Վ. Պ. ԳԱԲՐԻԵԼՅԱՆ

ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎ ԵՎ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ

ՈՒՍՈՒՄՆԱՄԵԹՈԴԱԿԱՆ ՁԵՌՆԱՐԿ

ԵՐԵՎԱՆ – 2011

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Վ. Պ. ԳԱԲՐԻԵԼՅԱՆ

ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎ ԵՎ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ

ՈՒՍՈՒՄՆԱՄԵԹՈԴԱԿԱՆ ՁԵՌՆԱՐԿ

ԵՐԵՎԱՆ

ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
2011

ՀՏԴ 512 : 514 (07)
ԳՄԴ 22.14 + 22.151 g7
Գ 124

Հրատարակության է երաշխավորել ԵՊՀ Ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի խորհուրդը:

ԳԱԲՐԻԵԼՅԱՆ Վ. Պ.

Գ 124 Հանրահաշիվ և երկրաչափություն: Ուսումնամեթոդական ձեռնարկ/ Վ.Պ. Գաբրիելյան; ԵՊՀ. – Եր., ԵՊՀ հրատ., 2011. – 186 էջ:

Ուսումնամեթոդական ձեռնարկն ընդգրկում է ԵՊՀ Ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի ուսումնական ծրագրով հաստատված «Հանրահաշիվ և երկրաչափություն» դասընթացի ամբողջ նյութը:

Նախատեսված է ԵՊՀ Ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի ուսանողների համար:

ՀՏԴ 512 : 514 (07)
ԳՄԴ 22.14 + 22.151 g7

ISBN 978-5-8084-1490-7

ՆԱԽԱԲԱՆ

Ուսումնամեթոդական ձեռնարկը գրված է Երևանի պետական համալսարանի ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետում՝ «Հանրահաշիվ և երկրաչափություն» դասընթացի՝ հեղինակի կարդացած դասախոսությունների հիման վրա և ընդգրկում է նշված դասընթացի ուսումնական ծրագրով նախատեսված ամբողջ նյութը:

Ձեռնարկը բաղկացած է երկու բաժնից: Առաջին՝ «Հանրահաշիվ», բաժինն ընդգրկում է հանրահաշիվ դասընթացի առաջին կուրսում կարդացվող թեմաները՝ ամբողջ թվեր, կոմպլեքս թվեր, բազմանդամներ, մատրիցներ և որոշիչներ, որոնք հիմք են հանդիսանալու հետագայում դասավանդվող մի շարք առարկաների համար: Երկրորդ՝ «Երկարաչափություն», բաժինն ընդգրկում է առաջին կուրսում անալիտիկ երկարաչափությանը հատկացված լսարանային ժամերին համապատասխան նյութը, որն անհրաժեշտ է զուգահեռաբար ուսումնասիրվող «Մաթեմատիկական անալիզ» դասընթացի համար:

Հեղինակը շնորհակալություն է հայտնում ԵՊՀ դիսկրետ մաթեմատիկայի և տեսական ինֆորմատիկայի ամբիոնի աշխատակիցներին՝ ձեռնարկում ներկայացված նյութի բովանդակության և շարադրման եղանակի հետ կապված հարցերում օգտակար առաջարկությունների և դիտողությունների համար:

ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՆՇԱՆԱԿՈՒՄՆԵՐ

$\mathbb{N}$ - բնական թվերի բազմություն
$\mathbb{Z}$ - ամբողջ թվերի բազմություն
$\mathbb{Q}$ - ռացիոնալ թվերի բազմություն
$\mathbb{R}$ - իրական թվերի բազմություն
$\mathbb{C}$ - կոմպլեքս թվերի բազմություն
$\emptyset$ - դատարկ բազմութուն
$\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$ - $\boldsymbol{a}$ տարրը պատկանում է $\boldsymbol{A}$ բազմությանը
$\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$ - $\boldsymbol{A}$ բազմությունը հանդիսանում է $\boldsymbol{B}$ բազմության ենթաբազմություն
$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ - $\boldsymbol{A}$ և $\boldsymbol{B}$ բազմությունների դեկարտյան արտադրյալ
$\boldsymbol{a} \vdots \boldsymbol{b}$ - $\boldsymbol{a}$ թիվը բաժանվում է $\boldsymbol{b}$ թվի վրա
$\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{b}$ - $\boldsymbol{a}$ թիվը բաժանում է $\boldsymbol{b}$ թիվը
$\boldsymbol{a} \nmid \boldsymbol{b}$ - $\boldsymbol{a}$ թիվը չի բաժանում $\boldsymbol{b}$ թիվը
$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ - $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար կամ $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալ
$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ - $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկ կամ $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորների վեկտորական արտադրյալ
$\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{b} (\mathrm{mod}\ \boldsymbol{n})$ - $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ թվերը համեմատելի են ըստ մոդուլ $\boldsymbol{n}$ թվի
$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{n})$ - $\boldsymbol{n}$ թվի իրարից տարբեր բոլոր բաժանարարների քանակ
$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{n})$ - $\boldsymbol{n}$ թվի իրարից տարբեր բոլոր բաժանարարների գումար
$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{n})$ - Էյլերի ֆունկցիա
$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{n})$ - Մյոբիուսի ֆունկցիա
$\boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}]$ - $\boldsymbol{P}$ թվային բազմության տարրերով բոլոր բազմանդամների բազմություն
$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{n}}$ - $\boldsymbol{M}$ թվային բազմության տարրերով $(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{n})$-չափանի բոլոր մատրիցների բազմություն
$\deg(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$ - $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամի աստիճան
$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$ - $\boldsymbol{A}$ մատրիցի տրանսպոնացված մատրից
$|\boldsymbol{A}|$ - $\boldsymbol{A}$ բազմության հզորություն կամ $\boldsymbol{A}$ մատրիցի որոշիչ
$|\boldsymbol{a}|$ - $\boldsymbol{a}$ թվի բացարձակ արժեք, $\boldsymbol{a}$ կոմպլեքս թվի (վեկտորի) մոդուլ

ԱՌԱՋԻՆ ԲԱԺԻՆ

Հ Ա Ն Ր Ա Հ Ա Շ Ի Վ

ԳԼՈՒԽ 1

ԱՄԲՈՂՋ ԹՎԵՐ

§ 1.1. ԲԱԺԱՆՈՒՄ ԵՎ ՄՆԱՑՈՐԴՈՎ ԲԱԺԱՆՄԱՆ ԹԵՈՐԵՄԸ

1.1. *Սահմանում:* Եթե $\boldsymbol{a}$ ամբողջ թիվը կարելի է ներկայացնել $\boldsymbol{a = bk}$ տեսքով, որտեղ $\boldsymbol{0 \neq b, k} \in \mathbb{Z}$, ապա ասում են, որ $\boldsymbol{b}$ թիվը հանդիսանում է $\boldsymbol{a}$ թվի բաժանարար, կամ $\boldsymbol{b}$ թիվը բաժանում է $\boldsymbol{a}$ թիվը (կամ էլ՝ $\boldsymbol{a}$ թիվը բաժանվում է $\boldsymbol{b}$ թվի վրա, կամ $\boldsymbol{a}$ թիվը պատիկ է $\boldsymbol{b}$ թվին):

Մաթեմատիկական սիմվոլներով տրված սահմանումն արտահայտվում է այսպես՝ $\boldsymbol{a} \vdots \boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{a}$ թիվը բաժանվում է $\boldsymbol{b}$ թվի վրա) կամ $\boldsymbol{b} \mid \boldsymbol{a}$ ($\boldsymbol{b}$ թիվը բաժանում է $\boldsymbol{a}$ թիվը): Եթե $\boldsymbol{b}$ թիվը չի բաժանում $\boldsymbol{a}$ թիվը, ապա այդ փաստը նշանակվում է $\boldsymbol{b} \nmid \boldsymbol{a}$ տեսքով:

1.2. *Վարժություն:*

1) Եթե $\boldsymbol{a}$ թիվը պատիկ է $\boldsymbol{m}$ թվին և $\boldsymbol{m}$ թիվը պատիկ է $\boldsymbol{b}$ թվին, ապա $\boldsymbol{a}$ թիվը պատիկ է $\boldsymbol{b}$ թվին:

2) Եթե $\boldsymbol{k + l + \dots + n = p + q + \dots + s}$ տեսքի հավասարությունում բոլոր անդամների նկատմամբ, բացի որևէ մեկից, հայտնի է, որ նրանք պատիկ են $\boldsymbol{b}$ թվին, ապա այդ միակ անդամը նույնպես պատիկ է $\boldsymbol{b}$ թվին:

1.3. *Թեորեմ (մնացորդով բաժանման թեորեմը):* Ցանկացած $\boldsymbol{a}$ ամբողջ թիվ $\boldsymbol{b}$ դրական ամբողջ թվի միջոցով ներկայացվում է

$$\boldsymbol{a = bq + r}, \qquad \boldsymbol{0 \leq r < b},$$

տեսքով, որտեղ $\boldsymbol{q, r} \in \mathbb{Z}$, և այդ ներկայացումը միակն է:

Ապացույց: Վերցնելով $\boldsymbol{bq}$-ն հավասար՝ $\boldsymbol{a}$ թիվը չգերազանցող $\boldsymbol{b}$ թվի ամենամեծ պատիկին՝ կստանանք $\boldsymbol{a}$ թվի մեկ այդպիսի ներկայացում: Ենթադրելով նաև, որ $\boldsymbol{a = bq_1 + r_1}$, $\boldsymbol{0 \leq r_1 < b}$, կըստանանք $\mathbf{0} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q_1}) + (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_1})$, որտեղից հետևում է (1.2 վարժություն), որ $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_1})$ պատիկ է $\boldsymbol{b}$ թվին: Վերջինս հնարավոր է միայն, երբ $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_1} = \mathbf{0}$, քանի որ $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_1}| < \boldsymbol{b}$: Ուստի $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_1}$, որից հետևում է նաև $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q_1}$ հավասարությունը: ■

Մնացորդով բաժանման թեորեմում $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{bq} + \boldsymbol{r},\ \mathbf{0} \leq \boldsymbol{r} < \boldsymbol{b}$, ներկայացման մեջ $\boldsymbol{a}$ թիվը կոչվում է **բաժանելի**, $\boldsymbol{b}$ թիվը՝ **բաժանարար**, $\boldsymbol{q}$ թիվը՝ (ոչ լրիվ) **քանորդ**, իսկ $\boldsymbol{r}$ թիվը՝ **մնացորդ**:

1.4. *Հետևանք:* Յուրաքանչյուր $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ $(\boldsymbol{b} > \mathbf{1})$ դրական ամբողջ թվերի համար գոյություն ունեն միարժեքորեն որոշվող այնպիսի $\boldsymbol{c_0}, \boldsymbol{c_1}, \dots, \boldsymbol{c_k}$ ամբողջ թվեր, որ

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c_k b^k} + \boldsymbol{c_{k-1} b^{k-1}} + \dots + \boldsymbol{c_1 b} + \boldsymbol{c_0},$$

որտեղ $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{c_i} < \boldsymbol{b}, \boldsymbol{i} = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, \boldsymbol{k}$, և $\boldsymbol{c_k} \neq \mathbf{0}$:

Ապացույց: Մնացորդով բաժանման թեորեմից հետևում է, որ $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{bq_1} + \boldsymbol{c_0}$, որտեղ $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{c_0} < \boldsymbol{b}$ և $\boldsymbol{q_1} = \frac{\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c_0}}{\boldsymbol{b}} < \boldsymbol{a}$: Եթե $\boldsymbol{q_1} \geq \boldsymbol{b}$, ապա նորից մնացորդով բաժանման թեորեմի համաձայն՝ $\boldsymbol{q_1} = \boldsymbol{bq_2} + \boldsymbol{c_1}$, որտեղ $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{c_1} < \boldsymbol{b}$ և $\boldsymbol{q_2} < \boldsymbol{q_1}$: Եթե $\boldsymbol{q_2} \geq \boldsymbol{b}$, ապա, շարունակելով նշված եղանակով, ստանում ենք

$$\boldsymbol{q_1} > \boldsymbol{q_2} > \cdots$$

դրական ամբողջ թվերի նվազող հաջորդականությունը, որն անվերջ լինել չի կարող: Այսինքն գոյություն կունենա այնպիսի $\boldsymbol{k}$ համար, որի դեպքում՝ $\boldsymbol{q_k} < b$, իսկ $\boldsymbol{q_{k-1}} \geq \boldsymbol{b}$: Այսպիսով հանգում ենք հետևյալ համակարգին՝

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{a} = \boldsymbol{bq_1} + \boldsymbol{c_0}, \\
\boldsymbol{q_1} = \boldsymbol{bq_2} + \boldsymbol{c_1}, \\
\dots \quad \dots \quad \dots \\
\boldsymbol{q_{k-2}} = \boldsymbol{bq_{k-1}} + \boldsymbol{c_{k-2}}, \\
\boldsymbol{q_{k-1}} = \boldsymbol{bq_k} + \boldsymbol{c_{k-1}}, \\
\boldsymbol{q_k} = \boldsymbol{b} \cdot \mathbf{0} + \boldsymbol{c_k}:
\end{gathered}$$

Հետևաբար $\boldsymbol{q_k} \neq \mathbf{0}$, որովհետև հակառակ դեպքում կունենայինք $\boldsymbol{c_{k-1}} = \boldsymbol{q_{k-1}} \geq \boldsymbol{b}$ հակասությունը: Այժմ գրված համակարգից արտաքսելով $\boldsymbol{q_k}, \boldsymbol{q_{k-1}}, \dots, \boldsymbol{q_1}$ բնական թվերը՝ կստանանք, որ

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c_k b^k} + \boldsymbol{c_{k-1} b^{k-1}} + \dots + \boldsymbol{c_1 b} + \boldsymbol{c_0},$$

որտեղ $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{c_i} < \boldsymbol{b}, \boldsymbol{i} = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, \boldsymbol{k}$, և $\boldsymbol{c_k} \neq \mathbf{0}$:

Մնում է ապացուցել վերլուծության c_i գործակիցների միակություն: Դիցուք ունենք նաև հետևյալ վերլուծությունը.

$$a = d_k b^k + d_{k-1} b^{k-1} + \cdots + d_1 b + d_0,$$

որտեղ $0 \leq d_i < b, i = 0, 1, \ldots, k,$ և $d_k \neq 0$: Քանի որ առաջին և երկրորդ վերլուծություններից կունենանք

$$a = bx + c_0,$$
$$a = by + d_0,$$

հավասարությունները, ապա $c_0 = d_0$: Այնուհետև

$$\frac{a - c_0}{b} = bu + c_1,$$
$$\frac{a - c_0}{b} = bv + d_1,$$

ուստի $c_1 = d_1$, և այսպես շարունակ: Ի վերջո ստանում ենք $c_i = d_i$ հավասարությունը բոլոր $i = 0, 1, \ldots, k$ արժեքների համար: Ապացույցն ավարտված է: ■

Հետևանքում ստացված $a = c_k b^k + c_{k-1} b^{k-1} + \cdots + c_1 b + c_0$ ներկայացումը կոչվում է a բնական թվի ներկայացում b-ական համակարգում և համառոտ գրվում է

$$a = (c_k c_{k-1} \cdots c_1 c_0)_b$$

տեսքով, որտեղ $c_0, c_1, \ldots, c_k$ թվերը կոչվում են այդ ներկայացման գործակիցներ, իսկ k՝ ներկայացման երկարություն:

1.5. *Օրինակ:* **2**-ական համակարգում **43** թիվը ներկայացվում է հետևյալ կերպ.

$$43 = (101011)_2,$$

որովհետև $43 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1$, իսկ **3**-ական համակարգում՝

$$43 = (1121)_3,$$

որովհետև $43 = 1 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 1$:

§ 1.2. ԹՎԵՐԻ ԱՄԵՆԱՄԵԾ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԲԱԺԱՆԱՐԱՐ: ԷՎԿԼԻԴԵՍԻ ԱԼԳՈՐԻԹՄԸ

Այս գլխում այսուհետև կդիտարկենք ամբողջ թվերի միայն դրական բաժանարարները: Կամայական ամբողջ թիվ, որը միաժամանակ բաժանում է $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ ամբողջ թվերը, կոչվում է նրանց ընդհանուր բաժանարար: Ընդհանուր բաժանարարներից ամենամեծը կոչվում է $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ **թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար** և նշանակվում է $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ գրությամբ: Նման եղանակով սահմանվում է վերջավոր թվով ցանկացած $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$ ամբողջ թվերի $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n})$ ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը: Եթե $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{1}$, ապա $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ թվերը կոչվում են **փոխադարձաբար պարզ թվեր**:

Երկու թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարն որոշելու եղանակներից մեկն այսպես կոչված **Էվկլիդեսի ալգորիթմն է**: Դիցուք անհրաժեշտ է որոշել $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{a^2} + \boldsymbol{b^2} \neq \boldsymbol{0}$) թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը: Դրա համար քննարկենք երկու դեպք.

a) $\boldsymbol{b} \mid \boldsymbol{a}$.

b) $\boldsymbol{b} \nmid \boldsymbol{a}$:

Առաջին դեպքում $\boldsymbol{a} \vdots \boldsymbol{b}$, հետևապես $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}$: Երկրորդ դեպքում $\boldsymbol{a}$ թիվը բաժանենք $\boldsymbol{b}$ թվի վրա, քանորդը նշանակենք $\boldsymbol{q}$, իսկ մնացորդը՝ $\boldsymbol{r}$.

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{bq} + \boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{r} < \boldsymbol{b}:$$

Այս հավասարությունից հետևում է, որ $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ թվերի յուրաքանչյուր ընդհանուր բաժանարար միաժամանակ ընդհանուր բաժանարար է $\boldsymbol{b}$ և $\boldsymbol{r}$ թվերի համար, մասնավորապես $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{r})$: Ճիշտ նույն ձևով, եթե $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{rq_1} + \boldsymbol{r_1}, \ \boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{r_1} < \boldsymbol{r}$, ապա

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r_1}):$$

Գրենք հետևյալ հավասարությունները.

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{a} = \boldsymbol{bq} + \boldsymbol{r}, \ \boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{r} < \boldsymbol{b}, \\
\boldsymbol{b} = \boldsymbol{rq_1} + \boldsymbol{r_1}, \ \boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{r_1} < \boldsymbol{r}, \\
\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_1 q_2} + \boldsymbol{r_2}, \ \boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{r_2} < \boldsymbol{r_1}, \\
\boldsymbol{r_1} = \boldsymbol{r_2 q_3} + \boldsymbol{r_3}, \ \boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{r_3} < \boldsymbol{r_2}, \\
\ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\
\boldsymbol{r_{n-1}} = \boldsymbol{r_n q_{n+1}} + \boldsymbol{r_{n+1}}, \ \boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{r_{n+1}} < \boldsymbol{r_n}, \\
\boldsymbol{r_n} = \boldsymbol{r_{n+1} q_{n+2}}:
\end{gathered} \tag{1.1}$$

Այս հավասարությունների թիվը վերջավոր է. դա հետևում է նրանից, որ $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2}, \dots$ հաջորդականությունը նվազող է, իսկ անդամները՝ դրական: Այսպիսով՝

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r_1}) = \cdots = (\boldsymbol{r_n}, \boldsymbol{r_{n+1}}) = \boldsymbol{r_{n+1}}:$$

Այստեղից $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը հավասար է Էվկլիդեսի ալգորիթմում վերջին՝ զրոյից տարբեր $\boldsymbol{r_{n+1}}$ մնացորդին:

Այժմ (1.1) հավասարումներից արտաքսելով բոլոր մնացորդները, բացի վերջին ոչ զրոյական $\boldsymbol{r_{n+1}}$ մնացորդից, կստանանք

$$\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{by} = \boldsymbol{r_{n+1}}$$

տեսքի հավասարություն, որտեղ $\boldsymbol{x}$ և $\boldsymbol{y}$ ամբողջ թվեր են, կամ որ նույնն է

$$\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{by} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$$

տեսքի հավասարություն: Վերջինս նշանակում է, որ $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ թվերի ու նրանց $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարի միջև գոյություն ունի գծային կախվածություն: Եթե $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \mathbf{1}$, ապա

$$\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{by} = \mathbf{1}:$$

Այստեղից հետևում է, որ $\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{by} = \mathbf{1}$ անորոշ հավասարումն ամբողջ թվերով լուծում միշտ ունի:

1.6. *Հետևանք:* Որպեսզի $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ ամբողջ թվերը լինեն փոխադարձաբար պարզ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ գոյություն ունենան այնպիսի $\boldsymbol{x}$ և $\boldsymbol{y}$ ամբողջ թվեր, որ $\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{by} = \mathbf{1}$:

1.7. ***Թեորեմ:*** Եթե $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \mathbf{1}$ և $\boldsymbol{ac} \vdots \boldsymbol{b}$, ապա $\boldsymbol{c} \vdots \boldsymbol{b}$:

Ապացույց: Եթե $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \mathbf{1}$, ապա գոյություն ունեն այնպիսի $\boldsymbol{x}$ և $\boldsymbol{y}$ ամբողջ թվեր, որ $\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{by} = \mathbf{1}$: Այս հավասարության երկու կողմը բազմապատկելով $\boldsymbol{c}$ թվով՝ կստանանք $\boldsymbol{acx} + \boldsymbol{bcy} = \boldsymbol{c}$ հավասարությունը, որից հետևում է, որ եթե $\boldsymbol{ac} \vdots \boldsymbol{b}$, ապա անհրաժեշտ է որ $\boldsymbol{c}$ թիվը բաժանվի $\boldsymbol{b}$ թվի վրա (1.2 վարժություն): ■

1.8. ***Սահմանում:*** Դրական ամբողջ $\boldsymbol{p}$ թիվը կոչվում է **պարզ**, եթե նա ունի ճիշտ երկու դրական բաժանարար՝ $\mathbf{1}$ և $\boldsymbol{p}$ (1 թիվը պարզ չէ): Հակառակ դեպքում $\boldsymbol{p}$ թիվը կոչվում է **բաղադրյալ**:

$\mathbf{1.9.}$ *Թեորեմ:* Եթե $\boldsymbol{ab}$ արտադրյալը բաժանվում է $\boldsymbol{p}$ պարզ թվի վրա, ապա $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ թվերից առնվազն մեկը պետք է բաժանվի $\boldsymbol{p}$ պարզ թվի վրա:

Ապացույց: Ենթադրենք $\boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{a}$: Այդ դեպքում թեորեմը ճիշտ է: Դիցուք $\boldsymbol{p} \nmid \boldsymbol{a}$: Այդ դեպքում, քանի որ $\boldsymbol{p}$ թիվը պարզ է, ապա $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{p}) = \mathbf{1}$: Հետևապես, նախորդ թեորեմի համաձայն, $\boldsymbol{b}$ թիվը բաժանվում է $\boldsymbol{p}$ թվի վրա: ■

$\mathbf{1.10.}$ *Հետևանք:* Եթե $\boldsymbol{a_1 a_2 \cdots a_n}$ արտադրյալը բաժանվում է $\boldsymbol{p}$ պարզ թվի վրա, ապա $\boldsymbol{a_1, a_2, \dots, a_n}$ թվերից առնվազն մեկը պետք է բաժանվի $\boldsymbol{p}$ պարզ թվի վրա:

Կամայական ամբողջ թիվ, որը պատիկ է վերջավոր քանակությամբ տրված ոչ զրոյական ամբողջ թվերից յուրաքանչյուրին, կոչվում է նրանց ընդհանուր բազմապատիկ: Ամենափոքր դրական ընդհանուր բազմապատիկը կոչվում է տրված թվերի **ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկ**: Պարզ է, որ $\boldsymbol{a}$ թվի բազմապատիկներն ունեն $\boldsymbol{ak}$ տեսքը, որտեղ $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$: $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկն ընդունված է նշանակել $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ տեսքով:

$\mathbf{1.11.}$ *Թեորեմ:* Կամայական $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ դրական ամբողջ թվերի համար

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \cdot [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \boldsymbol{ab}:$$

Ապացույց: Դիցուք $\boldsymbol{M}$ հանդիսանում է $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ թվերի որևէ ընդհանուր բազմապատիկ: Այդ դեպքում կարող ենք գրել $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{ak}$, ինչպես նաև $\boldsymbol{M} \vdots \boldsymbol{b}$ կամ $\boldsymbol{ak} \vdots \boldsymbol{b}$:

Ենթադրենք $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{d}$: Այդ դեպքում $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a_1 d}$ և $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b_1 d}$, որտեղ $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{b_1}) = \mathbf{1}$, կստանանք, որ

$$\frac{\boldsymbol{ak}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{a_1 dk}}{\boldsymbol{b_1 d}} = \frac{\boldsymbol{a_1 k}}{\boldsymbol{b_1}} \in \mathbb{Z}:$$

Ուստի $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{b_1 t}$ (քանի որ $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{b_1}) = \mathbf{1}$), բայց $\boldsymbol{b_1} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{d}}$, հետևապես,

$$\boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{t} \quad \text{և} \quad \boldsymbol{M} = \boldsymbol{ak} = \frac{\boldsymbol{ab}}{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{t}:$$

$\boldsymbol{M}$ հանդիսանում է $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ թվերի որևէ ընդհանուր բազմապատիկ և որպեսզի այն լինի ամենափոքրը, անհրաժեշտ է, որ $\boldsymbol{t} = \mathbf{1}$: Այսպիսով $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \frac{\boldsymbol{ab}}{\boldsymbol{d}}$, բայց $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{d}$, հետևաբար $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \cdot [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \boldsymbol{ab}$: ■

§ 1.3. ԹՎԱԲԱՆՈՒԹՅԱՆ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԹԵՈՐԵՄԸ

1.12. *Թեորեմ (թվաբանության հիմնական թեորեմը):* Մեկից մեծ յուրաքանչյուր $\boldsymbol{n}$ ամբողջ թիվ կա՛մ պարզ է, կա՛մ վերլուծվում է պարզ թվերի արտադրյալի: Ընդ որում այդ վերլուծությունը, արտադրիչների տեղափոխելիության ճշտությամբ, որոշվում է միարժեքորեն:

Ապացույց: Սկզբում, ինդուկցիայի եղանակով, ցույց տանք վերլուծության գոյությունը: Երբ $\boldsymbol{n = 2}$, ապա $\boldsymbol{n}$ պարզ թիվ է: Ենթադրենք $\boldsymbol{n > 2}$ և $\boldsymbol{n}$ թվից փոքր և մեկից մեծ յուրաքանչյուր ամբողջ թիվ կա՛մ պարզ է, կա՛մ վերլուծվում է պարզ թվերի արտադրյալի, և նույն պնդումն ապացուցենք $\boldsymbol{n}$ թվի համար: Եթե $\boldsymbol{n}$ պարզ թիվ է, ապա պնդումն ապացուցված է: Դիցուք $\boldsymbol{n}$ թիվը պարզ չէ (քանի որ $\boldsymbol{n > 2}$, ապա այն բաղադրյալ է): Այդ դեպքում գոյություն կունենան այնպիսի $\boldsymbol{n_1, n_2} < n$ մեկից մեծ դրական ամբողջ թվեր, որ

$$\boldsymbol{n = n_1 n_2}:$$

Համաձայն ինդուկցիայի ենթադրության, $\boldsymbol{n_1}$ և $\boldsymbol{n_2}$ ամբողջ թվերից յուրաքանչյուրը կա՛մ պարզ է, կա՛մ հանդիսանում է պարզ թվերի արտադրյալ.

$$\boldsymbol{n_1 = p_1 p_2 \cdots p_k,} \qquad \boldsymbol{k \geq 1,}$$
$$\boldsymbol{n_2 = q_1 q_2 \cdots q_s,} \qquad \boldsymbol{s \geq 1,}$$

որտեղ $\boldsymbol{p_1, p_2, \dots, p_k}$ և $\boldsymbol{q_1, q_2, \dots, q_s}$ ամբողջ թվերը պարզ են: Հետևաբար

$$\boldsymbol{n = n_1 n_2 = p_1 p_2 \cdots p_k q_1 q_2 \cdots q_s}$$

և գոյության մասն ապացուցված է:

Ենթադրենք $\boldsymbol{n}$ թվի համար գոյություն ունի երկու տարբեր վերլուծություն.

$$\boldsymbol{n = p_1 p_2 \cdots p_k} \ \text{և} \ \boldsymbol{n = q_1 q_2 \cdots q_s}:$$

Այդ դեպքում $\boldsymbol{p_1 p_2 \cdots p_k = q_1 q_2 \cdots q_s}$, որից հետևում է

$$\boldsymbol{p_2 \cdots p_k = \frac{q_1 q_2 \cdots q_s}{p_1}}$$

հավասարությունը: Համաձայն 1.10. հետևանքի, $\boldsymbol{q_1, q_2, \dots, q_s}$ թվերից գոնե մեկը պետք է բաժանվի $\boldsymbol{p_1}$ թվի վրա: Դիցուք $\boldsymbol{q_1 \vdots p_1}$: Այդ դեպքում $q_1 = p_1$, որովհետև q_1, p_1 թվերը պարզ են: Հետևաբար ստանում ենք, որ $p_2 \cdots p_k = q_2 \cdots q_s$, և այդպես շարունակ մինչև, վերջապես, հավասարության մի կողմում, օրինակ՝ ձախ, կրճատվեն բոլոր արտադրիչները: Սակայն միաժամանակ պետք է կրճատվեն նաև աջ կողմի բոլոր արտադրիչները, քանի որ $1 = q_r \cdots q_s$ հավասարությունը հնարավոր չէ մեկից մեծ $q_r, \dots, q_s$ թվերի դեպքում: Թեորեմն ապացուցված է: ■

Հաջորդիվ նշենք, որ $p_1, p_2, \dots, p_k$ արտադրիչների մեջ կարող են լինել միատեսակները (իրար հավասարները), և այդ դեպքում n թվի վերլուծության համար կստանանք հետևյալ տեսքը.

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}:$$

Այս վերլուծությունը կոչվում է n թվի **կանոնական վերլուծություն**:

Դիտարկենք բնական թվերի 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10, ... հաջորդականությունը: Այստեղ 2,3,5,7, ... թվերը պարզ են: Հեշտ է համոզվել, որ առաջին տասնյակի մեջ կա չորս հատ պարզ թիվ, երկրորդի մեջ՝ ևս չորս պարզ թիվ, երրորդ տասնյակի մեջ՝ միայն երկու պարզ թիվ՝ 23 և 29: Հարց է առաջանում, թե բնական թվերի հաջորդականության մեջ պարզ թվերն ինչպես են բաշխված: Սա հետաքրքիր, բայց միաժամանակ շատ բարդ հարց է: Կան բազմաթիվ դժվար և դեռ չլուծված պրոբլեմներ՝ կապված պարզ թվերի բաշխման հետ:

1.13. *Թեորեմ (Էվկլիդես):* Պարզ թվերի բազմությունն անվերջ է:

Ապացույց: Դիցուք բոլոր $p_1, p_2, \dots, p_n$ բնական թվերը պարզ են: Կազմենք մեկից մեծ հետևյալ $P = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ թիվը: Այն չի բաժանվում $p_1, p_2, \dots, p_n$ թվերից և ոչ մեկի վրա (1.2. վարժություն): Այդ դեպքում, եթե P պարզ է, ապա այն տարբեր է $p_1, p_2, \dots, p_n$ պարզ թվերից, իսկ եթե բաղադրյալ է, ապա նրա կանոնական վերլուծության մեջ մասնակցող պարզ արտադրիչները տարբեր են $p_1, p_2, \dots, p_n$ պարզ թվերից: Այսպիսով, բացի մեր վերցրած $p_1, p_2, \dots, p_n$ պարզ թվերից, գոյություն ունեն ուրիշ պարզ թվեր ևս: Թեորեմն ապացուցված է: ■

§ 1.4. ԹՎԱՅԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

Թվերի տեսության մեջ հաճախ են հանդիպում այնպիսի ֆունկցիաներ, որոնց արգումենտն ամբողջ թիվ է: Այդպիսի ֆունկցիաներն ընդունված է անվանել **թվային**:

Դիցուք $\boldsymbol{n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}}$, որտեղ $\boldsymbol{p_1, p_2, \dots, p_k}$ թվերը պարզ են: Հասկանալի է, որ $\boldsymbol{n}$ թվի յուրաքանչյուր բաժանարար ունի հետևյալ $\boldsymbol{p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}}$ տեսքը, որտեղ $\boldsymbol{0 \le \beta_i \le \alpha_i}$ և $\boldsymbol{i = 1, 2, \dots, k}$: Կազմենք հետևյալ արտադրյալը.

$$\left(\boldsymbol{1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{\alpha_1}}\right)\left(\boldsymbol{1 + p_2 + p_2^2 + \cdots + p_2^{\alpha_2}}\right) \cdots \left(\boldsymbol{1 + p_k + p_k^2 + \cdots + p_k^{\alpha_k}}\right):$$

Նկատենք, որ եթե բացենք արտադրյալի փակագծերը, ապա ստացված գումարի յուրաքանչյուր գումարելի կհանդիսանա $\boldsymbol{n}$ թվի բաժանարար, ընդ որում դրանցով էլ կսպառվեն $\boldsymbol{n}$ թվի բոլոր բաժանարարները: Հեշտ է համոզվել, որ նշված արտադրյալը պարզեցնելուց հետո գումարելիների թիվը կլինի

$$(\boldsymbol{\alpha_1 + 1})(\boldsymbol{\alpha_2 + 1}) \cdots (\boldsymbol{\alpha_k + 1}):$$

Այսպիսով, $\boldsymbol{n}$ թվի իրարից տարբեր բոլոր բաժանարարների քանակը տրվում է

$$\boldsymbol{\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)}$$

բանաձևով, որտեղ $\boldsymbol{n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}}$:

Հաջորդիվ, եթե $\boldsymbol{n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}}$ թվի բոլոր բաժանարարների գումարը նշանակենք $\boldsymbol{\sigma(n)}$, ապա վերը շարադրվածի համաձայն.

$$\boldsymbol{\sigma(n) = \left(1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{\alpha_1}\right)\left(1 + p_2 + p_2^2 + \cdots + p_2^{\alpha_2}\right) \cdots \left(1 + p_k + p_k^2 + \cdots + p_k^{\alpha_k}\right) =}$$
$$\boldsymbol{= \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdots \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}}:$$

1.14. ***Սահմանում:***

1) $\boldsymbol{n}$ բնական թվի բոլոր բաժանարարները, բացի իրենից, կոչվում են $\boldsymbol{n}$ թվի **ճշգրիտ (սեփական) բաժանարարներ**:

2) $\boldsymbol{n}$ բնական թիվը կոչվում է **կատարյալ**, եթե այն հավասար է իր ճշգրիտ բաժանարարների գումարին:

Այսպիսով, $\boldsymbol{n}$ թվի կատարյալ լինելու պայմանը հետևյալն է.

$$\boldsymbol{\sigma(n) - n = n} \quad \text{կամ} \quad \boldsymbol{\sigma(n) = 2n}:$$

$\mathbf{1.15}$. *Թեորեմ (Էվկլիդես):* Եթե $(\mathbf{2^p-1})$ թիվը պարզ է և $\boldsymbol{n}=\mathbf{2^{p-1}(2^p-1)}$, ապա $\boldsymbol{n}$ թիվը կատարյալ է:

Ապացույց: Նշանակենք $\boldsymbol{q}=\mathbf{2^p-1}$, որտեղ $\boldsymbol{q}$ թիվը պարզ է: Այդ դեպքում $\boldsymbol{n}=\mathbf{2^{p-1}}\cdot\boldsymbol{q}$ և, հետևաբար,

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{n})=\frac{2^p-1}{2-1}\cdot\frac{q^2-1}{q-1} \text{ կամ } \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{n})=(2^p-1)(q+1):$$

Ունենք $\boldsymbol{q}+\mathbf{1}=\mathbf{2^p}$: Ուստի

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{n})=(2^p-1)2^p=2\cdot 2^{p-1}(2^p-1)=2n$$

և $\boldsymbol{n}$ թիվը կատարյալ է: ■

Նկատենք, որ $(\mathbf{2^p-1})$ թվի պարզ լինելու համար անհրաժեշտ է, որ $\boldsymbol{p}$ թիվը լինի պարզ (սակայն դա բավարար պայման չէ): Երբ $\boldsymbol{p}=\mathbf{2,3,5,7}$, ապա $\boldsymbol{n}=\mathbf{2^{p-1}(2^p-1)}$ թիվը համապատասխանաբար ընդունում է $\mathbf{6,28,496,8128}$ արժեքները, որոնք կատարյալ թվեր են: Կատարյալ են նաև $\mathbf{2^{16}(2^{17}-1)}$ և $\mathbf{2^{126}(2^{127}-1)}$ թվերը: $\mathbf{2^p-1}$ տեսքի պարզ թվերը կոչվում են **մերսենյան թվեր** (Մերսենը 17-րդ դարի ֆրանսիացի մաթեմատիկոս է): Էյլերն ապացուցել է, որ բոլոր զույգ կատարյալ թվերն ունեն այն տեսքը, որը ցույց է տվել Էվկլիդեսը: Մինչև հիմա հայտնի չէ, թե՝

- ✓ կատարյալ թվերը վերջավոր են, թե անվերջ.
- ✓ գոյություն ունե՞ն արդյոք կենտ կատարյալ թվեր:

Թվերի տեսության և ընդհանրապես մաթեմատիկայի մեջ կարևոր դեր է կատարում այսպես կոչված Էյլերի ֆունկցիան:

$\mathbf{1.16}$. *Սահմանում:* Դիցուք $\boldsymbol{n}$ բնական թիվ է: $\boldsymbol{n}$ թվից փոքր և $\boldsymbol{n}$ թվի հետ փոխադարձաբար պարզ դրական թվերի քանակը կոչվում է **Էյլերի ֆունկցիա** և նշանակվում $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{n})$: Համարվում է, որ $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{1})=\mathbf{1}$:

$\mathbf{1.17}$. *Թեորեմ:* Եթե $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{dl}$, ապա $\boldsymbol{n}$ թվից փոքր և $\boldsymbol{n}$ թվի հետ $\boldsymbol{d}$ ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար ունեցող թվերի քանակը հավասար է $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{l})$:

Ապացույց: Դիցուք $\mathbf{1}\le\boldsymbol{m}<\boldsymbol{n}$ և $(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})=\boldsymbol{d}$: Այդ դեպքում $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{dl_1}$: Ուստի $\boldsymbol{dl_1}<\boldsymbol{dl}$ կամ $\mathbf{1}\le\boldsymbol{l_1}<\boldsymbol{l}$ և, բացի այդ, $(\boldsymbol{l_1},\boldsymbol{l})=\mathbf{1}$: Ակնհայտ է, որ քանի հատ $\boldsymbol{l_1}$ ունենանք վերը նշված երկու պայմանին բավարարող, այնքան էլ $\boldsymbol{m}$ կունենանք, բայց ըստ Էյլերի ֆունկցիայի սահմանման՝ $\boldsymbol{l_1}$ կունենանք ճիշտ $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{l})$ հատ ($\mathbf{1}\le\boldsymbol{l_1}<\boldsymbol{l}$ և $(\boldsymbol{l_1},\boldsymbol{l})=\mathbf{1}$): ■

1.18. *Թեորեմ (Գաուս):* $\sum_{l|n}\varphi(l)=n$:

Դիտողություն: Σ տառն օգտագործված է սովորական իմաստով՝ որպես գումարի կրճատ նշանակում, իսկ $l\,|\,n$ ցույց է տալիս, որ գումարը տարածվում է n թվի բոլոր դրական բաժանարարների վրա:

Ապացույց: Հաջորդաբար դուրս գրենք n թվի բոլոր բաժանարարները.

$$1, d_1, d_2, \dots, d_k, \dots, n:$$

Դիցուք n թվի լրացուցիչ բաժանարարներն են.

$$n, l_1,\ l_2, \dots, l_k, \dots, 1,$$

այսինքն՝ $d_i l_i = n$: Այնուհետև մեկից մինչև n թվերը բաժանենք խմբերի. առաջին խմբում վերցնենք այն թվերը, որոնք n թվի հետ ունեն 1 ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար և այդ խումբը նշանակենք (1), երկրորդ խմբում ՝ այն թվերն են, որոնք n թվի հետ ունեն d_1 ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար և այդ խումբը նշանակենք (d_1), և վերջապես (d_k) նշանակենք այն խումբը, որի թվերը n թվի հետ ունեն d_k ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար: Այդպիսով կստանանք

$$(1), (d_1), (d_2), \dots, (d_k), \dots, (n)$$

խմբերը, ընդ որում $1, 2, \dots, n$ թվերից յուրաքանչյուրը կմտնի միայն մեկ խմբի մեջ: Համաձայն 1.17 թեորեմի, նշված խմբերում թվերի քանակը կլինի $\varphi(n)+\varphi(l_1)+\varphi(\ l_2)+\cdots+\varphi(l_k)+\cdots+\varphi(1)$: Այսպիսով,

$$\varphi(n)+\varphi(l_1)+\varphi(\ l_2)+\cdots+\varphi(l_k)+\cdots+\varphi(1)=n$$

կամ

$$\sum_{l|n}\varphi(l)=n:$$

Ապացույցն ավարտված է: ■

1.19. *Թեորեմ:* Եթե $(m,n)=1$, ապա $\varphi(m\cdot n)=\varphi(m)\cdot\varphi(n)$:

Ապացույցը կատարենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի եղանակով: Ենթադրենք թեորեմը ճիշտ է mn-ից փոքր թվերի համար և ապացուցենք, որ այն ճիշտ կլինի նաև mn համար:

Դիցուք l անցնում է m թվի ճշգրիտ բաժանարարների վրայով (եթե x հաջորդաբար ընդունում է $k_1, k_2, k_3, \dots$ արժեքներ, ապա

ասում են, որ $\boldsymbol{x}$ անցնում է $\boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}, \boldsymbol{k_3}, \ldots$ հաջորդականության վրայով), իսկ $\boldsymbol{d}$՝ $\boldsymbol{n}$ թվի ճշգրիտ բաժանարարների վրայով: Այդ դեպքում $\boldsymbol{m}$ թվի բաժանարարները ստացվում են $\boldsymbol{m}$ և $\boldsymbol{l}$ թվերի միջոցով, իսկ $\boldsymbol{n}$ թվինը՝ $\boldsymbol{n}$ և $\boldsymbol{d}$ թվերի միջոցով: Հեշտ է նկատել, որ $\boldsymbol{mn}$ թվի բաժանարարները կստացվեն $\boldsymbol{mn}$, $\boldsymbol{md}$, $\boldsymbol{nl}$, $\boldsymbol{ld}$ թվերի միջոցով:
Համաձայն Գաուսի թեորեմի, կունենանք, որ

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{m}) + \sum \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{l}), \tag{1.2}$$

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{n}) + \sum \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{d}), \tag{1.3}$$

$$\boldsymbol{mn} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{mn}) + \sum \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{md}) + \sum \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{nl}) + \sum \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{ld}): \tag{1.4}$$

Հաշվի առնելով, որ $\boldsymbol{mn}$-ից փոքր թվերի համար թեորեմը համարվում է ճշմարիտ և $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{l}) = (\boldsymbol{l}, \boldsymbol{d}) = \mathbf{1}$, ապա (1.4) հավասարությունից կստանանք.

$$\boldsymbol{mn} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{mn}) + \sum \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{m})\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{d}) + \sum \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{n})\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{l}) + \sum \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{l})\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{d})$$

կամ

$$\boldsymbol{mn} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{mn}) + \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{m}) \sum \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{d}) + \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{n}) \sum \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{l}) + \sum \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{l}) \sum \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{d}): \tag{1.5}$$

Բազմապատկելով (1.2) և (1.3) հավասարությունների աջ և ձախ մասերը՝ կստանանք.

$$\boldsymbol{mn} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{m})\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{n}) + \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{m}) \sum \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{d}) + \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{n}) \sum \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{l}) + \sum \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{l}) \sum \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{d}): \tag{1.6}$$

Համեմատելով (1.5) և (1.6) հավասարությունները՝ կստանանք, որ

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{m}) \cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{n}),$$

այն ինչ պետք էր ապացուցել: ■

Պարզ է, որ $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p} - \mathbf{1}$, եթե $\boldsymbol{p}$ թիվը պարզ է: Այժմ հաշվենք $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{n})$ արժեքը, երբ $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}^{\boldsymbol{\alpha}}$, որտեղ $\boldsymbol{p}$ թիվը պարզ է: Դրա համար անհրաժեշտ է $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \boldsymbol{p}^{\boldsymbol{\alpha}}$ թվերից (ընդամենը $\boldsymbol{p}^{\boldsymbol{\alpha}}$ հատ) անջատել այն թվերը, որոնք փոխադարձաբար պարզ չեն $\boldsymbol{p}^{\boldsymbol{\alpha}}$ թվի հետ: Դրանք հետևյալ թվերն են.

$$\mathbf{1} \cdot \boldsymbol{p}, \mathbf{2} \cdot \boldsymbol{p}, \ldots, \boldsymbol{p}^{\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{1}} \cdot \boldsymbol{p},$$

որոնց թիվը հավասար է $\boldsymbol{p}^{\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{1}}$: Այսպիսով,

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{p}^{\boldsymbol{\alpha}}) = \boldsymbol{p}^{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{p}^{\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{1}} = \boldsymbol{p}^{\boldsymbol{\alpha}}\left(\mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}}\right):$$

1.20. ***Թեորեմ:*** Եթե $\boldsymbol{n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}}$, ապա

$$\boldsymbol{\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)}:$$

Ապացույց:

$$\boldsymbol{\varphi(n) = \varphi\left(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}\right) = \varphi\left(p_1^{\alpha_1}\right)\varphi\left(p_2^{\alpha_2}\right)\cdots\varphi\left(p_k^{\alpha_k}\right) =}$$

$$\boldsymbol{= p_1^{\alpha_1}\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)p_2^{\alpha_2}\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots p_k^{\alpha_k}\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) =}$$

$$\boldsymbol{= n\left(1 - \tfrac{1}{p_1}\right)\left(1 - \tfrac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \tfrac{1}{p_k}\right)}:$$ ■

Էյլերի ֆունկցիայի վերը շարադրված հատկությունները կարելի է ապացուցել տարբեր մեթոդներով: Մեր կողմից բերված ապացույցները պատկանում են Դ. Ա. Գրավեին:

Բնական թվի կանոնական վերլուծության հետ սերտորեն կապված է այսպես կոչված $\boldsymbol{\mu}: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ **Մյոբիուսի ֆունկցիան**, որը սահմանվում է հետևյալ կերպ.

- $\boldsymbol{\mu(n) = 1}$, երբ $\boldsymbol{n = 1}$.
- $\boldsymbol{\mu(n) = (-1)^k}$, երբ $\boldsymbol{n = p_1 p_2 \cdots p_k}$, որտեղ $\boldsymbol{p_i}$ թվերն զույգ առ զույգ իրարից տարբեր պարզ թվեր են.
- $\boldsymbol{\mu(n) = 0}$, երբ $\boldsymbol{n}$ թիվը բաժանվում է որևէ $\boldsymbol{p}$ պարզ թվի քառակուսու վրա:

1.21. ***Թեորեմ:*** Եթե $\boldsymbol{(m, n) = 1}$, ապա $\boldsymbol{\mu(m \cdot n) = \mu(m) \cdot \mu(n)}$:

Ապացույց: Եթե $\boldsymbol{m = 1}$ կամ $\boldsymbol{n = 1}$, ապա թեորեմն ակնհայտորեն ճիշտ է: Եթե $\boldsymbol{m \neq 1}$, $\boldsymbol{n \neq 1}$ և $\boldsymbol{(m, n) = 1}$, ապա հնարավոր են հետևյալ երկու տարբերակները.

a) $\boldsymbol{\mu(m) = 0}$ կամ $\boldsymbol{\mu(n) = 0}$, ուստի $\boldsymbol{\mu(m \cdot n) = 0}$ և $\boldsymbol{\mu(m \cdot n) = \mu(m) \cdot \mu(n)}$.

b) $\boldsymbol{\mu(m) \neq 0}$ և $\boldsymbol{\mu(n) \neq 0}$, այսինքն՝ $\boldsymbol{m = q_1 q_2 \cdots q_s}$ և $\boldsymbol{n = p_1 p_2 \cdots p_k}$, որտեղ $\boldsymbol{q_i}$ (և $\boldsymbol{p_j}$) պարզ թվերը զույգ առ զույգ տարբեր են և $\boldsymbol{q_i \neq p_j}$, քանի որ $\boldsymbol{(m, n) = 1}$: Հետևապես $\boldsymbol{\mu(m) = (-1)^s}$, $\boldsymbol{\mu(n) = (-1)^k}$, $\boldsymbol{\mu(m \cdot n) = (-1)^{s+k}}$ և $\boldsymbol{\mu(m \cdot n) = \mu(m) \cdot \mu(n)}$: Թեորեմն ապացուցված է: ■

§ 1.5. ԲԱՂԴԱՏՈՒՄՆԵՐ: ՄՆԱՑՔՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ ՉԻՆԱԿԱՆ ԹԵՈՐԵՄԸ

1.22. *Սահմանում:* Եթե $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ ամբողջ թվերի $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ տարբերությունը բաժանվում է $\boldsymbol{n}$ բնական թվի վրա, ապա ասում են, որ $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ **թվերը բաղդատելի (համեմատելի) են ըստ մոդուլ** $\boldsymbol{n}$ և գրում են $\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{b} (\operatorname{mod} \boldsymbol{n})$: Վերջինս համարժեք է $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{kn}$ և $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{kn}$ հավասարություններին, որտեղ $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$:

Դիցուք՝ $\boldsymbol{a}$ թիվը $\boldsymbol{n}$ թվի վրա բաժանելիս ստացվում է $\boldsymbol{r}$ մնացորդ: Այդ դեպքում $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{nk}+\boldsymbol{r}$ կամ, որ նույնն է, $\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{r} (\operatorname{mod} \boldsymbol{n})$, այսինքն՝ $\boldsymbol{a}$ թիվը և իր $\boldsymbol{r}$ մնացորդը, որը ստացվում է $\boldsymbol{n}$ թվի վրա բաժանելիս, իրար հետ բաղդատելի են ըստ մոդուլ $\boldsymbol{n}$: Հաճախ $\boldsymbol{r}$ մնացորդը կոչվում է $\boldsymbol{a}$ թվի մնացք:

1.23. *Հատկություն:*

1) $\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{a} (\operatorname{mod} \boldsymbol{n})$ *(ռեֆլեքսիվություն):*

2) Եթե $\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{b} (\operatorname{mod} \boldsymbol{n})$, *ապա* $\boldsymbol{b} \equiv \boldsymbol{a} (\operatorname{mod} \boldsymbol{n})$ *(սիմետրիկություն):*

3) Եթե $\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{b} (\operatorname{mod} \boldsymbol{n})$ *և* $\boldsymbol{b} \equiv \boldsymbol{c} (\operatorname{mod} \boldsymbol{n})$, *ապա* $\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{c} (\operatorname{mod} \boldsymbol{n})$ *(տրանզիտիվություն):*

4) Եթե $\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{b} (\operatorname{mod} \boldsymbol{n})$ *և* $\boldsymbol{c} \equiv \boldsymbol{d} (\operatorname{mod} \boldsymbol{n})$, *ապա* $\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{c} \equiv \boldsymbol{b} \pm \boldsymbol{d} (\operatorname{mod} \boldsymbol{n})$:

5) Եթե $\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{b} (\operatorname{mod} \boldsymbol{n})$, *ապա* $\boldsymbol{am} \equiv \boldsymbol{bm} (\operatorname{mod} \boldsymbol{n})$, *որտեղ* $\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}$:

6) Եթե $\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{b} (\operatorname{mod} \boldsymbol{n})$ *և* $\boldsymbol{c} \equiv \boldsymbol{d} (\operatorname{mod} \boldsymbol{n})$, *ապա* $\boldsymbol{ac} \equiv \boldsymbol{bd} (\operatorname{mod} \boldsymbol{n})$:

Այս հատկության հիման վրա կարող ենք պնդել, որ եթե $\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{b} (\operatorname{mod} \boldsymbol{n})$, ապա $\boldsymbol{a^m} \equiv \boldsymbol{b^m} (\operatorname{mod} \boldsymbol{n})$: Իսկապես, $\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{b} (\operatorname{mod} \boldsymbol{n})$ բաղդատումը գրելով $\boldsymbol{m}$ անգամ և անդամ առ անդամ բազմապատկելով, կստանանք՝ $\boldsymbol{a^m} \equiv \boldsymbol{b^m} (\operatorname{mod} \boldsymbol{n})$:

7) Եթե $\boldsymbol{am} \equiv \boldsymbol{bm} (\operatorname{mod} \boldsymbol{n})$ *և* $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{1}$, *ապա* $\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{b} (\operatorname{mod} \boldsymbol{n})$:

8) Եթե $\boldsymbol{am} \equiv \boldsymbol{bm} (\operatorname{mod} \boldsymbol{nm})$, *ապա* $\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{b} (\operatorname{mod} \boldsymbol{n})$:

9) Եթե $\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{b} (\operatorname{mod} \boldsymbol{n})$ և $\boldsymbol{n} \vdots \boldsymbol{n_1}$, *ապա* $\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{b} (\operatorname{mod} \boldsymbol{n_1})$:

10) Եթե $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} \equiv \boldsymbol{c} (\operatorname{mod} \boldsymbol{n})$, *ապա* $\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} (\operatorname{mod} \boldsymbol{n})$:

11) Եթե $\boldsymbol{n_1}, \boldsymbol{n_2}, \dots, \boldsymbol{n_k}$ *թվերը զույգ առ զույգ փոխադարձաբար պարզ են և* $\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{b} (\operatorname{mod} \boldsymbol{n_1}), \boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{b} (\operatorname{mod} \boldsymbol{n_2}), \dots, \boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{b} (\operatorname{mod} \boldsymbol{n_k})$, *ապա* $\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{b} (\operatorname{mod} \boldsymbol{n_1 n_2} \cdots \boldsymbol{n_k})$:

Այս հատկությունը կապացուցենք $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{2}$ դեպքում: Ընդհանուր դեպքում ապացույցը կատարվում է նման եղանակով: Դիցուք $\boldsymbol{n_1} = \boldsymbol{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}} \cdots \boldsymbol{p_s^{\alpha_s}}$ և $\boldsymbol{n_2} = \boldsymbol{q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2}} \cdots \boldsymbol{q_t^{\beta_t}}$ համապատասխանաբար հանդիսանում են $\boldsymbol{n_1}$ և $\boldsymbol{n_2}$ թվերի կանոնական վերլուծությունները, որտեղ $\boldsymbol{p_i \neq q_j}$, երբ $\boldsymbol{1 \leq i \leq s}$ և $\boldsymbol{1 \leq j \leq t}$, որովհետև $(\boldsymbol{n_1, n_2}) = \boldsymbol{1}$: Եվ քանի որ $(\boldsymbol{a-b}) \vdots \boldsymbol{n_1}$ և $(\boldsymbol{a-b}) \vdots \boldsymbol{n_2}$, ուստի $\boldsymbol{a-b}$ թվի կանոնական վերլուծությունը կունենա հետևյալ տեսքը.

$$\boldsymbol{a-b = p_1^{\sigma_1} p_2^{\sigma_2} \cdots p_s^{\sigma_s} q_1^{\tau_1} q_2^{\tau_2} \cdots q_t^{\tau_t} r_1^{\pi_1} r_2^{\pi_2} \cdots r_l^{\pi_l}},$$

որտեղ $\boldsymbol{\alpha_i \leq \sigma_i}$ և $\boldsymbol{\beta_j \leq \tau_j}$, երբ $\boldsymbol{i = 1, 2, \ldots, s}$ և $\boldsymbol{j = 1, 2, \ldots, t}$: Հետևաբար $(\boldsymbol{a-b}) \vdots \boldsymbol{n_1 n_2}$ կամ $\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{b} (\mathrm{mod}\, \boldsymbol{n_1 n_2})$: ■

1.24. *Թեորեմ:* Եթե $\boldsymbol{f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0}$ ամբողջ գործակիցներով բազմանդամ է և $\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{b} (\mathrm{mod}\, \boldsymbol{m})$, ապա $\boldsymbol{f(a)} = \boldsymbol{f(b)} (\mathrm{mod}\, \boldsymbol{m})$:

Ապացույց: Եթե $\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{b} (\mathrm{mod}\, \boldsymbol{m})$, ապա $\boldsymbol{a^k} \equiv \boldsymbol{b^k} (\mathrm{mod}\, \boldsymbol{m})$, որտեղ $\boldsymbol{k = 0, 1, 2, \ldots, n}$: Այս վերջին բաղդատման երկու կողմերը բազմապատկենք $\boldsymbol{c_k}$ գործակցով, կստանանք $\boldsymbol{c_k a^k} \equiv \boldsymbol{c_k b^k} (\mathrm{mod}\, \boldsymbol{m})$, $\boldsymbol{k = 0, 1, 2, \ldots, n}$, կամ

$$\left.\begin{array}{c} \boldsymbol{c_n a^n \equiv c_n b^n} \\ \boldsymbol{c_{n-1} a^{n-1} \equiv c_{n-1} b^{n-1}} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \boldsymbol{c_1 a \equiv c_1 b} \\ \boldsymbol{c_0 \equiv c_0} \end{array}\right\} (\mathrm{mod}\, \boldsymbol{m}):$$

Գումարելով ստացված բաղդատումների համապատասխան մասերը՝ կունենանք.

$$\boldsymbol{c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} + \cdots + c_1 a + c_0 \equiv c_n b^n + c_{n-1} b^{n-1} + \cdots + c_1 b + c_0} (\mathrm{mod}\, \boldsymbol{m})$$

կամ $\boldsymbol{f(a)} = \boldsymbol{f(b)} (\mathrm{mod}\, \boldsymbol{m})$: ■

Թվարկության տասնորդական համակարգում

$$\boldsymbol{f(10) = c_n 10^n + c_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + c_1 10 + c_0}$$

բազմանդամը կարելի է դիտարկել որպես $\boldsymbol{c_n, c_{n-1}, \ldots, c_1, c_0}$ թվանշաններն ունեցող թիվ (1.4 հետևանք): Քանի որ $\boldsymbol{10} \equiv \boldsymbol{1} (\mathrm{mod}\, \boldsymbol{3, 9})$, ապա, ըստ ապացուցված թեորեմի, $\boldsymbol{f(10)} = \boldsymbol{f(1)} (\mathrm{mod}\, \boldsymbol{3, 9})$ կամ որ նույնն է

$$\boldsymbol{c_n 10^n + c_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + c_1 10 + c_0 \equiv c_n + c_{n-1} + \cdots + c_1 + c_0} (\mathrm{mod}\, \boldsymbol{3, 9}):$$

Այսպիսով, որպեսզի թիվը բաժանվի **3** կամ **9** վրա, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա թվանշանների գումարը բաժանվի **3** կամ $\boldsymbol{9}$ վրա: Ճիշտ այդպես էլ, քանի որ $\mathbf{10} \equiv -\mathbf{1} (\mathrm{mod}\, \mathbf{11})$, ապա $\boldsymbol{f}(\mathbf{10}) \equiv \boldsymbol{f}(-\mathbf{1}) (\mathrm{mod}\, \mathbf{11})$, բայց

$$\boldsymbol{f}(-\mathbf{1}) = \boldsymbol{c_0} - \boldsymbol{c_1} + \boldsymbol{c_2} - \boldsymbol{c_3} + \cdots + (-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{c_n}:$$

Հետևաբար, որպեսզի $(\boldsymbol{c_n c_{n-1}} \cdots \boldsymbol{c_1 c_0})_{\mathbf{10}}$ թիվը բաժանվի $\mathbf{11}$ վրա, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\boldsymbol{c_0} - \boldsymbol{c_1} + \boldsymbol{c_2} - \boldsymbol{c_3} + \cdots + (-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{c_n}$ թիվը բաժանվի $\mathbf{11}$ վրա:

$\mathbf{1.25}$. *Լեմմա:* Եթե $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{m}) = \mathbf{1}$ և $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{m}) = \mathbf{1}$, ապա $(\boldsymbol{ab}, \boldsymbol{m}) = \mathbf{1}$:

Ապացույց: Քանի որ $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{m}) = \mathbf{1}$ և $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{m}) = \mathbf{1}$, ապա գոյություն ունեն այնպիսի $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}$ և $\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2}$ ամբողջ թվեր, որ $\boldsymbol{ax_1} + \boldsymbol{my_1} = \mathbf{1}$ և $\boldsymbol{bx_2} + \boldsymbol{my_2} = \mathbf{1}$: Բազմապատկելով վերջին երկու հավասարություն-ները՝ ստանում ենք

$$\boldsymbol{ab}(\boldsymbol{x_1 x_2}) + \boldsymbol{m}(\boldsymbol{ax_1 y_2} + \boldsymbol{bx_2 y_1} + \boldsymbol{my_1 y_2}) = \mathbf{1}:$$

Համաձայն 1.6. հետևանքի, վերջինս նշանակում է, որ $(\boldsymbol{ab}, \boldsymbol{m}) = \mathbf{1}$: ■

$\mathbf{1.26}$. *Թեորեմ (Էյլեր):* Եթե $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{m}) = \mathbf{1}$, ապա $\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{\varphi(m)}} \equiv \mathbf{1} (\boldsymbol{mod}\, \boldsymbol{m})$:

Ապացույց: Դիցուք $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_{\varphi(m)}}$ հանդիսանում են $\boldsymbol{m}$ թվից փոքր և նրա հետ փոխադարձաբար պարզ դրական թվեր, և $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{m}) = \mathbf{1}$: Ենթադրենք $\boldsymbol{aa_1}, \boldsymbol{aa_2}, \dots, \boldsymbol{aa_{\varphi(m)}}$ թվերի ամենափոքր դրական մնացքներն են (այսինքՙ այն մնացորդները, որոնք ստացվում են այդ թվերը $\boldsymbol{m}$ մոդուլի վրա բաժանելուց) $\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \dots, \boldsymbol{b_{\varphi(m)}}$ թվերը: Այդ դեպքում

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{aa_1} \equiv \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{aa_2} \equiv \boldsymbol{b_2} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ \boldsymbol{aa_{\varphi(m)}} \equiv \boldsymbol{b_{\varphi(m)}} \end{array}\right\} (\boldsymbol{mod}\, \boldsymbol{m}):$$

Բազմապատկելով բաղդատումների համապատասխան մասերը՝ կստանանք, որ

$$\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{\varphi(m)}} \boldsymbol{a_1 a_2} \cdots \boldsymbol{a_{\varphi(m)}} \equiv \boldsymbol{b_1 b_2} \cdots \boldsymbol{b_{\varphi(m)}} (\boldsymbol{mod}\, \boldsymbol{m}):$$

Սակայն, 1.25 լեմմայի համաձայն, $\boldsymbol{aa_1}, \boldsymbol{aa_2}, \dots, \boldsymbol{aa_{\varphi(m)}}$ թվերը փոխադարձաբար պարզ են $\boldsymbol{m}$ թվի հետ, ուրեմն ըստ մոդուլ $\boldsymbol{m}$ նրանց մնացքները՝ $\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \dots, \boldsymbol{b_{\varphi(m)}}$ թվերը, նույնպես փոխադար-ձաբար պարզ են $\boldsymbol{m}$ թվի հետ և իրարից տարբեր են (եթե

$aa_i \equiv aa_j(mod\, m)$, ապա $a_i \equiv a_j(mod\, m) \Rightarrow a_i = a_j$): Քանի որ $a_1, a_2, \dots, a_{\varphi(m)}$ բոլոր այն դրական թվերն են, որոնք փոքր են m թվից և փոխադարձաբար պարզ են նրա հետ, ուրեմն $a_1, a_2, \dots, a_{\varphi(m)}$ թվերը և $b_1, b_2, \dots, b_{\varphi(m)}$ թվերը նույն թվերն են, միայն տարբեր դասավորությամբ: Այսպիսով, $a_1 a_2 \cdots a_{\varphi(m)} = b_1 b_2 \cdots b_{\varphi(m)}$: Բացի դրանից $a_1 a_2 \cdots a_{\varphi(m)}$ արտադրյալը m թվի հետ փոխադարձաբար պարզ է: Հետևաբար $a^{\varphi(m)} \equiv 1(mod\, m)$: ■

1.27. *Հետևանք (Ֆերմայի փոքր թեորեմը):* Եթե p թիվը պարզ է և $(a, p) = 1$, ապա $a^{p-1} \equiv 1(mod\, p)$:

1.28. *Լեմմա:* Որպեսզի $ax \equiv 1(mod\, m)$ բաղդատումն ունենա լուծում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $(a, m) = 1$, որտեղ $a \in \mathbb{Z}$:

Ապացույց: Եթե x_0 հանդիսանում է $ax \equiv 1(\mathrm{mod}\, m)$ բաղդատման լուծում, ապա $ax_0 \equiv 1(\mathrm{mod}\, m) \Leftrightarrow ax_0 - 1 = my_0, y_0 \in \mathbb{Z}, \Leftrightarrow ax_0 + m(-y_0) = 1 \Leftrightarrow (a, m) = 1$ (համաձայն 2.26 լեմմայի): ■

1.29. *Թեորեմ (Մնացքների մասին չինական թեորեմը):* Եթե $n \geq 2$ և $m_1, m_2, \dots, m_n$ բնական թվերը զույգ առ զույգ փոխադարձաբար պարզ են, ապա ցանկացած $a_1, a_2, \dots, a_n$ ամբողջ թվերի համար բաղդատումների հետևյալ

$$\begin{cases} x \equiv a_1(\mathrm{mod}\, m_1) \\ x \equiv a_2(\mathrm{mod}\, m_2) \\ \quad \cdots\ \cdots\ \cdots \\ x \equiv a_n(\mathrm{mod}\, m_n) \end{cases}$$

համակարգն ունի լուծում: Ընդ որում, եթե x_0 նշված համակարգի որևէ լուծում է և $x_1 \equiv x_0(\mathrm{mod}\, m_1 m_2 \cdots m_n)$, ապա x_1 ևս կլինի նշված համակարգի լուծում: Եվ հակառակը, եթե y_0 և y_1 նշված համակարգի երկու լուծումներ են, ապա $y_0 \equiv y_1(\mathrm{mod}\, m_1 m_2 \cdots m_n)$, այսինքն՝ լուծումն որոշվում է միարժեքորեն ըստ $m = m_1 m_2 \cdots m_n$ մոդուլի:

Ապացույց: Նախ հաստատենք լուծման գոյությունը: Նշանակելով՝ $k_i = m_1 \cdots m_{i-1} m_{i+1} \cdots m_n$, $i = 1, 2, \dots, n$, կստանանք $(k_i, m_i) = 1$, քանի որ $(m_i, m_j) = 1$, երբ $1 \leq i < j \leq n$: Հետևաբար, համաձայն 1.28. լեմմայի, $k_i x_i \equiv 1(\mathrm{mod}\, m_i)$ բաղդատումը կունենա լուծում, որտեղից $k_i x_i a_i \equiv a_i(\mathrm{mod}\, m_i)$, այսինքն՝ $k_i z_i \equiv a_i(\mathrm{mod}\, m_i)$, որտեղ $z_i = x_i a_i$, $i = 1, 2, \dots, n$: Պարզ է նաև, որ $k_j z_j \equiv 0(\mathrm{mod}\, m_i)$ (երբ $i \neq j$), որովհետև $\boldsymbol{k_j}$ բաժանվում է $\boldsymbol{m_i}$ վրա, երբ $\boldsymbol{i \neq j}$: Հետևաբար յուրաքանչյուր $\boldsymbol{i = 1, 2, \dots, n}$ արժեքի համար կունենանք.

$$\boldsymbol{k_1 z_1 + k_2 z_2 + \cdots + k_n z_n \equiv a_i} (\operatorname{mod} \boldsymbol{m_i}),$$

այսինքն՝ $\boldsymbol{x = k_1 z_1 + k_2 z_2 + \cdots + k_n z_n}$ ամբողջ թիվը կլինի տրված համակարգի լուծում, որովհետև

$$\boldsymbol{k_1 z_1 + \cdots + k_{i-1} z_{i-1} + k_i z_i + k_{i+1} z_{i+1} + \cdots + k_n z_n \equiv}$$

$$\boldsymbol{\equiv 0 + \cdots + 0 + a_i + 0 + \cdots + 0} (\operatorname{mod} \boldsymbol{m_i}):$$

Լուծման միակությանը վերաբերող մասն ակնհայտ է: Իրոք, եթե $\boldsymbol{x_0}$ նշված համակարգի որևէ լուծում է և $\boldsymbol{x_1 \equiv x_0} (\operatorname{mod} \boldsymbol{m_1 m_2 \cdots m_n})$, ապա $\boldsymbol{x_1 \equiv x_0} (\operatorname{mod} \boldsymbol{m_i})$, $\boldsymbol{i = 1, 2, \dots, n}$, և բաղդատումների տրանզիտիվության հատկության համաձայն կունենանք

$$\boldsymbol{x_1 \equiv a_i} (\operatorname{mod} \boldsymbol{m_i}), \boldsymbol{i = 1, 2, \dots, n}:$$

Իսկ եթե $\boldsymbol{y_0}$ և $\boldsymbol{y_1}$ նշված համակարգի երկու լուծումներ են, ապա $\boldsymbol{y_0 - y_1 \equiv 0} (\operatorname{mod} \boldsymbol{m_i})$, $\boldsymbol{i = 1, 2, \dots, n}$, և քանի որ $\boldsymbol{m_1, m_2, \dots, m_n}$ ($\boldsymbol{n \geq 2}$) բնական թվերը զույգ առ զույգ փոխադարձաբար պարզ են, ապա, ըստ բաղդատումների (11) հատկության,

$$\boldsymbol{y_0 - y_1 \equiv 0} (\operatorname{mod} \boldsymbol{m_1 m_2 \cdots m_n}) \text{ կամ } \boldsymbol{y_0 \equiv y_1} (\operatorname{mod} \boldsymbol{m_1 m_2 \cdots m_n}):$$

Ապացույցն ավարտված է: ■

ԳԼՈՒԽ 2

ԿՈՄՊԼԵՔՍ ԹՎԵՐ

Մաթեմատիկայի պատմության ընթացքում մի քանի անգամ տեղի է ունեցել թվի հասկացության ընդլայնում: Բնական թվերից մինչև իրական թվերն այդ պրոցեսը կարելի է պատկերել

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

շղթայի միջոցով, որտեղ $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ համապատասխանաբար հանդիսանում են բնական, ամբողջ, ռացիոնալ և իրական թվերի բազմությունները:

Այդ ընթացքում թվային համակարգերի յուրաքանչյուր հերթական ընդլայնում հանգեցնում էր թվերի նոր համակարգի, որը պահպանում էր նախորդ համակարգի բոլոր հիմնական հատկությունները և միաժամանակ օժտված էր մի շարք նոր օգտակար հատկություններով: Այսպես օրինակ, անցումը $\mathbb{N}$ բնական թվերից $\mathbb{Z}$ ամբողջ թվերին թույլ տվեց ներմուծել հանման գործողությունը, անցումը $\mathbb{Z}$ ամբողջ թվերից $\mathbb{Q}$ ռացիոնալ թվերին՝ բաժանման գործողությունը: Իրական թվերի $\mathbb{R}$ համակարգում դրական թվերից կարելի է ցանկացած աստիճանի արմատ հանել, այն ժամանակ, երբ $\mathbb{Q}$ համակարգում նույնիսկ $\sqrt{2}$ արտահայտությունն իմաստ չունի: Սակայն իրական թվերի $\mathbb{R}$ բազմությունում այնպիսի պարզ հանրահաշվական հավասարում, ինչպիսին $x^2+1=0$ հավասարումն է, անլուծելի է: Եվ քանի որ շատ մաթեմատիկական խնդիրներ բերվում են տարբեր հանրահաշվական հավասարումների, ուստի պահանջվում է կառուցել թվերի նոր համակարգ, որը կպարունակի ցանկացած այդպիսի հավասարման լուծում:

Այս գլխում կդիտարկենք իրական թվերի $\mathbb{R}$ բազմության մի այդպիսի ընդլայնում՝ կոմպլեքս թվերի $\mathbb{C}$ բազմությունը, որը լուծում է առաջադրված խնդիրը:

§ 2.1. ԿՈՄՊԼԵՔՍ ԹՎԵՐԻ ԲԱԶՄՈՒԹՅԱՆ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄԸ

Սկսենք այնպիսի խնդրից, որը, առաջին հայացքից, թվում է ավելի նեղ (սահմանափակ), քան վերևում ձևակերպված խնդիրը:

Դիցուք պահանջվում է կառուցել $\mathbb{C}$ բազմություն, որը կհանդիսանա $\mathbb{R}$ բազմության ընդլայնում և կպարունակի $\boldsymbol{x^2+1=0}$ հավասարման լուծումը:

Նշենք, որ, $\mathbb{R}$ բազմության տարրերի (որոնք դիտարկվում են որպես $\mathbb{C}$ բազմության տարրեր) գումարումը և բազմապատկումը պետք է համընկնեն իրական թվերի գումարման և բազմապատկման հետ:

Որպես $\mathbb{C}$ նշանակենք $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ դեկարտյան արտադրյալը, այսինքն իրական թվերի բոլոր կարգավորված զույգերի բազմությունը՝

$$\mathbb{C}=\{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}\}:$$

$\mathbb{C}$ բազմության վրա սահմանենք գումարման և բազմապատկման հանրահաշվական գործողությունները

$$(\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{b_1})+(\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{b_2})=(\boldsymbol{a_1}+\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{b_1}+\boldsymbol{b_2}), \tag{2.1}$$

$$(\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{b_1})(\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{b_2})=(\boldsymbol{a_1a_2}-\boldsymbol{b_1b_2},\boldsymbol{a_1b_2}+\boldsymbol{b_1a_2}): \tag{2.2}$$

Ցույց տանք, որ այդ գործողություններն օժտված են այն բոլոր հիմնական հատկություններով, որոնցով օժտված են համապատասխան գործողությունները ռացիոնալ կամ իրական թվերի համակարգերում. նրանք երկուսն էլ կոմուտատիվ են և զուգորդական (ասոցիատիվ), կապված են բաշխական օրենքով և նրանց համար գոյություն ունեն հակադարձ գործողություններ՝ հանում և բաժանում (բացի զրոյի վրա բաժանելուց):

Գումարման կոմուտատիվությունը և ասոցիատիվությունն ակնհայտ են (հետևում են իրական թվերի գումարման համապատասխան հատկություններից), քանի որ զույգերի գումարման դեպքում առանձին-առանձին գումարվում են համապատասխան կոորդինատները: Նմանապես, հիմնվելով իրական թվերի արտադրյալ գործողության կոմուտատիվության և ասոցիատիվության վրա, կարելի է հիմնավորել $\mathbb{C}$ բազմության տարրերի բազմապատկման կոմուտատիվությունը և ասոցիատիվությունը: $\mathbb{C}$ բազմությունում ըստ գումարման միավոր տարրի դերը կատարում է $(\mathbf{0},\mathbf{0})$ զույգը, իսկ ըստ բազմապատկման միավոր տարրի դերը՝ $(\mathbf{1},\mathbf{0})$ զույգը: Բաշխական կանոնի ստույգությունն ապացուցել ինքնուրույն:

Այժմ դիտարկենք հակադարձ գործողությունների հետ կապված հարցը: Եթե տրված են $(\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{b_1})$ և $(\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{b_2})$ զույգերը, ապա նրանց տարբերությունը կհանդիսանա այն $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ զույգը, որը բավարարում է $(\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{b_1})=(\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{b_2})+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ հավասարությանը: Ուստի, ըստ (2.1) հավասարության,

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{b_1})-(\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{b_2})=(\boldsymbol{a_1}-\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{b_1}-\boldsymbol{b_2})$$

և այդ տարբերությունն որոշված է միարժեքորեն: Մասնավորապես, $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ զույգին հակադիր է $(-\boldsymbol{a},-\boldsymbol{b})$ զույգը:

Հաջորդիվ, ենթադրենք տրված են $(\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{b_1})$ և $(\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{b_2})$ զույգերը, ընդ որում $(\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{b_2})\neq(\mathbf{0},\mathbf{0})$, այսինքն $\boldsymbol{a_2^2}+\boldsymbol{b_2^2}\neq\mathbf{0}$: Այդ դեպքում տրված զույգերի քանորդ կհանդիսանա այն $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ զույգը, որը բավարարում է $(\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{b_1})=(\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{b_2})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ հավասարությանը: Հետևաբար, ըստ (2.2) հավասարության,

$$\begin{cases}\boldsymbol{a_2x}-\boldsymbol{b_2y}=\boldsymbol{a_1}\\ \boldsymbol{b_2x}+\boldsymbol{a_2y}=\boldsymbol{b_1}\end{cases}:$$

Լուծելով նշված համակարգը՝ ստանում ենք, որ

$$\boldsymbol{x}=\frac{\boldsymbol{a_1a_2}+\boldsymbol{b_1b_2}}{\boldsymbol{a_2^2}+\boldsymbol{b_2^2}},\quad \boldsymbol{y}=\frac{\boldsymbol{b_1a_2}-\boldsymbol{a_1b_2}}{\boldsymbol{a_2^2}+\boldsymbol{b_2^2}}:$$

Այսպիսով, երբ $(\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{b_2})\neq(\mathbf{0},\mathbf{0})$, ապա $\frac{(\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{b_1})}{(\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{b_2})}$ քանորդը գոյություն ունի և որոշվում է միարժեքորեն.

$$\frac{(\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{b_1})}{(\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{b_2})}=\left(\frac{\boldsymbol{a_1a_2}+\boldsymbol{b_1b_2}}{\boldsymbol{a_2^2}+\boldsymbol{b_2^2}},\frac{\boldsymbol{b_1a_2}-\boldsymbol{a_1b_2}}{\boldsymbol{a_2^2}+\boldsymbol{b_2^2}}\right):$$

Մասնավորապես, $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\neq(\mathbf{0},\mathbf{0})$ զույգին հակադարձ է $\left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a^2}+\boldsymbol{b^2}},\frac{-\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a^2}+\boldsymbol{b^2}}\right)$ զույգը:

Կառուցված $\mathbb{C}$ բազմությունը կոչվում է **կոմպլեքս թվերի բազմություն:**

Համոզվենք, որ կառուցված բազմությունը բավարարում է դիտարկվող խնդրում նշված բոլոր պայմաններին:

Նախ և առաջ ցույց տանք, որ կոմպլեքս թվերի բազմությունը հանդիսանում է իրական թվերի բազմության ընդլայնում: Այդ նպատակով դիտարկենք $(\boldsymbol{a}, \mathbf{0})$ տեսքի զույգերը: Յուրաքանչյուր $(\boldsymbol{a}, \mathbf{0})$ զույգի համապատասխանեցնելով $\boldsymbol{a}$ իրական թիվը՝ ստանում ենք փոխմիարժեք համապատասխանություն դիտարկվող $(\boldsymbol{a}, \mathbf{0})$ տեսքի բոլոր զույգերի բազմության և $\mathbb{R}$ բազմության միջև: Այդ զույգերը գումարելով և բազմապատկելով ըստ (2.1) և (2.2) բանաձևերի՝ ստանում ենք, որ

$$(\boldsymbol{a}, \mathbf{0}) + (\boldsymbol{b}, \mathbf{0}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \mathbf{0} + \mathbf{0}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \mathbf{0}),$$
$$(\boldsymbol{a}, \mathbf{0})(\boldsymbol{b}, \mathbf{0}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} - \mathbf{0} \cdot \mathbf{0}, \boldsymbol{a} \cdot \mathbf{0} + \mathbf{0} \cdot \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{ab}, \mathbf{0}),$$

այսինքն՝ $(\boldsymbol{a}, \mathbf{0})$ տեսքի զույգերը գումարվում և բազմապատկվում են այնպես, ինչպես նրանց համապատասխան իրական թվերը: Դա մեզ թույլ է տալիս $(\boldsymbol{a}, \mathbf{0})$ զույգը նույնացնել $\boldsymbol{a}$ իրական թվի հետ և, հետագայում, ամենուրեք $(\boldsymbol{a}, \mathbf{0})$ զույգի փոխարեն պարզապես գրել $\boldsymbol{a}$: Մասնավորապես $(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ և $(\mathbf{1}, \mathbf{0}) = \mathbf{1}$: Արդյունքում, կարելի է համարել, որ $\mathbb{R}$ հանդիսանում է $\mathbb{C}$ բազմության ենթաբազմություն:

Վերջապես ցույց տանք, որ $\mathbb{C}$ բազմությունը պարունակում է $\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{1} = \mathbf{0}$ հավասարման լուծումը: Իսկապես, երբ $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ զույգը բարձրացնում ենք քառակուսի, ապա ստանում ենք – $\mathbf{1}$ իրական թիվը.

$$(\mathbf{0}, \mathbf{1})^{\mathbf{2}} = (\mathbf{0}, \mathbf{1})(\mathbf{0}, \mathbf{1}) = (\mathbf{0} \cdot \mathbf{0} - \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}, \mathbf{0} \cdot \mathbf{1} + \mathbf{1} \cdot \mathbf{0}) = (-\mathbf{1}, \mathbf{0}) = -\mathbf{1}:$$

Պայմանավորվենք $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ զույգը նշանակել $\boldsymbol{i}$ տառով և անվանել **կեղծ միավոր**:

Այսպիսով, պարագրաֆի սկզբում ձևակերպված խնդիրը ստացավ ամբողջական լուծում:

Այժմ ցույց տանք, որ

$$\boldsymbol{a} \equiv (\boldsymbol{a}, \mathbf{0}) \text{ և } \boldsymbol{i} \equiv (\mathbf{0}, \mathbf{1})$$

նույնացումների դեպքում, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ կոմպլեքս թիվը կարելի է գրել $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi}$ տեսքով, որտեղ գումարի և արտադրյալի տակ հասկացվում են կոմպլեքս թվերի բազմության համապատասխան հանրահաշվական գործողությունները: Իսկապես,

$$\boldsymbol{bi} = (\boldsymbol{b}, \mathbf{0})(\mathbf{0}, \mathbf{1}) = (\boldsymbol{b} \cdot \mathbf{0} - \mathbf{0} \cdot \mathbf{1}, \boldsymbol{b} \cdot \mathbf{1} + \mathbf{0} \cdot \mathbf{0}) = (\mathbf{0}, \boldsymbol{b}),$$

որտեղից էլ

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \mathbf{0}) + (\mathbf{0}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi}:$$

Հատկապես այս գրառումը կօգտածործենք հետագայում: Յուրաքան-չյուր $\boldsymbol{c = a + bi}$ տարր այդ տեսքով ներկայացվում է միարժեքորեն: Իսկապես, ենթադրենք նաև $\boldsymbol{c = a_0 + b_0 i}$, որտեղ $\boldsymbol{a_0, b_0} \in \mathbb{R}$: Այդ դեպքում

$$\boldsymbol{a + bi = a_0 + b_0 i \Rightarrow (b - b_0)i = a_0 - a}:$$

Եթե $\boldsymbol{b - b_0 \neq 0}$, ապա $\boldsymbol{i = (b - b_0)^{-1}(a_0 - a)} \in \mathbb{R}$, որը հնարավոր չէ: Նշանակում է $\boldsymbol{b - b_0 = 0}$, իսկ այդ դեպքում նաև $\boldsymbol{a_0 - a = 0}$: Հետևաբար $\boldsymbol{a_0 = a}$ և $\boldsymbol{b_0 = b}$:

Երբ $\boldsymbol{z}$ կոմպլեքս թիվը գրվում է $\boldsymbol{a + bi}$ տեսքով, ապա $\boldsymbol{a}$ թիվը կոչվում է $\boldsymbol{z}$ թվի **իրական մաս**, իսկ $\boldsymbol{bi}$ թիվը՝ նրա **կեղծ մաս**: $\boldsymbol{a + bi}$ տեսքով գրված կոմպլեքս թվերի գումարումը և բազմապատկումը կատարվում է

$$\boldsymbol{(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i},$$
$$\boldsymbol{(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i}$$

բանաձևերին համաձայն, հակադիր թիվը գտնվում է $\boldsymbol{-(a + bi) = (-a) + (-b)i}$ բանաձևով, իսկ հակադարձը՝

$$\boldsymbol{(a + bi)^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} i}$$

բանաձևով, որտեղ $\boldsymbol{a^2 + b^2 \neq 0}$: Վերջինս կարիք չկա հիշել: Այն կարելի է հեշտությամբ դուրս բերել՝ $\boldsymbol{(a + bi)^{-1}}$ թիվը բազմապատ-կելով $\boldsymbol{(a - bi)^{-1}(a - bi) = 1}$ թվով.

$$\boldsymbol{(a + bi)^{-1} = (a + bi)^{-1}(a - bi)^{-1}(a - bi) = \left((a - bi)(a + bi)\right)^{-1}(a - bi) =}$$
$$\boldsymbol{= \left(a^2 + b^2\right)^{-1}(a - bi) = \frac{1}{a^2 + b^2}(a - bi) = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} i}:$$

$\boldsymbol{(a - bi)}$ թիվը կոչվում է $\boldsymbol{z = a + bi}$ թվին **համալուծ թիվ** և նշանակվում է $\boldsymbol{\bar{z}}$ գրությամբ: Ակնհայտ է, որ $\boldsymbol{\bar{z}}$ թվին համալուծ թիվը կլինի $\boldsymbol{z}$ թիվը, այսինքն՝ կարելի է խոսել $\boldsymbol{z}$ և $\boldsymbol{\bar{z}}$ համալուծ թվերի զույգի մասին: Պարզ է, որ եթե $\boldsymbol{z = \bar{z}}$, ապա $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}$, և հակառակը:

2.1. *Հատկություն:*

1) Համալուծ կոմպլեքս թվերի գումարը և արտադրյալը հանդիսանում են իրական թվեր:

2) Ցանկացած $\boldsymbol{z_1}$ և $\boldsymbol{z_2}$ կոմպլեքս թվերի համար

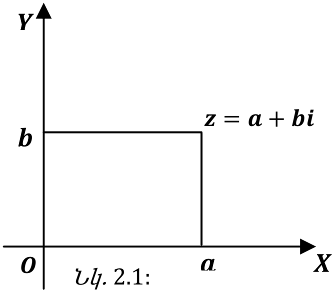
$$\boldsymbol{\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}} \quad \text{և} \quad \boldsymbol{\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}}:$$

§ 2.2. ԿՈՄՊԼԵՔՍ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆ: ԿՈՄՊԼԵՔՍ ԹՎԵՐԻ ՀԵՏ ԿԱՏԱՐՎՈՂ ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՄԵԿՆԱԲԱՆՈՒՄԸ

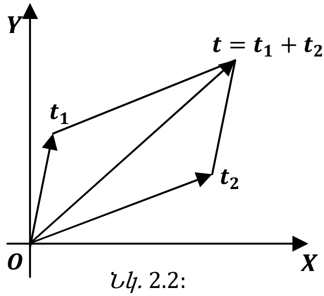
Հարթության վրա ընտրենք ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատային համակարգ՝ $\boldsymbol{X}$ աբսցիսների և $\boldsymbol{Y}$ օրդինատների առանցքներով: Դրանով հարթության յուրաքանչյուր կետի համապատասխանության մեջ է դրվում թվերի $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ զույգը՝ կազմված նրա $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ կոորդինատներից: Եվ հակառակը, յուրաքանչյուր $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ զույգի, որտեղ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$, համապատասխանում է հարթության՝ լիովին որոշված մեկ կետ:

Մյուս կողմից, յուրաքանչյուր $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{i}$ կոմպլեքս թիվ կարելի է դիտարկել որպես $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ կարգավորված զույգ, և հակառակը: Արդյունքում ստացվում է փոխմիարժեք համապատասխանություն կոմպլեքս թվերի $\mathbb{C}$ բազմության և հարթության կետերի բազմության միջև, որը թույլ է տալիս ցանկացած $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{i}$ կոմպլեքս թիվ նույնացնել հարթության այն կետի հետ, որն ընտրված կոորդինատային համակարգում ունի $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ կոորդինատները (նկար 2.1): **Կոմպլեքս հարթությունն** այն հարթությունն է, որի կետերը մենք դիտարկում ենք որպես կոմպլեքս թվեր: Ընդ որում աբսցիսների առանցքը կազմված է իրական թվերին համապատասխան կետերից, իսկ օրդինատների առանցքը՝ զուտ կեղծ թվերին համապատասխան կետերից: Աբսցիսների առանցքը կոչվում է **իրական առանցք**, իսկ օրդինատների առանցքը՝ **կեղծ առանցք**:

Հետագայում «$\boldsymbol{z}$ կոմպլեքս թվին համապատասխան կետը» արտահայտության փոխարեն կօգտագործենք «$\boldsymbol{z}$ կետը» արտահայտությունը:



Նկ. 2.1:



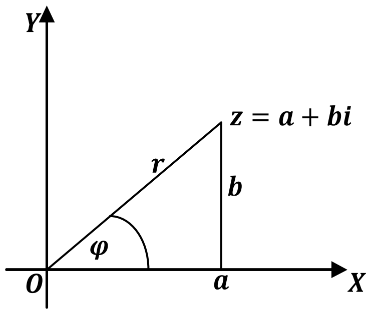
Նկ. 2.2:

Քանի որ հարթության կետերն, ի տարբերություն ուղղի կետերի, չունեն բնական հերթականություն, ուստի կոմպլեքս թվերի համար «մեծ» և «փոքր» հասկացությունները կորցնում են իրենց իմաստը։ Հետևաբար կոմպլեքս թվերը չի կարելի համեմատել։

ℂ բազմության նույնացումը կոմպլեքս հարթության հետ թույլ է տալիս երկրաչափորեն մեկնաբանել կոմպլեքս թվերի հետ կատարվող հիմնական գործողությունները՝ գումարումը և բազմապատկումը։ Դիցուք $\boldsymbol{z_1 = a_1 + b_1 i}$ և $\boldsymbol{z_2 = a_2 + b_2 i}$։ Այդ դեպքում $\boldsymbol{z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i}$։ Դիտարկենք $\boldsymbol{t_1, t_2}$ և $\boldsymbol{t}$ վեկտորները՝ պատկերված ուղղորդված հատվածներով, որոնց սկզբնակետը հանդիսանում է կոորդինատների սկզբնակետը, իսկ ծայրակետերը՝ համապատասխանաբար $\boldsymbol{(a_1, b_1)}$, $\boldsymbol{(a_2, b_2)}$, $\boldsymbol{(a_1 + a_2, b_1 + b_2)}$ կոորդինատներով կետերը (նկար 2.2)։ Այդ դեպքում պարզ է, որ $\boldsymbol{t = t_1 + t_2}$, այսինքն՝ կոմպլեքս թվերի գումարումը երկրաչափորեն կատարվում է վեկտորների գումարման կանոնի համաձայն (զուգահեռագծի կանոն)։

Կոմպլեքս թվերի բազմապատկման երկրաչափական իմաստը պարզ կդառնա միայն այն բանից հետո, երբ նրանց համար մտցնենք նոր գրառման ձև՝ կոմպլեքս թվերի եռանկյունաչափական տեսքը։

Կոմպլեքս հարթության $\boldsymbol{z = a + bi}$ կետը լիովին որոշվում է ինչպես $\boldsymbol{(a, b)}$ դեկարտյան կոորդինատներով, այնպես էլ բևեռային կոորդինատներով՝ $\boldsymbol{z}$ կետից մինչև կոորդինատների սկզբնակետն եղած $\boldsymbol{r}$ հեռավորությունը և աբսցիսների առանցքի դրական ուղղության ու կոորդինատների սկզբնակետից դեպի $\boldsymbol{z}$ կետը տանող ուղղության կազմած $\boldsymbol{\varphi}$ անկյունը (նկար 2.3)։



Նկ. 2.3։

$\boldsymbol{r}$ թիվը կոչվում է $\boldsymbol{z}$ կոմպլեքս թվի **մոդուլ** և նշանակվում է $|\boldsymbol{z}|$ գրությամբ։ Ակնհայտ է, որ $|\boldsymbol{z}| \geq \boldsymbol{0}$, ընդ որում $|\boldsymbol{z}| = \boldsymbol{0}$ միայն $\boldsymbol{z = 0}$ դեպքում։ $\boldsymbol{\varphi}$ անկյունը կոչվում է կոմպլեքս թվի **արգումենտ** և նշանակվում է $\arg \boldsymbol{z}$ գրությամբ։ Միակ կոմպլեքս թիվը, որի համար արգումենտն որոշված չէ, դա **0** թիվն է։ Սակայն այդ թիվը տրվում է $|\boldsymbol{z}| = \boldsymbol{0}$ հավասարությամբ։

Հետագայում, հարմար է համարել, որ $\mathbf{0}$ թվի արգումենտը կարող է լինել ցանկացած իրական թիվ: Զրոյից տարբեր ցանկացած կոմպլեքս թվի արգումենտ կարող է ընդունել անվերջ շատ արժեքներ, որոնք մեկը մյուսից տարբերվում են $\boldsymbol{2\pi}$ թվի ամբողջ պատիկներով, և կարող են լինել ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական, ընդ որում դրական անկյունները հաշվվում են ժամ սլաքին հակառակ ուղղությամբ:

Կոմպլեքս թվի արգումենտը հանդիսանում է իրական թվի նշանի բնական ընդհանրացումը: Իսկապես, դրական իրական թվի արգումենտը հավասար է $\mathbf{0}$, իսկ բացասական թվի արգումենտը՝ $\boldsymbol{\pi}$: Իրական առանցքի վրա կոորդինատների սկզբնակետից դուրս է գալիս միայն երկու ուղղություն և նրանց կարելի է տարբերել (+) և (−) նշաններով, մինչդեռ կոմպլեքս հարթության վրա $\boldsymbol{O}$ կետից դուրս եկող ուղղություններն շատ են և տարբերվում են արդեն անկյունով, որը նրանք կազմում են իրական առանցքի դրական ուղղության հետ:

Դիցուք $\boldsymbol{z = a + bi}$: Այդ դեպքում 2.3 նկարից պարզ է, որ $\boldsymbol{z}$ կոմպլեքս թվի մոդուլն որոշվում է

$$|\boldsymbol{z}| = \boldsymbol{r} = \sqrt{\boldsymbol{a^2 + b^2}} \tag{2.3}$$

բանաձևով, իսկ $\boldsymbol{z \neq 0}$ թվի արգումենտը՝

$$\cos\boldsymbol{\varphi} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{r}},\ \sin\boldsymbol{\varphi} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{r}} \tag{2.4}$$

հավասարություններից: Այստեղից

$$\boldsymbol{z = a + bi} = (\boldsymbol{r}\cos\boldsymbol{\varphi}) + (\boldsymbol{r}\sin\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{i} = \boldsymbol{r}(\cos\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{i}\sin\boldsymbol{\varphi}):$$

Այսպիսով, ցանկացած $\boldsymbol{z}$ կոմպլեքս թիվ կարելի է ներկայացնել

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{r}(\cos\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{i}\sin\boldsymbol{\varphi})$$

տեսքով, որտեղ $\boldsymbol{r} = |\boldsymbol{z}|$ և $\boldsymbol{\varphi} = \arg\boldsymbol{z}$:

Հակառակը, եթե $\boldsymbol{z = a + bi}$ կոմպլեքս թիվը գրված է $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{r_0}(\cos\boldsymbol{\varphi_0} + \boldsymbol{i}\sin\boldsymbol{\varphi_0})$ տեսքով, որտեղ $\boldsymbol{r_0}, \boldsymbol{\varphi_0} \in \mathbb{R}$ և $\boldsymbol{r_0} \geq \mathbf{0}$, ապա $\boldsymbol{r_0} = |\boldsymbol{z}|$ և $\boldsymbol{\varphi_0} = \arg\boldsymbol{z}$:

Այն դեպքում, երբ $\boldsymbol{r_0} = \mathbf{0}$, այսինքն՝ $\boldsymbol{z} = \mathbf{0}$, ապա այս պնդումն ակնհայտ է: Հետևաբար կարելի է համարել, որ $\boldsymbol{r_0} \neq \mathbf{0}$: Այդ դեպքում ունենք $\boldsymbol{r_0}\cos\boldsymbol{\varphi_0} = \boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{r_0}\sin\boldsymbol{\varphi_0} = \boldsymbol{b}$ հավասարությունները, որտեղից էլ $\boldsymbol{r_0} = \sqrt{\boldsymbol{a^2 + b^2}}$ և, (2.3) բանաձևի համաձայն, $\boldsymbol{r_0} = |\boldsymbol{z}|$: Իսկ (2.4) բանաձևից ստանում ենք, որ $\cos\boldsymbol{\varphi} = \cos\boldsymbol{\varphi_0}$ և $\sin\boldsymbol{\varphi} = \sin\boldsymbol{\varphi_0}$: Սակայն այդ դեպքում $\boldsymbol{\varphi_0} = \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{2\pi k}$, $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$, այսինքն՝ $\boldsymbol{\varphi_0} = \arg \boldsymbol{z}$:

$\boldsymbol{z}$ կոմպլեքս թվի $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{r}(\cos\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{i}\sin\boldsymbol{\varphi})$ գրառումը կոչվում է նրա **եռանկյունաչափական տեսք**:

Դիցուք $\boldsymbol{z_1}$ և $\boldsymbol{z_2}$ կոմպլեքս թվերը տրված են եռանկյունաչափական տեսքով.

$$\boldsymbol{z_1} = \boldsymbol{r_1}(\cos\boldsymbol{\varphi_1} + \boldsymbol{i}\sin\boldsymbol{\varphi_1}) \text{ և } \boldsymbol{z_2} = \boldsymbol{r_2}(\cos\boldsymbol{\varphi_2} + \boldsymbol{i}\sin\boldsymbol{\varphi_2}):$$

Այդ դեպքում

$$\boldsymbol{z_1}\boldsymbol{z_2} = [\boldsymbol{r_1}(\cos\boldsymbol{\varphi_1} + \boldsymbol{i}\sin\boldsymbol{\varphi_1})][\boldsymbol{r_2}(\cos\boldsymbol{\varphi_2} + \boldsymbol{i}\sin\boldsymbol{\varphi_2})] =$$
$$= \boldsymbol{r_1}\boldsymbol{r_2}[(\cos\boldsymbol{\varphi_1}\cos\boldsymbol{\varphi_2} - \sin\boldsymbol{\varphi_1}\sin\boldsymbol{\varphi_2}) + \boldsymbol{i}(\cos\boldsymbol{\varphi_1}\sin\boldsymbol{\varphi_2} + \sin\boldsymbol{\varphi_1}\cos\boldsymbol{\varphi_2})] =$$
$$= \boldsymbol{r_1}\boldsymbol{r_2}[\cos(\boldsymbol{\varphi_1} + \boldsymbol{\varphi_2}) + \boldsymbol{i}\sin(\boldsymbol{\varphi_1} + \boldsymbol{\varphi_2})]:$$

Մենք ստացանք $\boldsymbol{z_1}\boldsymbol{z_2}$ արտադրյալի գրառումն եռանկյունաչափական տեսքով.

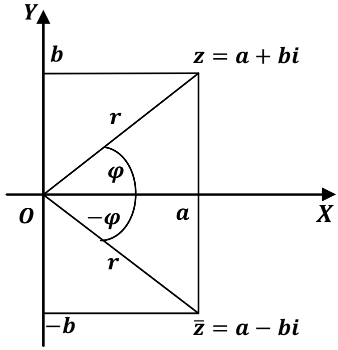
$$\boldsymbol{z_1}\boldsymbol{z_2} = \boldsymbol{r_1}\boldsymbol{r_2}[\cos(\boldsymbol{\varphi_1} + \boldsymbol{\varphi_2}) + \boldsymbol{i}\sin(\boldsymbol{\varphi_1} + \boldsymbol{\varphi_2})]:$$

Այսպիսով ճշմարիտ է հետևյալը.

2.2. ***Թեորեմ:*** Երկու՝ $\boldsymbol{z_1}$ և $\boldsymbol{z_2}$ կոմպլեքս թվերի բազմապատկման դեպքում նրանց մոդուլները բազմապատկվում են, իսկ արգումենտները՝ գումարվում.

$$|\boldsymbol{z_1}\boldsymbol{z_2}| = |\boldsymbol{z_1}| \cdot |\boldsymbol{z_2}|, \arg(\boldsymbol{z_1}\boldsymbol{z_2}) = \arg\boldsymbol{z_1} + \arg\boldsymbol{z_2}:$$

Քանի որ կոմպլեքս թվի և՛ մոդուլը, և՛ արգումենտն ունեն պարզ երկրաչափական մեկնաբանություն, ապա 2.2 թեորեմը հասկանալի է դարձնում՝ կոմպլեքս հարթության կետերի բազմապատկման երկրաչափական իմաստը:



Նկ. 2.4:

Դիցուք $\boldsymbol{z}$ և $\bar{\boldsymbol{z}}$ հանդիսանում են համալուծ կոմպլեքս թվեր: Եթե $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi}$, ապա $\bar{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{bi}$: Երկրաչափորեն $\boldsymbol{z}$ և $\bar{\boldsymbol{z}}$ հանդիսանում են իրական առանցքի նկատմամբ համաչափ կետեր (նկար 2.4): Այստեղից ստանում ենք

$$|\bar{\boldsymbol{z}}| = |\boldsymbol{z}| \quad \text{և} \quad \arg\bar{\boldsymbol{z}} = -\arg\boldsymbol{z}$$

հավասարությունները:

Այժմ փորձենք գտնել ցանկացած ոչ զրոյական $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{r}(\cos\boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{i}\sin\boldsymbol{\varphi})$ կոմպլեքս թվին հակադարձ $\boldsymbol{z}^{-1}$ կոմպլեքս թվի եռանկյունաչափական տեսքը: $\mathbb{C}$ բազմության ցանկացած ոչ զրոյական $\boldsymbol{z_1},\boldsymbol{z_2}\in\mathbb{C}$ տարրերի համար ունենք, որ

$$(\boldsymbol{z_1}\cdot\boldsymbol{z_2})^{-1}=\boldsymbol{z_1}^{-1}\cdot\boldsymbol{z_2}^{-1}:$$

Հետևաբար

$$\boldsymbol{z}^{-1}=\boldsymbol{z}^{-1}\cdot((\bar{\boldsymbol{z}})^{-1}\cdot\bar{\boldsymbol{z}})=(\boldsymbol{z}^{-1}\cdot(\bar{\boldsymbol{z}})^{-1})\cdot\bar{\boldsymbol{z}}=(\boldsymbol{z}\cdot\bar{\boldsymbol{z}})^{-1}\cdot\bar{\boldsymbol{z}}=$$
$$=[\boldsymbol{r}(\cos\boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{i}\sin\boldsymbol{\varphi})\cdot\boldsymbol{r}(\cos\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{i}\sin\boldsymbol{\varphi})]^{-1}\cdot\boldsymbol{r}(\cos\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{i}\sin\boldsymbol{\varphi})=$$
$$=[\boldsymbol{r}^{2}(\cos^{2}\boldsymbol{\varphi}+\sin^{2}\boldsymbol{\varphi})]^{-1}\cdot\boldsymbol{r}(\cos\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{i}\sin\boldsymbol{\varphi})=\boldsymbol{r}^{-2}\cdot\boldsymbol{r}(\cos\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{i}\sin\boldsymbol{\varphi})$$
$$=\boldsymbol{r}^{-1}(\cos(-\boldsymbol{\varphi})+\boldsymbol{i}\sin(-\boldsymbol{\varphi})):$$

Այսպիսով, $\boldsymbol{z}^{-1}=\boldsymbol{r}^{-1}(\cos(-\boldsymbol{\varphi})+\boldsymbol{i}\sin(-\boldsymbol{\varphi}))$:

Ստացված արդյունքները թույլ են տալիս պնդել, որ գոյություն ունի սերտ կապ՝ կոմպլեքս թվերի հետ կատարվող գործողությունների և հարթության հիմնական երկրաչափական ձևափոխությունների (զուգահեռ տեղաշարժեր, պտույտներ, ուղիղների նկատմամբ համաչափություններ և այլն) միջև:

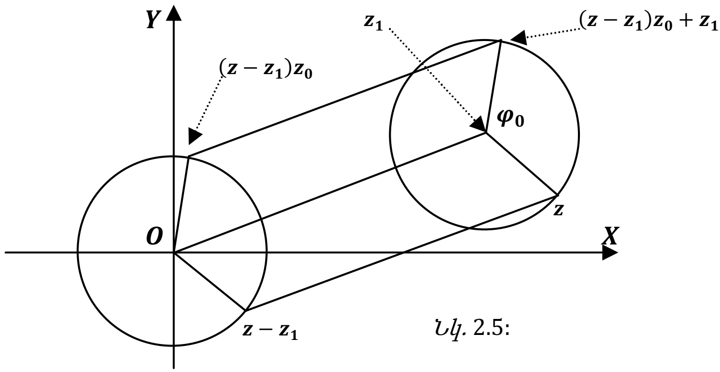
Ֆիքսենք որևէ $\boldsymbol{z_0}\in\mathbb{C}$ թիվ: Դիցուք կոմպլեքս հարթության $\boldsymbol{\psi_1}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ձևափոխությունը տեղի է ունենում $\boldsymbol{\psi_1}(\boldsymbol{z})=\boldsymbol{z}+\boldsymbol{z_0}$ կանոնով բոլոր $\boldsymbol{z}\in\mathbb{C}$ թվերի համար: Քանի որ կոմպլեքս հարթության կետերը գումարվում են վեկտորների գումարման կանոնի համաձայն, եզրակացնում ենք, որ $\boldsymbol{\psi_1}$ ձևափոխությունը հանդիսանում է հարթության զուգահեռ տեղաշարժ $\boldsymbol{z_0}$ վեկտորով:

Այժմ ենթադրենք, որ $|\boldsymbol{z_0}|=\boldsymbol{1}$, այսինքն՝ $\boldsymbol{z_0}=\cos\boldsymbol{\varphi_0}+\boldsymbol{i}\sin\boldsymbol{\varphi_0}$: Այդ դեպքում բոլոր $\boldsymbol{z}\in\mathbb{C}$ թվերի համար $\boldsymbol{\psi_2}(\boldsymbol{z})=\boldsymbol{z}\boldsymbol{z_0}$ կանոնով տրվող $\boldsymbol{\psi_2}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ձևափոխությունը հանդիսանում է $\boldsymbol{\varphi_0}=\arg\boldsymbol{z_0}$ անկյունով $\boldsymbol{O}$ կետի շուրջը հարթության պտույտ: Իսկապես, եթե $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{r}(\cos\boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{i}\sin\boldsymbol{\varphi})$, ապա $\boldsymbol{z}\boldsymbol{z_0}=\boldsymbol{r}(\cos(\boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{\varphi_0})+\boldsymbol{i}\sin(\boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{\varphi_0}))$:

Պարզվում է, որ ցանկացած $\boldsymbol{z_1}$ կետի շուրջը $\boldsymbol{\varphi_0}$ անկյունով հարթության $\boldsymbol{\psi}$ պտույտը կարելի է ստանալ $\overrightarrow{\boldsymbol{O}\boldsymbol{z_1}}$ վեկտորով $\boldsymbol{\psi_1}$ զուգահեռ տեղաշարժի և նույն $\boldsymbol{\varphi_0}$ անկյունով $\boldsymbol{O}$ կետի շուրջը $\boldsymbol{\psi_2}$ պտույտի միջոցով: Իսկապես, 2.5 նկարից երևում է, որ ցանկացած $\boldsymbol{z}\in\mathbb{C}$ համար

$$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{z})=\boldsymbol{\psi_1}\boldsymbol{\psi_2}\boldsymbol{\psi_1}^{-1}(\boldsymbol{z})=\boldsymbol{\psi_1}\boldsymbol{\psi_2}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z_1})=\boldsymbol{\psi_1}\big((\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z_1})\boldsymbol{z_0}\big)=$$
$$=(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z_1})\boldsymbol{z_0}+\boldsymbol{z_1},$$

որտեղ $\boldsymbol{z_0} = \cos \boldsymbol{\varphi_0} + \boldsymbol{i} \sin \boldsymbol{\varphi_0}$:



Նկ. 2.5:

Վերջապես, բոլոր $\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}$ թվերի համար $\boldsymbol{\psi_3}(\boldsymbol{z}) = \bar{\boldsymbol{z}}$ կանոնով տրր-վող $\boldsymbol{\psi_3}: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ձևափոխությունը հանդիսանում է իրական առանցքի նկատմամբ հարթության արտացոլում (համաչափություն):

§ 2.3. ԱՐՄԱՏՆԵՐ ԿՈՄՊԼԵՔՍ ԹՎԵՐԻՑ

Ցույց տանք, որ $\mathbb{C}$ բազմությունը $\mathbb{R}$ բազմության նկատմամբ ունի առավելություն. կամայական կոմպլեքս թվից կարելի է ցանկացած աստիճանի արմատ հանել:

Եթե $\boldsymbol{z}$ կոմպլեքս թիվը տրված է եռանկյունաչափական տեսքով, ապա ավելի հեշտ է այն բարձրացնել $\boldsymbol{n}$-րդ աստիճան.

$$[\boldsymbol{r}(\cos \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{i} \sin \boldsymbol{\varphi})]^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{r}^{\boldsymbol{n}}(\cos \boldsymbol{n\varphi} + \boldsymbol{i} \sin \boldsymbol{n\varphi}):$$

Այս բանաձևը կոչվում է **Մուավրի բանաձև**, որը հանդիսանում է եռանկյունաչափական տեսքով ներկայացված կոմպլեքս թվերի բազմապատկման ուղղակի հետևանք: Մուավրի բանաձևը թույլ է տալիս լուծել կոմպլեքս թվերից արմատների հանման խնդիրը:

Դիցուք $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{r}(\cos \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{i} \sin \boldsymbol{\varphi})$ հանդիսանում է կամայական կոմ-պլեքս թիվ, իսկ $\boldsymbol{n}$՝ բնական թիվ: Այդ դեպքում $\sqrt[n]{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{z_0}$ հավասա-րությունը համարժեք է $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z_0}^{\boldsymbol{n}}$ հավասարությանը: Եթե $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$, ապա պարզ է, որ $\boldsymbol{z_0} = \boldsymbol{0}$: Ուստի կարելի է ենթադրել, որ $\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0}$:

Այս պահին դեռ չգիտենք, թե գոյություն ունի արդյոք գոնե մեկ այնպիսի $z_0 \in \mathbb{C}$ թիվ, որ $z_0{}^n = z$: Ենթադրենք, որ այդպիսի $z_0 = r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)$ թիվ գոյություն ունի, այսինքն՝

$$[r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)]^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

կամ

$$r_0{}^n(\cos n\varphi_0 + i\sin n\varphi_0) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi):$$

Այստեղից, համաձայն նախորդ պարագրաֆի արդյունքների,

$$r_0{}^n = r \quad \text{և} \quad n\varphi_0 = \varphi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}:$$

Հետևաբար

$$r_0 = \sqrt[n]{r} \quad \text{և} \quad \varphi_0 = \frac{\varphi+2\pi k}{n},\ k \in \mathbb{Z}:$$

Քանի որ r հանդիսանում է դրական իրական թիվ, ապա $\sqrt[n]{r}$ արժեքը միարժեքորեն որոշվող դրական իրական թիվ է:

Այսպիսով, եթե z_0 թիվ գոյություն ունի, ապա այն պետք է ունենա հետևյալ

$$z_0 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right) \tag{2.5}$$

տեսքը, որտեղ k ընդունում է կամայական ամբողջ արժեք:

Օգտվելով Մուավրի բանաձևից՝ համոզվում ենք, որ $z_0{}^n = z$ ցանկացած $k \in \mathbb{Z}$ համար: Այնպես որ (2.5) բանաձևը ճշգրիտ տալիս է բոլոր n-աստիճանի արմատները z թվից, երբ k ընդունում է բոլոր ամբողջ արժեքները:

Սակայն k փոփոխականին վերագրելով տարբեր արժեքներ՝ միշտ չէ, որ ստանում ենք տարբեր արմատներ: Իսկապես, համաձայն մնացորդով բաժանման թեորեմի, կարելի է գրել $k = nq + t$, որտեղ $0 \le t \le n-1$: Այդ դեպքում

$$\frac{\varphi + 2\pi k}{n} = \frac{\varphi + 2\pi(nq+t)}{n} = \frac{\varphi + 2\pi t}{n} + 2\pi q,$$

այսինքն՝ արգումենտի արժեքը տրված k արժեքի դեպքում տարբերվում է արգումենտի արժեքից $k = t$ դեպքում՝ 2π թվին պատիկ թվով: Դա նշանակում է, որ (2.5) բանաձևում կարելի է սահմանափակվել միայն $k = 0, 1, \dots, n-1$ արժեքներով: Միևնույն ժամանակ k փոփոխականի այդպիսի արժեքների դեպքում ստացվում են տարբեր արմատներ, քանի որ նրանց արգումենտների տարբերությունը բացարձակ արժեքով փոքր է 2π մեծությունից:

Այսպիսով ճշմարիտ է հետևյալը.

2.3. *Թեորեմ:* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ կոմպլեքս թվից n-աստիճանի արմատի հանումը միշտ հնարավոր է և $z \neq 0$ դեպքում տալիս է n տարբեր արժեքներ, որոնք գտնվում են զրո կենտրոնով և $\sqrt[n]{r}$ շառավղով շրջանագծի վրա և բաժանում են այն n հավասար մասերի.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), k = 0, 1, \dots, n-1:$$

Դիտողություն: Կոմպլեքս թվից n-աստիճանի արմատի հանումը, առանց նրա եռանկյունաչափական տեսքն օգտագործելու, կապված է մեծ դժվարությունների հետ: Բացառություն է կազմում $n = 2$ դեպքը: Հարկավոր է նկատի ունենալ, որ $a + bi$ տեսքով գրված կոմպլեքս թվի եռանկյունաչափական տեսքը գտնելու խնդիրն ունի ճշգրիտ լուծում միայն եզակի դեպքերում: Դա բացատրվում է նրանով, որ ըստ տրված $\sin\varphi$ և $\cos\varphi$ արժեքների դժվար է որոշել φ արգումենտի ճշգրիտ արժեքը: Ուստի կոմպլեքս թվերից քառակուսի արմատներ գտնելու ստորև ներկայացված եղանակն ունի գործնական նշանակություն:

Դիցուք $z = a + bi \neq 0$ և $a_0 + b_0 i$ թիվը հանդիսանում է z թվի՝ քառակուսի արմատներից մեկը: Այդ դեպքում $(a_0 + b_0 i)^2 = a + bi$, որտեղից

$$\begin{cases} {a_0}^2 - {b_0}^2 = a \\ 2a_0 b_0 = b \end{cases} : \tag{2.6}$$

Եթե ստացված համակարգի յուրաքանչյուր հավասարություն բարձրացնենք քառակուսի և գումարենք իրար, ապա կստանանք, որ

$$\left({a_0}^2 - {b_0}^2\right)^2 + 4{a_0}^2{b_0}^2 = \left({a_0}^2 + {b_0}^2\right)^2 = a^2 + b^2$$

կամ

$${a_0}^2 + {b_0}^2 = +\sqrt{a^2 + b^2} :$$

Նշանն ընտրված է դրական, քանի որ a_0 և b_0 թվերն իրական են և, այդ պատճառով, հավասարության ձախ կողմը դրական է: Այսպիսով ունենք

$$\begin{cases} {a_0}^2 - {b_0}^2 = a \\ {a_0}^2 + {b_0}^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

համակարգը, որտեղից ստանում ենք

$$\begin{cases} {a_0}^2 = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right) \\ {b_0}^2 = \frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right) \end{cases} \text{ կամ } \begin{cases} a_0 = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)} \\ b_0 = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)} \end{cases} :$$

Ստացված արժեքները չի կարելի խմբավորել կամայական եղանակով, քանի որ, համաձայն (2.6) համակարգի երկրորդ հավասարության, $a_0 b_0$ արտադրյալի նշանը պետք է համընկնի b թվի նշանի հետ: Դա տալիս է $a_0 + b_0 i$ տեսքի երկու թիվ, որոնք իրարից տարբերվում են նշանով: Քանի որ արդեն գիտենք, որ $\sqrt{a + bi}$ արտահայտությունն ունի ճիշտ երկու արժեք, ապա գտնված երկու կոմպլեքս թվերը հանդիսանում են որոնելի արմատները:

Իրենից առանձնակի հետքրքրություն է ներկայացնում մեկ թվի n-աստիճանի արմատների դեպքը, որը պայմանավորված է հետևյալ փաստով.

2.4. *Թեորեմ:* Գոյություն ունի մեկից n-աստիճանի առնվազն մեկ ε արմատ այնպիսին, որ նրա $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^{n-1}$ աստիճանները զույգ առ զույգ տարբեր են և սպառում են մեկից n-աստիճանի բոլոր արմատները:

Ապացույց: Քանի որ $1 = \cos 0 + i \sin 0$, ապա համաձայն 2.3 թեորեմի, մեկից n-աստիճանի բոլոր արմատները տրվում են

$$\varepsilon_k = \left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i \sin\frac{2\pi k}{n}\right), k = 0, 1, \dots, n-1,$$

բանաձևով: Մուավրի բանաձևից հետևում է, որ

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n} = \varepsilon_1,$$

որից էլ կունենանք $\varepsilon^k = \varepsilon_k$ բոլոր $k = 0, 1, \dots, n-1$ համար: ■

Վերջին թեորեմում նկարագրված մեկից n-աստիճանի ε արմատը կոչվում է **մեկից n-աստիճանի նախնական արմատ**:

Հետևյալ թեորեմը թույլ է տալիս գտնել մեկից n-աստիճանի նախնական արմատները:

2.5. ***Թեորեմ:*** Եթե $\boldsymbol{\varepsilon}$ հանդիսանում է մեկից $\boldsymbol{n}$-աստիճանի նախնական արմատ, ապա $\boldsymbol{\varepsilon^k}$ թիվը կլինի մեկից $\boldsymbol{n}$-աստիճանի նախնական արմատ այն և միայն այն դեպքում, երբ $\boldsymbol{k}$ և $\boldsymbol{n}$ թվերը փոխադարձաբար պարզ են, այսինքն՝ $(\boldsymbol{k},\boldsymbol{n}) = \mathbf{1}$:

Ապացույց: Դիցուք $\boldsymbol{\varepsilon^k}$ հանդիսանում է մեկից $\boldsymbol{n}$-աստիճանի նախնական արմատ: Ցույց տանք, որ $(\boldsymbol{k},\boldsymbol{n}) = \mathbf{1}$: Ենթադրենք հակառակը՝ $(\boldsymbol{k},\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{d} > \mathbf{1}$: Այդ դեպքում $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{dk_1}$, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{dn_1}$ և

$$\left(\boldsymbol{\varepsilon^k}\right)^{\boldsymbol{n_1}} = \boldsymbol{\varepsilon^{kn_1}} = \boldsymbol{\varepsilon^{k_1dn_1}} = \boldsymbol{\varepsilon^{k_1n}} = (\boldsymbol{\varepsilon^n})^{\boldsymbol{k_1}} = \mathbf{1}:$$

Քանի որ $\boldsymbol{n_1} < n$ և $\left(\boldsymbol{\varepsilon^k}\right)^{\mathbf{0}} = \mathbf{1}$, ապա $\left(\boldsymbol{\varepsilon^k}\right)^{\mathbf{0}}, \left(\boldsymbol{\varepsilon^k}\right)^{\mathbf{1}}, \dots, \left(\boldsymbol{\varepsilon^k}\right)^{\boldsymbol{n-1}}$ թվերի մեջ կան կրկնություններ, որը նշանակում է, որ նրանք չեն սպառում մեկից $\boldsymbol{n}$-աստիճանի բոլոր $\boldsymbol{n}$ արմատները: Վերջինս հակասում է $\boldsymbol{\varepsilon^k}$ թվի՝ մեկից $\boldsymbol{n}$-աստիճանի նախնական արմատ լինելուն:

Հակառակը, դիցուք $(\boldsymbol{k},\boldsymbol{n}) = \mathbf{1}$: Ապացուցենք, որ այդ դեպքում $\boldsymbol{\varepsilon^k}$ թիվը $\boldsymbol{n}$-աստիճանի նախնական արմատ է մեկից: Ենթադրենք, որ դա այդպես չէ: Այդ դեպքում $\left(\boldsymbol{\varepsilon^k}\right)^{\mathbf{0}}, \left(\boldsymbol{\varepsilon^k}\right)^{\mathbf{1}}, \dots, \left(\boldsymbol{\varepsilon^k}\right)^{\boldsymbol{n-1}}$ թվերի մեջ պետք է կրկնություններ լինեն, օրինակ, $\left(\boldsymbol{\varepsilon^k}\right)^{\boldsymbol{s}} = \left(\boldsymbol{\varepsilon^k}\right)^{\boldsymbol{t}}$, որտեղ $\mathbf{0} \le \boldsymbol{s} < \boldsymbol{t} \le \boldsymbol{n} - \mathbf{1}$: Վերջին հավասարությունը կարելի է գրել $\left(\boldsymbol{\varepsilon^k}\right)^{\boldsymbol{t-s}} = \boldsymbol{\varepsilon^{k(t-s)}} = \mathbf{1}$ տեսքով: Սակայն այդ դեպքում $\boldsymbol{k(t-s)}$ թիվը պետք է բաժանվի $\boldsymbol{n}$ վրա: Իսկապես, ըստ մնացորդով բաժանման թեորեմի, $\boldsymbol{k(t-s)} = \boldsymbol{nq} + \boldsymbol{r}$, որտեղ $\mathbf{0} \le \boldsymbol{r} \le \boldsymbol{n} - \mathbf{1}$: Հետևաբար

$$\boldsymbol{\varepsilon^{k(t-s)}} = \boldsymbol{\varepsilon^{nq+r}} = (\boldsymbol{\varepsilon^n})^{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{\varepsilon^r} = \boldsymbol{\varepsilon^r},$$

և քանի որ $\boldsymbol{\varepsilon^{k(t-s)}} = \mathbf{1}$, ապա $\boldsymbol{\varepsilon^r} = \mathbf{1}$: Թեորեմի պայմանի համաձայն $\boldsymbol{\varepsilon}$ հանդիսանում է $\boldsymbol{n}$-աստիճանի նախնական արմատ մեկից և $\boldsymbol{\varepsilon^0} = \mathbf{1}$: Դա նշանակում է, որ $\boldsymbol{r} = \mathbf{0}$, այսինքն $\boldsymbol{k(t-s)}$ թիվը բաժանվում է $\boldsymbol{n}$ վրա: Բայց $(\boldsymbol{k},\boldsymbol{n}) = \mathbf{1}$: Ուստի $(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{s})$ թիվն է բաժանվում $\boldsymbol{n}$ վրա, որը հնարավոր չէ $\mathbf{0} < \boldsymbol{t} - \boldsymbol{s} < \boldsymbol{n}$ պայմանի համաձայն: ■

Այսպիսով, ըստ 2.5 թեորեմի, մեկից $\boldsymbol{n}$-աստիճանի նախնական արմատների քանակը հավասար է $\boldsymbol{n}$ թվից փոքր և $\boldsymbol{n}$ թվի հետ փոխադարձաբար պարզ դրական ամբողջ թվերի քանակին, որը հավասար է $\boldsymbol{\varphi(n)}$ արժեքին (Էյլերի ֆունկցիա):

ԳԼՈՒԽ 3

ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐ

§ 3.1. ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐ: ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ՀԵՏ

Դիցուք $\boldsymbol{P}$ հանդիսանում է $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ թվային բազմություններից որևէ մեկը: Այդ դեպքում $\boldsymbol{P}$ բազմության տարրերով **բազմանդամ** կոչվում է

$$\boldsymbol{f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i}$$

տեսքի արտահայտությունը, որտեղ $\boldsymbol{n}$՝ ոչ բացասական ամբողջ թիվ է, $\boldsymbol{a_i}$ գործակիցները ($\boldsymbol{0 \le i \le n}$)՝ $\boldsymbol{P}$ բազմության տարրեր են, իսկ $\boldsymbol{x}$՝ որևէ սիմվոլ է, որը չի պատկանում $\boldsymbol{P}$ բազմությանը և կոչվում է փոփոխական կամ անհայտ $\boldsymbol{P}$ բազմության վրա:

Այն դեպքերում, երբ կոնտեքստից պարզ է, թե որ փոփոխականը նկատի ունենք, $\boldsymbol{f(x)}$ բազմանդամի նշանակման համար կօգտագործենք $\boldsymbol{f}$ սիմվոլը: Հարմարության համար կհամարենք, որ $\boldsymbol{a_i x^i}$ անդամը, երբ $\boldsymbol{a_i = 0}$, պարտադիր չէ գրի առնել: Մասնավորապես, վերևում գրված $\boldsymbol{f(x)}$ բազմանդամը կարելի է գրել

$$\boldsymbol{f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + 0 \cdot x^{n+1} + \cdots + 0 \cdot x^{n+h}}$$

համարժեք տեսքով, որտեղ $\boldsymbol{h} \in \mathbb{N}$: Այդ իսկ պատճառով $\boldsymbol{P}$ բազմության տարրերով երկու՝ $\boldsymbol{f(x)}$ և $\boldsymbol{g(x)}$ բազմանդամների համեմատության դեպքում կարելի է ենթադրել, որ նրանք երկուսն էլ պարունակում են $\boldsymbol{x}$ փոփոխականի միևնույն աստիճանները: Այսպիսով, $\boldsymbol{P}$ բազմության տարրերով

$$\boldsymbol{f(x) = \textstyle\sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i} \quad \text{և} \quad \boldsymbol{g(x) = \textstyle\sum_{i=0}^{n} b_i\, x^i}$$

բազմանդամները համարվում են հավասար այն և միայն այն դեպքում, երբ $\boldsymbol{a_i = b_i}$ բոլոր $\boldsymbol{i = 0, 1, 2, \ldots, n}$ համար:

Այժմ սահմանենք բազմանդամների գումար և արտադրյալ գործողությունները: $\boldsymbol{P}$ բազմության տարրերով $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{x}^i$ և $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{b}_i \boldsymbol{x}^i$ բազմանդամների գումարը սահմանվում է

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=0}^{n} (\boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{b}_i)\boldsymbol{x}^i$$

հավասարությամբ, իսկ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=0}^{m} \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{x}^i$ և $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{b}_j \boldsymbol{x}^j$ բազմանդամների արտադրյալը՝

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=0}^{m+n} \boldsymbol{c}_k \boldsymbol{x}^k$$

հավասարությամբ, որտեղ

$$\boldsymbol{c}_k = \sum_{\substack{i+j=k \\ 0\le i\le m \\ 0\le j\le n}} \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{b}_j = \boldsymbol{a}_0\boldsymbol{b}_k + \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_{k-1} + \cdots + \boldsymbol{a}_{k-1}\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{a}_k\boldsymbol{b}_0:$$

$\boldsymbol{P}$ բազմության տարրերով բոլոր բազմանդամների բազմությունը նշանակենք $\boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}]$: Բազմանդամը, որի բոլոր գործակիցները հավասար են զրոյի, կանվանենք **զրոյական բազմանդամ** և կնշանակենք $\boldsymbol{O}(\boldsymbol{x})$ կամ $\boldsymbol{0}$ սիմվոլներով: Համատեքստից միշտ պարզ կլինի, թե $\boldsymbol{0}$ սիմվոլը նշանակում է $\boldsymbol{P}$ բազմության զրոյական տարրը, թե՝ $\boldsymbol{O}(\boldsymbol{x})$ զրոյական բազմանդամը:

Բազմանդամների գումար գործողությունը տեղափոխելի (կոմուտատիվ) է և զուգորդական (ասոցիատիվ), այսինքն՝

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

և

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})\big) = \big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\big) + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}):$$

Դա անմիջապես հետևում է $\boldsymbol{P}$ բազմության տարրերի գումար գործողության համապատասխան հատկություններից, քանի որ փոփոխականի յուրաքանչյուր աստիճանի դեպքում գործակիցները գումարվում են առանձին-առանձին:

Բազմանդամների բազմապատկում գործողության

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

կոմուտատիվությունը հետևում է $\boldsymbol{P}$ բազմության տարրերի բազմապատկման կոմուտատիվությունից և այն փաստից, որ բազմանդամների բազմապատկման սահմանման մեջ $\boldsymbol{f(x)}$ և $\boldsymbol{g(x)}$ արտադրիչների գործակիցներն օգտագործվում են հավասարապես: Բազմապատկման

$$\boldsymbol{f(x)[g(x)h(x)] = [f(x)g(x)]h(x)}$$

ասոցիատիվությունն ապացուցվում է հետևյալ կերպ. եթե

$$\boldsymbol{f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n,\ \ a_n \neq 0,}$$
$$\boldsymbol{g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_sx^s,\ \ b_s \neq 0,}$$
$$\boldsymbol{h(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_tx^t,\ \ c_t \neq 0,}$$

ապա $\boldsymbol{x}$ փոփոխականի $\boldsymbol{i}$-րդ, $\boldsymbol{i = 0, 1, \ldots, n + s + t}$, աստիճանի գործակիցը $\boldsymbol{[f(x)g(x)]h(x)}$ բազմանդամում կհանդիսանա

$$\boldsymbol{\sum_{j+m=i}\left(\sum_{k+l=j} a_k\, b_l\right)c_m = \sum_{k+l+m=i} a_k\, b_l c_m}$$

թիվը, իսկ $\boldsymbol{f(x)[g(x)h(x)]}$ արտադրյալում՝ նրան հավասար

$$\boldsymbol{\sum_{k+j=t} a_k\left(\sum_{l+m=j} b_l\, c_m\right) = \sum_{k+l+m=i} a_k\, b_l c_m}$$

թիվը: Վերջապես, բազմանդամների

$$\boldsymbol{[f(x) + g(x)]h(x) = f(x)h(x) + g(x)h(x)}$$

բաշխական կանոնը հետևում է

$$\boldsymbol{\sum_{k+l=i} (a_k + b_k)\, c_l = \sum_{k+l=i} a_k\, c_l + \sum_{k+l=i} b_k\, c_l}$$

հավասարությունից, քանի որ այդ հավասարության ձախ մասը հանդիսանում է $\boldsymbol{x^i}$ գործակիցը $\boldsymbol{[f(x) + g(x)]h(x)}$ բազմանդամում, իսկ աջ մասը՝ փոփոխականի նույն $\boldsymbol{i}$-րդ աստիճանի գործակիցը $\boldsymbol{f(x)h(x) + g(x)h(x)}$ բազմանդամում:

3.1. *Սահմանում:* Դիցուք $\boldsymbol{f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i}$ հանդիսանում է $\boldsymbol{P}$ բազմության տարրերով ոչ զրոյական բազմանդամ: Ուրեմն կարելի է ենթադրել, որ $\boldsymbol{a_n \neq 0}$: Այդ դեպքում $\boldsymbol{a_n}$

կոչվում է $\boldsymbol{f(x)}$ բազմանդամի **ավագ գործակից**, $\boldsymbol{a_0}$՝ նրա **հաստատուն** կամ **ազատ անդամ**, իսկ $\boldsymbol{n}$՝ նրա **աստիճան** (վերջինս նշանակվում է $\boldsymbol{n} = \deg(\boldsymbol{f(x)}) = \deg(\boldsymbol{f})$ գրությամբ): Հարմարության համար կհամարենք, որ $\deg(\boldsymbol{O(x)}) = \deg(\boldsymbol{0}) = -\infty$: Բազմանդամները, որոնց աստիճանները $\leq \boldsymbol{0}$, կոչվում են **հաստատուն բազմանդամներ** կամ **հաստատուններ**: Եթե $\boldsymbol{f(x)}$ բազմանդամի ավագ գործակիցը հավասար է $\boldsymbol{1}$, ապա $\boldsymbol{f(x)}$ բազմանդամը կոչվում է **նորմավորված**:

3.2. *Հատկություն:* Դիցուք $\boldsymbol{f(x), g(x)} \in \boldsymbol{P[x]}$: Այդ դեպքում

$$\deg(\boldsymbol{f(x)} + \boldsymbol{g(x)}) \leq \max\left(\deg(\boldsymbol{f(x)}), \deg(\boldsymbol{g(x)})\right),$$

$$\deg(\boldsymbol{f(x)g(x)}) = \deg(\boldsymbol{f(x)}) + \deg(\boldsymbol{g(x)}):$$

Ապացույցը կատարել ինքնուրույն: ■

Դիցուք $\boldsymbol{f(x), g(x)} \in \boldsymbol{P[x]}$: Այդ դեպքում ընդունված է ասել, որ $\boldsymbol{g(x)}$ բազմանդամը բաժանում է $\boldsymbol{f(x)}$ բազմանդամը (կամ $\boldsymbol{f(x)}$ բազմանդամը բաժանվում է $\boldsymbol{g(x)}$ բազմանդամի վրա), եթե գոյություն ունի այնպիսի $\boldsymbol{h(x)} \in \boldsymbol{P[x]}$ բազմանդամ, որ $\boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{g(x)h(x)}$: Այդ դեպքում ասում են նաև, որ $\boldsymbol{g(x)}$ հանդիսանում է $\boldsymbol{f(x)}$ բազմանդամի բաժանարար, իսկ $\boldsymbol{f(x)}$ պատիկ է $\boldsymbol{g(x)}$ բազմանդամին: Իսկ եթե $\boldsymbol{g(x), h(x)} \in \boldsymbol{P[x]}$ բազմանդամների $\boldsymbol{g(x)} - \boldsymbol{h(x)}$ տարբերությունը բաժանվում է $\boldsymbol{f(x)}$ բազմանդամի վրա, ապա այդ փաստն ընդունված է գրել $\boldsymbol{g(x)} \equiv \boldsymbol{h(x)}(mod\ \boldsymbol{f(x)})$ տեսքով:

Նկատենք, որ $\boldsymbol{P[x]}$ բազմության բազմանդամների բազմապատկման դեպքում միավոր տարրի դերը կատարում է $\boldsymbol{1}$ հաստատուն բազմանդամը: Մյուս կողմից $\boldsymbol{f(x)}$ բազմանդամի համար հակադարձ $\boldsymbol{f^{-1}(x)}$ բազմանդամ գոյություն ունի,

$$\boldsymbol{f(x)} \cdot \boldsymbol{f^{-1}(x)} = \boldsymbol{f^{-1}(x)} \cdot \boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{1}, \tag{3.1}$$

այն և միայն այն դեպքում, երբ $\boldsymbol{f(x)}$ հանդիսանում է հաստատուն ոչ զրոյական բազմանդամ: Իրոք, եթե $\boldsymbol{f(x)}$ հանդիսանում է զրոյից տարբեր $\boldsymbol{a}$ տարրը, ապա նրա համար հակադարձ բազմանդամ հանդիսանում է $\boldsymbol{a^{-1}}$ տարրը: Իսկ եթե $\deg(\boldsymbol{f(x)}) = \boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{1}$, ապա $\boldsymbol{f^{-1}(x)}$ բազմանդամի գոյության դեպքում (3.1) հավասարման ձախ մասի աստիճանը կլիներ $\geq \boldsymbol{n}$, իսկ աջ մասում գտնվում է զրոյական աստիճանի բազմանդամ: Այստեղից հետևում է, որ բազմանդամների բազմապատկման հակադարձ գործողությունը՝ բաժանումը, գոյություն չունի:

Ինչպես ամբողջ թվերի բազմությունում, այնպես էլ բազմանդամների $\boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}]$ բազմությունում տեղի ունի մնացորդով բաժանում, երբ $\boldsymbol{P}$ ամենուրեք հանդիսանում է $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ թվային բազմություններից որևէ մեկը:

3.3. *Թեորեմ (Մնացորդով բաժանման թեորեմը):* Դիցուք $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}]$ հանդիսանում է ոչ զրոյական բազմանդամ: Այդ դեպքում յուրաքանչյուր $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}]$ բազմանդամի համար գոյություն ունեն միարժեքորեն որոշվող այնպիսի $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}]$ բազմանդամներ, որ

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}), \tag{3.2}$$

որտեղ $\deg\big(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})\big) < \deg\big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\big)$ կամ $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$:

Ապացույց: Նախ ապացուցենք $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})$ և $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամների գոյությունը: Եթե $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$, ապա (3.2) հավասարությունը տեղի ունի $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ դեպքում: Համարենք, որ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}$ և $\deg\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\big) = \boldsymbol{n}$, $\deg\big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\big) = \boldsymbol{s}$, այնպես որ

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a_0} + \boldsymbol{a_1}\boldsymbol{x} + \cdots + \boldsymbol{a_n}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}},\ \ \boldsymbol{a_n} \neq \boldsymbol{0},$$
$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b_0} + \boldsymbol{b_1}\boldsymbol{x} + \cdots + \boldsymbol{b_s}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{s}},\ \ \boldsymbol{b_s} \neq \boldsymbol{0}:$$

Կիրառենք ինդուկցիա ըստ $\boldsymbol{n}$ թվի: Դիցուք $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$: Եթե նաև $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{0}$, ապա $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a_0}$, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b_0}$, և որպես $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})$ ու $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})$ կարող ենք վերցնել $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a_0}\boldsymbol{b_0}^{-\boldsymbol{1}}$, $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$: Իսկ եթե $\boldsymbol{s} > \boldsymbol{0}$, ապա (3.2) հավասարությունը ճշմարիտ է $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ դեպքում:

Այժմ ենթադրենք $\boldsymbol{n} > \boldsymbol{0}$ և թեորեմի պնդումը տեղի ունի բոլոր $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամների համար, որոնց աստիճանը փոքր է $\boldsymbol{n}$ թվից: Եթե $\boldsymbol{n} < \boldsymbol{s}$, ապա այդ դեպքում կարող ենք վերցնել $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ և $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$: Դիտարկենք $\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{s}$ դեպքը: Ակնհայտ է, որ $\big(\boldsymbol{a_n}\boldsymbol{b_s}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{s}}\big)\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամի ավագ գործակիցը համընկնում է $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամի ավագ գործակցի հետ: Այդ իսկ պատճառով

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \big(\boldsymbol{a_n}\boldsymbol{b_s}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{s}}\big)\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{f_1}(\boldsymbol{x})$$

տարբերության աստիճանը փոքր է $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամի $\deg\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\big) = \boldsymbol{n}$ աստիճանից: Հետևաբար $\boldsymbol{f_1}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամի նկատմամբ կարող ենք կիրառել ինդուկցիայի ենթադրությունը, որի համաձայն կգտնվեն այնպիսի $\boldsymbol{q_1}(x), \boldsymbol{r_1}(x) \in \boldsymbol{P}[x]$ բազմանդամներ, որ

$$\boldsymbol{f_1}(x) = \boldsymbol{q_1}(x)\boldsymbol{g}(x) + \boldsymbol{r_1}(x)$$

և $\deg(\boldsymbol{r_1}(x)) < \deg(\boldsymbol{g}(x))$ կամ $\boldsymbol{r_1}(x) = \boldsymbol{0}$: Ուստի

$$\boldsymbol{f}(x) = (\boldsymbol{a_n}\boldsymbol{b_s}^{-1}x^{n-s})\boldsymbol{g}(x) + \boldsymbol{f_1}(x) = \left(\boldsymbol{a_n}\boldsymbol{b_s}^{-1}x^{n-s} + \boldsymbol{q_1}(x)\right)\boldsymbol{g}(x) + \boldsymbol{r_1}(x),$$

այսինքն՝ $\boldsymbol{q}(x) = \boldsymbol{a_n}\boldsymbol{b_s}^{-1}x^{n-s} + \boldsymbol{q_1}(x)$ և $\boldsymbol{r}(x) = \boldsymbol{r_1}(x)$: Պարզ է նաև, որ $\boldsymbol{q}(x), \boldsymbol{r}(x) \in \boldsymbol{P}[x]$: Թեորեմի գոյության մասն ապացուցված է:

Այժմ ապացուցենք $\boldsymbol{q}(x)$ և $\boldsymbol{r}(x)$ բազմանդամների միակությունը: Դիցուք $\boldsymbol{f}(x)$ բազմանդամը ներկայացվում է նաև

$$\boldsymbol{f}(x) = \boldsymbol{q_1}(x)\boldsymbol{g}(x) + \boldsymbol{r_1}(x)$$

տեսքով, որտեղ $\deg(\boldsymbol{r_1}(x)) < \deg(\boldsymbol{g}(x))$ կամ $\boldsymbol{r_1}(x) = \boldsymbol{0}$: Այդ դեպքում ունենք, որ

$$(\boldsymbol{q}(x) - \boldsymbol{q_1}(x))\boldsymbol{g}(x) = \boldsymbol{r_1}(x) - \boldsymbol{r}(x):$$

Այս հավասարության աջ մասի աստիճանը փոքր է $\boldsymbol{g}(x)$ բազմանդամի աստիճանից: Մյուս կողմից, եթե $\boldsymbol{q}(x) - \boldsymbol{q_1}(x) \neq \boldsymbol{0}$, ապա հավասարության ձախ մասի աստիճանը մեծ կամ հավասար է $\boldsymbol{g}(x)$ բազմանդամի աստիճանից: Այդ իսկ պատճառով $\boldsymbol{q}(x) - \boldsymbol{q_1}(x) = \boldsymbol{0}$ կամ $\boldsymbol{q}(x) = \boldsymbol{q_1}(x)$ և, հետևաբար, $\boldsymbol{r}(x) = \boldsymbol{r_1}(x)$, ինչ և պահանջվում էր ապացուցել: Թեորեմի ապացույցն ամբողջությամբ ավարտված է: ■

Վերջին թեորեմում $\boldsymbol{q}(x)$ բազմանդամը կոչվում է՝ $\boldsymbol{f}(x)$ բազմանդամը $\boldsymbol{g}(x)$ բազմանդամի վրա բաժանելուց ստացված **քանորդ**, իսկ $\boldsymbol{r}(x)$՝ այդ բաժանման **մնացորդ**:

Ֆիքսված $\boldsymbol{f}(x)$ և $\boldsymbol{g}(x)$ բազմանդամների համար մնացորդով բաժանումը կատարվում է 3.3 թեորեմի ապացույցին համապատասխան: Միակ տարբերությունն այն է, որ ինդուկցիայի ենթադրությունը փոխարինվում է $\boldsymbol{f}(x)$ բազմանդամից $\boldsymbol{f_1}(x)$ բազմանդամին՝ ինդուկցիայի անցման վերջավոր թվով կրկնություններին:

Նշենք բազմանդամների բաժանելիության մի քանի հիմնական հատկություններ, որոնք հետագայում կունենան բազմաթիվ կիրառություններ: Հատկությունների մեջ նշվող բոլոր բազմանդամները պատկանում են $\boldsymbol{P}[x]$ բազմությանը, երբ $\boldsymbol{P}$ հանդիսանում է $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ թվային բազմություններից որևէ մեկը:

3.4. *Հատկություն:*

1) Եթե $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ բաժանվում է $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ վրա, իսկ $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ բաժանվում է $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ վրա, ապա $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ բաժանվում է $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ վրա:

2) Եթե $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ և *$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամները բաժանվում են $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ վրա, ապա նրանց գումարը և տարբերությունը նույնպես բաժանվում են $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ վրա:*

3) Եթե $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ բաժանվում է $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ վրա, ապա ցանկացած $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամի համար $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ արտադրյալը բաժանվում է $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ վրա:

4) Եթե $\boldsymbol{f_1}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f_2}(\boldsymbol{x}), \dots, \boldsymbol{f_k}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամներից յուրաքանչյուրը բաժանվում է $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ վրա, ապա $\boldsymbol{f_1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g_1}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{f_2}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g_2}(\boldsymbol{x}) + \cdots + \boldsymbol{f_k}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g_k}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամը նույնպես բաժանվում է $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ վրա, որտեղ $\boldsymbol{g_1}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{g_2}(\boldsymbol{x}), \dots, \boldsymbol{g_k}(\boldsymbol{x})$ կամայական բազմանդամներ են:

5) Յուրաքանչյուր $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամ բաժանվում է զրո աստիճանի ցանկացած ոչ զրոյական բազմանդամի վրա:

Եթե $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{F}$ և $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, ապա $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}[\boldsymbol{a}^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]$:

6) Եթե $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ բաժանվում է $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ վրա, ապա $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ բաժանվում է $\boldsymbol{a}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ վրա, որտեղ $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{F}$ և $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$:

Ըստ պայմանի $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$, որտեղից էլ

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{a}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})][\boldsymbol{a}^{-1}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})]:$$

7) Միայն $\boldsymbol{a}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, տեսքի բազմանդամները և միայն նրանք են հանդիսանում $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամի բաժանարարներ, որոնց աստիճանը հավասար է $\deg(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$:

Իսկապես, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}^{-1}[\boldsymbol{a}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]$, այսինքն՝ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ բաժանվում է $\boldsymbol{a}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ վրա: Մյուս կողմից, եթե $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ բաժանվում է $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ վրա, ընդ որում $\deg(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})) = \deg(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$, ապա $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամը $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ վրա բաժանելիս ստացված քանորդի աստիճանը պետք է հավասար լինի զրոյի, այսինքն՝ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{F}$ և $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, որտեղից $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$:

8) Որպեսզի $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ և $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամները միաժամանակ բաժանվեն միմյանց վրա, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{F}$ և $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$:

Ապացույցը հետևում է նախորդ հատկությունից:

9) Երկու՝ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ և *$\boldsymbol{a}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{F}$ և $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, բազմանդամներից մեկի կամայական բաժանարար մյուսի համար նույնպես հանդիսանում է բաժանարար:*

Ապացույցը հետևում է (8) և (1) հատկություններից: ■

§ 3.2. ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ԱՄԵՆԱՄԵԾ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԲԱԺԱՆԱՐԱՐ

3.5. *Սահմանում:* $\boldsymbol{d(x)}$ բազմանդամը կոչվում է $\boldsymbol{f(x)}$ և $\boldsymbol{g(x)}$ բազմանդամների **ընդհանուր բաժանարար**, եթե այն բաժանարար է նրանցից յուրաքանչյուրի համար:

Քանի որ ցանկացած բազմանդամ բաժանվում է $\boldsymbol{P}$ բազմության կամայական ոչ զրոյական տարրի վրա, ապա $\boldsymbol{f(x)}$ և $\boldsymbol{g(x)}$ բազմանդամների ընդհանուր բաժանարարների մեջ կլինեն զրո աստիճանի (հաստատուն) բազմանդամներ: Եթե $\boldsymbol{f(x)}$ և $\boldsymbol{g(x)}$ բազմանդամները չունեն ուրիշ ընդհանուր բաժանարարներ, ապա նրանք կոչվում են փոխադարձաբար պարզ բազմանդամներ:

Նշենք նաև, որ համաձայն 3.4. (6) հատկության, եթե $\boldsymbol{d(x)}$ հանդիսանում է $\boldsymbol{f(x)}$ և $\boldsymbol{g(x)}$ բազմանդամների ընդհանուր բաժանարար, ապա այդպիսին է $\boldsymbol{ad(x)}$, $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{P}$ և $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, տեսքի ցանկացած բազմանդամ:

Նկատի ունենալով ամբողջ թվերի դեպքը՝ բնական կլիներ երկու բազմանդամների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը սահմանել որպես նրանց՝ ամենամեծ աստիճանի ընդհանուր բաժանարար: Սակայն այդ դեպքում հարց է առաջանում, թե այդպիսի բաժանարարները շատ չեն լինի, քանի որ երկու բազմանդամների աստիճանների հավասարությունը դեռ չի նշանակում, որ նրանք տարբերվում են միայն $\boldsymbol{P}$ բազմության ոչ զրոյական արտադրիչով: Ամբողջ թվերի համար ապացուցվել է, որ երկու ամբողջ թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը բաժանվում է նրանց ցանկացած ընդհանուր բաժանարարի վրա: Դա բնական է դարձնում հետևյալը.

3.6. *Սահմանում:* Երկու՝ միաժամանակ ոչ զրոյական $\boldsymbol{f(x)}$ և $\boldsymbol{g(x)}$ բազմանդամների **ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար** կոչվում է նրանց այն նորմավորված ընդհանուր բաժանարարը, որը բաժանվում է այդ բազմանդամների ցանկացած ընդհանուր բաժանարարի վրա: $\boldsymbol{f(x)}$ և $\boldsymbol{g(x)}$ բազմանդամների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը նշանակենք $\big(\boldsymbol{f(x)}, \boldsymbol{g(x)}\big)$ կամ $(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g})$ գրությամբ:

Դիտարկենք երկու բազմանդամների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարի գոյության հարցը: Թվերի դեպքում երկու ամբողջ թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարն որոշվում է Էվկլիդեսի ալգորիթմի միջոցով, որը հիմնվում է մնացորդով բաժանման թեորեմի վրա: Եվ քանի որ բազմանդամների համար նույնպես ապացուցված է նման թեորեմ, ապա Էվկլիդեսի ալգորիթմը կարելի է դիտարկել նաև $\boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}]$ բազմությունում:

3.7. *Լեմմա:* Եթե $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})$, ապա $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամների և $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամների ընդհանուր բաժանարարները համընկնում են: Մասնավորապես $\left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\right) = \left(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})\right)$:

Ապացույց: Դիցուք $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x})$ հանդիսանում է $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամների ընդհանուր բաժանարար: Այդ դեպքում $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f_1}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g_1}(\boldsymbol{x})$ և $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{f_1}(\boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{x})\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})]$, այսինքն՝ $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x})$ բաժանում է $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամը և, հետևաբար, հանդիսանում է $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամների ընդհանուր բաժանարար: Նմանապես $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամների ցանկացած ընդհանուր բաժանարար հանդիսանում է $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամների ընդհանուր բաժանարար: ■

Դիցուք $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ և $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ ոչ զրոյական բազմանդամներ են: Եթե $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ բաժանում է $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամը, ապա $\left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\right) = \boldsymbol{a}^{-1}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$, որտեղ $\boldsymbol{a}$ հանդիսանում է $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամի ավագ գործակիցը: Այժմ ենթադրենք, որ $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամը չի բաժանում $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամը: Բազմանդամների համար Էվկլիդեսի ալգորիթմը հետևյալն է: Բաժանելով $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամը $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամի վրա՝ ստանում ենք ինչ-որ $\boldsymbol{r_1}(\boldsymbol{x})$ ոչ զրոյական մնացորդ: Այնուհետև $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամը բաժանելով $\boldsymbol{r_1}(\boldsymbol{x})$ վրա՝ ստանում ենք ինչ-որ $\boldsymbol{r_2}(\boldsymbol{x})$ մնացորդ, և այսպես շարունակ: Քանի որ մնացորդների աստիճաններն անընդհատ նվազում են, ապա այդ հաջորդական բաժանումների շարքում պետք է հասնենք այնպիսի տեղի, որտեղ բաժանումից ստացված մնացորդը զրոյական է, այդ իսկ պատճառով, բաժանման պրոցեսը կկանգնի: Այդ պրոցեսի վերջին ոչ զրոյական $\boldsymbol{r_k}(\boldsymbol{x})$ մնացորդը, բազմապատկած $\boldsymbol{r_k}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամի ավագ գործակցով, հենց կհանդիսանա $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ և $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը:

Ապացույցի համար վերը նկարագրված պրոցեսը ներկայացնենք հետևյալ

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{q}_1(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{x}),\\
\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{q}_2(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{r}_2(\boldsymbol{x}),\\
\boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{r}_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{q}_3(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{r}_3(\boldsymbol{x}),\\
\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
\boldsymbol{r}_{k-2}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{r}_{k-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{q}_k(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{r}_k(\boldsymbol{x}),\\
\boldsymbol{r}_{k-1}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{r}_k(\boldsymbol{x})\boldsymbol{q}_{k+1}(\boldsymbol{x})
\end{gathered}
\tag{3.3}
$$

հավասարությունների շղթայով: Վերջին հավասարությունը ցույց է տալիս, որ $\boldsymbol{r}_k(\boldsymbol{x})$ հանդիսանում է $\boldsymbol{r}_{k-1}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամի բաժանարար, որից հետևում է $\left(\boldsymbol{r}_{k-1}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{r}_k(\boldsymbol{x})\right) = \boldsymbol{a}^{-1}\boldsymbol{r}_k(\boldsymbol{x})$, որտեղ $\boldsymbol{a}$ հանդիսանում է $\boldsymbol{r}_k(\boldsymbol{x})$ բազմանդամի ավագ գործակիցը: Վերևից ներքև դիտարկելով (3.3) հավասարությունները՝ ըստ 3.7 լեմմայի եզրակացնում ենք, որ

$$
\begin{gathered}
\left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\right) = \left(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{x})\right) = \left(\boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{r}_2(\boldsymbol{x})\right) = \cdots = \\
= \left(\boldsymbol{r}_{k-1}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{r}_k(\boldsymbol{x})\right) = \boldsymbol{a}^{-1}\boldsymbol{r}_k(\boldsymbol{x}):
\end{gathered}
$$

Ակնհայտ է, որ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ և $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամները փոխադարձաբար պարզ են այն և միայն այն դեպքում, երբ $\left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\right) = \boldsymbol{1}$:

3.8. *Օրինակ:* Դիցուք $\boldsymbol{P} = \mathbb{Q}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^3 - \boldsymbol{1}$ և $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{1}$: Գտնել $\left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\right)$:

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{x}^3 - \boldsymbol{1} = (\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{1})\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x} - \boldsymbol{1}),\\
\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{1} = (-\boldsymbol{x} - \boldsymbol{1})(-\boldsymbol{x} + \boldsymbol{1}) + \boldsymbol{2},\\
-\boldsymbol{x} - \boldsymbol{1} = \boldsymbol{2}\left(-\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\right):
\end{gathered}
$$

Վերջին ոչ զրոյական մնացորդը տվյալ Էվկլիդեսի ալգորիթմում հավասար է $\boldsymbol{2}$ հաստատուն բազմանդամին, հետևաբար $(\boldsymbol{x}^3 - \boldsymbol{1}\,, \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{1}) = \boldsymbol{1}$, այսինքն՝ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ և $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամները փոխադարձաբար պարզ են:

Դիտողություն: Էվկլիդեսի ալգորիթմը կիրառելով ամբողջ գործակիցներով բազմանդամների նկատմամբ՝ մենք, ընդհանրապես ասած, տրված բազմանդամները կդիտարկենք որպես ռացիոնալ գործակիցներով բազմանդամներ և գործողությունները կկատարենք բազմանդամների հետ, որոնց գործակիցները ռացիոնալ թվեր են: Սովորաբար դա հանգեցնում է մեծ հաշվարկների: Եվ որպեսզի էվկլիդեսի ալգորիթմում խուսափենք կոտորակային գործակիցներից, կարելի է ցանկացած բաժանելի բազմապատկել կամ բաժանարարը կրճատել կամայական ոչ զրոյական թվով: Այդ գործողությունները կարելի է կատարել ոչ միայն ինչ-որ հաջորդական բաժանում սկսելուց, այլ նաև հենց այդ բաժանման պրոցեսի ընթացքում: Հասկանալի է, որ դա կհանգեցնի քանորդի «աղավաղման», սակայն մեզ հետաքրքրող մնացորդները ձեռք կբերեն միայն ոչ զրոյական հաստատուն արտադրիչ, որը, ինչպես գիտենք, ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարի փնտրման դեպքում թույլատրվում է:

3.9. *Օրինակ:* Դիցուք $f(x)=x^4+3x^3-x^2-4x-3$ և $g(x)=3x^3+10x^2+2x-3$: Գտնել $\big(f(x),g(x)\big)$:

Բաժանենք $f(x)$ բազմանդամը $g(x)$ բազմանդամի վրա՝ նախապես $f(x)$ բազմանդամը բազմապատկելով 3-ով:

$$\begin{array}{r|l}
3x^4+9x^3-3x^2-12x-9 & 3x^3+10x^2+2x-3 \\ \cline{2-2}
3x^4+10x^3+2x^2-3x\phantom{{}-9} & x+1 \\ \cline{1-1}
-x^3-5x^2-9x-9 &
\end{array}$$

(բազմապատկում ենք (-3)-ով)

$$\begin{array}{r}
3x^3+15x^2+27x+27 \\
3x^3+10x^2+2x-3 \\ \hline
5x^2+25x+30
\end{array}$$

Այսպիսով, առաջին մնացորդը, 5-ով կրճատելուց հետո, կլինի $r_1(x)=x^2+5x+6$: Նրա վրա բաժանում ենք $g(x)$ բազմանդամը:

$$\begin{array}{r|c}
3x^3+10x^2+2x-3 & x^2+5x+6 \\ \cline{2-2}
3x^3+15x^2+18x\phantom{{}-3} & 3x-5 \\ \cline{1-1}
-5x^2-16x-3 & \\
-5x^2-25x-30 & \\ \cline{1-1}
9x+27 &
\end{array}$$

Երկրորդ մնացորդը, $\mathbf{9}$-ով կրճատելուց հետո, կլինի $\boldsymbol{r_2(x) = x + 3}$: Քանի որ $\boldsymbol{r_1(x) = r_2(x)(x + 2)}$, ապա $\boldsymbol{r_2(x)}$ կլինի այն վերջին մնացորդը, որի վրա ամբողջությամբ բաժանվում է նախորդ մնացորդը: Հետևաբար $\boldsymbol{(f(x), g(x)) = x + 3}$:

Ամբողջ թվերի ուսումնասիրության ժամանակ Էվկլիդեսի ալգորիթմից որպես հետևանք ստացանք, որ եթե $\boldsymbol{d} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, ապա $\boldsymbol{d = ax + by}$, որտեղ $\boldsymbol{x, y} \in \mathbb{Z}$ և $\boldsymbol{a^2 + b^2 \neq 0}$: Այս փաստը կիրառվեց մի շարք թեորեմների ապացուցման ժամանակ: Նման պնդում տեղի ունի նաև $\boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}]$ բազմության համար, ընդ որում այստեղ նրա դերը նույնպես շատ կարևոր է:

$\mathbf{3.10}$. ***Թեորեմ:*** Դիցուք $\boldsymbol{f_1(x), f_2(x)} \in \boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}]$ բազմանդամներից առնվազն մեկն ոչ զրոյական է և $\boldsymbol{d(x) = (f_1(x), f_2(x))}$: Այդ դեպքում գոյություն ունեն այնպիսի $\boldsymbol{g_1(x), g_2(x)} \in \boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}]$ բազմանդամներ, որ

$$\boldsymbol{d(x) = f_1(x)g_1(x) + f_2(x)g_2(x)}:$$

Ապացույց: Նշանակենք

$$\boldsymbol{D} \equiv \{\boldsymbol{f_1(x)h_1(x) + f_2(x)h_2(x)} \mid \boldsymbol{h_1(x), h_2(x)} \in \boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}]\}:$$

Պարզ է, որ $\boldsymbol{D} \neq \{\boldsymbol{O(x)}\}$: Դիցուք $\boldsymbol{h(x)}$ հանդիսանում է $\boldsymbol{D}$ բազմության ամենափոքր աստիճանի ոչ զրոյական բազմանդամներից որևէ մեկը, իսկ $\boldsymbol{b}$՝ նրա ավագ գործակիցը: Նշանակենք $\boldsymbol{g(x) = b^{-1}h(x)}$: Այդ դեպքում $\boldsymbol{g(x)}$ բազմանդամը հանդիսանում է $\boldsymbol{D}$ բազմության ամենափոքր աստիճանի ոչ զրոյական նորմավորված բազմանդամ:

Ենթադրենք $\boldsymbol{f(x)}$ կամայական բազմանդամ է $\boldsymbol{D}$ բազմությունից: Այդ դեպքում, ըստ 3.3 թեորեմի, գոյություն ունեն միարժեքորեն որոշվող այնպիսի $\boldsymbol{q(x), r(x)} \in \boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}]$ բազմանդամներ, որ

$$\boldsymbol{f(x) = q(x)g(x) + r(x)},$$

որտեղ $\deg(\boldsymbol{r(x)}) < \deg(\boldsymbol{g(x)})$ կամ $\boldsymbol{r(x) = 0}$: Քանի որ $\boldsymbol{f(x), g(x)} \in \boldsymbol{D}$, ապա

$$\boldsymbol{f(x) = f_1(x)h_1(x) + f_2(x)h_2(x)}, \qquad \boldsymbol{h_1(x), h_2(x)} \in \boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}],$$
$$\boldsymbol{g(x) = f_1(x)h_1'(x) + f_2(x)h_2'(x)}, \qquad \boldsymbol{h_1'(x), h_2'(x)} \in \boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}]:$$

Հետևաբար

$$\boldsymbol{r(x) = f(x) - q(x)g(x) =}$$
$$\boldsymbol{= f_1(x)[h_1(x) - h_1'(x)q(x)] + f_2(x)[h_2(x) - h_2'(x)q(x)]}$$

և $\boldsymbol{r(x) \in D}$: Համաձայն $\boldsymbol{g(x)}$ բազմանդամի սահմանման $\boldsymbol{r(x) = 0}$: Ուստի $\boldsymbol{f(x)}$ բաժանվում է $\boldsymbol{g(x)}$ բազմանդամի վրա, այսինքն՝ $\boldsymbol{D}$ բազմության բոլոր բազմանդամները պատիկ են $\boldsymbol{g(x)}$ բազմանդամին, մասնավորապես $\boldsymbol{f_1(x)}$ և $\boldsymbol{f_2(x)}$ բազմանդամները: Հետևաբար $\boldsymbol{g(x)}$ հանդիսանում է $\boldsymbol{f_1(x)}$ և $\boldsymbol{f_2(x)}$ բազմանդամների ընդհանուր բաժանարար: Մյուս կողմից, $\boldsymbol{g(x) = f_1(x)h_1'(x) + f_2(x)h_2'(x)}$ հավասարությունից հետևում է, որ $\boldsymbol{g(x)}$ բազմանդամը բաժանվում է $\boldsymbol{f_1(x)}$ և $\boldsymbol{f_2(x)}$ բազմանդամների ցանկացած ընդհանուր բաժանարարի վրա: Վերջապես, հաշվի առնելով այն փաստը, որ $\boldsymbol{g(x)}$ բազմանդամը նորմավորված է, ստանում ենք

$$\boldsymbol{d(x) = \big(f_1(x), f_2(x)\big) = g(x) = f_1(x)h_1'(x) + f_2(x)h_2'(x)}:$$

Վերցնելով $\boldsymbol{g_1(x) = h_1'(x)}$ և $\boldsymbol{g_2(x) = h_2'(x)}$՝ ստանում ենք, որ

$$\boldsymbol{d(x) = f_1(x)g_1(x) + f_2(x)g_2(x)}$$

և թեորեմն ապացուցված է: ■

3.11. *Թեորեմ (Փոխադարձաբար պարզության հայտանիշ):* Դիցուք $\boldsymbol{f(x), g(x) \in P[x]}$: Այդ դեպքում $\boldsymbol{f(x)}$ և $\boldsymbol{g(x)}$ բազմանդամները փոխադարձաբար պարզ են այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունեն այնպիսի $\boldsymbol{\varphi(x), \psi(x) \in P[x]}$ բազմանդամներ, որ

$$\boldsymbol{f(x)\varphi(x) + g(x)\psi(x) = 1}:$$

Ապացույց: Եթե $\boldsymbol{f(x)}$ և $\boldsymbol{g(x)}$ բազմանդամները փոխադարձաբար պարզ են, ապա $\boldsymbol{\big(f(x), g(x)\big) = 1}$, և պահանջվող $\boldsymbol{\varphi(x)}$ և $\boldsymbol{\psi(x)}$ բազմանդամների գոյությունը հետևում է 3.10 թեորեմից: Իսկ եթե տեղի ունի $\boldsymbol{f(x)\varphi(x) + g(x)\psi(x) = 1}$ հավասարությունը, ապա $\boldsymbol{f(x)}$ և $\boldsymbol{g(x)}$ բազմանդամների ցանկացած ընդհանուր բաժանարար պետք է բաժանի $\boldsymbol{1}$ հաստատուն բազմանդամը, ուստի նրանց ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարն ունի զրոյական աստիճան: Դա նշանակում է, որ $\boldsymbol{f(x)}$ և $\boldsymbol{g(x)}$ բազմանդամները փոխադարձաբար պարզ են: ■

3.12. *Թեորեմ:* Եթե բազմանդամների $\boldsymbol{f(x)g(x)}$ արտադրյալը բաժանվում է $\boldsymbol{h(x)}$ բազմանդամի վրա և $\boldsymbol{\big(f(x), h(x)\big) = 1}$, ապա $\boldsymbol{g(x)}$ բաժանվում է $\boldsymbol{h(x)}$ բազմանդամի վրա:

Ապացույց: Քանի որ $\boldsymbol{\big(f(x), h(x)\big) = 1}$, ապա, ըստ 3.11 թեորեմի, տեղի ունի $\boldsymbol{f(x)\varphi(x) + h(x)\psi(x) = 1}$ հավասարությունը, ինչ-որ

$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ և $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամների համար: Վերջինիս աջ և ձախ մասերը բազմապատկենք $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամով.

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})] + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})] = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}):$$

Ըստ պայմանի $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ արտադրյալը բաժանվում է $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամի վրա, ուստի վերջին հավասարությունից հետևում է, որ $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ բաժանվում է $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամի վրա: ■

§ 3.3. ԱՆՎԵՐԱԾԵԼԻ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐ

3.13. *Սահմանում:* $\boldsymbol{P}$ բազմության տարրերով $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամը կոչվում է **անվերածելի** $\boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}]$ բազմությունում կամ $\boldsymbol{P}$ բազմության վրա, եթե $\deg(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) \geq \mathbf{1}$ և $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ հավասարությունից, որտեղ $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}]$, հետևում է, որ $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամներից մեկը հաստատուն բազմանդամ է:

Անվերածելի բազմանդամները $\boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}]$ բազմությունում կատարում են նույն դերը, ինչ պարզ թվերը՝ ամբողջ թվերի բազմությունում:

Դրական աստիճանի $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}]$ բազմանդամը, որն անվերածելի չէ $\boldsymbol{P}$ բազմության վրա, կոչվում է **վերածելի բազմանդամ** $\boldsymbol{P}$ բազմության վրա:

Տրված բազմանդամի անվերածելի կամ վերածելի լինելն էապես կախված է նրանից, թե որ բազմության վրա է այն դիտարկվում: Օրինակ, $\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \mathbf{2} \in \mathbb{Q}[\boldsymbol{x}]$ բազմանդամն անվերածելի է $\mathbb{Q}$ ռացիոնալ թվերի բազմության վրա, սակայն վերածելի է $\mathbb{R}$ իրական թվերի բազմության վրա, քանի որ $\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \mathbf{2} = (\boldsymbol{x} - \sqrt{\mathbf{2}})(\boldsymbol{x} + \sqrt{\mathbf{2}})$:

Այժմ նշենք $\boldsymbol{P}$ բազմության վրա անվերածելի բազմանդամների մի քանի

3.14. *Հատկություն:*

1) Առաջին աստիճանի յուրաքանչյուր բազմանդամ անվերածելի է:

Եթե $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}]$, $\deg(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \mathbf{1}$ և $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$, որտեղ $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}]$ և $\deg(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})) \geq \mathbf{1}, \deg(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})) \geq \mathbf{1}$, ապա $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամի ներկայացման աջ մասի աստիճանը $\geq \mathbf{2}$: Ուստի $\deg(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})) = \mathbf{0}$ կամ $\deg(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})) = \mathbf{0}$:

2) Եթե $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}]$ բազմանդամն անվերածելի է $\boldsymbol{P}$ բազմության վրա, ապա այդպիսին է նաև $\boldsymbol{af}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամը, որտեղ $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{F}$:

Դիցուք $\deg(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) \geq \mathbf{1}$ և $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$, որտեղ $\deg(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})) = \mathbf{0}$ կամ $\deg(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})) = \mathbf{0}$: Հետևաբար $\boldsymbol{af}(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{ag}(\boldsymbol{x})]\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{ah}(\boldsymbol{x})]$, $\deg(\boldsymbol{af}(\boldsymbol{x})) \geq \mathbf{1}$ և $\deg(\boldsymbol{ag}(\boldsymbol{x})) = \mathbf{0}$ կամ $\deg(\boldsymbol{ah}(\boldsymbol{x})) = \mathbf{0}$:

3) Եթե $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}]$ բազմանդամն անվերածելի է $\boldsymbol{P}$ բազմության վրա, ապա ցանկացած $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}]$ բազմանդամի համար կա՛մ $(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})) = \mathbf{1}$, կա՛մ $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ բաժանում է $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամը:

Դիցուք $(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x})$: Քանի որ $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x})$ բաժանում է $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$, ապա $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամի անվերածելի լինելուց հետևում է, որ կա՛մ $\deg(\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x})) = \mathbf{0}$, կա՛մ $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{ag}(\boldsymbol{x})$, որտեղ $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{P}$: Առաջին դեպքում $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{1}$, իսկ երկրորդ դեպքում $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամը բաժանում է $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամը:

4) Եթե բազմանդամների $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ արտադրյալը բաժանվում է $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ անվերածելի բազմանդամի վրա, ապա արտադրիչներից առնվազն մեկը բաժանվում է $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ վրա:

Եթե $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ չի բաժանվում $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ վրա, ապա, համաձայն (3) հատկության, $(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})) = \mathbf{1}$: Այդ դեպքում 5.13 թեորեմից հետևում է, որ $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ բաժանվում է $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ վրա:

5) Եթե բազմանդամների $\boldsymbol{f}_{\mathbf{1}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}_{\mathbf{2}}(\boldsymbol{x}) \cdots \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})$ արտադրյալը բաժանվում է $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ անվերածելի բազմանդամի վրա, ապա արտադրիչներից առնվազն մեկը բաժանվում է $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ վրա:

Ապացույցը կատարվում է ինդուկցիայի եղանակով ըստ $\boldsymbol{k}$՝ հիմնվելով (4) հատկության վրա: ■

$\mathbf{3.15}$. ***Թեորեմ:*** Դիցուք $\boldsymbol{P} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$: Այդ դեպքում դրական աստիճանի յուրաքանչյուր $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}]$ բազմանդամ կարող է ներկայացվել

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}\boldsymbol{f}_{\mathbf{1}}^{\alpha_1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}_{\mathbf{2}}^{\alpha_2}(\boldsymbol{x}) \cdots \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{k}}^{\alpha_k}(\boldsymbol{x}) \tag{3.4}$$

արտադրյալի տեսքով, որտեղ $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{P}$ հանդիսանում է $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամի ավագ գործակիցը, $\boldsymbol{f}_{\mathbf{1}}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}_{\mathbf{2}}(\boldsymbol{x}), \dots, \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})$՝ իրարից տարբեր անվերածելի նորմավորված բազմանդամներ են $\boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}]$ բազմությունից, իսկ $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{1}}, \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{2}}, \dots, \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{k}}$՝ բնական թվեր են: Ավելին, այդ ներկայացումը միակն է արտադրիչների դասավորվածության կարգի ճշտությամբ:

Ապացույց: Դիցուք $\deg(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{n} \geq \mathbf{1}$: Կիրառենք ինդուկցիա ըստ $\boldsymbol{n}$: Երբ $\deg(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{n} = \mathbf{1}$, ապա, համաձայն 3.14 (1) հատկության, $\boldsymbol{f(x)}$ բազմանդամն անվերածելի է $\boldsymbol{P}$ բազմության վրա և $\boldsymbol{f(x) = a[a^{-1}f(x)]}$ պահանջվող ներկայացումն է:

Այժմ ենթադրենք $\boldsymbol{n} > \boldsymbol{1}$ և թեորեմը տեղի ունի $\boldsymbol{n}$ թվից փոքր դրական աստիճան ունեցող բոլոր բազմանդամների համար $\boldsymbol{P[x]}$ բազմությունից: Եթե $\boldsymbol{f(x)}$ բազմանդամն անվերածելի է $\boldsymbol{P}$ բազմության վրա և $\boldsymbol{a}$՝ նրա ավագ գործակիցն է, ապա $\boldsymbol{f(x) = a[a^{-1}f(x)]}$ հանդիսանում է պահանջվող ներկայացումը, քանի որ $\boldsymbol{a^{-1}f(x)}$՝ անվերածելի նորմավորված բազմանդամ է $\boldsymbol{P[x]}$ բազմությունից: Դիցուք $\boldsymbol{f(x)}$ վերածելի բազմանդամ է և թույլ է տալիս $\boldsymbol{f(x) = g(x)h(x)}$ ներկայացումը, որտեղ $\boldsymbol{g(x), h(x)} \in \boldsymbol{P[x]}$ և $\boldsymbol{1} \leq \deg(\boldsymbol{g(x)}) < n$, $\boldsymbol{1} \leq \deg(\boldsymbol{h(x)}) < n$: Համաձայն ինդուկցիայի ենթադրության, $\boldsymbol{g(x)}$ և $\boldsymbol{h(x)}$ բազմանդամները կարելի է ներկայացնել (3.4) տեսքով և, հետևաբար, այդ տեսքով կարելի է ներկայացնել նաև $\boldsymbol{f(x)}$ բազմանդամը:

Ներկայացման միակության ապացույցի համար ենթադրենք, որ $\boldsymbol{f(x)}$ բազմանդամն ունի (3.4) տեսքի երկու ներկայացում.

$$\boldsymbol{f(x) = af_1^{\alpha_1}(x)f_2^{\alpha_2}(x)\cdots f_k^{\alpha_k}(x) = bg_1^{\beta_1}(x)g_2^{\beta_2}(x)\cdots g_s^{\beta_s}(x)}: \quad (3.5)$$

Ավագ գործակիցների համեմատությունից ստանում ենք $\boldsymbol{a = b}$: Հաջորդիվ, $\boldsymbol{f_1(x)} \in \boldsymbol{P[x]}$ անվերածելի բազմանդամը բաժանում է (3.5) հավասարության աջ մասը, ուստի 3.14 (5) հատկությունից հետևում է, որ այն բաժանում է $\boldsymbol{g_i(x), i = 1, 2, \dots, s}$, բազմանդամներից մեկը, ենթադրենք՝ $\boldsymbol{g_1(x)}$: Սակայն $\boldsymbol{g_1(x)}$ բազմանդամը նույնպես անվերածելի է $\boldsymbol{P[x]}$ բազմությունում, այնպես որ $\boldsymbol{g_1(x) = cf_1(x)}$, որտեղ $\boldsymbol{c}$ հաստատուն բազմանդամ է: Քանի որ $\boldsymbol{f_1(x)}$ և $\boldsymbol{g_1(x)}$ բազմանդամներն նորմավորված են, ապա $\boldsymbol{f_1(x) = g_1(x)}$: Այսպիսով, (3.5) հավասարությունում կարող ենք կրճատել $\boldsymbol{f_1(x)}$ և $\boldsymbol{g_1(x)}$ բազմանդամները և ստացված հավասարության նկատմամբ կիրառել նույն մեթոդը: Վերջավոր թվով այդպիսի քայլերից հետո կհամոզվենք, որ (3.5) հավասարության աջ և ձախ մասերը համընկնում են՝ արտադրիչների կարգի ճշտությամբ: Թեորեմն ապացուցված է ամբողջությամբ: ■

Դրական աստիճանի $\boldsymbol{f(x)} \in \boldsymbol{P[x]}$ բազմանդամի (3.4) ներկայացումը կոչվում է $\boldsymbol{f(x)}$ բազմանդամի **կանոնական վերլուծություն**:

Առանց ապացույցի նշենք հետևյալ կարևոր փաստը.

3.16. *Թեորեմ (Մնացքների մասին չինական թեորեմ):* Եթե $\boldsymbol{n \geq 2}$ և $\boldsymbol{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x) \in P[x]}$ բազմանդամները զույգ առ զույգ փոխադարձաբար պարզ են, ապա ցանկացած $\boldsymbol{h_1(x), h_2(x), \dots, h_n(x) \in P[x]}$ բազմանդամների համար գոյություն ունի այնպիսի $\boldsymbol{g(x) \in P[x]}$ բազմանդամ, որ $\boldsymbol{g(x) \equiv h_i(x)\big(mod\ f_i(x)\big)}$, $\boldsymbol{i = 1, 2, \dots, n}$:

§ 3.4. ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ԱՐՄԱՏՆԵՐ

Դիցուք $\boldsymbol{f(x) \in P[x]}$: Այդ դեպքում $\boldsymbol{f(x)}$ բազմանդամում $\boldsymbol{x}$ փոփոխականի փոխարինումը $\boldsymbol{P}$ բազմության կամայական տարրով այդ բազմանդամը վերածում է $\boldsymbol{P}$ բազմության որոշակի տարրի: Ավելի ճշգրիտ, եթե $\boldsymbol{f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in P[x]}$ և $\boldsymbol{b \in P}$, ապա, $\boldsymbol{x}$ փոփոխականը փոխարինելով $\boldsymbol{b}$ տարրով, ստանում ենք

$$\boldsymbol{f(b) = a_0 + a_1b + \dots + a_nb^n \in P}$$

տարրը: Այդ տարրը կոչվում է $\boldsymbol{f(x)}$ բազմանդամի արժեք, երբ $\boldsymbol{x = b}$: Եթե $\boldsymbol{P[x]}$ բազմությունում տեղի ունի ինչ-որ բազմանդամային հավասարություն, ապա, նրանում $\boldsymbol{x}$ փոփոխականը փոխարինելով ցանկացած $\boldsymbol{b \in P}$ ֆիքսված տարրով, ստանում ենք հավասարություն $\boldsymbol{P}$ բազմությունում (**տեղադրման սկզբունք**):

3.17. *Սահմանում:* $\boldsymbol{P}$ բազմության $\boldsymbol{b}$ տարրը կոչվում է $\boldsymbol{f(x) \in P[x]}$ բազմանդամի **արմատ** (կամ **զրո**), եթե $\boldsymbol{f(b) = 0}$:

Հետևյալ թեորեմը կապ է հաստատում բազմանդամների արմատների և բաժանելիության միջև:

3.18. *Թեորեմ (Բեզու):* $\boldsymbol{P}$ բազմության $\boldsymbol{b}$ տարրը հանդիսանում է $\boldsymbol{f(x) \in P[x]}$ բազմանդամի արմատ այն և միայն այն դեպքում, երբ $\boldsymbol{(x - b)}$ բազմանդամը բաժանում է $\boldsymbol{f(x)}$ բազմանդամը:

Ապացույց: Կիրառելով մնացորդով բաժանման թեորեմը՝ կարելի է գրել

$$\boldsymbol{f(x) = (x - b)q(x) + c},$$

որտեղ $\boldsymbol{q(x) \in P[x]}$ և $\boldsymbol{c \in P}$: Այնուհետև $\boldsymbol{x}$ փոփոխականի փոխարեն տեղադրելով $\boldsymbol{b}$ տարրը՝ կստանանք $\boldsymbol{f(b) = c}$: Ուստի

$f(x) = (x-b)q(x) + f(b)$: Այս հավասարությունից հետևում է թեորեմի ապացույցը: ■

Առաջին աստիճանի բազմանդամները հաճախ կոչվում են **գծային բազմանդամներ**: Բեզուի թեորեմը ցույց է տալիս, որ $f(x)$ բազմանդամի արմատների որոնումը համարժեք է նրա գծային նորմավորված բաժանարարների որոնմանը:

3.19. *Սահմանում:* P բազմության b տարրը կոչվում է $f(x) \in P[x]$ բազմանդամի **k-պատիկ արմատ** ($k > 1$), եթե $f(x)$ բազմ-անդամը բաժանվում է $(x-b)^k$ վրա, բայց չի բաժանվում $(x-b)^{k+1}$ վրա: k թիվը կոչվում է b արմատի **պատիկություն**: Երբ $k = 1$, ապա b արմատը կոչվում է **պարզ** արմատ:

3.20. *Թեորեմ:* Դիցուք $f(x) \in P[x]$ և $\deg\big(f(x)\big) = n \geq 1$: Այդ դեպքում, եթե $b_1, b_2, \dots, b_m \in P$ տարրերը հանդիսանում են $f(x)$ բազմանդամի իրարից տարբեր արմատներ համապատասխա-նաբար $k_1, k_2, \dots, k_m$ պատիկություններով, ապա $f(x)$ բաժանվում է $(x-b_1)^{k_1}(x-b_2)^{k_2}\cdots(x-b_m)^{k_m}$ արտադրյալի վրա: Հետևաբար $k_1 + k_2 + \dots + k_m \leq n$ և $f(x)$ բազմանդամը կարող է ունենալ ոչ ավել քան n հատ իրարից տարբեր արմատներ P բազմությունում:

Ապացույց: Համաձայն 3.14 (1) հատկության, յուրաքանչյուր $\big(x-b_j\big), j = 1, 2, \dots, m$, բազմանդամ անվերածելի է P բազմության վրա, այնպես որ $\big(x-b_j\big)^{k_j}$ բազմանդամն որպես արտադրիչ մասնակցում է $f(x)$ բազմանդամի կանոնական վերլուծության մեջ: Այսպիսով, այդ կանոնական վերլուծության մեջ մասնակցում է $(x-b_1)^{k_1}(x-b_2)^{k_2}\cdots(x-b_m)^{k_m}$ արտադրյալը, և, հետևաբար, այն հանդիսանում է $f(x)$ բազմանդամի բաժանարար: Համեմատելով աստիճանները՝ ստանում ենք, որ $k_1 + k_2 + \dots + k_m \leq n$, և, հետևաբար, $m \leq k_1 + k_2 + \dots + k_m \leq n$ անհավասարություններն ապացուցում են թեորեմի վերջին պնդումը: ■

3.21. *Թեորեմ:* Որպեսզի **2** կամ **3** աստիճանի $f(x) \in P[x]$ բազմանդամը լինի անվերածելի P բազմության վրա, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն չունենա արմատներ P բազմությունում:

Ապացույց: Անհրաժեշտությունը հետևում է անվերածելի բազմանդամի սահմանումից և Բեզուի թեորեմից: Մյուս կողմից, եթե $f(x)$ բազմանդամը չունի արմատներ P բազմությունում, բայց վերածելի է P բազմության վրա, ապա այն կարելի է գրել

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ տեսքով, որտեղ $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{F}[\boldsymbol{x}]$ և $\mathbf{1} \leq \deg\big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\big) \leq \deg\big(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})\big)$: Սակայն $\mathbf{2} \leq \deg\big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\big) + \deg\big(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})\big) = \deg\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\big) \leq \mathbf{3}$, որտեղից $\deg\big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\big) = \mathbf{1}$: Վերջինս նշանակում է, որ $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$, որտեղ $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{P}$: Բայց այդ դեպքում $(-\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}^{-\mathbf{1}}) \in \boldsymbol{P}$ տարրը հանդիսանում է $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամի արմատ, ուստի նաև $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ բազմանդամի արմատ, որը հակասում է ենթադրությանը: ■

3.22. *Հանրահաշվի հիմնական թեորեմը (Գաուս):* Դրական աստիճանի և կոմպլեքս գործակիցներով յուրաքանչյուր բազմանդամ ունի առնվազն մեկ արմատ, ընդհանուր դեպքում կոմպլեքս արմատ:

ԳԼՈՒԽ 4

ՄԱՏՐԻՑՆԵՐ ԵՎ ՈՐՈՇԻՉՆԵՐ

§ 4.1. ՏԵՂԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՎ ՏԵՂԱԴՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Դիցուք $\boldsymbol{M}$ հանդիսանում է ինչ-որ վերջավոր բազմություն՝ կազմված $\boldsymbol{n}$ հատ տարրերից: Այդ տարրերը կարող են համարակալվել $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{n}$ բնական թվերի միջոցով, և քանի որ մեզ հետաքրքրող հարցերում $\boldsymbol{M}$ բազմության տարրերի անհատական հատկություններն ոչ մի դեր չեն խաղալու, ապա մենք պարզապես կհամարենք, որ $\boldsymbol{M}$ բազմության տարրեր հանդիսանում են հենց $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{n}$ թվերը:

4.1. *Սահմանում:* $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{n}$ բնական թվերի՝ որոշակի կարգով կամայական դասավորվածություն կոչվում է $\boldsymbol{n}$ թվերի (սիմվոլների) **տեղափոխություն**:

4.2. *Թեորեմ:* $\boldsymbol{n}$ թվերի իրարից տարբեր տեղափոխությունների քանակը հավասար է $\boldsymbol{n}!$, որտեղ $\boldsymbol{n}! = \mathbf{12} \cdots \boldsymbol{n}$:

Ապացույց: Իսկապես, $\boldsymbol{n}$ սիմվոլների տեղափոխության ընդհանուր տեսքը հետևյալն է. $\boldsymbol{i_1}, \boldsymbol{i_2}, \dots, \boldsymbol{i_n}$, որտեղ յուրաքանչյուր $\boldsymbol{i_s}$, $\mathbf{1} \leq \boldsymbol{s} \leq \boldsymbol{n}$, հանդիսանում է $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{n}$ թվերից որևէ մեկը, ընդ որում այդ թվերից ոչ մեկն երկու անգամ չի հանդիպում: Որպես $\boldsymbol{i_1}$ կարելի է վերցնել $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{n}$ թվերից ցանկացածը, և այդ ընտրությունը տալիս է $\boldsymbol{n}$ հատ իրարից տարբեր հնարավորություն: Եթե $\boldsymbol{i_1}$ ընտրված է, ապա որպես $\boldsymbol{i_2}$ կարելի է վերցնել մնացած $(\boldsymbol{n} - \mathbf{1})$ թվերից մեկը միայն, այսինքն՝ $\boldsymbol{i_1}$ և $\boldsymbol{i_2}$ սիմվոլներն ընտրելու իրարից տարբեր եղանակների քանակը հավասար է $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n} - \mathbf{1})$, և այսպես շարունակ մինչև $\boldsymbol{i_n}$ սիմվոլի ընտրությունը, որն որոշվում է միարժեքորեն: ■

Եթե որևէ տեղափոխության մեջ տեղերով փոխենք ինչ-որ երկու սիմվոլ (պարտադիր չէ կողք-կողքի կանգնած), իսկ մնացած բոլոր սիմվոլները թողնենք իրենց տեղերում, ապա ակնհայտ է, որ կստանանք նոր տեղափոխություն: Տեղափոխության այդպիսի ձևափոխությունը կոչվում է **տրանսպոզիցիա**:

4. 3. ***Թեորեմ:*** $\boldsymbol{n}$ սիմվոլների բոլոր $\boldsymbol{n}!$ տեղափոխությունները կարելի է դասավորել այնպիսի հերթականությամբ, որ յուրաքանչյուր հաջորդը՝ նախորդից ստացվում է մեկ տրանսպոզիցիայի միջոցով, ընդ որում սկսել կարելի է կամայական տեղափոխությունից:

Ապացույց: Այս թեորեմը ճշմարիտ է $\boldsymbol{n = 2}$ դեպքում. եթե պահանջվում է սկսել $\boldsymbol{1, 2}$ տեղափոխությունից, ապա փնտրվող դասավորվածությունը կլինի $\boldsymbol{1, 2}$; $\boldsymbol{2, 1}$: Իսկ եթե պետք է սկսել $\boldsymbol{2, 1}$ տեղափոխությունից, ապա դասավորվածությունը կլինի $\boldsymbol{2, 1}$; $\boldsymbol{1, 2}$:

Այժմ ենթադրենք թեորեմը ճիշտ է $(\boldsymbol{n-1})$ դեպքում, և այն ապացուցենք $\boldsymbol{n}$ համար: Դիցուք պետք է սկսել

$$\boldsymbol{i_1, i_2, \dots, i_n} \tag{4.1}$$

տեղափոխությունից: Դիտարկենք $\boldsymbol{n}$ սիմվոլների բոլոր այն տեղափոխությունները, որոնց առաջին տեղում գտնվում է $\boldsymbol{i_1}$ սիմվոլը: Այդպիսի տեղափոխությունների քանակը հավասար է $(\boldsymbol{n-1})!$ և նրանց կարելի է կարգավորել թեորեմի պահանջներին համապատասխան, քանի որ դա իրականում հանգեցվում է $(\boldsymbol{n-1})$ սիմվոլների բոլոր տեղափոխությունների կարգավորմանը, որը, ըստ ինդուկցիայի ենթադրության, կարելի է սկսել կամայական տեղափոխությունից: Այդպիսի ճանապարհով ստացված $\boldsymbol{n}$ սիմվոլների տեղափոխություններից վերջինում կատարում ենք $\boldsymbol{i_1}$ սիմվոլի տրանսպոզիցիա կամայական մեկ ուրիշ սիմվոլի հետ, օրինակ՝ $\boldsymbol{i_2}$ հետ, և, սկսելով նոր ստացված տեղափոխությունից, հարկ եղած ձևով կարգավորում ենք բոլոր այն տեղափոխությունները, որոնց առաջին տեղում գտնվում է $\boldsymbol{i_2}$ սիմվոլը, և այսպես շարունակ: Ակնհայտ է, որ այս եղանակով կարելի է դասավորել $\boldsymbol{n}$ սիմվոլների բոլոր $\boldsymbol{n}!$ տեղափոխությունները: ■

4. 4. ***Հետևանք:*** $\boldsymbol{n}$ սիմվոլների կամայական տեղափոխությունից կարելի է անցնել նույն սիմվոլներից կազմված ցանկացած մեկ ուրիշ տեղափոխության մի քանի տրանսպոզիցիաների միջոցով:

4. 5. ***Սահմանում:*** Տրված տեղափոխության մեջ $\boldsymbol{i}$ և $\boldsymbol{j}$ թվերը կազմում են **ինվերսիա**, եթե $\boldsymbol{i > j}$ և $\boldsymbol{i}$ թիվն այդ տեղափոխությունում $\boldsymbol{j}$ թվից առաջ է կանգնած: Տեղափոխությունը կոչվում է **զույգ**, եթե նրա սիմվոլները կազմում են զույգ թվով ինվերսիաներ, հակառակ դեպքում տեղափոխությունը կոչվում է **կենտ**:

Քանի որ $1, 2, \dots, n$ տեղափոխության ինվերսիաների քանակը հավասար է զրոյի, ապա այդ տեղափոխությունը զույգ է:

$4.6.$ ***Թեորեմ:*** Ցանկացած տրանսպոզիցիա փոխում է տեղափոխության զույգությունը:

Ապացույց: Սկզբում դիտարկենք այն դեպքը, երբ տեղափոխվող (տրանսպոնացվող) i և j սիմվոլները կանգնած են կողք-կողքի, այսինքն՝ տեղափոխությունն ունի

$$\dots, i, j, \dots$$

տեսքը, որտեղ բազմակետերը փոխարինում են այն սիմվոլներին, որոնք տրանսպոզիցիայի դեպքում մնում են իրենց տեղերում: Տրանսպոզիցիայից հետո կունենանք

$$\dots, j, i, \dots$$

տեղափոխությունը: Հասկանալի է, որ երկու տեղափոխություններում էլ i, j սիմվոլներից յուրաքանչյուրը չտեղափոխվող (չտրանսպոնացվող) սիմվոլների հետ կազմում են միևնույն ինվերսիաները: Այնուհետև, եթե i և j սիմվոլներն առաջ ինվերսիա չէին կազմում, ապա նոր տեղափոխությունում առաջանում է մեկ նոր ինվերսիա, այսինքն՝ ինվերսիաների քանակն ավելանում է մեկով, իսկ եթե նրանք առաջ կազմում էին ինվերսիա, ապա այժմ այն վերանում է, այսինքն՝ ինվերսիաների քանակը փոքրանում է մեկով: Երկու դեպքում էլ տեղափոխության զույգությունը փոխվում է:

Արդ ենթադրենք, որ i և j տրանսպոնացվող սիմվոլների միջև գտնվում է s հատ սիմվոլ, $s > 0$, այսինքն՝ տեղափոխությունն ունի

$$\dots, i, k_1, k_2, \dots, k_s, j, \dots \tag{4.2}$$

տեսքը: i և j սիմվոլների տրանսպոզիցիան կարելի է ստանալ հարևան սիմվոլների $2s + 1$ հատ տրանսպոզիցիաների հաջորդական կատարման արդյունքում: Այն է՝ i սիմվոլի հաջորդական տեղափոխությունը $k_1, k_2, \dots, k_s$ սիմվոլների հետ (s տրանսպոզիցիա), այնուհետև i և j սիմվոլների տեղափոխություն (մեկ տրանսպոզիցիա) և, վերջապես, j սիմվոլի հաջորդական տեղափոխությունը $k_1, k_2, \dots, k_s$ սիմվոլների հետ (s տրանսպոզիցիա, տես. աղյուսակը):

$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{k_1}$	$\boldsymbol{k_2}$	$\cdots$	$\boldsymbol{k_{s-1}}$	$\boldsymbol{k_s}$	$\boldsymbol{j}$
$\boldsymbol{k_1}$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{k_2}$	$\cdots$	$\boldsymbol{k_{s-1}}$	$\boldsymbol{k_s}$	$\boldsymbol{j}$
$\boldsymbol{k_1}$	$\boldsymbol{k_2}$	$\boldsymbol{i}$	$\cdots$	$\boldsymbol{k_{s-1}}$	$\boldsymbol{k_s}$	$\boldsymbol{j}$
	$\vdots$			$\vdots$		
$\boldsymbol{k_1}$	$\boldsymbol{k_2}$	$\boldsymbol{k_3}$	$\cdots$	$\boldsymbol{k_s}$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$
$\boldsymbol{k_1}$	$\boldsymbol{k_2}$	$\boldsymbol{k_3}$	$\cdots$	$\boldsymbol{k_s}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{i}$
	$\vdots$			$\vdots$		
$\boldsymbol{k_1}$	$\boldsymbol{k_2}$	$\boldsymbol{j}$	$\cdots$	$\boldsymbol{k_{s-1}}$	$\boldsymbol{k_s}$	$\boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{k_1}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k_2}$	$\cdots$	$\boldsymbol{k_{s-1}}$	$\boldsymbol{k_s}$	$\boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k_1}$	$\boldsymbol{k_2}$	$\cdots$	$\boldsymbol{k_{s-1}}$	$\boldsymbol{k_s}$	$\boldsymbol{i}$

Այսպիսով, կենտ թվով անգամ փոխեցինք սկզբնական տեղափոխության զույգությունը, ուստի (4.2) և

$$\dots, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}, \dots, \boldsymbol{k_s}, \boldsymbol{i}, \dots$$

տեղափոխություններն ունեն հակառակ զույգություններ: ■

4.7. ***Հետևանք:*** Երբ $\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{2}$, ապա $\boldsymbol{n}$ սիմվոլների զույգ տեղափոխությունների քանակը հավասար է կենտ տեղափոխությունների քանակին և հավասար է $\frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{2}}$:

Ապացույց: Իսկապես, համաձայն 4.3. թեորեմի, կարգավորենք $\boldsymbol{n}$ սիմվոլների բոլոր տեղափոխություններն այնպես, որ յուրաքանչյուր հաջորդն իր նախորդից ստացվում է մեկ տրանսպոզիցիայով: Հարևան տեղափոխությունները կունենան հակառակ զույգություններ, այսինքն՝ տեղափոխությունները դասավորված են այնպես, որ զույգերը և կենտերը հաջորդում են իրար: Այժմ մեր պնդումը հետևում է այն բանից, որ $\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{2}$ դեպքում $\boldsymbol{n}!$ թիվը զույգ է: ■

Այժմ սահմանենք մի նոր հասկացություն, այն է՝ $\boldsymbol{n}$-րդ աստիճանի տեղադրության հասկացությունը:

4.8. ***Սահմանում:*** Առաջին $\boldsymbol{n}$ բնական թվերի բազմության կամայական փոխմիարժեք արտապատկերում ինքն իր վրա կոչվում է **$\boldsymbol{n}$-րդ աստիճանի տեղադրություն**:

Յուրաքանչյուր $\boldsymbol{A}$ տեղադրություն կարելի է գրել երկու տեղափոխությունների միջոցով՝ մեկը մյուսի տակ գրված.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{i_1} & \boldsymbol{i_2} & \cdots & \boldsymbol{i_n} \\ \boldsymbol{\alpha_{i_1}} & \boldsymbol{\alpha_{i_2}} & \cdots & \boldsymbol{\alpha_{i_n}} \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

որտեղ $\boldsymbol{\alpha_i}$ հանդիսանում է այն թիվը, որին $\boldsymbol{A}$ տեղադրությունում անցնում է $\boldsymbol{i}$ թիվը, $\boldsymbol{i = 1, 2, \ldots, n}$:

$\boldsymbol{A}$ տեղադրությունն ունի (4.3) տեսքի իրարից տարբեր գրելաձևեր: Այսպես օրինակ, $\begin{pmatrix}\mathbf{3\;5\;1\;4\;2}\\ \mathbf{5\;2\;3\;4\;1}\end{pmatrix}$ տեղադրությունը կարելի է գրել նաև հետևյալ երեք տեսքով.

$$\begin{pmatrix}\mathbf{2\;1\;5\;3\;4}\\ \mathbf{1\;3\;2\;5\;4}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\mathbf{1\;5\;2\;4\;3}\\ \mathbf{3\;2\;1\;4\;5}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\mathbf{2\;5\;1\;4\;3}\\ \mathbf{1\;2\;3\;4\;5}\end{pmatrix}:$$

$\boldsymbol{A}$ տեղադրության մեկ գրելաձևից մեկ ուրիշին կարելի է անցնել սյուների մի քանի տրանսպոզիցիաների միջոցով: Այդ դեպքում կարելի է ստանալ (4.3) տեսքի այնպիսի գրառում, որի վերևի (կամ ներքևի) տողում գրված է $\boldsymbol{n}$ սիմվոլների՝ նախապես տրված կամայական տեղափոխություն: Մասնավորապես, $\boldsymbol{n}$-րդ աստիճանի ցանկացած տեղադրություն կարելի գրել

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \cdots & \boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{\alpha_1} & \boldsymbol{\alpha_2} & \cdots & \boldsymbol{\alpha_n}\end{pmatrix} \tag{4.4}$$

տեսքով, այսինքն՝ վերևի տողում թվերի բնական դասավորվածությամբ: Այդպիսի գրելաձևի դեպքում իրարից տարբեր տեղադրություններ միմյանցից տարբերվում են ներքևի տողում գրված տեղափոխություններով: Ուստի ճշմարիտ է հետևյալը.

4.9. ***Թեորեմ:*** $\boldsymbol{n}$-րդ աստիճանի տեղադրությունների քանակը հավասար է $\boldsymbol{n}$ սիմվոլների տեղափոխությունների քանակին, այսինքն՝ հավասար է $\boldsymbol{n}!$:

$\boldsymbol{n}$-րդ աստիճանի բոլոր տեղադրությունների բազմությունն ընդունված է նշանակել $\boldsymbol{S_n}$-ով:

$\boldsymbol{n}$-րդ աստիճանի տեղադրության օրինակ հանդիսանում է

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix}\mathbf{1\;2} \cdots \boldsymbol{n}\\ \mathbf{1\;2} \cdots \boldsymbol{n}\end{pmatrix}$$

նույնական տեղադրությունը, որի բոլոր սիմվոլները մնում են իրենց տեղերում:

Նկատենք, որ $\boldsymbol{A}$ տեղադրության վերևի և ներքևի տողերը կատարում են տարբեր դերեր. տեղափոխելով նրանց, ընդհանրապես ասած, ստանում ենք ուրիշ տեղադրություն:

Դիտարկենք $\boldsymbol{A}$ տեղադրության (4.3) տեսքի կամայական գրելաձև: Այդ գրելաձևի վերևի և ներքևի տեղափոխությունների զույգությունները կա՛մ համընկնում են, կա՛մ՝ ոչ: Իսկապես, ինչպես գիտենք, $\boldsymbol{A}$ տեղադրության մեկ ուրիշ գրելաձևին անցումը կարելի է իրականացնել՝ վերևի և ներքևի տողերում կատարելով իրար համապատասխանող մի քանի հաջորդական տրանսպոզիցիաներ: Սակայն կատարելով մեկ տրանսպոզիցիա (4.3) գրելաձևի վերևի տողում և համապատասխան տարրերի մեկ տրանսպոզիցիա ներքևի տողում՝ միաժամանակ փոխում ենք երկու տեղափոխությունների զույգությունը և, հետևաբար, պահպանում ենք այդ զույգությունների նույնությունը կամ հակադրությունը: Այստեղից հետևում է, որ $\boldsymbol{A}$ տեղադրության բոլոր գրելաձևերի դեպքում վերևի և ներքևի տեղափոխությունների զույգությունները կա՛մ համընկնում են, կա՛մ՝ ոչ: Առաջին դեպքում $\boldsymbol{A}$ տեղադրությունը կոչվում է **զույգ**, երկրորդ դեպքում՝ **կենտ**: Մասնավորապես նույնական տեղադրությունը կլինի զույգ:

Եթե $\boldsymbol{A}$ տեղադրությունը գրված է (4.4) տեսքով, այսինքն՝ վերևի տողում գտնվում է $\boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \ldots, \boldsymbol{n}$ զույգ տեղափոխությունը, ապա $\boldsymbol{A}$ տեղադրության զույգությունը կորոշվի ներքևի տողում գտնվող $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \ldots, \boldsymbol{\alpha_n}$ տեղափոխության զույգությամբ: Ուստի ճշմարիտ է հետևյալը.

4.10. ***Թեորեմ:*** $\boldsymbol{n}$-րդ աստիճանի զույգ տեղադրությունների քանակը հավասար է կենտ տեղադրությունների քանակին և հավասար է $\frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{2}}$:

Հեշտ է համոզվել, որ տեղադրությունների զույգությունը կարելի է սահմանել նաև հետևյալ ձևով. $\boldsymbol{A}$ տեղադրությունը կոչվում է զույգ (կենտ), եթե նրա կամայական գրելաձևի երկու տողերի ընդհանուր ինվերսիաների քանակը զույգ (կենտ) թիվ է:

Հաջորդիվ նպատակահարմար է տալ տեղադրությունների զույգության այլ համարժեք սահմանումներ: Այդ նպատակով սահմանենք տեղադրությունների բազմապատկում գործողությունը: $\boldsymbol{n}$-րդ աստիճանի տեղադրությունը, ինչպես գիտենք, հանդիսանում է $\{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \ldots, \boldsymbol{n}\}$ բազմության փոխմիարժեք արտապատկերում ինքն իր վրա: Երկու այդպիսի փոխմիարժեք արտապատկերումների հաջորդական կատարումն ակնհայտորեն հանդիսանում է $\{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \ldots, \boldsymbol{n}\}$ բազմության փոխմիարժեք արտապատկերում ինքն իր վրա, այսինքն՝ $\boldsymbol{n}$-րդ աստիճանի երկու տեղադրությունների հաջորդական կատարումը հանգեցնում է լիովին որոշված $\boldsymbol{n}$-րդ աստիճանի երրորդ տեղադրության, որը կոչվում է տրված տեղադրություններից առաջինի **արտադրյալ** երկրորդի հետ: Ուստի տեղադրությունների բազմապատկում գործողությունը հանրահաշվական է $\boldsymbol{n}$-րդ աստիճանի բոլոր տեղադրությունների $\boldsymbol{S_n}$ բազմության վրա:

4.11. *Օրինակ:* Դիցուք $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1\ 2\ 3\ 4\ 5} \\ \mathbf{3\ 4\ 1\ 5\ 2} \end{pmatrix}$ և $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1\ 2\ 3\ 4\ 5} \\ \mathbf{1\ 3\ 5\ 2\ 4} \end{pmatrix}$: Այդ դեպքում

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1\ 2\ 3\ 4\ 5} \\ \mathbf{3\ 4\ 1\ 5\ 2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1\ 2\ 3\ 4\ 5} \\ \mathbf{1\ 3\ 5\ 2\ 4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1\ 2\ 3\ 4\ 5} \\ \mathbf{5\ 2\ 1\ 4\ 3} \end{pmatrix}:$$

Բազմապատկել կարելի է միայն նույն աստիճանի տեղադրությունները:

4.12. *Հատկություն:* Եթե $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{3}$, ապա $\boldsymbol{n}$-րդ աստիճանի տեղադրությունների բազմապատկում գործողությունը տեղափոխելի (կոմուտատիվ) չէ:

Ապացույց: Իսկապես, 4.11. օրինակում դիտարկված $\boldsymbol{A}$ և $\boldsymbol{B}$ տեղադրությունների համար

$$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1\ 2\ 3\ 4\ 5} \\ \mathbf{1\ 3\ 5\ 2\ 4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1\ 2\ 3\ 4\ 5} \\ \mathbf{3\ 4\ 1\ 5\ 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1\ 2\ 3\ 4\ 5} \\ \mathbf{3\ 1\ 2\ 4\ 5} \end{pmatrix},$$

այսինքն՝ $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$: Այդպիսի օրինակներ կարելի է բերել բոլոր $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{3}$ համար, չնայած տեղադրությունների ինչ-որ զույգերի համար տեղափոխելիության օրենքը պատահաբար կարող է կատարվել: ■

4.13. *Հատկություն:* Տեղադրությունների բազմապատկում գործողությունը զուգորդական (ասոցիատիվ) է, այսինքն՝ կարելի է խոսել $\boldsymbol{n}$-րդ աստիճանի վերջավոր թվով տեղադրությունների արտադրյալի մասին՝ վերցված որոշակի կարգով:

Ապացույց: Իսկապես, դիցուք ունենք $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}$ դեղադրությունները, և ենթադրենք $\boldsymbol{i_1}$ սիմվոլը $\boldsymbol{A}$ տեղադրությունում անցնում է $\boldsymbol{i_2}$ սիմվոլին, $\boldsymbol{i_2}$ սիմվոլը $\boldsymbol{B}$ տեղադրությունում անցնում է $\boldsymbol{i_3}$ սիմվոլին, իսկ վերջինս $\boldsymbol{C}$ տեղադրությունում անցնում է $\boldsymbol{i_4}$ սիմվոլին: Այդ դեպքում $\boldsymbol{i_1}$ սիմվոլը $\boldsymbol{AB}$ տեղադրությունում անցնում է $\boldsymbol{i_3}$ սիմվոլին, իսկ $\boldsymbol{i_2}$ սիմվոլը $\boldsymbol{BC}$ տեղադրությունում անցնում է $\boldsymbol{i_4}$ սիմվոլին: Այդ պատճառով $\boldsymbol{i_1}$ սիմվոլն ինչպես $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$ տեղադրությունում, այնպես էլ $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ տեղադրությունում անցնում է $\boldsymbol{i_4}$ սիմվոլին:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \cdots & \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{\alpha_1} & \boldsymbol{\alpha_2} & \cdots & \boldsymbol{\alpha_n} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha_1} & \boldsymbol{\alpha_2} & \cdots & \boldsymbol{\alpha_n} \\ \boldsymbol{\beta_1} & \boldsymbol{\beta_2} & \cdots & \boldsymbol{\beta_n} \end{pmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta_1} & \boldsymbol{\beta_2} & \cdots & \boldsymbol{\beta_n} \\ \boldsymbol{\gamma_1} & \boldsymbol{\gamma_2} & \cdots & \boldsymbol{\gamma_n} \end{pmatrix}:$$

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \cdots & \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{\beta_1} & \boldsymbol{\beta_2} & \cdots & \boldsymbol{\beta_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta_1} & \boldsymbol{\beta_2} & \cdots & \boldsymbol{\beta_n} \\ \boldsymbol{\gamma_1} & \boldsymbol{\gamma_2} & \cdots & \boldsymbol{\gamma_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \cdots & \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{\gamma_1} & \boldsymbol{\gamma_2} & \cdots & \boldsymbol{\gamma_n} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \cdots & \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{\alpha_1} & \boldsymbol{\alpha_2} & \cdots & \boldsymbol{\alpha_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha_1} & \boldsymbol{\alpha_2} & \cdots & \boldsymbol{\alpha_n} \\ \boldsymbol{\gamma_1} & \boldsymbol{\gamma_2} & \cdots & \boldsymbol{\gamma_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \cdots & \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{\gamma_1} & \boldsymbol{\gamma_2} & \cdots & \boldsymbol{\gamma_n} \end{pmatrix}: \qquad \blacksquare$$

Ակնհայտ է, որ ցանկացած $\boldsymbol{A}$ տեղադրության արտադրյալը $\boldsymbol{E}$ նույնական տեղադրության հետ, ինչպես նաև $\boldsymbol{E}$ տեղադրության արտադրյալը $\boldsymbol{A}$ տեղադրության հետ հավասար է $\boldsymbol{A}$.

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}:$$

Հետևաբար տեղադրությունների բազմապատկում գործողությունն օժտված է **միավոր տարրով**:

Այնուհետև, եթե միևնույն աստիճանի $\boldsymbol{A}$ և $\boldsymbol{B}$ տեղադրությունների համար

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E},$$

ապա $\boldsymbol{A}$ ($\boldsymbol{B}$) տեղադրությունը կոչվում է $\boldsymbol{B}$ ($\boldsymbol{A}$) տեղադրության **հակադարձ տեղադրություն** և նշանակվում է $\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{B}^{-1}$ ($\boldsymbol{B} \equiv \boldsymbol{A}^{-1}$) գրությամբ: Հեշտ է նկատել, որ

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \cdots & \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{\alpha_1} & \boldsymbol{\alpha_2} & \cdots & \boldsymbol{\alpha_n} \end{pmatrix}$$

տեղադրության հակադարձ տեղադրություն հանդիսանում է

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha_1} & \boldsymbol{\alpha_2} & \cdots & \boldsymbol{\alpha_n} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \cdots & \boldsymbol{n} \end{pmatrix}$$

տեղադրությունը, որը $\boldsymbol{A}$ տեղադրությունից ստացվում է նրա տողերի տեղափոխությամբ:

Այժմ դիտարկենք այն տեղադրությունները, որոնք ստացվում են $\boldsymbol{E}$ նույնական տեղադրությունից՝ նրա ներքևի տողում կատարելով մեկ տրանսպոզիցիա: Այդպիսի տեղադրությունները կենտ են, նրանք կոչվում են **տրանսպոզիցիաներ** և ունեն

$$\begin{pmatrix} \cdots & \boldsymbol{i} & \cdots & \boldsymbol{j} & \cdots \\ \cdots & \boldsymbol{j} & \cdots & \boldsymbol{i} & \cdots \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

տեսքը, որտեղ իրենց տեղերում մնացող սիմվոլները փոխարինված են բազմակետերով: Այդ տրանսպոզիցիան նշանակենք $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$: Կամայական $\boldsymbol{A}$ տեղադրության (4.4) գրառման ներքևի տողի $\boldsymbol{\alpha_i}, \boldsymbol{\alpha_j}$ սիմվոլների նկատմամբ տրանսպոզիցիայի կիրառումը համարժեք է՝ $\boldsymbol{A}$ տեղադրության և $(\boldsymbol{\alpha_i}, \boldsymbol{\alpha_j})$ տրանսպոզիցիայի աջից բազմապատկմանը.

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{\alpha_i},\boldsymbol{\alpha_j})=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\cdots & \boldsymbol{i} & \cdots & \boldsymbol{j} & \dots & \boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{\alpha_1}\cdots & \boldsymbol{\alpha_i} & \cdots & \boldsymbol{\alpha_j} & \dots & \boldsymbol{\alpha_n}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cdots & \boldsymbol{\alpha_i} & \cdots & \boldsymbol{\alpha_j} & \cdots\\ \cdots & \boldsymbol{\alpha_j} & \cdots & \boldsymbol{\alpha_i} & \cdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\cdots & \boldsymbol{i} & \cdots & \boldsymbol{j} & \dots & \boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{\alpha_1}\cdots & \boldsymbol{\alpha_j} & \cdots & \boldsymbol{\alpha_i} & \dots & \boldsymbol{\alpha_n}\end{pmatrix}:$$

Հայտնի է, որ $\boldsymbol{n}$ սիմվոլների բոլոր տեղափոխությունները կարելի է ստանալ նրանցից որևէ մեկից, օրինակ՝ $\mathbf{1},\mathbf{2},\dots,\boldsymbol{n}$ տեղափոխությունից, տրանսպոզիցիաների հաջորդական կատարման արդյունքում, այսինքն՝ (4.5) տեսքի տեղադրությունների հաջորդական բազմապատկման արդյունքում: Ուստի կարելի է պնդել (բաց թողնելով $\boldsymbol{E}$ արտադրիչը), որ տեղի ունի հետևյալը.

4.14. *Թեորեմ:* Յուրաքանչյուր տեղադրություն ներկայացվում է վերջավոր թվով տրանսպոզիցիաների արտադյալի տեսքով:

4.15. *Օրինակ:*

$$\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{2}&\mathbf{3}&\mathbf{4}&\mathbf{5}\\ \mathbf{2}&\mathbf{5}&\mathbf{4}&\mathbf{3}&\mathbf{1}\end{pmatrix}=(\mathbf{12})(\mathbf{15})(\mathbf{34})=(\mathbf{14})(\mathbf{24})(\mathbf{45})(\mathbf{34})(\mathbf{13}):$$

Ամեն մի տեղադրություն կարելի է տարբեր եղանակներով վերլուծել տրանսպոզիցիաների արտադրյալի. օրինակ միշտ կարելի է ավելացնել $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})$, $(\boldsymbol{j},\boldsymbol{i})$ երկու միանման արտադրիչները, որոնց արտադրյալը հավասար է $\boldsymbol{E}$ միավոր տեղադրությանը: Տեղադրության զույգության որոշման նոր եղանակը հիմնված է հետևյալ թեորեմի վրա:

4.16. *Թեորեմ:* Տրանսպոզիցիաների արտադրյալի՝ տեղադրության բոլոր վերլուծությունների դեպքում այդ տրանսպոզիցիաների թվի զույգությունը կլինի նույնը, ընդ որում այն համընկնում է տեղադրության զույգության հետ:

Ապացույց: Այս թեորեմը կլինի ապացուցված, եթե ցույց տանք, որ կամայական $\boldsymbol{k}$ տրանսպոզիցիաների արտադրյալը հանդիսանում է մի տեղադրություն, որի զույգությունը համընկնում է $\boldsymbol{k}$ թվի զույգության հետ: Երբ $\boldsymbol{k}=\mathbf{1}$, ապա պնդումը ճշմարիտ է, քանի որ տրանսպոզիցիան հանդիսանում է կենտ տեղադրություն: Ենթադրենք պնդումը տեղի ունի $(\boldsymbol{k}-\mathbf{1})$ արտադրիչների դեպքում: Այդ դեպքում $\boldsymbol{k}$ արտադրիչների համար նրա ճշմարիտ լինելը հետևում է նրանից, որ $(\boldsymbol{k}-\mathbf{1})$ և $\boldsymbol{k}$ թվերն ունեն հակառակ զույգություններ, իսկ տեղադրության, տվյալ դեպքում առաջին $(\boldsymbol{k}-\mathbf{1})$ տրանսպոզիցիաների արտադրյալի, բազմապատկումը տրանսպոզիցիայով համարժեք է տեղադրության ներքևի տողում այդ տրանսպոզիցիայի կատարմանը, այսինքն՝ փոխում է նրա զույգությունը: ■

Տեղադրությունների գրառման հարմար եղանակ է հանդիսանում նրանց վերլուծությունը ցիկլերի, որը թույլ է տալիս հեշտությամբ որոշել այդ տեղադրությունների զույգությունը: Որևէ n-րդ աստիճանի տեղադրություն կարող է $1, 2, \dots, n$ սիմվոլներից մի քանիսը թողնել իրենց տեղերում, իսկ մնացածներն՝ իրականում տեղաշարժել: **n-րդ աստիճանի ցիկլ** (կամ պարզապես **ցիկլ**) կոչվում է

$$\begin{pmatrix} *** & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_{m-1} & \alpha_m & *** \\ *** & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \cdots & \alpha_m & \alpha_1 & *** \end{pmatrix}$$

տեսքի տեղադրությունը (իրենց տեղերում մնացող սիմվոլները փոխարինված են աստղանիշերով), որը հաճախ գրում են $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \cdots \alpha_{m-1}\, \alpha_m)$ տեսքով, իսկ m կոչվում է ցիկլի երկարություն: Յուրաքանչյուր տրանսպոզիցիա հանդիսանում է երկու երկարությամբ ցիկլ: n-րդ աստիճանի երկու ցիկլեր կոչվում են **անկախ**, եթե նրանք չունեն ընդհանուր՝ իրականում տեղաշարժվող սիմվոլներ ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ սիմվոլները հանդիսանում են $(\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_m)$ ցիկլի իրականում տեղաշարժվող սիմվոլներ): Հեշտ է համոզվել, որ ցանկացած երկու անկախ ցիկլերի արտադրյալը տեղափոխելի է:

4.17. *Թեորեմ:* Յուրաքանչյուր տեղադրություն կարելի է միակ ձևով վերլուծել զույգ առ զույգ անկախ ցիկլերի արտադրյալի:

Ապացույց: Փաստացի վերլուծությունն իրականացվում է հետևյալ կերպ. սկսում ենք ցանկացած իրականում տեղաշարժվող սիմվոլից և նրանից հետո դուրս ենք գրում այն սիմվոլները, որոնց այդ սիմվոլն անցնում է տեղադրության կրկնությունների դեպքում, մինչև սկզբնական սիմվոլին վերադառնալը: Այդ ցիկլի «փակումից» հետո սկսում ենք մնացած իրականում տեղաշարժվող սիմվոլներից կամայականից, ստանում ենք երկրորդ ցիկլը և այսպես շարունակ: Պարզ է, որ ցիկլերի դասավորվածության կարգի ճշտությամբ նշված վերլուծությունը միակն է: ■

4.18. *Օրինակ:*

a) $\begin{pmatrix} \mathbf{1\,2\,3\,4\,5} \\ \mathbf{3\,5\,1\,2\,4} \end{pmatrix} = (\mathbf{13})(\mathbf{254})$:

b) $\begin{pmatrix} \mathbf{1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8} \\ \mathbf{5\,2\,8\,7\,6\,1\,4\,3} \end{pmatrix} = (\mathbf{156})(\mathbf{38})(\mathbf{47})$:

Դիցուք տրված է $\boldsymbol{n}$-րդ աստիճանի տեղադրություն, և $\boldsymbol{s}$ հանդիսանում է նրա վերլուծությունում անկախ ցիկլերի քանակը՝ գումարած այդ տեղադրությունում իրենց տեղերում մնացող սիմվոլների քանակը: Այդ դեպքում $(\boldsymbol{n-s})$ տարբերությունը կոչվում է այդ տեղադրության **դեկրեմենտ**: Ակնհայտ է, որ դեկրեմենտը հավասար է իրականում տեղաշարժվող սիմվոլների և տեղադրության վերլուծության մեջ մտնող անկախ ցիկլերի տարբերությանը: Իսկապես, եթե անկախ ցիկլերի քանակը $\boldsymbol{k}$ է, իրականում տեղաշարժվող սիմվոլների քանակը $\boldsymbol{l}$ է, իսկ տեղում մնացող սիմվոլների քանակը՝ $\boldsymbol{m}$, ապա $\boldsymbol{n=l+m}$ և $\boldsymbol{s=k+m}$, և, հետևաբար, $\boldsymbol{n-s=l-k}$:

4.19. *Թեորեմ:* Տեղադրության զույգությունը համընկնում է այդ տեղադրության դեկրեմենտի զույգության հետ:

Ապացույց: Իսկապես, $\boldsymbol{k}$ երկարությամբ յուրաքանչյուր ցիկլ կարելի է ներկայացնել $(\boldsymbol{k-1})$ տրանսպոզիցիաների արտադրյալի միջոցով հետևյալ ձևով.

$$(\boldsymbol{\alpha_1\alpha_2\cdots\ \alpha_k})=(\boldsymbol{\alpha_1\alpha_2})(\boldsymbol{\alpha_1\alpha_3})\cdots(\boldsymbol{\alpha_1\alpha_k}):$$

Ենթադրենք ունենք $\boldsymbol{A}$ տեղադրության վերլուծությունն անկախ ցիկլերի: Եթե այդ վերլուծության յուրաքանչյուր ցիկլ նշված եղանակով ներկայացնենք տրանսպոզիցիաների արտադրյալով, ապա կստանանք $\boldsymbol{A}$ տեղադրության ներկայացումը տրանսպոզիցիաների արտադրյալով: Ակնհայտ է, որ այդ տրանսպոզիցիաների քանակը կլինի հավասար $\boldsymbol{A}$ տեղադրության իրականում տեղաշարժվող սիմվոլների և նրա վերլուծության մեջ մտնող անկախ ցիկլերի տարբերությանը, որը հավասար է դեկրեմենտին: Ուստի տարբերության զույգությունն որոշվում է դեկրեմենտի զույգությամբ: ■

§ 4.2. ՄԱՏՐԻՑՆԵՐ: ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՄԱՏՐԻՑՆԵՐԻ ՀԵՏ

Դիցուք $\boldsymbol{M}$ հանդիսանում է որևէ բազմություն, իսկ $\boldsymbol{k}$ և $\boldsymbol{n}$՝ բնական թվեր: $\boldsymbol{M}$ բազմության տարրերից կազմված

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \dots & \boldsymbol{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{k1}} & \boldsymbol{a_{k2}} & \dots & \boldsymbol{a_{kn}} \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

ուղղանկյուն աղյուսակը կոչվում է **մատրիցա $\boldsymbol{M}$ բազմության վրա** կամ պարզապես **մատրից(ա)**, եթե համատեքստից պարզ է, թե որ բազմությանն են պատկանում մատրիցան կազմող տարրերը:

Մատրիցի տարրերը համարակալվում են երկու ինդեքսներով: Առաջին ինդեքսը ցույց է տալիս տողի համարը, իսկ երկրորդը՝ սյան համարը, որոնց հատման տեղում գտնվում է դիտարկվող տարրը: Այսպիսով, (4.6) մատրիցի $\boldsymbol{a_{ij}}$ տարրը գտնվում է $\boldsymbol{i}$-րդ տողում և $\boldsymbol{j}$-րդ սյունում:

Եթե մատրիցան ունի $\boldsymbol{k}$ հատ տող և $\boldsymbol{n}$ հատ սյուն, ապա այն կոչվում է $(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{n})$-չափանի մատրիցա: Եթե մատրիցի տողերի քանակը հավասար է նրա սյուների քանակին և հավասար է $\boldsymbol{n}$, ապա մատրիցան կոչվում է $\boldsymbol{n}$-րդ կարգի **քառակուսի մատրիցա**, հակառակ դեպքում՝ ուղղանկյուն մատրիցա: $(\boldsymbol{1} \times \boldsymbol{n})$-չափանի մատրիցան կոչվում է $\boldsymbol{n}$-չափանի **վեկտոր-տող**, իսկ $(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{1})$-չափանի մատրիցան՝ $\boldsymbol{n}$-չափանի **վեկտոր-սյուն**:

Վերևում բերված (4.6) մատրիցի նշանակման համար օգտագործվում է նաև $\{\boldsymbol{a_{ij}}\}_{\boldsymbol{k\times n}}$ գրառումը: Այդ դեպքում $\boldsymbol{M}$ բազմության վրա սահմանված $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{a_{ij}}\}_{\boldsymbol{k\times n}}$ և $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{b_{ij}}\}_{\boldsymbol{p\times q}}$ **մատրիցների հավասարությունը** նշանակում է, որ $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{q}$ և $\boldsymbol{a_{ij}} = \boldsymbol{b_{ij}}$ բոլոր $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \dots, \boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \dots, \boldsymbol{n}$ համար, այսինքն՝ $\boldsymbol{A}$ և $\boldsymbol{B}$ մատրիցների չափերը նույն են և նրանց՝ միևնույն տեղերում գտնվող տարրերը հավասար են:

$\boldsymbol{M}$ բազմության վրա սահմանված $(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{n})$-չափանի բոլոր մատրիցների բազմությունը նշանակենք $\boldsymbol{M_{k\times n}}$: Որպես կանոն իբրև $\boldsymbol{M}$ բազմություն վերցվում է որոշակի հանրահաշվական կառուցվածք ունեցող բազմություն: Ուստի ամենուրեք կհամարենք, որ $\boldsymbol{M}$ հանդիսանում է կա՛մ $\mathbb{Q}$ ռացիոնալ, կա՛մ $\mathbb{R}$ իրական, կա՛մ էլ $\mathbb{C}$ կոմպլեքս թվային բազմություններից որևէ մեկը:

$\boldsymbol{4.20}$. *Սահմանում:* Եթե $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{a_{ij}}\}_{\boldsymbol{k\times n}}$ և $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{b_{ij}}\}_{\boldsymbol{k\times n}}$ մատրիցները պատկանում են $\boldsymbol{M_{k\times n}}$ բազմությանը, ապա այդ **մատրիցների գումար** կոչվում է $\boldsymbol{C} = \{\boldsymbol{c_{ij}}\}_{\boldsymbol{k\times n}} \in \boldsymbol{M_{k\times n}}$ մատրիցան, որտեղ $\boldsymbol{c_{ij}} = \boldsymbol{a_{ij}} + \boldsymbol{b_{ij}}$ բոլոր $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \dots, \boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \dots, \boldsymbol{n}$ համար: Այդ դեպքում կգրենք $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$: Այսպիսով, մատրիցների գումարումը հանգեցվում է նրանց՝ միևնույն տեղերում գտնվող տարրերի գումարմանը:

$\boldsymbol{4.21}$. *Օրինակ:* $$\begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{3} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{4} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{2} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{3} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{5} \\ \boldsymbol{4} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{5} & \boldsymbol{3} & \boldsymbol{4} \\ \boldsymbol{2} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{4} \end{pmatrix},$$

որտեղ մատրիցները կազմված են իրական թվերից:

Միայն զրոներից կազմված $(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{n})$-չափանի մատրիցան կոչվում է **զրոյական** և նշանակվում է $\boldsymbol{O}$: Նշենք մատրիցների գումարման մի քանի ակնհայտ

4.22. *Հատկություն:* Դիցուք $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in \boldsymbol{M}_{k\times n}$: Այդ դեպքում.

1) $\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C}$ *(զուգորդականություն).*

2) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$ *(տեղափոխելիություն).*

3) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{O} = \boldsymbol{O} + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$, *որտեղ* $\boldsymbol{O}$ *զրոյական մատրիցն է (ըստ գումարման միավորի գոյություն).*

4) *Ցանկացած* $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}_{k\times n}$ *մատրիցի համար գոյություն ունի այնպիսի* $\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{R}_{k\times n}$ *մատրիցա, որ* $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$: *Ընդ որում, եթե* $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{a}_{ij}\}_{k\times n}$, *ապա* $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{b}_{ij}\}_{k\times n}$, *որտեղ* $\boldsymbol{b}_{ij} = -\boldsymbol{a}_{ij}$ *բոլոր* $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \dots, \boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \dots, \boldsymbol{n}$ *համար (ըստ գումարման հակադարձի գոյություն):*

4.23. *Սահմանում:* Դիցուք $\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{M}$ և $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{a}_{ij}\}_{k\times n} \in \boldsymbol{M}_{k\times n}$: Այդ դեպքում $\boldsymbol{\lambda}$ **տարրի և** $\boldsymbol{A}$ **մատրիցի արտադրյալ** կոչվում է $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{b}_{ij}\}_{k\times n} \in \boldsymbol{M}_{k\times n}$ մատրիցան, որտեղ $\boldsymbol{b}_{ij} = \boldsymbol{\lambda a}_{ij}$ բոլոր $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \dots, \boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \dots, \boldsymbol{n}$ համար, և գրում են $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\lambda A}$ տեսքով:

4.24. *Հատկություն:* Դիցուք $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{M}$ և $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{M}_{k\times n}$: Այդ դեպքում.

1) $\boldsymbol{1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$

2) $(\boldsymbol{\lambda\mu})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\mu A})$

3) $(\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\mu})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\lambda A} + \boldsymbol{\mu A}$

4) $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{\lambda A} + \boldsymbol{\lambda B}$:

Նշված հատկությունների ապացույցները հետևում են մատրիցների գումար և մատրիցները թվով բազմապատկման գործողությունների սահմանումներից և $\boldsymbol{M}$ թվային բազմության հատկություններից:

4.25. *Սահմանում:* Դիցուք $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{a}_{ij}\}_{k\times n} \in \boldsymbol{M}_{k\times n}$ և $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{b}_{ij}\}_{n\times s} \in \boldsymbol{M}_{n\times s}$: Այդ դեպքում $\boldsymbol{A}$ և $\boldsymbol{B}$ **մատրիցների արտադրյալ** կոչվում է $\boldsymbol{C} = \{\boldsymbol{c}_{ij}\}_{k\times s} \in \boldsymbol{R}_{k\times s}$ մատրիցան, որտեղ

$$\boldsymbol{c}_{ij} = \sum_{l=1}^{n} \boldsymbol{a}_{il}\,\boldsymbol{b}_{lj} = \boldsymbol{a}_{i1}\boldsymbol{b}_{1j} + \boldsymbol{a}_{i2}\boldsymbol{b}_{2j} + \cdots + \boldsymbol{a}_{in}\boldsymbol{b}_{nj}$$

բոլոր $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \dots, \boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \dots, \boldsymbol{s}$ համար, և գրում են $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ տեսքով:

4.26. *Օրինակ:* Եթե $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{3\times 3}$ և $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{3\times 2}$, ապա $AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, սակայն BA մատրիցան որոշված չէ:

4.27. *Օրինակ:* Դիցուք $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{2\times 2}$ և $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{2\times 2}$: Այդ դեպքում $AB = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ և $BA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$:

Այս վերջին օրինակը ցույց է տալիս, որ գոյություն ունեն A և B մատրիցներ, որոնց համար $AB \neq BA$, այսինքն՝ **մատրիցների բազմապատկում գործողությունը տեղափոխելի (կոմուտատիվ) չէ:**

Նկատենք որ, $M_{n\times n}$ բազմության վրա մատրիցների գումարում և բազմապատկում գործողությունները հանդիսանում են հանրահաշվական գործողություններ:

4.28. *Հատկություն:*

1) Ցանկացած $A \in M_{k\times n}$, $B \in M_{n\times s}$, $C \in M_{s\times m}$ մատրիցների համար $A(BC) = (AB)C$, այսինքն՝ մատրիցների բազմապատկում գործողությունը զուգորդական (ասոցիատիվ) է:

2) *Կամայական $A \in M_{n\times n}$ մատրիցի համար $AE = EA = A$, որտեղ $E \in M_{n\times n}$* և

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \text{ (միավոր մատրիցա):}$$

3) *Ցանկացած $A, B, P \in M_{k\times n}$ և $C, Q, R \in M_{n\times s}$ մատրիցների համար*

$$(A + B)C = AC + BC \text{ և } P(Q + R) = PQ + PR:$$

4) *Ցանկացած $A \in M_{k\times n}$* և *$B \in M_{n\times s}$ մատրիցների և ցանկացած $\lambda \in M$ տարրի համար*

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B):$$

5) *Կամայական $A \in M_{n\times n}$ մատրիցի համար*

$$AO = OA = O \in M_{n\times n}:$$

Սակայն $AB = O$ հավասարությունից չի հետևում, որ $A = O$ կամ $B = O$: Իսկապես,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}:$$

Ապացույց: 1) Դիցուք $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}_{k\times n}$, $\boldsymbol{B} = \{b_{ij}\}_{n\times s}$, $\boldsymbol{C} = \{c_{ij}\}_{s\times m}$ և

$$AB = U = \{u_{ij}\}_{k\times s},\ BC = V = \{v_{ij}\}_{n\times m}$$

$$(AB)C = S = \{s_{ij}\}_{k\times m},\ A(BC) = T = \{t_{ij}\}_{k\times m}:$$

Մենք պետք է ապացուցենք, որ $A(BC) = (AB)C$, այսինքն՝ $S = T$: Ունենք, որ

$$u_{ip} = \sum_{q=1}^{n} a_{iq}b_{qp},\ v_{qj} = \sum_{p=1}^{s} b_{qp}\, c_{pj},$$

և, հետևաբար, համաձայն $S = UC$ և $T = AV$ հավասարությունների,

$$s_{ij} = \sum_{p=1}^{s} u_{ip}\, c_{pj} = \sum_{p=1}^{s} \left(\sum_{q=1}^{n} a_{iq}b_{qp}\right) c_{pj} = \sum_{p=1}^{s} \sum_{q=1}^{n} a_{iq}b_{qp}\, c_{pj},$$

$$t_{ij} = \sum_{q=1}^{n} a_{iq}v_{qj} = \sum_{q=1}^{n} a_{iq}\left(\sum_{p=1}^{s} b_{qp}\, c_{pj}\right) = \sum_{q=1}^{n} \sum_{p=1}^{s} a_{iq}b_{qp}\, c_{pj},$$

այսինքն՝ $s_{ij} = t_{ij}$ բոլոր $i = 1, 2, \dots, k$; $j = 1, 2, \dots, m$ համար:

2) Դիցուք $A = \{a_{ij}\}_{n\times n}$, $E = \{b_{ij}\}_{n\times n}$ և $AE = \{c_{ij}\}_{n\times n}$: Քանի որ E հանդիսանում է միավոր մատրիցա, ապա $b_{ij} = 0$, երբ $1 \le i \ne j \le n$, և $b_{jj} = 1$, երբ $j = 1, 2, \dots, n$, և

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} = a_{ij}b_{jj} = a_{ij},$$

բոլոր $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$ համար, այսինքն՝ $AE = A$: Նմանապես ապացուցվում է $EA = A$ հավասարությունը:

3) Ենթադրենք $A = \{a_{ij}\}_{k\times n}$, $B = \{b_{ij}\}_{k\times n}$, $C = \{c_{ij}\}_{n\times s}$, $A + B = U = \{u_{ij}\}_{k\times n}$, $AC = V = \{v_{ij}\}_{k\times s}$, $BC = W = \{w_{ij}\}_{k\times s}$, $(A + B)C = T = \{t_{ij}\}_{k\times s}$: Այդ դեպքում

$$t_{ij} = \sum_{q=1}^{n} u_{iq}\, c_{qj} = \sum_{q=1}^{n} \left(a_{iq} + b_{iq}\right) c_{qj} = \sum_{q=1}^{n} \left(a_{iq}c_{qj} + b_{iq}c_{qj}\right) =$$

$$= \sum_{q=1}^{n} a_{iq}\, c_{qj} + \sum_{q=1}^{n} b_{iq}\, c_{qj} = v_{ij} + w_{ij}$$

բոլոր $i = 1, 2, \dots, k$; $j = 1, 2, \dots, s$ համար: Այս հավասարությունների շղթան նշանակում է, որ $(A + B)C = AC + BC$: Նման եղանակով ապացուցվում է $P(Q + R) = PQ + PR$ հավասարությունը:

4) Դիցուք $\lambda \in R$, $A = \{a_{ij}\}_{k\times n}$, $B = \{b_{ij}\}_{n\times s}$, $AB = U = \{u_{ij}\}_{k\times s}$, $(\lambda A)B = W = \{w_{ij}\}_{k\times s}$ և $A(\lambda B) = V = \{v_{ij}\}_{k\times s}$: Այդ դեպքում

$\boldsymbol{\lambda(AB) = \{\lambda u_{ij}\}_{k\times s}}$, $\boldsymbol{\lambda A = \{\lambda a_{ij}\}_{k\times n}}$, $\boldsymbol{\lambda B = \{\lambda b_{ij}\}_{n\times s}}$ և, հետևաբար,

$$\boldsymbol{\lambda u_{ij} = \lambda \sum_{q=1}^{n} a_{iq}\, b_{qj} = \sum_{q=1}^{n} \lambda(a_{iq} b_{qj}) = \sum_{q=1}^{n} (\lambda a_{iq})\, b_{qj} = \sum_{q=1}^{n} a_{iq}\,(\lambda b_{qj})}$$

բոլոր $\boldsymbol{i = 1, 2, \dots, k}$; $\boldsymbol{j = 1, 2, \dots, s}$ համար: Ուստի ճշմարիտ են $\boldsymbol{\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)}$ հավասարությունները:

5) Այս հատկության ապացույցը հետևում է մատրիցների բազմապատկում գործողության սահմանումից և այն բանից, որ զրոյական մատրիցի բոլոր տարրերը զրոներ են: Ապացույցն ավարտված է: ■

Հաջորդիվ դիտարկենք $\boldsymbol{A = \{a_{ij}\}_{n\times n} \in M_{n\times n}}$ մատրիցան: Այդ մատրիցի $\boldsymbol{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}}$ տարրերը կազմում են նրա գլխավոր անկյունագիծը: Եթե $\boldsymbol{A}$ մատրիցի ոչ անկյունագծային բոլոր տարրերը զրոյական են, այսինքն՝ $\boldsymbol{a_{ij} = 0}$, երբ $\boldsymbol{i \neq j}$, ապա $\boldsymbol{A}$ կոչվում է **անկյունագծային մատրիցա** և նշանակվում է

$$\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}[\boldsymbol{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}}]$$

տեսքով: Եթե, բացի այդ, $\boldsymbol{a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn}}$, ապա $\boldsymbol{A}$ կոչվում է **սկալյար մատրիցա**: Այսպես $\boldsymbol{E}$ միավոր մատրիցան հանդիսանում է սկալյար մատրիցա: Ակնհայտ է, որ $\boldsymbol{n}$-րդ կարգի յուրաքանչյուր սկալյար մատրիցա կարելի է գրել $\boldsymbol{\lambda E}$ տեսքով, ինչ-որ $\boldsymbol{\lambda \in R}$ համար:

Դիտարկենք մատրիցների հետ կատարվող ևս մեկ գործողություն՝ շրջման (տրանսպոնացման) գործողությունը: Այդ գործողությունն ամեն մի $\boldsymbol{A \in M_{n\times n}}$ մատրիցին համապատասխանության մեջ է դնում նոր $\boldsymbol{A^T \in M_{n\times n}}$ մատրիցա, որը ստացվում է $\boldsymbol{A}$ մատրիցից՝ նրա տողերը դարձնելով նույն համարներով սյուներ: $\boldsymbol{A^T}$ մատրիցան կոչվում է $\boldsymbol{A}$ մատրիցի **շրջված (տրանսպոնացված) մատրիցա**: Այսպիսով, եթե

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}},$$

ապա

$$\boldsymbol{A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{k1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}}:$$

Դիցուք $A = \{a_{ij}\}_{k\times n}$ և $A^T = \{a'_{ij}\}_{n\times k}$: Այդ դեպքում $a'_{ij} = a_{ji}$, բոլոր $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, k$ համար:

4.29. *Հատկություն:*

1) *Եթե A և B այնպիսի մատրիցներ են, որ որոշված է AB արտադրյալը, ապա որոշված է նաև B^TA^T արտադրյալը և տեղի ունի*

$$(AB)^T = B^TA^T$$

հավասարությունը:

2) *Եթե A և B հանդիսանում են միևնույն չափի մատրիցներ, ապա*

$$(A + B)^T = A^T + B^T:$$

3) *Կամայական $A \in R_{k\times n}$ մատրիցի և կամայական $\lambda \in R$ տարրի համար*

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T:$$

Ապացույց: Սահմանափակվենք միայն (1) հատկության ապացույցով, քանի որ (2) և (3) հատկությունների ապացույցները տրիվիալ են: Եթե $A \in M_{k\times n}$ և որոշված է AB արտադրյալը, ապա $B \in M_{n\times s}$: Ուստի $B^T \in M_{s\times n}$, $A^T \in M_{n\times k}$ և B^TA^T արտադրյալը նույնպես որոշված է: Այժմ ստուգենք $(AB)^T = B^TA^T$ հավասարությունը: Նախ և առաջ նկատենք, որ $(AB)^T$ և B^TA^T մատրիցներն ունեն միևնույն $(s \times k)$-չափը: Դիցուք $A = \{a_{ij}\}_{k\times n}$, $B = \{b_{ij}\}_{n\times s}$, $AB = C = \{c_{ij}\}_{k\times s}$, $A^T = \{a'_{ij}\}_{n\times k}$, $B^T = \{b'_{ij}\}_{s\times n}$, $(AB)^T = \{c'_{ij}\}_{s\times k}$, $B^TA^T = \{d_{ij}\}_{s\times k}$: Հարկավոր է ապացուցել, որ $c'_{ij} = d_{ij}$ բոլոր $i = 1, 2, \dots, s$; $j = 1, 2, \dots, k$ համար: Իսկապես,

$$d_{ij} = \sum_{q=1}^{n} b'_{iq}\, a'_{qj} = \sum_{q=1}^{n} b_{qi}\, a_{jq} = \sum_{q=1}^{n} a_{jq}\, b_{qi} = c_{ji} = c'_{ij}$$

բոլոր $i = 1, 2, \dots, s$; $j = 1, 2, \dots, k$ համար: Ապացույցն ավարտված է: ■

Մատրիցների տեսությունում կարևոր դեր են խաղում այն մատրիցները, որոնք փոփոխության չեն ենթարկվում շրջման (տրանսպոնացման) դեպքում: Այդպիսի մատրիցներին անվանում են **սիմետրիկ մատրիցներ**: Եթե $A = \{a_{ij}\}_{k\times n}$ հանդիսանում է սիմետրիկ մատրիցա, ապա $A^T = A$, ինչը նշանակում է, որ $k = n$ և A հանդիսանում է $a_{ij} = a_{ji}$ պայմանով քառակուսի մատրիցա: Հակառակը, այդպիսի պայմանով յուրաքանչյուր քառակուսի մատրից սիմետրիկ է:

§ 4.3. ՈՐՈՇԻՉՆԵՐ: ՈՐՈՇԻՉՆԵՐԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Դիտարկենք M բազմության վրա տրված

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

քառակուսի մատրիցը: Կազմենք այդ մատրիցի անդամների բոլոր հնարավոր այնպիսի արտադրյալները, որոնք պարունակում են ճիշտ n հատ անդամ և այդ անդամները գտնվում են մատրիցի տարբեր տողերում և տարբեր սյուներում, այսինքն՝

$$a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots a_{n\alpha_n} \tag{4.8}$$

տեսքի արտադրյալները, որտեղ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ինդեքսները կազմում են $1, 2, \dots, n$ թվերի որևէ տեղափոխություն: Այդպիսի արտադրյալների քանակը հավասար է n սիմվոլների իրարից տարբեր տեղափոխությունների քանակին, այսինքն՝ հավասար է $n!$: Նկատենք, որ (4.8) արտադրյալին կարելի է համապատասխանության մեջ դնել նրա ինդեքսներից կազմված n-րդ աստիճանի

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

տեղադրությունը և հակառակը. (4.9) տեսքի յուրաքանչյուր տեղադրության միարժեքորեն համապատասխանում է (4.8) տեսքի արտադրյալ:

Այսուհետև կդիտարկենք միայն կամայական M բազմության վրա տրված քառակուսի մատրիցները և նրանց որոշիչները:

4.30. ***Սահմանում:*** n-րդ կարգի քառակուսի մատրիցին համապատասխան n-րդ կարգի **որոշիչ (դետերմինանտ)** կոչվում է $n!$ հատ անդամների հանրահաշվական գումար՝ կազմված հետևյալ կերպ. գումարի անդամներ հանդիսանում են մատրիցի տարբեր տողերում և տարբեր սյուներում գտնվող $\boldsymbol{n}$ հատ տարրերի բոլոր հնարավոր արտադրյալները, ընդ որում, անդամը հանդես է գալիս դրական նշանով, եթե նրա ինդեքսները կազմում են զույգ տեղադրություն, և բացասական նշանով՝ հակառակ դեպքում:

$\boldsymbol{A}$ մատրիցի որոշիչը նշանակվում է $|\boldsymbol{A}|$ տեսքով: Ընդունված են նաև

$$det(\boldsymbol{A}),\ \left|\boldsymbol{a_{ij}}\right|_{\boldsymbol{n\times n}},\ \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \dots & \boldsymbol{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{n1}} & \boldsymbol{a_{n2}} & \dots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{vmatrix}$$

նշանակումները: Այս նշանակումներից վերջինի գործածության դեպքում մատրիցի տարրերը, տողերը և սյուները համապատասխանաբար կոչվում են նաև նրա որոշիչի՝ տարրեր, տողեր և սյուներ:

Այժմ կնշենք $\boldsymbol{n}$-րդ կարգի որոշիչների մի քանի պարզագույն հատկություններ, որոնք գլխավորապես վերաբերում են հետևյալ երկու հարցերից մեկին. մի կողմից մեզ կհետաքրքրեն որոշիչի զրոյին հավասար լինելու պայմանները, մյուս կողմից կնշենք մատրիցի որոշակի ձևափոխություններ, որոնք չեն փոխում նրա որոշիչը կամ էլ նրան ենթարկում են չնչին փոփոխությունների:

Որոշիչի սահմանումից անմիջապես հետևում է, որ եթե ընդունենք

$$sgn(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{cases} \boldsymbol{1}, & \text{եթե } \boldsymbol{\alpha} \text{ զույգ տեղադրություն է} \\ \boldsymbol{-1}, & \text{եթե } \boldsymbol{\alpha} \text{ կենտ տեղադրություն է} \end{cases}$$

նշանակումը, ապա կամայական $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{a_{ij}}\}_{\boldsymbol{n\times n}} \in \boldsymbol{M_{n\times n}}$ մատրիցի համար կունենանք, որ

$$det(\boldsymbol{A}) = \sum_{\alpha\in S_n} sgn(\boldsymbol{\alpha}) \cdot \boldsymbol{a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\cdots a_{n\alpha_n}}:$$

Վերջինս կանվանենք $det(\boldsymbol{A})$ որոշիչի **հիմնական վերլուծություն**:

4.31. *Պնդում (Հատկություն* **1***):* Կամայական $\boldsymbol{A}$ քառակուսի մատրիցի և նրա շրջված (տրանսպոնացված) $\boldsymbol{A^T}$ մատրիցի որոշիչներն իրար հավասար են, այսինքն՝

$$det(\boldsymbol{A}) = det(\boldsymbol{A^T}):$$

Ապացույց: Դիտարկենք $det(\boldsymbol{A})$ որոշիչի հիմնական վերլուծության

$$\boldsymbol{a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\cdots a_{n\alpha_n}}$$

գումարելին: Նրա նշանը, որոշիչի հիմնական վերլուծության մեջ, որոշվում է

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2} & \cdots & \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{\alpha_1} & \boldsymbol{\alpha_2} & \cdots & \boldsymbol{\alpha_n} \end{pmatrix}$$

տեղադրության զույգությամբ: Այդ նույն գումարելին մասնակցում է նաև $det(\boldsymbol{A^T})$ որոշիչի հիմնական վերլուծության մեջ, քանի որ նրա արտադրիչները $det(\boldsymbol{A^T})$ որոշիչում մնում են տարբեր տողերում և տարբեր սյուներում, իսկ նրա նշանն որոշվում է

$$\boldsymbol{\alpha^{-1}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha_1} & \boldsymbol{\alpha_2} & \cdots & \boldsymbol{\alpha_n} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2} & \cdots & \boldsymbol{n} \end{pmatrix}$$

տեղադրության զույգությամբ: Բայց $\boldsymbol{\alpha}$ և $\boldsymbol{\alpha^{-1}}$ տեղադրություններն ունեն նույն զույգությունը: Հետևապես $\boldsymbol{a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\cdots a_{n\alpha_n}}$ գումարելին $det(\boldsymbol{A})$ և $det(\boldsymbol{A^T})$ որոշիչներում կունենա նույն նշանը: Ուրեմն նշված որոշիչներն իրար հավասար են: ■

Առաջին հատկությունից հետևում է, որ որոշիչի տողերին վերաբերող ցանկացած պնդում ճշմարիտ է նաև նրա սյուների համար և հակառակը, այսինքն՝ որոշիչում (ի տարբերություն մատրիցի) տողերը և սյուները հավասարազոր (իրավահավասար) են:

4.32. *Պնդում (Հատկություն* **2***):* Եթե որոշիչը պարունակում է զրոյական տող (սյուն), ապա այն հավասար է զրոյի:

Ապացույց: Իսկապես, դիցուք որոշիչի $\boldsymbol{i}$-րդ տողի բոլոր տարրերը հավասար են զրոյի: Որոշիչի հիմնական վերլուծության յուրաքանչյուր անդամ պետք է պարունակի մեկ տարր $\boldsymbol{i}$-րդ տողից, ուստի որոշիչի բոլոր անդամները, ինչպես նաև որոշիչը հավասար են զրոյի: ■

4.33. *Պնդում (Հատկություն* **3***):* Մատրիցի երկու տողերի (սյուների) դիրքափոխությունից ստացված մատրիցի որոշիչը հավասար է տրված մատրիցի որոշիչի հակադիրին, այսինքն՝ որոշիչի տողերի (սյուների) տեղափոխությունից նրա նշանը փոխվում է.

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{i1}} & \boldsymbol{a_{i2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{in}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{j1}} & \boldsymbol{a_{j2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{jn}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{n1}} & \boldsymbol{a_{n2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{j1}} & \boldsymbol{a_{j2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{jn}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{i1}} & \boldsymbol{a_{i2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{in}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{n1}} & \boldsymbol{a_{n2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{vmatrix}:$$

Ապացույց: Դիցուք $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{a_{ij}}\}_{\boldsymbol{n\times n}}$ մատրիցի $\boldsymbol{i}$-րդ և $\boldsymbol{j}$-րդ տողերի տեղափոխությունից ստացվել է $\boldsymbol{B}$ մատրիցը: Դիտարկենք $det(\boldsymbol{A})$ որոշիչի հիմնական վերլուծության որևէ

$$\boldsymbol{a_{1\alpha_1} \cdots a_{i\alpha_i} \cdots a_{j\alpha_j} \cdots a_{n\alpha_n}}$$

գումարելի: Նրա նշանն որոշվում է

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} \cdots & \boldsymbol{i} & \cdots & \boldsymbol{j} & \dots & \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{\alpha_1} \cdots & \boldsymbol{\alpha_i} & \cdots & \boldsymbol{\alpha_j} & \dots & \boldsymbol{\alpha_n} \end{pmatrix}$$

տեղադրության զույգությամբ: Սակայն նշված արտադրյալը մասնակցում է նաև $det(\boldsymbol{B})$ որոշիչի հիմնական վերլուծության մեջ: Բայց այդ մասնակցությունների միջև կա երկու տարբերություն. $\boldsymbol{a_{i\alpha_i}}$ տարրը գտնվում է $\boldsymbol{B}$ մատրիցի $\boldsymbol{j}$-րդ տողի $\boldsymbol{\alpha_i}$-րդ տեղում, իսկ $\boldsymbol{a_{j\alpha_j}}$ տարրը գտնվում է $\boldsymbol{B}$ մատրիցի $\boldsymbol{i}$-րդ տողի $\boldsymbol{\alpha_j}$-րդ տեղում: Հետևաբար $det(\boldsymbol{B})$ որոշիչի հիմնական վերլուծության մեջ

$$\boldsymbol{a_{1\alpha_1} \cdots a_{i\alpha_i} \cdots a_{j\alpha_j} \cdots a_{n\alpha_n}}$$

անդամի նշանը կորոշվի

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} \cdots & \boldsymbol{i} & \cdots & \boldsymbol{j} & \dots & \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{\alpha_1} \cdots & \boldsymbol{\alpha_j} & \cdots & \boldsymbol{\alpha_i} & \dots & \boldsymbol{\alpha_n} \end{pmatrix}$$

տեղադրության զույգությամբ: Սակայն $\boldsymbol{\alpha}$ և $\boldsymbol{\beta}$ տեղադրություններն ունեն տարբեր զույգություններ: Հետևապես $\boldsymbol{a_{1\alpha_1} \cdots a_{i\alpha_i} \cdots a_{j\alpha_j} \cdots a_{n\alpha_n}}$ արտադրյալը և, ուրեմն, $det(\boldsymbol{A})$ որոշիչի հիմնական վերլուծության յուրաքանչյուր գումարելի $det(\boldsymbol{B})$ որոշիչի հիմնական վերլուծության համապատասխան գումարելուց տարբերվում է միայն նշանով: Սա էլ նշանակում է, որ $det(\boldsymbol{A}) = -det(\boldsymbol{B})$: ■

$\boldsymbol{4.34}$. *Պնդում (Հատկություն* $\boldsymbol{4}$*):* Եթե մատրիցը պարունակում է երկու միատեսակ տող (սյուն), ապա նրա որոշիչը հավասար է զրոյի, այսինքն՝

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0:$$

Ապացույց: Դիցուք $A = \{a_{ij}\}_{n\times n}$ մատրիցն ունի երկու միատեսակ տող: Տեղափոխենք մատրիցի հենց այդ տողերը: Այդ դեպքում, համաձայն նախորդ հատկության, որոշիչը կփոխի նշանը: Մյուս կողմից, քանի որ դիրքափոխված տողերը միատեսակ են, ապա դիրքափոխությունից ստացված մատրիցը, հետևապես նաև նրա որոշիչը չեն փոխվի: Այսինքն՝ տրված մատրիցի որոշիչը մի թիվ է, որը հավասար է իրեն հակադիր թվին: Ուրեմն այն զրո է: ■

4.35. *Պնդում (Հատկություն 5):* Եթե մատրիցի որևէ տողի (սյան) բոլոր տարրերը բազմապատկենք որևէ k տարրով M բազմությունից, ապա ստացված մատրիցի որոշիչը հավասար կլինի տրված մատրիցի որոշիչի և k տարրի արտադրյալին, այսինքն՝

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}:$$

Ապացույց: Դիցուք $A = \{a_{ij}\}_{n\times n}$ մատրիցի i-րդ տողը բազմապատկել ենք k տարրով և ստացել B մատրիցը: Այդ դեպքում

$$det(B) = \sum_{\alpha\in S_n} sgn(\alpha)\cdot a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\cdots\left(ka_{i\alpha_i}\right)\cdots a_{n\alpha_n} =$$

$$= k\cdot \sum_{\alpha\in S_n} sgn(\alpha)\cdot a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\cdots a_{i\alpha_i}\cdots a_{n\alpha_n} = k\cdot det(A): \quad ■$$

4.36. *Պնդում (Հատկություն 6):* Եթե մատրիցը պարունակում է պատիկ տողեր (սյուներ), ապա նրա որոշիչը հավասար է զրոյի, այսինքն՝

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0:$$

Ապացույցը հետևում է նախորդ երկու հատկություններից: ■

4.37. *Պնդում (Հատկություն 7):* Եթե մատրիցի i-րդ տողի (սյան) յուրաքանչյուր տարր երկու գումարելիների գումար է, ապա նրա որոշիչը հավասար է երկու մատրիցների որոշիչների գումարին, որոնցից առաջինի i-րդ տողում (սյունում) գտնվում են տրված մատրիցի i-րդ տողի (սյան) առաջին գումարելիները, իսկ երկրորդ մատրիցի i-րդ տողում (սյունում)՝ տրված մատրիցի i-րդ տողի (սյան) երկրորդ գումարելիները, իսկ այդ մատրիցների մնացած տողերը (սյուները) համընկնում են տրված մատրիցի համապատասխան տողերի (սյուների) հետ, այսինքն՝

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{i1}+a''_{i1} & a'_{i2}+a''_{i2} & \cdots & a'_{in}+a''_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a''_{i1} & a''_{i2} & \cdots & a''_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}:$$

Ապացույց: Այս վերջին հավասարության ձախ մասը նշանակենք d, իսկ աջ մասի գումարելիները համապատասխանաբար՝ d' և d'': Այդ դեպքում, ըստ սահմանման

$$d = \sum_{\alpha \in S_n} sgn(\alpha) \cdot a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots \left(a'_{i\alpha_i} + a''_{i\alpha_i}\right) \cdots a_{n\alpha_n} =$$

$$= \sum_{\alpha \in S_n} sgn(\alpha) \cdot a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots a'_{i\alpha_i} \cdots a_{n\alpha_n} + \sum_{\alpha \in S_n} sgn(\alpha) \cdot a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots a''_{i\alpha_i} \cdots a_{n\alpha_n}$$

$$= d' + d'':$$ ■

Կասենք, որ մատրիցի i-րդ տողը (սյունը) հանդիսանում է մնացած տողերի (սյուների) **գծային կոմբինացիա**, եթե գոյություն ունեն այնպիսի $k_1, \dots, k_{i-1}, k_{i+1}, \dots, k_n$ տարրեր M բազմությունից, որ յուրաքանչյուր j-րդ տող (սյուն) բազմապատկելով k_j տարրով ($j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$), այնուհետև գումարելով ստացված բոլոր տողերի (սյուների) համապատասխան տարրերը՝ արդյունքում կստանանք մատրիցի $\boldsymbol{i}$-րդ տողը (սյունը): Նշված $\boldsymbol{k_1}, \dots, \boldsymbol{k_{i-1}}, \boldsymbol{k_{i+1}}, \dots, \boldsymbol{k_n}$ տարրերը կոչվում են **գծային կոմբինացիայի գործակիցներ**: Հնարավոր է, որ այդ գործակիցներից մի քանիսը լինեն զրոյական: Դա նշանակում է, որ իրականում $\boldsymbol{i}$-րդ տողը (սյունը) հանդիսանում է մատրիցի մնացած ոչ բոլոր տողերի (սյուների) գծային կոմբինացիա: Մասնավորապես, եթե $\boldsymbol{k_j}$ տարրերից միայն մեկն է ոչ զրոյական, ապա ստանում ենք պատիկ տողերի (սյուների) դեպքը: Վերջապես, եթե մատրիցի տողը (սյունը) կազմված է միայն զրոներից, ապա այն միշտ հանդիսանում է մնացած տողերի (սյուների) գծային կոմբինացիան. բոլոր գործակիցները հավասար են զրոյի:

$\mathbf{4.38}$. *Պնդում (Հատկություն* $\mathbf{8}$*):* Եթե մատրիցի որևէ տող (սյուն) բազմապատկենք $\boldsymbol{M}$ բազմության ցանկացած տարրով և գումարենք մեկ այլ տողի (սյան), ապա ստացված մատրիցի որոշիչը հավասար կլինի տրված մատրիցի որոշիչին, այսինքն՝

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{i1}+ka_{j1}} & \boldsymbol{a_{i2}+ka_{j2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{in}+ka_{jn}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{j1}} & \boldsymbol{a_{j2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{jn}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{n1}} & \boldsymbol{a_{n2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{i1}} & \boldsymbol{a_{i2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{in}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{j1}} & \boldsymbol{a_{j2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{jn}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{n1}} & \boldsymbol{a_{n2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{vmatrix}:$$

Ապացույց: Բավական է օգտվել (7) և (6) հատկություններից: ■

$\mathbf{4.39}$. *Պնդում (Հատկություն* $\mathbf{9}$*):* Եթե մատրիցի որևէ տողին (սյանը) գումարենք նրա այլ տողերի (սյուների) գծային կոմբինացիա, ապա ստացված մատրիցի որոշիչը հավասար կլինի տրված մատրիցի որոշիչին:

Ապացույցը հետևում է (8) հատկությունից: ■

$\mathbf{4.40}$. *Պնդում (Հատկություն* $\mathbf{10}$*):* Եթե մատրիցի որևէ տող (սյուն) հանդիսանում է մնացած տողերի (սյուների) գծային կոմբինացիա, ապա նրա որոշիչը հավասար է զրոյի:

Ապացույց: Դիցուք մատրիցի $\boldsymbol{i}$-րդ տողը հանդիսանում է ուրիշ $\boldsymbol{s}$ $(\mathbf{1} \le \boldsymbol{s} \le \boldsymbol{n}-\mathbf{1})$ տողերի գծային կոմբինացիա: Այդ դեպքում $\boldsymbol{i}$-րդ տողի յուրաքանչյուր տարր հանդիսանում է $\boldsymbol{s}$ տարրերի գումար և, հետևաբար, կիրառելով (7) հատկությունը՝ ստանում ենք, որ տրված մատրիցի որոշիչը հավասար է s թվով որոշիչների գումարին, որոնցից յուրաքանչյուրում i-րդ տողը պատիկ է մնացած տողերից մեկին: Համաձայն (6) հատկության, բոլոր այդ որոշիչները հավասար են զրոյի: Դա նշանակում է, որ տրված մատրիցի որոշիչը նույնպես հավասար է զրոյի: ■

§ 4.4. ՄԻՆՈՐՆԵՐ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ԼՐԱՑՈՒՄՆԵՐԸ

Դիցուք d հանդիսանում է n-րդ ($n > 1$) կարգի որոշիչ և $1 \leq k \leq n-1$: Այդ որոշիչում ընտրենք k հատ տող և k հատ սյուն համապատասխանաբար $i_1, i_2, \dots, i_k$ և $j_1, j_2, \dots, j_k$ համարներով: Ընտրված տողերի և սյուների հատման տեղերում գտնվող տարրերը կազմում են k-րդ կարգի քառակուսի մատրից: Այդ մատրիցի որոշիչը կոչվում է d որոշիչի **k-րդ կարգի մինոր**: Վերջինս նշանակենք $\mathcal{M}$ տառով: Հաճախակի ասում են, որ $\mathcal{M}$ մինորը գտնվում է d որոշիչի $i_1, i_2, \dots, i_k$ համարներով տողերում և $j_1, j_2, \dots, j_k$ համարներով սյուներում:

Այնուհետև, d որոշիչի այն տարրերը, որոնք չեն գտնվում նշված տողերում և սյուներում, իրենց հերթին կազմում են $(n-k)$-րդ կարգի քառակուսի մատրից: Այդ մատրիցի որոշիչը կոչվում է $\mathcal{M}$ մինորի **լրացուցիչ մինոր** և նշանակվում է $\mathcal{M}^*$ սիմվոլով: Կարելի է ասել, որ $\mathcal{M}^*$ լրացուցիչ մինորը ստացվում է՝ d որոշիչում ջնջելով $i_1, i_2, \dots, i_k$ համարներով տողերը և $j_1, j_2, \dots, j_k$ համարներով սյուները:

Եթե $\mathcal{M}$ մինորը գտնվում է $i_1, i_2, \dots, i_k$ համարներով տողերում և $j_1, j_2, \dots, j_k$ համարներով սյուներում, ապա $\mathcal{M}$ մինորի **հանրահաշվական լրացում** կոչվում է նրա $\mathcal{M}^*$ լրացուցիչ մինորը՝ վերցված $(-1)^s$ նշանով, որտեղ $s = i_1 + \dots + i_k + j_1 + \dots + j_k$: Այս սահմանումից հետևում է, որ եթե $A = (-1)^s \mathcal{M}^*$ հանդիսանում է $\mathcal{M}$ մինորի հանրահաշվական լրացումը, ապա նրա անդամ կհանդիսանա $\mathcal{M}^*$ լրացուցիչ մինորի ցանկացած անդամ՝ բազմապատկած $(-1)^s$ թվով:

4.41. *Լեմմա:* Դիցուք d հանդիսանում է n-րդ ($n > 1$) կարգի որոշիչ, $\mathcal{M}$՝ նրա որևէ k-րդ կարգի մինոր, իսկ A հանդիսանում է $\mathcal{M}$ մինորի հանրահաշվական լրացումը: Այդ դեպքում $\mathcal{M}$ մինորի ցանկացած անդամի և $\boldsymbol{A}$ հանրահաշվական լրացման ցանկացած անդամի արտադրյալը հանդիսանում է $\boldsymbol{d}$ որոշիչի որոշակի անդամ:

Ապացույցը սկսենք այն դեպքից, երբ $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ մինորը գտնվում է $\boldsymbol{d}$ որոշիչի վերևի ձախ անկյունում.

$$\boldsymbol{d} = \left|\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \mathcal{M} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{kn} \\ \hline a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \mathcal{M}^* & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right|,$$

այսինքն՝ $\boldsymbol{1,2,\ldots,k}$ համարներով տողերում և սյուներում: Այդ դեպքում $\boldsymbol{\mathcal{M}^*}$ լրացուցիչ մինորը կգտնվի $\boldsymbol{d}$ որոշիչի ներքևի աջ անկյունում և, քանի որ $\boldsymbol{s = 1 + \cdots + k + 1 + \cdots + k = 2 \cdot (1 + \cdots + k)}$, ապա $\boldsymbol{A = (-1)^s \mathcal{M}^* = \mathcal{M}^*}$:

Դիտարկենք $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ մինորի կամայական $\boldsymbol{(-1)^l a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots a_{k\alpha_k}}$ անդամ, որտեղ $\boldsymbol{l}$ հանդիսանում է

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k \end{pmatrix}$$

տեղադրության ինվերսիաների քանակը: Ենթադրենք նաև, որ $\boldsymbol{(-1)^m a_{k+1,\beta_{k+1}} a_{k+2,\beta_{k+2}} \cdots a_{n\beta_n}}$ հանդիսանում է $\boldsymbol{\mathcal{M}^*}$ լրացուցիչ մինորի որևէ անդամ, որտեղ $\boldsymbol{m}$ տառով նշանակված է

$$\begin{pmatrix} k+1 & k+2 & \cdots & n \\ \beta_{k+1} & \beta_{k+2} & \cdots & \beta_n \end{pmatrix}$$

տեղադրության ինվերսիաների քանակը: Բազմապատկելով $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ և $\boldsymbol{\mathcal{M}^*}$ մինորների նշված անդամները՝ ստանում ենք $\boldsymbol{d}$ որոշիչի $\boldsymbol{n}$ տարրերի

$$\boldsymbol{(-1)^{l+m} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots a_{k\alpha_k} a_{k+1,\beta_{k+1}} a_{k+2,\beta_{k+2}} \cdots a_{n\beta_n}}$$

արտադրյալը, որոնք գտնվում են որոշիչի տարբեր տողերում և սյուներում, այսինքն ստանում ենք $\boldsymbol{d}$ որոշիչի հիմնական վերլուծության անդամ, որովհետև այդ անդամի նշանն որոշվում է

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & k+1 & k+2 & \cdots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k & \beta_{k+1} & \beta_{k+2} & \cdots & \beta_n \end{pmatrix}$$

տեղադրության զույգությամբ, որը հավասար է $\boldsymbol{l+m}$ թվի զույգությանը, քանի որ ո՛չ մի $(\boldsymbol{\alpha_i},\boldsymbol{\beta_j})$ զույգ ինվերսիա չի կազմում. $\mathbf{1} \le \boldsymbol{\alpha_i} \le \boldsymbol{k}$ և $\boldsymbol{k}+\mathbf{1} \le \boldsymbol{\beta_j} \le \boldsymbol{n}$: Սրանով ավարտվեց լեմմայի մասնավոր դեպքի ապացույցը:

Այժմ անդրադառնանք ընդհանուր դեպքին, երբ $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ մինորը գտնվում է $\boldsymbol{i_1},\boldsymbol{i_2},\dots,\boldsymbol{i_k}$ համարներով տողերում և $\boldsymbol{j_1},\boldsymbol{j_2},\dots,\boldsymbol{j_k}$ համարներով սյուներում, ընդ որում

$$\boldsymbol{i_1} < \boldsymbol{i_2} < \cdots < \boldsymbol{i_k} \text{ և } \boldsymbol{j_1} < \boldsymbol{j_2} < \cdots < \boldsymbol{j_k}:$$

Այս դեպքը կարելի է հանգեցնել վերը դիտարկված դեպքին՝ օգտվելով 4.33 պնդման ապացույցի ընթացքում ստացված փաստից, որի համաձայն, եթե $\boldsymbol{d}$ որոշիչում տեղերով փոխենք երկու տող (սյուն), ապա կստացվի նոր որոշիչ, որի յուրաքանչյուր անդամ հավասար է $\boldsymbol{d}$ որոշիչի որևէ անդամի՝ վերցված հակառակ նշանով:

Ապացույցի հիմնական գաղափարը կայանում է նրանում, որ $\boldsymbol{d}$ որոշիչում սկզբում փոխելով տողերի տեղերը, իսկ հետո սյուների տեղերը՝ ստանալ նոր $\widetilde{\boldsymbol{d}}$ որոշիչ, որի վերևի ձախ անկյունում գտնվում է $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ մինորը, իսկ նրա լրացուցիչ $\boldsymbol{\mathcal{M}}^*$ մինորը գտնվում է $\widetilde{\boldsymbol{d}}$ որոշիչի ներքևի աջ անկյունում: Դրան կարելի է հասնել հետևյալ կերպ:

Հաջորդաբար $\boldsymbol{d}$ որոշիչի $\boldsymbol{i_1}$-րդ տողը դիրքափոխենք $(\boldsymbol{i_1}-\mathbf{1})$-րդ տողի հետ, դրանից հետո $(\boldsymbol{i_1}-\mathbf{2})$-րդ տողի հետ և այսպես շարունակ մինչև $\boldsymbol{i_1}$-րդ տողը չզրավի առաջին տողի տեղը: Պահանջվում է կատարել ընդամենը $(\boldsymbol{i_1}-\mathbf{1})$ դիրքափոխություն: Նմանապես $\boldsymbol{i_2}$-րդ տողը կտեղափոխենք երկրորդ տողի տեղը՝ կատարելով $(\boldsymbol{i_2}-\mathbf{2})$ դիրքափոխություն, և այսպես շարունակ: Վերջապես $\boldsymbol{i_k}$-րդ տողը $(\boldsymbol{i_k}-\boldsymbol{k})$ դիրքափոխություններից հետո կզրավի $\boldsymbol{k}$-րդ տողի տեղը: Այս ամենի համար կպահանջվի ընդհամենը

$$(\boldsymbol{i_1}-\mathbf{1})+(\boldsymbol{i_2}-\mathbf{2})+\cdots+(\boldsymbol{i_k}-\boldsymbol{k})=(\boldsymbol{i_1}+\boldsymbol{i_2}+\cdots+\boldsymbol{i_k})-(\mathbf{1}+\mathbf{2}+\cdots+\boldsymbol{k})$$

դիրքափոխություն:

Նմանապես, հաջորդաբար փոխելով որոշիչի հարևան սյուների տեղերը, կհասնենք նրան, որ $\boldsymbol{j_1}$-րդ սյունը կզբաղեցնի առաջին սյան տեղը, $\boldsymbol{j_2}$-րդ սյունը՝ երկրորդ սյան տեղը, և, վերջապես, $\boldsymbol{j_k}$-րդ սյունը՝ $\boldsymbol{k}$-րդ սյան տեղը: Դրա համար կպահանջվի սյուները տեղափոխել

$$(\boldsymbol{j_1}-\mathbf{1})+(\boldsymbol{j_2}-\mathbf{2})+\cdots+(\boldsymbol{j_k}-\boldsymbol{k})=(\boldsymbol{j_1}+\boldsymbol{j_2}+\cdots+\boldsymbol{j_k})-(\mathbf{1}+\mathbf{2}+\cdots+\boldsymbol{k})$$

անգամ:

Որոնելի $\widetilde{d}$ որոշիչը ստացվում է d որոշիչից նրա հարևան տողերի և սյուների

$$(i_1 + i_2 + \cdots + i_k) + (j_1 + j_2 + \cdots + j_k) - 2(1 + 2 + \cdots + k) =$$
$$= s - 2(1 + 2 + \cdots + k)$$

հատ տեղափոխությունների միջոցով, որտեղ

$$s = (i_1 + i_2 + \cdots + i_k) + (j_1 + j_2 + \cdots + j_k):$$

Քանի որ ամեն անգամ մենք դիրքափոխել ենք միայն հարևան տողերը և սյուները, ապա d որոշիչում $\mathcal{M}^*$ մինորը պարունակող տողերի և սյուների փոխադարձ դասավորվածությունը մնում է անփոփոխ, ուստի $\widetilde{d}$ որոշիչում որպես $\mathcal{M}$ մինորի լրացուցիչ մինոր մնում է $\mathcal{M}^*$ մինորը, որը գտնվում է արդեն $\widetilde{d}$ որոշիչի ներքևի աջ անկյունում: Հետևաբար $\widetilde{d}$ որոշիչի ցանկացած անդամ հավասար է d որոշիչի որևէ անդամի՝ բազմապատկած $(-1)^{s-2(1+2+\cdots+k)} = (-1)^s$ թվով:

Այժմ ենթադրենք, որ f հանդիսանում է $\mathcal{M}$ մինորի որևէ անդամ, իսկ f^*՝ նրա $\mathcal{M}^*$ լրացուցիչ մինորի որևէ անդամ: Համաձայն սահմանման, $(-1)^s f^*$ հանդիսանում է $\mathcal{M}$ մինորի A հանրահաշվական լրացման անդամ: Ունենք, որ

$$f \cdot (-1)^s f^* = (-1)^s f \cdot f^*:$$

Քանի որ $\mathcal{M}$ մինորը գտնվում է $\widetilde{d}$ որոշիչի վերևի ձախ անկյունում, իսկ նրա $\mathcal{M}^*$ լրացուցիչ մինորը՝ ներքևի աջ անկյունում, ապա $f \cdot f^*$ հանդիսանում է $\widetilde{d}$ որոշիչի անդամ: Բայց այդ դեպքում $(-1)^s f \cdot f^*$ արտահայտությունը պետք է հանդիսանա d որոշիչի անդամ: Լեմմայի ապացույցն ավարտված է: ■

Ապացուցված լեմման թույլ է տալիս ստանալ հետևյալ կարևոր արդյունքը.

4.42. *Թեորեմ (Լապլաս):* Դիցուք n-րդ կարգի d որոշիչում կամայական ձևով ընտրված են k հատ տող (կամ k հատ սյուն), $1 \leq k \leq n-1$: Այդ դեպքում ընտրված տողերում (սյուներում) գտնվող բոլոր k-րդ կարգի մինորների և նրանց հանրահաշվական լրացումների արտադրյալների գումարը հավասար է d որոշիչին:

Ապացույց: Դիցուք d որոշիչում ընտրված են $i_1, i_2, \dots, i_k$ համարներով տողերը: Հայտնի է (տես. 4.41 լեմմա), որ նշված տողերում գտնվող $\boldsymbol{k}$-րդ կարգի ցանկացած $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ մինորի և նրա հանրահաշվական լրացման արտադրյալը բաղկացած է $\boldsymbol{d}$ որոշիչի ինչ-որ քանակությամբ անդամներից՝ վերցված նույն նշանով, որով նրանք հանդես են գալիս $\boldsymbol{d}$ որոշիչում: Հետևաբար, թեորեմը կլինի ապացուցված, եթե ցույց տանք, որ ստիպելով $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ անցնի նշված տողերում գտնվող $\boldsymbol{k}$-րդ կարգի բոլոր մինորների վրայով, արդյունքում կստանանք որոշիչի բոլոր անդամները, ընդ որում նրանցից ոչ մեկը չի կրկնվում:

Դիցուք

$$\boldsymbol{a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\cdots a_{n\alpha_n}} \tag{4.10}$$

հանդիսանում է $\boldsymbol{d}$ որոշիչի որևէ անդամ: Առանձնացնենք այդ անդամի՝ $\boldsymbol{i_1, i_2, \dots, i_k}$ համարներով տողերում գտնվող տարրերի

$$\boldsymbol{a_{i_1\alpha_{i_1}}a_{i_2\alpha_{i_2}}\cdots a_{i_k\alpha_{i_k}}} \tag{4.11}$$

արտադրյալը, որի արտադրիչները գտնվում են իրարից տարբեր $\boldsymbol{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}}$ համարներով սյուներում: Այդ սյուների համարները միարժեքորեն որոշվում են $\boldsymbol{a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\cdots a_{n\alpha_n}}$ անդամով և $\boldsymbol{i_1, i_2, \dots, i_k}$ համարների տողերով: Եթե $\boldsymbol{i_1, i_2, \dots, i_k}$ համարներով տողերի և $\boldsymbol{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}}$ համարներով սյուների հատման տեղերում գտնվող տարրերից կազմված $\boldsymbol{k}$-րդ կարգի մինորը նշանակենք $\boldsymbol{\mathcal{M}}$, ապա (4.11) արտադրյալը կհանդիսանա $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ մինորի որոշակի անդամ, իսկ (4.10) անդամի՝ (4.11) արտադրյալում չմասնակցող բոլոր տարրերի արտադրյալը կհանդիսանա $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ մինորի լրացուցիչ մինորի անդամ: Այսպիսով, $\boldsymbol{d}$ որոշիչի յուրաքանչյուր անդամ հանդիսանում է ընտրրված տողերում գտնվող, լիովին որոշված $\boldsymbol{k}$-րդ կարգի մինորի որոշակի անդամի և նրա լրացուցիչ մինորի որոշակի անդամի արտադրյալ: Եթե այդ արտադրյալում լրացուցիչ մինորի անդամը փոխարինենք հանրահաշվական լրացման նրան համապատասխան անդամով, ապա կստանանք $\boldsymbol{d}$ որոշիչի անդամ նույն նշանով, որով նա մասնակցում է այդ որոշիչում: Սրանով ավարտվում է թեորեմի ապացույցը (այս ապացույցը, չնչին փոփոխություններով, կիրառելի է նաև սյուների դեպքի համար): ■

Լապլասի թեորեմը հաճախակի կիրառվում է $\boldsymbol{k = 1}$ դեպքում: Պայմանավորվենք $\boldsymbol{d}$ որոշիչի $\boldsymbol{a_{ij}}$ տարրի հանրահաշվական լրացումը նշանակել $\boldsymbol{A_{ij}}$ սիմվոլով: Այդ դեպքում $\boldsymbol{A_{ij} = (-1)^{i+j}\mathcal{M}_{ij}}$, որտեղ $(\boldsymbol{n-1})$-րդ կարգի $\boldsymbol{\mathcal{M}_{ij}}$ որոշիչը ստացվում է $\boldsymbol{d}$ որոշիչից՝ ջնջելով նրա $\boldsymbol{i}$-րդ տողը և $\boldsymbol{j}$-րդ սյունը: Ֆիքսելով $\boldsymbol{d}$ որոշիչում $\boldsymbol{i}$-րդ տողը՝ ստանում ենք

$$\boldsymbol{d = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}},$$

այսինքն՝ $\boldsymbol{d}$ որոշիչի վերլուծությունն ըստ $\boldsymbol{i}$-րդ տողի տարրերի:

Նմանապես ստանում ենք $\boldsymbol{d}$ որոշիչի վերլուծությունն ըստ $\boldsymbol{j}$-րդ սյան տարրերի.

$$\boldsymbol{d = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}}:$$

Այս վերլուծությունները թույլ են տալիս $\boldsymbol{n}$-րդ կարգի որոշիչի հաշվումը հանգեցնել $(\boldsymbol{n-1})$-րդ կարգի որոշիչների հաշվմանը: Հատկապես հարմար է որոշիչը վերլուծել ըստ տողի (սյան) տարրերի, եթե այն պարունակում է շատ զրոներ:

Վերջին դիտողությունը հուշում է որոշիչների հաշվման հետևյալ եղանակը. **կիրառելով որոշիչների հատկությունները՝ հասնել նրան, որ որոշիչի որևէ տողում (սյունում) ինչքան հնարավոր է շատ զրոներ ստացվեն, և միայն դրանից հետո որոշիչը վերլուծել ըստ այդ տողի (սյան):**

4.43. *Օրինակ:* Եթե որոշիչի գլխավոր անկյունագծի մի կողմում գտնվող բոլոր տարրերը զրոյական են, ապա այդ որոշիչը հավասար է գլխավոր անկյունագծի վրա գտնվող բոլոր տարրերի արտադրյալին:

Երկրորդ կարգի որոշիչի համար այս պնդումը ճշմարիտ է: Ենթադրենք պնդումը ճիշտ է $(\boldsymbol{n-1})$-րդ կարգի որոշիչների համար, որոնք բավարարում են վերը նշված պայմաններին, և դիտարկենք $\boldsymbol{n}$-րդ կարգի

$$\boldsymbol{d} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} & \cdots & \boldsymbol{a_{2n}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{a_{33}} & \cdots & \boldsymbol{a_{3n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{vmatrix}$$

որոշիչը: Վերլուծելով այն ըստ առաջին սյան՝ կստանանք.

$$\boldsymbol{d = a_{11}} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} & \cdots & \boldsymbol{a_{2n}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{a_{33}} & \cdots & \boldsymbol{a_{3n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{vmatrix}:$$

Սակայն հավասարության աջ մասում գտնվող որոշիչի նկատմամբ կիրառելով ինդուկցիայի ենթադրությունը՝ ստանում ենք, որ այն հավասար է $a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$ արտադրյալին, ուստի

$$d = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}:$$

4.44. *Օրինակ:* **Վանդերմոնդի որոշիչ** կոչվում է հետևյալ տեսքի

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$2 \leq n$-րդ կարգի որոշիչը: Ցույց տանք, որ կամայական $n \geq 2$ համար Վանդերմոնդի որոշիչը հավասար է բոլոր հնարավոր $(a_i - a_j)$, $1 \leq j < i \leq n$, տարբերությունների արտադրյալին: Իսկապես, $n = 2$ դեպքում ունենք

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1:$$

Ենթադրենք մեր պնդումը տեղի ունի $(n-1)$-րդ կարգի Վանդերմոնդի որոշիչների համար: Ձևափոխենք d որոշիչը հետևյալ կերպ. որոշիչի յուրաքանչյուր տողից, սկսած վերջինից, հանենք նախորդ տողը՝ բազմապատկած a_1 տարրով: Արդյունքում կստանանք

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & \cdots & a_n(a_n - a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}$$

որոշիչը: Վերջինս վերլուծելով ըստ առաջին սյան՝ ստանում ենք.

$$d = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & \cdots & a_n(a_n - a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}$$

որոշիչը, որից հետո բոլոր սյուներից դուրս հանելով ընդհանուր արտադրիչը՝ կունենանք, որ

$$d = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\cdots(a_n - a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}:$$

Ստացված հավասարության աջ մասի որոշիչը հանդիսանում է $(n-1)$-րդ կարգի Վանդերմոնդի որոշիչ, որի նկատմամբ կիրառելով ինդուկցիայի ենթադրությունը՝ վերջնականապես ստանում ենք, որ

$$d = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\cdots(a_n - a_1)\cdot \prod_{2\le j<i\le n}(a_i - a_j) =$$
$$= \prod_{1\le j<i\le n}(a_i - a_j):$$

§ 4.5. ՔԱՌԱԿՈՒՍԻ ՄԱՏՐԻՑՆԵՐԻ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼԻ ՈՐՈՇԻՉԸ ԵՎ ՀԱԿԱԴԱՐՁ ՄԱՏՐԻՑ

Լապլասի թեորեմը թույլ է տալիս ապացուցել ֆունդամենտալ կարևորություն ունեցող փաստ՝ որոշիչների բազմապատկման մասին թեորեմը:

4.45. ***Թեորեմ:*** Երկու քառակուսի մատրիցների արտադրյալի որոշիչը հավասար է այդ մատրիցների որոշիչների արտադրյալին, այսինքն՝ եթե $A, B \in M_{n\times n}$, ապա

$$|AB| = |A|\cdot|B|:$$

Ապացույց: Դիտարկենք $2n$-րդ կարգի օժանդակ

$$d = \begin{vmatrix} A & O_n \\ -E_n & B \end{vmatrix} \tag{4.12}$$

որոշիչը, որտեղ O_n և E_n համապատասխանաբար հանդիսանում են n-րդ կարգի զրոյական և միավոր մատրիցներ: Նշենք այդ որոշիչում առաջին n հատ տողերը և օգտվենք Լապլասի թեորեմից: Այդ դեպքում

$$d = |A|\cdot(-1)^{2(1+2+\cdots+n)}\cdot|B| = |A|\cdot|B|:$$

Մյուս կողմից, (4.12) որոշիչը կարելի է բերել

$$d = \begin{vmatrix} O_n & C \\ -E_n & B \end{vmatrix} \tag{4.13}$$

տեսքի, որտեղ $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$, օգտվելով որոշիչների (8) հատկությունից: Կիրառելով Լապլասի թեորեմը (4.13) որոշիչի առաջին $\boldsymbol{n}$ տողերի նկատմամբ՝ կստանանք, որ

$$\boldsymbol{d} = |\boldsymbol{C}| \cdot (-\mathbf{1})^{(\mathbf{1}+\mathbf{2}+\cdots+\boldsymbol{n})+(\boldsymbol{n}+\mathbf{1}+\boldsymbol{n}+\mathbf{2}+\cdots+\boldsymbol{n}+\boldsymbol{n})} \cdot |-\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{n}}|$$
$$= |\boldsymbol{C}| \cdot (-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}(\mathbf{2}\boldsymbol{n}+\mathbf{1})} \cdot (-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}} = |\boldsymbol{C}| \cdot (-\mathbf{1})^{\mathbf{2}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})} = |\boldsymbol{C}|:$$

Համեմատելով ստացված $\boldsymbol{d} = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|$ և $\boldsymbol{d} = |\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{AB}|$ հավասարությունները՝ ստանում ենք որոնելի $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|$ հավասարությունը:

Որպեսզի ավարտենք թեորեմի ապացույցը, մնում է ցույց տալ, որ (4.12) որոշիչը բերվում է (4.13) տեսքի որոշիչին: Դիցուք $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{a}_{ij}\}_{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$, $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{b}_{ij}\}_{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$, $\boldsymbol{C} = \{\boldsymbol{c}_{ij}\}_{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$, ընդ որում $\boldsymbol{c}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ik}\,\boldsymbol{b}_{kj}$, երբ $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{n}$: Դուրս գրենք (4.12) որոշիչը բացահայտ

$$\boldsymbol{d} = \left\| \begin{array}{cc} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{matrix}} \end{array} \right\|$$

տեսքով: Այս որոշիչը ձևափոխենք այնպես, որ $\boldsymbol{a}_{ij}$ տարրերի տեղերում հայտնվեն զրոներ: Այդ նպատակով նրա առաջին տողին գումարենք $(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})$-րդ տողը՝ բազմապատկած $\boldsymbol{a}_{11}$ տարրով, հետո գումարենք $(\boldsymbol{n}+\mathbf{2})$-րդ տողը՝ բազմապատկած $\boldsymbol{a}_{12}$ տարրով և այսպես շարունակ, ամենավերջում գումարենք $\mathbf{2}\boldsymbol{n}$-րդ տողը՝ բազմապատկած $\boldsymbol{a}_{1n}$ տարրով: Ստացված որոշիչում առաջին տողի առաջին $\boldsymbol{n}$ տարրերը կլինեն զրոներ, իսկ մնացած $\boldsymbol{n}$ տարրերը կլինեն այսպիսին.

$$\boldsymbol{c}_{11} = \boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{b}_{11} + \boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{b}_{21} + \cdots + \boldsymbol{a}_{1n}\boldsymbol{b}_{n1},$$
$$\boldsymbol{c}_{12} = \boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{b}_{12} + \boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{b}_{22} + \cdots + \boldsymbol{a}_{1n}\boldsymbol{b}_{n2},$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$
$$\boldsymbol{c}_{1n} = \boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{b}_{1n} + \boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{b}_{2n} + \cdots + \boldsymbol{a}_{1n}\boldsymbol{b}_{nn}:$$

Նմանապես զրոներ ստացվում են որոշիչի $\mathbf{2}$-րդ, ..., $\boldsymbol{n}$-րդ տողերում, ընդ որում այդ տողերի վերջին $\boldsymbol{n}$ տարրերը հանդիսանում են $\boldsymbol{C}$ մատրիցի համապատասխան տարրերը: Արդյունքում (4.12) որոշիչը ձևափոխվում է իրեն հավասար (4.13) որոշիչի: ■

4.46. ***Սահմանում:*** Քառակուսի մատրիցը կոչվում է **վերածելի**, եթե նրա որոշիչը հավասար է զրոյի, և **անվերածելի**՝ հակառակ դեպքում:

4.47. ***Հետևանք:*** Քառակուսի մատրիցների արտադրյալը, որոնցից գոնե մեկը վերածելի է, կլինի վերածելի մատրից:

4.48. ***Հետևանք:*** Կամայական երկու քառակուսի անվերածելի մատրիցների արտադրյալը հանդիսանում է անվերածելի մատրից:

4.49. ***Սահմանում:*** Դիցուք $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E} \in \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$, որտեղ $\boldsymbol{E}$՝ միավոր մատրիցն է: Այդ դեպքում $\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$ մատրիցը կոչվում է $\boldsymbol{A}$ մատրիցին **հակադարձ մատրից**, եթե տեղի ունեն

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}$$

հավասարությունները: $\boldsymbol{A}$ մատրիցին հակադարձ մատրիցն ընդունված է նշանակել $\boldsymbol{A}^{-1}$ սիմվոլով:

4.50. ***Թեորեմ:*** Եթե տրված $\boldsymbol{A}$ մատրիցի համար գոյություն ունի հակադարձ մատրից, ապա այն որոշված է միարժեքորեն:

Ապացույց: Դիցուք $\boldsymbol{B}_1$ և $\boldsymbol{B}_2$ հանդիսանում են $\boldsymbol{A}$ մատրիցին հակադարձ մատրիցներ: Ցույց տանք, որ $\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{B}_2$: Իսկապես,

$$\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{E} = \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{AB}_2) = (\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{EB}_2 = \boldsymbol{B}_2: \qquad ■$$

4.51. ***Թեորեմ:*** $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$ մատրիցն ունի հակադարձ մատրից այն և միայն այն դեպքում, երբ $|\boldsymbol{A}| \neq \mathbf{0}$, այսինքն՝ $\boldsymbol{A}$ մատրիցն անվերածելի է:

Ապացույց: Անհրաժեշտություն: Դիցուք $\boldsymbol{A}^{-1}$ հանդիսանում է $\boldsymbol{A}$ մատրիցի հակադարձ մատրից: Այդ դեպքում $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}$ և, կիրառելով 4.45 թեորեմը, ստանում ենք $|\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{E}|$ կամ $|\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{A}^{-1}| = \mathbf{1}$: Հետևաբար $|\boldsymbol{A}| \neq \mathbf{0}$ և $\boldsymbol{A}$ մատրիցն անվերածելի է:

Բավարարություն: Դիցուք $|\boldsymbol{A}| = \boldsymbol{d} \neq \mathbf{0}$, այսինքն՝ $\boldsymbol{A}$ մատրիցն անվերածելի է: Ցույց տանք, որ $\boldsymbol{A}$ մատրիցն ունի հակադարձ մատրից: Կարելի է նշել $\boldsymbol{A}^{-1}$ մատրիցի բացահայտ տեսքը՝ արտահայտված $\boldsymbol{A}$ մատրիցի տարրերով, այսինքն, եթե $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{a}_{ij}\}_{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$, ապա

$$\boldsymbol{A^{-1} = d^{-1} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}}, \tag{4.14}$$

որտեղ $\boldsymbol{A_{ij}}$ հանդիսանում է $\boldsymbol{A}$ մատրիցի $\boldsymbol{a_{ij}}$ տարրի հանրահաշվական լրացումը:

Այս (4.14) մատրիցը $\boldsymbol{A}$ մատրիցից ստացվում է հետևյալ կերպ: Սկզբում յուրաքանչյուր $\boldsymbol{a_{ij}}$ տարրի փոխարեն գրվում է նրա հանրահաշվական լրացումը, այնուհետև ստացված մատրիցը շրջվում (տրանսպոնացվում) և բազմապատկվում է $\boldsymbol{d = |A|}$ մեծության հակադարձ մեծությունով:

Ստուգենք, որ տեղի ունի $\boldsymbol{A^{-1}A = E}$ հավասարությունը (մյուս՝ $\boldsymbol{AA^{-1} = E}$ հավասարությունը ստուգվում է նման եղանակով): Ունենք, որ

$$\boldsymbol{d = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}:$$

Այդ դեպքում $\boldsymbol{d = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}}$ հանդիսանում է $\boldsymbol{d}$ որոշիչի վերլուծությունն ըստ $\boldsymbol{j}$-րդ սյան: Եթե $\boldsymbol{b_1, b_2, \dots, b_n}$ կամայական թվեր են $\boldsymbol{M}$ բազմությունից, ապա դիտարկենք

$$\boldsymbol{d_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

օժանդակ որոշիչը, որը $\boldsymbol{d}$ որոշիչից տարբերվում է միայն $\boldsymbol{j}$-րդ սյունով: Վերլուծենք նրան ըստ այդ սյան.

$$\boldsymbol{d_j = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \cdots + b_nA_{nj}}:$$

Այստեղ մենք օգտվել ենք այն փաստից, որ $\boldsymbol{d_j}$ որոշիչում $\boldsymbol{b_i}$ տարրի հանրահաշվական լրացումը համընկնում է $\boldsymbol{d}$ որոշիչում $\boldsymbol{a_{ij}}$ տարրի հանրահաշվական լրացման հետ, որտեղ $\boldsymbol{i = 1, 2, \dots, n}$:

Աժմ ենթարենք $\boldsymbol{b_1 = a_{1k}, b_2 = a_{2k}, \dots, b_n = a_{nk}}$ $\boldsymbol{(1 \le k \le n)}$, այսինքն՝ $\boldsymbol{d_j}$ որոշիչի $\boldsymbol{j}$-րդ սյունը համընկնում է $\boldsymbol{d}$ որոշիչի $\boldsymbol{k}$-րդ սյան հետ: Եթե $\boldsymbol{k \ne j}$, ապա $\boldsymbol{d_j}$ որոշիչը պարունակում է երկու միանման սյուն և, հետևաբար, հավասար է զրոյի: Իսկ եթե $\boldsymbol{k = j}$, ապա $\boldsymbol{d_j = d}$:

Այսպիսով տեղի ունի

$$a_{1k}A_{1j} + a_{2k}A_{2j} + \cdots + a_{nk}A_{nj} = \begin{cases} d, \text{ եթե } k = j, \\ 0, \text{ եթե } k \neq j, \end{cases}$$

բանաձևը: Դիցուք $A^{-1}A = \{t_{ij}\}_{n\times n}$: Այդ դեպքում

$$t_{ij} = d^{-1}A_{1i}a_{1j} + d^{-1}A_{2i}a_{2j} + \cdots + d^{-1}A_{ni}a_{nj} =$$
$$= d^{-1}(a_{1j}A_{1i} + a_{2j}A_{2i} + \cdots + a_{nj}A_{ni}) = \begin{cases} 1, \text{ եթե } i = j, \\ 0, \text{ եթե } i \neq j \,: \end{cases}$$

Դա նշանակում է, որ $A^{-1}A = E$: Թեորեմն ապացուցված է: ■

4.52. *Թեորեմ:* Եթե A և B միևնույն կարգի անվերածելի մատրիցներ են, ապա նրանց AB արտադրյալը նույնպես անվերածելի մատրից է և

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}:$$

Ապացույց: Այն, որ AB արտադրյալն անվերածելի մատրից է հետևում է 4.45 թեորեմից: Մյուս կողմից

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = \left((AB)B^{-1}\right)A^{-1} = \left(A(BB^{-1})\right)A^{-1} = (AE)A^{-1} = AA^{-1} = E$$

և

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = \left((B^{-1}A^{-1})A\right)B = \left(B^{-1}(A^{-1}A)\right)B = (B^{-1}E)B = B^{-1}B = E:$$

■

§ 4.6. ՄԱՏՐԻՑՆԵՐԻ ՌԱՆԳ

Դիտարկենք M բազմության վրա տրված

$$e_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}),$$
$$e_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}),$$
$$\dots \dots \dots \dots \dots$$
$$e_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$$

n-չափանի վեկտոր-տողերը: Կամայական $k_1, k_2, \dots, k_m \in M$ տարրերի համար

$$k_1e_1 + k_2e_2 + \cdots + k_me_m =$$
$$= (k_1a_{11} + k_2a_{21} + \cdots + k_ma_{m1}, k_1a_{12} + k_2a_{22} + \cdots + k_ma_{m2}, \dots,$$
$$k_1a_{1n} + k_2a_{2n} + \cdots + k_ma_{mn})$$

$\boldsymbol{n}$-չափանի վեկտոր-տողը կոչվում է $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_m}$ վեկտոր-տողերի գծային կոմբինացիա, իսկ $\boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}, \dots, \boldsymbol{k_m}$ թվերը՝ գծային կոմբինացիայի գործակիցներ:

4.53. *Սահմանում:* $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_m}$ վեկտոր-տողերը կոչվում են **գծորեն անկախ**, եթե $\boldsymbol{k_1 e_1 + k_2 e_2 + \dots + k_m e_m = 0}$ հավասարությունից հետևում է, որ $\boldsymbol{k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0}$:

Այսինքն գծորեն անկախ վեկտոր-տողերի գծային կոմբինացիան կարող է լինել զրոյական այն և միայն այն դեպքում, երբ բոլոր գործակիցները զրոյական են:

Մյուս դեպքում, երբ գտնվեն այնպիսի $\boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}, \dots, \boldsymbol{k_m} \in \boldsymbol{M}$ տարրեր, ոչ բոլորը զրոյական, որ $\boldsymbol{k_1 e_1 + k_2 e_2 + \dots + k_m e_m = 0}$, ապա $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_m}$ վեկտոր-տողերը կոչվում են **գծորեն կախված**:

Նկատենք, որ զրոյական վեկտոր-տող պարունակող $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots$, $\boldsymbol{e_m}$ վեկտոր-տողերը գծորեն կախված են: Յուրաքանչյուր ոչ զրոյական վեկտոր-տող գծորեն անկախ է: Վերջավոր թվով գծորեն անկախ վեկտոր-տողերից և ոչ մեկը չի արտահայտվում մնացած վեկտոր-տողերի և ոչ մի գծային կոմբինացիայով:

Գծորեն անկախության և գծորեն կախվածության հասկացությունները նմանապես կարելի է սահմանել նաև վերջավոր թվով միևնույն չափի վեկտոր-սյուների համար:

Այժմ դիտարկենք $\boldsymbol{M}$ բազմության վրա տրված

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \dots & \boldsymbol{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{s1}} & \boldsymbol{a_{s2}} & \dots & \boldsymbol{a_{sn}} \end{pmatrix}$$

մատրիցը, որն ունի $\boldsymbol{s}$ հատ տող և $\boldsymbol{n}$ հատ սյուն, ընդ որում $\boldsymbol{s}$ և $\boldsymbol{n}$ թվերն որևէ կերպ կապված չեն իրար հետ: $\boldsymbol{A}$ մատրիցի տողերը կարելի է դիտարկել որպես $\boldsymbol{n}$-չափանի վեկտոր-տողեր, իսկ սյուները՝ որպես $\boldsymbol{s}$-չափանի վեկտոր-սյուներ, այսինքն՝

$$\boldsymbol{e_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}),\ i = 1, 2, \dots, s},$$

$$\boldsymbol{f_j} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{1j}} \\ \boldsymbol{a_{2j}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a_{sj}} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{j = 1, 2, \dots, n}:$$

Ուղղանկյուն մատրիցների դեպքում ընդհանրացնենք մինորի հասկացությունը: $\boldsymbol{A}$ մատրիցում ընտրենք կամայական $\boldsymbol{k}$ տող և կամայական $\boldsymbol{k}$ սյուն, $\boldsymbol{k} \leq \min(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{n})$: Ընտրված տողերի և սյուների հատման տեղերում գտնվող տարրերը կազմում են $\boldsymbol{k}$-րդ կարգի քառակուսի մատրից, որի որոշիչը կոչվում է $\boldsymbol{A}$ մատրիցի $\boldsymbol{k}$-րդ կարգի մինոր: Այնուհետև մեզ կհետաքրքրեն $\boldsymbol{A}$ մատրիցի ոչ զրոյական մինորների կարգերը, հատկապես այդ կարգերից ամենամեծը, որի փնտրման դեպքում օգտակար է հաշվի առնել հետևյալ դիտողությունը. **եթե $\boldsymbol{A}$ մատրիցի $\boldsymbol{k}$-րդ կարգի բոլոր մինորները հավասար են զրոյի, ապա ավելի բարձր կարգի բոլոր մինորները նույնպես հավասար են զրոյի**: Իսկապես, համաձայն Լապլասի թեորեմի, $(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j})$-րդ կարգի $(\boldsymbol{k} < \boldsymbol{k}+\boldsymbol{j} \leq \min(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{n}))$ ցանկացած մինոր վերլուծելով ըստ կամայական $\boldsymbol{k}$ տողերի՝ այդ մինորը կներկայացնենք որպես $\boldsymbol{k}$-րդ կարգի մինորների և նրանց $\boldsymbol{j}$-րդ կարգի հանրահաշվական լրացումների արտադրյալների գումար, և դրանով ցույց կտանք, որ այն հավասար է զրոյի:

4.54. *Սահմանում:* Մատրիցի ոչ զրոյական մինորների ամենամեծ կարգը կոչվում է այդ **մատրիցի ռանգ**: Զրոյական մատրիցի ռանգը համարվում է հավասար զրոյի:

4.55. *Թեորեմ:* Մատրիցի ռանգը հավասար է նրա առավելագույն թվով գծորեն անկախ սյուների քանակին:

Ապացույց: Դիցուք $\boldsymbol{A}$ մատրիցի ոչ զրոյական մինորների ամենամեծ կարգը հավասար է $\boldsymbol{r}$, այսինքն՝ մատրիցի ռանգը հավասար է $\boldsymbol{r}$: Առանց ընդհանրությունը խախտելու՝ ենթադրենք, որ

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \boldsymbol{a_{11}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1r}} \\ \vdots & \boldsymbol{D} & \vdots \\ \boldsymbol{a_{r1}} & \cdots & \boldsymbol{a_{rr}} \end{matrix}} & \begin{matrix} \boldsymbol{a_{1,r+1}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{r,r+1}} & \cdots & \boldsymbol{a_{rn}} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \boldsymbol{a_{r+1,1}} & \cdots & \boldsymbol{a_{r+1,r}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{s1}} & \cdots & \boldsymbol{a_{sr}} \end{matrix} & \begin{matrix} \boldsymbol{a_{r+1,r+1}} & \cdots & \boldsymbol{a_{r+1,n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{s,r+1}} & \cdots & \boldsymbol{a_{sn}} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

մատրիցի վերևի ձախ անկյունում գտնվող $\boldsymbol{r}$-րդ կարգի $\boldsymbol{D}$ մինորն ոչ զրոյական է, $\boldsymbol{D} \neq \boldsymbol{0}$: Այդ դեպքում $\boldsymbol{A}$ մատրիցի առաջին $\boldsymbol{r}$ սյուները կլինեն գծորեն անկախ. եթե նրանք լինեին գծորեն կախված, ապա, քանի որ վեկտոր-սյուների գումարման դեպքում գումարվում են նրանց համապատասխան բաղադրիչները, $\boldsymbol{D}$ մինորի սյուները նույնպես կլինեին գծորեն կախված, ուստի $\boldsymbol{D}$ մինորը կլիներ զրոյական:

Այժմ ապացուցենք, որ $\boldsymbol{A}$ մատրիցի յուրաքանչյուր $\boldsymbol{l}$-րդ սյուն, $\boldsymbol{r < l \leq n}$, հանդիսանում է առաջին $\boldsymbol{r}$ սյուների գծային կոմբինացիա: Ցանկացած $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{1 \leq i \leq s}$, համար կառուցենք $(\boldsymbol{r+1})$-րդ կարգի

$$\boldsymbol{\Delta_i} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1r}} & \boldsymbol{a_{1l}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{r1}} & \cdots & \boldsymbol{a_{rr}} & \boldsymbol{a_{rl}} \\ \boldsymbol{a_{i1}} & \cdots & \boldsymbol{a_{ir}} & \boldsymbol{a_{il}} \end{vmatrix}$$

օժանդակ որոշիչը, որը ստացվում է $\boldsymbol{D}$ մինորի «եզրապատումով»՝ $\boldsymbol{A}$ մատրիցի $\boldsymbol{l}$-րդ սյան և $\boldsymbol{i}$-րդ տողի համապատասխան տարրերով: Կամայական $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{1 \leq i \leq s}$, համար $\boldsymbol{\Delta_i = 0}$: Իրոք, եթե $\boldsymbol{i > r}$, ապա $\boldsymbol{\Delta_i}$ հանդիսանում է $\boldsymbol{A}$ մատրիցի $(\boldsymbol{r+1})$-րդ կարգի մինոր և, հետևաբար, համաձայն $\boldsymbol{r}$ թվի ընտրության, այն հավասար է զրոյի: Իսկ եթե $\boldsymbol{i \leq r}$, ապա $\boldsymbol{\Delta_i}$ չի հանդիսանում $\boldsymbol{A}$ մատրիցի մինոր, քանի որ չի կարող ստացվել նրա որոշակի տողերի և սյուների հեռացումով: Սակայն այդ դեպքում $\boldsymbol{\Delta_i}$ որոշիչը պարունակում է երկու միանման տող և, հետևաբար, նորից հավասար է զրոյի:

Դիտարկենք $\boldsymbol{\Delta_i}$ որոշիչի վերջին տողի տարրերի հանրահաշվական լրացումները: Ակնհայտ է, որ $\boldsymbol{a_{il}}$ տարրի հանրահաշվական լրացումը հանդիսանում է $\boldsymbol{D}$ մինորը: Իսկ եթե $\boldsymbol{1 \leq j \leq r}$, ապա $\boldsymbol{\Delta_i}$ որոշիչում $\boldsymbol{a_{ij}}$ տարրի հանրահաշվական լրացումը հանդիսանում է

$$\boldsymbol{A_j} = (\boldsymbol{-1})^{(\boldsymbol{r+1})+\boldsymbol{j}} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1,j-1}} & \boldsymbol{a_{1,j+1}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1r}} & \boldsymbol{a_{1l}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{r1}} & \cdots & \boldsymbol{a_{r,j-1}} & \boldsymbol{a_{r,j+1}} & \cdots & \boldsymbol{a_{rr}} & \boldsymbol{a_{rl}} \end{vmatrix}$$

թիվը, որը կախված չէ $\boldsymbol{i}$ արժեքից և, այդ պատճառով, նշանակված է $\boldsymbol{A_j}$: Այսպիսով, $\boldsymbol{\Delta_i}$ որոշիչը վերլուծելով ըստ նրա վերջին տողի և այդ վերլուծությունը հավասարեցնելով զրոյի, քանի որ $\boldsymbol{\Delta_i = 0}$, կըստանանք.

$$\boldsymbol{a_{i1}A_1 + a_{i2}A_2 + \cdots + a_{ir}A_r + a_{il}D = 0},$$

որտեղից էլ, հաշվի առնելով $\boldsymbol{D \neq 0}$ պայմանը,

$$\boldsymbol{a_{il}} = (\boldsymbol{-D^{-1}A_1})\boldsymbol{a_{i1}} + (\boldsymbol{-D^{-1}A_2})\boldsymbol{a_{i2}} + \cdots + (\boldsymbol{-D^{-1}A_r})\boldsymbol{a_{ir}}:$$

Վերջին հավասարությունը ճշմարիտ է բոլոր $i = 1, 2, \dots, s$ արժեքների դեպքում, իսկ քանի որ նրա գործակիցները կախված չեն i արժեքից, ապա ստանում ենք, որ A մատրիցի ամբողջ l-րդ սյունը հանդիսանում է նրա առաջին r սյուների գումար՝ վերցված համապատասխանաբար $-D^{-1}A_1, -D^{-1}A_2, \dots, -D^{-1}A_r$ գործակիցներով:

Այսպիսով, A մատրիցի սյուների համակարգում գտնվեց առավելագույն թվով գծորեն անկախ սյուների ենթահամակարգ՝ բաղկացած r թվով սյուներից: Թեորեմի ապացույցն ավարտված է: ■

4.56. ***Հետևանք:*** Մատրիցի առավելագույն թվով գծորեն անկախ տողերի քանակը հավասար է նրա առավելագույն թվով գծորեն անկախ սյուների քանակին, այսինքն՝ հավասար է այդ մատրիցի ռանգին:

Ապացույցի համար շրջենք (տրանսպոնացնենք) տրված մատրիցը: Շրջման դեպքում մատրիցի ոչ զրոյական մինորների ամենամեծ կարգը փոփոխության չի ենթարկվում, քանի որ շրջումը չի փոխում որոշիչը, իսկ սկզբնական մատրիցի ցանկացած մինորի շրջումից ստացված մինորը հանդիսանում է շրջված մատրիցի մինոր, և հակառակը: Այստեղից հետևում է, որ շրջված մատրիցի ռանգը հավասար է սկզբնական մատրիցի ռանգին, ինչպես նաև հավասար է նոր մատրիցի առավելագույն թվով գծորեն անկախ սյուների քանակին, այսինքն՝ սկզբնական մատրիցի առավելագույն թվով գծորեն անկախ տողերի քանակին: ■

4.57. ***Հետևանք:*** n-րդ կարգի որոշիչը հավասար է զրոյի այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա տողերի (սյուների) միջև գոյություն ունի գծային կախվածություն:

Ապացույց: Այս պնդման մի կողմն ապացուցված է (տես. 4.40 պնդում): Այժմ ենթադրենք տրված է n-րդ կարգի զրոյական որոշիչ, այսինքն՝ տրված է n-րդ կարգի քառակուսի մատրից, որի առավելագույն կարգ ունեցող միակ մինորը հավասար է զրոյի: Այստեղից հետևում է, որ այդ մատրիցի ոչ զրոյական մինորների առավելագույն կարգը փոքր է n թվից, այսինքն՝ մատրիցի ռանգը փոքր է n թվից, ուստի այդ պատճառով, վերն ապացուցվածի համաձայն, այդ մատրիցի տողերը (սյուները) գծորեն կախված են: ■

ԵՐԿՐՈՐԴ ԲԱԺԻՆ

Ե Ր Կ Ր Ա Չ Ա Փ ՈՒ Յ ՈՒ Ն

ԳԼՈՒԽ 5

ԿՈՈՐԴԻՆԱՏՆԵՐՆ ՈՒՂՂԻ ԵՎ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ

Կոորդինատները կազմում են անալիտիկ երկրաչափության մեթոդի հիմքը: Այս գլխում դիտարկվում են կոորդինատների մեթոդի հիմնական դրույթները:

§ 5. 1. ԿՈՈՐԴԻՆԱՏՆԵՐՆ ՈՒՂՂԻ ՎՐԱ ԵՎ ԹՎԱՅԻՆ ԱՌԱՆՑՔ

Դիտարկենք կամայական ուղիղ: Այն ունի երկու հակադիր ուղղություն: Ըստ ցանկության, նրանցից մեկն անվանենք դրական, իսկ հակառակ ուղղությունը՝ բացասական:

Ուղիղը, որի վրա «նշված» է դրական ուղղությունը, կոչվում է **առանցք**: Գծագրերում առանցքի դրական ուղղությունը նշվում է սլաքով:

Դիցուք տրված է որևէ առանցք և, բացի այդ, նշված է մասշտաբային հատված, որի միջոցով հնարավոր է չափել ցանկացած հատվածի երկարությունը: Տրված առանցքի վրա ընտրենք կամայական երկու կետ և նրանք նշենք $\boldsymbol{A}$ և $\boldsymbol{B}$ տառերով:

5. 1. ***Սահմանում:*** $\boldsymbol{A}$ և $\boldsymbol{B}$ կետերով սահմանափակված հատվածը կոչվում է **ուղղորդված հատված**, եթե հայտնի է, թե այդ կետերից որն է համարվում հատվածի սկիզբ և որը՝ վերջ: **Հատվածի ուղղությունը** համարվում է՝ սկզբից մինչև վերջ ձգվող ուղղությունը: Եթե հատվածի սկիզբը հանդիսանում է $\boldsymbol{A}$ կետը, ապա ուղղորդված հատվածը նշանակում են $\overline{AB}$ գրությամբ, իսկ եթե սկիզբն է B կետը՝ $\overline{BA}$ գրությամբ:

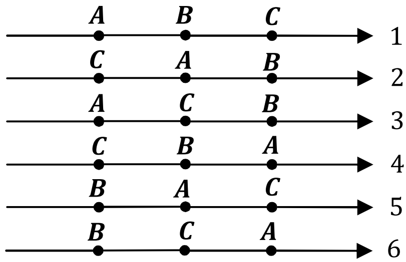
5.2. *Սահմանում:* Առանցքի $\overline{AB}$ **հատվածի մեծություն** կոչվում է մի թիվ, որը հավասար է նրա երկարությանը՝ վերցված դրական նշանով, եթե այդ հատվածի ուղղությունը համընկնում է առանցքի դրական ուղղության հետ, և վերցված բացասական նշանով, եթե այդ հատվածի ուղղությունը համընկնում է առանցքի բացասական ուղղության հետ: $\overline{AB}$ հատվածի մեծությունը կնշանակենք AB գրությամբ: Երբ A և B կետերը համընկնում են, ապա $\overline{AB}$ հատվածը կոչվում է **զրոյական,** քանի որ նրա AB մեծությունը հավասար է զրոյի: Զրոյական հատվածի ուղղությունը համարվում է կամայական:

5.3. *Թեորեմ:* Մասշտաբային միավորով օժտված առանցքի ցանկացած երեք՝ A,B,C կետերի համար տեղի ունի հետևյալ առնչությունը.

$$AB + BC = AC: \tag{5.1}$$

Այս առնչությունը կանվանենք **հիմնական նույնություն**:

Ապացույց: Եթե բոլոր երեք՝ A,B,C կետերը տարբեր են, ապա առանցքի վրա նրանց փոխադարձ դասավորվածությունը կարող է լինել այնպես, ինչպես նշված է ստորև.



Նկ. 5.1:

Բացի այդ հնարավոր են դեպքեր, երբ A, B, C կետերից երկուսը կամ բոլոր երեք կետերը համընկնում են:

Առաջին դեպքում (նկար 5.1), համաձայն (5.1) հավասարության, հատվածի երկարությունը հավասար է մասերի երկարությունների գումարին, և, հետևաբար, այն ճշմարիտ է: Հաջորդ դասավորվածության դեպքում ունենք $CA + AB = CB$ հավասարությունը, որից հետևում է $AB - CB = -CA \Rightarrow AB + BC = AC$: Նմանապես մնացած դասավորվածությունների դեպքում:

Այժմ ենթադրենք, որ A և B կետերը համընկնում են: Այդ դեպքում $AB + BC = AA + AC = 0 + AC = AC$: Մնացած դեպքերը ստուգել ինքնուրույն: ■

Դիցուք տրված է կամայական a ուղիղ: Որպես գծային միավոր ընտրենք որևէ հատված, a ուղղի վրա նշանակենք դրական ուղղություն (որով այն կդառնա առանցք) և նշենք որևէ O կետ: Որից հետո պայմանավորվենք a առանցքի ցանկացած M **կետի կոորդինատ** անվանել $\overline{OM}$ հատվածի մեծությունը: O կետը կոչվում է **կոորդինատների սկզբնակետ** և նրա կոորդինատը հավասար է զրոյի: Կամայական կետի կոորդինատը սովորաբար նշանակում են x տառով, իսկ եթե x հանդիսանում է M կոորդինատը, ապա այն նշանակում են նաև $M(x)$ գրությամբ: Հակառակը, կամայական x (իրական) թվի համար առանցքի վրա կգտնվի միարժեքորեն որոշված M կետ, որի կոորդինատը x թիվն է: Այդպիսի առանցքը կոչվում է **թվային առանցք**:

Հաջորդիվ կապացուցենք պարզ, սակայն շատ կարևոր երկու թեորեմ: Նրանք վերաբերում են կոորդինատային համակարգով օժտըված առանցքին:

5.4. *Թեորեմ:* Թվային առանցքի ցանկացած երկու՝ $M_1(x_1)$ և $M_2(x_2)$ կետերի համար տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը.

$$M_1M_2 = x_2 - x_1: \tag{5.2}$$

Ապացույց: Համաձայն (5.1) հիմնական նույնության, ունենք, որ

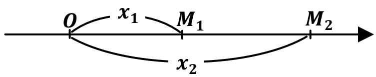
$$OM_1 + M_1M_2 = OM_2,$$

որտեղից էլ

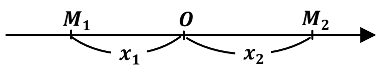
$$M_1M_2 = OM_2 - OM_1:$$

Սակայն $OM_2 = x_2$ և $OM_1 = x_1$, հետևաբար, $M_1M_2 = x_2 - x_1$, այն ինչ պահանջվում էր ապացուցել: ■

Այս թեորեմի էությունը հետևյալն է. որպեսզի ստանանք առանցքի հատվածի մեծությունը, հարկավոր է նրա ծայրակետի կոորդինատից հանել սկզբնակետի կոորդինատը: (Տես. նկար 5.2 և 5.3: 5.3 նկարում հարկավոր է հաշվի առնել, որ x_1 կոորդինատը բացասական է:)



Նկ. 5.2:



Նկ. 5.3:

5.5. ***Թեորեմ:*** Եթե $\boldsymbol{M_1(x_1)}$ և $\boldsymbol{M_2(x_2)}$ հանդիսանում են թվային առանցքի կամայական կետեր և $\boldsymbol{d}$՝ նրանց միջև հեռավորությունն է, ապա $\boldsymbol{d = |x_2 - x_1|}$:

Ապացույց: Ըստ նախորդ թեորեմի $\boldsymbol{M_1M_2 = x_2 - x_1}$: Մյուս կողմից $\boldsymbol{M_1}$ և $\boldsymbol{M_2}$կետերի միջև հեռավորությունը հանդիսանում է $\boldsymbol{\overline{M_1M_2}}$ հատվածի մեծության մոդուլը: Հետևաբար $\boldsymbol{d = |x_2 - x_1|}$: Թեորեմն ապացուցված է: ■

5.6. *Օրինակ:* Տրված են $\boldsymbol{A(5)}$, $\boldsymbol{B(-1)}$, $\boldsymbol{C(-8)}$, $\boldsymbol{D(2)}$ կետերը: Գտնել $\boldsymbol{\overline{AB}}$, $\boldsymbol{\overline{CD}}$ և $\boldsymbol{\overline{DB}}$ հատվածների մեծությունները:

Լուծում: Համաձայն 5.4. թեորեմի, ունենք, որ

$\boldsymbol{AB = -1 - 5 = -6}$, $\boldsymbol{CD = 2 - (-8) = 10}$, $\boldsymbol{DB = -1 - 2 = -3}$:

5.7. *Օրինակ:* Գտնել $\boldsymbol{A(3)}$ և $\boldsymbol{B(-2)}$ կետերի միջև հեռավորությունը:

Լուծում: Համաձայն 5.5. թեորեմի $\boldsymbol{d = |-2 - 3| = |-5| = 5}$:

§ 5.2. ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ԴԵԿԱՐՏՅԱՆ ԿՈՈՐԴԻՆԱՏՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳ: ԲԵՎԵՌԱՅԻՆ ԿՈՈՐԴԻՆԱՏՆԵՐ

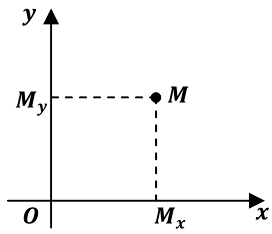
5.8. *Սահմանում:* Հարթության մեջ **ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատների համակարգը** սահմանվում է՝ երկարությունների չափման համար գծային միավորի և երկու (տարածության մեջ՝ երեք) փոխուղղահայաց առանցքների տրման միջոցով: Վերջիններս համարակալված են որևէ կարգով, այսինքն նշված է, թե նրանցից որն է համարվում առաջինը և որը՝ երկրորդը: Առանցքների հատման կետը կոչվում է **կոորդինատների սկզբնակետ**, իսկ իրենք՝ առանցքները՝ **կոորդինատային առանցքներ**, ընդ որում նրանցից առաջինը կոչվում է նաև **աբսցիսների առանցք**, իսկ երկրորդը՝ **օրդինատների առանցք**:

Կոորդինատների սկզբնակետը նշանակենք $\boldsymbol{O}$ տառով, աբսցիսների առանցքը՝ $\boldsymbol{Ox}$ տառերով և օրդինատների առանցքը՝ $\boldsymbol{Oy}$ տառերով: Դիցուք $\boldsymbol{M}$՝ հարթության կամայական կետ է: $\boldsymbol{M}$ կետը պրոյեկտենք կոորդինատային առանցքների վրա, այսինքն $\boldsymbol{M}$ կետից տանենք ուղղահայացներ $\boldsymbol{Ox}$ և $\boldsymbol{Oy}$ առանցքների վրա և այդ ուղղահայացների հիմքերը նշանակենք $\boldsymbol{M_x}$ և $\boldsymbol{M_y}$ (նկար 5.4):

Տրված համակարգում $\boldsymbol{M}$ կետի կոորդինատներ կոչվում են

$$\boldsymbol{x = OM_x} \text{ և } \boldsymbol{y = OM_y}$$

թվերը, որտեղ $\boldsymbol{OM_x}$ նշանակում է աբսցիսների առանցքի $\overline{\boldsymbol{OM_x}}$ հատվածի մեծությունը, իսկ $\boldsymbol{OM_y}$՝ օրդինատների առանցքի $\overline{\boldsymbol{OM_y}}$ հատվածի մեծությունը: $\boldsymbol{M}$ կետի **աբսցիս** կամ **առաջին կոորդինատ** կոչվում է $\boldsymbol{x}$ թիվը,



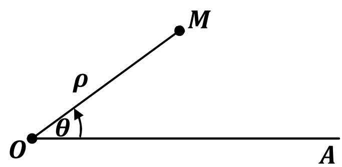
Նկ. 5.4:

իսկ $\boldsymbol{M}$ կետի **օրդինատ** կամ **երկրորդ կոորդինատ**՝ $\boldsymbol{y}$ թիվը: Որպեսզի կարճ նշվի, որ $\boldsymbol{M}$ կետն ունի $\boldsymbol{x}$ աբսցիս և $\boldsymbol{y}$ օրդինատ, օգտվում են $\boldsymbol{M(x, y)}$ գրառումից:

Այժմ կնկարագրենք կոորդինատների այսպես կոչված բևեռային համակարգը: Այն շատ հարմար է և հաճախակի է գործածվում:

5.9. *Սահմանում:* **Կոորդինատների բևեռային համակարգը** սահմանվում է որևէ $\boldsymbol{O}$ կետի, որը կոչվում է **բևեռ,** այդ կետից դուրս եկող $\boldsymbol{OA}$ ճառագայթի, որը կոչվում է **բևեռային առանցք,** և երկարության չափման համար մասշտաբի տրման միջոցով: Բացի այդ, բևեռային համակարգի տրման դեպքում, անպայման պետք է նշվի, թե $\boldsymbol{O}$ կետի շուրջն ինչպիսի պտույտներն են համարվում դրական: Սովորաբար դրական համարվում են այն պտույտները, որոնք կատարվում են «ժամ սլաքին հակառակ» ուղղությամբ:

Դիցուք տրված են բևեռը և բևեռային առանցքը (նկար 5.5): Դիտարկենք կամայական $\boldsymbol{M}$ կետ, և նրա ու $\boldsymbol{O}$ կետի միջև հեռավորությունը նշանակենք $\boldsymbol{\rho}$ սիմվոլով ($\boldsymbol{\rho = |OM|}$), իսկ $\boldsymbol{\theta}$ սիմվոլով՝ այն անկյունը, որով հարկավոր է պտտել $\boldsymbol{OA}$ ճառագայթը՝ մինչև $\boldsymbol{OM}$ ճառագայթի հետ համընկնելը ($\boldsymbol{\theta = \angle AOM}$): $\boldsymbol{\theta}$ անկյունը կհասկանանք այնպես, ինչպես այն ընդունված է եռանկյունաչափությունում, այսինքն՝ նշանի և $\boldsymbol{\pm 2\pi n}$ տեսքի գումարելիի ճշտությամբ:



Նկ. 5.5:

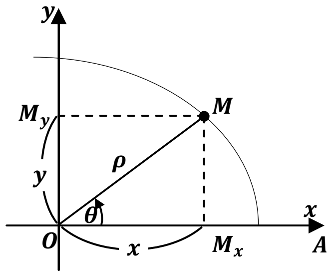
$\boldsymbol{M}$ կետի բևեռային կոորդինատներ (տրված համակարգի նկատմամբ) կոչվում են $\boldsymbol{\rho}$ և $\boldsymbol{\theta}$ թվերը: Ընդ որում $\boldsymbol{\rho}$ թիվը կոչվում է **առաջին կոորդինատ** կամ **բևեռային շառավիղ**, իսկ $\boldsymbol{\theta}$ թիվը՝ **երկրորդ կոորդինատ** կամ **բևեռային անկյուն**: Նշենք, որ $\boldsymbol{M}$ կետի բևեռային անկյան հնարավոր արժեքներից առանձնացվում է որոշակի մեկը, հենց այն, որը բավարարում է

$$-\boldsymbol{\pi} < \boldsymbol{\theta} \leq \boldsymbol{\pi}$$

անհավասարություններին, և այն կոչվում է **գլխավոր**:

Դիտողություն: Եթե $\boldsymbol{M}$ կետը համընկնում է $\boldsymbol{O}$ կետի հետ, ապա $\boldsymbol{\rho} = |\boldsymbol{OM}| = 0$: Ուրեմն բևեռի առաջին կոորդինատը հավասար է զրոյի, իսկ երկրորդ կոորդինատն ակնհայտորեն չունի որոշակի արժեք:

Այժմ ենթադրենք, որ բևեռային համակարգի բևեռը համընկնում է ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատային համակարգի սկզբնակետի հետ, իսկ բևեռային առանցքը՝ աբսցիսների դրական կիսաառանցքի հետ (նկար 5.6): Բացի այդ, բևեռային անկյան որոշման դեպքում, դրական կհամարենք պտույտներն այն ուղղությամբ, որով հարկավոր է պտտել $\boldsymbol{Ox}$ դրական կիսաառանցքը, որպեսզի այն կարճագույն ուղիով համընկնի $\boldsymbol{Oy}$ դրական կիսաառանցքի հետ:



Նկ. 5.6:

Դիցուք $\boldsymbol{M}$ հանդիսանում է հարթության կամայական կետ, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$՝ այդ կետի դեկարտյան կոորդինատները, իսկ $(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta})$՝ բևեռային կոորդինատները: $\boldsymbol{O}$ բևեռի շուրջը գծենք $\boldsymbol{\rho}$ շառավղով շրջանագիծ և այն կդիտարկենք որպես եռանկյունաչափական շրջանագիծ, իսկ $\boldsymbol{Ox}$ առանցքը՝ որպես սկզբնական տրամագիծ: $\boldsymbol{M}$ կետից տանենք ուղղահայացներ $\boldsymbol{Ox}$ և $\boldsymbol{Oy}$ առանցքների վրա և նրանց հիմքերը համապատասխանաբար նշանակենք $\boldsymbol{M_x}$ և $\boldsymbol{M_y}$: Պարզ է, որ այդ դեպքում ստանում ենք

$$\boldsymbol{OM_x} = |\boldsymbol{OM}| \cos \boldsymbol{\theta},$$

$$\boldsymbol{OM_y} = |\boldsymbol{OM}| \sin \boldsymbol{\theta}$$

հավասարությունները: Եվ քանի որ $|\boldsymbol{OM}| = \boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{OM_x} = \boldsymbol{x}$ և $\boldsymbol{OM_y} = \boldsymbol{y}$, ապա ստանում ենք

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\rho}\cos\boldsymbol{\theta},\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\rho}\sin\boldsymbol{\theta} \tag{5.3}$$

բանաձևերը, որոնք դեկարտյան կոորդինատներն արտահայտում են բևեռային կոորդինատներով: Հակառակ բանաձևերը կարելի է ստանալ այդ բանաձևերից կամ անմիջականորեն.

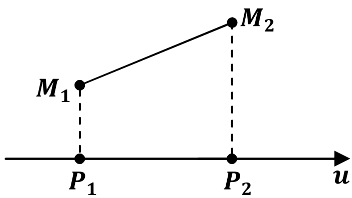
$$\boldsymbol{\rho} = \sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2},\ \tan\boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}}: \tag{5.4}$$

Սակայն նկատենք, որ $\tan\boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}}$ բանաձևը բևեռային անկյան գլխավոր արժեքն որոշում է ոչ լիարժեք. հարկավոր է նաև իմանալ, թե $\boldsymbol{\theta}$ մեծությունը դրական է, թե բացասական:

§ 5.3. ՀԱՏՎԱԾԻ ՊՐՈՅԵԿՑԻԱ: ԵՐԿՈՒ ԿԵՏԵՐԻ ՄԻՋԵՎ ՀԵՌԱՎՈՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

Այսուհետև, ինչ-որ հարցերի քննարկման ժամանակ կհամարենք, որ տրված է կոորդինատների որևէ համակարգ: Եթե ասելու ենք, որ տրված են ինչ-որ կետեր, ապա դա կնշանակի, որ հայտնի են նրանց կոորդինատները: Եվ եթե որևէ խնդրում պահանջվում է գտնել անհայտ կետեր, ապա խնդիրը կհամարվի լուծված, երբ հաշվվեն նրանց կոորդինատները:

Դիցուք տրված են $\boldsymbol{u}$ առանցքը և որևէ $\overline{\boldsymbol{M_1M_2}}$ հատված (նկար 5.7): $\boldsymbol{M_1}$ և $\boldsymbol{M_2}$ կետերից իջեցնենք ուղղահայացներ $\boldsymbol{u}$ առանցքի վրա և նրանց հիմքերը համապատասխանաբար նշանակենք $\boldsymbol{P_1}$ և $\boldsymbol{P_2}$: Այդ դեպքում **$\overline{\boldsymbol{P_1P_2}}$ հատվածի մեծությունը կոչվում է տրված $\overline{\boldsymbol{M_1M_2}}$ հատվածի պրոյեկցիա $\boldsymbol{u}$ առանցքի վրա,** որը գրի է առնվում հետևյալ հավասարության տեսքով.



Նկ. 5.7:

$$\textit{պր}_{\boldsymbol{u}}\overline{\boldsymbol{M_1M_2}} = \boldsymbol{P_1P_2}:$$

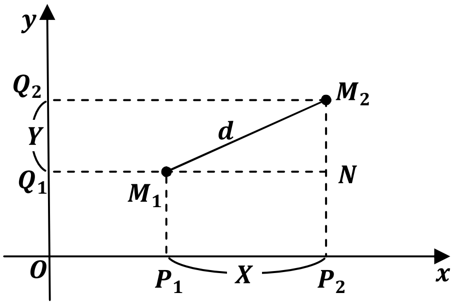
Համաձայն այս սահմանման, հատվածի պրոյեկցիան առանցքի վրա հանդիսանում է թիվ: Այն կարող է լինել դրական, բացասական կամ զրոյին հավասար: Պայմանավորվենք, որ ցանկացած հատվածի պրոյեկցիան $\boldsymbol{Ox}$ առանցքի վրա նշանակել մեծատառ $\boldsymbol{X}$, իսկ պրոյեկցիան $\boldsymbol{Oy}$ առանցքի վրա՝ մեծատառ $\boldsymbol{Y}$:

$\mathbf{5.10}$. ***Թեորեմ:*** Կամայական $\boldsymbol{M_1(x_1, y_1)}$ և $\boldsymbol{M_2(x_2, y_2)}$ կետերի համար $\overline{\boldsymbol{M_1M_2}}$ հատվածի պրոյեկցիաները կոորդինատային առանցքների վրա տրվում են

$$\boldsymbol{X = x_2 - x_1,\ \ Y = y_2 - y_1}$$

բանաձևերով:

Ապացույց: $\boldsymbol{M_1}$ և $\boldsymbol{M_2}$ կետերից իջեցնենք ուղղահայացներ $\boldsymbol{Ox}$ առանցքի վրա և նրանց հիմքերը համապատասխանաբար նշանակենք $\boldsymbol{P_1}$ և $\boldsymbol{P_2}$ (նկար 5.8): Պարզ է, որ $\boldsymbol{P_1}$ և $\boldsymbol{P_2}$ կետերը $\boldsymbol{Ox}$ առանցքի վրա համապատասխանաբար ունեն $\boldsymbol{x_1}$ և $\boldsymbol{x_2}$ կոորդինատները: Այստեղից էլ, ըստ 5.4. թեորեմի, $\boldsymbol{P_1P_2 = x_2 - x_1}$: Մյուս կողմից $\boldsymbol{P_1P_2 = X}$: Հետևաբար $\boldsymbol{X = x_2 - x_1}$: Նմանապես ապացուցվում է $\boldsymbol{Y = Q_1Q_2 = y_2 - y_1}$ հավասարությունը: Թեորեմն ապացուցված է:



Նկ. 5.8:

$\mathbf{5.11}$. ***Թեորեմ:*** Կամայական $\boldsymbol{M_1(x_1, y_1)}$ և $\boldsymbol{M_2(x_2, y_2)}$ կետերի համար նրանց միջև $\boldsymbol{d}$ հեռավորությունն որոշվում է

$$\boldsymbol{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

բանաձևով:

Ապացույց: Պահպանելով նախորդ թեորեմի նշանակումները՝ բացի այդ, $\boldsymbol{N}$ տառով նշանակենք $\boldsymbol{M_1Q_1}$ և $\boldsymbol{M_2P_2}$ ուղիղների հատման կետը (նկար 5.8): Քանի որ $\boldsymbol{M_1M_2N}$ եռանկյունն ուղղանկյուն է, ապա ըստ Պյութագորասի թեորեմի

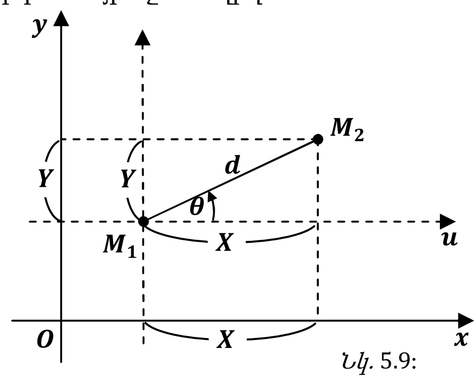
$$\boldsymbol{d = \sqrt{M_1N^2 + M_2N^2}}:$$

Մյուս կողմից, ակնհայտ է, որ $\boldsymbol{M_1N}$ և $\boldsymbol{M_2N}$ էջերի երկարություններ ը համընկնում են կոորդինատային առանցքների վրա $\boldsymbol{\overline{M_1M_2}}$ հատվածի պրոյեկցիաների $\boldsymbol{X}$ և $\boldsymbol{Y}$ մեծությունների հետ: Ուրեմն $\boldsymbol{d = \sqrt{X^2 + Y^2}}$: Այստեղից էլ, ըստ նախորդ թեորեմի, գտնում ենք, որ

$$\boldsymbol{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}:$$

Թեորեմն ապացուցված է: ■

Կրկին դիտարկենք $\boldsymbol{\overline{M_1M_2}}$ հատվածը: Այդ հատվածի $\boldsymbol{M_1}$ սկզբնակետից տանենք $\boldsymbol{Ox}$ առանցքին զուգահեռ $\boldsymbol{u}$ ճառագայթը՝ ուղղված $\boldsymbol{Ox}$ առանցքի դրական ուղղությամբ (նկար 5.9): Անկյունը, որով հարկավոր է պտտել $\boldsymbol{u}$ ճառագայթը, որպեսզի այն ուղղվի ըստ $\boldsymbol{\overline{M_1M_2}}$ հատվածի, նշանակենք $\boldsymbol{\theta}$ տառով: Այդ անկյունը կհասկանանք որպես եռանկյունաչափական անկյուն (նշանի և $\boldsymbol{\pm 2\pi n}$ տեսքի գումարելիի ճշտությամբ): $\boldsymbol{\theta}$ անկյունը կանվանենք $\boldsymbol{\overline{M_1M_2}}$ հատվածի բևեռային անկյուն՝ տրված կոորդինատային առանցքների նկատմամբ: Ակնհայտ է, որ $\boldsymbol{\theta}$ իրենից ներկայացնում է ոչ այլ ինչ, քան $\boldsymbol{M_2}$ կետի բևեռային անկյուն այն բևեռային համակարգում, որի բևեռ հանդիսանում է $\boldsymbol{M_1}$ կետը, իսկ բևեռային առանցք՝ $\boldsymbol{u}$ ճառագայթը: Այդ նույն համակարգում $\boldsymbol{\overline{M_1M_2}}$ հատվածի $\boldsymbol{d}$ երկարությունը հանդես է գալիս որպես $\boldsymbol{M_2}$ կետի բևեռային շառավիղ:



Նկ. 5.9:

Այժմ $\boldsymbol{M_1}$ կետը համարենք որպես նոր դեկարտյան համակարգի սկզբնակետ, որի առանցքներն ուղղված են այնպես, ինչպես տրված սկզբնական դեկարտյան համակարգի առանցքները (5.9 նկարում նոր առանցքները պատկերված են կետագծով): $\overline{M_1M_2}$ հատվածի պրոյեկցիաները հին և նոր համակարգերի համապատասխան առանցքների վրա նույնն են, որոնք նշանակենք X և Y: Այդ X և Y թվերը հանդիսանում են M_2 կետի կոորդինատները նոր համակարգում: Նրանց նկատմամբ կիրառելով բևեռային կոորդինատների միջև կապի բանաձևերը՝ ստանում ենք

$$X = d\cos\theta, Y = d\sin\theta$$

բանաձևերը, որոնք կամայական հատվածի պրոյեկցիաները կոորդինատային առանցքների վրա արտահայտում են հատվածի երկարության և բևեռային անկյան միջոցով:

Վերջին բանաձևերից և 5.10. թեորեմից ունենք, որ

$$x_2 - x_1 = d\cos\theta, y_2 - y_1 = d\sin\theta$$

կամ

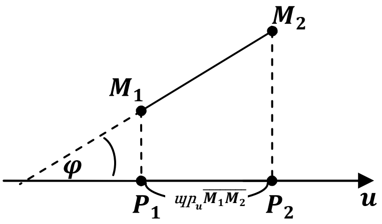
$$\cos\theta = \frac{x_2-x_1}{d}, \ \sin\theta = \frac{y_2-y_1}{d}, \ \tan\theta = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}:$$

Դիցուք u հանդիսանում է որևէ առանցք, իսկ φ՝ $\overline{M_1M_2}$ հատվածի հենման (թեքության) անկյունն է այդ առանցքին, այսինքն այն անկյունը, որով հարկավոր է պտտել u առանցքը, որպեսզի նրա ուղղությունը համընկնի $\overline{M_1M_2}$ հատվածի ուղղության հետ: Այդ դեպքում ճշմարիտ է հետևյալ բանաձևը.

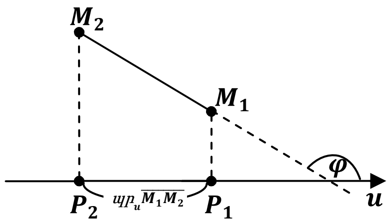
$$պր_u\overline{M_1M_2} = d\cos\varphi,$$

որտեղ d հանդիսանում է $\overline{M_1M_2}$ հատվածի երկարությունը: Այդ բանաձևն ապացուցելու անհրաժեշտություն չկա, քանի որ այն, ըստ էության, չի տարբերվում վերևում ստացված $X = d\cos\theta$ բանաձևից: Նկատենք միայն, որ անկյան նշանը չի ազդում նրա կոսինուսի վրա: Ուստի $պր_u\overline{M_1M_2} = d\cos\varphi$ բանաձևում φ անկյունը կարելի է հասկանալ տարրական երկրաչափության իմաստով (առանց՝ նշանը և 0-ից մինչև 180° սահմանները հաշվի առնելու):

Եթե φ անկյունը սուր է, ապա $\cos\varphi$ և հատվածի պրոյեկցիան դրական են (նկար 5.10), իսկ եթե φ անկյունը բութ է, ապա $\cos\varphi$ և հատվածի պրոյեկցիան բացասական են (նկար 5.11): Ինչպես նաև, եթե φ անկյունն ուղիղ է, ապա պրոյեկցիան հավասար է զրոյի:



Նկ. 5.10:



Նկ. 5.11:

Այսպիսով, ճշմարիտ է հետևյալը.

5.12. ***Թեորեմ:*** Հատվածի պրոյեկցիան ցանկացած առանցքի վրա հավասար է նրա երկարությանը՝ բազմապատկած այդ առանցքին հենման անկյան կոսինուսով:

§ 5.4. ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ԴԵԿԱՐՏՅԱՆ ԿՈՈՐԴԻՆԱՏՆԵՐԻ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆ ԱՌԱՆՑՔՆԵՐԻ ԶՈՒԳԱՀԵՌ ՏԵՂԱՇԱՐԺԻ ԵՎ ՊՏՈՒՅՏԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

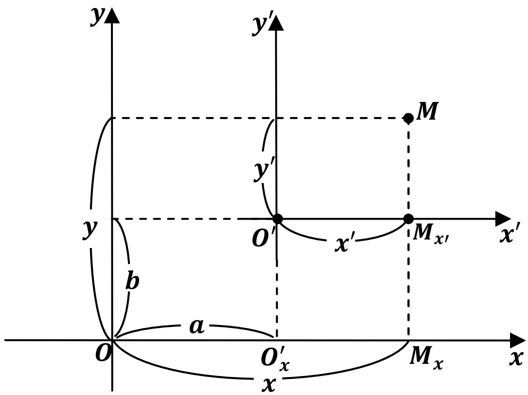
Սկզբում մենք դուրս կբերենք ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատների ձևափոխության բանաձևերն առանցքների զուգահեռ տեղաշարժի դեպքում, այսինքն դեկարտյան կոորդինատների համակարգի այնպիսի ձևափոխության դեպքում, երբ փոխվում է կոորդինատների սկզբնակետի դիրքը, իսկ առանցքների ուղղությունները և մասշտաբը մնում են անփոփոխ:

Դիցուք $\boldsymbol{Ox}$ և $\boldsymbol{Oy}$՝ հին, իսկ $\boldsymbol{O'x'}$ և $\boldsymbol{O'y'}$՝ նոր կոորդինատային առանցքներն են (նկար 5.12): Նոր առանցքների դիրքը հին համակարգի նկատմամբ որոշվում է հին կոորդինատներով նոր $\boldsymbol{O'}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ սկզբնակետի տրմամբ: $\boldsymbol{a}$ թիվը հանդիսանում է $\boldsymbol{Ox}$ առանցքի ուղղությամբ տեղաշարժի մեծությունը, իսկ $\boldsymbol{b}$ թիվը՝ $\boldsymbol{Oy}$ առանցքի ուղղությամբ տեղաշարժի մեծությունը: Հարթության կամայական $\boldsymbol{M}$ կետ հին առանցքների նկատմամբ ունի ինչ-որ $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ կոորդինատներ: Այդ նույն կետը նոր առանցքների նկատմամբ ունի այլ $(\boldsymbol{x'},\boldsymbol{y'})$ կոորդինատներ: Մեր նպատակն է ստանալ բանաձևեր, որոնք $\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y}$ արտահայտում են $\boldsymbol{x'},\boldsymbol{y'}$ միջոցով, կամ հակառակը:

$\boldsymbol{O'}$ կետը պրոյեկտենք $\boldsymbol{Ox}$ առանցքի վրա, իսկ $\boldsymbol{M}$ կետը՝ $\boldsymbol{Ox}$ և $\boldsymbol{O'x'}$ առանցքների վրա և համապատասխանաբար պրոյեկցիաները նշանակենք O'_x, M_x և $M_{x'}$: Ակնհայտ է, որ Ox առանցքի վրա $\overline{O'_xM_x}$ հատվածի մեծությունը հավասար է $O'x'$ առանցքի վրա $\overline{O'M_{x'}}$ հատվածի մեծությանը, այսինքն՝ $O'_xM_x = O'M_{x'}$: Սակայն $O'M_{x'} = x'$ և, հետևաբար, $O'_xM_x = x'$: Բացի այդ $OO'_x = a$ և $OM_x = x$: Համաձայն հիմնական նույնության (5.3. թեորեմ) $OM_x = OO'_x + O'_xM_x$, որտեղից էլ, ըստ նախորդ նշումների, ստանում ենք, որ $x = x' + a$: Նմանապես, Oy և $O'y'$ առանցքների վրա պրոյեկտման միջոցով, կստանանք, որ $y = y' + b$: Այսպիսով,

$$x = x' + a, \qquad y = y' + b:$$

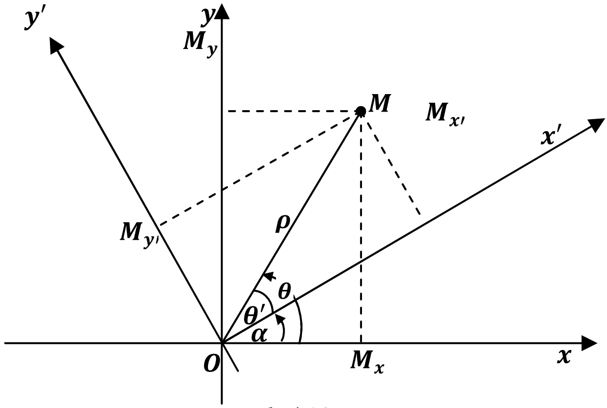
Սրանք էլ հենց փնտրվող բանաձևերն են: Դրանք կարելի է գրել նաև հետևյալ տեսքով. $x' = x - a$ և $y' = y - b$:



Նկ. 5.12:

Այժմ մենք դուրս կբերենք ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատների ձևափոխության բանաձևերն առանցքների պտույտի դեպքում, այսինքն ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատների համակարգի այնպիսի փոփոխության դեպքում, երբ երկու առանցքներն էլ պտտվում են միևնույն անկյունով և միևնույն կողմը, իսկ կոորդինատների սկզբնակետը և մասշտաբը մնում են անփոփոխ:

Դիցուք Ox և Oy՝ հին, իսկ Ox' և Oy'՝ նոր կոորդինատային առանցքներն են (նկար 5.13): Նոր առանցքների դիրքը հին համակարգի նկատմամբ որոշվում է պտույտի անկյան տրման միջոցով, որը համատեղում է հին առանցքները նորերի հետ: Այդ անկյունը նշանակենք $\boldsymbol{\alpha}$ տառով և այն կհասկանանք որպես եռանկյունաչափական անկյուն:



Նկ. 5.13:

Հարթության կամայական $\boldsymbol{M}$ կետ հին առանցքների նկատմամբ ունի ինչ-որ $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ կոորդինատներ, իսկ նոր առանցքների նկատմամբ՝ այլ $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}')$ կոորդինատներ: այսինքն՝ $\boldsymbol{OM_x = x}$, $\boldsymbol{OM_y = y}$, $\boldsymbol{OM_{x'} = x'}$, $\boldsymbol{OM_{y'} = y'}$: Մեր նպատակն է ստանալ բանաձևեր, որոնք $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ արտահայտում են $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}'$ միջոցով, կամ հակառակը:

$\boldsymbol{Ox}$ բևեռային առանցքով և $\boldsymbol{O}$ բևեռով համակարգում $\boldsymbol{M}$ կետի բևեռային կոորդինատները նշանակենք $(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta})$, իսկ $\boldsymbol{Ox'}$ բևեռային առանցքով և $\boldsymbol{O}$ բևեռով համակարգում՝ $(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta}')$: Բոլոր դեպքերում $\boldsymbol{\rho} = |\boldsymbol{OM}|$: Ակնհայտ է, որ $\boldsymbol{\theta = \theta' + \alpha}$: Մյուս կողմից, ըստ դեկարտյան և բևեռային կոորդինատների կապի բանաձևերի, ունենք, որ

$$\boldsymbol{x = \rho \cos \theta}, \quad \boldsymbol{y = \rho \sin \theta}:$$

Նմանապես

$$\boldsymbol{x' = \rho \cos \theta'}, \quad \boldsymbol{y' = \rho \sin \theta'}:$$

Այսպիսով,

$$\boldsymbol{x = \rho \cos \theta = \rho \cos(\theta' + \alpha) = \rho(\cos \theta' \cos \alpha - \sin \theta' \sin \alpha) =}$$
$$\boldsymbol{= \rho \cos \theta' \cos \alpha - \rho \sin \theta' \sin \alpha = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha},$$
$$\boldsymbol{y = \rho \sin \theta = \rho \sin(\theta' + \alpha) = \rho(\cos \theta' \sin \alpha + \sin \theta' \cos \alpha) =}$$
$$\boldsymbol{= \rho \cos \theta' \sin \alpha + \rho \sin \theta' \cos \alpha = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha}:$$

Վերջապես,

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,$$

$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha:$$

Սրանք էլ որոնելի բանաձևերն են: Հակառակ բանաձևերը միանգամից կարելի է ստանալ հետևյալ դատողության օգնությամբ. եթե նոր համակարգը ստացվում է հին համակարգի α անկյան պտույտով, ապա հին համակարգը ստացվում է նոր համակարգի $-\alpha$ անկյան պտույտով: Այդ իսկ պատճառով վերջին հավասարություններում կարելի է տեղերով փոխել հին ու նոր կոորդինատները՝ միաժամանակ α անկյունը փոխարինելով $-\alpha$ անկյունով: Կատարելով այդ ձևափոխությունները՝ ստանում ենք

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha,$$

$$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha,$$

բանաձևերը:

ԳԼՈՒԽ 6

ՎԵԿՏՈՐՆԵՐ

§ 6.1. ՎԵԿՏՈՐԻ ՀԱՍԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆԸ

Նախորդ գլխում սահմանվեց ուղղորդված հատվածի հասկացությունը: Յուրաքանչյուր ուղղորդված հատված, բացի երկարությունից, ունի նաև որոշակի ուղղվածություն (հատվածի սկզբնակետից դեպի ծայրակետը ձգվող ուղղությունը):

Դիտարկենք երկու իրարից տարբեր զուգահեռ ուղիղների վրա գտնվող ոչ զրոյական $\overline{AB}$ և $\overline{CD}$ ուղղորդված հատվածները: Տանենք A և C կետերով անցնող α հարթություն, որը չի անցնում B և D կետերով: Այդ հարթությանը չպատկանող տարածության բոլոր կետերի բազմությունը α հարթությունը բաժանում է երկու ենթատարածությունների (կիսատարածությունների): Եթե B և D կետերն ընկած են միևնույն կիսատարածությունում, ապա ասում են, որ $\overline{AB}$ և $\overline{CD}$ ուղղորդված հատվածները **միանման են ուղղված**: Հակառակ դեպքում $\overline{AB}$ և $\overline{CD}$ ուղղորդված հատվածները կոչվում են **հակադիր ուղղված**: Այժմ ենթադրենք, որ $\overline{AB}$ և $\overline{EF}$ ուղղորդված հատվածները գտնվում են մեկ ուղղի վրա: Այդ դեպքում ասում են, որ այդ հատվածները ուղղված են միանման, եթե գոյություն ունի այնպիսի $\overline{CD}$ ուղղորդված հատված, որը միանման է ուղղված $\overline{AB}$ և $\overline{EF}$ հատվածներից յուրաքանչյուրի հետ: Հակառակ դեպքում $\overline{AB}$ և $\overline{EF}$ հատվածները կոչվում են հակադիր ուղղված: Ինչպես արդեն գիտենք, զրոյական հատվածը միանման է ուղղված ցանկացած հատվածի հետ:

Երկու $\overline{AB}$ և $\overline{CD}$ ուղղորդված հատվածներ կոչվում են համարժեք և այդ փաստը գրվում է $\overline{AB}\sim\overline{CD}$ տեսքով, եթե նրանք ունեն միևնույն երկարությունը և միանման են ուղղված: Հեշտ է համոզվել, որ ուղղորդված հատվածների համարժեքությունը ռեֆլեքսիվ է, սիմետրիկ է և տրանզիտիվ, ուստի հանդիսանում է համարժեքության հարաբերություն բոլոր ուղղորդված հատվածների բազմության վրա: Դա նշանակում է, որ բոլոր ուղղորդված հատվածների բազմությունը տրոհվում է զույգ առ զույգ չհատվող՝ իրար համարժեք հատված-ների դասերի:

6.1. *Սահմանում:* Իրար համարժեք ուղղորդված հատվածների դասը կոչվում է **վեկտոր**:

Այդպիսի դասի, այսինքն՝ վեկտորի, տրման համար բավական է նշել այդ դասի ինչ-որ ուղղորդված հատված: Մյուս կողմից, ցանկա-ցած $\overline{\boldsymbol{AB}}$ ուղղորդված հատված նշում է լիովին որոշված վեկտոր՝ $\overline{\boldsymbol{AB}}$ հատվածին համարժեք հատվածների դասը, որը կնշանակենք $\overline{\boldsymbol{AB}}$ գրությամբ՝ ինչպես այդ դասն որոշող ուղղորդված հատված: Այդ նույն վեկտորն որոշվում է ցանկացած $\overline{\boldsymbol{CD}}\sim\overline{\boldsymbol{AB}}$ ուղղորդված հատ-վածով:

6.2. *Սահմանում:* Վեկտորները կոչվում են **հավասար**, եթե նրանք կազմված են միևնույն ուղղորդված հատվածներից:

Սահմանումից անմիջապես հետևում է, որ $\overline{\boldsymbol{AB}}$ և $\overline{\boldsymbol{CD}}$ վեկտոր-ների հավասարությունը համարժեք է $\overline{\boldsymbol{AB}}\sim\overline{\boldsymbol{CD}}$ պայմանին:

Վեկտորների նշանակման համար կօգտագործենք լատինական այբուբենի մուգ փոքրատառերը և ուղղորդված հատվածների նշա-նակումները: Զրոյական վեկտորը (բոլոր զրոյական հատվածների դասը) կնշանակենք $\boldsymbol{o}$ տառով: Գծագրի վրա վեկտորը միշտ կպատ-կերենք սլաքի տեսքով:

Դիցուք տրված են $\boldsymbol{a}$ վեկտորը և $\boldsymbol{A}$ կետը: Ակնհայտ է, որ գոյու-թյուն ունի ճիշտ մեկ այնպիսի $\boldsymbol{B}$ կետ, որ

$$\boldsymbol{a}=\overline{\boldsymbol{AB}}:$$

Ուղղորդված $\overline{\boldsymbol{AB}}$ հատվածի կառուցման գործողությունը, որի համար տեղի ունի $\boldsymbol{a}=\overline{\boldsymbol{AB}}$ հավասարությունը, կանվանենք $\boldsymbol{A}$ կետից **$\boldsymbol{a}$ վեկտորի տեղադրում**:

6.3. *Սահմանում:* Տրված **$\boldsymbol{a}$ վեկտորի երկարություն (մոդուլ)** կոչվում է $\boldsymbol{a}$ վեկտորը ծնող ուղղորդված հատվածներից ցանկացածի երկարությունը և նշանակվում է $|\boldsymbol{a}|$ տեսքով:

Դիցուք տրված են $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորները: Այդ երկու վեկտորները տեղադրենք ինչ-որ մեկ $\boldsymbol{O}$ կետից (կառուցենք այնպիսի $\overline{\boldsymbol{OA}}$ և $\overline{\boldsymbol{OB}}$ ուղղորդված հատվածներ, որ $\overline{\boldsymbol{OA}}=\boldsymbol{a}$ և $\overline{\boldsymbol{OB}}=\boldsymbol{b}$): Այդ դեպքում $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորների կազմած անկյուն կանվանենք $\overline{\boldsymbol{OA}}$ և $\overline{\boldsymbol{OB}}$ ուղղորդված հատվածների միջև ընկած անկյան մեծությունը: Ակնհայտ է, որ $\boldsymbol{a}$ և

$\boldsymbol{b}$ վեկտորների կազմած անկյունը կախված չէ $\boldsymbol{O}$ կետի ընտրությունից:

Ուղղորդված $\overline{\boldsymbol{AB}}$ հատվածը կոչվում է զուգահեռ որևէ ուղղու (հարթությանը), եթե ուղիղը, որի վրա նա գտնվում է, զուգահեռ է այդ ուղղուն (հարթությանը): Զրոյական հատվածը, ըստ սահմանման, զուգահեռ է ցանկացած ուղղու (հարթությանը): Տրված $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_n}$ վեկտորները կոչվում են **կոլինեար (կոմպլանար)**, եթե նրանց ծնող ուղղորդված հատվածները զուգահեռ են որևէ ուղղու (հարթությանը):

Վեկտորները մեկնաբանենք նաև այլ կերպ: Դիցուք տրված է $\overline{\boldsymbol{AB}}$ վեկտորը ($\overline{\boldsymbol{AB}}$ հատվածին համարժեք ուղղորդված հատվածների դասը): Դիտարկենք տարածության մեկ ձևափոխություն, որը նրա կամայական $\boldsymbol{C}$ կետ արտապատկերում է այնպիսի $\boldsymbol{D}$ կետի, որ $\overline{\boldsymbol{CD}} \sim \overline{\boldsymbol{AB}}$: Այդպիսի ձևափոխությունը կոչվում է զուգահեռ տեղաշարժ: Այդպես ստեղծվում է փոխմիարժեք համապատասխանություն բոլոր վեկտորների բազմության և բոլոր զուգահեռ տեղաշարժերի բազմության միջև: Վերջինիս համաձայն զուգահեռ տեղաշարժերը նույնպես կոչվում են վեկտորներ:

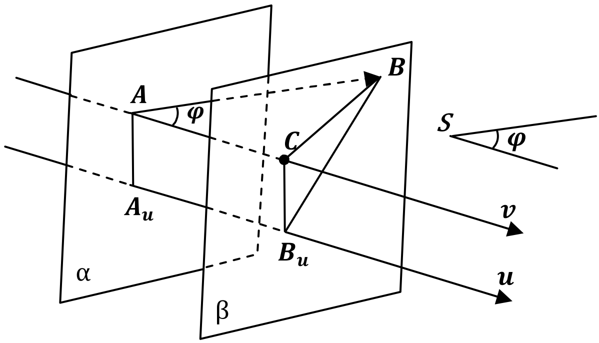
Եթե տարածության մեջ ֆիքսված է որևէ α հարթություն և դիտարկվում են միայն այդ հարթությանը պատկանող կետերը, ապա վեկտորի տակ հասկացվում է α հարթությանը պատկանող համարժեք ուղղորդված հատվածների դասը: Նմանապես մտցվում է ուղղի վրա վեկտորների հասկացությունը:

Դիտողություն: Գրականության մեջ ուղղորդված հատվածները կոչվում են կապակցված վեկտորներ կամ պարզապես վեկտորներ: Այդ դեպքում վեկտորը, մեր իմաստով, կոչվում է ազատ վեկտոր:

Դիցուք տրված են որևէ $\overline{\boldsymbol{AB}}$ վեկտոր և կամայական $\boldsymbol{u}$ առանցք: $\boldsymbol{A}$ և $\boldsymbol{B}$ կետերից իջեցնենք ուղղահայացներ $\boldsymbol{u}$ առանցքի վրա և նրանց հիմքերը նշանակենք $\boldsymbol{A_u}$ և $\boldsymbol{B_u}$: Այդ դեպքում $\overline{\boldsymbol{A_u B_u}}$ ուղղորդված հատվածի $\boldsymbol{A_u B_u}$ մեծությունը $\boldsymbol{u}$ առանցքի վրա հանդիսանում է $\overline{\boldsymbol{AB}}$ վեկտորի պրոյեկցիան $\boldsymbol{u}$ առանցքի վրա.

$$\text{պր}_{\boldsymbol{u}} \overline{\boldsymbol{AB}} = \boldsymbol{A_u B_u}:$$

$\overline{\boldsymbol{AB}}$ վեկտորի պրոյեկցիայի կառուցումը $\boldsymbol{u}$ առանցքի վրա պատկերված է 6.1 նկարում, որտեղ $\boldsymbol{A}$ և $\boldsymbol{B}$ կետերից տարված են α և β հարթությունները, որոնք ուղղահայաց են $\boldsymbol{u}$ առանցքին: Այդ հարթությունների հատումը $\boldsymbol{u}$ առանցքի հետ որոշում է $\boldsymbol{A_u}$ և $\boldsymbol{B_u}$ կետերը (քանի որ α և β հարթությունններն ուղղահայաց են $\boldsymbol{u}$ առանցքին, ապա $\boldsymbol{AA_u}$ և $\boldsymbol{BB_u}$ ուղիղները նույնպես ուղղահայաց են այդ առանցքին):



Նկ. 6.1:

Տարածությունում ընտրենք կամայական $\boldsymbol{S}$ կետ և այդ կերից տանենք երկու ճառագայթ. մեկը $\overline{\boldsymbol{AB}}$ վեկտորի ուղղությամբ, իսկ մյուսը՝ $\boldsymbol{u}$ առանցքի ուղղությամբ (նկար 6.1): Այդ ճառագայթներով կազմված $\boldsymbol{\varphi}$ անկյունը կոչվում է $\overline{\boldsymbol{AB}}$ վեկտորի **հենման անկյուն** $\boldsymbol{u}$ առանցքին: Ակնհայտ է, որ $\boldsymbol{\varphi}$ անկյան կառուցման համար $\boldsymbol{S}$ կետի ընտրությունն էական չէ: Ակնհայտ է նաև այն, որ եթե $\boldsymbol{u}$ առանցքը փոխարինենք մեկ ուրիշ առանցքով, որն ունի նույն ուղղությունը, ապա $\boldsymbol{\varphi}$ անկյունը կմնա անփոփոխ: $\boldsymbol{u}$ առանցքին համաուղղված և $\boldsymbol{A}$ կետով անցնող առանցքը նշանակենք $\boldsymbol{v}$ տառով: Համաձայն վերն ասվածի, $\overline{\boldsymbol{AB}}$ վեկտորի հենման անկյունը $\boldsymbol{v}$ առանցքին հավասար է $\boldsymbol{\varphi}$: Դիցուք $\boldsymbol{C}$ հանդիսանում է այն կետը, որտեղ $\boldsymbol{v}$ առանցքը հատում է β հարթությունը: Հետևաբար $\boldsymbol{AC}$ հանդիսանում է $\overline{\boldsymbol{AB}}$ վեկտորի պրոյեկցիան $\boldsymbol{v}$ առանցքի վրա: Քանի որ $\boldsymbol{u}$ և $\boldsymbol{v}$ առանցքները զուգահեռ են և միանման ուղղված, ապա α և β հարթություններով սահմանափակված նրանց հատվածներն ունեն միևնույն մեծությունը. $\boldsymbol{A_uB_u} = \boldsymbol{AC}$: Հետևաբար

$$պր_u\overline{\boldsymbol{AB}} = պր_v\overline{\boldsymbol{AB}}:$$

Մյուս կողմից, քանի որ $\overline{\boldsymbol{AB}}$ վեկտորը և $\boldsymbol{v}$ առանցքը գտնվում են նույն հարթությունում, ապա

$$պր_v\overline{\boldsymbol{AB}} = |\overline{\boldsymbol{AB}}|\cos\boldsymbol{\varphi}:$$

Համադրելով վերջին երկու հավասարությունները՝ ստանում ենք, որ

$$պր_u\overline{AB} = |\overline{AB}|\cos\varphi:$$

Եթե $\overline{AB}$ վեկտորը նշանակենք a տառով, ապա կունենանք, որ

$$պր_u a = |a|\cos\varphi:$$

6.4. ***Թեորեմ:*** Վեկտորի պրոյեկցիան առանցքի վրա հավասար է նրա մոդուլին՝ բազմապատկած այդ առանցքին վեկտորի հենման անկյան կոսինուսով:

Դիտարկենք երկու հավասար $\overline{A_1B_1}$ և $\overline{A_2B_2}$ վեկտորները և որևէ u առանցք: Քանի որ հավասար վեկտորներն ունեն հավասար մոդուլներ և u առանցքին հենման հավասար անկյուններ, ապա ստանում ենք, որ

$$պր_u\overline{A_1B_1} = պր_u\overline{A_2B_2},$$

այսինքն՝ **հավասար վեկտորները միևնույն առանցքի վրա ունեն հավասար պրոյեկցիաներ**:

§ 6.2. ՎԵԿՏՈՐԻ ՊՐՈՅԵԿՑԻԱՆԵՐԸ ԿՈՈՐԴԻՆԱՏԱՅԻՆ ԱՌԱՆՑՔՆԵՐԻ ՎՐԱ

Ենթադրենք, որ տարածությունում տրված է $Oxyz$ ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատային համակարգը:

Դիտարկենք կամայական a վեկտոր: Դիցուք X նշանակում է a վեկտորի պրոյեկցիան Ox առանցքի վրա, Y՝ այդ վեկտորի պրոյեկցիան Oy առանցքի վրա և Z՝ նրա պրոյեկցիան Oz առանցքի վրա:

Համաձայն նախորդ պարագրաֆի, a վեկտորին հավասար յուրաքանչյուր վեկտոր կոորդինատային առանցքների վրա ունի նույն X,Y,Z պրոյեկցիաները:

Հակառակը, եթե որևէ b վեկտոր կոորդինատային առանցքների վրա ունի X,Y,Z պրոյեկցիաները, ապա $b = a$: Որպեսզի համոզվենք դրանում, a և b վեկտորները տեղադրենք կոորդինատների սկզբնակետում, և այդպիսի տեղադրման դեպքում այդ վեկտորների ծայրակետերը համապատասխանաբար նշանակենք A և B տառերով: Քանի որ a և b վեկտորներն ունեն միևնույն X պրոյեկցիան Ox

առանցքի վրա, ապա պարզ է, որ $\boldsymbol{A}$ և $\boldsymbol{B}$ կետերը պետք է գտնվեն միևնույն հարթությունում, որն ուղղահայաց է $\boldsymbol{Ox}$ առանցքին, և հատկապես այն հարթությունում, որը $\boldsymbol{Ox}$ առանցքի վրա հատում է $\boldsymbol{X}$ մեծությամբ հատված՝ հաշված կոորդինատների սկզբնակետից: Նույն պատճառով $\boldsymbol{A}$ և $\boldsymbol{B}$ կետերը պետք է գտնվեն միևնույն հարթությունում, որն ուղղահայաց է $\boldsymbol{Oy}$ առանցքին և որը $\boldsymbol{Oy}$ առանցքի վրա հատում է $\boldsymbol{Y}$ մեծությամբ հատված, ինչպես նաև միևնույն հարթությունում, որն ուղղահայաց է $\boldsymbol{Oz}$ առանցքին և այդ առանցքի վրա հատում է $\boldsymbol{Z}$ մեծությամբ հատված: Սակայն այդ դեպքում $\boldsymbol{A}$ և $\boldsymbol{B}$ կետերն անպայման համընկնում են, քանի որ նշված երեք հարթությունները հատվում են ճիշտ մեկ կետում: Հետևաբար

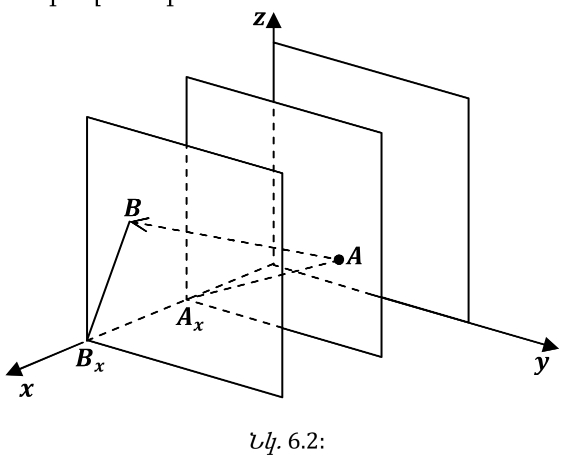
$$\boldsymbol{b} = \overline{\boldsymbol{OB}} = \overline{\boldsymbol{OA}} = \boldsymbol{a}:$$

Այն, ինչ ասվեց, նշանակում է, որ կոորդինատային առանցքների վրա վեկտորի նախապես տրված պրոյեկցիաները լիովին որոշում են նրան որպես ազատ վեկտոր՝ տարածությունում դիրքի ճշտությամբ: Այդ իսկ պատճառով $\boldsymbol{a}$ վեկտորի $\boldsymbol{X}$,$\boldsymbol{Y}$,$\boldsymbol{Z}$ պրոյեկցիաներն անվանում են նրա **(դեկարտյան) կոորդինատներ**:

Հետագայում, ցանկանալով ասել, որ $\boldsymbol{a}$ վեկտորն ունի $\boldsymbol{X}$,$\boldsymbol{Y}$,$\boldsymbol{Z}$ կոորդինատները, կգրենք

$$\boldsymbol{a} = \{\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}\},$$

այդ հավասարության աջ մասը դիտարկելով որպես վեկտորի նշանակման նոր եղանակ:



Նկ. 6.2:

6.5. ***Թեորեմ:*** Կամայական $\boldsymbol{A(x_1, y_1, z_1)}$ և $\boldsymbol{B(x_2, y_2, z_2)}$ կետերի համար $\overline{\boldsymbol{AB}}$ վեկտորի կոորդինատներն որոշվում են

$$\boldsymbol{X = x_2 - x_1,\ Y = y_2 - y_1,\ Z = z_2 - z_1}$$

բանաձևերով:

Ապացույց: $\boldsymbol{A}$ և $\boldsymbol{B}$ կետերից իջեցնենք ուղղահայացներ $\boldsymbol{Ox}$ առանցքի վրա և նրանց հիմքերը նշանակենք $\boldsymbol{A_x}$ և $\boldsymbol{B_x}$ (տես. նկար 6.2, որտեղ, պարզության համար, $\boldsymbol{A}$ և $\boldsymbol{B}$ կետերից տարված են $\boldsymbol{Ox}$ առանցքին ուղղահայաց հարթություններ): $\boldsymbol{A_x}$ և $\boldsymbol{B_x}$ կետերը $\boldsymbol{Ox}$ առանցքի վրա համապատասխանաբար ունեն $\boldsymbol{x_1}$ և $\boldsymbol{x_2}$ կոորդինատները: Այստեղից էլ, ըստ 5.4. թեորեմի, $\boldsymbol{A_xB_x = x_2 - x_1}$: Սակայն $\boldsymbol{A_xB_x = X}$ և, հետևաբար,

$$\boldsymbol{X = x_2 - x_1}:$$

Նմանապես ստացվում են $\boldsymbol{Y = y_2 - y_1}$, $\boldsymbol{Z = z_2 - z_1}$ հավասարությունները: ■

Այսպիսով, **որպեսզի ստանանք վեկտորի կոորդինատները, հարկավոր է նրա ծայրակետի կոորդինատներից հանել սկզբնակետի համապատասխան կոորդինատները**:

Դիցուք $\boldsymbol{M(x, y, z)}$ հանդիսանում է տարածության կամայական կետ: Այդ դեպքում $\boldsymbol{r} = \overline{\boldsymbol{OM}}$ վեկտորը, որի սկզբնակետը կոորդինատների սկզբնակետն է, իսկ ծայրակետը՝ $\boldsymbol{M}$ կետը, կոչվում է այդ կետի **շառավիղ-վեկտոր**:

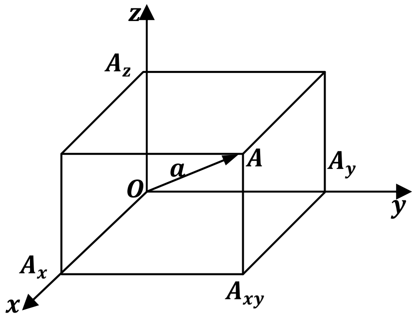
Հաշվելով $\overline{\boldsymbol{OM}}$ վեկտորի կոորդինատներն ըստ 6.5. թեորեմի՝ ստանում ենք, որ

$$\boldsymbol{X = x,\ Y = y,\ Z = z},$$

այսինքն $\boldsymbol{M}$ կետի կոորդինատները և նրա $\overline{\boldsymbol{OM}}$ շառավիղ-վեկտորի կոորդինատներն նույնն են:

Դիցուք տրված է կամայական $\boldsymbol{a} = \{\boldsymbol{X, Y, Z}\}$ վեկտոր: Պարզության համար ենթադրենք, որ $\boldsymbol{a}$ վեկտորը տեղադրված է կոորդինատների սկզբնակետում: $\boldsymbol{a}$ վեկտորի $\boldsymbol{A}$ ծայրակետից տանենք հարթություններ, որոնք ուղղահայաց են կոորդինատային առանցքներին:

Այդ հարթությունների հատման կետերը կոորդինատային առանցքների հետ համապատասխանաբար նշանակենք $\boldsymbol{A_x}$, $\boldsymbol{A_y}$, $\boldsymbol{A_z}$: Այդ հարթությունները կոորդինատային հարթությունների հետ միասին կազմում են ուղղանկյուն զուգահեռանիստ, որի համար $\overline{\boldsymbol{OA}}$ հատվածն անկյունագիծ է (նկար 6.3):



Նկ. 6.3:

Տարրական երկրաչափությունից հայտնի է, որ ուղղանկյուն զուգահեռանիստի անկյունագծի երկարության քառակուսին հավասար է նրա կից կողմերի երկարությունների քառակուսիների գումարին: Հետևաբար

$$\boldsymbol{OA^2 = OA_x{}^2 + OA_y{}^2 + OA_z{}^2}:$$

Սակայն $|\boldsymbol{OA}| = |\boldsymbol{a}|$, $\boldsymbol{OA_x = X}$, $\boldsymbol{OA_y = Y}$, $\boldsymbol{OA_z = Z}$: Ուստի ստանում ենք, որ

$$|\boldsymbol{a}|^2 = \boldsymbol{X^2 + Y^2 + Z^2} \quad \text{կամ} \quad |\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{X^2 + Y^2 + Z^2}}:$$

§ 6.3. ՈՒՂՂՈՐԴՈՂ ԿՈՍԻՆՈՒՍՆԵՐ: ԵՐԿՈՒ ԿԵՏԵՐԻ ՄԻՋԵՎ ՀԵՌԱՎՈՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

Դիցուք $\boldsymbol{a}$ վեկտորը կոորդինատային առանցքների հետ կազմում է $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ անկյուններ: Այդ դեպքում $\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha}$, $\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\beta}$, $\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\gamma}$ մեծությունները կոչվում են $\boldsymbol{a}$ վեկտորի **ուղղորդող կոսինուսներ**: Նրանք այդպես են կոչվում այն պատճառով, որ, տրված լինելով նախապես, որոշում են վեկտորի ուղղությունները:

Եթե, բացի ուղղորդող կոսինուսներից, տրված է նաև վեկտորի մոդուլը, ապա դրանով վեկտորն որոշված է միարժեքորեն (որպես ազատ վեկտոր): Այդ դեպքում վեկտորի կոորդինատները կարելի է հաշվել

$$\boldsymbol{X} = |\boldsymbol{a}|\,\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha},\ \ \boldsymbol{Y} = |\boldsymbol{a}|\,\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\beta},\ \ \boldsymbol{Z} = |\boldsymbol{a}|\,\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\gamma}$$

բանաձևերով, որոնք տեղի ունեն համաձայն $\boldsymbol{a}$ վեկտորի պրոյեկցիայի բանաձևերի՝ համապատասխան կոորդինատային առանցքների վրա:

6.6. ***Թեորեմ:*** Ցանկացած $\boldsymbol{a}$ վեկտորի համար նրա $|\boldsymbol{a}|$ մոդուլը, $\cos\boldsymbol{\alpha}$, $\cos\boldsymbol{\beta}$, $\cos\boldsymbol{\gamma}$ ուղղորդող կոսինուսները և $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}$ կոորդինատները կապված են

$$\boldsymbol{X} = |\boldsymbol{a}|\cos\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{Y} = |\boldsymbol{a}|\cos\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{Z} = |\boldsymbol{a}|\cos\boldsymbol{\gamma},$$

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{X}^2 + \boldsymbol{Y}^2 + \boldsymbol{Z}^2}$$

առնչություններով:

Թեորեմից հետևում է, որ

$$\cos\boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{X}}{\sqrt{\boldsymbol{X}^2+\boldsymbol{Y}^2+\boldsymbol{Z}^2}},\ \cos\boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{Y}}{\sqrt{\boldsymbol{X}^2+\boldsymbol{Y}^2+\boldsymbol{Z}^2}},\ \cos\boldsymbol{\gamma} = \frac{\boldsymbol{Z}}{\sqrt{\boldsymbol{X}^2+\boldsymbol{Y}^2+\boldsymbol{Z}^2}}:$$

Այստեղ արմատները հասկացվում են որպես թվաբանական արմատներ: Վերջին հավասարություններից յուրաքանչյուրը բարձրացնելով քառակուսի և գումարելով իրար՝ ստանում ենք, որ

$$\cos^2\boldsymbol{\alpha} + \cos^2\boldsymbol{\beta} + \cos^2\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{1}:$$

Դիցուք տարածության մեջ տրված են կամայական երկու՝ $\boldsymbol{M_1}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{z_1})$ և $\boldsymbol{M_2}(\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2}, \boldsymbol{z_2})$ կետեր և պահանջվում է գտնել նրանց մեջև $\boldsymbol{d}$ հեռավորությունը:

Որոնելի լուծումն անմիջապես ստացվում է 6.5. և 6.6. թեորեմների արդյունքներից: Իսկապես, ունենք, որ

$$\overline{\boldsymbol{M_1M_2}} = \{\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_2} - \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{z_2} - \boldsymbol{z_1}\}$$

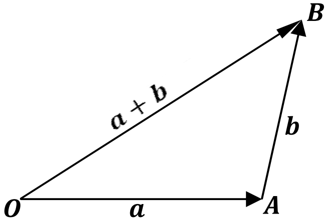
և $\boldsymbol{d}$ հանդիսանում է $\overline{\boldsymbol{M_1M_2}}$ վեկտորի մոդուլը: Հետևաբար

$$\boldsymbol{d} = \sqrt{(\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1})^2 + (\boldsymbol{y_2} - \boldsymbol{y_1})^2 + (\boldsymbol{z_2} - \boldsymbol{z_1})^2}:$$

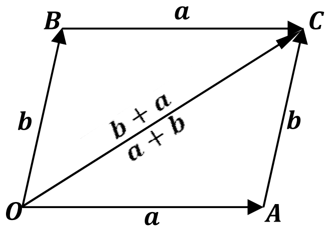
Վերջինս հանդիսանում է հենց խնդրի որոնելի լուծումը:

§ 6.4. ՎԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐՈՒՄ ԵՎ ԹՎՈՎ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՈՒՄ

Դիցուք տրված են երկու՝ $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորները: Ընտրենք որևէ $\boldsymbol{O}$ կետ և նրանից տեղադրենք $\boldsymbol{a}$ վեկտորը, այսինքն կառուցենք այնպիսի $\overline{\boldsymbol{OA}}$ ուղղորդված հատված, որ $\overline{\boldsymbol{OA}} = \boldsymbol{a}$: Այնուհետև $\boldsymbol{A}$ կետից տեղադրենք $\boldsymbol{b}$ վեկտորը, այսինքն կառուցենք այնպիսի $\overline{\boldsymbol{AB}}$ ուղղորդված հատված, որ $\overline{\boldsymbol{AB}} = \boldsymbol{b}$ (նկար 6.4):



Նկ. 6.4:



Նկ. 6.5:

6.7. *Սահմանում:* $\overline{\boldsymbol{OB}}$ ուղղորդված հատվածով որոշվող վեկտորը կոչվում է $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ **վեկտորների գումար** և նշանակվում է $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$:

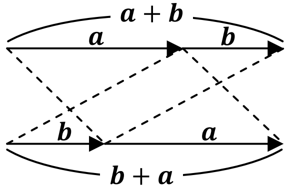
Ակնհայտ է, որ $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ գումարը կախված չէ $\boldsymbol{O}$ կետի ընտրությունից: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ վեկտորի կառուցման նշված եղանակը կոչվում է **եռանկյան (եզրափակման) կանոն**:

Դիցուք $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$՝ ոչ կոլինեար վեկտորներ են: Այդ երկու վեկտորները տեղադրենք մեկ $\boldsymbol{O}$ կետից (նկար 6.5), այսինքն գտնենք այնպիսի $\boldsymbol{A}$ և $\boldsymbol{B}$ կետեր, որ $\overline{\boldsymbol{OA}} = \boldsymbol{a}$ և $\overline{\boldsymbol{OB}} = \boldsymbol{b}$: Երեք՝ $\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{A}$ և $\boldsymbol{B}$ կետերով որոշվող հարթության մեջ $\boldsymbol{OA}$ և $\boldsymbol{OB}$ կողմերի վրա կառուցենք $\boldsymbol{OABC}$ զուգահեռագիծը: Քանի որ $\overline{\boldsymbol{BC}} = \boldsymbol{a}$ և $\overline{\boldsymbol{AC}} = \boldsymbol{b}$, ապա

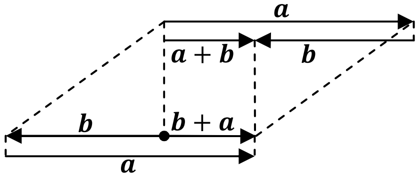
$$\overline{\boldsymbol{OC}} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}:$$

Այսպիսով, մենք ստացանք երկու ոչ կոլինեար վեկտորների գումարման նոր կանոն՝ **զուգահեռագծի կանոնը**:

Ստացված վերջին հավասարությունը ցույց է տալիս, որ երկու ոչ կոլինեար վեկտորների գումարը կախված չէ գումարելիների կարգից: Այդ հատկությունը ճշմարիտ է նաև կոլինեար վեկտորների համար: Այն հեշտությամբ ստացվում է վեկտորների գումարման եռանկյան կանոնից ինչպես համաուղղված (նկար 6.6), այնպես էլ հակառակ ուղղված (նկար 6.7) վեկտորների դեպքում:



Նկ. 6.6:



Նկ. 6.7:

Այսպիսով ճշմարիտ է հետևյալը.

6. 8. ***Հատկություն:*** Վեկտորների գումար գործողությունը տեղափոխելի (կոմուտատիվ) է:

Դիցուք տրված են $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ վեկտորները: Կամայական $\boldsymbol{O}$ կետից տեղադրենք $\boldsymbol{a}$ վեկտորը (նկար 6.8), այսինքն կառուցենք այնպիսի $\boldsymbol{A}$ կետ, որ $\overline{\boldsymbol{OA}} = \boldsymbol{a}$: Այնուհետև կառուցենք այնպիսի $\boldsymbol{B}$ կետ, որ $\overline{\boldsymbol{AB}} = \boldsymbol{b}$: Ըստ վեկտորների գումարի սահմանման $\overline{\boldsymbol{OB}} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$: Այժմ այդ վեկտորին գումարենք $\boldsymbol{c}$ վեկտորը: Դրա համար կառուցենք այնպիսի $\boldsymbol{C}$ կետ, որ $\overline{\boldsymbol{BC}} = \boldsymbol{c}$: Այդ դեպքում ունենք, որ

$$\overline{\boldsymbol{OC}} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}:$$

Մյուս կողմից, $\overline{\boldsymbol{AC}} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ և, հետևաբար,

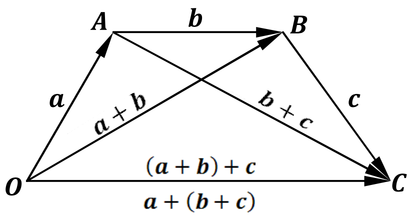
$$\overline{\boldsymbol{OC}} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}):$$

Համադրելով վերջին երկու հավասարությունները՝ ստանում ենք, որ

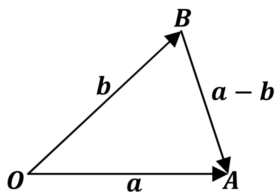
$$\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}:$$

Այսպիսով ապացուցեցինք վեկտորների գումարման ևս մեկ հատկություն.

6. 9. ***Հատկություն:*** Վեկտորների գումար գործողությունը զուգորդական (ասոցիատիվ) է:



Նկ. 6.8:



Նկ. 6.9:

Նշենք, որ զրոյական $\boldsymbol{o}$ վեկտորը վեկտորների գումար գործողության համար կատարում է միավոր տարրի դերը. կամայական $\boldsymbol{a}$ վեկտորի համար

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{o}=\boldsymbol{o}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}:$$

Դիցուք $\boldsymbol{a}$ հանդիսանում է կամայական վեկտոր: Կառուցենք $\boldsymbol{a}$ վեկտորն որոշող որևէ ուղղորդված $\overline{\boldsymbol{AB}}$ հատված: $\overline{\boldsymbol{BA}}$ հատվածով որոշվող վեկտորը կոչվում է $\boldsymbol{a}$ վեկտորին **հակադիր վեկտոր** և նշանակվում է $-\boldsymbol{a}$: Ակնհայտ է, որ $-\boldsymbol{a}$ վեկտորը հանդիսանում է $\boldsymbol{a}$ տարրին հակադիր տարր՝ վեկտորների գումար գործողության նկատմամբ, այսինքն՝

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}:$$

Այժմ կարելի է սահմանել $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորների $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ տարբերությունը: Եթե $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորները տեղադրված են մեկ $\boldsymbol{O}$ կետից, այսինքն որոշված են այնպիսի $\boldsymbol{A}$ և $\boldsymbol{B}$ կետեր, որ $\overline{\boldsymbol{OA}}=\boldsymbol{a}$ և $\overline{\boldsymbol{OB}}=\boldsymbol{b}$ (նկար 6.9), ապա $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overline{\boldsymbol{BA}}$:

6.10. *Սահմանում:* Իրական λ թվի և $\boldsymbol{a}$ վեկտորի արտադրյալ կոչվում է այն վեկտորը, որը նշանակվում է $\lambda\boldsymbol{a}$ և որոշվում է հետևյալ պայմաններով.

a) $\lambda\boldsymbol{a}$ վեկտորի երկարությունը հավասար է $|\lambda||\boldsymbol{a}|$, այսինքն λ թվի բացարձակ արժեքի և $\boldsymbol{a}$ վեկտորի երկարության արտադրյալին;

b) $\boldsymbol{a}$ և $\lambda\boldsymbol{a}$ վեկտորներն ունեն միևնույն ուղղությունը, եթե $\lambda>0$, և ուղղված են հակառակ, եթե $\lambda<0$:

Նշենք վեկտորի թվով բազմապատկման հիմնական հատկությունները:

6.11. *Հատկություն:* Կամայական λ, μ իրական թվերի և կամայական $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ վեկտորների համար.

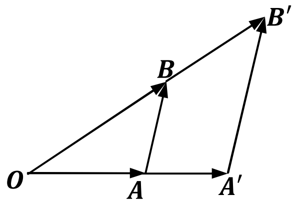
1) $1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$:
2) $(-1)\cdot\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$:
   Արտադրյալի այս երկու հատկություններն անմիջապես հետևում են 6.11 սահմանումից:
3) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$:
   Վերջին հավասարության ձախ մասում գտնվող վեկտորի երկարությունը հավասար է $|\lambda||\mu\boldsymbol{a}|=|\lambda||\mu||\boldsymbol{a}|$: Այդ թվին է հավասար նաև աջ մասում գտնվող վեկտորի երկարութ-

յունը: Եթե $|\lambda||\mu||\boldsymbol{a}| \neq 0$, ապա դիտարկվող հավասարության երկու կողմերում գտնվող վեկտորների ուղղությունները նույնպես համընկնում են: Այդ վեկտորները համաուղղված են $\boldsymbol{a}$ վեկտորի ուղղության հետ, λ և μ թվերն ունեն նույն նշանը, և ուղղված են վեկտորի ուղղությանը հակառակ, եթե $\lambda\mu < 0$:

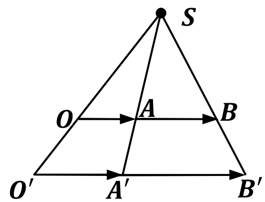
4) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$:

Հավասարությունն ակնհայտ է հետևյալ դեպքերում. ա) $\lambda = 0$; բ) $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{b}$; գ) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$ կամ $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$: Հետագա դիտակման ժամանակ բացառենք այս դեպքերը:

Դիցուք $\lambda > 0$ և $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ վեկտորները կոլինեար չեն: Ընտրենք կամայական $\boldsymbol{O}$ կետ և կառուցենք այնպիսի $\boldsymbol{A}$ և $\boldsymbol{B}$ կետեր, որ $\overline{\boldsymbol{OA}} = \boldsymbol{a}$ և $\overline{\boldsymbol{AB}} = \boldsymbol{b}$ և, հետևաբար, $\overline{\boldsymbol{OB}} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ (նկար 6.10): Հաջորդիվ գտնենք այն $\boldsymbol{A'}$ և $\boldsymbol{B'}$ կետերը, որոնց համար $\overline{\boldsymbol{OA'}} = \lambda\boldsymbol{a}$ և $\overline{\boldsymbol{OB'}} = \lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$: Ստացված $\boldsymbol{OAB}$ և $\boldsymbol{OA'B'}$ եռանկյունները նման են, քանի որ նրանք ունեն ընդհանուր անկյուն և այդ անկյունը կազմող կողմերը համեմատական են: Այստեղից հետևում է, որ $|\overline{\boldsymbol{A'B'}}| = |\lambda||\overline{\boldsymbol{AB}}|$: Բացի այդ $\overline{\boldsymbol{A'B'}}$ և $\overline{\boldsymbol{AB}}$ վեկտորներն ունեն միևնույն ուղղությունը: Ուստի $\overline{\boldsymbol{A'B'}} = \boldsymbol{\lambda b}$: Համադրելով ստացված վեկտորական հավասարությունները՝ կստանանք չորրորդ հատկությունը:



Նկ. 6.10:



Նկ. 6.11:

Այժմ ենթադրենք $\lambda > 0$, իսկ $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորները կոլինեար են: Ընտրենք կամայական $\boldsymbol{O}$ կետ և կառուցենք $\boldsymbol{A}$ և $\boldsymbol{B}$ կետերն այնպես, որ $\overline{\boldsymbol{OA}} = \boldsymbol{a}$ և $\overline{\boldsymbol{AB}} = \boldsymbol{b}$ (նկար 6.11): Ֆիքսենք որևէ $\boldsymbol{S}$ կետ, որն ընկած չէ $\boldsymbol{OAB}$ ուղղու վրա, և կառուցենք $\boldsymbol{SO}$, $\boldsymbol{SA}$ և $\boldsymbol{SB}$ ճառագայթները: $\boldsymbol{SO}$ ճառագայթի վրա գտնենք այնպիսի $\boldsymbol{O'}$ կետ, որ $|\overline{\boldsymbol{SO'}}| = |\lambda||\overline{\boldsymbol{SO}}|$, և այդ կետից տանենք $\boldsymbol{OB}$ ուղղին զուգահեռ $\boldsymbol{u}$ ուղիղը: Դիցուք $\boldsymbol{u}$ ուղիղը $\boldsymbol{SA}$ ճառագայթը հատում է $\boldsymbol{A'}$ կետում, իսկ $\boldsymbol{SB}$ ճառագայթը՝ $\boldsymbol{B'}$ կետում: Մենք ստացանք նման եռանկյունների հետևյալ զույգերը.

$$\Delta \boldsymbol{OAS} \sim \Delta \boldsymbol{O'A'S}, \quad \Delta \boldsymbol{ABS} \sim \Delta \boldsymbol{A'B'S}, \quad \Delta \boldsymbol{OBS} \sim \Delta \boldsymbol{O'B'S}:$$

Այստեղից ունենք, որ

$$\overline{\boldsymbol{O'A'}} = \lambda \boldsymbol{a}, \quad \overline{\boldsymbol{A'B'}} = \boldsymbol{\lambda b}, \quad \overline{\boldsymbol{O'B'}} = \lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}):$$

Այժմ չորրորդ հատկությունն ակնհայտ է: Երբ $\lambda < 0$, ապա չորրորդ հատկության ապացույցը կատարվում է նման եղանակով և հանձնարարվում է ընթերցողին:

5) $(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{a}$:
Հավասարությունն ակնհայտ է, եթե. ա) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$; բ) $\lambda + \mu = 0$; գ) λ և μ թվերից առնվազն մեկը զրոյական է: Հետագա դիտարկման ժամանակ բացառենք այս դեպքերը:
Դիցուք λ և μ թվերն ունեն նույն նշանը: Ակնհայտ է, որ հինգերորդ հավասարության աջ և ձախ մասերում գտնվող վեկտորներն ունեն միևնույն ուղղությունը: Ցույց տանք, որ վեկտորների երկարությունները նույնպես նույնն են.

$$|\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{a}| = |\lambda \boldsymbol{a}| + |\mu \boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}| + |\mu||\boldsymbol{a}| =$$
$$= (|\lambda| + |\mu|)|\boldsymbol{a}| = |\lambda + \mu||\boldsymbol{a}| = |(\lambda + \mu)\boldsymbol{a}|:$$

Եթե λ և μ թվերը տարբեր նշանի են և, օրինակ, $|\lambda| > |\mu|$, ապա $\lambda + \mu$ և $-\mu$ թվերն ունեն նույն նշանը, և, ըստ արդեն ապացուցվածի,

$$(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} + (-\mu)\boldsymbol{a} = (\lambda + \mu - \mu)\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{a},$$

ինչը համարժեք է հինգերորդ հատկությանը: ■

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի եղանակով ներմուծենք վերջավոր թվով կամայական $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_n}$ վեկտորների գումարի հասկացությունը: Երբ $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{2}$, ապա $\boldsymbol{a_1}$ և $\boldsymbol{a_2}$ վեկտորների գումարն որոշվում է 6.7. սահմանման համաձայն, իսկ $\boldsymbol{n} > \boldsymbol{2}$ դեպքում $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_{n-1}}, \boldsymbol{a_n}$ վեկտորների գումարն որոշվում է

$$\boldsymbol{a_1} + \dots + \boldsymbol{a_{n-1}} + \boldsymbol{a_n} = (\boldsymbol{a_1} + \dots + \boldsymbol{a_{n-1}}) + \boldsymbol{a_n}$$

հավասարությամբ:

Նույն՝ ինդուկցիայի եղանակով, 6.11.(4) և 6.11.(5) հատկությունները կարելի է տարածել վերջավոր թվով կամայական գումարելիների վրա, այսինքն ապացուցել

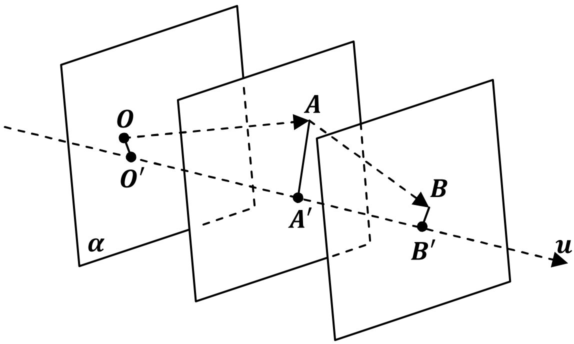
$$\lambda(\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2} + \cdots + \boldsymbol{a_n}) = \lambda\boldsymbol{a_1} + \lambda\boldsymbol{a_2} + \cdots + \lambda\boldsymbol{a_n},$$
$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\boldsymbol{a} = \lambda_1\boldsymbol{a} + \lambda_2\boldsymbol{a} + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{a}$$

հավասարությունները:

§ 6.5. ՎԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ՊՐՈՅԵԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԵՏ ԿԱՊՎԱԾ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐ

6.12. ***Թեորեմ:*** Երկու վեկտորների գումարի պրոյեկցիան հավասար է գումարելի վեկտորների պրոյեկցիաների գումարին (նույն առանցքի վրա).

$$\boldsymbol{պր_u}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{պր_u a} + \boldsymbol{պր_u b}:$$



Նկ. 6.12:

Ապացույց: Դիցուք տրված են $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորները: Ընտրենք կամայական $\boldsymbol{O}$ կետ և կառուցենք $\boldsymbol{A}$ և $\boldsymbol{B}$ կետերն այնպես, որ $\overline{\boldsymbol{OA}} = \boldsymbol{a}$, $\overline{\boldsymbol{AB}} = \boldsymbol{b}$ և, հետևաբար, $\overline{\boldsymbol{OB}} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ (նկար 6.12): Բոլոր $\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ կետերը պրոյեկտենք $\boldsymbol{u}$ առանցքի վրա՝ զուգահեռ α հարթությանը, և նրանց պրոյեկցիաները համապատասխանաբար նշանակենք $\boldsymbol{O'}$, $\boldsymbol{A'}$, $\boldsymbol{B'}$: Այդ դեպքում ստանում ենք, որ

$$\boldsymbol{O'A'} = \boldsymbol{պր_u a} \quad \text{և} \quad \boldsymbol{A'B'} = \boldsymbol{պր_u b}:$$

Մյուս կողմից, քանի որ $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \overline{\boldsymbol{OB}}$, ունենք, որ

$$\text{պր}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \text{պր}_{\boldsymbol{u}}\overline{\boldsymbol{OB}} = \boldsymbol{O'B'}:$$

Համաձայն 5.3. թեորեմի, $\boldsymbol{u}$ առանցքի վրա $\boldsymbol{O'}$, $\boldsymbol{A'}$, $\boldsymbol{B'}$ կետերի կամայական դասավորվածության դեպքում տեղի ունի

$$\boldsymbol{O'B'} = \boldsymbol{O'A'} + \boldsymbol{A'B'}$$

հիմնական նույնությունը, որից հետևում է, որ

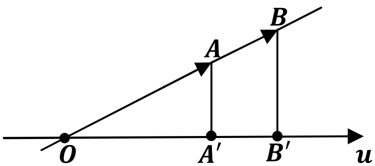
$$\text{պր}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \text{պր}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a} + \text{պր}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{b}:$$

Թեորեմն ապացուցված է: ■

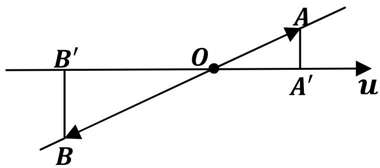
6.13. *Թեորեմ:* Վեկտորը թվով բազմապատկման դեպքում նրա պրոյեկցիան որևէ առանցքի վրա բազմապատկվում է այդ նույն թվով.

$$\text{պր}_{\boldsymbol{u}}(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda\,\text{պր}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a}:$$

Ապացույց: Դիցուք $\lambda \neq 0$ և $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{o}$ (հ. դ. պնդումն ակնհայտ է): $\boldsymbol{u}$ առանցքի վրա որևէ $\boldsymbol{O}$ կետից տեղադրենք $\boldsymbol{a}$ և $\lambda\boldsymbol{a}$ վեկտորները՝ համաուղղված (նկար 6.13) և հակառակ ուղղված (նկար 6.14), այսինքն գտնենք այնպիսի $\boldsymbol{A}$ և $\boldsymbol{B}$ կետեր, որ $\overline{\boldsymbol{OA}} = \boldsymbol{a}$, $\overline{\boldsymbol{OB}} = \boldsymbol{\lambda a}$:



Նկ. 6.13:



Նկ. 6.14:

$\boldsymbol{A}$ և $\boldsymbol{B}$ կետերը $\boldsymbol{u}$ առանցքի վրա պրոյեկտելով $\boldsymbol{A'}$ և $\boldsymbol{B'}$ կետերի՝ կստանանք երկու՝ $\boldsymbol{OAA'}$ և $\boldsymbol{OBB'}$ նման եռանկյունները: Հետևաբար

$$\text{պր}_{\boldsymbol{u}}(\lambda\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{OB'} = \lambda\cdot\boldsymbol{OA'} = \lambda\,\text{պր}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a}$$

և թեորեմն ապացուցված է: ■

Դիցուք $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_n}\}$ հանդիսանում է վերջավոր թվով վեկտորների համակարգ (պարտադիր չէ իրարից տարբեր), իսկ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$՝ կամայական իրական թվեր են: Այդ դեպքում

$$\lambda_1\boldsymbol{a_1} + \lambda_2\boldsymbol{a_2} + \dots + \lambda_n\boldsymbol{a_n}$$

վեկտորը կոչվում է $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_n}$ վեկտորների **գծային կոմբինացիա,** իսկ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ թվերը՝ այդ **գծային կոմբինացիայի գործակիցներ:**

Ապացուցված 6.12. և 6.13. թեորեմներից հետևում է

$$պր_{u}(\lambda_1 \boldsymbol{a_1} + \lambda_2 \boldsymbol{a_2} + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{a_n}) = \lambda_1 պր_{u}\boldsymbol{a_1} + \lambda_2 պր_{u}\boldsymbol{a_2} + \cdots + \lambda_n պր_{u}\boldsymbol{a_n}$$

հավասարությունը, այսինքն **վեկտորների գծային կոմբինացիայի պրոյեկցիայի մեծությունը հավասար է այդ վեկտորների պրոյեկցիաների մեծությունների միևնույն գործակիցներով գծային կոմբինացիային**:

Քանի որ տարածությունում կամայական վեկտոր տրվում է իր կոորդինատներով որևէ ուղղանկյուն դեկարտյան համակարգում (այդ վեկտորի պրոյեկցիաներով կոորդինատային առանցքների վրա), ապա ցանկացած $\boldsymbol{a} = \{\boldsymbol{X_a}, \boldsymbol{Y_a}, \boldsymbol{Z_a}\}$, $\boldsymbol{b} = \{\boldsymbol{X_b}, \boldsymbol{Y_b}, \boldsymbol{Z_b}\}$ վեկտորների և ցանկացած λ իրական թվի համար, համաձայն նախորդ երկու թեորեմների, ունենք, որ

$$\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = \{\boldsymbol{X_a} \pm \boldsymbol{X_b}, \boldsymbol{Y_a} \pm \boldsymbol{Y_b}, \boldsymbol{Z_a} \pm \boldsymbol{Z_b}\},$$
$$\lambda\boldsymbol{a} = \{\lambda\boldsymbol{X_a}, \lambda\boldsymbol{Y_a}, \lambda\boldsymbol{Z_a}\},$$

կամ

$$\{\boldsymbol{X_a}, \boldsymbol{Y_a}, \boldsymbol{Z_a}\} \pm \{\boldsymbol{X_b}, \boldsymbol{Y_b}, \boldsymbol{Z_b}\} = \{\boldsymbol{X_a} \pm \boldsymbol{X_b}, \boldsymbol{Y_a} \pm \boldsymbol{Y_b}, \boldsymbol{Z_a} \pm \boldsymbol{Z_b}\},$$
$$\lambda\{\boldsymbol{X_a}, \boldsymbol{Y_a}, \boldsymbol{Z_a}\} = \{\lambda\boldsymbol{X_a}, \lambda\boldsymbol{Y_a}, \lambda\boldsymbol{Z_a}\}:$$

Այս ամենից հեշտությամբ կարելի դուրս բերել երկու վեկտորների (որոնք տրված են իրենց կոորդինատներով) կոլինեար լինելու պայմանը:

Դիցուք $\boldsymbol{a} = \{\boldsymbol{X_a}, \boldsymbol{Y_a}, \boldsymbol{Z_a}\}$ և $\boldsymbol{b} = \{\boldsymbol{X_b}, \boldsymbol{Y_b}, \boldsymbol{Z_b}\}$: $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորները, եթե $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{o}$, կոլինեար են այն և միայն այն դեպքում, երբ նրանցից մեկը՝ մյուսից ստացվում է որևէ λ թվով բազմապատկելով. $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$: Վերջին վեկտորական հավասարությունը համարժեք է երեք թվային հավասարությունների.

$$\boldsymbol{X_b} = \lambda\boldsymbol{X_a}, \quad \boldsymbol{Y_b} = \lambda\boldsymbol{Y_a}, \quad \boldsymbol{Z_b} = \lambda\boldsymbol{Z_a},$$

Իսկ վերջիններս նշանակում են, որ $\boldsymbol{b}$ վեկտորի կոորդինատները համեմատական են $\boldsymbol{a}$ վեկտորի կոորդինատներին: Հետևաբար $\boldsymbol{a} = \{\boldsymbol{X_a}, \boldsymbol{Y_a}, \boldsymbol{Z_a}\}$ և $\boldsymbol{b} = \{\boldsymbol{X_b}, \boldsymbol{Y_b}, \boldsymbol{Z_b}\}$ վեկտորները կոլինեար են այն և միայն այն դեպքում, երբ նրանց կոորդինատները համեմատական են.

$$\frac{\boldsymbol{X_b}}{\boldsymbol{X_a}} = \frac{\boldsymbol{Y_b}}{\boldsymbol{Y_a}} = \frac{\boldsymbol{Z_b}}{\boldsymbol{Z_a}}:$$

§ 6.6. ՎԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒՄԸ ԸՍՏ ԲԱՂԱԴՐԻՉՆԵՐԻ

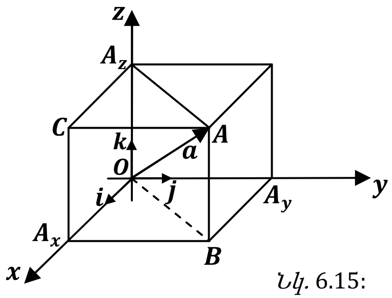
Տարածության մեջ դիտարկենք $\boldsymbol{Oxyz}$ ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատային համակարգը: Այդ համակարգի հետ միասին կդիտարկենք նաև $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ վեկտորների եռյակը, որոնք որոշվում են հետևյալ պայմաններով.

1) $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ վեկտորները համապատասխանաբար գտնվում են $\boldsymbol{Ox}$, $\boldsymbol{Oy}$, $\boldsymbol{Oz}$ առանցքների վրա;

2) $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ վեկտորներից յուրաքանչյուրի ուղղությունը համընկնում է համապատասխան առանցքի դրական ուղղության հետ;

3) $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ վեկտորները միավոր վեկտորներ են, այսինքն՝ $|\boldsymbol{i}| = |\boldsymbol{j}| = |\boldsymbol{k}| = \boldsymbol{1}$:

Դիտարկենք կամայական $\boldsymbol{a}$ վեկտոր, որի սկիզբը համընկնում է կոորդինատների սկզբնակետի հետ: $\boldsymbol{a}$ վեկտորի ծայրակետը նշանակենք $\boldsymbol{A}$ տառով: $\boldsymbol{A}$ կետից տանենք $\boldsymbol{Oz}$ առանցքին զուգահեռ ուղիղ: Այն $\boldsymbol{Oxy}$ հարթությունը հատում է $\boldsymbol{B}$ կետում: Այնուհետև $\boldsymbol{B}$ կետից տանենք $\boldsymbol{Oy}$ և $\boldsymbol{Ox}$ առանցքներին զուգահեռ երկու ուղիղ: Համապատասխանաբար նրանցից առաջինը հատում է $\boldsymbol{Ox}$ առանցքը, իսկ երկրորդը՝ $\boldsymbol{Oy}$ առանցքը: Այդ հատման կետերը համապատասխանաբար նշանակենք $\boldsymbol{A_x}$ և $\boldsymbol{A_y}$: Վերջապես, $\boldsymbol{A}$ կետից տանենք $\boldsymbol{OB}$ ուղղին զուգահեռ ուղիղ: Այն $\boldsymbol{Oz}$ առանցքը հատում է $\boldsymbol{A_z}$ կետում (նկար 6.15):



Նկ. 6.15:

Համաձայն վեկտորների գումարման կանոնի (կիրառելի $\boldsymbol{OBAA_z}$ զուգահեռագծի նկատմամբ), ունենք, որ $\boldsymbol{a} = \overline{\boldsymbol{OB}} + \overline{\boldsymbol{OA_z}}$: Նույն կանոնը, կիրառելով $\boldsymbol{OA_yBA_x}$ զուգահեռագծի նկատմամբ, ստանում ենք, որ $\overline{\boldsymbol{OB}} = \overline{\boldsymbol{OA_x}} + \overline{\boldsymbol{OA_y}}$: Վերջին երկու հավասարություններից ստանում ենք, որ

$$\boldsymbol{a} = \overline{\boldsymbol{OA_x}} + \overline{\boldsymbol{OA_y}} + \overline{\boldsymbol{OA_z}}:$$

Քանի որ $\overline{\boldsymbol{OA_x}}$ և $\boldsymbol{i}$ վեկտորները գտնվում են միևնույն ուղղի վրա, ապա նրանք կոլինեար են և, հետևաբար, $\overline{\boldsymbol{OA_x}} = \alpha \cdot \boldsymbol{i}$, որևէ α թվի համար: Նմանապես $\overline{\boldsymbol{OA_y}} = \beta \cdot \boldsymbol{j}$ և $\overline{\boldsymbol{OA_z}} = \gamma \cdot \boldsymbol{k}$ (6.15 նկարը համապատասխանում է այն դեպքին, երբ α, β, γ թվերը դրական են): Այս ամենը հաշվի առնելով՝ ստանում ենք, որ

$$\boldsymbol{a} = \alpha \cdot \boldsymbol{i} + \beta \cdot \boldsymbol{j} + \gamma \cdot \boldsymbol{k}:$$

Այսպիսով, մենք ցույց տվեցինք, որ տարածության ցանկացած $\boldsymbol{a}$ վեկտոր իսկապես կարող է ներկայացվել $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ վեկտորների գծային կոմբինացիայի միջոցով: Ուստի վեկտորների $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ եռյակը կոչվում է **կոորդինատային բազիս**:

$\boldsymbol{a}$ վեկտորի ներկայացումը $\alpha \cdot \boldsymbol{i} + \beta \cdot \boldsymbol{j} + \gamma \cdot \boldsymbol{k}$ գծային կոմբինացիայի տեսքով կոչվում է **$\boldsymbol{a}$ վեկտորի վերլուծություն ըստ $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ բազիսի,** իսկ $\alpha\boldsymbol{i}$, $\beta\boldsymbol{j}$, $\gamma\boldsymbol{k}$ վեկտորները կոչվում են **$\boldsymbol{a}$ վեկտորի բաղադրիչներ ըստ $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ բազիսի,** քանի որ նրանց հանրագումարում ստացվում է $\boldsymbol{a}$ վեկտորը:

Այժմ փորձենք բացատրել $\boldsymbol{a} = \alpha \cdot \boldsymbol{i} + \beta \cdot \boldsymbol{j} + \gamma \cdot \boldsymbol{k}$ ներկայացման α, β, γ գործակիցների երկրաչափական իմաստը: Քանի որ $\overline{\boldsymbol{OA_x}} = \alpha \cdot \boldsymbol{i}$ և $\boldsymbol{i}$՝ միավոր վեկտոր է, ապա α թիվը հանդիսանում է $\overline{\boldsymbol{OA_x}}$ հատվածի հարաբերությունը չափման միավորի նկատմամբ՝ վերցված համապատասխան նշանով: Այլ կերպ ասած՝ α հանդիսանում է $\overline{\boldsymbol{OA_x}}$ հատվածի մեծությունը $\boldsymbol{Ox}$ առանցքի վրա, այսինքն՝ $\alpha = \boldsymbol{OA_x}$: Սակայն $\boldsymbol{OA_x}$ այլ բան չէ, ինչ $\boldsymbol{a} = \overline{\boldsymbol{OA}}$ վեկտորի պրոյեկցիան $\boldsymbol{Ox}$ առանցքի վրա: Հետևաբար

$$\alpha = \boldsymbol{պր}_{\boldsymbol{Ox}}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{X}:$$

Նմանապես $\beta = \boldsymbol{պր}_{\boldsymbol{Oy}}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{Y}$ և $\gamma = \boldsymbol{պր}_{\boldsymbol{Oz}}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{Z}$:

Այս պարագրաֆում ստացված արդյունքներն անփոփենք որպես

6. 14. ***Թեորեմ:*** Կամայական $\boldsymbol{a}$ վեկտոր միշտ կարելի է վերլուծել ըստ $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ բազիսի, այսինքն ներկայացնել

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{i} + \boldsymbol{Y} \cdot \boldsymbol{j} + \boldsymbol{Z} \cdot \boldsymbol{k}$$

տեսքով, որտեղ այդ վերլուծության գործակիցները $\boldsymbol{a}$ վեկտորով որոշվում են միարժեքորեն՝ հանդիսանալով $\boldsymbol{a}$ վեկտորի պրոյեկցիաներ կոորդինատային առանցքների վրա ($\boldsymbol{a}$ վեկտորի կոորդինատներ):

ԳԼՈՒԽ 7

ՎԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ՍԿԱԼՅԱՐ, ՎԵԿՏՈՐԱԿԱՆ ԵՎ ԽԱՌՆ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼՆԵՐ

§ 7.1. ՍԿԱԼՅԱՐ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼԸ ԵՎ ՆՐԱ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

7.1. *Սահմանում:* Երկու վեկտորների **սկալյար արտադրյալ** կոչվում է այն իրական թիվը, որը հավասար է այդ վեկտորների մոդուլների և նրանցով կազմված անկյան կոսինուսի արտադրյալին: $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը նշանակվում է $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$:

Եթե $\boldsymbol{\varphi}$ հանդիսանում է $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորների կազմած անկյունը, ապա $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ սկալյար արտադրյալը կարելի է ներկայացնել

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos \boldsymbol{\varphi}$$

բանաձևով:

Հետագայի համար կարևոր է նկատել, որ $|\boldsymbol{b}| \cos \boldsymbol{\varphi} = պր_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ և $|\boldsymbol{a}| \cos \boldsymbol{\varphi} = պր_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$ (տես. § 6.1.), հետևաբար

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|\, պր_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} \quad \text{և} \quad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{b}|\, պր_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}:$$

Այժմ նշենք վեկտորների սկալյար արտադրյալի հիմնական հանրահաշվական հատկությունները:

7.2. *Հատկություն:* Կամայական $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ վեկտորների և կամայական λ իրական թվի համար

1) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$;
2) $(\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$;
3) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$:

Ապացույց: Ըստ սահմանման

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos \boldsymbol{\varphi} \text{ և } (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = |\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}| \cos \boldsymbol{\varphi}:$$

Մյուս կողմից $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|$: Հետևաբար $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ և առաջին հատկությունն ապացուցված է: Ինչ վերաբերում է երկրորդ հատկությանը, ապա ունենք, որ

$$(\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{b}|\, պր_{\boldsymbol{b}}(\lambda\boldsymbol{a}):$$

Մյուս կողմից, համաձայն 6.13. թեորեմի, $\boldsymbol{պր}_{\boldsymbol{b}}(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda\,\boldsymbol{պր}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$: Ուստի

$$(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{b}|\,\boldsymbol{պր}_{\boldsymbol{b}}(\lambda\boldsymbol{a}) = |\boldsymbol{b}|\lambda\,\boldsymbol{պր}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} = \lambda\big(|\boldsymbol{b}|\,\boldsymbol{պր}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}\big) = \lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}):$$

Երրորդ հատկության ապացույցը հետևում է

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = |\boldsymbol{a}|\,\boldsymbol{պր}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

ներկայացումից և $\boldsymbol{պր}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{պր}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{պր}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c}$ հավասարությունից (6.12. թեորեմ): Այսպես

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = |\boldsymbol{a}|\,\boldsymbol{պր}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = |\boldsymbol{a}|\big(\boldsymbol{պր}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{պր}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c}\big) =$$
$$= |\boldsymbol{a}|\,\boldsymbol{պր}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} + |\boldsymbol{a}|\,\boldsymbol{պր}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}): \qquad \blacksquare$$

Ընդհանրացնելով սկալյար արտադրյալի նշված հատկությունները՝ կարելի է պնդել, որ կամայական $\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\dots,\boldsymbol{a_n},\boldsymbol{b_1},\boldsymbol{b_2},\dots,\boldsymbol{b_m}$ վեկտորների և կամայական $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_m$ իրական թվերի համար տեղի ունի

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\boldsymbol{a_i},\sum_{j=1}^{m}\beta_j\boldsymbol{b_j}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i\beta_j\left(\boldsymbol{a_i},\boldsymbol{b_j}\right) \qquad (7.1)$$

հավասարությունը, որի ապացույցը հանձնարարվում է ընթերցողին:

Հաջորդիվ նշենք սկալյար արտադրյալի մի շարք կարևոր երկրաչափական հատկությունները:

7.3. *Հատկություն:* Եթե ոչ զրոյական $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորները կազմում են սուր (բութ) անկյուն, ապա $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ սկալյար արտադրյալը դրական (բացասական) է:

Ապացույց: Իսկապես, եթե $\boldsymbol{\varphi}$ անկյունը սուր (բութ) է, ապա $\cos\boldsymbol{\varphi} > 0$ ($\cos\boldsymbol{\varphi} < 0$): Հետևաբար

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\boldsymbol{\varphi} > 0 \ \ \big((\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\boldsymbol{\varphi} < 0\big): \qquad \blacksquare$$

7.4. *Հատկություն:* Որպեսզի $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորները լինեն փոխուղղահայաց, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրանց սկալյար արտադրյալը լինի զրոյական, այսինքն՝ $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 0$:

Ապացույց: Եթե $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորները փոխուղղահայաց են, ապա $\boldsymbol{\varphi} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}}$ և $\cos\boldsymbol{\varphi} = 0$: Հետևաբար $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\boldsymbol{\varphi} = 0$:

Դիցուք այժմ $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 0$: Եթե $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորներից մեկը զրոյական է, ապա նրան կարելի է համարել ուղղահայաց մյուսին, քանի որ զրոյական վեկտորն ուղղված է կամայականորեն: Իսկ եթե վեկտորներից ոչ մեկը զրոյական չէ, ապա

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos \boldsymbol{\varphi} = 0$$

հավասարությունից հետևում է, որ $\cos \boldsymbol{\varphi} = 0$, այսինքն՝ $\boldsymbol{\varphi} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}}$, ինչն էլ նշանակում է, որ $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորները փոխուղղահայաց են: ■

Հաջորդ թեորեմը հնարավորություն է ընձեռում հաշվել երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալը՝ իմանալով նրանց կոորդինատները:

7.5. *Թեորեմ:* Եթե $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորները տրված են իրենց

$$\boldsymbol{a} = \{\boldsymbol{X_a}, \boldsymbol{Y_a}, \boldsymbol{Z_a}\}, \quad \boldsymbol{b} = \{\boldsymbol{X_b}, \boldsymbol{Y_b}, \boldsymbol{Z_b}\}$$

կոորդինատներով, ապա նրանց սկալյար արտադրյալն որոշվում է

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{X_a X_b} + \boldsymbol{Y_a Y_b} + \boldsymbol{Z_a Z_b}$$

բանաձևով:

Ապացույց: Հեշտ է համոզվել, որ $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ բազիսային վեկտորների համար տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները.

$$(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}) = \boldsymbol{1}, \quad (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}) = \boldsymbol{0}, \quad (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}) = \boldsymbol{0},$$
$$(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{i}) = \boldsymbol{0}, \quad (\boldsymbol{j}, \boldsymbol{j}) = \boldsymbol{1}, \quad (\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}) = \boldsymbol{0},$$
$$(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i}) = \boldsymbol{0}, \quad (\boldsymbol{k}, \boldsymbol{j}) = \boldsymbol{0}, \quad (\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}) = \boldsymbol{1}:$$

Այժմ $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորները վերլուծենք ըստ $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ բազիսի.

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{X_a} \cdot \boldsymbol{i} + \boldsymbol{Y_a} \cdot \boldsymbol{j} + \boldsymbol{Z_a} \cdot \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{X_b} \cdot \boldsymbol{i} + \boldsymbol{Y_b} \cdot \boldsymbol{j} + \boldsymbol{Z_b} \cdot \boldsymbol{k}:$$

Այնուհետև, օգտվելով (7.1) հավասարությունից և բազիսային վեկտորների սկալյար արտադրյալների հավասարություններից, կարող ենք գրել, որ

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{X_a X_b}(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}) + \boldsymbol{X_a Y_b}(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}) + \boldsymbol{X_a Z_b}(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}) + \boldsymbol{Y_a X_b}(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{i}) + \boldsymbol{Y_a Y_b}(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{j}) +$$

$$+\boldsymbol{Y_a Z_b}(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}) + \boldsymbol{Z_a X_b}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i}) + \boldsymbol{Z_a Y_b}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{j}) + \boldsymbol{Z_a Z_b}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}) =$$

$$= \boldsymbol{X_a X_b} + \boldsymbol{Y_a Y_b} + \boldsymbol{Z_a Z_b}:$$

Այնպես, որ $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{X_a X_b} + \boldsymbol{Y_a Y_b} + \boldsymbol{Z_a Z_b}$: ■

§ 7.2. ՎԵԿՏՈՐԱԿԱՆ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼԸ ԵՎ ՆՐԱ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Դիցուք տարածության մեջ ընտրված է ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատային որևէ համակարգ:

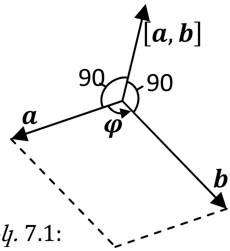
7.6. *Սահմանում:* Տրված $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորների **վեկտորական արտադրյալ** կոչվում է այն վեկտորը, որը նշանակվում է $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ գրությամբ և որոշվում է հետևյալ երեք պայմաններով.

1) $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ վեկտորի մոդուլը հավասար է $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\boldsymbol{\varphi}$, որտեղ $\boldsymbol{\varphi}$ հանդիսանում է $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորների կազմած անկյունը;
2) $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ վեկտորն ուղղահայաց է $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորներից յուրաքանչյուրին;
3) $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ վեկտորը $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորների նկատմամբ ուղղված է այնպես, ինչպես ուղղված է $\boldsymbol{Oz}$ կոորդինատային առանցքը $\boldsymbol{Ox}$ և $\boldsymbol{Oy}$ կոորդինատային առանցքների նկատմամբ:

Սահմանման երրորդ պայմանն ավելի հստակեցնենք: Այսպես, եթե բոլոր երեք $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ և $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ վեկտորները սկիզբ են առնում մեկ կետից, ապա $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ վեկտորը պետք է ուղղված լինի այնպես, որ նրա ծայրակետից դիտելուց՝ $\boldsymbol{a}$ վեկտորի կարճագույն պտույտը դեպի $\boldsymbol{b}$ վեկտորը կատարվի հենց այն կողմ, որ կողմ նախատեսվում է իրականացնել $\boldsymbol{Ox}$ դրական կիսաառանցքի կարճագույն պտույտը դեպի $\boldsymbol{Oy}$ դրական կիսաառանցքը, եթե դիտենք $\boldsymbol{Oz}$ դրական կիսաառանցքի որևէ կետից:

Որոշակիության համար ենթադրենք, որ կոորդինատների ընտրված համակարգում $\boldsymbol{Ox}$ դրական կիսաառանցքի կարճագույն պտույտը դեպի $\boldsymbol{Oy}$ դրական կիսաառանցքն իրականացվում է ժամ սլաքին հակառակ ուղղությամբ, երբ դիտում ենք $\boldsymbol{Oz}$ դրական կիսաառանցքի որևէ կետից: Կոորդինատների այդպիսի համակարգը կոչվում է **աջ համակարգ**: Կոորդինատների աջ համակարգը կարելի է բնութագրել նաև հետևյալ կերպ. այդ համակարգի $\boldsymbol{Oz}$ առանցքի ուղղությունը ցույց է տալիս աջ ձեռքի միջնամատը, $\boldsymbol{Ox}$ առանցքի ուղղությունը՝ մեծ մատը, իսկ $\boldsymbol{Oy}$ առանցքի ուղղությունը՝ ցուցամատը: Եթե $\boldsymbol{Ox}$, $\boldsymbol{Oy}$, $\boldsymbol{Oz}$ առանցքների ուղղությունները համապատասխանաբար համընկնում են ձախ ձեռքի մեծ մատի, ցուցամատի և միջնամատի հետ, ապա այդպիսի համակարգը կոչվում է **ձախ համակարգ**:

Աջ կոորդինատային համակարգի ընտրությանը համապատասխան՝ $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ վեկտորական արտադրյալին տրվում է որոշակի ուղղություն: Այն է, եթե $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ և $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ վեկտորները բերված են մեկ կետի, ապա $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ վեկտորը պետք է ուղղված լինի այնպես, որ նրա ծայրակետից $\boldsymbol{a}$ վեկտորի կարճագույն պտույտը դեպի $\boldsymbol{b}$ վեկտորը (այսինքն առաջին արտադրիչից դեպի երկրորդը) իրականացվի ժամ սլաքին հակառակ ուղղությամբ (նկար 7.1):



Նկ. 7.1:

Առաջին հերթին նշենք վեկտորական արտադրյալի կարևոր երկրաչափական հատկությունները:

7.7. *Հատկություն:* Որպեսզի $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ վեկտորական արտադրյալը լինի զրոյական, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորները լինեն կոլինեար:

Ապացույց: Դիցուք $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \boldsymbol{o}$: Այդ դեպքում

$$|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin \boldsymbol{\varphi} = 0:$$

Եթե $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորներից ոչ մեկը զրոյական չէ, ապա ստանում ենք, որ $\sin \boldsymbol{\varphi} = 0$: Հետևաբար $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորները կոլինեար են: Իսկ եթե $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորներից գոնե մեկը զրոյական է, ապա կարող ենք համարել, որ այն կոլինեար է մյուս վեկտորին, քանի որ զրոյական վեկտորի ուղղությունը կարող է լինել կամայական:

Այժմ, եթե $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորները կոլինեար են, ապա նրանց կազմած $\boldsymbol{\varphi}$ անկյունը կա՛մ հավասար $0°$ (այն դեպքում, երբ $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորները համաուղղված են), կա՛մ հավասար է $180°$ (այն դեպքում, երբ $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորներն ուղղված են հակառակ): Երկու դեպքում էլ $\sin \boldsymbol{\varphi} = 0$: Հետևաբար, $|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin \boldsymbol{\varphi} = 0$, այսինքն $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ վեկտորի մոդուլը հավասար է զրոյի, ինչն էլ նշանակում է, որ $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ վեկտորը զրոյական է: ■

7.8. *Հատկություն:* Եթե $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորները բերված են մեկ կետի, ապա $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ վեկտորական արտադրյալի մոդուլը հավասար է $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորների վրա կառուցված զուգահեռագծի մակերեսին:

Ապացույց: $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորների վրա կառուցված զուգահեռագծի մակերեսը նշանակենք S տառով: Տարրական երկրաչափությունից հայտնի է, որ զուգահեռագծի մակերեսը հավասար է նրա կից կողմերի և նրանցով կազմված անկյան սինուսի արտադրյալին: Այստեղից էլ $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\,\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\varphi} = S$ և, հետևաբար,

$$|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]| = S,$$

ինչ և պահանջվում էր ապացուցել: ■

Վերջին հատկության հիման վրա վեկտորական արտադրյալը կարելի է ներկայացնել

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = S\boldsymbol{e} \tag{7.2}$$

բանաձևով, որտեղ $\boldsymbol{e}$ վեկտորն որոշվում է հետևյալ երեք պայմաններով.

1) $\boldsymbol{e}$ վեկտորի մոդուլը հավասար է մեկի;
2) $\boldsymbol{e}$ վեկտորն ուղղահայաց է $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորներից յուրաքանչյուրին;
3) $\boldsymbol{e}$ վեկտորն ուղղված է աջ ձեռքի միջնամատի ուղղությամբ, $\boldsymbol{a}$ վեկտորն ուղղված է աջ ձեռքի մեծ մատի ուղղությամբ, իսկ $\boldsymbol{b}$ վեկտորը՝ աջ ձեռքի ցուցամատի ուղղությամբ (ենթադրվում է, որ $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ և $\boldsymbol{e}$ վեկտորները բերված են մեկ կետի):

Որպեսզի ապացուցենք (7.2) բանաձևը, համեմատենք $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ և $\boldsymbol{e}$ վեկտորներն որոշող պայմանները: Այդ համեմատությունից հեշտ է եզրակացնել, որ $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ և $\boldsymbol{e}$ վեկտորները կոլինեար են և ունեն միևնույն ուղղությունը: Հետևաբար $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ վեկտորը կարելի է ստանալ $\boldsymbol{e}$ վեկտորից՝ բազմապատկելով այն որևէ դրական թվով: Այդ թիվը հավասար է $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ վեկտորի մոդուլի հարաբերությանը $\boldsymbol{e}$ վեկտորի մոդուլին, և քանի որ $|\boldsymbol{e}| = 1$, ապա այն պարզապես հավասար է $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ վեկտորի մոդուլին, այսինքն՝ S թվին: Այսպիսով, $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = S\boldsymbol{e}$:

Արդ նշենք վեկտորական արտադրյալի հանրահաշվական հատկությունները:

7.9. *Հատկություն:* Կամայական $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ վեկտորների և կամայական λ իրական թվի համար ճշմարիտ են հետևյալ հավասարությունները.

1) $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = -[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}]$;
2) $[\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \lambda[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$;
3) $[\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b}] = \lambda[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$;
4) $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] + [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]$;
5) $[\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}] = [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}] + [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$:

Ապացույց: (1) Եթե $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորները կոլինեար են, ապա $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ և $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}]$ վեկտորները զրոյական են և, հետևաբար, $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = -[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}]$ հավասարությունը տեղի ունի: Այժմ ենթադրենք, որ $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորները կոլինեար չեն: Այդ դեպքում վեկտորական արտադրյալի սահմանման առաջին երկու պայմաններից հետևում է, որ $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ և $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}]$ վեկտորները կոլինեար են և ունեն միևնույն մոդուլը: Այսպիսով, կա՛մ $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}]$, կա՛մ էլ $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = -[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}]$: Մնում է պարզել, թե այդ երկու հնարավորություններից որ մեկն իրականում տեղի ունի: Այդ հարցը լուծում է երրորդ պայմանը: Քանի որ $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ վեկտորի ուղղությունն որոշելիս դիտարկվում է $\boldsymbol{a}$ վեկտորից դեպի $\boldsymbol{b}$ վեկտորը կարճագույն պտույտը՝ ժամ սլաքին հակառակ ուղղությամբ, իսկ $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}]$ վեկտորի դեպքում՝ $\boldsymbol{b}$ վեկտորից դեպի $\boldsymbol{a}$ վեկտորը կարճագույն պտույտը նույնպես ժամ սլաքին հակառակ ուղղությամբ, ապա $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ և $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}]$ վեկտորներն ուղղված են հակառակ և, հետևապես,

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = -[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}]:$$

(2) Նկատենք, որ եթե $\lambda = 0$ կամ եթե $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորները կոլինեար են, ապա $[\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \lambda[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ հավասարությունն ակնհայտորեն տեղի ունի: Այժմ ենթադրենք, որ $\lambda \neq 0$ և $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ վեկտորները կոլինեար չեն: Այդ դեպքում $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ վեկտորի մոդուլը հավասար է $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin \boldsymbol{\varphi}$, որտեղ $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ վեկտորների կազմած անկյունը $\boldsymbol{\varphi}$ է: Հետևաբար $\lambda[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ վեկտորի մոդուլը հավասար է $\lambda|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin \boldsymbol{\varphi}$: Մյուս դեպքում $[\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ վեկտորի մոդուլը հավասար է $\lambda|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin \boldsymbol{\psi}$, որտեղ $\boldsymbol{\psi}$ հանդիսանում է $\lambda\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորների կազմած անկյունը: Սակայն կա՛մ $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varphi}$ (երբ $\lambda > 0$), կա՛մ էլ $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\varphi}$ (երբ $\lambda < 0$): Երկու դեպքում էլ $\sin \boldsymbol{\psi} = \sin \boldsymbol{\varphi}$: Այստեղից էլ հետևում է, որ $|[\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]| = |\lambda[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]|$:

Համաձայն վեկտորական արտադրյալի սահմանման երկրորդ պայմանի և՛ $[\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ վեկտորը, և՛ $\lambda[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ վեկտորն ուղղահայաց են $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորներից յուրաքանչյուրին: Ուստի $[\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ և $\lambda[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ վեկտորները կոլինեար են:

Քանի որ $|[\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]| = |\lambda[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]|$ և $[\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $\lambda[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ վեկտորները կոլինեար են, ապա $[\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \lambda[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ կամ $[\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = -\lambda[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$: Որպեսզի պարզենք, թե այդ երկու հնարավորություններից որ մեկն իրականում տեղի ունի, առանձին-առանձին դիտարկենք $\lambda > 0$ և $\lambda < 0$ դեպքերը:

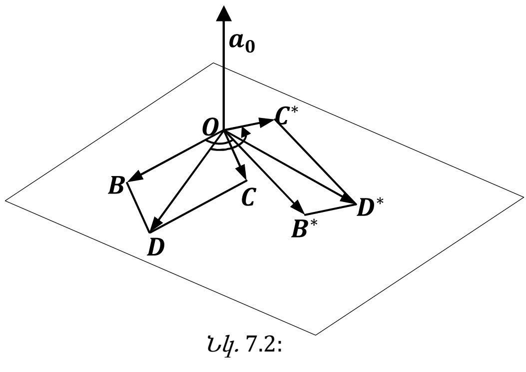
Դիցուք $\lambda > 0$: Այդ ժամանակ $\lambda\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{a}$ վեկտորների ուղղությունները համընկնում են և, ըստ աջ համակարգի կանոնի, $[\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ և $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ վեկտորները միանման են ուղղված: Մյուս կողմից, երբ $\lambda > 0$, $\lambda[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ և $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ վեկտորներն ունեն նույն ուղղությունը, այսինքն՝ $\lambda > 0$ դեպքում $[\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \lambda[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$: Եթե $\lambda < 0$, ապա $\lambda\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{a}$ վեկտորներն ուղղված են հակառակ: Այդ դեպքում, ըստ աջ համակարգի կանոնի, $[\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ վեկտորն ուղղված է $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ վեկտորին հակառակ: Մյուս կողմից, երբ $\lambda < 0$, $\lambda[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ վեկտորը նույնպես ուղղված է $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ վեկտորին հակառակ: Ոստի այս դեպքում ($\lambda < 0$) ևս $\lambda[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ և $\lambda[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ վեկտորներն ուղղված են միանման և, հետևաբար, $[\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \lambda[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$:

(3) Երրորդ հատկության ապացույցն անմիջապես հետևում է առաջին և երկրորդ հատկություններից.

$$[\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b}] = -[\lambda\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}] = -\lambda[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}] = \lambda[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]:$$

(4) Եթե $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$, ապա չորրորդ հատկությունն ակնհայտորեն տեղի ունի: Հաջորդիվ ենթադրենք, որ $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{o}$:

Սկզբում դիտարկենք մի մասնավոր դեպք, երբ առաջին վեկտորը միավոր վեկտոր է, իսկ մյուս երկուսն ուղղահայաց են առաջինին: Բոլոր երեք վեկտորները բերենք մեկ ընդհանուր $\boldsymbol{O}$ կետի: Առաջին (միավոր) վեկտորը նշանակենք $\boldsymbol{a_0}$: Մյուս երկու՝ $\overline{\boldsymbol{OB}}$ և $\overline{\boldsymbol{OC}}$ վեկտորներն ուղղահայաց են $\boldsymbol{a_0}$ վեկտորին, $\overline{\boldsymbol{OD}}$ վեկտորը՝ նրանց գումարն է. $\overline{\boldsymbol{OD}} = \overline{\boldsymbol{OB}} + \overline{\boldsymbol{OC}}$ (նկար 7.2):



Նկ. 7.2:

Մտցնենք հետևյալ նշանակումները.

$$\overline{\boldsymbol{OB}^*} = [\boldsymbol{a_0}, \overline{\boldsymbol{OB}}],\ \overline{\boldsymbol{OC}^*} = [\boldsymbol{a_0}, \overline{\boldsymbol{OC}}],\ \overline{\boldsymbol{OD}^*} = [\boldsymbol{a_0}, \overline{\boldsymbol{OD}}] = [\boldsymbol{a_0}, \overline{\boldsymbol{OB}} + \overline{\boldsymbol{OC}}]:$$

Համաձայն վեկտորական արտադրյալի սահմանման առաջին երկու պայմանների, ունենք, որ

a) $|\overline{\boldsymbol{OB}^*}| = |[\boldsymbol{a_0}, \overline{\boldsymbol{OB}}]| = |\boldsymbol{a_0}||\overline{\boldsymbol{OB}}| \sin 90^\circ = |\overline{\boldsymbol{OB}}|$;

b) $\overline{\boldsymbol{OB}^*} \perp \boldsymbol{a_0}$, $\overline{\boldsymbol{OB}^*} \perp \overline{\boldsymbol{OB}}$:

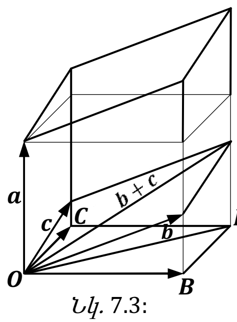
Այստեղից հետևում է, որ $\overline{\boldsymbol{OB}^*}$ վեկտորը կարելի է ստանալ՝ $\overline{\boldsymbol{OB}}$ վեկտորը պտտելով $\boldsymbol{a_0}$ վեկտորի շուրջը 90° անկյունով: Բացի այդ, համաձայն երրորդ պայմանի, եթե դիտենք $\boldsymbol{a_0}$ վեկտորի ծայրակետից, ապա այդ պտույտը կիրականցվի ժամ սլաքին հակառակ ուղղությամբ: Նմանապես, նույն ուղղությամբ $\boldsymbol{a_0}$ վեկտորի շուրջը 90° անկյունով պտտելով $\overline{\boldsymbol{OC}}$ և $\overline{\boldsymbol{OD}}$ վեկտորները՝ կստանանք $\overline{\boldsymbol{OC}^*}$ և $\overline{\boldsymbol{OD}^*}$ վեկտորները: Այսպիսով, $\boldsymbol{OB^*D^*C^*}$ պատկերը ստացվում է $\boldsymbol{OBDC}$ զուգահեռագծի որևէ պտույտով: Հետևաբար $\boldsymbol{OB^*D^*C^*}$ պատկերը զուգահեռագիծ է և $\overline{\boldsymbol{OD}^*} = \overline{\boldsymbol{OB}^*} + \overline{\boldsymbol{OC}^*}$ կամ

$$[\boldsymbol{a_0}, \overline{\boldsymbol{OD}}] = [\boldsymbol{a_0}, \overline{\boldsymbol{OB}}] + [\boldsymbol{a_0}, \overline{\boldsymbol{OC}}] \tag{7.3}$$

Վերջինս հենց ապացուցվող հավասարությունն է մասնավոր դեպքում:

Դիցուք այժմ $\boldsymbol{a}$ հանդիսանում է կամայական վեկտոր, որն ուղղահայաց է $\overline{\boldsymbol{OB}}$ և $\overline{\boldsymbol{OC}}$ վեկտորներին: Միավոր վեկտորը, որն ուղղված է այնպես, ինչպես $\boldsymbol{a}$ վեկտորը, նշանակենք $\boldsymbol{a_0}$: Այդ դեպքում $\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a_0}$: Ստացված (7.3) հավասարության երկու կողմը բազմապատկելով $|\boldsymbol{a}|$ թվով և $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a_0}$ վեկտորը փոխարինելով $\boldsymbol{a}$ վեկտորով՝ կստանանք, որ

$$[\boldsymbol{a}, \overline{\boldsymbol{OD}}] = [\boldsymbol{a}, \overline{\boldsymbol{OB}}] + [\boldsymbol{a}, \overline{\boldsymbol{OC}}]: \tag{7.4}$$



Նկ. 7.3:

Վերջապես դիտարկենք այն դեպքը, երբ $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ վեկտորները կամայական են: Ենթադրենք նրանք բերված են մեկ ընդհանուր $\boldsymbol{O}$ սկզբնակետի: $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ և $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ վեկտորների ծայրակետերից տանենք $\boldsymbol{a}$ վեկտորին զուգահեռ ուղիղներ: Այնուհետև $\boldsymbol{O}$ կետից տանենք հարթություն, որն ուղղահայաց է այդ ուղիղներին և նրանք հատում է համապատասխանաբար $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ և $\boldsymbol{D}$ կետերում (նկար 7.3):

Դիտարկենք $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ և $[\boldsymbol{a}, \overline{\boldsymbol{OB}}]$ վեկտորական արտադրյալները: Հեշտ է համոզվել, որ նրանք ներկայացնում են միևնույն վեկտորը: Իսկապես, առաջին, նրանց մոդուլները հավասար են, քանի որ $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորների վրա կառուցված զուգահեռագծի մակերեսը հավասար է $\boldsymbol{a}$ և $\overline{\boldsymbol{OB}}$ վեկտորների վրա կառուցված ուղղանկյան մակերեսին: Երկրորդ, $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ և $[\boldsymbol{a}, \overline{\boldsymbol{OB}}]$ վեկտորները կոլինեար են, քանի որ երկուսն էլ ուղղահայաց են միևնույն հարթությանը (հենց այն, որում գտնվում են $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ և $\overline{\boldsymbol{OB}}$ վեկտորները): Վերջապես, ըստ աջ ձեռքի (համակարգի) կանոնի, $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ և $[\boldsymbol{a}, \overline{\boldsymbol{OB}}]$ վեկտորներն ուղղված են միևնույն կողմը: Ուստի $[\boldsymbol{a}, \overline{\boldsymbol{OB}}] = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$: Նմանապես, $[\boldsymbol{a}, \overline{\boldsymbol{OC}}] = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]$ և $[\boldsymbol{a}, \overline{\boldsymbol{OD}}] = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}]$: Այս հավասարություններից և (7.4) հավասարությունից ստանում ենք, որ

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] + [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}],$$

ինչ և պահանջվում էր ապացուցել:

(5) Հինգերորդ հատկության ապացույցն անմիջապես հետևում է առաջին և չորրորդ հատկություններից.

$$[\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}] = -[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}] = -[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] - [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}] + [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]: \qquad \blacksquare$$

Ընդհանրացնելով վեկտորական արտադրյալի նշված հատկությունները՝ կարելի է պնդել, որ կամայական $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_n}$, $\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \dots, \boldsymbol{b_m}$ վեկտորների և կամայական $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ իրական թվերի համար տեղի ունի

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{a_i}, \sum_{j=1}^{m} \beta_j \boldsymbol{b_j}\right] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j \left[\boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{b_j}\right] \qquad (7.5)$$

հավասարությունը, որի ապացույցը հանձնարարվում է ընթերցողին:

Հաջորդ թեորեմը հնարավորություն է ընձեռում հաշվել երկու վեկտորների վեկտորական արտադրյալը՝ իմանալով նրանց կոորդինատները:

7.10. *Թեորեմ:* Եթե $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորները տրված են իրենց

$$\boldsymbol{a} = \{\boldsymbol{X_a}, \boldsymbol{Y_a}, \boldsymbol{Z_a}\}, \quad \boldsymbol{b} = \{\boldsymbol{X_b}, \boldsymbol{Y_b}, \boldsymbol{Z_b}\}$$

կոորդինատներով, ապա նրանց վեկտորական արտադրյալն որոշվում է

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] = \left\{\begin{vmatrix} Y_a & Z_a \\ Y_b & Z_b \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} X_a & Z_a \\ X_b & Z_b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} X_a & Y_a \\ X_b & Y_b \end{vmatrix}\right\}$$

բանաձևով:

Ապացույց: Նախապես կազմենք բազիսային վեկտորների վեկտորական բազմապատկման աղյուսակը: Համաձայն 7.7. հատկության, $[\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}] = \boldsymbol{o}$, $[\boldsymbol{j},\boldsymbol{j}] = \boldsymbol{o}$, $[\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}] = \boldsymbol{o}$: Այժմ դիտարկենք $[\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}]$ վեկտորական արտադրյալը: $[\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}]$ վեկտորի մոդուլը հավասար է $\boldsymbol{i}$ և $\boldsymbol{j}$ վեկտորների վրա կառուցված զուգահեռագծի մակերեսին (7.8. հատկություն): Այդ զուգահեռագիծն իրենից ներկայացնում է միավոր կողմով քառակուսի: Ուստի նրա մակերեսը հավասար է մեկի: Այսպիսով, $[\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}]$ վեկտորը հանդիսանում է միավոր վեկտոր: Հաշվի առնելով այն փաստը, որ $[\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}]$ վեկտորն ուղղահայաց է $\boldsymbol{i}$ և $\boldsymbol{j}$ վեկտորներին և ուղղված է ըստ աջ ձեռքի կանոնի, ապա հեշտ է հասկանալ, որ այն համընկնում է բազիսային $\boldsymbol{k}$ վեկտորի հետ, այսինքն՝ $[\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}] = \boldsymbol{k}$: Նմանապես կհամոզվենք, որ $[\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}] = \boldsymbol{i}$ և $[\boldsymbol{k},\boldsymbol{i}] = \boldsymbol{j}$: Այնուհետև, օգտըվելով 7.9. (1) հատկությունից, ստանում ենք, որ $[\boldsymbol{j},\boldsymbol{i}] = -\boldsymbol{k}$, $[\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}] = -\boldsymbol{i}$ և $[\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}] = -\boldsymbol{j}$: Այսպիսով, որոնելի աղյուսակը հետևյալն է.

$$[\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}] = \boldsymbol{o}, \quad [\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}] = \boldsymbol{k}, \quad [\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}] = -\boldsymbol{j},$$

$$[\boldsymbol{j},\boldsymbol{i}] = -\boldsymbol{k}, \quad [\boldsymbol{j},\boldsymbol{j}] = \boldsymbol{o}, \quad [\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}] = \boldsymbol{i},$$
$$[\boldsymbol{k},\boldsymbol{i}] = \boldsymbol{j}, \quad [\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}] = -\boldsymbol{i}, \quad [\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}] = \boldsymbol{o}:$$

Հաջորդիվ, $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորները վերլուծելով ըստ $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ բազիսի.

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{X_a} \cdot \boldsymbol{i} + \boldsymbol{Y_a} \cdot \boldsymbol{j} + \boldsymbol{Z_a} \cdot \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{X_b} \cdot \boldsymbol{i} + \boldsymbol{Y_b} \cdot \boldsymbol{j} + \boldsymbol{Z_b} \cdot \boldsymbol{k},$$

և օգտվելով (7.5) հավասարությունից, ստանում ենք, որ

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] = (Y_aZ_b - Y_bZ_a) \cdot \boldsymbol{i} - (X_aZ_b - X_bZ_a) \cdot \boldsymbol{j} + (X_aY_b - X_bY_a) \cdot \boldsymbol{k}$$

կամ

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] = \begin{vmatrix} Y_a & Z_a \\ Y_b & Z_b \end{vmatrix} \cdot \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} X_a & Z_a \\ X_b & Z_b \end{vmatrix} \cdot \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} X_a & Y_a \\ X_b & Y_b \end{vmatrix} \cdot \boldsymbol{k}: \tag{7.6}$$

Վերջին բանաձևը հանդիսանում է $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ վեկտորի վերլուծությունն ըստ $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ բազիսի, որի գործակիցները հենց $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ վեկտորի կոորդինատներն են: ■

Նկատենք, որ (7.6) հավասարությունը կարելի է գրել նաև

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ X_a & Y_a & Z_a\\ X_b & Y_b & Z_b\end{vmatrix}$$

տեսքով: Իսկապես, եթե այդ որոշիչը վերլուծենք ըստ առաջին տողի, ապա կստանանք (7.6) հավասարության աջ մասը:

§ 7.3. ԵՐԵՔ ՎԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ԽԱՌՆ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼ

Դիցուք տրված են ինչ-որ $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ և $\boldsymbol{c}$ վեկտորներ: Սկզբում որոշենք $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ վեկտորական արտադրյալը, որից հետո ստացված $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ վեկտորը սկալյար բազմապատկենք $\boldsymbol{c}$ վեկտորի հետ: Դրանով կորոշենք $([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],\boldsymbol{c})$ թիվը, որը կոչվում է $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ **վեկտորների խառն արտադրյալ**:

7.11. *Սահմանում:* Երեք վեկտորներ կոչվում են **կոմպլանար**, եթե նրանք գտնվում են միևնույն հարթությունում կամ զուգահեռ հարթություններում: Մասնավորապես, կոմպլանար վեկտորները գտնվում են միևնույն հարթությունում, եթե նրանք ունեն մեկ ընդհանուր սկիզբ:

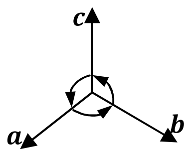
Եթե տրված երեք վեկտորների համար ասված է, թե նրանցից որն է համարվում առաջինը, որը՝ երկրորդը, և որը՝ երրորդը, ապա վեկտորների այդպիսի եռյակն ընդունված է անվանել **կարգավորված եռյակ** (պարզապես՝ **եռյակ**): Եթե տրված է վեկտորների $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ եռյակը, ապա $\boldsymbol{a}$ վեկտորը համարվում է առաջինը, $\boldsymbol{b}$՝ երկրորդը, իսկ $\boldsymbol{c}$՝ երրորդը:

Ոչ կոմպլանար վեկտորների եռյակը կոչվում է **աջ**, եթե նրա երրորդ վեկտորն՝ առաջին երկու վեկտորների հարթության նկատմամբ գտնվում է այն կողմում, որ կողմում որ գտնվում է աջ ձեռքի միջնամատը, որի մեծ մատն ուղղված է ըստ եռյակի առաջին վեկտորի, իսկ ցուցամատը՝ ըստ երկրորդ վեկտորի: Ոչ կոմպլանար վեկտորների եռյակը կոչվում է **ձախ**, եթե մեկ ընդհանուր սկզբնակետով նրա բաղադրիչները կարգավորված են այն հերթականությամբ, որ առաջին վեկտորը համապատասխանում է ձախ ձեռքի մեծ մատին, երկրորդ վեկտորը՝ ցուցամատին, իսկ երրորդ վեկտորը՝ միջնամատին: Կոմպլանար վեկտորների եռյակն ո՛չ աջ է, ո՛չ էլ ձախ:

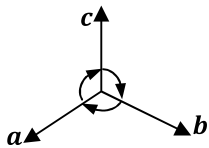
Նշենք եռյակների տարբերակման առավել տեսանելի եղանակ: Պատկերացնենք, որ մենք գտնվում ենք տրված վեկտորների եռյակի մարմնական անկյան ներսում: Այդ դեպքում, եթե անցումն առաջին վեկտորից երկրորդին, այնուհետև՝ երկրորդից երրորդին և, վերջապես, երրորդից առաջինին իրականցվում է ժամ սլաքին հակառակ ուղղությամբ, ապա տրված եռյակն աջ է, իսկ եթե ժամ սլաքին հակառակ ուղղությամբ, ապա այն ձախ եռյակ է: Այսպես, եթե տրված են ոչ կոմպլանար $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ վեկտորները, ապա նրանցից կարելի է կազմել (համարակալելով բոլոր հնարավոր եղանակներով) վեց հատ իրարից տարբեր եռյակ.

$$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}; \quad \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}; \quad \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}; \quad \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}; \quad \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}; \quad \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a};$$

Ըստ նշված տարբերակման եղանակի կարելի է համոզվել, որ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$; $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ եռյակներն աջ են (նկար 7.4), իսկ մնացածները՝ ձախ (նկար 7.5):



Նկ 7.4:



Նկ 7.5:

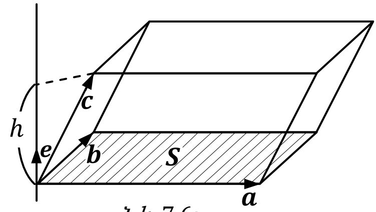
Հետևյալ կարևոր թեորեմն արտահայտում է խառն արտադրյալի երկրաչափական իմաստը:

7.12. ***Թեորեմ:*** $([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{c})$ խառն արտադրյալը հավասար է $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ վեկտորների վրա կառուցված զուգահեռանիստի ծավալին՝ վերցված դրական նշանով, եթե $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ եռյակն աջ է, և բացասական նշանով, եթե այդ եռյակը ձախ է: Իսկ եթե $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ վեկտորները կոմպլանար են, ապա $([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{c}) = 0$:

Ապացույց: Սկզբում ենթադրենք, որ $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորները կոլինեար չեն: Դիցուք $\boldsymbol{e}$ վեկտորը սահմանվում է այնպես, ինչպես 7.8. հատկության ապացույցի ընթացքում, և $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ վեկտորների վրա կառուցված զուգահեռագծի մակերեսը հավասար է S: Այդ դեպքում ունենք, որ $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = S\boldsymbol{e}$: Այստեղից էլ

$$([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{c}) = (S\boldsymbol{e}, \boldsymbol{c}) = S(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{c}) = S|\boldsymbol{e}|\,պր_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{c} = S\,պր_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{c}:$$

Սակայն, $\textit{պր}_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{c} = \pm h$, որտեղ h հանդիսանում է $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ վեկտորների վրա կառուցված զուգահեռանիստի բարձրությունն այն պայմանով, որ հիմքը համարվում է $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ վեկտորների վրա կառուցված զուգահեռագիծը (նկար 7.6)։



Նկ. 7.6։

Զուգահեռանիստի ծավալը նշանակելով V տառով և հաշվի առնելով $V = Sh$ հավասարությունը՝ ստանում ենք, որ

$$([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{c}) = \pm V\text{։} \tag{7.7}$$

Այժմ հարկավոր է որոշել, թե ո՛ր դեպքում է նշանը դրական և ո՛ր դեպքում է՝ բացասական։ Այդ նպատակով նկատենք, որ $\textit{պր}_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{c} = +h$, եթե $\boldsymbol{c}$ և $\boldsymbol{e}$ վեկտորները, $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորների հարթության նկատմամբ, գտնվում են մի կողմում, այսինքն՝ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ և $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{e}$ եռյակներն ունեն նույն օրիենտացիան, և $\textit{պր}_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{c} = -h$, եթե $\boldsymbol{c}$ և $\boldsymbol{e}$ վեկտորները գտնվում են $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորների հարթության տարբեր կողմերում, այսինքն՝ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ և $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{e}$ եռյակներն ունեն տարբեր օրիենտացիա։ Սակայն, ըստ $\boldsymbol{e}$ վեկտորի սահմանման, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{e}$ եռյակն աջ է։ Հետևաբար (7.7) բանաձևում վերցվում է դրական նշանը, եթե $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ եռյակն աջ է, և բացասական նշանը՝ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ եռյակն ձախ է։ Իսկ եթե $\boldsymbol{c}$ վեկտորը գտնվում է $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորների հարթությունում, այսինքն՝ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ վեկտորները կոմպլանար են, ապա $\textit{պր}_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{c} = 0$ և, հետևաբար, $([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{c}) = 0$։

Մնաց դիտարկել կոլինեար $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորների դեպքը։ Այդ ժամանակ $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = 0$, ինչը նշանակում է, որ $([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{c}) = 0$, որը նույնպես համապատասխանում է թեորեմի ձևակերպմանը, քանի որ եթե $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ վեկտորները կոլինեար են, ապա $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ վեկտորները կոմպլանար են։ Թեորեմն ապացուցված է։ ■

7.13. *Հատկություն:* Կամայական $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ վեկտորների համար տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը.

$$([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}])\text{։}$$

Ապացույց: Ըստ սկալյար արտադրյալի 7.2. (1) հատկության

$$(\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]) = ([\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}], \boldsymbol{a}),$$

իսկ ըստ նախորդ թեորեմի

$$([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],\boldsymbol{c}) = \pm V \quad \text{և} \quad ([\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}],\boldsymbol{a}) = \pm V:$$

Քանի որ $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ և $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}$ եռյակներն ունեն նույն օրիենտացիան, ապա վերջին հավասարությունների աջ մասերում հարկավոր է ընտրել միևնույն նշանը: Հետևաբար

$$([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],\boldsymbol{c}) = ([\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}],\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a},[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]): \qquad \blacksquare$$

7.14. ***Թեորեմ:*** Եթե $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ վեկտորները տրված են

$$\boldsymbol{a} = \{\boldsymbol{X_a},\boldsymbol{Y_a},\boldsymbol{Z_a}\}, \quad \boldsymbol{b} = \{\boldsymbol{X_b},\boldsymbol{Y_b},\boldsymbol{Z_b}\}, \quad \boldsymbol{c} = \{\boldsymbol{X_c},\boldsymbol{Y_c},\boldsymbol{Z_c}\}$$

կոորդինատներով, ապա $([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],\boldsymbol{c})$ խառն արտադրյալը տրվում է

$$([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],\boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{X_a} & \boldsymbol{Y_a} & \boldsymbol{Z_a} \\ \boldsymbol{X_b} & \boldsymbol{Y_b} & \boldsymbol{Z_b} \\ \boldsymbol{X_c} & \boldsymbol{Y_c} & \boldsymbol{Z_c} \end{vmatrix}$$

բանաձևով:

Ապացույց: Ըստ 7.10. թեորեմի

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] = \left\{\begin{vmatrix} \boldsymbol{Y_a} & \boldsymbol{Z_a} \\ \boldsymbol{Y_b} & \boldsymbol{Z_b} \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \boldsymbol{X_a} & \boldsymbol{Z_a} \\ \boldsymbol{X_b} & \boldsymbol{Z_b} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \boldsymbol{X_a} & \boldsymbol{Y_a} \\ \boldsymbol{X_b} & \boldsymbol{Y_b} \end{vmatrix}\right\},$$

որը սկալյար բազմապատկելով $\boldsymbol{c} = \{\boldsymbol{X_c},\boldsymbol{Y_c},\boldsymbol{Z_c}\}$ վեկտորի հետ և օգտվելով 7.5. թեորեմից՝ ստանում ենք, որ

$$([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],\boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{Y_a} & \boldsymbol{Z_a} \\ \boldsymbol{Y_b} & \boldsymbol{Z_b} \end{vmatrix}\boldsymbol{X_c} - \begin{vmatrix} \boldsymbol{X_a} & \boldsymbol{Z_a} \\ \boldsymbol{X_b} & \boldsymbol{Z_b} \end{vmatrix}\boldsymbol{Y_c} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{X_a} & \boldsymbol{Y_a} \\ \boldsymbol{X_b} & \boldsymbol{Y_b} \end{vmatrix}\boldsymbol{Z_c} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{X_a} & \boldsymbol{Y_a} & \boldsymbol{Z_a} \\ \boldsymbol{X_b} & \boldsymbol{Y_b} & \boldsymbol{Z_b} \\ \boldsymbol{X_c} & \boldsymbol{Y_c} & \boldsymbol{Z_c} \end{vmatrix}:$$

Թեորեմն ապացուցված է: $\blacksquare$

ԳԼՈՒԽ 8

ՈՒՂԻՂՆԵՐ ԵՎ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Ուղիղն և հարթությունը հանդիսանում են առաջին կարգի միակ պատկերները, այսինքն պատկերներ, որոնք ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատային համակարգում տրվում են առաջին աստիճանի հանրահաշվական հավասարումներով.

$$\boldsymbol{Ax + By + C = 0}; \tag{8.1}$$

$$\boldsymbol{Ax + By + Cz + D = 0}; \tag{8.2}$$

որտեղ $\boldsymbol{A, B, C}$ հանդիսանում են ինչ-որ ֆիքսված իրական թվեր (համապատասխանաբար $\boldsymbol{A^2 + B^2 \neq 0}$, $\boldsymbol{A^2 + B^2 + C^2 \neq 0}$ պայմաններով), որոնք կոչվում են նշված հավասարումների գործակիցներ:

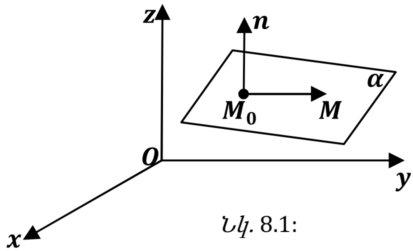
Այս գլխում դիտարկվում են հարթությունում և տարածությունում առաջին կարգի պատկերների հետ կապված հիմնական խնդիրները: Հարթությունում և տարածությունում առաջին կարգի պատկերները համապատասխանաբար կոչվում են **առաջին կարգի կորեր և մակերևույթներ**:

§ 8.1. ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆ ՈՐՊԵՍ ԱՌԱՋԻՆ ԿԱՐԳԻ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹ: ՈՒՂԻՂՆ ՈՐՊԵՍ ԱՌԱՋԻՆ ԿԱՐԳԻ ԿՈՐ

8.1. ***Թեորեմ:*** Ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատային համակարգում յուրաքանչյուր հարթություն որոշվում է առաջին կարգի հավասարումով: Հակառակը, ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատային համակարգում յուրաքանչյուր առաջին կարգի հավասարում որոշում է հարթություն:

Ապացույց: Դիցուք տրված է $\boldsymbol{Oxyz}$ ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատային համակարգը: Դիտարկենք կամայական α հարթություն և ցույց տանք, որ այդ հարթությունն որոշվում է առաջին կարգի հավասարումով (նկար 8.1):

Այդ հարթությունում ընտրենք որևէ $\boldsymbol{M_0}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{z_0})$ կետ և այդ կետից տեղադրենք ոչ զրոյական $\boldsymbol{n} = \{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}\}$ վեկտորը, որն ուղղահայաց է α հարթությանը: Այդ դեպքում կամայական $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ կետ գտնվում է α հարթությունում այն և միայն այն դեպքում, երբ $\boldsymbol{n}$ և $\overline{\boldsymbol{M_0M}}$ վեկտորները փոխուղղահայաց են: Վերջին պայմանը համարժեք է



Նկ. 8.1:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_0}) + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z_0}) = \boldsymbol{0} \qquad (8.3)$$

հավասարությանը, որտեղ $\overline{\boldsymbol{M_0M}} = \{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{z} - \boldsymbol{z_0}\}$ (7.4. հատկություն և 7.5. թեորեմ): Համարելով, որ $-\boldsymbol{Ax_0} - \boldsymbol{By_0} - \boldsymbol{Cz_0} = \boldsymbol{D}$, ստանում ենք

$$\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{By} + \boldsymbol{Cz} + \boldsymbol{D} = \boldsymbol{0} \qquad (8.2)$$

հավասարումը, որն էլ հանդիսանում է α հարթության որոնելի հավասարումը, քանի որ նրան $\boldsymbol{M}$ կետի $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ կոորդինատները բավարարում են այն և միայն այն դեպքում, երբ $\boldsymbol{M}$ կետը գտնվում է α հարթությունում: Ուստի α հարթությունն իսկապես որոշվում է առաջին կարգի (8.2) հավասարումով:

Այժմ ապացուցենք թեորեմի երկրորդ մասը: Դիցուք տրված է (8.2) հավասարումը, և $\boldsymbol{M_0}$ կետի $\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{z_0}$ կոորդինատները բավարարում են այդ հավասարմանը: Այդ դեպքում տեղի ունի

$$\boldsymbol{Ax_0} + \boldsymbol{By_0} + \boldsymbol{Cz_0} + \boldsymbol{D} = \boldsymbol{0}$$

թվաբանական նույնությունը: Այժմ (8.2) հավասարումից հանենք ստացված նույնությունը, որի արդյունքում կստանանք

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_0}) + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z_0}) = \boldsymbol{0} \qquad (8.3)$$

հավասարումը, որը, ըստ նախորդի, հանդիսանում է $\boldsymbol{M_0}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{z_0})$ կետով անցնող հարթության (որին ուղղահայաց է $\boldsymbol{n} = \{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}\}$ վեկտորը) հավասարումը: Սակայն (8.2) հավասարումը համարժեք է (8.3) հավասարմանը, քանի որ նրանցից մեկը՝ մյուսից ստացվում է

$$\boldsymbol{Ax_0} + \boldsymbol{By_0} + \boldsymbol{Cz_0} + \boldsymbol{D} = \boldsymbol{0}$$

նույնությունը հանելով կամ գումարելով: Հետևաբար (8.2) հավասարումը հանդիսանում է այդ նույն հարթության հավասարումը: Թեորեմն ապացուցված է: ■

Այսպիսով, կարող ենք պնդել, որ **յուրաքանչյուր հարթություն հանդիսանում է առաջին կարգի մակերևույթ, և յուրաքանչյուր առաջին կարգի մակերևույթ հանդիսանում է հարթություն**:

8.2. *Սահմանում:* Յուրաքանչյուր ոչ զրոյական վեկտոր, որն ուղղահայաց է որևէ հարթությանը, կոչվում է այդ **հարթության նորմալ վեկտոր**:

Օգտագործելով այս սահմանումը՝ կարելի է ասել, որ

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0})+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y_0})+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z_0})=\boldsymbol{0}$$

հավասարումը հանդիսանում է այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $\boldsymbol{M_0}(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0},\boldsymbol{z_0})$ կետով և ունի $\boldsymbol{n}=\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\}$ նորմալ վեկտոր, իսկ (8.2) տեսքի հավասարումը կոչվում է **հարթության ընդհանուր հավասարում**:

8.3. *Թեորեմ:* Որպեսզի

$$\boldsymbol{A_1x}+\boldsymbol{B_1y}+\boldsymbol{C_1z}+\boldsymbol{D_1}=\boldsymbol{0} \text{ և } \boldsymbol{A_2x}+\boldsymbol{B_2y}+\boldsymbol{C_2z}+\boldsymbol{D_2}=\boldsymbol{0}$$

հավասարումներով որոշվող հարթությունները համընկնեն, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ հավասարումների գործակիցները լինեն համեմատական, այսինքն՝ գոյություն ունենա այնպիսի $\lambda\neq 0$ իրական թիվ, որ

$$\boldsymbol{A_1}=\lambda\boldsymbol{A_2},\boldsymbol{B_1}=\lambda\boldsymbol{B_2},\boldsymbol{C_1}=\lambda\boldsymbol{C_2},\boldsymbol{D_1}=\lambda\boldsymbol{D_2}:$$

Ապացույց: Իսկապես, եթե հարթությունները համընկնում են, ապա $\boldsymbol{n_1}=\{\boldsymbol{A_1},\boldsymbol{B_1},\boldsymbol{C_1}\}$ և $\boldsymbol{n_2}=\{\boldsymbol{A_2},\boldsymbol{B_2},\boldsymbol{C_2}\}$ վեկտորներն ուղղահայաց են միևնույն հարթությանը, հետևաբար, մեկ մեկու կոլինեար են: Սակայն այդ դեպքում $\boldsymbol{A_1},\boldsymbol{B_1},\boldsymbol{C_1}$ թվերը համեմատական են $\boldsymbol{A_2},\boldsymbol{B_2},\boldsymbol{C_2}$ թվերին (տես. § 6.5.), այսինքն՝ գոյություն ունի $\lambda\neq 0$ իրական թիվ այնպիսին, որ

$$\boldsymbol{A_1}=\lambda\boldsymbol{A_2},\boldsymbol{B_1}=\lambda\boldsymbol{B_2},\boldsymbol{C_1}=\lambda\boldsymbol{C_2}:$$

Դիցուք $\boldsymbol{M_0}(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0},\boldsymbol{z_0})$ հանդիսանում է հարթության կամայական կետ: Այդ դեպքում տեղի ունեն

$$\boldsymbol{A_1x_0}+\boldsymbol{B_1y_0}+\boldsymbol{C_1z_0}+\boldsymbol{D_1}=\boldsymbol{0},$$

$$A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 = 0$$

թվային հավասարությունները: Նրանցից երկրորդը բազմապատկենք λ թվով և հանենք առաջինից: Արդյունքում կստանանք, որ

$$D_1 - \lambda D_2 = 0 \text{ կամ } D_1 = \lambda D_2:$$

Հետևաբար $A_1 = \lambda A_2$, $B_1 = \lambda B_2$, $C_1 = \lambda C_2$, $D_1 = \lambda D_2$: Եթե A_2, B_2, C_2, D_2 թվերից ոչ մեկը զրոյական չէ, ապա

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}:$$

Թեորեմի բավարարությունն ապացուցել ինքնուրույն: ■

8.4. *Վարժություն:* Ապացուցել, որպեսզի

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{և} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

հավասարումներով որոշվող հարթությունները չհամընկնեն և լինեն զուգահեռ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ գոյություն ունենա այնպիսի $\lambda \neq 0$ իրական թիվ, որ

$$A_1 = \lambda A_2, B_1 = \lambda B_2, C_1 = \lambda C_2, D_1 \neq \lambda D_2:$$

8.5. *Վարժություն:* Ապացուցել, որպեսզի

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{և} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

հավասարումներով որոշվող հարթությունները լինեն փոխուղղահայաց, անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենա

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

հավասարությունը:

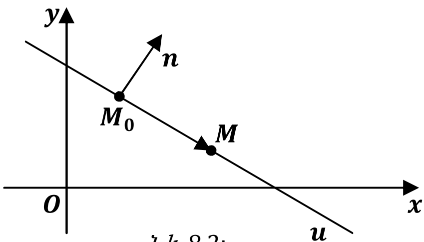
Այժմ դիտարկենք երկու փոփոխականներից կախված առաջին կարգի հանրահաշվական հավասարումը:

8.6. *Թեորեմ:* Հարթության մեջ տրված ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատային համակարգում յուրաքանչյուր ուղիղ որոշվում է առաջին կարգի

$$Ax + By + C = 0 \tag{8.1}$$

հավասարումով: Հակառակը, հարթության մեջ տրված ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատային համակարգում (8.1) տեսքի յուրաքանչյուր առաջին կարգի հավասարում որոշում է որևէ ուղիղ:

Ապացույցը կատարվում է 8.1. թեորեմի ապացույցի նմանությամբ: Տարբերությունը կայանում է նրանում, որ $\boldsymbol{Oxy}$ ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատային համակարգում դիտարկվում է կամայական $\boldsymbol{v}$ ուղիղ, նրա վրա ընտրվում է կամայական $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$ կետ և այդ կետից տեղադրվում է ոչ զրոյական $\boldsymbol{n} = \{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\}$ վեկտորը, որն ուղղահայաց է $\boldsymbol{v}$ ուղղին (նկար 8.2):



Նկ. 8.2:

Այդ դեպքում կամայական $\boldsymbol{M(x, y)}$ կետ պատկանում է $\boldsymbol{v}$ ուղղին այն և միայն այն դեպքում, երբ $\boldsymbol{n}$ և $\overline{\boldsymbol{M_0M}}$ վեկտորները փոխուղղահայաց են: Վերջին պայմանը համարժեք է

$$\boldsymbol{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0} \tag{8.4}$$

հավասարությանը, որտեղ $\overline{\boldsymbol{M_0M}} = \{\boldsymbol{x - x_0}, \boldsymbol{y - y_0}\}$ (7.4. հատկություն և 7.5. թեորեմ): Համարելով, որ $\boldsymbol{-Ax_0 - By_0 = C}$, ստանում ենք

$$\boldsymbol{Ax + By + C = 0} \tag{8.1}$$

հավասարումը, որն էլ հանդիսանում է $\boldsymbol{v}$ ուղղի որոնելի հավասարումը, քանի որ նրան $\boldsymbol{M}$ կետի $\boldsymbol{x, y}$ կորդինատները բավարարում են այն և միայն այն դեպքում, երբ $\boldsymbol{M}$ կետը գտնվում է $\boldsymbol{v}$ ուղղի վրա: Հետևապես $\boldsymbol{v}$ ուղիղն իսկապես որոշվում է առաջին կարգի (8.1) հավասարումով:

Դիցուք այժմ տրված է (8.1) հավասարումը, և $\boldsymbol{M_0}$ կետի $\boldsymbol{x_0, y_0}$ կոորդինատները բավարարում են այդ հավասարմանը, ինչն էլ նշանակում է, որ տեղի ունի

$$\boldsymbol{Ax_0 + By_0 + C = 0}$$

թվաբանական նույնությունը, որն էլ հանելով (8.1) հավասարումից՝ արդյունքում ստանում ենք

$$\boldsymbol{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0} \tag{8.4}$$

հավասարումը: Վերջինս, ըստ նախորդ մասի, հանդիսանում է $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$ կետով անցնող ուղղի (որին ուղղահայաց է $\boldsymbol{n} = \{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\}$ վեկտորը) հավասարումը: Եվ, վերջապես, (8.1) և (8.4) հավասարումների համարժեքությունից հետևում է, որ (8.1) հավասարումը հանդիսանում է այդ ուղղի հավասարումը: Թեորեմն ապացուցված է: ■

Այսպիսով, կարող ենք պնդել, որ **յուրաքանչյուր ուղիղ հանդիսանում է առաջին կարգի կոր, և յուրաքանչյուր առաջին կարգի կոր հանդիսանում է ուղիղ**:

8.7. ***Սահմանում:*** Յուրաքանչյուր ոչ զրոյական վեկտոր, որն ուղղահայաց է տրված ուղղին, կոչվում է այդ **ուղղի նորմալ վեկտոր**:

Օգտագործելով այս սահմանումը՝ կարելի է ասել, որ

$$\boldsymbol{A(x-x_0)+B(y-y_0)=0}$$

հավասարումը հանդիսանում է այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $\boldsymbol{M_0(x_0,y_0)}$ կետով և ունի $\boldsymbol{n}=\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\}$ նորմալ վեկտոր, իսկ (8.1) տեսքի հավասարումը հավասարումը կոչվում է **ուղղի ընդհանուր հավասարում**:

8.8. ***Թեորեմ:*** Տրված $\boldsymbol{A_1x+B_1y+C_1=0}$ և $\boldsymbol{A_2x+B_2y+C_2=0}$ հավասարումներով որոշվող ուղիղները համընկնում են այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ հավասարումների գործակիցները համեմատական են, այսինքն՝ գոյություն ունի այնպիսի $\lambda\neq 0$ իրական թիվ, որ

$$\boldsymbol{A_1}=\lambda\boldsymbol{A_2},\ \boldsymbol{B_1}=\lambda\boldsymbol{B_2},\ \boldsymbol{C_1}=\lambda\boldsymbol{C_2}:$$

Ապացույց: Եթե ուղիղները համընկնում են, ապա $\boldsymbol{n_1}=\{\boldsymbol{A_1},\boldsymbol{B_1}\}$ և $\boldsymbol{n_2}=\{\boldsymbol{A_2},\boldsymbol{B_2}\}$ վեկտորներն ուղղահայաց են միևնույն ուղղին, հետևաբար, նրանք կոլինեար վեկտորներ են: Սակայն այդ դեպքում $\boldsymbol{A_1},\boldsymbol{B_1}$ թվերը համեմատական են $\boldsymbol{A_2},\boldsymbol{B_2}$ թվերին (տես. § 6.5.), այսինքն՝ գոյություն ունի $\lambda\neq 0$ իրական թիվ այնպիսին, որ

$$\boldsymbol{A_1}=\lambda\boldsymbol{A_2},\ \boldsymbol{B_1}=\lambda\boldsymbol{B_2}:$$

Դիցուք $\boldsymbol{M_0(x_0,y_0)}$ հանդիսանում է ուղղի կամայական կետ: Այդ դեպքում տեղի ունեն

$$\boldsymbol{A_1x_0+B_1y_0+C_1=0},$$
$$\boldsymbol{A_2x_0+B_2y_0+C_2=0}$$

թվային հավասարությունները: Նրանցից երկրորդը բազմապատկենք λ թվով և հանենք առաջինից: Արդյունքում կստանանք, որ

$$C_1 - \lambda C_2 = 0 \text{ կամ } C_1 = \lambda C_2:$$

Հետևաբար $A_1 = \lambda A_2$, $B_1 = \lambda B_2$, $C_1 = \lambda C_2$: Եթե A_2, B_2, C_2 թվերից ոչ մեկը զրոյական չէ, ապա

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}:$$

Թեորեմի երկրորդ մասն ապացուցել ինքնուրույն: ■

8.9. *Վարժություն:* Ապացուցել, որ

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ և } A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

հավասարումներով որոշվող ուղիղները չեն համընկնում և զուգահեռ են այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի այնպիսի $\lambda \neq 0$ իրական թիվ, որ

$$A_1 = \lambda A_2, B_1 = \lambda B_2, C_1 \neq \lambda C_2:$$

8.10. *Վարժություն:* Ապացուցել, որ

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ և } A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

հավասարումներով որոշվող ուղիղները փոխուղղահայաց են այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունի

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

հավասարությունը:

§ 8.2. ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՈՒՂՂԻ «ՀԱՏՎԱԾՆԵՐՈՎ» ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ

Դիցուք տրված է հարթության

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

հավասարումն այն պայմանով, որ A, B, C, D գործակիցներից ոչ մեկը զրոյական չէ: Այդպիսի հավասարումը կարելի է բերել հատուկ տեսքի, որը հարմար է օգտագործել անալիտիկ երկրաչափության մի շարք խնդիրներում:

Տրված հավասարման D ազատ անդամը տեղափոխենք հավասարման աջ մաս և, այնուհետև, ստացված հավասարման երկու մասն էլ բաժանենք $-\boldsymbol{D}$ վրա: Այդ ամենի արդյունքում կստանանք

$$\frac{\boldsymbol{Ax}}{-\boldsymbol{D}}+\frac{\boldsymbol{By}}{-\boldsymbol{D}}+\frac{\boldsymbol{Cz}}{-\boldsymbol{D}}=\mathbf{1}$$

հավասարումը, որը կարելի է գրել նաև հետևյալ տեսքով.

$$\frac{\boldsymbol{x}}{\frac{-\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{A}}}+\frac{\boldsymbol{y}}{\frac{-\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{B}}}+\frac{\boldsymbol{z}}{\frac{-\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{C}}}=\mathbf{1}:$$

Կատարելով

$$\boldsymbol{a}=-\frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{A}},\quad \boldsymbol{b}=-\frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{B}},\quad \boldsymbol{c}=-\frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{C}}$$

նշանակումները՝ ստանում ենք

$$\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}}+\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{b}}+\frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{c}}=\mathbf{1} \tag{8.5}$$

տեսքի հավասարումը, որը կոչվում է **հարթության «հատվածներով» հավասարում**: Այստեղ $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ թվերն ունեն շատ պարզ երկրաչափական իմաստ. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ թվերը հանդիսանում են այն հատվածների մեծությունները, որոնք առաջանում են կոորդինատային առանցքների հետ հարթության հատման արդյունքում (հաշված կոորդինատների սկզբնակետից): Որպեսզի համոզվենք դրանում, գտնենք հարթության հատման կետերը կորդինատային առանցքների հետ: $\boldsymbol{Ox}$ առանցքի հետ հարթության հատման կետն որոշվում է այդ հարթության

$$\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}}+\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{b}}+\frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{c}}=\mathbf{1}$$

հավասարումից՝ լրացուցիչ $\boldsymbol{y}=\mathbf{0},\boldsymbol{z}=\mathbf{0}$ պայմանների դեպքում, որից հետևում է, որ $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$: Այնպես որ, հարթությունը $\boldsymbol{Ox}$ առանցքի վրա հատում է $\boldsymbol{a}$ մեծությամբ հատված: Նմանապես ցույց է տրվում, որ հարթությունը $\boldsymbol{Oy}$ և $\boldsymbol{Oz}$ առանցքների վրա համապատասխանաբար հատում է $\boldsymbol{b}$ և $\boldsymbol{c}$ մեծություններով հատվածներ:

Այժմ դիտարկենք երկու փոփոխականներով առաջին կարգի

$$\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{By}+\boldsymbol{C}=\mathbf{0}$$

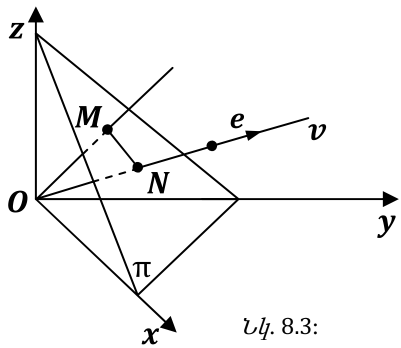
հավասարումը, որտեղ $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ գործակիցներից ոչ մեկը զրոյական չէ: Այդ դեպքում նմանապես (ինչպես $\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{By}+\boldsymbol{Cz}+\boldsymbol{D}=\mathbf{0}$ դեպքում) կստանանք

$$\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}}+\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{b}}=\mathbf{1} \tag{8.6}$$

տեսքի հավասարումը, որտեղ $\boldsymbol{a}=-\frac{C}{A}$, $\boldsymbol{b}=-\frac{C}{B}$: Այն կոչվում է **ուղղի «հատվածներով» հավասարում**, որում $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ թվերը հանդիսանում են այն հատվածների մեծությունները, որոնք առաջանում են (8.6) հավասարումով որոշվող ուղղի և, համապատասխանաբար, $\boldsymbol{Ox}$ և $\boldsymbol{Oy}$ առանցքների հատումից:

§ 8.3. ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՈՒՂՂԻ ՆՈՐՄԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ

Դիցուք $\boldsymbol{Oxyz}$ հանդիսանում է ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատային համակարգ և π՝ որևէ հարթություն (նկար 8.3): $\boldsymbol{O}$ կետից տանենք π հարթությանն ուղղահայաց $\boldsymbol{v}$ ուղիղը, որն այդ հարթությունը հատում է $\boldsymbol{N}$ կետում: $\boldsymbol{v}$ ուղղի վրա մտցնենք դրական ուղղություն, որը համընկնում է $\overline{\boldsymbol{ON}}$ վեկտորի ուղղության հետ: Դիցուք $\boldsymbol{e}$ հանդիսանում է միավոր վեկտոր, որի ուղղությունը նույնպես համընկնում է $\overline{\boldsymbol{ON}}$ վեկտորի ուղղության հետ: Եթե π հարթությունն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով, ապա որպես $\boldsymbol{v}$ ուղղի դրական ուղղություն կարելի է ընտրել երկու հնարավոր ուղղություններից կամայականը:



Նկ. 8.3:

Անկյունները, որոնք կազմում է $\boldsymbol{e}$ միավոր վեկտորը $\boldsymbol{Ox}$, $\boldsymbol{Oy}$, $\boldsymbol{Oz}$ առանցքների հետ համապատասխանաբար նշանակենք $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$: Այդ անկյունների $\cos\boldsymbol{\alpha}$, $\cos\boldsymbol{\beta}$, $\cos\boldsymbol{\gamma}$ մեծությունները, ինչպես գիտենք, կոչվում են $\boldsymbol{e}$ վեկտորի ուղղորդող կոսինուսներ: Եվ քանի որ $\boldsymbol{e}$ վեկտորը միավոր է (տես. § 6.3.), ապա

$$\boldsymbol{e}=\{\cos\boldsymbol{\alpha}, \cos\boldsymbol{\beta}, \cos\boldsymbol{\gamma}\} \quad \text{և} \quad \cos^2\boldsymbol{\alpha}+\cos^2\boldsymbol{\beta}+\cos^2\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{1}:$$

$\overline{\boldsymbol{ON}}$ վեկտորի երկարությունը նշանակենք $\boldsymbol{\rho}$ տառով, այսինքն՝ $\boldsymbol{\rho}$ հանդիսանում է $\boldsymbol{O}$ կետի հեռավորությունը π հարթությունից:

Դիցուք $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ կետը հանդիսանում է π հարթության կամայական կետ: Այդ դեպքում $պր_v\overline{\boldsymbol{OM}} = պր_e\overline{\boldsymbol{OM}}$ և $պր_v\overline{\boldsymbol{OM}} = \boldsymbol{ON} = \boldsymbol{\rho}$, քանի որ $\overline{\boldsymbol{ON}}$ վեկտորի ուղղությունը համընկնում է $\boldsymbol{e}$ վեկտորի և $\boldsymbol{v}$ առանցքի ուղղությունների հետ: Հետևաբար

$$\boldsymbol{\rho} = պր_e\overline{\boldsymbol{OM}} = |\boldsymbol{e}|\,պր_e\overline{\boldsymbol{OM}} = (\overline{\boldsymbol{OM}},\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{x}\cos\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{y}\cos\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{z}\cos\boldsymbol{\gamma}:$$

Վերջինս կարելի է գրել նաև

$$\boldsymbol{x}\cos\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{y}\cos\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{z}\cos\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{0} \tag{8.7}$$

տեսքով: Այդ հավասարմանը բավարարում են միայն ու միայն π հարթությանը պատկանող $\boldsymbol{M}$ կետի $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ կորդինատները, ուստի (8.7) հավասարումը հանդիսանում է π հարթությունն որոշող հավասարում, որն էլ կոչվում է այդ **հարթության նորմալ հավասարում**:

Դիցուք այժմ տրված են հարթության

$$\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{By} + \boldsymbol{Cz} + \boldsymbol{D} = \boldsymbol{0}$$

ընդհանուր հավասարումը և

$$\boldsymbol{x}\cos\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{y}\cos\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{z}\cos\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{0}$$

նորմալ հավասարումը: Քանի որ այդ երկու հավասարումներն որոշում են միևնույն հարթությունը, ապա գոյություն ունի այնպիսի $\lambda \neq 0$ իրական թիվ (ըստ 8.3. թեորեմի), որ

$$\cos\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{A},\quad \cos\boldsymbol{\beta} = \lambda\boldsymbol{B},\quad \cos\boldsymbol{\gamma} = \lambda\boldsymbol{C},\quad -\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\lambda D}:$$

Առաջին երեք առնչություններից ստանում ենք, որ

$$\lambda^2(\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2 + \boldsymbol{C}^2) = \cos^2\boldsymbol{\alpha} + \cos^2\boldsymbol{\beta} + \cos^2\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{1}$$

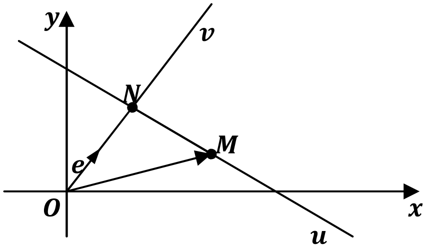
կամ

$$\lambda = \pm\frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{C}^2}},$$

որտեղ λ թիվը վերցվում է դրական նշանով, եթե $\boldsymbol{D} < 0$, և վերցվում է բացասական նշանով, եթե $\boldsymbol{D} > 0$ (հետևում է $-\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\lambda D}$ առնչությունից): Ուստի տրված $\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{By} + \boldsymbol{Cz} + \boldsymbol{D} = \boldsymbol{0}$ ընդհանուր հավասարումը կարելի է բերել նորմալ տեսքի՝ բազմապատկելով այն λ թվով՝ վերցված համապատասխան նշանով.

$$\frac{\boldsymbol{A}}{\pm\sqrt{\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{C}^2}}\boldsymbol{x} + \frac{\boldsymbol{B}}{\pm\sqrt{\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{C}^2}}\boldsymbol{y} + \frac{\boldsymbol{C}}{\pm\sqrt{\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{C}^2}}\boldsymbol{z} + \frac{\boldsymbol{D}}{\pm\sqrt{\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{C}^2}} = \boldsymbol{0}:$$

Արդ դիտարկենք $\boldsymbol{Oxy}$ ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատային համակարգը և $\boldsymbol{u}$ ուղիղը (նկար 8.4): Կոորդինատների սկզբնակետից տանենք $\boldsymbol{u}$ ուղղին ուղղահայաց $\boldsymbol{v}$ ուղիղը, որն $\boldsymbol{u}$ ուղիղը հատում է $\boldsymbol{N}$ կետում: $\boldsymbol{v}$ ուղղի դրական ուղղությունը համարենք $\overline{\boldsymbol{ON}}$ վեկտորի ուղղությունը (եթե $\boldsymbol{O} = \boldsymbol{N}$, ապա որպես դրական ուղղություն համարենք երկու հնարավոր ուղղություններից կամայականը): Այսպիսով, $\boldsymbol{v}$ հանդիսանում է առանցք: $\boldsymbol{Ox}$ և $\boldsymbol{Ov}$ դրական կիսաառանցքների կազմած անկյունը նշանակենք $\boldsymbol{\alpha}$, իսկ $\overline{\boldsymbol{ON}}$ վեկտորի երկարությունը՝ $\boldsymbol{\rho}$:



Նկ. 8.4:

Դիցուք $\boldsymbol{e}$ հանդիսանում է միավոր վեկտոր, որի ուղղությունը համընկնում է $\boldsymbol{v}$ առանցքի դրական ուղղության հետ: Ուստի $\boldsymbol{e} = \{\cos\boldsymbol{\alpha}, \sin\boldsymbol{\alpha}\}$: Տրված $\boldsymbol{u}$ ուղղի վրա ընտրենք որևէ $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ կետ: Այդ դեպքում պարզ է, որ

$$\text{պր}_v\overline{\boldsymbol{OM}} = \text{պր}_e\overline{\boldsymbol{OM}} \quad \text{և} \quad \text{պր}_v\overline{\boldsymbol{OM}} = \boldsymbol{\rho}:$$

Հետևաբար

$$\boldsymbol{\rho} = \text{պր}_e\overline{\boldsymbol{OM}} = |\boldsymbol{e}|\,\text{պր}_e\overline{\boldsymbol{OM}} = (\overline{\boldsymbol{OM}}, \boldsymbol{e}) = \boldsymbol{x}\cos\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{y}\sin\boldsymbol{\alpha}$$

կամ

$$\boldsymbol{x}\cos\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{y}\sin\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{0}: \qquad (8.8)$$

Ստացված վերջին հավասարմանը բավարարում են միայն ու միայն $\boldsymbol{u}$ ուղղին պատկանող $\boldsymbol{M}$ կետի $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ կոորդինատները, ուստի (8.8) հավասարումը հանդիսանում է $\boldsymbol{u}$ ուղիղն որոշող հավասարում, որն էլ կոչվում է այդ **ուղղի նորմալ հավասարում**:

Ուղղի ընդհանուր $\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{By} + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{0}$ հավասարումից նորմալ հավասարումը կարելի է ստանալ՝ այն բազմապատկելով

$$\lambda = \pm\frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2}}$$

թվով՝ վերցված դրական նշանով, եթե $\boldsymbol{C} < \boldsymbol{0}$, և վերցված բացասական նշանով, եթե $\boldsymbol{C} < \boldsymbol{0}$:

§ 8. 4. ՈՒՂՂԻ ԿԱՆՈՆԱԿԱՆ ԵՎ ՊԱՐԱՄԵՏՐԵՐՈՎ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ

Դիցուք տրված է որևէ ուղիղ: Այդ դեպքում **յուրաքանչյուր ոչ զրոյական վեկտոր, որը գտնվում է տրված ուղղի վրա կամ զուգահեռ է նրան, կոչվում է այդ ուղղի ուղղորդող վեկտոր**:

Ֆիքսենք ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատային որևէ համակարգ: Եթե $\boldsymbol{a} = \{\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}\}$ հանդիսանում է $\boldsymbol{v}$ ուղղի ուղղորդող վեկտոր, իսկ $\boldsymbol{M_0}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{z_0})$ կետը՝ այդ ուղղի որևէ կետ, ապա տարածության կամայական $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ կետ պատկանում է $\boldsymbol{v}$ ուղղին այն և միայն այն դեպքում, երբ $\boldsymbol{a}$ և $\overline{\boldsymbol{M_0M}} = \{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{z} - \boldsymbol{z_0}\}$ վեկտորները կոլինեար են: Վերջին պայմանը համարժեք է նրան, որ գոյություն ունի այնպիսի $\boldsymbol{t}$ իրական թիվ, որ

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{lt}, \quad \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_0} = \boldsymbol{mt}, \quad \boldsymbol{z} - \boldsymbol{z_0} = \boldsymbol{nt}$$

կամ

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{lt}, \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y_0} + \boldsymbol{mt}, \quad \boldsymbol{z} = \boldsymbol{z_0} + \boldsymbol{nt}: \tag{8.9}$$

Վերջին հավասարումները կոչվում են **ուղղի պարամետրերով հավասարումներ**, որն անցնում է $\boldsymbol{M_0}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{z_0})$ կետով՝ $\boldsymbol{a} = \{\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}\}$ վեկտորի ուղղությամբ:

Եթե $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ թվերից յուրաքանչյուրն ոչ զրոյական է, ապա (8.9) հավասարումները համարժեք են հետևյալ երեք հավասարումներին.

$$\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0}}{\boldsymbol{l}} = \frac{\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y_0}}{\boldsymbol{m}}, \quad \frac{\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y_0}}{\boldsymbol{m}} = \frac{\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z_0}}{\boldsymbol{n}}, \quad \frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0}}{\boldsymbol{l}} = \frac{\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z_0}}{\boldsymbol{n}},$$

որոնք գրենք

$$\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0}}{\boldsymbol{l}} = \frac{\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y_0}}{\boldsymbol{m}} = \frac{\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z_0}}{\boldsymbol{n}} \tag{8.10}$$

տեսքով: Վերջիններս կոչվում են **ուղղի կանոնական հավասարումներ**, որն անցնում է $\boldsymbol{M_0}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{z_0})$ կետով՝ զուգահեռ $\boldsymbol{a} = \{\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}\}$ վեկտորին:

ԳԼՈՒԽ 9

ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ՀԱՐԹ ՊԱՏԿԵՐՆԵՐ

§ 9.1. ԷԼԻՊՍ

Դիցուք հարթության վրա տրված են $\boldsymbol{F_1}$ և $\boldsymbol{F_2}$ կետերը, որոնք կոչվում են *ֆոկուսներ,* և նրանց միջև հեռավորությունը հավասար է $\boldsymbol{2c}$: Տրված է նաև $\boldsymbol{a}$ թիվը, որը բավարարում է

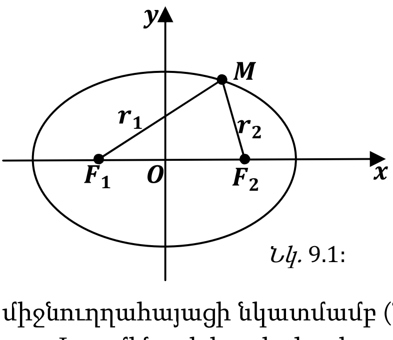
$$\boldsymbol{c < a} \tag{9.1}$$

անհավասարությանը:

9.1. ***Սահմանում:*** **Էլիպս** է կոչվում հարթության կետերից կազմըված այն երկրաչափական պատկերը, որի յուրաքանչյուր կետի հեռավորությունների գումարը $\boldsymbol{F_1}$ և $\boldsymbol{F_2}$ ֆոկուսներից հավասար է $\boldsymbol{2a}$:

Եթե (9.1) պայմանը տեղի չունի, ապա դիտարկվող կետերի բազմությունը կա՛մ հանդիսանում է ֆոկուսների միջև ընկած հատվածը, կա՛մ չի պարունակում ոչ մի կետ:

Էլիպսի սահմանումից անմիջապես հետևում է նրա կառուցման հետևյալ եղանակը. եթե $\boldsymbol{2a}$ երկարությամբ ոչ առաձգական թելի ծայրերն ամրացնենք $\boldsymbol{F_1}$ և $\boldsymbol{F_2}$ կետերում և թելը ձգենք մատիտի սուր մասով, ապա այն շարժման ընթացքում կգծի $\boldsymbol{F_1}$ և $\boldsymbol{F_2}$ ֆոկուսներով էլիպս, որի կամայական կետի հեռավորությունների գումարը ֆոկուսներից հավասար է $\boldsymbol{2a}$: Կատարելով այդ կառուցումը՝ կարելի է տեսանելիորեն համոզվել, որ էլիպսն իրենից ներկայացնում է (ձվաձև տեսքի) ուռուցիկ փակ գիծ, որը սիմետրիկ է $\boldsymbol{F_1F_2}$ հատվածի (ուղղի) և այդ հատվածի միջնուղղահայացի նկատմամբ (նկար 9.1):



Նկ. 9.1:

Կազմենք էլիպսի հավասարումը: Այդ նպատակով ընտրենք $\boldsymbol{Oxy}$ ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատային համակարգն այնպես, որ $\boldsymbol{Ox}$ առանցքն անցնի $\boldsymbol{F_1}$ և $\boldsymbol{F_2}$ ֆոկուսներով և ունենա $\overline{\boldsymbol{F_1F_2}}$ հատվածի ուղղությունը, իսկ կոորդինատների $\boldsymbol{O}$ սկզբնակետը համընկնի $\boldsymbol{F_1F_2}$ հատվածի միջնակետի հետ (նկար 9.1)։ Այդ դեպքում $\boldsymbol{F_1}(-\boldsymbol{c},\boldsymbol{0})$ և $\boldsymbol{F_2}(+\boldsymbol{c},\boldsymbol{0})$։

Դիցուք $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ կետը հանդիսանում է էլիպսի կամայական կետ։ $\boldsymbol{M}$ կետի հեռավորությունները $\boldsymbol{F_1}$ և $\boldsymbol{F_2}$ ֆոկուսներից (**ֆոկուսային շառավիղները**), համապատասխանաբար նշանակենք $\boldsymbol{r_1}$ և $\boldsymbol{r_2}$, այսինքն՝ $\boldsymbol{F_1M}=\boldsymbol{r_1}$ և $\boldsymbol{F_2M}=\boldsymbol{r_2}$։ Այդ դեպքում, ըստ 5.11. թեորեմի, ունենք, որ

$$\boldsymbol{F_1M}=\boldsymbol{r_1}=\sqrt{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c})^2+\boldsymbol{y}^2},\quad \boldsymbol{F_2M}=\boldsymbol{r_2}=\sqrt{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})^2+\boldsymbol{y}^2},$$

և, ըստ էլիպսի սահմանման՝

$$\boldsymbol{F_1M}+\boldsymbol{F_2M}=\boldsymbol{r_1}+\boldsymbol{r_2}=\boldsymbol{2a}: \tag{9.2}$$

Հետևաբար

$$\sqrt{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c})^2+\boldsymbol{y}^2}+\sqrt{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})^2+\boldsymbol{y}^2}=\boldsymbol{2a}: \tag{9.3}$$

Վերջինս հանդիսանում է էլիպսի հավասարումը նշված կոորդինատային համակարգում, քանի որ նրան բավարարում են էլիպսի բոլոր կետերի կոորդինատները և միայն այդ կետերի։

Ձևափոխենք (9.3) հավասարումը։ Այդ նպատակով (9.3) հավասարման ձախ մասի երկրորդ գումարելին տեղափոխենք աջ մաս, որից հետո ստացված հավասարման երկու մասն էլ բարձրացնենք քառակուսի և կատարենք նման անդամների միացում.

$$\sqrt{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c})^2+\boldsymbol{y}^2}=\boldsymbol{2a}-\sqrt{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})^2+\boldsymbol{y}^2}$$
$$\Rightarrow\ (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c})^2+\boldsymbol{y}^2=\boldsymbol{4a}^2-\boldsymbol{4a}\sqrt{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})^2+\boldsymbol{y}^2}+(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})^2+\boldsymbol{y}^2$$
$$\Rightarrow\ \boldsymbol{4cx}=\boldsymbol{4a}^2-\boldsymbol{4a}\sqrt{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})^2+\boldsymbol{y}^2}\ \Rightarrow\ \boldsymbol{a}\sqrt{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})^2+\boldsymbol{y}^2}=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{cx}:$$

Վերջին հավասարման երկու մասն էլ բարձրացնելով քառակուսի՝ կունենանք, որ

$$\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{2a}^2\boldsymbol{cx}+\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{c}^2+\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{y}^2=\boldsymbol{a}^4-\boldsymbol{2a}^2\boldsymbol{cx}+\boldsymbol{c}^2\boldsymbol{x}^2$$
$$\Rightarrow\ (\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{c}^2)\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{y}^2=\boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{c}^2):$$

Ներմուծենք նոր $\boldsymbol{b}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{c}^2}$ մեծությունը։ Քանի որ $\boldsymbol{a}>\boldsymbol{c}$, ապա $\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{c}^2>0$ և $\boldsymbol{b}$ մեծությունն իրական թիվ է։ Հետևաբար

$$\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{c}^2, \tag{9.4}$$

և կարող ենք գրել, որ

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

կամ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1: \quad (9.5)$$

Մենք ցույց տվեցինք, որ էլիպսի ցանկացած կետի կորդինատները բավարարում են (9.5) հավասարմանը: Այժմ ցույց տանք հակառակը. կամայական $M(x, y)$ կետ, որը բավարարում է (9.5) հավասարմանը, պատկանում է էլիպսին, այսինքն բավարարում է (9.3) առնչությանը: Վերջին՝ (9.5) հավասարումից ստանում ենք, որ

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right):$$

Օգտագործելով այս առնչությունը և $b^2 = a^2 - c^2$ հավասարությունը՝ գտնում ենք, որ

$$F_1M = r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + y^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx + a^2} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}x + a\right)^2} = \left|a + \frac{c}{a}x\right|:$$

Քանի որ, ըստ (9.5) հավասարման, $|x| \le a$ և $c < a$, ապա

$$F_1M = r_1 = a + \frac{c}{a}x: \quad (9.6)$$

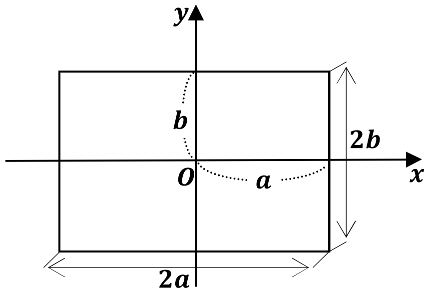
Նմանապես կարելի է ստանալ

$$F_2M = r_2 = a - \frac{c}{a}x \quad (9.7)$$

բանաձևը: Գումարելով վերջին երկու հավասարությունները՝ ստանում ենք (9.2) կամ (9.3) հավասարությունները:

Այսպիսով, (9.5) առնչությունը հանդիսանում է էլիպսի հավասարում, որը կոչվում է **էլիպսի կանոնական հավասարում**: Այն երկրորդ աստիճանի հավասարում է, ուստի էլիպսը հանդիսանում է երկրորդ կարգի կոր:

Ելնելով էլիպսի կանոնական հավասարումից՝ ուսումնասիրենք էլիպսի գծապատկերը: Էլիպսի կետերի կոորդինատները սահմանափակված են $|x| \leq a$ և $|y| \leq b$ անհավասարություններով: Դա նշանակում է, որ էլիպսը սահմանափակ պատկեր է, որը դուրս չի գալիս 9.2 նկարում պատկերված ուղղանկյան սահմաններից:

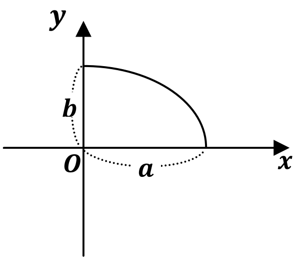


Նկ. 9.2:

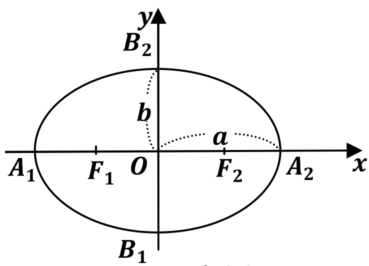
Հաջորդիվ նկատենք, որ (9.5) հավասարման մեջ մասնակցում են կոորդինատների միայն զույգ աստիճանները: Այդ պատճառով ամեն մի $M(x, y)$ կետի հետ միասին էլիպսը պարունակում է նաև $M_1(-x, y)$, $M_2(x, -y)$, $M_3(-x, -y)$ կետերը: Իսկ դա նշանակում է, որ էլիպսը մի պատկեր է, որը սիմետրիկ է Ox, Oy առանցքների նկատմամբ և կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ: Ուստի էլիպսի գծապատկերի ուսումնասիրման համար բավարար է այն դիտարկել միայն կոորդինատային առաջին քառորդում, իսկ մյուս քառորդներում նրա կառուցումն որոշվում է ըստ սիմետրիայի: Առաջին քառորդի համար կանոնական հավասարումից ստանում ենք, որ

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}:$$

Երբ x փոփոխականը մեծանում է զրոյից մինչև a, այդ ժամանակ y փոփոխականը նվազում է b-ից մինչև զրո, և այդ դեպքում $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կունենա 9.3 նկարում պատկերված տեսքը:



Նկ. 9.3:



Նկ. 9.4:

Ըստ սիմետրիայի կառուցելով մնացած երեք քառորդների գրաֆիկները՝ կստանանք ամբողջ էլիպսը (նկար 9.4):

Էլիպսի սիմետրիայի առանցքները ($\boldsymbol{Ox}$ և $\boldsymbol{Oy}$ առանցքները) պարզապես կոչվում են նրա **առանցքներ**, իսկ նրա սիմետրիայի $\boldsymbol{O}$ կենտրոնը՝ **էլիպսի կենտրոն**: **Էլիպսի կիսաառանցքներ** կոչվում են $\boldsymbol{OA_2}$ և $\boldsymbol{OB_2}$ հատվածները, ինչպես նաև նրանց $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ երկարությունները: Մեր ենթադրությունների համաձայն, երբ էլիպսի ֆոկուսները գտնվում են $\boldsymbol{Ox}$ առանցքի վրա, (9.4) առնչությունից հետևում է, որ $\boldsymbol{a > b}$: Այդ դեպքում $\boldsymbol{a}$ կոչվում է **մեծ կիսաառանցք**, իսկ $\boldsymbol{b}$՝ **փոքր կիսաառանցք**: Սակայն (9.5) հավասարումը կարելի է դիտարկել նաև $\boldsymbol{a < b}$ պայմանի դեպքում: Դա կլինի այն էլիպսի հավասարումը, որի ֆոկուսները գտնվում են $\boldsymbol{Oy}$ առանցքի վրա և մեծ կիսաառանցքը հավասար է $\boldsymbol{b}$:

Ի վերջո (9.5) հավասարումը դիտարկենք $\boldsymbol{a = b}$ պայմանի համար: Այդ դեպքում այն կարելի է գրել

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = a^2}$$

տեսքով, որը հանդիսանում է $\boldsymbol{a}$ շառավղով և $\boldsymbol{O}$ կենտրոնով շրջանագծի հավասարումը: Հետագայում շրջանագիծը կդիտարկենք որպես հավասար կիսաառանցքներով էլիպս, որի ֆոկուսները համընկնում են շրջանագծի կենտրոնի հետ:

9.2. *Սահմանում:* **Էլիպսի էքսցենտրիսիտետ** կոչվում է

$$\boldsymbol{\varepsilon = \frac{c}{a}}$$

հարաբերությունը:

Քանի որ $\boldsymbol{c < a}$, ապա $\boldsymbol{\varepsilon < 1}$, այսինքն՝ յուրաքանչյուր էլիպսի էքսցենտրիսիտետ փոքր է մեկից: Շրջանագծի համար $\boldsymbol{c = 0}$ և $\boldsymbol{\varepsilon = 0}$:

Մյուս կողմից $\boldsymbol{c^2 = a^2 - b^2}$: Ուստի

$$\boldsymbol{\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2}},$$

որտեղից էլ

$$\boldsymbol{\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}} \quad \text{և} \quad \boldsymbol{\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}}:$$

Այստեղից հետևում է, որ $\boldsymbol{\varepsilon}$ էքսցենտրիսիտետը բնութագրում է էլիպսի ձևը. ինչքան $\boldsymbol{\varepsilon}$ մոտ է զրոյին, այնքան շատ էլիպսը նման է շրջանագծի, իսկ $\boldsymbol{\varepsilon}$ մեծացման դեպքում՝ այն ձգվում է:

Օգտագործելով էքսցենտրիսիտետի հասկացությունը՝ ֆոկուսային r_1 և r_2 շառավիղների համար ստանում ենք

$$F_1M = r_1 = a + \varepsilon x, \quad F_2M = r_2 = a - \varepsilon x$$

բանաձևերը:

§ 9.2. ՀԻՊԵՐԲՈԼ

Դիցուք հարթության վրա տրված են F_1 և F_2 կետերը, որոնք կոչվում են ֆոկուսներ, որոնց միջև հեռավորությունը հավասար է $2c$: Տրված է նաև a թիվը, որը բավարարում է

$$0 < a < c$$

անհավասարություններին:

9.3. *Սահմանում:* **Հիպերբոլ** է կոչվում հարթության կետերից կազմված այն երկրաչափական պատկերը, որի յուրաքանչյուր կետի հեռավորությունների տարբերության բացարձակ արժեքը F_1 և F_2 ֆոկուսներից հավասար է $2a$:

Նշված բազմությունը $a = 0$ դեպքում հանդիսանում է ուղիղ, $a = c$ դեպքում՝ երկու ճառագայթներ, իսկ $a > c$ դեպքում՝ դատարկ բազմություն:

Կազմենք հիպերբոլի հավասարումը: Այդ նպատակով ընտրենք Oxy ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատային համակարգն այնպես, որ Ox առանցքն անցնի F_1 և F_2 ֆոկուսներով և ունենա $\overline{F_1F_2}$ հատվածի ուղղությունը, իսկ կոորդինատների O սկզբնակետը համընկնի F_1F_2 հատվածի միջնակետի հետ: Այդ դեպքում $F_1(-c, 0)$ և $F_2(+c, 0)$:

Դիցուք $M(x, y)$ կետը հանդիսանում է հիպերբոլի կամայական կետ: M կետի հեռավորությունները F_1 և F_2 ֆոկուսներից (**ֆոկուսային շառավիղները**), համապատասխանաբար նշանակենք r_1 և r_2, այսինքն՝ $F_1M = r_1$ և $F_2M = r_2$: Այդ դեպքում, ըստ 5.11. թեորեմի, ունենք, որ

$$F_1M = r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad F_2M = r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

և, ըստ հիպերբոլի սահմանման՝

$$|\boldsymbol{F_1M - F_2M}| = |\boldsymbol{r_1 - r_2}| = \boldsymbol{2a}$$

կամ

$$\boldsymbol{F_1M - F_2M = r_1 - r_2 = \pm 2a}: \tag{9.8}$$

Հետևաբար

$$\sqrt{(\boldsymbol{x+c})^2 + \boldsymbol{y}^2} - \sqrt{(\boldsymbol{x-c})^2 + \boldsymbol{y}^2} = \pm\boldsymbol{2a}: \tag{9.9}$$

Վերջինս հանդիսանում է հիպերբոլի հավասարումը նշված կոորդինատային համակարգում, քանի որ նրան բավարարում են հիպերբոլի բոլոր կետերի կոորդինատները և միայն այդ կետերի: Պարզեցնենք այն: Այդ նպատակով (9.9) հավասարման ձախ մասի երկրորդ արմատը տեղափոխենք աջ մաս, որից հետո ստացված հավասարման երկու մասն էլ բարձրացնենք քառակուսի և կատարենք նման անդամների միացում.

$$\sqrt{(\boldsymbol{x+c})^2 + \boldsymbol{y}^2} = \sqrt{(\boldsymbol{x-c})^2 + \boldsymbol{y}^2} \pm \boldsymbol{2a}$$

$$\Rightarrow\ (\boldsymbol{x+c})^2 + \boldsymbol{y}^2 = (\boldsymbol{x-c})^2 + \boldsymbol{y}^2 \pm \boldsymbol{4a}\sqrt{(\boldsymbol{x-c})^2 + \boldsymbol{y}^2} + \boldsymbol{4a}^2$$

$$\Rightarrow\ \boldsymbol{4cx} = \boldsymbol{4a}^2 \pm \boldsymbol{4a}\sqrt{(\boldsymbol{x-c})^2 + \boldsymbol{y}^2}\ \Rightarrow\ \boldsymbol{cx} - \boldsymbol{a}^2 = \pm\boldsymbol{a}\sqrt{(\boldsymbol{x-c})^2 + \boldsymbol{y}^2}:$$

Վերջին հավասարման երկու մասն էլ բարձրացնելով քառակուսի՝ կունենանք, որ

$$\boldsymbol{c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2}$$

$$\Rightarrow\ (\boldsymbol{c^2 - a^2})\boldsymbol{x^2 - a^2y^2 = a^2}(\boldsymbol{c^2 - a^2}):$$

Ներմուծենք նոր $\boldsymbol{b} = \sqrt{\boldsymbol{c^2 - a^2}}$ մեծությունը: Քանի որ $\boldsymbol{c} > \boldsymbol{a}$, ապա $\boldsymbol{c^2 - a^2} > 0$ և $\boldsymbol{b}$ մեծությունն իրական թիվ է: Հետևաբար

$$\boldsymbol{b^2 = c^2 - a^2}, \tag{9.10}$$

և կարող ենք գրել, որ

$$\boldsymbol{b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2}$$

կամ

$$\frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{a^2}} - \frac{\boldsymbol{y^2}}{\boldsymbol{b^2}} = \boldsymbol{1}: \tag{9.11}$$

Սրանով մենք ցույց տվեցինք, որ (9.9) հավասարումից հետևում է (9.11) հավասարումը, այսինքն հիպերբոլի ցանկացած կետի կոորդինատները բավարարում են (9.11) հավասարմանը: Ցույց տանք հակառակ կողմը: Դիցուք $\boldsymbol{M(x,y)}$ կետը բավարարում է (9.11) հավասարմանը: Այդ դեպքում

$$\boldsymbol{y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)}:$$

Օգտագործելով այս առնչությունը և $\boldsymbol{b^2 = c^2 - a^2}$ հավասարությունը՝ գտնում ենք, որ

$$\boldsymbol{F_1M = r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + y^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2} =}$$

$$\boldsymbol{= \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx + a^2} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}x + a\right)^2} = \left|\frac{c}{a}x + a\right|}:$$

Նմանապես կարելի է ստանալ, որ

$$\boldsymbol{F_2M = r_2 = \left|\frac{c}{a}x - a\right|}:$$

Քանի որ, ըստ (9.11) հավասարման, $\boldsymbol{|x| \geq a}$ և $\boldsymbol{c > a}$, ապա $\boldsymbol{x \geq a}$ համար կունենանք, որ

$$\boldsymbol{F_1M = \frac{c}{a}x + a, \quad F_2M = \frac{c}{a}x - a}:$$

Հետևաբար

$$\boldsymbol{F_1M - F_2M = 2a}:$$

Իսկ $\boldsymbol{x \leq -a}$ համար՝

$$\boldsymbol{F_1M = -\frac{c}{a}x - a, \quad F_2M = -\frac{c}{a}x + a}:$$

Հետևաբար

$$\boldsymbol{F_1M - F_2M = -2a}:$$

Այսպիսով, (9.11) հավասարմանը բավարարող ցանկացած կետի կոորդինատները բավարարում են նաև (9.8) հավասարմանը և, նշանակում է, (9.9) հավասարմանը: Սրանով ցույց տվեցինք, որ (9.9) և (9.11) հավասարումները համարժեք են և, հետևաբար, (9.11) հավասարումն որոշում է հիպերբոլ: Այն կոչվում է **հիպերբոլի կանոնական հավասարում**, որը հանդիսանում է երկրորդ աստիճանի հավասարում, ուստի հիպերբոլը հանդիսանում է երկրորդ կարգի կոր:

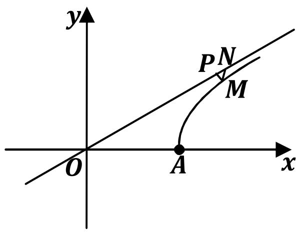
Հիպերբոլի կանոնական հավասարումից հետևում է, որ $|x| \geq a$: Դա նշանակում է, որ ողջ հիպերբոլը գտնվում է $x = -a$ և $x = a$ ուղիղներով սահմանափակված շերտից դուրս: Քանի որ (9.11) հավասարման մեջ մասնակցում են կոորդինատների միայն զույգ աստիճանները, ապա հիպերբոլը սիմետրիկ է կոորդինատների սկզբնակետի և կոորդինատային առանցքներից յուրաքանչյուրի նկատմամբ: Այդ իսկ պատճառով բավարար է հիպերբոլի գրաֆիկը գտնել կոորդինատային քառորդներից մեկում, օրինակ առաջինում. մնացած քառորդներում հիպերբոլը կառուցվում է համաձայն սիմետրիայի: Առաջին քառորդի համար ունենք, որ

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \ x \geq a:$$

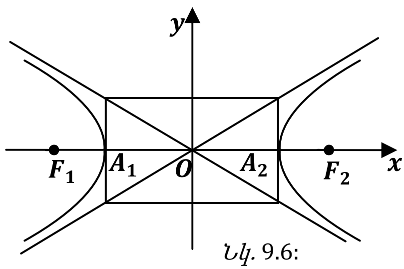
Այս ֆունկցիայի գրաֆիկը, սկսած $A(a, 0)$ կետից, անսահմանորեն շարժվում է աջ և վերև (նկար 9.5): Ցույց տանք, որ այդ դեպքում այն ինչքան հնարավոր է մոտենում է

$$Y = \frac{b}{a}x$$

ուղղին:



Նկ. 9.5:



Նկ. 9.6:

Դիտարկվող $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, $x \geq a$, ֆունկցիայի գրաֆիկի կամայական M կետից տանենք Oy առանցքին զուգահեռ ուղիղ, որը $Y = \frac{b}{a}x$ ուղիղը հատում է N կետում: Բացի այդ M կետից այդ ուղղի վրա իջեցնենք MP ուղղահայացը: Այդ դեպքում

$$MN = Y - y = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \ \Longrightarrow \ \lim_{x \to +\infty} MN = 0:$$

Քանի որ, $MP < MN$, ապա $\lim_{x \to +\infty} MP = 0$:

Այսպիսով, երբ առաջին քառորդում գտնվող (9.11) հիպերբոլի փոփոխական $\boldsymbol{M}$ կետը ձգտում է անվերջության, ապա այդ կետի հեռավորությունը $\boldsymbol{Y = \frac{b}{a}x}$ ուղղից ձգտում է զրոյի: Դրան համապատասխան ընդունված է ասել, որ հիպերբոլն ասիմպտոտիկորեն մոտենում է $\boldsymbol{Y = \frac{b}{a}x}$ ուղղին, իսկ այդ ուղիղն անվանում են **հիպերբոլի ասիմպտոտ**: Ակնհայտ է, որ (9.11) հիպերբոլն ունի երկու ասիմպտոտ.

$$\boldsymbol{y = \frac{b}{a}x}, \quad \boldsymbol{y = -\frac{b}{a}x}:$$

Կառուցենք (9.11) հիպերբոլի գրաֆիկը ամբողջությամբ: Սկզբում կառուցում ենք հիպերբոլի այսպես կոչված հիմնական ուղղանկյունը, որի կենտրոնը համընկնում է կոորդինատների սկզբնակետի հետ, իսկ կողմերը հավասար են $\boldsymbol{2a}$ և $\boldsymbol{2b}$ ու համապատասխանաբար զուգահեռ են $\boldsymbol{Ox}$ և $\boldsymbol{Oy}$ առանցքներին: Ուղիղները, որոնց վրա գտնվում են ուղղանկյան անկյունագծերը, հանդիսանում են հիպերբոլի ասիմպտոտները: Դրանից հետո կառուցում ենք հիպերբոլի գրաֆիկը (նկար 9.6):

Նշենք, որ հիպերբոլը երկու առանձին ճյուղերից կազմված պատկեր է. (9.8) հավասարության աջ մասի «+» նշանը համապատասխանում է նրա աջ ճյուղին, իսկ «−» նշանը՝ ձախ ճյուղին: Հիպերբոլի սիմետրիայի կենտրոնը կոչվում է նրա **կենտրոն**: Սիմետրիայի առանցքները կոչվում են **հիպերբոլի առանցքներ**, ընդ որում, հիպերբոլը երկու կետերում հատող առանցքը կոչվում է **իրական**, իսկ երկրորդը՝ **կեղծ**: **Հիպերբոլի գագաթներ** կոչվում են հիպերբոլի՝ իրական առանցքի հետ հատման $\boldsymbol{A_1}$ և $\boldsymbol{A_2}$ կետերը: **Հիպերբոլի կիսաառանցքներ** կոչվում են $\boldsymbol{a}$ և $\boldsymbol{b}$ մեծությունները: Եթե $\boldsymbol{a = b}$, ապա հիպերբոլը կոչվում է **հավասարակողմ**:

Դիտարկենք նաև

$$\boldsymbol{-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

հավասարումը: Ակնհայտ է, որ այն ևս որոշում է հիպերբոլ, որի ֆոկուսները գտնվում են $\boldsymbol{Oy}$ առանցքի վրա, իսկ հիմնական ուղղանկյունը և ասիմպտոտները համապատասխանաբար համընկնում են (9.11) հիպերբոլի հիմնական ուղղանկյան և ասիմպտոտների հետ:

9.4. *Սահմանում:* **Հիպերբոլի էքսցենտրիսիտետ** կոչվում է

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

հարաբերությունը:

Ցանկացած հիպերբոլի համար $\varepsilon > 1$: Էքսցենտրիսիտետը բնութագրում է հիպերբոլի հիմնական ուղղանկյան ձևը և, հետևաբար, հենց հիպերբոլի ձևը. ինչքան ε փոքր է, այնքան շատ է ձգված հիմնական ուղղանկյունը, իսկ նրա ետնից նաև հիպերբոլը՝ իրական առանցքի երկայնքով:

Օգտագործելով էքսցենտրիսիտետի հասկացությունը՝ ֆոկուսային r_1 և r_2 շառավիղների համար ստանում ենք

$$r_1 = \varepsilon x + a, \quad r_2 = \varepsilon x - a$$

բանաձևերն աջ ճյուղի համար ($x \geq a$), և

$$r_1 = -(\varepsilon x + a), \quad r_2 = -(\varepsilon x - a)$$

բանաձևերն ձախ ճյուղի համար ($x \leq a$):

§ 9.3. ԷԼԻՊՍԻ ԵՎ ՀԻՊԵՐԲՈԼԻ ԴԻՐԵԿՏՐԻՍՆԵՐԸ

Դիցուք Oxy ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատային համակարգում

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

հավասարումն որոշում է էլիպս, որի համար $a > b$, $b^2 = a^2 - c^2$ և $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$:

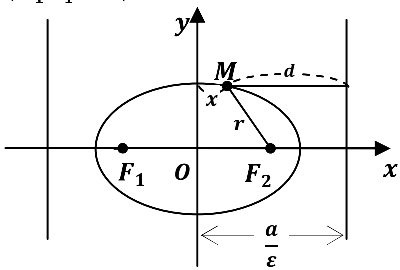
9.5. *Սահմանում:* Երկու ուղիղներ, որոնք ուղղահայաց են էլիպսի մեծ առանցքին և կենտրոնի նկատմամբ սիմետրիկորեն գտնվում են $\frac{a}{\varepsilon}$ հեռավորության վրա, կոչվում են **էլիպսի դիրեկտրիսներ**:

Տրված կոորդինատային համակարգում էլիպսի դիրեկտրիսների հավասարումներն ունեն հետևյալ տեսքը.

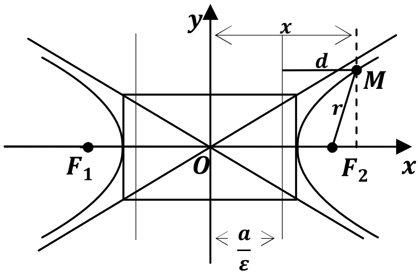
$$x = -\frac{a}{\varepsilon} \quad \text{և} \quad x = +\frac{a}{\varepsilon}:$$

Նրանցից առաջինը պայմանավորվենք անվանել **ձախ**, իսկ երկրորդը՝ **աջ**:

Քանի որ էլիպսի համար $\boldsymbol{\varepsilon < 1}$, ապա $\frac{a}{\varepsilon} > a$: Այստեղից հետևում է, որ աջ դիրեկտրիսը գտնվում է էլիպսի աջ գագաթի աջ կողմում: Նմանապես ձախ դիրեկտրիսը գտնվում է էլիպսի ձախ կողմում (նկար 9.7):



Նկ. 9.7:



Նկ. 9.8:

Այժմ դիտարկենք

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

հավասարումով որոշվող հիպերբոլը, որի համար $\boldsymbol{a > b}$, $\boldsymbol{b^2 = c^2 - a^2}$ և $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{c}{a} > 1$:

9.6. ***Սահմանում:*** Երկու ուղիղներ, որոնք ուղղահայաց են հիպերբոլի իրական առանցքին և կենտրոնի նկատմամբ սիմետրիկորեն գտնվում են $\frac{a}{\varepsilon}$ հեռավորության վրա, կոչվում են **հիպերբոլի դիրեկտրիսներ**:

Տրված կոորդինատային համակարգում հիպերբոլի դիրեկտրիսների հավասարումներն ունեն հետևյալ տեսքը.

$$x = -\frac{a}{\varepsilon} \quad \text{և} \quad x = +\frac{a}{\varepsilon}:$$

Պայմանավորվենք նրանցից առաջինն անվանել **ձախ**, իսկ երկրորդը՝ **աջ**:

Քանի որ հիպերբոլի համար $\boldsymbol{\varepsilon > 1}$, ապա $\frac{a}{\varepsilon} < a$: Այստեղից հետևում է, որ աջ դիրեկտրիսը գտնվում է հիպերբոլի կենտրոնի և աջ գագաթի միջև: Նմանապես ձախ դիրեկտրիսը գտնվում է հիպերբոլի կենտրոնի և ձախ գագաթի միջև (նկար 9.8):

9.7. ***Թեորեմ:*** Դիցուք $\boldsymbol{r}$ հանդիսանում է էլիպսի (հիպերբոլի) որևէ կետի հեռավորությունը ֆոկուսից, իսկ $\boldsymbol{d}$՝ այդ կետի հեռավորությունը նշված ֆոկուսին համապատասխան դիրեկտրիսից: Այդ դեպքում $\frac{r}{d}$ հարաբերությունը հաստատուն մեծություն է, որը հավասար է էլիպսի (հիպերբոլի) էքսցենտրիսիտետին, այսինքն՝

$$\frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{\varepsilon}$$

(ֆոկուսը և դիրեկտրիսը համարվում են իրար համապատասխան, եթե նրանք կենտրոնի նկատմամբ գտնվում են մի կողմում):

Ապացույց: Էլիպսի դեպք: Որոշակիության համար ենթադրենք, որ խոսքը վերաբերում է աջ ֆոկուսին և աջ դիրեկտրիսին: Դիցուք $\boldsymbol{M(x, y)}$ հանդիսանում է էլիպսի կամայական կետ (նկար 9.7): $\boldsymbol{M}$ կետի հեռավորությունն աջ դիրեկտրիսից արտահայտվում է

$$\boldsymbol{d} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{x}$$

հավասարությամբ, իսկ $\boldsymbol{M}$ կետի հեռավորությունն աջ ֆոկուսից տրվում է

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{\varepsilon x}$$

բանաձևով (տես. § 9.1.): Հետևաբար

$$\frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{d}} = \frac{\boldsymbol{a} - \boldsymbol{\varepsilon x}}{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{x}} = \frac{(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{\varepsilon x})\boldsymbol{\varepsilon}}{(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{\varepsilon x})} = \boldsymbol{\varepsilon}:$$

Ձախ ֆոկուսի և ձախ դիրեկտրիսի դեպքում կունենանք, որ

$$\boldsymbol{d} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{\varepsilon x}$$

և, հետևաբար,

$$\frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{d}} = \frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{\varepsilon x}}{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{x}} = \frac{(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{\varepsilon x})\boldsymbol{\varepsilon}}{(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{\varepsilon x})} = \boldsymbol{\varepsilon}:$$

Հիպերբոլի դեպք: Այս դեպքում ևս որոշակիության համար ենթադրենք, որ խոսքը վերաբերում աջ ֆոկուսին և աջ դիրեկտրիսին (նկար 9.7): Հարկավոր է դիտարկել երկու դեպք.

Առաջին: $\boldsymbol{M}$ կետը գտնվում է հիպերբոլի աջ մասում: Այդ դեպքում $\boldsymbol{M}$ կետի հեռավորությունն աջ դիրեկտրիսից արտահայտվում է

$$d = x - \frac{a}{\varepsilon}$$

հավասարությամբ, իսկ M կետի հեռավորությունն աջ ֆոկուսից տրվում է

$$r = \varepsilon x - a$$

բանաձևով (տես. § 9.2.)։ Հետևաբար

$$\frac{r}{d} = \frac{\varepsilon x - a}{x - \frac{a}{\varepsilon}} = \frac{(\varepsilon x - a)\varepsilon}{(\varepsilon x - a)} = \varepsilon\text{։}$$

Երկրորդ: M կետը գտնվում է հիպերբոլի ձախ մասում։ Այդ դեպքում M կետի հեռավորությունն աջ դիրեկտրիսից արտահայտըվում է

$$d = |x| + \frac{a}{\varepsilon}$$

հավասարությամբ։ Բայց քանի որ M կետը գտնվում է հիպերբոլի ձախ մասում, ապա x մեծությունը բացասական է, հետևաբար, $|x| = -x$ և

$$d = -x + \frac{a}{\varepsilon}\text{։}$$

Մյուս կողմից M կետի հեռավորությունն աջ ֆոկուսից տրվում է

$$r = -(\varepsilon x - a)$$

բանաձևով (տես. § 9.2.)։ Հետևաբար

$$\frac{r}{d} = \frac{-(\varepsilon x - a)}{-x + \frac{a}{\varepsilon}} = \frac{(-\varepsilon x + a)\varepsilon}{(-\varepsilon x + a)} = \varepsilon\text{։}$$

Թեորեմն ապացուցված է։ ■

Նախորդ թեորեմը թույլ է տալիս էլիպսը և հիպերբոլը սահմանել մեկ այլ եղանակով, որը համարժեք է նախորդ սահմանումներին։

9.8. *Սահմանում:* **Էլիպս (հիպերբոլ)** է կոչվում հարթության կետերից կազմված այն երկրաչափական պատկերը, որի յուրաքանչյուր կետի համար՝ տրված կետից (ֆոկուսից) հեռավորության հարաբերությունը տրված ուղղից (դիրեկտրիսից) հեռավորության վրա հանդիսանում է $\boldsymbol{\varepsilon < 1}$ ($\boldsymbol{\varepsilon > 1}$) հաստատուն մեծություն:

Այս սահմանումից հետո բնական է դառնում հետևյալ հարցադրումը. ի՞նչ է իրենից ներկայացնում հարթության կետերից կազմված այն բազմությունը, որի յուրաքանչյուր կետի համար՝ տրված կետի հեռավորության հարաբերությունը տրված ուղղից հեռավորության վրա հավասար է մեկի ($\boldsymbol{\varepsilon = 1}$ կամ $\boldsymbol{r = d}$): Պարզվում է, որ այդ բազմությունը հանդիսանում է երկրորդ կարգի կոր, որը կոչվում է **պարաբոլ**:

§ 9.4. ՊԱՐԱԲՈԼ

Դիցուք հարթության վրա տրված են $\boldsymbol{F}$ կետը և $\boldsymbol{v}$ ուղիղը, որը չի անցնում այդ կետով:

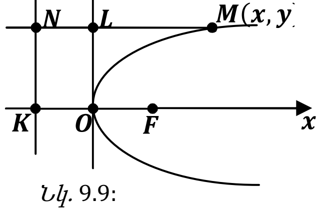
9.9. *Սահմանում:* **Պարաբոլ** է կոչվում հարթության կետերից կազմված այն երկրաչափական պատկերը, որի յուրաքանչյուր կետ հավասարաչափ է հեռացված $\boldsymbol{F}$ կետից և $\boldsymbol{v}$ ուղղից: $\boldsymbol{F}$ կետը կոչվում է պարաբոլի ֆոկուս, իսկ $\boldsymbol{v}$ ուղիղը՝ պարաբոլի դիրեկտրիս:

Պարաբոլը, ինչպես էլիպսը և հիպերբոլը, որոշվում է 9.7. թեորեմով $\boldsymbol{\varepsilon = 1}$ դեպքում, այսինքն

$$\boldsymbol{r = d}, \tag{9.12}$$

որտեղ $\boldsymbol{r}$ և $\boldsymbol{d}$ համապատասխանաբար հանդիսանում են պարաբոլի կամայական կետի հեռավորությունները ֆոկուսից և դիրեկտրիսից:

Կազմենք պարաբոլի հավասարումը: $\boldsymbol{Oxy}$ ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատային համակարգն ընտրենք հետևյալ կերպ (նկար 9.9):



Նկ. 9.9:

$\boldsymbol{F}$ կետից $\boldsymbol{v}$ դիրեկտրիսին տանենք ուղղահայաց ուղիղ, որը $\boldsymbol{v}$ ուղիղը հատում է $\boldsymbol{K}$ կետում: Որպես $\boldsymbol{Ox}$ առանցք վերցնենք այդ ուղղահայացը, որի դրական ուղղությունը համընկնում է $\overline{\boldsymbol{KF}}$ հատվածի ուղղության հետ, իսկ կոորդինատների սկզբնակետը համարենք $\boldsymbol{KF}$ հատվածի միջնակետը: Եթե $\boldsymbol{F}$ կետի հեռավորությունը դիրեկտրիսից հավասար է $\boldsymbol{p}$, ապա $\boldsymbol{F}\left(\frac{p}{2}, \boldsymbol{0}\right)$ և դիրեկտրիսի հավասարումը կունենա հետևյալ տեսքը.

$$\boldsymbol{x} = -\frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{2}}:$$

Դիցուք $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ հանդիսանում է պարաբոլի կամայական կետ: Այդ կետից տանենք $\boldsymbol{Ox}$ առանցքին զուգահեռ ուղիղ, որը $\boldsymbol{Oy}$ առանցքը և $\boldsymbol{v}$ դիրեկտրիսը համապատասխանաբար հատում է $\boldsymbol{L}$ և $\boldsymbol{N}$ կետերում: Ունենք, որ

$$\boldsymbol{r} = \sqrt{\left(\boldsymbol{x} - \frac{p}{2}\right)^2 + \boldsymbol{y}^2}, \quad \boldsymbol{d} = \boldsymbol{NM} = \boldsymbol{NL} + \boldsymbol{LM} = \frac{p}{2} + \boldsymbol{x}:$$

Այդ արժեքները տեղադրելով (9.12) հավասարման մեջ՝ ստանում ենք.

$$\sqrt{\left(\boldsymbol{x} - \frac{p}{2}\right)^2 + \boldsymbol{y}^2} = \frac{p}{2} + \boldsymbol{x} \tag{9.13}$$

հավասարումը, որը հանդիսանում է պարաբոլի հավասարումը: Նրա երկու մասն էլ բարձրացնենք քառակուսի.

$$\left(\boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{2}}\right)^2 + \boldsymbol{y}^2 = \left(\boldsymbol{x} + \frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{2}}\right)^2:$$

Այստեղից էլ ստանում ենք

$$\boldsymbol{y}^2 = \boldsymbol{2px} \tag{9.14}$$

հավասարումը: Հեշտ է համոզվել, որ (9.13) և (9.14) հավասարումները համարժեք են: Վերջին հավասարումը կոչվում է **պարաբոլի կանոնական հավասարում**: Այն երկրորդ աստիճանի հավասարում է, ուստի պարաբոլը երկրորդ կարգի կոր է:

Պարաբոլի կանոնական հավասարումից պարզ է դառնում, որ $\boldsymbol{x}$ փոփոխականը կարող է ընդունել միայն ոչ բացասական արժեքներ: Հետևաբար, նկարի վրա ողջ պարաբոլը գտնվում է $\boldsymbol{Oy}$ առանցքի մի կողմում (աջից, եթե $\boldsymbol{Ox}$ առանցքի դրական ուղղությունը շարժվում է ձախից դեպի աջ): Քանի որ (9.14) հավասարումը $\boldsymbol{y}$ կոորդինատը պարունակում է միայն զույգ աստիճանում, ապա պարաբոլը սիմետրիկ է $\boldsymbol{Ox}$ առանցքի նկատմամբ, և նրա ձևի պարզաբանման համար բավական է դիտարկել միայն առաջին կորդինատային քառորդը: Այդ քառորդում $\boldsymbol{y} = \sqrt{\boldsymbol{2px}}$, և երբ $\boldsymbol{x}$ փոփոխականը անսահմանորեն աճում է, ապա նրան զուգահեռ անսահմանորեն աճում է նաև y փոփոխականը: Պարաբոլը սկիզբ է առնում կոորդինատների սկզբնակետից և անսահմանորեն գնում է աջ և վերև: Չորրորդ քառորդում պարաբոլը կառուցվում է ըստ սիմետրիայի՝ առաջին քառորդի հետ:

Պարաբոլի սիմետրիայի առանցքը պարզապես կոչվում է **պարաբոլի առանցք**: Պարաբոլի և նրա առանցքի հատման կետը կոչվում է **պարաբոլի գագաթ**:

§ 9.5. ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ԿՈՐԵՐ

Դիտարկենք հետևյալ

$$\boldsymbol{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0}, \tag{9.15}$$

հավասարումը, որտեղ $\boldsymbol{A, B, C}$ գործակիցներից առնվազն մեկն ոչ զրոյական է: $\boldsymbol{\Pi}$ հարթության վրա ընտրենք $\boldsymbol{Oxy}$ ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատային համակարգը:

9.10. *Սահմանում:* $\boldsymbol{\Pi}$ հարթության պատկերները, որոնք կարող են տրվել (9.15) տեսքի հավասարումներով, կոչվում են **երկրորդ կարգի կորեր**:

Ինչպես նշել ենք վերևում, այդպիսի կորեր հանդիսանում են էլիպսը, հիպերբոլը և պարաբոլը: Օրինակ, եթե (9.15) հավասարման մեջ վերցնենք $\boldsymbol{A = 1/a^2}$, $\boldsymbol{B = 0}$, $\boldsymbol{C = 1/b^2}$, $\boldsymbol{D = E = 0}$, $\boldsymbol{F = -1}$, ապա կստանանք էլիպսի կանոնական հավասարումը: Գտնենք երկրորդ կարգի բոլոր կորերը:

$\boldsymbol{Oxy}$ կոորդինատային համակարգի հետ մեկտեղ, որը կանվանենք հին համակարգ, կդիտարկենք ևս մեկ (նոր) $\boldsymbol{Ox_1y_1}$ ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատային համակարգը: Հին $\boldsymbol{x, y}$ կոորդինատները նոր $\boldsymbol{x_1, y_1}$ կոորդինատներով արտահայտվում են

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha} \\ \boldsymbol{y = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha} \end{cases} \tag{9.16}$$

բանաձևերով (տես. § 5.4.): Այդ արտահայտությունները տեղադրելով (9.15) հավասարման ձախ մասում $\boldsymbol{x}$ և $\boldsymbol{y}$ փոփոխականների փոխարեն՝ ստանում ենք

$$\boldsymbol{A_1x_1^2 + 2B_1x_1y_1 + C_1y_1^2 + 2D_1x_1 + 2E_1y_1 + F = 0} \tag{9.17}$$

տեսքի հավասարումը: Այս հավասարումը $\boldsymbol{Ox_1y_1}$ կոորդինատային համակարգում որոշում է նույն պատկերը, ինչ (9.15) հավասարումը $\boldsymbol{Oxy}$ կոորդինատային համակարգում:

Այժմ փորձենք կոորդինատների նոր համակարգի հարմար ընտրման հաշվին պարզեցնել (9.15) հավասարումը: Դիցուք այդ հավասարման մեջ $\boldsymbol{B \neq 0}$: Ցույց տանք, որ կոորդինատների (9.16) ձևափոխությունը կարելի է այնպես ընտրել, որ (9.17) հավասարման մեջ տեղի ունենա $\boldsymbol{B_1 = 0}$ հավասարությունը:

Իսկապես, քանի որ

$$\boldsymbol{A_1 = A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha - C\sin^2\alpha},$$

$$\boldsymbol{B_1 = (C-A)\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)},$$

$$\boldsymbol{C_1 = A\sin^2\alpha - 22B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha},$$

ապա $\boldsymbol{B_1 = 0}$ պայմանը կգրվի

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}(C-A)\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha = 0}$$

կամ

$$\boldsymbol{\cot 2\alpha = \frac{(A-C)}{2B}} \tag{9.18}$$

տեսքով: Բավական է կոորդինատային առանցքները պտտել $\boldsymbol{\alpha}$ անկյունով, որը բավարարում է (9.18) պայմանին, և (9.17) հավասարման մեջ կբացակայի կոորդինատների արտադրյալը:

Հետևաբար դիտարկենք

$$\boldsymbol{A_1x_1^2 + C_1y_1^2 + 2D_1x_1 + 2E_1y_1 + F = 0} \tag{9.19}$$

հավասարումը:

Դիցուք $\boldsymbol{A_1 \neq 0}$ և $\boldsymbol{C_1 \neq 0}$: Ձևափոխենք (9.19) հավասարումը.

$$\boldsymbol{A_1\left(x_1^2 + 2\frac{D_1}{A_1}x_1\right) + C_1\left(y_1^2 + 2\frac{E_1}{C_1}y_1\right) + F = 0} \quad \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{A_1\left(x_1 + \frac{D_1}{A_1}\right)^2 + C_1\left(y_1 + \frac{E_1}{C_1}\right)^2 + F - \frac{D_1^2}{A_1} - \frac{E_1^2}{C_1} = 0}: \tag{9.20}$$

Նշանակենք $\boldsymbol{F_1 \equiv -F + \frac{D_1^2}{A_1} + \frac{E_1^2}{C_1}}$ և կատարենք կոորդինատային առանցքների զուգահեռ տեղաշարժ համաձայն

$$\boldsymbol{X = x_1 + \frac{D_1}{A_1}} \text{ և } \boldsymbol{Y = y_1 + \frac{E_1}{C_1}}$$

բանաձևերի: Այդ դեպքում ($\boldsymbol{X, Y}$ կոորդինատներով) հավասարումը կընդունի

$$\boldsymbol{A_1 X^2 + C_1 Y^2 = F_1} \tag{9.21}$$

տեսքը:

Դիցուք $\boldsymbol{A_1} > 0$, $\boldsymbol{C_1} > 0$, $\boldsymbol{F_1} > 0$: Այդ դեպքում, կատարելով $\boldsymbol{F_1/A_1 = a^2}$ և $\boldsymbol{F_1/C_1 = b^2}$ նշանակումները, (9.21) հավասարումը կարելի է գրել

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

տեսքով: Ինչպես գիտենք այն էլիպսի կանոնական հավասարումն է:

Եթե (9.21) հավասարման մեջ $\boldsymbol{A_1} > 0$, $\boldsymbol{C_1} > 0$, $\boldsymbol{F_1} < 0$, ապա, նշանակելով $\boldsymbol{-F_1/A_1 = a^2}$ և $\boldsymbol{-F_1/C_1 = b^2}$, կզանք

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1}$$

տեսքի հավասարմանը: Այն չունի լուծում, հետևաբար, (9.15) հավասարումը տվյալ դեպքում որոշում է դատարկ բազմություն:

Դիցուք (9.21) հավասարման մեջ $\boldsymbol{A_1} > 0$, $\boldsymbol{C_1} < 0$, $\boldsymbol{F_1} > 0$: Կատարելով $\boldsymbol{F_1/A_1 = a^2}$ և $\boldsymbol{-F_1/C_1 = b^2}$ նշանակումները՝ ստանում ենք

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

տեսքի հավասարումը, որն որոշում է հիպերբոլ:

Հետևյալ

$$\boldsymbol{A_1} < 0, \boldsymbol{C_1} < 0, \pm\boldsymbol{F_1} > 0;$$

$$\boldsymbol{A_1} < 0, \boldsymbol{C_1} > 0, \pm\boldsymbol{F_1} > 0;$$

$$\boldsymbol{A_1} < 0, \boldsymbol{C_1} < 0, \quad \boldsymbol{F_1} < 0$$

դեպքերը նոր արդյունքներ չեն տալիս:

Այժմ ենթադրենք, որ (9.21) հավասարման մեջ $\boldsymbol{A_1} > 0$, $\boldsymbol{C_1} < 0$, $\boldsymbol{F_1 = 0}$: Այդ դեպքում այդ հավասարումը կարելի է բերել

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

տեսքի: Վերջինս որոշում է

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$$

հավասարումներով տրվող ուղիղների զույգը, որոնք հատվում են կոորդինատների սկզբնակետում:

Իսկ եթե (9.21) հավասարման մեջ $A_1 > 0$, $C_1 > 0$, $F_1 = 0$, ապա այն ընդունում է

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

տեսքը, որին բավարարում են միայն համակարգի սկզբնակետի կոորդինատները: $A_1 < 0$, $C_1 < 0$, $F_1 = 0$ դեպքում ստանում ենք նույն արդյունքը:

Վերադառնանք (9.19) հավասարմանը և ենթադրենք, որ $A_1 \neq 0$, $C_1 = 0$, $E_1 \neq 0$: Այդ հավասարումը ներկայացնենք

$$A_1\left(x_1^2 + 2\frac{D_1}{A_1}x_1\right) + 2E_1\left(y_1 + \frac{F}{2E_1}\right) = 0$$

տեսքով, իսկ այնուհետև

$$A_1\left(x_1 + \frac{D_1}{A_1}\right)^2 + 2E_1\left(y_1 + \frac{F}{2E_1} - \frac{D_1^2}{2A_1E_1}\right) = 0$$

տեսքով: Կատարենք կոորդինատային առանցքների զուգահեռ տեղաշարժ համաձայն

$$X = x_1 + \frac{D_1}{A_1}, \quad Y = y_1 + \frac{F}{2E_1} - \frac{D_1^2}{2A_1E_1}$$

բանաձևերի: Արդյունքում կստանանք

$$A_1X^2 + 2E_1Y = 0 \tag{9.22}$$

տեսքի հավասարումը: Եթե $A_1E_1 < 0$, ապա, համարելով $p = -E_1/A_1$, ստանում ենք $X^2 = 2pY$, այսինքն պարաբոլի հավասարումը: Իսկ եթե $A_1E_1 > 0$, ապա (9.22) հավասարումը կընդունի $X^2 = -2pY$ տեսքը, որը նույնպես որոշում է պարաբոլ:

Այժմ ենթադրենք, որ (9.19) հավասարման մեջ $\boldsymbol{A_1 \neq 0}$, $\boldsymbol{C_1 = 0}$, $\boldsymbol{E_1 = 0}$: Այդ դեպքում այն կարելի է արտագրել

$$\boldsymbol{A_1\left(x_1 + \frac{D_1}{A_1}\right)^2 + F - \frac{D_1^2}{A_1} = 0}$$

տեսքով, և, կատարելով կոորդինատային առանցքների զուգահեռ տեղաշարժ ըստ

$$\boldsymbol{X = x_1 + \tfrac{D_1}{A_1}, \quad Y = y_1}$$

բանաձևերի, այն կբերենք

$$\boldsymbol{X^2 + F_1 = 0} \tag{9.23}$$

տեսքի, որտեղ $\boldsymbol{F_1 = F/A_1 - D_1^2/A_1^2}$:

Եթե $\boldsymbol{F_1} < 0$, ապա (9.23) հավասարումն ընդունում է

$$\boldsymbol{X^2 - a^2 = 0}$$

տեսքը և որոշում է մի պատկեր, որը կազմված է զուգահեռ ուղիղների զույգից: Իսկ եթե (9.23) հավասարման մեջ $\boldsymbol{F_1} > 0$, ապա այդ հավասարմանը չեն բավարարում հարթության ոչ մի կետի կոորդինատները, ուստի ստանում ենք դատարկ բազմություն: Վերջապես, եթե $\boldsymbol{F_1 = 0}$, ապա հավասարումն ունի $\boldsymbol{X^2 = 0}$ տեսքը, որն որոշում է $\boldsymbol{Oy}$ առանցքը:

Մնաց դիտարկել այն դեպքը, երբ (9.19) հավասարման մեջ $\boldsymbol{A_1 = C_1 = 0}$: Սակայն այս տարբերակը հնարավոր չէ: Իսկապես , ենթադրենք, որ (9.17) հավասարման մեջ $\boldsymbol{A_1 = B_1 = C_1 = 0}$, այսինքն

$$\boldsymbol{\begin{cases} A\cos^2\alpha + B\sin 2\alpha + C\sin^2\alpha = 0 \\ -\frac{1}{2}A\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha + \frac{1}{2}C\sin 2\alpha = 0 \\ A\sin^2\alpha - B\sin 2\alpha + C\cos^2\alpha = 0 \end{cases}} : \tag{9.24}$$

Դիտարկենք գծային հավասարումների (9.24) համակարգը $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ անհայտների նկատմամբ: Հեշտ է համոզվել, որ այդ համակարգի որոշիչը հավասար է մեկի: Ուստի համակարգն ունի միակ $\boldsymbol{A = B = C = 0}$ լուծումը, որը հնարավոր չէ:

Ստացված արդյունքները ձևակերպենք թեորեմի տեսքով:

9.11. *Թեորեմ:* Յուրաքանչյուր երկրորդ կարգի կոր հանդիսանում է էլիպս, հիպերբոլ, հատվող ուղիղների զույգ, զուգահեռ ուղիղների զույգ, ուղիղ, կետ կամ էլ դատարկ բազմություն:

§ 9.6. ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹՆԵՐ

Դիտարկենք երկրորդ աստիճանի

$$\begin{gathered}\boldsymbol{Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz +} \\ \boldsymbol{+2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0}\end{gathered} \qquad (9.25)$$

հավասարումը $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ փոփոխականների նկատմամբ: Ենթադրվում է, որ $\boldsymbol{A, B, C, D, E, F}$ գործակիցներից առնվազն մեկը զրոյական չէ: Ընտրենք որևէ $\boldsymbol{Oxyz}$ ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատային համակարգ:

9.12. *Սահմանում:* **Երկրորդ կարգի մակերևույթ** կոչվում է այն պատկերը, որը կարող է տրվել (9.25) տեսքի հավասարման միջոցով:

9.13. *Թեորեմ:* Դիցուք $\boldsymbol{\Phi}$ հանդիսանում է երկրորդ կարգի մակերևույթ, $\boldsymbol{\Pi}$՝ հարթություն և $\boldsymbol{\Phi_1 = \Phi \cap \Pi}$: Այդ դեպքում հնարավոր են միայն հետևյալ տարբերակները.

1) $\boldsymbol{\Phi_1 \subset \Pi}$;
2) $\boldsymbol{\Phi_1}$ հանդիսանում է երկրորդ կարգի կոր ;
3) $\boldsymbol{\Phi_1}$ հանդիսանում է ուղիղ ;
4) $\boldsymbol{\Phi_1 = \emptyset}$:

Ապացույց: Դիցուք $\boldsymbol{\Phi}$ պատկերը $\boldsymbol{Oxyz}$ ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում տրվում է (9.25) տեսքի հավասարման միջոցով: Ընտրենք նոր $\boldsymbol{O_1x_1y_1z_1}$ ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգ այնպես, որ $\boldsymbol{O_1x_1y_1}$ կոորդինատային հարթությունը համընկնի $\boldsymbol{\Pi}$ հարթության հետ: Նոր կոորդինատային համակարգում $\boldsymbol{\Pi}$ հարթությունը տրվում է

$$\boldsymbol{z_1 = 0} \qquad (9.26)$$

հավասարումով: Որպեսզի ստանանք $\boldsymbol{\Phi}$ պատկերի հավասարումը $\boldsymbol{O_1x_1y_1z_1}$ կոորդինատային համակարգում, (9.25) հավասարման ձախ մասում տեղադրենք $\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y}$,$\boldsymbol{z}$ կոորդինատների ներկայացումները նոր $\boldsymbol{x_1, y_1, z_1}$ կոորդինատներով (տես. § 5.4.)։ Այդ տեղադրման արդյունքում կունենանք

$$\boldsymbol{A_1x_1^2 + B_1y_1^2 + C_1z_1^2 + 2D_1x_1y_1 + 2E_1x_1z_1 + 2F_1y_1z_1 +}$$
$$\boldsymbol{+2G_1x_1 + 2H_1y_1 + 2K_1z_1 + L_1 = 0} \qquad (9.27)$$

հավասարումը։ Իսկ որպեսզի ստանանք $\boldsymbol{\Phi_1 = \Phi \cap \Pi}$ պատկերի հավասարումը $\boldsymbol{O_1x_1y_1}$ կոորդինատների համակարգում, (9.26) հավասարումը տեղադրենք (9.27) հավասարման մեջ.

$$\boldsymbol{A_1x_1^2 + B_1y_1^2 + 2D_1x_1y_1 + 2G_1x_1 + 2H_1y_1 + L_1 = 0}\text{։} \qquad (9.28)$$

Եթե $\boldsymbol{A_1 = B_1 = D_1 = G_1 = H_1 = L_1 = 0}$, ապա $\boldsymbol{\Phi_1 = \Pi}$։ Եթե $\boldsymbol{A_1 = B_1 = D_1 = G_1 = H_1 = 0}$ և $\boldsymbol{L_1 \neq 0}$, ապա (9.28) հավասարումն որոշում է դատարկ բազմություն։ Եթե $\boldsymbol{A_1 = B_1 = D_1 = 0}$, սակայն $\boldsymbol{G_1}$ և $\boldsymbol{H_1}$ թվերից գոնե մեկը զրոյական չէ, ապա (9.28) հավասարումն որոշում է ուղիղ։ Վերջապես, եթե $\boldsymbol{A_1, B_1, D_1}$ թվերից առնվազն մեկն ոչ զրոյական է, ապա (9.28) հավասարումն որոշում է երկրորդ կարգի կոր։ ■

9.14. *Սահմանում:* **Էլիպսոիդ** կոչվում է այն մակերևույթը, որն $\boldsymbol{Oxyz}$ ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում տրվում է

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

հավասարումով, որտեղ $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ թվերը կամայական դրական թվեր են։

9.15. *Սահմանում:* **Երկրորդ կարգի կոն** կոչվում է այն մակերևույթը, որն $\boldsymbol{Oxyz}$ ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում տըրվում է

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0}$$

հավասարումով, որտեղ $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ թվերը կամայական դրական թվեր են։

9.16. *Սահմանում:* **Միախոռոչ հիպերբոլոիդ** կոչվում է այն մակերևույթը, որն $\boldsymbol{Oxyz}$ ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում տրվում է

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

հավասարումով, որտեղ a,b,c թվերը կամայական դրական թվեր են:

9.17. *Սահմանում:* **Երկխոռոչ հիպերբոլոիդ** կոչվում է այն մակերևույթը, որն $Oxyz$ ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում տրվում է

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

հավասարումով, որտեղ a,b,c թվերը կամայական դրական թվեր են:

9.18. *Սահմանում:* **Էլիպտական պարաբոլոիդ** կոչվում է այն մակերևույթը, որն $Oxyz$ ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում տրվում է

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$$

հավասարումով, որտեղ p,q թվերը կամայական դրական թվեր են:

9.19. *Սահմանում:* **Հիպերբոլական պարաբոլոիդ** կոչվում է այն մակերևույթը, որն $Oxyz$ ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում տրվում է

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$$

հավասարումով, որտեղ p,q թվերը կամայական դրական թվեր են:

9.20. *Սահմանում:* Զույգ առ զույգ իրար զուգահեռ ուղիղներից կազմված բազմությունը կոչվում է **գլանային մակերևույթ**, իսկ այդ ուղիղները կոչվում են **գլանային մակերևույթի ծնիչներ**:

Դիտարկենք երկրորդ աստիճանի

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

հավասարումը, որը չի պարունակում z ընթացիկ կոորդինատը: Այդ հավասարման ձախ մասը նշանակենք $G(x,y)$: Հետևաբար

$$G(x,y)=0: \qquad (9.29)$$

Այժմ ապացուցենք, որ (9.29) տեսքի հավասարումը $Oxyz$ ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում որոշում է գլանային մակերևույթ, որի ծնիչները զուգահեռ են Oz առանցքին:

$\boldsymbol{S}$ տառով նշանակենք այն մակերևույթը, որն որոշվում է $\boldsymbol{G(x,y)=0}$ տեսքի որևէ հավասարումով: Դիցուք $\boldsymbol{M_0(x_0,y_0,z_0)}$ հանդիսանում է $\boldsymbol{S}$ մակերևույթին պատկանող կամայական կետ: Այդ դեպքում $\boldsymbol{x_0,y_0,z_0}$ թվերը բավարարում են $\boldsymbol{G(x,y)=0}$ հավասարմանը: Մյուս կողմից այդ հավասարմանը բավարարում են նաև $\boldsymbol{x_0,y_0,z}$ թվերը, որտեղ $\boldsymbol{z}$՝ կամայական թիվ է, քանի որ $\boldsymbol{G(x,y)}$ արտահայտությունը կախված չէ $\boldsymbol{z}$ փոփոխականից: Հետևաբար ցանկացած $\boldsymbol{z}$ համար $\boldsymbol{M(x_0,y_0,z)}$ կետը պատկանում է $\boldsymbol{S}$ մակերևույթին: Իսկ դա նշանակում է, որ $\boldsymbol{S}$ մակերևույթում ամբողջությամբ ընկած է այն ուղիղը, որն անցնում է $\boldsymbol{M_0}$ կետով և զուգահեռ է $\boldsymbol{Oz}$ առանցքին: Այսպիսով, $\boldsymbol{S}$ մակերևույթը կազմված է $\boldsymbol{Oz}$ առանցքին զուգահեռ ուղիղներից, այսինքն՝ այն հանդիսանում է գլանաձև մակերևույթ:

9.21. *Սահմանում:* **Էլիպտական գլան** կոչվում է այն մակերևույթը, որն $\boldsymbol{Oxyz}$ ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում տրվում է

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

հավասարումով:

9.22. *Սահմանում:* **Հիպերբոլական գլան** կոչվում է այն մակերեվույթը, որն $\boldsymbol{Oxyz}$ ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում տրվում է

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$

հավասարումով:

9.23. *Սահմանում:* **Պարաբոլական գլան** կոչվում է այն մակերևույթը, որն $\boldsymbol{Oxyz}$ ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում տրվում է

$$\boldsymbol{x^2=2py}$$

հավասարումով:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. **Курош А. Г.**, *Курс высшей алгебры,* 11-ое изд., стер., М., Наука, 1975, 432 с.
2. **Виноградов И. М.**, *Основы теории чисел,* Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003, 176 с.
3. **Кудреватов Г. А.**, *Сборник задач по теории чисел,* М., «Просвещение», 1970, 128 с.
4. **Прасолов В. В.**, *Многочлены,* 3-е изд, испр., М., МЦНМО, 2003, 336 с: ил. .
5. **Лидл Р., Нидеррайтер Г.**, *Конечные поля,* В 2-х томах, Том 1, Пер. с англ., М., Мир, 1988, 430 с.
6. **Гантмахер Ф. Р.**, *Теория матриц,* М., Наука, 1967, 576 с.
7. **Александров П. С.**, *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры,* М., Наука, 1979, 512 с.
8. **Ефимов Н. В.**, *Краткий курс аналитической геометрии,* Учебн. пособие. 13-ое стереот. изд., М., ФИЗМАТЛИТ, 2006, 240 с.
9. **Милованов М. В., Тышкевич Р. И., Феденко А. С.**, *Алгебра и аналитическая геометрия* – Часть 1, Мн., Амалфея, 2001, 400 с.
10. **Цубербиллер О. Н.**, *Задачи и упражнения по аналитической геометрии,* 31-е изд., стер. - СПб.: Издательство «Лань», 2003, 336 с, ил.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՎԱՐՈՒԺԱՆ ՊԱՐՏԻԶՈՒՆՈՒ ԳԱԲՐԻԵԼՅԱՆ

ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎ ԵՎ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ

ՈՒՍՈՒՄՆԱՄԵԹՈԴԱԿԱՆ ՁԵՌՆԱՐԿ

Համակարգչային ձևավորող՝ Վ.Պ. ԳԱԲՐԻԵԼՅԱՆ

Ստորագրված է տպագրության 25.07.2011 թ.:
Չափսը՝ $60x84^{1}/_{16}$: Թուղթը՝ օֆսեթ: Հրատ. 9.3 մամուլ,
տպագր. 11.75 մամուլ= 10.9 պայմ. մամուլի:
Տպաքանակ՝ 150: Պատվեր՝ 151:

ԵՊՀ հրատարակչություն, Երևան, Ալ. Մանուկյան 1:

Երևանի պետական համալսարանի
օպերատիվ պոլիգրաֆիայի ստորաբաժանում
Երևան, Ալ. Մանուկյան 1: