ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆԻ ՃԱՐՏԱՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՇԻՆԱՐԱՐՈՒԹՅԱՆ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ռ.Ա. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ

ԲԱՐՁՐԱԳՈՒՅՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

III ՄԱՍ

ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ԵՎ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՇԻՎ ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ ՕՊԵՐԱՑԻՈՆ ՀԱՇԻՎ

1921

ԵՐԵՎԱՆ 2010

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆԻ ՃԱՐՏԱՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՇԻՆԱՐԱՐՈՒԹՅԱՆ
ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ռ. Ա. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ

ԲԱՐՁՐԱԳՈՒՅՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

III մաս

ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ԵՎ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՇԻՎ
ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ
ՕՊԵՐԱՑԻՈՆ ՀԱՇԻՎ

ԵՐԵՎԱՆ 2010

ՀՏԴ 51 Տպագրվել է Երևանի ճարտարապետության և շինարարության
ԳՄԴ 22.11 պետական համալսարանի գիտական խորհրդի որոշմամբ:
Բ 242

Բ 242 Բարձրագույն մաթեմատիկա: Ուսումնական ձեռնարկ.-Մաս 3.-Եր.: Երևանի ճարտարապետության և շինարարության պետական համալսարան, 2010թ. 220 էջ:

Գրախոսներ՝ ՀՀ ԳԱԱ ակադեմիկոս Վ. Մ. Զաքարյան
ֆ.-մ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Ա. Խ. Խաչատրյան

Տեխնիկական բուհերի ուսանողների համար նախատեսված ուսումնական ձեռնարկը ներառում է մաթեմատիկայի այն բաժինների համառոտ շարադրանքը, որոնք վերջին տարիներին ընդգրկվել են ուսումնական ծրագրերում:

Ձեռնարկը հագեցված է մատուցվող տեսական նյութը լուսաբանող լուծված խնդիրներով: Այն կարող է օգտակար լինել նաև ինժեներներին, ասպիրանտներին ու դասախոսներին:

ԳՄԴ 22.11

ISBN 978-99941-77-35-6

© Երևանի ճարտարապետության և շինարարության պետական համալսարան

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ԳԼՈՒԽ XI

ԹՎԱՅԻՆ ԵՎ ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼ ՇԱՐՔԵՐ

§58.Թվային շարք, նրա զուգամիտությունը և գումարը: Թվային շարքերի պարզագույն հատկությունները: Շարքի զուգամիտության անհրաժեշտ պայմանը: Դրական անդամներով շարքերի համեմատման հայտանիշները:.....6

§59.Դրական անդամներով շարքերի զուգամիտության Դալամբերի, Կոշիի և Կոշիի ինտեգրալային հայտանիշները:.....16

§60. Հերթագայող նշաններ ունեցող անդամներով շարքեր: Լեյբնիցի հայտանիշը: Նշանափոխ շարքեր: Նշանափոխ շարքի զուգամիտության հայտանիշը: Բացարձակ և պայմանական զուգամիտություն:.....23

§61.Ֆունկցիոնալ շարքեր: Հավասարաչափ զուգամիտություն: Ֆունկցիոնալ շարքի զուգամիտության տիրույթը: Կանոնավոր զուգամիտող ֆունկցիոնալ շարքեր: Թեորեմներ՝ ֆունկցիոնալ շարքի գումարի անընդհատության, անդամ առ անդամ ինտեգրման և ածանցման մասին:.....28

§62.Աստիճանային շարքեր: Աբելի թեորեմը: Աստիճանային շարքի զուգամիտության շառավիղը: Աստիճանային շարքերի հատկությունները 34

§63.Ֆունկցիայի վերլուծումը աստիճանային շարքի: Թեյլորի շարք: e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^\alpha$, $\ln(1+x)$ ֆունկցիաների վերլուծումը Մակլորենի շարքի:.....44

§64.Ֆուրյեի շարք: Դիրիխլեի թեորեմը: Ֆուրյեի շարքը զույգ և կենտ ֆունկցիաների համար: 52

§65. $2l$ պարբերական ֆունկցիաների վերլուծումը Ֆուրյեի շարքի: Ոչ պարբերական ֆունկցիաների վերլուծումը Ֆուրյեի շարքի:.....60

ԳԼՈՒԽ XII

ԲԱԶՄԱՊԱՏԻԿ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

§66.Խնդիր, որը հանգեցնում է կրկնակի ինտեգրալի հասկացությանը: Կրկնակի ինտեգրալի սահմանումը և հիմնական հատկությունները:.....64

§67.Կրկնակի ինտեգրալի հաշվումն ուղղանկյուն դեկարտյան և բևեռային կոորդինատներով: Մակերևույթի մակերեսի հաշվումը կրկնակի ինտեգրալի միջոցով:.....69

§68.Խնդիր, որը հանգեցնում է եռակի ինտեգրալի հասկացությանը: Եռակի ինտեգրալի սահմանումը և հիմնական հատկությունները: Եռակի ինտեգրալի հաշվումն ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատներով:.....80

ԳԼՈՒԽ XIII

ԿՈՐԱԳԻԾ ԵՎ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԱՅԻՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

§69. Խնդիր, որը հանգեցնում է կորագիծ ինտեգրալի հասկացությանը: Առաջին սեռի կորագիծ ինտեգրալի սահմանումը, հատկություններն ու հաշվումը:.....87

§70. Խնդիր աշխատանքի մասին: Երկրորդ սեռի կորագիծ ինտեգրալի սահմանումն ու հաշվումը:.....92

§71.Գրինի բանաձևը: Երկրորդ սեռի կորագիծ ինտեգրալի արժեքն ինտեգրման կորի ձևից անկախ լինելու անհրաժեշտ և բավարար պայմանները:.....98

§72.Առաջին սեռի մակերևույթային ինտեգրալի սահմանումը և հաշվման բանաձևը:.....104

§73.Միակողմանի և երկկողմանի մակերևույթներ: Երկրորդ սեռի մակերևույթային ինտեգրալի սահմանումը և հաշվման բանաձևը:.....108

ԳԼՈՒԽ XIV

ԴԱՇՏԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

§74.Սկալյար դաշտ: Ածանցյալ տրված ուղղությամբ: Սկալյար դաշտի գրադիենտը:.....113

§75.Վեկտորական դաշտ: Վեկտորական դաշտի հոսքը և նրա ֆիզիկական իմաստը հոսող հեղուկի արագությունների դաշտում: Գաուս-Օստրոգրադսկու բանաձևը:.....121

§76.Վեկտորական դաշտի ցրումը (դիվերգենցիան): Խողովակաձև դաշտ: Ստոքսի բանաձևը: Վեկտորական դաշտի մրրիկը և շրջապտույտը:.....127

ԳԼՈՒԽ XV

ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

§77.Միացությունների տեսության տարրերը. կարգավորություններ, տեղափոխություններ, զուգորդություններ:.....135

§78.Պատահույթներ և նրանց տեսակները: Հավանականության դասական սահմանումը: Պատահույթի հաճախությունը: Հավանականության վիճակագրական սահմանումը:.....141

§79.Հավանականությունների գումարման թեորեմը: Պայմանական հավանականություն: Անկախ և կախյալ պատահույթներ: Հավանականությունների բազմապատկման թեորեմը: Երկրաչափական հավանականություն:.....146

§80.Հավանականության աքսիոմատիկ սահմանումը: Լրիվ հավանականությունների բանաձևը: Բայեսի բանաձևերը:.....155

§81.Անկախ փորձերի խնդիրը: Լապլասի լոկալ և ինտեգրալային թեորեմները: Պուասսոնի թեորեմը:.....159

§82.Պատահական մեծություններ: Դիսկրետ պատահական մեծության բաշխման օրենքը: Հավանականությունների երկանդամային (բինոմական) բաշխումը: Հավանականությունների Պուասսոնի բաշխումը: Երկչափ պատահական մեծություններ:.....165

§83.Դիսկրետ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը, դիսպերսիան, միջին քառակուսային շեղումը և նրանց հատկությունները: .172

§84.Պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման ֆունկցիան, նրա հատկություններն ու գրաֆիկը: Անընդհատ պատահական մեծության բաշխման խտությունը, մաթեմատիկական սպասումը, դիսպերսիան և միջին քառակուսային շեղումը:.....181

§85.Հավանականությունների հավասարաչափ, նորմալ և ցուցչային բաշխումները:.....191

§86.Չեբիշևի անհավասարությունը և մեծ թվերի օրենքը: Բեռնուլլիի մեծ թվերի օրենքը:.....200

ԳԼՈՒԽ XVI

ՕՊԵՐԱՑԻՈՆ ՀԱՇԻՎ

§87.Պատկեր և սկզբնական ֆունկցիա: Թեորեմներ պատկերի գոյության և սկզբնական ֆունկցիայի միակության մասին: $\eta(t)$, $e^{\alpha t}$, $\sin t$, $\cos t$ ֆունկցիաների պատկերները: Նմանության թեորեմը: $\sin \alpha t$ և $\cos \alpha t$ ֆունկցիների պատկերները:.....205

§88.Պատկերի տեղաշարժման թեորեմը: $e^{-\alpha t}\sin \beta t$, $e^{-\alpha t}\cos \beta t$ ֆունկցիաների պատկերները: Սկզբնական ֆունկցիայի և պատկերի ածանցումը: t^n ֆունկցիայի պատկերը: Սկզբնական ֆունկցիայի ուշացման թեորեմը:..210

§89.Հաստատուն գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումն օպերացիոն հաշվի մեթոդներով:.....217

ԳԼՈՒԽ XI

ԹՎԱՅԻՆ ԵՎ ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼ ՇԱՐՔԵՐ

§58. Թվային շարք, նրա զուգամիտությունը և գումարը: Թվային շարքերի պարզագույն հատկությունները: Շարքի զուգամիտության անհրաժեշտ պայմանը: Դրական անդամներով շարքերի համեմատման հայտանիշները:

Դիցուք, տրված է

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \tag{1}$$

թվային հաջորդականությունը [19]:

Սահմանում 1:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{2}$$

արտահայտությունը կոչվում է a_n $(n = 1,2,\ldots)$ *անդամներով թվային շարք և նշանակվում է*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{2'}$$

պայմանանշանով:

Սահմանում 2: *(2) շարքի առաջին* n *անդամների գումարը* $(n = 1,2,\ldots)$ *կոչվում է այդ շարքի* n *-րդ մասնակի գումար և նշանակվում է* s_n *-ով, իսկ մնացած անդամներից կազմված շարքը՝ նրա մնացորդ* n *-րդ անդամից հետո կամ պարզապես* n *-րդ մնացորդ:*

Այսպիսով, համաձայն բերված սահմանման, (2) շարքի n *-րդ մասնակի գումարը և մնացորդը* n *-րդ անդամից հետո համապատասխանաբար ունեն*

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \tag{3}$$

և

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots = \sum_{m=1}^{\infty} a_{n+m} \quad (n = 1,2,\ldots) \tag{3'}$$

տեսքը:

Դիտարկվող թվային շարքի գումարի հասկացությունը ներմուծելու համար կազմենք այդ շարքի մասնակի գումարների

$$s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots \tag{4}$$

հաջորդականությունը:

Սահմանում 3: *(2) շարքի մասնակի գումարների (4) հաջորդականության վերջավոր կամ անվերջ* s *սահմանը.*

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n$$

կոչվում է տրված շարքի գումար և այդ փաստը նշանակվում է հետևյալ կերպ՝

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n :$$

Սահմանում 4: *Շարքը կոչվում է զուգամետ, եթե այն ունի վերջավոր գումար, և՝ տարամետ, եթե նրա գումարը հավասար է պլյուս կամ մինուս անսահմանության կամ գոյություն չունի:*

Այսպիսով, ինչպես տեսնում ենք, (2) շարքի զուգամետ լինելը համարժեք է (4) հաջորդականության վերջավոր սահման ունենալուն:

Օրինակ 1: Պարզել հետևյալ շարքի զուգամիտության հարցը՝

$$a+aq+\cdots+aq^n+\cdots \quad (a\neq 0): \qquad (ա)$$

Լուծում: Առանձին-առանձին քննարկենք հետևյալ հնարավոր դեպքերը՝

ա) $q=0$:

Ակնհայտորեն քննարկվող դեպքում տրված շարքը զուգամիտում է:

բ) $q=1$:

Քանի որ քննարկվող դեպքում (ա) շարքն ընդունում է

$$a+a+\cdots+a+\cdots \qquad (ա')$$

տեսքը և n-ը անսահմանության ձգտելիս (ա՛) շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունը սահմանափակ չէ [21,բ2՛].

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty} na=a\lim_{n\to\infty} n=\begin{cases}+\infty, \text{ եթե } a>0,\\ -\infty, \text{ եթե } a<0,\end{cases}$$

հետևաբար, $q=1$ դեպքում տրված շարքը տարամիտում է:

գ) $q=-1$:

Քննարկվող դեպքում (ա) շարքն ընդունում է

$$a-a+a-\cdots+(-1)^{n+1}a+\cdots \qquad (ա'')$$

տեսքը:

Քանի որ n-ի զույգ արժեքների դեպքում (ա՛՛) շարքի մասնակի գումարները հավասար են զրոյի, իսկ կենտ արժեքների դեպքում՝ a-ի.

$$s_n=\begin{cases}0, \text{ եթե } n=2k,\\ a, \text{ եթե } n=2k-1 \qquad (k\in N),\end{cases}$$

հետևաբար, n-ը անսահմանության ձգտելիս, (ա՛՛) շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունը որոշակի սահմանի չի ձգտում, ինչը նշանակում է, որ $q=-1$ դեպքում տրված շարքը տարամիտում է:

դ) $|q|<1$ $(q\neq 0)$:

Քանի որ քննարկվող դեպքում (ա) շարքի անդամները կազմում են անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիա, հետևաբար այն զուգամիտում է, ընդ որում այդ շարքի գումարն արտահայտվում է $s=a/(1-q)$ բանաձևով:

ե) $|q|>1$:

Նկատի ունենալով, որ քննարկվող դեպքում (ա) շարքի մասնակի գումարները q հայտարարով երկրաչափական պրոգրեսիաների գումարներ են.

$$s_n=a\,\frac{q^n-1}{q-1} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

և հաշվի առնելով, որ -1-ից փոքր q-երի համար $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ սահմանը գոյություն չունի, իսկ 1-ից մեծ q-երի համար այն հավասար է պլյուս անսահմանության՝ եզրակացնում ենք, որ

$|q|>1$ պայմանին բավարարող q -երի համար դիտարկվող շարքը տարամիտում է:

Այսպիսով, ամփոփելով վերոգրյալ արդյունքները՝ ստանում ենք, որ $|q|<1$ դեպքում (ա) շարքը զուգամիտում է, իսկ $|q|\geq 1$ դեպքում՝ տարամիտում:

Այժմ ծանոթանանք թվային շարքերի պարզագույն հատկություններին:

Թեորեմ 1: *Թվային շարքի զուգամիտությունից հետևում է նրա ցանկացած մնացորդի զուգամիտությունը և հակառակը՝ շարքի ցանկացած մնացորդի զուգամիտությունից հետևում է այդ շարքի զուգամիտությունը:*

Այլ խոսքով, շարքի սկզբից վերջավոր թվով անդամների դեն նետումը կամ նրա սկզբում վերջավոր թվով անդամների ավելացումը չի ազդում այդ շարքի զուգամիտության վրա:

Ապացույց: Եթե վերցնենք n -ի որևէ արժեք և (2) շարքի n -րդ մնացորդի k -րդ մասնակի գումարը նշանակենք σ_n^k -ով.

$$\sigma_n^k=\sum_{m=1}^{k}a_{n+m},$$

կստանանք

$$\sigma_n^k=s_{n+k}-s_n \quad (n,k=1,2,...): \tag{5}$$

Թեորեմի առաջին մասն ապացուցելու համար ենթադրենք (2)-ը զուգամետ շարք է, այսինքն ենթադրենք գոյություն ունի

$$\lim_{n\to\infty}s_n=s,$$

հետևաբար նաև՝

$$\lim_{k\to\infty}s_{n+k}=s$$

վերջավոր սահմանը և (5) հավասարության մեջ անցնենք սահմանի, երբ k -ն ձգտում է անսահմանության [21, թ1].

$$\lim_{k\to\infty}\sigma_n^k=\lim_{k\to\infty}(s_{n+k}-s_n)=\lim_{k\to\infty}s_{n+k}-\lim_{k\to\infty}s_n=s-s_n:$$

Քանի որ (3՝) շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունն ունի վերջավոր սահման, հետևաբար այն զուգամետ շարք է:

Անցնելով թեորեմի երկրորդ մասի ապացուցմանը, (5) հավասարությունը ներկայացնենք

$$s_{n+k}=s_n+\sigma_n^k \quad (n,k=1,2,...): \tag{5՝}$$

տեսքով: Ենթադրելով, որ (3՝)-ը զուգամետ շարք է, այսինքն՝ ենթադրելով, որ k -ն անսահմանության ձգտելիս գոյություն ունի

$$\lim_{k\to\infty}\sigma_n^k=\sigma_n \quad (n,k=1,2,...)$$

վերջավոր սահմանը*) և (5՝) հավասարության մեջ անցնելով սահմանի, երբ k -ն ձգտում է անսահմանության, կստանանք, որ (2) շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունն ունի վերջավոր սահման.

---

*) Հասկանալի է, որ ընդհանուր դեպքում (3՝) շարքի գումարը կախված է n -ից:

$$\lim_{k\to\infty} s_{n+k} = \lim_{k\to\infty}(s_n + \sigma_n^k) = \lim_{k\to\infty} s_n + \lim_{k\to\infty}\sigma_n^k = s_n + \sigma_n,$$

ինչը նշանակում է, որ (2)-ը զուգամետ շարք է:

Իպա

Նկատենք, որ զուգամետ շարքի գումարն իր n-րդ մնացորդի գումարին կապված է

$$s = s_n + \sigma_n \quad (n = 1,2,...) \tag{6}$$

առնչությամբ, որտեղ s-ը տրված շարքի գումարն է, իսկ s_n-ը և σ_n-ը՝ նրա համապատասխանաբար n-րդ մասնակի գումարն ու n-րդ մնացորդի գումարը:

Թեորեմ 2: *Եթե (2)-ը զուգամետ շարք է, ապա նրա n-րդ մնացորդի գումարը n-ի աճմանը զուգընթաց ձգտում է զրոյի:*

Ապացույց: Դիցուք (2)-ը զուգամետ շարք է և s-ը նրա գումարն է:

(6) առնչությունը ներկայացնելով

$$\sigma_n = s - s_n \quad (n = 1,2,....) \tag{6'}$$

տեսքով և ստացված հավասարության մեջ անցնելով սահմանի, երբ n-ը ձգտում է անսահմանության՝ կունենանք

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty}(s - s_n) = \lim_{n\to\infty} s - \lim_{n\to\infty} s_n = s - s = 0:$$

Իպա

Թեորեմ 3: *Եթե (2)-ը զուգամետ շարք է, և նրա գումարը հավասար է s-ի, ապա*

$$ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n + \cdots \tag{7}$$

շարքը, որտեղ c-ն կամայական հաստատուն է, նույնպես զուգամետ է, և նրա գումարը հավասար է cs-ի:

Ապացույց: Թեորեմն ապացուցելու համար (7) շարքի n-րդ մասնակի գումարը նշանակենք γ_n-ով և այն արտահայտենք (2) շարքի համապատասխան մասնակի գումարով.

$$\gamma_n = ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = cs_n \quad (n = 1,2,....):$$

Այսպիսով, ցանկացած n-ի համար ստանում ենք

$$\gamma_n = cs_n \tag{8}$$

հավասարությունը: (8) հավասարության մեջ անցնելով սահմանի, երբ n-ը ձգտում է անսահմանության, կունենանք

$$\lim_{n\to\infty}\gamma_n = \lim_{n\to\infty}(cs_n) = c\lim_{n\to\infty} s_n:$$

Հաշվի առնելով, որ (2)-ը զուգամետ շարք է, և նրա գումարը հավասար է s-ի՝ կստանանք

$$\lim_{n\to\infty}\gamma_n = cs: \tag{9}$$

ԳԼՈՒԽ XI

Ինչպես գիտենք, ստացած հավասարությունը նշանակում է, որ (7)-ը զուգամետ շարք է, և նրա գումարը հավասար է cs -ի:

Իսպա

Այսպիսով, եթե զուգամետ շարքի բոլոր անդամները բազմապատկենք միևնույն հաստատունով, ապա նրա գումարը նույնպես կբազմապատկվի այդ հաստատունով:

Թեորեմ 4: *Եթե*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{10}$$

և

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots \tag{11}$$

շարքերը զուգամետ են, և նրանց գումարները համապատասխանաբար հավասար են A -ի և B -ի, ապա զուգամետ են նաև

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) + \cdots \tag{12}$$

և

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \cdots + (a_n - b_n) + \cdots \tag{13}$$

շարքերը, ընդ որում այդ շարքերի գումարները համապատասխանաբար հավասար են $(A+B)$ -ի և $(A-B)$ -ի:

Ապացույց: Թեորեմի (12) շարքին վերաբերող պնդումն ապացուցելու համար (10), (11) և (12) շարքերի n -րդ մասնակի գումարները համապատասխանաբար նշանակենք A_n -ով, B_n -ով ու C_n -ով և C_n -ը արտահայտենք A_n -ի ու B_n -ի միջոցով.

$$C_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) =$$

$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = A_n + B_n \quad (n = 1,2,...):$$

Այսպիսով, ցանկացած n -ի համար ստանում ենք

$$C_n = A_n + B_n \tag{14}$$

հավասարությունը: (14) հավասարության մեջ անցնելով սահմանի, երբ n -ը ձգտում է անսահմանության և օգտվելով թեորեմի պայմաններից՝ կունենանք

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty}(A_n + B_n) = \lim_{n\to\infty} A_n + \lim_{n\to\infty} B_n = A + B$$

կամ՝

$$\lim_{n\to\infty} C_n = A + B: \tag{15}$$

Ինչպես գիտենք, ստացած հավասարությունը նշանակում է, որ (12)-ը զուգամետ շարք է, և նրա գումարը հավասար է $(A+B)$ -ի:

Հասկանալի է, որ նույն ձևով կարող ենք ապացուցել թեորեմի (13) շարքին վերաբերող պնդումը:

Իսպա

Այսպիսով, եթե երկու զուգամետ շարքեր անդամ առ անդամ գումարենք (հանենք), ապա ստացված շարքը նույնպես կլինի զուգամետ, ընդ որում այդ շարքի գումարը հավասար կլինի տրված շարքերի գումարների գումարին (տարբերությանը):

Շարքերի ուսումնասիրության հիմնական խնդիրը նրանց զուգամիտության (կամ տարամիտության) հարցի պարզումն է: Հետագայում [59], [60] մենք կբերենք այդ հարցը պարզող մի քանի հայտանիշներ: Իսկ այժմ ծանոթանանք շարքի զուգամիտության անհրաժեշտ պայմանին, այսինքն՝ մի պայմանի, որի չբավարարվելու դեպքում դիտարկվող շարքը կլինի տարամետ:

Թեորեմ 5: *(Թվային շարքի զուգամիտության անհրաժեշտ պայմանը) n-ը անսահմանության ձգտելիս զուգամետ շարքի ընդհանուր անդամը ձգտում է զրոյի.*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0: \qquad (16)$$

Ապացույց: Դիցուք (2)-ը զուգամետ շարք է, և նրա գումարը հավասար է s-ի.

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s: \qquad (17)$$

Քանի որ n-ը անսահմանության ձգտելիս $(n-1)$-ն էլ է ձգտում անսահմանության, ուստի տեղի ունի նաև

$$\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s \qquad (18)$$

հավասարությունը: (17) հավասարությունից անդամ առ անդամ հանելով (18) հավասարությունը և նկատի ունենալով, որ ցանկացած n-ի համար տեղի ունի

$$s_n - s_{n-1} = a_n$$

առնչությունը՝ կստանանք

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0:$$

Իպա

Հետևանք 1: *Եթե n-ը անսահմանության ձգտելիս (2) շարքի ընդհանուր անդամը չի ձգտում զրոյի, ուրեմն այն տարամետ շարք է:*

Ապացույց: Իրոք, եթե ենթադրենք, որ n-ը անսահմանության ձգտելիս (2) շարքի ընդհանուր անդամը չի ձգտում զրոյի, և (2)-ը զուգամետ շարք է, ապա նախորդ թեորեմի շնորհիվ կգանք հակասության, որտեղից հետևում է, որ պնդման պայմանը տեղի ունենալու դեպքում (2)-ը տարամետ շարք է:

Իպա

Օրինակ 2: Պարզել հետևյալ շարքի զուգամիտության հարցը՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}: \qquad (բ)$$

Լուծում: Ունենք [21,օ6]

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0,$$

այսինքն n -ը անսահմանության ձգտելիս տրված շարքի ընդհանուր անդամը չի ձգտում զրոյի: Հետևաբար, համաձայն հետևանք 1-ի, (բ)-ն տարամետ շարք է:

Դիտողություն 1: *Հատուկ նշենք, որ n -ը անսահմանության ձգտելիս (2) շարքի ընդհանուր անդամի զրոյի ձգտելը անհրաժեշտ է, բայց ոչ բավարար, որպեսզի տրված շարքը լինի զուգամետ:*

Ձևակերպած դիտողությունը մասնավորապես նշանակում է, որ (2) շարքը կարող է լինել տարամետ նաև այն դեպքում, երբ n -ը անսահմանության ձգտելիս նրա ընդհանուր անդամը ձգտի զրոյի:

Օրինակ 3: Պարզել հետևյալ, այսպես կոչված, ներդաշնակ (հարմոնիկ) շարքի զուգամիտության հարցը՝

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots: \qquad (գ)$$

Լուծում: Ցույց տանք, որ թեև n -ը անսահմանության ձգտելիս ներդաշնակ շարքի ընդհանուր անդամը ձգտում է զրոյի.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

բայց այնուամենայնիվ այն տարամետ շարք է:

Այդ նպատակի համար դիտարկվող շարքի անդամները (սկսած երկրորդից) հաջորդաբար տրոհենք $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}, \ldots$ թվով անդամներ պարունակող խմբերի.

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots: \qquad (գ')$$

Եթե (գ՝) շարքի յուրաքանչյուր խմբի բոլոր անդամները փոխարինենք այդ խմբի ամենափոքր (վերջին) անդամով և հաշվի առնենք, որ նշված շարքի n -րդ ($n=1,2,\ldots$) խումբը պարունակում է 2^{n-1} անդամ, կստանանք

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots= \qquad (գ'')$$

$$=1+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+8\cdot\frac{1}{16}+\cdots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots:$$

Քանի որ

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$$

շարքի մասնակի գումարները վերևից սահմանափակ չեն [18,u 30] (տե՛ս օրինակ 1-ի բ) դեպքը) և (գ) շարքի մասնակի գումարները, սկսած s_3 -ից ակնհայտորեն մեծ են (գ՝) շարքի համապատասխան մասնակի գումարներից, հետևաբար (գ) շարքի մասնակի գումարները նույնպես վերևից սահմանափակ չեն:

Այսպիսով, ներդաշնակ շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունը լինելով մոնոտոն աճող՝ վերևից սահմանափակ չէ: Ինչպես գիտենք, (գ) շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությանը վերաբերող եզրակացությունից հետևում է, որ այդ հաջորդականության սահմանը պլյուս անսահմանությունն է [21,p4], ինչն էլ նշանակում է, որ ներդաշնակ շարքը տարամետ է:

---

*) Որովհետև այդ շաքի անդամները դրական են և հետևաբար մեկից մեծ ցանկացած n -ի համար տեղի ունի $s_{n+1}+a_n>s_{n+1}$ կամ որ նույնն է՝ $s_n>s_{n+1}$ անհավասարությունը:

Անցնելով դրական անդամներով շարքերի համեմատման հայտանիշներին ծանոթանալուն՝ նախ ապացուցենք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 6: *Դրական անդամներով շարքը զուգամետ է կամ տարամետ կախված նրանից՝ տրված շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունը վերևից սահմանափա՞կ է, թե՞ ոչ:*

Այլ խոսքով, եթե դրական անդամներով շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունը վերևից սահմանափակ է, ապա այդ շարքը զուգամետ է, հակառակ դեպքում այն տարամետ է[*]*:*

Ապացույց: Դիցուք (2) շարքի անդամները դրական թվեր են:

Ներդաշնակ շարքն ուսումնասիրելիս մենք տեսանք, որ դրական անդամներով շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունը մոնոտոն աճում է: Հետևաբար, մոնոտոն աճող հաջորդականության սահմանին վերաբերող թեորեմի շնորհիվ, եթե դրական անդամներով շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունը վերևից սահմանափակ է, ապա այն ունի վերջավոր սահման, հակառակ դեպքում, այդ հաջորդականության սահմանը պլյուս անսահմանությունն է: Թեորեմի ապացույցն ավարտելու համար մնում է օգտվել շարքի զուգամիտության սահմանումից և համոզվել, որ առաջին դեպքում (2) շարքը զուգամիտում է, իսկ երկրորդ դեպքում՝ տարամիտում:

Իպա

Այժմ ապացուցենք մի թեորեմ, որը հնարավորություն է տալիս դրական անդամներով շարքի զուգամիտության կամ տարամիտության հարցը պարզել համեմատելով այն մեկ այլ դրական անդամներով շարքի, որի զուգամետ կամ տարամետ լինելը նախապես հայտնի է:

Թեորեմ 7: *Դիցուք տրված են դրական անդամներով երկու շարք.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots, \qquad (a_n > 0,) \tag{19}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots \qquad (b_n > 0,\ n = 1,2,\ldots): \tag{20}$$

Եթե (19) շարքի անդամները մեծ չեն (20) շարքի համապատասխան անդամներից, այսինքն, եթե ցանկացած n-ի համար տեղի ունի

$$a_n \le b_n \tag{21}$$

անհավասարությունը, ապա (20) շարքի զուգամիտությունից բխում է (19) շարքի զուգամիտությունը, իսկ (19) շարքի տարամիտությունից՝ (20) շարքի տարամիտությունը:

Ապացույց: Եթե s_n-ով և σ_n-ով համապատասխանաբար նշանակենք (19) և (20) շարքերի մասնակի գումարները.

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \tag{22}$$

և օգտվենք թեորեմի պայմանից, կստանանք

---

*) Փաստորեն դրական անդամներով շարքը միշտ ունի գումար՝ անկախ նրանից այդ շարքի մասնակի գումարները վերևից սահմանափա՞կ են, թե՞ ոչ:

$$s_n \le \sigma_n \quad (n = 1,2,....) : \tag{23}$$

Այնուհետև ենթադրելով, որ (20)-ը զուգամետ շարք է, այսինքն ենթադրելով, որ n-ը անսահմանության ձգտելիս այդ շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունն ունի վերջավոր սահման.

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma \quad (\sigma < +\infty)$$

և հաշվի առնելով, որ դիտարկվող շարքերի անդամները դրական թվեր են՝ կունենանք

$$s_n \le \sigma_n < \sigma \quad (n = 1,2,....) : \tag{24}$$

Ստացած անհավասարություններից երևում է, որ (19) շարքի մասնակի գումարները վերևից սահմանափակ են: Նկատի ունենալով նաև, որ $\{s_n\}$-ը մոնոտոն աճող հաջորդականություն է, եզրակացնում ենք, որ այն ունի վերջավոր սահման.

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \le \sigma :$$

Անդրադառնալով թեորեմի երկրորդ մասին՝ ենթադրենք (19)-ը տարամետ շարք է: Այդ դեպքում, հաշվի առնելով, որ $\{s_n\}$-ը մոնոտոն աճող հաջորդականություն է՝ կստանանք

$$\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty :$$

Օգտվելով (23) անհավասարություններից՝ եզրակացնում ենք, որ $\{\sigma_n\}$ մոնոտոն աճող հաջորդականությունը նույնպես վերևից սահմանափակ չէ [20,թ1].

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = +\infty,$$

ինչը նշանակում է, որ (20)-ը տարամետ շարք է:

Իպա

Օրինակ 4: Պարզել դրական անդամներով

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^n} + \cdots \tag{դ}$$

և

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots \tag{ե}$$

շարքերի զուգամիտության հարցը:

Լուծում: Քանի որ (ե) շարքի անդամները (սկսած երկրորդից) կազմում են անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիա, հետևաբար այն զուգամետ շարք է, և գումարն էլ հավասար է $3/2$-ի: Մյուս կողմից, քանի որ (դ) շարքի անդամները մեծ չեն (ե) շարքի համապատասխան անդամներից, ուստի համաձայն նախորդ թեորեմի, այն նույնպես զուգամետ շարք է, ընդ որում այդ շարքի գումարը չի գերազանցում $3/2$-ը:

Օրինակ 5: Պարզել հետևյալ շարքի զուգամիտության հարցը՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots : \tag{զ}$$

Լուծում: Քանի որ դիտարկվող շարքի անդամներն ակնհայտորեն փոքր չեն ներդաշնակ շարքի համապատասխան անդամներից, հետևաբար, համաձայն թեորեմ 7-ի, այն տարամետ շարք է:

Դիտողություն 2: *Դրական անդամներով շարքերի համեմատման թեորեմը ճիշտ է նաև ոչ բացասական անդամներով շարքերի համար: Սակայն, եթե (19) կամ (20) շարքերի անդամների մեջ կան նաև բացասական թվեր, ապա, ընդհանրապես ասած, այդ թեորեմը դադարում է ճիշտ լինելուց:*

Դիտողություն 3: *Քանի որ շարքի սկզբից վերջավոր թվով անդամների դեն նետումը չի ազդում այդ շարքի զուգամիտության վրա, ուստի դրական անդամներով շարքերի համեմատման թեորեմը ճիշտ է նաև այն դեպքում, երբ (21) պայմանը տեղի ունի ոչ թե հենց սկզբից, այլ՝ մեկից մեծ որևէ համարից սկսած:*

Վերջում ձևակերպենք նաև թեորեմ 7-ից բխող հետևյալ օգտակար թեորեմները.

Թեորեմ 8: *Եթե դրական անդամներով (19) և (20) շարքերի անդամները բավարարում են*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad (n = 1,2,....) \tag{25}$$

պայմաններին, ապա (20) շարքի զուգամիտությունից բխում է (19) շարքի զուգամիտությունը, իսկ (19) շարքի տարամիտությունից՝ (20) շարքի տարամիտությունը:

Թեորեմ 9: *Եթե n-ը անսահմանության ձգտելիս դրական անդամներով (19) և (20) շարքերի համապատասխան անդամների հարաբերությունն ունի որոշակի k սահման.*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = k \quad (0 \le k \le +\infty), \tag{26}$$

ապա $k < +\infty$ դեպքում (20) շարքի զուգամիտությունից բխում է (19) շարքի զուգամիտությունը, իսկ $k > 0$ դեպքում, (19) շարքի տարամիտությունից՝ (20) շարքի տարամիտությունը: Այսինքն $0 < k < +\infty$ պայմանին բավարարող k-երի համար (19) և (20) շարքերը կա՛մ միաժամանակ զուգամիտում են, կա՛մ էլ՝ միաժամանակ տարամիտում:

Օրինակ 6: Պարզել դրական անդամներով

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{a}{n} \quad (0 < a < \pi) \tag{t}$$

շարքի զուգամիտության հարցը:

Լուծում: Դիտարկվող շարքը համեմատելով ներդաշնակ շարքին և օգտվելով (26) բանաձևից՝ կստանանք [25,(2)]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{a}{n}}{\frac{1}{n}} = a\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{a}{n}}{\frac{a}{n}} = a\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = a\cdot 1 = a \quad \left(t = \frac{a}{n}\right):$$

Քանի որ a-ն դրական հաստատուն է հետևաբար, համաձայն թեորեմ 9-ի, ներդաշնակ շարքի հետ մեկտեղ տարամիտում է նաև (t) շարքը:

ԳԼՈՒԽ XI

§59. Դրական անդամներով շարքերի զուգամիտության Դալամբերի, Կոշիի և Կոշիի ինտեգրալային հայտանիշները:

Կրկին դիտարկենք դրական անդամներով

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1}$$

շարքը և ծանոթանանք նրա զուգամիտության մի քանի հայտանիշներին:

Թեորեմ 1: *(Դալամբերի հայտանիշը) Եթե n-ը անսահմանության ձգտելիս (1) շարքի անդամներից կազմած*

$$d_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (n = 1,2,...)$$

հաջորդականությունն ունի սահման.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d \quad (d \ge 0), \tag{2}$$

ապա $0 \le d < 1$ դեպքում (1) շարքը զուգամետ է, իսկ $d > 1$ դեպքում՝ տարամետ:

Ապացույց: Ենթադրենք n-ը անսահմանության ձգտելիս $\{d_n\}$ հաջորդականությունն ունի մեկից փոքր (ոչ բացասական) d սահման.

$$0 \le d < 1$$

և $(d,1)$ միջակայքից ընտրենք որևէ q թիվ.

$$d < q < 1:$$

Քանի որ $d < q$, հետևաբար, ինչպես գիտենք [19,թ1], գոյություն ունի այնպիսի n_0 համար, որ այդ համարից սկսած տեղի ունի

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$$

կամ որ նույնն է՝

$$a_{n+1} < q a_n \tag{3}$$

անհավասարությունը: Վերջին անհավասարության մեջ n-ի փոխարեն հաջորդաբար տեղադրելով $n_0, n_0+1, n_0+2, ...,$ կունենանք

$$a_{n_0+1} < q a_{n_0}, \quad a_{n_0+2} < q a_{n_0+1} < q^2 a_{n_0}, \quad a_{n_0+3} < q a_{n_0+2} < q^3 a_{n_0}, ..., \tag{3'}$$

որտեղից հետևում է, որ (1) շարքի անդամները չեն գերազանցում դրական անդամներով

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_0} + q a_{n_0} + q^2 a_{n_0} + \cdots + q^k a_{n_0} + \cdots \tag{4}$$

շարքի համապատասխան անդամները: Թեորեմի առաջին մասի ապացույցն ավարտելու համար մնում է նկատել, որ (4)-ը զուգամետ շարք է [58,օ1,թ1], և օգտվելով դրական անդամներով շարքերի համեմատման թեորեմից [58,թ7]՝ եզրակացնել, որ (1)-ը նույնպես զուգամետ շարք է [58,u3,u4]:

Այժմ ենթադրենք n-ը անսահմանության ձգտելիս $\{d_n\}$ հաջորդականությունն ունի մեկից մեծ d սահման.

$$\lim_{n\to\infty} d_n = d\,, \quad d > 1:$$

Քանի որ քննարկվող դեպքում դիտարկվող հաջորդականության սահմանը մեծ է մեկից, հետևաբար, ինչպես գիտենք, գոյություն ունի այնպիսի n_1 համար, որ այդ համարից սկսած տեղի ունի

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

կամ որ նույնն է՝

$$a_{n+1} > a_n \tag{5}$$

անհավասարությունը: Ստացած անհավասարությունից հետևում է, որ խախտվում է (1) շարքի զուգամիտության անհրաժեշտ պայմանը, որտեղից էլ հետևում է, որ քննարկվող դեպքում այն տարամետ շարք է [58,հ1]:

Իպա

Օրինակ 1: Պարզել հետևյալ շարքի զուգամիտության հարցը՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n}{n!} \quad (c > 0)\ ^{*)}: \tag{ա}$$

Լուծում: Դիտարկվող օրինակում ունենք [21,o6]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{c^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{c^n}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{c}{n+1} = 0:$$

Քանի որ (ա) շարքի պարագայում (2) սահմանը փոքր է մեկից, ուստի, համաձայն Դալամբերի հայտանիշի, c-ի ցանկացած դրական արժեքի դեպքում այն զուգամետ շարք է:

Դիտողություն 1: *Ինչպես տեսանք, դրական անդամներով (1) շարքի զուգամիտության (կամ տարամիտության) հարցը Դալամբերի հայտանիշի միջոցով կարող ենք պարզել, եթե այդ շարքի անդամներից կազմած $\{a_{n+1}/a_n\}$ հաջորդականության սահմանը գոյություն ունի և հավասար չէ մեկի:*

Նշենք, որ եթե (2) սահմանը հավասար է մեկի կամ գոյություն չունի, ապա նշված հայտանիշի միջոցով (1) շարքի զուգամիտության (կամ տարամիտության) հարցը պարզել հնարավոր չէ:

Դիտողություն 2: *Եթե դրական անդամներով (1) շարքի պարագայում (2) սահմանը հավասար է մեկի և ինչ-որ համարից սկսած տեղի ունի (5) անհավասարությունը, ուրեմն n-ը անսահմանության ձգտելիս այդ շարքի ընդհանուր անդամը չի ձգտում զրոյի, ինչն էլ նշանակում է, որ այն տարամետ շարք է:*

Օրինակ 2: Պարզել հետևյալ շարքի զուգամիտության հարցը՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}: \tag{բ}$$

---

*) Հիշենք, որ $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$:

ԳԼՈՒԽ XI

Լուծում: Դիտարկվող օրինակում ունենք

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}:\frac{n}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}=1:$$

Այսուս կողմից, քանի որ ցանկացած n-ի համար ակնհայտորեն տեղի ունի

$$\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}>1$$

անհավասարությունը, ուստի, համաձայն երկրորդ դիտողության, (p)-ն տարամետ շարք է*):

Թեորեմ 2: *(Կոշիի հայտանիշը) Եթե n-ը անսահմանության ձգտելիս (1) շարքի անդամներից կազմած*

$$c_n=\sqrt[n]{a_n}\quad (n=1,2,\ldots)$$

հաջորդականությունն ունի սահման.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=c\qquad (c\ge 0), \tag{6}$$

ապա $0\le c<1$ դեպքում (1) շարքը զուգամետ է, իսկ $c>1$ դեպքում՝ տարամետ:

Ապացույց: Դիցուք n-ը անսահմանության ձգտելիս $\{c_n\}$ հաջորդականությունն ունի մեկից փոքր (ոչ բացասական) c սահման.

$$0\le c<1:$$

$(c,1)$ միջակայքից ընտրենք որևէ q թիվ և $q-c$ տարբերությունը նշանակենք ε-ով.

$$\varepsilon=q-c\quad (\varepsilon>0):$$

Հաջորդականության սահմանի սահմանման համաձայն ընտրված ε-ի համար գոյություն ունի այնպիսի n_0 համար, որ այդ համարից սկսած տեղի ունի

$$\left|\sqrt[n]{a_n}-c\right|<q-c=\varepsilon \tag{7}$$

անհավասարությունը: Վերջին անհավասարությունից մասնավորապես կստանանք, որ այդ նույն n-երի համար տեղի ունի

$$\sqrt[n]{a_n}-c<q-c$$

կամ որ նույնն է՝

$$\sqrt[n]{a_n}<q \tag{8}$$

անահավասարությունը, որտեղից էլ (նկատի ունենալով, որ (8) անհավասարության երկու կողմերը դրական են) կունենանք

$$a_n<q^n\quad (n\ge n_0): \tag{8}$$

Դիտարկենք

$$q^{n_0}+q^{n_0+1}+q^{n_0+2}+\cdots \tag{9}$$

---

*) Տե՛ս [58,o2]-ը:

և

$$a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \cdots \qquad (1')$$

շարքերը:

Քանի որ (9) շարքի անդամները կազմում են անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիա $(0 < q < 1)$, հետևաբար այն զուգամետ շարք է: Այս կողմից (8') անհավասարությունների շնորհիվ (1') շարքի անդամները փոքր են (9) շարքի համապատասխան անդամներից, որտեղից հետևում է, որ (1')-ը ևս զուգամետ շարք է: Վերջապես նկատի ունենալով, որ շարքի սկզբում վերջավոր թվով անդամների ավելացումը չի ազդում այդ շարքի զուգամիտության վրա, կստանանք, որ քննարկվող դեպքում զուգամետ է նաև (1) շարքը:

Այժմ ապացուցենք թեորեմի երկրորդ մասը:

Դիցուք n-ը անսահմանության ձգտելիս $\{c_n\}$ հաջորդականությունն ունի մեկից մեծ c սահման.

$$\lim_{n\to\infty} c_n = c, \quad c > 1:$$

Քանի որ քննարկվող դեպքում դիտարկվող հաջորդականության սահմանը մեծ է մեկից, հետևաբար, ինչպես գիտենք, գոյություն ունի այնպիսի n_1 համար, որ այդ համարից սկսած տեղի ունի

$$\sqrt[n]{a_n} > 1$$

կամ որ նույնն է՝

$$a_n > 1 \qquad (10)$$

անհավասարությունը: Ստացած անհավասարություններից հետևում է, որ քննարկվող դեպքում խախտվում է (1) շարքի զուգամիտության անհրաժեշտ պայմանը, որտեղից էլ հետևում է, որ այն տարամետ շարք է:

Իպա

Օրինակ 3: Պարզել հետևյալ շարքի զուգամիտության հարցը՝

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n:$$

Լուծում: Դիտարկվող օրինակում ունենք

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}:$$

Քանի որ տրված շարքի պարագայում (6) սահմանը փոքր է մեկից, ուստի, համաձայն Կոշիի հայտանիշի, այն զուգամետ շարք է:

Դիտողություն 3: *Ինչպես տեսանք, դրական անդամներով (1) շարքի զուգամիտության (կամ տարամիտության) հարցը Կոշիի հայտանիշի միջոցով կարող ենք պարզել միայն այն շարքերի դեպքում, որոնց անդամներից կազմած* $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ *հաջորդականության սահմանը գոյություն ունի և հավասար չէ մեկի:*

ԳԼՈՒԽ XI

Թեորեմ 3: *(Կոշիի ինտեգրալային հայտանիշը) Դիցուք դրական անդամներով (1) շարքի անդամները կազմում են չաճող հաջորդականություն.*

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots \tag{11}$$

և $f(x)$-ը $[1,+\infty)$ միջակայքում որոշված անընդհատ և չաճող այնպիսի ֆունկցիա է, որի համար տեղի ունեն

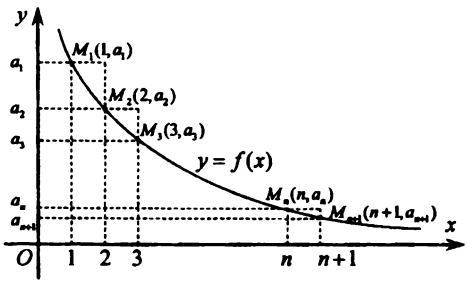
$$f(n) = a_n \quad (n = 1,2,...) \tag{12}$$

հավասարությունները: Այդ դեպքում, եթե

$$I = \int_1^{+\infty} f(x)dx \tag{13}$$

անիսկական ինտեգրալը զուգամետ է, ապա զուգամետ է նաև (1) շարքը, իսկ եթե այդ ինտեգրալը տարամետ է, ապա (1) շարքն էլ է տարամետ:

Ապացույց: Թեորեմն ապացուցելու համար, (1) շարքի անդամները «պատկերենք» երկրաչափորեն. աբսցիսների առանցքի վրա վերցնենք այդ անդամների համարները, իսկ օրդինատների առանցքի վրա՝ նրանց արժեքները (նկ.1): Արդյունքում (1) շարքի անդամների և կոորդինատական Oxy հարթության $M_n(n,a_n)$ $(n = 1,2,...)$ կետերի բազմության միջև կստեղծենք փոխմիարժեք համապատասխանություն: Այնուհետև, եթե նույն գծագրի վրա պատկերենք նաև թեորեմի ձևակերպման մեջ նշված $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, ապա (12) պայմանի շնորհիվ այն կանցնի M_n կետերով $(n = 1,2,...)$:



նկ.1

Քանի որ (1) շարքի s_n $(n = 1,2,...)$ մասնակի գումարը հավասար է այն ուղղանկյունների մակերեսների գումարին, որոնց միավորումը պարունակում է $f(x)$ կորով, Ox առանցքով, $x = 1$ և $x = n+1$ ուղիղներով սահմանափակված կորագիծ սեղանը, հետևաբար տեղի ունեն

$$s_n > \int_1^{n+1} f(x)dx \quad (n = 1,2,...) \tag{14}$$

անհավասարությունները [43,1°]: Մյուս կողմից, նշված կորերով սահմանափակված պատկերը պարունակում է այն ուղղանկյունների միավորումը, որոնց մակերեսներն արտահայտվում են $a_2, a_3, ..., a_{n+1}$ թվերով: Հետևաբար, կրկին օգտվելով կորագիծ սեղանի մակերեսի բանաձևից՝ կստանանք

$$\int_1^{n+1} f(x)dx > a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1}$$

կամ որ նույնն է՝

$$\int_1^{n+1} f(x)dx > s_{n+1} - a_1 \quad (n = 1,2,...) \tag{15}$$

անհավասարությունները:

Այժմ ենթադրենք (13) անիսկական ինտեգրալը զուգամետ է [42,u1,u2]: Այդ դեպքում (15) անհավասարությունները ներկայացնելով

$$s_{n+1} < a_1 + \int_1^{n+1} f(x)dx \quad (n = 1,2,...) \tag{15}$$

տեսքով և հաշվի առնելով, որ ցանկացած n-ի համար տեղի ունի

$$\int_1^{n+1} f(x)dx < \int_1^{+\infty} f(x)dx$$

անհավասարությունը*), կունենանք

$$s_n < s_{n+1} < a_1 + \int_1^{n+1} f(x)dx < a_1 + \int_1^{+\infty} f(x)dx \quad (n = 1,2,...): \tag{16}$$

Ստացած անհավասարություններից հետևում է, որ (1) շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունը վերևից սահմանափակ է [18,u30]: Նկատի ունենալով նաև, որ $\{s_n\}$-ը մոնոտոն աճող հաջորդականություն է (հիշենք, որ դիտարկվող շարքի անդամները դրական թվեր են), եզրակացնում ենք [21,p4], որ քննարկվող դեպքում (1)-ը զուգամետ շարք է:

Անցնելով թեորեմի երկրորդ մասի ապացուցմանը՝ ենթադրենք (13)-ը տարամետ անիսկական ինտեգրալ է .

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = +\infty:$$

Կատարված ենթադրությունից հետևում է, որ (14) անհավասարությունների մեջ մասնակցող ինտեգրալները, հետևաբար նաև (1) շարքի մասնակի գումարները n-ի աճման հետ մեկտեղ անսահմանափակորեն աճում են, ինչն էլ նշանակում է, որ քննարկվող դեպքում (1)-ը տարամետ շարք է:

Իպա

Օրինակ 4: Պարզել հետևյալ շարքի զուգամիտության հարցը՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots \quad (p > 0): \tag{գ}$$

Լուծում: Քանի որ դիտարկվող շարքի ընդհանուր անդամն արտահայտվում է

$$a_n = \frac{1}{n^p}$$

բանաձևով, հետևաբար

$$f(x) = \frac{1}{x^p}$$

---

*) Քանի որ $f(x)$ ֆունկցիան ակնհայտորեն ընդունում է միայն դրական արժեքներ:

ֆունկցիան, (գ) շարքի պարագայում բավարարում է թեորեմ 3-ում $f(x)$ ֆունկցիայի վրա դրված պայմաններին: Վերոգրյալից հետևում է, որ տրված շարքի զուգամիտության հարցը պարզելու համար անհրաժեշտ է դիտարկել

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$$

անիսկական ինտեգրալը: Հաշվելով

$$\int_1^{b}\frac{dx}{x^p} \quad (b>1)$$

որոշյալ ինտեգրալը [35,3°,4°], [41,(6)].

$$\int_1^{b}\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-p}(b^{1-p}-1), & \text{եթե } p\neq 1,\\ \ln b, & \text{եթե } p=1\end{cases} \qquad (դ)$$

և (դ) հավասարություններում անցնելով սահմանի, երբ b-ն ձգտում է անսահմանության,

$$\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}x^{\alpha}=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}x^{-\alpha}=0 \quad (\alpha>0)$$

հավասարությունների հաշվառումով կստանանք

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}+\infty, & \text{եթե } 0<p\le 1,\\ \dfrac{1}{p-1}, & \text{եթե } p>1:\end{cases} \qquad (ե)$$

Համաձայն Կոշիի ինտեգրալային հայտանիշի՝ ստացած հավասարություններից հետևում է, որ $0<p\le 1$ դեպքում (գ) շարքը տարամիտում է, իսկ $p>1$ դեպքում՝ զուգամիտում:

Նկատենք, որ Դալամբերի կամ Կոշիի հայտանիշի միջոցով (գ) շարքի զուգամիտության հարցը պարզել հնարավոր չէ:

Իրոք, օգտվելով

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p=1,\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^p=1$$

սահմաններից և նկատի ունենալով առաջին և երրորդ դիտողությունները՝ կհամոզվենք ձևակերպած պնդման ճշմարտացիության մեջ:

Դիտողություն 4: *Քանի որ (13) և*

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx \quad (a>1)$$

անիսկական ինտեգրալները կա՛մ միաժամանակ զուգամիտում են, կա՛մ էլ միաժամանակ տարամիտում [42,թ1], հետևաբար (անհրաժեշտության դեպքում) (13) ինտեգրալի ներքևի սահմանը կարելի է փոխարինել մեկից մեծ ցանկացած թվով:

§60. Հերթագայող նշաններ ունեցող անդամներով շարքեր: Լեյբնիցի հայտանիշը: Նշանափոխ շարքեր: Նշանափոխ շարքի զուգամիտության հայտանիշը: Բացարձակ և պայմանական զուգամիտություն:

Նախորդ պարագրաֆներում մենք ծանոթացանք դրական անդամներով շարքերի առանձին հատկություններին, բերեցինք այդպիսի շարքերի զուգամիտության անհրաժեշտ պայմանը, մի քանի բավարար պայմաններ, ինչպես նաև ձևակերպեցինք նրանց համեմատմանը վերաբերող երեք թեորեմ: Այս պարագրաֆում կդիտարկենք շարքեր, որոնք պարունակում են ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական անդամներ:

Մեր ուսումնասիրությունները սկսենք հերթագայող նշաններ ունեցող անդամներով շարքերից:

Սահմանում 1: *Շարքը կոչվում է հերթագայող նշաններ ունեցող անդամներով շարք կամ պարզապես հերթագայող նշաններով շարք, եթե նրա ցանկացած երկու հարևան անդամներ ունեն հակադիր նշաններ:*

Այլ խոսքով, շարքը կոչվում է հերթագայող նշաններով շարք, եթե այն ունի

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + \cdots + (-1)^{n-1}a_n + \cdots \qquad (1)$$

տեսքը, որտեղ $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ *թվերն ունեն միևնույն նշանը:*

Համարելով, որ $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ թվերը դրական են, ապացուցենք հերթագայող նշաններով շարքերին վերաբերող հետևյալ կարևոր թեորեմը՝

Թեորեմ 1: *(Լեյբնից) Եթե հերթագայող նշաններով (1) շարքի անդամները բացարձակ արժեքով մոնոտոն նվազում են.*

$$a_1 > a_2 > \cdots > a_n > \cdots \quad (a_n > 0; \quad n = 1,2,\ldots) \qquad (2)$$

և n *-ը անսահմանության ձգտելիս ձգտում են զրոյի.*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \qquad (3)$$

ապա այդ շարքը զուգամետ է, ընդ որում նրա գումարը դրական է և փոքր է իր առաջին անդամից:

Ապացույց: Թեորեմն ապացուցելու համար վերցնենք ցանկացած m բնական թիվ, դիտարկենք (1) շարքի առաջին $2m$ անդամների գումարը.

$$s_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2m-1} - a_{2m}), \qquad (4)$$

և այդ գումարներից կազմած $\{s_{2m}\}$ հաջորդականությունը:

Քանի որ (2) անհավասարությունների շնորհիվ (4) արտահայտության բոլոր փակագծերի ներսի տարբերությունները դրական են, հետևաբար m -ի աճման հետ մեկտեղ $\{s_{2m}\}$ հաջորդականությունը մոնոտոն աճում է: Մյուս կողմից, եթե s_{2m} գումարը ներկայացնենք

$$s_{2m} = a_1 - \left[(a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \cdots + (a_{2m-2} - a_{2m-1}) + a_{2m}\right]$$

տեսքով և կրկին օգտվենք (2) անհավասարություններից՝ կստանանք

$$s_{2m} < a_1 :$$

Այսպիսով, m -ի աճման հետ մեկտեղ $\{s_{2m}\}$ հաջորդականությունը մոնոտոն աճում է և մնում է վերևից սահմանափակ: Ինչպես գիտենք, $\{s_{2m}\}$ հաջորդականության մասին արված եզրակացությունից հետևում է, որ այն ունի վերջավոր սահման [21,թ4].

$$\lim_{m\to\infty} s_{2m} = s, \tag{5}$$

ընդ որում տեղի ունի

$$0 < s < a_1 \tag{6}$$

գնահատականը:

Այժմ դիտարկենք (1) շարքի առաջին $2m+1$ անդամների գումարը և այն ներկայացնենք

$$s_{2m+1} = s_{2m} + a_{2m+1} \tag{7}$$

տեսքով:

Վերջին հավասարության մեջ անցնելով սահմանի, երբ m -ը ձգտում է անսահմանության և օգտվելով (3) և (5) հավասարություններից՝ կունենանք [21,թ1]

$$\lim_{m\to\infty} s_{2m+1} = \lim_{m\to\infty}(s_{2m} + a_{2m+1}) = \lim_{m\to\infty} s_{2m} + \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = s :$$

Ինչպես տեսնում ենք, (1) շարքի ինչպես զույգ թվով, այնպես էլ կենտ թվով անդամներից կազմած մասնակի գումարների հաջորդականություններն ունեն միևնույն s սահմանը: Վերոգրյալից հետևում է, որ տեղի ունի

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \quad (0 < s < a_1)$$

հավասարությունը, ինչն էլ նշանակում է, որ (1)-ը զուգամետ շարք է [58,u3,u4] (ընդ որում նրա գումարը դրական է և փոքր է իր առաջին անդամից):

Իպա

Օրինակ 1: Պարզել հերթագայող նշաններով

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots \tag{ա}$$

շարքի զուգամիտության հարցը:

Լուծում: Նկատելով, որ տրված շարքի անդամները բավարարում են Լեյբնիցի թեորեմի պայմաններին, եզրակացնում ենք, որ այն զուգամետ շարք է*):

Դիտողություն 1: Քանի որ հերթագայող նշաններով շարքի ցանկացած մնացորդ նույնպես հերթագայող նշաններով շարք է, ուստի Լեյբնիցի թեորեմի պայմաններին բավարարող (1) շարքի $(a_n > 0,\ n = 1,2,\ldots)$ $2m$ -րդ և $(2m-1)$ -րդ մնացորդների համար համապատասխանաբար կստանանք

$$0 < \sigma_{2m} = a_{2m+1} - a_{2m+2} + \cdots < a_{2m+1},$$

$$\sigma_{2m-1} = -a_{2m} + a_{2m+1} - \cdots = -(a_{2m} - a_{2m+1} + \cdots) < 0,$$

---

*) Դիտարկվող շարքը համեմատի՛ր ներդաշնակ շարքին [58,o3]:

$$|\sigma_{2m-1}| = a_{2m} - a_{2m+1} + \cdots < a_{2m} :$$

Այսպիսով, հերթագայող նշաններով շարքի ցանկացած մնացորդ ունի իր առաջին անդամի նշանը և բացարձակ արժեքով փոքր է այդ անդամի բացարձակ արժեքից:

Բերված դիտողությունից հետևում է, որ հերթագայող նշաններով շարքի գումարն իր մասնակի գումարով փոխարինելու ժամանակ թույլ տված սխալը բացարձակ արժեքով փոքր է դեն նետած անդամներից առաջինի բացարձակ արժեքից:

Այժմ անցնենք կամայական շարքերի ուսումնասիրությանը, այսինքն այնպիսի շարքերի ուսումնասիրությանը, որոնց անդամները կամայական ձևով կարող են լինել ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական:

Սահմանում 2: *Այն շարքը, որի անդամները կամայական ձևով կարող են լինել ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական, կոչվում է նշանափոխ շարք*):*

Նախ նկատենք, որ եթե նշանափոխ շարքի բոլոր անդամները, սկսած մեկից մեծ մի որևէ n_0 համարից դրական են, ապա դեն նետելով այդ շարքի առաջին $n_0 - 1$ անդամները՝ կստանանք դրական անդամներով շարք, որը տրված շարքի հետ մեկտեղ զուգամետ է կամ տարամետ [58,թ1]: Այսինքն, քննարկվող դեպքում նշանափոխ շարքի զուգամիտության հարցի պարզումը բերվում է դրական անդամներով շարքի զուգամիտության ուսումնասիրությանը: Պատկերը չի փոխվում նաև այն դեպքում, երբ շարքի բոլոր անդամները բացասական են կամ դառնում են այդպիսին մեկից մեծ մի որևէ համարից սկսած: Վերջին դեպքում շարքի բոլոր անդամներից մինուս մեկ արտադրիչ ընդհանուր հանելով [58,թ3] նորից այդ շարքի զուգամիտության հարցի պարզումը կբերենք դրական անդամներով շարքի զուգամիտության ուսումնասիրությանը:

Այսպիսով, էապես նոր դեպք կլինի այն դեպքը, երբ նշանափոխ շարքը պարունակի կամայական ձևով դասավորված՝ անվերջ քանակությամբ ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական անդամներ:

Նշանափոխ շարքի.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{8}$$

զուգամիտության հարցը պարզելու համար այդ շարքի հետ մեկտեղ դիտարկենք նրա անդամների բացարձակ արժեքներից կազմած

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots \tag{9}$$

շարքը և ապացուցենք հետևյալ կարևոր թեորեմը՝

Թեորեմ 2: *Նշանափոխ շարքի անդամների բացարձակ արժեքներից կազմած շարքի զուգամիտությունից հետևում է նշանափոխ շարքի զուգամիտությունը:*

Ապացույց: Դիցուք (8) նշանափոխ շարքի անդամների բացարձակ արժեքներից կազմած շարքը զուգամետ է:

---

*) Հասկանալի է, որ հերթագայող նշաններով շարքը նշանափոխ շարքի մասնավոր դեպքն է:

Եթե s_n-ով և σ_n-ով $(n=1,2,...)$ համապատասխանաբար նշանակենք (8) և (9) շարքերի n-րդ մասնակի գումարները, իսկ s_n^+-ով և s_n^--ով՝ s_n գումարի մեջ մտնող համապատասխանաբար բոլոր դրական անդամների գումարը և բոլոր բացասական անդամների բացարձակ արժեքների գումարը՝ կունենանք

$$s_n = s_n^+ - s_n^-, \quad \sigma_n = s_n^+ + s_n^- \quad (n=1,2,...): \tag{10}$$

Ինչպես գիտենք, (9) շարքի զուգամիտությունը նշանակում է, որ գոյություն ունի

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \sigma \tag{11}$$

վերջավոր սահմանը: Մյուս կողմից, քանի որ դրական անդամներով $\{s_n^+\}$ և $\{s_n^-\}$ հաջորդականությունները մոնոտոն աճում են*) ու վերևից սահմանափակ են (օրինակ σ-ով), հետևաբար գոյություն ունեն նաև

$$\lim_{n\to\infty}s_n^+ = s^+, \quad \lim_{n\to\infty}s_n^- = s^- \tag{12}$$

վերջավոր սահմանները: Այժմ, եթե (12) սահմանների հաշվառումով (10) հավասարություններից առաջինում անցնենք սահմանի, երբ n-ը ձգտում է անսահմանության, կստանանք, որ $\{s_n\}$ հաջորդականությունն ունի վերջավոր սահման.

$$\lim_{n\to\infty}s_n = \lim_{n\to\infty}(s_n^+ - s_n^-) = \lim_{n\to\infty}s_n^+ - \lim_{n\to\infty}s_n^- = s^+ - s^-, \tag{13}$$

ինչն էլ նշանակում է, որ (8)-ը զուգամետ շարք է:

Իպա

Ինչպես տեսնում ենք, զուգամետ նշանափոխ շարքի գումարը հավասար է իր դրական անդամների գումարից հանած բացասական անդամների բացարձակ արժեքների գումարը:

Օրինակ 2: Պարզել հետևյալ շարքի զուգամիտության հարցը՝

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2} = \frac{\sin\alpha}{1^2} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n\alpha}{n^2} + \cdots, \tag{բ}$$

որտեղ α-ն կամայական իրական հաստատուն է:

Լուծում: Խնդիրը լուծելու համար տրված շարքի հետ մեկտեղ դիտարկենք հետևյալ շարքերը՝

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right| = \left|\frac{\sin\alpha}{1^2}\right| + \left|\frac{\sin 2\alpha}{2^2}\right| + \cdots + \left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right| + \cdots, \tag{գ}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots: \tag{դ}$$

Ինչպես գիտենք, (դ)-ն զուգամետ շարք է [59,o4]: Մյուս կողմից, քանի որ (գ) շարքի անդամներն ակնհայտորեն չեն գերազանցում (դ) շարքի համապատասխան անդամները, հետևաբար այն նույնպես զուգամետ շարք է [58,p7]: Օգտվելով թեորեմ 2-ից, կստանանք, որ կամայական α իրական հաստատունի համար զուգամետ է նաև (բ) շարքը:

---

*) Տե՛ս 12-րդ էջի տողատակի պարզաբանումը:

Նշենք, որ թեորեմ 2-ը նշանափոխ շարքի զուգամիտության բավարար, բայց ոչ անհրաժեշտ պայման է: Այսինքն, նշանափոխ շարքի անդամների բացարձակ արժեքներից կազմած շարքի զուգամիտությունից հետևում է տրված շարքի զուգամիտությունը, բայց հակառակը, ընդհանրապես ասած, ճիշտ չէ՝ նշանափոխ շարքի զուգամիտությունից չի հետևում այդ շարքի անդամների բացարձակ արժեքներից կազմած շարքի զուգամիտությունը:

Օրինակ 3: Ինչպես տեսանք **[58,o3]**, (ա)-ն զուգամետ շարք է, մինչդեռ այդ շարքի անդամների բացարձակ արժեքներից կազմած շարքը տարամիտում է:

Այժմ, օգտվելով հաջորդականության զուգամիտության սկզբունքից **[19,թ4]** և նկատի ունենալով, որ զուգամետ շարքի գումարը հավասար է իր մասնակի գումարների հաջորդականության սահմանին, ձևակերպենք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 3: *Որպեսզի կամայական անդամներով (8) շարքը լինի զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ ցանկացած ε դրական թվի համար գոյություն ունենա այնպիսի n_0 համար, որ այդ համարից սկսած, կամայական m բնական թվի համար տեղի ունենա*

$$|s_{n+m} - s_n| < \varepsilon$$

կամ որ նույնն է՝

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m}| < \varepsilon \qquad (14)$$

անհավասարությունը:

Այլ խոսքով, որպեսզի կամայական անդամներով շարքը լինի զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ գոյություն ունենա համար, որից սկսած այդ շարքի ցանկացած թվով իրար հաջորդող անդամների գումարը բացարձակ արժեքով փոքր լինի նախապես տրված կամայական դրական թվից:

Նշենք, որ նշանափոխ շարքի զուգամիտության անհրաժեշտ և բավարար պայմանը գործնականում գրեթե պիտանի չէ, թեև այդ պայմանի տեսական կարևորությունը անժխտելի է:

Վերջում ներմուծենք նաև նշանափոխ շարքի բացարձակ զուգամիտության և պայմանական զուգամիտության հասկացությունները:

Սահմանում 3: *Նշանափոխ շարքը կոչվում է բացարձակ զուգամետ շարք, եթե այդ շարքի հետ մեկտեղ զուգամիտում է նրա անդամների բացարձակ արժեքներից կազմած շարքը:*

Թեորեմ 2-ի շնորհիվ, որպեսզի նշանափոխ շարքը լինի բացարձակ զուգամետ, բավական է, որ նրա անդամների բացարձակ արժեքներից կազմած շարքը լինի զուգամետ:

Սահմանում 4: *Նշանափոխ շարքը կոչվում է պայմանական զուգամետ շարք, եթե այն զուգամետ է, իսկ նրա անդամների բացարձակ արժեքներից կազմած շարքը՝ տարամետ:*

Օրինակ 4: Պարզել հետևյալ շարքի զուգամիտության բնույթը՝

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} + \cdots : \qquad (\text{ե})$$

Քանի որ դիտարկվող շարքի անդամների բացարձակ արժեքներից կազմած շարքը զուգամետ է, հետևաբար այն բացարձակ զուգամետ շարք է:

Օրինակ 5: Պարզել (ա) շարքի զուգամիտության բնույթը:

Լուծում: Քանի որ (ա)-ն զուգամետ շարք է (տե՛ս օրինակ 1-ը), իսկ նրա անդամների բացարձակ արժեքներից կազմած շարքը՝ տարամետ, հետևաբար այն պայմանական զուգամետ շարք է:

Ամփոփելով վերոգրյալ արդյունքները՝ ստանում ենք հետևյալ եզրակացությունը՝

Նշանափոխ շարքը կարող է լինել.

ա) բացարձակ զուգամետ, բ) պայմանական զուգամետ, գ) տարամետ:

Նշանափոխ շարքերին վերաբերող մեր ուսումնասիրություններն ավարտենք հետևյալ երկու թեորեմներով՝

Թեորեմ 4: *Բացարձակ զուգամետ շարքի անդամների կամայական վերադասավորումից ստացած շարքը նույնպես բացարձակ զուգամետ է, ընդ որում այդ շարքի գումարը կախված չէ նրա անդամների դասավորությունից:*

Թեորեմ 5: *Եթե նշանափոխ շարքը պայմանական զուգամետ շարք է, իսկ a -ն՝ կամայական թիվ, ապա այդ շարքը կարելի է այնպես վերադասավորել, որ նրա գումարը հավասար լինի a -ի: Ավելին, պայմանական զուգամետ շարքը կարելի է այնպես վերադասավորել, որ այն դառնա տարամետ:*

§61. Ֆունկցիոնալ շարքեր: Հավասարաչափ զուգամիտություն: Ֆունկցիոնալ շարքի զուգամիտության տիրույթը: Կանոնավոր զուգամիտող ֆունկցիոնալ շարքեր: Թեորեմներ ֆունկցիոնալ շարքի գումարի անընդհատության, անդամ առ անդամ ինտեգրման և ածանցման մասին:

Անցնելով ֆունկցիոնալ շարքերի ուսումնասիրությանը՝ դիտարկենք միևնույն X միջակայքում որոշված ֆունկցիաների

$$f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ... \qquad (1)$$

հաջորդականությունը*) և ենթադրենք դիտարկվող միջակայքին պատկանող x -ի յուրաքանչյուր արժեքի համար տրված ֆունկցիոնալ հաջորդականությունից ստացված թվային հաջորդականությունն ունի վերջավոր սահման.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \left(|f(x)| < +\infty\right): \qquad (2)$$

Քանի որ x -ի վերցրած արժեքով (2) սահմանը որոշվում է միարժեքորեն, հետևաբար այն նույնպես x -ի ֆունկցիա է (որոշված X միջակայքում):

Սահմանում 1: *(2) հավասարության միջոցով որոշվող $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է (1) ֆունկցիոնալ հաջորդականության սահմանային ֆունկցիա:*

Թվային հաջորդականության սահմանի սահմանման համաձայն [19,u1] (2) հավասարությունը նշանակում է, որ բավական է X միջակայքում ընտրել x -ի որևէ արժեք, որպեսզի ցանկացած ε դրական թվի համար գոյություն ունենա այնպիսի n_0 համար, որ այդ համարից սկսած տեղի ունենա

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad (3)$$

---

*) X միջակայքը կարող է լինել վերջավոր կամ անվերջ, ինչպես նաև՝ փակ, բաց կամ կիսաբաց:

անհավասարությունը: Հասկանալի է, որ եթե X միջակայքում ընտրենք x-ի մեկ այլ արժեք, ապա, ընդհանրապես ասած, (1) ֆունկցիոնալ հաջորդականությունից կստանանք մեկ այլ թվային հաջորդականություն և նախկին ε-ի համար նշված n_0 համարը կարող է արդեն պիտանի չլինել (փոքր լինել): Նման պարագայում անհրաժեշտ է n_0 արժեքը փոխարինել նոր՝ ավելի մեծ արժեքով: Բայց դիտարկվող միջակայքում x-ն ընդունում է անվերջ քանակությամբ արժեքներ, այնպես որ մենք գործ ունենք անվերջ քանակությամբ իրարից տարբեր զուգամետ թվային հաջորդականությունների հետ, որոնցից յուրաքանչյուրի դեպքում տրված ε-ի համար գոյություն ունի n-ի այնպիսի արժեք, որից սկսած տեղի ունի (3) անհավասարությունը:

Բնական հարց է ծագում. *գոյություն ունի՞ արդյոք n-ի այնպիսի արժեք, որը տրված ε-ի համար ընդունակ լինի սպասարկելու այդ բոլոր հաջորդականությունները:*

Սահմանում 2: *Կասենք, որ X միջակայքում (1) ֆունկցիոնալ հաջորդականությունն իր սահմանային $f(x)$ ֆունկցիային զուգամիտում է x-ի նկատմամբ հավասարաչափ, եթե ցանկացած ε դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի n_0 համար, որ այդ համարից սկսած (3) անհավասարությունը տեղի ունի X միջակայքի բոլոր x-երի համար միաժամանակ:*

Օրինակ 1: [0;1] միջակայքում դիտարկելով ֆունկցիաների

$$f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2},\quad g_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}\quad (n=1,2,\ldots) \qquad (ա)$$

հաջորդականությունները՝ նկատում ենք, որ n-ը անսահմանության ձգտելիս երկու հաջորդականություններն էլ զուգամիտում են $\varphi(x)\equiv 0$ ֆունկցիային [21,o6]: Սակայն կարելի է համոզվել, որ $\{f_n(x)\}$ հաջորդականությունը տրված միջակայքում $\varphi(x)$ սահմանային ֆունկցիային զուգամիտում է x-ի նկատմամբ հավասարաչափ, իսկ $\{g_n(x)\}$ հաջորդականությունը՝ ոչ:

Այժմ դիտարկենք (1) հաջորդականության ֆունկցիաներից կազմած

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)+\cdots \qquad (4)$$

արտահայտությունը:

Սահմանում 3: $f_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ *ֆունկցիաներից կազմած (4) արտահայտությունը կոչվում է $f_n(x)$ անդամներով ֆունկցիոնալ շարք:*

Դիտարկվող ֆունկցիոնալ շարքի մեջ x-ի փոխարեն տեղադրելով X միջակայքին պատկանող իրարից տարբեր արժեքներ, կստանանք իրարից տարբեր թվային շարքեր, որոնք կարող են լինել ինչպես զուգամետ, այնպես էլ տարամետ:

ԳԼՈՒԽ XI

Սահմանում 4: *X միջակայքում որոշված $f_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ ֆունկցիաներից կազմած (4) ֆունկցիոնալ շարքի զուգամիտության տիրույթ ասելով կհասկանանք այդ միջակայքին պատկանող այն արժեքների բազմությունը, որոնցից յուրաքանչյուրի համար (4) ֆունկցիոնալ շարքից ստացած թվային շարքը զուգամետ է :*

Օրինակ 2: Գտնել հետևյալ ֆունկցիոնալ շարքի զուգամիտության տիրույթը՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots : \qquad (բ)$$

Լուծում: Նկատի ունենալով, որ $|x|<1$ պայմանին բավարարող x-երի համար (բ) ֆունկցիոնալ շարքից ստացվող թվային շարքերը զուգամետ են՝ ընդ որում զուգամիտում են $\frac{1}{1-x}$ ֆունկցիային [58,o1].

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x} \quad (-1<x<1),$$

իսկ $|x|\geq 1$ պայմանին բավարարող x-երի համար՝ տարամետ, եզրակացնում ենք, որ դիտարկվող ֆունկցիոնալ շարքի զուգամիտության տիրույթը $(-1;1)$ միջակայքն է:

Ենթադրելով, որ (4) ֆունկցիոնալ շարքի զուգամիտության տիրույթը X միջակայքն է՝ $f(x)$-ով, $s_n(x)$-ով և $r_n(x)$-ով համապատասխանաբար նշանակենք այդ շարքի գումարը, նրա n-րդ մասնակի գումարը և n-րդ մնացորդի գումարը [58,u2,u3].

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad s_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x), \quad r_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \quad (n=1,2,\ldots) : \qquad (5)$$

Ակնհայտ է, որ X միջակայքի յուրաքանչյուր կետում տեղի ունեն [58,(6)]

$$f(x)=s_n(x)+r_n(x) \qquad (6)$$

կամ որ նույնն է՝

$$r_n(x)=f(x)-s_n(x) \quad (n=1,2,\ldots) \qquad (6')$$

հավասարությունները:

Սահմանում 5: *Կասենք, որ (4) ֆունկցիոնալ շարքը X միջակայքում ըստ x-ի հավասարաչափ է զուգամիտում իր $f(x)$ գումարին, եթե n-ը անսահմանության ձգտելիս այդ շարքի մասնակի գումարների $\{s_n(x)\}$ հաջորդականությունը x-ի նկատմամբ հավասարաչափ է զուգամիտում $f(x)$ ֆունկցիային կամ որ նույնն է՝ n-ը անսահմանության ձգտելիս (4) շարքի n-րդ մնացորդների գումարներից կազմած $\{r_n(x)\}$ հաջորդականությունը x-ի նկատմամբ հավասարաչափ է ձգտում զրոյի:*

Օգտվելով ֆունկցիոնալ հաջորդականության հավասարաչափ զուգամիտությանը վերաբերող սահմանումից՝ կարող ենք ֆունկցիոնալ շարքի հավասարաչափ զուգամիտությունը սահմանել նաև հետևյալ կերպ՝

Սահմանում 6: *Կասենք, որ X միջակայքում $f(x)$ ֆունկցիային զուգամիտող (4) ֆունկցիոնալ շարքն այդ միջակայքում ըստ x -ի հավասարաչափ է զուգամիտում իր գումարին, եթե ցանկացած ε դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի n_0 համար, որ այդ համարից սկսած X միջակայքի բոլոր x -երի համար միաժամանակ տեղի ունի*

$$|s_n(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{7}$$

կամ որ նույնն է՝

$$|r_n(x)| < \varepsilon \tag{7}$$

անհավասարությունը:

Անցնելով կանոնավոր զուգամիտող ֆունկցիոնալ շարքի հասկացությանը ծանոթանալուն՝ բերենք հետևյալ սահմանումը՝

Սահմանում 7: *Կասենք, որ (4) ֆունկցիոնալ շարքը կանոնավոր է զուգամիտում X միջակայքում, եթե գոյություն ունի դրական անդամներով այնպիսի զուգամետ շարք.*

$$\sum_{1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n + \cdots, \tag{8}$$

որ նշված միջակայքի ցանկացած կետում տեղի ունեն

$$|f_n(x)| \le c_n \quad (n = 1,2,...) \tag{9}$$

անհավասարությունները:

Այլ խոսքով, (4) ֆունկցիոնալ շարքը կոչվում է կանոնավոր զուգամետ X միջակայքում, եթե այդ շարքի անդամները նշված միջակայքում բացարձակ արժեքով չեն գերազանցում դրական անդամներով և զուգամետ որևէ թվային շարքի համապատասխան անդամները:

Սահմանում 8: *Նախորդ սահմանման մեջ մասնակցող ֆունկցիոնալ շարքը կոչվում է X միջակայքում (8) թվային շարքով մաժորվող շարք, իսկ (8) թվային շարքը՝ նույն միջակայքում (4) ֆունկցիոնալ շարքի մաժորանտ շարք:*

Օրինակ 3: Ապացուցել, որ [60,o2]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} = \frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n^2} + \cdots \tag{գ}$$

ֆունկցիոնալ շարքը կանոնավոր է զուգամիտում ամբողջ թվային առանցքի վրա:

Լուծում: Խնդիրը լուծելու համար (գ) շարքի հետ մեկտեղ դիտարկենք դրական անդամներով

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

զուգամետ շարքը [59,o4]:

Քանի որ x -ի ցանկացած արժեքի համար տեղի ունեն

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2} \quad (n = 1,2,...)$$

ակնհայտ անհավասարություններն, ուստի, համաձայն 7-րդ սահմանման, ամբողջ թվային առանցքի վրա դիտարկվող շարքը կանոնավոր է զուգամիտում:

ԳԼՈՒԽ XI

Այժմ ապացուցենք ֆունկցիոնալ շարքերի հավասարաչափ զուգամիտությանը վերաբերող հետևյալ հայտանիշը՝

Թեորեմ 1: *(Վեյերշտրաս) Եթե որևէ միջակայքում (4) ֆունկցիոնալ շարքն իր գումարին կանոնավոր է զուգամիտում, ապա նույն միջակայքում այն նշված գումարին զուգամիտում է x -ի նկատմամբ հավասարաչափ:*

Ապացույց: Դիցուք (4) ֆունկցիոնալ շարքը X միջակայքում իր $f(x)$ գումարին կանոնավոր է զուգամիտում և (8)-ը դիտարկվող շարքի մաժորանտ շարք է:

(8) շարքի գումարը, n -րդ $(n=1,2,...)$ մասնակի գումարը և n -րդ մնացորդի գումարը համապատասխանաբար նշանակելով s -ով, s_n-ով և σ_n-ով՝ կստանանք [58,(6')]

$$\sigma_n = s - s_n \quad (n=1,2,...): \tag{10}$$

Քանի որ s -ը (8) շարքի գումարն է, հետևաբար տեղի ունեն

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s, \quad \lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0 \tag{11}$$

հավասարությունները [58,թ2]: Այնուհետև, օգտվելով (9) անհավասարություններից, X միջակայքի ցանկացած կետում (4) ֆունկցիոնալ շարքի n -րդ մնացորդի $(n=1,2,...)$ գումարի համար կստանանք [18,(3)]

$$|r_n(x)| = |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots| \le |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \cdots \le c_{n+1} + c_{n+2} + \cdots$$

կամ որ նույնն է՝

$$|r_n(x)| \le \sigma_n$$

գնահատականը: Դիտարկվող ֆունկցիոնալ շարքի մնացորդների գումարների համար ստացած գնահատականներից և (11) հավասարություններից երկրորդից հետևում է [20,(8)], որ ցանկացած ε դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի n_0 համար, որ այդ համարից սկսած X միջակայքի բոլոր x -երի համար միաժամանակ տեղի ունի (7) անհավասարությունը, ինչն էլ, համաձայն սահմանման, նշանակում է, որ նշված միջակայքում (4) ֆունկցիոնալ շարքն ըստ x -ի հավասարաչափ է զուգամիտում իր գումարին:

Իպա

Օրինակ 4: Պարզել հետևյալ ֆունկցիոնալ շարքերի զուգամիտության բնույթը՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \tag{ղ}$$

եթե

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n \ne 0,\ n=1,2,...) \tag{ե}$$

թվային շարքը զուգամիտում է բացարձակ [60,u3]:

Լուծում: Նկատի ունենալով, որ ցանկացած x -ի համար տեղի ունեն [18,(5')]

$$|a_n \sin nx| \le |a_n|, \quad |a_n \cos nx| \le |a_n| \quad (n=1,2,....)$$

ակնհայտ գնահատականները և հաշվի առնելով, որ (ե)-ն բացարձակ զուգամետ շարք

է՝ եզրակացնում ենք, որ թվային առանցքի ցանկացած միջակայքում դիտարկվող շարքերը մաժորվում են դրական անդամներով

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$$

շարքով: Ինչպես գիտենք, վերոգրյալը նշանակում է, որ թվային առանցքի ցանկացած միջակայքում (դ) ֆունկցիոնալ շարքերը կանոնավոր են զուգամիտում իրենց գումարներին, որտեղից էլ թեորեմ 1-ի շնորհիվ ստանում ենք, որ թվային առանցքի ցանկացած միջակայքում տրված շարքերն իրենց գումարներին զուգամիտում են x -ի նկատմամբ հավասարաչափ:

Անցնենք (4) շարքի ֆունկցիոնալ հատկություններին ծանոթանալուն:

Ինչպես գիտենք, որևէ միջակայքում որոշված վերջավոր թվով անընդհատ ֆունկցիաների գումարը նույնպես այդ միջակայքում որոշված անընդհատ ֆունկցիա է [24,թ1]:

Պարզվում է՝ որոշակի պայմանների բավարարման դեպքում անընդհատ ֆունկցիաների գումարին վերաբերող պնդումը պահպանվում է նաև (4) շարքի պարագայում:

Թեորեմ 2: *Եթե X միջակայքում որոշված $f_n(x)$ $(n=1,2,...)$ ֆունկցիաներն անընդհատ են այդ միջակայքում և նրանցից կազմած (4) շարքն ըստ x -ի հավասարաչափ է զուգամիտում նշված միջակայքում, ապա դիտարկվող շարքի գումարը նույնպես անընդհատ է տրված միջակայքում:*

Կարելի է ապացուցել, որ (4) շարքի հավասարաչափ զուգամետ լինելը բավարար է, բայց ոչ անհրաժեշտ, որ անընդհատ ֆունկցիաների պարագայում այդ շարքի գումարը նույնպես լինի անընդհատ X միջակայքում: Այդ կապակցությամբ ձևակերպենք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 3: *Եթե X միջակայքում որոշված անընդհատ և դրական ֆունկցիաներից կազմած (4) շարքի գումարը նույնպես անընդհատ է այդ միջակայքում, ապա նշված շարքն ըստ x -ի հավասարաչափ է զուգամիտում տրված միջակայքում:*

Անցնելով (4) շարքի մյուս ֆունկցիոնալ հատկությանը ծանոթանալուն՝ հիշենք, որ վերջավոր թվով ինտեգրելի ֆունկցիաների գումարի որոշյալ ինտեգրալը որևէ միջակայքում հավասար է այդ ֆունկցիաների որոշյալ ինտեգրալների գումարին՝ նույն միջակայքում [40,2°]:

Պարզվում է՝ վերջավոր թվով ինտեգրելի ֆունկցիաների գումարին վերաբերող պնդումն, ընդհանրապես ասած, իր ուժը կորցնում է անվերջ գումարի պարագայում: Սակայն ֆունկցիոնալ շարքի հավասարաչափ զուգամետ լինելը փոխում է իրավիճակը նաև այս դեպքում:

Թեորեմ 4: *Եթե $X=[a,b]$ միջակայքում ինտեգրելի $f_n(x)$ $(n=1,2,...)$ ֆունկցիաներից կազմած (4) շարքն այդ միջակայքում ըստ x -ի հավասարաչափ է զուգամիտում իր $f(x)$ գումարին, ապա նշված միջակայքում տրված շարքը կարելի է անդամ առ անդամ ինտեգրել.*

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f_1(x)dx+\int_a^b f_2(x)dx+\cdots+\int_a^b f_n(x)dx+\cdots: \qquad (12)$$

Այսպիսով, ինտեգրելի ֆունկցիաներից կազմած հավասարաչափ զուգամետ ֆունկցիոնալ շարքի գումարի ինտեգրալը հավասար է այդ շարքի անդամների ինտեգրալների գումարին:

Կարելի է ապացուցել, որ (4) շարքի հավասարաչափ զուգամետ լինելը բավարար է, բայց ոչ անհրաժեշտ, որ $[a,b]$ միջակայքում ինտեգրելի ֆունկցիաների պարագայում այդ շարքի համար տեղի ունենա (12) հավասարությունը:

Վերջում նշելով, որ վերջավոր թվով ածանցելի ֆունկցիաների գումարի ածանցյալին վերաբերող պնդումն էլ է [28,p1"], ընդհանրապես ասած, իր ուժը կորցնում անվերջ գումարի պարագայում՝ ձևակերպենք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 5: *Եթե $X=[a,b]$ միջակայքում անընդհատ ածանցյալ ունեցող $f_n(x)$ $(n=1,2,...)$ ֆունկցիաներից կազմած (4) շարքը նշված միջակայքում զուգամիտում է $f(x)$ ֆունկցիային, իսկ $f_n'(x)$ ածանցյալներից կազմած շարքն էլ ըստ x-ի հավասարաչափ է զուգամիտում այդ միջակայքում, ապա տրված շարքը կարելի է անդամ առ անդամ ածանցել $[a,b]$ միջակայքում.*

$$f'(x)=f_1'(x)+f_2'(x)+\cdots+f_n'(x)+\cdots: \tag{13}$$

Այսպիսով, եթե որևէ միջակայքում անընդհատ ածանցյալ ունեցող ֆունկցիաներից կազմած շարքը զուգամետ է այդ միջակայքում, իսկ նրա անդամների ածանցյալներից կազմած շարքը՝ հավասարաչափ զուգամետ նույն միջակայքում, ապա տրված շարքի գումարի ածանցյալը հավասար է այդ շարքի անդամների ածանցյալների գումարին:

§62. Աստիճանային շարքեր: Աբելի թեորեմը: Աստիճանային շարքի զուգամիտության շառավիղը: Աստիճանային շարքերի հատկությունները:

Ֆունկցիոնալ շարքերի մեջ հատուկ հետաքրքրություն են ներկայացնում աստիճանային շարքերը:

Սահմանում 1:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{1}$$

ֆունկցիոնալ շարքը կոչվում է աստիճանային շարք, իսկ a_n $(n=0,1,...)$ հաստատունները՝ այդ շարքի գործակիցներ:

(1) աստիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթը [61,u4] գտնելու համար նախ ապացուցենք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 1: *(Աբել) Եթե (1) աստիճանային շարքը զուգամիտում է x-ի որևէ x_0 $(x_0 \neq 0)$ արժեքի համար, ապա այն բացարձակ զուգամիտում է նաև*

$$|x|<|x_0| \tag{2}$$

պայմանին բավարարող x-երի համար: Եթե (1) աստիճանային շարքը տարամիտում է x-ի որևէ x_1 արժեքի համար, ապա այն տարամիտում է նաև

$$|x| > |x_1| \tag{3}$$

պայմանին բավարարող x -երի համար:

Ապացույց: Դիցուք (1) շարքը զուգամիտում է x -ի որևէ x_0 $(x_0 \neq 0)$ արժեքի համար: Կատարված ենթադրությունը նշանակում է, որ զուգամիտում է

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n + \cdots \tag{4}$$

թվային շարքը, որտեղից էլ հետևում է, որ n -ը անսահմանության ձգտելիս այդ շարքի ընդհանուր անդամը ձգտում է զրոյի [58,թ5].

$$\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0: \tag{5}$$

Մյուս կողմից, քանի որ վերջավոր սահման ունեցող հաջորդականությունը սահմանափակ է [19,թ3], հետևաբար գոյություն ունի այնպիսի M դրական թիվ, որ ցանկացած n -ի համար տեղի ունի

$$|a_n x_0^n| \leq M \tag{6}$$

անհավասարությունը [19,(5)]:

Այժմ վերցնենք (2) պայմանին բավարարող x -ի որևէ արժեք և դիտարկենք (1) շարքի անդամների բացարձակ արժեքներից կազմած շարքը.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = |a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \cdots + |a_n x^n| + \cdots: \tag{7}$$

Օգտվելով (6) անհավասարություններից՝ (7) շարքի ընդհանուր անդամի համար կստանանք [18,(5)]

$$|a_n x^n| = \left|a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n}\right| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n,$$

որտեղից, նկատի ունենալով (2) անհավասարությունը և կատարելով $q = |x / x_0|$ նշանակումը՝ կունենանք

$$|a_n x^n| \leq M q^n \quad (n = 0,1,...;\ 0 \leq q < 1): \tag{8}$$

Այնուհետև կազմելով

$$\sum_{n=0}^{\infty} M q^n = M + Mq + Mq^2 + \cdots + Mq^n + \cdots \tag{9}$$

զուգամետ շարքը [58,օ1] և (8) անհավասարությունների հաշվառումով համեմատելով դրական անդամներով (7) և (9) շարքերը [58,թ7,դ2]՝ համոզվում ենք, որ (7)-ը զուգամետ շարք է, ինչը նշանակում է, որ x -ի վերցրած արժեքի համար (1) աստիճանային շարքը զուգամիտում է բացարձակ [60,ա3,թ2]:

Անցնելով թեորեմի երկրորդ մասի ապացուցմանը, ենթադրենք x -ի որևէ x_1 արժեքի համար (1) շարքը տարամիտում է և ընտրենք (3) անհավասարությանը բավարարող x -ի կամայական արժեք:

ԳԼՈՒԽ XI

Եթե ենթադրենք, որ (1) շարքը զուգամետ է x-ի ընտրած արժեքի համար, ապա թեորեմի առաջին մասի պնդման համաձայն կստանանք, որ այն զուգամետ է նաև $x=x_1$ արժեքի համար, ինչը, համաձայն ենթադրության, հնարավոր չէ:

Ստացած հակասությունը ապացուցում է թեորեմի երկրորդ մասի պնդումը:

Իպա

Ֆունկցիոնալ (1) շարքի մեջ տեղադրելով $x=0$, կհամոզվենք, որ x-ի այդ արժեքի համար բոլոր աստիճանային շարքերը զուգամիտում են:

Կան աստիճանային շարքեր, որոնք ուրիշ ոչ մի արժեքի համար չեն զուգամիտում:

Օրինակ 1: Գտնել հետևյալ շարքի զուգամիտության տիրույթը՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n = x+2!x^2+\cdots+n!x^n+\cdots: \qquad (ա)$$

Լուծում: Վերցնենք x-ի որևէ x_0 դրական արժեք և հաշվենք հետևյալ սահմանը [21,p1,p2՝].

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!x_0^{n+1}}{n!x_0^n} = x_0\lim_{n\to\infty}(n+1) = +\infty:$$

Համաձայն Դալամբերի հայտանիշի [59,p1]՝ ստացած հավասարությունը նշանակում է, որ դրական անդամներով

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!x_0^n$$

շարքը տարամետ է, այսինքն $x=x_0$ արժեքի համար տարամետ է (ա) շարքը: Քանի որ x_0-ն կամայական դրական թիվ է, հետևաբար, Աբելի թեորեմի շնորհիվ, բացի $x=0$ արժեքից դիտարկվող շարքն ամենուրեք տարամիտում է:

Կան նաև այնպիսի աստիճանային շարքեր, որոնք ամենուրեք (այսինքն x-ի բոլոր արժեքների համար) զուգամիտում են:

Օրինակ 2: Գտնել հետևյալ աստիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթը՝

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots: \qquad (բ)$$

Լուծում: Օգտվելով թվային շարքի զուգամիտության Դալամբերի հայտանիշից և x-ի ցանկացած դրական արժեքի համար հաշվելով [21,o6]

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{x^n}{n!}\right] = x\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

սահմանը՝ կստանանք, որ դիտարկվող շարքը x-ի դրական արժեքների համար զուգամիտում է: Օգտվելով Աբելի թեորեմից, կարող ենք պնդել, որ (բ) շարքը զուգամիտում է նաև x-ի բացասական արժեքների համար: Այսպիսով, ամբողջ թվային առանցքի վրա դիտարկվող շարքը (բացարձակ) զուգամիտում է:

Այժմ ենթադրենք գոյություն ունեն x-ի այնպիսի $\bar{x}$ արժեքներ, որոնց համար (1) աստիճանային շարքը զուգամիտում է, և դիտարկենք այդ արժեքներից կազմված $\bar{X}=\{\bar{x}\}$ բազմությունը:

Հնարավոր է երկու դեպք կամ $\overline{X}$ բազմությունը վերևից սահմանափակ է կամ՝ ոչ [18,u30]: Երկրորդ դեպքում x-ի ինչպիսի արժեք էլ վերցնենք, ակնհայտորեն գոյություն կունենա $\overline{X}$ բազմությանը պատկանող այնպիսի $\overline{x}$ արժեք, որ տեղի կունենա $|x|<|\overline{x}|$ անհավասարությունը, որտեղից էլ Աբելի թեորեմի շնորհիվ կստանանք, որ վերցրած x-ի համար (1) շարքը զուգամիտում է բացարձակ:

Այսպիսով, եթե $\overline{X}$ բազմությունը վերևից սահմանափակ չէ, ապա (1) շարքը ամենուրեք բացարձակ զուգամիտում է:

Այնուհետև ենթադրենք $\overline{X}$ բազմությունը վերևից սահմանափակ է և R-ը այդ բազմության ճշգրիտ վերին եզրն է $(R>0)$ [18,u32]:

Պարզ է, որ քննարկվող դեպքում $|x|>R$ պայմանին բավարարող x-երի համար (1) շարքը տարամիտում է: Պարզ է նաև, որ եթե վերցնենք x-ի որևէ արժեք, որը բավարարում է $|x|<R$ պայմանին, ապա թվային բազմության ճշգրիտ վերին եզրի սահմանման համաձայն անհրաժեշտաբար գոյություն կունենա $\overline{X}$ բազմությանը պատկանող այնպիսի $\overline{x}$ արժեք, որ տեղի կունենա $|x|<|\overline{x}|\le R$ անհավասարությունը, որտեղից, համաձայն Աբելի թեորեմի, կստանանք, որ վերցրած x-ի համար (1) շարքը զուգամիտում է բացարձակ:

Այսպիսով, եթե R-ը այն $\overline{x}$ արժեքներից կազմված բազմության ճշգրիտ վերին եզրն է, որոնց համար (1) աստիճանային շարքը զուգամիտում է, ապա $(-\infty,-R)$ և $(R,+\infty)$ միջակայքերում տրված շարքը տարամիտում է, իսկ $(-R,R)$ միջակայքում՝ բացարձակ զուգամիտում:

Նշենք, որ $(-R,R)$ միջակայքի ծայրակետերի մասին, (1) շարքի զուգամիտության իմաստով, որևէ ընդհանուր պնդում անել հնարավոր չէ՝ յուրաքանչյուր շարքի համար անհրաժեշտ է կատարել լրացուցիչ հետազոտություն և պարզել $x=\pm R$ կետերում այդ շարքը զուգամիտո՞ւմ է, թե՞ ոչ:

Սահմանում 2: *Այն $\overline{x}$ արժեքներից կազմված բազմության ճշգրիտ վերին եզրը, որոնց համար (1) աստիճանային շարքը զուգամիտում է, կոչվում է այդ շարքի զուգամիտության շառավիղ:*

Ամփոփելով շարադրված դատողությունները, կարող ենք ձևակերպել հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 2: *Աստիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթը բաց, փակ կամ կիսաբաց մի միջակայք է, որի միջնակետը կոորդինատների սկզբնակետն է, ընդ որում զուգամիտության միջակայքի ներսում տրված շարքը զուգամիտում է բացարձակ:*

Նկատենք, որ ամենուրեք տարամետ (բացի $x=0$ արժեքից) աստիճանային շարքի զուգամիտության միջակայքը վերածվում է կոորդինատների սկզբնակետի $(R=0)$, իսկ ամենուրեք զուգամետ աստիճանային շարքի զուգամիտության միջակայքը համընկնում է ամբողջ թվային առանցքին $(R=+\infty)$:

ԳԼՈՒԽ XI

Բնականաբար, հարց է ծագում. *ինչպե՞ս գտնել աստիճանային շարքի զուգամիտության շառավիղը:*

Ձևակերպած հարցին պատասխանելու համար (1) շարքի հետ մեկտեղ նորից դիտարկենք դրական անդամներով (7) շարքը, որն այս անգամ ներկայացնենք

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n||x|^n = |a_0| + |a_1||x| + |a_2||x|^2 + \cdots + |a_n||x|^n + \cdots \qquad (7')$$

տեսքով և այդ շարքի ընդհանուր անդամը նշանակենք u_n-ով.

$$u_n = |a_n||x|^n \quad (n = 0,1,\ldots):$$

Ենթադրելով, որ գոյություն ունի

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L \quad (L \geq 0) \qquad (10)$$

սահմանը՝ կունենանք [18,(6)]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}||x|^{n+1}}{|a_n||x|^n} = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|L:$$

Նկատենք, որ համաձայն Դալամբերի հայտանիշի, $L = 0$ դեպքում (7′) շարքն ամենուրեք զուգամիտում է, որտեղից էլ հետևում է, որ այդ դեպքում (1) շարքն ամենուրեք բացարձակ զուգամիտում է: Այնուհետև, նույն հիմնավորմամբ, $|x|L < 1$ կամ որ նույնն է՝ $|x| < 1/L$, $(L \neq 0)$ անհավասարությանը բավարարող x-երի համար (7′) շարքը դարձյալ զուգամիտում է, որտեղից հետևում է, որ այդ նույն x-երի համար (1) շարքը զուգամիտում է բացարձակ, իսկ $|x|L > 1$ կամ որ նույնն է՝ $|x| > 1/L$ անհավասարությանը բավարարող x-երի համար այն տարամիտում է, ընդ որում այդ շարքի, հետևաբար նաև (1) շարքի ընդհանուր անդամը չի ձգտում զրոյի*), որտեղից հետևում է [58,h1], որ $|x| > 1/L$ անհավասարությանը բավարարող x-երի համար (1) շարքը ևս տարամիտում է:

Ամփոփելով վերոգրյալը, եզրակացնում ենք, որ (1) աստիճանային շարքի զուգամիտության շառավիղը կարող ենք հաշվել

$$R = \frac{1}{L}$$

կամ՝

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad (11)$$

բանաձևով:

---

*) Տե՛ս Դալամբերի հայտանիշի ապացույցի երկրորդ մասը:

Այսպիսով, (1) աստիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթը $-R$-ից մինչև R բաց, փակ կամ կիսաբաց միջակայք է, որտեղ R-ը որոշվում է (11) բանաձևով:

Նույն ձևով, օգտվելով դրական անդամներով շարքերի զուգամիտության Կոշիի հայտանիշից [59,թ2], կարող ենք համոզվել, որ (1) աստիճանային շարքի զուգամիտության շառավիղը կարելի է հաշվել

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} \tag{12}$$

բանաձևով:

Օրինակ 3: Գտնել հետևյալ աստիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթը՝

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2x)^n}{n}=2x-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{3}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{(2x)^n}{n}+\dots: \tag{գ}$$

Լուծում: Օգտվելով (11) բանաձևից՝ դիտարկվող շարքի զուգամիտության շառավղի համար կստանանք

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}2^n}{n}:\frac{(-1)^n2^{n+1}}{n+1}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}:$$

Այնուհետև, դժվար չէ համոզվել, որ $(-1/2;1/2)$ միջակայքի աջ ծայրակետում տրված շարքը համընկնում է

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\dots$$

շարքին և հետևաբար զուգամիտում է [60,o1], իսկ ձախ ծայրակետում՝

$$-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+\dots\right)$$

շարքին և հետևաբար տարամիտում է [58,o3]:

Ամփոփելով արդյունքները՝ ստանում ենք, որ (գ) շարքի զուգամիտության տիրույթը

$$\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$$

կիսաբաց միջակայքն է:

Անցնելով աստիճանային շարքերի հատկությունների շարադրմանը, ենթադրենք (1) շարքի զուգամիտության շառավիղը հավասար է R-ի $(R>0)$, և ապացուցենք հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ 3: *Իր զուգամիտության տիրույթում ընկած ցանկացած* $[-r,r]$ $(0<r<R)$ *միջակայքում (1) աստիճանային շարքն ըստ x-ի հավասարաչափ է զուգամիտում իր գումարին:*

Ապացույց: Դիցուք R-ը $(R>0)$ (1) աստիճանային շարքի զուգամիտության շառավիղն է, իսկ r-ը՝ R-ից փոքր որևէ դրական թիվ:

Համաձայն թեորեմ 2-ի, կատարված ենթադրությունից հետևում է, որ (1) շարքը բացարձակ զուգամիտում է $x=r$ արժեքի համար, ինչը նշանակում է,

որ զուգամիտում է

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n = |a_0| + |a_1|r + |a_2|r^2 + \cdots + |a_n|r^n + \cdots \qquad (13)$$

թվային շարքը: Այնուհետև պարզ է, որ $|x| \le r$ պայմանին բավարարող x-երի համար (1) շարքի անդամները չեն գերազանցում դրական անդամներով (13) զուգամետ շարքի համապատասխան անդամները: Հետևաբար $[-r,r]$, միջակայքում լինելով կանոնավոր զուգամետ շարք [61,u7], համաձայն Վեյերշտրասի թեորեմի [61,թ1], այն նշված միջակայքում ըստ x-ի հավասարաչափ է զուգամիտում իր գումարին*):

Իպա

Օրինակ 4: Ինչպես գիտենք

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

աստիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթը $(-1;1)$ միջակայքն է [61,o2]: Հետևաբար, համաձայն թեորեմ 3-ի, նշված միջակայքի մեջ ընկած ցանկացած $[-r,r]$ միջակայքում դիտարկվող շարքն ըստ x-ի հավասարաչափ է զուգամիտում իր գումարին:

Հետևանք 1: *Եթե R-ը $(R>0)$ (1) աստիճանային շարքի զուգամիտության շառավիղն է, ապա $-R$-ից մինչև R արժեքների մեջ ընկած x-երի համար այդ շարքի գումարն անընդհատ ֆունկցիա է:*

Ապացույց: Իրոք, եթե (1) շարքի զուգամիտության միջակայքի ներսում վերցնենք որևէ x_0 արժեք, ապա $(0,R)$ միջակայքում (R-ը դիտարկվող շարքի զուգամիտության շառավիղն է) կարող ենք ընտրել այնպիսի r արժեք, որ տեղի ունենա $|x_0| < r$ անհավասարությունը: Բայց, քանի որ դիտարկվող շարքի անդամներն ամենուրեք անընդհատ ֆունկցիաներ են [24,o1] և համաձայն նախորդ թեորեմի այն $[-r,r]$ միջակայքում ըստ x-ի հավասարաչափ է զուգամիտում իր գումարին, հետևաբար նշված միջակայքում և մասնավորապես x_0 կետում (1) շարքի գումարն անընդհատ ֆունկցիա է [61,թ2]:

Իպա

Հետևանք 2: *Եթե a և b թվերը գտնվում են (1) աստիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթի մեջ, ապա այդ շարքի գումարի ինտեգրալն a-ից մինչև b սահմաններում հավասար է տրված շարքի անդամների ինտեգրալների գումարին՝ նշված սահմաններում:*

Ապացույց: Իրոք, եթե a և b թվերը գտնվում են (1) շարքի զուգամիտության տիրույթի մեջ, ուրեմն $[a,b]$ միջակայքը կարելի է գցել այդ տիրույթում պարունակվող մի որևէ $[-r,r]$ միջակայքի մեջ, որտեղ, համաձայն նախորդ

---

*) Նկատենք, որ թեև r-ը կարող ենք անսահմանափակորեն մոտեցնել R-ին, սակայն այդտեղից դեռևս չի հետևում, որ (1) շարքը $[-R,R]$ միջակայքում ըստ x-ի հավասարաչափ է զուգամիտում:

թեորեմի, տրված շարքն ըստ x-ի հավասարաչափ է զուգամիտում իր գումարին: Բայց քանի որ դիտարկվող շարքի անդամները (որպես ամենուրեք անընդհատ ֆունկցիաներ) ինտեգրելի են ցանկացած միջակայքում [40,p2] և մասնավորապես $[a,b]$ միջակայքում, որտեղ նույնպես այդ շարքն ըստ x-ի հավասարաչափ է զուգամիտում իր գումարին, հետևաբար (1) աստիճանային շարքն a-ից մինչև b սահմաններում կարելի է անդամ առ անդամ ինտեգրել [61,p4]:

Իպա

Թեորեմ 4: *Իր զուգամիտության տիրույթի ներսում (1) աստիճանային շարքը կարելի է անդամ առ անդամ ածանցել.*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \tag{14}$$

ընդ որում ածանցման արդյունքում ստացված շարքի զուգամիտության շառավիղը հավասար է տրված շարքի զուգամիտության շառավղին:

Ապացույց: Թեորեմի առաջին մասն ապացուցելու համար նախ ցույց տանք, որ (1) շարքի զուգամիտության տիրույթի մեջ ընկած ցանկացած $[-r,r]$ $(0<r<R)$ միջակայքում*) այդ շարքի անդամների ածանցյալներից կազմած

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \tag{14'}$$

շարքն ըստ x-ի հավասարաչափ է զուգամիտում իր գումարին:

Այդ նպատակի համար (r,R) միջակայքում ընտրենք որևէ ρ արժեք: Քանի որ ընտրած արժեքի համար (1) շարքը զուգամիտում է, հետևաբար տեղի ունի

$$\lim_{n\to\infty} a_n \rho^n = 0$$

հավասարությունը: Մյուս կողմից, քանի որ վերջավոր սահման ունեցող հաջորդականությունը սահմանափակ է, հետևաբար գոյություն ունի այնպիսի M դրական թիվ, որ ցանկացած n-ի համար տեղի ունի

$$\left|a_n \rho^n\right| \le M \tag{15}$$

անհավասարությունը:

Այժմ եթե $[-r,r]$ միջակայքից վերցնենք x-ի որևէ արժեք, ապա (15) անհավասարությունների շնորհիվ (14') շարքի ընդհանուր անդամի բացարձակ արժեքի համար կունենանք

$$\left|n a_n x^{n-1}\right| = n\left|a_n\right|\left|x\right|^{n-1} = n\left|a_n\right|\rho^n \left|\frac{x}{\rho}\right|^{n-1} \frac{1}{\rho} \le n\frac{M}{\rho}\left|\frac{r}{\rho}\right|^{n-1},$$

որտեղից կատարելով $q=\dfrac{r}{\rho}$ $(0<q<1)$ նշանակումը՝ նշված բացարձակ

*) R-ը (1) շարքի զուգամիտության շառավիղն է:

արժեքի համար կստանանք

$$\left|na_n x^{n-1}\right| \le n\frac{M}{\rho}q^{n-1} \qquad (16)$$

գնահատականը: Դալամբերի հայտանիշի օգնությամբ համոզվելով, որ դրական անդամներով

$$\frac{M}{\rho}\sum_{n=0}^{\infty} nq^{n-1}$$

շարքը զուգամետ է և նկատի ունենալով, որ ցանկացած n-ի և $[-r,r]$ միջակայքի ցանկացած x-ի համար տեղի ունի (16) անհավասարությունը՝ կանոնավոր զուգամիտող շարքերին վերաբերող Վեյերշտրասի թեորեմի շնորհիվ կստանանք, որ $[-r,r]$ միջակայքում (14) շարքն ըստ x-ի հավասարաչափ է զուգամիտում իր գումարին:

Այսպիսով, (1) շարքի անդամներն այդ շարքի զուգամիտության տիրույթի մեջ ընկած $[-r,r]$ միջակայքում ունեն անընդհատ ածանցյալներ [27,(7)], և այդ ածանցյալներից կազմած շարքը նշված միջակայքում ըստ x-ի հավասարաչափ է զուգամիտում իր գումարին:

Ինչպես գիտենք, վերոգրյալ եզրակացությունից հետևում է, որ $[-r,r]$ միջակայքում տրված շարքը կարելի է անդամ առ անդամ ածանցել [61,թ5]: Քանի որ (1) շարքի զուգամիտության տիրույթի յուրաքանչյուր ներքին կետ կարելի է գցել այդ տիրույթի մեջ պարունակվող որևէ փակ միջակայքի մեջ, ուստի թեորեմի առաջին մասն ապացուցված է: Ավելին, վերոգրյալ դատողություններից հետևում է, որ (1) շարքի զուգամիտության տիրույթի յուրաքանչյուր ներքին կետում զուգամիտում է նաև (14) շարքը, այնպես որ այդ շարքի զուգամիտության շառավիղը փոքր չէ R-ից:

Թեորեմի երկրորդ մասն ապացուցելու համար մնում է ցույց տալ, որ (14′) շարքի զուգամիտության շառավիղը նաև մեծ չէ R-ից:

Համոզվելու համար, որ (14′) շարքի զուգամիտության շառավիղը մեծ չէ R-ից, ենթադրենք հակառակը, այսինքն ենթադրենք $R_1 > R$, որտեղ R_1-ը (14′) շարքի զուգամիտության շառավիղն է:

(R,R_1) միջակայքում ընտրելով x-ի որևէ x_1 արժեք և նկատի ունենալով հետևանք 2-ն ու (14′) շարքն անդամ առ անդամ ինտեգրելով 0-ից մինչև x_1 սահմաններում՝ կստանանք, որ (1) շարքը զուգամիտում է x_1 կետում: Ստացած հակասությունը նշանակում է, որ մեր ենթադրությունն այն մասին, որ (14′) շարքի զուգամիտության շառավիղը մեծ է R-ից, սխալ է:

Այսպիսով, (1) և (14′) շարքերն ունեն զուգամիտության նույն շառավիղը:

Իպա

Թեորեմ 4-ը հաջորդաբար կիրառելով (1) շարքից անդամ առ անդամ ածանցելով ստացվող նորանոր աստիճանային շարքերի համար՝ կստանանք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 5: *Զուգամիտության R $(R>0)$ շառավիղ ունեցող (1) աստիճանային շարքի գումարը մի ֆունկցիա է, որը $(-R,R)$ միջակայքում ունի իր բոլոր կարգի ածանցյալները: Ընդ որում այդ ածանցյալներից յուրաքանչյուրը մի շարքի գումար է, որը ստացվում է տրված շարքը համապատասխան թվով անգամ անդամ առ անդամ ածանցելով, և որի զուգամիտության շառավիղը հավասար է (1) շարքի զուգամիտության շառավղին:*

Վերջում դիտարկենք նաև $x-x_0$ երկանդամի աստիճաններով դասավորված, ընդհանուր տեսքի

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots \qquad (17)$$

աստիճանային շարքը, որը $x_0=0$ մասնավոր դեպքում համընկնում է (1) շարքին:

Քանի որ փոփոխականի

$$y = x - x_0 \qquad (18)$$

փոխարինումով (17) շարքը բերվում է (1) շարքին.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n = a_0 + a_1 y + \cdots + a_n y^n + \cdots, \qquad (17')$$

ուստի այն էապես չի տարբերվում այդ շարքից: Ենթադրելով, որ (17') շարքի զուգամիտության տիրույթը $(-R,R)$ միջակայքն է՝ կստանանք, որ $-R<x-x_0<R$ կամ որ նույնն է՝ $x_0-R<x<x_0+R$ անհավասարություններին բավարարող x-երի համար (17) շարքը զուգամիտում է, իսկ այդ միջակայքից դուրս՝ տարամիտում:

Այսպիսով, եթե փոփոխականի (18) փոխարինման շնորհիվ ընդհանուր տեսքի (17) աստիճանային շարքից ստացվող (17') շարքի զուգամիտության տիրույթը $(-R,R)$ միջակայքն է, ապա (17) շարքի զուգամիտության տիրույթն էլ x_0 միջնակետով (x_0-R, x_0+R) միջակայքն է:

Հասկանալի է, որ եթե (17') շարքի զուգամիտության տիրույթը փակ (կամ կիսաբաց) միջակայք է, ապա (17) շարքի զուգամիտության տիրույթն էլ է փակ (կամ կիսաբաց) միջակայք:

Օրինակ 5: Գտնել հետևյալ աստիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթը՝

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x+3)^n = x+3+(x+3)^2+\cdots+(x+3)^n+\cdots:$$

Լուծում: Փոփոխականի $y=x+3$ փոխարինման արդյունքում դիտարկվող շարքը կընդունի

$$y+y^2+\cdots+y^n+\cdots \qquad (դ)$$

տեսքը: Քանի որ (դ) շարքի զուգամիտության տիրույթը $(-1;1)$ միջակայքն է, հետևաբար տրված շարքի զուգամիտության տիրույթն էլ $(-4;-2)$ միջակայքն է:

ԳԼՈՒԽ XI

§63. Ֆունկցիայի վերլուծումը աստիճանային շարքի: Թեյլորի շարք: e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^\alpha$, $\ln(1+x)$ ֆունկցիաների վերլուծումը Մակլորենի շարքի:

Ֆունկցիաների տեսության մեջ հսկայական նշանակություն ունի տրված ֆունկցիան

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots, \tag{1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{2}$$

աստիճանային շարքերից որևէ մեկի գումարի տեսքով ներկայացնելու հնարավորության հարցի պարզումը:

Ձևակերպած հարցը պարզելու և հնարավորության դեպքում տրված ֆունկցիան (1) կամ (2) աստիճանային շարքի գումարի տեսքով ներկայացնելու համար ենթադրենք դիտարկվող $f(x)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթի x_0 կետում և նրա մի որևէ շրջակայքում գոյություն ունեն այդ ֆունկցիայի բոլոր կարգի ածանցյալները:

$f(x)$ ֆունկցիայի Թեյլորի բանաձևերում [32,(11),(15)].

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\left[(x-x_0)^n\right], \tag{3}$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n +$$

$$+ \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad \left(x_0 \le c \le x,\ x_0 \ge c \ge x\right) \tag{4}$$

n-ը շարունակ մեծացնելով՝ կգանք այդ ֆունկցիան հետևյալ անվերջ վերլուծության միջոցով ներկայացնելու մտքին՝

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots: \tag{5}$$

Սահմանում 1: *(5) ֆունկցիոնալ շարքի գործակիցները.*

$$f(x_0),\ \frac{f'(x_0)}{1!},\ \frac{f''(x_0)}{2!}, \ldots, \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \ldots \tag{6}$$

կոչվում են $f(x)$ ֆունկցիայի Թեյլորի գործակիցներ, իսկ այդ շարքը՝ $f(x)$ ֆունկցիայի Թեյլորի շարք՝ անկախ նրանից զուգամիտո՞ւմ է այն, թե՞ ոչ և զուգամիտելու դեպքում $f(x)$-ն է՞ նրա գումարը, թե՞ ոչ:

Հարց է ծագում. *ինչպիսի՞ պայմանների պետք է բավարարի $f(x)$ ֆունկցիան, որպեսզի այն իր որոշման տիրույթում հնարավոր լինի ներկայացնել աստիճանային շարքի գումարի տեսքով:*

Ձևակերպած հարցին պատասխանելու համար կատարենք

$$p_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \qquad (7)$$

և

$$r_n(x)=o[(x-x_0)^n], \quad r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (x_0\le c\le x,\ x_0\ge c\ge x) \qquad (8)$$

նշանակումները՝ [32,(7),(10),(12)], (3) և (4) բանաձևերը ներկայացնենք

$$f(x)=p_n(x)+r_n(x) \qquad (9)$$

կամ որ նույնն է՝

$$r_n(x)=f(x)-p_n(x) \qquad (9')$$

տեսքով [32,(8)] և ապացուցենք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 1: *Եթե $f(x)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթի x_0 կետում գոյություն ունեն այդ ֆունկցիայի բոլոր կարգի ածանցյալները, ապա որպեսզի տրված ֆունկցիայի որոշման տիրույթի մեկ այլ կետում տեղի ունենա դիտարկվող ֆունկցիայի (5) վերլուծությունը, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ կետում n-ի աճմանը զուգընթաց $f(x)$ ֆունկցիայի Թեյլորի բանաձևի լրացուցիչ $r_n(x)$ անդամը ձգտի զրոյի.*

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0: \qquad (10)$$

Ապացույց: *Անհրաժեշտություն:* Ենթադրելով, որ $f(x)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթի մի որևէ x կետում տեղի ունի այդ ֆունկցիայի (5) վերլուծությունը և (9՝) հավասարության մեջ անցնելով սահմանի, երբ n-ը ձգտում է անսահմանության՝ այդ նույն x-ի համար կստանանք [21,(2՝)]

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=\lim_{n\to\infty}[f(x)-p_n(x)]=\lim_{n\to\infty} f(x)-\lim_{n\to\infty} p_n(x)=f(x)-f(x)=0:$$

Բավարարություն: Այժմ ենթադրենք $f(x)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթի մի որևէ x կետում տեղի ունի (10) կամ որ նույնն է՝

$$\lim_{n\to\infty}[f(x)-p_n(x)]=0 \qquad (10')$$

հավասարությունը:

Վերջին հավասարությունը ներկայացնելով

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} p_n(x)$$

տեսքով, օգտվելով թվային շարքի զուգամիտության սահմանումից [58,u4] և նկատի ունենալով, որ $p_n(x)$-ը (5) շարքի n-րդ մասնակի գումարն է՝ եզրակացնում ենք, որ x-ի վերցրած արժեքի համար տեղի ունի $f(x)$ ֆունկցիայի (5) վերլուծությունը:

Իսկ

---

*) Հիշենք, որ (8) ֆունկցիաները կոչվում են $f(x)$ ֆունկցիայի Թեյլորի բանաձևի, համապատասխանաբար Պեանոյի և Լագրանժի տեսքով բերված լրացուցիչ անդամներ:

ԳԼՈՒԽ XI

Օրինակ 1: $y=\ln x$ ֆունկցիան $x_0=1$ կետի շրջակայքում վերլուծել Թեյլորի շարքի:

Լուծում: Օգտվելով լոգարիթմական ֆունկցիայի n-րդ կարգի ածանցյալի բանաձևից [29,(4)].

$$(\ln x)^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n},$$

կունենանք

$$(\ln x)^{(n)}\Big|_{x=1}=(-1)^{n-1}(n-1)! \quad (n=1,2,\cdots),$$

որտեղից կստանանք

$$(\ln x)'\Big|_{x=1}=1,\ (\ln x)''\Big|_{x=1}=-1,\ (\ln x)'''\Big|_{x=1}=2!,\cdots:$$

$f(x)$ ֆունկցիայի (5) վերլուծության մեջ ընդունելով $f(x)=\ln x$, $x_0=1$ և օգտվելով տրված կետում $y=\ln x$ ֆունկցիայի ածանցյալների համար ստացած արժեքներից՝ կունենանք

$$\ln x=\ln 1+\frac{1}{1!}(x-1)-\frac{1!}{2!}(x-1)^2+\frac{2!}{3!}(x-1)^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{n!}(x-1)^n+\cdots:$$

Այսպիսով, $y=\ln x$ ֆունկցիայի Թեյլորի շարքը $x_0=1$ կետի շրջակայքում ունի

$$\ln x=x-1-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(x-1)^n+\cdots \quad (x>0) \qquad (ա)$$

տեսքը:

Հաճախ անհրաժեշտ է լինում գործ ունենալ $x_0=0$ մասնավոր դեպքի և այդ դեպքում $f(x)$ ֆունկցիայի (5) վերլուծությունից ստացվող

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots \qquad (11)$$

ներկայացման հետ:

Սահմանում 2: *(11) ֆունկցիոնալ շարքը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի Մակլորենի շարք՝ անկախ նրանից զուգամիտո՞ւմ է այն, թե՞ ոչ և զուգամիտելու դեպքում $f(x)$-ն է՞ նրա գումարը, թե՞ ոչ:*

Նշենք, որ $f(x)$ ֆունկցիայի Թեյլորի բանաձևի, Լագրանժի տեսքով բերված մնացորդային անդամի արտահայտության մեջ ընդունելով $x_0=0$, այդ անդամի համար կստանանք [32,(12)]

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0\le\theta\le 1): \qquad (8)$$

Այժմ ապացուցենք մի թեորեմ, որը հնարավորություն է տալիս մի շարք տարրական ֆունկցիաներ վերլուծել Մակլորենի շարքի:

Թեորեմ 2: *Եթե $[0,a]$ (կամ $[-a,0]$, $a>0$) միջակայքում գոյություն ունեն $f(x)$ ֆունկցիայի բոլոր կարգի ածանցյալները, որոնք բացարձակ արժեքով*

չեն գերազանցում միևնույն M դրական թիվը՝ երբ x -ը փոփոխվում է տրված միջակայքում, ապա այդ անբողջ միջակայքում տեղի ունի $f(x)$ ֆունկցիայի (11) վերլուծությունը:

Ապացույց: Դիցուք ցանկացած n -ի համար $[0,a]$ $(a>0)$ միջակայքում տեղի ունի

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \le M \quad (M>0) \tag{12}$$

անհավասարությունը: Այդ դեպքում նշված x -երի և n -ի բոլոր արժեքների համար $f(x)$ ֆունկցիայի Թեյլորի բանաձևի, Լագրանժի տեսքով բերված մնացորդային անդամի համար կստանանք

$$\left|r_n(x)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}\right| |x|^{n+1} \le M\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \quad (0\le\theta\le 1) \tag{13}$$

գնահատականը [18, (5')]: Այնուհետև, եթե

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c^n}{n!}=0 \quad (c>0)$$

հավասարության հաշվառումով [21,օ8], (13) անհավասարության երկու կողմերում անցնենք սահմանի, երբ n -ը ձգտում է անսահմանության, կունենանք [20,թ1]

$$\lim_{n\to\infty}\left|r_n(x)\right| \le 0:$$

Նկատի ունենալով, որ թվի բացարձակ արժեքը չի կարող բացասական լինել, վերջին անհավասարությունից կստանանք

$$\lim_{n\to\infty}\left|r_n(x)\right| = 0,$$

որտեղից վերջնականապես կունենանք

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0:$$

Քանի որ տրված ֆունկցիան $[0,a]$ միջակայքում բավարարում է թեորեմ 1-ում բերված ֆունկցիայի վրա դրված պայմաններին, հետևաբար այդ միջակայքում տեղի ունի $f(x)$ ֆունկցիայի (11) վերլուծությունը:

Իպա

Նշելով, որ ֆունկցիան աստիճանային շարքի վերլուծվում է միակ ձևով՝ անցնենք որոշակի վերլուծությունների:

1°. $f(x)=e^x$ *ֆունկցիան վերլուծել Մակլորենի շարքի:*

Օգտվելով դիտարկվող ֆունկցիայի n -րդ կարգի ածանցյալի բանաձևից [29,(5')], կունենանք

$$\left.(e^x)^{(n)}\right|_{x=0} = \left.e^x\right|_{x=0} = 1 \quad (n=1,2,\cdots):$$

Պարզ է նաև, որ ցանկացած n -ի և ցանկացած դրական a -ի համար $[-a,a]$

միջակայքում տեղի ունի

$$\left|(e^x)^{(n)}\right| = \left|e^x\right| = e^x \le e^a$$

գնահատականը*): Քանի որ դիտարկվող ֆունկցիան նշված միջակայքում բավարարում է թեորեմ 2-ում $f(x)$ ֆունկցիայի վրա դրված պայմաններին, հետևաբար այդ միջակայքում այն կարող ենք վերլուծել Մակլորենի շարքի:

(11) բանաձևում ընդունելով $f(x)=e^x$ և հետևաբար ցանկացած n-ի համար ընդունելով

$$f^{(n)}(0) = (e^x)^{(n)}\Big|_{x=0} = 1,$$

կստանանք մեզ հետաքրքրող վերլուծությունը.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}: \tag{14}$$

Ամփոփելով վերոգրյալը և նկատի ունենալով, որ a-ն կամայական դրական թիվ է, եզրակացնում ենք, որ ցանկացած x-ի համար $f(x)=e^x$ ֆունկցիայի Մակլորենի շարքն ունի (14) տեսքը:

e^x ֆունկցիայի համար ստացած վերլուծության մեջ x-ը փոխարինելով $-x$-ով՝ կունենանք

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}: \tag{14'}$$

2°. *Այժմ Մակլորենի շարքի վերլուծենք*

$$f(x) = \sin x, \quad f(x) = \cos x \tag{15}$$

ֆունկցիաները:

Նկատի ունենալով, որ դիտարկվող եռանկյունաչափական ֆունկցիաների n-րդ կարգի ածանցյալները [29,(6),(7)].

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right), \quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}n\right) \quad (n = 1,2,\cdots)$$

ամբողջ թվային առանցքի վրա բացարձակ արժեքով չեն գերազանցում մեկը.

$$\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right)\right| \le 1, \quad \left|\cos\left(x + \frac{\pi}{2}n\right)\right| \le 1,$$

եզրակացնում ենք, որ կամայական դրական a-ի համար (15) ֆունկցիաները $[-a,a]$ միջակայքում բավարարում են թեորեմ 2-ում $f(x)$ ֆունկցիայի վրա դրված պայմաններին, որտեղից էլ հետևում է, որ թվային առանցքի ցանկացած կետում այդ ֆունկցիաները կարելի է վերլուծել Մակլորենի շարքի:

(11) բանաձևում ընդունելով $f(x) = \sin x$ և հաշվի առնելով, որ այդ դեպքում [32,(19′)]

---

*) Որովհետև ամբողջ թվային առանցքի վրա $f(x) = e^x$ ֆունկցիան մոնոտոն աճում է:

$$f(0)=f^{(2m)}(0)=0,\quad f^{(2m-1)}(0)=(-1)^{m-1}\quad (m=1,2,\cdots),$$

կստանանք (15) ֆունկցիաներից առաջինի Մակլորենի շարքը.

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}: \tag{16}$$

(11) բանաձևում ընդունելով $f(x)=\cos x$ և նկատի ունենալով, որ այդ դեպքում [32,(19')]

$$f(0)=1,\ f^{(2m)}(0)=(-1)^m,\ f^{(2m-1)}(0)=0\ \ (m=1,2,\cdots),$$

կստանանք (15) ֆունկցիաներից երկրորդի Մակլորենի շարքը.

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}: \tag{17}$$

Այսպիսով, ցանկացած x -ի համար $f(x)=\sin x$ [$f(x)=\cos x$] ֆունկցիայի Մակլորենի շարքն ունի (16) [(17)] տեսքը:

3°. *Այնուհետև դիտարկենք*

$$f(x)=(1+x)^{\alpha} \tag{18}$$

ֆունկցիան, որտեղ α -ն կամայական հաստատուն է:

Հաշվի առնելով, որ Թեյլորի բանաձևի մնացորդային անդամի գնահատումը դիտարկվող ֆունկցիայի պարագայում կապված է որոշակի դժվարությունների հետ՝ այն աստիճանային շարքի վերլուծենք այլ եղանակով:

Նկատելով, որ (18) ֆունկցիան բավարարում է

$$(1+x)f'(x)=\alpha f(x) \tag{19}$$

դիֆերենցիալ հավասարմանն [50,u1] ու

$$f(0)=1 \tag{20}$$

սկզբնական պայմանին [50,u6], այդ հավասարման լուծումը փնտրենք

$$1+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \tag{21}$$

աստիճանային շարքի գումարի տեսքով*), որտեղ a_i $(i=1,2,\cdots)$ գործակիցները ենթակա են որոշման: Տեղադրելով (21) շարքը (19) դիֆերենցիալ հավասարման մեջ [62,p4].

$$(1+x)(a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots)=\alpha(1+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots)$$

և հավասարեցնելով ստացված հավասարության երկու կողմերի համապատասխան անդամների գործակիցները՝ կունենանք

$$a_1=\alpha,\quad a_1+2a_2=\alpha a_1,\cdots,na_n+(n+1)a_{n+1}=\alpha a_n,\cdots,$$

որտեղից էլ (21) շարքի գործակիցների համար կստանանք

$$a_1=\alpha,\ a_2=\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!},\ a_3=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!},\ldots,\ a_n=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!},\ldots:$$

---

*) (21) աստիճանային շարքի ազատ անդամը ընդունեցինք հավասար մեկի, որպեսզի նրա գումարը բավարարի (20) սկզբնական պայմանին:

Տեղադրելով (21) շարքի գործակիցների համար ստացած արժեքներն այդ շարքի մեջ՝ կունենանք

$$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\dots: \qquad (21')$$

Հասկանալի է, որ եթե α-ն հավասար լինի n-ի, ապա $x^{\alpha+1}$ արտադրիչը պարունակող անդամից սկսած (21′) շարքի գործակիցները կհավասարվեն զրոյի, ինչը նշանակում է, որ այդ դեպքում (21′) շարքը կվերածվի բազմանդամի: Պարզ է նաև, որ եթե α-ն բնական թիվ չէ և տարբեր է զրոյից, ապա այդ դեպքում կունենանք անվերջ շարք:

Գտնելով (21′) շարքի զուգամիտության շառավիղը [62,u2,(11)], [21,o6].

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{\alpha_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}:\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{\alpha-n}\right|=1,$$

եզրակացնում ենք, որ $(-1;1)$ միջակայքում այդ շարքը զուգամիտում է, ընդ որում զուգամիտում է բացարձակ [62,p1)], իսկ $(-\infty,-1)$ և $(1,+\infty)$ միջակայքերում՝ տարամիտում*):

Այսպիսով, ինչպես (18) ֆունկցիան, այնպես էլ $(-1;1)$ միջակայքում զուգամիտող (21′) շարքի $s(x)$ գումարը բավարարում են (19) դիֆերենցիալ հավասարմանը և (20) սկզբնական պայմանին: Հետևաբար, համաձայն առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարման լուծման գոյությանը և միակությանը վերաբերող թեորեմի [50,p1]՝ (21′) շարքի $s(x)$ գումարը $(-1;1)$ միջակայքում համընկնում է (18) բանաձևով որոշվող $f(x)$ ֆունկցիային:

Ամփոփելով վերոգրյալը՝ եզրակացնում ենք, որ $(-1;1)$ *միջակայքում տեղի ունի*

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\dots \quad (\alpha=const) \qquad (22)$$

վերլուծությունը:

Մասնավոր դեպքում, (22) վերլուծության մեջ ընդունելով $\alpha=-1$, $\alpha=1/2$, $\alpha=-1/2$, *համապատասխանաբար կունենանք*

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-\dots \qquad (-1<x<1), \qquad (22')$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot4}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}x^3-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^4+\dots \quad (-1\le x\le1), \qquad (22'')$$

---

*) Նշենք որ $(-1;1)$ միջակայքի ծայրակետերում (21′) շարքի զուգամետ կամ տարամետ լինելը կախված է նաև α-ից:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4-\cdots \quad (-1\le x\le 1):^{*)} \tag{22''}$$

4°. *Վերջում աստիճանային շարքի վերլուծենք նաև*

$$f(x)=\ln(1+x) \tag{23}$$

ֆունկցիան:

Համոզվելով, որ (22) հավասարության աջ կողմում գրված աստիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթը $(-1;1)$ միջակայքն է [61,o2] և նշված հավասարության երկու կողմերն անդամ առ անդամ ինտեգրելով 0-ից մինչև x $(-1<x<1)$ սահմաններում [62,h2]՝ կստանանք

$$\int_0^x\frac{dt}{1+t}=\int_0^x dt-\int_0^x tdt+\int_0^x t^2dt-\cdots \quad (-1<x<1): \tag{24}$$

Հաշվելով (24) հավասարության մեջ մասնակցող ինտեգրալները [35,2°,3°,4°], [41,(6)]՝ կունենանք

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots \quad (-1<x\le 1): \tag{24'}$$

Այսպիսով, $(-1;1]$ միջակայքում տեղի ունի (23) բանաձևով տրվող ֆունկցիայի (24) վերլուծությունը, ինչը նշանակում է, որ նշված միջակայքին պատկանող x -երի համար (23) լոգարիթմական ֆունկցիայի Մակլորենի շարքն ունի (24) հավասարության աջ կողմում գրված տեսքը:

$\ln(1+x)$ ֆունկցիայի համար ստացած վերլուծության մեջ x -ը փոխարինելով $-x$ -ով՝ կստանանք $\ln(1-x)$ ֆունկցիայի Մակլորենի շարքը.

$$\ln(1-x)=-\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots\right) \quad (-1\le x<1): \tag{24''}$$

(24) հավասարությունից անդամ առ անդամ հանելով վերջին հավասարությունը [58,p4]՝ կհամոզվենք, որ $(-1;1)$ միջակայքում տեղի ունի նաև

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right) \tag{24'''}$$

վերլուծությունը:

Օրինակ 2: Հետևյալ ֆունկցիաները վերլուծել Մակլորենի շարքի՝

ա) $y=\sin\frac{x}{2}$, բ) $y=\cos^2 x$, գ) $y=x\ln(1+x)$:

Լուծում: ա) $y=\sin x$ ֆունկցիայի համար ստացած վերլուծության մեջ x -ը փոխարինելով $x/2$ -ով՝ կստանանք դիտարկվող ֆունկցիայի Մակլորենի շարքը.

$$\sin\frac{x}{2}=\frac{x}{2}-\frac{x^3}{2^3\cdot 3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2^{2n-1}\cdot(2n-1)!}+\cdots:$$

---

*) Տե՛ս նախորդ էջի տողատակի պարզաբանումը:

բ) Օգտվելով եռանկյունաչափությունից հայտնի

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha$$

բանաձևից և $y = \cos x$ ֆունկցիայի համար ստացած վերլուծությունից՝ կստանանք $\cos^2 x$ ֆունկցիայի Մակլորենի շարքը.

$$\cos^2 x = 1 - \left[x^2 - \frac{2^3 x^4}{4!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right]:$$

գ) $y = \ln(1+x)$ ֆունկցիայի համար ստացած վերլուծության երկու կողմերը բազմապատկելով x -ով՝ կստանանք տրված ֆունկցիայի Մակլորենի շարքը.

$$x\ln(1+x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n} + \cdots \quad (-1 < x \le 1):$$

§64. Ֆուրյեի շարք: Դիրիխլեի թեորեմը: Ֆուրյեի շարքը զույգ և կենտ ֆունկցիաների համար:

Ֆուրյեի շարքերի ուսումնասիրությունը սկսենք հետևյալ սահմանումով՝

Սահմանում 1:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (1)$$

շարքը կոչվում է եռանկյունաչափական շարք, իսկ a_0, a_n, b_n $(n = 1,2,...)$ հաստատունները՝ այդ շարքի գործակիցներ:

Քանի որ ցանկացած բնական n -ի համար $\sin nx$ և $\cos nx$ ֆունկցիաների ամենափոքր ընդհանուր պարբերությունը հավասար է 2π -ի, հետևաբար*) (1) շարքի զուգամիտության տիրույթում [61,u4], նրա գումարը կլինի 2π պարբերական ֆունկցիա:

Դնենք հետևյալ խնդիրը՝ *ինչպիսի՞ պայմանների բավարարման դեպքում 2π պարբերական ֆունկցիան կարելի է ներկայացնել իրեն զուգամիտող եռանկյունաչափական շարքի գումարի տեսքով:*

Դրված խնդիրը լուծելու համար նախ բերենք հետևյալ սահմանումները՝

Սահմանում 2: $[a,b]$ *միջակայքում որոշված ու նույնաբար զրոյից տարբեր $\varphi(x)$ և $\psi(x)$ ֆունկցիաները կոչվում են օրթոգոնալ այդ միջակայքում, եթե տրված ֆունկցիաների արտադրյալի ինտեգրալն a -ից մինչև b սահմաններում հավասար է զրոյի.*

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = 0: \qquad (2)$$

Սահմանում 3: $[a,b]$ *միջակայքում որոշված և նույնաբար զրոյից տարբեր ֆունկցիաների*

---

*) $a_0/2$ հաստատունը կարող ենք համարել 2π պարբերական ֆունկցիա:

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots \tag{3}$$

համախումբը կոչվում է օրթոգոնալ այդ միջակայքում, եթե m -ի և n -ի իրարից տարբեր ցանկացած բնական արժեքների համար $\varphi_m(x)\varphi_n(x)$ արտադրյալի ինտեգրալն՝ a -ից մինչև b սահմաններում հավասար է զրոյի.

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx = 0 \quad (m,n = 1,2,\ldots,\ m \neq n), \tag{4}$$

իսկ $\varphi_n^2(x)$ ֆունկցիայի ինտեգրալը՝ դրական է.

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)dx = \lambda_n \quad (\lambda_n > 0,\ n = 1,2,\ldots): \tag{5}$$

Օրինակ 1: Ստուգելով, որ m -ի և n -ի ցանկացած բնական արժեքների համար $(m \neq n)$ տեղի ունեն

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos nx dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi$$

հավասարությունները [35,1°,2°,8°,9°], [39,o10,o11], [41,(6)], եզրակացնում ենք, որ ֆունկցիաների

$$1,\ \sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x, \ldots,\ \sin nx,\ \cos nx, \ldots \tag{ա}$$

համախումբն օրթոգոնալ է $[-\pi,\pi]$ միջակայքում:

Կարող ենք հեշտությամբ համոզվել, որ ֆունկցիաների (ա) համախումբն օրթոգոնալ չէ $[0,\pi]$ միջակայքում, որտեղից հետևում է, որ այս կամ այն միջակայքում ֆունկցիաների որևէ համախմբի օրթոգոնալ լինելը կախված է ոչ միայն այդ համախմբի ֆունկցիաների հատկություններից, այլ նաև տրված միջակայքից:

Այժմ ենթադրենք 2π պարբերական $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է $[-\pi,\pi]$ միջակայքում [40,u4] և այդ միջակայքում ներկայացվում է իրեն զուգամիտող (1) եռանկյունաչափական շարքով.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx): \tag{6}$$

Ենթադրենք նաև, որ (1) շարքի գործակիցներից կազմած թվային շարքը բացարձակ զուգամետ է, այսինքն ենթադրենք զուգամետ է դրական անդամներով

$$\left|\frac{a_0}{2}\right| + |a_1| + |b_1| + |a_2| + |b_2| + \cdots + |a_n| + |b_n| + \cdots \tag{7}$$

շարքը [60,u3]: Այդ դեպքում օգտվելով

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \le |a_n| + |b_n| \quad (n = 1,2,\cdots) \tag{8}$$

գնահատականներից*) ստանում ենք, որ թվային առանցքի ցանկացած միջակայքում (6) շարքը մաժորվում է (7) շարքով [61,u8] որտեղից էլ հետևում է, որ թվային առանցքի ցանկացած միջակայքում այն ըստ x-ի հավասարաչափ է զուգամիտում [61,p1]:

Ինչպես գիտենք, (6) ներկայացման մեջ մասնակցող ֆունկցիոնալ շարքի հավասարաչափ զուգամիտության մասին կատարված եզրակացությունից բխում է, որ ցանկացած միջակայքում այն կարելի է անդամ առ անդամ ինտեգրել [61,p4]: (6) հավասարության երկու կողմերն անդամ առ անդամ ինտեգրելով, օրինակ, $-\pi$-ից մինչև π սահմաններում և հաշվի առնելով, որ ֆունկցիաների (ա) համախումբն օրթոգոնալ է նշված միջակայքում՝ կստանանք [40,1°]

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx dx \right) = \pi a_0 ,$$

որտեղից $f(x)$ ֆունկցիայի (6) վերլուծության a_0 գործակցի համար կունենանք

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx : \tag{9}$$

Անցնելով $f(x)$ ֆունկցիայի նշված վերլուծության a_n $(n = 1,2,...)$ գործակիցները գտնելուն՝ (6) հավասարության երկու կողմերը բազմապատկենք $\cos kx$-ով $(k \in N)$.

$$f(x)\cos kx = \frac{a_0}{2}\cos kx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cos kx + b_n \sin nx \cos kx): \tag{10}$$

Քանի որ (10) հավասարության աջ մասում ստացած ֆունկցիոնալ շարքի անդամները նույնպես թվային առանցքի ցանկացած միջակայքում մաժորվում են դրական անդամներով (7) շարքով, հետևաբար այդ շարքն էլ է թվային առանցքի ցանկացած միջակայքում ըստ x-ի հավասարաչափ զուգամիտում, որտեղից հետևում է, որ, օրինակ, $-\pi$-ից մինչև π սահմաններում այն կարելի է անդամ առ անդամ ինտեգրել: Անդամ առ անդամ ինտեգրելով (10) հավասարության երկու կողմերը $-\pi$-ից մինչ π սահմաններում և հաշվի առնելով, որ ֆունկցիաների (ա) համախումբն օրթոգոնալ է $[-\pi,\pi]$ միջակայքում՝ կստանանք

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx dx \right) =$$

$$= a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \pi a_k ,$$

---

*) Ունենք [18,(3'),(5')]

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \le |a_n \cos nx| + |b_n \sin nx| = |a_n||\cos nx| + |b_n||\sin nx| \le |a_n| + |b_n| :$$

որտեղից $f(x)$ ֆունկցիայի (6) վերլուծության a_n գործակիցների համար կունենանք

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad (n = 1,2,...): \tag{11}$$

Նույն ձևով, եթե (6) հավասարության երկու կողմերը բազմապատկենք $\sin kx$ -ով և ստացած հավասարությունն անդամ առ անդամ ինտեգրենք $-\pi$ -ից մինչև π սահմաններում (վերևում շարադրված դատողություններով հիմնավորելով, որ այդ իրավունքն ունենք), կստանանք

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = \pi b_k,$$

որտեղից $f(x)$ ֆունկցիայի (6) վերլուծության b_n գործակիցների համար կունենանք

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n = 1,2,...): \tag{12}$$

Սահմանում 4: *$f(x)$ ֆունկցիայի (6) վերլուծության գործակիցների համար ստացած (9), (11) և (12) բանաձևերը կոչվում են այդ ֆունկցիայի էյլեր-Ֆուրյեի բանաձևեր:*

Սահմանում 5: *էյլեր-Ֆուրյեի բանաձևերով հաշվվող գործակիցները կոչվում են $f(x)$ ֆունկցիայի էյլեր-Ֆուրյեի գործակիցներ, իսկ այդ գործակիցներով կազմված (1) եռանկյունաչափական շարքը՝ $f(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրյեի շարք:*

Դիտողություն 1: *Նկատենք, որ 2π պարբերական $g(x)$ ֆունկցիայի*

$$\int_{c}^{c+2\pi} g(x)dx$$

ինտեգրալի արժեքը կախված չէ c -ից, այնպես որ 2π պարբերական $f(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրյեի գործակիցները կարող ենք հաշվել նաև հետևյալ բանաձևերով՝

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\cos nx dx \quad (n = 0,1,...), \tag{11}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n = 1,2,...): \tag{12}$$

Այն փաստը, որ (1) եռանկյունաչափական շարքի գործակիցները ստացվել են $f(x)$ ֆունկցիայի միջոցով, այսինքն այն փաստը, որ (1) եռանկյունաչափական շարքը $f(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրյեի շարքն է, կնշենք հետևյալ կերպ՝

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx): \qquad (13)$$

Ընդհանրապես $f(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրյեի շարքը կարող է լինել տարամետ, կարող է լինել նաև զուգամետ: Զուգամետ լինելու դեպքում այդ շարքի գումարը կարող է x -ի ոչ մի արժեքի համար հավասար չլինել տրված ֆունկցիայի համապատասխան արժեքին, կարող է x -ի միայն որոշ արժեքների համար հավասար լինել նրա նշված արժեքներին և կարող է նույնաբար համընկնել $f(x)$ ֆունկցիային: Թվարկած այս կամ այն դեպքի իրականանալը կախված է դիտարկվող ֆունկցիայի հատկություններից:

Սահմանում 6: *$f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է կտոր առ կտոր մոնոտոն $[a,b]$ միջակայքում, եթե այդ միջակայքը հնարավոր է տրոհել վերջավոր թվով այնպիսի միջակայքերի, որ ստացված ենթամիջակայքերից յուրաքանչյուրում տրված ֆունկցիան մոնոտոն է (այսինքն կա՛մ մոնոտոն աճող է, կա՛մ էլ՝ մոնոտոն նվազող):*

Սահմանում 7: *Կասենք, որ $[a,b]$ միջակայքում $f(x)$ ֆունկցիան բավարարում է Դիրիխլեի պայմաններին, եթե այդ միջակայում այն կա՛մ անընդհատ է, կա՛մ էլ՝ կտոր առ կտոր մոնոտոն և ունի վերջավոր թվով առաջին սեռի խզման կետեր:*

Այժմ, անդրադառնանք այս պարագրաֆի սկզբում դրված խնդրին. *ինչպիսի՞ հատկություններ պետք է ունենա պարբերական ֆունկցիան, որպեսզի նրա Ֆուրյեի շարքը լինի զուգամետ և այդ շարքի գումարը համընկնի տրված ֆունկցիային:*

Դրված խնդրի լուծումը տրվում է հետևյալ թեորեմով, որ բերում ենք առանց ապացուցման՝

Թեորեմ 1: *(2π պարբերական ֆունկցիան Ֆուրյեի շարքի վերլուծելու Դիրիխլեի հայտանիշը) Եթե 2π պարբերական ֆունկցիան $[-\pi,\pi]$ միջակայքում բավարարում է Դիրիխլեի պայմաններին, ապա այդ ֆունկցիայի Ֆուրյեի շարքը զուգամիտում է թվային առանցքի բոլոր կետերում, ընդ որում տրված ֆունկցիայի անընդհատության կետերում նշված շարքի $s(x)$ գումարը հավասար է այդ ֆունկցիայի համապատասխան արժեքին, իսկ խզման կետերում՝ նրա ձախակողմյան և աջակողմյան սահմանային արժեքների միջին թվաբանականին, այսինքն.*

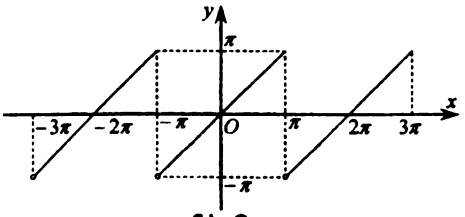
$$s(x_0) = f(x_0), \qquad (14)$$

եթե x_0 -ն $f(x)$ ֆունկցիայի անընդհատության կետ է,

$$s(x_0) = \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}, \qquad (15)$$

եթե x_0 -ն $f(x)$ ֆունկցիայի խզման կետ է:

Օրինակ 2: $(-\pi,\pi]$ միջակայքում $f(x)=x$ բանաձևով որոշվող 2π պարբերական ֆունկցիան վերլուծել Ֆուրյեի շարքի:



Նկ.2

Լուծում: Քանի որ դիտարկվող 2π պարբերական ֆունկցիան $[-\pi,\pi]$ միջակայքում (նկ.2) բավարարում է Դիրիխլեի պայմաններին, հետևաբար, համաձայն թեորեմ 1-ի, այն կարելի է վերլուծել Ֆուրյեի շարքի:

Օգտվելով (9), (11) և (12) բանաձևերից, տրված ֆունկցիայի Ֆուրյեի գործակիցների համար կունենանք [35,3°], [41,(15)]

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}xdx=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos nxdx=\frac{1}{\pi n}\left(x\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right)=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nxdx=-\frac{1}{\pi n}\left(x\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx\right)=(-1)^{n+1}\frac{2}{n}:$$

a_0, a_n, b_n $(n=1,2,...)$ գործակիցների համար ստացած արժեքները տեղադրելով (1) եռանկյունաչափական շարքի մեջ՝ կստանանք դիտարկվող ֆունկցիայի Ֆուրյեի շարքը.

$$f(x)\sim 2\left[\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\dots+(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}+\dots\right]:$$

Համաձայն Դիրիխլեի հայտանիշի, տրված ֆունկցիայի անընդհատության կետերում տեղի ունի

$$f(x)=2\left[\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\dots+(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}+\dots\right] \qquad (բ)$$

հավասարությունը, իսկ խզման կետերում նրա Ֆուրյեի շարքի գումարը հավասար է այդ ֆունկցիայի ձախակողմյան և աջակողմյան սահմանային արժեքների միջին թվաբանականին (տվյալ դեպքում՝ զրոյի) [24,u7]:

Անցնելով զույգ և կենտ ֆունկցիաները Ֆուրյեի շարքով ներկայացնելուն՝ նախ ապացուցենք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 2: *Եթե* $[-\pi,\pi]$ *միջակայքում որոշված, համապատասխանաբար զույգ և կենտ* $f(x)$ *ու* $g(x)$ *ֆունկցիաներն ինտեգրելի են այդ միջակայքում, ապա տեղի ունեն*

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=2\int_{0}^{\pi}f(x)dx,\quad \int_{-\pi}^{\pi}g(x)dx=0 \qquad (16)$$

հավասարությունները:

Ապացույց: Ինչպես գիտենք, (16) հավասարություններից առաջինի ձախ կողմում գրված ինտեգրալը կարող ենք ներկայացնել

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{\pi}f(x)dx \qquad (17)$$

տեսքով [40,8°]: Բերված հավասարության աջ կողմի առաջին ինտեգրալում

կատարելով փոփոխականի

$$x=-t \tag{18}$$

փոխարինում [41,թ2] և հաշվի առնելով, որ $f(x)$ -ը զույգ ֆունկցիա է՝ կստանանք [40,7°]

$$\int_{-\pi}^{0} f(x)dx=\int_{\pi}^{0} f(-t)d(-t)=-\int_{\pi}^{0} f(t)dt=\int_{0}^{\pi} f(t)dt=\int_{0}^{\pi} f(x)dx:$$

Պահանջվող առնչություններից առաջինի ապացույցն ավարտելու համար մնում է (17) հավասարության մեջ

$$\int_{-\pi}^{0} f(x)dx$$

ինտեգրալը փոխարինել իրեն հավասար

$$\int_{0}^{\pi} f(x)dx$$

ինտեգրալով:

Ենթադրելով, որ $g(x)$ -ը կենտ ֆունկցիա է՝ նույն ձևով կհամոզվենք (16) առնչություններից երկրորդի ճշմարտացիության մեջ.

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx=\int_{-\pi}^{0} g(x)dx+\int_{0}^{\pi} g(x)dx=\int_{\pi}^{0} g(-t)d(-t)+\int_{0}^{\pi} g(x)dx=$$

$$=\int_{\pi}^{0} g(x)dx+\int_{0}^{\pi} g(x)dx=-\int_{0}^{\pi} g(x)dx+\int_{0}^{\pi} g(x)dx=0:$$

Իպա

Նկատենք, որ (16) բանաձևերն իրենց ուժը չեն կորցնի, եթե թեորեմ 2-ում π -ն փոխարինենք մեկ այլ դրական թվով:

Այժմ նկատենք, որ եթե ֆուրյեի շարքի վերլուծվող $f(x)$ ֆունկցիան զույգ ֆունկցիա է, ապա $f(x)\sin nx$ արտադրյալը կենտ ֆունկցիա է, իսկ $f(x)\cos nx$ արտադրյալը՝ զույգ ֆունկցիա: Իսկ եթե ֆուրյեի շարքի վերլուծվող $f(x)$ ֆունկցիան կենտ ֆունկցիա է, ապա $f(x)\sin nx$ արտադրյալը զույգ ֆունկցիա է, իսկ $f(x)\cos nx$ արտադրյալը՝ կենտ ֆունկցիա:

Վերոգրյալ դատողությունները միավորելով թեորեմ 2-ին՝ հանգում ենք հետևյալ եզրակացությանը՝

Ֆուրյեի շարքի վերլուծվող 2π պարբերական զույգ ֆունկցիայի ֆուրյեի գործակիցներն արտահայտվում են

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx,\quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx,\quad b_n=0\quad (n=1,2,...) \tag{19}$$

բանաձևերով, իսկ կենտ ֆունկցիայի ֆուրյեի գործակիցները՝

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n = 1,2,...) \tag{20}$$

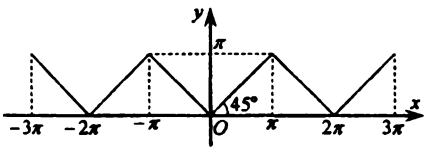
բանաձևերով:

Այսպիսով, զույգ ֆունկցիայի ֆուրյեի շարքը կազմված է միայն «կոսինուսներից».

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \tag{21}$$

իսկ կենտ ֆունկցիայի Ֆուրյեի շարքը՝ միայն «սինուսներից».

$$g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx: \tag{22}$$



Նկ. 3

Օրինակ 3: $[-\pi,\pi]$ միջակայքում

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{եթե } x \in [-\pi, 0), \\ x, & \text{եթե } x \in [0, \pi] \end{cases} \tag{գ}$$

բանաձևով որոշվող 2π պարբերական ֆունկցիան վերլուծել Ֆուրյեի շարքի:

Լուծում: Քանի որ դիտարկվող ֆունկցիան $[-\pi,\pi]$ միջակայքում (նկ.3) բավարարում է Դիրիխլեի պայմաններին, հետևաբար,համաձայն թեորեմ 1-ի, այն կարելի է վերլուծել Ֆուրյեի շարքի: Մյուս կողմից, քանի որ դիտարկվում է զույգ ֆունկցիա, ուստի նրա Ֆուրյեի շարքը կազմված է միայն կոսինուսներից:

Օգտվելով (19) բանաձևերից՝ տրված ֆունկցիայի ֆուրյեի գործակիցների համար կունենանք

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \pi, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx = \frac{2}{\pi n}\left(x\sin nx + \frac{\cos nx}{n}\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0, & \text{եթե } n = 2k, \\ -\dfrac{4}{\pi n^2}, & \text{եթե } n = 2k-1, \end{cases} \quad k \in N, \ b_n = 0 \quad (n = 1,2,...):$$

a_0, a_n, b_n $(n = 1,2,...)$ գործակիցների համար ստացած արժեքները տեղադրելով (1) եռանկյունաչափական շարքի մեջ՝ կստանանք դիտարկվող ֆունկցիայի Ֆուրյեի շարքը.

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \cdots + \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \cdots\right]: \tag{դ}$$

Քանի որ (գ) ֆունկցիան անընդհատ է ամբողջ թվային առանցքի վրա, հետևաբար համաձայն Դիրիխլեի հայտանիշի, այդ ֆունկցիայի Ֆուրյեի շարքն ամենուրեք զուգամիտում է, ընդ որում նշված շարքի գումարը նույնաբար համընկնում է տրված ֆունկցիային:

Մասնավոր դեպքում (գ) ֆուկցիայի (դ) վերլուծության մեջ ընդունելով $x = 0$, կունենանք

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \cdots,$$

որտեղից կստանանք π թվի

$$\pi = 2\sqrt{2\left[1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots\right]} \qquad (6)$$

ներկայացումը:

§65. $2l$ պարբերական ֆունկցիաների վերլուծումը Ֆուրյեի շարքի: Ոչ պարբերական ֆունկցիաների վերլուծումը Ֆուրյեի շարքի:

Նախորդ պարագրաֆում մենք դիտարկեցինք ամբողջ թվային առանցքի վրա որոշված 2π պարբերական այնպիսի ֆունկցիաներ, որոնք $[-\pi,\pi]$ միջակայքում բավարարում են Դիրիխլեի պայմաններին [64,u7], և ծանոթացանք այդպիսի ֆունկցիաները Ֆուրյեի շարքի վերլուծելու Դիրիխլեի հայտանիշին [64,u5,p1]:

Անցնելով $2l$ պարբերական ֆունկցիաները $(l \neq \pi)$ Ֆուրյեի շարքի վերլուծելու խնդրին՝ դիտարկենք ամբողջ թվային առանցքի վրա որոշված $2l$ պարբերական այնպիսի $f(x)$ ֆունկցիա, որը $[-l,l]$ միջակայքում բավարարում է Դիրիխլեի պայմաններին:

Փոփոխականի

$$x = \frac{l}{\pi}t \quad (-\pi \le t \le \pi) \qquad (1)$$

փոխարինման միջոցով դիտարկվող ֆունկցիան փոխարինելով

$$f\left(\frac{l}{\pi}t\right) = \varphi(t)$$

ֆունկցիայով և T_f-ով ու T_φ-ով համապատասխանաբար նշանակելով $f(x)$ և $\varphi(t)$ ֆունկցիաների հիմնական պարբերությունները, կունենանք

$$T_\varphi = T_f : \frac{l}{\pi} = 2l : \frac{l}{\pi} = 2\pi^{*)} :$$

Այսպիսով, փոփոխականի (1) փոխարինման շնորհիվ $2l$ $(l \neq \pi)$ պարբերական $f(x)$ ֆունկցիայից ստացանք 2π պարբերական $\varphi(t)$ ֆունկցիան: Նկատի ունենալով, որ ստացած ֆունկցիան $[-\pi,\pi]$ միջակայքում բավարարում է Դիրիխլեի պայմաններին՝ այն ներկայացնենք Ֆուրյեի շարքով.

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt), \qquad (2)$$

---

*) $f(x)$ և $\varphi(t)$ ֆունկցիաների հիմնական պարբերությունները միմյանց կապող բերված առնչությունը հայտնի է հանրահաշվի դպրոցական դասընթացից:

որտեղ, ինչպես գիտենք, a_0, a_n, b_n $(n=1,2,...)$ գործակիցներն ունեն

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{l}{\pi}t\right)dt,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\cos ntdt,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\sin ntdt\quad (n=1,2,...)\ (3)$$

տեսքը [64,(9),(11),(12)]:

$t=\frac{\pi}{l}x$ հավասարության միջոցով (2) և (3) բանաձևերում վերադառնալով x փոփոխականին՝ կստանանք $f(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրյեի շարքը [41,թ2].

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right),\qquad (4)$$

որտեղ

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx,\quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx,\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx\quad (n=1,2,....):\ (5)$$

Այսպիսով, եթե $2l$ պարբերական $f(x)$ ֆունկցիան $[-l,l]$ միջակայքում բավարարում է Դիրիխլեի պայմաններին, ապա օգտվելով Դիրիխլեի հայտանիշից կարող ենք այն վերլուծել Ֆուրյեի շարքի (որն ունի (4) հավասարության աջ կողմում գրված տեսքը):

Օրինակ 1: $[-l,l]$ միջակայքում $f(x)=|x|$ բանաձևով որոշվող $2l$ պարբերական ֆունկցիան վերլուծել Ֆուրյեի շարքի:

Լուծում: Կրկնելով [64,օ3]-ում կատարված դատողություններն ու գործողությունները և օգտվելով (4) և (5) բանաձևերից, կստանանք դիտարկվող ֆունկցիայի Ֆուրյեի շարքը.

$$f(x)=\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^2}\left[\frac{\cos\frac{\pi}{l}x}{1^2}+\frac{\cos\frac{3\pi}{l}x}{3^2}+\cdots+\frac{\cos\frac{2n-1}{l}\pi x}{(2n-1)^2}+\cdots\right]:\qquad (ա)$$

Քանի որ տրված ֆունկցիան անընդհատ է ամբողջ թվային առանցքի վրա, հետևաբար, համաձայն Դիրիխլեի հայտանիշի, այդ ֆունկցիայի Ֆուրյեի շարքն ամենուրեք զուգամիտում է, ընդ որում նրա գումարը նույնաբար համընկնում է դիտարկվող ֆունկցիային:

Ավարտելով պարբերական ֆունկցիաները Ֆուրյեի շարքի վերլուծելու խնդիրների դիտարկումը՝ նշենք, որ ավելի հաճախ անհրաժեշտ է լինում Ֆուրյեի շարքի վերլուծել ոչ պարբերական ֆունկցիաներ: Այդպիսի ֆունկցիաների Ֆուրյեի վերլուծությունները ստանալու համար դիտարկենք $[-\pi,\pi]$ միջակայքում որոշված և այդ միջակայքում Դիրիխլեի պայմաններին բավարարող $f(x)$ ֆունկցիան: Այնուհետև ներմուծենք 2π պարբերական այնպիսի $\varphi(x)$ ֆունկցիա, որը $(-\pi,\pi]$ կիսաբաց միջակայքում համընկնում է $f(x)$ ֆունկցիային.

$$(-\pi<x\le\pi)\quad(-\pi<x\le\pi)\qquad (6)$$

և բավարարում է $\varphi(-\pi)=\varphi(\pi)$ պայմանին: Քանի որ $\varphi(x)$-ը $[-\pi,\pi]$ միջակայ-

քում Դիրիխլեի պայմաններին բավարարող 2π պարբերական ֆունկցիա է, հետևաբար կարող ենք այն վերլուծել Ֆուրյեի շարքի: Համաձայն Դիրիխլեի հայտանիշի՝ $\varphi(x)$ ֆունկցիայի անընդհատության կետերում ստացած շարքի գումարը համընկնում է այդ ֆունկցիայի համապատասխան արժեքին, որտեղից (6) հավասարության շնորհիվ հետևում է, որ $f(x)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթի ներքին կետերում նշված շարքի գումարը համընկնում է դիտարկվող ֆունկցիայի համապատասխան արժեքին: Նկատի ունենալով նաև, որ $\varphi(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրյեի շարքի գործակիցների հաշվման բանաձևերում մասնակցում է $f(x)$ ֆունկցիան՝ կարող ենք պնդել, որ կառուցելով $f(x)$ ֆունկցիայից ստացված 2π պարբերական $\varphi(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրյեի շարքը, արդյունքում $(-\pi,\pi)$ միջակայքում ստանում ենք $f(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրյեի վերլուծությունը:

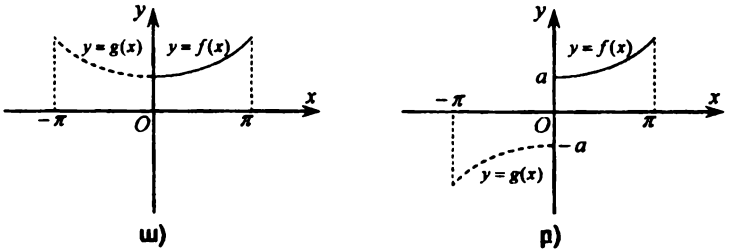
Այժմ դիտարկենք հետևյալ կարևոր խնդիրը՝ $[0,\pi]$ *միջակայքում որոշված և այդ միջակայքում Դիրիխլեի պայմաններին բավարարող* $f(x)$ *ֆունկցիան վերլուծել Ֆուրյեի շարքի:*

Հակադրված խնդիրը լուծելու համար, $[-\pi,0)$ կիսաբաց միջակայքում վերցնենք Դիրիխլեի պայմաններին և $g(-\pi)=f(\pi)$ հավասարությանը բավարարող որևէ $g(x)$ ֆունկցիա և կառուցենք

$$f^*(x)=\begin{cases} g(x), \text{ եթե } x\in[-\pi,0), \\ f(x), \text{ եթե } x\in[0,\pi] \end{cases} \tag{7}$$

ֆունկցիան: Կրկնելով ոչ պարբերական ֆունկցիայի Ֆուրյեի վերլուծությունը ստանալու՝ վերևում բերված դատողությունները՝ եզրակացնում ենք, որ կառուցելով (7) ֆունկցիայի Ֆուրյեի շարքը, արդյունքում $(0,\pi)$ միջակայքում կստանանք դիտարկվող ֆունկցիայի Ֆուրյեի վերլուծությունը:

Նկատենք, որ $f(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրյեի վերլուծությունը կախված է $g(x)$ ֆունկցիայի ընտրությունից: Այսպես, եթե $[-\pi,0)$ կիսաբաց միջակայքում $f(x)$ ֆունկցիան շարունակենք «զույգ» ձևով (նկ.4ա), այսինքն եթե պահանջենք,



ա) բ)

Նկ.4

որ $f^*(x)$-ը լինի զույգ ֆունկցիա, ապա հասկանալի է, որ $f(x)$ ֆունկցիայի

Ֆուրյեի շարքը կպարունակի միայն կոսինուսներ: Իսկ եթե $[-\pi,0)$ միջակայքում $f(x)$ ֆունկցիան շարունակենք «կենտ» ձևով (նկ.4բ), այսինքն եթե պահանջենք, որ $f^*(x)$-ը լինի կենտ ֆունկցիա, ապա $f(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրյեի շարքը կպարունակի միայն սինուսներ:

Այսպիսով, $[0,\pi]$ միջակայքում որոշված և այդ միջակայքում Դիրիխլեի պայմաններին բավարարող $f(x)$ ֆունկցիան կարելի է վերլուծել ինչպես միայն կոսինուսներից, այնպես էլ միայն սինուսներից կազմված Ֆուրյեի շարքի:

Օրինակ 2: $[0,\pi]$ միջակայքում որոշված $f(x)=x$ ֆունկցիան վերլուծել միայն կոսինուսներից կազմված Ֆուրյեի շարքի:

Լուծում: $[-\pi,0)$ կիսաբաց միջակայքում դիտարկվող ֆունկցիան շարունակելով «զույգ» ձևով՝ կստանանք $[-\pi,\pi]$ միջակայքում որոշված $f^*(x)=|x|$ ֆունկցիան: Այնուհետև դիտարկենք 2π պարբերական այնպիսի $\varphi(x)$ ֆունկցիա, որը $[-\pi,\pi]$ միջակայքում համընկնում է $f^*(x)$ ֆունկցիային: Ինչպես գիտենք, կառուցելով $\varphi(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրյեի շարքը **[64,o3]**.

$$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\dots+\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}+\dots\right], \qquad (բ)$$

արդյունքում $[0,\pi]$ միջակայքում կստանանք դիտարկվող ֆունկցիայի Ֆուրյեի վերլուծությունը:

Այսպիսով, $[0,\pi]$ միջակայքի յուրաքանչյուր կետում $f(x)=x$ ֆունկցիան կարող ենք ներկայացնել (բ) վերլուծության միջոցով:

Նշենք, որ ոչ պարբերական ֆունկցիաներին վերաբերող շարադրված դատողություններում π-ն փոխարինելով ցանկացած l $(l\neq\pi)$ դրական թվով, կարող ենք $[-l,l]$ կամ $[0,l]$ միջակայքում որոշված $f(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրյեի վերլուծությունը ստանալու խնդիրը (փոփոխականի (1) փոխարինման միջոցով) բերել վերևում դիտարկված համապատասխան խնդրին: Նշենք նաև, որ ոչ պարբերական ֆունկցիաները Ֆուրյեի շարքի վերլուծելու խնդիրներում անհրաժեշտ է ստացվող շարքերի զուգամիտության առումով դիտարկվող միջակայքերից յուրաքանչյուրի ծայրակետերում կատարել լրացուցիչ հետազոտություն:

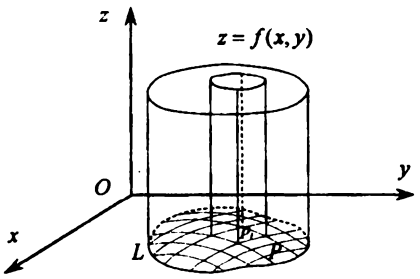
Վերջում նկատենք, որ $[-\pi,0]$ միջակայքում որոշված ոչ պարբերական $f(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրյեի վերլուծությունը ստանալու համար անհրաժեշտ է (չմոռանալով Դիրիխլեի պայմանների մասին) այն որևէ ձևով շարունակել $(0,\pi]$ կիսաբաց միջակայքում և կառուցել այդ ֆունկցիայի համապատասխան $f^*(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրյեի շարքը:

ԳԼՈՒԽ XII

ԲԱԶՄԱՊԱՏԻԿ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

§66. Խնդիր, որը հանգեցնում է կրկնակի ինտեգրալի հասկացությանը: Կրկնակի ինտեգրալի սահմանումը և հիմնական հատկությունները:

Կրկնակի ինտեգրալի հասկացությանը ծանոթանալու համար դիտարկենք հետևյալ խնդիրը՝



Նկ. 5

Հաշվել այն մարմնի ծավալը, որը վերևից սահմանափակված է $z=f(x,y)$ հավասարումն ունեցող մակերևույթով, եզրերից՝ կոորդինատական Oz առանցքին զուգահեռ ծնիչներով (նկ.5) գլանային մակերևույթով [10,2°], *իսկ ներքևից Oxy հարթության մեջ ընկած L փակ կորով սահմանափակված P հարթ տիրույթով:*

Դրված խնդիրը լուծելու համար Oxy հարթության մեջ ընկած կորերի կամայական ցանցով P տիրույթը տրոհենք վերջավոր թվով P_1, P_2,... P_n տարրական տիրույթների և այդ տիրույթների մակերեսները համապատասխանաբար նշանակենք Δp_1-ով, Δp_2-ով,..., Δp_n-ով: Այնուհետև դիտարկենք Oz առանցքին զուգահեռ ծնիչներով այն գլանային սյուները, որոնց հիմքերը P_i $(i=1,2,...,n)$ տիրույթներն են և որոնց միավորումից առաջանում է տրված մարմինը: Նկատի ունենալով, որ նկարագրված սյուների ծավալների գումարը հավասար է դիտարկվող մարմնի ծավալին և P_i $(i=1,2,...,n)$ հիմքով սյունը փոխարինելով Oz առանցքին զուգահեռ ծնիչներով և նույն հիմքով այն տարրական գլանով, որի բարձրությունը հավասար է այդ գլանի հիմքի որևէ M_i (ξ_i,η_i) կետում $f(x,y)$ ֆունկցիայի $f(\xi_i,\eta_i)$ արժեքին՝ կարող ենք տրված մարմնի ծավալն արտահայտել

$$v \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta p_i \qquad (1)$$

մոտավոր հավասարությամբ:

Սահմանում 1: *Տիրույթի կետերի մեծագույն հեռավորությունը կոչվում է այդ տիրույթի տրամագիծ:*

P_i $(i=1,2,...,n)$ տիրույթի տրամագիծը նշանակենք λ_i-ով, իսկ λ_i տրամագծերից մեծագույնը՝ λ-ով.

$$\lambda = \max_{1\le i\le n} \lambda_i : \qquad (2)$$

Ակնհայտ է, որ որքան փոքրացնենք P_i տիրույթների տրամագծերը (հետևաբար որքան մեծացնենք այդ տիրույթների թիվը), այնքան (1) մոտավոր հավասարության ճշտությունը կմեծանա: Վերոգրյալից հետևում է, որ (1) մոտավորության մեջ անցնելով սահմանի, երբ λ-ն ձգտում է զրոյի, դիտարկվող մարմնի ծավալը կարտահայտենք

$$v = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta p_i \qquad (1')$$

ճշգրիտ հավասարությամբ:

Անցնելով ընդհանուր դեպքի դիտարկմանը՝ ենթադրենք կոորդինատական Oxy հարթության մեջ տրված L փակ կորով սահմանափակված P փակ տիրույթում որոշված է $z = f(x,y)$ ֆունկցիան [46,u2]:

Նորից կորերի կամայական ցանցով P տիրույթը տրոհենք վերջավոր թվով P_1, P_2,... P_n տարրական տիրույթների և այդ տիրույթների մակերեսներն ու տրամագծերը համապատասխանաբար նշանակենք Δp_1-ով ու λ_1-ով, Δp_2-ով ու λ_2-ով,..., Δp_n-ով ու λ_n-ով, իսկ տրամագծերից մեծագույնը՝ λ-ով: P_i $(i = 1,2,...,n)$ տիրույթի սահմաններում վերցնենք կամայական $M_i(\xi_i,\eta_i)$ կետ, $f(x,y)$ ֆունկցիայի արժեքն այդ կետում բազմապատկենք նշված տիրույթի մակերեսով և կազմենք

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta p_i \qquad (3)$$

գումարը:

Սահմանում 2: *σ_n գումարը կոչվում է Oxy հարթության մեջ տրված P փակ տիրույթում որոշված $f(x,y)$ ֆունկցիայի ինտեգրալ գումար՝ տարածված այդ տիրույթում:*

Սահմանում 3: *Կասենք, որ λ-ն զրոյի ձգտելիս (3) գումարն ունի (վերջավոր) I սահման, եթե ցանկացած ε դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի δ դրական թիվ, որ հենց $\lambda < \delta$, այսինքն հենց P տիրույթը տրոհենք δ-ից փոքր տրամագիծ ունեցող P_i տարրական տիրույթների, ապա անկախ տրոհման եղանակից և P_i տիրույթներում M_i կետերի ընտրությունից տեղի ունի*

$$|\sigma_n - I| < \varepsilon \qquad (4)$$

անհավասարությունը:

Սահմանում 4: *λ-ն զրոյի ձգտելիս σ_n գումարի վերջավոր I սահմանը կոչվում է $f(x,y)$ ֆունկցիայի կրկնակի ինտեգրալ՝ տարածված P տիրույթով և նշանակվում է*

$$\iint_P f(x,y)dp, \qquad \iint_P f(x,y)dxdy \tag{5}$$

պայմանանշաններից որևէ մեկով:

Օգտվելով կրկնակի ինտեգրալի սահմանումից և (1՝) հավասարությունից՝ վերևում դիտարկված մարմնի ծավալը կարտահայտենք

$$v = \iint_P f(x,y)dxdy \tag{1''}$$

կրկնակի ինտեգրալի միջոցով:

Սահմանում 5: *(5) ինտեգրալի գոյության դեպքում $f(x,y)$ ֆունկցիան կոչվում է ինտեգրելի P տիրույթում, P-ն կոչվում է $f(x,y)$ ֆունկցիայի ինտեգրման տիրույթ, իսկ $dp = dxdy$ արտահայտությունը՝ մակերեսի տարր ուղղանկյուն կոորդինատներով:*

Նկատենք, որ ինտեգրելի ֆունկցիան անհրաժեշտաբար պետք է լինի սահմանափակ ինտեգրման տիրույթում:

Իրոք, եթե $f(x,y)$ ֆունկցիան P տիրույթում, օրինակ վերևից սահմանափակ չէ, ապա ինչպես էլ այդ տիրույթը տրոհենք տարրական տիրույթների, ստացված տիրույթներից առնվազն մեկում տրված ֆունկցիան կլինի անսահմանափակ: Այդ դեպքում համապատասխան տիրույթում $M_i(\xi_i,\eta_i)$ կետի ընտրության հաշվին $f(\xi_i,\eta_i)$-ն, հետևաբար նաև σ_n գումարը կարելի է դարձնել ցանկացած դրական թվից մեծ, ինչը նշանակում է, որ քննարկվող դեպքում σ_n գումարը վերջավոր սահման ունենալ չի կարող, այսինքն $f(x,y)$ ֆունկցիան P տիրույթում ինտեգրելի չէ:

Ստացած հակասությունը ապացուցում է ձևակերպած պնդումը:

Նկատի ունենալով վերոգրյալը՝ այս պարագրաֆում կդիտարկենք միայն սահմանափակ ֆունկցիաներ:

Այժմ P_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ տիրույթում $f(x,y)$ ֆունկցիայի ընդունած արժեքների ճշգրիտ ստորին և ճշգրիտ վերին եզրերը [18,u32] համապատասխանաբար նշանակենք m_i-ով ու M_i-ով և կազմենք

$$\underline{s} = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta p_i, \quad \overline{S} = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta p_i \tag{6}$$

գումարները:

Սահմանում 6: *$\underline{s}$ և $\overline{S}$ գումարները համապատասխանաբար կոչվում են P տիրույթում որոշված $f(x,y)$ ֆունկցիայի Դարբուի ստորին և վերին ինտեգրալ գումարներ:*

Պարզ է, որ եթե $f(x,y)$-ն անընդհատ ֆունկցիա է P տիրույթում [46,u12,u13], ապա տրված տրոհման դեպքում (6) գումարներն իրենցից կներկայացնեն այդ ֆունկցիայի համապատասխանաբար փոքրագույն և մեծագույն ինտեգրալ գումարները:

Օգտվելով թվային բազմության ճշգրիտ ստորին և ճշգրիտ վերին եզրերի սահմանումներից՝ կունենանք

$$m_i \le f(\xi_i,\eta_i) \le M_i \quad (i=1,2,\dots,n): \tag{7}$$

(7) կրկնակի անհավասարությունների անդամները բազմապատկելով Δp_i-ով և ստացված անհավասարություններն անդամ առ անդամ գումարելով՝ (3) և (6) նշանակումների հաշվառումով կստանանք

$$\underline{s} \le \sigma_n \le \overline{S}: \tag{8}$$

Ինչպես տեսնում ենք տրված տրոհման դեպքում $\underline{s}$-ը և $\overline{S}$-ը հաստատուններ են, իսկ σ_n-ը՝ փոփոխական (քանի որ այն կախված է $M_i(\xi_i,\eta_i)$ կետերի ընտրությունից):

Հարց է ծագում. *որո՞նք են կրկնակի ինտեգրալի գոյության պայմանները, այսինքն ինչպիսի՞ պայմանների պետք է բավարարի P տիրույթում որոշված $f(x,y)$ ֆունկցիան, որպեսզի այն լինի ինտեգրելի այդ տիրույթում:*

Հետևյալ թեորեմը, որը բերում ենք առանց ապացուցման, տալիս է այդ հարցի պատասխանը՝

Թեորեմ 1: *P տիրույթում որոշված $z=f(x,y)$ ֆունկցիայի կրկնակի ինտեգրալի գոյության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենա*

$$\lim_{\lambda\to 0}\left(\overline{S}-\underline{s}\right)=0 \tag{9}$$

պայմանը, որտեղ $\underline{s}$-ը և $\overline{S}$-ը այդ ֆունկցիայի Դարբուի համապատասխանաբար ստորին և վերին ինտեգրալ գումարներն են տրված տիրույթում:

Նկատենք, որ $M_i-m_i=\omega_i$ $(i=1,2,\dots,n)$ տարբերությունը անվանելով $f(x,y)$ ֆունկցիայի տատանում i-րդ տիրույթում և օգտվելով (6) նշանակումներից՝ կարող ենք այդ ֆունկցիայի կրկնակի ինտեգրալի գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայմանը ներկայացնել

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta p_i=0 \tag{9'}$$

տեսքով:

Ձևակերպենք նաև հետևյալ կարևոր թեորեմը՝

Թեորեմ 2: *Եթե $z=f(x,y)$ ֆունկցիան անընդհատ է P տիրույթում, ապա այն ինտեգրելի է այդ տիրույթում:*

Վերջում ենթադրելով, որ դիտարկվող ֆունկցիաներն ինտեգրելի են տրված տիրույթներում՝ թվարկենք կրկնակի ինտեգրալի հիմնական հատկությունները:

1°. *Հաստատուն արտադրիչը կարելի է դուրս բերել կրկնակի ինտեգրալի նշանի տակից.*

$$\iint_P c\,f(x,y)\,dp = c\iint_P f(x,y)\,dp \quad (c=const): \tag{10}$$

2°. *Վերջավոր թվով ֆունկցիաների գումարի կրկնակի ինտեգրալը՝ տարածված որևէ տիրույթով, հավասար է այդ ֆունկցիաների կրկնակի ինտեգրալների գումարին՝ տարածված նույն տիրույթով.*

$$\iint_P [f_1(x,y)+f_2(x,y)+\cdots+f_n(x,y)]dp =$$
$$= \iint_P f_1(x,y)dp + \iint_P f_2(x,y)dp + \cdots + \iint_P f_n(x,y)dp: \qquad (11)$$

3°. *Եթե ինտեգրման տիրույթի յուրաքանչյուր կետում տեղի ունի*

$$f(x,y) \le g(x,y)$$

անհավասարությունը, ապա տեղի ունի նաև

$$\iint_P f(x,y)dp \le \iint_P g(x,y)dp \qquad (12)$$

անհավասարությունը:

Հետևանք 1: *Որևէ տիրույթում ոչ բացասական արժեքներ ընդունող ֆունկցիայի կրկնակի ինտեգրալը՝ տարածված այդ տիրույթով, ոչ բացասական մեծություն է.*

$$\iint_P f(x,y)dp \ge 0, \quad \text{եթե } f(x,y) \ge 0, \text{ երբ } M(x,y) \in P: \qquad (13)$$

4°. *Հաստատունի կրկնակի ինտեգրալը՝ տարածված P տիրույթով, հավասար է ինտեգրման տիրույթի s մակերեսի և տրված հաստատունի արտադրյալին.*

$$\iint_P c dp = cs \quad (c = const): \qquad (14)$$

5°. *Եթե P տիրույթում $f(x,y)$ ֆունկցիայի փոքրագույն և մեծագույն արժեքները համապատասխանաբար հավասար են m-ի և M-ի, իսկ s-ը այդ տիրույթի մակերեսն է, ապա տեղի ունի*

$$ms \le \iint_P f(x,y)dp \le Ms \qquad (15)$$

գնահատականը:

6°. *Եթե $z = f(x,y)$ ֆունկցիան անընդհատ է s մակերես ունեցող P տիրույթում, ապա այդ տիրույթում գոյություն ունի այնպիսի M_0 կետ, որ տեղի ունի*

$$\iint_P f(x,y)dp = s f(M_0) \qquad (16)$$

հավասարությունը:

7°. *Եթե P տիրույթը տրոհված է այնպիսի P_1 և P_2 տիրույթների, որոնք չունեն ընդհանուր ներքին կետ, ապա*

$$\iint_P f(x,y)dp, \quad \iint_{P_1} f(x,y)dp_1, \quad \iint_{P_2} f(x,y)dp_2 \qquad (17)$$

ինտեգրալներից առաջինի գոյությունից հետևում է հաջորդ երկուսի գոյությունը և վերջին երկուսի գոյությունից՝ առաջինի գոյությունը, ընդ որում տեղի ունի

$$\iint_P f(x,y)dp = \iint_{P_1} f(x,y)dp_1 + \iint_{P_2} f(x,y)dp_2 \qquad (18)$$

հավասարությունը:

8°. Եթե ինտեգրման տիրույթում ենթինտեգրալ ֆունկցիան չի փոխում իր նշանը, ապա համապատասխան կրկնակի ինտեգրալը մի թիվ է, որի նշանը համընկնում է տրված ֆունկցիայի նշանին:

9°. Եթե $f(x,y)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է P տիրույթում, ապա $|f(x,y)|$ ֆունկցիան նույնպես ինտեգրելի է այդ տիրույթում, ընդ որում տեղի ունի

$$\left|\iint_P f(x,y)dp\right| \le \iint_P |f(x,y)|dp \qquad (19)$$

անհավասարությունը:

§67. Կրկնակի ինտեգրալի հաշվումն ուղղանկյուն դեկարտյան և բևեռային կոորդինատներով: Մակերևույթի մակերեսի հաշվումը կրկնակի ինտեգրալի միջոցով:

Կրկնակի ինտեգրալի հաշվման բանաձևեր ստանալու համար նախ ծանոթանանք կանոնավոր տիրույթ հասկացությանը:

Սահմանում 1: *Կոորդինատական Oxy հարթության մեջ ընկած P փակ տիրույթը կոչվում է կանոնավոր Oy առանցքի ուղղությամբ, եթե այդ տիրույթի ներքին կետով անցնող և նշված առանցքին զուգահեռ յուրաքանչյուր ուղիղ տրված տիրույթի եզրագիծը հատում է երկու կետում:*

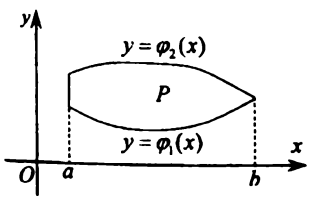
Նույն ձևով սահմանվում է նաև Ox առանցքի ուղղությամբ կանոնավոր տիրույթը:

Սահմանում 2: *P փակ տիրույթը կոչվում է կանոնավոր, եթե այն կանոնավոր է ինչպես Oy, այնպես էլ Ox առանցքի ուղղությամբ:*

Այժմ ենթադրենք $[a,b]$ միջակայքում

$$y = \varphi_1(x),\ y_2 = \varphi_2(x) \qquad (1)$$

հավասարումներն ունեցող անընդհատ կորերով (ընդ որում նշված միջակայքի յուրաքանչյուր կետում տեղի ունի $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ անհավասարությունը) և $x = a$, $x = b$ ուղիղներով սահմանափակված P կանոնավոր տիրույթում (նկ.6) որոշված է $z = f(x,y)$ անընդհատ ֆունկցիան [46,u12]:



նկ.6

Սահմանում 3:

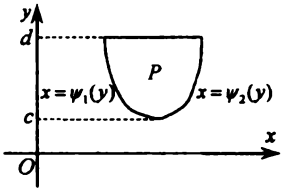
$$I_P=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy\right]dx \qquad (2)$$

արտահայտությունը կոչվում է $f(x,y)$ ֆունկցիայի կրկնապատիկ ինտեգրալ՝ տարածված $[a,b]$ միջակայքում (1) հավասարումներն ունեցող անընդհատ կորերով և $x=a$, $x=b$ հավասարումներն ունեցող ուղիղներով սահմանափակված P կանոնավոր տիրույթով:

Նույն ձևով

$$J_P=\int_c^d\left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)dx\right]dy \qquad (3)$$

արտահայտությունը կոչվում է $[c,d]$ միջակայքում (նկ.7) $x=\psi_1(y)$, $x=\psi_2(y)$ հավասարումներն ունեցող անընդհատ կորերով (ընդ որում նշված միջակայքի յուրաքանչյուր կետում տեղի ունի $\psi_1(y)\le\psi_2(y)$ անհավասարությունը) և $y=c$, $y=d$ ուղիղներով սահմանափակված P կանոնավոր տիրույթում որոշված $z=f(x,y)$ անընդհատ ֆունկցիայի կրկնապատիկ ինտեգրալ՝ տարածված այդ տիրույթով:



Նկ.7

Նշենք, որ (2) կրկնապատիկ ինտեգրալում նախ կհաշվենք քառակուսի փակագծերի ներսում գրված ինտեգրալը, ընդ որում ինտեգրումը կկատարենք ըստ y-ի, իսկ x-ը կհամարենք հաստատուն, այնուհետև ինտեգրման արդյունքում ստացված ֆունկցիան*) ըստ x-ի կինտեգրենք a-ից մինչև b սահմաններում:

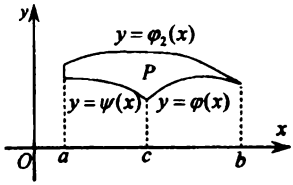
Նույն ձևով (3) կրկնապատիկ ինտեգրալի քառակուսի փակագծերի ներսում գրված ինտեգրալում y-ը կհամարենք հաստատուն և $f(x,y)$ ֆունկցիան ըստ x-ի կինտեգրենք $\psi_1(y)$-ից մինչև $\psi_2(y)$ սահմաններում, այնուհետև ինտեգրման արդյունքում ստացված ֆունկցիան ըստ y-ի կինտեգրենք c-ից մինչև d սահմաններում:

Դիտողություն 1: *եթե $\varphi_1(x)$ և $\varphi_2(x)$ ֆունկցիաները (կամ նրանցից որևէ մեկը) հնարավոր չէ $[a,b]$ միջակայքում արտահայտել մեկ միասնական բանաձևով, ապա այդպիսի դեպքերում (2) կրկնապատիկ ինտեգրալը կներկայացնենք մի քանի ինտեգրալների գումարի միջոցով:*

---

*) Կարելի է ցույց տալ, որ այդ ֆունկցիան $[a,b]$ միջակայքում որոշված անընդհատ ֆունկցիա է:

Օրինակ 1: Եթե $\varphi_1(x)$ ֆունկցիան տրվում է



Նկ.8

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}\psi(x), \text{ երբ } a\le x<c,\\ \varphi(x), \text{ երբ } c\le x\le b\end{cases}$$

բանաձևով, որտեղ $\varphi(x)$ և $\psi(x)$ ֆունկցիաները հնարավոր չէ արտահայտել մեկ միասնական բանաձևով (նկ.8), ապա (2) կրկնապատիկ ինտեգրալը կներկայացնենք երկու ինտեգրալների գումարի տեսքով.

$$\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx=\int_a^c\left[\int_{\psi(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx+\int_c^b\left[\int_{\varphi(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx:$$

Հասկանալի է, որ անհրաժեշտության դեպքում նույն ձևով կվարվենք նաև (3) կրկնապատիկ ինտեգրալի հետ:

Այժմ առանց ապացույցի ձևակերպենք կրկնապատիկ ինտեգրալի հետևյալ երկու հատկությունները՝

1°. *Եթե կոորդինատական Ox և Oy առանցքներին զուգահեռ ուղիղներով P կանոնավոր տիրույթը տրոհված է վերջավոր թվով $P_1,P_2,\dots,P_n$ կանոնավոր տիրույթների, ապա P տիրույթում որոշված $f(x,y)$ անընդհատ ֆունկցիայի կրկնապատիկ ինտեգրալը՝ տարածված նշված տիրույթով, հավասար է տրված ֆունկցիայի, P_i $(i=1,2,\dots,n)$ տիրույթներով տարածված կրկնապատիկ ինտեգրալների գումարին.*

$$I_P=I_{P_1}+I_{P_2}+\dots+I_{P_n}: \tag{4}$$

2°. *(Կրկնապատիկ ինտեգրալի միջին արժեքի հատկությունը) Եթե $z=f(x,y)$ ֆունկցիան անընդհատ է՝ $[a,b]$ միջակայքում (1) հավասարումներով տրված անընդհատ կորերով և $x=a, x=b$ ուղիղներով սահմանափակված P կանոնավոր տիրույթում, ապա այդ տիրույթում գոյություն ունի այնպիսի M_0 կետ, որ տեղի ունի*

$$\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx=s\,f(M_0) \tag{5}$$

հավասարությունը, որտեղ s-ը P տիրույթի մակերեսն է:

Անցնելով կրկնակի ինտեգրալի հաշվմանը՝ ապացուցենք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 1: *P կանոնավոր տիրույթում որոշված $f(x,y)$ անընդհատ ֆունկցիայի կրկնակի և կրկնապատիկ ինտեգրալները՝ տարածված այդ տիրույթով, հավասար են իրար:*

Ապացույց: Որոշակիության համար ենթադրենք P կանոնավոր տիրույթն ունի 6-րդ նկարում պատկերված տեսքը և ցույց տանք, որ այդ տիրույթում որոշ-

ված $f(x,y)$ անընդհատ ֆունկցիայի կրկնակի ինտեգրալը կարելի է հաշվել

$$\iint_P f(x,y)dp=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx \qquad (6)$$

բանաձևով [66,u4]:

Համոզվելու համար նախ կոորդինատական առանցքներին զուգահեռ ուղիղներով P տիրույթը տրոհենք վերջավոր թվով $P_1,P_2,\dots,P_n$ կանոնավոր տիրույթների և այդ տիրույթների տրամագծերից մեծագույնը նշանակենք λ-ով [66,u1]: Այնուհետև օգտվելով կրկնապատիկ ինտեգրալի վերևում բերված հատկություններից՝ կստանանք

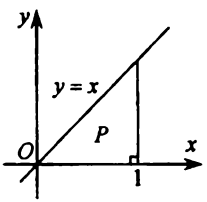
$$I_p=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx=I_{P_1}+I_{P_2}+\dots+I_{P_n}$$

և հետևաբար

$$\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx=\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta p_i \qquad (7)$$

հավասարությունը, որտեղ Δp_i-ն $(i=1,2,\dots,n)$ P_i տիրույթի մակերեսն է, իսկ M_i-ն՝ այդ տիրույթի կետ: Վերջին հավասարության մեջ անցնելով սահմանի, երբ λ-ն ձգտում է զրոյի և հաշվի առնելով, որ այդ հավասարության ձախ մասը կախված չէ λ-ից, իսկ աջ մասը $f(x,y)$ ֆունկցիայի, P տիրույթով տարածված կրկնակի ինտեգրալի ինտեգրալ գումարն է՝ կստանանք պահանջվող հավասարությունը:

Իպա



Նկ.9

Օրինակ 2: Հաշվել

$$I=\iint_P e^{\frac{y}{x}}dp$$

կրկնակի ինտեգրալը, որտեղ P-ն $y=x$, $y=0$ և $x=1$ ուղիղներով (նկ.9) սահմանափակված տիրույթն է:

Լուծում: Օգտվելով կրկնակի ինտեգրալի հաշվման (6) բանաձևից՝ տրված ինտեգրալի համար կստանանք [35, 3°,7°ա], [40,1°], [41(6)]

$$I=\int_0^1\left(\int_0^x e^{\frac{y}{x}}dy\right)dx=\int_0^1\left(xe^{\frac{y}{x}}\right)\Big|_0^x dx=\int_0^1 x(e-1)dx=\frac{e-1}{2}:$$

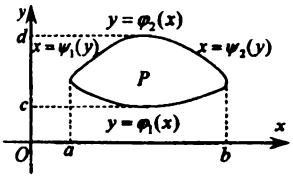
Դիտողություն 2: *Եթե P կանոնավոր տիրույթն ունի 7-րդ նկարում պատկերված տեսքը, ապա, կրկնելով թեորեմ 1-ում բերված դատողությունները՝ այդ տիրույթում որոշված $f(x,y)$ անընդհատ ֆունկցիայի կրկնակի ինտեգրալի համար կստանանք*

$$\iint_P f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right] dy \qquad (6')$$

բանաձևը:

Այսպիսով, մի որևէ կանոնավոր տիրույթում որոշված $f(x,y)$ անընդհատ ֆունկցիայի կրկնակի ինտեգրալը հաշվելու համար, այն պետք է բերել կրկնապատիկ ինտեգրալի, որն ինչպես տեսանք, կարելի է իրականացնել (6) և (6') բանաձևերով: Կախված ինտեգրման տիրույթի տեսքից յուրաքանչյուր մասնավոր դեպքում պետք է ընտրել (6) կամ (6') բանաձևը:

Դիտողություն 3: Եթե P կանոնավոր տիրույթը կարելի է տալ $[a,b]$ միջակայքում $y=\varphi_1(x)$ և $y=\varphi_2(x)$ հավասարումներն ունեցող անընդհատ կորերով (նկ.10) կամ էլ $[c,d]$ միջակայքում $x=\psi_1(y)$ և $x=\psi_2(y)$ հավասարումներն ունեցող անընդհատ կորերով, ապա այդ տիրույթում որոշված $f(x,y)$ ինտեգրելի ֆունկցիայի կրկնակի ինտեգրալը կարելի է հաշվել և (6) բանաձևով, և (6') բանաձևով:



Նկ.10

Վերոգրյալից հետևում է, որ քննարկվող դեպքում տեղի ունի

$$\int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right] dy \qquad (8)$$

բանաձևը, որը կոչվում է կրկնապատիկ ինտեգրալում ինտեգրման կարգը փոխելու բանաձև:

Դիտողություն 4: Եթե ինտեգրման տիրույթը կոորդինատական առանցքներից և ոչ մեկի ուղղությամբ կանոնավոր չէ, ապա այդ տիրույթով տարածված կրկնակի ինտեգրալը հնարավոր չէ բերել կրկնապատիկ ինտեգրալի: Բայց, եթե այդ անկանոն տիրույթը հնարավոր է տրոհել վերջավոր թվով՝ կոորդինատական առանցքներից որևէ մեկի ուղղությամբ կանոնավոր տիրույթների, ապա ստացված տիրույթներից յուրաքանչյուրում հաշվելով տրված ֆունկցիայի կրկնակի ինտեգրալը և գումարելով արդյունքները՝ կստանանք ինտեգրման ամբողջ տիրույթով տարածված ինտեգրալի արժեքը:

Դիտողություն 5: Եթե $f(x,y)=1$ ֆունկցիայի համար s մակերես ունեցող P տիրույթում կազմենք ինտեգրալ գումար [66,(3)], ապա պարզ է, որ անկախ տրված տիրույթը տարրական տիրույթների տրոհման եղանակից, այդ գումարը հավասար կլինի դիտարկվող տիրույթի մակերեսին.

$$s = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta p_i \quad (i = 1,2,\ldots,n): \qquad (9)$$

Հետևաբար, (9) հավասարության մեջ անցնելով սահմանի, երբ P_i $(i=1,2,\ldots,n)$ տարրական տիրույթների տրամագծերից մեծագույնը ձգտում է զրոյի, P տիրույթի մակերեսի համար կունենանք

$$s=\iint_P dp=\iint_P dxdy: \qquad (10)$$

Ամփոփելով վերոգրյալը՝ ստանում ենք հետևյալ պնդումը՝

Հարթ տիրույթի մակերեսը հավասար է $f(x,y)\equiv 1$ ֆունկցիայի կրկնակի ինտեգրալին՝ տարածված այդ տիրույթով:

Եթե, մասնավոր դեպքում, տիրույթն ունի 6-րդ նկարում պատկերված տեսքը, ապա օգտվելով թեորեմ 1-ից, այդ տիրույթի մակերեսի համար կստանանք մեզ հայտնի բանաձև [43,(3)].

$$s=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}dy\right]dx=\int_a^b[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]dx: \qquad (11)$$

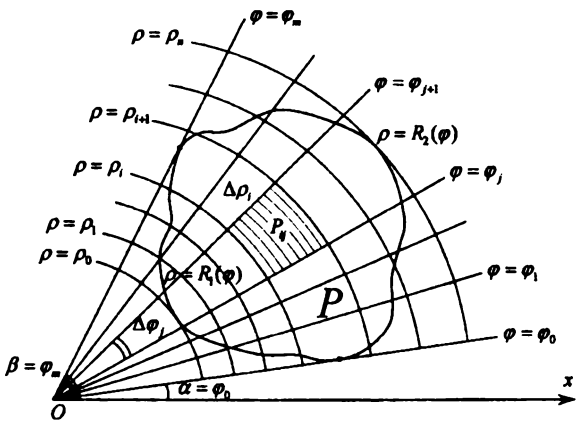
Կախված ենթինտեգրալ ֆունկցիայի և ինտեգրման տիրույթի տեսքից՝ երբեմն հարմար է լինում այդ տիրույթում որոշված ֆունկցիայի կրկնակի ինտեգրալը հաշվելու համար անցնել բևեռային կոորդինատական համակարգի [44]:

Սահմանում 4: *Կոորդինատական Oρφ հարթության մեջ ընկած P փակ տիրույթը կոչվում է կանոնավոր բևեռային կոորդինատներով, եթե բևեռից դուրս եկող և այդ տիրույթի ներքին կետով անցնող յուրաքանչյուր ճառագայթ տրված տիրույթի եզրագծի հետ հատվում է երկու կետում:*

Այժմ, ենթադրելով, որ P կանոնավոր տիրույթը (նկ.11) սահմանափակված է $[\alpha,\beta]$ միջակայքում

$$\rho=R_1(\varphi),\ \rho=R_2(\varphi) \qquad (12)$$

հավասարումներն ունեցող անընդհատ կորերով (ընդ որում նշված միջակայքի



Նկ.11

յուրաքանչյուր կետում տեղի ունի $R_1(\varphi)\le R_2(\varphi)$ անհավասարությունը) և բևեռից դուրս եկող $\varphi=\alpha$ և $\varphi=\beta$ ճառագայթներով՝ դնենք այդ տիրույթում որոշված $z=f(\rho,\varphi)$ անընդհատ ֆունկցիայի կրկնակի ինտեգրալը բևեռային կոորդինատներով հաշվելու խնդիրը:

Դրված խնդիրը լուծելու համար բևեռային կոորդինատական հարթության

$$\rho=\rho_0,\ \rho=\rho_1,\ \cdots,\ \rho=\rho_n\ \left(\min_{\alpha\le\varphi\le\beta}R_1(\varphi)=\rho_0<\rho_1<\cdots<\rho_n=\max_{\alpha\le\varphi\le\beta}R_2(\varphi)\right)$$

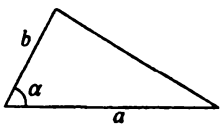
համակենտրոն շրջանագծերով և բևեռից դուրս եկող

$$\varphi=\varphi_0,\ \varphi=\varphi_1,\ldots,\varphi=\varphi_m\ \ (\alpha=\varphi_0<\varphi_1<\cdots<\varphi_m=\beta)$$

ճառագայթներով ինտեգրման P տիրույթը տրոհենք P_{ij} $(i=1,2,\cdots,n;$ $j=1,2,\cdots,m)$ տարրական տիրույթների: Այնուհետև օգտվելով եռանկյան մակերեսի

$$s=\frac{1}{2}ab\sin\alpha$$

բանաձևից (նկ.12) և հաշվի առնելով, որ փոքր անկյունների համար տեղի ունի $\sin\alpha\approx\alpha$ մոտավոր հավասարությունը [23,o6], նշված տիրույթների մակերեսների համար կստանանք



նկ.12

$$\Delta p_{ij}\approx\frac{1}{2}\rho_{i+1}^2\Delta\varphi_j-\frac{1}{2}\rho_i^2\Delta\varphi_j=\rho_i'\Delta\rho_i\Delta\varphi_j,\qquad(13)$$

որտեղ

$$\Delta\rho_i=\rho_{i+1}-\rho_i,\ \Delta\varphi_j=\varphi_{j+1}-\varphi_j,\ \rho_i'=\frac{\rho_i+\rho_{i+1}}{2}\ \ (i=0,1,\ldots,n-1;\ j=0,1,\ldots,m-1)^{*)}:$$

Եթե դիտարկվող ֆունկցիայի ինտեգրալ գումարի մեջ որպես P_{ij} $(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m)$ տարրական տիրույթին պատկանող M_{ij} կետ վերցնենք այդ տիրույթի ցանկացած կետ, որը գտնվում է $\rho=\rho_i'$ «միջին շրջանագծի» վրա, նշված տիրույթների մակերեսների համար ստացած (13) բանաձևի հաշվառումով այդ գումարի համար կունենանք

$$\sigma_n=\sum_{j=0}^{m-1}\left[\sum_i f(\rho_i',\varphi_j')\rho_i'\Delta\rho_i\Delta\varphi_j\right],\qquad(14)$$

որտեղ φ_j'-ը $(j=0,1,\ldots,m-1)$ M_{ij} կետի կետի բևեռային անկյունն է [44,u1] **):

Ինչպես տեսնում ենք, մեզ հետաքրքրող ինտեգրալ գումարի արտահայտության մեջ առկա է կրկնակի գումար (այսպես կոչված՝ ներքին և արտաքին), ինչը, բնականաբար, տարրական P_{ij} տիրույթները երկու ինդեքսների միջոցով համարակալելու հետևանք է:

---

*) ρ_i'-ը կոչվում է ρ_i և ρ_{i+1} շառավիղների միջև ընկած միջին շառավիղ:

**) Քանի որ, ընդհանուր դեպքում $\varphi=\varphi_j$ և $\varphi=\varphi_{j+1}$ $(j=0,1,\ldots,m-1)$ ճառագայթների մեջ ընկած ոչ բոլոր տարրական տիրույթներն են պատկանում P տիրույթին, հետևաբար (14) արտահայտության ներքին գումարի մեջ i ինդեքսը կարող է և որոշ արժեքներ չընդունել:

$\Delta\varphi_j$ արտադրիչը դուրս բերելով ներքին գումարի նշանի տակից *) կարող ենք (14) գումարը ներկայացնել

$$\sigma_n = \sum_{j=0}^{m-1}\left[\sum_i f(\rho_i',\varphi_j')\rho_i'\Delta\rho_i\right]\Delta\varphi_j \qquad (14')$$

տեսքով:

Նշենք, որ (14') գումարում, j -ն համարելով հաստատուն, նախ կհաշվենք ներքին գումարը, այնուհետև, ստացված գումարը (որը կախված է j -ից) բազմապատկելով $\Delta\varphi_j$ -ով՝ կհաշվենք արտաքին գումարը:

Դժվար չէ համոզվել, որ (14') հավասարության մեջ անցնելով սահմանի, երբ տիրույթների տրամագծերից մեծագույնը ձգտում է զրոյի՝ կստանանք

$$\iint_P f(\rho,\varphi)dp = \int_\alpha^\beta\left[\int_{R_1(\varphi)}^{R_2(\varphi)} f(\rho,\varphi)\rho d\rho\right]d\varphi: \qquad (15)$$

Այսպիսով, $[\alpha,\beta]$ միջակայքում (12) հավասարումներն ունեցող անընդհատ կորերով և բևեռից դուրս եկող $\varphi=\alpha$ և $\varphi=\beta$ ճառագայթներով սահմանափակված P կանոնավոր տիրույթում որոշված $f(\rho,\varphi)$ անընդհատ ֆունկցիայի P տիրույթով տարածված կրկնակի ինտեգրալը հավասար է այդ ֆունկցիայի նույն տիրույթով տարածված կրկնապատիկ ինտեգրալին:

Համեմատելով և (6) և (15) բանաձևերը՝ եզրակացնում ենք, որ մակերեսի տարրը [66,u5] բևեռային կոորդինատներով արտահայտվում է

$$dp = \rho d\rho d\varphi \qquad (16)$$

բանաձևով:

Նկատի ունենալով (16) բանաձևը և օգտվելով կետի ուղղանկյուն դեկարտյան և բևեռային կոորդինատները միմյանց կապող

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi \qquad (17)$$

բանաձևերից [44,(1)]՝ P կանոնավոր տիրույթում որոշված $f(x,y)$ անընդհատ ֆունկցիայի, ուղղանկյուն կոորդինատներով տրված կրկնակի ինտեգրալի հաշվումը կհանգեցնենք այդ ֆունկցիայի նույն տիրույթով տարածված բևեռային կոորդինատներով տրված կրկնակի ինտեգրալի հաշվմանը.

$$\iint_P f(x,y)dp = \iint_P f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi: \qquad (18)$$

Այսպիսով, ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատներով տրված կրկնակի ինտեգրալը բևեռային կոորդինատներով կրկնակի ինտեգրալի ձևափոխելու համար անհրաժեշտ է x և y փոփոխականները համապատասխանաբար փոխարինել $\rho\cos\varphi$ -ով և $\rho\sin\varphi$ -ով, իսկ մակերեսի dp տարրը՝ $\rho d\rho d\varphi$ -ով:

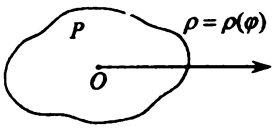
---

*) Այդ իրավունքն ունենք, քանի որ $\Delta\varphi_j$ -ն ներքին գումարի գումարելիների համար ընդհանուր արտադրիչ է և կախված չէ i ինդեքսից:

Եթե մասնավոր դեպքում ինտեգրման P կանոնավոր տիրույթն ունի 11-րդ նկարում պատկերված տեսքը, ապա այդ տիրույթում որոշված $f(x,y)$ անընդհատ ֆունկցիայի ուղղանկյան կոորդինատներով տրված կրկնակի ինտեգրալի հաշվման համար կստանանք

$$\iint\limits_P f(x,y)dp = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[\int\limits_{R_1(\varphi)}^{R_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho\right]d\varphi \qquad (18')$$

բանաձևը:



Նկ. 13

Այժմ ենթադրենք բևեռային կոորդինատների սկզբնակետը գտնվում է ինտեգրման P տիրույթի ներսում (նկ. 13), իսկ բևեռային շառավիղն այդ տիրույթի եզրագիծը հատում է մեկ կետում*):

Կրկնելով վերևում բերված համապատասխան դատողությունները՝ դիտարկվող տիրույթում որոշված $f(\rho,\varphi)$ անընդհատ ֆունկցիայի կրկնակի ինտեգրալը հաշվելու համար կստանանք

$$\iint\limits_P f(\rho,\varphi)dp = \int\limits_0^{2\pi}\left[\int\limits_0^{\rho(\varphi)} f(\rho,\varphi)\rho d\rho\right]d\varphi \qquad (19)$$

բանաձևը, որտեղ $\rho = \rho(\varphi)$-ն P տիրույթի եզրագծի բևեռային հավասարումն է:

Եթե մասնավոր դեպքում P տիրույթի եզրագծի բևեռային հավասարումն ունի $\rho = R$ $(R = const, R \neq 0)$ տեսքը, այսինքն, եթե P տիրույթը O կենտրոնով և R շառավղով շրջան է, ապա (19) բանաձևը կընդունի

$$\iint\limits_P f(\rho,\varphi)dp = \int\limits_0^{2\pi}\left[\int\limits_0^{R} f(\rho,\varphi)\rho d\rho\right]d\varphi \qquad (19')$$

տեսքը: (19′) բանաձևում ընդունելով $f(\rho,\varphi) = 1$, R շառավղով շրջանի մակերեսի համար կստանանք

$$s = \iint\limits_P dp = \iint\limits_P \rho d\rho d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{R}\rho d\rho\right)d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\frac{R^2}{2}d\varphi = \pi R^2:$$

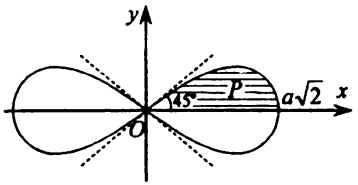
Նկատենք, որ մակերեսի dp տարրի (16) բանաձևը բնականաբար հնարավորություն է տալիս բևեռային կոորդինատներով հաշվելու նաև կամայական P կանոնավոր տիրույթի s մակերեսը.

$$s = \iint\limits_P \rho d\rho d\varphi: \qquad (20)$$

Օրինակ 3: Հաշվել 14-րդ նկարում պատկերված լեմնիսկատով սահմանափակված պատկերի մակերեսը:

*) Այդպիսի կանոնավոր տիրույթը կոչվում է բևեռի մկատմամբ «աստղաձև» տիրույթ:

Լուծում: Հաշվի առնելով, որ լեմնիսկատի գրաֆիկը համաչափ է կոորդինատական առանցքների նկատմամբ և օգտվելով այդ կորի բևեռային հավասարումից.



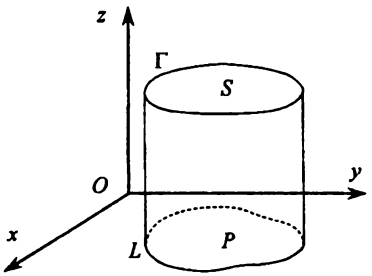
Նկ.14

$$\rho = a\sqrt{2\cos 2\varphi} \quad (a>0) \qquad (ա)$$

ու (15) և (20) բանաձևերից՝ մեզ հետաքրքրող մակերեսի համար կունենանք [35,9°]

$$S = 4\iint_P \rho d\rho d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} \rho d\rho\right)d\varphi = 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi d\varphi = 2a^2;$$

Վերջում ենթադրելով, որ P տիրույթը տարածական Γ կորով սահմանափակված S մակերևույթի պրոյեկցիան է Oxy կոորդինատական հարթության վրա (նկ.15), բերենք կրկնակի ինտեգրալի բազմաթիվ կիրառություններից մեկն արտահայտող S մակերևույթի σ մակերեսի հաշվման



Նկ.15

$$\sigma = \iint_P \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy \qquad (21)$$

բանաձևը, որտեղ $z = z(x,y)$-ը տրված մակերևույթի հավասարումն է, ընդ որում ենթադրվում է, որ ինչպես $z(x,y)$-ը, այնպես էլ նրա $\partial z/\partial x$ և $\partial z/\partial y$ մասնակի ածանցյալները P տիրույթում որոշված անընդհատ ֆունկցիաներ են:

Հասկանալի է, որ եթե S մակերևույթի հավասարումն ունի $x = x(y,z)$ տեսքը, որտեղ $x(y,z)$ ֆունկցիան իր $\partial x/\partial y$ և $\partial x/\partial z$ մասնակի ածանցյալների հետ մեկտեղ որոշված է և անընդհատ տրված մակերևույթի՝ Oyz կոորդինատական հարթության վրա ունեցած P' պրոյեկցիայի վրա, ապա այդ մակերևույթի մակերեսը կարելի է հաշվել

$$\sigma = \iint_{P'} \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dydz \qquad (21')$$

բանաձևով:

Նույն ձևով, եթե S մակերևույթի հավասարումն ունի $y = y(x,z)$ տեսքը, որտեղ $y(x,z)$ ֆունկցիան իր $\partial y/\partial x$ և $\partial y/\partial z$ մասնակի ածանցյալների հետ մեկտեղ որոշված է և անընդհատ տրված մակերևույթի՝ Oxz կոորդինատական հարթության վրա ունեցած P'' պրոյեկցիայի վրա, ապա այդ մակերևույթի

մակերեսը կարելի է հաշվել

$$\sigma = \iint\limits_{P'} \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,dxdz \qquad (21'')$$

բանաձևով:

Նշենք, որ (21), (21') և (21'') բանաձևերում մասնակցող ենթինտեգրալ արտահայտությունները կոչվում են մակերևույթի մակերեսի տարր*):

Օրինակ 4: Հաշվել հետևյալ հավասարումն ունեցող գնդային մակերևույթի մակերեսը՝

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \quad (R>0): \qquad (բ)$$

Լուծում: Քանի որ (բ) հավասարումն ունեցող մակերևույթը համաչափ է կոորդինատական Oxy հարթության նկատմամբ [10,1°], ուստի հաշվելով նրա վերին կեսի մակերեսը և արդյունքը կրկնապատկելով՝ կստանանք այդ մակերևույթի մակերեսը:

Նկատի ունենալով, որ տրված մակերևույթի վերին կեսի հավասարումն ունի

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

տեսքը՝ կունենանք [46,u15], [27,(5), (7),(ա)], [28,(15)]

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}:$$

Քանի որ դիտարկվող խնդրում ինտեգրման տիրույթը որոշվում է

$$x^2+y^2\le R^2$$

անհավասարություններով, ուստի օգտվելով (6) և (21) բանաձևերից՝ (բ) հավասարումն ունեցող մակերևույթի մակերեսը կարտահայտենք

$$\sigma=2\int_{-R}^{R}\left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dy\right)dx$$

բանաձևով: Ուղղանկյուն դեկարտյան և բևեռային կոորդինատները միմյանց կապող (17) բանաձևերով անցնելով բևեռային կոորդինատների և նկատի ունենալով, որ ρ-ն ու φ-ն համապատասխանաբար փոփոխվում են $0\le\rho\le R$ և $0\le\varphi\le 2\pi$ սահմաններում, դիտարկվող մակերևույթի մակերեսի համար վերջնականապես կստանանք

$$\sigma=2\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R\frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\rho d\rho\right)d\varphi=4\pi R^2:$$

---

*) Վերևում դիտարկված S մակերևույթի տարրը նշանակելով $d\sigma$-ով՝ մասնավորապես կունենանք

$$d\sigma=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy: \qquad (22)$$

ԳԼՈՒԽ XII

§68. Խնդիր, որը հանգեցնում է եռակի ինտեգրալի հասկացությանը: Եռակի ինտեգրալի սահմանումը և հիմնական հատկությունները: Եռակի ինտեգրալի հաշվումն ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատներով:

Եռակի ինտեգրալի հասկացությանը ծանոթանալու համար դիտարկենք հետևյալ խնդիրը՝

Գտնել Ω տարածական տիրույթն զբաղեցնող մարմնի զանգվածը, եթե այդ մարմնի յուրաքանչյուր $M(x,y,z)$ կետում հայտնի է զանգվածների բաշխման $\rho(M)=\rho(x,y,z)$ խտությունը:

Դրված խնդիրը լուծելու համար մակերևույթների կամայական ցանցով Ω տիրույթը տրոհենք վերջավոր թվով $\Omega_1,\Omega_2,\cdots,\Omega_n$ տարրական տիրույթների և այդ տիրույթների ծավալները համապատասխանաբար նշանակենք $\Delta\Omega_1$-ով, $\Delta\Omega_2$-ով, ..., $\Delta\Omega_n$-ով: Այնուհետև Ω_i $(i=1,2,\cdots,n)$ տարրական տիրույթում կամայական ձևով վերցնենք որևէ $M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ կետ և այդ կետում հաշվենք զանգվածների բաշխման $\rho(M_i)$ խտությունը: Եթե համարենք, որ i-րդ $(i=1,2,\cdots,n)$ տիրույթի բոլոր կետերում զանգվածների բաշխման խտությունը նույնն է և հավասար է $\rho(M_i)=\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$-ի, ապա այդ տիրույթի զանգվածի համար մոտավորապես կունենանք

$$m_i\approx\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta\Omega_i\quad(i=1,2,\cdots,n):$$

Գումարելով բոլոր տարրական տիրույթների զանգվածները՝ ամբողջ մարմնի զանգվածը կարտահայտենք

$$m_i\approx\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta\Omega_i \tag{1}$$

մոտավոր բանաձևով:

Հասկանալի է, որ որքան փոքրացնենք տարրական տիրույթների տրամագծերը [66,u1] և հետևաբար, որքան մեծացնենք այդ տիրույթների թիվը, այնքան (1) մոտավոր հավասարության ճշտությունը կմեծանա: Վերոգրյալից հետևում է, որ եթե (1) մոտավոր հավասարության մեջ անցնենք սահմանի, երբ տարրական տիրույթների տրամագծերից մեծագույնը ձգտում է զրոյի, դիտարկվող մարմնի զանգվածը կարտահայտենք

$$m=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta\Omega_i \tag{1'}$$

ճշգրիտ հավասարությամբ, որտեղ λ-ն Ω_i $(i=1,2,\cdots,n)$ տիրույթների տրամագծերից մեծագույնն է:

Անցնելով ընդհանուր դեպքի դիտարկմանը՝ ենթադրենք S փակ մակերևույթով սահմանափակված Ω տարածական տիրույթում որոշված է $u=f(x,y,z)$ ֆունկցիան [46,u2]: Նորից մակերևույթների կամայական ցան-

ցով տրված տիրույթը տրոհենք վերջավոր թվով $\Omega_1,\Omega_2,\cdots,\Omega_n$ տարրական տիրույթների, այդ տիրույթների ծավալներն ու տրամագծերը համապատասխանաբար նշանակենք $\Delta\Omega_1$-ով ու λ_1-ով, $\Delta\Omega_2$-ով ու λ_2-ով, $\cdots$, $\Delta\Omega_n$-ով ու λ_n-ով, իսկ λ_i տրամագծերից մեծագույնը՝ λ-ով.

$$\lambda = \max_{1\le i\le n} \lambda_i :$$

Ω_i $(i = 1,2,\cdots,n)$ տիրույթի սահմաններում վերցնենք կամայական $M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ կետ, $f(x,y,z)$ ֆունկցիայի արժեքն այդ կետում բազմապատկենք Ω_i տիրույթի ծավալով և կազմենք

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta\Omega_i \tag{2}$$

գումարը:

Սահմանում 1: *σ_n գումարը կոչվում է տարածական Ω տիրույթում որոշված $f(x,y,z)$ ֆունկցիայի ինտեգրալ գումար՝ տարածված այդ տիրույթում:*

Սահմանում 2: *Կասենք, որ λ-ն զրոյի ձգտելիս (2) գումարն ունի (վերջավոր) I սահման, եթե ցանկացած ε դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի δ դրական թիվ, որ հենց $\lambda < \delta$, այսինքն հենց Ω տիրույթը տրոհենք δ-ից փոքր տրամագիծ ունեցող Ω_i տարրական տիրույթների, ապա անկախ տրոհման եղանակից և Ω_i տիրույթներում M_i կետերի ընտրությունից տեղի ունի*

$$|\sigma_n - I| < \varepsilon \tag{3}$$

անհավասարությունը:

Սահմանում 3: *δ-ն զրոյի ձգտելիս σ_n գումարի վերջավոր սահմանը կոչվում է $f(x,y,z)$ ֆունկցիայի եռակի ինտեգրալ՝ տարածված Ω տիրույթով և նշանակվում է*

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)d\Omega, \quad \iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz \tag{4}$$

պայմանանշաններից որևէ մեկով:

Օգտվելով եռակի ինտեգրալի սահմանումից և (1՝) հավասարությունից՝ վերևում դիտարկված մարմնի զանգվածը կարտահայտենք

$$m = \iiint_{\Omega} \rho(x,y,z)d\Omega$$

եռակի ինտեգրալի միջոցով:

Սահմանում 4: *(4) ինտեգրալի գոյության դեպքում $f(x,y,z)$ ֆունկցիան կոչվում է ինտեգրելի Ω տիրույթում, Ω-ն կոչվում է $f(x,y,z)$ ֆունկցիայի ինտեգրման տիրույթ, իսկ $d\Omega = dxdydz$ արտահայտությունը՝ ծավալի տարր ուղղանկյուն կոորդինատներով:*

ԳԼՈՒԽ XII

Նկատենք, որ ինտեգրելի ֆունկցիան անհրաժեշտաբար պետք է լինի սահմանափակ ինտեգրման տիրույթում *):

Նկատի ունենալով, որ ձևակերպած պնդման ապացույցը սկզբունքորեն չի տարբերվում կրկնակի ինտեգրալների ուսումնասիրության ժամանակ բերված համապատասխան պնդման ապացույցից՝ այն բաց ենք թողնում:

Այժմ Ω_i $(i=1,2,\cdots,n)$ տիրույթում $f(x,y,z)$ ֆունկցիայի ընդունված արժեքների ճշգրիտ ստորին և ճշգրիտ վերին եզրերը [18,u32] համապատասխանաբար նշանակենք m_i-ով ու M_i-ով և կազմենք

$$\underline{s}=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta\Omega_i\ ,\quad \overline{S}=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta\Omega_i \tag{5}$$

գումարները:

Սահմանում 5: *$\underline{s}$ և $\overline{S}$ գումարները համապատասխանաբար կոչվում են Ω տիրույթում որոշված $f(x,y,z)$ ֆունկցիայի Դարբուի ստորին և վերին ինտեգրալ գումարներ:*

Պարզ է, որ եթե $f(x,y,z)$-ը անընդհատ ֆունկցիա է Ω տիրույթում [46,u12,u13], ապա տրված տրոհման դեպքում (5) գումարներն իրենցից կներկայացնեն այդ ֆունկցիայի համապատասխանաբար փոքրագույն և մեծագույն ինտեգրալ գումարները:

Օգտվելով թվային բազմության ճշգրիտ ստորին և ճշգրիտ վերին եզրերի սահմանումներից՝ կունենանք

$$m_i\le f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\le M_i\quad (i=1,2,\cdots,n), \tag{6}$$

որտեղից, ինչպես և կրկնակի ինտեգրալի պարագայում կստանանք

$$\underline{s}\le\sigma_n\le\overline{S}: \tag{7}$$

Ինչպես տեսնում ենք, տրված տրոհման դեպքում Դարբուի գումարները հաստատուն են, իսկ σ_n-ը՝ փոփոխական (որովհետև այն կախված է $M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ կետերի ընտրությունից):

Հարց է ծագում. *որո՞նք են եռակի ինտեգրալի գոյության պայմանները, այսինքն ինչպիսի՞ պայմանների պետք է բավարարի Ω տիրույթում որոշված $f(x,y,z)$ ֆունկցիան, որպեսզի այն լինի ինտեգրելի այդ տիրույթում:*

Ձևակերպած հարցի պատասխանը տրվում է հետևյալ թեորեմով՝

Թեորեմ 1: *Ω տիրույթում որոշված $f(x,y,z)$ ֆունկցիայի եռակի ինտեգրալի գոյության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենա*

$$\lim_{\lambda\to 0}\left(\overline{S}-\underline{s}\right)=0 \tag{8}$$

պայմանը, որտեղ $\underline{s}$-ը և $\overline{S}$-ը այդ ֆունկցիայի Դարբուի համապատասխանաբար ստորին և վերին ինտեգրալ գումարներն են տրված տիրույթում:

---

*) Շարադրվող պարագրաֆում կդիտարկենք միայն սահմանափակ ֆունկցիաներ:

Նկատենք, որ $M_i - m_i = \omega_i$ $(i = 1,2,\cdots,n)$ *տարբերությունը անվանելով* $f(x,y,z)$ *ֆունկցիայի տատանում* i*-րդ տիրույթում և օգտվելով (5) նշանակումներից՝ կարող ենք այդ ֆունկցիայի եռակի ինտեգրալի գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայմանը ներկայացնել*

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta\Omega_i = 0 \qquad (8')$$

տեսքով:

Ձևակերպենք նաև հետևյալ կարևոր թեորեմը՝

Թեորեմ 2: *Եթե* $f(x,y,z)$ *ֆունկցիան անընդհատ է* Ω *տիրույթում, ապա այն ինտեգրելի է այդ տիրույթում:*

Այժմ, ենթադրելով, որ դիտարկվող ֆունկցիաներն ինտեգրելի են տրված տիրույթներում՝ թվարկենք եռակի ինտեգրալի հիմնական հատկությունները:

1°. *Հաստատուն արտադրիչը կարելի է դուրս բերել եռակի ինտեգրալի նշանի տակից.*

$$\iiint_{\Omega} c f(x,y,z) d\Omega = c \iiint_{\Omega} f(x,y,z) d\Omega \quad (c = const): \qquad (9)$$

2°. *Վերջավոր թվով ֆունկցիաների գումարի եռակի ինտեգրալը՝ տարածված որևէ տիրույթով, հավասար է այդ ֆունկցիաների եռակի ինտեգրալների գումարին՝ տարածված նույն տիրույթով.*

$$\iiint_{\Omega} [f_1(x,y,z) + f_2(x,y,z) + \cdots + f_n(x,y,z)] d\Omega =$$

$$= \iiint_{\Omega} f_1(x,y,z) d\Omega + \iiint_{\Omega} f_2(x,y,z) d\Omega + \cdots + \iiint_{\Omega} f_n(x,y,z) d\Omega: \qquad (10)$$

3°. *Եթե ինտեգրման տիրույթի յուրաքանչյուր կետում տեղի ունի*

$$f(x,y,z) \le g(x,y,z)$$

անհավասարությունը, ապա տեղի ունի նաև

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z) d\Omega \le \iiint_{\Omega} g(x,y,z) d\Omega \qquad (11)$$

անհավասարությունը:

Հետևանք 1: *Որևէ տիրույթում ոչ բացասական արժեքներ ընդունող ֆունկցիայի եռակի ինտեգրալը՝ տարածված այդ տիրույթով, ոչ բացասական մեծություն է.*

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z) d\Omega \ge 0, \text{ եթե } f(x,y,z) \ge 0, \text{ երբ } M(x,y,z) \in \Omega:$$

4°. *Հաստատունի եռակի ինտեգրալը՝ տարածված* Ω *տիրույթով, հավասար է ինտեգրման տիրույթի* v *ծավալի և այդ հաստատունի արտադրյալին.*

$$\iiint_{\Omega} c\, d\Omega = cv \quad (c = const): \qquad (12)$$

5°. *Եթե* Ω *տիրույթում* $f(x,y,z)$ *ֆունկցիայի փոքրագույն և մեծագույն արժեքները համապատասխանաբար հավասար են* m*-ի և* M*-ի, իսկ* v*-ն այդ*

տիրույթի ծավալն է, ապա տեղի ունի

$$mv \le \iiint_{\Omega} f(x,y,z)d\Omega \le Mv \tag{13}$$

գնահատականը:

6°. *Եթե $f(x,y,z)$ ֆունկցիան անընդհատ է v ծավալ ունեցող Ω տիրույթում, ապա այդ տիրույթում գոյություն ունի այնպիսի M_0 կետ, որ տեղի ունի*

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)d\Omega = v\, f(M_0) \tag{14}$$

հավասարությունը:

7°. *Եթե Ω տիրույթը տրոհված է այնպիսի Ω_1 և Ω_2 տիրույթների, որոնք չունեն ընդհանուր ներքին կետ, ապա*

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)d\Omega,\ \iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)d\Omega_1,\ \iiint_{\Omega_2} f(x,y,z)d\Omega_2 \tag{15}$$

ինտեգրալներից առաջինի գոյությունից հետևում է հաջորդ երկուսի գոյությունը և վերջին երկուսի գոյությունից՝ առաջինի գոյությունը, ընդ որում տեղի ունի

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)d\Omega = \iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)d\Omega_1 + \iiint_{\Omega_2} f(x,y,z)d\Omega_2 \tag{16}$$

հավասարությունը:

8°. *Եթե ինտեգրման տիրույթում ենթինտեգրալ ֆունկցիան չի փոխում իր նշանը, ապա համապատասխան եռակի ինտեգրալը մի թիվ է, որի նշանը համընկնում է տրված ֆունկցիայի նշանին:*

9°. *Եթե $f(x,y,z)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է Ω տիրույթում, ապա $|f(x,y,z)|$ ֆունկցիան նույնպես ինտեգրելի է այդ տիրույթում, ընդ որում տեղի ունի*

$$\left|\iiint_{\Omega} f(x,y,z)d\Omega\right| \le \iiint_{\Omega} |f(x,y,z)|d\Omega \tag{17}$$

անհավասարությունը:

Անցնելով եռակի ինտեգրալի հաշվմանը՝ նախ ծանոթանանք տարածական կանոնավոր տիրույթի հասկացությանը:

Սահմանում 6: *S փակ մակերևույթով սահմանափակված տարածական Ω տիրույթը կոչվում է կանոնավոր, եթե այն օժտված է հետևյալ հատկություններով՝*

ա) Ω տիրույթի ներքին կետով անցնող և կոորդինատական Oz առանցքին զուգահեռ յուրաքանչյուր ուղիղ S մակերևույթը հատում է երկու կետում,

բ) Ω տիրույթի պրոյեկցիան կոորդինատական Oxy հարթության վրա կանոնավոր տիրույթ է,

գ) Ω տիրույթի յուրաքանչյուր մաս, որն այդ տիրույթից անջատվում է կոորդինատական հարթություններից որևէ մեկին զուգահեռ հարթությամբ, նույնպես օժտված է ա) և բ) հատկություններով:

Այժմ, ենթադրենք ներքևից և վերևից համապատասխանաբար

$$z=\Psi_1(x,y),\ z=\Psi_2(x,y) \tag{18}$$

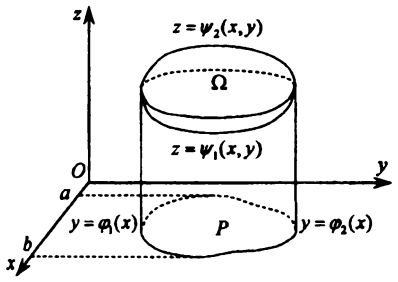
հավասարումներն ունեցող մակերևույթներով սահմանափակված տարածական Ω կանոնավոր տիրույթում (նկ.16), որի պրոյեկցիան կոորդինատական Oxy հարթության վրա սահմանափակված է

$$y=\varphi_1(x),\ y=\varphi_2(x) \tag{19}$$

հավասարումներն ունեցող կորերով և $x=a$, $x=b$ հավասարումներն ունեցող ուղիղներով, որոշված է

$$u=f(x,y,z) \tag{20}$$

անընդհատ ֆունկցիան և ծանոթանանք այդ ֆունկցիայի՝ Ω տիրույթով տարածված եռապատիկ ինտեգրալի հասկացությանը:



Նկ.16

Սահմանում 7:

$$I_\Omega=\int_a^b\left\{\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\left[\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)}f(x,y,z)dz\right]dy\right\}dx \tag{21}$$

արտահայտությունը կոչվում է տարածական Ω կանոնավոր տիրույթում որոշված $f(x,y,z)$ անընդհատ ֆունկցիայի եռապատիկ ինտեգրալ՝ տարածված այդ տիրույթով:

Նշենք, որ (21) եռապատիկ ինտեգրալում նախ կհաշվենք քառակուսի փակագծերի ներսում գրված ինտեգրալը, ընդ որում ինտեգրումը կկատարենք ըստ z-ի, իսկ x-ն ու y-ը կհամարենք հաստատուններ, այնուհետև ինտեգրման արդյունքում ստացված երկու փոփոխականի ֆունկցիան, x-ը համարելով հաստատուն, ըստ y-ի կինտեգրենք $\varphi_1(x)$-ից մինչև $\varphi_2(x)$ սահմաններում և վերջապես ստացված մեկ փոփոխականի ֆունկցիան ըստ x-ի կինտեգրենք a-ից մինչև b սահմաններում:

Վերջում, առանց ապացույցի ձևակերպենք եռակի ինտեգրալի հաշվմանը վերաբերող հետևյալ կարևոր թեորեմը՝

Թեորեմ 3: *Ω տարածական կանոնավոր տիրույթում որոշված $f(x,y,z)$ անընդհատ ֆունկցիայի եռակի և եռապատիկ ինտեգրալները՝ տարածված այդ տիրույթով, հավասար են իրար:*

Նկատենք նաև, որ եռակի ինտեգրալի չորրորդ հատկությունից հետևում է, որ տարածական Ω կանոնավոր տիրույթի ծավալն արտահայտվում է

$$v=\iiint_\Omega d\Omega=\iiint_\Omega dxdydz \tag{22}$$

բանաձևով:

ԳԼՈՒԽ XII

Օրինակ 1: Հաշվել $u = xyz$ ֆունկցիայի եռակի ինտեգրալը՝ տարածված

$$x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad x+y+z=1$$

հավասարումներն ունեցող հարթություններով սահմանափակված Ω տիրույթով (նկ.24):

Լուծում: Նկատի ունենալով, որ դիտարկվող տիրույթը ներքևից և վերևից համապատասխանաբար սահմանափակված է $z=0$ և $z=1-x-y$ հավասարումներն ունեցող հարթություններով, իսկ այդ տիրույթի պրոյեկցիան Oxy հարթության վրա՝ $y=0$ և $y=1-x$ հավասարումներն ունեցող ուղիղներով, (21) բանաձևի օգնությամբ կունենանք [35,3°], [41,(6)]

$$\iiint\limits_{\Omega} xyz\,d\Omega = \iint\limits_{P}\left(\int\limits_{0}^{1-x-y} xyz\,dz\right)dp = \int\limits_{0}^{1}\left[\int\limits_{0}^{1-x}\left(\int\limits_{0}^{1-x-y} z\,dz\right)y\,dy\right]x\,dx = \frac{1}{720}:$$

Օրինակ 2: Հաշվել

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \quad (R>0) \qquad (\text{ա})$$

հավասարումն ունեցող գնդային մակերևույթով սահմանափակված գնդի ծավալը:

Լուծում: Նկատի ունենալով, որ դիտարկվող գունդը համաչափ է կոորդինատական հարթությունների նկատմամբ (նկ.17) և օգտվելով թեորեմ 3-ից ու (22) բանաձևից՝ կունենանք [10,1°], [35,2°], [41,(6)]

$$v = 8\int\limits_{0}^{R}\left[\int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}}\left(\int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz\right)dy\right]dx = 8\int\limits_{0}^{R}\left(\int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dy\right)dx:$$

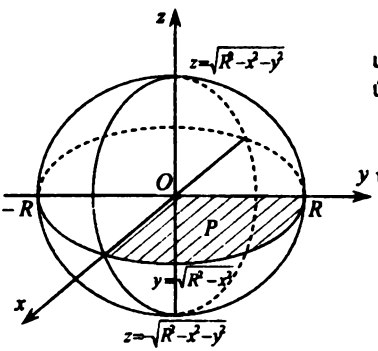
Վերջին ինտեգրալում կատարելով փոփոխականի

$$y=\sqrt{R^2-x^2}\sin t$$

փոխարինում [41,թ2]՝ տրված գնդի ծավալի համար կստանանք [41,օ2], [39,օ10]

$$y\ v = 8\int\limits_{0}^{R}\left[\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{R^2-x^2-\left(R^2-x^2\right)\sin^2 t}\,\sqrt{R^2-x^2}\,d\sin t\right]dx =$$

$$= 8\int\limits_{0}^{R}\left[\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(R^2-x^2\right)\cos^2 t\,dt\right]dx = 8\int\limits_{0}^{R}\frac{\pi}{4}\left(R^2-x^2\right)dx = \frac{4}{3}\pi R^3:$$



Նկ.17

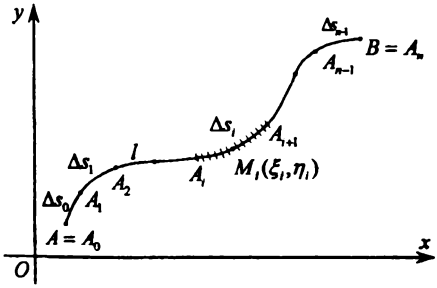
ԳԼՈՒԽ XIII

ԿՈՐԱԳԻԾ ԵՎ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԱՅԻՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

§69. Խնդիր, որը հանգեցնում է կորագիծ ինտեգրալի հասկացությանը: Առաջին սեռի կորագիծ ինտեգրալի սահմանումը, հատկություններն ու հաշվումը:

Առաջին սեռի կորագիծ ինտեգրալի հասկացությանը ծանոթանալու համար դիտարկենք հետևյալ խնդիրը՝

Գտնել կոորդինատական Oxy հարթության վրա տրված l անընդհատ նյութական կորի զանգվածը, եթե այդ կորի յուրաքանչյուր $M(x,y)$ կետում հայտնի է զանգվածների բաշխման $\rho(M)=\rho(x,y)$ խտությունը:



նկ.18

Դրված խնդիրը լուծելու համար l կորի A և B ծայրակետերի միջև կամայական ձևով տեղադրենք A_1, A_2, ..., A_{n-1} $(A=A_0,\ B=A_n)$ կետերը (նկ.18), համարակալելով այդ կետերը A-ից դեպի B ուղղությամբ, չնայած ոչինչ չի խանգարում նշված համարակալումը կատարել հակառակ կարգով:

Այնուհետև յուրաքանչյուր A_iA_{i+1} տարրական աղեղի վրա կամայական ձևով վերցնենք որևէ $M_i(\xi_i,\eta_i)$ կետ և այդ կետում հաշվենք զանգվածների բաշխման $\rho(M_i)$ խտությունը: Եթե համարենք, որ A_iA_{i+1} աղեղի բոլոր կետերում զանգվածների բաշխման խտությունը նույնն է և հավասար է $\rho(M_i)=\rho(\xi_i,\eta_i)$-ի, ապա դիտարկվող աղեղի զանգվածի համար մոտավորապես կունենանք

$$m_i \approx \rho(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i,$$

որտեղ Δs_i-ն A_iA_{i+1}-աղեղի երկարությունն է $(i=0,1,\dots,n-1)$:

Գումարելով բոլոր տարրական աղեղների զանգվածները՝ l կորի զանգվածը կարտահայտենք

$$m \approx \sum_{i=0}^{n-1} \rho(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i \qquad (1)$$

մոտավոր բանաձևով:

Հասկանալի է, որ որքան փոքրացնենք դիտարկվող տարրական աղեղների երկարությունները և հետևաբար որքան մեծացնենք այդ աղեղների թիվը,

այնքան (1) մոտավորության ճշտությունը կմեծանա: Վերոգրյալից հետևում է, որ եթե (1) մոտավոր հավասարության մեջ անցնենք սահմանի, երբ տարրական աղեղների երկարություններից մեծագույնը ձգտում է զրոյի, ապա l կորի զանգվածը կարտահայտենք

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \rho(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i \qquad (1')$$

ճշգրիտ հավասարությամբ, որտեղ

$$\lambda = \max_{0 \le i \le n-1} \Delta s_i : \qquad (2)$$

Ընդհանուր դեպքի դիտարկմանը անցնելու համար բերենք հետևյալ սահմանումը՝

Սահմանում 1: *l կորի վրա որոշված $f(M) = f(x,y)$ ֆունկցիան կոչվում է անընդհատ այդ կորի վրա, եթե ցանկացած ε դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի δ դրական թիվ, որ հենց այդ կորին պատկանող կամայական M_1 և M_2 կետերի հեռավորությունը փոքր լինի δ-ից, տեղի ունի*

$$|f(M_1) - f(M_2)| < \varepsilon \qquad (3)$$

անհավասարությունը:

Այժմ ենթադրենք կոորդինատական Oxy հարթության վրա տրված $l = AB$ անընդհատ ոչ փակ կորի վրա որոշված է $f(M) = f(x,y)$ անընդհատ ֆունկցիան: Նորից l կորը կամայական ձևով տրոհենք վերջավոր թվով A_0A_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}A_n$ $(A = A_0, B = A_n)$ տարական աղեղների՝), նշված աղեղների երկարությունները համապատասխանաբար նշանակենք Δs_0-ով, Δs_1-ով,..., Δs_{n-1}-ով, իսկ այդ երկարություններից մեծագույնը՝ λ-ով: A_iA_{i+1} $(i = 0,1,...,n-1)$ աղեղի վրա վերցնենք կամայական $M_i(\xi_i, \eta_i)$ կետ, $f(x,y)$ ֆունկցիայի արժեքն այդ կետում բազմապատկենք A_iA_{i+1} աղեղի երկարությամբ և կազմենք հետևյալ գումարը՝

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i : \qquad (4)$$

Սահմանում 2: *σ_n գումարը կոչվում է Oxy հարթության մեջ տրված l կորի վրա որոշված $f(x,y)$ ֆունկցիայի ինտեգրալ գումար՝ տարածված այդ կորով:*

Սահմանում 3: *Կասենք, որ λ-ն զրոյի ձգտելիս (4) գումարն ունի (վերջավոր) I սահման, եթե ցանկացած ε դրական թվի համար գոյություն ունի*

---

*) Եթե l-ը փակ կոր է, ապա այդ կորի վրա կվերցնենք կամայական $A_0 = A_n$ կետ, իսկ մնացած A_1, A_2, ..., A_{n-1} կետերը կդասավորենք որևէ ուղղությամբ:

այնպիսի δ դրական թիվ, որ հենց $\lambda<\delta$, այսինքն հենց l կորը տրոհենք δ-ից փոքր երկարություն ունեցող տարրական աղեղների, ապա անկախ տրոհման եղանակից և A_iA_{i+1} աղեղների վրա M_i կետերի ընտրությունից, տեղի ունի

$$|\sigma_n - I|<\varepsilon \tag{5}$$

անհավասարությունը:

Սահմանում 4: *λ-ն զրոյի ձգտելիս σ_n գումարի վերջավոր I սահմանը կոչվում է $f(x,y)$ ֆունկցիայի առաջին սեռի կորագիծ ինտեգրալ՝ տարածված l կորով և նշանակվում է*

$$\int_l f(M)ds\,,\quad \int_l f(x,y)ds \tag{6}$$

պայմանանշաններից որևէ մեկով, որտեղ ds-ը հիշեցնում է A_iA_{i+1} $(i=0,1,\dots,n-1)$ տարրական աղեղների Δs_i երկարությունները:

Օգտվելով առաջին սեռի կորագիծ ինտեգրալի սահմանումից և (1՝) հավասարությունից՝ վերևում դիտարկված նյութական կորի զանգվածը կարտահայտենք

$$m=\int_l \rho(M)ds$$

կորագիծ ինտեգրալի միջոցով:

Հատուկ նշենք, որ բերված սահմանման մեջ ոչ մի նշանակություն չունի ուղղությունը, որով l կորը տրոհում ենք տարրական աղեղների:

A և B ծայրակետերով ոչ փակ l կորի պարագայում ձևակերպած պնդումը նշանակում է, որ տեղի ունի

$$\int_{(AB)} f(M)ds=\int_{(BA)} f(M)ds \tag{7}$$

հավասարությունը:

Հասկանալի է, որ նույն ձևով կարելի է մտցնել տարածական L կորով տարածված կորագիծ ինտեգրալի հասկացությունը.

$$\int_L f(M)ds=\int_L f(x,y,z)ds\,, \tag{6՝}$$

որտեղ $f(M)=f(x,y,z)$-ը L կորի վրա որոշված անընդհատ ֆունկցիա է:

Այժմ ձևակերպենք առաջին սեռի կորագիծ ինտեգրալի հետևյալ երկու հատկությունները՝

1°. *Առաջին սեռի կորագիծ ինտեգրալը որոշվում է ենթինտեգրալ ֆունկցիայով և այն կորի տեսքով, որով տարածված է այդ ինտեգրալը:*

2°. *Եթե l կորը տրոհված է ընդհանուր ներքին կետեր չունեցող l_1, l_2, ..., l_n մասերի $(l=l_1\cup l_2\cup\dots\cup l_n)$, ապա այդ կորի վրա որոշված $f(M)$ ֆունկցիայի (6) ինտեգրալի գոյությունից հետևում է*

$$\int_{l_1} f(M)ds,\ \int_{l_2} f(M)ds,\ \ldots,\ \int_{l_n} f(M)ds \tag{8}$$

ինտեգրալների գոյությունը և (8) ինտեգրալների գոյությունից՝ (6) ինտեգրալի գոյությունը, ընդ որում տեղի ունի

$$\int_{l} f(M)ds = \int_{l_1} f(M)ds + \int_{l_2} f(M)ds + \cdots + \int_{l_n} f(M)ds \tag{9}$$

հավասարությունը:

Անցնելով առաջին սեռի կորագիծ ինտեգրալի հաշվմանը՝ ենթադրենք կորդինատական Oxy հարթության վրա տրված l կորի վրա երկու հնարավոր ձևերից որևէ մեկով ընտրված է որոշակի ուղղություն այնպես, որ M կետի դիրքը այդ կորի վրա կարող է միարժեքորեն որոշվել AM աղեղի s երկարությամբ՝ հաշված A սկզբնական կետից: Այդ դեպքում l կորը կարելի է ներկայացնել

$$x = x(s) \quad y = y(s) \quad (0 \le s \le a) \tag{10}$$

պարամետրական հավասարումներով [28,u1] (որտեղ a-ն տրված կորի երկարությունն է), իսկ l կորի վրա որոշված $f(x,y)$ անընդհատ ֆունկցիան՝ $f[x(s),y(s)]$ անընդհատ բարդ ֆունկցիայի տեսքով [48,(1)]: Այնուհետև, եթե s_i-ով և $\bar{s}_i$-ով համապատասխանաբար նշանակենք AA_i և AM_i աղեղների երկարությունները (նկ.18), կունենանք

$$s_i \le \bar{s}_i \le s_{i+1}, \qquad s_{i+1} - s_i = \Delta s_i$$

որտեղ, ինչպես գիտենք, Δs_i-ն $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$ $A_i A_{i+1}$ տարրական աղեղի երկարությունն է: Վերոգրյալից հետևում է, որ եթե (6) ինտեգրալի համար կազմենք ինտեգրալ գումար, ապա ակնհայտորեն այն կլինի ինտեգրալ գումար նաև սովորական որոշյալ ինտեգրալի համար [40,u1].

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i = \sum_{i=0}^{n-1} f[x(\bar{s}_i), y(\bar{s}_i)]\Delta s_i : \tag{11}$$

Հետևաբար, եթե (11) հավասարության մեջ անցնենք սահմանի, երբ $A_i A_{i+1}$ տարրական աղեղների երկարությունները ձգտում են զրոյի կստանանք

$$\int_{l} f(x,y)ds = \int_{0}^{a} f[x(s), y(s)]ds : \tag{12}$$

Այժմ ենթադրենք ինտեգրման l կորը տրված է

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t) \quad (\alpha \le t \le \beta) \tag{13}$$

պարամետրական հավասարումներով, որտեղ $\varphi(t)$-ն ու $\psi(t)$-ն իրենց $\varphi'(t)$ ու $\psi'(t)$ ածանցյալների հետ մեկտեղ $[\alpha, \beta]$ միջակայքում որոշված անընդհատ ֆունկցիաներ են:

Հաշվի առնելով, որ քննարկվող դեպքում l կորի AM փոփոխական աղե-

ղի երկարությունը t պարամետրի ֆունկցիա է և օգտվելով այդ ֆունկցիայի դիֆերենցիալի համար հայտնի [45,2°]

$$ds = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt \tag{14}$$

բանաձևից՝ կարող ենք (12) հավասարությունը ներկայացնել

$$\int_l f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt \tag{15}$$

տեսքով:

Այսպիսով, եթե կոորդինատական Oxy հարթության վրա տրված l անընդհատ կորի պարամետրական հավասարումներն ունեն (13) տեսքը, ապա այդ կորի վրա որոշված $f(x,y)$ անընդհատ ֆունկցիայի առաջին սեռի կորագիծ ինտեգրալը՝ տարածված այդ կորով, կարելի է հաշվել (15) բանաձևի միջոցով:

Օրինակ 1: Հաշվել

$$I = \int_l \sqrt{2y}\, ds \tag{ա}$$

կորագիծ ինեգրալը, որտեղ l-ը

$$x = a(t - \sin t)\,,\ \ y = a(1 - \cos t) \tag{բ}$$

հավասարումներն ունեցող ցիկլոիդի առաջին կամարն է [28,o10]:

Լուծում: Օգտվելով առաջին սեռի կորագիծ ինտեգրալի հաշվման (15) բանաձևից և հաշվի առնելով, որ (բ) հավասարումներով տրված ցիկլոիդի առաջին կամարն ստանալու համար անհրաժեշտ է t-ն փոփոխել 0-ից մինչև 2π սահմաններում՝ կունենանք [35,2°,9°], [41,(6)]

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{2a(1-\cos t)}\sqrt{[a(1-\cos t)]^2 + (a\sin t)^2}\, dt = 2a\sqrt{a}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)dt = 4\pi a\sqrt{a}\,:$$

Եթե l անընդհատ կորի հավասարումը տրված է

$$y = y(x)\ \ (a \le x \le b) \tag{16}$$

բացահայտ տեսքով, ապա x փոփոխականը համարելով պարամետր՝ (15) բանաձևից կստանանք [45,1°]

$$\int_l f(x,y)ds = \int_a^b f[x, y(x)]\sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx\,: \tag{17}$$

Այսպիսով, եթե կոորդինատական Oxy հարթության վրա տրված l անընդհատ կորի հավասարումն ունի (16) բացահայտ տեսքը, ապա այդ կորի վրա որոշված $f(x,y)$ անընդհատ ֆունկցիայի առաջին սեռի կորագիծ ինտեգրալը՝ տարածված այդ կորով, կարելի է հաշվել (17) բանաձևի միջոցով:

Օրինակ 2: Հաշվել

$$I = \int_l xy\, ds \tag{գ}$$

կորագիծ ինտեգրալը, որտեղ l-ը (նկ.19)

$$x^2 + y^2 = R^2$$

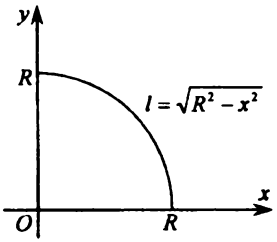
հավասարումն ունեցող շրջանագծի առաջին քառորդն է [7,1°]:

Լուծում: Քանի որ դիտարկվող կորի հավասարումն ունի

$$y=\sqrt{R^2-x^2}$$

տեսքը, հետևաբար [27,(5),(7)], [28, (15)]

$$y'=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}},\quad \sqrt{1+[y'(x)]^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}:$$



Նկ. 19

Այնուհետև օգտվելով առաջին սեռի կորագիծ ինտեգրալի հաշվման (17) բանաձևից՝ (գ) ինտեգրալի համար կստանանք [35,3°]

$$I=\int_0^R x\sqrt{R^2-x^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx=R\int_0^R x\,dx=\frac{R^3}{2}:$$

§70. Խնդիր աշխատանքի մասին: Երկրորդ սեռի կորագիծ ինտեգրալի սահմանումն ու հաշվումը:

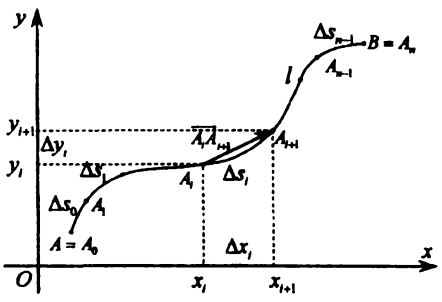
Դիտարկենք մի մեխանիկական խնդիր, որը հանգեցնում է երկրորդ սեռի կորագիծ ինտեգրալի հասկացությանը:

Դիցուք միավոր զանգվածով M նյութական կետը

$$\vec{F}(x,y)=F_x(x,y)\vec{i}+F_y(x,y)\vec{j}$$

փոփոխական ուժի ազդեցության տակ կոորդինատական Oxy հարթության մեջ տրված l անընդհատ կորի վրայով A կետից տեղափոխվում է B կետը: Պահանջվում է հաշվել դիտարկվող նյութական կետի տեղափոխման վրա կատարած աշխատանքը:

Դրված խնդիրը լուծելու համար l կորի A և B կետերի միջև (նկ.20) կամայական ձևով տեղադրենք A_1, A_2, ..., A_{n-1} ($A_0=A$, $A_n=B$) կետերը՝ համարակալելով այդ կետերն A-ից դեպի B ուղղությամբ: A_iA_{i+1} ($i=0,1,...,n-1$) տարրական աղեղի երկարությունը նշանակենք Δs_i-ով, իսկ այդ աղեղների երկարություններից մեծագույնը՝ λ-ով.



Նկ.20

$$\lambda=\max_{0\le i\le n-1}\Delta s_i: \qquad (1)$$

Այնուհետև $\vec{F}(x,y)$ ուժի արժեքն $A_i(x_i,y_i)$ կետում ($i=0,1,...,n-1$) նշանակենք $\vec{F}_i(x_i,y_i)=\{F_x(x_i,y_i),\ F_y(x_i,y_i)\}$-ով և օգտվելով կոորդինատներով տրված

երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալի բանաձևից [4,u1,(7)]՝ կազմենք $\vec{F}_i$ ուժի ու

$$\overrightarrow{A_iA_{i+1}} = (x_{i+1} - x_i)\vec{i} + (y_{i+1} - y_i)\vec{j} = (\Delta x_i)\vec{i} + (\Delta y_i)\vec{j}$$

վեկտորի [3,(11)] սկալյար արդտադրյալը.

$$\vec{F}_i \cdot \overrightarrow{A_iA_{i+1}} = F_x(x_i, y_i)\Delta x_i + F_y(x_i, y_i)\Delta y_i : \qquad (2)$$

Նշված սկալյար արտադրյալը համարելով դիտարկվող նյութական կետը l կորի վրայով A_i կետից A_{i+1} կետը տեղափոխելու վրա կատարած տարրական աշխատանքի մոտավոր արժեքը և գումարելով բոլոր տարրական աշխատանքները՝ կստանանք M կետը l կորի վրայով A կետից մինչև B կետը տաղափոխելու վրա կատարած աշխատանքի մոտավոր արժեքը.

$$a \approx \sum_{i=0}^{n-1} \vec{F}_i \cdot \overrightarrow{A_iA_{i+1}} = \sum_{i=0}^{n-1} \left[F_x(x_i, y_i)\Delta x_i + F_y(x_i, y_i)\Delta y_i\right]: \qquad (3)$$

Հասկանալի է, որ որքան փոքրացնենք վերևում նշված տարրական աղեղների երկարությունները և հետևաբար որքան մեծացնենք այդ աղեղների թիվը, այնքան (3) մոտավոր հավասարության ճշտությունը կմեծանա: Վերոգրյալից հետևում է, որ եթե նշված հավասարության մեջ անցնենք սահմանի, երբ տարրական աղեղների երկարություններից մեծագույնը ձգտում է զրոյի, M կետը l կորի վրայով A կետից մինչև B կետը տեղափոխելու վրա կատարած աշխատանքը կարտահայտենք

$$a = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \left[F_x(x_i, y_i)\Delta x_i + F_y(x_i, y_i)\Delta y_i\right] \qquad (4)$$

ճշգրիտ հավասարությամբ:

Անցնելով երկրորդ սեռի կորագիծ ինտեգրալի սահմանմանը՝ ենթադրենք կոորդինատական Oxy հարթության վրա տրված A և B ծայրակետերով l անընդհատ, ոչ փակ կորի վրա որոշված է $f(x,y)$ անընդհատ ֆունկցիան [69,u1]: Նորից կամայական ձևով l կորը տրոհենք վերջավոր թվով A_0A_1, $A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$ $(A_0 = A,\ A_n = B)$ տարրական աղեղների և այդ աղեղների երկարությունները համապատասխանաբար նշանակենք Δs_0-ով, Δs_1-ով, $\ldots, \Delta s_n$-ով: A_iA_{i+1} $(i = 0,1,\ldots,n-1)$ աղեղի վրա վերցնենք կամայական $M_i(\xi_i, \eta_i)$ կետ և այդ կետում հաշվենք $f(x,y)$ ֆունկցիայի արժեքը: Սակայն քննարկվող դեպքում $f(x,y)$ ֆունկցիայի $f(\xi_i, \eta_i)$ արժեքները բազմապատկենք ոչ թե համապատասխան աղեղների երկարություններով, այլ կոորդինատական Ox առանցքի վրա այդ աղեղների պրոյեկցիաների մեծություններով և կազմենք*)

*) Տե՛ս 88-րդ էջի տողատակի դիտողությունը:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i \qquad (5)$$

գումարը:

Սահմանում 1: *σ_n գումարը կոչվում է կոորդինատական Oxy հարթության վրա տրված l կորի վրա որոշված $f(x,y)$ անընդհատ ֆունկցիայի ինտեգրալ գումար՝ տարածված այդ կորով:*

Սահմանում 2: *Կասենք, որ λ-ն* զրոյի ձգտելիս (5) գումարն ունի (վերջավոր) I սահման, եթե ցանկացած ε դրական թվի համար, գոյություն ունի այնպիսի δ դրական թիվ, որ հենց $\lambda < \delta$, այսինքն հենց l կորը տրոհենք δ-ից փոքր երկարությամբ տարրական աղեղների, ապա անկախ տրոհման եղանակից և $A_i A_{i+1}$ աղեղների վրա M_i կետերի ընտրությունից, տեղի ունի

$$|\sigma_n - I| < \varepsilon \qquad (6)$$

անհավասարությունը:

Սահմանում 3: *λ-ն զրոյի ձգտելիս σ_n գումարի վերջավոր I սահմանը կոչվում է l կորի վրա որոշված $f(x,y)$ անընդհատ ֆունկցիայի երկրորդ սեռի կորագիծ ինտեգրալ՝ տարածված այդ կորով և նշանակվում է*

$$\int_l f(M)dx, \quad \int_l f(x,y)dx \qquad (7)$$

պայմանանշաններից որևէ մեկով:

Նույն ձևով, եթե l կորի վրա որոշված $f(x,y)$ անընդհատ ֆունկցիայի $f(\xi_i, \eta_i)$ արժեքները բազմապատկենք համապատասխան տարրական աղեղների, կոորդինատական Oy առանցքի վրա ունեցած պրոյեկցիաների մեծությամբ և գումարենք ստացված արտադրյալները՝ կստանանք

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i \qquad (8)$$

ինտեգրալ գումարը:

Եթե λ-ն զրոյի ձգտելիս (8) ինտեգրալ գումարն ունի (վերջավոր) սահման, որը կախված չէ ո՛չ l կորը տարրական աղեղների տրոհելու եղանակից, և ո՛չ էլ M_i $(i = 0,1,\ldots,n-1)$ կետերի ընտրությունից $A_i A_{i+1}$ աղեղների վրա, ապա այդ սահմանը նույնպես կոչվում է l կորի վրա որոշված $f(x,y)$ անընդհատ ֆունկցիայի երկրորդ սեռի կորագիծ ինտեգրալ՝ տարածված l կորով և նշանակվում է

$$\int_l f(M)dy, \quad \int_l f(x,y)dy \qquad (9)$$

պայմանանշաններից որևէ մեկով:

---

*) λ-ն $A_i A_{i+1}$ $(i = 0,1,\ldots,n-1)$ տարրական աղեղների երկարություններից մեծագույնն է:

Սահմանում 4: *Կոորդինատական Oxy հարթության մեջ տրված l կորի վրա որոշված $P(x,y)$ և $Q(x,y)$ անընդհատ ֆունկցիաների երկրորդ սեռի կորագիծ ինտեգրալների*

$$\int_l P(x,y)dx + \int_l Q(x,y)dy$$

գումարը կոչվում է այդ ֆունկցիաների երկրորդ սեռի ընդհանուր տեսքի կորագիծ ինտեգրալ՝ տարածված l կորով և նշանակվում է

$$\int_l P(x,y)dx + Q(x,y)dy \tag{10}$$

պայմանանշանով:

Օգտվելով երկրորդ սեռի ընդհանուր տեսքի կորագիծ ինտեգրալի սահմանումից և (4) հավասարությունից՝ վերևում դիտարկված խնդրում M նյութական կետը l կորի վրայով A կետից մինչև B կետը տեղափոխելու վրա կատարած աշխատանքը կարող ենք արտահայտել երկրորդ սեռի ընդհանուր տեսքի

$$a = \int_l F_x(x,y)dx + F_y(x,y)dy \tag{11}$$

կորագիծ ինտեգրալով:

Հասկանալի է, որ նույն ձևով կարելի է ներմուծել նաև տարածական L կորի վրա որոշված $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ և $R(x,y,z)$ անընդհատ ֆունկցիաների երկրորդ սեռի

$$\int_L P(x,y,z)dx, \quad \int_L Q(x,y,z)dy, \quad \int_L R(x,y,z)dz$$

կորագիծ ինտեգրալների, ինչպես նաև այդ կորով տարածված երկրորդ սեռի ընդհանուր տեսքի

$$\int_L P(x,y,z)dx + \int_L Q(x,y,z)dy + \int_L R(x,y,z)dz = \int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz \tag{12}$$

կորագիծ ինտեգրալի հասկացությունները:

Նկատենք, որ համեմատելով առաջին և երկրորդ սեռի կորագիծ ինտեգրալների սահմանումները՝ տեսնում ենք, որ այդ ինտեգրալները իրարից տարբերվում են էապես. այն դեպքում, երբ առաջին սեռի կորագիծ ինտեգրալի ինտեգրալ գումարի մեջ l կորի վրա որոշված $f(x,y)$ անընդհատ ֆունկցիայի $f(\xi_i,\eta_i)$ $(i=0,1,...,n-1)$ արժեքները բազմապատկվում են այդ կորի A_iA_{i+1} տարրական աղեղների երկարություններով՝ երկրորդ սեռի կորագիծ ինտեգրալի ինտեգրալ գումարի մեջ $f(x,y)$ ֆունկցիայի նշված արժեքները բազմապատկվում են համապատասխան տարրական աղեղների, կոորդինատական Ox կամ Oy առանցքի վրա ունեցած պրոյեկցիաների մեծություններով: Վերոգրյալից հետևում է, որ ի տարբերություն առաջին սեռի կորագիծ ինտեգրալի, երկրորդ սեռի կորագիծ ինտեգրալում ինտեգրման ճանապարհի ուղղությունը

կարևոր է, որովհետև նշված տարրական աղեղների պրոյեկցիաների մեծությունները էապես են կախված այդ աղեղների ուղղությունից և ինտեգրման ուղղությունը փոխելիս փոխում են իրենց նշանը:

Այսպիսով, երկրորդ սեռի կորագիծ ինտեգրալի համար ստանում ենք

$$\int_{(BA)} f(x,y)dx = -\int_{(AB)} f(x,y)dx\,,\quad \int_{(BA)} f(x,y)dy = -\int_{(AB)} f(x,y)dy \tag{13}$$

բանաձևերը, ընդ որում (13) հավասարություններից յուրաքանչյուրի որևէ կողմում գրված ինտեգրալի գոյությունից բխում է նաև այդ հավասարության մյուս կողմում գրված ինտեգրալի գոյությունը:

Համոզվելով, որ որոշյալ ինտեգրալի պարզագույն հատկությունները տեղի ունեն նաև երկրորդ սեռի կորագիծ ինտեգրալի համար, խուսափելով կրկնվելուց, այդ հատկությունների թվարկումը բաց ենք թողնում:

Ուսումնասիրվող կորագիծ ինտեգրալի հաշվման բանձևերին ծանոթանալու համար, ենթադրենք Oxy հարթության վրա տրված $l = AB$ անընդհատ կորի պարամետրական հավասարումներն ունեն [28,u1]

$$x = \varphi(t)\,,\ y = \psi(t)\ (\alpha \le t \le \beta) \tag{14}$$

տեսքը, որտեղ $\varphi(t)$ և $\psi(t)$ ֆունկցիաներն իրենց $\varphi'(t)$ և $\psi'(t)$ ածանցյալների հետ մեկտեղ $[\alpha,\beta]$ միջակայքում որոշված անընդհատ ֆունկցիաներ են, ընդ որում t պարամետրը α-ից մինչև β սահմանները փոփոխելիս, դիտարկվող կորը նկարագրվում է A-ից դեպի B ուղղությամբ:

Պարզվում է, որ եթե $f(x,y)$-ը և $g(x,y)$-ը (14) հավասարումներն ունեցող l կորի վրա որոշված անընդհատ ֆունկցիաներ են, ապա գոյություն ունեն

$$\int_{(AB)} f(x,y)dx\,,\quad \int_{(AB)} g(x,y)dy\,,\quad \int_{(AB)} f(x,y)dx + g(x,y)dy \tag{15}$$

ինտեգրալները, ինչպես նաև տեղի ունեն այդ ինտեգրալների հաշվման

$$\int_{(AB)} f(x,y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)dt\,,\quad \int_{(AB)} g(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} g[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)dt \tag{16}$$

և

$$\int_{(AB)} f(x,y)dx + g(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} \{f[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t) + g[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt \tag{16'}$$

բանաձևերը:

Այսպիսով, եթե կոորդինատական Oxy հարթության մեջ ընկած $l = AB$ անընդհատ կորը տրված է (14) պարամետրական հավասարումներով, ապա այդ կորի վրա որոշված $f(x,y)$ և $g(x,y)$ անընդհատ ֆունկցիաների երկրորդ սեռի (15) կորագիծ ինտեգրալները հաշվելու համար անհրաժեշտ է ենթինտեգրալ արտահայտությունների մեջ x և y փոփոխականները փոխարինել իրենց (14) արտահայտություններով, dx և dy արտադրիչները՝ համապա-

*տասխանաբար $\varphi'(t)dt$ -ով և $\psi'(t)dt$ -ով, իսկ ինտեգրումները կատարել α -ից մինչև β սահմաններում *):*

Եթե մասնավոր դեպքում AB կորի հավասարումն ունի

$$y = y(x) \quad (a \le x \le b) \tag{17}$$

բացահայտ տեսքը, ապա x -ը համարելով պարամետր, (15) ինտեգրալներից առաջինը հաշվելու համար կստանանք

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y)dx = \int\limits_a^b f[x, y(x)]dx \tag{18}$$

պարզ բանաձևը:

Նույն ձևով, եթե AB կորի հավասարումն ունի

$$x = x(y) \quad (c \le y \le d) \tag{19}$$

բացահայտ տեսքը, ապա (15) ինտեգրալներից երկրորդը հաշվելու համար կստանանք

$$\int\limits_{(AB)} g(x,y)dy = \int\limits_c^d g[x(y), y]dy \tag{20}$$

բանաձևը:

Այսպիսով, եթե կոորդինատական Oxy հարթության մեջ ընկած $l = AB$ անընդհատ կորը տրված է (17) [(19)] բացահայտ հավասարումով, ապա այդ կորի վրա որոշված $f(x,y)$ $[g(x,y)]$ անընդհատ ֆունկցիայի երկրորդ սեռի

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y)dx \quad \left[\int\limits_{(AB)} g(x,y)dy\right]$$

կորագիծ ինտեգրալը հաշվելու համար անհրաժեշտ է ենթինտեգրալ արտահայտության մեջ y փոփոխականը (x փոփոխականը) փոխարինել իր $y(x)$ $[x(y)]$ արտահայտությունով և ստացված $f[x, y(x)]$ և $\{g[x(y), y]\}$ ֆունկցիան ինտեգրել a -ից մինչև b (c -ից մինչև d) սահմաններում:

Վերջում նկատենք, որ եթե երկրորդ սեռի (15) կորագիծ ինտեգրալներից առաջինը հաշվվում է կոորդինատական Oy առանցքին զուգահեռ AB հատվածով, ապա այդ ինտեգրալը հավասար է զրոյի (քանի որ դիտարկվող դեպքում համապատասխան ինտեգրալ գումարի մեջ մասնակցող բոլոր Δx_i -երը հավասար են զրոյի): Նույն ձևով, եթե երկրորդ սեռի (15) կորագիծ ինտեգրալներից երկրորդը հաշվվում է կոորդինատական Ox առանցքին զուգահեռ AB հատվածով, ապա այն հավասար է զրոյի:

---

*) Հասկանալի է, որ վերջին հավասարություններում մասնակցող որոշյալ ինտեգրալների սահմանները կախված են l կորի վրա ընտրված ինտեգրման ուղղությունից:

ԳԼՈՒԽ XIII

Օրինակ 1: Հաշվել երկրորդ սեռի ընդհանուր տեսքի

$$I=\int_l y^2dx-x^2dy$$

կորագիծ ինտեգրալը, որտեղ l-ը միավոր շառավղով այն շրջանագիծն է, որի կենտրոնը կոորդինատների սկզբնակետն է:

Լուծում: Նկատի ունենալով, որ ինտեգրման կորը տրվում է

$$x=\cos t,\quad y=\sin t\quad (0\le t\le 2\pi)$$

պարամետրական հավասարումներով [28,(ը)] և օգտվելով երկրորդ սեռի ընդհանուր տեսքի կորագիծ ինտեգրալի հաշվման (16՝) բանաձևից՝ կստանանք [27,(10),(12)], [35,2°,3°], [41,(6)]

$$I=-\int_0^{2\pi}\left(\sin^3 t+\cos^3 t\right)dt=\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2 t\right)d\cos t-\int_0^{2\pi}\left(1-\sin^2 t\right)d\sin t=0:$$

Օրինակ 2: Հաշվել երկրորդ սեռի ընդհանուր տեսքի

$$I=\int_l 2xydx+x^2dy$$

կորագիծ ինտեգրալը, որտեղ l-ը $y=x^2$ հավասարումն ունեցող պարաբոլի [7,4°] $M(0;0)$ և $P(2;2)$ կետերը միացնող աղեղն է:

Լուծում: x փոփոխականը համարելով պարամետր, իսկ y փոփոխականը՝ այդ պարամետրից կախված և $[0;2]$ միջակայքում որոշված անընդհատ ֆունկցիա՝ (16՝) բանաձևի օգնությամբ կունենանք [27,(7)]

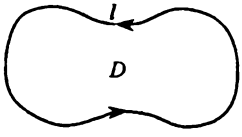
$$I=\int_0^2\left(2x^3+2x^3\right)dx=16:$$

§71. Գրինի բանաձևը: Երկրորդ սեռի կորագիծ ինտեգրալի արժեքն ինտեգրման կորի ձևից անկախ լինելու անհրաժեշտ և բավարար պայմանները:

Այժմ արտածենք մի բանաձև, որը կապ է հաստատում որևէ հարթ տիրույթով տարածված կրկնակի ինտեգրալի և այդ տիրույթի եզրագծով տարածված կորագիծ ինտեգրալի միջև:

Նախ ծանոթանանք փակ կորի շրջանցման դրական ուղղությանը:

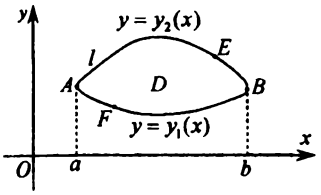
Սահմանում 1: *Կասենք, որ l փակ հարթ կորը շրջանցվում է դրական ուղղությամբ, եթե այդ կորով շարժվող դիտողին տրված կորով սահմանափակված D տիրույթը երևում է նրա ձախ կողմում (նկ.21): Այլ խոսքով, փակ հարթ կորի շրջանցման դրական ուղղությունը համընկնում է ժամացույցի սլաքի շարժման հակառակ ուղղությանը:*



նկ.21

Այժմ ենթադրենք Oxy հաթության մեջ ընկած l փակ կորով սահմանափակված D կանոնավոր տիրույթը [67,u2] ներքևից և վերևից համապատասխանաբար սահմանափակված է $[a,b]$ միջակայքում տրված $y=y_1(x)$ և

$y=y_2(x)$ անընդհատ*) կորերով (նկ.22): Ենթադրելով նաև, որ $P(x,y)$ և $Q(x,y)$ ֆունկցիաներն իրենց $\partial P/\partial y$ և $\partial Q/\partial x$ մասնակի ածանցյալների հետ մեկտեղ որոշված են և անընդհատ D տիրույթում՝ հաշվենք



նկ.22

$$\iint_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dx\,dy, \qquad \iint_D \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}dx\,dy \tag{1}$$

կրկնակի ինտեգրալները [66,u4]:

Օգտվելով նախորդ պարագրաֆի (13) և (18) բանաձևերից՝ կստանանք [67,(6)]

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy=\int_a^b\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\frac{\partial P}{\partial y}dy\right]dx=\int_a^b P(x,y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)}dx=$$

$$=\int_a^b\{P[x,y_2(x)]-P[x,y_1(x)]\}dx=\int_a^b P[x,y_2(x)]dx-\int_a^b P[x,y_1(x)]dx=$$

$$=\int_{(AEB)}P(x,y)dx-\int_{(AFB)}P(x,y)dx=-\int_{(BEA)}P(x,y)dx-\int_{(AFB)}P(x,y)dx=-\oint_l P(x,y)dx,$$

որտեղ $\oint$ պայմանանշանը նշանակում է կորագիծ ինտեգրալ՝ տարածված դրական ուղղությամբ շրջանցվող l փակ կորով:

Այսպիսով, $P(x,y)$ ֆունկցիայի վերաբերյալ կատարած ենթադրությունների դեպքում ստանում ենք

$$\oint_l P(x,y)dx=-\iint_D\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dx\,dy \tag{2}$$

բանաձևը, որտեղ l-ը Oxy հարթության մեջ տրված փակ կոր է, իսկ D-ն՝ այդ կորով սահմանափակված կանոնավոր տիրույթ:

Նույն ձևով ստանալով

$$\oint_l Q(x,y)dy=\iint_D\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}dx\,dy \tag{3}$$

բանաձևը և անդամ առ անդամ գումարելով այն նախորդ բանաձևին՝ կստանանք բազմաթիվ կիրառություններ ունեցող Գրինի բանաձևը.

$$\iint_D\left[\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right]dx\,dy=\oint_l P(x,y)dx+Q(x,y)dy\,; \tag{4}$$

Օրինակ 1: հաշվել դրական ուղղությամբ շրջանցվող l փակ կորով տարածված երկրորդ սեռի

$$I=\oint_l y(1-x^2)dx+x(1+y^2)dy$$

*) $[a,b]$ միջակայքի յուրաքանչյուր կետում տեղի ունի $y_1(x)\le y_2(x)$ անհավասարությունը:

կորագիծ ինտեգրալը, որտեղ l-ը $x^2+y^2=R^2$ $(R>0)$ հավասարումով տրվող շրջանագիծն է [7,1°]:

Լուծում: Նկատի ունենալով, որ տրված շրջանագծի պարամետրական հավասարումներն ունեն

$$x=R\cos t,\quad y=R\sin t,\quad (0\le t\le 2\pi)$$

տեսքը [28,(ը)]՝ կունենանք [70,(16՝)], [35,9°], [27,(10),(12)], [39,o10], [41,(6)]

$$I=\int_0^{2\pi}\left[-R^2\sin^2 t\left(1-R^2\cos^2 t\right)+R^2\cos^2 t\left(1+R^2\sin^2 t\right)\right]dt=R^2\int_0^{2\pi}\left(\cos 2t+\frac{R^2}{2}\sin^2 2t\right)dt=\frac{\pi R^4}{2}:$$

Այժմ, D-ով նշանակելով l կորով սահմանափակված շրջանը՝ տրված ինտեգրալը հաշվենք նաև Գրինի բանաձևի օգնությամբ [44,(1)], [67,(18՝)], [35,2°,3°].

$$I=\iint_D\left\{\frac{\partial\left[x\left(1+y^2\right)\right]}{\partial x}-\frac{\partial\left[y\left(1-x^2\right)\right]}{\partial y}\right\}dxdy=\iint_D\left(x^2+y^2\right)dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\rho^3 d\rho=\frac{\pi R^4}{2}:$$

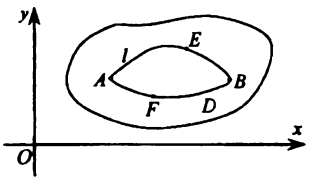
Նշենք, որ Գրինի բանաձևը ճիշտ է նաև այնպիսի ոչ կանոնավոր տիրույթների դեպքում, որոնք տրոհվում են վերջավոր թվով կանոնավոր տիրույթների:

Անցնելով երկրորդ սեռի կորագիծ ինտեգրալի արժեքն ինտեգրման կորի ձևից անկախ լինելու անհրաժեշտ և բավարար պայմաններին ծանոթանալուն՝ ենթադրենք կոորդինատական Oxy հարթության մեջ ընկած D կանոնավոր տիրույթում որոշված են $P(x,y)$ և $Q(x,y)$ անընդհատ ֆունկցիաները:

Տրված տիրույթում վերցնենք կամայական A և B կետեր, այդ կետերը միացնենք D տիրույթի մեջ ընկած որևէ AB անընդհատ կորով (նկ.23) և դիտարկենք երկրորդ սեռի ընդհանուր տեսքի

$$\int_{(AB)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy \tag{5}$$

կորագիծ ինտեգրալը:



նկ.23

Հարց է ծագում. *(5) ինտեգրալի արժեքը կախվա՞ծ է արդյոք A և B կետերը միմյանց միացնող AB կորի ձևից, թե՞ միարժեքորեն որոշվում է այդ կետերի դիրքով:*

Ձևակերպած հարցին պատասխանելու համար ենթադրենք նշված ինտեգրալի արժեքը կախված չէ D տիրույթի մեջ ընկած A և B կետերը միմյանց միացնող AB կորի ձևից, այսինքն ենթադրենք տեղի ունի

$$\int_{(AFB)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{(AEB)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy \tag{6}$$

հավասարությունը, որտեղ AFB-ն և AEB-ն A և B կետերը միմյանց միացնող և D տիրույթի մեջ ընկած, իրարից տարբեր կամայական երկու անընդհատ կորեր են:

Վերջին հավասարությունը ներկայացնելով

$$\int_{(AFB)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy - \int_{(AEB)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (6')$$

տեսքով և ստացված հավասարության երկրորդ ինտեգրալում փոխելով ինտեգրման ուղղությունը՝ կստանանք [70,(13)]

$$\int_{(AFB)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int_{(BEA)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (7)$$

կամ որ նույնն է՝

$$\oint_{l} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (7')$$

հավասարությունը, որտեղ l-ը D տիրույթի մեջ ընկած $AFBEA$ փակ կորն է:

Այսպիսով, այն ենթադրությունից, որ երկրորդ սեռի (5) կորագիծ ինտեգրալի արժեքը կախված չէ D տիրույթի մեջ ընկած կամայական A և B կետերը միմյանց միացնող կորի ձևից, հետևում է, որ նույն ենթինտեգրալ ֆունկցիայով կորագիծ ինտեգրալը՝ տարածված A և B կետերով անցնող և D տիրույթի մեջ ընկած ցանկացած l փակ կորով, հավասար է զրոյի: Մյուս կողմից, (7') հավասարությունը ներկայացնելով (7) տեսքով և այդ հավասարության մեջ մտնող երկրորդ ինտեգրալը տեղափոխելով հավասարության աջ մաս՝ [70,(13)] բանաձևի հաշվառումով կստանանք (6) հավասարությունը, որտեղից եզրակացնում ենք, որ (7') հավասարությունից էլ, որտեղ l-ը D տիրույթի կամայական A և B կետերով անցնող և այդ տիրույթի մեջ ընկած կամայական փակ կոր է, հետևում է, որ (5) ինտեգրալը կախված չէ A և B կետերը միմյանց միացնող AB կորի ձևից:

Ամփոփելով վերոգրյալը՝ եզրակացնում ենք, որ կոորդինատական Oxy հարթության մեջ ընկած D կանոնավոր տիրույթում որոշված $P(x,y)$ և $Q(x,y)$ անընդհատ ֆունկցիաների երկրորդ սեռի ընդհանուր տեսքի (5) կորագիծ ինտեգրալի արժեքն, այդ տիրույթի մեջ ընկած կամայական A և B կետերը միմյանց միացնող AB կորի ձևից անկախ լինելու պայմանը համընկնում է այդ կետերով անցնող և D տիրույթի մեջ ընկած կամայական l փակ կորով տարածված

$$\oint_{l} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (8)$$

կորագիծ ինտեգրալը զրոյի հավասարվելու պայմանին:

Հետևաբար հարց է ծագում. *ինչպիսի՞ պայմանների պետք է բավարարեն Oxy հարթության մեջ ընկած D կանոնավոր տիրույթում որոշված $P(x,y)$ և $Q(x,y)$ անընդհատ ֆունկցիաները, որպեսզի նշված տիրույթի մեջ ընկած կամայական l փակ կորի դեպքում տեղի ունենա (7) հավասարությունը:*

Չևակերպած հարցի պատասխանը տալիս է հետևյալ թեորեմը՝

ԳԼՈՒԽ XIII

Թեորեմ 1: *Դիցուք $P(x,y)$ և $Q(x,y)$ ֆունկցիաներն իրենց $\partial P/\partial y$ և $\partial Q/\partial x$ մասնակի ածանցյալների հետ մեկտեղ որոշված են և անընդհատ Oxy հարթության մեջ ընկած D կանոնավոր տիրույթում: Այդ դեպքում, որպեսզի D տիրույթի մեջ ընկած կամայական l փակ կորի դեպքում տեղի ունենա (7) հավասարությունը, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նշված տիրույթի յուրաքանչյուր կետում տեղի ունենա*

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \tag{9}$$

պայմանը:

Ապացույց: *Բավարարություն:* Ենթադրենք D կանոնավոր տիրույթի յուրաքանչյուր կետում տեղի ունի (9) պայմանը և ցույց տանք, որ այդ տիրույթի մեջ ընկած կամայական l փակ կորի դեպքում տեղի ունի (7) հավասարությունը:

Համոզվելու համար դիտարկվող տիրույթում վերցնենք որևէ l փակ կոր, այդ կորով սահմանափակված տիրույթը նշանակենք S-ով և $P(x,y)$, $Q(x,y)$ ֆունկցիաների համար այդ տիրույթում գրենք Գրինի բանաձևը*).

$$\iint_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\oint_l P\,dx+Q\,dy: \tag{10}$$

Համաձայն կատարված ենթադրության՝ (10) հավասարության մեջ մասնակցող կրկնակի ինտեգրալի ենթինտեգրալ ֆունկցիան D տիրույթում նույնաբար հավասար է զրոյի: Վերոգրյալից հետևում է, որ զրոյի է հավասար նաև այդ ինտեգրալը, որտեղից էլ հետևում է, որ նշված հավասարության աջ կողմում գրված կորագիծ ինտեգրալը նույպես հավասար է զրոյի:

Անհրաժեշտություն: Այժմ ենթադրենք D տիրույթի մեջ ընկած կամայական l փակ կորի դեպքում տեղի ունի (7) հավասարությունը և ցույց տանք, որ այդ տիրույթի յուրաքանչյուր կետում տեղի ունի նաև (9) պայմանը:

Ապացուցելու համար ենթադրենք հակառակը, այսինքն՝ ենթադրենք D տիրույթում գոյություն ունի այնպիսի M_0 կետ, որ այդ կետում տեղի ունի, օրինակ,

$$\frac{\partial Q}{\partial x}>\frac{\partial P}{\partial y}$$

կամ որ նույնն է՝

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}>0 \tag{11}$$

անհավասարությունը:

---

*) Գրության պարզության համար (10) բանաձևում մասնակցող ֆունկցիաների կախվածությունը x և y փոփոխականներից բաց ենք թողնում:

Նկատի ունենալով, որ որևէ տիրույթում որոշված երկու փոփոխականի անընդհատ ֆունկցիաների տարբերությունը նույնպես անընդհատ է այդ տիրույթում և հաշվի առնելով, որ ըստ պայմանի $\partial P/\partial y$-ը և $\partial Q/\partial x$-ը D տիրույթում որոշված անընդհատ ֆունկցիաներ են՝ եզրակացնում ենք, որ

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y} \tag{12}$$

ֆունկցիան անընդհատ է նշված տիրույթում*): Կատարված եզրակացությունից հետևում է, որ D տիրույթում գոյություն ունի M_0 կետի այնպիսի D_0 շրջակայք, որ այդ շրջակայքի բոլոր կետերում (12) ֆունկցիան ընդունում է դրական արժեքներ**), որտեղից էլ օգտվելով կրկնակի ինտեգրալի 8-րդ հատկությունից [66,8°], ստանում ենք, որ D_0 տիրույթում տեղի ունի

$$\iint\limits_{D_0}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy>0 \tag{13}$$

անհավասարությունը: Մյուս կողմից, քանի որ D_0 տիրույթն ընկած է D տիրույթի մեջ, ուստի այդ տիրույթում $P(x,y)$ և $Q(x,y)$ ֆունկցիաների համար տեղի ունի Գրինի բանաձևը.

$$\iint\limits_{D_0}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\oint\limits_{l_0}P\,dx+Q\,dy, \tag{14}$$

որտեղ l_0-ն D_0 տիրույթի եզրագիծն է:

Համաձայն ենթադրության՝ (14) հավասարության մեջ մասնակցող կորագիծ ինտեգրալը հավասար է զրոյի: Հետևաբար, զրոյի է հավասար նաև այդ հավասարության ձախ կողմում գրված ինտեգրալը.

$$\iint\limits_{D_0}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=0: \tag{15}$$

Նկատելով, որ (13) անհավասարությունն ու (15) հավասարությունը հակասում են իրար՝ եզրակացնում ենք, որ ենթադրելով, որ D տիրույթի M_0 կետում տեղի ունի (11) անհավասարությունը, սխալվել ենք:

Նույն ձևով համոզվելով, որ դիտարկվող տիրույթում գոյություն չունի կետ, որ այդ կետում տեղի ունենա

$$\frac{\partial Q}{\partial x}<\frac{\partial P}{\partial y}$$

անհավասարությունը՝ համոզվում ենք, որ (12) ֆունկցիան նույնաբար հա-

---

*) Հիշատակած պնդման ապացույցը սկզբունքորեն չի տարբերվում [24, թ1]-ի ապացույցից:

**) Չնակերպած պնդումը (որը հայտնի է մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաների տեսությունից) համեմատիր [22, հ1]-ին:

վասար է զրոյի D տիրույթում, ինչը նշանակում է, որ կատարված ենթադրության դեպքում նշված տիրույթի բոլոր կետերում տեղի ունի (9) պայմանը:

Իպա

Մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաների տեսությունից հայտնի է, որ մի որևէ տիրույթում (9) պայմանի տեղի ունենալը անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի այդ տիրույթում գոյություն ունենա այնպիսի $u(x,y)$ ֆունկցիա, որ

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy \qquad (16)$$

դիֆերենցիալ արտահայտությունը հավասար լինի այդ ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալին [51,թ1], ընդ որում $P(x,y)$, $Q(x,y)$ և $u(x,y)$ ֆունկցիաները միմյանց կապված են

$$P(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x},\quad Q(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y}$$

առնչություններով:

Ամփոփելով երկրորդ սեռի կորագիծ ինտեգրալի արժեքն ինտեգրման կորի ձևից անկախ լինելուն վերաբերող դատողությունները՝ ստանում ենք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 2: *Դիցուք $P(x,y)$ և $Q(x,y)$ ֆունկցիաներն իրենց $\partial P/\partial y$ և $\partial Q/\partial x$ մասնակի ածանցյալների հետ մեկտեղ որոշված են և անընդհատ Oxy հարթության մեջ ընկած D կանոնավոր տիրույթում: Այդ դեպքում, որպեսզի երկրորդ սեռի ընդհանուր տեսքը (5) կորագիծ ինտեգրալի արժեքը կախված չլինի տրված տիրույթի մեջ ընկած կամայական A և B կետերը միմյանց միացնող AB կորի ձևից, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նշված տիրույթում (16) դիֆերենցիալ արտահայտությունը լինի մի որևէ $u(x,y)$ ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալ:*

§72. Առաջին սեռի մակերևույթային ինտեգրալի սահմանումը և հաշվման բանաձևը:

Առաջին սեռի մակերևույթային ինտեգրալը հանդիսանում է կրկնակի ինտեգրալի այնպիսի ընդհանրացում, ինչպիսին առաջին սեռի կորագիծ ինտեգրալն է սովորական որոշյալ ինտեգրալի համար:

Դիցուք S-ը Γ ողորկ կորով սահմանափակված ողորկ մակերևույթ է, այսինքն այնպիսի մակերևույթ է, որի յուրաքանչյուր կետում կարելի է այդ մակերևույթին շոշափող հարթություն տանել, ընդ որում կետից կետ անցնելիս շոշափող հարթության դիրքը փոփոխվում է անընդհատ [49,u4]:

Ենթադրենք տրված մակերևույթի վրա որոշված է $f(M)=f(x,y,z)$ անընդհատ ֆունկցիան [69,u1]: Կտոր առ կտոր ողորկ կորերի կամայական ցանցով S մակերևույթը տրոհենք վերջավոր թվով S_1, S_2, ..., S_n տարրական մակերևույթների, այդ մակերևույթների մակերեսներն ու տրամագծերը [66,u1]

համապատասխանաբար նշանակենք Δs_1-ով ու λ_1-ով, Δs_2-ով ու λ_2-ով, ..., Δs_n-ով ու λ_n-ով, իսկ այդ տրամագծերից մեծագույնը՝ λ-ով: S_i $(i=1,2,\dots,n)$ մակերևույթի սահմաններում վերցնենք կամայական $M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ կետ, $f(x,y,z)$ ֆունկցիայի արժեքն այդ կետում բազմապատկենք S_i մակերևույթի մակերեսով և կազմենք

$$\sigma_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i \tag{1}$$

գումարը:

Սահմանում 1: *σ_n գումարը կոչվում է S մակերևույթի վրա որոշված $f(x,y,z)$ ֆունկցիայի ինտեգրալ գումար՝ տարածված այդ մակերևույթով:*

Սահմանում 2: *Կասենք, որ λ-ն զրոյի ձգտելիս (1) գումարն ունի (վերջավոր) I սահման, եթե ցանկացած ε դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի δ դրական թիվ, որ հենց $\lambda<\delta$, այսինքն հենց S մակերևույթը կամայական ձևով տրոհենք δ-ից փոքր տրամագիծ ունեցող տարրական մակերևույթների, ապա անկախ S_i մակերևույթների վրա M_i կետերի ընտրությունից, տեղի ունի*

$$|\sigma_n-I|<\varepsilon \tag{2}$$

անհավասարությունը:

Սահմանում 3: *λ-ն զրոյի ձգտելիս σ_n գումարի վերջավոր I սահմանը կոչվում է $f(x,y,z)$ ֆունկցիայի առաջին սեռի մակերևույթային ինտեգրալ՝ տարածված S մակերևույթով և նշանակվում է*

$$\iint\limits_{(S)} f(M)ds,\quad \iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds \tag{3}$$

պայմանանշաններից որևէ մեկով, որտեղ ds-ը հիշեցնում է S_i տարրական մակերևույթների Δs_i մակերեսները:

Անցնելով Γ ողորկ կորով սահմանափակված S ողորկ մակերևույթի վրա որոշված $f(x,y,z)$ անընդհատ ֆունկցիայի, այդ մակերևույթով տարածված առաջին սեռի մակերևույթային ինտեգրալի հաշվմանը՝ ենթադրենք Oz առանցքին զուգահեռ յուրաքանչյուր ուղիղ այդ մակերևույթը հատում է մեկ կետում: Հասկանալի է, որ դիտարկվող դեպքում S մակերևույթի հավասարումը կարելի է ներկայացնել

$$z=z(x,y) \tag{4}$$

բացահայտ տեսքով: Ենթադրենք նաև, որ (4) ֆունկցիան իր առաջին կարգի մասնակի ածանցյալների հետ մեկտեղ որոշված է և անընդհատ P տիրույ-

թում, որտեղ P-ն S մակերևույթի պրոյեկցիան է կոորդինատական Oxy հարթության վրա:

Օգտվելով (4) բացահայտ հավասարումով տրված S մակերևույթի մակերեսի ds տարրի

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy \tag{5}$$

[67,(22)] բանաձևից և (3) մակերևույթային ինտեգրալի ենթինտեգրալ ֆունկցիայի մեջ z-ը փոխարինելով $z(x,y)$-ով՝ կստանանք

$$f(x,y,z)ds=f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy:$$

Նկատի ունենալով, որ ստացված հավասարության ձախ կողմի ինտեգրումն ըստ S մակերևույթի հավասարազոր է նրա աջ կողմի ինտեգրմանը՝ ըստ այդ մակերևույթի Oxy հարթության վրա ունեցած P պրոյեկցիայի՝ կունենանք

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds=\iint\limits_{P} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy: \tag{6}$$

Այսպիսով, եթե S ողորկ մակերևույթը տրված է (4) բացահայտ հավասարումով, ապա այդ մակերևույթի վրա որոշված $f(x,y,z)$ անընդհատ ֆունկցիայի, այդ մակերևույթով տարածված առաջին սեռի մակերևույթային ինտեգրալը կրկնակի ինտեգրալի բերելու համար անհրաժեշտ է $f(x,y,z)$ ֆունկցիայի մեջ z-ը փոխարինել $z(x,y)$-ով, մակերևույթի մակերեսի ds տարրը՝ իր (5) արտահայտությամբ և ինտեգրումը կատարել տրված մակերևույթի, կոորդինատական Oxy հարթության վրա ունեցած P պրոյեկցիայով:

Օրինակ 1: Հաշվել առաջին սեռի հետևյալ մակերևույթային ինտեգրալը՝

$$I=\iint\limits_{S} xyz\,ds\,, \tag{ա}$$

որտեղ S մակերևույթը

$$x+y+z=1 \tag{բ}$$

հարթության [8,u4], կոորդինատական առաջին օկտանտում $(x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$ ընկած մասն է:

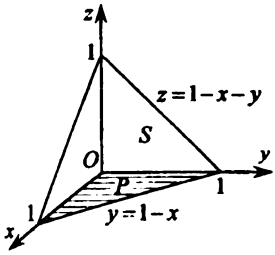
Լուծում: Տրված հարթության հավասարումը գրելով

$$z=1-x-y$$

բացահայտ տեսքով և օգտվելով (6) բանաձևից՝ (ա) ինտեգրալի համար կստանանք

$$I=\iint\limits_{P} xy(1-x-y)\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\,dx\,dy=\sqrt{3}\iint\limits_{P} xy(1-x-y)\,dx\,dy\,,$$

որտեղ P-ն (բ) հավասարումն ունեցող մակերևույթի, կոորդինատական առաջին օկտանտում ընկած մասի պրոյեկցիան է (նկ.24) Oxy հարթության վրա:



նկ.24

Խնդրի լուծումն ավարտելու համար, մնում է նկատի ունենալ, որ P տիրույթը սահմանափակված է

$$x=0,\ y=0,\ y=1-x$$

հավասարումներն ունեցող ուղիղներով և օգտվել կրկնակի ինտեգրալի հաշվման [67,(6)] բանաձևից [35,3°], [41,(6)].

$$I=\sqrt{3}\int_0^1 x\left[\int_0^{1-x} y(1-x-y)dy\right]dx=\frac{\sqrt{3}}{6}\int_0^1 x(1-x)^3dx=\frac{\sqrt{3}}{120}:$$

Հասկանալի է, որ եթե S ողորկ մակերևույթի հավասարումն ունի

$$x=x(y,z) \tag{7}$$

բացահայտ տեսքը, որտեղ (7) ֆունկցիան իր $\partial x/\partial y$ և $\partial x/\partial z$ մասնակի ածանցյալների հետ մեկտեղ որոշված է և անընդհատ տրված մակերևույթի, Oyz կոորդինատական հարթության վրա ունեցած P' պրոյեկցիայի վրա, ապա այդ մակերևույթի վրա որոշված $f(x,y,z)$ անընդհատ ֆունկցիայի, նշված մակերևույթով տարածված առաջին սեռի մակերևույթային ինտեգրալի համար կունենանք

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)ds=\iint_{P'} f[x(y,z),y,z]\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}dydz: \tag{6'}$$

Նույն ձևով, եթե S ողորկ մակերևույթի հավասարումն ունի

$$y=y(x,z) \tag{8}$$

բացահայտ տեսքը, որտեղ (8) ֆունկցիան իր $\partial y/\partial x$ և $\partial y/\partial z$ մասնակի ածանցյալների հետ մեկտեղ որոշված է և անընդհատ տրված մակերևույթի, Oxz կոորդինատական հարթության վրա ունեցած P'' պրոյեկցիայի վրա, ապա այդ մակերևույթի վրա որոշված $f(x,y,z)$ անընդհատ ֆունկցիայի, նշված մակերևույթով տարածված առաջին սեռի մակերևույթային ինտեգրալի համար կստանանք

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)ds=\iint_{P''} f[x,y(x,y),z]\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}dxdz: \tag{6''}$$

ԳԼՈՒԽ XIII

§73. Միակողմանի և երկկողմանի մակերևույթներ: Երկրորդ սեռի մակերևույթային ինտեգրալի սահմանումը և հաշվման բանաձևը:

Մի շարք դեպքերում մակերևույթի կողմի հասկացությունն ընկալելը բավականաչափ պարզունակ է: Օրինակ, եթե Oz կոորդինատական առանցքն ուղղված է ուղղաձիգ դեպի վեր և S մակերևույթը տրված է

$$z = z(x, y) \tag{1}$$

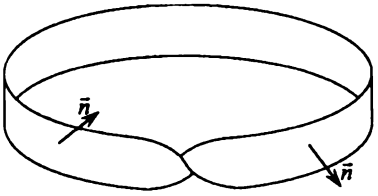
բացահայտ հավասարումով, ապա կարելի է խոսել այդ մակերևույթի վերևի և ներքևի կողմերի մասին: Եթե մակերևույթը սահմանափակում է որևէ տիրույթ, ապա այդ դեպքում մակերևույթն ունի ներքին կողմ, որն ուղղված է դեպի այդ տիրույթը և արտաքին կողմ, որն ուղղված է դեպի նշված տիրույթը շրջապատող միջավայրը:

Ընդհանուր դեպքում մակերևույթի կողմի մասին դատողություններ կատարելու համար դիտարկենք կտոր առ կտոր Γ ողորկ կորով սահմանափակված S ողորկ մակերևույթը և այդ մակերևույթի վրա վերցնենք որևէ M_0 կետ: Նշված կետում տանենք S մակարևույթի նորմալը [49,u5] և այդ նորմալին վերագրենք որոշակի ուղղություն՝ հնարավոր երկու ուղղություններից որևէ մեկը: Այնուհետև դիտարկվող մակերևույթի վրա տանենք M_0 կետով անցնող այնպիսի l փակ կոր, որը չի հատում տրված մակերևույթի եզրագիծը: Ստիպենք M_0 կետին շարժվել այդ կորի վրայով և l կորի հաջորդական կետերում մակերևույթին տարած նորմալին վերագրենք երկու հնարավոր ուղղություններից այն ուղղությունը, որին անընդհատորեն փոխանցվում է M_0 սկզբնական կետում տարած նորմալի ուղղությունը: l կորի բոլոր կետերով անցնելու արդյունքում կարող է տեղի ունենալ հետևյալ երկու դեպքերից որևէ մեկը. կա՛մ շրջանցումից հետո M_0 կետ կվերադառնանք նորմալի սկզբնական ուղղությամբ, կա՛մ էլ՝ այդ ուղղության հակառակ ուղղությամբ:

Սահմանում 1: *Եթե S մակերևույթի կամայական M_0 կետով, այդ մակերևույթի վրայով ու նրա եզրագծի հետ չհատվող ինչպիսի l փակ կոր էլ տանենք և վերևում նկարագրված ձևով այդ կորը շրջանցելուց հետո նշված կետը վերադառնանք այդ կետում մակերևույթին տարած նորմալի սկզբնական ուղղությամբ, ապա S մակերևույթը կոչվում է երկկողմանի:*

Սահմանում 2: *Եթե S մակերևույթի վրա գոյություն ունի այնպիսի M_0 կետ և այդ կետով անցնող ու տրված մակերևույթին պատկանող և նրա եզրագծի հետ չհատվող այնպիսի l_0 փակ կոր, որ վերևում նկարագրված ձևով այդ կորը շրջանցելուց հետո նշված կետը վերադառնանք այդ կետում մակերևույթին տարած նորմալի սկզբնական ուղղության հակառակ ուղղությամբ, ապա S մակերևույթը կոչվում է միակողմանի:*

Միակողմանի մակերևույթի պարզ օրինակ է, այսպես կոչված, Մյոբիուսի թերթը (նկ.25), որը կարելի է ստանալ, օրինակ, թղթից պատրաստած ժապավենի ծայրերը սոսնձելով՝ նախապես մեկ անգամ ոլորելով այն:



նկ.25

Նշենք, որ չհեռացնելով վրձինը Մյոբիուսի թերթից և չհատելով նրա եզրագիծը՝ կարելի է այն ներկել մեկ գույնով, ինչը հնարավոր չէ երկկողմանի մակերևույթի պարագայում*):

Անցնելով երկրորդ սեռի մակերևույթային ինտեգրալի սահմանմանը՝ նշենք, որ այս նոր տեսակի ինտեգրալի հասկացությունը նման է երկրորդ սեռի կորագիծ ինտեգրալի հասկացությանը [70,u3]:

Ենթադրենք (1) բացահայտ հավասարումով տրված երկկողմանի S ողորկ մակերևույթի վրա որոշված է $f(M)=f(x,y,z)$ անընդհատ ֆունկցիան [69,u1]: Կտոր առ կտոր ողորկ կորերի կամայական ցանցով տրված մակերևույթը տրոհենք վերջավոր թվով S_1, S_2, ..., S_n տարրական մակերևույթների, այդ մակերևույթների տրամագծերը [66,u1] համապատասխանաբար նշանակենք λ_1-ով, λ_2-ով, ..., λ_n-ով, իսկ այդ տրամագծերից մեծագույնը՝ λ-ով: S_i $(i=1,2,...,n)$ տարրական մակերևույթի վրա վերցնենք կամայական $M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ կետ և այդ կետում հաշվենք $f(x,y,z)$ ֆունկցիայի արժեքը: Սակայն քննարկվող դեպքում $f(x,y,z)$ ֆունկցիայի $f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ արժեքը բազմապատկենք ոչ թե համապատասխան տարրական մակերևույթի մակերեսով (ինչպես վարվեցինք առաջին սեռի մակերևույթային ինտեգրալի պարագայում), այլ կոորդինատական Oxy հարթության վրա այդ մակերևույթի ունեցած P_i պրոյեկցիայի Δp_i մակերեսով, եթե S_i տարրական մակերևույթը գտնվում է S մակերևույթի վերևի կողմի վրա և՝ $-\Delta p_i$-ով, եթե այդ մակերևույթը գտնվում է S մակերևույթի ներքևի կողմի վրա և կազմենք

$$\sigma_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\,\Delta p_i^* \qquad (2)$$

գումարը, որտեղ Δp_i^*-ն $(i=1,2,...,n)$ հավասար է Δp_i-ի, կամ $-\Delta p_i$-ի՝ կախված նրանից S_i-ն S մակերևույթի վերևի կողմի վրա է գտնվում, թե՝ ներքևի:

Սահմանում 3: *σ_n գումարը կոչվում է երկկողմանի S մակերևույթի վրա որոշված $f(x,y,z)$ ֆունկցիայի ինտեգրալ գումար՝ տարածված այդ մակերևույթով:*

---

*) Երկկողմանի մակերևույթի մի կողմից մյուսն անցնելը հնարավոր է միայն եզրագծի վրայով:

Սահմանում 4: *Կասենք, որ λ-ն զրոյի ձգտելիս (2) գումարն ունի (վերջավոր) I սահման, եթե ցանկացած ε դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի δ դրական թիվ, որ հենց $\lambda<\delta$, այսինքն հենց S մակերևույթը կամայական ձևով տրոհենք δ-ից փոքր տրամագիծ ունեցող տարրական մակերևույթների, ապա անկախ S_i մակերևույթների վրա M_i կետերի ընտրությունից տեղի ունի*

$$|\sigma_n - I| < \varepsilon$$

անհավասարությունը:

Սահմանում 5: *λ-ն զրոյի ձգտելիս σ_n գումարի վերջավոր I սահմանը կոչվում է $f(x,y,z)$ ֆունկցիայի երկրորդ սեռի մակերևույթային ինտեգրալ՝ տարածված երկկողմանի S մակերևույթի ընտրված կողմով, և նշանակվում է հետևյալ պայմանանշաններից որևէ մեկով՝*

$$\iint\limits_{(S)} f(M)dp, \quad \iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dx\,dy, \tag{3}$$

որտեղ $dp = dx\,dy$-ը հիշեցնում է տարրական մակերևույթների, կոորդինատական Oxy հարթության վրա ունեցած պրոյեկցիաների մակերեսները:

Նույն ձևով, եթե կոորդինատական Oxy հարթության փոխարեն երկկողմանի S մակերևույթը պրոյեկտվում է Oyz, կամ Oxz հարթության վրա, ապա (3) ինտեգրալի փոխարեն համապատասխանաբար կստանանք երկրորդ սեռի

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dy\,dz, \quad \iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dx\,dz \tag{4}$$

մակերևույթային ինտեգրալները:

Կիրառություններում ավելի հաճախ հանդիպում է (3) և (4) մակերևույթային ինտեգրալների գումարը:

Սահմանում 6: *Երկրորդ սեռի մակերևույթային ինտեգրալների*

$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)dx\,dy + \iint\limits_{(S)} Q(x,y,z)dx\,dz + \iint\limits_{(S)} R(x,y,z)dy\,dz \tag{5}$$

գումարը, որտեղ $P(x,y,z)$-ը, $Q(x,y,z)$-ը և $R(x,y,z)$-ը երկկողմանի S մակերևույթի վրա որոշված անընդհատ ֆունկցիաներ են, կոչվում է այդ ֆունկցիաների երկրորդ սեռի ընդհանուր տեսքի մակերևույթային ինտեգրալ՝ տարածված S մակերևույթի ընտրված կողմով և նշանակվում է

$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)dx\,dy + Q(x,y,z)dx\,dz + R(x,y,z)dy\,dz \tag{5'}$$

պայմանանշանով:

Անցնելով (1) բացահայտ հավասարումն ունեցող երկկողմանի S մակերևույթի վրա որոշված $f(x,y,z)$ անընդհատ ֆունկցիայի երկրորդ սեռի մա-

կերևույթային ինտեգրալի հաշվմանը՝ ենթադրենք մեզ հետաքրքրող ինտեգրալը տարածված է S մակերևույթի վերևի կողմով, տրված ֆունկցիայի (2) ինտեգրալ գումարի մեջ ζ_i-ն $(i=1,2,...,n)$ փոխարինենք իր $z(\xi_i,\eta_i)$ արժեքով և այդ գումարը ներկայացնենք

$$\sigma_n=\sum_{i=1}^{n} f[\xi_i,\eta_i,z(\xi_i,\eta_i)]\Delta p_i^* \qquad (2')$$

տեսքով:

Նկատելով, որ (2') հավասարության աջ մասը

$$\iint_P f[x,y,z(x,y)]dx\,dy$$

կրկնակի ինտեգրալի [66,u4] ինտեգրալ գումարն է և այդ հավասարության մեջ անցնելով սահմանի, երբ λ-ն ձգտում է զրոյի՝ կստանանք

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)\,dx\,dy=\iint_P f[x,y,z(x,y)]dx\,dy\,, \qquad (6)$$

որտեղ P-ն S մակերևույթի պրոյեկցիան է կոորդինատական Oxy հարթության վրա:

Այսպիսով, $z=z(x,y)$ բացահայտ հավասարումն ունեցող երկկողմանի S մակերևույթի վրա որոշված $f(x,y,z)$ անընդհատ ֆունկցիայի, այդ մակերևույթի վերևի կողմով տարածված երկրորդ սեռի մակերևույթային ինտեգրալը կրկնակի ինտեգրալի բերելու համար անհրաժեշտ է տրված ֆունկցիայի մեջ z-ը փոխարինել $z(x,y)$-ով և ինտեգրումը կատարել S մակերևույթի, կոորդինատական Oxy հարթության վրա ունեցած P պրոյեկցիայով:

Պարզ է, որ եթե (3) մակերևույթային ինտեգրալը տարածված է S մակերևույթի ներքևի կողմով, ապա (6) բանաձևի փոխարեն կունենանք

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)\,dx\,dy=-\iint_P f[x,y,z(x,y)]dx\,dy: \qquad (6')$$

Վերջում նկատենք, որ եթե S_0-ն կոորդինատական Oz առանցքին զուգահեռ ուղիղներից կազմված գլանային մակերևույթ է [10,2°], ապա այդ մակերևույթի վրա որոշված $f(x,y,z)$ անընդհատ ֆունկցիայի երկրորդ սեռի մակերևույթային ինտեգրալը՝ տարածված S_0 մակերևույթի որևէ կողմով, հավասար է զրոյի (քանի, որ դիտարկվող դեպքում (2) ինտեգրալ գումարի մեջ մասնակցող բոլոր Δp_i^* մակերեսները հավասար են զրոյի).

$$\iint_{(S_0)} f(x,y,z)dx\,dy=0: \qquad (7)$$

Նույն ձևով, եթե երկրորդ սեռի (4) մակերևույթային ինտեգրալներից առաջինը (երկրորդը) տարածված է կոորդինատական Ox (Oy) առանցքին զուգա-

հեռ ուղիղներից կազմված գլանային մակերևույթով, ապա այդ մակերևույթի վրա որոշված $f(x,y,z)$ անընդհատ ֆունկցիայի երկրորդ սեռի մակերևույթային ինտեգրալը՝ տարածված S մակերևույթի որևէ կողմով, հավասար է զրոյի:

Օրինակ 1: Հաշվել երկրորդ սեռի հետևյալ մակերևույթային ինտեգրալը՝

$$I = \iint\limits_{(S)} x^2 y^2 z\, dx\, dy, \qquad (ա)$$

որտեղ S-ը

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (R > 0)$$

գնդային մակերևույթի [10,1°] ներքևի կեսի վերևի կողմն է:

Լուծում: Նկատի ունենալով, որ դիտարկվող գնդային մակերևույթի ներքևի կեսի հավասարումն ունի [10,(1˝)]

$$z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

տեսքը և հաշվի առնելով, որ այդ կեսի պրոյեկցիան կոորդինատական Oxy հարթության վրա

$$x^2 + y^2 = R^2$$

հավասարումն ունեցող շրջանագծով [7,1°] սահմանափակված շրջանն է, (6) բանաձևի օգնությամբ տրված մակերևույթային ինտեգրալի հաշվումը կհանգեցնենք P տիրույթով տարածված

$$-\iint\limits_{P} x^2 y^2 \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy \qquad (բ)$$

կրկնակի ինտեգրալի հաշվմանը, որտեղ P-ն վերևում նշված շրջանն է: Անցնելով բևեռային կոորդինատների [44,u1,(1)] և հաշվելով (բ) կրկնակի ինտեգրալը [67,(18)]՝ կստանանք (ա) մակերևույթային ինտեգրալի արժեքը [35,2°,3°], [41,(6)].

$$I = -\frac{2\pi}{105} R^7 :$$

ԳԼՈՒԽ XIV

ԴԱՇՏԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

§74. Սկալյար դաշտ: Ածանցյալ տրված ուղղությամբ: Սկալյար դաշտի գրադիենտը:

Սահմանում 1: *Կասենք, որ D տիրույթում տրված է ֆիզիկական դաշտ, եթե այդ տիրույթի յուրաքանչյուր կետում տրված է մի որևէ u ֆիզիկական մեծության որոշակի արժեք:*

Սահմանում 2: *D տիրույթում տրված u ֆիզիկական դաշտը կոչվում է սկալյար դաշտ, եթե u -ն սկալյար մեծություն է, այսինքն, եթե այն բնութագրվում է միայն իր թվային արժեքներով:*

Սահմանում 3: *Եթե u ֆիզիկական մեծությունը բաշխված է հարթ տիրույթով, ապա համապատասխան սկալյար դաշտը կոչվում է հարթ սկալյար դաշտ:*

Սահմանում 4: *Եթե u մեծության արժեքները կախված չեն ժամանակից, ապա այդ մեծությամբ տրվող դաշտը կոչվում է ստացիոնար սկալյար դաշտ, իսկ եթե u մեծության արժեքները փոփոխվում են նաև ժամանակի ընթացքում, ապա այդ մեծությամբ որոշվող դաշտը կոչվում է ոչ ստացիոնար սկալյար դաշտ:*

Օրինակ 1: Եթե ջերմություն հաղորդող միջավայրում դիտարկենք տաքացրած մարմնի սառեցման երևույթը, ապա կնկատենք, որ այդ միջավայրի յուրաքանչյուր կետի ջերմաստիճանը կախված է ժամանակից, ինչը նշանակում է, որ դիտարկվող օրինակում ունենք ջերմաստիճանների ոչ ստացիոնար դաշտ:

Նշենք, որ մենք կդիտարկենք միայն ստացիոնար դաշտեր: u -ն կարող է լինել ջերմաստիճան, լիցքի խտություն, գազի ճնշում և այլն:

Ընդհանրապես ասած, կետից կետ անցնելիս u ֆիզիկական մեծության արժեքը կարող է փոխվել, ինչը նշանակում է, որ այն ֆունկցիա է դիտարկվող տիրույթի կետերից.

$$u = u(M):$$

Հասկանալի է, որ երկչափ տիրույթում տրված $u(M)$ սկալյար մեծությունը երկու փոփոխականի ֆունկցիա է.

$$u = u(x, y),$$

իսկ եռաչափ տիրույթում տրված սկալյար մեծությունը՝ երեք փոփոխականի ֆունկցիա.

$$u = u(x, y, z):$$

Այսպիսով, եթե որևէ D տիրույթում ունենք սկալյար դաշտ, ապա այդ տիրույթում ունենք տրված դաշտը որոշող $u(M)$ ֆունկցիա: Մյուս կողմից, ցանկացած $u(M)$ ֆունկցիա իր որոշման տիրույթում բնութագրում է սկալյար դաշտ:

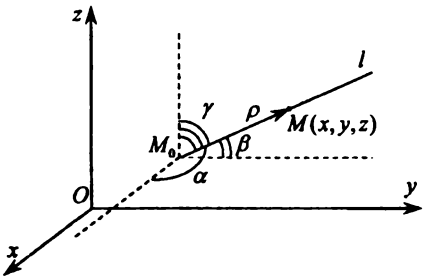
Օրինակ 2: Երեք փոփոխականի

$$u(x,y,z)=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2} \qquad (R>0)$$

ֆունկցիան $x^2+y^2+z^2=R^2$ հավասարումն ունեցող գնդային մակերևույթով [10,1°] սահմանափակված տիրույթում որոշում է սկալյար դաշտ:

Հասկանալի է, որ սկալյար դաշտը որոշող $u(M)$ ֆունկցիայի տալը բավարար չէ այդ դաշտի մասին լիարժեք պատկերացում կազմելու համար: Այդ պատճառով ներմուծվում են սկալյար դաշտի զանազան բնութագրիչներ: Այդպիսի բնութագրիչներից է $u(M)$ ֆունկցիայի փոփոխման արագությունը, երբ M կետը շարժվում է այդ դաշտում:

Դիցուք տարածական D տիրույթում տրված է $u(x,y,z)$ ֆունկցիայով որոշվող սկալյար դաշտ: Դիտարկվող տիրույթում վերցնենք որևէ $M_0(x_0,y_0,z_0)$ կետ և այդ կետից դուրս եկող որևէ l ճառագայթ (նկ.26): l ճառագայթի և կոորդինատական Ox, Oy, Oz առանցքների կազմած անկյունները համապատասխանաբար նշանակենք α-ով, β-ով և γ-ով: Այնուհետև ընտրված ճառագայթի վրա վերցնենք M_0-ից տարբեր որևէ $M(x,y,z)$ կետ և M_0M հատվածի երկարությունը նշանակենք ρ-ով: Քանի որ M_0M վեկտորի [1,u3] պրոյեկցիաները կոորդինատական Ox, Oy և Oz առանցքների վրա մի կողմից համապատասխանաբար հավասար են $\rho\cos\alpha$-ի, $\rho\cos\beta$-ի և $\rho\cos\gamma$-ի [1,թ1], իսկ մյուս կողմից՝ $(x-x_0)$-ի, $(y-y_0)$-ի և $(z-z_0)$-ի [1,u 25], հետևաբար տեղի ունեն



նկ.26

$$x-x_0=\rho\cos\alpha,\ \ y-y_0=\rho\cos\beta,\ \ z-z_0=\rho\cos\gamma$$

կամ որ նույնն է՝

$$x=x_0+\rho\cos\alpha,\ \ y=y_0+\rho\cos\beta,\ \ z=z_0+\rho\cos\gamma \qquad (1)$$

հավասարությունները: Նկատելով, որ l ճառագայթի վրայով M_0 կետից M կետ տեղափոխվելիս $u(M)$ ֆունկցիայի ստացած

$$\Delta u(M_0)=u(M)-u(M_0)=u(x_0+\rho\cos\alpha,\ y_0+\rho\cos\beta,\ z_0+\rho\cos\gamma)-u(x_0,y_0,z_0) \qquad (2)$$

աճի արտահայտության մեջ միայն ρ-ի մեծությունն է փոփոխվում, ընդ որում ρ-ն զրոյի ձգտելիս այդ աճը ձգտում է զրոյի՝ կազմենք $\Delta u(M_0)/\rho$ քանորդը և ենթադրելով, որ ρ-ն զրոյի ձգտելիս այն ունի սահման՝ հաշվենք այդ սահմանը.

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta u(M_0)}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{u(x_0+\rho\cos\alpha,y_0+\rho\cos\beta,z_0+\rho\cos\gamma)-u(x_0,y_0,z_0)}{\rho}: \qquad (3)$$

Սահմանում 5: *Եթե l ուղղությամբ $u(M)$ ֆունկցիայի ստացած $\Delta u(M)$ աճի և այդ աճն առաջացնող ρ փոփոխականի հարաբերությունը, ρ-ն զրոյի ձգտելիս ունի սահման, ապա այդ սահմանը կոչվում է $u(M)$ ֆունկցիայի ածանցյալ l ուղղությամբ և նշանակվում է $\partial u/\partial l$, u'_l պայմանանշաններից որևէ մեկով:*

Այսպիսով, համածայն բերված սահմանման, եթե M_0 կետում l ուղղությամբ $u(M)$ ֆունկցիայի ածանցյալը գոյություն ունի, ապա այն արտահայտվում է

$$u'_l(M_0)=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta u(M_0)}{\rho} \tag{4}$$

հավասարությամբ:

Ակնհայտ է, որ (3) սահմանը կախված է ինչպես M_0 կետի կոորդինատներից, այնպես էլ կոորդինատական Ox, Oy և Oz առանցքների հետ համապատասխանաբար α, β և γ անկյուններ կազմող l ուղղությունից:

$u'_l(M_0)$ ածանցյալը բնութագրում է սկալյար դաշտի վարքը M_0 կետում. այն ցույց է տալիս $u(M)$ ֆունկցիայի փոփոխման արագությունը, երբ M կետը շարժվում է M_0 կետից l ճառագայթի ուղղությամբ: Պարզ է, որ եթե D տիրույթում որոշված $u(M)=u(x,y,z)$ ֆունկցիան այդ տիրույթի ներքին M_0 կետում l ճառագայթի ուղղությամբ ունի դրական (բացասական) ածանցյալ, ապա նշված կետի բավականաչափ փոքր շրջակայքում այն տրված ճառագայթի ուղղությամբ աճում է (նվազում է) [30,1]: Պարզ է նաև, որ որքան $u'_l(M_0)$ ածանցյալի բացարձակ արժեքը մեծ լինի, այնքան $u(M)$ ֆունկցիան l ճառագայթի ուղղությամբ արագ կաճի (կամ արագ կնվազի):

Այսպիսով, D տիրույթում որոշված $u(M)$ ֆունկցիայի $u'_l(M_0)$ ածանցյալի բացարձակ արժեքի մեծությամբ որոշվում է նշված տիրույթի M_0 կետում l ուղղությամբ $u(M)$ ֆունկցիայի փոփոխման արագության մեծությունը, իսկ այդ ածանցյալի նշանով՝ տրված ֆունկցիայի փոփոխման բնույթը՝ աճումը կամ նվազումը:

Եթե մասնավոր դեպքում l ճառագայթի ուղղությունը համընկնում է, օրինակ, կոորդինատական Ox առանցքի դրական ուղղությանը, այսինքն, եթե $\alpha=0^\circ$, $\beta=\gamma=90^\circ$, ապա (3) հավասարությունն ընդունում է

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta u(M_0)}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{u(x_0+\rho,y_0,z_0)-u(x_0,y_0,z_0)}{\rho} \tag{3'}$$

կամ որ նույնն է՝

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} \qquad (3^{\prime})$$

տեսքը:

Կարող ենք նույն ձևով համոզվել, որ $\partial u/\partial y$ և $\partial u/\partial z$ մասնակի ածանցյալները հանդիսանում են l ուղղությամբ $u(M)$ ֆունկցիայի ածանցյալի մասնավոր դեպքեր:

$u(x,y,z)$ ֆունկցիայի ածանցյալը l ուղղությամբ հաշվելու համար կօգտվենք հետևյալ թեորեմից՝

Թեորեմ 1: *D տիրույթում որոշված $u(x,y,z)$ ածանցելի ֆունկցիան ցանկացած l ուղղությամբ ունի*

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \qquad (5)$$

բանաձևով արտահայտվող ածանցյալ, որտեղ $\cos\alpha$ -ն, $\cos\beta$ -ն և $\cos\gamma$ -ն l ուղղության ուղղորդ կոսինուսներն են՝:

Ապացույց: Թեորեմն ապացուցելու համար նորից D տիրույթում որոշված $u(x,y,z)$ ֆունկցիայով որոշվող սկալյար դաշտում վերցնենք M_0 և M կետերը (նկ.26) և հաշվի առնելով, որ M կետը l ճառագայթի վրայով շարժվելիս դիտարկվող ֆունկցիայի արտահայտության մեջ միայն ρ-ն է փոփոխվում՝ այդ ֆունկցիան ներկայացնենք

$$u(M)=u(x_0+\rho\cos\alpha,\ y_0+\rho\cos\beta,\ z_0+\rho\cos\gamma)=u[x(\rho),y(\rho),z(\rho)]$$

կամ պարզապես

$$u(x_0+\rho\cos\alpha,\ y_0+\rho\cos\beta,\ z_0+\rho\cos\gamma)=u(\rho) \qquad (6)$$

տեսքով: Վերջին հավասարության մեջ ընդունելով $\rho=0$.

$$u(x_0,y_0,z_0)=u(0)$$

և ենթադրելով, որ $u(\rho)$ ֆունկցիան $\rho=0$ կետում ունի ածանցյալ՝ (3) հավասարությունը ներկայացնենք

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta u(M_0)}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{u(\rho)-u(0)}{\rho}$$

կամ որ նույնն է՝

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=u'(0) \qquad (3^{\prime\prime})$$

---

*) Ինչպես գիտենք [9,(2')], l ուղղության ուղղորդ կոսինուսներն այդ ուղղության միավոր վեկտորի կոորդինատներն են [1,u7,(1)], [3,(11)].

$$\vec{l}_0=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}:$$

տեսքով: Այնուհետև օգտվելով մի քանի փոփոխականի բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնից [48,(5)] և նկատի ունենալով, որ թեորեմի ձևակերպման մեջ նշված պայմանը տեղի ունենալու դեպքում

$$u(\rho)=u[x(\rho),y(\rho),z(\rho)]$$

ֆունկցիան ունի ածանցյալ՝ կունենանք

$$u'(\rho)=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{d\rho}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{d\rho}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{d\rho}: \qquad (7)$$

Նկատի ունենալով (1) հավասարությունները՝ $u'(\rho)$ ածանցյալի համար կստանանք [27,(5)], [28,(9)]

$$u'(\rho)=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma: \qquad (7')$$

$u'(\rho)$ ածանցյալի համար ստացած բանաձևում ընդունելով $\rho=0$ և օգտվելով (3″) հավասարությունից՝ կունենանք

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}\cos\gamma: \qquad (7'')$$

Վերջին հավասարության մեջ բաց թողնելով M_0 ինդեքսը՝ կստանանք (5) բանաձևը:

Իպա

Մասնավոր դեպքում (5) բանաձևում ընդունելով $\alpha=0^\circ$, $\beta=\gamma=90^\circ$, կունենանք

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}: \qquad (8)$$

Կարող ենք նույն ձևով համոզվել, որ l ճառագայթի ուղղությունը կոորդինատական Oy կամ Oz առանցքի ուղղությանը համընկնելու դեպքում $\partial u/\partial l$ ածանցյալը համապատասխանաբար կհամընկնի $\partial u/\partial y$ կամ $\partial u/\partial z$ մասնակի ածանցյալին:

(5) բանաձևից երևում է, որ $u(M)$ ֆունկցիայի ածանցյալը l ուղղության հակառակ l^- ուղղությամբ հավասար է այդ ֆունկցիայի ածանցյալին l ուղղությամբ՝ վերցրած հակառակ նշանով:

Իրոք, ենթադրելով, որ l^--ը l ուղղության հակառակ ուղղությունն է՝ (5) բանաձևից կստանանք

$$\frac{\partial u}{\partial l^-}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\alpha+180^\circ)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(\beta+180^\circ)+\frac{\partial u}{\partial z}\cos(\gamma+180^\circ)=-\frac{\partial u}{\partial l}:$$

Իպա

ԳԼՈՒԽ XIV

Այսպիսով, l^- և l հակառակ ուղղությունների համար տեղի ունի

$$\frac{\partial u}{\partial l^-} = -\frac{\partial u}{\partial l} \tag{9}$$

հավասարությունը:

Ինչպես տեսնում ենք, որևէ ուղղության հակադիր ուղղությամբ սկալյար դաշտը որոշող ֆունկցիայի փոփոխման արագությունը մնում է նույնը, իսկ բնույթը փոխվում է: Այսինքն, եթե որևէ ուղղությամբ $u(M)$ ֆունկցիան ինչ որ արագությամբ աճում է, ապա այդ ուղղության հակառակ ուղղությամբ այն նույն արագությամբ նվազում է:

Օրինակ 3: Հաշվել $u(x,y,z) = xyz$ ֆունկցիայի ածանցյալի արժեքն $A(5;1;2)$ կետում՝ A կետը $B(7;-1;3)$ կետին միացնող ուղղությամբ:

Լուծում: Դիտարկվող խնդիրը լուծելու համար նախ A կետում հաշվենք տրված ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալների արժեքները [46,u15], [27,(7)].

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A = yz\big|_A = 2, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A = xz\big|_A = 10, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A = xy\big|_A = 5:$$

Այնուհետև գտնենք $\overrightarrow{AB}$ վեկտորի ուղղության ուղղորդ կոսինուսները.

$$\cos\alpha = \frac{2}{3}, \quad \cos\beta = -\frac{2}{3}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{3}:$$

Խնդրի լուծումն ավարտելու համար մնում է օգտվել (5) բանաձևից*).

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_A = 2\cdot\frac{2}{3} + 10\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + 5\cdot\frac{1}{3} = -\frac{11}{3}:$$

Այն փաստը, որ որոնելի ածանցյալի արժեքն A կետում բացասական է, խոսում է այն մասին, որ դիտարկվող ֆունկցիան A կետում $\overrightarrow{AB}$ վեկտորի ուղղությամբ նվազում է:

Սկալյար դաշտի մեկ այլ կարևոր բնութագրիչի՝ սկալյար դաշտի գրադիենտին ծանոթանալու համար նախ նկատենք, որ օգտվելով կոորդինատներով տրված երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալի բանաձևից [4,(7)]՝ կարող ենք (5) բանաձևը ներկայացնել

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \vec{A}\cdot\vec{l}_0 \tag{5'}$$

տեսքով, որտեղ

$$\vec{A} = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}$$

վեկտորը կախված է միայն $M(x,y,z)$ կետի կոորդինատներից և հետևաբար կախված չէ l ուղղությունից, իսկ $\vec{l}_0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$-ն l ուղղության միավոր վեկտորն է և կախված չէ M կետի կոորդինատներից:

---

*) l ուղղությունն ունի $\overrightarrow{AB}$ վեկտորի ուղղությունը:

Սահմանում 6:

$$\vec{A}=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} \qquad (10)$$

վեկտորը կոչվում է $u(x,y,z)$ ֆունկցիայով որոշվող սկալյար դաշտի գրադիենտ $M(x,y,z)$ կետում և նշանակվում է $gradu$ պայմանանշանով.

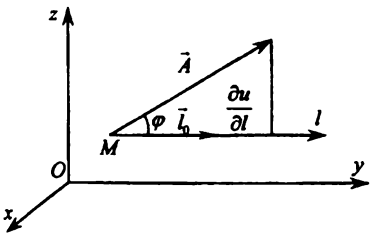
$$\vec{A}=gradu: \qquad (11)$$

Այսպիսով, որևէ տիրույթում տրված $u(x,y,z)$ ֆունկցիայով որոշվող սկալյար դաշտի յուրաքանչյուր կետի համապատասխանում է որոշակի վեկտոր՝ $u(x,y,z)$ ֆունկցիայի գրադիենտը:

Օգտվելով սկալյար դաշտի գրադիենտի հասկացությունից, կարող ենք (5՝) հավասարությունը մեկնաբանել հետևյալ կերպ՝

$u(x,y,z)$ ֆունկցիայի ածանցյալի արժեքը տրված l ուղղությամբ և տրված M կետում հավասար է այդ կետում $u(x,y,z)$ ֆունկցիայով որոշվող սկալյար դաշտի գրադիենտի և նշված ուղղության միավոր վեկտորի սկալյար արտադրյալին:

Հաշվի առնելով, որ որևէ վեկտորի և միավոր վեկտորի սկալյար արտադրյալը հավասար է տրված վեկտորի պրոյեկցիային՝ միավոր վեկտորի ուղղության վրա [4(2՝)] և (5՝) հավասարությունը ներկայացնելով



Նկ.27

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\text{պր}_l\vec{A} \qquad (5^{\prime\prime})$$

կամ որ նույնն է [1,թ1].

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\left|\vec{A}\right|\cos\varphi \qquad (5^{\prime\prime\prime})$$

տեսքով, որտեղ φ-ն (նկ.27) $u(M)$ ֆունկցիայով տրվող սկալյար դաշտի $M(x,y,z)$ կետում տարված $\vec{A}$ վեկտորի և l ուղղության կազմած անկյունն է՝ եզրակացնում ենք, որ դիտարկվող դաշտի յուրաքանչյուր M կետում $u(M)$ ֆունկցիայի ածանցյալը որևէ ուղղությամբ հավասար է այդ նույն կետում սկալյար դաշտի գրադիենտի պրոյեկցիային՝ ածանցման ուղղության վրա: Վերջին հավասարությունից երևում է նաև, որ սկալյար դաշտի յուրաքանչյուր կետում $\partial u/\partial l$ ածանցյալն իր մեծագույն արժեքը ստանում է $\varphi=0$ դեպքում, այսինքն, երբ այդ կետում ածանցման ուղղությունը համընկնում է սկալյար դաշտի գրադիենտի ուղղությանը, ընդ որում այդ մեծագույն արժեքը տրվում է [4,(8՝)]

$$\max\frac{\partial u}{\partial l}=\left|gradu\right|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} \qquad (12)$$

բանաձևով:

ԳԼՈՒԽ XIV

Ամփոփելով սկալյար դաշտի գրադիենտին վերաբերող դատողությունները՝ հանգում ենք հետևյալ կարևոր եզրակացությանը՝

Սկալյար դաշտի յուրաքանչյուր կետում տարված գրադիենտը մի վեկտոր է, որի ուղղությունը համընկնում է այդ դաշտը որոշող ֆունկցիայի ամենաարագ աճման ուղղությանը, իսկ մեծությունը՝ նույն ֆունկցիայի աճման ամենամեծ արագությանը:

Հասկանալի է, որ սկալյար դաշտի գրադիենտի հակառակ ուղղությունն էլ համընկնում է այդ դաշտը որոշող ֆունկցիայի ամենաարագ նվազման ուղղությանը:

Շարադրված դատողությունները ցույց են տալիս, որ սկալյար դաշտի գրադիենտը կախված չէ կոորդինատական համակարգի ընտրությունից, այսինքն այն օժտված է անփոփոխելիության (ինվարիանտության) հատկությամբ:

Օգտվելով ֆունկցիայի աճանցյալի համապատասխան հատկություններից, կարող ենք հեշտությամբ համոզվել, որ սկալյար դաշտի գրադիենտն օժտված է հետևյալ հատկություններով [28,p1,p2,71,p4].

I. $grad[u_1(M)+u_2(M)]=grad\,u_1(M)+grad\,u_2(M),$ (13)

II. $grad[cu(M)]=c\,grad\,u(M) \quad (c=const),$ (14)

III. $grad[u_1(M)u_2(M)]=u_2(M)\,grad\,u_1(M)+u_1(M)\,grad\,u_2(M),$ (15)

IV. $grad\,f[u(M)]=f'(u)\,grad\,u(M),$ (16)

որտեղ $u(M)$ *-ը,* $u_1(M)$ *-ը,* $u_2(M)$ *-ը և* $f(u)$ *-ն տրված ֆունկցիաներ են:*

Օրինակ 4: Գտնել

$$u(x,y,z)=x\sin z-y\cos z$$

ֆունկցիայի ամենաարագ փոփոխման ուղղությունը կոորդինատական սկզբնակետում:

Լուծում: Դիտարկվող խնդիրը լուծելու համար նախ հաշվենք տրված ֆունկցիայի մասնակի աճանցյալների արժեքները O կետում, որտեղ O-ն կոորդինատների սկզբնակետն է [27(10),(12)].

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_O=\sin z\big|_O=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_O=-\cos z\big|_O=-1,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_O=(x\cos z+y\sin z)\big|_O=0:$$

Այնուհետև օգտվելով (10) բանաձևից՝ տրված ֆունկցիայով որոշվող սկալյար դաշտի գրադիենտի համար դիտարկվող կետում կունենանք

$$grad\,u\big|_O=-\vec{j}:$$

Քանի որ $-\vec{j}$ վեկտորի ուղղությունը համընկնում է օրդինատների առանցքի բացասական ուղղությանը, ուստի վերևում բերված եզրակացության համաձայն տրված ֆունկցիայի ամենաարագ փոփոխման ուղղությունը կոորդինատների սկզբնակետում համընկնում է օրդինատների առանցքի բացասական ուղղությանը:

Նշենք նաև, որ դիտարկվող ֆունկցիայի աճման ամենամեծ արագությունը կոորդինատների սկզբնակետում հավասար է մեկի, քանի որ

$$\left|-\vec{j}\right|=1:$$

§75. Վեկտորական դաշտ: Վեկտորական դաշտի հոսքը և նրա ֆիզիկական իմաստը հոսող հեղուկի արագությունների դաշտում: Գաուս-Օստրոգրադսկու բանաձևը:

Սահմանում 1: *Կասենք, որ D տիրույթում տրված է վեկտորական դաշտ, եթե այդ տիրույթի յուրաքանչյուր կետում տրված է որևէ $\vec{A}$ վեկտորական մեծության որոշակի արժեք:*

Սահմանում 2: *Եթե $\vec{A}$ վեկտորական մեծությունը բաշխված է հարթ տիրույթով, ապա համապատասխան վեկտորական դաշտը կոչվում է հարթ վեկտորական դաշտ:*

Նշենք, որ մենք կդիտարկենք միայն ստացիոնար [74,u4] վեկտորական դաշտեր, այսինքն կենթադրենք, որ դաշտը որոշող վեկտորական մեծության արժեքները կախված չեն ժամանակից:

Քանի որ կետից կետ անցնելիս $\vec{A}$ վեկտորական մեծությունը կարող է փոփոխվել, հետևաբար այն ֆունկցիա է D տիրույթի կետերից.

$$\vec{A} = \vec{A}(M):$$

Հասկանալի է, որ ընդհանուր դեպքում երկչափ տիրույթում տրված $\vec{A}(M)$ վեկտորական մեծությունը երկու փոփոխականի վեկտոր ֆունկցիա է.

$$\vec{A}(M) = \vec{A}(x,y) = A_x(x,y)\vec{i} + A_y(x,y)\vec{j}, \qquad (1)$$

իսկ եռաչափ տիրույթում՝ երեք փոփոխականի վեկտոր ֆունկցիա.

$$\vec{A}(M) = \vec{A}(x,y,z) = A_x(x,y,z)\vec{i} + A_y(x,y,z)\vec{j} + A_z(x,y,z)\vec{k}, \qquad (1')$$

որտեղ A_x-ը, A_y-ը և A_z-ը $\vec{A}$ վեկտորի կոորդինատներն են [2,u9], [3,(11)]:

Այսպիսով, եթե որևէ տիրույթում ունենք վեկտորական դաշտ, ապա այդ տիրույթում ունենք տրված դաշտը որոշող վեկտոր ֆունկցիա: Մյուս կողմից, ցանկացած վեկտոր ֆունկցիա, իր որոշման տիրույթում նկարագրում է վեկտորական դաշտ:

Օրինակ 1: ա) Քանի որ երկրագնդի «մերձակայքի» յուրաքանչյուր կետում տեղադրված նյութական կետի վրա ազդում է երկրագնդի ձգողության ուժը, ուստի այդ տարածության մեջ ունենք ծանրության ուժերի վեկտորական դաշտ:

բ) Հոսող հեղուկով զբաղեցրած տարածական D տիրույթում ունենք հեղուկ մասնիկների արագությունների վեկտորական դաշտ:

գ) Եթե D տիրույթում տրված $u(M)$ ֆունկցիայով որոշվող սկալյար դաշտի յուրաքանչյուր M կետին համապատասխանեցնենք $grad u|_M$ վեկտորը, ապա նույն տիրույթում կունենանք նաև վեկտորական դաշտ:

Այսպիսով, որևէ տիրույթում տրված յուրաքանչյուր սկալյար դաշտ նույն տիրույթում առաջացնում է այդ դաշտը որոշող ֆունկցիայի գրադիենտով տրվող վեկտորական դաշտ:

Սահմանում 3: *$\vec{A}(M)$ վեկտոր ֆունկցիայով տրվող վեկտորական դաշտի մեջ ընկած այն l կորը, որի յուրաքանչյուր կետում այդ կորին տարած շոշափողի ուղղությունը համընկնում է վերցրած կետի համապատասխան*

$\vec{A}(M)$ վեկտորի ուղղությանը, կոչվում է $\vec{A}(M)$ վեկտոր ֆունկցիայով որոշվող վեկտորական դաշտի վեկտորական գիծ:

Նշենք, որ վեկտորական գծերն ունեն ֆիզիկական իմաստ: Օրինակ, հոսող հեղուկի մասնիկների արագությունների վեկտորական դաշտում վեկտորական գծերը հեղուկ մասնիկների հետագծերն են: Վեկտորական գծերի օգնությամբ վեկտորական դաշտը պատկերվում է երկրաչափորեն և որոշ դեպքերում այդ գծերը կարող են բնութագրել տրված դաշտին կապված ֆիզիկական մեծությունների էական հատկություններ:

Այժմ (1՝) վեկտոր ֆունկցիայով որոշվող վեկտորական դաշտում դիտարկենք երկկողմանի որևէ S մակերևույթ [73,u1], այդ մակերևույթի վրա ընտրենք որևէ կողմ և ընտրած կողմին տարած նորմալը նշանակենք $\vec{n}$ -ով [49,u5]:

Սահմանում 4: *$\vec{A}(M)$ վեկտոր ֆունկցիայով որոշվող վեկտորական դաշտի հոսք՝ այդ դաշտի մեջ ընկած երկկողմանի S մակերևույթի միջով (դեպի նրա ընտրված կողմը), կոչվում է տրված մակերևույթով տարածված այն մակերևույթային ինտեգրալը, որի ենթինտեգրալ ֆունկցիան $\vec{A}(M)$ վեկտորի և S մակերևույթի ընտրված կողմի նորմալի միավոր վեկտորի սկալյար արտադրյալն է:*

Այսպիսով, համաձայն բերված սահմանման, $\vec{A}(M)$ վեկտոր ֆունկցիայով որոշվող վեկտորական դաշտի հոսքը եկկողմանի S մակերևույթի միջով (դեպի նրա ընտրված կողմը) մի սկալյար մեծություն է, որն արտահայտվում է առաջին սեռի հետևյալ մակերևույթային ինտեգրալի միջոցով [72,u3], [4,(7)].

$$k = \iint_{(S)} \vec{A}(M)\cdot\vec{n}^0 ds = \iint_{(S)} (A_x\cos\alpha + A_y\cos\beta + A_z\cos\gamma)ds, \qquad (2)$$

որտեղ $\vec{n}^0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ -ն S մակերևույթի ընտրված կողմի նորմալի ($\vec{n}$) միավոր վեկտորն է:

Օրինակ 2: Հաշվել

$$\vec{A}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

վեկտորական դաշտի հոսքը

$$x + y + z = 1 \qquad (ա)$$

հավասարումն ունեցող հարթության այն մասի միջով, որն ընկած է կոորդինատական առաջին օկտանտում (հարթության այն նորմալի ուղղությամբ [8,u2], որը կոորդինատական Oz առանցքի հետ կազմում է սուր անկյուն):

Լուծում: Գտնելով տրված հարթության (նկ.24), կոորդինատական Oz առանցքի հետ սուր անկյուն կազմող նորմալի միավոր վեկտորը [1,(1)].

$$\vec{n}^* = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

և օգտվելով (2) բանաձևից՝ մեզ հետաքրքրող հոսքի համար կունենանք

---

*) Վեկտորական դաշտի հոսք անվանումը կապված է հիդրոմեխանիկական մի խնդրի, որը կդիտարկենք ներքևում:

$$k=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{(S)}(x+y+z)ds,$$

որտեղ S-ն (ա) հավասարումն ունեցող հարթության, կոորդինատական առաջին օկտանտում ընկած մասն է:

Այնուհետև օգտվելով առաջին սեռի մակերևույթային ինտեգրալի հաշվման բանաձևից՝ կստանանք [72,(6)], [35,2°,3°], [41,(6)]

$$k=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{P}(x+y+1-x-y)\sqrt{3}dxdy=\int\limits_0^1\left[\int\limits_0^{1-x}dy\right]dx=\frac{1}{2},$$

որտեղ P-ն դիտարկվող մակերևույթի պրոյեկցիան է կոորդինատական Oxy հարթության վրա:

Օգտվելով երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալի սահմանումից [4,u1,(2')]՝ կարող ենք (2) ինտեգրալը ներկայացնել

$$k=\iint\limits_{(S)}\left|\vec{A}\right|\left|\vec{n}_0\right|\cos\varphi\, ds$$

կամ որ նույնն է՝

$$k=\iint\limits_{(S)}A_n ds \qquad (2')$$

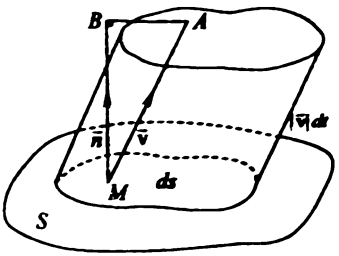
տեսքով, որտեղ φ-ն $\vec{A}$ և $\vec{n}$ վեկտորների կազմած անկյունն է, իսկ A_n-ը՝ $\vec{A}$ վեկտորի պրոյեկցիան $\vec{n}$ նորմալի ուղղության վրա.

$$A_n=\text{պր}_{\vec{n}}\vec{A}: \qquad (3)$$

Նշենք, որ եթե վեկտորական դաշտի հոսքի սահմանման մեջ մակերևույթի մի կողմը փոխարինենք մյուսով, այսինքն, եթե դիտարկվող մակերևույթի նորմալի ուղղությունը փոխենք հակադիր ուղղությամբ, ապա այդ մակերևույթի միջով անցնող վեկտորական դաշտի հոսքը կփոխի իր նշանը:

Ֆիզիկական խնդիրներում վեկտորական դաշտի հոսքն ունի որոշակի ֆիզիկական իմաստ:

Դիցուք երկկողմանի S մակերևույթը գտնվում է հոսող հեղուկով զբաղեցրած տարածական տիրույթում, ընդ որում ենթադրվում է, որ հեղուկը կարող է ազատ հոսել այդ մակերևույթի միջով:



Նկ.28

Դնենք անվերջ փոքր dt ժամանակամիջոցում որոշակի ուղղությամբ S մակերևույթով հոսող հեղուկի քանակությունը գտնելու խնդիրը:

Դրված խնդիրը լուծելու համար դիտարկվող S մակերևույթի վրա առանձնացնենք մակերևույթի որևէ ds տարր (նկ.28), ընտրենք այդ տարրի որոշակի կողմ և այդ կողմին տարած նորմալը նշանակենք $\vec{n}$-ով:

Այնուհետև, ենթադրելով, որ $[t, dt]$ ժամանակամիջոցում մակերևույթի ds

տարրի միջով անցնող հեղուկ մասնիկների արագությունները հաստատուն են և հավասար են $\bar{v}$-ի, կստանանք, որ նշված ժամանակամիջոցում մակերևույթի առանձնացված տարրի միջով անցնող հեղուկի քանակությունը ամբողջությամբ կլցնի ds հիմքով և $h = v_n dt$ բարձրությամբ գլանը, որտեղ v_n-ը $\bar{v}$ վեկտորի պրոյեկցիան է մակերևույթի ds տարրին տարած նորմալի ուղղության վրա:

Հեղուկի խտությունը նշանակելով ρ-ով (որի մեծությունը ընդհանուր դեպքում կարող է կախված լինել ժամանակից*) և հեղուկ մասնիկների կոորդինատներից), dt ժամանակամիջոցում մակերևույթի ds տարրի միջով անցնող հեղուկ զանգվածի համար կստանանք

$$dm = \rho ds\, v_n dt \tag{4}$$

բանաձևը, որտեղ $ds\, v_n dt$ արտադրյալը ds հիմքով և $h = v_n dt$ բարձրությամբ գլանի ծավալն է: Հասկանալի է, որ դրված խնդրի լուծումն ավարտելու համար մնում է (4) հավասարությունը ինտեգրել ըստ S մակերևույթի: Կատարելով նշված ինտեգրումը, dt ժամանակամիջոցում S մակերևույթի միջով անցնող հեղուկ զանգվածի համար վերջնականապես կունենանք

$$m = dt \iint_{(S)} \rho v_n ds: \tag{4'}$$

Եթե, մասնավոր դեպքում ընդունենք $\rho = 1$, ապա միավոր ժամանակամիջոցում S մակերևույթով, ընտրված ուղղությամբ անցնող հեղուկ զանգվածի համար կստանանք

$$m = \iint_{(S)} v_n ds: \tag{4''}$$

Համեմատելով (4″) և (2′) բանաձևերը՝ եզրակացնում ենք, որ (4″) հավասարության աջ կողմում գրված ինտեգրալը, այսինքն միավոր ժամանակամիջոցում երկկողմանի S մակերևույթով որոշակի ուղղությամբ անցնող միավոր խտությամբ հեղուկի քանակությունը իրենից ներկայացնում է հոսող հեղուկով զբաղեցրած տարածական տիրույթում հեղուկ մասնիկների արագությունների $\bar{v}(M)$ վեկտորական դաշտի հոսքը տրված մակերևույթի միջով:

Անցնելով Գաուս-Օստրոգրադսկու բանաձևի արտածմանը, նախ հիշեցնենք, որ կորագիծ ինտեգրալների տեսության մեջ մենք ծանոթացել ենք Գրինի բանաձևին [71,(4)], որն, ինչպես գիտենք, կապ է հաստատում որևէ փակ (հարթ) կորով տարածված երկրորդ սեռի ընդհանուր տեսքի կորագիծ ինտեգրալի [70,u4] և այդ կորով սահմանափակված տիրույթով տարածված կրկնակի ինտեգրալի միջև [66,u4]:

Գաուս-Օստրոգրադսկու բանաձևը հնարավորություն է տալիս S փակ մակերևույթով տարածված երկրորդ սեռի ընդհանուր տեսքի մակերևույթա-

*) Ըստ էության մենք դիտարկում ենք հեղուկի ոչ ստացիոնար շարժում:

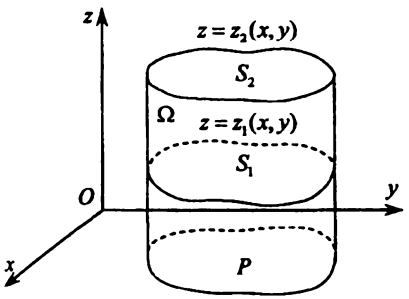
յին ինտեգրալի [73,u6] հաշվումը փոխարինել այդ մակերևույթով սահմանափակված տիրույթով տարածված եռակի ինտեգրալի հաշվումով:

Թեորեմ 1: *(Գաուս-Օստրոգրադսկի) Եթե $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ և $R(x,y,z)$ ֆունկցիաներն իրենց առաջին կարգի $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$, $\partial R/\partial z$ մասնակի ածանցյալների հետ մեկտեղ որոշված են և անընդհատ S փակ մակերևույթով սահմանափակված Ω տարածական կանոնավոր տիրույթում, ապա տեղի ունի*[*]

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\oiint_{(S)}Pdydz+Qdxdz+Rdxdy, \qquad (5)$$

բանաձևը, որտեղ $\oiint_S$ պայմանանշանը նշանակում է մակերևույթային ինտեգրալ՝ տարածված S փակ մակերևույթի արտաքին կողմով:

Ապացույց: Ձևակերպած թեորեմն ապացուցելու համար, ենթադրենք Ω կանոնավոր տիրույթը եզրերից սահմանափակված է կոորդինատական Oz առանցքին զուգահեռ ծնիչներով S_0 գլանային մակերևույթով, իսկ ներքևից և վերևից՝ համապատասխանաբար S_1 և S_2 մակերևույթներով (նկ.29): Ենթադրելով նաև, որ S_1 և S_2 մակերևույթների հավասարումները համապատասխանաբար ունեն



նկ.29

$$z=z_1(x,y) \text{ և } z=z_2(x,y)$$

տեսքը՝ կունենանք [68,(21)]

$$\iiint_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}dxdydz=\iint_{P}dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}dz=\iint_{P}R(x,y,z)\Big|_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}dxdy=$$

$$=\iint_{P}\{R[x,y,z_2(x,y)]-R[x,y,z_1(x,y)]\}dxdy=$$

$$=\iint_{P}R[x,y,z_2(x,y)]dxdy-\iint_{P}R[x,y,z_1(x,y)]dxdy,$$

որտեղ P-ն Ω տիրույթի պրոյեկցիան է Oxy հարթության վրա:

Ստացված կրկնակի ինտեգրալները փոխարինելով երկրորդ սեռի համապատասխան մակերևույթային ինտեգրալներով՝ կունենանք [73,(6),(6')]

$$\iiint_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}dxdydz=\iint_{(S_2)}Rdxdy+\iint_{(S_1)}Rdxdy, \qquad (6)$$

---

*) Գրության պարզության համար $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ և $R(x,y,z)$ ֆունկցիաների կախվածությունը x, y և z փոփոխականներից բաց են թողնում:

որտեղ ինտեգրումը կատարվում է S_2 մակերևույթի վերևի կողմով և S_1 մակերևույթի ներքևի կողմով: Վերջին հավասարության աջ կողմին ավելացնելով երկրորդ սեռի

$$\iint\limits_{(S_0)} Rdxdy$$

մակերևույթային ինտեգրալը և հաշվի առնելով, որ այդ ինտեգրալը հավասար է զրոյի [73,(7)]՝ կստանանք

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \oiint\limits_{(S)} Rdxdy, \tag{7}$$

որտեղ S-ը S_0, S_1 և S_2 մակերևույթների միավորումից առաջացած փակ մակերևույթն է (այն սահմանափակում է Ω տիրույթը):

Նույն ձևով ստանալով

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \oiint\limits_{(S)} Pdydz, \quad \iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \oiint\limits_{(S)} Qdxdy \tag{8}$$

բանաձևերը և անդամ առ անդամ գումարելով (7) և (8) հավասարությունները՝ կստանանք Գաուս-Օստրոգրադսկու բանաձևը:

Իպա

Օգտվելով երկկողմանի S ողորկ մակերևույթի [72] վրա որոշված $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ և $R(x,y,z)$ անընդհատ ֆունկցիաների, այդ մակերևույթով տարածված առաջին և երկրորդ սեռի մակերևույթային ինտեգրալները միմյանց կապող

$$\iint\limits_{(S)} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint\limits_{(S)} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds \tag{9}$$

բանաձևից (որը բերում ենք առանց ապացույցի), որտեղ $\cos\alpha$-ն, $\cos\beta$-ն և $\cos\gamma$-ն դիտարկվող մակերևույթի ընտրված կողմին տարած նորմալի ուղղորդ կոսինուսներն են, կարող ենք (5) բանաձևը ներկայացնել նաև

$$\iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \oiint\limits_{(S)} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds \tag{5'}$$

տեսքով:

Օրինակ 2: Հաշվել երկրորդ սեռի ընդհանուր տեսքի

$$I = \oiint\limits_{(S)} xdydz + ydxdz + zdxdy$$

մակերևույթային ինտեգրալը, որտեղ S-ը $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ հավասարումն ունեցող գնդային մակերևույթի [10,1°] արտաքին կողմն է:

Լուծում: Օգտվելով (5) բանաձևից և եռակի ինտեգրալի չորրորդ հատկությունից [68,4°], կունենանք

$$I = \iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) dxdydz = \iiint\limits_{\Omega} 3dxdydz = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^3 :$$

§76. Վեկտորական դաշտի ցրումը (դիվերգենցիան): Խողովակաձև դաշտ: Ստոքսի բանաձևը: Վեկտորական դաշտի մրրիկը և շրջապտույտը:

$\vec{A}(M)$ վեկտոր ֆունկցիայով որոշվող D վեկտորական դաշտում վերցնենք որևէ M կետ, այն շրջափակենք այնպիսի S փակ մակերևույթով, որն ամբողջությամբ պատկանի D տիրույթին, հաշվենք տրված վեկտորական դաշտի հոսքը S մակերևույթի միջով [75,u4] և դիտարկենք այդ հոսքի ու S մակերևույթով սահմանափակված Ω տիրույթի v ծավալի հարաբերությունը.

$$\frac{1}{v}\oiint_{(S)} A_n(M)ds: \qquad (1)$$

Հեղուկ մասնիկների արագությունների վեկտորական դաշտում (1) հարաբերությունը ցույց է տալիս միավոր ծավալում, միավոր ժամանակամիջոցում արտադրվող միավոր խտությամբ հեղուկի քանակությունը [75,(4')] կամ, ինչպես ասում են, աղբյուրի հզորությունը:

Սահմանում 1: *$\vec{A}(M)$ վեկտոր ֆունկցիայով տրվող վեկտորական դաշտի ցրում՝ այդ դաշտի M կետում, կոչվում է նշված կետը շրջափակող որևէ S փակ մակերևույթի միջով $\vec{A}(M)$ վեկտոր ֆունկցիայի հոսքի և դիտարկվող մակերևույթով սահմանափակված տիրույթի ծավալի հարաբերության սահմանը, երբ S մակերևույթը կծկվելով ձգտում է M կետին:*

Համաձայն բերված սահմանման՝ $\vec{A}(M)$ վեկտոր ֆունկցիայով որոշվող վեկտորական դաշտի ցրումը նշանակելով $\operatorname{div} A(M)$ պայմանանշանով, կունենանք

$$\operatorname{div}\vec{A}(M) = \lim_{S\to M}\frac{1}{v}\oiint_{(S)} A_n(M)ds: \qquad (2)$$

Ինչպես տեսնում ենք, վեկտորական դաշտի ցրումը սկալյար մեծություն է և այդ մեծության սահմանումը կախված չէ կոորդինատական համակարգի ընտրությունից: Նկատենք նաև, որ որևէ տիրույթում տրված յուրաքանչյուր վեկտորական դաշտ նույն տիրույթում առաջացնում է այդ դաշտը որոշող վեկտոր ֆունկցիայի ցրումով որոշվող սկալյար դաշտ:

Սահմանում 2: *Վեկտորական դաշտի M կետը կոչվում է աղբյուր (կլանիչ), եթե այդ կետում դիտարկվող վեկտորական դաշտի ցրումը դրական (բացասական) է:*

Թեորեմ 1: *Եթե տարածական D տիրույթում տրված վեկտորական դաշտը որոշվում է*

$$\vec{A}(M) = A_x(x,y,z)\vec{i} + A_y(x,y,z)\vec{j} + A_z(x,y,z)\vec{k} \qquad (3)$$

վեկտոր ֆունկցիայով և $A_x(x,y,z)$, $A_y(x,y,z)$, $A_z(x,y,z)$ ֆունկցիաներն իրենց

$\partial A_x/\partial x$, $\partial A_y/\partial y$, $\partial A_z/\partial z$ մասնակի ածանցյալների հետ մեկտեղ անընդհատ են նշված տիրույթում, ապա դիտարկվող վեկտորական դաշտի ցրումը D տիրույթի յուրաքանչյուր M կետում արտահայտվում է

$$\operatorname{div}\vec{A}(M)=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{4}$$

բանաձևով, որտեղ $\partial A_x/\partial x$, $\partial A_y/\partial y$, $\partial A_z/\partial z$ մասնակի ածանցյալների արժեքները հաշվվում են M կետում:

Ապացույց: Թեորեմն ապացուցելու համար $\vec{A}(M)$ վեկտոր ֆունկցիայով որոշվող վեկտորական դաշտում դիտարկենք որևէ S փակ մակերևույթ, այդ մակերևույթով սահմանափակված տիրույթը նշանակենք Ω-ով, արտաքին նորմալը՝ $\vec{n}$-ով [49,u5], իսկ այդ նորմալի ուղղորդ կոսինուսները՝ $\cos\alpha$-ով, $\cos\beta$-ով և $\cos\gamma$-ով:

Օգտվելով [75,(2),(2′),(5′)] բանաձևերից՝ դիտարկվող վեկտորական դաշտի հոսքը S մակերևույթի միջով արտահայտենք եռակի ինտեգրալի միջոցով.

$$k=\oiint_{(S)}A_n(M)ds=\oiint_{(S)}(A_x\cos\alpha+A_y\cos\beta+A_z\cos\gamma)ds=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)dxdydz, \tag{5}$$

և օգտվելով այդ ինտեգրալի միջին արժեքի հատկությունից [68,6°]՝ այն ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$k=\mathrm{v}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\Bigg|_{M_0}, \tag{6}$$

որտեղ v-ն Ω տիրույթի ծավալն է, իսկ M_0-ն՝ այդ տիրույթի կետ:

Այժմ, եթե S մակերևույթը կծկվելով ձգտի Ω տիրույթի որևէ M կետի, ապա M_0-ն նույնպես կձգտի այդ կետին և (2),(5),(6) բանաձևերից կունենանք

$$\operatorname{div}\vec{A}(M)=\lim_{\substack{S\to M\\(M_0\to M)}}\frac{1}{\mathrm{v}}\cdot\mathrm{v}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\Bigg|_{M_0}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}:$$

Իպա

Օրինակ 1: Հաշվել

$$\vec{A}(M)=grad(x^2+y^2+z^2)$$

վեկտոր ֆունկցիայով տրվող վեկտորական դաշտի ցրումը:

Լուծում: Համաձայն սկալյար դաշտի գրադիենտի սահմանման՝ ունենք [74,u6], [27,(5),(7)], [28,(1)], [46]

$$grad(x^2+y^2+z^2)=\frac{\partial(x^2+y^2+z^2)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial(x^2+y^2+z^2)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial(x^2+y^2+z^2)}{\partial z}\vec{k}=2x\vec{i}+2y\vec{j}+2z\vec{k},$$

ինչը նշանակում է, որ դիտարկվող վեկտորական դաշտը տրվում է

$$\vec{A}(M)=\{2x,2y,2z\}$$

վեկտոր ֆունկցիայով [3,(11′)]:

Խնդրի լուծումն ավարտելու համար մնում է օգտվել (4) բանաձևից [28,(9)].

$$\operatorname{div}\vec{A}(M)=\frac{\partial(2x)}{\partial x}+\frac{\partial(2y)}{\partial y}+\frac{\partial(2z)}{\partial z}=6:$$

Օգտվելով վեկտորական դաշտի ցրման բանաձևից և (5) հավասարություններից՝ կարող ենք Գաուս-Օստրոգրադսկու բանաձևը [75,(5)] ներկայացնել

$$\iiint\limits_{\Omega}\operatorname{div}\vec{A}(M)dxdydz=\oiint\limits_{(S)}A_n(M)ds \qquad (7)$$

տեսքով:

Այսպիսով $\vec{A}(M)$ վեկտոր ֆունկցիայով տրվող վեկտորական դաշտի հոսքը այդ դաշտի մեջ ընկած S փակ մակերևույթի միջով հավասար է տվյալ վեկտորական դաշտի ցրման եռակի ինտեգրալին՝ տարածված S մակերևույթով սահմանափակված Ω տիրույթով:

Օրինակ 2: Օգտվելով Գաուս-Օստրոգրադսկու բանաձևից՝ հաշվել

$$\vec{A}(M)=(e^{-x}-x)\vec{i}+(xz+3y)\vec{j}+(z+x^2)\vec{k}$$

վեկտոր ֆունկցիայով տրվող վեկտորական դաշտի հոսքը

$$2x+y+z=2,\ \ x=0,\ \ y=0,\ \ z=0 \qquad (ա)$$

հավասարումներն ունեցող հարթություններով սահմանափակված փակ մակերևույթի միջով՝ այդ մակերևույթի արտաքին նորմալի ուղղությամբ:

Լուծում: Օգտվելով (7) բանաձևից՝ մեզ հետաքրքրող հոսքի հաշվումը կհանգեցնենք տրված վեկտորական դաշտի ցրման եռակի ինտեգրալի հաշվմանը՝ տարածված (ա) հավասարումներն ունեցող հարթություններով սահմանափակված Ω տիրույթով [68,u7,p3], [35,2°,3°,IV].

$$k=\iiint\limits_{\Omega}\operatorname{div}\vec{A}(M)dxdydz=3\iiint\limits_{\Omega}dxdydz=3\int_0^1\left\{\int_0^{2-2x}\left[\int_0^{2-2x-y}dz\right]dy\right\}dx=2:$$

Կարող ենք հեշտությամբ համոզվել, որ վեկտորական դաշտի ցրումն օժտված է հետևյալ հատկություններով՝

1°. $\operatorname{div}\left[c_1\vec{A}_1(M)+c_2\vec{A}_2(M)\right]=c_1\operatorname{div}\vec{A}_1(M)+c_2\operatorname{div}\vec{A}_2(M),$

2°. $\operatorname{div}\left[u(M)\vec{A}_1(M)\right]=u(M)\operatorname{div}\vec{A}_1(M)+\operatorname{grad}u(M)\vec{A}_1(M),$

որտեղ $\vec{A}_1(M)$ -ը և $\vec{A}_2(M)$ -ը վեկտոր ֆունկցիաներ են, $u(M)$ -ը՝ սկալյար ֆունկցիա, իսկ c_1 -ը և c_2 -ը՝ հաստատուններ:

Անցնելով խողովակաձև դաշտի ուսումնասիրությանը՝ բերենք հետևյալ սահմանումը՝

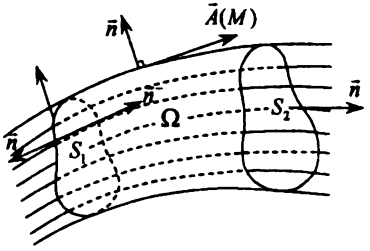
Սահմանում 3: *Այն վեկտորական դաշտը, որի բոլոր կետերում նրա ցրումը հավասար է զրոյի, կոչվում է խողովակաձև (սոլենոիդալ) վեկտորական դաշտ:*

Բերված սահմանումից և (7) բանաձևից հետևում է, որ եթե $\vec{A}(M)$ վեկտոր ֆունկցիայով որոշվող վեկտորական դաշտը խողովակաձև դաշտ է, ապա ցանկացած S փակ մակերևույթով, որն ընկած է այդ դաշտի մեջ, $\vec{A}(M)$ վեկտոր

ֆունկցիայի հոսքը հավասար է զրոյի.

$$\oiint_{(S)} A_n(M)ds = 0: \tag{8}$$

Այժմ $\vec{A}(M)$ վեկտոր ֆունկցիայով որոշվող խողովակաձև վեկտորական դաշտում վերցնենք որևէ S_1 հարթակ (նկ.30) և այդ հարթակի եզրագծի յուրաքանչյուր կետով տանենք վեկտորական գիծ [75,u3]: Տարված վեկտորական գծերով սահմանափակված տիրույթն անվանելով վեկտորական խողովակ՝ դիտարկենք այդ խողովակի այն մասը, որը սահմանափակված է S_1 և S_1-ից որոշ հեռավորության վրա գտնվող S_2 հարթակներով: S_0-ով նշանակելով դիտարկվող խողովակի S_1 և S_2 հարթակների մեջ ընկած կողմնային մակերևույթը և օգտվելով (8) բանաձևից՝ կստանանք



նկ.30

$$\iint_{(S_1)} A_n ds + \iint_{(S_0)} A_n ds + \iint_{(S_2)} A_n ds = 0: \tag{9}$$

Նկատի ունենալով, որ A_n-ը $\vec{A}(M)$ վեկտորի պրոյեկցիան է դիտարկվող մակերևույթի արտաքին նորմալի ուղղության վրա և հաշվի առնելով, որ նկարագրված խողովակի կողմնային մակերևույթի $\vec{n}$ նորմալն ուղղահայաց է տրված վեկտորական դաշտի նույն կետում տարված $\vec{A}(M)$ վեկտորին՝ կունենանք

$$\iint_{(S_0)} A_n ds = 0: \tag{10}$$

Վերջին հավասարության հաշվառումով (9) հավասարությունից կստանանք

$$\iint_{(S_2)} A_n ds = -\iint_{(S_1)} A_n ds$$

կամ որ նույնն է՝

$$\iint_{(S_2)} A_n ds = \iint_{(S_1)} A_{n^-} ds \tag{11}$$

հավասարությունը, որտեղ $\vec{n}^-$-ը S_1 հարթակի արտաքին նորմալի հակադիր վեկտորն է (նկ.30), այսինքն՝ S_0, S_1 և S_2 մակերևույթներով սահմանափակված Ω տիրույթի ներքին նորմալն է:

Հաշվի առնելով, որ S_1-ը և S_2-ը դիտարկվող վեկտորական խողովակի իրարից տարբեր հարթակներ են՝ կարող ենք (11) հավասարությունը մեկնաբանել հետևյալ կերպ՝

խողովակաձև վեկտորական դաշտի հոսքը այդ դաշտի մեջ ընկած վեկտորական խողովակի տարբեր կտրվածքներով հաստատուն մեծություն է[*] *և հետևաբար կախված չէ այդ կտրվածքների մակերեսներից:*

Կատարված եզրակացությունից հետևում է, որ խողովակաձև վեկտորական դաշտի մեջ ընկած վեկտորական խողովակի ընդարձակ տեղամասերում այդ դաշտի հոսքը փոքրանում է, իսկ նեղ տեղամասերում՝ մեծանում:

Այժմ ձևակերպենք մի կարևոր թեորեմ, որը հնարավորություն է տալիս որևէ մակերևույթով տարածված մակերևույթային ինտեգրալը փոխարինել այդ մակերևույթի եզրագծով տարածված կորագիծ ինտեգրալով և հակառակը՝ տարածական որևէ կորով տարածված կորագիծ ինտեգրալը փոխարինել այդ կորով սահմանափակված մակերևույթով տարածված մակերևույթային ինտեգրալով:

Թեորեմ 2: *(Ստոքս) Եթե $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ և $R(x,y,z)$ ֆունկցիաներն իրենց առաջին կարգի մասնակի ածանցյալների հետ մեկտեղ անընդհատ են տարածական Ω տիրույթում և կտոր առ կտոր ողորկ l կորով սահմանափակված երկկողմանի S ողորկ մակերևույթն ընկած է այդ տիրույթի մեջ, ապա տեղի ունի*

$$\iint_{(S)}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]ds=\oint_{l}Pdx+Qdy+Rdz \quad (12)$$

բանաձևը, որտեղ $\cos\alpha$ -ն, $\cos\beta$ -ն և $\cos\gamma$ -ն S մակերևույթի ընտրված կողմին տարած նորմալի ուղղորդ կոսինուսներն են:

Նշենք, որ (12) բանաձևում (որը կոչվում է Ստոքսի բանաձև) մասնակցող l փակ կորով տարածված կորագիծ ինտեգրալում ինտեգրման ուղղությունը համաձայնեցվում է S մակերևույթի ընտրված կողմին հետևյալ կանոնով՝

եթե դիտողը S մակերևույթի l եզրագծով շարժվում է կորագիծ ինտեգրալի ինտեգրման ուղղությամբ և նրա ոտքերից դեպի գլուխը տարած ուղղի ուղղությունը համընկնում է տրված մակերևույթի ընտրված կողմի նորմալի ուղղությանը, ապա ամբողջ շարժման ժամանակ դիտարկվող մակերևույթը պետք է գտնվի նրա ձախ կողմում:

Ստոքսի բանաձևում առաջին սեռի մակերևույթային ինտեգրալը փոխարինելով երկրորդ սեռի մակերևույթային ինտեգրալով [75,(9)], կստանանք այդ բանաձևի մեկ այլ տեսք.

$$\iint_{(S)}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy\right]ds=\oint_{l}Pdx+Qdy+Rdz : \quad (12')$$

Համարելով, որ S մակերևույթը գտնվում է Oxy հարթության մեջ՝ (12′) բանաձևից կստանանք Գրինի բանաձևը [71,(4)], որտեղից հետևում է, որ Գրինի բանաձևը հանդիսանում է Ստոքսի բանաձևի մասնավոր դեպքը:

Վերանայելով Գրինի, Գաուս-Օստրոգրադսկու և Ստոքսի բանաձևերը՝ նկատում ենք, որ այդ բանաձևերը երկրաչափական որևէ տիրույթով տարած-

---

*) Այն կոչվում է վեկտորական խողովակի ուժգնություն (ինտենսիվություն):

ված ինտեգրալը փոխարինում են այդ տիրույթի եզրագծով տարածված ինտեգրալով: Ընդ որում Գրինի բանաձևը գործում է երկչափ տարածության մեջ, իսկ Գաուս-Օստրոգրադսկու և Ստոքսի բանաձևերը՝ եռաչափ տարածություն մեջ:

Այդ տեսանկյունից ինտեգրալ հաշվի հիմնական բանաձևին.

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a),$$

կարելի է նայել իբրև նշված բանաձևերի նմանակի, որը գործում է միաչափ տարածության մեջ:

Վեկտորական դաշտի կարևորագույն բնութագրիչներից մեկ երկուսի՝ վեկտորական դաշտի մրրիկին և վեկտորական դաշտի շրջապտույտին ծանոթանալու նպատակով նորից ենթադրենք, որ տարածական Ω տիրույթում տրված է (3) վեկտոր ֆունկցիայով որոշվող վեկտորական դաշտ: Ստոքսի բանաձևում ընդունելով

$$P(x,y,z) = A_x(x,y,z),\ Q(x,y,z) = A_y(x,y,z),\ R(x,y,z) = A_z(x,y,z),$$

կստանանք

$$\iint_{(S)}\left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]ds = \\ = \oint_l A_x dx + A_y dy + A_z dz: \tag{13}$$

Սահմանում 4: *Կոորդինատական Oxyz համակարգում*

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z},\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x},\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

բաղադրիչներն ունեցող վեկտորը կոչվում է $\vec{A}(M) = \{A_x, A_y, A_z\}$ վեկտոր ֆունկցիայով որոշվող վեկտորական դաշտի մրրիկ (ռոտոր):

Համաձայն բերված սահմանման՝ $\vec{A}(M)$ վեկտոր ֆունկցիայով որոշվող վեկտորական դաշտի մրրիկը նշանակելով $rot\,\vec{A}(M)$-ով՝ կունենանք

$$rot\,\vec{A}(M) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}: \tag{14}$$

Եթե ածանցման $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ և $\partial/\partial z$ նշանների և $u(x,y,z)$ ֆունկցիայի «արտադրյալ» ասելով հասկանանք $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$ և $\partial u/\partial z$ մասնակի ածանցյալները, ապա (14) վեկտոր ֆունկցիան կներկայացնենք հետևյալ (հեշտ հիշվող) տեսքով.

$$rot\,\vec{A}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}: \tag{14'}$$

Սահմանում 5: *(13) բանաձևի աջ մասի*

$$\oint_l A_x dx + A_y dy + A_z dz \tag{15}$$

կորագիծ ինտեգրալը (որտեղ l կորի շրջանցումը կատարվում է դրական ուղղությամբ) կոչվում է $\vec{A}(M)$ վեկտոր ֆունկցիայով որոշվող վեկտորական դաշտի շրջապտույտ l փակ կորով:

Նկատելով, որ (15) ինտեգրալի ենթինտեգրալ արտահայտությունը $\vec{A}(M)$ և $\vec{dr}=\{dx,dy,dz\}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալն է [4,(7)] և հետևաբար հավասար է $A_l dl$-ի [4,(2)], որտեղ A_l-ը $\vec{A}(M)$ վեկտորի պրոյեկցիան է l կորի շոշափողի ուղղության վրա, իսկ $dl=|\vec{dr}|$, $\vec{A}(M)$ վեկտոր ֆունկցիայի շրջապտույտը l փակ կորով կարող ենք ներկայացնել նաև

$$\oint_l \vec{A}(M)\cdot\vec{dr}, \quad \oint_l A_l dl \tag{16}$$

տեսքերից որևէ մեկով:

Նշենք, որ վեկտորական դաշտի շրջապտույտը մի թիվ է, որի մեծությունը կախված է դիտարկվող դաշտը որոշող վեկտոր ֆունկցիայից, տրված կորից և կորագիծ ինտեգրալի ինտեգրման ուղղությունից: Վերոգրյալից հետևում է, որ (16) ինտեգրալներում ինտեգրման ուղղությունը փոխելիս վեկտորական դաշտի շրջապտույտը փոխում է իր նշանը:

Դժվար չէ նկատել, որ օգտվելով վերջին երկու սահմանումներից, կարող ենք (13) բանաձևը ներկայացնել

$$\iint_{(S)} rot\,\vec{A}(M)\cdot\vec{n^0}ds=\oint_l \vec{A}(M)\cdot\vec{dr} \tag{13'}$$

կամ որ նույնն է՝

$$\vec{n^0}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\} \qquad \iint_{(S)} rot_n\,\vec{A}(M)ds=\oint_l A_l dl \tag{13''}$$

տեսքով, որտեղ $\vec{n^0}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$-ն S մակերևույթի ընտրված կողմին տարած նորմալի միավոր վեկտորն է, իսկ $rot_n\,\vec{A}(M)$-ը՝ $rot\,\vec{A}(M)$ վեկտորի պրոյեկցիան նշված նորմալի ուղղության վրա:

Ամփոփելով վերևում բերված դատողությունները՝ կարող ենք Ստոքսի թեորեմը վերաձևակերպել հետևյալ կերպ՝

Թեորեմ 2՝: *Վեկտորական դաշտի մրրիկի հոսքը՝ տարածված տրված դաշտի մեջ ընկած որևէ մակերևույթով, հավասար է դիտարկվող վեկտորական դաշտը որոշող վեկտոր ֆունկցիայի շրջապտույտին՝ տարածված նույն մակերևույթի եզրագծով:*

Ձևակերպված թեորեմից հետևում է, որ եթե որևէ վեկտորական դաշտի մեջ ընկած երկու տարբեր մակերևույթներ ունեն միևնույն եզրագիծը, ապա տրված դաշտի մրրիկի հոսքերն այդ մակերևույթներով հավասար են իրար:

Նշենք, որ (13՝) բանաձևը հնարավորություն է տալիս բերելու վեկտորական դաշտի մրրիկի այնպիսի սահմանում, որն անկախ է կոորդինատական համակարգի ընտրությունից:

Օգտվելով վեկտորական դաշտի մրրիկի սահմանումից՝ դժվար չէ համոզվել, որ այն օժտված է հետևյալ հատկություններով՝

I. $rot[c_1\vec{A}_1(M)+c_2\vec{A}_2(M)]=c_1\,rot\,\vec{A}_1(M)+c_2\,rot\,\vec{A}_2(M)$,

II. $rot[u(M)\vec{A}_1(M)]=u(M)\,rot\,\vec{A}_1(M)+\mathrm{grad}\,u(M)\times\vec{A}_1(M)$,

որտեղ $\vec{A}_1(M)$-ը և $\vec{A}_2(M)$-ը վեկտոր ֆունկցիաներ են, $u(M)$-ը՝ սկալյար ֆունկցիա, իսկ c_1-ը և c_2-ը՝ հաստատուններ:

Նկատենք նաև, որ քանի որ $rot\,\vec{A}(M)$-ը նույնպես վեկտոր ֆունկցիա է, հետևաբար դիտարկվող Ω տիրույթում այն կառաջացնի մի նոր վեկտորական դաշտ: Օգտվելով (4) և (14) բանաձևերից, կարելի է հեշտությամբ համոզվել, որ $rot\,\vec{A}(M)$ վեկտոր ֆունկցիայի առաջացրած դաշտը (որը կոչվում է $\vec{A}(M)$ վեկտորական դաշտի մրրիկների վեկտորական դաշտ) խողովակաձև դաշտ է:

Վերջում ծանոթանանք նաև հետևյալ հասկացությանը՝

Սահմանում 6: *Այն վեկտորական դաշտը, որի բոլոր կետերում մրրիկը հավասար է զրոյի, կոչվում է անմրրիկ (պոտենցիալ) վեկտորական դաշտ:*

Օրինակ 3: Գտնել

$$\vec{A}(M)=z^2\vec{i}+x^2\vec{j}+y^2\vec{k}$$

վեկտոր ֆունկցիայով տրվող վեկտորական դաշտի մրրիկի արժեքը այդ դաշտի $A(1;2;3)$ կետում:

Լուծում: Օգտվելով (14) բանաձևից՝ դիտարկվող դաշտի մրրիկի համար կստանանք

$$rot\,\vec{A}(M)=\left(\frac{\partial y^2}{\partial y}-\frac{\partial x^2}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial z^2}{\partial z}-\frac{\partial y^2}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial x^2}{\partial x}-\frac{\partial z^2}{\partial y}\right)\vec{k}=2y\vec{i}+2z\vec{j}+2x\vec{k}:$$

Խնդրի լուծումն ավարտելու համար մնում է տրված կետում հաշվել ստացած վեկտոր ֆունկցիայի արժեքը.

$$rot\,\vec{A}(M)\Big|_A=4\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k}:$$

Օրինակ 4: Հաշվել

$$\vec{A}(M)=(x^3-y)\vec{i}+(y^3+x)\vec{j}$$

վեկտոր ֆունկցիայով տրվող վեկտորական դաշտի շրջապտույտը $x^2+y^2=R^2$ $(R>0)$ շրջանագծով:

Լուծում: Օգտվելով վեկտորական դաշտի շրջապտույտի սահմանումից և տրված շրջանագծի հավասարումը ներկայացնելով

$$x=R\cos t,\quad y=R\sin t\qquad (0\le t\le 2\pi)$$

պարամետրական հավասարումներով՝ դիտարկվող վեկտորական դաշտի շրջապտույտի համար կստանանք [27.(10),(12)], [28.u1.(ը)], [35.8°], [70.(16՝)]

$$\oint_l (x^3-y)dx+(y^3+x)dy=\int_0^{2\pi}\left[(R^3\cos^3 t-R\sin t)(-R\sin t)+(R^3\sin^3 t+R\cos t)R\cos t\right]dt=$$

$$=R^4\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{1}{4}\sin 4t\right)dt=2\pi R^4:$$

ԳԼՈՒԽ XV

ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

§77. Միացությունների տեսության տարրերը. կարգավորություններ, տեղափոխություններ, զուգորդություններ:

Կիրառական զանազան խնդիրներ լուծելիս հաճախ անհրաժեշտ է լինում տրված բազմությունից առանձնացնել որոշակի հատկությամբ օժտված տարրեր, դասավորել դրանք որոշակի հերթականությամբ, հաշվել այդ տարրերից որոշակի ձևով կազմած միացությունների (խմբերի) քանակը:

Մաթեմատիկայի այն բաժինը, որը զբաղվում է վերևում թվարկած հարցերի ուսումնասիրությամբ, կոչվում է միացությունների տեսություն:

Այս պարագրաֆում մենք կծանոթանանք միացությունների տեսության տարրերին, կուսումնասիրենք միացությունների՝ կարգավորությունների, տեղափոխությունների և զուգորդությունների հատկությունները:

Սահմանում 1: *$a_1, a_2, \ldots, a_k$ տարրերից կազմած միացությունը (նշված հերթականությամբ) կնշանակենք*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k) \qquad (1)$$

պայմանանշանով: k-ն կոչվում է (1) միացության երկարություն, իսկ a_i-ն՝ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ այդ միացության i-րդ կոորդինատ:

Սահմանում 2: *n տարր պարունակող բազմության k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ տարբեր տարրերից կազմած միացությունները կոչվում են n տարրերից k-ական կարգավորություններ:*

Այլ խոսքով, n տարրերից k-ական կարգավորություններ ասելով հասկանում ենք այդ n տարրերից կազմած այն միացությունները, որոնք պարունակում են k տարր և իրարից տարբերվում են կա՛մ տարրերով, կա՛մ էլ այդ տարրերի դասավորությամբ:

Օրինակ 1: a_1, a_2, a_3 տարրերից կարելի է կազմել 1-ական, 2-ական և 3-ական

$$(a_1),\ (a_2),\ (a_3),$$

$$(a_1, a_2),\ (a_1, a_3),\ (a_2, a_1),\ (a_2, a_3),\ (a_3, a_1),\ (a_3, a_2),$$

$$(a_1, a_2, a_3),\ (a_1, a_3, a_2),\ (a_2, a_1, a_3),\ (a_2, a_3, a_1),\ (a_3, a_1, a_2),\ (a_3, a_2, a_1)$$

կարգավորությունները:

Այժմ ենթադրենք A բազմությունն ունի n տարր [18,u1], այդ բազմության տարրերից կազմած k-ական $(k = 0, 1, \ldots, n)$ բոլոր կարգավորությունների քանակը նշանակենք A_n^k-ով և ստանանք բանաձև այդ մեծության համար:

Հանդարտելով, որ ոչ մի տարր չպարունակող կարգավորությունը դատարկ բազմությունն է՝ կստանանք

$$A_n^0 = 1:$$

Այնուհետև, քանի որ A բազմության տարրերից կազմած 1-ական բոլոր կարգավորությունների քանակն ակնհայտորեն հավասար է այդ բազմության տարրերի թվին, հետևաբար

$$A_n^1 = n:$$

Պարզ է նաև, որ դիտարկվող բազմության տարրերից կազմած բոլոր 2-ական կարգավորությունները ստանալու համար անհրաժեշտ է այդ բազմության տարրերից կազմած 1-ական բոլոր կարգավորություններին հաջորդաբար կցել մնացած $n-1$ տարրերից յուրաքանչյուրը: Կատարելով վերոգրյալը՝ կստանանք

$$\begin{array}{l} (a_1,a_2),\ (a_1,a_3),\ \dots,\ (a_1,a_n), \\ (a_2,a_1),\ (a_2,a_3),\ \dots,\ (a_2,a_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (a_n,a_1),\ (a_n,a_2),\ \dots,\ (a_n,a_{n-1}) \end{array} \qquad (2)$$

աղյուսակը:

Քանի որ (2) աղյուսակը պարունակում է n տող և $n-1$ սյուն, հետևաբար A բազմության տարրերից կազմած բոլոր 2-ական կարգավորությունների քանակն արտահայտվում է

$$A_n^2 = n(n-1)$$

բանաձևով:

Այժմ, օգտվելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդից, ցույց տանք, որ n տարրերից k-ական բոլոր կարգավորությունների քանակը կարելի է հաշվել

$$A_n^k = n(n-1)\cdots[n-(k-1)] \quad (k=1,2,\dots,n) \qquad (3)$$

բանաձևով:

Իրոք, ինչպես տեսանք, (3) բանաձևը ճիշտ է $k=1$ և $k=2$ արժեքների համար: Ընդունելով, որ այն ճիշտ է նաև $k=m$ արժեքի համար, այսինքն ընդունելով, որ տեղի ունի

$$A_n^m = n(n-1)\cdots[n-(m-1)] \quad (2<m<n)$$

հավասարությունը՝ հաշվենք n տարրերից $(m+1)$-ական կարգավորությունների քանակը:

Տրված A բազմության n տարրերից $(m+1)$-ական բոլոր կարգավորությունները ստանալու համար անհրաժեշտ է այդ բազմության n տարրերից m-ական բոլոր կարգավորություններին հաջորդաբար կցել այդ բազմության մնացած $n-m$ տարրերից յուրաքանչյուրը: Հասկանալի է, որ այդ դեպքում n տարրերից m-ական յուրաքանչյուր կարգավորությունից կստացվի n տարրերից $(m+1)$-ական $n-m$ կարգավորություն: Հետևաբար A_n^{m+1} մեծության համար կունենանք

$$A_n^{m+1} = A_n^m(n-m) = n(n-1)\cdots(n-m+1)(n-m):$$

Այսպիսով, այն ենթադրությունից, որ (3) բանաձևը ճիշտ է որևէ $k=m$ $(2<m<n)$ արժեքի համար, բխում է այդ բանաձևի ճշմարտացիությունը նաև $k=m+1$ արժեքի համար: Նկատի ունենալով, որ վերոհիշյալ բանաձևը ճիշտ է նաև $k=1$ արժեքի համար, մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդի շնորհիվ ստանում ենք, որ այն ճիշտ է n-ը չգերազանցող k-ի ցանկացած արժեքի համար:

Իպա

Նկատենք, որ (3) բանաձևի աջ մասը բազմապատկելով $(n-k)(n-k-1)\cdots 2\cdot 1$ արտադրյալով և բաժանելով այդ արտադրյալի վրա, n տարրերից k-ական բոլոր կարգավորությունների քանակը կարտահայտենք*)

$$A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}\quad (k=1,2,\ldots,n) \qquad (3')$$

բանաձևով:

Օրինակ 2: Գտնել կրկնվող թվանշաններ չպարունակող բոլոր բնական եռանիշ թվերի քանակը:

Լուծում: Քանի որ թիվը չի կարող սկսվել զրո թվանշանով, ուստի մեզ հետաքրքրող թվերի առաջին թվանշանը պետք է ընտրել 9-ը տարրանոց $A=\{1,2,\ldots,9\}$ բազմությունից, երկրորդը՝ նույնպես 9-ը տարրանոց $B=\{0,1,\ldots,9\}\setminus n$ բազմությունից [18,ա9], որտեղ n-ը ընտրված եռանիշ թվերի առաջին թվանշանն է, իսկ երրորդը՝ ութ տարրանոց $C=\{0,1,\ldots,9\}\setminus\{n,k\}$ բազմությունից, որտեղ k-ն ընտրված եռանիշ թվերի երկրորդ թվանշանն է:

Այսպիսով, չկրկնվող թվանշաններով բոլոր բնական եռանիշ թվերի քանակը նշանակելով m-ով և օգտվելով (3) բանաձևից՝ կստանանք

$$m=9\cdot A_9^2=9\cdot 9\cdot 8=648:$$

Այժմ ծանոթանանք միացությունների տեսության մեկ այլ հասկացության:

Դիտարկելով n տարրանոց A բազմության բոլոր n-ական կարգավորությունները՝ կստանանք միացություններ, որոնք կազմված են A բազմության բոլոր տարրերից և իրարից տարբերվում են միայն այդ տարրերի դասավորությամբ: Ըստ էության A բազմության նշված կարգավորությունները մեկը մյուսից ստացվում են տարրերի տեղափոխությամբ և այդ պատճառով էլ կոչվում են տեղափոխություններ:

Սահմանում 3: *A բազմության բոլոր տարրերից կազմած յուրաքանչյուր միացությունը կոչվում է այդ բազմության տարրերից կազմած տեղափոխություն:*

Այլ խոսքով, n տարր պարունակող բազմության n-ական կարգավորությունները կոչվում են տեղափոխություններ n տարրերից:

Հետևաբար, եթե n տարրերից կազմած բոլոր տեղափոխությունների քանակը նշանակենք P_n-ով՝ կունենանք

---

*) Ընդունում ենք, որ $0!=1$:

$$P_n = A_n^n : \qquad (4)$$

(3) բանաձևում ընդունելով $k = n$, n տարրերից կազմած բոլոր տեղափոխությունների քանակը կարտահայտենք

$$P_n = n! \qquad (4')$$

պարզունակ բանաձևով:

Օրինակ 3: Գտնել 0, 1, 2, 3 և 4 թվանշաններից կազմած, կրկնվող թվանշաններ չպարունակող բոլոր բնական հնգանիշ թվերի քանակը:

Լուծում: Օգտվելով (4') բանաձևից՝ նախ հաշվենք տրված թվանշաններից կազմած բոլոր տեղափոխությունների քանակը.

$$P_n = 5! = 120 :$$

Այնուհետև հաշվի առնելով, որ թիվը չի կարող սկսվել զրո թվանշանով՝ դեն նետենք այդ թվանշանով սկսվող տեղափոխությունները: Քանի որ դեն նետած տեղափոխությունների քանակը հավասար է 24-ի ($P_4 = 4! = 24$), ուստի մեզ հետաքրքրող թվերի քանակը հավասար է 96-ի:

Ծանոթանանք նաև միացությունների տեսության զուգորդություն հասկացությանը:

Սահմանում 4: *n տարր պարունակող բազմության k ($k = 0,1,...,n$) տարրերից կազմած ենթաբազմությունները կոչվում են n տարրերից k-ական զուգորդություններ:*

Այլ խոսքով, n տարրերից k-ական զուգորդություններ ասելով հասկանում ենք n տարրերից կազմած այն k-ական ($k = 0,1,...,n$) կարգավորությունները, որոնք իրարից տարբերվում են գոնե մեկ տարրով:

Օրինակ 4: a_1, a_2, a_3, a_4 տարրերից կարելի է կազմել 1-ական, 2-ական, 3-ական և 4-ական հետևյալ զուգորդությունները՝

$$(a_1),\ (a_2),\ (a_3),\ (a_4),$$

$$(a_1,a_2),\ (a_1,a_3),\ (a_1,a_4),\ (a_2,a_3),\ (a_2,a_4),\ (a_3,a_4),$$

$$(a_1,a_2,a_3),\ (a_1,a_2,a_4),\ (a_1,a_3,a_4),\ (a_2,a_3,a_4),$$

$$(a_1,a_2,a_3,a_4):$$

Նշենք, որ զուգորդությունը որոշվում է միայն իր տարրերով և կախված չէ այդ տարրերի դասավորությունից: Ըստ էության զուգորդությունը սովորական բազմություն է և չի կարող պարունակել համընկնող տարրեր:

Այժմ ենթադրելով, որ A բազմությունն ունի n տարր և այդ բազմության տարրերից կազմած k-ական ($k = 0,1,...,n$) բոլոր զուգորդությունների քանակը նշանակելով C_n^k-ով՝ ստանանք բանաձև C_n^k-ի համար:

Նախ, քանի որ A բազմության զրո տարր պարունակող միակ ենթաբազմությունը դատարկ բազմությունն է, իսկ n տարր պարունակող միակ ենթաբազմությունը՝ հենց A բազմությունը, հետևաբար տեղի ունեն

$$C_n^0 = C_n^n = 1 \qquad (5)$$

բանաձևերը: Այնուհետև հաշվի առնելով, որ A բազմության n տարրերից k-ական բոլոր զուգորդություններում կատարելով բոլոր հնարավոր տեղափոխությունները, կստանանք այդ բազմության n տարրերից k-ական բոլոր կարգավորությունները՝ կունենանք

$$C_n^k P_k = A_n^k, \tag{6}$$

որտեղից (3) և (4՝) բանաձևերի հաշվառումով C_n^k մեծության համար կստանանք

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)\cdots[n-(k-1)]}{k!} \quad (k = 0,1,\ldots,n): \tag{6՝}$$

Նկատենք, որ (6՝) բանաձևի վերջին կոտորակի համարիչն ու հայտարարը բազմապատկելով $(n-k)(n-k-1)\cdots 2\cdot 1$ արտադրյալով, A բազմության n տարրերից k-ական բոլոր զուգորդությունների թիվը կարտահայտենք

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{P_n}{P_k P_{n-k}} \quad (k = 0,1,\ldots,n) \tag{7}$$

բանաձևով*):

Վերջում ապացուցենք նաև

$$C_n^k = C_n^{n-k} \quad (k = 0,1,\ldots,n), \tag{8}$$

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1} \quad (k = 0,1,\ldots,n-1) \tag{9}$$

օգտակար բանաձևերը:

Ապացույց: Օգտվելով (7) բանաձևից՝ կունենանք

$$C_n^{n-k} = \frac{P_n}{P_{n-k} P_{n-(n-k)}} = \frac{P_n}{P_k P_{n-k}} = C_n^k \quad (k = 0,1,\ldots,n):$$

Օգտվելով նաև (6՝) բանաձևից՝ կստանանք

$$C_n^k + C_n^{k+1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)}{k!(k+1)} =$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(1 + \frac{n-k}{k+1}\right) = \frac{(n+1)n\cdots(n-k+1)}{(k+1)!} = C_{n+1}^{k+1} \quad (k = 0,1,\ldots,n-1):$$

Իպա

Օրինակ 5: Շախմատային քանի՞ պարտիա է խաղացվել շրջանաձև առաջնության ժամանակ, եթե այդ առաջնությանը մասնակցել է 10 շախմատիստ:

Լուծում: Քանի որ շրջանաձև առաջնության ժամանակ շախմատիստներից ամեն մեկը մյուս մասնակիցներից յուրաքանչյուրի հետ հանդիպում է մեկ անգամ, հետևաբար

---

*) Նկատենք նաև, որ (7) բանաձևում հաջորդաբար ընդունելով $k = 0$ և $k = n$, կստանանք (5) բանաձևերը:

առաջնության ընթացքում խաղացվում է այնքան պարտիա, որքան զույգ կարելի է կազմել 10 շախմատիստներից: Նկատի ունենալով, որ 10 շախմատիստներից կազմած բոլոր զույգերի թիվը հավասար է C_{10}^{2}-ի և օգտվելով (6) բանաձևից՝ կստանանք, որ առաջնության ժամանակ խաղացված շախմատային պարտիաների քանակը հավասար է 45-ի:

§78. Պատահույթներ և նրանց տեսակները: Հավանականության դասական սահմանումը: Պատահույթի հաճախությունը: Հավանականության վիճակագրական սահմանումը:

Մեր իրականության մեջ տեղի ունեցող շատ երևույթներ և իրադարձություններ ունեն պատահական բնույթ: Գոյություն ունեն բազմաթիվ խնդիրներ, որտեղ անհրաժեշտ է լինում քանակապես գնահատել պատահական երևույթները և տալ այդ երևույթների ընթացքի օրինաչափությունները: Այդպիսի խնդիրներ լուծելու համար, որպես մաթեմատիկական տեսություն, ծառայում է հավանականությունների տեսությունը: Ինչպես յուրաքանչյուր տեսության, այնպես էլ հավանականությունների տեսության մեջ գոյություն ունեն, այսպես կոչված, հիմնական հասկացություններ:

Հավանականությունների տեսության հիմնական հասկացություններից է պատահույթի հասկացությունը:

Պատահույթ ասելով հասկանում ենք որևէ փորձի հետ կապված իրադարձություն, որն այդ փորձի արդյունքում կարող է տեղի ունենալ կամ՝ ոչ:

Պատահույթները կնշանակենք լատիներեն այբուբենի մեծատառերով:

Օրինակ 1: Մետաղադրամը նետելիս թիվ հանդես գալը, կրակելիս թիրախին դիպչելը, խաղոսկր (զառ) նետելիս նրա վերին նիստի վրա 3 թվի հանդես գալը՝ պատահույթներ են:

Հասկանալի է, որ տվյալ փորձի ժամանակ, ընդհանրապես ասած, տարբեր պատահույթներ ունեն հանդես գալու տարբեր հնարավորություններ: Պատահույթները քանակապես համեմատելու համար նրանցից յուրաքանչյուրին կվերագրենք մի թիվ, որի մեծությունը կախված է տվյալ փորձի ժամանակ այդ պատահույթի հանդես գալու հնարավորության աստիճանից և այդ թիվը կանվանենք պատահույթի հանդես գալու հավանականություն կամ պարզապես պատահույթի հավանականություն:

Նշենք, որ պատահույթի հավանականությունը հավանականությունների տեսության հաջորդ հիմնական հասկացությունն է:

Սահմանում 1: *Պատահույթը կանվանենք հավաստի կամ ստույգ պատահույթ և կնշանակենք U-ով, եթե տվյալ փորձի ժամանակ այն անհրաժեշտաբար պետք է հանդես գա:*

Օրինակ 2: Խաղոսկր նետելիս նրա վերին նիստի վրա 1-ից մինչև 6 թվերից որևէ մեկի հանդես գալը հավաստի պատահույթ է:

Սահմանում 2: *Պատահույթը կանվանենք անհնար պատահույթ և կնշանակենք V-ով, եթե տվյալ փորձի ժամանակ այն չի կարող հանդես գալ:*

Օրինակ 3: Խաղոսկրի նետման ժամանակ նրա վերին նիստի վրա 7 թվի հանդես գալը անհնար պատահույթ է:

Սահմանում 3: *A պատահույթը կոչվում է B պատահույթի մասնավոր դեպք, եթե տվյալ փորձի ժամանակ A-ի հանդես գալուց հետևում է B-ի հանդես գալը:*

Այն փաստը, որ A պատահույթը B պատահույթի մասնավոր դեպքն է՝ կնշենք հետևյալ կերպ՝

$$A \subseteq B:$$

Օրինակ 4: Խաղոսկր նետելիս նրա վերին նիստի վրա 2 թվի հանդես գալը այդ նիստի վրա զույգ թիվ հանդես գալու մասնավոր դեպք է:

Սահմանում 4: *A-ն ու B-ն կոչվում են համարժեք պատահույթներ, եթե նրանցից յուրաքանչյուրը մյուսի մասնավոր դեպքն է:*

Այն փաստը, որ A-ն ու B-ն համարժեք պատահույթներ են՝ կնշենք հետևյալ կերպ՝

$$A = B:$$

Սահմանում 5: *Տվյալ փորձում A-ն ու B-ն կոչվում են անհամատեղելի պատահույթներ, եթե այդ փորձի ժամանակ նշված պատահույթներից մեկի հանդես գալը բացառում է մյուսի հանդես գալու հնարավորությունը:*

Այլ խոսքով, երկու պատահույթներ կոչվում են անհամատեղելի տվյալ փորձում, եթե այդ փորձի ժամանակ դիտարկվող պատահույթները միաժամանակ հանդես գալ չեն կարող:

Այն փաստը, որ A-ն ու B-ն անհամատեղելի պատահույթներ են՝ կնշենք հետևյալ կերպ՝

$$A \cap B = \varnothing:$$

Օրինակ 5: Համաձայն բերված սահմանման E_i-ն ու E_j-ն ($i \neq j$), որտեղ E_k-ն այն պատահույթն է, որ նետված խաղոսկրի վերին նիստի վրա հանդես կգա k ($k = 1,2,\ldots,6$) միավոր, անհամատեղելի պատահույթներ են:

Սահմանում 6: *Մի քանի պատահույթներ կոչվում են անհամատեղելի տվյալ փորձում, եթե այդ փորձի ժամանակ դիտարկվող պատահույթները զույգ առ զույգ անհամատեղելի են:*

Օրինակ 6: Նետված խաղոսկրի փորձում E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 և E_6 պատահույթները անհամատեղելի են:

Սահմանում 7: *Կասենք, որ A_1, A_2,... պատահույթները տվյալ փորձում կազմում են պատահույթների լրիվ խումբ, եթե այդ փորձի ժամանակ նշված պատահույթներից գոնե մեկը անհրաժեշտաբար պետք է հանդես գա:*

Այլ խոսքով, տվյալ փորձում A_1, A_2,... պատահույթները կազմում են պատահույթների լրիվ խումբ, եթե այդ փորձի ժամանակ նշված պատահույթները սպառում են փորձի բոլոր հնարավոր արդյունքները:

Օրինակ 7: Խաղոսկր նետելիս նրա վերին նիստի վրա 1, 2, 3, 4, 5 կամ որևէ զույգ թիվ հանդես գալը կազմում են պատահույթների լրիվ խումբ: Նույն փորձում E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6 պատահույթները կազմում են անհամատեղելի պատահույթների լրիվ խումբ:

ԳԼՈՒԽ XV

Սահմանում 8: *Տվյալ փորձում երկու պատահույթներ կոչվում են հակադիր պատահույթներ, եթե այդ փորձի ժամանակ նշված պատահույթները անհամատեղելի են և կազմում են պատահույթների լրիվ խումբ:*

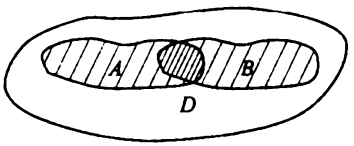
Օրինակ 8: Մետաղադրամ նետելու փորձում թիվ և զինանշան հանդես գալու պատահույթները հակադիր պատահույթներ են:

A պատահույթի հակադիր պատահույթը կնշանակենք $\overline{A}$-ով:

Սահմանում 9: *Տվյալ փորձում A և B պատահույթներից գոնե մեկի հանդես գալը մի պատահույթ է, որ կոչվում է այդ պատահույթների գումար և նշանակվում է $A \cup B$ պայմանանշանով:*

Նույն ձևով տվյալ փորձում A_1, A_2,..., A_n $(n>2)$ պատահույթներից գոնե մեկի հանդես գալը մի պատահույթ է, որը կոչվում է այդ պատահույթների գումար և նշանակվում է $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ պայմանանշանով:

Օրինակ 9: Եթե կետը նետենք A և B տիրույթներն իր մեջ պարունակող D հարթ տիրույթի վրա և A-ով նշանակենք այն պատահույթը, որ կետը կընկնի A տիրույթի վրա, իսկ B-ով՝ այն պատահույթը, որ կետը կընկնի B տիրույթի վրա, ապա $A \cup B$-ն այն պատահույթն է, որ կետը կընկնի 31-րդ նկարում ցույց տրված ստվերագծած (նոսր և խիտ) տիրույթի վրա:



Նկ. 31

Ակնհայտ է, որ տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները՝

1°. $A \cup A = A$, 2°. $A \cup V = A$, 3°. $A \cup U = U$, 4°. $A \cup \overline{A} = U$,

5°. $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = U$, որտեղ A_1, A_2,..., A_n պատահույթները տվյալ փորձում կազմում են պատահույթների լրիվ խումբ:

Սահմանում 10: *Տվյալ փորձում A և B պատահույթների համատեղ հանդես գալը մի պատահույթ է, որը կոչվում է այդ պատահույթների արտադրյալ և նշանակվում է $A \cap B$ պայմանանշանով:*

Նույն ձևով տվյալ փորձում A_1, A_2,..., A_n $(n>2)$ պատահույթների համատեղ հանդես գալը մի պատահույթ է, որը կոչվում է այդ պատահույթների արտադրյալ և նշանակվում է $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$ պայմանանշանով:

Օրինակ 10: Եթե A-ն և B-ն նախորդ օրինակում բերված պատահույթներն են, ապա $A \cap B$-ն այն պատահույթն է, որ D տիրույթի վրա նետված կետը (նկ.31) կընկնի խիտ ստվերագծած տիրույթի վրա:

Օրինակ 11: Եթե խաղաթղթերի կապոցից հանենք պատահական խաղաթուղթ և A-ով նշանակենք այն պատահույթը, որ հանված խաղաթուղթն ունի կարմիր գույն, իսկ B-ով՝ այն պատահույթը, որ այն վեցանոց է, ապա $A \cap B$-ն այն պատահույթն է, որ հանված խաղաթուղթը կարմիր վեցանոց է:

Ակնհայտ է, որ տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները՝

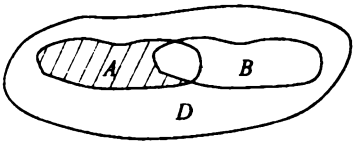
6°. $A \cap A = A$, 7°. $A \cap V = V$, 8°. $A \cap U = A$,

9°. $A \cap B = V$, եթե տվյալ փորձում A-ն ու B-ն անհամատեղելի պատահույթներ են,

10°. $A_i \cap A_j = V$, $(i, j = 1,2,...,n;\ i \neq j)$, եթե A_1-ը, A_2-ը, ... , A_n-ը տվյալ փորձում զույգ առ զույգ անհամատեղելի պատահույթներ են:

Սահմանում 11: *Տվյալ փորձում A պատահույթի հանդես գալն առանց B պատահույթի մի պատահույթ է, որը կոչվում է A և B պատահույթների տարբերություն և նշանակվում է $A \setminus B$ պայմանանշանով:*

Օրինակ 12: Եթե կետը նետենք A և B տիրույթներն իր մեջ պարունակող D հարթ տիրույթի վրա և A-ով նշանակենք այն պատահույթը, որ կետը կընկնի A տիրույթի վրա, իսկ B-ով այն պատահույթը, որ կետը կընկնի B տիրույթի վրա, ապա $A \setminus B$-ն այն պատահույթն է, որ կետը կընկնի 32-րդ նկարում ցույց տրված ստվերագծած տիրույթի վրա:



Նկ. 32

Ակնհայտ է, որ տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները՝

11°. $A \setminus A = V$, 12°. $U \setminus A = \overline{A}$, 13°. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$:

Սահմանում 12: *Տվյալ փորձում A_1, A_2,... պատահույթները կոչվում են հավասարահնարավոր, եթե հիմք չկա սպասելու, որ այդ պատահույթներից որևէ մեկի հանդես գալն ավելի հավանական է, քան մյուսներինը:*

Օրինակ 13: Համաչափ մետաղադրամը հարթության վրա նետելիս թիվ կամ զինանշան հանդես գալու պատահույթները հավասարահնարավոր են:

Սահմանում 13: *Հավասարահնարավոր, անհամատեղելի պատահույթների լրիվ խմբի յուրաքանչյուր պատահույթ կոչվում է տվյալ փորձի տարրական ելք կամ տարրական պատահույթ* (տե՛ս նաև [80,41]-ը):

Սահմանում 14: *Տվյալ փորձի բոլոր տարրական պատահույթների A_1, A_2,..., A_n խմբի A_{k_1}, A_{k_2}, ... , A_{k_m} պատահույթները կոչվում են նպաստավոր կամ բարենպաստ A պատահույթի հանդես գալու համար, եթե այդ պատահույթներից յուրաքանչյուրը հանդիսանում է A պատահույթի մասնավոր դեպքը՝ այսինքն, եթե A_{k_1}, A_{k_2}, ... , A_{k_m} պատահույթներից յուրաքանչյուրի հանդես գալուց հետևում է A-ի հանդես գալը:*

Հասկանալի է, որ որքան մեծ է A պատահույթին նպաստող տարրական պատահույթների թիվը, այնքան մեծ է այդ պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը: Մյուս կողմից, որքան մեծ է տվյալ փորձի բոլոր տարրական պատահույթների թիվը, այնքան փոքր է A-ի հանդես գալու հավանականությունը: Հետևաբար, վերջավոր թվով հավասարահնարավոր տարրական ելք ունեցող փորձում պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը բնական է սահմանել հետևյալ կերպ՝

ԳԼՈՒԽ XV

Սահմանում 15: *(Հավանականության դասական սահմանումը) n հավասարահնարավոր տարրական ելք ունեցող փորձում A պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը հավասար է այդ պատահույթին նպաստող տարրական ելքերի թվի հարաբերությանը տվյալ փորձի բոլոր ելքերի թվին:*

Այսպիսով, n հավասարահնարավոր տարրական ելք ունեցող փորձում A պատահույթի հանդես գալու հավանականությունն արտահայտվում է

$$P(A)=\frac{n(A)}{n} \qquad (1)$$

բանաձևով, որտեղ $P(A)$-ն տվյալ փորձում A պատահույթի հանդես գալու հավանականությունն է, իսկ $n(A)$-ն՝ այդ պատահույթին նպաստող տարրական ելքերի թիվը:

Օրինակ 14: Ի՞նչ հավանականությամբ նետված խաղոսկրի վերին նիստի վրա հանդես կգա կենտ թիվ:

Լուծում: Քանի որ տվյալ փորձի բոլոր տարրական ելքերի թիվը հավասար է 6-ի, իսկ մեզ հետաքրքրող A պատահույթի հանդես գալուն նպաստող ելքերի թիվը՝ 3-ի, ուստի, օգտվելով (1) բանաձևից՝ կստանանք

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}:$$

Օրինակ 15: 10 կարմիր և 5 սպիտակ գնդակ պարունակող արկղից պատահականորեն հանվում է երկու գնդակ: Ի՞նչ հավանականությամբ հանված երկու գնդակներն էլ կլինեն կարմիր գույնի:

Լուծում: Քանի որ տվյալ փորձի բոլոր տարրական ելքերի թիվը հավասար է C_{15}^2-ի [77,u4], իսկ մեզ հետաքրքրող A պատահույթին նպաստող ելքերի թիվը՝ C_{10}^2-ի, ուստի, համաձայն (1) բանաձևի, կունենանք [77,(6')].

$$P(A)=\frac{C_{10}^2}{C_{15}^2}=\frac{10\cdot 9}{15\cdot 14}=\frac{3}{7}:$$

Այժմ ապացուցենք հավանականությունների դասական սահմանումից բխող հետևյալ պնդումները՝

I. *Պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը մեկը չգերազանցող ոչ բացասական թիվ է:*

Իրոք, քանի որ կամայական A պատահույթին նպաստող տարրական ելքերի թիվը փորձի բոլոր տարրական ելքերի թիվը չգերազանցող ոչ բացասական թիվ է.

$$0\le n(A)\le n,$$

ուստի, համաձայն (1) բանաձևի, այդ պատահույթի հանդես գալու հավանականության համար կստանանք

$$0\le P(A)\le 1: \qquad (2)$$

Իսկ

II. *Հավաստի պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը հավասար է մեկի.*

$$P(U)=1: \qquad (3)$$

Իրոք, հավաստի պատահույթի սահմանման համաձայն, այդ պատահույթին նպաստող տարրական ելքերի թիվը հավասար է փորձի բոլոր տարրական ելքերի թվին: Նկատի ունենալով վերոգրյալը՝ կունենանք

$$P(U)=\frac{n(U)}{n}=\frac{n}{n}=1:$$

Իպա

III. *Անհնար պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը հավասար է զրոյի.*

$$P(\mathrm{V})=0: \qquad (4)$$

Իրոք, անհնար պատահույթի սահմանման համաձայն, այդ պատահույթին չի նպաստում փորձի ոչ մի տարրական ելք: Վերոգրյալից հետևում է, որ

$$P(\mathrm{V})=\frac{n(\mathrm{V})}{n}=\frac{0}{n}=0:$$

Իպա

IV. *Եթե A պատահույթը B պատահույթի մասնավոր դեպք է, ապա A պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը մեծ չէ B պատահույթի հանդես գալու հավանականությունից:*

Իրոք, եթե A պատահույթը B պատահույթի մասնավոր դեպքն է, ուրեմն A պատահույթի հանդես գալուն նպաստող տարրական ելքերի թիվը մեծ չէ B պատահույթի հանդես գալուն նպաստող տարրական ելքերի թվից.

$$n(A)\le n(B),$$

որտեղից կունենանք

$$P(A)=\frac{n(A)}{n}\le\frac{n(B)}{n}=P(B):$$

Իպա

V. *Համարժեք պատահույթներն ունեն հանդես գալու միևնույն հավանականությունը:*

Իրոք, եթե A-ն ու B-ն համարժեք պատահույթներ են, ուրեմն, համաձայն նախորդ պնդման, տեղի ունեն $P(A)\le P(B)$ և $P(B)\le P(A)$ անհավասարությունները, որտեղից էլ հետևում է, որ $P(A)=P(B)$:

Իպա

VI. *Հակադիր պատահույթների հանդես գալու հավանականությունների գումարը հավասար է մեկի.*

$$P(A)+P(\overline{A})=1: \qquad (5)$$

Իրոք, օգտվելով $n(\overline{A})=n-n(A)$ ակնհայտ հավասարությունից, կունենանք

$$P(A)+P(\overline{A})=\frac{n(A)}{n}+\frac{n(\overline{A})}{n}=\frac{n(A)}{n}+\frac{n-n(A)}{n}=1:$$

Իպա

ԳԼՈՒԽ XV

Ինչպես տեսնում ենք, հավանականության դասական սահմանումից կարող ենք օգտվել այն դեպքերում, երբ դիտարկվող փորձի բոլոր տարրական ելքերի թիվը վերջավոր է, ընդ որում այդ ելքերը հավասարահնարավոր են և անհամատեղելի: Սակայն շատ դեպքերում հնարավոր չի լինում դիտարկվող փորձի բոլոր տարրական ելքերը նշել: Ավելին, փորձի բոլոր տարրական ելքերի բազմությունը կարող է լինել անվերջ, իսկ այդ ելքերն էլ՝ ոչ հավասարահնարավոր: Հասկանալի է, որ նշված դեպքերում հավանականության դասական սահմանումը պիտանի չէ և այդ պատճառով նման դեպքերում օգտվում են հավանականության վիճակագրական սահմանումից, որի էությունը հետևյալում է՝

Դիցուք կատարվել է n փորձ, որոնց ժամանակ A պատահույթը հանդես է եկել m անգամ ($m \le n$):

Սահմանում 16: *n փորձերում A պատահույթի հանդես գալու թվի (m) և բոլոր փորձերի թվի m/n հարաբերությունը կոչվում է կատարված փորձերում A պատահույթի հանդես գալու հաճախություն:*

Պարզվում է, որ փորձերի թվի մեծացմանը զուգընթաց աճում է նաև m-ը և m/n հարաբերությունը մոտավորապես նույնն է մնում:

Պատահույթի հանդես գալու հաճախության նկատված հատկությունը կոչվում է հաճախության կայունության հատկություն:

Սահմանում 17: *Այն թիվը, որի շուրջը տատանվում է տվյալ պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը, երբ փորձերի թիվը մեծանում է, կոչվում է պատահույթի վիճակագրական հավանականություն:*

Պարզ է, որ օգտվելով պատահույթի վիճակարագրական հավանականության սահմանումից, անհնար է որոշել այդ պատահույթի հանդես գալու ճշգրիտ հավանականությունը:

§79. Հավանականությունների գումարման թեորեմը: Պայմանական հավանականություն: Անկախ և կախյալ պատահույթներ: Հավանականությունների բազմապատկման թեորեմը: Երկրաչափական հավանականություն:

Այս պարագրաֆում մենք կծանոթանանք այս կամ այն պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը գտնելուն վերաբերող մի շարք թեորեմների:

Թեորեմ 1: *Եթե A_1-ը և A_2-ը տվյալ փորձի անհամատեղելի պատահույթներ են, ապա այդ պատահույթների գումարի հավանականությունը*[*] *հավասար է նրանց հավանականությունների գումարին.*

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2): \qquad (1)$$

Ապացույց: Եթե տվյալ փորձի բոլոր տարրական ելքերի թիվը [78,u13] նշանակենք n-ով, իսկ A_1 և A_2 պատահույթներին նպաստող [78,u14] ելքերի թիվը՝ համապատասխանաբար $n(A_1)$-ով և $n(A_2)$-ով, կունենանք [78,(1)]

---

*) Հիշենք, որ պատահույթի հավանականություն ասելով [78], նկատի ունենք տվյալ փորձի ժամանակ դիտարկվող պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը:

$$P(A_1)=\frac{n(A_1)}{n},\ P(A_2)=\frac{n(A_2)}{n}:$$

Քանի որ A_1-ը և A_2-ը անհամատեղելի պատահույթներ են [78,u5], հետևաբար նրանցից որևէ մեկին նպաստող տարրական ելքերից և ոչ մեկը չի կարող նպաստող լինել նաև մյուսի համար: Ուրեմն $A_1 \cup A_2$ պատահույթին նպաստող տարրական ելքերի թիվը կլինի $n(A_1)+n(A_2)$, որտեղից էլ այդ պատահույթի հավանականության համար կստանանք

$$P(A_1 \cup A_2)=\frac{n(A_1 \cup A_2)}{n}=\frac{n(A_1)+n(A_2)}{n}=\frac{n(A_1)}{n}+\frac{n(A_2)}{n}=P(A_1)+P(A_2):$$

Իպա

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով կարելի է ապացուցել նաև հետևյալ ընդհանուր թեորեմը՝

Թեորեմ 1՝: *Եթե A_1-ը, A_2-ը, ..., A_k-ն $(k>2)$ տվյալ փորձի անհամատեղելի պատահույթներ են, ապա այդ պատահույթների գումարի հավանականությունը հավասար է նրանց հավանականությունների գումարին.*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_k): \qquad (1՝)$$

Կատարելով

$$A=A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k$$

նշանակումը և հաշվի առնելով, որ A_i $(i=1,2,...,k)$ անհամատեղելի պատահույթները A պատահույթի մասնավոր դեպքերն են [78,u3]՝ կարող ենք թեորեմ 1՝-ը վերածևակերպել հետևյալ կերպ՝

Թեորեմ 1՝՝: *Պատահույթի հավանականությունը հավասար է այդ պատահույթի բոլոր անհամատեղելի մասնավոր դեպքերի հավանականությունների գումարին:*

Հետևանք 1: *Եթե A_1, A_2, ..., A_k անհամատեղելի պատահույթները տվյալ փորձում կազմում են պատահույթների լրիվ խումբ, ապա այդ պատահույթների հավանականությունների գումարը հավասար է մեկի:*

Ապացույց: Ենթադրելով, որ A_1-ը, A_2-ը, ..., A_k-ն տվյալ փորձում կազմում են պատահույթների լրիվ խումբ, եզրակացնում ենք, որ $(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k)$-ն ստույգ պատահույթ է, այսինքն եզրակացնում ենք, որ տեղի ունի

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k)=1 \qquad (2)$$

հավասարությունը [78,u1,u7,5°,II]: Մյուս կողմից, քանի որ A_1-ը, A_2-ը, ..., A_k-ն անհամատեղելի պատահույթներ են՝ հետևաբար տեղի ունի (1՝) հավասարությունը: Միավորելով կատարված եզրակացությունները՝ ստանում ենք

$$P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_k)=1$$

հավասարությունը:

Իպա

ԳԼՈՒԽ XV

Հաշվի առնելով, որ A և $\overline{A}$ հակադիր պատահույթները [78,u8], կազմում են անհամատեղելի պատահույթների լրիվ խումբ և օգտվելով ապացուցած հետևանքից, նորից կստանանք, որ հակադիր պատահույթների հավանականությունների գումարը հավասար է մեկի [78,VI]:

Օրինակ 1: Արկղում կա 6 կարմիր և 3 սպիտակ գնդակ: Գտնել այն պատահույթի հավանականությունը, որ պատահական վերցրած երկու գնդակներից գոնե մեկը կլինի սպիտակ:

Լուծում: Մեզ հետաքրքրող A պատահույթը կլինի A_1 և A_2 անհամատեղելի պատահույթների գումարը, որտեղ A_1-ը այն պատահույթն է, որ վերցրած գնդակներից մեկն է սպիտակ, իսկ A_2-ը՝ այն պատահույթը, որ վերցրած երկու գնդակներն էլ սպիտակ են:

Օգտվելով (1) բանաձևից և հաշվի առնելով, որ n տարրերից m տարր ($m \le n$) ընտրելու եղանակների թիվը հավասար է C_n^m-ի [77,u4,(6')], կունենանք

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{C_3^1 C_6^1}{C_9^2} + \frac{C_3^2}{C_9^2} = \frac{7}{12}:$$

Նշենք, որ դիտարկվող խնդիրը հնարավոր է լուծել նաև [78,(5)] բանաձևի օգնությամբ:

Այժմ ապացուցենք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 2: *Եթե A_1-ը և A_2-ը տվյալ փորձի համատեղելի պատահույթներ են, ապա այդ պատահույթների գումարի հավանականությունը (կամ որ նույնն է՝ այդ պատահույթներից գոնե մեկի հանդես գալու հավանականությունը) հավասար է նշված պատահույթների հավանականությունների գումարից հանած նրանց համատեղ հանդես գալու հավանականությունը.*

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2): \qquad (3)$$

Ապացույց: Ենթադրենք A_1-ը և A_2-ը համատեղելի պատահույթներ են՝, և այդ պատահույթների գումարը ներկայացնենք (նկ.33)

նկ.33

$$A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1 \cap A_2) \qquad (4)$$

տեսքով [78,u9-u11]:

Նկատի ունենալով, որ A_1-ը և $(A_2 \setminus A_1 \cap A_2)$-ը ակնհայտորեն անհամատեղելի պատահույթներ են՝ (1) բանաձևի օգնությամբ կստանանք

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2 \setminus A_1 \cap A_2): \qquad (5)$$

Մյուս կողմից ունենք

$$A_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_2 \setminus A_1 \cap A_2), \qquad (6)$$

որտեղ $(A_1 \cap A_2)$-ը և $(A_2 \setminus A_1 \cap A_2)$-ը նույնպես անհամատեղելի պատահույթներ են:

Կրկին օգտվելով (1) բանաձևից (այս անգամ կիրառելով այն (6) բանաձևի

---

*) Այսինքն ենթադրենք փորձի ժամանակ A_1 և A_2 պատահույթներից որևէ մեկի հանդես գալը չի բացառում մյուսի հանդես գալու հնարավորությունը:

վրա), կստանանք

$$P(A_2)=P(A_1\cap A_2)+P(A_2\setminus A_1\cap A_2)$$

կամ որ նույնն է՝

$$P(A_2\setminus A_1\cap A_2)=P(A_2)-P(A_1\cap A_2) \qquad (7)$$

հավասարությունը:

Թեորեմի ապացույցն ավարտելու համար մնում է նկատել, որ (7) հավասարության հաշվառումով (5) հավասարությունը կընդունի պահանջվող (3) տեսքը:

Իպա

Օրինակ 2: 1-ից մինչև 12 բնական թվերից պատահական ձևով ընտրված թիվն ի՞նչ հավանականությամբ կբաժանվի 3-ի կամ 4-ի:

Լուծում: Դիտարկվող փորձի ժամանակ 3-ի վրա բաժանվող թիվ հանդես գալու պատահույթը նշանակենք A_1-ով, իսկ 4-ի վրա բաժանվող թիվ հանդես գալու պատահույթը՝ A_2-ով: A_1-ը և A_2-ը համատեղելի պատահույթներ են, որովհետև 12 թիվն ընտրելու դեպքում այդ երկու պատահույթներն էլ տեղի կունենան: Հետևաբար, օգտվելով (3) բանաձևից և հավանականություն դասական սահմանումից [78.u15], մեզ հետաքրքրող պատահույթի հանդես գալու հավանականության համար կունենանք

$$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cap A_2)=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}-\frac{1}{12}=\frac{1}{2}:$$

Նշենք, որ երեք համատեղելի պատահույթների դեպքում (3) բանաձևի փոխարեն կստանանք

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1\cap A_2)-$$
$$-P(A_1\cap A_3)-P(A_2\cap A_3)-P(A_1\cap A_2\cap A_3) \qquad (3')$$

բանաձևը:

Հաճախ անհրաժեշտ է լինում գտնել մի որևէ A պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը այն լրացուցիչ պայմանի դեպքում, որ արդեն հանդես է եկել B պատահույթը: Նման դեպքերում A պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը կնշանակենք $P_B(A)$-ով և կանվանենք A պատահույթի պայմանական հավանականություն՝ B պատահույթի իրականացման պայմանով:

Օրինակ 3: 5 կարմիր և 6 սպիտակ գնդակ պարունակող արկղից հաջորդաբար, պատահական ձևով հանում են երկու գնդակ: Գտնել հանված երկրորդ գնդակը սպիտակ լինելու պայմանական հավանականությունը այն պայմանով, որ առաջին գնդակը եղել է կարմիր:

Լուծում: Քանի որ, ըստ պայմանի, հանված առաջին գնդակը եղել է կարմիր, հետևաբար այն հանելուց հետո արկղում կմնա 4 կարմիր և 6 սպիտակ գնդակ, որտեղից, համաձայն հավանականության դասական սահմանման, որոնելի հավանականության համար կստանանք

$$P_{A_1}(B_2)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}:$$

Անցնելով անկախ և կախյալ պատահույթների հետ ծանոթանալուն՝ բերենք հետևյալ սահմանումները՝

ԳԼՈՒԽ XV

Սահմանում 1: *A-ն ու B-ն կոչվում են անկախ պատահույթներ, եթե տվյալ փորձում նրանցից մեկի հանդես գալը չի ազդում մյուսի հանդես գալու հավանականության վրա:*

Այլ խոսքով, A-ն ու B-ն կոչվում են անկախ պատահույթներ, եթե տեղի ունեն

$$P_A(B) = P(B)\ ,\ P_B(A) = P(A) \tag{8}$$

հավասարությունները:

Օրինակ 4: Նետվում է երկու մետաղադրամ: A-ով նշանակենք այն պատահույթը, որ առաջին մետաղադրամի վրա հանդես կգա թիվ, իսկ B-ով՝ այն պատահույթը որ երկրորդի վրա հանդես կգա զինանշան: Քանի որ A պատահույթի հանդես գալը ակնհայտորեն չի ազդում B պատահույթի հանդես գալու հավանականության վրա, ուստի A-ն ու B-ն տվյալ փորձում անկախ պատահույթներ են:

Սահմանում 2: *A-ն ու B-ն կոչվում են կախյալ պատահույթներ, եթե տվյալ փորձում նրանցից մեկի հանդես գալը ազդում է մյուսի հանդես գալու հավանականության վրա:*

Սահմանում 3: *A_1-ը, A_2-ը,..., A_n-ը $(n > 2)$ կոչվում են համախմբությամբ անկախ պատահույթներ, եթե այդ պատահույթներից յուրաքանչյուրի իրականացման պայմանական հավանականությունը, այն պայմանով, որ իրականացել է մնացած պատահույթների ցանկացած խումբ, հավասար է դիտարկվող պատահույթի ոչ պայմանական հավանականությանը.*

$$P_{A_m \cap A_k \cap \ldots \cap A_j}(A_i) = P(A_i) \quad (i = 1,2,\ldots n;\ m, k, \ldots, j \neq i): \tag{9}$$

Ապացուցենք նաև հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 3: *A և B կախյալ պատահույթների համատեղ իրականացման հավանականությունը հավասար է այդ պատահույթներից որևէ մեկի հավանականության և այդ պատահույթի իրականացման պայմանով մյուսի պայմանական հավանականության արտադրյալին.*

$$P(A \cap B) = P(A)\ P_A(B) = P(B)\ P_B(A): \tag{10}$$

Ապացույց: A պատահույթը ներկայացնելով $A \cap B$ և $A \cap \overline{B}$ անհամատեղելի պատահույթների գումարի տեսքով (նկ.34) և n-ով, k_1-ով ու k_2-ով համապատասխանաբար նշանակելով տվյալ փորձի բոլոր տարրական ելքերի և $A \cap B$ ու $A \cap \overline{B}$ պատահույթների իրականանալուն նպաստող տարրական ելքերի թիվը՝ հավանականության դասական սահմանման և (1) բանաձևի շնորհիվ կստանանք

նկ.34

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = \frac{k_1}{n} + \frac{k_2}{n} = \frac{k_1 + k_2}{n}:$$

Այնուհետև օգտվելով

$$P_A(B) = \frac{k_1}{k_1 + k_2}$$

ակնհայտ հավասարությունից՝ կունենանք

$$P(A)\,P_A(B)=\frac{k_1+k_2}{n}\cdot\frac{k_1}{k_1+k_2}=\frac{k_1}{n}$$

կամ

$$P(A)\;P_A(B)=P(A\cap B):$$

Թեորեմի ապացույցն ավարտելու համար մնում է նույն ձևով համոզվել, որ տեղի ունի

$$P(B)\;P_B(A)=P(A\cap B)$$

հավասարությունը և վերջին երկու հավասարությունները համեմատել:

Իպա

Հետևանք 2: *Եթե երկու պատահույթներից մեկն անկախ է մյուսից, ապա այդ պատահույթներն անկախ են:*

Ապացույց: Ենթադրելով, որ օրինակ, B պատահույթն անկախ է A պատահույթից.

$$P_A(B)=P(B)\,,$$

(10) բանաձևի շնորհիվ կստանանք

$$P(A)=P_B(A)\,,$$

ինչը նշանակում է, որ A պատահույթն էլ անկախ է B պատահույթից:

Իպա

Ապացուցած թեորեմում A-ն ու B-ն համարելով անկախ պատահույթներ՝ կստանանք

$$P(A\cap B)=P(A)\;P(B):\qquad(10')$$

Այսպիսով, կարող ենք ձևակերպել հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 4: *Տվյալ փորձում երկու անկախ պատահույթների համատեղ իրականացման հավանականությունը հավասար է այդ պատահույթների հավանականությունների արտադրյալին:*

Օրինակ 5: Ի՞նչ հավանականությամբ նետված երկու մետաղադրամների վրա էլ հանդես կգա զինանշան:

Լուծում: Քանի որ մետաղադրամներից որևէ մեկի վրա զինանշան կամ թիվ հանդես գալը կախված չէ նրանից, թե ինչ հանդես կգա մյուս մետաղադրամի վրա, ուստի խնդիրը կարելի է լուծել (10') բանաձևի օգնությամբ:

$P(I\Omega)$-ով, $P(II\Omega)$-ով և $P(I\Omega \text{ և } II\Omega)$-ով համապատասխանաբար նշանակելով առաջին մետաղադրամի վրա զինանշան, երկրորդի վրա զինանշան, առաջինի և երկրորդի վրա զինանշան հանդես գալու հավանականությունները՝ կունենանք

$$P(I\Omega \text{ և } II\Omega)=P(I\Omega)\;P(II\Omega)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}:$$

Կատարելով $A=A_1\cap A_2$ և $B=A_3$ նշանակումները՝ կարող ենք (10) բանաձևը ներկայացնել

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(A_1\cap A_2)\;P_{A_1\cap A_2}(A_3)$$

կամ որ նույնն է՝

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\, P_{A_1}(A_2) P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \qquad (11)$$

տեսքով, որտեղ $P_{A_1 \cap A_2}(A_3)$-ը A_3 պատահույթի պայմանական հավանականությունն է, A_1 և A_2 պատահույթների համատեղ իրականացման պայմանով:

Նույն դատողություններով կստանանք նաև

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) P_{A_1}(A_2)\, P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots P_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n) \quad (n > 3) \qquad (11')$$

բանաձևը:

Վերջին բանաձևերում համարելով, որ A_1-ը, A_2-ը,..., A_n-ը համախմբությամբ անկախ պատահույթներ են՝ կունենանք

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)\, P(A_2) \cdots P(A_n) \quad (n \geq 3):$$

Այսպիսով ստանում ենք հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ 4՝: *Տվյալ փորձում համախմբությամբ անկախ A_1, A_2,..., A_n պատահույթների համատեղ իրականացման հավանականությունը հավասար է այդ պատահույթների հավանականությունների արտադրյալին:*

Օրինակ 6: 6 սպիտակ և 4 կարմիր գնդակ պարունակող արկղից հաջորդաբար, պատահական ձևով հանում են երեք գնդակ: Ի՞նչ հավանականությամբ հանված գնդակներից երկուսը կլինեն կարմիր, իսկ մեկը՝ սպիտակ:

Լուծում: Հանված գնդակներից առաջինը կարմիր, երկրորդը կարմիր, երրորդը սպիտակ պատահույթը նշանակելով A_1-ով.

$$A_1 = I_{կ}, II_{կ}, III_{ս},$$

առաջինը կարմիր, երկրորդը սպիտակ, երրորդը կարմիր պատահույթը՝ A_2-ով.

$$A_2 = I_{կ}, II_{ս}, III_{կ},$$

առաջինը սպիտակ, երկրորդը կարմիր, երրորդը կարմիր պատահույթը՝ A_3-ով.

$$A_3 = I_{ս}, II_{կ}, III_{կ}$$

և հաշվի առնելով, որ մեզ հետաքրքրող A պատահույթը A_1, A_2 և A_3 անհամատեղելի պատահույթների գումարն է [78,ս6], (1՝) բանաձևի շնորհիվ կունենանք

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3): \qquad (ա)$$

Այնուհետև օգտվելով (11) բանաձևից՝ կստանանք

$$P(A_1) = P(I_{կ}, II_{կ}, III_{ս}) = P(I_{կ}) \cdot P_{I_{կ}}(II_{կ}) \cdot P_{I_{կ} \cap II_{կ}}(III_{ս}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} = \frac{1}{10}:$$

Նույն ձևով կունենանք

$$P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{10}:$$

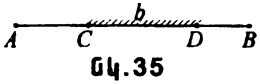
$P(A_1)$, $P(A_2)$ և $P(A_3)$ հավանականությունների համար ստացած արժեքները տեղադրելով (ա) հավասարության մեջ՝ կստանանք

$$P(A) = \frac{3}{10}:$$

Հաճախ անհրաժեշտ է լինում դիտարկել այնպիսի փորձեր, որոնք ունեն անվերջ բազմությամբ տարրական ելքեր: Ինչպես գիտենք [78], նման դեպքերում հավանականության դասական սահմանումը պիտանի չէ*):

Ծանոթանանք այդպիսի մի քանի փորձերի:

Դիցուք M կետը «նետվում է» a երկարություն ունեցող AB հատվածի վրա (նկ.35), որն իր մեջ պարունակում է b երկարություն ունեցող CD հատվածը, և պահանջվում է գտնել M կետը CD հատվածի վրա ընկնելու հավանականությունը:



նկ.35

Նկատի ունենալով, որ որոնելի հավանականությունը, ակնհայտորեն, ուղիղ համեմատական է CD հատվածի երկարությանը և կախված չէ այդ հատվածի դիրքից AB հատվածի վրա՝ կստանանք

$$P(M \in CD) = kb, \tag{12}$$

որտեղ, որոշման ենթակա k հաստատունը համեմատականության գործակից է, իսկ $P(M \in CD)$-ն այն պատահույթի հավանականությունն է, որ AB հատվածի վրա նետված M կետը կընկնի CD հատվածի վրա:

Հաշվի առնելով, որ AB հատվածի վրա նետված M կետը մեկ հավանականությամբ կընկնի այդ հատվածի վրա՝ կունենանք

$$P(M \in AB) = ka = 1,$$

որտեղից k հաստատունի համար կստանանք

$$k = \frac{1}{a}:$$

k-ի համար ստացած արժեքը տեղադրելով (12) հավասարության մեջ՝ կունենանք

$$P(M \in CD) = \frac{b}{a}: \tag{13}$$

Այսպիսով, AB հատվածի վրա նետված կետը այդ հատվածի մեջ ընկած CD հատվածի վրա ընկնելու հավանականությունը հավասար է CD և AB հատվածների երկարությունների հարաբերությանը:

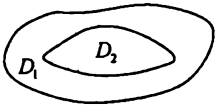
Նշենք, որ նկարագրված ձևով ներմուծված հավանականությունը կոչվում է երկրաչափական հավանականություն, ընդ որում այդ հավանականության համար տեղի ունեն այն բոլոր պնդումները, որոնք բխում են հավանականության դասական սահմանումից [78,I-VI]:

Կրկնելով (13) բանաձևի արտածմանը վերաբերող դատողությունները՝ նույն ձևով կստանանք, որ D_1, և D_1 տիրույթի մեջ ընկած D_2 հարթ տիրույթների (նկ.36) պարագայում նշված բանաձևը կընդունի

*) Որովհետև նշված սահմանման մեջ ենթադրվում է, որ փորձի բոլոր տարրական ելքերի թիվը վերջավոր է:

$$P(M \in D_2) = \frac{s_2}{s_1} \tag{14}$$

տեսքը, իսկ Ω_1, և Ω_1 տիրույթի մեջ ընկած Ω_2 տարածական տիրույթների պարագայում՝



Նկ.36

$$P(M \in \Omega_2) = \frac{v_2}{v_1} \tag{15}$$

տեսքը, որտեղ s_1-ը և s_2-ը համապատասխանաբար D_1 և D_2 տիրույթների մակերեսներն են, իսկ v_1-ը և v_2-ը՝ համապատասխանաբար Ω_1 և Ω_2 տիրույթների ծավալները:

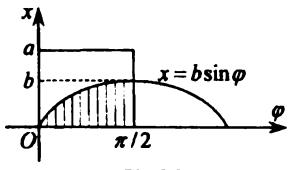
Նկ. 37

Օրինակ 7: (Բյուֆֆոնի խնդիրը) Հարթության վրա, որի վրա տարված են միմյանցից $2a$ հեռավորության վրա գտնվող զուգահեռ ուղիղներ (նկ.37), գցվում է $2b$ $(b < a)$ երկարությամբ AB հատված: Ի՞նչ հավանականությամբ այդ հատվածը կհատի ուղիղներից որևէ մեկը:

Լուծում: Խնդիրը լուծելու համար AB հատվածի միջնակետի հեռավորությունը հարթության վրա տրված մոտակա ուղղից նշանակենք x-ով, իսկ դիտարկվող հատվածի և այդ ուղղի կազմած անկյունը՝ φ-ով: Հասկանալի է, որ x և φ թվերով AB հատվածի դիրքը մոտակա ուղղի նկատմամբ կորոշվի միարժեքորեն: Նկատի ունենալով, որ x և φ մեծությունները համապատասխանաբար բավարարում են [6,u14]

$$0 \le x \le a, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

պայմաններին՝ եզրակացնում ենք, որ տրված հատվածի միջնակետի բոլոր հնարավոր դիրքերը որոշվում են a և $\pi/2$ կողմերով ուղղանկյան բոլոր կետերով: Այս կողմից, որպեսզի AB հատվածը հատի հարթության վրա տրված զուգահեռ ուղիղներից որևէ մեկը, անհրաժեշտ է և բավարար, որ x-ը բավարարի



Նկ.38

$$x \le b\sin\varphi$$

անհավասարությանը: Վերոգրյալից հետևում է, որ դիտարկվող հատվածը կհատի տրված զուգահեռ ուղիղներից որևէ մեկը այն և միայն այն ժամանակ, երբ այդ հատվածի միջնակետը ընկնի 38-րդ նկարում ցույց տրված ստվերագծած տիրույթի մեջ:

Հաշվելով նշված տիրույթի մակերեսը [35,8°], [40,(10)].

$$s = \int_0^{\pi/2} b\sin\varphi d\varphi = -b\cos\varphi\Big|_0^{\pi/2} = b$$

և օգտվելով (14) բանաձևից՝ մեզ հետաքրքրող պատահույթի հավանականության համար կստանանք

$$p = \frac{2b}{\pi a}:$$

§80. Հավանականության աքսիոմատիկ սահմանումը: Լրիվ հավանականությունների բանաձևը: Բայեսի բանաձևերը:

Պատահույթի հավանականության դասական, վիճակագրական և երկրաչափական սահմանումները ներմուծվել են հավանականությունների տեսության ձևավորման սկզբնական տարիներին և առ այսօր չեն կորցրել իրենց գործնական նշանակությունը: Երկար ժամանակ հավանականությունների տեսության հիմնական հասկացությունները ճշգրիտ կերպով սահմանված չէին: Բնական գիտությունների բուռն զարգացումը նոր, ավելի խիստ պահանջներ ներկայացրեց հավանականությունների տեսությանը, ինչը, մասնավորապես հանգեցրեց այդ տեսության աքսիոմատիզացմանը: Հավանականությունների տեսության աքսիոմատիկայի հիմքում դրվում է տարրական պատահույթների բազմության կամ ընտրման տարածության հասկացությունը, որը կնշանակենք U-ով:

Սահմանում 1: *Փորձի այն արդյունքը, որն իրենից բացի այլ մասնավոր դեպք չունի, կոչվում է տարրական պատահույթ:*

Յուրաքանչյուր փորձ ունի իր տարրական պատահույթների բազմությունը:

Օրինակ 1: Նետվող մետաղադրամի փորձում տարրական պատահույթների բազմությունը բաղկացած է թիվ և զինանշան պատահույթներից, իսկ նետվող խաղոսկրի փորձում՝ $E_1, E_2, \ldots, E_6$ պատահույթներից [78,o5]:

Այժմ դիտարկենք տարրական պատահույթների բազմության ենթաբազմություններից կազմված այնպիսի F բազմություն, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝

I. F բազմությունը որպես տարր պարունակում է U-ն,

II. եթե U բազմության A և B ենթաբազմությունները պատկանում են F բազմությանը, ապա $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A}$ և $\overline{B}$ բազմությունները նույնպես պատկանում են նրան,

III. եթե U բազմության $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ ենթաբազմությունները պատկանում են F բազմությանը, ապա $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$ և $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap \ldots$ բազմությունները նույնպես պատկանում են նրան*):

Կարող ենք հեշտությամբ համոզվել, որ դատարկ բազմությունը պատկանում է F-ին:

Իրոք, համաձայն F բազմության վրա դրված առաջին պայմանի՝ U-ն պատկանում է F-ին, իսկ համաձայն երկրորդ պայմանի՝ $\overline{U} = \varnothing$ բազմությունը նույնպես պատկանում է նրան:

Երկրորդ պայմանից հետևում է, որ F-ին են պատկանում նաև այդ բազմությանը պատկանող վերջավոր թվով պատահույթների գումարը, արտադրյալը, ինչպես նաև նրանց լրացումները:

Օրինակ 2: Դժվար չէ համոզվել, որ նետվող խաղոսկրի փորձում պատահույթների F բազմությունն ունի $C_6^0 + C_6^1 + \cdots + C_6^6 = 2^6 = 64$ տարր [77,u4], որոնք են V-ն, E_1-ը, E_2-ը,

*) F բազմությանը հաճախ անվանում են պատահույթների դաշտ:

..., E_6-ը, E_1E_2-ը, ..., E_5E_6-ը, $E_1E_2E_3$-ը, ..., $E_4E_5E_6$-ը, $E_1E_2E_3E_4$-ը, ..., $E_3E_4E_5E_6$-ը, $E_1E_2E_3E_4E_5$-ը, ..., $E_2E_3E_4E_5E_6$-ը, $E_1E_2E_3E_4E_5E_6$-ը:

Սահմանում 2: U *-ն կոչվում է հավաստի պատահույթ, իսկ* $\overline{U} = V$ *-ն՝ անհնար պատահույթ:*

Սահմանում 3: A *-ն ու* B *-ն կոչվում են անհամատեղելի պատահույթներ, եթե գոյություն չունի* U *բազմության տարր, որը պատկանի և՛* A *-ին, և՛* B *-ին:*

Պատահույթի հավանականությունը որոշող աքսիոմները ձևակերպելու համար նախ պատահույթների F դաշտին պատկանող յուրաքանչյուր A պատահույթի համապատասխանեցնենք մի թիվ, այդ թիվն անվանենք նշված պատահույթի հավանականություն և այն նշանակենք $P(A)$-ով:

I աքսիոմ: *Հավաստի պատահույթի հավանականությունը հավասար է մեկի.*

$$P(U) = 1: \tag{1}$$

II աքսիոմ: *Եթե* A_1, A_2, ..., A_n *պատահույթները զույգ առ զույգ անհամատեղելի են, ապա տեղի ունի*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) \tag{2}$$

հավասարությունը:

III աքսիոմ: *Եթե* A_1, A_2, ..., A_n, ... *պատահույթները զույգ առ զույգ անհամատեղելի են, ապա տեղի ունի*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n \cup ...) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + \cdots \tag{2'}$$

հավասարությունը:

Նշենք, որ երկրորդ աքսիոմը կոչվում է հավանականությունների գումարման աքսիոմ, իսկ երրորդը՝ հավանականությունների գումարման ընդհանրացված աքսիոմ:

Թվարկած աքսիոմներից հեշտությամբ ստացվում են հետևյալ հետևանքները՝

1°. *Անհնար պատահույթի հավանականությունը հավասար է զրոյի,*

2°. *Կամայական պատահույթի հավանականությունը մեկը չգերազանցող ոչ բացասական թիվ է,*

3°. A *և* $\overline{A}$ *հակադիր պատահույթների հավանականությունների գումարը հավասար է մեկի,*

4°. *Եթե* A *պատահույթը* B *պատահույթի մասնավոր դեպքն է* $(A \subseteq B)$, *ապա* A *-ի հավանականությունը մեծ չէ* B *-ի հավանականությունից,*

5°. *Կամայական* A *և* B *պատահույթների համար տեղի ունի*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{3}$$

բանաձևը:

Նկատի ունենալով, որ $P(A \cap B) \geq 0$, (3) բանաձևից կստանանք

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B): \tag{3'}$$

Այսպիսով, կամայական երկու պատահույթների գումարի հավանականությունը մեծ չէ այդ պատահույթների հավանականությունների գումարից:

5°ա. *Կամայական A_1, A_2, ..., A_n պատահույթների համար տեղի ունի*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) \le P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) \qquad (3'')$$

բանաձևը, այսինքն՝ վերջավոր թվով պատահույթների գումարի հավանականությունը մեծ չէ այդ պատահույթների հավանականությունների գումարից:

Նշենք, որ աքսիոմների բերված համակարգը անհակասելի է, բայց ոչ լրիվ. նույնիսկ միևնույն U բազմության համար F բազմության տարրերի հավանականությունները կարող ենք ընտրել տարբեր ձևերով:

Ինչպես տեսնում ենք, պատահույթի հանդես գալու հավանականության աքսիոմատիկ սահմանման մեջ մենք գործ ունենք փորձի տարրական պատահույթների U բազմության, այդ բազմությունից ստացվող պատահույթների F բազմության և F բազմության վրա որոշված P ֆունկցիայի հետ:

$\{U, F, P\}$ *համախումբը կանվանենք հավանականային տարածություն:*

Անցնելով լրիվ հավանականությունների բանաձևի արտածմանը՝ ենթադրենք տվյալ փորձի ժամանակ A պատահույթը կարող է իրականանալ միայն լրիվ խումբ կազմող H_1, H_2,..., H_n անհամատեղելի [78,u5-u7] պատահույթներից մեկի հետ*):

Քանի որ H_1, H_2,..., H_n պատահույթները կազմում են անհամատեղելի պատահույթների լրիվ խումբ, հետևաբար տեղի ունի A պատահույթի

$$A = \sum_{k=1}^{n} (A \cap H_k) \qquad (4)$$

ներկայացումը, որտեղ $(A \cap H_1)$-ը, $(A \cap H_2)$-ը, ..., $(A \cap H_n)$-ը նույնպես անհամատեղելի պատահույթներ են: Օգտվելով անհամատեղելի պատահույթների գումարման թեորեմից [79,թ1]՝ կունենանք

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A \cap H_k): \qquad (5)$$

Այնուհետև $P(A \cap H_k)$ $(k = 1,2,...,n)$ հավանականությունների վրա կիրառելով հավանականությունների բազմապատկման թեորեմը [79,թ3]՝ (5) հավասարությանը կտանք

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k)\ P_{H_k}(A) \qquad (6)$$

տեսքը:

Ստացած բանաձևը կոչվում է լրիվ հավանականությունների բանաձև և կարևոր դեր է խաղում հավանականությունների տեսության մեջ:

---

*) H_1, H_2,..., H_n պատահույթները կանվանենք վարկածներ:

Օրինակ 3: Երկու արկղերից առաջինում կա 5 սպիտակ և 6 կարմիր գնդակ, իսկ երկրորդում՝ 3 սպիտակ և 2 կարմիր գնդակ: Առաջին արկղից պատահական ձևով մեկ գնդակ տեղափոխում են երկրորդի մեջ, որից հետո երկրորդ արկղից պատահական ձևով հանում են մեկ գնդակ: Ի՞նչ հավանականությամբ հանված գնդակը կլինի կարմիր գույնի:

Լուծում: Հաշվի առնելով, որ մեզ հետաքրքրող պատահույթը համարժեք է հետևյալ պատահույթին՝ առաջին արկղից հանում են սպիտակ գնդակ, իսկ երկրորդից՝ կարմիր գնդակ կամ և՛ առաջինից, և՛ երկրորդից հանում են կարմիր գնդակ: Օգտվելով լրիվ հավանականությունների բանաձևից՝ այդ պատահույթի հավանականության համար կունենանք [78,(1)]

$$P(II_k)=P(I_u \text{ և } II_k)+P(I_k \text{ և } II_k)=P(I_u)\cdot P_{I_u}(II_k)+P(I_k)\cdot P_{I_k}(II_k)=\frac{5}{11}\cdot\frac{2}{6}+\frac{6}{11}\cdot\frac{3}{6}=\frac{14}{33}:$$

Այժմ նորից ենթադրենք, որ տվյալ փորձի ժամանակ A պատահույթը կարող է իրականանալ միայն լրիվ խումբ կազմող $H_1, H_2, \ldots, H_n$ անհամատեղելի պատահույթներից մեկի հետ (այսինքն նորից ենթադրենք տեղի ունի A պատահույթի (4) ներկայացումը) և դնենք հետևյալ խնդիրը՝

Գտնել H_i $(i=1,2,\ldots,n)$ պատահույթի պայմանական հավանականությունը [79], A պատահույթի իրականացման պայմանով:

Դրված խնդիրը լուծելու համար կրկին օգտվենք հավանականությունների բազմապատկման թեորեմից.

$$P(A\cap H_i)=P(A)\,P_A(H_i)=P(H_i)\,P_{H_i}(A) \tag{7}$$

և $P_A(H_i)$ հավանականությունները $(i=1,2,\ldots,n)$ ներկայացնենք

$$P_A(H_i)=\frac{P(H_i)\,P_{H_i}(A)}{P(A)} \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{8}$$

հավասարությունների միջոցով:

Լրիվ հավանականությունների բանաձևի շնորհիվ (8) հավասարությունները կընդունեն

$$P_A(H_i)=\frac{P(H_i)\,P_{H_i}(A)}{\sum_{k=1}^{n}P(H_k)\,P_{H_k}(A)} \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{9}$$

տեսքը:

Ստացած հավասարությունները կոչվում են վարկածների հավանականություններ կամ Բայեսի բանաձևեր:

Նշենք, որ

$$P(H_1)=P(H_2)=\cdots=P(H_n)$$

մասնավոր դեպքում Բայեսի բանաձևերը կընդունեն հեշտ հիշվող

$$P_A(H_i)=\frac{P_{H_i}(A)}{\sum_{k=1}^{n}P_{H_k}(A)} \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{9'}$$

տեսքը:

Օրինակ 4: Նույն չափի ասեղներ արտադրող երկու հաստոցներից առաջինի արտադրողականությունը երեք անգամ մեծ է երկրորդի արտադրողականությունից: Հայտնի է նաև, որ առաջին հաստոցի պատրաստած ասեղների միայն 40%-ն է որակով, իսկ երկրորդի՝ միայն 60%-ը: Պահեստից պատահականորեն ընտրվել է որակով ասեղ: Գտնել հավանականությունը, որ այդ ասեղն արտադրել է երկրորդ հաստոցը:

Լուծում: Եթե A-ով նշանակենք այն պատահույթը, որ վերցրած ասեղը որակով է, H_1-ով՝ այն պատահույթը, որ այդ ասեղը պատարաստել է առաջին հաստոցը, իսկ H_2-ով՝ այն պատահույթը, որ այն պատրաստել է երկրորդ հաստոցը, կունենանք

$$P(H_1)=\frac{3n}{4n}=\frac{3}{4}, \quad P(H_2)=\frac{n}{4n}=\frac{1}{4},$$

$$P_{H_1}(A)=\frac{1}{3n}\cdot 3n\cdot\frac{40}{100}=0{,}4, \quad P_{H_2}(A)=\frac{1}{n}\cdot n\cdot\frac{60}{100}=0{,}6,$$

որտեղ n-ը երկրորդ հաստոցի արտադրած ասեղների քանակն է:

Խնդրի լուծումն ավարտելու համար, մնում է օգտվել Բայեսի բանաձևից.

$$P_A(H_2)=\frac{P(H_2)\,P_{H_2}(A)}{P(H_1)P_{H_1}(A)+P(H_2)P_{H_2}(A)}=\frac{1}{3}:$$

§81. Անկախ փորձերի խնդիրը: Լապլասի լոկալ և ինտեգրալային թեորեմները: Պուասսոնի թեորեմը:

Սահմանում 1: *Կասենք, որ ունենք անկախ փորձերի հաջորդականություն, եթե յուրաքանչյուր փորձի ժամանակ հանդես եկած պատահույթի հավանականությունը կախված չէ նախորդ փորձերի արդյունքներից:*

Ենթադրենք կատարվում են n անկախ փորձեր, որոնցից յուրաքանչյուրում A պատահույթը կարող է հանդես գալ կամ ոչ: Ենթադրելով նաև, որ այդ փորձերից յուրաքանչյուրում A պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը նույնն է և հավասար է p-ի՝ դնենք հետևյալ խնդիրը՝

կատարված n անկախ փորձերում ի՞նչ հավանականությամբ A պատահույթը հանդես կգա ճիշտ k անգամ (հետևաբար $\overline{A}$ [78,u8] պատահույթն էլ՝ ճիշտ $n-k$ անգամ):

Դրված խնդիրը լուծելու համար նախ նկատենք, որ n անկախ փորձերում A պատահույթը կարող է հանդես գալ k անգամ C_n^k [77,u4] տարբեր եղանակներով:

Իրոք, այն, այսպես կոչված, բարդ պատահույթների թիվը, որ կատարված n անկախ փորձերում A պատահույթը հանդես կգա k անգամ ($\overline{A}$-ն էլ՝ $n-k$ անգամ) հավասար է n տարրերից k տարր ընտրելու եղանակների թվին, այսինքն հավասար է n տարրերից k-ական զուգորդությունների թվին:

Մյուս կողմից, համաձայն անկախ պատահույթների հավանականությունների բազմապատկման թեորեմի [79,p4], մեզ հետաքրքրող յուրաքանչյուր բարդ պատահույթի հավանականությունը հավասար է $p^k q^{n-k}$-ի, որտեղ

$q=1-p$-ն դիտարկվող անկախ փորձերում $\overline{A}$ պատահույթի հանդես գալու հավանականությունն է [78,(5)]: Հաշվի առնելով նաև, որ նշված բարդ պատահույթները դիտարկվող փորձում անհամատեղելի են [78,u6] և օգտվելով անհամատեղելի պատահույթների հավանականությունների գումարման թեորեմից [79,թ1]՝ կատարված n անկախ փորձերում A պատահույթի ճիշտ k անգամ հանդես գալու հավանականության համար կունենանք [77,(7)]

$$p_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}: \qquad (1)$$

Ստացած բանաձևը կոչվում է Բեռնուլլիի բանաձև:

Օրինակ 1: Գտնել մետաղադրամի 5 նետումների ժամանակ 4 անգամ թիվ հանդես գալու հավանականությունը:

Լուծում: Հաշվի առնելով, որ մեզ հետաքրքրող պատահույթը

ԹԹԹԶ, ԹԹԶԹ, ԹԶԹԹ, ԶԹԹԹ, ԶԹԹԹ

անհամատեղելի, բարդ պատահույթների գումարն է, որտեղ Թ նշանակում է,որ մեկ փորձի ժամանակ հանդես է եկել թիվ, իսկ Զ՝ զինանշան և նկատի ունենալով, որ յուրաքանչյուր փորձում մետաղադրամի վրա թիվ (զինանշան) հանդես գալու հավանականությունը հավասար է 0,5-ի՝ (1) բանաձևի շնորհիվ որոնելի հավանականության համար կստանանք

$$p_5(4)=\frac{5!}{4!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{5}{32}:$$

Նկատենք, որ Բեռնուլլիի բանաձևը հնարավորություն է տալիս հաշվելու նաև այն բարդ պատահույթի հավանականությունը, որ կատարված n անկախ փորձերում A պատահույթը հանդես կգա k_1-ից մինչև k_2 անգամ $(0\le k_1<k_2\le n)$: Մասնավորապես, n անկախ փորձերում A պատահույթը ամենաքիչը k անգամ հանդես գալու հավանականության համար կունենանք

$$p_k=\sum_{m=k}^{n}p_n(m)=\sum_{m=k}^{n}C_n^m p^m q^{n-m}: \qquad (2)$$

Ինչպես տեսնում ենք, n-ի մեծ արժեքների դեպքում Բեռնուլլիի բանաձևից օգտվելը բերում է բավականաչափ մեծ թվերի հետ գործողություններ կատարելուն: Այդ պատճառով հարց է ծագում. գոյություն ունի՞ արդյոք n անկախ փորձերում A պատահույթի ճիշտ k անգամ հանդես գալու հավանականության հաշվման ավելի պարզ եղանակ, եթե այդ փորձերից յուրաքանչյուրում A պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը նույնն է:

Շնակերպած հարցի պատասխանը տալիս է Մուավր-Լապլասի լոկալ թեորեմը, որը բերում ենք առանց ապացուցման:

Թեորեմ 1: *(Մուավր-Լապլաս) Եթե n անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում A պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը նույնն է և հավասար է p-ի $(0<p<1$, հետևաբար $\overline{A}$ պատահույթի հանդես գալու հավանականությունն էլ՝ $q=1-p$-ի), ապա այդ փորձերում A պատահույթի ճիշտ k*

անգամ հանդես գալու հավանականությունը (անկախ նրանից թե ինչ հաջորդականությամբ) մոտավորապես հավասար է

$$y=\frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} \tag{3}$$

ֆունկցիայի արժեքին x_0 *կետում, որտեղ*

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\ x_0=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}: \tag{4}$$

Ինչպես տեսնում ենք, n *-ի բավականաչափ մեծ արժեքների դեպքում* n *անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում նույն հավանականությունն ունեցող* A *պատահույթի ճիշտ* k *անգամ հանդես գալու հավանականությունը հեշտ է հաշվել*

$$p_n(k)\approx\frac{\varphi(x_0)}{\sqrt{npq}} \tag{3'}$$

մոտավոր բանաձևով[*], *որտեղ* $\varphi(x)$ *-ն ու* x_0 *-ն որոշվում են (4) բանաձևերով:*

Նկատի ունենալով, որ (3′) բանաձևն ունի գործնական մեծ նշանակություն՝ $\varphi(x)$ ֆունկցիայի համար կազմվել են մանրամասն աղյուսակներ: Քանի որ $\varphi(x)$-ն ակնհայտորեն զույգ ֆունկցիա է, ուստի այդ աղյուսակները կազմվել են x -ի միայն դրական արժեքների համար (հասկանալի է, որ վերոհիշյալ աղյուսակներից կարելի է օգտվել նաև x -ի բացասական արժեքների դեպքում):

Պարզվում է $p_n(k)$ հավանականության արժեքը կախված է ոչ միայն n -ից և k -ից, այլ նաև pq արտադրյալի ընդունած արժեքից: Ընդ որում, որքան այդ արտադրյալը մոտենում է իր մեծագույն արժեքին, այնքան նշված հավանականությունը մոտենում է իր ճշգրիտ արժեքին: Քանի որ p և q դրական թվերի գումարը հավասար է մեկի, ուստի $p=q=1/2$ դեպքում pq արտադրյալն ընդունում է մեծագույն արժեք: Հետևաբար, որքան p և q թվերը մոտենան 1/2-ի, այնքան $p_n(k)$ $(k=0,1,..,n)$ հավանականության՝ (3′) բանաձևով հաշված արժեքը կմոտենա այդ հավանականության ճշգրիտ արժեքին: Ներկայացված դատողություններից հետևում է, որ որքան p և q հավանականությունների արժեքները հեռանան 1/2-ից, այնքան (3′) բանաձևով ստացած արդյունքը կհեռանա ճշգրիտ արդյունքից:

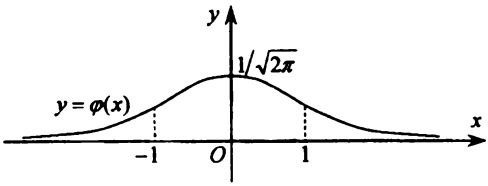
Հաշվելով $\varphi(x)$ ֆունկցիայի առաջին և երկրորդ կարգի ածանցյալները [27,(7),(8′)], [28,(2),(9),(15)].

$$\varphi'(x)=-\frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\ \varphi''(x)=\frac{x^2-1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

---

[*]) Ընդ որում n -ի աճման հետ մեկտեղ այդ մոտավորությունը ճշգրտվում է:

և գտնելով այդ ածանցյալների զրոներն ու նշանապահպանման միջակայքերը՝ կստանանք դիտարկվող ֆունկցիայի էքստրեմումը, շրջման կետերը, մոնոտոնության, ուռուցիկության և գոգավորության միջակայքերը [33], [34]: Համոզվելով նաև, որ աբսցիսների առանցքը $\varphi(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի միակ ասիմպտոտն է՝ եզրակացնում ենք, որ այդ ֆունկցիայի գրաֆիկն ունի 39-րդ նկարում պատկերված տեսքը:



Նկ.39

Նշենք, որ $\varphi(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկն անվանում են հավանականությունների կոր ($x=\pm 1$ արժեքները այդ կորի շրջման կետերի աբսցիսներն են):

Գործնականում մեծ հետաքրքրություն է ներկայացնում հետևյալ խնդիրը՝

կատարվում են n անկախ փորձեր, որոնցից յուրաքանչյուրում A պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը նույնն է և հավասար p-ի $(0<p<1)$: Պահանջվում է գտնել այն բարդ պատահույթի հավանականությունը, որ կատարված փորձերում A պատահույթը հանդես կգա ոչ քիչ, քան k_1 անգամ և ոչ շատ, քան k_2 անգամ:

Վերոհիշյալ հավանականությունը կնշանակենք $p_n(k_1 \le k \le k_2)$-ով կամ պարզապես $p_n(k_1,k_2)$-ով և կանվանենք n անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում նույն հավանականությունն ունեցող A պատահույթի k_1-ից մինչև k_2 անգամ հանդես գալու հավանականություն:

Հետևյալ թեորեմը, որը նույնպես բերում ենք առանց ապացուցման, հանդիսանում է վերևում ձևակերպած խնդրի լուծումը՝

Թեորեմ 2: *(Լապլասի ինտեգրալային թեորեմը) Եթե n անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում A պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը նույնն է և հավասար է p-ի**) $(0<p<1)$, *ապա այդ փորձերում A պատահույթի k_1-ից մինչև k_2 անգամ հանդես գալու հավանականությունն արտահայտվում է*

$$p_n(k_1,k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt \qquad (5)$$

*մոտավոր բանաձևով***), *որտեղ*

$$a=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}, \quad b=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}} \quad (0\le k_1<k_2\le n;\, a<b): \qquad (6)$$

---

*) $\overline{A}$ պատահույթի հավանականությունն էլ՝ $q=1-p$-ի:

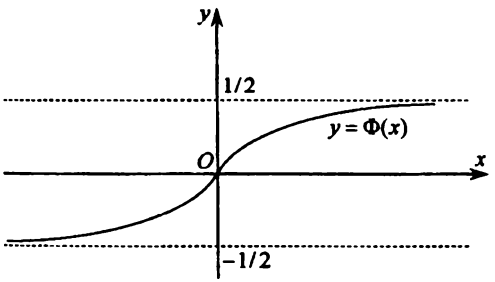
**) n-ի աճման հետ մեկտեղ (5) մոտավորությունը ճշգրտվում է:

Ինչպես գիտենք, (5) բանաձևում մասնակցող ինտեգրալը տարրական ֆունկցիաներով չի արտահայտվում [37]: Ուստի այն խնդիրներում, որտեղ օգտագործվում է Լապլասի ինտեգրալային թեորեմը, օգտվում են

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt \qquad (7)$$

ֆունկցիայի համար կազմած (որը կոչվում է Լապլասի ֆունկցիա) հատուկ աղյուսակներից:

Նկատի ունենալով, որ $\Phi(x)$ -ը կենտ ֆունկցիա է (համոզվելու համար անհրաժեշտ է (7) բանաձևում կատարել ինտեգրման փոփոխականի $t=-z$ փոխարինում), այդ աղյուսակները կազմվել են x -ի միայն դրական արժեքների համար:



Նկ. 40

Հետազոտելով $\Phi(x)$ ֆունկցիան՝ կհամոզվենք, որ այդ ֆունկցիայի գրաֆիկն ունի 40-րդ նկարում պատկերված տեսքը:

Լապլասի ֆունկցիայի միջոցով $p_n(k_1,k_2)$ հավանականությունը հաշվելու համար անհրաժեշտ է (5) բանաձևի աջ մասն արտահայտել այդ ֆունկցիայի արժեքներով [40,8*].

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^a e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^a e^{-\frac{t^2}{2}}dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^a e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(b)-\Phi(a):$$

Այսպիսով, եթե n անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում A պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը նույնն է և հավասար է p -ի՝ $(0<p<1)$, *ապա այդ փորձերում A պատահույթի k_1 -ից մինչև k_2 անգամ* $(0\le k_1<k_2\le n)$ *հանդես գալու հավանականությունը կարելի է հաշվել*

$$p(k_1,k_2)\approx\Phi(b)-\Phi(a) \qquad (8)$$

մոտավոր բանաձևով, որտեղ $\Phi(x)$ -ը տրվում է (7) բանաձևով, իսկ a -ն ու b -ն՝ (6) բանաձևերով:

Մուավր-Լապլասի լոկալ թեորեմը քննարկելիս մենք տեսանք, որ ինչքան n անկախ փորձերում A պատահույթի հանդես գալու p հավանականությունը մոտենում է զրոյի, այնքան այդ թեորեմը վատ է գործում, այսինքն այնքան

*) Տե՛ս նախորդ էջի տողատակի առաջին պարզաբանումը:

$p_n(k)$ հավանականությունը հեռանում է իր ճշգրիտ արժեքից: Մյուս կողմից, շատ խնդիրներում անհրաժեշտ է լինում հաշվել $p_n(k)$ հավանականությունները՝ հատկապես փոքր p-երի դեպքում: Պարզվում է գոյություն ունի բանաձև*), որը հնարավորություն է տալիս փոքր p-երի և շատ մեծ n-երի դեպքում աննշան սխալով հաշվել $p_n(k)$ հավանականությունները: Նշված բանաձևը ստանալու համար ենթադրենք կատարվում են փորձերի տարբեր խմբաքանակներ, ընդ որում առաջին խմբաքանակը բաղկացած է մեկ փորձից, երկրորդը՝ երկու փորձից, երրորդը՝ երեք փորձից և այդպես շարունակ: Ենթադրենք նաև n-րդ $(n=1,2,...)$ խմբաքանակի պատահույթներն իրարից անկախ են և ունեն միևնույն p_n հավանականությունը, որը կախված է միայն այդ խմբաքանակի համարից:

Շարադրված պայմանների իրականանալու դեպքում տեղի ունի հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 3: *(Պուասսոն) Եթե n-ը անսահմանության ձգտելիս p_n հավանականությունը ձգտում է զրոյի, իսկ $a_n = np_n$ արտադրյալը՝ դրական հաստատուն է.*

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} np_n = a \quad (a>0),$$

ապա տեղի ունի

$$\lim_{n\to\infty} p_n(k) = \frac{a^k}{k!}e^{-a} \tag{9}$$

բանաձևը, որտեղ k-ն փորձերի n-րդ խմբաքանակում տվյալ պատահույթի հանդես գալու թիվն է:

Ապացույց: Նկատի ունենալով, որ դիտարկվող խնդրում

$$p_n = \frac{a_n}{n},$$

Բեռնուլլիի բանաձևով արտահայտվող $p_n(k)$ հավանականության համար կստանանք

$$p_n(k) = C_n^k p_n^k q_n^{n-k} = \frac{n(n-1)\cdots[n-(k-1)]}{k!}\left(\frac{a_n}{n}\right)^k\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots[n-(k-1)]}{n^k}\cdot\frac{a_n^k\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^n\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^{-k}}{k!} =$$

$$= \frac{a_n^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^n\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^{-k}, \quad (q_n = 1-p_n):$$

*) Այն ստացել է Պուասսոնը:

Այժմ, եթե հետևյալ սահմանի հաշվառումով [25,(11),(16)].

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-n/a_n}\right)^{\frac{n}{a_n}(-a_n)}\right]=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-n/a_n}\right)^{\frac{n}{a_n}}\right]^{-\lim\limits_{n\to\infty}a_n}=e^{-a}$$

$p_n(k)$ հավանականության համար ստացած արտադրյալում անցնենք սահմանի, երբ n-ը ձգտում է անսահմանության, հեշտությամբ կստանանք (9) բանաձևը [21,o3]:

Իպա

Օրինակ 2: Կատարվել է 5000 կրակոց: Գտնել առնվազն երկու անգամ թիրախին դիպչելու հավանականությունը, եթե յուրաքանչյուր կրակոցի ժամանակ նրան դիպչելու հավանականությունը հավասար է 0,001-ի:

Լուծում: Որոնելի հավանականությունը նշանակելով $p(k\geq 2)$-ով և օգտվելով

$$\sum_{k=0}^{5000}p_{5000}(k)=1$$

ակնհայտ հավասարությունից՝ կունենանք

$$p(k\geq 2)=\sum_{k=2}^{5000}p_{5000}(k)=1-p_{5000}(0)-p_{5000}(1):$$

Հաշվի առնելով, որ դիտարկվող խնդրում

$$a_{5000}=5000\cdot 0{,}001=5$$

և (9) բանաձևի միջոցով գտնելով $p_{5000}(0)$ և $p_{5000}(1)$ հավանականությունները.

$$p_{5000}(0)\approx e^{-5},\quad p_{5000}(1)\approx 5e^{-5},$$

մեզ հետաքրքրող պատահույթի հավանականության համար կստանանք

$$p(k\geq 2)\approx 1-6e^{-5}\approx 0{,}96:$$

§82. Պատահական մեծություններ: Դիսկրետ պատահական մեծության բաշխման օրենքը: Հավանականությունների երկանդամային (բինոմական) բաշխումը: Հավանականությունների Պուասսոնի բաշխումը: Երկչափ պատահական մեծություններ:

Այժմ ծանոթանանք հավանականությունների տեսության կարևորագույն հասկացություններից ևս մեկին:

Սահմանում 1: *Այն մեծությունը, որը փորձի ժամանակ իր արժեքների բազմությունից պատահականորեն ընդունում է որևէ արժեք, կոչվում է պատահական մեծություն:*

Պատահական մեծությունների օրինակներ են՝ նետված խաղոսկրի վերին նիստի վրա հանդես եկած միավորների թիվը, հեռախոսակայանի տվյալ օրվա կանչերի թիվը, կրակոցների ժամանակ թիրախը խոցելու թիվը և այլն:

Պատահական մեծությունները կնշանակենք լատիներեն մեծատառերով, իսկ այդ մեծությունների հնարավոր արժեքները՝ համապատասխան փոքրատառերով:

ԳԼՈՒԽ XV

Հասկանալի է, որ պատահական մեծության արժեքների բազմության տալը բավարար չէ այդ մեծության մասին լիարժեք պատկերացում կազմելու համար: Պատահական մեծությունը այն դեպքում կդառնա հավանականությունների տեսության ուսումնասիրման առարկա, եթե տրվեն այդ մեծության բոլոր արժեքների բազմությունը և այդ արժեքներին համապատասխանող հավանականությունները:

Սահմանում 2: *Կասենք, որ X -ը դիսկրետ պատահական մեծություն է, եթե այդ մեծության արժեքների բազմությունը վերջավոր է կամ՝ հաշվելի*[1]*:*

Դիսկրետ պատահական մեծությունը տրվում է աղյուսակի ձևով, ընդ որում այդ աղյուսակի առաջին տողում տրվում են նշված մեծության բոլոր արժեքները, իսկ երկրորդում՝ նրանց համապատասխան հավանականությունները.

Աղյուսակ 1

X	x_1	x_2	...	x_n	...
P	p_1	p_2	...	p_n	...

$$p_n = P(X = x_n) \quad (n = 1,2,...):$$

Աղյուսակը, որը ներառում է դիսկրետ պատահական մեծության արժեքների բազմությունը և այդ արժեքների համապատասխան հավանականությունները, կոչվում է տրված պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման օրենք կամ պարզապես տրված մեծության բաշխման օրենք:

Եթե X պատահական մեծությունն ընդունում է վերջավոր թվով արժեքներ.

$$x_1, x_2, ..., x_n,$$

ապա

$$X = x_1, \; X = x_2, ..., \; X = x_n$$

տարրական պատահույթները կազմում են անհամատեղելի պատահույթների լրիվ խումբ [78,u6,u7,u13] և այդ պատճառով այդ պատահույթների հավանականությունների գումարը հավասար է մեկի.

$$P(X = x_1) + P(X = x_2) + \cdots + P(X = x_n) = 1: \tag{1}$$

Նույն ձևով, աղյուսակ 1-ի մեջ մտնող հավանականությունների գումարը հավասար է մեկի.

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1 \quad (0 \le p_n \le 1; \; n = 1,2,...), \tag{2}$$

քանի որ $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ -ը այն (հավաստի) պատահույթի հավանականությունն է, որ X պատահական մեծությունն ընդունում է իր բոլոր արժեքներից որևէ մեկը:

Օրինակ 1: Նետված խաղոսկրի վերին նիստի վրա հանդես եկած թիվը պատահական մեծություն է, որի բաշխման օրենքը տրվում է աղյուսակ 2-ով.

Աղյուսակ 2

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

[1]) Տե՛ս [18,u13]-ը:

Այժմ նորից անդրադառնանք Բեռնուլլիի անկախ փորձերի հաջորդականությանը [81,u1]:

Ինչպես գիտենք, եթե կատարված n անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում A պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը նույնն է և հավասար է p-ի, ապա այդ փորձերում նշված պատահույթի ճիշտ k անգամ հանդես գալու հավանականությունն արտահայտվում է

$$p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (0 \le k \le n) \tag{3}$$

բանաձևով [81,(1)], որտեղ q-ն $(q = 1 - p)$ $\overline{A}$ պատահույթի [78,u8] հանդես գալու հավանականությունն է: Նկատի ունենալով վերոգրյալը և հաշվի առնելով, որ n անկախ փորձերում A պատահույթի հանդես գալու թիվը պատահական մեծություն է՝ եզրակացնում ենք, որ այդ մեծության բաշխման օրենքն ունի հետևյալ տեսքը՝

Աղյուսակ 3

X	0	1	...	k	...	$n-1$	n
P	q^n	npq^{n-1}	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	$np^{n-1}q$	p^n

Սահմանում 3: *Կասենք, որ դիսկրետ պատահական մեծությունն ունի հավանականությունների երկանդամային (բինոմական) բաշխում, եթե այդ մեծության բաշխման օրենքը տրվում է աղյուսակ 3-ով:*

Բերված անվանումը կապված է այն փաստին, որ 3-րդ աղյուսակով տրվող բաշխման հավանականությունները հանդիպում են $q + p$ երկանդամի (բինոմի) n աստիճանի

$$(q+p)^n = q^n + npq^{n-1} + \dots + C_n^k p^k q^{n-k} + \dots + p^n \quad \left[(q+p)^n = \sum_{k=0}^{\infty} C_n^k p^k q^{n-k}\right] \tag{4}$$

վերլուծության համապատասխան գումարելիներին:

Ի դեպ, հաշվի առնելով, որ $q + p = 1$, (4) վերլուծությունից կստանանք, որ 3-րդ աղյուսակով տրվող բաշխման բոլոր հավանականությունների գումարը հավասար է մեկի.

$$q^n + npq^{n-1} + \dots + C_n^k p^k q^{n-k} + \dots + np^{n-1}q + p^n = 1: \tag{4'}$$

Նշենք, որ հավանականությունների երկանդամային բաշխման օրենքը պարունակում է երկու պարամետր՝ p-ն և n-ը:

Օրինակ 2: Մետաղադրամը նետում են երկու անգամ: Գտնել զինանշան հանդես գալու թվի երկանդամային բաշխման օրենքը:

Լուծում: Նկատի ունենալով, որ դիտարկվող խնդրում $n = 2$, $p = q = 0{,}5$ և օգտվելով 3-րդ աղյուսակից՝ կստանանք մեզ հետաքրքրող բաշխման օրենքը.

Աղյուսակ 4

X	0	1	2
P	1/4	1/2	1/4

Այժմ ծանոթանանք դիսկրետ պատահական մեծության հավանականությունների Պուասսոնի բաշխման օրենքին:

ԳԼՈՒԽ XV

Սահմանում 4: *Կասենք, որ դիսկրետ պատահական մեծությունն ունի հավանականությունների Պուասսոնի բաշխում, եթե այդ մեծության բաշխման օրենքը տրվում է հետևյալ աղյուսակով՝*

Աղյուսակ 5

X	0	1	...	n	...
P	e^{-a}	ae^{-a}	...	$\frac{a^n}{n!}e^{-a}$	...

որտեղ a դրական հաստատունը կոչվում է բաշխման պարամետր:

Գումարելով 5-րդ աղյուսակով տրվող բաշխման բոլոր հավանականությունները՝ կստանանք [63,(14)].

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}e^{-a}=e^{-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}=e^{-a}e^{a}=1:$$

Այսպիսով, հավանականությունների Պուասսոնի բաշխման բոլոր հավանականությունների գումարը հավասար է մեկի.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}e^{-a}=1: \qquad (5)$$

Հաշվի առնելով, որ a-ն դրական հաստատուն է, (5) հավասարությունից կստանանք

$$0<\frac{a^n}{n!}e^{-a}<1 \quad (n=1,2,...), \qquad (6)$$

ինչը նշանակում է, որ Պուասսոնի բաշխման հավանականությունները մեկից փոքր դրական թվեր են:

Գործնականում հաճախ անհրաժեշտ է լինում դիտարկել այնպիսի փորձեր, որոնց արդյունքը որոշվում է երկու պատահական մեծությունների արժեքներով:

Օրինակ 3: Կոորդինատական հարթության վրա նետված կետի շեղումը տրված կետից որոշվում է երկու պատահական մեծությունների արժեքներով:

Սահմանում 5: *X և Y պատահական մեծությունների արժեքներից կազմած բոլոր հնարավոր (x,y) թվազույգերի բազմությունը, որտեղ x-ը և y-ը համապատասխանաբար պատկանում են X և Y պատահական մեծությունների արժեքների բազմություններին, կոչվում է նշված մեծություններից կազմված երկչափ պատահական մեծություն և նշանակվում է (X,Y) պայմանանշանով:*

Համաձայն բերված սահմանման, օրինակ 3-ում հիշատակված շեղումը տրված կետից երկչափ պատահական մեծություն է:

Սահմանում 6: *Կասենք, որ (X,Y)-ը դիսկրետ երկչափ պատահական մեծություն է, եթե այդ մեծության արժեքների բազմությունը վերջավոր է կամ հաշվելի:*

Դիցուք X և Y պատահական մեծությունների բաշխման օրենքները*) համապատասխանաբար տրվում են

*) Որոշակիության համար ենթադրում ենք, որ X և Y պատահական մեծությունների արժեքների բազմությունը վերջավոր է:

Աղյուսակ 6

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

Աղյուսակ 7

Y	y_1	y_2	...	y_k
p	q_1	q_2	...	q_k

աղյուսակներով: Այդ դեպքում (X,Y) դիսկրետ երկչափ պատահական մեծությունը տրվում է մի աղյուսակի օգնությամբ, որի առաջին սյան մեջ և առաջին տողում համապատասխանաբար տրվում են X և Y պատահական մեծութ-

Աղյուսակ 8

X \ Y	y_1	y_2	...	y_j	...	y_k
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1j}	...	p_{1k}
x_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2j}	...	p_{2k}
...	...	...	...	...	...	...
x_i	p_{i1}	p_{i2}	...	p_{ij}	...	p_{ik}
...	...	...	...	...	...	...
x_n	p_{n1}	p_{n2}	...	p_{nj}	...	p_{nk}

յունների բոլոր արժեքները, իսկ i-րդ $(i=1,2,...,n)$ տողի և j-րդ $(j=1,2,...,k)$ սյան հատման կետում՝ $X=x_i$ և $Y=y_j$ պատահույթների համատեղ հանդես գալու

$$p_{ij}=P(X=x_i \cap Y=y_j) \tag{7}$$

հավանականությունը:

Աղյուսակը, որը ներառում է (X,Y) դիսկրետ պատահական մեծության արժեքների բազմությունը և այդ արժեքների համապատասխան հավանականությունները, կոչվում է տրված երկչափ պատահական մեծության բաշխման օրենք:

Պարզ է, որ աղյուսակ 8-ի մեջ մտնող p_{ij} հավանականությունների գումարը հավասար է մեկի.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}=1\,, \tag{8}$$

քանի որ (8) կրկնակի գումարը այն հավաստի պատահույթի հավանականությունն է, որ (X,Y) պատահական մեծությունն ընդունում է իր բոլոր արժեքներից որևէ մեկը:

Այժմ, ունենալով (X,Y) դիսկրետ պատահական մեծության բաշխման օրենքը՝ ստանանք X և Y պատահական մեծությունների բաշխման օրենքները:

Նկատի ունենալով, որ X պատահական մեծության x_i արժեքը կարող է հանդես գալ Y պատահական մեծության յուրաքանչյուր արժեքի հետ.

$$X=x_i=(X=x_i \cap Y=y_1)\cup(X=x_i \cap Y=y_2)\cup...\cup(X=x_i \cap Y=y_k)$$

և հաշվի առնելով, որ

$$(X = x_i \cap Y = y_1),\ (X = x_i \cap Y = y_2), \ldots, (X = x_i \cap Y = y_k)$$

պատահույթներն անհամատեղելի են, անհամատեղելի պատահույթների գումարման թեորեմի շնորհիվ կունենանք [79,թ1]

$$p_i = P(X = x_i) = P[(X = x_i \cap Y = y_1) \cup (X = x_i \cap Y = y_2) \cup \ldots \cup (X = x_i \cap Y = y_k)] =$$

$$= P(X = x_i \cap Y = y_1) + P(X = x_i \cap Y = y_2) + \cdots + P(X = x_i \cap Y = y_k) =$$

$$= p_{i1} + p_{i2} + \cdots + p_{ik} \qquad (i = 1,2,\ldots,n):$$

Կարող ենք նույն ձևով համոզվել, որ Y պատահական մեծությունն իր y_j արժեքն ընդունում է

$$q_j = P(Y = y_j) = p_{1j} + p_{2j} + \cdots + p_{nj} \quad (j = 1,2,\ldots,k)$$

հավանականությամբ:

Այսպիսով, եթե (X,Y) պատահական մեծության բաշխման օրենքը տրվում է աղյուսակ 8-ով, ապա X պատահական մեծությունն իր x_i արժեքն ընդունում է մի հավանականությամբ, որը հավասար է (p_{ij}) մատրիցի i-րդ տողի տարրերի գումարին, իսկ Y պատահական մեծությունն իր y_j արժեքն ընդունում է մի հավանականությամբ, որը հավասար է այդ մատրիցի j-րդ սյան տարրերի գումարին.

$$p_i = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{k} p_{ij} \quad (i = 1,2,\ldots,n), \quad q_j = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} \quad (j = 1,2,\ldots,k): \qquad (9)$$

Այլ խոսքով, եթե (X,Y) դիսկրետ պատահական մեծության բաշխման օրենքը տրվում է աղյուսակ 8-ով, ապա X և Y պատահական մեծությունների բաշխման օրենքներն էլ համապատասխանաբար տրվում են 6-րդ և 7-րդ աղյուսակներով, որտեղ p_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ հանականությունները որոշվում են (9) բանաձևերից առաջինով, իսկ q_j $(j = 1,2,\ldots,k)$ հավանականությունները՝ այդ բանաձևերից երկրորդով:

Սահմանում 7: *X և Y դիսկրետ պատահական մեծությունները կոչվում են անկախ պատահական մեծություններ, եթե ցանկացած i-ի $(i = 1,2,\ldots,n)$ և ցանկացած j-ի $(j = 1,2,\ldots,k)$ համար $X = x_i$-ն և $Y = y_j$-ն անկախ պատահույթներ են:*

Պարզվում է ունենալով X և Y անկախ պատահական մեծությունների բաշխման օրենքները՝ կարող ենք ստանալ նաև (X,Y) պատահական մեծության բաշխման օրենքը:

Իրոք, դիցուք X և Y պատահական մեծությունների բաշխման օրենքները համապատասխանաբար տրվում են 6-րդ և 7-րդ աղյուսակներով: Օգտվելով անկախ պատահույթների բազմապատկման թեորեմից [79,թ4]՝ կստանանք

$$p_{ij} = P(X = x_i \cap Y = y_j) = P(X = x_i)\,P(Y = y_j) = p_i\,q_j \quad (i = 1,2,\dots,n\,;\ j = 1,2,\dots,k) : (10)$$

(X,Y) երկչափ պատահական մեծության բաշխման օրենքը ստանալու համար մնում է $p_{ij} = P(X = x_i \cap Y = y_j)$ հավանականությունների համար ստացած արժեքները տեղադրել 8-րդ աղյուսակի մեջ:

Իպա

Օրինակ 4: Նետում են երկու խաղոսկր: Ստանալ (X,Y) երկչափ պատահական մեծության բաշխման օրենքը, որտեղ X պատահական մեծությունը առաջին խաղոսկրի վերին նիստի վրա հանդես եկած թիվն է, իսկ Y -ը՝ երկրորդի:

Լուծում: Օգտվելով օրինակ 1-ից և վերևում ապացուցած պնդումից՝ եզրակացնում ենք, որ մեզ հետաքրքրող երկչափ պատահական մեծության բաշխման օրենքում մասնակցող բոլոր հավանականությունները հավասար են 1/36-ի:

Վերջում բերենք նաև հետևյալ սահմանումները՝

Սահմանում 8: *c հաստատունի և X դիսկրետ պատահական մեծության արտադրյալ ասելով կհասկանանք այն պատահական մեծությունը, որի արժեքները ստացվում են X մեծության արժեքները c հաստատունով բազմապատկելով: Ընդ որում, եթե X մեծության բաշխման օրենքը տրվում է աղյուսակ 1-ով, ապա cX պատահական մեծության բաշխման օրենքն էլ տրվում է հետևյալ աղյուսակով՝*

Աղյուսակ 9

X	cx_1	cx_2	...	cx_n	...
p	p_1	p_2	...	p_n	...

Սահմանում 9: *X և Y պատահական մեծությունների արժեքներից կազմած բոլոր xy արտադրյալների բազմությունը, որտեղ x -ը պատկանում է X մեծության արժեքների բազմությանը, իսկ y -ը՝ Y մեծության արժեքների բազմությանը, կոչվում է X և Y պատահական մեծությունների արտադրյալ և նշանակվում XY -ով:*

Նույն ձևով սահմանվում է նաև երկուսից մեծ թվով պատահական մեծությունների արտադրյալը:

Սահմանում 10: *X և Y պատահական մեծությունների արժեքներից կազմած բոլոր $x+y$ գումարների բազմությունը, որտեղ x -ը պատկանում է X մեծության արժեքների բազմությանը, իսկ y -ը՝ Y մեծության արժեքների բազմությանը, կոչվում է X և Y պատահական մեծությունների գումար և նշանակվում է $X+Y$ -ով:*

Նույն ձևով սահմանվում է նաև երկուսից մեծ թվով պատահական մեծությունների գումարը:

ԳԼՈՒԽ XV

§83. Դիսկրետ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը, դիսպերսիան, միջին քառակուսային շեղումը և նրանց հատկությունները:

Պատահական մեծություններին վերաբերող շատ խնդիրներում անհրաժեշտություն է առաջանում իմանալ որոշ թվային մեծություններ, որոնք դիտարկվող պատահական մեծությունը բնութագրում են գումարային իմաստով: Այդպիսի թվային բնութագրիչներից են պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը, դիսպերսիան և միջին քառակուսային շեղումը:

Ենթադրելով, որ X դիսկրետ պատահական մեծությունն ընդունում է վերջավոր թվով արժեքներ՝ ծանոթանանք այդ մեծության նշված թվային բնութագրիչներին:

Սահմանում 1: *X դիսկրետ պատահական մեծության բոլոր արժեքների և այդ արժեքների համապատասխան հավանականությունների արտադրյալների գումարը կոչվում է նշված պատահական մեծության միջին արժեք կամ մաթեմատիկական սպասում և նշանակվում է $M(X)$-ով:*

Այսպիսով, եթե X պատահական մեծության բաշխման օրենքն ունի 6-րդ աղյուսակում [82] բերված տեսքը, ապա, համաձայն սահմանման, այդ մեծության մաթեմատիկական սպասումն արտահայտվում է

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \quad \left(\sum_{i=1}^{n} p_i = 1\right) \tag{1}$$

բանաձևով:

Դիսկրետ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումն օժտված է հետևյալ հատկություններով՝

1°. *Հաստատուն մեծության մաթեմատիկական սպասումը հավասար է այդ մեծությանը.*

$$M(c)=c \quad (c=const): \tag{2}$$

Իրոք, c հաստատունը համարելով պատահական մեծություն, որն այդ արժեքն ընդունում է մեկ հավանականությամբ և այլ արժեք չի ընդունում՝ մաթեմատիկական սպասման սահմանման համաձայն կունենանք

$$M(c)=c\cdot 1=1:$$

Իպա

2°. *Հաստատուն արտադրիչը կարելի է դուրս բերել մաթեմատիկական սպասման նշանի տակից.*

$$M(cX)=c\,M(X) \quad (c=const): \tag{3}$$

Իրոք, ենթադրելով որ X պատահական մեծության բաշխման օրենքը տրվում է 6-րդ աղյուսակով և օգտվելով cX $(c=const)$ պատահական մեծության սահմանումից [82,u8] ու (1) բանաձևից՝ կստանանք

$$M(cX)=cx_1p_1+cx_2p_2+\cdots+cx_np_n=c(x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n)=c\,M(X):$$

Իպա

3°. *Երկու դիսկրետ պատահական մեծությունների գումարի մաթեմատիկական սպասումը հավասար է այդ մեծությունների մաթեմատիկական սպասումների գումարին.*

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y): \qquad (4)$$

Իրոք, ենթադրելով, որ X և Y դիսկրետ պատահական մեծությունների հավանականությունների բաշխման օրենքները համապատասխանաբար տրվում են 6-րդ և 7-րդ աղյուսակներով [82], ինչպես նաև օգտվելով [82,(9)] բանաձևերից՝ $X+Y$ պատահական մեծության [82,u10] մաթեմատիկական սպասման համար կունենանք

$$M(X+Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(x_i+y_j)p_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}x_ip_{ij}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}y_jp_{ij}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{k}p_{ij}+\sum_{j=1}^{k}y_j\sum_{i=1}^{n}p_{ij}=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i+\sum_{j=1}^{k}y_jq_j=M(X)+M(Y),$$

որտեղ $p_{ij}=P(X=x_i\cap Y=y_j)$ $(i=1,2,...,n;\ j=1,2,...,k)$:

Իպա

4°. *Երկու դիսկրետ պատահական մեծությունների տարբերության մաթեմատիկական սպասումը հավասար է այդ մեծությունների մաթեմատիկական սպասումների տարբերությանը՝*

$$M(X-Y)=M(X)-M(Y): \qquad (4')$$

Իրոք, օգտվելով դիսկրետ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասման երկրորդ և երրորդ հատկություններից՝ կունենանք

$$M(X-Y)=M[(X+(-Y)]=M(X)+M(-Y)=M(X)-M(Y):$$

Իպա

5°. *Երկու անկախ դիսկրետ պատահական մեծությունների արտադրյալի մաթեմատիկական սպասումը հավասար է այդ մեծությունների մաթեմատիկական սպասումների արտադրյալին.*

$$M(XY)=M(X)\ M(Y): \qquad (5)$$

Իրոք, ենթադրելով, որ X և Y անկախ պատահական մեծությունների [82,u7] հավանականությունների բաշխման օրենքները համապատասխանաբար տրվում են 6-րդ և 7-րդ աղյուսակներով, օգտվելով [82,(10)] բանաձևերից և հաշվի առնելով, որ XY պատահական մեծության [82,u9] բաշխման օրենքն ունի

Աղյուսակ 10

XY	x_1y_1	...	x_iy_j	...	x_ny_k
P	p_1q_1	...	p_iq_j	...	p_nq_k

տեսքը՝ այդ մեծության մաթեմատիկական սպասման համար կստանանք

$$M(XY)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}x_iy_jp_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}x_iy_jp_iq_j=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i\sum_{j=1}^{k}y_jq_j=M(X)\ M(Y):$$

Իպա

ԳԼՈՒԽ XV

Այժմ ենթադրելով, որ X դիսկրետ պատահական մեծության արժեքների բազմությունը հաշվելի է և այդ մեծության հավանականությունների բաշխման օրենքը տրվում է աղյուսակ 1-ով [82]՝ դիտարկենք

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n \tag{6}$$

շարքը:

Սահմանում 2: *Եթե (6)-ը բացարձակ զուգամետ շարք է, ապա այդ շարքի գումարը կոչվում է աղյուսակ 1-ով տրվող հավանականությունների բաշխման օրենք ունեցող X պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասում.*

$$M(X) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n , \tag{7}$$

հակառակ դեպքում կասենք, որ X պատահական մեծությունը մաթեմատիկական սպասում չունի:

Պարզվում է, որ եթե աղյուսակ 1-ով տրվող բաշխման օրենք ունեցող պատահական մեծությունն ունի մաթեմատիկական սպասում, ապա այդ սպասումն օժտված է նույն հատկություններով, ինչ և վերջավոր թվով արժեքներ ունեցող պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը:

Խնդիր 1: *Ապացուցել, որ դիսկրետ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը գտնվում է այդ մեծության ամենափոքր և ամենամեծ արժեքների միջև:*

Լուծում: Դիցուք X դիսկրետ պատահական մեծության բաշխման օրենքը տրվում է 6-րդ աղյուսակով [82]: m-ով և M-ով նշանակելով տրված պատահական մեծության համապատասխանաբար ամենափոքր և ամենամեծ արժեքները՝ կստանանք [82,(1)]

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n \le Mp_1 + Mp_2 + \cdots + Mp_n = M(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) = M \cdot 1 = M ,$$

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n \ge mp_1 + mp_2 + \cdots + mp_n = m(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) = m \cdot 1 = m :$$

Այսպիսով, նշված բաշխման օրենքն ունեցող X պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը բավարարում է

$$m \le M(X) \le M$$

անհավասարություններին, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Խնդիր 2: Արկղում կա 3 սպիտակ և 7 կարմիր գնդակ: Պատահականորեն հանվում է 2 գնդակ: Գտնել հանված սպիտակ գնդակների թվի մաթեմատիկական սպասումը:

Լուծում: Մեզ հետաքրքրող պատահական մեծությունը նշանակենք X-ով: Հասկանալի է, որ X մեծության հնարավոր արժեքներն են 0-ն, 1-ը և 2-ը: Այդ արժեքներին համապատասխանող հավանականությունները նշանակելով p_0-ով, p_1-ով և p_2-ով՝ կունենանք [77,(6')], [78,(1)]

$$p_0 = \frac{C_7^2}{C_{10}^2} = \frac{7}{15}, \quad p_1 = \frac{C_3^1 C_7^1}{C_{10}^2} = \frac{7}{15}, \quad p_2 = \frac{C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{15}:$$

Խնդրի լուծումն ավարտելու համար մնում է օգտվել (1) բանաձևից.

$$M(X) = 0 \cdot \frac{7}{15} + 1 \cdot \frac{7}{15} + 2 \cdot \frac{1}{15} = \frac{3}{5}:$$

Նկատենք, որ տարբեր պատահական մեծություններ կարող են ունենալ միևնույն մաթեմատիկական սպասումը: Հետևաբար, բնութագրելով միայն պա-

տահական մեծության միջին արժեքը՝ մաթեմատիկական սպասումը չի կարող լրիվ պատկերացում տալ տրված մեծության մասին: Այդ պատճառով մաթեմատիկական սպասման հետ մեկտեղ ներմուծվում են նաև պատահական մեծության այլ թվային բնութագրիչներ: Այսպես, գնահատելու համար պատահական մեծության արժեքների ցրումը իր մաթեմատիկական սպասման շուրջը՝ մտցնենք այդ մեծության դիսպերսիայի հասկացությունը:

Նախ ծանոթանանք պատահական մեծության շեղման հասկացությանը:

Սահմանում 3: *X պատահական մեծության և նրա մաթեմատիկական սպասման տարբերությունը կոչվում է X մեծության շեղում իր մաթեմատիկական սպասումից կամ պարզապես X մեծության շեղում և նշանակվում է X^0-ով:*

Այսպիսով, համաձայն բերված սահմանման, X պատահական մեծության շեղումն իր մաթեմատիկական սպասումից արտահայտվում է

$$X^0 = X - M(X) \tag{8}$$

բանաձևով:

Նշենք, որ X և X^0 պատահական մեծությունների բաշխման օրենքները սերտորեն կապված են միմյանց. եթե X մեծության բաշխման օրենքը տրվում է աղյուսակ 6-ով, ապա X^0 մեծության բաշխման օրենքն էլ տրվում է հետևյալ աղյուսակով՝

Աղյուսակ 11

X^0	$x_1 - M(X)$	$x_2 - M(X)$	...	$x_n - M(X)$
P	p_1	p_2	...	p_n

Թեորեմ 1: *X պատահական մեծության շեղման մաթեմատիկական սպասումը հավասար է զրոյի.*

$$M(X^0) = 0: \tag{9}$$

Ապացույց: Օգտվելով պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասման առաջին և չորրորդ հատկություններից՝ կստանանք

$$M(X^0) = M[X - M(X)] = M(X) - M[M(X)] = M(X) - M(X) = 0:$$

Իսպա

Սահմանում 4: *Դիսկրետ պատահական մեծության շեղման քառակուսու մաթեմատիկական սպասումը կոչվում է այդ մեծության դիսպերսիա և նշանակվում է $D(X)$-ով:*

Այսպիսով, համաձայն սահմանման, X պատահական մեծության դիսպերսիան արտահայտվում է

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = M(X^0)^2 \tag{10}$$

բանաձևով:

Նկատի ունենալով, որ X պատահական մեծության շեղման բաշխման օրենքն ունի 11-րդ աղյուսակում բերված տեսքը և օգտվելով պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասման սահմանումից՝ կստանանք

$$D(X)=p_1[x_1-M(X)]^2+p_2[x_2-M(X)]^2+\cdots+p_n[x_n-M(X)]^2 \quad [D(X)\geq 0]: \quad (11)$$

Այսպիսով, դիսկրետ պատահական մեծության դիսպերսիան հավասար է այդ մեծության շեղման քառակուսու բոլոր արժեքների և այդ արժեքների համապատասխան հավանականությունների արտադրյալների գումարին:

Այժմ, արտածենք պատահական մեծության դիսպերսիայի հաշվման բանաձևը:

Թեորեմ 2: *X պատահական մեծության դիսպերսիան հավասար է տրված մեծության քառակուսու մաթեմատիկական սպասման և այդ մեծության մաթեմատիկական սպասման քառակուսու տարբերությանը.*

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X): \quad (12)$$

Ապացույց: Նկատի ունենալով, որ $M(X)$-ը և $M^2(X)$-ը հաստատուններ են և օգտվելով պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասման առաջին չորս հատկություններից՝ կունենանք

$$D(X)=M[X-M(X)]^2=M[X^2-2X\,M(X)+M^2(X)]=$$
$$=M(X^2)-2M(X)M(X)+M^2(X)=M(X^2)-M^2(X):$$

Իպա

Օրինակ 1: Գտնել այն պատահական մեծության դիսպերսիան, որի բաշխման օրենքը տրվում է հետևյալ աղյուսակով՝

Աղյուսակ 12

X	1	3	6
P	0.2	0.5	0.3

Լուծում: *Առաջին եղանակ:* Նախ, օգտվելով (1) բանաձևից՝ հաշվենք տրված պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը.

$$M(X)=1\cdot 0.2+3\cdot 0.5+6\cdot 0.3=3.5:$$

Այնուհետև կազմենք X^0 ու $(X^0)^2$ պատահական մեծությունների բաշխման օրենքները.

Աղյուսակ 13

X^0	-2.5	-0.5	2.5
P	0.2	0.5	0.3

Աղյուսակ 14

$(X^0)^2$	6.25	0.25	6.25
P	0.2	0.5	0.3

Օգտվելով նաև (10) բանաձևից՝ դիտարկվող պատահական մեծության դիսպերսիայի համար կստանանք

$$D(X)=6.25\cdot 0.2+0.25\cdot 0.5+6.25\cdot 0.3=3.25:$$

Երկրորդ եղանակ: Նկատի ունենալով, որ X^2 պատահական մեծության բաշխման օրենքն ունի

Աղյուսակ 15

X^2	1	9	36
P	0.2	0.5	0.3

տեսքը՝ հաշվենք այդ մեծության մաթեմատիկական սպասումը.

$$M(X^2)=1\cdot 0.2+9\cdot 0.5+36\cdot 0.3=15.5:$$

Այնուհետև, օգտվելով (12) բանաձևից՝ հաշվենք դիտարկվող պատահական մեծության դիսպերսիան.

$$D(X)=15.5-12.25=3.25:$$

Դիսկրետ պատահական մեծության դիսպերսիան օժտված է հետևյալ հատկություններով.

1°. *Հաստատուն մեծության դիսպերսիան հավասար է զրոյի.*

$$D(c)=0 \quad (c=const): \tag{13}$$

Իրոք, օգտվելով (2) և (10) բանաձևերից՝ կունենանք

$$D(c)=M[c-M(c)]^2=M(c-c)^2=M(0)=0:$$

Իպա

2°. *Հաստատուն արտադրիչը կարելի է քառակուսի բարձրացնելով դուրս բերել դիսպերսիայի նշանի տակից.*

$$D(cX)=c^2D(X) \quad (c=const): \tag{14}$$

Իրոք, օգտվելով (3) և (10) բանաձևերից՝ կստանանք

$$D(cX)=M[cX-M(cX)]^2=M[cX-cM(X)]^2=$$
$$=M\{c^2[X-M(X)]^2\}=c^2M[X-M(X)]^2=c^2D(X):$$

Իպա

3°. *X և Y անկախ պատահական մեծությունների գումարի դիսպերսիան հավասար է այդ մեծությունների դիսպերսիաների գումարին.*

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y): \tag{15}$$

Իրոք, օգտվելով (4) և (10) բանաձևերից՝ X և Y անկախ պատահական մեծությունների գումարի դիսպերսիայի համար կունենանք

$$D(X+Y)=M[X+Y-M(X+Y)]^2=M[X-M(X)+Y-M(Y)]^2=$$
$$M[X-M(X)]^2+M[Y-M(Y)]^2+2M\{[X-M(X)][Y-M(Y)]\}:$$

Այնուհետև օգտվելով (5) և (9) բանաձևերից՝ կստանանք

$$M\{[X-M(X)][Y-M(Y)]\}=M[X-M(X)]M[Y-M(Y)]=M(X^0)M(Y^0)=0,$$

որտեղից վերջնականապես կունենանք

$$D(X+Y)=M[X-M(X)]^2+M[Y-M(Y)]^2=D(X)+D(Y):$$

Իպա

Հետևանք 1: *Հաստատունի և պատահական մեծության գումարի դիսպերսիան հավասար է այդ մեծության դիսպերսիային.*

$$D(c+X)=D(X) \quad (c=const): \tag{16}$$

Իրոք, օգտվելով պատահական մեծության դիսպերսիայի առաջին և երրորդ հատկություններից՝ կստանանք

$$D(c+X)=D(c)+D(X)=D(X):$$

Իպա

4°. *X և Y անկախ պատահական մեծությունների տարբերության դիսպերսիան հավասար է այդ մեծությունների դիսպերսիաների գումարին.*

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y): \tag{17}$$

Իրոք, օգտվելով պատահական մեծության դիսպերսիայի երկրորդ և երրորդ հատկություններից՝ կունենանք

$$D(X-Y)=D[X+(-Y)]=D(X)+D(-Y)=D(X)+(-1)^2D(Y)=D(X)+D(Y):$$

Իսպա

Նկատենք, որ (15) և (17) բանաձևերի համեմատությունը հանգեցնում է հետևյալ թեորեմին՝

Թեորեմ 3: *Երկու անկախ պատահական մեծությունների գումարի և տարբերության դիսպերսիաները հավասար են իրար.*

$$D(X+Y)=D(X-Y):\qquad(18)$$

Այժմ ծանոթանանք դիսկրետ պատահական մեծության միջին քառակուսային շեղման հասկացությանը:

Սահմանում 5: *$\sqrt{D(X)}$ արտահայտությունը կոչվում է X պատահական մեծության միջին քառակուսային շեղում և նշանակվում է $\sigma(X)$-ով:*

Այսպիսով, համաձայն բերված սահմանման ունենք

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{M[X-M(X)]^2}:\qquad(19)$$

Ինչպես տեսնում ենք, պատահական մեծության միջին քառակուսային շեղումը նույնպես բնութագրում է այդ մեծության ցրումն իր մաթեմատիկական սպասման շուրջը: Սակայն, ի տարբերություն դիսպերսիայի, որն ունի դիտարկվող պատահական մեծության քառակուսու չափողականությունը՝ տրված պատահական մեծության միջին քառակուսային շեղումն ունի հենց այդ մեծության չափողականությունը: Հետևաբար, եթե որևէ խնդրում ցանկալի է, որ պատահական մեծության ցրումն իր մաթեմատիկական սպասման շուրջն ունենա այդ մեծության չափողականությունը, անհրաժեշտ է օգտվել պատահական մեծության միջին քառակուսային շեղման հասկացությունից:

Վերջում հաշվենք մի քանի պատահական մեծությունների մաթեմատիկական սպասումներն ու դիսպերսիաները:

Օրինակ 2: Գտնել մեկ փորձում A պատահույթի հանդես գալու թվի մաթեմատիկական սպասումն ու դիսպերսիան, եթե այդ փորձում նշված պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը հավասար է p-ի:

Լուծում: Քանի որ մեկ փորձում A պատահույթի հանդես գալու թիվը (երևույթների թիվը) պատահական մեծություն է, որի հավանականությունների բաշխման օրենքն ունի հետևյալ տեսքը՝

Աղյուսակ 16

X	0	1
P	q	p

$(q=1-p)$

ուստի, համաձայն (1) բանաձևի, այդ մեծության մաթեմատիկական սպասման համար կունենանք

$$M(X)=p:\qquad(\text{ա})$$

Այսպիսով, մեկ փորձում A պատահույթի երևույթների թվի մաթեմատիկական սպասումը հավասար է այդ փորձի ժամանակ դիտարկվող պատահույթի հանդես գալու հավանականությանը:

Օգտվելով դիսկրետ պատահական մեծության դիսպերսիայի հաշվման (11) բանաձևից և նկատի ունենալով, որ դիտարկվող պատահական մեծության շեղման քառակուսու բաշխման օրենքն ունի 17-րդ աղյուսակում բերված տեսքը՝ այդ մեծության դիսպերսիայի համար կստանանք

Աղյուսակ 17

X_0^2	p^2	q^2
P	q	p

$$D(X)=p^2q+q^2p=pq(p+q),$$

որտեղից, հաշվի առնելով, որ $p+q=1$ կունենանք

$$D(X)=pq \quad (q=1-p): \tag{բ}$$

Այսպիսով, մեկ փորձում A պատահույթի երևումների թվի դիսպերսիան հավասար է այդ փորձի ժամանակ A և $\overline{A}$ պատահույթների հանդես գալու հավանականությունների արտադրյալին, որտեղ $\overline{A}$-ը A-ի հակադիր պատահույթն է:

Օրինակ 3: Հաշվել հավանականությունների երկանդամային բաշխում ունեցող [82,u3] X պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումն ու դիսպերսիան:

Լուծում: Օգտվելով դիսկրետ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասման հաշվման (1) բանաձևից՝ դիտարկվող մեծության մաթեմատիկական սպասման համար կստանանք

$$M(X)=\sum_{k=0}^{n}kC_n^kp^kq^{n-k}: \tag{գ}$$

82-րդ պարագրաֆում բերված

$$(p+q)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kp^kq^{n-k}$$

հավասարության [82,(4)] երկու կողմերն ածանցելով ըստ p-ի [27,(7)], [28,(1'),(9)].

$$n(p+q)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}kC_n^kp^{k-1}q^{n-k} \tag{դ}$$

և ստացված հավասարության աջ ու ձախ կողմերը բազմապատկելով p-ով՝ կունենանք

$$np(p+q)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}kC_n^kp^kq^{n-k}: \tag{ե}$$

Համեմատելով (գ) և (ե) հավասարությունները՝ կստանանք

$$M(X)=np(p+q)^{n-1},$$

որտեղից, նկատի ունենալով, որ $p+q=1$, վերջնականապես կունենանք

$$M(X)=np: \tag{զ}$$

Այսպիսով, հավանականությունների երկանդամային բաշխում ունեցող պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը հավասար է բոլոր փորձերի թվի և մեկ փորձում դիտարկվող պատահույթի հանդես գալու հավանականության արտադրյալին:

Անցնելով տրված պատահական մեծության դիսպերսիայի հաշվմանը՝ նախ ստանանք այդ մեծության քառակուսու մաթեմատիկական սպասումը.

$$M(X^2)=\sum_{k=0}^{n}k^2C_n^kp^kq^{n-k}: \tag{է}$$

(դ) հավասարության երկու կողմերն ածանցելով ըստ p-ի.

$$n(n-1)(p+q)^{n-2}=\sum_{k=0}^{n}k(k-1)C_n^kp^{k-2}q^{n-k}$$

և ստացված հավասարության աջ ու ձախ կողմերը բազմապատկելով p^2-ով՝ կստանանք

$$n(n-1)p^2(p+q)^2=\sum_{k=0}^{n}k(k-1)C_n^kp^kq^{n-k}:$$

Կրկին օգտվելով $p+q=1$ առնչությունից՝ վերջին հավասարությունը կներկայացնենք

$$n^2p^2-np^2=\sum_{k=0}^{n}k^2C_n^kp^kq^{n-k}-\sum_{k=0}^{n}kC_n^kp^kq^{n-k}$$

տեսքով, որտեղից, նկատի ունենալով (գ), (զ) և (է) հավասարությունները՝ կունենանք

$$M(X^2)=n^2p^2-np^2+np: \qquad (ը)$$

Օգտվելով դիսկրետ պատահական մեծության դիսպերսիայի հաշվման (12) բանաձևից՝ դիտարկվող մեծության դիսպերսիայի համար վերջնականապես կստանանք

$$D(X)=n^2p^2-np^2+np-n^2p^2=np(1-p)$$

կամ որ նույնն է՝

$$D(X)=npq \qquad (թ)$$

բանաձևը:

Այսպիսով, հավանականությունների երկանդամային բաշխում ունեցող պատահական մեծության դիսպերսիան հավասար է բոլոր փորձերի թվի և մեկ փորձում դիտարկվող պատահույթի ու նրա հակադիր պատահույթի հանդես գալու հավանականությունների արտադրյալին:

Օրինակ 4: Գտնել հավանականությունների Պուասսոնի օրենքով բաշխված [82,u4] դիսկրետ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը և դիսպերսիան:

Լուծում: Օգտվելով հաշվելի բազմությամբ արժեքներ ընդունող պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասման սահմանումից և $y=e^x$ ֆունկցիայի

$$e^x=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}$$

վերլուծությունից [63,(14)], դիտարկվող պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասման համար կունենանք

$$M(X)=\sum_{n=0}^{\infty}n\frac{a^ne^{-a}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{a^ne^{-a}}{n!}=ae^{-a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n-1}}{(n-1)!}=ae^{-a}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^m}{m!}=ae^{-a}e^{a} \qquad (m=n-1)$$

կամ

$$M(X)=a: \qquad (ժ)$$

Այսպիսով, հավանականությունների Պուասսոնի օրենքով բաշխված դիսկրետ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը հավասար է այդ բաշխման պարամետրին:

Անցնելով տրված պատահական մեծության դիսպերսիայի հաշվմանը՝ նախ (ժ) հավասարության օգնությամբ ստանանք այդ մեծության քառակուսու մաթեմատիկական սպասումը [82,(5)].

$$M(X^2)=\sum_{n=0}^{\infty}n^2\frac{a^ne^{-a}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2\frac{a^ne^{-a}}{n!}=a\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{a^{n-1}e^{-a}}{(n-1)!}=a\sum_{n=1}^{\infty}[(n-1)+1]\frac{a^{n-1}e^{-a}}{(n-1)!}=$$

$$=a\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)\frac{a^me^{-a}}{m!}=a\left(\sum_{m=0}^{\infty}m\frac{a^me^{-a}}{m!}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^me^{-a}}{m!}\right)=a(a+1)=a^2+a \qquad (m=n-1):$$

Օգտվելով դիսկրետ պատահական մեծության դիսպերսիայի հաշվման (12) բանաձևից՝ դիտարկվող մեծության դիսպերսիայի համար կստանանք

$$D(X)=a^2+a-a^2$$

կամ որ նույնն է՝

$$D(X)=a \qquad (ի)$$

բանաձևը:

Այսպիսով, հավանականությունների Պուասսոնի օրենքով բաշխված դիսկրետ պատահական մեծության դիսպերսիան նույնպես հավասար է այդ բաշխման պարամետրին:

§84. Պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման ֆունկցիան, նրա հատկություններն ու գրաֆիկը: Անընդհատ պատահական մեծության բաշխման խտությունը, մաթեմատիկական սպասումը, դիսպերսիան և միջին քառակուսային շեղումը:

Եթե դիսկրետ պատահական մեծության բաշխման օրենքը հնարավոր է տալ աղյուսակի տեսքով, ապա ոչ հաշվելի քանակությամբ արժեքներ ընդունող*) պատահական մեծության բաշխման օրենքն այդպես ներկայացնել հնարավոր չէ: Այդ պատճառով անհրաժեշտություն է առաջանում ներմուծելու պատահական մեծության նոր բնութագրիչ:

Սահմանում 1: *X պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման ֆունկցիա կամ պարզապես X մեծության բաշխման ֆունկցիա կոչվում է ամբողջ թվային առանցքի վրա որոշված այն $F(x)$ ֆունկցիան, որը տրվում է*

$$F(x)=P(X<x) \qquad (-\infty<x<+\infty) \tag{1}$$

բանաձևով:

Այլ խոսքով, X պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիայի արժեքը ցանկացած x կետում հավասար է այն պատահույթի հավանականությանը, որ դիտարկվող պատահական մեծությունը կընդունի x -ից փոքր արժեք:

Պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման ֆունկցիան օժտված է հետևյալ հատկություններով՝

1°. *Պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման ֆունկցիայի որոշման տիրույթն ամբողջ թվային առանցքն է:*

Պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիային վերաբերող հատկությունը ամրագրված է այդ ֆունկցիայի սահմանման մեջ:

Իսկ

2°. *Պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը $[0;1]$ միջակայքն է:*

Իրոք, քանի որ ըստ սահմանման $F(x)$ ֆունկցիայի արժեքները հավանականություններ են, հետևաբար այդ ֆունկցիայի համար տեղի ունեն

$$0\le F(x)\le 1 \qquad (-\infty<x<\infty) \tag{2}$$

անհավասարությունները [78,(2)]:

Իսկ

3°. *Այն պատահույթի հավանականությունը, որ X պատահական մեծության արժեքները կընկնեն $[a,b)$ $(a<b)$ կիսաբաց միջակայքի մեջ, հավասար է տրված միջակայքում X մեծության բաշխման ֆունկցիայի ստացած աճին.*

$$P(a\le X<b)=F(b)-F(a): \tag{3}$$

Իրոք, նկատելով, որ $a<b$ դեպքում $X<b$ պատահույթը $X<a$ և $a\le X<b$

---

*) Կան հաշվելի բազմություններից [18,u13] հզոր բազմություններ (օրինակ [0;1] հատվածի կետերի բազմությունը):

անհամատեղելի պատահույթների [78,u5] գումարն է և օգտվելով անհամատեղելի պատահույթների գումարման թեորեմից [79,թ1]՝ կունենանք

$$P(X<b)=P(X<a)+P(a\le X<b), \tag{4}$$

որտեղից, (1) հավասարության շնորհիվ, կստանանք (3) բանաձևը:

Իպա

4°. *X պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման ֆունկցիան չնվազող ֆունկցիա է, այսինքն $x_1<x_2$ պայմանին բավարարող ցանկացած x_1 և x_2 արժեքների համար տեղի ունի*

$$F(x_1)\le F(x_2)$$

անհավասարությունը:

Իրոք, վերցնենք $x_1<x_2$ պայմանին բավարարող կամայական x_1 և x_2 թվեր և $[x_1,x_2)$ միջակայքի համար գրենք (3) բանաձևը.

$$P(x_1\le X<x_2)=F(x_2)-F(x_1): \tag{5}$$

Հաշվի առնելով, որ պատահույթի հավանականությունը ոչ բացասական մեծություն է՝ վերջին հավասարությունից կստանանք

$$F(x_2)-F(x_1)\ge 0$$

կամ որ նույնն է՝

$$F(x_1)\le F(x_2)\quad (x_1<x_2)$$

անհավասարությունը, ինչը նշանակում է, որ $F(x)$-ը չնվազող ֆունկցիա է [22,u14]:

Իպա

5°. *Եթե X պատահական մեծությունն իր x_0 արժեքն ընդունում է p_0 հավանականությամբ $(p_0\ne 0)$, ապա դիտարկվող մեծության բաշխման ֆունկցիան տրված կետում ունի անընդհատության առաջին սեռի խզում, ընդ որում այն x_0 կետում անընդհատ է ձախից, իսկ թռիչքը հավասար է p_0-ի:*

Իրոք, կարող ենք համոզվել, որ x_0 արժեքի համար տեղի ունի

$$F(x_0+0)=P(X\le x_0)$$

հավասարությունը, որտեղից, նկատի ունենալով, որ X մեծությունն իր x_0 արժեքն ընդունում է p_0 հավանականությամբ՝ կստանանք

$$F(x_0+0)=P(X<x_0)+p_0$$

կամ որ նույնն է՝

$$F(x_0+0)-F(x_0)=p_0\quad (0<p_0\le 1) \tag{6}$$

հավասարությունը:

Մյուս կողմից, կարող ենք ցույց տալ, որ տեղի ունի նաև

$$F(x_0)-F(x_0-0)=0 \tag{7}$$

հավասարությունը:

Վերջին երկու առնչությունները ապացուցում են ձևակերպած պնդումը:

Իպա

(6) հավասարությունից հետևում է, որ եթե x_0-ն X պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիայի անընդհատության կետ է, ապա

$$P(X = x_0) = p_0 = F(x_0 + 0) - F(x_0) = 0,$$

այսինքն հավանականությունը, որ X պատահական մեծությունը կընդունի իր x_0 արժեքը, հավասար է զրոյի:

Վերոգրյալից հետևում է, որ եթե X պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան ամենուրեք անընդհատ է, ապա հավանականությունը, որ այդ մեծությունը կընդունի իր արժեքների բազմությունից որևէ արժեք՝ հավասար է զրոյի: Սակայն ստացված եզրակացությունը չի նշանակում, որ քննարկվող դեպքում $X = x$ (x-ը պատկանում է X պատահական մեծության արժեքների բազմությանը) պատահույթներն անհնար են (ինչը ճիշտ է դիսկրետ պատահական մեծության պարագայում), որովետև, եթե այդ պատահույթները լինեն անհնար, ապա կստացվի, որ X պատահական մեծությունն իր արժեքներից և ոչ մեկը չի ընդունում՝ ինչը, իհարկե, անհեթեթություն է:

6°. *x-ը մինուս անսահմանության ձգտելիս X պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան ձգտում է զրոյի, իսկ պլյուս անսահմանության ձգտելիս՝ մեկի.*

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1: \tag{8}$$

Իրոք, մի կողմից ունենք

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{x \to -\infty} P(X < x), \quad P(X < -\infty) = P(\mathrm{V}),$$

քանի որ պատահական մեծության արժեքները չեն կարող փոքր լինել մինուս անսահմանությունից, իսկ մյուս կողմից՝

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} P(X < x), \quad P(X < +\infty) = P(\mathrm{U}),$$

քանի որ պատահական մեծության արժեքները փոքր են պլյուս անսահմանությունից:

Նկատի ունենալով, որ [78,(3),(4)]

$$P(\mathrm{U}) = 1, \quad P(\mathrm{V}) = 0,$$

կստանանք (8) հավասարությունները:

Իպա

Ավարտելով պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման ֆունկցիայի հատկությունների թվարկումը՝ անցնենք այդ ֆունկցիայի գրաֆիկին ծանոթանալուն:

Դիցուք X դիսկրետ պատահական մեծության բաշխման օրենքը տրվում է 6-րդ աղյուսակով [82], որտեղ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ արժեքները դասավորված են աճման կարգով:

Օգտվելով պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիայի առաջին, երկրորդ և չորրորդ հատկություններից, ինչպես նաև հետևյալ ակնհայտ հավասարություններից՝

$$F(x_1) = P(X < x_1) = 0, \quad F(x_n + 0) = P(X \le x_n) = 1,$$

եզրակացնում ենք, որ $(-\infty,x_1]$ միջակայքում $F(x)$ ֆունկցիան նույնաքար հավասար է զրոյի, իսկ $(x_n,+\infty)$ միջակայքում՝ մեկի: Պարզ է նաև, որ $(x_k,x_{k+1}]$ $(k=1,2,\dots,n-1)$ միջակայքերից յուրաքանչյուրում $F(x)$ ֆունկցիան մնում է հաստատուն, ընդ որում k-րդ միջակայքում այդ հաստատունի արժեքը հավասար է

$$c_k=\sum_{i=1}^{k}p_i$$

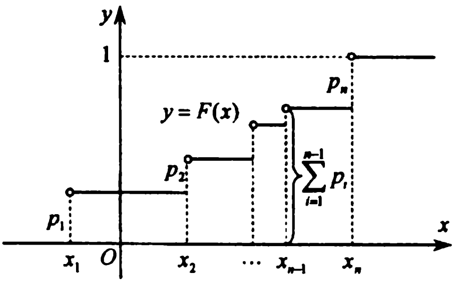
գումարին:

Վերոգրյալից և բաշխման ֆունկցիայի մնացած հատկություններից հետևում է, որ եթե պատահական մեծության բաշխման օրենքն ունի 6-րդ աղյուսակում բերված տեսքը, ապա այդ մեծության բաշխման ֆունկցիան ունի

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{եթե} \quad x\le x_1,\\ p_1, & \text{եթե} \quad x_1<x\le x_2,\\ p_1+p_2, & \text{եթե} \quad x_2<x\le x_3,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ p_1+p_2+\dots+p_k, & \text{եթե} \quad x_k<x\le x_{k+1},\\ p_1+p_2+\dots+p_n=1, & \text{եթե} \quad x>x_n\end{cases} \tag{9}$$

տեսքը:

Ստացված ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերված է 41-րդ նկարում:

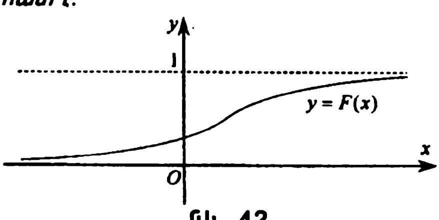


Նկ. 41

Ինչպես տեսնում ենք, դիսկրետ պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիայի գրաֆիկն ունի աստիճանաձև տեսք և խզվում է $x_1,x_2,\dots,x_n$ կետերում:

Անցնելով անընդհատ պատահական մեծությունների ուսումնասիրությանը՝ նախ բերենք հետևյալ սահմանումը՝

Սահմանում 2: *Կասենք, որ X-ը անընդհատ պատահական մեծություն է, եթե այդ մեծության հավանականությունների բաշխման ֆունկցիան անընդհատ է:*



Նկ. 42

Պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիայի հատկություններից բխում է, որ անընդհատ պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիայի գրաֆիկն ունի 42-րդ նկարում պատկերված տեսքը:

Սահմանում 3: *Եթե X անընդհատ պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան ունի (անընդհատ) ածանցյալ.*

$$F'(x)=f(x), \tag{10}$$

ապա $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է տրված պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտություն կամ պարզապես X մեծության բաշխման խտություն:

Օգտվելով պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիայի երրորդ հատկությունից և ենթադրելով, որ X պատահական մեծությունն ունի բաշխման խտություն՝ կստանանք [26,(2)]

$$f(x)=F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x\le X<x+\Delta x)}{\Delta x}: \tag{11}$$

Այսպիսով, պատահական մեծության բաշխման խտության արժեքը մի որևէ կետում հավասար է այդ մեծության արժեքները $[x,x+\Delta x)$ միջակայքի մեջ ընկնելու հավանականության և այդ միջակայքի երկարության հարաբերության սահմանին, երբ դիտարկվող միջակայքի երկարությունը ձգտում է զրոյի:

Պատահական մեծության բաշխման խտությունն օժտված է հետևյալ հատկություններով՝

I. *X պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտությունն ամբողջ թվային առանցքի վրա որոշված ոչ բացասական ֆունկցիա է, այսինքն x -ի ցանկացած արժեքի համար տեղի ունի*

$$f(x)\ge 0 \tag{12}$$

անհավասարությունը:

Իրոք, ինչպես գիտենք, պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան չնվազող ֆունկցիա է: Բաշխման խտության համար ձևակերպած հատկության ապացույցն ավարտելու համար, մնում է օգտվել այն փաստից, որ չնվազող ֆունկցիայի ածանցյալն ընդունում է միայն ոչ բացասական արժեքներ [33,թ2]:

Իսկ

II. *X պատահական մեծության արժեքներն $[a,b)$ կիսաբաց միջակայքի մեջ ընկնելու հավանականությունն այդ մեծության բաշխման խտության միջոցով արտահայտվում է*

$$P(a\le X<b)=\int_a^b f(x)dx \tag{13}$$

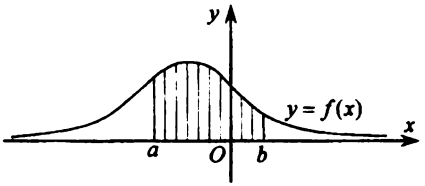
բանաձևով:

Իրոք, օգտվելով հավանականությունների բաշխման ֆունկցիայի երրորդ հատկությունից, բաշխման խտության սահմանումից և Նյուտոն- Լեյբնիցի բանաձևից՝ կստանանք [41,(6)]

$$P(a\le X<b)=F(b)-F(a)=\int_a^b F'(x)dx=\int_a^b f(x)dx:$$

Իսկ

Նկատենք, որ (13) բանաձևը երկրաչափորեն նշանակում է, որ X պատահական մեծության արժեքներն $[a,b)$ կիսաբաց միջակայքի մեջ ընկնելու հավանականությունը հավասար է $[a,b]$ հիմքով, $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկով (նկ.43) և $x=a$, $x=b$ հավասարումներն ունեցող ուղիղներով սահմանափակված կորագիծ սեղանի մակերեսին [43,1°]:



Նկ. 43

III. *X պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիայի արժեքը ցանկացած x կետում հավասար է այդ մեծության բաշխման խտության ինտեգրալին՝ մինուս անվերջից մինչև x սահմաններում.*

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt: \qquad (14)$$

Իրոք, օգտվելով առաջին սեռի անիսկական ինտեգրալի սահմանումից և բաշխման ֆունկցիայի վեցերորդ հատկության առաջին մասից՝ կունենանք [42,u1]

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{x} f(t)dt=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{x} F'(t)dt=\lim_{a\to-\infty} F(t)\Big|_{a}^{x}=$$

$$=\lim_{a\to-\infty} F(x)-\lim_{a\to-\infty} F(a)=F(x)-0=F(x):$$

Իպա

IV. *X պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտության ինտեգրալը՝ տարածված ամբողջ թվային առանցքով, հավասար է մեկի.*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1: \qquad (15)$$

Իրոք, օգտվելով առաջին սեռի անիսկական ինտեգրալի սահմանումից, Նյուտոն-Լեյբնիցի բանաձևից և բաշխման ֆունկցիայի վեցերորդ հատկության երկրորդ մասից՝ կստանանք

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)dx=\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} F'(x)dx=\lim_{a\to+\infty} F(x)\Big|_{-a}^{a}=\lim_{a\to+\infty} F(a)-\lim_{a\to+\infty} F(-a)=1-0=1:$$

Իպա

V. *x-ը պլյուս կամ մինուս անսահմանության ձգտելիս X պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտության սահմանը հավասար է զրոյի.*

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0: \qquad (16)$$

Իրոք, ինչպես գիտենք, հավանականությունների բաշխման խտությունն ընդունում է միայն ոչ բացասական արժեքներ, հետևաբար (16) հավասարության մեջ մասնակցող սահմանը չի կարող բացասական լինել: Մյուս կողմից, եթե այդ սահմանը լինի դրական, ապա

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

ինտեգրալը կլինի տարամետ, ինչը կհակասի (15) բանաձևին: Հետևաբար, նշված սահմանը չի կարող նաև դրական լինել:

Այսպիսով, մեզ հետաքրքրող ոչ բացասական մեծության սահմանը չի կարող դրական լինել: Հետևաբար այն հավասար է զրոյի:

Իսպա

Պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտությանը վերաբերող հատկություններից հետևում է, որ այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը գտնվում է վերին կիսահարթության մեջ, աբսցիսների առանցքը հանդիսանում է նրա հորիզոնական ասիմպտոտը [7,u12], [34,(9'),(9")], *այդ կորով և աբսցիսների առանցքով սահմանափակված պատկերի մակերեսը հավասար է մեկի:*

Պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտության գրաֆիկը կոչվում է այդ մեծության հավանականությունների կոր:

Նկատենք, որ եթե պատահական մեծությունը բաշխված է $[a,b]$ միջակայքում, ապա այդ միջակայքին չպատկանող կետերում տրված մեծության բաշխման խտությունը հավասար է զրոյի:

Օրինակ 1: Գտնել X պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտությունը և այն հավանականությունը, որ այդ մեծության արժեքները կպատկանեն $[0;1/3)$ կիսաբաց միջակայքին, եթե տրված մեծության հավանականությունների բաշխման ֆունկցիան արտահայտվում է

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{երբ} \quad x\le -1, \\ \frac{3}{4}x+\frac{3}{4}, & \text{երբ} \quad -1<x\le \frac{1}{3}, \\ 1, & \text{երբ} \quad x>\frac{1}{3} \end{cases} \qquad \text{(ա)}$$

բանաձևով:

Լուծում: Ածանցելով (ա) բանաձևով տրված բաշխման ֆունկցիան*), կստանանք դիտարկվող պատահական մեծության բաշխման խտության տեսքը [27,(5),(7)], [28,(1),(9)].

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{երբ} \quad x<-1, \\ \frac{3}{4}, & \text{երբ} \quad -1<x<\frac{1}{3}, \\ 0, & \text{երբ} \quad x>\frac{1}{3}: \end{cases}$$

Օգտվելով բաշխման ֆունկցիայի երրորդ հատկությունից՝ որոնելի հավանականության համար կունենանք

---

*) Նկատենք, որ $F(x)$ ֆունկցիան $x=-1$ և $x=1/3$ կետերում ածանցյալ չունի:

$$P\left(0 \le X < \frac{1}{3}\right) = F\left(\frac{1}{3}\right) - F(0) = \left(\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}\right)\Big|_{x=1/3} - \left(\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}\right)\Big|_{x=0} = \frac{1}{4}:$$

Օրինակ 2: Դիցուք X պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտությունն արտահայտվում է

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{երբ} \quad x \le 0, \\ \frac{2}{3}\sin 3x, & \text{երբ} \quad 0 < x \le \frac{\pi}{3}, \\ 0, & \text{երբ} \quad x > \frac{\pi}{3} \end{cases} \qquad (բ)$$

բանաձևով: Գտնել հավանականությունը, որ դիտարկվող պատահական մեծության արժեքները կպատկանեն $[\pi/6, \pi/4)$ կիսաբաց միջակայքին:

Լուծում: Օգտվելով պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտության երկրորդ հատկությունից՝ որոնելի հավանականության համար կստանանք **[35,8°]**

$$P\left(\frac{\pi}{6} \le X < \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{3}\int_{\pi/6}^{\pi/4} \sin 3x dx = -\frac{2}{9}\cos 3x\Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{9}:$$

Այժմ, ենթադրելով, որ X-ը անընդհատ պատահական մեծություն է և $f(x)$-ը այդ մեծության հավանականությունների բաշխման խտությունն է՝ դիտարկենք

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \qquad (17)$$

անիսկական ինտեգրալը:

Կասենք, որ (17) ինտեգրալը բացարձակ զուգամետ է, եթե զուգամետ է՞

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx \qquad (17')$$

ինտեգրալը **[42,u3]**:

Սահմանում 4: *Եթե (17) ինտեգրալը բացարձակ զուգամետ է, ապա այդ ինտեգրալի արժեքը կոչվում է հավանականությունների բաշխման $f(x)$ խտություն ունեցող X անընդհատ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասում կամ միջին արժեք և նշանակվում է $M(X)$-ով.*

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx, \qquad (18)$$

հակառակ դիպքում կասենք, որ X անընդհատ պատահական մեծությունը մաթեմատիկական սպասում չունի:

Պարզվում է, որ եթե անընդհատ պատահական մեծությունն ունի մաթեմատիկական սպասում, ապա այդ սպասումն ունի նույն հատկություններն, ինչ և դիսկրետ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը:

°) Հիշենք, որ $f(x)$-ը ոչ բացասական ֆունկցիա է:

Համոզվենք, որ եթե X անընդհատ պատահական մեծությունը բաշխված է $[a,b]$ միջակայքում, ապա այդ մեծության մաթեմատիկական սպասումն արտահայտվում է

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx \qquad (19)$$

ինտեգրալով:

Իրոք, ենթադրելով, որ X պատահական մեծությունը բաշխված է $[a,b]$ միջակայքում, այսինքն ենթադրելով, որ այդ մեծության բաշխման խտությունը $(-\infty,a)$ և $(b,+\infty)$ միջակայքերում նույնաբար հավասար է զրոյի՝ կստանանք **[42,p1]**

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx=\int_{-\infty}^{a} 0\cdot xdx+\int_{a}^{b} x f(x)dx+\int_{b}^{+\infty} 0\cdot xdx=\int_{a}^{b} x f(x)dx:$$

Իսկ

Անցնելով X անընդհատ պատահական մեծության դիսպերսիայի սահմանմանը՝ դիտարկենք հետևյալ անիսկական ինտեգրալը՝

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[x-M(X)]^2 f(x)dx: \qquad (20)$$

Սահմանում 5: *եթե (20) անիսկական ինտեգրալը զուգամետ է, ապա այդ ինտեգրալի արժեքը կոչվում է հավանականությունների $f(x)$ բաշխման խտություն ունեցող X անընդհատ պատահական մեծության դիսպերսիա և նշանակվում է $D(X)$ -ով.*

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-M(X)]^2 f(x)dx: \qquad (21)$$

Կարող ենք հեշտությամբ համոզվել, որ եթե X անընդհատ պատահական մեծությունն ունի դիսպերսիա, ապա այն կարելի է ներկայացնել նաև

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-M^2(X) \qquad (21')$$

բանաձևով:

Նկատելով, որ (21') բանաձևում մասնակցող ինտեգրալը X^2 պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումն է՝ կունենանք

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X): \qquad (21'')$$

Ինչպես տեսնում ենք, դիսկրետ պատահական մեծության դիսպերսիայի հաշվման բանաձևը **[83,(12)]** մնում է ճիշտ նաև անընդհատ պատահական մեծության դեպքում (եթե, իհարկե, վերջինս ունի դիսպերսիա):

Պարզվում է, որ եթե անընդհատ պատահական մեծությունն ունի դիսպերսիա, ապա այն օժտված է նույն հատկություններով, ինչ և դիսկրետ պատահական մեծության դիսպերսիան:

Վերջում նշենք, որ անընդհատ պատահական մեծության միջին քառակուսային շեղման սահմանումը չի տարբերվում դիսկրետ պատահական մեծության համապատասխան հասկացության սահմանումից: Այսինքն անընդհատ պատահական մեծության միջին քառակուսային շեղումը նույնպես արտահայտվում է

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{M[X-M(X)]^2} \tag{22}$$

բանաձևով:

Օրինակ 3: Գտնել X անընդհատ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը, եթե այդ մեծության բաշխման ֆունկցիան ունի

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{երբ } x\le 0,\\ \dfrac{x}{4}, & \text{երբ } 0<x\le 4,\\ 1, & \text{երբ } x>4\end{cases} \tag{գ}$$

տեսքը:

Լուծում: Ունենալով X պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան և օգտվելով հավանականությունների բաշխման խտության սահմանումից՝ կստանանք

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{երբ } x<0,\\ \dfrac{1}{4}, & \text{երբ } 0<x<4,\\ 0, & \text{երբ } x>4:\end{cases}$$

Տրված պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը գտնելու համար մնում է օգտվել (19) բանաձևից [35,3°]

$$M(X)=\int_0^4\frac{1}{4}x\,dx=\frac{x^2}{8}\Big|_0^4=2:$$

Օրինակ 4: Գտնել X անընդհատ պատահական մեծության դիսպերսիան, եթե այդ մեծության բաշխման խտությունն ունի

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{երբ } x\le 0,\\ \dfrac{\sin x}{2}, & \text{երբ } 0<x\le \pi,\\ 1, & \text{երբ } x>\pi\end{cases} \tag{դ}$$

տեսքը:

Լուծում: Նախ, օգտվելով (19) բանաձևից՝ հաշվենք տրված պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը [35,9°], [41,(15)].

$$M(X)=\frac{1}{2}\int_0^\pi x\sin x\,dx=-\frac{1}{2}\int_0^\pi x\,d\cos x=-\frac{1}{2}\left(x\cos x\Big|_0^\pi-\int_0^\pi\cos x\,dx\right)=\frac{\pi}{2},$$

որից հետո, (21) բանաձևի օգնությամբ գտնենք նրա դիսպերսիան.

$$D(X)=\frac{1}{2}\int_0^\pi x^2\sin x\,dx-\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2-8}{4}:$$

§85. Հավանականությունների հավասարաչափ, նորմալ և ցուցչային բաշխումները:

Այժմ դիտարկենք գործնականում հաճախ հանդիպող հավանականությունների մի քանի անընդհատ բաշխումների օրինակներ:

Սահմանում 1: *X անընդհատ պատահական մեծությունը կոչվում է հավասարաչափ բաշխված $[a,b]$ միջակայքում, եթե այդ մեծության հավանականությունների բաշխման խտությունը տրվում է*

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{երբ } x<a,\\ c, & \text{երբ } a\le x\le b,\\ 0, & \text{երբ } x>b\end{cases} \qquad (1)$$

բանաձևով, որտեղ c-ն որոշման ենթակա հաստատուն է:

Պատահական մեծության բաշխման խտության չորրորդ հատկությունը [84,(15)] կիրառելով (1) տեսքն ունեցող բաշխման խտության վրա՝ կստանանք [40,1°], [41,(6)], [42,թ1]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{a} f(x)dx+\int_{a}^{b} f(x)dx+\int_{b}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{a} 0\cdot dx+\int_{a}^{b} c\,dx+\int_{b}^{+\infty} 0\cdot dx=c\int_{a}^{b} dx=c(b-a)=1,$$

որտեղից c հաստատունի համար կունենանք

$$c=\frac{1}{b-a}: \qquad (2)$$

c-ի համար ստացած արժեքը տեղադրելով (1) հավասարության մեջ՝ $[a,b]$ միջակայքում հավասարաչափ բաշխված X անընդհատ պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտությունը կներկայացնենք

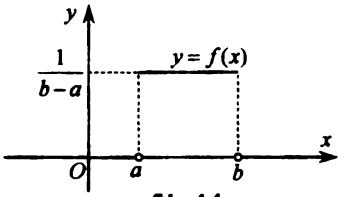
$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{երբ } x<a,\\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{երբ } a\le x\le b,\\ 0, & \text{երբ } x>b\end{cases} \qquad (1')$$

տեսքով:

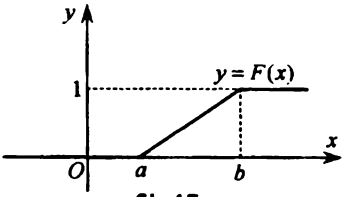
Օգտվելով [84,(14)] բանաձևից՝ կստանանք նաև դիտարկվող պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիայի տեսքը.

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{երբ } x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{երբ } a\le x\le b,\\ 1, & \text{երբ } x>b:\end{cases} \qquad (3)$$

44-րդ և 45-րդ նկարներում համապատասխանաբար բերված են $[a,b]$ միջակայքում հավասարաչափ բաշխված պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտության և բաշխման ֆունկցիայի գրաֆիկները:



Նկ.44



Նկ.45

Այժմ $[a,b]$ *միջակայքի մեջ վերցնենք որևէ* $[a_1,b_1)$ *կիսաբաց միջակայք և դնենք հետևյալ խնդիրը՝* $[a,b]$ *միջակայքում հավասարաչափ բաշխված* X *պատահական մեծության արժեքներն ի՞նչ հավանականությամբ կպատկանեն* $[a_1,b_1)$ *միջակայքին:*

Օգտվելով պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտության երկրորդ հատկությունից՝ որոնելի հավանականության համար կստանանք՞) [84,II]

$$p(a_1 \le X < b_1) = \int_{a_1}^{b_1} \frac{dx}{b-a} = \frac{b_1 - a_1}{b-a}: \qquad (4)$$

Այսպիսով, եթե $[a_1,b_1)$ *միջակայքն ընկած է* $[a,b]$ *միջակայքի մեջ և* X *պատահական մեծությունը հավասարաչափ է բաշխված* $[a,b]$ *միջակայքում, ապա տրված մեծության արժեքները* $[a_1,b_1)$ *միջակայքի մեջ ընկնելու հավանականությունն ուղիղ համեմատական է այդ միջակայքի երկարությանը և կախված չէ* a_1 *և* b_1 *կետերի դիրքից:*

Օգտվելով [84,(19)] բանաձևից՝ $[a,b]$ միջակայքում հավասարաչափ բաշխված X պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասման համար կստանանք [35,3°]

$$M(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_a^b = \frac{a+b}{2}:$$

Այսպիսով $[a,b]$ *միջակայքում հավասարաչափ բաշխված* X *պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը հավասար է տրված միջակայքի միջնակետի աբսցիսին:*

Ունենալով X պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը՝ [84,(21),(22)] բանաձևերի միջոցով կգտնենք նաև այդ մեծության դիսպերսիան և միջին քառակուսային շեղումը.

$$D(X) = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{dx}{b-a} = \frac{1}{3(b-a)}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3\Bigg|_a^b = \frac{(b-a)^2}{12},$$

՞) Ստացված բանաձևը համեմատի՛ր [79,(13)] բանաձևին:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}:$$

Այսպիսով, $[a,b]$ միջակայքում հավասարաչափ բաշխված X պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը, դիսպերսիան և միջին քառակուսային շեղումը համապատասխանաբար արտահայտվում են

$$M(X)=\frac{a+b}{2},\quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12},\quad \sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}} \tag{5}$$

բանաձևերով:

Ինչպես տեսնում ենք, $[a,b]$ միջակայքում հավասարաչափ բաշխված պատահական մեծության դիսպերսիան և միջին քառակուսային շեղումը կախված են միայն այդ միջակայքի երկարությունից և հանդիսանում են նշված երկարության աճող ֆունկցիա, ինչը բնական է, որովհետև որքան մեծ է պատահական մեծության հնարավոր արժեքներից կազմված միջակայքի երկարությունը, այնքան մեծ է նաև տրված մեծության արժեքների ցրումը իր մաթեմատիկական սպասման (միջին արժեքի) շուրջը:

Օրինակ 1: Գտնել [2;8] միջակայքում հավասարաչափ բաշխված X պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը, դիսպերսիան և միջին քառակուսային շեղումը:

Լուծում: Օգտվելով (5) բանաձևերից՝ որոնելի մեծությունների համար կունենանք

$$M(X)=5,\quad D(X)=3,\quad \sigma(X)=\sqrt{3}:$$

Անընդհատ պատահական մեծությունների բաշխումների մեջ, կենտրոնական տեղ է զբաղեցնում հավանականությունների նորմալ բաշխումը (Գաուսի բաշխումը):

Սահմանում 2: *X անընդհատ պատահական մեծությունը կոչվում է նորմալ բաշխված, եթե այդ մեծության հավանականությունների բաշխման խտությունը տրվում է*

$$f(x)=c\,e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\qquad(\sigma>0) \tag{6}$$

բանաձևով, որտեղ c -ն որոշման ենթակա հաստատուն է:

a և σ հաստատունները կոչվում են X պատահական մեծության հավանականությունների նորմալ բաշխման պարամետրեր:

Պատահական մեծության բաշխման խտության չորրորդ հատկությունը կիրառելով (6) տեսքն ունեցող բաշխման խտության վրա՝ կստանանք [42,թ3]

$$c\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=1: \tag{6'}$$

Կատարելով փոփոխականի

$$t=\frac{x-a}{\sigma}$$

փոխարինում՝ (6′) հավասարությունը կներկայացնենք

$$c\sigma\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=1 \qquad (6'')$$

տեսքով: Հաշվի առնելով, որ (6″) հավասարության մեջ մասնակցող ինտեգրալի արժեքը հավասար է $\sqrt{2\pi}$-ի՝ կունենանք

$$c=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}:$$

c հաստատունի համար ստացած արժեքը տեղադրելով (6) հավասարության մեջ՝ կստանանք նորմալ բաշխված X անընդհատ պատահական մեծության բաշխման խտության վերջնական տեսքը.

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad (\sigma>0): \qquad (6''')$$

Օգտվելով [84,(14)] բանաձևից՝ դիտարկվող պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիայի համար կունենանք

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt: \qquad (7)$$

Նկատելով, որ (6″) բանաձևով տրված $f(x)$ ֆունկցիան a և σ պարամետրերի $a=0$ և $\sigma=1$ արժեքների դեպքում համընկնում է

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

ֆունկցիային և կրկնելով 81-րդ պարագրաֆում $\varphi(x)$ ֆունկցիային վերաբերող դատողությունները՝ կստանանք, որ

ա) $x=a$ կետում $f(x)$ ֆունկցիան ստանում է իր մեծագույն արժեքը.

$$f_{\max}(x)=f(a)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}, \qquad (8)$$

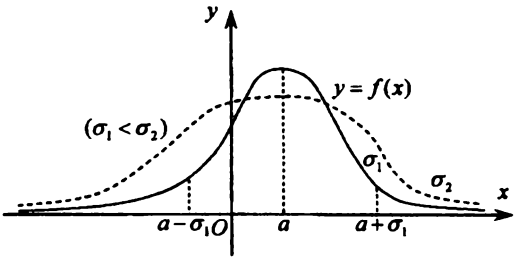
բ) (6″) տեսքն ունեցող ֆունկցիայի գրաֆիկը համաչափ է $x=a$ հավասարումն ունեցող ուղղի նկատմամբ,

գ) $x_{1,2}=a\pm\sigma$ արժեքները $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի շրջման կետերի աբսցիսներն են [34,u4],

դ) աբսցիսների առանցքը հանդիսանում է $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի հորիզոնական ասիմպտոտը [7,u12], [34,(9′),(9″)]:

Նկատենք, որ a պարամետրի փոփոխման դեպքում $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը (որը կոչվում է հավանականությունների բաշխման կոր) չփոխելով իր ձևը Ox առանցքի ուղղությամբ տեղափոխվում է աջ կամ՝ ձախ (կախված a-ի նշանից): σ-ն բնութագրում է $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի ձևը և ինչպես երևում

է (8) բանաձևից հավանականությունների նորմալ բաշխման այդ պարամետրը մեծացնելիս $f(x)$ ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը նվազում է, իսկ փոքրացնելիս աճում է (նկ.46): Ընդ որում, քանի որ (6՝) ֆունկցիայի գրաֆիկով և աբսցիսների առանցքով սահմանափակված պատկերի մակերեսը հավասար է մեկի, հետևաբար σ-ն մեծացնելիս X պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման կորը դառնում է փռված, իսկ փոքրացնելիս՝ սրածայր:



Նկ.46

Այժմ վերցնենք որևէ $[a_1,b_1)$ *կիսաբաց միջակայք և դնենք հետևյալ խնդիրը՝ նորմալ բաշխված* X *անընդհատ պատահական մեծության արժեքները ի՞նչ հավանականությամբ կպատկանեն* $[a_1,b_1)$ *միջակայքին:*

Օգտվելով պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտության երկրորդ հատկությունից՝ որոնելի հավանականության համար կունենանք

$$p(a_1 \le X < b_1) = \int_{a_1}^{b_1} f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{a_1}^{b_1} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx:$$

Այնուհետև կատարելով փոփոխականի

$$t = \frac{x-a}{\sigma}$$

փոխարինում՝ կստանանք

$$P(a_1 \le X < b_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{a_1-a}{\sigma}}^{\frac{b_1-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \Phi\left(\frac{b_1-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a_1-a}{\sigma}\right), \qquad (9)$$

որտեղ $\Phi(x)$-ը Լապլասի ֆունկցիան է [81,(7)] :

Այսպիսով, նորմալ բաշխում ունեցող անընդհատ պատահական մեծության արժեքները նախապես տրված $[a_1,b_1)$ *կիսաբաց միջակայքի մեջ ընկնելու հավանականությունը կարելի է հաշվել (9) բանաձևի օգնությամբ, որտեղ* $\Phi(x)$ *-ը Լապլասի ֆունկցիան է:*

Օգտվելով [84,(18)] բանաձևից՝ հավանականությունների նորմալ բաշխում ունեցող պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասման համար կունենանք

$$M(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}[(x-a)+a]e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx =$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)\,e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx+a\,\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx:$$

Կարող ենք հեշտությամբ համոզվել, որ բերված վերջին հավասարության աջ մասի առաջին ինտեգրալը հավասար է զրոյի: Հաշվի առնելով, որ պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտության չորրորդ հատկության շնորհիվ տեղի ունի նաև

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=1 \qquad (10)$$

հավասարությունը՝ որոնելի մաթեմատիկական սպասման համար կստանանք

$$M(X)=a: \qquad (11)$$

Այսպիսով, հավանականությունների նորմալ բաշխում ունեցող անընդհատ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը հավասար է այդ մեծության բաշխման a պարամետրին:

Նշենք, որ a պարամետրը կոչվում է հավանականությունների նորմալ բաշխման կենտրոն:

Ունենալով X պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը և օգտվելով [84,(21)] բանաձևից՝ այդ մեծության դիսպերսիայի համար կունենանք

$$D(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[-\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma^2(x-a)de^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\right]:$$

Կատարելով մասերով ինտեգրում [41,(15)] և օգտվելով

$$\lim_{t\to\pm\infty}te^{-t^2}=\lim_{t\to\pm\infty}\frac{t}{e^{t^2}}=0$$

սահմանից [31,թ4]՝ դիտարկվող պատահական մեծության դիսպերսիայի համար կստանանք

$$D(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[-\sigma^2(x-a)e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}+\sigma^2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx\right]=\sigma^2,$$

որտեղից, [84,(22)] բանաձևի հաշվառումով, կունենանք նաև այդ պատահական մեծության միջին քառակուսային շեղման արժեքը.

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sigma:$$

Այսպիսով, հավանականությունների նորմալ բաշխում ունեցող X պատահական մեծության դիսպերսիան և միջին քառակուսային շեղումը համապատասխանաբար արտահայտվում են

$$D(X)=\sigma^2,\quad \sigma(X)=\sigma \qquad (12)$$

բանաձևերով, այսինքն նորմալ բաշխում ունեցող X պատահական մեծության դիսպերսիան հավասար է այդ մեծության բաշխման σ պարամետրի քառակուսուն, իսկ միջին քառակուսային շեղումը՝ հենց այդ պարամետրին:

Ինչպես տեսնում ենք, հավանականությունների նորմալ բաշխում ունեցող պատահական մեծության a և σ պարամետրերն ունեն հավանականային որոշակի իմաստ:

Նկատենք նաև, որ հավանականությունների նորմալ բաշխումը լիովին որոշվում է իր մաթեմատիկական սպասումով և դիսպերսիայով:

Օրինակ 2: Գտնել նորմալ բաշխված X պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտությունը, եթե այդ մեծության մաթեմատիկական սպասումն ու դիսպերսիան համապատասխանաբար հավասար են 3-ի և 16-ի:

Լուծում: Ըստ պայմանի ունենք

$$a = M(X) = 3, \quad \sigma^2 = D(X) = 16:$$

Հաշվի առնելով, որ նորմալ բաշխման σ պարամետրը պետք է դրական լինի՝ կստանանք

$$\sigma = 4:$$

a և σ պարամետրերի արժեքները տեղադրելով (6՝) բանաձևի մեջ՝ մեզ հետաքրքրող բաշխման խտության համար կունենանք

$$f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{32}}:$$

Սահմանում 3: *X անընդհատ պատահական մեծությունը կոչվում է ցուցչային օրենքով բաշխված, եթե այդ մեծության հավանականությունների բաշխման խտությունը տրվում է*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{երբ } x \le 0, \\ ce^{-\lambda x}, & \text{երբ } x > 0 \quad (\lambda > 0) \end{cases} \tag{13}$$

բանաձևով, որտեղ c -ն որոշման ենթակա հաստատուն է:

λ -ն կոչվում է հավանականությունների ցուցչային բաշխման պարամետր:

Պատահական մեծության բաշխման խտության չորրորդ հատկությունը կիրառելով (13) տեսքն ունեցող բաշխման խտության վրա՝ կստանանք [42,(5)]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} o \cdot dx + \int_{0}^{+\infty} ce^{-\lambda x}dx = c\int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x}dx = \frac{c}{\lambda} = 1,$$

որտեղից c հաստատունի համար կունենանք

$$c = \lambda: \tag{14}$$

c հաստատունի համար ստացած արժեքը տեղադրելով (13) հավասարության մեջ՝ ցուցչային օրենքով բաշխված X անընդհատ պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտությունը կներկայացնենք

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{երբ } x \le 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{երբ } x > 0 \quad (\lambda > 0) \end{cases} \tag{13՝}$$

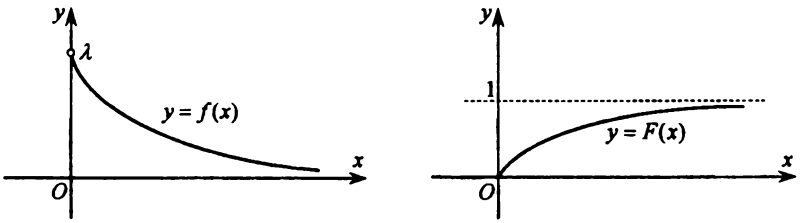
տեսքով:

ԳԼՈՒԽ XV

Օգտվելով [84,(14)] բանաձևից՝ կստանանք նաև դիտարկվող պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիայի տեսքը*) [35,7°ա].

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{երբ } x\le 0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & \text{երբ } x>0 \quad (\lambda>0):\end{cases} \tag{15}$$

Կարող ենք հեշտությամբ համոզվել, որ ցուցչային օրենքով բաշխված X անընդհատ պատահական մեծության բաշխման խտության և բաշխման ֆունկցիայի գրաֆիկներն ունեն 47-րդ նկարում բերված տեսքը:



ա) բ)

նկ.47

Այժմ վերցնենք որևէ $[a_1,b_1)$ *կիսաբաց միջակայք և գտնենք այն պատահույթի հավանականությունը, որ ցուցչային բաշխում ունեցող անընդհատ պատահական մեծության արժեքները կպատկանեն* $[a_1,b_1)$ *միջակայքին:*

Օգտվելով պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտության երկրորդ հատկությունից՝ որոնելի հավանականության համար կունենանք

$$P(a_1\le X<b_1)=\int_{a_1}^{b_1} f(x)dx=\begin{cases}0, & \text{երբ } a_1<b_1\le 0,\\ 1-e^{-b_1\lambda}, & \text{երբ } a_1\le 0<b_1,\\ e^{-a_1\lambda}-e^{-b_1\lambda}, & \text{երբ } 0<a_1<b_1:\end{cases} \tag{16}$$

Այսպիսով, ցուցչային բաշխում ունեցող անընդհատ պատահական մեծության արժեքները տրված $[a_1,b_1)$ *կիսաբաց միջակայքի մեջ ընկնելու հավանականությունը կարելի է հաշվել (16) բանաձևի օգնությամբ:*

Պարզվում է հավանականությունների ցուցչային բաշխման պարամետրն ունի հավանականային որոշակի իմաստ, որը պարզաբանելու համար գտնենք դիտարկվող պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումն ու դիսպերսիան:

Օգտվելով [84,(18)] բանաձևից՝ հավանականությունների ցուցչային բաշխում ունեցող պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասման համար

---

*) $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases}0, & \text{երբ } x\le 0,\\ \int_{-\infty}^{x}\lambda e^{-\lambda t}dt, & \text{երբ } x>0\end{cases}=\begin{cases}0, & \text{երբ } x\le 0,\\ -\int_{-\infty}^{x}e^{-\lambda t}d(-\lambda t), & \text{երբ } x>0\end{cases}=\begin{cases}0, & \text{երբ } x\le 0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & \text{երբ } x>0:\end{cases}$

կստանանք

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{0}0\cdot xdx+\lambda\int_{0}^{+\infty}xe^{-\lambda x}dx=-\int_{0}^{+\infty}xde^{-\lambda x}=\frac{1}{\lambda}:$$

Ունենալով X պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը՝ [84,(21)] բանաձևի միջոցով կգտնենք նաև այդ մեծության դիսպերսիան.

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-\frac{1}{\lambda^2}=\lambda\int_{0}^{+\infty}x^2e^{-\lambda x}dx-\frac{1}{\lambda^2}=-\int_{0}^{+\infty}x^2de^{-\lambda x}-\frac{1}{\lambda^2}=$$

$$=-x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+\int_{0}^{+\infty}e^{-\lambda x}dx^2-\frac{1}{\lambda^2}=2\int_{0}^{+\infty}xe^{-\lambda x}dx-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}:$$

Այսպիսով, ցուցչային բաշխում ունեցող X անընդհատ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը, դիսպերսիան և միջին քառակուսային շեղումը համապատասխանաբար արտահայտվում են

$$M(X)=\frac{1}{\lambda},\quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2},\quad \sigma(X)=\frac{1}{\lambda} \qquad (17)$$

բանաձևերով:

Ինչպես տեսնում ենք, հավանականությունների ցուցչային օրենքով բաշխված պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը և միջին քառակուսային շեղումը հավասար են տրված մեծության բաշխման պարամետրի հակադարձ մեծությանը, իսկ դիսպերսիան՝ այդ պարամետրի հակադարձ մեծության քառակուսուն:

Օրինակ 3: Գտնել

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{երբ } x\le 0,\\ 1-e^{-0,1x}, & \text{երբ } x>0\end{cases}$$

բաշխման ֆունկցիայով տրված անընդհատ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը:

Լուծում: Օգտվելով պատահական մեծության բաշխման խտության սահմանումից [84,u3]՝ նախ գտնենք դիտարկվող պատահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտությունը.

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & \text{երբ } x\le 0,\\ 0,1\cdot e^{-0,1x}, & \text{երբ } x>0:\end{cases}$$

Այնուհետև օգտվելով [84,(18)] բանաձևից՝ հաշվենք որոնելի մաթեմատիկական սպասումը.

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=0,1\int_{0}^{+\infty}xe^{-0,1x}dx=-\int_{0}^{+\infty}xde^{-0,1x}=10:$$

ԳԼՈՒԽ XV

§86. Չեբիշևի անհավասարությունը և մեծ թվերի օրենքը: Բեռնուլլիի մեծ թվերի օրենքը:

Շարունակելով պատահական մեծությունների ուսումնասիրությունը՝ դնենք հետևյալ խնդիրը՝

Գտնել այն պատահույթի հավանականությունը, որ X պատահական մեծության շեղումն իր մաթեմատիկական սպասումից բացարձակ արժեքով չի գերազանցում նախապես տրված ε դրական թիվը:

Հասկանալի է, որ ε-ի բավականաչափ փոքր արժեքների դեպքում խնդիրը հանգում է այն պատահույթի հավանականությունը գտնելուն, որ X պատահական մեծության ընդունած արժեքները գրեթե հավասար են այդ մեծության մաթեմատիկական սպասմանը:

Ապացուցենք, որ վերջավոր դիսպերսիա ունեցող կամայական X պատահական մեծության և յուրաքանչյուր ε դրական թվի համար տեղի ունի

$$P[|X-M(X)|\le\varepsilon]>1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2} \qquad (1)$$

*անհավասարությունը**):

Ապացույց: Ենթադրենք X-ը դիսկրետ պատահական մեծություն է, որի բաշխման օրենքը տրվում է աղյուսակ 1-ով [82]:

Վերցնենք կամայական ε դրական թիվ և դիտարկվող պատահական մեծության արժեքների բազմությունը տրոհենք երկու ենթաբազմությունների: Առաջին ենթաբազմության մեջ գցենք X մեծության այն և միայն այն արժեքները, որոնց համար տեղի ունի

$$|X-M(X)|>\varepsilon$$

անհավասարությունը, իսկ երկրորդի մեջ՝ տրված մեծության մնացած արժեքները, այսինքն այդ մեծության այն և միայն այն արժեքները, որոնց համար տեղի ունի

$$|X-M(X)|\le\varepsilon$$

անհավասարությունը: Այնուհետև $\sum p_n'$-ով նշանակելով X պատահական մեծության արժեքների բազմության առաջին ենթաբազմությանը պատկանող արժեքների հավանականությունների գումարը, իսկ $\sum p_n''$-ով՝ տրված մեծության երկրորդ ենթաբազմությանը պատկանող արժեքների հավանականությունների գումարը.

$$P\left[|X-M(X)|>\varepsilon\right]=\sum p_n', \quad P\left[|X-M(X)|\le\varepsilon\right]=\sum p_n'', \qquad (2)$$

կունենանք [82,(2)]

$$P\left[|X-M(X)|>\varepsilon\right]+P\left[|X-M(X)|\le\varepsilon\right]=\sum p_n'+\sum p_n''=\sum_{n=1}^{\infty}p_n=1,$$

որտեղից մեզ հետաքրքրող հավանականության համար կստանանք

---

*) Որը կոչվում է Չեբիշևի անհավասարություն:

$$P\left[\left|X-M(X)\right|\le\varepsilon\right]=1-P\left[\left|X-M(X)\right|>\varepsilon\right]: \qquad (3)$$

Համաձայն պայմանավորվածության, եթե X պատահական մեծության x_n արժեքը պատկանում է այդ մեծության արժեքների բազմության առաջին ենթաբազմությանը, ապա տեղի ունի

$$\left|x_n-M(X)\right|>\varepsilon$$

և հետևաբար նաև

$$\left[x_n-M(X)\right]^2>\varepsilon^2 \qquad (4)$$

անհավասարությունը: Հաշվի առնելով նաև, որ դիտարկվող պատահական մեծության դիսպերսիան արտահայտվում է

$$D(X)=\sum_{n=1}^{\infty}p_n\left[x_n-M(X)\right]^2$$

բանաձևով [83,(11)] և (4) անհավասարությունը ներկայացնելով

$$1<\frac{1}{\varepsilon^2}\left[x_n-M(X)\right]^2 \qquad (4')$$

տեսքով՝ (3) հավասարության աջ մասում գրված հավանականության համար կստանանք

$$P\left[\left|X-M(X)\right|>\varepsilon\right]=\sum p_n'\cdot 1<\frac{1}{\varepsilon^2}\sum p_n'\left[x_n-M(X)\right]^2\le\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}p_n\left[x_n-M(X)\right]^2,$$

այսինքն՝

$$P\left[\left|X-M(X)\right|>\varepsilon\right]<\frac{D(X)}{\varepsilon^2} \qquad (5)$$

գնահատականը: Վերջին անհավասարության հաշվառումով, (3) հավասարությունից կստանանք Չեբիշևի անհավասարությունը:

Իպա

Քանի որ մեկին մոտ հավանականություն ունեցող պատահույթները համարյա միշտ տեղի են ունենում, իսկ զրոյին մոտ հավանականություն ունեցող պատահույթները գրեթե տեղի չեն ունենում, ուստի նշված պատահույթները գործնականում մեծ նշանակություն ունեն:

Հավանականությունների տեսության հիմնական խնդիրներից մեկը մեկին մոտ հավանականությամբ տեղի ունեցող օրինաչափությունների հայտնաբերումն ու արձանագրումն է, ընդ որում նշված օրինաչափությունների մեջ հատուկ տեղ են զբաղեցնում այնպիսիները, որոնք կախված են մեծ թվով իրարից անկախ պատահական գործոններից:

Մեծ թվերի օրենք ասելով հավանականությունների տեսության մեջ հասկանում են մի շարք սահմանային թեորեմներ, որոնք հաստատում են, որ մեկին մոտ հավանականությամբ տեղի կունենան որոշ պատահույթներ, որոնք կախված են բավականին մեծ թվով պատահական մեծությունների գումարից, ընդ որում այդ մեծություններից յուրաքանչյուրի ազդեցությունը նշված գումարի վրա աննշան է:

Թեորեմ 1: *(Չեբիշևի մեծ թվերի օրենքը) Եթե $\{X_n\}$-ը (վերջավոր) մաթեմատիկական սպասումներ ունեցող և զույգ առ զույգ անկախ այնպիսի պատահական մեծությունների հաջորդականություն է, որոնց դիսպերսիաները սահմանափակ են միևնույն հաստատունով (հավասարաչափ սահմանափակ են).*

$$D(X_i) \le c \quad (i = 1,2,...; c = const), \tag{6}$$

ապա ցանկացած ε դրական թվի համար տեղի ունի

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| \le \varepsilon\right] = 1 \tag{7}$$

հավասարությունը:

Ըստ էության Չեբիշևի թեորեմը պնդում է, որ եթե դիտարկվում են (վերջավոր) մաթեմատիկական սպասումներ ունեցող բավականաչափ մեծ թվով զույգ առ զույգ անկախ պատահական մեծություններ, որոնց դիսպերսիաները հավասարաչափ սահմանափակ են, ապա մեկին մոտ հավանականությամբ կարելի է պնդել, որ այդ մեծությունների միջին թվաբանականի շեղումը դիտարկվող մեծությունների մաթեմատիկական սպասումների միջին թվաբանականից, բացարձակ արժեքով չի գերազանցում նախապես տրված կամայական ε դրական թիվը:

Ապացույց: Թեորեմն ապացուցելու համար դիտարկենք պատահական մեծությունների

$$X_n^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{8}$$

գումարը և նկատի ունենալով, որ այն նույնպես պատահական մեծություն է, այդ մեծության համար գրենք Չեբիշևի անհավասարությունը.

$$P\left[\left|X_n^* - M(X_n^*)\right| \le \varepsilon\right] > 1 - \frac{D(X_n^*)}{\varepsilon^2}, \tag{9}$$

որտեղ ε-ը կամայական դրական թիվ է:

Օգտվելով (6) անհավասարություններից և հաշվի առնելով, որ [83,(3),(4),(14),(15)]

$$M(X_n^*) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i), \quad D(X_n^*) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i), \tag{10}$$

(9) անհավասարությունից կստանանք

$$P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| \le \varepsilon\right] > 1 - \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) \ge 1 - \frac{nc}{n^2\varepsilon^2}$$

կամ

$$P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| \le \varepsilon\right] > 1 - \frac{c}{n\varepsilon^2} \tag{11}$$

անհավասարությունը: Ստացած առնչության մեջ անցնելով սահմանի, երբ n-ը ձգտում է անսահմանության՝ կունենանք [20,դ1]

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| \le \varepsilon\right] \ge 1: \qquad (12)$$

Հաշվի առնելով, որ պատահույթի հավանականությունը, հետևաբար նաև այդ հավանականության սահմանը, մեկից մեծ լինել չի կարող՝ (12) անհավասարությունից կստանանք պահանջվող հավասարությունը:

Իպա

Եթե, մասնավոր դեպքում X_i $(i=1,2,...)$ զույգ առ զույգ անկախ պատահական մեծություններն ունեն միևնույն մաթեմատիկական սպասումը.

$$a = M(X_1) = M(X_2) = \cdots = M(X_n) = \cdots$$

և այդ մեծությունների դիսպերսիաները հավասարաչափ սահմանափակ են, ապա (7) հավասարությունը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| \le \varepsilon\right] = 1: \qquad (7')$$

Այսպիսով, եթե զույգ առ զույգ անկախ n պատահական մեծություններ ունեն միևնույն մաթեմատիկական սպասումը և այդ մեծությունների դիսպերսիաները հավասարաչափ սահմանափակ են, ապա մեկին մոտ հավանականությամբ կարելի է պնդել, որ տրված մեծությունների միջին թվաբանականը n-ի աճմանը զուգընթաց մոտենում է այդ մեծությունների մաթեմատիկական սպասմանը:

Նկատենք, որ Չեբիշևի թեորեմի էությունը հետևյալումն է. զույգ առ զույգ անկախ առանձին պատահական մեծություններ կարող են ընդունել իրենց մաթեմատիկական սպասումից հեռու արժեքներ, բայց բավականաչափ մեծ թվով պատահական մեծությունների դեպքում այդ մեծությունների միջին թվաբանականը մեկին մոտ հավանականությամբ ընդունում է տրված մեծությունների մաթեմատիկակական սպասումների միջին թվաբանականին մոտ արժեքներ: Այլ խոսքով, զույգ առ զույգ անկախ առանձին պատահական մեծություններ կարող են ունենալ մեծ ցրում իրենց մաթեմատիկական սպասման շուրջը, սակայն տրված մեծությունների միջին թվաբանականի ցրումն այդ մեծությունների մաթեմատիկական սպասումների միջին թվաբանականից փոքր է:

Այսպիսով, եթե (վերջավոր) մաթեմատիկական սպասումներ ունեցող զույգ առ զույգ անկախ պատահական մեծությունների դիսպերսիաները հավասարաչափ են սահմանափակ, ապա այդ մեծությունների թվի մեծ արժեքների դեպքում տրված մեծությունների միջին թվաբանականը դադարում է պատահական մեծության բնույթ ունենալուց:

Նշենք, որ թե՛ Չեբիշևի անհավասարությունը և թե՛ նրա թեորեմը ճիշտ են նաև անընդհատ պատահական մեծությունների համար [84,u2]:

Բեռնուլլիի մեծ թվերի օրենքին ծանոթանալու համար ենթադրենք կատարվում է անկախ փորձերի հաջորդականություն, որոնցից յուրաքանչյուրում A պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը նույնն է և հավասար է p-ի:

ԳԼՈՒԽ XV

Եթե i-րդ փորձում $(i=1,2,...)$ A պատահույթի հանդես գալու թիվը նշանակենք X_i-ով, իսկ կատարված n անկախ փորձերում՝ k-ով.

$$k=\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

ապա հաշվի առնելով, որ [83,o2]

$$M(X_i)=p, \quad D(X_i)=p(1-p) \qquad (i=1,2,...) \tag{13}$$

և նկատի ունենալով, որ դիտարկվող պատահական մեծությունների դիսպերսիաները հավասարաչափ սահմանափակ են (օրինակ՝ 1-ով), (7՝) հավասարությունից կստանանք Բեռնուլլիի մեծ թվերի օրենքը.

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{k}{n}-p\right|\le\varepsilon\right]=1: \tag{14}$$

Այսպիսով, եթե n անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում A պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը նույնն է և հավասար է p-ի, իսկ k-ն կատարված n անկախ փորձերում A պատահույթի հանդես գալու թիվն է, ապա կամայական ε դրական թվի համար տեղի ունի (14) հավասարությունը:

ԳԼՈՒԽ XVI

ՕՊԵՐԱՑԻՈՆ ՀԱՇԻՎ

§87. Պատկեր և սկզբնական ֆունկցիա: Թեորեմներ պատկերի գոյության և սկզբնական ֆունկցիայի միակության մասին: $\eta(t)$, e^{at}, $\sin t$, $\cos t$ ֆունկցիաների պատկերները: Նմանության թեորեմը: $\sin at$ և $\cos at$ ֆունկցիաների պատկերները:

Այս գլխում կծանոթանանք մաթեմատիկական անալիզի կարևոր բաժիններից մեկի՝ օպերացիոն հաշվի հիմնական հասկացություններից մի քանիսին և այդ հաշվի մեթոդներով կլուծենք որոշ դիֆերենցիալ հավասարումներ:

Սահմանում 1: *Ամբողջ թվային առանցքի վրա որոշված $f(t)$ (կոմպլեքսարժեք) ֆունկցիան կոչվում է սկզբնական ֆունկցիա (ֆունկցիա-օրիգինալ), եթե այն բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝*

1°. *$f(t)\equiv 0$, երբ $t<0$, այսինքն t-ի բոլոր բացասական արժեքների համար $f(t)$ ֆունկցիայի արժեքները հավասար են զրոյի,*

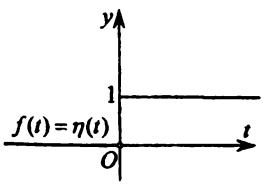
2°. *$[0,+\infty)$ միջակայքի ցանկացած վերջավոր մասում $f(t)$ ֆունկցիան ունի ոչ ավել, քան վերջավոր թվով առաջին սեռի խզման կետեր,*

3°. *$f(t)$ ֆունկցիան աճում է ցուցչային ֆունկցիայից ոչ արագ, այսինքն գոյություն ունեն այնպիսի M և s_0 $(M>0,\ s_0\ge 0)$ հաստատուններ՝, որ ցանկացած t-ի համար տեղի ունի*

$$|f(t)|\le Me^{s_0t} \tag{1}$$

անհավասարությունը:

Ակնհայտ է, որ սահմանափակ սկզբնական ֆունկցիաների պարագայում կարելի է ընդունել $s_0=0$:



նկ.48

Օրինակ 1: Սկզբնական ֆունկցիայի պարզագույն օրինակ է հետևյալ, այսպես կոչված, միավոր ֆունկցիան (նկ.48), որին անվանում են նաև Հեվիսայդի ֆունկցիա՝

$$\eta(t)=\begin{cases}0, & \text{եթե } t<0,\\ 1, & \text{եթե } t\ge 0:\end{cases} \tag{ա}$$

Նկատենք, որ եթե 2° և 3° պայմաններին բավարարող $\varphi(t)$ ֆունկցիան չի բավարարում 1° պայմանին, ապա $f(t)=\varphi(t)\eta(t)$ ֆունկցիան ակնհայտորեն բավարարում է նաև 1° պայմանին.

$$f(t)=\varphi(t)\eta(t)=\begin{cases}0, & \text{եթե } t<0,\\ \varphi(t), & \text{եթե } t\ge 0,\end{cases} \tag{2}$$

°) s_0 հաստատունը կոչվում է $f(t)$ ֆունկցիայի աճի ցուցիչ:

որտեղից հետևում է, որ եթե $\varphi(t)$ ֆունկցիան բավարարում է 2 և 3 պայմաններին, ապա (2) բանաձևով տրվող $\varphi(t)\eta(t)$ արտադրյալը սկզբնական ֆունկցիա է:

Սկզբնական ֆունկցիայի պատկերի հասկացությանը ծանոթանալու համար նախ բերենք հետևյալ սահմանումը՝

Սահմանում 2: *Կասենք, որ կոմպլեքս թվերից կազմված D բազմության վրա որոշված է w ֆունկցիան.*

$$w = f(z),$$

եթե տրված է օրենք, որը նշված բազմության յուրաքանչյուր z արժեքի համապատասխանեցնում է Q բազմության մեկ կամ մի քանի w արժեք:

Առաջին դեպքում $f(z)$-ը կոչվում է միարժեք ֆունկցիա, իսկ երկրորդ դեպքում՝ բազմարժեք ֆունկցիա: D բազմությունը կոչվում է կոմպլեքս փոփոխականի $f(z)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթ, իսկ Q բազմությունը՝ արժեքների տիրույթ:

Այժմ ենթադրենք $f(t)$-ն սկզբնական ֆունկցիա է, իսկ p-ն՝ կոմպլեքս փոփոխական [36,u1]:

Սահմանում 3: *Կոմպլեքս փոփոխականի*

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt \qquad (p = a + ib) \tag{3}$$

ֆունկցիան [42,u1] *կոչվում է $f(t)$ սկզբնական ֆունկցիայի Լապլասի ձևափոխություն կամ $f(t)$ ֆունկցիայի պատկեր ըստ Լապլասի*[*]:

Այն փաստը, որ $F(p)$ ֆունկցիան $f(t)$ սկզբնական ֆունկցիայի պատկերն է ըստ Լապլասի՝ կնշենք հետևյալ կերպ՝

$$L[f(t)] = F(p):$$

Օպերացիոն մեթոդ կամ օպերացիոն հաշիվ ասելով կհասկանանք այն բոլոր գործողությունների ու մեթոդների միավորումը, որի միջոցով կգտնենք տրված սկզբնական ֆունկցիայի պատկերը կամ տրված պատկերի սկզբնական ֆունկցիան:

Նշենք, որ օպերացիոն մեթոդն ունի լայն կիրառություններ: Այդ մեթոդի օգնությամբ պարզեցվում են շատ խնդիրների լուծումներ: Մասնավորապես, օպերացիոն հաշվի կիրառմամբ հաստատուն գործակիցներով դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումը հանգում է պարզագույն հանրահաշվական գործողությունների կատարման [89]:

Այժմ դիտարկենք կոմպլեքս փոփոխականի որևէ $F(p)$ ֆունկցիա: Հարց է ծագում. *գոյություն ունի՞ արդյոք $F(p)$ պատկերն ունեցող $f(t)$ սկզբնական ֆունկցիա և գոյություն ունենալու դեպքում արդյո՞ք այն միարժեքորեն է որոշվում:*

---

*) Հայտնի է, որ իրական փոփոխականի $w(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$ կոմպլեքսարժեք ֆունկցիայի ինտեգրալի հաշվումը բերվում է $\varphi(t)$ և $\psi(t)$ իրական ֆունկցիաների ինտեգրալների հաշվմանը.

$$\int_a^b w(t)dt = \int_a^b \varphi(t)dt + i\int_a^b \psi(t)dt:$$

Պարզվում է, որ որոշակի պայմանների իրականացման դեպքում նշված ֆունկցիաներին վերաբերող ձևակերպած երկու հարցերն էլ ունեն դրական պատասխան: Մասնավորապես, տրված պատկերն ունեցող սկզբնական ֆունկցիայի միակությունը կարգավորվում է հետևյալ թեորեմով, որը բերում ենք առանց ապացույցի՝

Թեորեմ 1: *Եթե $f(t)$ և $g(t)$ անընդհատ սկզբնական ֆունկցիաներն ունեն միևնույն $F(p)$ պատկերը, ապա այդ ֆունկցիաները նույնաբար համընկնում են.*

$$f(t) \equiv g(t):$$

Այնուհետև դիտարկենք որևէ $f(t)$ սկզբնական ֆունկցիա: Հարց է ծագում. *արդյո՞ք $f(t)$ ֆունկցիան ունի պատկեր:*

Պարզվում է ձևակերպած հարցն էլ ունի դրական պատասխան:

Թեորեմ 2: *s_0 աճի ցուցիչ ունեցող կամայական սկզբնական ֆունկցիա $\operatorname{Re} p > s_0$ $(p = a + ib)$ կիսահարթության մեջ ունի պատկեր:*

Ապացույց: Թեորեմն ապացուցելու համար ենթադրենք՝ $f(t)$ սկզբնական ֆունկցիայի աճի ցուցիչը հավասար է s_0-ի, և օգտվելով էյլերի բանաձևից [36,(18)]՝ կատարենք հետևյալ ձևափոխությունները՝

$$e^{-pt} f(t) = e^{-(a+ib)t} f(t) = e^{-at} e^{-ibt} f(t) =$$

$$= e^{-at}(\cos bt - i \sin bt) f(t) = e^{-at} f(t) \cos bt - i e^{-at} f(t) \sin bt:$$

Այնուհետև (3) անիսկական ինտեգրալի ենթինտեգրալ ֆունկցիայի համար ստացած ներկայացման շնորհիվ այդ ինտեգրալը գրենք երկու անիսկական ինտեգրալների գումարի տեսքով [42,p4].

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-at} f(t) \cos bt dt - i \int_0^{+\infty} e^{-at} f(t) \sin bt dt: \qquad (4)$$

Օգտվելով $f(t)$ ֆունկցիայի (1) գնահատականից և նկատի ունենալով, որ, համաձայն ենթադրության, $a > s_0$ $(a - s_0 > 0)$, (4) հավասարության աջ մասի առաջին ինտեգրալի բացարձակ արժեքի համար կստանանք [35,7°ա], [40,1°,9°]

$$\left| \int_0^{+\infty} e^{-at} f(t) \cos bt dt \right| \le \int_0^{+\infty} \left| e^{-at} f(t) \cos bt \right| dt < M \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{s_0 t} dt =$$

$$= -\frac{M}{a - s_0} \int_0^{+\infty} e^{-(a-s_0)t} d[-(a - s_0)t] = -\frac{M}{a - s_0} \lim_{t \to +\infty} e^{-(a-s_0)t} \Big|_0^t = \frac{M}{a - s_0} \quad (M > 0, s_0 \ge 0):$$

Ստացած գնահատականից հետևում է, որ նշված ինտեգրալը գոյություն ունի և բացարձակ զուգամետ է $a > s_0$ կիսահարթությունում [42,u3]:

Թեորեմի ապացույցն ավարտելու համար մնում է նույն ձևով համոզվել, որ (4) հավասարության աջ մասի երկրորդ ինտեգրալը նույնպես գոյություն ունի ու բացարձակ զուգամետ է նշված կիսահարթությունում և օգտվել անիսկական ինտեգրալների գումարի զուգամիտությանը վերաբերող թեորեմից:

Իպա

ԳԼՈՒԽ XVI

Այժմ անցնենք $\eta(t)$, $e^{\alpha t}$ $(\alpha = const)$, $\sin t$ և $\cos t$ ֆունկցիաների պատկերները ստանալուն:

Օգտվելով սահմանում 3-ից, կունենանք

ա) $$L[\eta(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\eta(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt = \lim_{l\to+\infty}\int_0^{l} e^{-pt}dt = -\frac{1}{p}\lim_{l\to+\infty}\int_0^{l} e^{-pt}d(-pt) =$$

$$= -\frac{1}{p}\lim_{l\to+\infty} e^{-pt}\Big|_0^{l} = -\frac{1}{p}\lim_{l\to+\infty}(e^{-pl} - e^0) = \frac{1}{p} \qquad (\operatorname{Re} p = a > 0):$$

բ) $$L[e^{\alpha t}] = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, e^{\alpha t}dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-\alpha)t}dt =$$

$$= -\frac{1}{p-\alpha}\lim_{l\to+\infty}\int_0^{l} e^{-(p-\alpha)t}d[-(p-\alpha)t] = \frac{1}{p-\alpha} \qquad (\operatorname{Re} p > \alpha,\ \alpha = const):$$

գ) $$L[\sin t] = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\sin t dt = \lim_{l\to+\infty}\int_0^{l} e^{-pt}\sin t dt:$$

Երկու անգամ հաջորդաբար մասերով ինտեգրելով՝ կստանանք [41,(15)]

$$\lim_{l\to+\infty}\int_0^{l} e^{-pt}\sin t dt = \lim_{l\to+\infty}\frac{p\sin t + \cos t}{e^{pt}(p^2+1)}\Bigg|_0^{l} = \frac{1}{p^2+1} \qquad (\operatorname{Re} p > 0):$$

դ) Նույն ձևով կունենանք

$$L[\cos t] = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\cos t dt = \lim_{l\to+\infty}\int_0^{l} e^{-pt}\cos t dt = \lim_{l\to+\infty}\frac{\sin t - p\cos t}{e^{pt}(p^2+1)}\Bigg|_0^{l} = \frac{p}{p^2+1} \qquad (\operatorname{Re} p > 0):$$

Այսպիսով տեղի ունեն հետևյալ բանաձևերը՝

$$L[\eta(t)] = \frac{1}{p} \qquad (\operatorname{Re} p > 0), \tag{5}$$

$$L[e^{\alpha t}] = \frac{1}{p-\alpha} \qquad (\operatorname{Re} p > 0,\ \alpha = const), \tag{6}$$

$$L[\sin t] = \frac{1}{p^2+1} \qquad (\operatorname{Re} p > 0), \tag{7}$$

$$L[\cos t] = \frac{p}{p^2+1} \qquad (\operatorname{Re} p > 0): \tag{8}$$

Նկատենք՝, որ ա) - դ) կետերում բերված ինտեգրալները կարելի է հաշվել նաև էյլերի բանաձևի օգնությամբ՝ այդ ինտեգրալներն իրական ֆունկցիաների համապատասխան ինտեգրալների բերելու միջոցով:

---

*) Համեմատելով (7) և (8) բանաձևերը՝ ստանում ենք հետևյալ առնչությունը՝

$$L[\cos t] = pL[\sin t] \qquad (\operatorname{Re} p > 0): \tag{8'}$$

$\sin\alpha t$, $\cos\alpha t$ $(\alpha = const)$ ֆունկցիաների պատկերները ստանալու համար նախ ապացուցենք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 3: *(Նմանության թեորեմը) Եթե $F(p)$ -ն $f(t)$ սկզբնական ֆունկցիայի պատկերն է.*

$$L[f(t)] = F(p),$$

ապա $\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$ -ն էլ $(\alpha > 0)$ $f(\alpha t)$ ֆունկցիայի պատկերն է).

$$L[f(\alpha t)] = \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right) \quad (\alpha > 0): \tag{9}$$

Ապացույց: Օգտվելով սկզբնական ֆունկցիայի պատկերի սահմանումից՝ կունենանք [41,թ2]

$$L[f(\alpha t)] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(\alpha t)dt = \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{p}{\alpha}\alpha t} f(\alpha t)d(\alpha t) = \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{px}{\alpha}} f(x)dx =$$

$$= \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right) \quad (x = \alpha t;\ \alpha > 0):$$

Իսկ

Օգտվելով (7), (8) բանաձևերից և նմանության թեորեմից՝ համապատասխանաբար կստանանք

$$L[\sin\alpha t] = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{(p/\alpha)^2+1} = \frac{\alpha}{p^2+\alpha^2} \quad (\alpha > 0),$$

$$L[\cos\alpha t] = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{p/\alpha}{(p/\alpha)^2+1} = \frac{p}{p^2+\alpha^2} \quad (\alpha > 0):$$

Այսպիսով, տեղի ունեն

$$L[\sin\alpha t] = \frac{\alpha}{p^2+\alpha^2} \quad (\mathrm{Re}\,p > 0,\ \alpha > 0), \tag{10}$$

$$L[\cos\alpha t] = \frac{p}{p^2+\alpha^2} \quad (\mathrm{Re}\,p > 0,\ \alpha > 0) \tag{10'}$$

բանաձևերը:

Վերջում բերենք նաև հետևյալ կարևոր թեորեմը՝

Թեորեմ 4: *(Գծայնության թեորեմը) Կամայական α և β (իրական կամ կոմպլեքս) հաստատունների համար տեղի ունի*

$$L[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha F(p) + \beta G(p) \tag{11}$$

---

*) Հասկանալի է, որ եթե $f(t)$ -ն սկզբնական ֆունկցիա է, ապա $f(\alpha t)$ -ն ($\alpha > 0$) նույնպես սկզբնական ֆունկցիա է:

բանաձևը, որտեղ $F(p)$ -ն և $G(p)$ -ն համապատասխանաբար $f(t)$ և $g(t)$ սկզբնական ֆունկցիաների պատկերներն են[7]*:*

Թեորեմի ապացույցը կառուցվում է անիսկական ինտեգրալների համապատասխան հատկությունների վրա [42]:

Օրինակ 2: Օգտվելով գծայնության թեորեմից՝ ստանալ (10) և (10′) բանաձևերը:

Լուծում: Օգտվելով եռանկյունաչափական ֆունկցիաները ցուցչային ֆունկցիաների միջոցով ներկայացնելու էյլերի բանաձևերից [36,(19′)], (6) և (11) բանաձևերի հաշվառումով՝ կունենանք

$$L[\sin\alpha t]=L\left[\frac{e^{i\alpha t}-e^{-i\alpha t}}{2i}\right]=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\alpha}-\frac{1}{p+i\alpha}\right)=\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2},$$

$$L[\cos\alpha t]=L\left[\frac{e^{i\alpha t}+e^{-i\alpha t}}{2}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\alpha}+\frac{1}{p+i\alpha}\right)=\frac{p}{p^2+\alpha^2}\quad(\operatorname{Re}p>0,\ \alpha>0):$$

Օրինակ 3: Գտնել

$$f(t)=5\eta(t)+4\sin 2t \tag{բ}$$

սկզբնական ֆունկցիայի պատկերը:

Լուծում: Օգտվելով (5), (10) և (11) բանաձևերից՝ կստանանք

$$L[f(t)]=L[5\eta(t)+4\sin 2t]=5L[\eta(t)]+4L[\sin 2t]=\frac{5}{p}+\frac{8}{p^2+4},$$

այսինքն (բ) սկզբնական ֆունկցիայի պատկերն ունի

$$\frac{5}{p}+\frac{8}{p^2+4}\quad(\operatorname{Re}p>0) \tag{գ}$$

տեսքը:

Օրինակ 4: Գտնել (գ) պատկերի սկզբնական ֆունկցիան:

Լուծում: Օգտվելով թեորեմ 1-ից և տրված պատկերը ներկայացնելով

$$F(p)=5\cdot\frac{1}{p}+4\cdot\frac{2}{p^2+2^2}$$

տեսքով, (5) և (10) բանաձևերի հաշվառումով կստանանք, որ դիտարկվող պատկերի սկզբնական ֆունկցիան ունի (բ) տեսքը:

§88. Պատկերի տեղաշարժման թեորեմը: $e^{-\alpha t}\sin\beta t$, $e^{-\alpha t}\cos\beta t$ ֆունկցիաների պատկերները: Սկզբնական ֆունկցիայի և պատկերի ածանցումը: t^n ֆունկցիայի պատկերը: Սկզբնական ֆունկցիայի ուշացման թեորեմը:

Այս պարագրաֆում կծանոթանանք օպերացիոն հաշվի մի քանի կարևոր թեորեմների:

Թեորեմ 1: *(Պատկերի տեղաշարժման մասին) եթե $F(p)$ -ն s_0 աճի ցուցիչ ունեցող $f(t)$ սկզբնական ֆունկցիայի պատկերն է.*

$$L[f(t)]=F(p),$$

---

*) Նշենք, որ եթե $f(t)$ և $g(t)$ սկզբնական ֆունկցիաների աճի ցուցիչները համապատասխանաբար s_f -ը և s_g -ն են, ապա $\alpha F(p)+\beta G(p)$ պատկերը որոշված է $\operatorname{Re}p>\max(s_f,s_g)$ հարթության մեջ:

ապա կամայական α կոմպլեքս հաստատունի համար $F(p+\alpha)$-ն էլ $e^{-\alpha t}f(t)$ սկզբնական ֆունկցիայի պատկերն է.

$$L[e^{-\alpha t}f(t)] = F(p+\alpha) \qquad [\mathrm{Re}(p+\alpha) > s_0]: \tag{1}$$

Ապացույց: Օգտվելով սկզբնական ֆունկցիայի պատկերի սահմանումից [87,u3] կունենանք

$$L\left[e^{-\alpha t}f(t)\right] = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, e^{-\alpha t} f(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+\alpha)t} f(t)dt = F(p+\alpha) \quad [\mathrm{Re}(p+\alpha) > s_0]:$$

Իպա

Այսպիսով, պատկերի «տեղաշարժը» α հաստատունով համարժեք է այդ պատկերն ունեցող սկզբնական ֆունկցիայի բազմապատկմանը $e^{-\alpha t}$ ֆունկցիայով:

Ըստ էության պատկերի տեղաշարժման թեորեմը հնարավորություն է տալիս որևէ սկզբնական ֆունկցիայի պատկերն ունենալու դեպքում գտնել նաև այդ ֆունկցիայի և $e^{-\alpha t}$ ֆունկցիայի արտադրյալի պատկերը, որտեղ α-ն կամայական կոմպլեքս հաստատուն է:

Ապացուցած թեորեմը կիրառելով $f(t) = \sin\beta t$, $f(t) = \cos\beta t$ ֆունկցիաների վրա և օգտվելով [87,(10),(10')] բանաձևերից՝ կամայական կամպլեքս α հաստատունի համար կստանանք

$$L\left[e^{-\alpha t}\sin\beta t\right] = \frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}, \quad L\left[e^{-\alpha t}\cos\beta t\right] = \frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\beta^2} \quad [\mathrm{Re}(p+\alpha) > 0,\ \beta > 0]: \tag{2}$$

Օրինակ 1: Գտնել

$$F(p) = \frac{1}{p^2+2p+5}$$

պատկերն ունեցող սկզբնական ֆունկցիան:

Լուծում: Օգտվելով (2) բանաձևերից առաջինից՝ կունենանք

$$L[\sin t] = \frac{1}{p^2+1}, \quad L[\sin 2t] = \frac{2}{p^2+4},$$

$$L\left[e^{-t}\sin 2t\right] = \frac{2}{(p+1)^2+4} = \frac{2}{p^2+2p+5},$$

որտեղից, նկատի ունենալով գծայնության թեորեմը՝ կստանանք [87,p4]

$$L\left[\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t\right] = \frac{1}{p^2+2p+5}:$$

Այսպիսով, դիտարկվող պատկերի սկզբնական ֆունկցիան ունի

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t$$

տեսքը:

Թեորեմ 2: *(Սկզբնական ֆունկցիայի ածանցման մասին) Եթե $F(p)$-ն $(0,+\infty)$ միջակայքում անընդհատ և s_0 աճի ցուցիչ ունեցող $f(t)$ սկզբնական*

ֆունկցիայի պատկերն է $\operatorname{Re} p > s_0$ *կիսահարթությունում և* $f'(t)$ *-ն էլ է սկզբնական ֆունկցիա, ապա* $pF(p) - f(0)$ *ֆունկցիան, որտեղ*

$$f(0) = \lim_{t \to +0} f(t) \quad [\lim_{t \to 0} f(t) = 0],$$

$f'(t)$ *ածանցյալի պատկերն է.*

$$L[f'(t)] = pF(p) - f(0) \quad (\operatorname{Re} p > s_0): \tag{3}$$

Ապացույց: Օգտվելով սկզբնական ֆունկցիայի պատկերի սահմանումից և թեորեմի պայմաններից՝ կունենանք [41,(15)], [42,u1]

$$\begin{aligned} L[f'(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t)dt = \lim_{l \to +\infty} \int_0^l e^{-pt} df(t) = \lim_{l \to +\infty} e^{-pt} f(t)\Big|_0^l - \\ &- \lim_{l \to +\infty} \int_0^l f(t) de^{-pt} = \lim_{l \to +\infty} e^{-pt} f(t)\Big|_0^l + pF(p): \end{aligned} \tag{4}$$

Մյուս կողմից, հաշվի առնելով, որ ցանկացած t -ի համար տեղի ունեն

$$|\cos bt + i \sin bt| = \sqrt{\cos^2 bt + \sin^2 bt} = 1, \qquad |f(t)| \le M e^{s_0 t}$$

առնչությունները [36,(7)], [87,(1)] և օգտվելով [36,(18)] բանաձևից, $e^{-pt} f(t)$ ֆունկցիայի համար կստանանք

$$\left|e^{-pt} f(t)\right| \le M e^{s_0 t} \left|e^{-(a+ib)t}\right| = M e^{-(a-s_0)t} |\cos bt + i \sin bt| = \frac{M}{e^{(a-s_0)t}} \qquad (p = a + ib)$$

գնահատականը: Դժվար չէ նկատել, որ ստացած գնահատականի շնորհիվ կունենանք

$$\lim_{l \to +\infty} e^{-pt} f(t)\Big|_0^l = -f(0) \qquad (\operatorname{Re} p > s_0): \tag{5}$$

Թեորեմի ապացույցն ավարտելու համար մնում է (5) սահմանի արժեքը տեղադրել (4) հավասարություններից վերջինի աջ մասի մեջ:

Իպա

Նկատենք, որ $f(0) = 0$ *մասնավոր դեպքում (3) բանաձևն ընդունում է*

$$L[f'(t)] = pF(p) \tag{3'}$$

պարզ տեսքը, ինչը նշանակում է, որ դիտարկվող դեպքում սկզբնական ֆունկցիայի ածանցումը համարժեք է այդ ֆունկցիայի պատկերի բազմապատկմանը p *-ով:*

Հետևանք 1: *Եթե* $F(p)$ *-ն* $(0,+\infty)$ *միջակայքում անընդհատ և* s_0 *աճի ցուցիչ ունեցող* $f(t)$ *սկզբնական ֆունկցիայի պատկերն է* $\operatorname{Re} p > s_0$ *կիսահարթությունում և* $f'(t)$ *-ն,* $f''(t)$ *-ն, ... ,* $f^{(n-1)}(t)$ *-ն* $(n > 1)$ *նույնպես սկզբնական ֆունկցիաներ են, ապա նշված կիսահարթությունում տեղի ունի*

$$L[f^{(n)}(t)] = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \cdots - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \tag{6}$$

հավասարությունը, որտեղ

$$f^{(k)}(0)=\lim_{t\to+0}f^{(k)}(t)\quad (k=1,2,\dots,n-1):$$

Ապացույց: Հենվելով տրված պայմանների վրա և (3) բանաձևում $f(t)$-ի փոխարեն հաջորդաբար ընդունելով $f'(t)$, $f''(t)$, ... , $f^{(n-1)}(t)$, կստանանք

$$L[f''(t)]=L[\{f'(t)\}']=p[pF(p)-f(0)]-f'(0)=p^2F(p)-pf(0)-f'(0),$$

.....

$$L[f^{(n)}(t)]=L[\{f^{(n-1)}(t)\}']=p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\dots-pf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0):$$

Իսկ

Նկատենք, որ

$$f(0)=f'(0)=\dots=f^{(n-1)}(0)=0$$

մասնավոր դեպքում (6) բանաձևն ընդունում է

$$L[f^{(n)}(t)]=p^nF(p) \tag{6'}$$

պարզ տեսքը:

Օրինակ 2: Գտնել

$$f(t)=\cos^2 t \tag{ա}$$

սկզբնական ֆունկցիայի պատկերը:

Լուծում: Դիցուք $F(p)$-ն (ա) ֆունկցիայի պատկերն է $\operatorname{Re}p>0$ կիսահարթությունում.

$$L[\cos^2 t]=F(p)\quad (\operatorname{Re}p>0): \tag{բ}$$

Այդ դեպքում օգտվելով (3) բանաձևից՝ կունենանք

$$L[(\cos^2 t)']=pF(p)-\cos^2(0)$$

կամ [28,o1]

$$L[-\sin 2t]=pF(p)-1: \tag{գ}$$

Մյուս կողմից, ինչպես գիտենք [87,(10)], տեղի ունի

$$L[\sin 2t]=\frac{2}{p^2+4}\qquad (\operatorname{Re}p>0)$$

հավասարությունը, որտեղից, օգտվելով [87,(11)] բանաձևից՝ կստանանք

$$L[-\sin 2t]=-\frac{2}{p^2+4}: \tag{դ}$$

Համեմատելով (գ) և (դ) հավասարությունները՝ կունենանք

$$F(p)=\frac{p^2+2}{p(p^2+4)}\qquad (\operatorname{Re}p>0),$$

որտեղից էլ, (բ) հավասարության հաշվառումով վերջնականապես կստանանք

$$L[\cos^2 t]=\frac{p^2+2}{p(p^2+4)}\qquad (\operatorname{Re}p>0): \tag{ե}$$

Նշենք, որ դիտարկվող ֆունկցիայի պատկերը կարող ենք գտնել նաև օգտվելով այդ ֆունկցիայի հետևյալ ներկայացումից՝

$$\cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t:$$

Իրոք, ունենք [87,(5)]

$$L[\cos^2 t] = L\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right] = \frac{1}{2p} + \frac{p}{2(p^2+4)} = \frac{p^2+2}{p(p^2+4)} \qquad (\operatorname{Re} p > 0):$$

Անցնելով սկզբնական ֆունկցիայի պատկերի ածանցմանը՝ նախ ծանոթանանք պարամետրից կախված ինտեգրալի հասկացությանը:

Դիցուք $[a,b;c,d]$ ուղղանկյան մեջ որոշված $f(x,y)$ ֆունկցիան [46,u2] $[c,d]$ միջակայքի յուրաքանչյուր y-ի համար իսկական կամ անիսկական իմաստով [42,u4] ինտեգրելի է $[a,b]$ միջակայքում: Այդ դեպքում y փոփոխականը

$$\int_a^b f(x,y)dx$$

ինտեգրալում կոչվում է պարամետր, իսկ այդ ինտեգրալը՝ պարամետրից կախված ինտեգրալ:

Այժմ առանց ապացույցի բերենք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 3: *Եթե $[a,b;c,d]$ ուղղանկյան մեջ որոշված $f(x,y)$ ֆունկցիան $[c,d]$ միջակայքի յուրաքանչյուր y-ի համար ըստ x-ի անընդհատ է $[a,b]$ միջակայքում և $f(x,y)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթում գոյություն ունի $f'_y(x,y)$ անընդհատ մասնակի ածանցյալ (որպես երկու փոփոխականի ֆունկցիա), ապա $[c,d]$ միջակայքի ցանկացած y-ի համար տեղի ունի*

$$\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]'_y = \int_a^b f'_y(x,y)dx \tag{7}$$

բանաձևը:

Պարզվում է, որ որոշակի պայմանների բավարարման դեպքում (որոնց $e^{-pt}f(t)$ ֆունկցիան բավարարում է) (7) բանաձևը տեղի ունի նաև

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt \tag{8}$$

անիսկական ինտեգրալի համար [27,(8)], [28,(9),(15)].

$$F'(p) = -\int_0^{+\infty} t e^{-pt} f(t)dt, \tag{9}$$

որտեղ p-ն կամայական կոմպլեքս հաստատուն է, իսկ $f(t)$-ն՝ որևէ սկզբնական ֆունկցիա:

Թեորեմ 4: *(Պատկերի ածանցման մասին) Պատկերի ածանցումը համարժեք է այդ պատկերի սկզբնական ֆունկցիայի բազմապատկմանը $-t$-ով.*

$$F'(p) = L[-t f(t)], \tag{10}$$

և ընդհանրապես տեղի ունի

$$F^{(n)}(p) = L[(-1)^n t^n f(t)] \quad (n = 1,2,...) \tag{10'}$$

բանաձևը:

Ապացույց: Ենթադրենք $F(p)$-ն s_0 աճի ցուցիչ ունեցող $f(t)$ սկզբնական ֆունկցիայի պատկերն է $\operatorname{Re} p > s_0$ կիսահարթությունում, այսինքն ենթադրենք նշված կիսահարթությունում գոյություն ունի (8) անիսկական ինտեգրալը:

Կատարելով [87,թ2]-ում բերված դատողություններին նման դատողություններ՝ կահամոզվենք, որ նշված կիսահարթությունում գոյություն ունեն նաև

$$\int_0^{+\infty} (-t)^n e^{-pt} f(t)dt \quad (n = 1,2,...)$$

ինտեգրալները: Մյուս կողմից, (8) հավասարության երկու կողմերը հաջորդաբար n անգամ ածանցելով ըստ p պարամետրի՝ կստանանք

$$F^{(n)}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}(-t)^n f(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt}(-1)^n t^n f(t)dt \quad (n = 1,2,...)$$

կամ որ նույնն է՝ (10′) բանաձևը:

Իպա

Օրինակ 3: Գտնել

$$f(t) = t\cos\alpha t, \quad g(t) = t\sin\alpha t \quad (\alpha > 0)$$

ֆունկցիաների պատկերները:

Լուծում: Օգտվելով [87,(10′)] բանաձևից՝ (10) հավասարության հաշվառումով կունենանք

$$\left(\frac{p}{p^2+\alpha^2}\right)' = L[-t\cos\alpha t]:$$

Օգտվելով նաև գծայնության թեորեմից՝ կստանանք [27,(5)], [28,(12)]

$$L[t\cos\alpha t] = \frac{p^2-\alpha^2}{(p^2+\alpha^2)^2} \quad (\operatorname{Re} p > 0,\ \alpha > 0): \tag{զ}$$

Հասկանալի է, որ կարող ենք նույն ձևով արտածել նաև

$$L[t\sin\alpha t] = \frac{2\alpha p}{(p^2+\alpha^2)^2} \quad (\operatorname{Re} p > 0,\ \alpha > 0) \tag{է}$$

բանաձևը:

Ստանանք բանաձև նաև աստիճանային ֆունկցիայի պատկերի համար:

Օգտվելով [87,(5)] բանաձևից՝ (10) հավասարության հաշվառումով կունենանք [27,o2]

$$L[-t] = -\frac{1}{p^2}$$

կամ

$$L[t]=\frac{1}{p^2}\quad (\operatorname{Re} p>0):\tag{11}$$

Նույն ձևով (11) բանաձևից կստանանք [27,(7)]

$$L[t^2]=\frac{2!}{p^3}:$$

Շարունակելով հաջորդաբար ածանցել ստացվող պատկերները և օգտվելով (10) բանաձևից՝ t^n աստիճանային ֆունկցիայի պատկերի համար կունենանք

$$L[t^n]=\frac{n!}{p^{n+1}}\quad (n=1,2,...;\ \operatorname{Re} p>0):\tag{12}$$

Վերջում ապացուցենք նաև հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 5: *(Սկզբնական ֆունկցիայի ուշացման մասին) Եթե $F(p)$-ն $f(t)$ սկզբնական ֆունկցիայի պատկերն է, ապա $e^{-p\alpha}F(p)$-ն էլ $f(t-\alpha)$ սկզբնական ֆունկցիայի պատկերն է.*

$$L[f(t-\alpha)]=e^{-p\alpha}F(p)\qquad (\alpha>0):\tag{13}$$

Ապացույց: Դիցուք $F(p)$-ն $f(t)$ սկզբնական ֆունկցիայի պատկերն է, իսկ α-ն՝ որևէ դրական հաստատուն: Այդ դեպքում $f(t-\alpha)$-ն նույնպես սկզբնական ֆունկցիա է, ուստի α-ից փոքր t-երի համար այն նույնաբար հավասար է զրոյի.

$$f(t-\alpha)\equiv 0,\ \text{երբ}\ \ t<\alpha:$$

Նկատի ունենալով վերոգրյալը և կատարելով փոփոխականի

$$u=t-\alpha$$

փոխարինում՝ կստանանք [41,թ2], [42,թ1]

$$L[f(t-\alpha)]=\int_0^{+\infty}e^{-pt}f(t-\alpha)dt=\int_0^{\alpha}e^{-pt}f(t-\alpha)dt+\int_{\alpha}^{+\infty}e^{-pt}f(t-\alpha)dt=$$

$$=\int_{\alpha}^{+\infty}e^{-pt}f(t-\alpha)dt=\int_0^{+\infty}e^{-p(u+\alpha)}f(u)du=e^{-p\alpha}\int_0^{+\infty}e^{-pu}f(u)du=e^{-p\alpha}F(p)\qquad (\alpha>0):$$

Իպա

Օրինակ 4: Գտնել $f(t)=\eta(t-3)$ ֆունկցիայի պատկերը:

Լուծում: Նկատի ունենալով, որ $1/p$-ն Հեվիսայդի ֆունկցիայի պատկերն է և օգտվելով (13) բանաձևից՝ կունենանք

$$L[\eta(t-3)]=\frac{e^{-3p}}{p}\qquad (\operatorname{Re} p>0):$$

§89. Հաստատուն գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումն օպերացիոն հաշվի մեթոդներով:

Ինչպես նշել ենք վերևում, օպերացիոն մեթոդն ունի լայն կիրառություններ: Մասնավորապես, այդ մեթոդով էապես հեշտանում է հաստատուն գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումը:

Դիտարկենք n-րդ կարգի

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x=f(t) \tag{1}$$

դիֆերենցիալ հավասարումը, որտեղ $f(t)$-ն տրված ֆունկցիա է, իսկ a_1-ը, a_2-ը, ..., a_n-ը՝ իրական հաստատուններ: Համարելով, որ $f(t)$-ն սկզբնական ֆունկցիա է՝ գտնենք (1) հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է

$$x(0)=x_0,\ \ x'(0)=x_0',\ldots,x^{(n-1)}(0)=x_0^{(n-1)} \tag{2}$$

սկզբնական պայմաններին:

Ենթադրենք $x=x(t)$ ֆունկցիան (1) հավասարման՝ մեզ հետաքրքրող լուծումն է[*]: Տեղադրելով այն նշված հավասարման մեջ կստանանք նույնություն, որտեղից հետևում է, որ այդ նույնության աջ և ձախ կողմերում գրված ֆունկցիաներն ունեն միևնույն պատկերները.

$$L\left[\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x\right]=L[f(t)]: \tag{3}$$

Օգտվելով գծայնության թեորեմից [87,p4] և սկզբնական ֆունկցիայի ածանցմանը վերաբերող թեորեմի հետևանքից [88,h1], (2) սկզբնական պայմանների հաշվառումով (3) հավասարությունը կներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$p^n X(p)-[p^{n-1}x_0+p^{n-2}x_0'+\cdots+x_0^{(n-1)}]+a_1\left\{p^{n-1}X(p)-[p^{n-2}x_0+p^{n-3}x_0'+\cdots+x_0^{(n-2)}]\right\}+$$
$$+\cdots+a_{n-1}[pX(p)-x_0]+a_n X(p)=F(p), \tag{4}$$

որտեղ $X(p)$-ն և $F(p)$-ն համապատասխանաբար $x(t)$ և $f(t)$ ֆունկցիաների պատկերներն են.

$$L[x(t)]=X(p),\ \ L[f(t)]=F(p):$$

Սահմանում 1: *(4) հավասարումը կոչվում է հաստատուն գործակիցներով (1) գծային դիֆերենցիալ հավասարման օժանդակ կամ օպերատորային հավասարում:*

Կատարելով նման անդամների միացում՝ (4) օպերատորային հավասարումը կներկայացնենք

$$A_n(p)X(p)=F(p)+B_{n-1}(p) \tag{4'}$$

տեսքով, որտեղ n-րդ կարգի $A_n(p)$ և $(n-1)$-րդ կարգի $B_{n-1}(p)$ բազմանդամները համապատասխանաբար տրվում են

$$A_n(p)=p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_{n-1}p+a_n,$$

---

*) Ընդունում ենք, որ $x(t)$-ն և նրա մինչև n-րդ կարգի ածանցյալները սկզբնական ֆունկցիաներ են:

$$B_{n-1}(p)=x_0(p^{n-1}+a_1p^{n-2}+\cdots+a_{n-1})+x_0'(p^{n-2}+a_1p^{n-3}+\cdots+a_{n-2})+\cdots+x_0^{(n-1)} \quad (5)$$

բանաձևերով:

Լուծելով (4) հավասարումը, տրված դիֆերենցիալ հավասարման (2) սկզբնական պայմաններին բավարարող $x(t)$ լուծման պատկերի համար կստանանք

$$X(P)=\frac{F(p)}{A_n(p)}+\frac{B_{n-1}(p)}{A_n(p)}: \quad (6)$$

Այժմ, եթե գտնենք (6) բանաձևով տրվող պատկերի սկզբնական $x^*(t)$ ֆունկցիան, ապա սկզբնական ֆունկցիայի միակությանը վերաբերող թեորեմից [87,p1] կհետևի, որ $x^*(t)$-ն (1) դիֆերենցիալ հավասարման (2) սկզբնական պայմաններին բավարարող լուծումն է:

Նկատենք, որ դիտարկվող դիֆերենցիալ հավասարման զրոյական սկզբնական պայմանների դեպքում.

$$x_0=x_0'=x_0''=\cdots=x_0^{(n-1)}=0 \quad (2')$$

$B_{n-1}(p)$ բազմանդամը նույնաբար հավասարվում է զրոյի և (6) հավասարությունն ընդունում է

$$X(p)=\frac{F(p)}{p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_{n-1}p+a_n} \quad (6')$$

պարզ տեսքը:

Ինչպես երևում է (6) հավասարությունից, (1) դիֆերենցիալ հավասարման (2) սկզբնական պայմաններին բավարարող լուծման պատկերը երկու գումարելիների գումար է, որոնցից երկրորդը կանոնավոր ռացիոնալ կոտորակ է [37,u3], իսկ առաջինը՝ մի կոտորակ, որի համարիչը տրված դիֆերենցիալ հավասարման աջ մասի պատկերն է, հայտարարը՝ $A_n(p)$ բազմանդամը: Եթե, մասնավոր դեպքում, $F(p)/A_n(p)$ հարաբերությունն էլ է ռացիոնալ կոտորակ, ապա այդ դեպքում $X(p)$-ն երկու կանոնավոր ռացիոնալ կոտորակների գումար է: Հետևաբար, նշված մասնավոր դեպքում, տրված դիֆերենցիալ հավասարման (2) սկզբնական պայմաններին բավարարող լուծումը գտնելը կապվում է հետևյալ խնդրի հետ՝

գտնել այն սկզբնական ֆունկցիան, որի պատկերը կանոնավոր ռացիոնալ կոտորակ է.

$$\frac{B_k(p)}{A_n(p)} \quad (k<n): \quad (7)$$

Հաշվի առնելով, որ իրական գործակիցներով յուրաքանչյուր կանոնավոր ռացիոնալ կոտորակ ներկայացվում է վերջավոր թվով

$$\frac{M}{(p-a)^m},\quad \frac{Mp+N}{(p^2+lp+q)^m}\quad \left(m=1,2,\ldots,\frac{l^2}{4}-q<0\right) \quad (8)$$

պարզագույն ռացիոնալ կոտորակների գումարի տեսքով [38,u1,p1], վերևում

ձևակերպած խնդրի լուծումը կբերենք (8) կոտորակների սկզբնական ֆունկցիաները գտնելուն:

Առաջին պարզագույն ռացիոնալ կոտորակի դեպքում կունենանք*) [87,(6),(11)], [88,(1),(12)]

$$L\left[Me^{at}\right]=\frac{M}{p-a},\quad L\left[\frac{M}{(m-1)!}t^{m-1}e^{at}\right]=\frac{M}{(p-a)^m}\quad (m=2,3,\ldots):\qquad (9)$$

Ինչ վերաբերում է երկրորդ տեսակի պարզագույն ռացիոնալ կոտորակներին, ապա այդ կոտորակների սկզբնական ֆունկցիաների ստացումը ուղեկցվում է խիստ մեծածավալ հաշվարկներով և այդ պատճառով դուրս է գալիս ծրագրի սահմաններից:

Ամփոփելով վերոգրյալ արդյունքները՝ եզրակացնում ենք, որ օպերացիոն հաշվի կիրառմամբ հաստատուն գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը ստանալու խնդիրը բերվում է հանրահաշվական պարզ գործողությունների միջոցով այդ լուծման պատկերը գտնելուն և ստացած պատկերի միջոցով նրա սկզբանական ֆունկցիան (այսինքն տրված դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը) ստանալուն:

Օրինակ 1: Գտնել երկրորդ կարգի հաստատուն գործակիցներով

$$x''+3x'+2x=t\qquad (ա)$$

գծային անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարման զրոյական սկզբնական պայմաններին բավարարող լուծումը:

Լուծում: Տրված հավասարման պահանջվող լուծումը գտնելու համար նախ կազմենք այդ հավասարման օպերատորային հավասարումը [88,h1], [88,(11)].

$$(p^2+3p+2)X(p)=\frac{1}{p^2}:$$

Այնուհետև, դիտարկվող հավասարման զրոյական սկզբնական պայմաններին բավարարող լուծման պատկերի համար կունենանք

$$X(p)=\frac{1}{p^2(p+1)(p+2)}:$$

Վերջին հավասարման աջ մասը վերածելով պարզագույն ռացիոնալ կոտորակների՝ այն ներկայացնենք

$$X(p)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p+2}$$

տեսքով [38,o1]:

Գտնելով $X(p)$ պատկերի սկզբնական ֆունկցիան՝ կստանանք (ա) դիֆերենցիալ հավասարման զրոյական սկզբնական պայմաններին բավարարող լուծումը [87,(5)].

$$x(t)=\frac{t}{2}-\frac{3}{4}+e^{-t}-\frac{1}{4}e^{-2t}\qquad (t\geq 0):\qquad (բ)$$

Նշենք, որ ստացանք (ա) դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը միայն ոչ բացասական t-երի համար: Սակայն կարող ենք հեշտությամբ համոզվել, որ (բ) ֆունկցիան բավարարում է տրված հավասարմանը նաև բացասական t-երի համար:

---

*) Իրոք, օգտվելով հիշատակված բանաձևերից՝ կստանանք

$$L\left[\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\right]=\frac{1}{p^m},\quad L\left[\frac{M}{(m-1)!}t^{m-1}\right]=\frac{M}{p^m},\quad L\left[\frac{M}{(m-1)!}t^{m-1}e^{at}\right]=\frac{M}{(p-a)^m}\quad (m=2,3,\ldots):$$

Տպագրության եղանակը՝ ofset:
Թուղթը՝ օֆսեթ, 80 գր:
Ծավալը՝ 13.75 տպագրական մամուլ:
Ստորագրված է տպագրության 23.04. 2010թ.:
Պատվեր թիվ 148: Տպաքանակը՝ 200 օրինակ:
Տպագրված է Երևանի ճարտարապետության և
շինարարության պետական համալսարանի
տպագրության և լրատվության կենտրոնի տպարանում:
Հասցե՝ Երևան, Տերյան 105: