S_0 выпустить экстремаль, которая пересекается трансверсально с поверхностью S_0. Проделывая это для каждой точки поверхности S_0, мы получим совокупность экстремалей, зависящую от двух параметров, пересекающихся трансверсально с поверхностью S_0. Пусть в некоторой окрестности этой поверхности указанные экстремали образуют семейство, т. е. взаимно не пересекаются. Отложим на каждой экстремали нашего семейства от точки M_0, лежащей на поверхности S_0, дугу M_0M так, чтобы величина интеграла (147) вдоль этой дуги экстремали имела заданное значение ρ. Геометрическое место концов M этих дуг даст нам некоторую поверхность S.

Нетрудно видеть, что экстремали нашего семейства пересекаются с этой поверхностью S трансверсально. Действительно, достаточно лишь повторить прежнее рассуждение, которое мы проводили в случае центрального поля. Правда, в данном случае точка M_0 не является неподвижной, а движется по поверхности S_0, но экстремали нашего семейства, по самому их построению, пересекаются с S_0 трансверсально, а потому в правой части формулы (158) внеинтегральный член обращается на нижнем пределе в нуль, совершенно так же, как и в случае центрального поля. Таким образом, поверхности S, заполняющие часть пространства в окрестности поверхности S_0, пересекаются с экстремалями построенного семейства трансверсально. В этом случае также говорят, что семейство экстремалей является полем экстремалей, а поверхности S суть трансверсальные поверхности этого поля. Таким образом, *семейство экстремалей является полем экстремалей, если существует семейство поверхностей, зависящих от одного параметра и пересекающихся трансверсально с экстремалями семейства*. Величина интеграла (147), взятого вдоль упомянутой выше дуги M_0M экстремали нашего поля, является функцией $\theta(x, y, z)$ координат точки M, и уравнение (159) есть уравнение семейства трансверсальных поверхностей нашего поля. В частности, при $\rho = 0$ мы имеем поверхность S_0. В случае интеграла, соответствующего задаче геометрической оптики, квазисферы центрального поля представляют собой фронт волны от локального возмущения в точке M_0 в различные моменты времени. В общем случае трансверсальные поверхности S дают также фронт волны

в различные моменты времени, при условии, что S_0 есть фронт волны в начальный момент времени.

В каждой точке трансверсальной поверхности S коэффициенты при δx, δy, δz в условии трансверсальности (157) должны быть пропорциональны направляющим косинусам нормали к поверхности S. С другой стороны, эти направляющие косинусы, как известно, пропорциональны частным производным от левой части уравнения (159) по координатам, т. е. эти частные производные должны быть пропорциональны коэффициентам в условии трансверсальности (157). Но, как мы сейчас покажем, имеет место тот замечательный факт, что мы имеем в данном случае не пропорциональность, а точное равенство, т. е.

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = -H(x, y, z, v, w); \quad \frac{\partial\theta}{\partial y} = v; \quad \frac{\partial\theta}{\partial z} = w, \tag{160}$$

причем в написанных формулах v и w мы должны, конечно, считать функциями (x, y, z). Это будут те функции наклона нашего поля, о которых мы говорили в предыдущем параграфе. Это утверждение, как мы сейчас покажем, непосредственно следует из основной формулы (158).

Для отчетливости рассмотрим сначала центральное поле. В этом случае, как мы уже говорили выше, $\theta(x, y, z)$ является величиной интеграла (147) по дуге M_0M экстремали нашего центрального поля.

Будем двигать конец M уже не по квазисфере, как это мы делали выше, а произвольным образом в пространстве. При этом, конечно, будет, вообще говоря, меняться и экстремаль поля, соединяющая M_0 с подвижной точкой M. В данном случае перемещение точки M будет зависеть не от двух параметров, как выше при движении по квазисфере, а от некоторых трех параметров, которые мы не будем фиксировать. Обозначим буквой δ дифференциал, относящийся к изменению этих параметров. Вернемся к основной формуле (158), причем величину интеграла J мы можем, в силу сказанного выше, заменить функцией $\theta(x, y, z)$. В правой части этой формулы интегральный член пропадает ввиду того, что мы интегрируем по экстремали. Внеинтегральный член на нижнем пределе также обратится в нуль, так как точка M_0 закреплена. Но внеинтегральный член на верхнем пределе уже не обратится в нуль, так как точка M движется не по квазисфере, а любым образом, и мы будем иметь равенство

$$\delta\theta(x, y, z) = -H\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z, \tag{161}$$

откуда и вытекают формулы (160).

Совершенно так же проводится доказательство этих формул и для любого поля. Вместо квазисфер мы имеем поверхности S, и внеинтегральный член в правой части формулы (158) по-преж-

нему обращается в нуль на нижнем пределе, поскольку поверхность S_0 пересекается с экстремалями поля трансверсально.

Исключая v и w из трех уравнений (160), мы получим уравнение с частными производными первого порядка для основной функции поля:

$$\theta_x + H(x, y, z, \theta_y, \theta_z) = 0. \tag{162}$$

Таким образом, оказывается, что *для любого поля основная функция должна удовлетворять одному и тому же уравнению* (162). Покажем теперь, наоборот, что, вообще говоря, всякое решение уравнения (162) является основной функцией для некоторого поля.

Пусть $\theta^{(0)}$ есть некоторое решение уравнения (162). Определим функции v и w по формулам:

$$v = \theta_y^{(0)}; \quad w = \theta_z^{(0)}. \tag{163}$$

Дифференцируя тождество

$$\theta_x^{(0)} + H(x, y, z, \theta_y^{(0)}, \theta_z^{(0)}) = 0 \tag{164}$$

по y и z, получим два уравнения (156), т. е., как мы видели выше, построенным функциям v и w соответствует некоторое семейство экстремалей, для которого они являются функциями наклона. В силу (163) и (164), левая часть уравнения (157) есть полный дифференциал функции $\theta^{(0)}$, т. е. $\theta^{(0)}(x, y, z) = C$ есть семейство трансверсальных поверхностей для упомянутого выше семейства экстремалей, и, таким образом, это семейство экстремалей образует поле. В силу (161) в этом случае левая часть уравнения (157) есть полный дифференциал основной функции поля и, таким образом, функция $\theta^{(0)}$ является основной функцией упомянутого выше поля. Отметим еще, что из предыдущего вытекает, что для того чтобы семейство экстремалей давало поле, необходимо и достаточно, чтобы левая часть уравнения (157) была полным дифференциалом, т. е. чтобы криволинейный интеграл от этой левой части не зависел от пути.

В случае интеграла, соответствующего основной задаче геометрической оптики, условие трансверсальности (142) имеет вид

$$\left(n\sqrt{1+y'^2+z'^2} - n\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} - n\frac{z'^2}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right)\delta x + \\ + n\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\delta y + n\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\delta z = 0,$$

или, после очевидных упрощений,

$$\frac{dx}{ds}\delta x + \frac{dy}{ds}\delta y + \frac{dz}{ds}\delta z = 0,$$

откуда непосредственно следует, что в данном случае условие трансверсальности совпадает с условием ортогональности, и трансверсальные поверхности любого поля пересекаются ортогонально с экстремалями этого поля.

Канонические переменные и функция H определяются в данном случае равенствами:

$$v=\frac{ny'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}; \qquad w=\frac{nz'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}};$$

$$H=\frac{ny'^2}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}+\frac{nz'^2}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}-n\sqrt{1+y'^2+z'^2},$$

или, после упрощений,

$$H=-\frac{n}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=-\sqrt{n^2-v^2-w^2},$$

а уравнение (162) имеет такой вид:

$$\theta_x-\sqrt{n^2-\theta_y^2-\theta_z^2}=0 \text{ или } \theta_x^2+\theta_y^2+\theta_z^2=n^2(x,\ y,\ z).$$

Если $n=\text{const}$, то пространство однородно, и экстремалями будут прямые линии. Они образуют поле в том и только в том случае, когда являются нормалями к некоторой поверхности S_0 Остальные трансверсальные поверхности S_0 поля мы получим, откладывая на этих нормалях отрезки одной и той же длины Можно получить эти поверхности, проводя семейство сфер с центром на S_0 и фиксированным радиусом и беря огибающую этого семейства сфер (построение Гюйгенса). Это же построение сохраняется и в случае неоднородного пространства, если только сферы заменить квазисферами. Отметим еще, что в **[II; 140]** выяснены условия, при которых семейство прямых линий будет семейством нормалей к некоторой поверхности.

89. Теория поля в общем случае. Изложенная геометрическая теория остается справедливой и в случае плоскости, когда основной интеграл имеет вид

$$J=\int_{x_0}^{x_1} F(x,\ y,\ y')\,dx. \tag{165}$$

Вместо y' вводим новую переменную u по формуле $u=F_{y'}$, а также функцию $H(x,\ y,\ u)=y'F_{y'}-F$. Вместо уравнения Эйлера для интеграла (165) будем иметь систему двух уравнений первого порядка:

$$\frac{dy}{dx}=H_u; \quad \frac{du}{dx}=-H_y. \tag{166}$$

Условие трансверсальности

$$(F_y - y'F_{y'})\,\delta x + F_{y'}\delta y = 0 \tag{167}$$

в новых переменных будет иметь вид

$$-H\delta x + u\delta y = 0. \tag{168}$$

Семейство экстремалей на плоскости должно содержать один параметр, причем мы считаем, что оно покрывает часть плоскости без взаимных пересечений. В этой части плоскости y' и новая переменная u являются определенными функциями координат (x, y) точки (u — функция наклона семейства). Обращаясь к условию трансверсальности (168), мы видим, что его можно толковать как дифференциальное уравнение первого порядка для определения трансверсальности кривых семейства экстремалей, т. е. таких кривых, которые пересекаются с экстремалями семейства трансверсально:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{H}{u}. \tag{169}$$

В данном случае мы будем иметь ту особенность, что всякое семейство экстремалей образует поле. При этом, конечно, мы считаем выполненными те условия, которые обеспечивают теорему существования и единственности для уравнения (169).

Перейдем теперь к изложению теории поля в общем случае любого числа измерений. Мы не будем проводить здесь доказательств, которые вполне аналогичны тем доказательствам, которые мы проводили в случае трехмерного пространства. В данном случае основной интеграл будет содержать n функций $q_1, \ldots, q_n$ независимой переменной x и их производные q_k':

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, q_1, q_1', \ldots, q_n, q_n')\,dx. \tag{170}$$

Соответствующие экстремали определяются из системы n уравнений второго порядка:

$$F_{q_k} - \frac{d}{dx} F_{q_k'} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{171}$$

Вместо q_k' вводим новые переменные p_k

$$p_k = F_{q_k'}, \tag{172}$$

причем мы считаем, что функциональный определитель

$$\frac{D\left(F_{q_1'}, \ldots, F_{q_n'}\right)}{D\left(q_1', \ldots, q_n'\right)} \tag{173}$$

отличен от нуля, т. е. уравнения (172) разрешимы относительно q'_k.

Функция H, которую мы считаем выраженной через переменные (x, q_k, p_k), определяется формулой

$$H(x, q_k, p_k) = \sum_{s=1}^{n} q'_s p_s - F. \tag{174}$$

Непосредственно дифференцируя и пользуясь уравнением (172), получим

$$H_{q_k} = -F_{q_k}; \quad H_{p_k} = q'_k,$$

а система (171) переписывается в виде $2n$ уравнений первого порядка (каноническая система):

$$\frac{dq_k}{dx} = H_{p_k}; \quad \frac{dp_k}{dx} = -H_{q_k}. \tag{175}$$

С помощью интеграла (170) можно определить понятие квазидлины любой линии в $(n+1)$-мерном пространстве с координатами $(x, q_1, \ldots, q_n)$. Если совокупность экстремалей, зависящая от n произвольных постоянных, заполняет часть $(n+1)$-мерного пространства без взаимных пересечений, то мы говорим, что эти экстремали образуют *семейство экстремалей*. В упомянутой части пространства q'_k и тем самым p_k являются определенными функциями точки, т. е. переменных $(x, q_1, \ldots, q_n)$ (функции наклона семейства). Центральное поле определяется буквально так же, как и в трехмерном пространстве. Для получения общего поля возьмем некоторую гиперповерхность $S_0: \varphi(x, q_1, \ldots, q_n) = 0$. Условия трансверсальности дают нам n соотношений для определения значения производных q_k в каждой точке S_0; принимая эти значения за начальные значения при интегрировании системы (171), мы получаем, вообще говоря, семейство экстремалей, пересекающихся трансверсально с S_0. Совершенно так же, как в трехмерном случае, строятся остальные поверхности S, которые пересекаются трансверсально с экстремалями семейства, и это семейство экстремалей образует поле. В каждом поле существует основная функция $\theta(x, q_1, \ldots, q_n)$, которая, например, для центрального поля дает величину интеграла от центральной точки M_0 поля до переменной точки взятого по экстремали поля. Аналогично определяется основная функция и для любого поля. При любом выборе поля мы имеем для основной функции

$$\theta_x = -H; \quad \theta_{q_k} = F_{q'_k} = p_k,$$

и эта основная функция должна удовлетворять уравнению с частными производными:

$$\theta_x + H(x, q_1, \ldots, q_n, \theta_{q_1}, \ldots, \theta_{q_n}) = 0. \tag{176}$$

Наоборот, любое решение этого уравнения является, вообще говоря, основной функцией некоторого поля, причем функции (172), соответствующие этому полю, определяются по формулам $p_k = \theta_{q_k}$. Выражение

$$-H\delta x + \sum_{k=1}^{n} p_k \delta q_k$$

будет полным дифференциалом тогда и только тогда, когда p_k являются функциями наклона некоторого поля, и в этом случае последнее выражение будет полным дифференциалом основной функции $\theta(x, q_1, \ldots, q_n)$ этого поля.

90. Особый случай. Отметим один важный особый случай. Положим, что F есть однородная функция первого порядка относительно производных q'_k, как это имеет, например, место при параметрической форме вариационной задачи. Согласно формуле Эйлера для однородных функций имеем

$$\sum_{s=1}^{n} q'_s F_{q'_s} = F. \tag{177}$$

Дифференцируя это тождество по q'_k, получим

$$\sum_{s=1}^{n} q'_s F_{q'_s q'_k} = 0,$$

и определитель этой однородной системы должен равняться нулю. Но это есть как раз определитель (173), который должен быть отличным от нуля для того, чтобы был возможен переход к каноническим переменным. Из тождества (177) непосредственно следует, что в данном случае функция H будет тождественно равна нулю. По предыдущему, мы можем определить понятие поля экстремалей, и для всякого поля мы будем иметь основную функцию $\theta(x, q_1, \ldots, q_n)$, частные производные от которой определяются равенствами:

$$\theta_x = F - \sum_{s=1}^{n} q'_s F_{q'_s} \equiv 0; \quad \theta_{q_k} = F_{q'_k}. \tag{178}$$

Первое из этих уравнений показывает, что основная функция не содержит x. Правые части уравнений $\theta_{q_k} = F_{q'_k}$ являются однородными функциями нулевого измерения от q'_k, и с помощью этих уравнений можно выразить отношения q_k/q_1 $(k=2, \ldots, n)$ через производные θ_{q_k}. Подставляя эти выражения в уравнение (177), мы получим уравнение с частными производными, заменяющее в данном случае уравнение (176).

Проведем все вычисления для случая интеграла, выражающего длину кривой в n-мерном пространстве.

$$J=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}q_i'q_k'}\,dx. \tag{179}$$

Коэффициенты a_{ik} удовлетворяют соотношению $a_{ik}=a_{ki}$ и являются заданными функциями переменных q_k. В данном случае мы имеем

$$\theta_{q_k}=F_{q_k'}=\sum_{s=1}^{n}\frac{a_{ks}q_s'}{F}\qquad\left(F=\sqrt{\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}q_i'q_k'}\right),$$

откуда

$$\frac{q_k'}{F}=\sum_{s=1}^{n}A_{ks}\theta_{q_s},$$

где через A_{ik} мы обозначали элементы матрицы, обратной матрице a_{ik} [III$_1$; 25].

Подставляя выражение q_k'/F в уравнение (177), получим искомое уравнение в частных производных, которому должна удовлетворять основная функция любого поля экстремалей для интеграла (179)

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} A_{ik}\theta_{q_i}\theta_{q_k}=1. \tag{180}$$

Величина интеграла (179), взятого по экстремали поля между точками M_0 и M, дает геодезическое расстояние между этими точками, и для квадрата этого расстояния $\Gamma=\theta^2$ мы получаем во всяком поле уравнение с частными производными:

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} A_{ik}\Gamma_{q_i}\Gamma_{q_k}=4\Gamma. \tag{181}$$

В этой задаче независимой переменной является параметр, который можно выбирать совершенно произвольно и который не входит в коэффициенты a_{ik} и функцию θ. Мы можем в данном случае рассматривать поле и основную функцию в n-мерном пространстве $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, в этом пространстве одну из переменных можно принять за независимую переменную, а уравнение (180) представляет собой для данного случая симметричную форму записи уравнения (176).

В случае основной задачи геометрической оптики при параметрической форме записи мы имеем

$$F=n(x, y, z)\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2},$$

и уравнение (180) будет иметь вид

$$\theta_x^2+\theta_y^2+\theta_z^2=n^2(x, y, z).$$

Мы получили это уравнение раньше, исходя из такой формы основного интеграла, в которой роль независимой переменной играла переменная x.

Во всей изложенной выше теории мы не предполагали, что независимая переменная не входит в подынтегральную функцию F. В случае задачи геодезических линий, которой соответствует интеграл (179), a_{ik} не содержали независимой переменной, и можно поступать иначе. Обозначая, как и в [82],

через φ выражение, стоящее под знаком радикала в формуле (179), и принимая за параметр длину дуги, т. е. вводя соотношение

$$\varphi = \sum_{i,\ k=1}^{n} a_{ik} q_i' q_k' = 1,$$

мы получим систему дифференциальных уравнений (111):

$$\varphi_{q_i} - \frac{d}{ds}\varphi_{q_i'} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

и для нее мы можем совершить переход к каноническим переменным уже обычным образом, а именно, вместо q_i' ввести новые переменные $p_i = \varphi_{q_i'}$.

Функция H определится равенством $H(q_k, p_k) = \sum_{s=1}^{n} q_s' p_s - \varphi$, и из того, что φ есть однородный полином второй степени от q_s', непосредственно следует, что $H = \varphi$. Выражая φ через q_k и p_k и подставляя $p_k = \theta_{q_k}$ в соотношение $\varphi = 1$, мы и получим уравнение с частными производными для θ. Обозначая для ясности через ψ функцию φ, выраженную через q_k и p_k, будем иметь каноническую систему:

$$\frac{dq_k}{ds} = \psi_{p_k}; \qquad \frac{dp_k}{ds} = -\psi_{q_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Принимая во внимание, что $\psi(q_k, p_k)$ есть однородный полином второй степени от p_k, мы можем утверждать, что написанные уравнения сохранят свой вид, если в них одновременно заменить p_k на αp_k и s — на $\alpha^{-1}s$, где α — произвольная постоянная Пусть $q_k^{(0)}$ и $p_k^{(0)}$ — начальные значения q_k и p_k при $s = 0$. Принимая во внимание сказанное выше, можем утверждать, что в решении канонической системы величины p_k, $p_k^{(0)}$ и s входят только в комбинациях sp_k, $sp_k^{(0)}$, т. е. это решение имеет вид

$$q_k = \varphi_k(r_k, q_k^0); \qquad t_k = \psi_k(r_k, q_k^{(0)}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

где $t_k = sp_k$ и $r_k = sp_k^0$. Принимая во внимание соотношение $\psi(q_k, p_k) = 1$ и тот факт, что $t_k = sp_k$, можно утверждать, что квадрат геодезического расстояния от точки $(q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, \ldots, q_n^{(0)})$ до точки $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ может быть выражен формулой:

$$s^2 = \Gamma = \psi(q_k, t_k) = \psi[q_k, \psi_k(r_k, q_k^{(0)})].$$

Пользуясь равенствами $q_k = \varphi_k(r_k, q_k^0)$, мы можем выразить r_k через q_k и $q_k^{(0)}$ и, таким образом, правая часть написанной формулы выразится через q_k и $q_k^{(0)}$.

91. Теорема Якоби. Если мы полностью проинтегрируем систему обыкновенных дифференциальных уравнений (175), то можем, конечно, строить всевозможные поля, соответствующие данной вариационной задаче, и тем самым можем найти любое решение уравнения (176). Мы вернемся к этому вопросу во второй части настоящего тома, когда будем излагать теорию уравнений с частными производными первого порядка. Наоборот, если мы умеем находить решения уравнения (176), то, как сейчас покажем, мы

сможем построить общий интеграл системы (175). Необходимо только уточнить, какой смысл имеет наше утверждение, что мы умеем находить решения уравнения (176). Это уравнение должно определить функцию θ от независимых переменных $(x, q_1, \ldots, q_n)$. Оно не содержит самой функции θ, и потому, добавляя к любому его решению произвольное постоянное слагаемое a, мы получим так же решение уравнения. Назовем *полным интегралом* этого уравнения такое его решение, которое, кроме указанной выше постоянной a, содержит еще n произвольных постоянных

$$\theta = \theta(x, q_1, \ldots, q_n, a_1, \ldots, a_n) + a, \tag{182}$$

причем мы считаем, что определитель, элементами которого являются частные производные второго порядка $\theta_{q_i a_k}$, отличен от нуля. Как оказывается, знание полного интеграла уравнения (176) дает нам возможность при помощи простых дифференцирований построить общий интеграл системы (175), а именно, имеет место следующая теорема Якоби:

Если известен полный интеграл (182) *уравнения* (176), *то равенства*

$$\theta_{a_k} = b_k; \tag{183}$$

$$\theta_{q_k} = p_k \qquad (k = 1, \ldots, n), \tag{183$_1$}$$

где a_k и b_k — произвольные постоянные, дают решение системы (175), *зависящее от $2n$ произвольных постоянных.*

В силу сделанного предположения, что определитель $\|\theta_{q_i a_k}\|$ отличен от нуля, мы можем решить уравнения (183) относительно q_i, причем переменные q_k выразятся через независимую переменную x и произвольные постоянные a_s и b_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$. Подставляя эти выражения q_k в левые части уравнений (183$_1$), мы получим выражения p_k также через $x, a_1, \ldots, a_n$, и нам надо показать, что полученные таким образом выражения q_k и p_k удовлетворяют системе (175). Дифференцируя уравнения (183) по x и уравнение (176) по a_i, получаем $2n$ равенств:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x\, \partial a_i} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2\theta}{\partial q_s\, \partial a_i} \cdot \frac{dq_s}{dx} = 0,$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x\, \partial a_i} + \sum_{s=1}^{n} H_{p_s} \frac{\partial^2\theta}{\partial q_s\, \partial a_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

откуда следуют n равенств:

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2\theta}{\partial q_s\, \partial a_i} \left(\frac{dq_s}{dx} - H_{p_s}\right) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Согласно условию $\| \theta_{q_s a_i} \| \neq 0$, откуда непосредственно следует, что $\frac{dq_s}{dx} = H_{p_s}$. Для доказательства справедливости остальных уравнений системы (175) мы дифференцируем уравнения (183_1) по x и уравнение (176) по q_i:

$$\frac{dp_i}{dx} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \, \partial q_i} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 \theta}{\partial q_i \, \partial q_s} \frac{dq_s}{dx}, \quad 0 = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \, \partial q_i} + \sum_{s=1}^{n} H_{p_s} \frac{\partial^2 \theta}{\partial q_s \, \partial q_i} + H_{q_i}.$$

Вычитая почленно и пользуясь уже доказанными равенствами, мы и получим остальные уравнения системы (175).

Мы видим, таким образом, что нахождение полного интеграла уравнения (176) дает общий интеграл системы (175), определяющей экстремали нашей задачи. Соотношение между системой (175) и уравнением (176) соответствует тому геометрическому факту, что всякое поле экстремальной задачи может быть описано либо при помощи самих экстремалей, образующих поле, либо при помощи трансверсальных поверхностей этого поля.

92. Разрывные решения. В некоторых случаях оказывается, что среди линий, обладающих непрерывно меняющейся касательной, нет такой, которая дает экстремум некоторому функционалу, и возникает вопрос, нельзя ли получить решение среди линий более общего класса, например, среди линий, которые в отдельных точках не имеют касательной, но имеют все же определенную касательную слева и определенную касательную справа (линии с угловыми точками). Мы проведем в общих чертах рассуждение для случая простейшего функционала

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') \, dx, \tag{184}$$

не останавливаясь на детальных доказательствах.

Рассмотрим сначала один частный пример, а именно, функционал вида

$$J = \int_{-1}^{1} y^2 (1 - y')^2 \, dx, \tag{185}$$

причем искомая экстремаль должна проходить через точки $M_0(-1, 0)$ и $M_1(1, 1)$. Для любой такой кривой функционал (185) будет, очевидно, положительным. Построим линию, состоящую из двух отрезков прямых линий и соединяющую точки M_0 и M_1, а именно, образуем ломаную линию M_0OM_1, где O — начало координат плоскости (x, y). Нетрудно видеть, что функционал (185) для взятой ломаной линии обращается в нуль, так как $y = 0$ вдоль отрезка M_0O и $y' = 1$ вдоль отрезка OM_1. Эта ломаная

линия, имеющая угловую точку в начале координат, будет, очевидно, давать экстремум интегралу (185).

Проведем теперь рассуждение для общего случая. Положим, что некоторая линия, соединяющая точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) и имеющая одну угловую точку (x_2, y_2), дает экстремум функционалу (184) по сравнению с другими, к ней достаточно близкими кривыми, которые также могут иметь угловую точку и должны проходить через заданные конечные точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1). Мы можем считать закрепленными не только конечные точки, но и точку (x_2, y_2), которая является угловой точкой для исследуемой кривой. Эта кривая при этом предположении тем более должна давать экстремум интегралу (184). Отсюда непосредственно следует, что участки кривой, соответствующие промежуткам $[x_0, x_2]$ и $[x_2, x_1]$ оси x, должны являться экстремалями задачи, т. е. должны удовлетворять соответствующему уравнению Эйлера. Существенно выяснить те условия, которым должны удовлетворять ордината и угловые коэффициенты касательных к кривой в точке излома. Определим вариацию интеграла (184), приняв нашу кривую за исходную и разбивая весь промежуток $[x_0, x_1]$ на две части: $[x_0, x_2]$ и $[x_2, x_1]$.

Принимая во внимание, что концы кривой закреплены и что оба участка кривой удовлетворяют уравнению Эйлера, мы получим следующее выражение для этой первой вариации:

$$\delta J = [F - y'F_{y'}]_{x_2-0}\,\delta x_2 - [F - y'F_{y'}]_{x_2+0}\,\delta x_2 + \\ + [F_{y'}]_{x_2-0}\,\delta y_2 - [F_{y'}]_{x_2+0}\,\delta y_2.$$

Ввиду произвольности δx_2 и δy_2 мы получаем следующие два условия, которые должны выполняться в угловой точке нашей кривой, если эта кривая дает экстремум интегралу (184):

$$[F - y'F_{y'}]_{x_2-0} = [F - y'F_{y'}]_{x_2+0}; \quad [F_{y'}]_{x_2-0} = [F_{y'}]_{x_2+0}. \tag{186}$$

Эти условия называются обычно *условиями Вейерштрасса-Эрдманна.* Предлагаем читателю проверить, что они действительно выполнены в начале координат для той ломаной линии, которая дает экстремум интегралу (185).

Отметим, что условия (186) сводятся к требованию непрерывности выражений $F - y'F_{y'}$ и $F_{y'}$ в той точке $x = x_2$, в которой y' имеет скачок. Эти выражения будут, очевидно, непрерывными в остальных точках, где y' — непрерывна. Положим, что нам удалось построить общий интеграл уравнения Эйлера. Значения двух произвольных постоянных, входящих в этот интеграл, будут, вообще говоря, различными для промежутков $[x_0, x_2]$ и $[x_2, x_1]$. Пусть

$$y = \omega_1(x, C_1, C_2)$$

— общий интеграл для промежутка $[x_0, x_2]$ и

$$y = \omega_2(x, C_3, C_4)$$

— для промежутка $[x_2, x_1]$. Нам надо определить пять постоянных, а именно, — значения произвольных постоянных C_1, C_2, C_3, C_4 и абсциссу x_2 точки излома. Мы имеем два предельных условия при $x=x_0$ и $x=x_1$, а также два условия (186). Недостающее пятое равенство мы получим из условия непрерывности кривой при $x=x_2$:

$$\omega_1(x_2, C_1, C_2)=\omega_2(x_2, C_3, C_4).$$

Совершенно аналогичным образом мы могли бы рассмотреть и тот случай, когда линии имеют несколько угловых точек.

Можно получить аналогичные условия и для разрывной задачи в случае кратного интеграла:

$$J=\iint\limits_B F(x, y, u, u_x, u_y)\,dx\,dy. \tag{187}$$

Положим, что некоторая поверхность $u(x, y)$ дает экстремум этому интегралу при закрепленном контуре и наличии некоторой линии излома. Иначе говоря, функция $u(x, y)$ должна быть определена в области B плоскости (x, y), должна иметь заданные значения на контуре этой области, но внутри области может существовать линия λ, вдоль которой производные первого порядка функции $u(x, y)$ терпят разрыв непрерывности так, что с обеих сторон этой линии указанные частные производные имеют определенные пределы, но они могут быть различными. Среди такого класса функций ищется функция, дающая относительный экстремум интегралу (187).

Положим, что некоторая функция действительно дает такой экстремум и имеет внутри B линию прерывности λ, которая разбивает область B на две части: B_1 и B_2. Рассуждая совершенно так же, как и выше, мы убедимся, что функция $u(x, y)$ в областях B_1 и B_2 должна быть решением уравнения Остроградского. Существенным моментом является выяснение тех условий, которым должны удовлетворять функция $u(x, y)$ и ее частные производные первого порядка в точках линии λ. Пусть φ — некоторая функция, содержащая $u(x, y)$ и ее частные производные первого порядка. Такая функция при приближении к точкам линии λ из областей B_1 и B_2 будет иметь, вообще говоря, различные пределы, которые мы обозначим через φ_1 и φ_2. Введем специальное обозначение для разности этих пределов, т. е. для скачка функции φ:

$$[\varphi]=\varphi_2-\varphi_1.$$

Обратимся к формуле (33), дающей вариацию двойного интеграла. Первое слагаемое правой части можно записать в таком виде:

$$\int\limits_l \delta u\cdot\left(F_{u_x}\frac{dy}{ds}-F_{u_y}\frac{dx}{ds}\right)ds,$$

или, принимая во внимание, что $\frac{dy}{ds}$ и $\left(-\frac{dx}{ds}\right)$ дают направляющие косинусы внешней нормали n к контуру l, мы можем записать упомянутое слагаемое в виде

$$\int_l \delta u \left[F_{u_x} \cos(n, x) + F_{u_y} \cos(n, y)\right] ds.$$

Применим теперь формулу (33) к интегралу (187), разбивая область B на части B_1 и B_2. В каждой из последних областей функция $u(x, y)$ должна удовлетворять уравнению Остроградского, и потому двойные интегралы будут равны нулю. Контуры областей B_1 и B_2 будут состоять из части контура l и линии λ. На контуре l мы имеем $\delta u = 0$, а на контуре λ направляющие косинусы внешней нормали для областей B_1 и B_2 отличаются знаком. Таким образом, окончательно получим

$$\delta J = \int_\lambda \delta u \left\{\left[F_{u_x}\right] \cos(n, x) + \left[F_{u_y}\right] \cos(n, y)\right\} ds,$$

где n — направление нормали к λ, внешней по отношению B_2. Из условия $\delta J = 0$ и произвольности δu получим одно из условий, которое должно иметь место вдоль λ:

$$\left[F_{u_x}\right] \cos(n, x) + \left[F_{u_y}\right] \cos(n, y) = 0. \tag{188}$$

Мы получили только одно условие, потому что при рассмотрении первой вариации интеграла (187) считали саму линию λ фиксированной. Более подробное рассмотрение вариации интеграла приводит еще ко второму условию вида [1])

$$[F] = (F_{u_x})_2 [u_x] + (F_{u_y})_2 [u_y], \tag{189}$$

где значок 2 у круглых скобок показывает, что надо брать вдоль λ значение величины, стоящей в скобках, со стороны области B_2. Условия (188) и (189) аналогичны условиям (186) для функционала (184).

93. Односторонний экстремум. Выше мы рассматривали задачу [76]: среди линий, соединяющих точки M_0 и M_1 плоскости (x, y), найти ту, которая при вращении вокруг оси OX образует поверхность с наименьшей площадью.

Функционал, соответствующий этой задаче, имеет вид

$$J = \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Строго говоря, мы должны при этом поставить условие, чтобы кривая $y(x)$ лежала над осью OX, т. е. чтобы выполнялось нера-

[1]) Н. М. Гюнтер, Курс вариационного исчисления. Гостехиздат, 1941.

венство $y(x) \geqslant 0$. Такие задачи вариационного исчисления, при которых искомые функции (или их производные) должны подчиняться некоторым неравенствам, называются обычно задачами на односторонний экстремум.

Рассмотрим простейшую задачу об экстремуме функционала

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx \tag{190}$$

при дополнительном условии вида

$$y - \varphi(x) \geqslant 0,$$

где $\varphi(x)$ — заданная функция, имеющая непрерывную производную. Иными словами, искомая кривая $y(x)$ должна находиться над кривой $y = \varphi(x)$. Кроме того, искомая кривая должна проходить через заданные точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$. Искомая кривая может состоять из участков, находящихся над кривой $y = \varphi(x)$, и из участков самой этой кривой. На рис. 3 мы имеем два участка (M_0A и BM_1), находящихся над кривой, и участок AB самой кривой. Для участков M_0A и BM_1 возможна двусторонняя вариация и, как всегда, эти участки должны быть экстремалями интеграла (190). На участке AB возможна лишь односторонняя вариация, при которой $\delta y \geqslant 0$. Принимая во внимание формулу (17) для вариации интеграла (190), можем утверждать, что для минимума этого интеграла необходимо, чтобы вдоль AB мы имели:

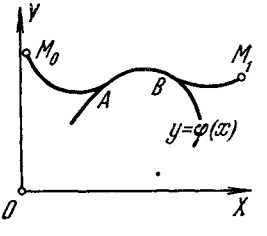

Рис. 3.

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \geqslant 0.$$

Кроме того, для существования экстремума должно быть выполнено некоторое условие в точках A и B. Не останавливаясь на выяснении этого вопроса, отметим лишь, что в простейшем случае это условие сводится к тому, чтобы в точках A и B линии M_0A и BM_1 имели общую касательную с линией AB.

94. Вторая вариация. До сих пор мы занимались исследованием лишь первой вариации для функционалов различных типов. Равенство нулю этой первой вариации давало нам необходимое условие того, что данная линия или поверхность сообщает экстремум соответствующему функционалу. Это необходимое условие совершенно аналогично тому факту из дифференциального исчисления, что для того, чтобы некоторая функция нескольких переменных

достигала в некоторой точке экстремума, необходимо, чтобы в этой точке ее полный дифференциал первого порядка обращался в нуль. В дифференциальном исчислении мы имели в некоторых случаях и достаточные условия, для формулировки которых нам были необходимы уже частные производные второго порядка от исследуемой функции. В вариационном исчислении установление достаточных условий представляется гораздо более трудной задачей. Мы будем рассматривать только простейший функционал

$$J=\int_{x_0}^{x_1} F(x,\ y,\ y')\,dx \tag{191}$$

в случае закрепленных концов. Рассмотрим, как всегда, близкие кривые $y(x)+\alpha\eta(x)$ и определим вторую вариацию функционала (191), как тот член в разложении $J(\alpha)$ по степеням α, который содержит α^2, т. е. положим

$$\delta^2 J=\frac{\alpha^2}{2}\left[\frac{d^2J}{d\alpha^2}\right]_{\alpha=0}.$$

Это приводит нас непосредственно к следующей формуле:

$$\delta^2 J=\frac{\alpha^2}{2}\int_{x_0}^{x_1}(P\eta^2+2Q\eta\eta'+R\eta'^2)\,dx, \tag{192}$$

где

$$P=F_{yy};\quad Q=F_{yy'};\quad R=F_{y'y'}. \tag{193}$$

Так как $2Q\eta\eta'=Q\frac{d(\eta^2)}{dx}$, то, предполагая наличие соответствующих производных у F, интегрируя по частям и принимая во внимание, что $\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$, получим

$$\delta^2 J=\frac{\alpha^2}{2}\int_{x_0}^{x_1}(S\eta^2+R\eta'^2)\,dx,\ \text{где}\ S=P-\frac{dQ}{dx}. \tag{194}$$

Мы считаем, что необходимое условие экстремума выполнено, т. е. что кривая $y(x)$ является экстремалью. Будем для определенности говорить о минимуме интеграла (191). Функция $J(\alpha)$ должна иметь минимум при $\alpha=0$, следовательно, необходимым условием минимума является тот факт, чтобы $\delta^2 J\geqslant 0$ при любом выборе $\eta(x)$. Покажем, что отсюда непосредственно вытекает, что вдоль нашей кривой должно иметь место неравенство $R\geqslant 0$. Действительно, положим, что при некотором значении $x=c$ мы имеем на нашей кривой обратное неравенство $R(c)<0$. В силу предполагаемой непрерывности $R(x)$ это неравенство будет иметь место и на некотором достаточно малом промежутке $[c-\varepsilon,\ c+\varepsilon]$. Определим теперь функцию $\eta(x)$ так, чтобы она обращалась

в нуль вне упомянутого промежутка и на его концах, имела все необходимые производные, была достаточно малой по абсолютной величине на упомянутом промежутке, но совершала бы на этом промежутке достаточно быстрые колебания. При таком выборе функции $\eta(x)$ интеграл (194) сведется к интегралу по промежутку $[c-\varepsilon,\ c+\varepsilon]$, в котором функция $R(x)$ имеет, по предположению, отрицательные значения. Под знаком интеграла будет превалировать слагаемое, содержащее $\eta'^2(x)$, и величина интеграла окажется отрицательной, что противоречит указанному выше необходимому условию минимума интеграла (191). Итак, для того, чтобы экстремаль $y(x)$ давала минимум интегралу (191), необходимо, чтобы вдоль этой экстремали выполнялось условие:

$$F_{y'y'} \geqslant 0. \tag{195}$$

Аналогичным образом, для того чтобы экстремаль давала максимум интегралу (191), необходимо, чтобы вдоль этой экстремали выполнялось условие

$$F_{y'y'} \leqslant 0.$$

Приведенное условие называется обычно *условием Лежандра.*

95. Условие Якоби. Прежде чем переходить к дальнейшему исследованию второй вариации, напомним некоторые сведения о корнях решений линейных уравнений второго порядка **[II; 31]**:

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0, \tag{196}$$

причем коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ считаются непрерывными в замкнутом промежутке $[x_0,\ x_1]$, к которому и относятся все дальнейшие результаты. Если $x=c$ — какая-либо точка из указанного промежутка, то любые начальные данные

$$y(c)=\alpha;\ \ y'(c)=\beta$$

определяют единственное решение уравнения (196), и это решение существует во всем промежутке $[x_0,\ x_1]$. Если $\alpha=\beta=0$, то $y(x)\equiv 0$. Этим и исчерпываются все решения уравнения (196). Если x_2 лежит внутри $[x_0,\ x_1]$, $y(x)$ — нетривиальное решение уравнения (196) и $y(x_2)=0$, то $y'(x_2)\neq 0$ и $y(x)$ меняет знак при переходе через корень $x=x_2$. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — какие-либо два решения уравнения (196) и они имеют общий корень, то они линейно зависимы. Если эти решения имеют общий корень $x=x_2$ $(x_0\leqslant x_2\leqslant x_1)$

$$y_1(x_2)=0;\ \ y_1'(x_2)=\beta_1;\ \ y_2(x_2)=0;\ \ y_2'(x_2)=\beta_2\ \ (\beta_1 \text{ и } \beta_2\neq 0),$$

то эти решения линейно зависимы

$$\beta_2 y_1(x)=\beta_1 y_2(x)$$

и, следовательно, имеют общие корни.

Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы, то их корни перемежаются, т. е. между двумя последовательными корнями одного из решений лежит один и только один корень другого решения.

Сделаем некоторые добавления к сказанному выше. Пусть $y_0(x)$ — решение уравнения (196), удовлетворяющее условию

$$y_0(x_0)=0; \quad y_0'(x_0)=1.$$

Положим, что это решение $y_0(x)$ не имеет корней при $x_0<x\leqslant x_1$. При этом никакое решение не может иметь более одного корня в промежутке $[x_0, x_1]$ в силу упомянутой выше перемежаемости корней линейно-независимых решений, но существуют решения, не имеющие ни одного корня в промежутке $[x_0, x_1]$. Докажем это последнее утверждение. Пусть $y_1(x)$ — решение уравнения (196), определяемое начальными условиями

$$y_1(x_0)=k; \quad y_1'(x_0)=1, \tag{197}$$

где k — малое положительное число. Во всяком промежутке $0\leqslant k\leqslant\delta$, где δ — фиксированное положительное число, ряд, полученный при построении решения $y_1(x)$ **[II; 50]**, сходится равномерно относительно k, как в этом нетрудно убедиться, и следовательно, $y_1(x)$ есть непрерывная функция от k при любом x из $[x_0, x_1]$ и при $0\leqslant k\leqslant\delta$. При $k=0$ решение $y_1(x)$ есть $y_0(x)$ и $y_0(x_1)>0$ по условию, а следовательно, $y_1(x_1)>0$ при положительных k, достаточно близких к нулю. Отсюда непосредственно следует, что $y_1(x)$ при указанных k не имеет корней в промежутке $[x_0, x_1]$. Действительно, $y_1(x_0)=k$ и $y_1(x_1)>0$ оба положительны. Если бы $y_1(x)$ имело корни внутри $[x_0, x_1]$, то их число не меньше двух, ибо $y_1(x)$ должно менять знак при переходе x через корень, а мы видели выше, что если $y_0(x)$ не имеет корней при $x_0<x\leqslant x_1$, то никакое решение не может иметь более одного корня в промежутке $[x_0, x_1]$.

Возвращаемся к исследованию второй вариации и будем считать, что вдоль исследуемой экстремали $y=y(x)$ выполнено условие более сильное, чем условие (195), а именно

$$F_{y'y'}>0 \quad (x_0\leqslant x\leqslant x_1). \tag{198}$$

Это — так называемое *усиленное условие Лежандра.*

Рассмотрим интеграл, входящий в формулу (194), заменяя букву η буквой u:

$$K(u)=\int_{x_0}^{x_1}(Su^2+Ru'^2)\,dx. \tag{199}$$

Уравнение Эйлера для этого интеграла имеет вид

$$L(u)=\frac{d}{dx}(Ru')-Su=0, \tag{200}$$

причем $R = F_{y'y'}$ в этом уравнении есть коэффициент при u'' и в силу условия (198) мы, деля обе части его на R, получим уравнение вида (196) с непрерывными в промежутке $[a, b]$ коэффициентами $p(x)$ и $q(x)$. Таким образом, для уравнения (200) имеет место все, что мы говорили выше о решениях уравнения (196). Принимая во внимание, что $Ru'^2\,dx = Ru'\,du$, интегрируя по частям, получим при условиях $u(x_0) = u(x_1) = 0$:

$$K(u) = -\int_{x_0}^{x_1} uL(u)\,dx. \tag{201}$$

Пусть $u_0(x)$ — решение уравнения (200), удовлетворяющее начальным условиям

$$u_0(x_0) = 0; \quad u_0(x_0) = 1. \tag{202}$$

Существенным для дальнейшего будет тот факт, имеет ли решение $u_0(x)$ корни внутри промежутка $[x_0, x_1]$. Оказывается, что если такие корни имеются, то исследуемая экстремаль не может давать минимум интегралу (191).

Уравнение (200) называется обычно уравнением Якоби и, если $u_0(x) \neq 0$ при $x_0 < x < x_1$, то говорят, что экстремаль $y(x)$ в промежутке (x_0, x_1) удовлетворяет условию Якоби, а если $u_0(x) \neq 0$ при $x_0 < x \leqslant x_1$, то говорят, что экстремаль $y(x)$ удовлетворяет *усиленному условию Якоби*. Заметим, что коэффициенты S и R уравнения (200) по самому их определению зависят от экстремали $y(x)$, и, таким образом, высказанное выше условие является действительно условием, наложенным на экстремаль $y(x)$.

Из сказанного выше следует, что если выполнено условие Якоби, то никакое решение уравнения (200) не может иметь внутри $[x_0, x_1]$ больше одного корня.

Предположим, что выполнены усиленные условия Якоби и Лежандра.

Рассмотрим теперь вместо решения $u_0(x)$ другое решение уравнения (200), а именно, решение $u_1(x)$, удовлетворяющее начальным данным

$$u_1(x_0) = k; \quad u_1'(x_0) = 1, \tag{203}$$

где $k > 0$ настолько мало, что решение $u_1(x)$ строго положительно во всем замкнутом промежутке $[x_0, x_1]$. Пользуясь этим решением уравнения (200), мы сможем сейчас привести выражение (194) к такому виду, из которого будет непосредственно следовать, что $\delta^2 J \geqslant 0$.

Пусть $\omega(x)$ — любая функция с непрерывной производной. Мы имеем очевидное равенство:

$$\int_{x_0}^{x_1} (2\eta\eta'\omega + \eta^2\omega')\,dx = 0,$$

поскольку подынтегральная функция представляет собой полную производную от функции $\eta^2\omega$, равной нулю на концах промежутка. Умножая написанный интеграл на $\frac{\alpha^2}{2}$ и прибавляя к правой части формулы (194), получим

$$\delta^2 J = \frac{\alpha^2}{2}\int_{x_0}^{x_1}\left[(S+\omega')\eta^2 + 2\omega\eta\eta' + R\eta'^2\right]dx.$$

Потребуем, чтобы подынтегральная функция в написанном интеграле была полным квадратом, что сводится к равенству:

$$\omega^2 - R(S+\omega') = 0.$$

Полагая в этом уравнении $\omega = -R\frac{u'}{u}$, мы придем как раз к уравнению (200), т. е. в качестве функции ω мы можем взять функцию $\omega = -R\frac{u_1'}{u_1}$, причем для нас существенно, что $u_1(x)$ не обращается в нуль во всем замкнутом промежутке $[x_0, x_1]$. При таком выборе функции ω мы приведем формулу (194) к виду

$$\delta^2 J = \frac{\alpha^2}{2}\int_{x_0}^{x_1} R\left(\eta' + \frac{\omega}{R}\eta\right)^2 dx, \tag{204}$$

откуда следует $\delta^2 J \geqslant 0$, причем $\delta^2 J = 0$ только в случае

$$\eta' + \frac{\omega}{R}\eta = 0, \quad x \in (x_0, x_1). \tag{205}$$

Но из (205) и того, что $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$, следует, что $\eta(x) \equiv 0$ при $x \in [x_0, x_1]$, ибо

$$\eta(x) = \eta(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x}\omega(\zeta)R^{-1}(\zeta)\,d\zeta}$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему:

Теорема. *Если экстремаль удовлетворяет усиленным условиям Лежандра и Якоби, то для такой экстремали*

$$\delta^2 J \geqslant 0, \tag{206}$$

причем знак равенства имеет место только в случае $\eta(x) \equiv 0$.

Следствие. Рассмотрим теперь вместо функционала (199) функционал

$$\int_{x_0}^{x_1}(Su^2 + Ru'^2)\,dx - k\int_{x_0}^{x_1} u'^2\,dx, \tag{207}$$

где k — малое положительное число. Соответственное уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{d}{dx}[(R-k)u'] - Su = 0. \tag{208}$$

В силу усиленных условий Лежандра и Якоби для функционала (207) можно выбрать $k>0$ настолько малым, что $R-k>0$ в промежутке $[x_0, x_1]$ и что решение уравнения (208), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x_0) = 0; \quad u'(x_0) = 1, \tag{209}$$

не обращается в нуль при $x_0 < x \leqslant x_1$. При этом, применяя доказанную теорему к функционалу (207), получим для $\eta \not\equiv 0$

$$\int_{x_0}^{x_1} (S\eta^2 + R\eta'^2)\, dx > k \int_{x_0}^{x_1} \eta'^2\, dx, \tag{210}$$

где R и S взяты на первоначальной экстремали $y = y(x)$.

96. Слабый и сильный экстремум. Говорят, что экстремаль $y = y(x)$ дает *слабый экстремум* интегралу (191), если она дает экстремум (минимум или максимум) этому интегралу по сравнению со всеми кривыми $y(x) + \eta(x)$, расположенными в ее ε-окрестности первого порядка [72], т. е. со всеми кривыми, достаточно близкими к ней по ординате и по угловому коэффициенту касательной

$$|\eta(x)| \leqslant \varepsilon; \quad |\eta'(x)| \leqslant \varepsilon. \tag{211}$$

Если же экстремаль дает экстремум интегралу (191) по сравнению со всеми кривыми, близкими только по ординате, т. е. только $|\eta(x)| \leqslant \varepsilon$, то говорят, что экстремаль дает *сильный экстремум* интегралу. Очевидно, что всякий сильный экстремум является и слабым экстремумом. Обратное утверждение не всегда справедливо. Докажем следующую теорему:

Теорема. *Усиленные условия Лежандра и Якоби достаточны для того, чтобы экстремаль давала слабый экстремум интегралу* (191).

Напомним, что функция $F(x, y, y')$ считается непрерывной вместе с ее производными до второго порядка в некоторой области B плоскости (x, y) и при любых значениях y'. Считается, что исследуемая экстремаль функционала

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx$$

находится внутри B. Пусть $\eta(x)$ — функция с непрерывной производной в промежутке $[x_0, x_1]$, равной нулю на его концах. Рассмотрим разложение разности

$$J(y + \alpha\eta) - J(y)$$

по формуле Тейлора до производных второго порядка и в результате положим $\alpha=1$:

$$J(y+\eta)-J(y)=$$
$$=\int_{x_0}^{x_1}(F_y\eta+F_{y'}\eta')\,dx+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}(F_{yy}\eta^2+2F_{yy'}\eta\eta'+F_{y'y'}\eta'^2)\,dx+\delta, \quad (212)$$

где

$$\delta=\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}\left[(\tilde{F}_{yy}-F_{yy})\,\eta^2+2\,(\tilde{F}_{yy'}-F_{yy'})\,\eta\eta'+(\tilde{F}_{y'y'}-F_{y'y'})\,\eta'^2\right]dx$$

и $\tilde{F}_{yy}$, $\tilde{F}_{yy'}$, $\tilde{F}_{y'y'}$ — значение соответствующих производных при аргументах $(x,\ y(x)+\theta_1(x)\,\eta(x),\ y'(x)+\theta_2(x)\,\eta'(x))$ $(0\leqslant\theta_i(x)\leqslant 1,$ $i=1,\ 2)$. В силу непрерывности производных второго порядка от F можно записать δ в виде

$$\delta=\int_{x_0}^{x_1}(\varepsilon_1\eta^2+2\varepsilon_2\eta\eta'+\varepsilon_3\eta'^2)\,dx, \quad (213)$$

где $\varepsilon_k\to 0$ $(k=1,\ 2,\ 3)$ при $|\eta|\to 0$ и $|\eta'|\to 0$.

Принимая во внимание, что для экстремали

$$\int_{x_0}^{x_1}(F_y\eta+F_{y'}\eta')\,dx=0,$$

и приводя второе слагаемое правой части (212) к виду (194), получим

$$J(y+\eta)-J(y)=\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}(S\eta^2+R\eta'^2)\,dx+\delta. \quad (214)$$

Оценим интеграл от η^2 через интеграл от η'^2. По неравенству Буняковского

$$\eta^2(x)=\left(\int_{x_0}^{x}\eta'(t)\,dt\right)^2\leqslant(x-x_0)\int_{x_0}^{x}\eta'^2(t)\,dt\leqslant(x-x_0)\int_{x_0}^{x_1}\eta'^2(t)\,dt,$$

откуда

$$\int_{x_0}^{x_1}\eta^2(x)\,dx\leqslant\frac{(x_1-x_0)^2}{2}\int_{x_0}^{x_1}\eta'^2(x)\,dx. \quad (215)$$

Оценим теперь величину δ. В силу неравенства Коши

$$|2\varepsilon_2\eta\eta'|\leqslant|\varepsilon_2|\,(\eta^2+\eta'^2).$$

Принимая во внимание (215) и то, что при любом заданном $\varepsilon > 0$ существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что $|\varepsilon_k| \leqslant \varepsilon$ при $|\eta| \leqslant \varepsilon_0$ и $|\eta'| \leqslant \varepsilon_0$, получим:

$$|\delta| \leqslant \int_{x_0}^{x_1} [(|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|)\eta^2 + (|\varepsilon_3| + |\varepsilon_2|)\eta'^2]\, dx,$$

откуда

$$|\delta| \leqslant 2\varepsilon\left(1 + \frac{(x_1 - x_0)^2}{2}\right)\int_{x_0}^{x_1} \eta'^2\, dx$$

и, принимая во внимание (210), получаем

$$J(y+\eta) - J(y) > \left[\frac{k}{2} - 2\varepsilon\left(1 + \frac{(x_1 - x_0)^2}{2}\right)\right]\int_{x_0}^{x_1} \eta'^2\, dx,$$

откуда и следует, что

$$J(y+\eta) > J(y),$$

если $\eta(x)$ обладает указанными выше свойствами и не равно тождественно нулю. Теорема о слабом минимуме доказана.

Можно показать, что если выполнены усиленные условия Лежандра и Якоби и, кроме того, $F_{y'y'}(x, y, p)$ положительно для всякого конечного значения p в некоторой области, содержащей экстремаль $y(x)$ внутри, то эта экстремаль дает сильный минимум. Это связано с теорией поля экстремалей, на которой мы кратко остановимся в [98].

Отметим еще, что если на экстремали соблюдено усиленное условие Лежандра, но решение $u_0(x)$ уравнения (200), удовлетворяющее условиям (202), имеет корни внутри $[x_0, x_1]$, то эта экстремаль не дает минимума интегралу (191).

97. Случай нескольких функций. Приведем результаты, аналогичные результатам из [95] и [96], для случая нескольких функций, т. е. для функционалов вида

$$J(y_1, \ldots, y_n) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')\, dx. \qquad (216)$$

Методы доказательств принципиально те же, что и выше.

Положим, что $y_k = y_k(x)$ $(k = 1, \ldots, n)$ — экстремаль функционала (216), т. е. функции $y_k(x)$ удовлетворяют уравнениям Эйлера из [73]. Пусть $\eta_k(x)$ $(k = 1, \ldots, n)$ — добавки к функциям $y_k(x)$, удовлетворяющие обычным условиям гладкости и предельным условиям

$$\eta_k(x_0) = \eta_k(x_1) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Подставляя функции $y_k(x)$ в выражение F и ее производных по аргументам y_k и y'_k, получаем две квадратные таблицы функций от x:

$$S_{ik}=\left(F_{y_i y_k}-\frac{d}{dx}F_{y_i y'_k}\right); \quad R_{ik}=F_{y'_i y'_k} \qquad (i,\ k=1,\ \ldots,\ n). \quad (217)$$

В дальнейшем для краткости воспользуемся обозначениями

$$(\varphi,\ \psi)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)\psi_k(x) \qquad (k=1,\ \ldots,\ n),$$

через $S\eta$ и $S\eta'$ будем обозначать результат линейного преобразования

$$(S\eta)_i=\sum_{k=1}^{n}S_{ik}\eta_k, \quad (S\eta')_i=\sum_{k=1}^{n}S_{ik}\eta'_k \quad (i=1,\ \ldots,\ n),$$

и аналогично для $R\eta$ и $R\eta'$. Вторая вариация приводится при $\alpha=1$ к формуле

$$\delta^2 J(y)=\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}[(S\eta,\ \eta)+(R\eta',\ \eta')]\,dx, \qquad (218)$$

аналогичной (194).

Условие Лежандра выражается положительностью квадратичной формы с коэффициентами R_{ik} при всех x из промежутка $[x_0,\ x_1]$, т. е. неравенством

$$\sum_{i,\ k=1}^{n}R_{ik}\lambda_i\lambda_k\geqslant 0 \qquad (x_0\leqslant x\leqslant x_1)$$

при всех вещественных λ_s $(s=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, а усиленное условие Лежандра положительной определенностью упомянутой формы, т. е.

$$\sum_{i,\ k=1}^{n}R_{ik}\lambda_i\lambda_k\geqslant c\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 \qquad (x_0\leqslant x\leqslant x_1), \qquad (219)$$

где c — некоторое положительное число.

Роль уравнения (200) играет система уравнений Эйлера [73] для квадратичного функционала (218):

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(S_{ik}+S_{ki})u_i-\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=1}^{n}R_{ik}u'_i\right)=0 \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \quad (220)$$

Пусть

$$u_{k1}(x),\ u_{k2}(x),\ \ldots,\ u_{kn}(x) \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \qquad (221)$$

— решения системы (220) с начальными условиями

$$u_{ks}(x_0)=0; \quad \text{при} \quad s\neq k \text{ и } u'_{kk}(x_0)=1 \qquad (s=1, \ldots, n),$$
$$u'_{ks}(x_0)=0 \tag{222}$$

и $\Delta(x)$ — определитель порядка n с элементами $u_{ki}(x)$. Усиленное условие Якоби состоит в том, что $\Delta(x)$ не обращается в нуль при $x_0<x\leqslant x_1$. Доказывается, что если для экстремали $y_i=y_i(x)$ выполнены усиленные условия Лежандра и Якоби, то такая экстремаль дает слабый минимум функционалу (216).

98. Функция Вейерштрасса. В настоящем параграфе мы приведем некоторые результаты, касающиеся сильного экстремума Отметим прежде всего, что если для некоторой экстремали выполнены усиленные условия Лежандра и Якоби, то эту экстремаль можно окружить полем экстремалей. Положим, что мы имеем на плоскости (x, y) некоторое поле экстремалей, покрывающее область B плоскости (x, y). Угловой коэффициент y' экстремали нашего поля, как мы уже говорили выше, будет функцией точки в области B Введем для этой функции специальное обозначение $y'=t(x, y)$ (функция наклона поля) Пусть $\theta(x, y)$ — основная функция поля, ее полный дифференциал выражается формулой

$$d\theta(x, y)=[F(x, y, t)-tF_y(x, y, t)]\,dx+F_{y'}(x, y, t)\,dy, \tag{223}$$

причем в данном случае прежнюю букву δ мы заменяем обычной буквой d Отсюда непосредственно следует, что криволинейный интеграл от правой части формулы (223) не зависит от пути внутри области B. Этот интеграл можно записать в виде

$$\int_\lambda \left\{F(x, y, t)+\left[\frac{dy}{dx}-t(x, y)\right]F_{y'}(x, y, t)\right\}dx; \tag{224}$$

он называется обычно *инвариантным интегралом Гильберта* Если за кривую λ мы возьмем некоторую экстремаль поля, то вдоль этой экстремали имеется равенство $\frac{dy}{dx}=t(x, y)$, и интеграл (224) приводится к основному интегралу.

$$J=\int_\lambda F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)dx. \tag{225}$$

После этих предварительных указаний перейдем к выводу основной формулы, дающей выражение приращения основного функционала J Пусть λ — некоторая экстремаль этого функционала, соединяющая точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1), и положим, что эту экстремаль можно окружить полем, покрывающим некоторую область B плоскости (x, y) Пусть l — какая-либо другая кривая с непрерывно меняющейся касательной, соединяющая те же точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) и лежащая в области B. Обозначим через $J(l)$ и $J(\lambda)$ значение основного функционала (225) для линий l и λ Величина $J(\lambda)$, как мы видели выше, совпадает с величиной интеграла (224), взятого по λ, а этот последний интеграл не зависит от пути, и мы можем взять его не по экстремали λ, а по кривой l. Мы имеем, таким образом,

$$J(\lambda)=\int_l \left\{F(x, y, t)+\left[\frac{dy}{dx}-t(x, y)\right]F_{y'}(x, y, t)\right\}dx,$$

и, следовательно, получаем такое выражение для разности·

$$J(l)-J(\lambda)=\int_l \left\{F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right)-F(x,\ y,\ t)-\left[\frac{dy}{dx}-t(x,\ y)\right]F_{y'}(x,\ y,\ t)\right\}dx. \tag{226}$$

Напомним, что в этом выражении $t(x,\ y)$ есть наклон поля, а dy/dx есть угловой коэффициент касательной к кривой l. Введем в рассмотрение следующую функцию четырех переменных:

$$E(x,\ y,\ \xi,\ \eta)=F(x,\ y,\ \eta)-F(x,\ y,\ \xi)-(\eta-\xi)F_{y'}(x,\ y,\ \xi), \tag{227}$$

которая называется обычно *функцией Вейерштрасса* для функционала (225). Пользуясь введенной функцией, мы можем переписать формулу (227) в виде

$$J(l)-J(\lambda)=\int_l E\left(x,\ y,\ t,\ \frac{dy}{dx}\right)dx. \tag{228}$$

Написанная формула является основной формулой при исследовании достаточных условий экстремума. В частности, пользуясь этой формулой, можно показать, что для того, чтобы экстремаль $y(x)$ давала сильный минимум функционалу (225), необходимо, чтобы вдоль этой экстремали при любых значениях переменной η выполнялось неравенство:

$$E(x,\ y,\ y',\ \eta)\geqslant 0. \tag{229}$$

Из формулы (228) непосредственно вытекает следующая теорема, дающая уже достаточное условие сильного минимума· *для того чтобы экстремаль $y(x)$ при закрепленных концах давала сильный минимум, достаточно, чтобы ее можно было окружить полем и чтобы существовала такая окрестность $y(x)$, в каждой точке которой при любом значении переменной η выполнялось бы неравенство*

$$E[x,\ y,\ t(x,\ y),\ \eta]\geqslant 0, \tag{230}$$

где $t(x,\ y)$, как и выше, функция наклона поля. Так как мы пользуемся явным уравнением кривых, то при окружении экстремали $y(x)$ полем необходимо потребовать, чтобы семейство экстремалей, образующих поле, имело явное уравнение $y=y(x,\ \alpha)$, где функция $y(x,\ \alpha)$ обладает непрерывными производными до второго порядка.

Разлагая разность $F(x,\ y,\ \eta)-F(x,\ y,\ \xi)$, входящую в функцию Вейерштрасса, по формуле Тейлора до второй степени разности $(\eta-\xi)$, мы можем написать функцию Вейерштрасса в виде

$$E(x,\ y,\ \xi,\ \eta)=\frac{1}{2}(\eta-\xi)^2F_{y'y'}(x,\ y,\ \eta_1),$$

где η_1 заключается между ξ и η. Отсюда непосредственно вытекает, что для положительности функции Вейерштрасса достаточно потребовать, чтобы при любом значении η имело место неравенство $F_{y'y'}(x,\ y,\ \eta)\geqslant 0$. Отсюда получается более простое достаточное условие сильного минимума, а именно, для того, чтобы экстремаль $y(x)$ при закрепленных концах давала сильный минимум, достаточно, чтобы ее можно было окружить полем, в каждой точке которого при любом значении η выполняется неравенство

$$F_{y'y'}(x,\ y,\ \eta)\geqslant 0. \tag{231}$$

Доказательство всех высказанных в настоящем параграфе теорем можно найти в курсе М. А. Лаврентьева и Л. А. Люстерника.

Указанные выше рассуждения проводятся и для случая функционала от нескольких функций $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$

$$J(y)=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx, \tag{232}$$

где $y=(y_1, \ldots, y_n)$ и $y'=(y_1', \ldots, y_n')$ суть векторы с n составляющими. Вводя вектор наклона поля

$$y'=t(x, y),$$

где $t=(t_1, \ldots, t_n)$, можем записать формулу, аналогичную (223), в виде

$$d\theta(x, y)=\left[F(x, y, t)-\sum_{i=1}^{n} t_i F_{y_i'}(x, y, t)\right]dx+\sum_{i=1}^{n} F_{y_i'}(x, y, t)\,dy_i,$$

и соответственным образом перепишется формула (226). Функция Вейерштрасса в рассматриваемом случае будет иметь вид

$$E\left(x, y, t, \frac{dy}{dx}\right)=F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)-F(x, y, t)-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dy_i}{dx}-t_i\right)F_{y_i'}(x, y, t),$$

и аналогично предыдущему формулируется достаточное условие сильного экстремума функционала (232).

99. Примеры. 1. Рассмотрим функционал, соответствующий задаче геометрической оптики на плоскости

$$J=\int_{x_1}^{x_2} n(x, y)\sqrt{1+y'^2}\,dx \qquad (n(x, y)>0).$$

В данном случае

$$F_{y'y'}(x, y, \eta)=\frac{n(x, y)}{(1+\eta^2)^{3/2}}>0$$

при любом значении η, т. е. выполнено условие (231) и, следовательно, если экстремаль, проходящую через точки M_0 и M_1, можно окружить полем, то она дает сильный минимум рассматриваемому функционалу. В случае $n(x, y)=y^{-1}$ экстремалями в полуплоскости $y>0$ будут полуокружности, ортогональные к оси OX. Если точки M_0 и M_1 верхней полуплоскости не лежат на прямой, перпендикулярной к оси OX, то через эти две точки проходит одна определенная экстремаль, и ее можно окружить полем.

2. Возьмем случай $n(x, y)=\sqrt{y+h}$, т. е. рассмотрим интеграл

$$J=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{y+h}\sqrt{1+y'^2}\,dx \qquad (h\text{ — постоянная}>0).$$

Подынтегральная функция не содержит x, и уравнение Эйлера имеет интеграл

$$\sqrt{y+h}\sqrt{1+y'^2}-\frac{\sqrt{y+h}\,y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}=C_1 \quad \text{или} \quad \frac{\sqrt{y+h}}{\sqrt{1+y'^2}}=C_1.$$

Решая последнее равенство относительно y' и интегрируя, получим общий интеграл уравнения Эйлера:

$$y+h-C_1^2=\left(\frac{x}{2C_1}+C_2\right)^2,$$

который представляет собой семейство парабол.

При $C_1=0$ получаем в качестве экстремалей прямые, параллельные оси OY.

Рассмотрим пучок экстремалей, выходящих из начала координат, т. е. примем начальные условия:

$$y|_{x=0}=0; \quad y'|_{x=0}=\alpha.$$

Определяя по этим начальным данным C_1 и C_2, получаем

$$y=\frac{(1+\alpha^2)\,x^2}{4h}+\alpha x.$$

Дифференцируя по α и исключая α, находим огибающую этого семейства парабол:

$$y=\frac{x^2}{4h}-h.$$

Это будет парабола с вершиной $A(0, -h)$ и с осью $x=0$ (рис. 4). На части экстремали от начала координат до любой точки, которая предшествует точке касания этой параболы с огибающей, выполнено усиленное условие Якоби. Кроме того, в силу неравенства

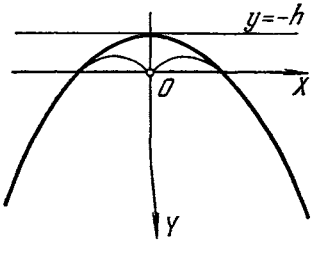

Рис. 4.

$$F_{y'y'}=\frac{\sqrt{y+h}}{(1+y'^2)^{3/2}}>0$$

выполнено и усиленное условие Лежандра, т. е. такую часть экстремали можно окружить полем и, в силу сказанного в предыдущем примере, эта дуга экстремали дает сильный минимум нашему функционалу. Отметим, что из вида нашего функционала вытекает условие $y+h\geqslant 0$, т. е. мы имеем в данном случае задачу на односторонний экстремум. В полуплоскости $y+h>0$ все обстоит обычным образом.

3. Рассмотрим интеграл

$$J=\int_0^1 y'^3\,dx$$

и положим, что требуется провести экстремаль через точки $M_0(0, 0)$ и $M_1(1, 1)$.

Уравнение Эйлера имеет общий интеграл $y=C_1x+C_2$, и экстремаль $y=x$ проходит через заданные точки. В данном случае $F_{yy}=F_{yy'}=0$ и $F_{y'y'}=6y'$, т. е. на экстремали $y=x$ мы имеем $F_{y'y'}=6>0$, и выполнено усиленное условие Лежандра. Уравнение Якоби (200) будет в данном случае $u''=0$, и его решение, удовлетворяющее начальным условиям (202), будет $u_0(x)=x$. Оно не имеет вовсе корней, кроме начального корня $x_0=0$. Таким образом, вдоль отрезка M_0M_1 экстремали $y=x$ выполнены усиленные условия Лежандра и Якоби, и этот отрезок экстремали дает слабый минимум нашему функционалу.

Функция Вейерштрасса (227) имеет вид

$$E(x, y, \xi, \eta)=\eta^3-\xi^3-3(\eta-\xi)\,\xi^2.$$

Вдоль нашей экстремали левая часть неравенства (229) имеет вид

$$E(x, y, y', \eta) = \eta^3 - 3\eta + 2,$$

и существуют значения η, при которых неравенство (229) не выполнено, т. е. экстремаль $y = x$ не может давать сильного минимума.

4. Задача определения геодезических линий на заданной поверхности приводит к функционалу [76]:

$$J = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{E + 2Fv' + Gv'^2}\, du,$$

где E, F и G — заданные функции (u, v), и трехчлен, стоящий под знаком радикала, может принимать лишь положительные значения, т. е. $EG - F^2 > 0$ и $E > 0$.

Мы имеем:

$$F_{v'v'} = \frac{EG - F^2}{(E + 2Fv' + Gv'^2)^{3/2}} > 0,$$

и условие (231) выполнено, т. е. если геодезическую линию можно окружить полем геодезических линий, то она дает сильный минимум нашему функционалу при заданных концах. В частности, на сфере дугу большого круга, меньшую π по радианной мере, можно окружить полем, состоящим из дуг больших кругов.

100. Принцип Остроградского — Гамильтона. Вариационное исчисление играет основную роль при установлении уравнений механики и математической физики. Уравнения эти могут быть получены единообразным путем из некоторого вариационного принципа с помощью понятия энергии. Это последнее понятие, известное из механики систем точек, переносится и на другие физические процессы и приводит, как мы увидим в дальнейшем, при помощи основных принципов вариационного исчисления к некоторой общей схеме составления уравнения математической физики. Мы начнем со случая механики систем материальных точек.

Пусть имеется система n материальных точек, массы которых мы обозначим через m_k и координаты — через (x_k, y_k, z_k). Положим, что движение системы подчинено связям:

$$\varphi_s = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, m) \tag{233}$$

и происходит под действием сил, обладающих силовой функцией:

$$X_k = \frac{\partial U}{\partial x_k}; \quad Y_k = \frac{\partial U}{\partial y_k}; \quad Z_k = \frac{\partial U}{\partial z_k}, \tag{234}$$

причем φ_s и U суть заданные функции координат точек и времени. Кинетическая энергия нашей системы выразится формулой

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k'^2 + y_k'^2 + z_k'^2).$$

Положим, что из некоторого положения I, соответствующего моменту времени $t=t_0$, наша система переместилась к моменту времени $t=t_1$ в другое положение II. Из всех возможных способов, которыми могло осуществиться перемещение системы из I в II, мы выбираем класс допустимых движений системы, а именно тех движений, которые совместимы с заданными связями и в заданный промежуток времени $[t_0, t_1]$ переводят систему из I в II. Принцип Остроградского — Гамильтона утверждает, что *действительное движение системы выделяется из всех допустимых движений тем, что оно удовлетворяет необходимому условию* $\delta J=0$ *экстремума интеграла*

$$J=\int_{t_0}^{t_1}(T+U)\,dt \tag{235}$$

при заданных положениях системы при $t=t_0$ *и* $t=t_1$.

Каждому допустимому положению системы будет соответствовать совокупность $3n$ функций $x_k(t)$, $y_k(t)$, $z_k(t)$, определенных в промежутке $[t_0, t_1]$, удовлетворяющих уравнениям (233) и имеющих заданные значения при $t=t_0$ и $t=t_1$. Мы имеем, таким образом, вариационную задачу с голономными связями (233) и закрепленными границами. Для ее решения мы должны, следуя правилу множителей Лагранжа, составить функцию

$$F=T+U+\sum_{s=1}^{m}\lambda_s(t)\,\varphi_s$$

и для нее написать уравнение Эйлера. В данном случае мы имеем

$$F_{x'_k}=m_k x'_k;\quad F_{x_k}=U_{x_k}+\sum_{s=1}^{m}\lambda_s(t)\frac{\partial\varphi_s}{\partial x_k}$$

и аналогично для координат y_k и z_k, и уравнения Эйлера будут иметь вид

$$m_k x''_k-X_k-\sum_{s=1}^{m}\lambda_s(t)\frac{\partial\varphi_s}{\partial x_k}=0,$$

$$m_k y''_k-Y_k-\sum_{s=1}^{m}\lambda_s(t)\frac{\partial\varphi_s}{\partial y_k}=0,$$

$$m_k z''_k-Z_k-\sum_{s=1}^{m}\lambda_s(t)\frac{\partial\varphi_s}{\partial z_k}=0,$$

т. е. они совпадают с дифференциальными уравнениями действительного движения системы, как это мы и хотели доказать.

Если вместо прямолинейных прямоугольных координат определить положение системы при помощи независимых параметров $q_1, \ldots, q_k$, где $k=3n-m$, то функции T и U будут функциями этих параметров:

$$T(q_1, q_1', \ldots, q_k, q_k', t); \qquad U(q_1, \ldots, q_k, t),$$

уравнения связи отпадут, и мы получим задачу об экстремуме интеграла (235) при закрепленных граничных значениях функций q_k и без всяких связей. Уравнения Эйлера будут иметь вид

$$T_{q_i}+U_{q_i}-\frac{d}{dt}(T_{q_i'}+U_{q_i'})=0,$$

или, так как U не зависит от q_k' [II; 20],

$$T_{q_i}+U_{q_i}-\frac{d}{dt}T_{q_i'}=0 \qquad (i=1, \ldots, k). \tag{236}$$

Каноническими переменными будут в данном случае q_i и p_i, где p_i, называемые обычно *обобщенными импульсами*, определяются формулой

$$p_i=\frac{\partial}{\partial q_i'}(T+U)=T_{q_i'}.$$

Функция H [87] будет

$$H=\sum_{i=1}^{k} q_i'p_i-(T+U)=\sum_{i=1}^{k} q_i'T_{q_i'}-T-U.$$

Если T есть однородный полином второй степени от q_i' [II; 20], то в силу теоремы Эйлера об однородных функциях [I; 154] получим $H=2T-T-U=T-U$, т. е. функция H представляет собой полную энергию системы.

101. Принцип наименьшего действия. Предположим, что ни силовая функция U, ни функции φ_s не содержат t. В этом случае, как известно, имеет место интеграл энергии

$$T-U=h, \tag{237}$$

который выражает тот факт, что сумма кинетической энергии T и потенциальной энергии $(-U)$ во все время движения сохраняет постоянное значение. Далее, в рассматриваемом случае выражения прямолинейных прямоугольных координат через координатные параметры q_s не будут содержать t. Кинетическая энергия будет квадратичной формой относительно производных q_i':

$$2T=\sum_{s=1}^{n} m_s x_s'^2=\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}q_i'q_j' \qquad (a_{ij}=a_{ji}), \tag{238}$$

где a_{ij} суть функции q_s. Пользуясь соотношением (237), мы можем переписать подынтегральную функцию интеграла (235) в виде

$$T+U=2T-h.$$

Отбрасывая постоянное слагаемое, представляя $2T$ в виде $\sqrt{2U+2h}\sqrt{2T}$ и заменяя в одном из множителей $2T$ его выражением, получаемым из формулы (238), мы придем к интегралу вида

$$\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{2U+2h}\sqrt{\sum_{i,\,j=1}^{k}a_{ij}q_i'q_j'}\,dt. \tag{239}$$

Покажем, что уравнения Эйлера для этого интеграла приведут нас опять к уравнениям Лагранжа (236), которые мы получили выше. Действительно, уравнения Эйлера для интеграла (239) имеют вид

$$U_{q_i}\sqrt{\frac{2T}{2U+2h}}+T_{q_i}\sqrt{\frac{2U+2h}{2T}}-\frac{d}{dt}\left[\sqrt{\frac{2U+2h}{2T}}T_{q_i'}\right]=0$$
$$(i=1,\ \ldots,k). \tag{240}$$

Заметим, что подынтегральная функция в интеграле (239) не содержит независимого переменного и является однородной функцией первого измерения относительно производных q_i'. Следовательно, как мы видели выше [81], одно из написанных уравнений Эйлера будет следствием остальных, и мы можем присоединить к нашим уравнениям Эйлера еще одно уравнение, которым фиксируется выбор независимого переменного (параметра). Для того чтобы таким независимым переменным оказалось именно время, мы присоединим к уравнениям (240) уравнение

$$\sqrt{\frac{2U+2h}{2T}}=1,$$

которое, очевидно, равносильно закону сохранения энергии (237). При этом уравнения (240) перейдут в уравнения Лагранжа (236). Итак, в рассматриваемом случае уравнения действительного движения получаются из необходимого условия экстремума интеграла (239) при закрепленных концах. Это утверждение составляет *принцип наименьшего действия в форме Якоби.*

Введем в k-мерном пространстве с координатами $q_1, \ldots, q_k$ метрику, определяемую следующим выражением дифференциала дуги:

$$ds^2=(2U+2h)\sum_{i,\,j=1}^{k}a_{ij}dq_idq_j.$$

При этом интеграл (239) может быть переписан в виде

$$\int ds,$$

и основная задача механики системы точек оказывается равносильной задаче о геодезических линиях в упомянутом выше k-мерном пространстве. Можно показать, что для достаточно малых участков траектории действительного движения интеграл действия вдоль участков имеет слабый минимум. Рассмотрим движение одной материальной точки по некоторой поверхности S по инерции. В этом случае мы можем считать $U = 0$, и интеграл (239) приводится просто к виду

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{T}\, dt, \tag{239$_1$}$$

или, если мы ведем прямолинейные прямоугольные координаты, к виду

$$\int_l \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Траекториями движения будут геодезические линии этой поверхности.

Интеграл примера 2 из [79] получается при применении принципа наименьшего действия к случаю одной материальной точки, находящейся под воздействием силы тяжести, причем направление оси OY совпадает с направлением силы тяжести.

Можно придать другую форму принципу наименьшего действия, которую мы сейчас укажем, не останавливаясь на доказательстве. Рассмотрим интеграл

$$\int_{t_0}^{t_1} T\, dt \tag{241}$$

и будем считать t_0 и t_1 функциями параметра τ. Присоединим к функционалу (241) в качестве дополнительного условия уравнение (237) с фиксированным значением h. Можно показать, что действительное движение с фиксированным начальным и конечным положениями и с фиксированными начальным и конечным моментами времени t удовлетворяет необходимым условиям экстремума для функционала (241). Подчеркнем, что время t следует считать функцией вспомогательного параметра и варьировать наряду с координатами q_i. Сформулированный принцип есть принцип наименьшего действия в форме Лагранжа.

Некоторую специфику имеют механические системы со связями, зависящими не только от координат, но и от скоростей. Рассмотрим наиболее распространенный случай линейных связей:

$$G_s(q_1, q_1' \ldots, q_k, q_k') = \sum_{i=1}^{k} f_{si}(q_1, \ldots, q_k)\, q_i' = 0 \quad (s = 1, \ldots, p). \tag{242}$$

Уравнения действительного движения системы с такими связями таковы:

$$\frac{d}{dt}\left(T_{q_i'} + U_{q_i'}\right) - \left(T_{q_i} + U_{q_i}\right) = \sum_{s=1}^{p} \lambda_s f_{si} \quad (i = 1, \ldots, k). \tag{243}$$

Эти k уравнений вместе с p уравнениями связи дают возможность определить $k+p$ неизвестных функций $q_1, \ldots, q_k, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$. Левая часть (243) такая же, как и в уравнениях Эйлера, правая часть представляет собой силу реакции связей.

Если выражения $\sum_{i=1}^{k} f_{si}(q_1, \ldots, q_k)\, dq_i$ являются полным дифференциалом некоторых функций от координат

$$\sum_{i=1}^{k} f_{si}(q_1, \ldots, q_k)\, dq_i = d\varphi_s(q_1, \ldots, q_k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \varphi_s}{\partial q_i}\, dq_i \qquad (s=1, \ldots, p),$$

то условия связи можно записать так: $\varphi_s(q_1, \ldots, q_k) = \text{const}$ $(s = 1, \ldots, p)$; связи в этом случае называются голономными, а уравнения (243) суть уравнения Эйлера, полученные из рассмотренной выше задачи [100].

В общем случае (т. е. когда (242) не приводится к голономным связям) механическая система называется неголономной, а уравнения (243) не являются уравнениями Эйлера для вариационного принципа с функцией $T + U + \sum_s \lambda_s(t)\, G_s$. В этом состоит отличие задачи о движении неголономной механической системы от рассмотренной в [78] вариационной задачи с неголономными связями.

102. Струна и мембрана. Прежде чем переходить к установлению вариационного принципа в общей теории упругости, мы рассмотрим ряд частных случаев упругих тел, размеры которых в одном или двух измерениях значительно больше, чем в остальных измерениях. Здесь установление вариационного принципа сводится, по существу, к некоторым предположениям о потенциальной энергии, т. е. о работе сил деформации в зависимости от формы деформируемого тела.

Пусть имеется струна, натянутая вдоль оси x и совершающая плоские поперечные колебания в плоскости (x, u) [II; 176]. Кинетическая энергия колеблющейся струны будет выражаться формулой

$$\frac{1}{2} \int_0^l \rho u_t^2\, dx,$$

где ρ — линейная плотность струны, $x = 0$ и $x = l$ — абсциссы ее концов. Будем считать, что работа сил деформации выражается произведением натяжения струны T_0 на ее удлинение:

$$\int_0^l \sqrt{1+u_x^2}\, dx - l.$$

Разлагая радикал по биному Ньютона и ограничиваясь двумя первыми членами, мы получаем следующее выражение для потенциальной энергии деформации:

$$\frac{T_0}{2} \int_0^l u_x^2\, dx.$$

В случае внешней силы $F(x, t)$, рассчитанной на единицу длины, нам надо добавить к потенциальной энергии еще слагаемое

$$-\int_0^l Fu\, dx;$$

окончательно принцип Остроградского — Гамильтона сведется к необходимому условию $\delta J=0$ для интеграла

$$J=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l (\rho u_t^2-T_0u_x^2+2Fu)\,dx\,dt. \tag{244}$$

Интегрирование совершается по прямоугольнику $0\leqslant x\leqslant l$; $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ на плоскости $(x,\ t)$. На сторонах этого прямоугольника $x=0$ и $x=l$ в случае закрепленной струны мы имеем предельное условие $u=0$, а на сторонах $t=t_0$ и $t=t_1$ функция u должна совпадать с функциями $u(x,\ t_0)$ и $u(x,\ t_1)$, дающими форму струны в начале и конце промежутка $[t_0,\ t_1]$.

Если на концы струны действуют упругие силы, то, принимая во внимание, что потенциал упругой силы пропорционален квадрату отклонения, мы должны к интегралу (244) добавить слагаемое такого вида:

$$-\int_{t_0}^{t_1}[h_1u^2(0,\ t)+h_2u^2(l,\ t)]\,dt.$$

По существу, этот добавочный член представляет собой интеграл по контуру упомянутого выше прямоугольника, причем на сторонах $t=t_0$ и $t=t_1$ подынтегральная функция равна нулю, а на сторонах $x=0$ и $x=l$ она равна $h_1u^2(0,\ t)$ и $h_2u^2(l,\ t)$. Принимая во внимание сказанное в [84], а также то обстоятельство, что на стороне $x=0$ внешняя нормаль направлена противоположно оси x, мы будем иметь на сторонах $x=0$ и $x=l$ естественные предельные условия вида:

$$u_x-\frac{2h_1}{T_0}u\Big|_{x=0}=0;\qquad u_x+\frac{2h_2}{T_0}u\Big|_{x=l}=0.$$

Уравнение Остроградского для двойного интеграла (244) даст нам обычное уравнение колебаний струны.

Совершенно так же надо рассуждать для получения уравнения колебания мембраны [II; 189]. Положим, что в естественном состоянии мембрана натянута в плоскости $(x,\ y)$ и T_0 — ее натяжение, рассчитанное на единицу длины. Работа сил деформации будет выражаться произведением T_0 на приращение площади·

$$\iint_B\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}\,dx\,dy-\iint_B dx\,dy,$$

где $u(x,\ y,\ t)$ — отклонение точки $(x,\ y)$ мембраны в момент времени t от положения равновесия и B — область плоскости $(x,\ y)$, занятая мембраной. Ограничиваясь малыми колебаниями, мы получим следующее выражение для интеграла (235):

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\iint_B[\rho u_t^2-T_0(u_x^2+u_y^2)+2Fu]\,dt\,dx\,dy. \tag{245}$$

Уравнение Остроградского для написанного интеграла приведет нас к известному уравнению колебания мембраны. Если на границе имеется упругая связь с коэффициентом $q(s)$, то к интегралу (245) надо добавить слагаемое

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_l q(s)\,u^2\,ds,$$

где l — контур мембраны. В данном случае естественные граничные условия принимают вид

$$\frac{\partial u}{\partial n}+\frac{2}{T_0}q(s)\,u\Big|_l=0,$$

где n — направление внешней нормали к l. В случае же закрепленной мембраны граничные условия будут, очевидно, $u|_l=0$.

103. Стержень и пластинка. Под стержнем мы подразумеваем тело линейных размеров, которое работает на изгиб. Возникающая при деформации потенциальная энергия считается пропорциональной интегралу от квадрата кривизны. В случае малых колебаний мы заменяем кривизну второй производной u_{xx} и получаем для потенциальной энергии деформации следующее выражение:

$$\frac{\mu}{2}\int_0^l u_{xx}^2\,dx,$$

где μ — заданный коэффициент пропорциональности. Интеграл (235) в данном случае будет выглядеть таким образом:

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l(\rho u_t^2-\mu u_{xx}^2+2Fu)\,dt\,dx,$$

и соответствующее уравнение Эйлера приведет нас к следующему уравнению поперечных колебаний стержня:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\mu\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=F.$$

Заметим, что если конец стержня свободен, то предельные условия могут быть получены как естественные предельные условия, о которых мы говорили в [83].

По аналогии со стержнем [79], будем считать, что потенциальная энергия для пластинки, которая в естественном состоянии имеет плоскую форму, представляет собой однородную квадратичную функцию величин, обратных главным радиусам кривизны пластинки в деформированном состоянии, а именно:

$$-U=\iint_B\left[a\left(\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}\right)+\frac{2b}{R_1R_2}\right]dx\,dy,$$

где a и b — некоторые постоянные и B — область плоскости (x, y), занятая пластинкой. Мы имеем для кривизны главных нормальных сечений уравнение [11; 146]:

$$(EG-F^2)\frac{1}{R^2}+(2FM-EN-GL)\frac{1}{R}+(LN-M^2)=0.$$

В случае явного уравнения поверхности $u=u(x, y)$, отбрасывая члены второго измерения относительно u_x и u_y, мы получим

$$E=G=1;\ F=0,\ L=u_{xx};\ M=u_{xy},\ N=u_{yy},$$

откуда

$$\frac{1}{R_1R_2}=u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2;\quad \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=u_{xx}+u_{yy},$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}=(u_{xx}+u_{yy})^2-2\,(u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2).$$

Окончательно можем написать:

$$-U=\frac{D}{2}\iint\limits_B\left[(u_{xx}+u_{yy})^2-2\,(1-\sigma)\,(u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2)\right]dx\,dy,$$

где D и σ — две новые постоянные, составленные из постоянных a и b. Коэффициент D называется жесткостью пластинки на изгиб и σ есть известный коэффициент Пуассона. К написанному выражению энергии деформации надо добавить еще потенциал внешних сил, действующих на поверхность пластинки. Окончательно получим следующее выражение для интеграла (235), считая пластинку закрепленной по краям и ограничиваясь случаем статического прогиба:

$$\frac{D}{2}\iint\limits_B\left[-(u_{xx}+u_{yy})^2+2\,(1-\sigma)\,(u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2)+\frac{2}{D}\,pu\right]dx\,dy,$$

где p — нагрузка, рассчитанная на единицу площади. В силу (37) из [74] уравнение Остроградского в том случае, когда подынтегральная функция содержит производные до второго порядка от искомой функции u по двум независимым переменным x и y, имеет вид

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}F_{u_{xx}}+2\,\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F_{u_{xy}}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}F_{u_{yy}}=0. \qquad (246)$$

Считая $D=1$, можем написать

$$F=-\frac{1}{2}\,(u_{xx}+u_{yy})^2+(1-\sigma)\,(u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2)+pu, \qquad (247)$$

что приводит к следующему уравнению для статического прогиба:

$$\Delta\Delta u=p.$$

В случае колебания пластинки, добавляя кинетическую энергию, будем иметь

$$\rho u_{tt}+\Delta\Delta u=p.$$

Характерным является то обстоятельство, что член, входящий в выражение (247) и содержащий множитель $(1-\sigma)$, при подстановке в левую часть уравнения Остроградского (246) дает тождественный нуль и не влияет на уравнение Остроградского. Но необходимо отметить, что упомянутый член оказывает существенное влияние при установлении естественных предельных условий.

104. Основные уравнения теории упругости. Пусть (u, v, w) — составляющие вектора смещения при деформации сплошной среды. Картину напряжений в этой среде дают шесть составляющих тензора напряжений:

$$\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z,\ \tau_{xy}=\tau_{yx},\ \tau_{xz}=\tau_{zx},\ \tau_{yz}=\tau_{zy},$$

где σ_x — составляющая по оси x напряжения, действующего на площадку, перпендикулярную к этой оси (σ_y и σ_z имеют аналогичное значение), $\tau_{xy}=\tau_{yx}$ — составляющая по оси x напряжения, действующего на площадку, перпендикулярную к оси y, или наоборот. Аналогичное значение имеют τ_{xz} и τ_{yz}.

При малых деформациях деформация среды характеризуется следующими шестью величинами:

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x};\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y};\quad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z};\\ &\gamma_{xy}=\gamma_{yx}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x};\quad \gamma_{xz}=\gamma_{zx}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x};\\ &\gamma_{yz}=\gamma_{zy}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{248}$$

Величины ε_x, ε_y, ε_z характеризуют относительные удлинения линейных элементов в направлении осей, а γ_{xy} — изменение прямого угла, образованного осями x и y. Введем еще две величины, а именно, величину

$$\theta=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z,$$

характеризующую относительное изменение объема, и

$$s=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z.$$

Можно показать, что последние две величины не зависят от выбора осей. В классической теории упругости изотропного однородного тела принимают, что составляющие тензора деформации и напряжений связаны между собой линейной зависимостью, которая выражает обобщенный закон Гука:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_x=\frac{1}{2G}\left(\sigma_x-\frac{s}{m+1}\right);\ \gamma_{xy}=\frac{1}{G}\tau_{xy}, \text{ или } \sigma_x=2G\left(\varepsilon_x+\frac{\theta}{m-2}\right);\ \tau_{xy}=G\gamma_{xy},\\ &\varepsilon_y=\frac{1}{2G}\left(\sigma_y-\frac{s}{m+1}\right);\ \gamma_{yz}=\frac{1}{G}\tau_{yz}, \qquad \sigma_y=2G\left(\varepsilon_y+\frac{\theta}{m-2}\right);\ \tau_{yz}=G\gamma_{yz},\\ &\varepsilon_z=\frac{1}{2G}\left(\sigma_z-\frac{s}{m+1}\right);\ \gamma_{zx}=\frac{1}{G}\tau_{zx}, \qquad \sigma_z=2G\left(\varepsilon_z+\frac{\theta}{m-2}\right);\ \tau_{zx}=G\gamma_{zx}, \end{aligned}$$

где G и m — постоянные, характерные для данного вещества, причем G называется модулем сдвига и m — коэффициентом поперечного сжатия (постоянная Пуассона). Из закона Гука вытекает непосредственно следующая зависимость между величинами θ и s.

$$\theta=\frac{1}{2G}\frac{m-2}{m+1}s.$$

Обозначим, далее, через A работу сил деформации, отнесенную к единице объема, которую можно выразить через составляющие тензора деформации или через составляющие тензора напряжений:

$$\begin{aligned} A&=G\left[\frac{m-1}{m-2}\theta^2-2(\varepsilon_x\varepsilon_y+\varepsilon_y\varepsilon_z+\varepsilon_z\varepsilon_x)+\frac{1}{2}(\gamma_{xy}^2+\gamma_{yz}^2+\gamma_{zx}^2)\right]=\\ &=\frac{1}{4G}\left[\frac{m}{m+1}s^2-2(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x-\tau_{xy}^2-\tau_{yz}^2-\tau_{zx}^2)\right], \end{aligned} \tag{249}$$

причем имеют место, как это можно проверить, пользуясь написанными формулами, следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_x=\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_x};\quad \tau_{xy}=\frac{\partial A}{\partial \gamma_{xy}};\quad \varepsilon_x=\frac{\partial A}{\partial \sigma_x};\quad \gamma_{xy}=\frac{\partial A}{\partial \tau_{xy}};\\
&\sigma_y=\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_y};\quad \tau_{yz}=\frac{\partial A}{\partial \gamma_{yz}};\quad \varepsilon_y=\frac{\partial A}{\partial \sigma_y};\quad \gamma_{yz}=\frac{\partial A}{\partial \tau_{yz}};\\
&\sigma_z=\frac{\partial A}{\partial \varepsilon_z};\quad \tau_{zx}=\frac{\partial A}{\partial \gamma_{zx}};\quad \varepsilon_z=\frac{\partial A}{\partial \sigma_z};\quad \gamma_{zx}=\frac{\partial A}{\partial \tau_{zx}}.
\end{aligned}\right\}\tag{250}$$

Можно показать, что в каждой точке упругого тела существуют такие три взаимно перпендикулярных направления, что если мы их выберем за оси, то в этой точке будут иметь место равенства $\gamma_{xy}=\gamma_{yz}=\gamma_{zx}=0$. Выбирая эти направления за оси координат и обозначая через ε_1, ε_2, ε_3 при таком выборе осей те величины, которые мы раньше обозначали через ε_x, ε_y, ε_z, получим в силу (249) в этой точке следующее выражение для A:

$$A=G\left[\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2+\frac{1}{m-2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)^2\right].$$

Условие положительности величины A приводит нас к следующему неравенству для постоянной m: $2<m\leqslant\infty$.

Будем сначала говорить об условиях равновесия упругого тела D, ограниченного поверхностью S. Пусть на это тело действуют массовые силы с составляющими:

$$X(x, y, z, t);\ Y(x, y, z, t);\ Z(x, y, z, t),$$

и положим, что на части S_1 поверхности S нам задан вектор смещения, а на части S_2 — напряжение, причем через X_1, Y_1, Z_1 мы обозначим составляющие этого напряжения. Это суть заданные функции переменной точки M на S_2. Сумма интеграла по D от A и работ внешних сил, взятых с обратным знаком, дает потенциальную энергию упругого тела:

$$\iiint\limits_D [A-(Xu+Yv+Zw)]\,dxdydz-\iint\limits_{S_2}(X_1u+Y_1v+Z_1w)\,d\sigma.\tag{251}$$

Эта потенциальная энергия является функционалом от трех функций u, v, w координат точек тела (x, y, z). Мы получим уравнение равновесия, если напишем уравнение Остроградского для упомянутого выше функционала, причем надо принять во внимание, что интеграл по поверхности не играет роли при составлении этого уравнения Остроградского. Принимая во внимание, что A не зависит от самих функций u, v, w, а только от их производных, мы придем к следующему уравнению Остроградского для функционала (251) по отношению к функции u:

$$-X-\frac{\partial}{\partial x}A_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}A_{u_y}-\frac{\partial}{\partial z}A_{u_z}=0.\tag{252}$$

Принимая во внимание, что A зависит от u_x только через посредство ε_x, от u_y — только через посредство γ_{xy} и от u_z — только через посредство γ_{xz}, можем переписать предыдущее уравнение, учитывая (250), в виде

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+X=0.\tag{253}$$

Аналогично напишутся два других уравнения равновесия. На части S_1 граничной поверхности фиксированы значения функций u, v, w, а на части S_2

естественные граничные условия [83] имеют следующий вид:

$$\sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) + \tau_{zx} \cos(n, z) - X_1 = 0,$$
$$\tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) + \tau_{yz} \cos(n, z) - Y_1 = 0,$$
$$\tau_{zx} \cos(n, x) + \tau_{yz} \cos(n, y) + \sigma_z \cos(n, z) - Z_1 = 0,$$

где n — направление внешней нормали к S_2.

Подставляя в уравнение (253) вместо составляющих тензора напряжений их выражение через составляющие тензора деформации, мы получим следующие три уравнения равновесия:

$$G\left(\Delta u + \frac{m}{m-2}\frac{\partial\theta}{\partial x}\right) + X = 0,$$
$$G\left(\Delta v + \frac{m}{m-2}\frac{\partial\theta}{\partial y}\right) + Y = 0,$$
$$G\left(\Delta w + \frac{m}{m-2}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right) + Z = 0,$$

или, в векторной форме,

$$G\left(\Delta \mathbf{u} + \frac{m}{m-2}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}\right) + \mathbf{F} = 0.$$

Заметим, что формулу (249) для упругого потенциала мы можем записать в виде

$$A = G\left\{\frac{m-1}{m-2}\theta^2 + \frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2) + 2\left[\left(\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\right) + \ldots\right]\right\}, \quad (254)$$

где ω_x, ω_y, ω_z — составляющие вихря вектора смещения, т. е.

$$\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Обратим внимание на то, что выражение, стоящее в квадратных скобках формулы (254), не влияет вовсе на уравнение Остроградского, т. е. мы получим уравнение равновесия упругого тела, если напишем уравнение Остроградского для интеграла:

$$\iiint\limits_D \left[G\frac{m-1}{m-2}\theta^2 + \frac{G}{2}(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2) - (Xu + Yv + Zw)\right] dxdydz.$$

Чтобы получить уравнение движения, достаточно, согласно принципу Остроградского — Гамильтона, добавить к подынтегральному выражению написанного интеграла член, соответствующий кинетической энергии (с обратным знаком):

$$-\frac{\rho}{2}(u_t^2 + v_t^2 + w_t^2),$$

где ρ — плотность нашего тела, и проинтегрировать по конечному промежутку времени $[t_0; t_1]$. Таким образом, дело сведется к составлению уравнения Остроградского для интеграла:

$$\int_{t_0}^{t_1}\iiint\limits_D \left[-\frac{\rho}{2}(u_t^2 + v_t^2 + w_t^2) + A - (Xu + Yv + Zw)\right] dt\, dxdydz$$

по отношению к функциям u, v, w независимых переменных (x, y, z, t). Это приведет нас, как это нетрудно проверить, к следующим основным уравнениям

динамической теории упругости, записанным в векторной форме:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = G\left(\Delta \mathbf{u} + \frac{m}{m-2} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}\right).$$

При этом, как всегда, считается, что в крайние моменты времени $t=t_0$ и $t=t_1$ перемещения должны совпадать с действительными перемещениями [100].

105. Абсолютный экстремум. Мы ввели [72] понятие абсолютного экстремума. Сейчас рассмотрим частные примеры и приведем в связи с ними некоторые соображения о существовании абсолютного экстремума.

Пусть имеется функционал:

$$J(y) = \int_0^l [p(x) y'^2 + q(x) y^2 + 2f(x) y]\, dx, \tag{255}$$

где $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ — непрерывные в замкнутом промежутке $[0, l]$ функции, причем $p(x)$ имеет непрерывную производную и

$$p(x) > 0; \quad q(x) \geqslant 0. \tag{256}$$

В классе D функций $y(x)$, непрерывных вместе с производной $y'(x)$ в промежутке $[0, l]$ и удовлетворяющих предельным условиям

$$y(0) = a; \quad y(l) = b, \tag{257}$$

требуется найти ту функцию, для которой функционал (255) принимает наименьшее значение.

Уравнение Эйлера для этого функционала имеет вид

$$\frac{d}{dx}[p(x) y'] - q(x) y = f(x). \tag{258}$$

Покажем, что при условиях (256) это уравнение имеет на промежутке $[0, l]$ решение, удовлетворяющее условиям (257), и что такое решение единственно. Пусть $z_0(x)$ и $z_1(x)$ — решения однородного уравнения:

$$\frac{d}{dx}[p(x) z'] - q(x) z = 0, \tag{259}$$

удовлетворяющие начальным условиям:

$$z_0(0) = 0; \quad z_0'(0) = 1; \quad z_1(l) = 0; \quad z_1'(l) = 1.$$

Теорема существования и единственности, применимая ввиду $p(x) > 0$, обеспечивает наличие таких решений, причем они существуют во всем промежутке $[0, l]$. Мы покажем, далее, что $z_0(l) \neq 0$. Это равносильно тому, что однородное уравнение (259) не имеет решений, отличных от тождественного нуля и равных нулю при $x=0$ и $x=l$. При этом, очевидно, $z_1(0) \neq 0$, и решения $z_0(x)$ и $z_1(x)$ — линейно независимы.

Общий интеграл уравнения (258) имеет вид

$$y_0(x) = c_0 z_0(x) + c_1 z_1(x) + g(x),$$

где c_0 и c_1 — произвольные постоянные и $g(x)$ — какое-либо частное решение уравнения (258), существование которого на промежутке $[0, l]$ обеспечивается теоремой существования при $p(x) > 0$. Предельные условия (257) приведут нас к уравнениям

$$c_1 z_1(0) + g(0) = a; \quad c_0 z_0(l) + g(l) = b,$$

из которых c_0 и c_1 определяются единственным образом.

Таким образом, мы получаем единственное решение $y_0(x)$ уравнения (258), удовлетворяющее предельным условиям (257), причем это решение непрерывно с производными до второго порядка на промежутке $[0, l]$. Остается показать, что $z_0(l) \neq 0$, т. е. что однородное уравнение (259) не имеет решений, отличных от тождественного нуля и равных нулю при $x = 0$ и $x = l$.

Умножая обе части (259) на z и интегрируя по частям, получим

$$\int_0^l (pz'^2 + qz^2)\, dx = 0 \qquad (z(0) = z(l) = 0),$$

откуда в силу $p(x) > 0$ и $q(x) \geqslant 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$ следует, что $z(x) \equiv 0$.

Построенное выше решение $y_0(x)$ уравнения (258) принадлежит классу C_2. *Покажем, что оно дает минимум функционалу* (255) *или, точнее говоря, покажем, что* $J(y_0) \leqslant J(y)$, *где* y — *любая функция из класса* D, *причем знак равенства имеет место только в том случае, когда* $y(x)$ *тождественно с* $y_0(x)$.

Всякую функцию $y(x)$ из D мы можем представить в виде $y(x) = y_0(x) + \eta(x)$, где $\eta(x)$ — непрерывна с производной на промежутке $[0, l]$ и равна нулю на концах этого промежутка. Мы имеем

$$J(y) - J(y_0) = 2\int_0^l [p(x)\, y_0'\eta' + q(x)\, y_0\eta + f(x)\, \eta]\, dx + \\ + \int_0^l [p(x)\, \eta'^2 + q(x)\, \eta^2]\, dx.$$

Принимая во внимание свойства $y_0(x)$ и $\eta(x)$, мы сможем в первом интеграле произвести интегрирование по частям:

$$J(y) - J(y_0) = 2\int_0^l \left[-\frac{d}{dx}[p(x)\, y_0'] + q(x)\, y_0 + f(x)\right]\eta\, dx + \\ + \int_0^l [p(x)\, \eta'^2 + q(x)\, \eta^2]\, dx + p(x)\, y_0'\eta\Big|_{x=0}^{x=l},$$

откуда, принимая во внимание, что $y_0(x)$ есть решение уравнения (258) и что $\eta(0)=\eta(l)=0$, получим в силу (256)

$$J(y)-J(y_0)=\int_0^l \left[p(x)\,\eta'^2+q(x)\,\eta^2\right]dx\geqslant 0,$$

причем знак равенства будет иметь место лишь при $\eta(x)\equiv 0$. Действительно, если имеется знак равенства, то мы должны иметь $\eta'(x)\equiv 0$, т. е. $\eta(x)$ — постоянная на промежутке $[0, l]$. Но $\eta(0)=0$, а потому $\eta(x)\equiv 0$ на промежутке $[0, l]$. Таким образом, наше утверждение доказано, т. е. при $y_0(x)$, и только при $y_0(x)$, функционал (255) достигает наименьшего значения в классе D. Отметим, что на функции класса D мы наложили требование лишь существования и непрерывности первой производной, а функция $y_0(x)$, при которой функционал (255) достигает наименьшего значения, имеет и непрерывную производную второго порядка.

В качестве второго примера рассмотрим задачу о наименьшем значении функционала:

$$J(y)=\int_{-1}^{1} x^2y'^2\,dx \tag{260}$$

в классе D непрерывных функций $y(x)$, имеющих непрерывную производную на промежутке $[-1, 1]$ и удовлетворяющих предельным условиям:

$$y(-1)=a;\quad y(1)=b, \tag{261}$$

где $a\neq b$. В силу последнего условия класс D не содержит постоянной, и, таким образом, $J(y)>0$ для любой функции из D. Множество чисел $J(y)$ должно иметь точную нижнюю границу [I; 42]. Покажем, что она равна нулю.

Нетрудно проверить, что при любом положительном ε функции

$$y=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\,\frac{\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{\varepsilon}}{\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{\varepsilon}} \tag{262}$$

принадлежат классу D. Мы имеем

$$y'=\frac{b-a}{2\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{\varepsilon}}\cdot\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+x^2},$$

и, следовательно, для функций (262)

$$J(y)<\int_{-1}^{1}(\varepsilon^2+x^2)\,y'^2\,dx=\frac{\varepsilon^2(b-a)^2}{4\operatorname{arctg}^2\dfrac{1}{\varepsilon}}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\varepsilon^2+x^2}=\frac{\varepsilon(b-a)^2}{2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\varepsilon}}.$$

Правая часть стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$, откуда и видно, что точная нижняя граница значений функционала (260) равна нулю. Но, как мы говорили выше, класс D не содержит постоянной и $J(y) > 0$ в классе D. Тем самым точная нижняя граница не достигается в классе D, и в этом классе функционал (260) не имеет наименьшего значения.

106. Интеграл Дирихле. Рассмотрим теперь функционал

$$J(u) = \iint\limits_B (u_x^2 + u_y^2)\, dx\, dy, \tag{263}$$

где B — круг с центром в начале координат и радиусом единица. Написанный интеграл называется обычно *интегралом Дирихле*. Мы будем рассматривать этот функционал в классе D функций $u(x, y)$, непрерывных в замкнутом круге $x^2 + y^2 \leqslant 1$, имеющих внутри этого круга непрерывные производные первого порядка и удовлетворяющих на границе l круга предельному условию

$$u|_l = f(\theta), \tag{264}$$

где $f(\theta)$ — заданная на окружности l непрерывная функция полярного угла θ. Поскольку мы не предполагаем непрерывности частных производных u_x и u_y в замкнутом круге, мы должны толковать интеграл (263) как несобственный интеграл, т. е. как предел интегралов по кругам B_ρ $(x^2 + y^2 < \rho^2)$ радиуса ρ при $\rho \to 1$. Поскольку подынтегральная функция неотрицательна, интеграл по B_ρ не убывает при возрастании ρ, и упомянутый предел или конечен или равен $(+\infty)$. В первом случае, как обычно, мы говорим, что интеграл сходится, а во втором, что он расходится. Можно считать, что в последнем случае величина интеграла равна $(+\infty)$. Уравнение Остроградского для функционала (263) есть уравнение Лапласа [76]:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

и мы вправе ожидать, что гармоническая в круге B функция, принимающая на l предельные значения (264), дает функционалу (263) наименьшее значение в указанном классе D. Мы знаем, что такая гармоническая функция существует и единственна [II; 206]. Обозначим ее через $v(x, y)$.

Покажем прежде всего, что можно так задать непрерывную функцию $f(\theta)$, входящую в условие (264), что функционал (263) для $u = v$:

$$J(v) = \iint\limits_B (v_x^2 + v_y^2)\, dx\, dy \tag{265}$$

будет равен $(+\infty)$. Действительно, положим

$$f(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cos(2^{2n}\theta). \tag{266}$$

Написанный ряд сходится, очевидно, абсолютно и равномерно относительно θ и определяет непрерывную периодическую с периодом 2π функцию $f(\theta)$. Решение задачи Дирихле с предельными значениями (266) имеет вид [II; 206]

$$v(x,\ y)=v(r,\ \theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{2^{2n}}}{2^n}\cos(2^{2n}\theta).$$

В интеграле (263) перейдем к полярным координатам:

$$J(v)=\iint\limits_{r<1}\left(v_r^2+\frac{1}{r^2}v_\theta^2\right)r\,dr\,d\theta. \tag{267}$$

Мы имеем

$$v_r=\sum_{n=1}^{\infty}2^n r^{2^{2n}-1}\cos(2^{2n}\theta);\qquad v_\theta=-\sum_{n=1}^{\infty}2^n r^{2^{2n}}\sin(2^{2n}\theta),$$

причем написанные ряды сходятся абсолютно и равномерно относительно r и θ в любом круге $r\leqslant\rho$, где $\rho<1$. Принимая во внимание ортогональность синусов и косинусов кратных дуг на промежутке длины 2π, получим

$$\iint\limits_{r\leqslant\rho}\left(v_r^2+\frac{1}{r^2}v_\theta^2\right)r\,dr\,d\theta=\sum_{n=1}^{\infty}\iint\limits_{r\leqslant\rho}2^{2n}r^{2^{2n+1}-1}\,dr\,d\theta=$$

$$=2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\rho}2^{2n}r^{2^{2n+1}-1}\,dr=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\rho^{2^{2n+1}},$$

и при $\rho\to1$ сумма последнего ряда беспредельно возрастает, откуда и следует, что при условии (266) величина интеграла (265) равна $(+\infty)$.

Таким образом, в рассматриваемом случае не имеет смысла утверждение, что гармоническая функция $v(x,\ y)$ дает функционалу (263) наименьшее значение. Можно показать, что если интеграл (263) равен $(+\infty)$ при $u=v$, то он равен $(+\infty)$ и для любой функции из класса D, удовлетворяющей предельному условию (264). Это непосредственно вытекает из следующей теоремы:

Теорема. *Если интеграл* (263) *при предельном условии* (264) *имеет конечное значение для какой-либо функции из класса D, то*

он имеет конечное значение для гармонической функции v из класса D, и при этом для любой функции u из D мы имеем

$$J(u) \geqslant J(v), \tag{268}$$

причем знак равенства достигается только при $u \equiv v$.

Доказательство теоремы совершенно просто, если предположить, что гармоническая функция $v(x, y)$ имеет в B ограниченные частные производные первого порядка. При этом интеграл (263) имеет, очевидно, конечное значение. Нам достаточно доказать, что если для какой-либо функции w из D интеграл $J(u)$ имеет конечное значение, то $J(w) \geqslant J(v)$, причем знак равенства имеет место только при $w \equiv v$. Мы можем написать: $w = v + \eta$, где $\eta(x, y)$ имеет внутри B непрерывные частные производные первого порядка, непрерывна в замкнутом круге B и равна нулю на окружности l. Мы имеем

$$J_\rho(v+\eta) = J_\rho(v) + J_\rho(\eta) + 2J_\rho(v, \eta), \tag{269}$$

где через $J_\rho(u)$ мы обозначаем интеграл $J(u)$, взятый по кругу B_ρ, и

$$J_\rho(v, \eta) = \iint\limits_{B_\rho} (v_x\eta_x + v_y\eta_y)\, dx\, dy.$$

Функция $v(x, y)$ имеет внутри B непрерывные частные производные второго порядка, и, применяя формулу Грина, мы получим

$$J_\rho(v, \eta) = \iint\limits_{B_\rho} (v_x\eta_x + v_y\eta_y)\, dx\, dy = -\iint\limits_{B_\rho} \eta\Delta v\, dx\, dy + \int\limits_{l_\rho} \eta\frac{\partial v}{\partial n}\rho\, d\theta,$$

где l_ρ — окружность с центром в начале координат и радиусом ρ, а $\partial v/\partial n$ — производная по нормали к этой окружности. Поскольку v есть гармоническая функция, двойной интеграл в правой части равен нулю, а в криволинейном интеграле при стремлении ρ к единице η стремится к нулю равномерно по отношению к полярному углу, а $\partial v/\partial n$ по условию остается ограниченной, и этот криволинейный интеграл, очевидно, стремится к нулю. Таким образом, формула (269) в пределе дает:

$$J(w) - J(v) = \iint\limits_{B} (\eta_x^2 + \eta_y^2)\, dx\, dy,$$

откуда следует, что $J(w) \geqslant J(v)$, причем знак равенства имеет место только при $\eta_x \equiv 0$ и $\eta_y \equiv 0$, т. е. если η есть постоянная в круге B. Но $\eta = 0$ на l и, следовательно, $\eta \equiv 0$.

Проведем теперь доказательство теоремы в общем случае. Пусть, как и выше, w — та функция из D, для которой интеграл $J(w)$ имеет конечное значение, и пусть

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \tag{270}$$

— ряд Фурье функции $f(\theta)$, входящей в условие (264). Функция v определяется внутри B рядом

$$v(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^n. \tag{271}$$

Положим:

$$v_m(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^n \tag{272}$$

и определим функцию $\eta_m(r, \theta)$ равенством: $w = v_m + \eta_m$. Эта функция $\eta_m(r, \theta)$ имеет внутри B непрерывные частные производные первого порядка, непрерывна в замкнутом круге, и ее предельные значения $\eta_m(1, \theta)$ на l имеют ряд Фурье:

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta).$$

Это непосредственно вытекает из (272) и того, что предельные значения w имеют ряд Фурье (270). Отсюда следует:

$$\int_0^{2\pi} \eta_m(1, \theta) \cos k\theta \, d\theta = 0; \quad \int_0^{2\pi} \eta_m(1, \theta) \sin k\theta \, d\theta = 0 \tag{273}$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots, m) \quad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Как и выше, мы имеем

$$J_\rho(v_m, \eta_m) = -\iint_{B_\rho} \eta_m \Delta v_m \, dx \, dy + \int_{l_\rho} \eta_m(\rho, \theta) \frac{\partial v_m(\rho, \theta)}{\partial \rho} \rho \, d\theta.$$

Двойной интеграл равен нулю, а подынтегральная функция в криволинейном интеграле равномерно относительно θ стремится к

$$\eta_m(1, \theta) \frac{\partial v_m(\rho, \theta)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1}$$

и интеграл от этого произведения равен нулю в силу (272) и (273). Таким образом, $J_\rho(v_m, \eta_m) \to 0$ при $\rho \to 1$. Переходя в формуле

$$J_\rho(v_m + \eta_m) = J_\rho(v_m) + J_\rho(\eta_m) + 2J_\rho(v_m, \eta_m)$$

к пределу, получим

$$J(w) = J(v_m) + J(\eta_m). \tag{274}$$

По условию, $J(w)$ имеет конечное значение, и из последней формулы видно, что и $J(\eta_m)$ имеет конечное значение. Для $J(v_m)$ это очевидно в силу (272).

Из (274) следует:

$$J(v_m) \leqslant J(w) \tag{275}$$

и тем более при любом $\rho < 1$:

$$J_\rho(v_m) \leqslant J(w). \tag{276}$$

Но в круге B_ρ ряд (271) можно дифференцировать почленно и полученные ряды равномерно сходятся в B_ρ, т. е. в круге B_ρ производные от v_m при $m \to \infty$ равномерно стремятся к соответствующим производным от v. Таким образом, неравенство (276) при $m \to \infty$ дает

$$J_\rho(v) \leqslant J(w),$$

откуда, при $\rho \to 1$, и следует: $J(v) \leqslant J(w)$.

Пусть мы имеем знак равенства и докажем, что $w \equiv v$. Положим $w = v + \eta$, где η, как всегда, имеет внутри B непрерывные производные первого порядка, непрерывна в замкнутом круге и равна нулю на окружности l.

Мы имеем

$$J_\rho(\eta) = J_\rho(w) + J_\rho(v) - 2J_\rho(w, v). \tag{277}$$

Принимая во внимание, что

$$|2(w_x v_x + w_y v_y)| \leqslant w_x^2 + w_y^2 + v_x^2 + v_y^2,$$

мы имеем

$$|2J_\rho(w, v)| \leqslant J_\rho(w) + J_\rho(v),$$

откуда следует, что при всех $\rho < 1$

$$|2J_\rho(w, v)| \leqslant J(w) + J(v),$$

т. е. $J_\rho(w, v)$ остается ограниченным при $\rho \to 1$.

Первые два слагаемых правой части формулы (277) имеют конечный предел при $\rho \to 1$ и, следовательно, величина $J_\rho(\eta)$ остается ограниченной, т. е. имеет конечный предел при $\rho \to 1$. Мы можем далее написать:

$$J_\rho(w) = J_\rho(v) + J_\rho(\eta) + 2J_\rho(v, \eta),$$

и из существования конечных пределов для $J_\rho(w)$, $J_\rho(v)$ и $J_\rho(\eta)$ следует, что и $J_\rho(v, \eta)$ имеет конечный предел при $\rho \to 1$. Обозначим

$$J(v, \eta) = \lim_{\rho \to 1} J_\rho(v, \eta).$$

Вводя произвольный вещественный параметр ε, мы можем написать:

$$J_\rho(v + \varepsilon\eta) = J_\rho(v) + 2\varepsilon J_\rho(v, \eta) + \varepsilon^2 J_\rho(\eta).$$

При $\rho \to 1$ все слагаемые правой части имеют конечный предел и, следовательно, то же имеет место и для левой части. Переходя к пределу, получим

$$J(v+\varepsilon\eta) = J(v) + 2\varepsilon J(v, \eta) + \varepsilon^2 J(\eta). \tag{278}$$

Таким образом, при любом вещественном ε интеграл Дирихле (278) имеет конечное значение для функции $u = v + \varepsilon\eta$, и в силу доказанного выше имеем

$$J(v) \leqslant J(v+\varepsilon\eta), \tag{279}$$

причем знак равенства достигается при $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon = 1$, ибо по условию $J(w) = J(v)$. Отсюда следует, что правая часть (278) достигает наименьшего значения при $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon = 1$, что возможно лишь в том случае, если $J(\eta) = 0$, т. е. $\eta \equiv 0$, и из $w = v + \eta$ следует, что $w = v$. Теорема полностью доказана.

В главе о предельных задачах мы вернемся к вопросу об абсолютном экстремуме для изопериметрических задач [77].

107. Общий случай функционалов при нескольких независимых переменных. Мы сейчас кратко коснемся вопроса об абсолютном минимуме для функционалов общего вида. Рассмотрим сначала случай функционала

$$J(u) = \iint\limits_B F(x, y, p, q)\, dx\, dy, \tag{280}$$

где $p(x, y) = u_x$, $q(x, y) = u_y$, и подынтегральная функция не содержит $u(x, y)$. Пусть B — конечная односвязная область с гладкой границей, а $F(x, y, p, q)$ непрерывна по всем своим аргументам и имеет непрерывные производные до второго порядка по p и q при всех p и q из промежутка $(-\infty, \infty)$, когда точка (x, y) принадлежит замкнутой области $\bar{B}$. Положим, что при этих условиях выполнены неравенства

$$F_{pp}F_{qq} - F_{pq}^2 > 0 \tag{281}$$

и

$$F_{pp} > 0. \tag{282}$$

Уравнение Остроградского для функционала (280) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} F_p + \frac{\partial}{\partial y} F_q = 0. \tag{283}$$

Положим, что оно имеет решение $u_0(x, y)$ с непрерывными производными до второго порядка внутри B, причем сама функция $u_0(x, y)$ и ее первые производные непрерывны в $\bar{B}$. Пусть $\eta(x, y)$ — любая функция, непрерывная вместе с производными первого порядка в $\bar{B}$ и равная нулю на границе l в области B. Разложим функционал $J(u_0 + \alpha\eta)$ по степеням α до порядка α^2 и положим затем $\alpha = 1$. Из условий для u_0 и η следует, что

коэффициент при α будет равен нулю [74]:

$$\iint\limits_B (F_{p_0}\eta_x + F_{q_0}\eta_y)\,dx\,dy = \iint\limits_B \left(-\frac{\partial}{\partial x}F_{p_0} - \frac{\partial}{\partial y}F_{q_0}\right)\eta\,dx\,dy = 0.$$

Принимая это во внимание, получим

$$J(u_0+\eta) = J(u_0) + \frac{1}{2}\iint\limits_B [F_{pp}\eta_x^2 + 2F_{pq}\eta_x\eta_y + F_{qq}\eta_y^2]\,dx\,dy, \qquad (284)$$

причем функции F_{pp}, F_{pq}, F_{qq} в (284) имеют аргументы $(x,\ y,\ p_0+\theta_1\eta_x,\ q_0+\theta_2\eta_y)$, где p_0 и q_0 — частные производные от u_0 по x и y, а функции $\theta_1(x,\ y)$ и $\theta_2(x,\ y)$ удовлетворяют неравенствам $0 \leqslant \theta_i(x,\ y) \leqslant 1$ $(i=1,\ 2)$. Из (281) и (282) следует, что выражение, стоящее в квадратных скобках, есть положительная величина, и следовательно, $J(u_0+\eta) \geqslant J(u_0)$, причем равенство имеет место только при $\eta(x,\ y) \equiv 0$, т. е. $u_0(x,\ y)$ дает функционалу наименьшее значение по сравнению со всеми другими непрерывными функциями с непрерывными производными в $\bar{B}$, имеющими на l те же значения, что и $u_0(x,\ y)$. Условия (281) и (282) можно, очевидно, записать в виде одного неравенства $F_{pp}\xi_1^2 + 2F_{pq}\xi_1\xi_2 + F_{qq}\xi_2^2 > 0$, которое должно выполняться при всех значениях вещественных параметров ξ_1 и ξ_2 с $\xi_1^2+\xi_2^2 \neq 0$. Совершенно аналогично, для функционалов вида

$$J(u) = \int\limits_B \ldots \int F(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ p_1,\ \ldots,\ p_n)\,dx_1\ \ldots\ dx_n \left(p_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}\right)$$

при любом n неравенство

$$\sum_{i,\ k=1}^{n} F_{p_ip_k}(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ p_1,\ \ldots,\ p_n)\,\xi_i\xi_k > 0, \qquad (285)$$

в котором $\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n$ — произвольные вещественные параметры, не равные одновременно нулю, гарантирует то, что решение $u(x_1, \ldots, x_n)$ уравнения Остроградского $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial F(x_1,\ldots,x_n,u_{x_1},\ldots,u_{x_n})}{\partial u_{x_i}} = 0$ дает наименьшее значение функционалу J по сравнению со всеми гладкими функциями, совпадающими на l с u.

Если подынтегральная функция содержит и саму функцию $u(x_1,\ \ldots,\ x_n)$, то условие (285) надо заменить следующим:

$$\sum_{i,\ k=1}^{n} F_{p_ip_k}\xi_i\xi_k + 2\sum_{i=1}^{n} F_{p_iu}\xi_i\xi_0 + F_{uu}\xi_0^2 > 0 \qquad (286)$$

при любых вещественных значениях $\xi_0,\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_n$, таких, что $\sum\limits_{k=0}^{n} \xi_k^2 \neq 0$.

108. Прямые методы вариационного исчисления. В настоящее время широко развиты иные методы подхода к решению задач на абсолютный экстремум — методы, которые обходят применение дифференциальных уравнений. При этом пытаются построить искомую функцию, дающую абсолютный экстремум функционала, при помощи некоторого предельного процесса, исходя непосредственно из вида того интеграла, экстремум которого ищется.

В данном случае, как мы уже упоминали выше, задача представляется гораздо более трудной, чем соответствующая задача из дифференциального исчисления. В последнем случае, согласно основной теореме Вейерштрасса о непрерывных функциях, мы знаем, что всякая функция, непрерывная в замкнутой области, наверное принимает в некоторой точке этой области свое наибольшее (наименьшее) значение. В случае задач вариационного исчисления мы уже не имеем такой простой теоремы, и таким образом ставится под вопрос самое существование решения задачи.

Пусть $J(y)$ есть некоторый функционал от искомой функции $y(x)$, и мы ищем эту функцию так, чтобы упомянутый выше функционал имел наименьшее значение в некотором классе D функций $y(x)$. При любом выборе функции $y(x)$ из класса D функционал J получает определенное численное значение. Используя все функции класса D, мы получим, таким образом, бесчисленное множество чисел — значений функционала J. Пусть d — точная нижняя граница этого множества чисел. Мы не знаем заранее, существует ли в классе D функция $y(x)$, которая дает нашему функционалу это наименьшее значение d, но в силу определения точной нижней границы мы можем во всяком случае найти такую последовательность $y_n(x)$ функций из класса D, что числа $J(y_n)$ имеют своим пределом d при беспредельном возрастании n. Последовательность функций $y_n(x)$ называется обычно *минимизирующей последовательностью.* Одной из возможностей осуществления прямых методов вариационного исчисления является следующий прием: дается способ построения минимизирующих последовательностей с таким расчетом, чтобы из построенной минимизирующей последовательности путем некоторого предельного перехода получалась бы искомая функция, дающая наименьшее значение нашему функционалу. Если удается довести таким путем задачу до конца, то этот прием приводит к решению предельной задачи для дифференциального уравнения, которое выражает необходимое условие экстремума исследуемого функционала. Такой метод применим не только для доказательства существования решения, но и для построения практически удобного способа его приближенного вычисления. На указанном выше принципе основан известный метод Ритца для решения предельных задач. Отметим, что широкое обобщение этого метода на случай дифференциальных уравнений, не связанных с вариационным исчислением, было дано Б. Г. Галёркиным (Вестник инженеров и техников, 1915 г.). Работа Ритца была напечатана в 1908 г. (Journal für die reine und angew. Mathem., Bd. 135).

Теоретическое обоснование прямых методов естественно приводит, особенно для уравнений с частными производными, к использованию теории функций вещественного переменного. Сейчас рассмотрим простой пример применения прямых методов. Мы еще вернемся к этим вопросам в главе III.

Исследование сходимости методов Ритца и Галёркина и вопрос об оценке погрешности были подробно проведены в ряде работ советских математиков. Изложение этих вопросов и указание соответствующей литературы имеется в книге Л. В. Канторовича и В. И. Крылова «Приближенные методы высшего анализа». Исследованию сходимости методов Ритца и Б. Г. Галёркина посвящена значительная часть книги С. Г. Михлина «Вариационные методы в математической физике» (1957 г.).

Теоретическое обоснование прямых методов в связи с теоремами существования соответствующих экстремальных функций и исследованием их свойств изложено в монографии С. Л. Соболева «Некоторые применения функционального анализа в математической физике» (1950 г.).

109. Пример. Возьмем функционал, рассмотренный в [105]:

$$J(y)=\int_0^l \left[p(x)\,y'^2+q(x)\,y^2+2f(x)\,y\right]dx \tag{287}$$

и будем искать его наименьшее значение в упомянутом выше [105] классе D при однородных предельных условиях

$$y(0)=y(l)=0, \tag{288}$$

причем, как и в [105], считается, что $p(x)>0$ и $q(x)\geqslant 0$.

Мы знаем, что решение поставленной задачи дает функция $y_0(x)$, удовлетворяющая уравнению (258) и предельным условиям (288). Пусть

$$u_1(x),\quad u_2(x),\ \ldots \tag{289}$$

— последовательность функций, непрерывных в интервале $[0, l]$ вместе с их первыми производными, удовлетворяющих условиям (288) и линейно независимых.

Составляем линейную комбинацию первых n функций нашей последовательности с неопределенными пока постоянными коэффициентами $y_n=a_1^{(n)}u_1+\ldots+a_n^{(n)}u_n$ и подставляем в интеграл (287). После выполнения квадратур получим результат вида

$$J_n=J(y_n)=\sum_{i,\ j=1}^{n}\alpha_{ij}a_i^{(n)}a_j^{(n)}+\sum_{i=1}^{n}\beta_i a_i^{(n)}\qquad(\alpha_{ij}=\alpha_{ji}). \tag{290}$$

Определим коэффициенты $a_i^{(n)}$ из того условия, чтобы значения $a_i^{(n)}$ удовлетворяли необходимому условию экстремума выражения J_n, т е , проще говоря, приравняем нулю частные производные от J_n по $a_i^{(n)}$. Мы получаем, таким образом, n уравнений первой степени для определения $a_i^{(n)}$:

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}a_k^{(n)}+\frac{1}{2}\beta_i=0\quad(i=1,\ \ldots,\ n). \tag{291}$$

Определитель этой системы уравнений есть вместе с тем дискриминант квадратичной формы, входящей в выражение (290) и происходящей от интегрирования выражения $\left(py_n'^2+qy_n^2\right)$. В силу сделанных предположений, упомянутая квадратичная форма будет определенно положительной. В самом деле, она может оказаться равной нулю только в том случае, когда $y_n\equiv 0$, а это в силу линейной независимости функций $u_k(x)$ приводит к тому, что все коэффициенты $a_k^{(n)}$ равны нулю. Но дискриминант определенно положительной квадратичной формы, равный произведению ее собственных значений, будет наверное положительной величиной Таким образом, определитель системы (291) будет отличным от нуля; мы найдем из этой системы определенные значения для $a_i^{(n)}$ и сможем составить n-ое приближение $y_n(x)$. Отметим, что при увеличении числа n вычисленные уже коэффициенты, вообще говоря, изменятся. Поэтому при обозначении этих коэффициентов мы приписали к ним еще верхний значок, указывающий номер приближения.

Принимая во внимание, что квадратичная форма, входящая в выражение (290), определенно положительна, а также то, что система (291) имеет единственное решение, можем утверждать, что решение $\left(a_1^{(n)},\ \ldots,\ a_n^{(n)}\right)$ этой системы дает наименьшее значение выражению (290). При увеличении числа n наименьшее значение функционала ищется в более широком классе функций, и мы

можем, следовательно, утверждать, что

$$J(y_q) \leqslant J(y_p) \quad \text{при } q > p. \tag{292}$$

Кроме того, для любой линейной комбинации $z(x)$ функций (289)

$$z(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k u_k(x) \tag{293}$$

мы имеем [105] $J(z) \geqslant J(y_0)$.

Покажем, что при некоторых предположениях относительно системы функций (289) функции $y_n(x)$ стремятся равномерно на промежутке $[0, l]$ к упомянутой выше функции $y_0(x)$.

Формулируем эти предположения. Для любой функции $y(x)$, непрерывной вместе с производной на промежутке $[0, l]$, и при любом заданном положительном ε, существует такая конечная линейная комбинация функций (289), что выполняются неравенства:

$$\left| y(x) - \sum_{k=1}^{m} a_k u_k(x) \right| \leqslant \varepsilon, \quad \left| y'(x) - \sum_{k=1}^{m} a_k u_k'(x) \right| \leqslant \varepsilon \quad (0 \leqslant x \leqslant l). \tag{294}$$

Покажем прежде всего, что

$$J(y_n) \to J(y_0). \tag{295}$$

Мы имеем [105]

$$J(y_n) \geqslant J(y_0) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{296}$$

Применяя (294) к функции $y(x) = y_0(x)$ и пользуясь произвольностью ε, мы можем утверждать, что при любом заданном положительном δ существует такая линейная комбинация (293) функций (289), что $J(z) - J(y_0) \leqslant \delta$. Далее, в силу построения $y_m(x)$ мы имеем $J(y_m) - J(y_0) \leqslant \delta$ и в силу (292) можем написать: $J(y_n) - J(y_0) \leqslant \delta$ при $n \geqslant m$, откуда ввиду произвольности положительного числа δ и следует (295). Мы имеем, как легко проверить,

$$J(y_n) - J(y_0) = 2\int_0^l [py_0'(y_n' - y_0') + qy_0(y_n - y_0) + f(y_n - y_0)]\,dx +$$
$$+ \int_0^l [p(y_n' - y_0')^2 + q(y_n - y_0)^2]\,dx.$$

Производя в первом интеграле интегрирование по частям и принимая во внимание, что $y = y_n - y_0$ удовлетворяет условиям (288), получим для этого интеграла выражение:

$$\int_0^l \left[-\frac{d}{dx}(py_0') + qy_0 + f \right](y_n - y_0)\,dx,$$

откуда видно, что упомянутый интеграл равен нулю, так что

$$J(y_n) - J(y_0) = \int_0^l [p(y_n' - y_0')^2 + q(y_n - y_0)^2]\,dx, \quad \text{т. е.}$$

$$J(y_n) - J(y_0) \geqslant \int_0^l p(y_n' - y_0')^2\,dx. \tag{297}$$

Обозначая через a наименьшее значение положительной функции $p(x)$ на промежутке $[0, l]$, получим на основании (297)

$$\int_0^l (y_n' - y_0')^2\,dx \leqslant \frac{J(y_n) - J(y_0)}{a}. \tag{298}$$

Далее, неравенство Буняковского дает нам:

$$|y_n - y_0|^2 = \left|\int_0^x (y_n' - y_0')\,dx\right|^2 \leqslant \int_0^x (y_n' - y_0')^2\,dx \int_0^x 1^2\,dx \leqslant l\int_0^l (y_n' - y_0')^2\,dx$$

и, на основании (298), получаем $|y_n(x) - y_0(x)| \leqslant \sqrt{\frac{l}{a}} \cdot \sqrt{J(y_n) - J(y_0)}$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$, откуда в силу (295) и следует, что $y_n(x) \to y_0(x)$ равномерно на промежутке $[0, l]$.

Докажем, что для функций

$$u_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{l} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots), \tag{299}$$

удовлетворяющих условиям (288), выполнены и условия (294).

Продолжим функцию $y'(x)$, заданную в промежутке $[0, l]$, на промежуток $[-l, 0]$ четным образом. При любом заданном положительном η найдем такой тригонометрический полином $T(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{m} c_k \cos\frac{k\pi x}{l}$, что [II; 168]

$$|y'(x) - T(x)| \leqslant \eta \qquad (-l \leqslant x \leqslant l), \tag{300}$$

причем $c_0 = \frac{1}{l}\int_0^l T(x)\,dx$.

Но из (300) следует $T(x) = y'(x) + f(x)$, где $|f(x)| \leqslant \eta$, и, следовательно, принимая во внимание, что $y(0) = y(l) = 0$, получим $c_0 = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,dx$, откуда $|c_0| \leqslant \eta$, и из (300) следует:

$$\left|y'(x) - \sum_{k=1}^{m} c_k \cos\frac{k\pi x}{l}\right| \leqslant \eta + |c_0| \leqslant 2\eta.$$

Интегрируя написанную разность от 0 до x, получим

$$\left|y(x) - \sum_{k=1}^{m} \frac{l}{k\pi} c_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right| \leqslant 2\eta l$$

и, взяв $\eta = \varepsilon/[2(l+1)]$, мы получили линейную комбинацию функций (299) $\sum_{k=1}^{m} \frac{l}{k\pi} c_k \sin\frac{k\pi x}{l}$, удовлетворяющую условиям (294).

Совершенно аналогично, пользуясь теоремой о приближении непрерывной функции полиномами, можно показать, что функции $u_k(x) = (l - x)x^k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ также удовлетворяют условиям (294). Все они, очевидно, удовлетворяют и условиям (288).

ГЛАВА III

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ L_1 И L_2. ОБОБЩЕННЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ. ПРОБЛЕМА МИНИМУМА КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА

110. Усреднение функций из L_1 и L_2. Настоящую главу мы посвятим некоторым вопросам теории функций вещественного переменного, связанным в основном с функциональными пространствами L_1 и L_2, о которых мы говорили в томе II [161 — 163] и в начале настоящего тома [22, 23, 62]. В конце главы будет рассмотрена вариационная задача для функционала, содержащего частные производные. При этом само определение частных производных будет существенным образом изменено (обобщенные производные). В дальнейшем все функции считаются вещественными. Мы начнем с процесса усреднения любой функции $f(P)$, принадлежащей L_1 или L_2. Этот процесс дает возможность построить функции, имеющие производные всех порядков, и сколь угодно близкие к $f(P)$ в метрике L_1 или L_2 соответственно.

Определим сначала «усредняющее ядро». Введем функцию ω одного вещественного независимого переменного, определяемую следующим образом:

$$\omega(t) = \begin{cases} ce^{\frac{1}{t^2-1}} & \text{при } t^2 < 1, \\ 0 & \text{при } t^2 \geqslant 1, \end{cases} \tag{1}$$

причем постоянную c определим ниже. Вопрос о непрерывности функции ω и ее производных возникает только при $t = \pm 1$. Если $t^2 \to 1$ от меньших значений, то $1/(t^2-1) \to -\infty$ и $\omega(t) \to 0$. Производная любого порядка от функции ω по t при $t^2 < 1$ имеет, очевидно, вид

$$\frac{P(t)}{(t^2-1)^\alpha} e^{\frac{1}{t^2-1}},$$

где $P(t)$ — некоторый полином и α — целое положительное число. При $t^2 \to 1$ от меньших значений, раскрывая неопределенность,

убедимся в том, что выражение $(t^2-1)^{-\alpha}e^{\frac{1}{t^2-1}}$ стремится к нулю. Мы видим, таким образом, что функция $\omega(t)$ имеет производные всех порядков при $-\infty<t<\infty$. Дальше мы будем рассматривать пространство R^m с декартовыми координатами $x_1, \ldots, x_m$. Мы часто будем обозначать точки этого пространства одной буквой x или $y(y_1, \ldots, y_m)$ и т. д. Расстояние между двумя точками x и y из R^m обозначим следующим образом:

$$|x-y|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_m-y_m)^2}.$$

Фиксируем какую-нибудь точку y из R^m и положительное число $h>0$ и рассмотрим функцию $\omega\left(\frac{|x-y|}{h}\right)$. Она непрерывна в R^m и имеет все непрерывные частные производные по x_k, $k=1, \ldots, m$, в R^m. Эта функция отлична от нуля лишь в шаре радиуса h с центром в точке y. Постоянную c определим из условия

$$c\int\limits_{|x|<1} e^{\frac{1}{|x|^2-1}}\,dx=1 \qquad (dx=dx_1\ldots dx_m). \tag{2}$$

Пусть $u(x)$ — функция, суммируемая по некоторой ограниченной области $\mathscr{D}$ или, общее, по некоторому ограниченному открытому множеству. В этом случае обычно пишут $u\in L_1(\mathscr{D})$. Совершенно аналогично пишут $x\in\mathscr{E}$, если точка x принадлежит множеству $\mathscr{E}$. Если $u(x)$ не принадлежит $L_1(\mathscr{D})$ или x к $\mathscr{E}$, то пишут $u\overline{\in} L_1(\mathscr{D})$ или $x\overline{\in}\mathscr{E}$. Продолжим $u(x)$ вне $\mathscr{D}$ нулем, т. е. будем считать $u(x)=0$, если x находится вне $\mathscr{D}$. Введем теперь функции $u_h(x)$ $(h>0)$ — средние для функции $u(x)$:

$$u_h(x)=\frac{1}{h^m}\int\omega\left(\frac{|x-y|}{h}\right)u(y)\,dy \qquad (dy=dy_1\ldots dy_m). \tag{3}$$

Здесь и в дальнейшем, если нет обозначения области интегрирования, считается, что интегрирование производится по всему R^m. Фактически в интеграле (3) оно производится по шару с центром x и радиусом h, ибо вне этой сферы подынтегральная функция равна нулю, и значения $u_h(x)$ определяются только значениями $u(y)$ в упомянутом шаре.

В частности, $u_h(x)=0$, если x вне $\mathscr{D}$, а расстояние от x до границы области $\mathscr{D}$ не меньше h, ибо $u(x)$ продолжена нулем вне $\mathscr{D}$. Отметим еще, что в силу (2)

$$\frac{1}{h^m}\int\omega\left(\frac{|x-y|}{h}\right)dy=1. \tag{4}$$

Для доказательства (4) достаточно использовать замену переменных интегрирования $y_k-x_k=hz_k$ $(k=1, 2, \ldots, m)$.

111. Свойства средних. Докажем ряд свойств средних.

1. Если $u(x)$ ограничена в $\mathscr{D}$, то

$$\sup_{x\in R^m} |u_h(x)| \leqslant \sup_{y\in\mathscr{D}} |u(y)|. \tag{5}$$

Это следует из очевидного неравенства

$$|u_h(x)| \leqslant \frac{1}{h^m} \sup_{y\in\mathscr{D}} |u(y)| \int \omega\left(\frac{|x-y|}{h}\right) dy = \sup_{y\in\mathscr{D}} |u(y)|.$$

2. Функция $u_h(x)$ имеет производные по x_k $(k=1, 2, \ldots, m)$ любого порядка, которые определяются формулой

$$\frac{\partial^l u_h(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}} = \frac{1}{h^m} \int \frac{\partial^l}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}} \omega\left(\frac{|x-y|}{h}\right) u(y)\, dy. \tag{6}$$

Усредняющее ядро имеет производные всех порядков по $x(x_1, \ldots, x_m)$ во всем R^m, отличные от нуля лишь в сфере с центром x и радиусом h. Будем рассматривать для простоты письма лишь производную от $u_h(x)$ по x_1. Отношение $\frac{u_h(x+\Delta x_1)-u_h(x)}{\Delta x_1}$ запишется в виде

$$\frac{1}{h^m} \int \frac{1}{\Delta x_1}\left[\omega\left(\frac{|x-y|}{h}\right)\Big|_{(x_1+\Delta x_1,\, x_2, \ldots, x_m)} - \omega\left(\frac{|x-y|}{h}\right)\Big|_{(x_1, \ldots, x_m)}\right] u(y)\, dy.$$

Разность в квадратных скобках можно выразить по формуле конечных приращений Лагранжа, и множитель при $u(y)$ будет иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \omega\left(\frac{|x-y|}{h}\right)\Big|_{(x_1+\theta\Delta x_1,\, x_2, \ldots, x_m)}.$$

Под знаком интеграла стоит написанное выражение при $0 < \theta < 1$, равномерно ограниченное при всех указанных θ и Δx_1, умноженное на функцию $u(y)$ из L_1. Таким образом, абсолютное значение подынтегральной функции имеет оценку $c|u(y)|$, и возможно осуществить предельный переход при $\Delta x_1 \to 0$ под знаком интеграла [**II; 109;** теорема 1], так как $c|u(y)|$, где c — постоянная, есть суммируемая функция. Это приводит к формуле (6) для производной $u_h(x)$ по x_1. Аналогичное доказательство годится и для общей формулы (6).

3. Для любой $u \in L_1(R^m)$ имеет место формула

$$u_h(x) - u(x) = \frac{1}{h^m} \int \omega\left(\frac{|x-y|}{h}\right) [u(y) - u(x)]\, dy. \tag{7}$$

Действительно, по определению

$$\frac{1}{h^m} \int \omega\left(\frac{|x-y|}{h}\right) u(y)\, dy = u_h(x)$$

и в силу (2)

$$\frac{1}{h^m}\int \omega\left(\frac{|x-y|}{h}\right)u(x)\,dy = u(x)\frac{1}{h^m}\int \omega\left(\frac{|x-y|}{h}\right)dy = u(x).$$

Перед доказательством следующего свойства средних сформулируем одно свойство суммируемых функций, которое будет доказано в томе V. Пусть $u(x) \in L_1(\mathscr{D})$, где $\mathscr{D}$, как и выше, — ограниченное открытое множество. Продолжим ее нулем вне $\mathscr{D}$. При этом имеет место следующее свойство, которое называется непрерывностью в среднем: при любом заданном $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\int\limits_{\mathscr{D}} |u(x+y) - u(x)|\,dx \leqslant \varepsilon$ при $|y| \leqslant \delta$, т. е.

$$\|u(x+y) - u(x)\|_{L_1(\mathscr{D})} \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad |y| \leqslant \delta. \tag{8}$$

Аналогично, если $u(x) \in L_2(\mathscr{D})$, то при любом $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\|u(x+y) - u(x)\|_{L_2(\mathscr{D})} \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad |y| \leqslant \delta. \tag{9}$$

4. Если $u(x) \in L_1(\mathscr{D})$, то

$$\int\limits_{\mathscr{D}} |u_h(x) - u(x)|\,dx \to 0 \quad \text{при } h \to 0, \tag{10}$$

т. е. средние функции $u_h(x)$ стремятся в метрике $L_1(\mathscr{D})$ к $u(x)$ при $h \to 0$. Если $u(x) \in L_2(\mathscr{D})$, то

$$\int\limits_{\mathscr{D}} |u_h(x) - u(x)|^2\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0. \tag{11}$$

Рассмотрим доказательство для более сложного случая $u \in L_2(\mathscr{D})$.

Из (7) по неравенству Буняковского следует

$$|u_h(x) - u(x)|^2 \leqslant \frac{1}{h^{2m}} \int\limits_{|y-x| \leqslant h} |u(y) - u(x)|^2\,dy \int \omega^2\left(\frac{|x-y|}{h}\right)dy.$$

В первом интеграле область интегрирования та же, что во втором. Полагая во втором интеграле $(x-y)/h = z$, получим

$$\int \omega^2\left(\frac{|x-y|}{h}\right)dy = h^m \int \omega^2(z)\,dz = c_1 h^m,$$

откуда

$$|u_h(x) - u(x)|^2 \leqslant \frac{c_1}{h^m} \int\limits_{|y-x| \leqslant h} |u(y) - u(x)|^2\,dy$$

или, полагая $y - x = y'$,

$$|u_h(x) - u(x)|^2 \leqslant \frac{c_1}{h^m} \int\limits_{|y'| \leqslant h} |u(x+y') - u(x)|^2\,dy'.$$

Это неравенство интегрируем по $\mathscr{D}$ и применяем теорему Фубини [II; 110]:

$$\int_{\mathscr{D}} |u_h(x)-u(x)|^2\,dx \leqslant \frac{c_1}{h^m} \int_{|y'|\leqslant h} dy' \int_{\mathscr{D}} |u(x+y')-u(x)|^2\,dx.$$

Используя непрерывность в среднем, можем утверждать, что при любом заданном $\varepsilon>0$ существует такое $h>0$, что

$$\int_{\mathscr{D}} |u(x+y')-u(x)|^2\,dx \leqslant \varepsilon^2 \quad \text{при} \quad |y'|\leqslant h,$$

откуда

$$\int_{\mathscr{D}} |u_h(x)-u(x)|^2\,dx \leqslant \frac{c_1\varepsilon^2}{h^m} \int_{|y'|\leqslant h} dy' = c_1c_2\varepsilon^2,$$

где c_2 — объем шара с единичным радиусом в R^m. Ввиду произвольности ε отсюда и следует (11).

Соотношение (10) для функций $u(x)$ из $L_1(\mathscr{D})$ доказывается еще проще, так как в этом случае не надо применять неравенство Буняковского, а следует исходить непосредственно из неравенства

$$|u_h(x)-u(x)| \leqslant \frac{c_1}{h^m} \int_{|y'|\leqslant h} |u(x+y')-u(x)|\,dy'$$

и использовать теорему Фубини и свойство непрерывности в среднем функций из $L_1(\mathscr{D})$. Все сказанное выше имеет место и в том случае, когда $\mathscr{D}$ — ограниченная замкнутая область или, вообще, ограниченное измеримое множество.

112. Финитные бесконечно дифференцируемые функции. Функция, определенная во всем пространстве R^m и равная нулю во всех достаточно удаленных точках R^m, т. е. в точках, удовлетворяющих условию $|x|>M$, где M — некоторое положительное число, называется обычно финитной функцией в R^m. Класс финитных бесконечно дифференцируемых в R^m функций обозначается через $C_0^\infty(R^m)$. Число M для различных функций $u(x)$ этого класса может быть, естественно, различным. Рассмотрим функцию $u(x)$, суммируемую по всему пространству R^m, т. е. $u(x)$ из $L_1(R^m)$. Обозначим через $u_{(M)}(x)$ функцию, совпадающую с $u(x)$ в шаре $|x|<M$ и равную нулю в остальных точках R^m. Так как $u\in L_1(R^m)$, то

$$\int |u(x)-u_{(M)}(x)|\,dx = \int_{|x|>M} |u(x)|\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad M\to\infty.$$

Введем теперь усреднения $u_{(M)h}(x)$ с $h<1$. Согласно [111] $u_{(M)h}(x)$ бесконечно дифференцируемы и равны нулю при $|x|>M+1$, т. е.

$u_{(M)h}(x) \in C_0^\infty(R^m)$. Кроме того,

$$\int\limits_{|x|<M+1} |u_{(M)}(x) - u_{(M)h}(x)|\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и по нему подберем M так, чтобы

$$\int |u(x) - u_{(M)}(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2},$$

а затем рассмотрим столь малые h, что

$$\int |u_{(M)}(x) - u_{(M)h}(x)|\,dx = \int\limits_{|x|<M+1} |u_{(M)}(x) - u_{(M)h}(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда получаем

$$\|u - u_{(M)h}\|_{L_1(R^m)} = \int |u(x) - u_{(M)h}(x)|\,dx < \varepsilon,$$

т. е. функцию $u(x)$ можно аппроксимировать в норме пространства $L_1(R^m)$ функциями $u_{(M)h}(x)$ класса $C_0^\infty(R^n)$. Аналогично доказывается, что если $u(x) \in L_2(R^m)$, то

$$\|u - u_{(M)h}\|_{L_2(R^m)} \to 0 \text{ при } \begin{matrix} M \to \infty, \\ h \to 0. \end{matrix}$$

Итак, можно считать доказанной следующую теорему:

Теорема 1. *Класс $C_0^\infty(R^m)$ плотен в пространствах $L_1(R^m)$ и $L_2(R^m)$.*

Обратимся к рассмотрению ограниченной области $\mathscr{D}$ и введем класс функций $C_0^\infty(\mathscr{D})$, финитных в $\mathscr{D}$. Это те функции из $C_0^\infty(R^m)$, для которых открытое множество точек x, в которых $|u(x)| > 0$, вместе с замыканием лежит внутри $\mathscr{D}$. Докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Класс $C_0^\infty(\mathscr{D})$ плотен в $L_2(\mathscr{D})$ и $L_1(\mathscr{D})$.*

Обозначим через $\mathscr{D}_\delta$ множество тех точек $\mathscr{D}$, для которых расстояние до границы S открытого множества $\mathscr{D}$ больше δ [**II; 92**]: $\rho(x, S) > \delta$. Легко доказать, что S — замкнутое множество, а множество $\mathscr{D}_\delta$ — открытое. Пусть $\tau_\delta(x)$ — характеристическая функция множества $\mathscr{D}_\delta$, т. е. $\tau_\delta(x) = 1$, если $x \in \mathscr{D}_\delta$ и $\tau_\delta(x) = 0$, если $x \overline{\in} \mathscr{D}_\delta$. Через $\sigma_\delta(x)$ обозначим усреднение для $\tau_{2\delta}(x)$ с радиусом усреднения $h = \delta$. Эта функция обладает следующими свойствами: 1) $\sigma_\delta(x)$ бесконечно дифференцируема в R^m; 2) $\sigma_\delta(x) = 0$, если $\rho(x, S) \leqslant \delta$, ибо для таких точек шар радиуса δ, по которому происходит усреднение, не пересекается с $\mathscr{D}_{2\delta}$; 3) $\sigma_\delta(x) = 1$ в $\mathscr{D}_{3\delta}$, так как для таких точек упомянутый шар лежит в $\mathscr{D}_{2\delta}$, где $\tau_{2\delta}(x) = 1$; 4) $0 \leqslant \sigma_\delta(x) \leqslant 1$. Это следует из того, что $\tau_{2\delta}(x)$ и ядро усреднения $\omega\left(\frac{|x-y|}{\delta}\right)$ неотрицательны, а также из свойства 1).

Пусть $v(x) \in C_0^\infty(R^m)$. Произведение $v(x)\sigma_\delta(x) \in C_0^\infty(\mathscr{D})$ и $v(x)\sigma_\delta(x) = v(x)$ для $x \in \mathscr{D}_{3\delta}$. Оцениваем интеграл

$$\int_{\mathscr{D}} |v(x)\sigma_\delta(x) - v(x)|^2\,dx = \int_{\mathscr{D}} |v(x)|^2 (1-\sigma_\delta(x))^2\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\mathscr{D}\setminus\mathscr{D}_{3\delta}} |v(x)|^2\,dx \leqslant \sup_{x\in\mathscr{D}} |v(x)|^2\, m(\mathscr{D}\setminus\mathscr{D}_{3\delta}),$$

где m — мера Лебега. Любая точка $x \in \mathscr{D}$ входит в $\mathscr{D}_{3\delta}$ при достаточно малом δ и, следовательно, $m(\mathscr{D}\setminus\mathscr{D}_{3\delta}) \to 0$ при $\delta \to 0$. Мы имеем из предыдущих неравенств, что $\|v(x)\sigma_\delta(x) - v(x)\|_{L_2(\mathscr{D})} \to 0$. Предположим теперь, что $u(x) \in L_2(\mathscr{D})$. В силу сказанного выше при заданном $\varepsilon > 0$ существует такая функция $v(x)$ из $C_0^\infty(R^m)$, что $\|u - v\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Затем при выбранном $v(x)$ существует такое малое $\delta > 0$, что $\|v - v\sigma_\delta\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ и, следовательно, $\|u - v\sigma_\delta\| \leqslant \|u - v\| + \|v - v\sigma_\delta\| \leqslant \varepsilon$. Этим доказано, что класс $C_0^\infty(\mathscr{D})$ плотен в $L_2(\mathscr{D})$. Аналогично проверяется, что $C_0^\infty(\mathscr{D})$ плотен в $L_1(D)$.

113. Обобщенные производные. Мы введем сейчас новое понятие частной производной, которое имеет широкое применение. В [II; 66] мы приводили формулу (31_1) интегрирования по частям для тройного интеграла

$$\iiint_{\mathscr{D}} \varphi \frac{\partial\psi}{\partial z}\,dv = -\iiint_{\mathscr{D}} \psi \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dv + \iint_S \varphi\psi\cos(n, z)\,dS. \qquad (12)$$

Совершенно аналогичная формула имеет место и для интеграла любой кратности при соответствующем определении $\cos(n, z)$. Отметим, что, если, например, $\varphi(x)$ — функция, финитная в $\mathscr{D}$, то интеграл по S равен нулю и формула (12) принимает вид

$$\iiint_{\mathscr{D}} \varphi \frac{\partial\psi}{\partial z}\,dv = -\iiint_{\mathscr{D}} \frac{\partial\varphi}{\partial z}\psi\,dv. \qquad (13)$$

Коротко говоря, можно перекидывать дифференцирование с одного множителя ψ на другой φ, меняя знак у интеграла. Рассмотрим какую-либо производную порядка l:

$$D^l\varphi = \frac{\partial^l\varphi}{\partial x_1^{l_1}\ldots\partial x_m^{l_m}} \quad (l_1 + \ldots + l_m = l).$$

Если функции $\varphi(x)$ и $u(x)$ имеют внутри $\mathscr{D}$ непрерывные частные производные до порядка l и функция $\varphi(x)$ финитна в $\mathscr{D}$, то имеется формула интегрирования по частям

$$\int_{\mathscr{D}} D^l\varphi(x)\,u(x)\,dx = (-1)^l \int_{\mathscr{D}} \varphi(x)\,D^l u(x)\,dx. \qquad (14)$$

Формула эта может быть положена в основу понятия обобщенной производной.

Определение 1. Пусть $u(x)$ и $u^*(x) \in L_2(\mathscr{D})$, причем для любой $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathscr{D})$ имеет место формула:

$$\int_{\mathscr{D}} u(x) D^l \varphi(x)\, dx = (-1)^l \int_{\mathscr{D}} \varphi(x) u^*(x)\, dx. \tag{15}$$

При этом $u^*(x)$ называется *обобщенной производной вида D^l в области $\mathscr{D}$*. Покажем, что обобщенная производная единственна с точностью до функции, эквивалентной нулю. Положим, что существует еще обобщенная производная $u_1^* \in L_2(\mathscr{D})$ типа D^l. Надо доказать, что u_1^* эквивалентна u^*. Подставляя в формулу u_1^* вместо u^* и почленно вычитая полученные две формулы, получим

$$\int_{\mathscr{D}} (u^* - u_1^*) \varphi\, dx = 0 \tag{16}$$

для любой бесконечно дифференцируемой финитной в $\mathscr{D}$ функции $\varphi(x)$ Положим $\varphi(x) = \varphi_m(x)$, где $\varphi_m(x) \in C_0^\infty(\mathscr{D})$ и стремится к $(u^* - u_1^*)$ в $L_2(\mathscr{D})$. Переходя в интеграле (16) к пределу, получим [II, 162]

$$\int_{\mathscr{D}} (u^* - u_1^*)^2\, dx = 0,$$

откуда и следует, что $u^*(x)$ и $u_1^*(x)$ эквивалентны Для обобщенной производной применяется то же обозначение, что и для обычной

$$u^*(x) = D^l u(x) = \frac{\partial^l u}{\partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_m^{l_m}}.$$

Если существует обычная непрерывная производная $D^l u(x)$, то эта производная в силу формулы интегрирования по частям (14) совпадает с обобщенной производной $u^*(x)$.

Из определения обобщенной производной и ее единственности следует

$$D^l(c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)) = c_1 D^l u_1(x) + c_2 D^l u_2(x), \tag{17}$$

причем обобщенная производная, стоящая слева, существует, если существуют обобщенные производные, стоящие справа. Из определения следует также, что $D^l u(x)$ не зависит от порядка дифференцирования, но лишь от его вида D^l. Отметим еще, что из существования $D^l u(x)$ не следует существование обобщенных производных порядка ниже l или того же порядка l, но другого вида, отличного от D^l. Сформулируем еще свойство замкнутости обобщенного дифференцирования. Пусть $v_n(x) \in L_2(\mathscr{D})$, $v_n(x) \to v(x)$ в $L_2(\mathscr{D})$, существуют обобщенные производные $D^l v_n(x) = v_n^*(x)$ и $v_n^*(x) \to v^*(x)$ в $L_2(\mathscr{D})$ при $n \to \infty$. Тогда $v(x)$ имеет

обобщенную производную $D^l v(x) = v^*(x)$. Для доказательства надо заменить в формуле (15) $u(x)$ и $u^*(x)$ на $v_n(x)$ и $v_n^*(x)$ соответственно и перейти к пределу при $n \to \infty$. При этом мы получим формулу (15), в которой $u(x)$ заменено на $v(x)$ и $u^*(x)$ на $v^*(x)$, что и требовалось доказать.

Предполагая, что $u(x)$ имеет обобщенную производную $u^*(x) = D^l u(x)$, вычислим обычную производную от средней функции:

$$D_x^l u_h(x) = \frac{1}{h^m} \int u(y) D_x^l \omega\left(\frac{|x-y|}{h}\right) dy = \frac{(-1)^l}{h^m} \int u(y) D_y^l \omega\left(\frac{|x-y|}{h}\right) dy. \quad (18)$$

Если $x \in \mathscr{D}$ и ее расстояние от границы $\mathscr{D}$ больше h, то мы можем в точке x взять $\omega\left(\frac{|x-y|}{h}\right)$ в качестве финитной функции φ в формуле (15):

$$\frac{1}{h^m} \int_{\mathscr{D}} u^*(y) \omega\left(\frac{|x-y|}{h}\right) dy = \frac{(-1)^l}{h^m} \int_{\mathscr{D}} u(y) D_y^l \omega\left(\frac{|x-y|}{h}\right) dy$$

и в силу (18) можем записать эту формулу в виде

$$D_x^l u_h(x) = \frac{1}{h^m} \int u^*(y) \omega\left(\frac{|x-y|}{h}\right) dy, \quad (19)$$

т. е. *средние функции от обобщенных производных совпадают с производными того же вида от средних функций во всех точках $\mathscr{D}$, расстояние от которых до границы $\mathscr{D}$ больше радиуса усреднения.*

На основании свойств средних функций можем утверждать, что $u_h(x) \to u(x)$ и $D^l u_h(x) \to u^*(x)$ в $L_2(\mathscr{D}')$ при $h \to 0$, где $\mathscr{D}'$ — любая область, лежащая строго внутри $\mathscr{D}$. Прежде чем переходить к формулировке дальнейших свойств обобщенных производных, дадим их другое определение и докажем его равносильность первому определению.

Определение 2. *Функция $u^*(x)$ из $L_2(\mathscr{D})$ называется обобщенной производной типа D^l функции $u(x)$ из $L_2(\mathscr{D})$, если существует последовательность $u_n(x)$ функций из $C_0^\infty(R^m)$ таких, что $u_n(x)$ и $D^l u_n(x)$ сходятся при $n \to \infty$ к $u(x)$ и $u^*(x)$ в $L_2(\mathscr{D}')$, где $\mathscr{D}'$ — любая область, лежащая строго внутри $\mathscr{D}$.*

Теорема. *Определения 1 и 2 равносильны.*

Положим, что $u^*(x)$ есть обобщенная производная $D^l u(x)$ по определению 2. Заменим в формуле (14) $u(x)$ на $u_n(x)$ и $D^l u(x)$ на $D^l u_n(x)$. После этого мы можем перейти к пределу под знаком интеграла [II; 109] и придем, таким образом, к формуле (15), соответствующей определению 1.

Справедливость обратного утверждения доказана непосредственно перед определением 2.

114. Свойства обобщенных производных. Укажем свойства обобщенных производных; некоторые из них легко вытекают из данных определений, а другие будут доказаны в томе V.

Если $u^* = D^l u$ есть обобщенная производная в $\mathscr{D}$, то она является обобщенной производной и в любой подобласти области $\mathscr{D}$. Это следует непосредственно из второго определения.

Если $u(x)$ из $L_2(\mathscr{D})$ имеет обобщенную производную

$$\frac{\partial^\alpha u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}} = u^*(x)$$

из $L_2(\mathscr{D})$, а $u^*(x)$ — обобщенную производную

$$\frac{\partial^\beta u^*}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_m^{\beta_m}} = v(x) \in L_2(\mathscr{D}),$$

то $u(x)$ имеет обобщенную производную

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1+\beta_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m+\beta_m}} = v(x)$$

из $L_2(\mathscr{D})$. Это следует из первого определения.

Свойства обобщенных производных будут подробно исследованы в томе V. Отметим без доказательства некоторые из них.

Если функция $f(x)$ одной независимой переменной непрерывна в конечном промежутке $[a, b]$ и внутри него имеет обобщенную производную $\frac{df(x)}{dx}$ из $L_2([a, b])$, то $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = f(a) + \int_a^x \frac{df(t)}{dt}\, dt \quad (a \leqslant x \leqslant b). \tag{20}$$

При этом $f(x)$ имеет почти везде в $[a, b]$ обычную производную, равную (эквивалентную) обобщенной производной $\frac{df(x)}{dx}$. Если функция $\varphi(x)$ суммируема на промежутке $[a, b]$ и $f(x)$ определена формулой

$$f(x) = f(a) + \int_a^x \varphi(t)\, dt, \tag{21}$$

то $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и почти везде имеет обычную производную $f'(x) = \varphi(x)$. Функции, представимые формулой вида (21), называются обычно абсолютно непрерывными на $[a, b]$. Отметим, что данные выше два определения обобщенных производных могут формулироваться не в $L_2(\mathscr{D})$, а в $L_1(\mathscr{D})$, и формула (21), если $\varphi(x)$ суммируема на $[a, b]$, определяет класс функций, непрерывных в $[a, b]$ и имеющих внутри этого проме-

жутка обобщенную производную из $L_1([a, b])$:

$$\frac{df(x)}{dx} = \varphi(x).$$

Не всякая непрерывная на $[a, b]$ функция $f(x)$ абсолютно непрерывна. Справедливо и следующее утверждение: не всякая непрерывная на $[a, b]$ функция, имеющая почти везде в $[a, b]$ производную, абсолютно непрерывна. Можно показать, что существуют непрерывные в $[a, b]$ функции, которые ни в одной точке внутри $[a, b]$ не имеют производной. Они тем самым не имеют и обобщенной производной. Составим функцию двух переменных $u(x_1, x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, где $f(x_1)$ и $f(x_2)$ — функции только что указанного типа. Функция $u(x_1, x_2)$ не имеет обобщенных производных первого порядка, но имеет, как нетрудно показать, обобщенную производную $\frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$. Сформулируем теперь один общий результат, касающийся обобщенных производных. Если функция $u(x) \in L_2(\mathscr{D})$ и имеет все обобщенные производные порядка l из $L_2(\mathscr{D})$, то она имеет все обобщенные производные порядка, меньшего l, также принадлежащие $L_2(\mathscr{D})$.

При этом граница области $\mathscr{D}$ не должна быть слишком плохой. Достаточно, например, чтобы она была гладкой. В томе V будет описан более широкий класс областей, для которых это имеет место.

Можно, кроме понятия обобщенной производной, определить обобщенное выражение для любого линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. В качестве примера рассмотрим оператор второго порядка

$$Lu = \sum_{k,\, l=1}^{m} a_{kl} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k=1}^{m} b_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + cu. \tag{22}$$

Составим новый оператор

$$L^* u = \sum_{k,\, l=1}^{m} a_{kl} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} - \sum_{k=1}^{m} b_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + cu. \tag{23}$$

В общем случае линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами оператор L^*u отличается от Lu знаком при производных нечетного порядка. Если функция $u(x)$ имеет в области $\mathscr{D}$ непрерывные производные, входящие в выражение оператора Lu, а $\varphi(x)$ принадлежит $C_0^\infty(\mathscr{D})$, то с помощью формулы (14) нетрудно доказать равенство

$$\int_{\mathscr{D}} uL^* \varphi \, dx = \int_{\mathscr{D}} Lu \cdot \varphi \, dx.$$

Для суммируемых в области $\mathscr{D}$ функций $u(x), u^*$ обобщенное выражение оператора $Lu = u^*$ определяется равенством

$$\int_{\mathscr{D}} uL^* \varphi \, dx = \int_{\mathscr{D}} u^* \varphi \, dx, \tag{24}$$

где $\varphi(x)$ — любая функция из $C_0^\infty(\mathscr{D})$.

Это определение не предполагает, что для $u(x)$ определены отдельные производные, входящие в Lu. Если все они существуют, то Lu можно из них составить согласно формуле (22). Отметим, что в соответствии с данным выше определением обобщенное решение уравнения $Lu = 0$ можно определить формулой $\int_{\mathscr{D}} uL^* \varphi \, dx = 0$, где $\varphi(x)$ — любая финитная бесконечно дифференцируемая в $\mathscr{D}$ функция.

115. Классы функций $W_2^1(\mathscr{D})$, $\mathring{W}_2^1(\mathscr{D})$ и $W_2^2(\mathscr{D})$. Мы рассмотрим сейчас некоторые классы функций, имеющих обобщенные производные. Подробное изложение теории этих и более общих классов, а также их применений имеется в монографии С. Л. Соболева «Некоторые применения функционального анализа в математической физике», и в томе V.

Класс $W_2^1(\mathscr{D})$ есть множество всех функций $u(x)$ из $L_2(\mathscr{D})$, имеющих все обобщенные производные первого порядка тоже из $L_2(\mathscr{D})$. Этот класс линеен, т. е. если $u_k(x) \in W_2^1(\mathscr{D})$ $(k = 1, \ldots, n)$, то и

$$\sum_{k=1}^{n} c_k u_k(x) \in W_2^1(\mathscr{D}),$$

где c_k — произвольные постоянные. Элементы этого класса определены, очевидно, с точностью до эквивалентности. Введем в этом классе скалярное произведение

$$(u, v)_{W_2^1} = \int_{\mathscr{D}} \left(uv + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) dx, \tag{25}$$

где $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ — обобщенные производные. Ему соответствует норма

$$\| u \|^2_{W_2^1} = \int_{\mathscr{D}} \left[u^2 + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 \right] dx. \tag{26}$$

Легко проверить, что они обладают всеми необходимыми свойствами:

$$(u, v)_{W_2^1} = (v, u)_{W_2^1};$$

$$(c_1 u_1 + c_2 u_2, v)_{W_2^1} = c_1 (u_1, v)_{W_2^1} + c_2 (u_2, v)_{W_2^1} \text{ и } (u, u) > 0$$

для $u \not\equiv 0$. Отсюда следует два важных неравенства: неравенство Коши — Буняковского

$$|(u, v)_{W_2^1}| \leqslant \|u\|_{W_2^1} \|v\|_{W_2^1}$$

и неравенство треугольника

$$\|u+v\|_{W_2^1} \leqslant \|u\|_{W_2^1} + \|v\|_{W_2^1}.$$

Естественно вводится сходимость в $W_2^1(\mathscr{D})$. Это означает: $u_n \xrightarrow{W_2^1} u$ при $n \to \infty$, если

$$\|u_n - u\|_{W_2^1} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty. \tag{27}$$

Ясно, что это равносильно сходимости в $L_2(\mathscr{D})$ функций $u_n(x)$ и их обобщенных производных первого порядка, т. е.

$$\|u_n - u\|_{L_2} \to 0 \text{ и } \left\|\frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_k}\right\|_{L_2} \to 0. \tag{28}$$

Из неравенства треугольника для нормы следует, как и в $L_2(\mathscr{D})$, непрерывность нормы, т. е. из $\|u_n - u\|_{W_2^1} \to 0$ следует $\|u_n\|_{W_2^1} \to \|u\|_{W_2^1}$. Докажем теперь теорему.

Теорема. *Класс $W_2^1(\mathscr{D})$ является полным гильбертовым пространством.*

Нам надо проверить лишь полноту. Это значит, что если

$$\|u_p - u_q\|_{W_2^1} \to 0 \text{ при } p \text{ и } q \to \infty, \tag{29}$$

то существует такой элемент $u(x) \in W_2^1(\mathscr{D})$, что

$$\|u_n - u\|_{W_2^1} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty. \tag{30}$$

Действительно, условие (29) можно переписать в виде

$$\|u_p - u_q\|_{L_2} \to 0; \quad \left\|\frac{\partial u_p}{\partial x_k} - \frac{\partial u_q}{\partial x_k}\right\|_{L_2} \to 0 \quad \text{при } p \text{ и } q \to \infty.$$

В силу полноты $L_2(\mathscr{D})$ существуют такие функции $u, v_1, \ldots, v_m$ из $L_2(\mathscr{D})$, что

$$\|u_n - u\|_{L_2} \to 0, \quad \left\|\frac{\partial u_n}{\partial x_k} - v_k\right\|_{L_2} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty \ (k = 1, \ldots, m). \tag{31}$$

Но из свойства замкнутости обобщенного дифференцирования следует, что

$$u(x) \in W_2^1(\mathscr{D}) \text{ и } v_k = \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \quad (k = 1, \ldots, m).$$

Вместе с (31) это приводит к (28), что равносильно требуемому соотношению (30).

Отметим, что предел u_n в $W_2^1(\mathscr{D})$, как и в $L_2(\mathscr{D})$, может быть только один [11; 162].

Гильбертово пространство $\mathring{W}_2^1(\mathscr{D})$ определяется как подпространство $W_2^1(\mathscr{D})$, получаемое замыканием в норме $W_2^1(\mathscr{D})$ множества всех функций $u(x) \in C_0^\infty(D)$. Иначе говоря, принадлежность $u(x)$ к $W_2^1(\mathscr{D})$ означает, что существует последовательность $u_n(x) \in C_0^\infty(\mathscr{D})$ $(n=1, 2, \ldots)$ такая, что $\|u_n - u\|_{W_2^1} \to 0$ при $n \to \infty$. Скалярное произведение и норма в $\mathring{W}_2^1(\mathscr{D})$ задаются теми же равенствами (25) и (26), что и для $W_2^1(\mathscr{D})$.

Пусть $u(x) \in \mathring{W}_2^1(\mathscr{D})$ и $v(x) \in W_2^1(\mathscr{D})$. Тогда имеет место следующая формула интегрирования по частям:

$$\int_{\mathscr{D}} u \frac{\partial v}{\partial x_k} dx = -\int_{\mathscr{D}} v \frac{\partial u}{\partial x_k} dx, \quad k=1, \ldots, m. \tag{31$_1$}$$

В самом деле, если $u(x) \in C_0^\infty(\mathscr{D})$, то формула ($31_1$) справедлива по определению обобщенной производной. Записывая ее для функций $u_n(x) \in C_0^\infty(\mathscr{D})$, стремящихся к $u(x)$ в норме класса $W_2^1(\mathscr{D})$, и переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем формулу (31_1).

Если обе функции $u(x)$ и $v(x)$ принадлежат лишь классу $W_2^1(\mathscr{D})$, то в формулу интегрирования по частям, как обычно, входит некоторый интеграл по границе области (см. формулу (12) в [113]). Для того чтобы распространить эту формулу на случай функций из $W_2^1(\mathscr{D})$, необходимо определить значения функции $u \in W_2^1(\mathscr{D})$ на границе области. Эта задача нетривиальна, так как функции класса $W_2^1(\mathscr{D})$ определяются лишь с точностью до эквивалентности, т. е. их значения на множествах m-мерной лебеговой меры нуль не определены. Указанные вопросы будут рассмотрены в томе V.

Для функций класса $\mathring{W}_2^1(\mathscr{D})$ выполняется неравенство

$$\int_{\mathscr{D}} u^2(x)\, dx \leqslant c \int_{\mathscr{D}} \left(\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx \right) \quad (u \in \mathring{W}_2^1(\mathscr{D})), \tag{32}$$

где постоянная c зависит от области $\mathscr{D}$, но не зависит от функции $u(x)$. Это так называемое неравенство Пуанкаре — Фридрихса.

Пусть сначала $u \in C_0^\infty(\mathscr{D})$. Заключим $\mathscr{D}$ в куб Δ, содержащий $\overline{\mathscr{D}}$ (замыкание $\mathscr{D}$). Не ограничивая общности, будем считать, что куб определяется неравенством $0 \leqslant x_k \leqslant a$ $(k=1, \ldots, m)$. Продолжим $u(x)$ нулем на $\Delta \setminus \mathscr{D}$. Тогда $u \in C_0^\infty(\Delta)$. Запишем для $u(x)$ представление

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \int_0^{x_1} \frac{\partial u(x_1, \ldots, x_m)}{\partial x_1} dx_1$$

и оценим последний интеграл по неравенству Буняковского:

$$u^2(x_1, x_2, \ldots, x_m) \leqslant a \int_0^a \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 dx_1. \qquad (32_1)$$

Интегрируя (32_1) по переменным $x_2, \ldots, x_n$ от 0 до a, получим

$$\underbrace{\int_0^a \ldots \int_0^a}_{m-1} u^2(x_1, x_2, \ldots, x_m)\, dx_2 \ldots dx_m \leqslant a \int_\Delta \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 dx.$$

Наконец, последнее неравенство проинтегрируем по x_1 от 0 до a.

$$\int_\Delta u^2(x)\, dx \leqslant a^2 \int_\Delta \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 dx.$$

В полученном неравенстве интегрирование фактически ведется лишь по области $\mathscr{D}$. Из него следует (32) при $c = a^2$. Таким образом, (32) получено для любых $u \in C_0^\infty(\mathscr{D})$.

Пусть теперь $u \in \mathring{W}_2^1(\mathscr{D})$ и $\{u_n\} \subset C_0^\infty(\mathscr{D})$ — последовательность функций, удовлетворяющая условию (27). Запишем (32) для функций u_n в такой форме:

$$\|u_n\|_{L_2}^2 \leqslant c \sum_{i=1}^m \left\|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right\|_{L_2}^2.$$

Теперь, пользуясь непрерывностью нормы в $L_2(\mathscr{D})$ и соотношениями (28), перейдем здесь к пределу при $n \to \infty$:

$$\|u\|_{L_2}^2 \leqslant c \sum_{i=1}^m \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L_2}^2.$$

Это и есть неравенство (32). Отметим еще, что из (32) вытекает неравенство

$$\|u\|_{W_2^1}^2 \leqslant c_1 \int_{\mathscr{D}} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx \qquad (u \in \mathring{W}_2^1(\mathscr{D}),\ c_1 = c+1). \quad (32_2)$$

В противоположность тому, как это было при замыкании по норме пространства $L_2(\mathscr{D})$, класс $C_0^\infty(\mathscr{D})$ не плотен в $W_2^1(\mathscr{D})$, и $\mathring{W}_2^1(\mathscr{D})$ является только подмножеством класса $W_2^1(\mathscr{D})$. Покажем, что это подмножество замкнуто, т. е., если

$$u_n \in \mathring{W}_2^1(\mathscr{D}) \text{ и } \|u_n - u\|_{W_2^1} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

то $u \in \mathring{W}_2^1(\mathscr{D})$. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Из написанного выше следует, что существует такое u_n, что $\|u_n - u\|_{W_2^1} < \frac{\varepsilon}{2}$. Для u_n из

класса $\mathring{W}_2^1(\mathscr{D})$, по определению этого класса, существует такое $v_n \in C_0^\infty(\mathscr{D})$, что $\|u_n - v_n\|_{W_2^1} < \frac{\varepsilon}{2}$. Но тогда по неравенству треугольника $\|v_n - u\|_{W_2^1} < \varepsilon$, откуда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ и определения класса $\mathring{W}_2^1(\mathscr{D})$ следует, что $u \in \mathring{W}_2^1(\mathscr{D})$.

Класс $\mathring{W}_2^1(\mathscr{D})$ естественно интерпретировать как множество тех функций из $W_2^1(\mathscr{D})$, которые обращаются, в некотором обобщенном смысле, в нуль на границе $\mathscr{D}$. Мы не имеем возможности обсуждать здесь этот вопрос подробно. В томе V мы будем говорить о нем в связи с так называемыми теоремами вложения для указанных, а также более общих, пространств С. Л. Соболева. Сформулируем здесь только один результат и для наглядности рассмотрим случай трехмерного пространства R^3. Пусть поверхность S, ограничивающая $\mathscr{D}$, принадлежит классу C^l, $l \geqslant 1$; уточним это понятие. В каждой точке S имеется касательная плоскость. Существует такое $d > 0$, что если N — любая точка S, то всякая сфера с центром N и радиусом d разделит S на две части, из которых одна заключается внутри и другая вне сферы, и прямые параллельные нормали в точке N пересекают часть S, находящуюся внутри сферы, в одной точке. Выбирая нормаль за ось x_3, мы можем написать уравнение этой части S в виде $x_3 = \varphi(x_1, x_2)$. При этом предполагается, что $\varphi(x_1, x_2)$ имеет непрерывные частные производные до порядка l включительно.

Пусть некоторая функция $u(x)$ непрерывна со своими частными производными первого порядка в замкнутой области $\overline{\mathscr{D}}$ и $S \in C^1$. Очевидно, что $u(x) \in W_2^1(\mathscr{D})$. При всем этом $u(x) \in \mathring{W}_2^1(\mathscr{D})$ тогда и только тогда, когда $u(x)$ обращается в нуль на S.

Перейдем теперь к классу $W_2^2(\mathscr{D})$. Он определяется как множество тех функций из $L_2(\mathscr{D})$, которые имеют всевозможные обобщенные производные первого и второго порядков, также принадлежащие к $L_2(\mathscr{D})$. Мы можем ввести в $W_2^2(\mathscr{D})$ скалярное произведение, определяемое формулой

$$(u, v)_{W_2^2} = \int_{\mathscr{D}} \left(uv + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} + \sum_{k,\, l=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_l} \right) dx, \qquad (33)$$

и соответствующую ему норму

$$\|u\|_{W_2^2} = \left[(u, u)_{W_2^2}\right]^{1/2}$$

С ее помощью вводится сходимость в классе $W_2^2(\mathscr{D})$, которая равносильна одновременной сходимости в $L_2(\mathscr{D})$ самих функций и всех производных первого и второго порядков. Как и для $W_2^1(\mathscr{D})$, можно показать, что класс $W_2^2(\mathscr{D})$ является полным гильбертовым пространством.

116. Неравенство Пуанкаре. Теорема Реллиха. При исследовании свойств функций из классов W_2^1 и $\mathring{W}_2^1$ важную роль играет так называемое неравенство Пуанкаре, к выводу которого мы сейчас переходим. Пусть Δ — m-мерный куб. Его объем обозначим через $|\Delta|$. Нужное нам неравенство имеет вид

$$\int_\Delta u^2(x)\,dx \leqslant \frac{1}{|\Delta|}\left[\int_\Delta u(x)\,dx\right]^2 + \frac{m}{2}|\Delta|^{\frac{2}{m}}\int_\Delta \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx. \qquad (34)$$

Оно справедливо для всех функций $u(x) \in W_2^1(\Delta)$, однако мы докажем его (и в дальнейшем используем) лишь для непрерывно дифференцируемых в Δ функций. Можно показать, что множество всех таких функций плотно в $W_2^1(\Delta)$, поэтому неравенство (34) распространяется на весь класс $W_2^1(\Delta)$ точно так же, как выше было распространено на класс $\mathring{W}_2^1(\mathscr{D})$ неравенство Пуанкаре-Фридрихса. Мы, однако, не останавливаемся на доказательстве упомянутого свойства плотности.

Неравенство (34) докажем, ограничиваясь для простоты случаем $m=3$. Считаем, что куб Δ определяется неравенствами $0 \leqslant x,\ y,\ z \leqslant a$. Пусть $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ — произвольные точки из куба Δ. Для любой непрерывно дифференцируемой функции $u(M) = u(x,\ y,\ z)$ имеем

$$u(M_2) - u(M_1) = \int_{x_1}^{x_2} D_x u(x,\ y_2,\ z_2)\,dx + \int_{y_1}^{y_2} D_y u(x_1,\ y,\ z_2)\,dy + \int_{z_1}^{z_2} D_z u(x_1,\ y_1,\ z)\,dz.$$

С помощью элементарного неравенства $(a+b+c)^2 \leqslant 3(a^2+b^2+c^2)$ находим

$$[u(M_2) - u(M_1)]^2 \leqslant 3\left[\int_{x_1}^{x_2} D_x u(x,\ y_2,\ z_2)\,dx\right]^2 + 3\left[\int_{y_1}^{y_2} D_y u(x_1,\ y,\ z_2)\,dy\right]^2 + 3\left[\int_{z_1}^{z_2} D_z u(x_1,\ y_1,\ z)\,dz\right]^2.$$

Каждый член в правой части оценим по неравенству Буняковского, а затем усилим оценку, заменяя промежуток интегрирования на $[0,\ a]$. Мы получим

$$[u(M_2) - u(M_1)]^2 \leqslant 3a\left[\int_0^a (D_x u(x,\ y_2,\ z_2))^2\,dx + \int_0^a (D_y u(x_1,\ y,\ z_2))^2\,dy + \int_0^a (D_z u(x_1,\ y_1,\ z))^2\,dz\right].$$

Проинтегрируем обе части полученного неравенства по $dM_1\,dM_2$ ($dM_i = dx_i\,dy_i\,dz_i$, $i=1, 2$), причем обе точки M_1, M_2 независимо пробегают куб Δ:

$$\int_\Delta\int_\Delta [u(M_2)-u(M_1)]^2\,dM_1\,dM_2 \leqslant$$
$$\leqslant 3a^5 \int_\Delta \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] dM. \qquad (34_1)$$

Преобразуем интеграл, стоящий в левой части неравенства (34_1):

$$\int_\Delta\int_\Delta [u(M_2)-u(M_1)]^2\,dM_1\,dM_2 = 2a^3\int_\Delta u^2(M)\,dM - 2\left(\int_\Delta u(M)\,dM\right)^2.$$

Учитывая это соотношение и сокращая обе части неравенства (34_1) на $2a^3 = 2|\Delta|$, получим (34) (при $m=3$). Неравенство Пуанкаре доказано.

Следствие. Пусть $\mathscr{D}$ — ограниченная область в R^m. По любому $\varepsilon > 0$ найдется конечное число $N = N(\varepsilon)$ попарно ортогональных в $L_2(\mathscr{D})$ функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_N(x)$ таких, что $\|\varphi_n\|_{L_2(\mathscr{D})} \leqslant 1$ и для любой функции $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\mathscr{D})$ справедливо неравенство

$$\int_\Delta u^2(x)\,dx \leqslant \sum_{n=1}^{N}\left[\int_\Delta u(x)\,\varphi_n(x)\,dx\right]^2 + \varepsilon\int_\Delta \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx. \qquad (35)$$

Доказательство достаточно провести для функций $u(x) \in C_0^\infty(\mathscr{D})$, так как на произвольные функции из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\mathscr{D})$ неравенство (35) распространяется с помощью предельного перехода (см. доказательство неравенства (32) в [115]). Пусть Δ — куб, содержащий область $\mathscr{D}$. Все функции $u(x) \in C_0^\infty(\mathscr{D})$ продолжим нулем на $\Delta \setminus \mathscr{D}$. При фиксированном $\varepsilon > 0$ разобьем куб Δ на равные кубы $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_N$; число N выберем так, чтобы для кубов Δ_n выполнялось неравенство

$$\frac{m}{2}|\Delta_n|^{\frac{2}{m}} < \varepsilon. \qquad (35_1)$$

Положим $\varphi_n(x) = 1/\sqrt{|\Delta_n|}$, если $x \in \Delta_n \cap \mathscr{D}$, и $\varphi_n(x) = 0$, если $x \overline{\in} \Delta_n \cap \mathscr{D}$ (таким образом, если куб Δ_n не пересекается с областью $\mathscr{D}$, то $\varphi_n(x) \equiv 0$). Отметим, что по построению $\|\varphi_n\|_{L_2(\mathscr{D})} \leqslant 1$ при всех n. Ясно, что функции $\varphi_n(x)$ попарно ортогональны.

Из неравенства (34), написанного для функции $u(x) \in C_0^\infty(\mathscr{D})$ в кубе Δ_n, получаем (учитывая (35_1)):

$$\int_{\Delta_n} u^2(x)\,dx \leqslant \left[\int_{\Delta_n} u(x)\,\varphi_n(x)\,dx\right]^2 + \varepsilon\int_{\Delta_n}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx.$$

Суммируя по всем $n=1, 2, \ldots, N$, приходим к требуемому неравенству (35).

Используем полученный результат для доказательства важной теоремы Реллиха.

Теорема. *Пусть $\mathscr{D}$ — произвольная ограниченная область в R^m. Тогда любое множество функций $u(x) \in \mathring{W}_2^1(\mathscr{D})$, ограниченное по норме в $W_2^1(\mathscr{D})$, компактно в пространстве $L_2(\mathscr{D})$.*

Утверждение теоремы Реллиха часто выражают следующими словами: пространство $\mathring{W}_2^1(\mathscr{D})$ вкладывается в $L_2(\mathscr{D})$ компактно.

Доказательство. Пусть дана последовательность функций $u_i(x) \in \mathring{W}_2^1(\mathscr{D})$, $i=1, 2, \ldots$, удовлетворяющих неравенству $\|u_i\|_{W_2^1(\mathscr{D})} \leqslant A$. Из этого неравенства следует, что $\|u_{i_1} - u_{i_2}\|_{W_2^1(\mathscr{D})} \leqslant 2A$ для любых номеров i_1 и i_2; таким образом,

$$\int_{\mathscr{D}} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u_{i_1}}{\partial x_k} - \frac{\partial u_{i_2}}{\partial x_k} \right)^2 dx \leqslant 4A^2.$$

Требуется показать, что из последовательности $\{u_i(x)\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в $L_2(\mathscr{D})$.

Положим $\varepsilon_p = 2^{-p}$, $p=1, 2, \ldots$, и для каждого ε_p найдем функции $\varphi_1^{(p)}(x), \varphi_2^{(p)}(x), \ldots, \varphi_{N_p}^{(p)}(x)$, для которых выполнено (35). Каковы бы ни были номера $p=1, 2, \ldots$ и $n=1, 2, \ldots, N_p$, числовая последовательность $\int_{\mathscr{D}} u_i(x) \varphi_n^{(p)}(x)\, dx$, $i=1, 2, \ldots$,

ограничена по модулю числом A:

$$\left| \int_{\mathscr{D}} u_i(x) \varphi_n^{(p)}(x)\, dx \right|^2 \leqslant \int_{\mathscr{D}} u_i^2(x)\, dx \int_{\mathscr{D}} [\varphi_n^{(p)}(x)]^2\, dx \leqslant A^2.$$

Почти дословно повторяя доказательство леммы из [15] находим, что из последовательности $\{u_i(x)\}$ можно выделить такую подпоследовательность $\{u_{i_l}(x)\}$, для которой при всех $p=1, 2, \ldots$ и $n=1, 2, \ldots, N_p$ сходятся числовые последовательности

$$\int_{\mathscr{D}} u_{i_l}(x) \varphi_n^{(p)}(x)\, dx, \quad l=1, 2, \ldots \tag{*}$$

Установим теперь, что подпоследовательность $\{u_{i_l}(x)\}$ сходится в $L_2(\mathscr{D})$. При любом $p=1, 2, \ldots$, в соответствии с выбором функций $\varphi_n^{(p)}(x)$ $(n=1, \ldots, N_p)$, имеет место неравенство

$$\int_{\mathscr{D}} [u_{i_l}(x) - u_{i_j}(x)]^2\, dx \leqslant \sum_{n=1}^{N_p} \left[\int_{\Delta} (u_{i_l}(x) - u_{i_j}(x)) \varphi_n^{(p)}(x)\, dx \right]^2 + 4A^2 \varepsilon_p$$
$$(j, l = 1, 2, \ldots).$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$; сначала найдем такое p, что $4A^2\varepsilon_p < \varepsilon/2$, а затем, пользуясь сходимостью всех последовательностей (*), найдем такой номер l_0, что при j, $l > l_0$ сумма в правой части последнего неравенства также будет $< \varepsilon/2$. Тогда для таких j, l

$$\int_{\mathscr{D}} [u_{i_l}(x) - u_{i_j}(x)]^2\, dx < \varepsilon,$$

т. е. последовательность $u_{i_l}(x)$ сходится в себе по норме пространства $L_2(\mathscr{D})$. Следовательно, она имеет в $L_2(\mathscr{D})$ предел. Доказательство теоремы завершено.

117. Постановка задачи о минимуме квадратичного функционала. Пусть $a_{kl}(x) = a_{lk}(x)$ $(k, l = 1, \ldots, m)$ — ограниченные измеримые в $\mathscr{D}$ функции. Предположим, что квадратичная форма с коэффициентами $a_{kl}(x)$ равномерно положительно определена в $\mathscr{D}$, т. е. для любых вещественных ξ_l $(i = 1, \ldots, m)$ выполнено неравенство

$$\alpha \sum_{i=1}^{m} \xi_i^2 \leqslant \sum_{k, l=1}^{m} a_{kl}(x)\, \xi_k \xi_l \qquad (\alpha > 0), \tag{36}$$

где α — постоянная (не зависит от x). В силу ограниченности $a_{kl}(x)$ выполнено также неравенство вида

$$\sum_{k, l=1}^{m} a_{kl}(x)\, \xi_k \xi_l \leqslant \beta \sum_{i=1}^{m} \xi_i^2, \tag{37}$$

где β — постоянная. Рассмотрим на функциях $u(x)$ класса $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\mathscr{D})$ функционал

$$J(u) = \int_{\mathscr{D}} \left(\sum_{k, l=1}^{m} a_{kl}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_l} \right) dx. \tag{38}$$

Из (36) и (37) следует

$$\alpha \int_{\mathscr{D}} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \leqslant J(u) \leqslant \beta \int_{\mathscr{D}} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \tag{39}$$

и, принимая во внимание (32_2), можем написать:

$$\alpha_1 \| u \|^2_{W_2^1} \leqslant J(u) \leqslant \beta \| u \|^2_{W_2^1} \qquad (0 < \alpha_1 < \beta), \tag{40}$$

где α_1 — положительная постоянная.

Наряду с $J(u)$ будем рассматривать соответствующее билинейное выражение

$$J(u, w) = \int_{\mathscr{D}} \sum_{i, j=1}^{m} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j}\, dx, \tag{41}$$

где $u(x)$ и $w(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\mathscr{D})$.

Лемма 1 *Функционалы* $J(u)$, $J(u, w)$ *непрерывны относительно сходимости в* $\mathring{W}_2^1(\mathscr{D})$.

Доказательство. Пусть $\|u_n - u\|_{W_2^1} \to 0$, $\|w_n - w\|_{W_2^1} \to 0$ при $n \to \infty$. Нам нужно показать, что тогда $J(u_n) \to J(u)$ и $J(u_n, w_n) \to J(u, w)$, причем достаточно установить второе соотношение, т. е.

$$\int_{\mathscr{D}} a_{ij} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial w_n}{\partial x_j} dx \to \int_{\mathscr{D}} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} dx \quad (i, j = 1, \ldots, m), \quad n \to \infty. \tag{42}$$

Докажем это соотношение. Из $\left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L_2} \to 0$ и из ограниченности a_{ij} вытекает, что $\left\| a_{ij} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L_2} \to 0$ при $n \to \infty$. Кроме того, $\left\| \frac{\partial w_n}{\partial x_j} - \frac{\partial w}{\partial x_j} \right\|_{L_2} \to 0$ при $n \to \infty$. Ввиду этого (42) следует из непрерывности скалярного произведения пространства $L_2(\mathscr{D})$ **[II, 162]**.

Пусть $h(x) \in L_2(\mathscr{D})$ — некоторая фиксированная функция. Введем в рассмотрение функционал

$$\Phi(u) = J(u) - 2 \int_{\mathscr{D}} h(x) u(x) dx \quad (u \in \mathring{W}_2^1(\mathscr{D})). \tag{43}$$

Лемма 2. *Функционал* $\Phi(u)$ *непрерывен и ограничен снизу в* $\mathring{W}_2^1(\mathscr{D})$.

Непрерывность $\Phi(u)$ следует из леммы 1 о непрерывности $J(u)$ и непрерывности в $\mathring{W}_2^1(\mathscr{D})$ функционала

$$l(u) = \int_{\mathscr{D}} h(x) u(x) dx. \tag{44}$$

Последнее вытекает из того, что сходимость в $W_2^1(\mathscr{D})$ влечет сходимость в $L_2(\mathscr{D})$, а относительно последней сходимости функционал $l(u)$ непрерывен **[II; 162]**.

Проверим ограниченность $\Phi(u)$ снизу. Из (39) и (32) имеем

$$\Phi(u) \geqslant J(u) - 2\|u\|_{L_2}\|h\|_{L_2} \geqslant \alpha \int_{\mathscr{D}} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx - 2\|u\|_{L_2}\|h\|_{L_2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\alpha}{c}\|u\|_{L_2}^2 - 2\|u\|_{L_2}\|h\|_{L_2} = \left(\sqrt{\frac{\alpha}{c}}\|u\|_{L_2} - \sqrt{\frac{c}{\alpha}}\|h\|_{L_2}\right)^2 -$$

$$- \frac{c}{\alpha}\|h\|_{L_2}^2 \geqslant -\frac{c}{\alpha}\|h\|_{L_2}^2.$$

Лемма доказана.

Теперь имеет смысл рассмотрение следующего вопроса. На функциях класса $\mathring{W}_2^1(\mathscr{D})$ функционал $\Phi(u)$ определен и имеет конечную точную нижнюю границу. Достигается ли эта нижняя граница на какой-либо функции класса $\mathring{W}_2^1(\mathscr{D})$? В следующем пункте мы покажем, что этот вопрос решается положительно.

118. Решение вариационной задачи. Пусть $u(x)$ и $w(x) \in \mathring{W}_2^1(\mathscr{D})$. Легко проверяется, что

$$\Phi(u+w) = \Phi(u) + 2\left[J(u, w) - \int_{\mathscr{D}} hw\,dx\right] + J(w). \tag{45}$$

Обозначим через d точную нижнюю границу для $\Phi(u)$ на функциях $u(x)$ класса $\mathring{W}_2^1(\mathscr{D})$ и пусть $\{u_k\} \subset \mathring{W}_2^1(\mathscr{D})$ — минимизирующая последовательность

$$\Phi(u_k) \equiv d_k \to d \text{ при } k \to \infty. \tag{46}$$

Заменим в (45) $u(x)$ на $u_k(x)$ и $w(x)$ на $\lambda w(x)$, где λ — вещественный параметр. Учитывая, что $\Phi(u_k + \lambda w) \geqslant d$, мы получим неравенство

$$\lambda^2 J(w) + 2\lambda\left[J(u_k, w) - \int_{\mathscr{D}} hw\,dx\right] + d_k - d \geqslant 0. \tag{47}$$

Поскольку квадратный трехчлен (47) неотрицателен, должно выполняться неравенство

$$\left|J(u_k, w) - \int_{\mathscr{D}} hw\,dx\right|^2 \leqslant J(w)(d_k - d). \tag{48}$$

Замечая, что

$$|J(u_k - u_l, w)| \leqslant \left|J(u_k, w) - \int_{\mathscr{D}} hw\,dx\right| + \left|J(u_l, w) - \int_{\mathscr{D}} hw\,dx\right|,$$

мы получим из (48) соотношение

$$|J(u_k - u_l, w)| \leqslant \sqrt{J(w)}\left[\sqrt{d_k - d} + \sqrt{d_l - d}\right].$$

Полагая здесь $w = u_k - u_l$, затем сокращая на $\sqrt{J(w)}$ и возводя в квадрат, убедимся в справедливости неравенства

$$J(u_k - u_l) \leqslant \left[\sqrt{d_k - d} + \sqrt{d_l - d}\right]^2.$$

Оно вместе с (40) дает нужное неравенство

$$\|u_k - u_l\|_{W_2^1}^2 \leqslant \frac{1}{\alpha_1}\left[\sqrt{d_k - d} + \sqrt{d_l - d}\right]^2. \tag{49}$$

Лемма 3. *Минимизирующая последовательность $u_k(x)$ сходится в $\mathring{W}_2^1(\mathscr{D})$.*

Действительно, из (49) и (46) вытекает, что

$$\lim_{k,\ l\to\infty} \| u_k - u_l \|_{W_2^1} = 0, \tag{50}$$

а поскольку полнота класса $\mathring{W}_2^1(\mathscr{D})$ установлена, из (50) следует существование такой функции $u_0 \in \mathring{W}_2^1(\mathscr{D})$, что

$$\lim_{k\to\infty} \| u_k - u_0 \|_{W_2^1} = 0.$$

Лемма 4. *Пусть u_0 — предел минимизирующей последовательности. Тогда для любой функции $w \in \mathring{W}_2^1(\mathscr{D})$ будет*

$$J(u_0, w) = \int_{\mathscr{D}} hw\,dx \quad (w \in \mathring{W}_2^1(\mathscr{D})). \tag{51}$$

Доказательство сводится к переходу к пределу в неравенстве (48), что возможно в силу леммы 1.

Теперь можно доказать основное утверждение.

Теорема. *Существует единственная функция класса $\mathring{W}_2^1(\mathscr{D})$, на которой достигается точная нижняя граница функционала $\Phi(u)$.*

Пусть $u_0(x)$ — предел минимизирующей последовательности, $u(x) \in \mathring{W}_2^1(\mathscr{D})$ и $w(x) = u(x) - u_0(x)$. Тогда, заменяя в (45) $u(x)$ на $u_0(x)$ и учитывая (51), получим

$$\Phi(u) = \Phi(u_0 + w) = \Phi(u_0) + J(w). \tag{52}$$

Заметим теперь, что $J(w) \geqslant 0$ и в силу (40) из равенства $J(w) = 0$ вытекает, что $w = 0$. Поэтому

$$\Phi(u) \geqslant \Phi(u_0), \tag{53}$$

причем знак равенства возможен лишь при $u = u_0$. Теорема доказана.

Замечания. 1) Из единственности минимизирующей функции вытекает, что к ней сходится всякая минимизирующая последовательность. 2) Мы видели, что минимизирующая функция $u_0(x)$ удовлетворяет соотношению (51) при любой $w \in \mathring{W}_2^1(\mathscr{D})$. Обратно, если (51) выполнено, то из (52) следует, что $u_0(x)$ — минимизирующая функция. Таким образом, соотношение (51) можно рассматривать как уравнение в вариациях, определяющее $u_0(x)$, причем оно эквивалентно исходной вариационной задаче. Тождество (51) есть условие обращения в нуль первой вариации функционала $\Phi(u)$ при $u(x) = u_0(x)$.

119. Связь с краевой задачей. Если граница S гладкая и $a_{kl}(x)$ — непрерывно дифференцируемые в $\overline{\mathscr{D}}$ функции и если решение $u_0(x)$ вариационной задачи, рассмотренной в **[117]**, окажется элементом $C^2(\overline{\mathscr{D}})$, то $u_0(x)$ будет удовлетворять уравнению Остро-

градского для функционала $J(u)$, т. е. уравнению

$$-\sum_{k,\,l=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{kl}\frac{\partial u}{\partial x_l}\right)=h, \tag{54}$$

и граничному условию.

$$u|_S=0. \tag{55}$$

Уравнение (54) выводится из тождества (51) следующим образом: преобразуем левую часть (51) с помощью интегрирования по частям и результат запишем в виде:

$$-\int_{\Omega}\left[\sum_{k,\,l=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{kl}\frac{\partial u_0}{\partial x_l}\right)+h\right]w\,dx=0. \tag{56}$$

Так как (56) верно при любой $w\in \mathring{W}_2^1(\mathscr{D})$, $\mathring{W}_2^1(\mathscr{D})$ плотно в $L_2(\mathscr{D})$ и выражение, стоящее в квадратных скобках, принадлежит $C(\overline{\mathscr{D}})$, то оно должно быть равным нулю. Краевое же условие (55) выполняется в силу свойств непрерывных элементов из $\mathring{W}_2^1(\mathscr{D})$, о чем говорилось в [115]. Таким образом, решение $u_0(x)$ вариационной задачи, принадлежащее $C^2(\overline{\mathscr{D}})$, является классическим решением (54), (55). Сказанное дает возможность считать решение $u_0(x)$ вариационной задачи обобщенным решением предельной задачи (54), (55).

Представляет интерес вопрос о том, когда обобщенное решение u_0 задачи (54), (55) является классическим или принадлежит, например, пространству $W_2^2(\mathscr{D})$ и удовлетворяет уравнению (54) для почти всех x из $\mathscr{D}$? Ответ на первый вопрос дает известная теорема Ю. Шаудера, на второй — теорема О. А. Ладыженской. Именно, если граница S является гладкой поверхностью класса $H^{2,\alpha}$, коэффициенты $a_{kl}(x)$ суть функции из класса Гёльдера $H^{1,\alpha}(\overline{\mathscr{D}})$, а $h\in H^{\alpha}(\overline{\mathscr{D}})$, то задача (54), (55) имеет решение $u_0(x)$ из класса Гёльдера *) $H^{2,\alpha}(\overline{\mathscr{D}})$. Если же $S\in C^2$, коэффициенты $a_{kl}\in C(\overline{\mathscr{D}})$ и имеют ограниченные в $\mathscr{D}$ обобщенные производные первого порядка, а $h(x)\in L_2(\overline{\mathscr{D}})$, то задача (54), (55) имеет решение $u_0(x)$ из $W_2^2(\mathscr{D})$. В обоих случаях решение $u_0(x)$ является обобщенным решением задачи (54), (55), т. е. решением вариационной задачи, рассмотренной в [117]. Доказательство только что сформулированной теоремы о разрешимости задачи (54), (55) в пространстве $W_2^2(\mathscr{D})$ будет дано во второй части IV тома.

---

*) Мы не будем определять здесь пространства $H^{l,\alpha}(\overline{\mathscr{D}})$, но заметим, что функции из $C^{l+1}(\overline{\mathscr{D}})$ принадлежат $H^{l,\alpha}(\overline{\mathscr{D}})$.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ