В. А. Исковских

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

ГЕОМЕТРИЯ И АРИФМЕТИКА

Редакторы-составители:
Вик. С. Куликов, Ю. Г. Прохоров, И. А. Чельцов

Издательство МЦНМО
Москва • 2012

УДК 512.7
ББК 22.147
И86

Издание осуществлено при поддержке РФФИ
(*издательский проект* № 10-01-07087).

Исковских В. А.

И86 Алгебраические поверхности: геометрия и арифметика. — М.: МЦНМО, 2012. — 360 с.

ISBN 978-5-94057-935-9

В книгу вошли основные работы выдющегося алгебраического геометра В. А. Исковских по геометрии и арифметике алгебраических поверхностей. Эти работы оказали большое влияние на развитие отечественной и зарубежной алгебраической геометрии.

Для студентов старших курсов, аспирантов и научных работников.

ББК 22.147

ISBN 978-5-94057-935-9

© МЦНМО, 2012

Оглавление

Предисловие редакторов-составителей 4
О бирациональных формах рациональных поверхностей 6
Рациональные поверхности с пучком рациональных кривых 23
Рациональные поверхности с пучком рациональных кривых и с положительным квадратом канонического класса 54
Контрпример к принципу Хассе для системы двух квадратичных форм от пяти переменных 82
Бирациональные свойства поверхности степени 4 в $\mathbf{P}^4_k$ 86
Проверка гипотезы Римана для некоторых локальных дзета-функций . 93
Минимальные модели рациональных поверхностей над произвольными полями 96
Образующие и соотношения в двумерной группе Кремоны 122
Образующие и соотношения в группах бирациональных автоморфизмов двух классов рациональных поверхностей 129
Доказательство теоремы о соотношениях в двумерной группе Кремоны 143
Простое доказательство теоремы Гизатуллина 146
Образующие в двумерной группе Кремоны над незамкнутым полем . . . 153
О бирациональных автоморфизмах рациональных поверхностей 169
Соотношения в двумерной группе Кремоны над совершенным полем . . 199
Факторизация бирациональных отображений рациональных поверхностей с точки зрения теории Мори 261
Два несопряженных вложения группы $S_3 \times \mathbb{Z}_2$ в группу Кремоны 335
Two non-conjugate embeddings of $S_3 \times \mathbb{Z}_2$ into the Cremona group II 342

Предисловие редакторов-составителей

Настоящее издание представляет собой сборник избранных работ выдающегося русского математика, крупного специалиста в области бирациональной алгебраической геометрии, ведущего научного сотрудника Математического института им. В. А. Стеклова РАН, члена-корреспондента РАН, доктора физико-математических наук, профессора Василия Алексеевича Исковских (1939–2009).

Цель данного издания двояка. С одной стороны, это наша дань памяти друга, коллеги и учителя, много и плодотворно работавшего в области алгебраической геометрии. С другой стороны, многие из работ Василия Алексеевича (а всего им опубликовано более 60 научных статей и книг) оказывают все большее влияние на развитие современной бирациональной геометрии, но в то же время значительная часть из них мало доступна широкому кругу математиков.

Василий Алексеевич внес неоценимый вклад в математику. В частности, его работы по проблеме Люрота, геометрии и арифметике алгебраических поверхностей, многообразиям Фано, группам Кремоны, проблеме рациональности имеют непреходящее значение. Даже если отвлечься от конкретных результатов, многие из его работ представляют большую ценность, так как в них переосмыслены идеи и результаты, принадлежащие классической итальянской школе алгебраической геометрии, и дано их современное строгое изложение. Кроме того, в этих работах содержится много новых идей, принадлежащих самому Василию Алексеевичу, которые в настоящее время успешно разрабатываются многочисленными учениками созданной им Российской школы бирациональной алгебраической геометрии, получившей мировое признание. Несомненно, знакомство с работами В. А. Исковских будет полезно всем, кто интересуется современными достижениями математики, в частности, в области бирациональной алгебраической геометрии. Собранные вместе, его работы дают яркую картину развития бирациональной алгебраической геометрии на протяжении последних пятидесяти лет. Этим объясняется необходимость издания сборника его трудов.

Помимо научной работы в Математическом институте им. В. А. Стеклова Василий Алексеевич в течение многих лет преподавал был профессором кафедры высшей алгебры Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова. Он читал обязательные и специальные курсы. Его лекции, особенно по бирациональной геометрии, пользовались неизменным успехом у студентов и аспирантов. Под руководством Василия Алексеевича было подготовлено 35 кандидатов наук, шесть из них впоследствии защитили докторские диссертации.

Сборник выходит в двух томах. В первый том вошли работы Василия Алексеевича по геометрии и арифметике алгебраических поверхностей. Второй том будет посвящен многомерной геометрии: проблеме Люрота, многообразиям Фано, бирациональным автоморфизмам и проблеме рациональности.

Мы приносим глубокую признательность Российскому фонду фундаментальных исследований, финансовая поддержка которого позволила осуществить настоящее издание.

В. С. Куликов, Ю. Г. Прохоров, И. А. Чельцов

О бирациональных формах рациональных поверхностей

В работе изучается семейство рациональных поверхностей с пучком рациональных кривых над незамкнутым полем констант. Находятся некоторые достаточные условия единственности такого пучка на заданной поверхности.

Введение

Пусть V — алгебраическое многообразие, определенное над полем k. Многообразие V' над k называется бирациональной формой V, если V' бирационально эквивалентно V над алгебраическим замыканием $\bar{k}$ поля k. Формы проективного пространства обычно называют рациональными многообразиями. Рациональные кривые хорошо изучены. Но уже в теории рациональных поверхностей много нерешенных вопросов как геометрического, так и арифметического характера. Общий подход к классификации таких поверхностей (с точностью до бирациональной эквивалентности над основным полем) был предложен Энриквесом в работе [1]. В зависимости от свойств общего гиперплоского сечения они разбиваются на четыре семейства. Третье семейство в этой классификации и является предметом нашего изучения. Оно состоит из поверхностей, обладающих пучком рациональных кривых (общее гиперплоское сечение — гиперэллиптическая кривая). Результат Витта о взаимно однозначном соответствии между классами форм проективной прямой и алгебрами кватернионов и теория простых алгебр над полем функций одной переменной (см. [5]) позволяют различать неизоморфные пучки. Эти вопросы рассматриваются в § 1 и § 2 настоящей работы. Далее мы выделяем подсемейство поверхностей, пучок на которых распадается над квадратичным расширением поля k, и доказываем теорему, что на таких поверхностях, за некоторыми исключениями, пучок единственен.

Аналогичный результат в случае поля действительных чисел получен Комессатти в работе [2]. Формулировка теоремы приводится в конце § 2, ее доказательство — в § 4. Вспомогательные факты, используемые при доказательстве, собраны в § 3. Работа заканчивается следствием о бесконечности классов

Известия АН СССР. Сер. матем. — 1965. — Т. 29, № 6. — С. 1417–1433.

форм проективной плоскости над конечным полем (известно, что прямая над конечным полом не имеет нетривиальных форм).

Автор приносит глубокую благодарность Ю. И. Манину за постоянную помощь в работе.

Некоторые свойства алгебр обобщенных кватернионов

1. Центральную простую алгебру Q над полем k ранга 4 принято называть алгеброй (обобщенных) кватернионов. Каждая такая алгебра есть либо матричное кольцо, либо алгебра с делением.

Из общей теории центральных простых алгебр известно (см. [6]), что всякое максимальное коммутативное подтело тела кватернионов Q над k является квадратичным расширением поля k и вместе с тем полем разложения для Q. Если $K = k(\sqrt{a})$ — такое поле разложения (характеристика поля k всюду в дальнейшем предполагается не равной 2), то алгебра Q изоморфна скрещенному произведению поля K с его группой автоморфизмов $G = \{1, \sigma\}$, $\sigma\colon \sqrt{a} \to -\sqrt{a}$, при некоторой приведенной факторсистеме $c_{1,1} = c_{1,\sigma} = c_{\sigma,1} = 1$, $c_{\sigma,\sigma} = b$, $b \in k^{*}$ *). Элемент b определен с точностью до множителя $c \in k^*$, являющегося нормой некоторого элемента из K. Обратно, скрещенное произведение, определенное некоторым элементом $b \in k^*$ и полем K, является кватернионной алгеброй Q с правилами умножения базисных элементов $(1, i, j, ij)$:

$$i^2 = a, \quad j^2 = b, \quad ij = -ji.$$

Таким образом, каждой паре элементов из k^* однозначно сопоставляется кватернионная алгебра.

2. Особый интерес для нас представляют кватернионные алгебры над полем $k = k_0(x)$ — рациональных функций одной переменной над полем констант k_0.

Мы приведем несколько фактов из теории центральных простых алгебр над полем алгебраических функций (см. [5]), касающихся алгебр кватернионов над $k_0(x)$.

Пусть Q — центральная простая алгебра (не обязательно ранга 4) над полем констант k_0. Расширив основное поле до поля рациональных функций $k = k_0(x)$, мы получим алгебру $k \otimes_{k_0} Q$ того же ранга над полем k. Такого рода алгебры называются числовыми.

Две центральные простые алгебры над полем k называются подобными в широком смысле, если одна из них подобна (в обычном смысле) тензорному произведению другой на числовую алгебру.

Пусть $\mathfrak{P}$ — простой дивизор поля $k = k_0(x)$; $k_{\mathfrak{P}}$ — соответствующее локальное поле; k_1 — поле вычетов $\mathfrak{P}$; $Q_{\mathfrak{P}} = k_{\mathfrak{P}} \otimes_k Q$ — алгебра, полученная из алгебры кватернионов Q над k расширением основного поля до поля $k_{\mathfrak{P}}$; $a(x), b(x) \in k^*$ — некоторая пара рациональных функций, определяющих алгебру Q. Выбрав в случае необходимости другой базис, можно считать $a(x)$

*) k^* — мультипликативная группа поля k.

и $b(x)$ многочленами, степени неприводимых множителей которых приведены по mod 2.

Пусть, далее,

$$\begin{aligned} i^2 &= a(x) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots, \\ j^2 &= b(x) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \dots, \\ (ij)^2 &= c(x) = \gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \dots, \\ (c(x) &= -a(x) \cdot b(x), \quad \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in k_j) \end{aligned}$$

— разложения в формальные степенные ряды по степеням локального параметра t в точке $\mathfrak{P}$. Если $\alpha_0 \neq 0$, $\beta_0 \neq 0$, то $\gamma_0 = -\alpha_0\beta_0 \neq 0$ и алгебра $Q_{\mathfrak{P}}$ — числовая, полученная из алгебры

$$Q_1 = \{(i_1, j_1), i_1^2 = \alpha_0, j_1^2 = \beta_0, i_1 j_1 = -j_1 i_1\}$$

над полем k_1 (поскольку формальный ряд вида $1 + \delta_1 t + \delta_2 t^2 + \dots$ является квадратом в $k_{\mathfrak{P}}$). В противном случае в $Q_{\mathfrak{P}}$ можно найти базис $(1, i_1, j_1, i_1 j_1)$ и выбрать локальный параметр t' так, что

$$i_1^2 = \alpha, j_1^2 = t', i_1 j_1 = -j_1 i_1,$$

где

$$\alpha = \begin{cases} -\alpha_1\beta_1, & \text{если } \alpha_0 = \beta_0 = 0, \\ \alpha_0, & \text{если } \alpha_0 \neq 0, \\ \beta_0, & \text{если } \beta_0 \neq 0. \end{cases}$$

Поле $k_1(\sqrt{\alpha})$ называется инвариантом алгебры Q в точке $\mathfrak{P}$. Точка, инвариант в которой не совпадает с полем инерции, называется критической (проверяется, что инвариант не зависит от выбора базиса Q и от выбора локального параметра).

3. Доказательства следующих утверждений можно найти в работе [5]*):

1) Алгебра Q над $k = k_0(x)$ имеет только конечное число критических точек.

2) Если алгебра Q не имеет критических точек, то она числовая.

3) Для того чтобы две алгебры Q и Q' были подобны в широком смысле, необходимо и достаточно, чтобы совпадали их инварианты.

4) Существует поле k_0', являющееся конечным алгебраическим расширением поля k_0, такое, что алгебра Q распадается над $k_0'(x)$ (теорема Тзена).

§ 2. Постановка задачи

1. Пусть k — совершенное поле, $\overline{k}$ — его алгебраическое замыкание. Рассмотрим поле алгебраических функций K над k со следующими свойствами:

а) композит $\overline{k}K$ изоморфен полю рациональных функций $\overline{k}(x, y)$ от двух переменных над $\overline{k}$;

*) В этой работе характеристика поля констант предполагается равной 0, однако для алгебр кватернионов все результаты легко переносятся на случай характеристики $p \neq 2$.

б) в поле K можно выбрать относительно алгебраически замкнутое подполе $K_1 \subset K$, такое, что K_1 — поле рациональных функций от одной переменной над k и K/K_1 — поле рода нуль.

Мы ставим перед собой задачу классифицировать поля K со свойствами а) и б) с точностью до изоморфизма над основным полем k.

Расчленим эту задачу на две:

А. Классификация полей K с точностью до изоморфизма над K_1.

Б. Вопрос однозначности выбора поля $K_1 \subset K$.

Переформулируем задачу в геометрических терминах.

Пусть V/k — проективная модель поля K/k. Выбор подполя $K_1 \subset K$ со свойством б) определяет расслоение $\pi\colon V \to P^1$ (не обязательно регулярное) с базой P^1 (P^1 — проективная прямая), слоем является рациональная кривая над k, т. е. кривая рода нуль. В таком случае говорят, что на V задан пучок рациональных кривых. Задачи А и Б перефразируются в следующие:

А$'$. Классификация пучков рациональных кривых с точностью до бирациональной эквивалентности общего слоя над K_1.

Б$'$. Вопрос единственности пучка рациональных кривых на V.

2. Задача А когомологическая. Как известно (см. [7]), классы таких полей (формы рациональных кривых над K_1) находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами одномерного множества когомологий Галуа $H^1(K_1, \mathrm{PGL}(2))$. Существует стандартное отображение

$$H^1(K_1, \mathrm{PGL}(2)) \xrightarrow{\delta} H^2(K_1, K_1^*),$$

соответствующее точной последовательности групп

$$1 \to K_1^* \to \mathrm{GL}(2) \to \mathrm{PGL}(2) \to 1.$$

В классической интерпретации $H^2(K_1, K_1^*)$ это брауеровская группа классов центральных простых алгебр над K_1. Имеет место следующая теорема Витта (см. [7]).

Отображение $H^1(K_1, \mathrm{PGL}(2)) \xrightarrow{\delta} H^2(K_1, K_1^*)$ является вложением, и его образ состоит в точности из кватернионных алгебр над K_1. Поле рода нуль K/K_1 соответствует алгебре Q в том и только в том случае, если Q распадается над K.

Применяя аппарат теории кватернионных алгебр, как следствия теоремы Витта получаем следующие утверждения:

1) *Пусть алгебра Q, соответствующая полю K/K_1, задана базисом*

$$i^2 = a(x), \quad j^2 = b(x), \quad ij = -ji, \quad a(x), b(x) \in K_1 = k(x).$$

Тогда уравнение $z^2 - a(x)y^2 = b(x)$ определяет аффинную модель поля K/K_1.

Действительно, поле функций K'/K_1 на кривой, заданной этим уравнением, имеет род нуль, и в $K' \otimes_{K_1} Q$ есть делители нуля:

$$(z + yi + j)(z - yi - j) = z^2 - a(x)y^2 - b(x) = 0,$$

т. е. K' является полем разложения для Q и, следовательно, изоморфно K.

2) *Пусть поле K таково, что оно становится полем рациональных функций над квадратичным расширением $k(\sqrt{a})$ поля k, $a \in k$, т. е. соответствующая алгебра распадается над $k(\sqrt{a})$ $K_1 = k(\sqrt{a}, x)$. Тогда для K/K_1 можно выбрать аффинную модель F (будем называть ее приведенной), имеющую уравнение вида*

$$z^2 - ay^2 = f(x),$$

где $f(x)$ — бесквадратный многочлен, неприводимые множители которого не разлагаются над $k(\sqrt{a})$.

Для соответствующей алгебры многочлен $f(x)$ определен с точностью до множителя, являющегося нормой в поле $k(\sqrt{a}, x)$. Остается заметить, что неприводимый в $k[x]$ многочлен, разлагающийся над $k(\sqrt{a})$, является нормой в $k(\sqrt{a}, x)$.

3) *Пусть в предположении утверждения* 2)

$$z^2 - a'y^2 = f'(x),$$
$$z^2 - a''y^2 = f''(x)$$

— две приведенные аффинные модели полей K'/K_1 и K''/K_1 соответственно. Предположим далее, что по крайней мере один из многочленов $f'(x)$ и $f''(x)$ не константа. Тогда:

1) *если $k(\sqrt{a'}) \neq k(\sqrt{a''})$, то $K'/K_1 \not\approx K''/K_1$;*

2) *если $k(\sqrt{a'}) = k(\sqrt{a''})$, то K'/K_1 изоморфно K''/K_1 тогда и только тогда, когда $f'(x) = cf''(x)$, где $c \in k^*$ является нормой в поле $k(\sqrt{a'})$.*

Для доказательства заметим, что каждый неприводимый неразлагающийся над $k(\sqrt{a})$ множитель $g(x)$ многочлена $f(x)$ является критической точкой соответствующей алгебры с инвариантом $k_1 k(\sqrt{a})$, где k_1 — поле вычетов $g(x)$. Остается воспользоваться утверждением 3) § 1.

4) *Пусть k — поле действительных чисел. Для любого K с условиями* а) *и* б) *можно выбрать аффинную модель в форме*:

$$z^2 + y^2 = \pm \prod_{i=1}^{n} (x - a_i), \quad a_i \in k, \quad a_i \neq a_j.$$

Существуют два неизоморфных над $k(x)$ поля с данным набором инвариантов $\{a_i\}$.

Согласно теореме Тзена, алгебра Q, соответствующая полю K/K_1, распадается над $\overline{k}K_1$. Утверждение 4) следует теперь из 2) и 3) с дополнительным замечанием, что всякий элемент $c \in k$, $c > 0$, является нормой в поле $\overline{k}$, так что поля на кривых

$$z^2 + y^2 = \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)$$

и

$$z^2 + y^2 = -\prod_{i=1}^{n} (x - a_i)$$

не изоморфны над $k(x)$ (ср. [2]).

3. Задача Б эквивалентна изучению отображения

$$H^1(K_1, \mathrm{PGL}(2)) \xrightarrow{\Theta} H^1(k, \mathfrak{A}),$$

определенного вложением $k \to K_1$ и отображением $\mathrm{PGL}(2) \to \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ — группа автоморфизмов поля рациональных функций $\overline{k}(x, y)$ над $\overline{k}$ (группа кремоновых преобразований проективной плоскости P^2). Отображение θ заведомо не является вложением. Действительно, пусть $K \in H^1(K, \mathfrak{A})$ является образом некоторого элемента $Q \in H^1(K_1, \mathrm{PGL}(2))$, т. е. в K зафиксировано поле $K_1 \subset K$. Выбор нового образующего x' поля $k(x) = K_1$ определяет, вообще говоря, другой элемент $Q' \in H^1(K_1, \mathrm{PGL}(2))$. Таким образом, определено действие группы автоморфизмов $PGL(2)$ поля K_1 на множестве $H^1(K_1, \mathrm{PGL}(2))$. Через $\widetilde{H}^1(K_1)$ обозначим множество орбит, через $\tilde{\theta}$ — отображение, индуцированное θ:

$$\widetilde{H}^1(K_1) \xrightarrow{\tilde{\theta}} H^1(k, \mathfrak{A}).$$

Однозначность выбора подполя $K_1 \subset K$ для каждого K соответствует тому, что $\tilde{\theta}$ является вложением.

Рассмотрим подмножество $\{\widetilde{Q}\} \subset \widetilde{H}^1(K_1)$ элементов $\widetilde{Q}$, для которых Q распадается над квадратичным расширением поля k. Для поля K/K_1, соответствующего такому Q, существует, согласно утверждению 2) § 2, приведенная аффинная модель F:

$$z^2 - ay^2 = f(x), \quad a \in k^*.$$

Всегда можно найти представителя Q' в классе $\widetilde{Q}$, для которого степень многочлена $f'(x)$ в приведенной аффинной модели F': $z^2 - ay^2 = f'(x)$ есть четное число; это достигается подстановкой

$$x \to \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}; \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in k, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Легко видеть, далее, что степени многочленов $f'(x)$ и $f''(x)$ соответственно для $Q' \in \widetilde{Q}$ и $Q'' \in \widetilde{Q}$ равны, если они одновременно четны или нечетны, и отличаются на 1 в противном случае, а именно, четная степень больше нечетной.

Имеет место

Теорема. *Пусть поле K принадлежит образу отображения $\tilde{\theta}$, ограниченного на подмножестве $\{\widetilde{Q}\} \subset \widetilde{H}^1(K_1)$, $n = 2m$ — степень многочлена $f(x)$ для приведенной модели поля K/K_1. Тогда при $n > 6$ подполе $K_1 \subset K$ выбирается однозначно.*

В геометрической интерпретации теорема утверждает единственность пучка рациональных кривых при $n > 6$ на проективной модели V/k поля K/k.

Доказательство мы будем проводить па геометрическом языке, привлекая технику виртуальных линейных систем (см. [4], а также [3], гл. V, § 3].

§ 3. О когомологиях Галуа и виртуальных линейных системах

1. Пусть G — группа Галуа замыкания $\overline{K}/k$. Продолжим действие G на поле $\overline{k}K$, считая, что на элементы из K группа G действует тождественным

образом. Если $\mathfrak{A}$ — группа алгебраических автоморфизмов поля $\bar{k}K/\bar{k}$, то G является группой операторов для $\mathfrak{A}$:

$$\omega^\sigma = \sigma^{-1}\omega\sigma, \quad \sigma \in G, \quad \omega \in \mathfrak{A}.$$

Образуем обычным способом одномерные когомологии $H^1(k, \mathfrak{A})$ (см. [7]). Пусть $\overline{\mathfrak{A}}$ — полная группа автоморфизмов поля kK/k, т. е. множество всевозможных элементов $\sigma\omega$, $\sigma \in G$, $\omega \in \mathfrak{A}$, с законом композиции

$$\sigma_1\omega_1 \cdot \sigma_2\omega_2 = \sigma_1\sigma_2\omega^{\sigma_1}\omega_2$$

(см. [7]).

Ясно, что $\overline{\mathfrak{A}}$ является расширением групп $\mathfrak{A}$ и G:

$$1 \to \mathfrak{A} \to \overline{\mathfrak{A}} \to G \to 1.$$

Легко показать (см. [7]), что элементы множества $H^1(k, \mathfrak{A})$ находятся во взаимно однозначном соответствии с классами $\mathfrak{A}$-сопряженных подгрупп $H \subset \subset \overline{\mathfrak{A}}$, обладающих свойствами:

$$H \cap \mathfrak{A} = 1, \quad H\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{A}}.$$

Соответствие достигается сопоставлением каждому коциклу $\omega_\sigma \in H^1(k, G)$ группы $H = \{\sigma\omega_\sigma\}$, $\sigma \in G$.

Далее, для каждого H-инвариантного подполя $K' \subset \bar{k}K$ имеем:

$$\bar{k}K' = \bar{k}K, \quad \bar{k} \cap K' = k.$$

Обратно, если для некоторого подполя $K' \subset \bar{k}K$ выполнены эти условия, то ему соответствует, в смысле теории Галуа, подгруппа H с указанными свойствами. При этом k-изоморфным полям соответствуют $\mathfrak{A}$-сопряженные подгруппы, и наоборот.

2. Перейдем к геометрической трактовке вопроса. Пусть, как и раньше, V/k — проективная модель поля K/k. $V/\bar{k}$ в таком случае является проективной моделью поля $\bar{k}K/\bar{k}$. Как следует из свойства а) поля K, $V/\bar{k}$ бирационально эквивалентна проективной плоскости $P^2/\bar{k}$, т. е. V/k — форма P^2. Существует определенное над $\bar{k}$ бирациональное отображение

$$h\colon P^2 \to V.$$

Для каждого $\sigma \in G$ $\omega_\sigma = h^{-\sigma} \circ h$ есть элемент из $\mathfrak{A}$ (мы отождествляем здесь группу бирациональных преобразований $P^2/\bar{k}$ с группой $\mathfrak{A}$). Полученный таким образом коцикл ω_σ, класс которого не зависит от h, определяет элемент одномерного множества когомологии Галуа $H^1(k, \mathfrak{A})$. Указанным способом осуществляется взаимно однозначное соответствие между классами форм P^2 (с точностью до бирациональной эквивалентности над основным полем k) и элементами $H^1(k, \mathfrak{A})$ (см. [7]).

3. Приведем несколько определений и фактов из теории виртуальных линейных систем, следуя работе Нагаты [4] (см. также [3]).

Пусть V — неособая проективная поверхность над $\bar{k}$, и пусть $\{V\}$ — семейство неособых проективных моделей поля функций $\bar{k}(V)$.

Говорят, что точка P' поверхности $V' \in \{V\}$ доминирует над точкой $P \in V$, если для локальных колец $O_{P'}$ и O_P этих точек выполнено условие: $O_P \subset \subset O_{P'}$. Всякую точку, доминирующую над какой-нибудь точкой поверхности V (в частности, всякую точку V), будем называть точкой над V.

Циклом над V называется элемент свободной абелевой группы, порожденной неприводимыми кривыми на V и точками над V.

Для всякого цикла $C - \sum m_i P_i$, где C — дивизор, P_i — точки над V, определен арифметический род

$$p_a\Big(C - \sum m_i P_i\Big) = p_a(C) - \sum \frac{m_i(m_i - 1)}{2},$$

где $p_a(C)$ — арифметический род дивизора C. Для всякой пары циклов $C - \sum m_i P_i$ и $D - \sum n_i P_i$ определен индекс пересечения

$$\Big(C - \sum m_i P_i, D - \sum n_i P_i\Big) = (C, D) - \sum m_i n_i,$$

где (C, D) означает индекс пересечения дивизоров.

Обозначим через $Z(V)$ группу циклов на V. Для бирационального отображения (раздувания точки P) $f = \mathrm{dil}_P \colon V \to V'$ определим гомоморфизм $f_* = Z(V) \to Z(V')$, полагая

$$f_*(P) = \mathrm{dil}_P\, P; \quad f_*(Q) = f(Q)$$

при $Q \neq P$, $f_*(C)$ — полный образ кривой C относительно f. Имеют место следующие утверждения (см. [3], гл. V).

1) *Для всякого бирационального отображения $f \colon V \to V'$ существует гомоморфизм $f_* \colon Z(V) \to Z(V')$, который можно определить, разлагая f в произведение отображений вида* dil_P *и* cont_l *(стягивание кривой l) и пользуясь формулой*

$$(g \circ h)_* = g_* \circ h_*,$$

Гомоморфизм f_* определен однозначно.

2) *Для всякого бирационального отображения $f \colon V \to V'$ и любых циклов $Z, Z' \in Z(V)$ верны тождества*:

$$(Z, Z') = (f_*(Z), f_*(Z')),$$
$$p_a(Z) = p_a(f_*(Z)).$$

3) *Для всякого бирационального отображения $f \colon V \to V'$ и любой функции $\varphi \in k(V)$ имеет место соотношение*

$$f_*((\varphi)) = (f_*\varphi),$$

где (φ) — дивизор функции φ, $f_*\varphi$ — функция на V', индуцированная φ.

Из 3) следует, что подгруппа главных дивизоров $Z_l(V)$ в группе $Z(V)$ изоморфно отображается при всех гомоморфизмах f_*. Тем самым f_* переносится на фактор-группу $Z(V)/Z_l(V)$. Далее, арифметический род и индекс пересечения зависят только от класса циклов.

Класс циклов над V будем называть в дальнейшем виртуальной линейной системой на V.

4. Рассмотрим более детально случай, когда $\{V\}$ — семейство моделей поля $\bar{k}K/\bar{k}$. Определим прежде всего действие группы Галуа G поля $\bar{k}/k$ на группу $Z(V)$ циклов над поверхностью. Каждому простому циклу (нульмерному или одномерному) $Z \in Z(V)$ поставим в соответствие цикл $Z^\sigma \in Z(V)$, для которого локальное кольцо $O_{Z^\sigma} = (O_Z)^\sigma$, где $(O_Z)^\sigma$ — образ подкольца $O_Z \in \bar{k}K$ при автоморфизме $\sigma\colon \bar{k}K \to \bar{k}K$. Легко проверяется, что локальное кольцо при этом переходит в локальное. Так определенное действие на нульмерных циклах распространяется на всю группу $Z(V)$ и далее на факторгруппу $Z(V)/Z_l(V)$ виртуальных линейных систем на V. Последнюю, для удобства, будем обозначать, начиная с этого места, также через $Z(V)$.

Опишем теперь действие группы кремоновых преобразований $\mathfrak{A}$ на группу виртуальных линейных систем $Z(P^2)$. Каждый элемент $Z \in Z(P^2)$ имеет вид

$$dL - \sum m_i P_i,$$

где L — система прямых. Достаточно описать действие на Z стандартного квадратичного преобразования, принимая во внимание, что преобразования такого рода и проективные преобразования порождают всю группу $\mathfrak{A}$ (теорема Нётера; см. [3], гл. V, теорема 2) (стандартное квадратичное преобразование Кремоны $C(P_1, P_2, P_3)$ с центрами в тройке точек на P^2 переводит каждую точку в прямую, проходящую через две другие). Представляя $C(P_1, P_2, P_3)$ в виде трех раздутий и трех сжатий, непосредственным подсчетом получаем:

$$C(P_1, P_2, P_3)_*(dL - \sum m_i P_i) = (d+l)L - \sum_{i=1}^{3}(m_i + l)P_j - \sum_{i \geqslant 4} m_i P_i^*,$$

где $l = d-(m_1+m_2+m_3)$; P_1^* — собственный образ точки P_i (см. [3], лемма 15).

Наконец, $\overline{\mathfrak{A}}$ также можно рассматривать как группу операторов для группы $Z(P^2)$.

Отметим в заключение следующий факт. Пусть $h\colon P^2 \to V$ — бирациональное отображение. Тогда если виртуальная линейная система $Z \in Z(V)$ инвариантна относительно автоморфизма $\sigma_*\colon Z(V) \to Z(V)$, $\sigma \in G$, то система $h_*^{-1}(Z) \in Z(P^2)$ инвариантна относительно

$$h_*^{-1}\sigma_* h_* = (\sigma\omega_\sigma)_*\colon Z(P^2) \to Z(P^2); \quad \sigma\omega_\sigma \in \overline{\mathfrak{A}},$$

что непосредственно усматривается из диаграммы:

$$\begin{tikzcd} Z(V) \arrow[r, "\sigma_*"] & Z(V) \arrow[d, "h_*^{-1}"] \\ Z(P^2) \arrow[u, "h_*"] \arrow[r, "(\sigma\omega_\sigma)_*"] & Z(P^2) \end{tikzcd}$$

§ 4. Доказательство теоремы

1. Пусть K «распадается» над $k(\sqrt{a})$, $G = \{1, \sigma\}$ — группа Галуа $k(\sqrt{a})/k$, $F\colon z^2 - ay^2 = f(x)$ — приведенная аффинная модель поля $K/k(x)$, V/k — проективное замыкание F/k. Построим бирациональное отображение, определенное над $k(\sqrt{a})$, $h\colon P^2 \to V$. Локально отображение h можно задать формулами:

$$h/A^2\colon A^2 \to F \begin{cases} x = u, \\ y = \dfrac{v^2 - f(u)}{2\sqrt{a}v}, \\ z = \dfrac{v^2 - f(u)}{2v}, \end{cases} \qquad h^{-1}/F\colon F \to A^2 \begin{cases} u = x, \\ v = z + \sqrt{a}y, \end{cases}$$

и, следовательно, коцикл $\omega_\sigma = h^{-\sigma} \circ h$ в аффинных координатах плоскости A^2 будет иметь вид:

$$\omega_\sigma/A^2\colon A^2 \to A^2 \begin{cases} v' = \dfrac{f(u)}{v}, \\ u' = u, \end{cases}$$

или в проективной форме:

$$\omega_\sigma\colon P^2 \to P^2 \begin{cases} y_0 = x_0^{n-1}x_2, \\ y_1 = x_0^{n-2}x_1x_2, \\ y_2 = g(x_0, x_1), \end{cases}$$

где $g(x_0, x_1) = x_0^n f\left(\dfrac{x_1}{x_0}\right)$ — однородный многочлен степени n.

2. Пучок рациональных кривых на V, определенный над k, будем обозначать через $\widetilde{X}$; $\widetilde{X}_0$ — пучок, соответствующий подполю $k(x) \subset K$. Доказательству теоремы предпошлем несколько лемм.

Лемма 1. *Каждому пучку $\widetilde{X}$ на V соответствует виртуальная линейная система $X \in Z(P^2)$ такая, что*

$$p_a(X) = 0, \quad (X, X) = 0, \quad (\sigma\omega_\sigma)_*(X) = X.$$

Доказательство. Пусть V'/k — неособая проективная модель*) поля K/k и $g\colon V \to V'$ — определенное над k бирациональное отображение такое, что полный образ $g_*(\widetilde{X})$ пучка X не имеет базисных точек на V. Отбрасывая неподвижную часть пучка $g_*(\widetilde{X})$, получаем виртуальную линейную систему $Z \in Z(V')$, для которой $p_a(Z) = 0$, $(Z, Z) = 0$. Образ Z при гомоморфизме

$$(g \circ h)_*^{-1}\colon Z(V') \to Z(P^2)$$

*) Существование такой модели в случае характеристики нуль — классический результат; в случае характеристики $p \neq 0$ см. Abhyankar S. On the field of definition of a nonsingular birational transform of an algebraic surface // Ann. of Math. — 1957. — V. 65, № 2. — P. 268–281.

обозначим через X. Согласно утверждению 2) § 3,

$$p_a(X) = 0, \quad (X, X) = 0.$$

Наконец, из факта, отмеченного в конце предыдущего параграфа, и из того, что пучок Z определен над k, т. е. $Z^\sigma = Z$, следует:

$$X = (g \circ h)_*^{-1} \circ \sigma_* \circ (g \circ h)_*(X) = (\sigma h^{-\sigma} \circ g^{-\sigma} \circ g \circ h)_*(X) = (\sigma\omega_\sigma)_*(X),$$

так как $g^\sigma = g$. Лемма 1 доказана. □

Лемма 2. *Пусть V_1, V_2 — неособые проективные поверхности над $\bar{k}$, $f\colon V_1 \to V_2$ — бирациональное отображение, C — эффективная линейная система на V без неподвижных компонент и базисных точек. Пусть $f_*(C) = C' - \sum m_i P_i$ — соответствующая виртуальная линейная система на V_2. Тогда*:

1) *все $m_i \geqslant 0$;*

2) *если $P_i > P_j$, т. е. P_i лежит над точкой P_j, то $m_i \leqslant m_j$.*

Лемма 3. *Пусть $dL - \sum\limits_{i=0}^{N} m_i P_i$ — виртуальная линейная система на P^2, для которой выполнены следующие условия*:

1) $p_a\Big(dL - \sum\limits_{i=0}^{N} m_i P_i\Big) = 0$, $\Big(dL - \sum\limits_{i=0}^{N} m_i P_i, dL - \sum\limits_{i=0}^{N} m_i P_i\Big) = 0$;

2) $m_0 \geqslant m_1 \geqslant \ldots \geqslant m_N > 0$, $N \geqslant 2$.

Тогда $d < m_0 + m_1 + m_2$, т. е. степень системы меньше суммы трех максимальных кратностей.

Докажем эти леммы (доказательства аналогичных фактов см. в [3], леммы 14, 11, гл. V).

Пусть $f = f_2 \circ f_1$, где f_1 — отображение раздутия, а f_2 — регулярное отображение сжатия. Из отсутствия базисных точек у системы C следует, что $f_{1*}(C)$ — эффективная система без неподвижных компонент и базисных точек. Достаточно, следовательно, проверить утверждение леммы 2 для

$$f_2 = \varphi_r \circ \varphi_{r-1} \circ \ldots \circ \varphi_1,$$

где каждое φ_i — преобразование вида cont_l. Если $r = 1$, то

$$(\mathrm{cont}_l)_*(C) = C' = (C, l)P_1,$$

где $P_1 = \mathrm{cont}_l\, l$, C' — собственный образ C, эффективная система без неподвижных компонент. Так как C не содержит l в качестве своей компоненты, то $(C, l) \geqslant 0$ и в этом случае лемма верна. Предположим, что она верна для $r - 1$. Тогда

$$(\mathrm{cont}_{l_r})_*(C^{(r-1)} - m_1 P_1 - \ldots - m_{r-1} P_{r-1}) = \\ = C^{(r)} - m_1 P_1^* - \ldots - m_{r-1} P_{r-1}^* - (C^{(r-1)}, l_r) P_r.$$

Так как $C^{(r-1)}$ — эффективная система, не содержащая l_r в качестве своей компоненты, то $(C^{(r-1)}, l_r) \geqslant 0$. Далее, если P_i^*, например, лежит над точкой

P_r, то P_i лежит уже над некоторой точкой $P_j \in l_r$. Отсюда получаем:

$$(C^{(r-1)}, l_r) \geqslant m_j,$$

а так как, по предположению индукции, $m_j \geqslant m_i$, то

$$(C^{(r-1)}, l_r) \geqslant m_i.$$

Лемма 2 доказана.

Для доказательства леммы 3 перепишем соотношения 1) этой леммы в виде:

$$d^2 - \sum_{i=0}^{N} m_i^2 = 0, \qquad \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum_{i=0}^{N} \frac{m_i(m_i-1)}{2} = 0.$$

Отсюда следует равенство

$$3d - \sum_{i=0}^{N} m_i = 2,$$

которое можно записать в форме:

$$\sum_{i=2}^{N} m_i + 2 = 3d - m_0 - m_1.$$

Так как $m_2 > 0$, то получаем:

$$d^2 < \sum_{0}^{N} m_1^2 + 2m_2 \leqslant m_0^2 + m_0 m_1 + m_2 \sum_{2}^{N} m_i + 2m_2 =$$
$$= m_0^2 + m_0 m_1 + m_2(3d - +m_0 - m_1) = (m_0 + m_1)(m_0 - m_2) + 3dm_2.$$

Если $(m_0 + m_1) \leqslant d$, то

$$d^2 < dm_0 - dm_2 + 3dm_2 = d(m_0 + 2m_2) \leqslant d(m_0 + m_1 + m_2)$$

и $(m_0 + m_1 + m_2) > d$, что доказывает лемму 3.

Прежде чем сформулировать очередную лемму, изучим структуру бирационального преобразования $\omega_\sigma \colon P^2 \to P^2$ над полем $\overline{k}$.

Пусть $a_i \in \overline{k}$, $(i = \overline{1,n})$ — корни многочлена $f(x)$. Так как поле k предполагается совершенным и $f(x)$ — бесквадратный многочлен, то все a_i различны между собой. Выражение для ω_σ можно переписать теперь в виде:

$$\begin{cases} y_0 = x_0^{n-1} x_2, \\ y_1 = x_0^{n-2} x_1 x_2, \\ y_2 = c \prod\limits_{i=1}^{n} (x_1 - a_i x_0), \quad c \in k. \end{cases}$$

Легко проверить, что точками $P = (1, a, 0)$ $(i = \overline{1,n})$ и $P_0 = (0,0,1)$ исчерпываются все фундаментальные точки ω_σ на P^2. Прямые

$$l_i = \overline{P_0 P_i} \quad (i = \overline{1,n}) \quad \text{и} \quad l_0 = l_{x_0=0} + l_{x_2=0}$$

стягиваются соответственно в точки P_i $(i = \overline{0,n})$. Обратно, полным образом P_i является l_i; для этого достаточно заметить, что $\omega_\sigma = \omega_\sigma^{-1}$. Следовательно, ограничение ω_σ на $P^2 - \{\bigcup\limits_{i=0}^{n} l_i\}$ — бирегулярный автоморфизм второго порядка. Если

$$\alpha = \prod_{i=0}^{n} \mathrm{dil}_{P_i} \colon P^2 \to \Phi$$

— отображение раздутия точек P_i $(i = \overline{0,n})$, то отображение

$$\beta = \omega_\sigma \circ \alpha^{-1} \colon \Phi \to P^2$$

может иметь фундаментальные точки только на прямых $l_i' = \mathrm{dil}_{P_i} P_i$ $(i = \overline{0,n})$. На самом деле β имеет только одну такую точку, лежащую на l_0'. Чтобы в этом убедиться, достаточно сделать локальную проверку.

Пусть $\{U_0, U_1, U_2\}$ — аффинное покрытие P^2 и $\left(u = \dfrac{x_1}{x_0}, v = \dfrac{x_2}{x_0}\right)$ — система координат на U_0; тогда $\alpha(U_0)$ изоморфно $U_0^* \subset U_0 \times P^1$, задаваемому уравнением (см. [3], гл. I):

$$U_0^* = \left\{\{(u,v)(z_0,z_1)\}, vz_1 - c\prod_{i=1}^{n}(u-a_i)z_0 = 0\right\},$$

где (z_0, z_1) — однородные координаты проективной прямой. Так как ограничение $\beta/U_0^* \colon U_0^* \to P^2$, как легко видеть, задается формулой

$$\{(u,v)(z_0,z_1)\} \to \left(1, u, \frac{z_1}{z_0}\right)$$

и, следовательно, регулярно, то β не имеет фундаментальных точек на прямых

$$l_i' = \{(a_i, 0)(z_0, z_1)\} \quad (i = \overline{1,n}).$$

Если $\left(u' = \dfrac{x_0}{x_2}, v' = \dfrac{x_1}{x_2}\right)$ — координаты на U_2, то точка P_0, является началом отсчета и уравнение прямой l_0' на

$$U_2^* = \{\{(u',v')(z_0,z_1)\}, u'z_1 - v'z_0 = 0\}$$

имеет вид:

$$l_0' = \{(0,0)(z_0,z_1)\}.$$

Ограничение $\beta/U_2^* \colon U_2^* \to P^2$ в этом случае задается формулой

$$\{(u',v')(z_0,z_1)\} \to \left(\frac{z_0^n}{u'c\prod(z_1 - a_i z_0)}, \frac{z_0^{n-1}z_1}{u'c\prod(z_1 - a_i z_0)}, 1\right) = \\ = \left(1, \frac{z_1}{z_0}, \frac{v'c\prod(z_1 - a_i z_0)}{z_0^{n-1}z_1}\right)$$

и в единственной точке $Q = \{(0,0),(0,1)\}$ не регулярно.

Будем обозначать собственные образы прямых l_i на поверхности Φ также через l_i. Тогда следующая конфигурация прямых описывает полный образ $\alpha_*\Big(\sum\limits_{i=0}^{n} l_i\Big)$ на Φ:

причем

$$(l_i, l_i) = (l'_j, l'_j) = -1 \quad (i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}),$$
$$(l_{x_2=0}, l_{x_2=0}) = -(n-1), \quad (l_{x_0=0}, l_{x_0=0}) = 0.$$

Регулярное на $\Phi - \{Q\}$ отображение β стягивает прямые l_i $(i = \overline{0,n})$ в точки P_i (напомним, что $l_0 = l_{x_2=0} + l_{x_0=0}$).

З а м е ч а н и е. Можно показать, что в результате последовательности раздутий

$$\mathrm{dil}_{Q^{(n-3)}} \circ \ldots \circ \mathrm{dil}_Q,$$

где каждое $Q^{(r)}$ лежит над $Q^{(r-1)}$, получается поверхность Φ_1 и отображения:

$$\alpha_1 \colon P^2 \to \Phi_1, \quad \beta_1 \colon \Phi_1 \to P^2$$

такие, что $\omega_\sigma = \beta_1 \circ \alpha_1$, β_1 регулярно и полный образ $\alpha_{1*}\Big(\sum\limits_{i=0}^{n} l_i\Big)$ на Φ_1 имеет следующее симметричное строение:

где отрицательные числа указывают индекс самопересечения. С индексом -2 имеется $n-3$ прямых. Преобразование ω_σ индуцирует на Φ_1 бирегулярный автоморфизм, переставляющий симметрично расположенные на схеме прямые. При доказательстве теоремы мы этим пользоваться не будем.

Л е м м а 4. *Пусть*

$$X = dL - \sum_{i=0}^{n} \mu_i P_i - \sum_{i>n} \mu_i P_i$$

— виртуальная линейная система на P^2 такая, что $(\sigma\omega_\sigma)_*(X) = X$, где P_i $(i = \overline{0,n})$ — фундаментальные точки преобразования ω_σ. Тогда

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_n = \mu, \quad d = \mu_0 + 2\mu.$$

Доказательство. Условимся отождествлять X с вектором $(d; \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n; \mu_{n+1}, \ldots)$, предполагая подходящим способом перенумерованными образующие группы $Z(P^2)$. Разложение ω_σ в композицию отображений α и β позволяет вычислить:

$$\begin{aligned}
L &= (1; 0, 0, \ldots, 0; 0, \ldots) \to (\omega_\sigma)_*(L) = (-; -; 1, \ldots, 1; -, \ldots),\\
P_0 &= (0; -1, 0, \ldots, 0; 0, \ldots) \to (\omega_\sigma)_*(P_0) = (-; -; 1, \ldots, 1; -, \ldots),\\
P_i &= (0; 0; 0, \ldots, \underset{i}{-1}, \ldots, 0; 0, \ldots) \to (\omega_\sigma)_*(P_i) =\\
&\qquad\qquad = (-; -; 0, \ldots, \underset{i}{1}, \ldots, 0; -, \ldots); \quad (i = \overline{1,n}),\\
P_i &= (0; 0; 0, \ldots, 0; 0, \ldots, \underset{i}{-1}, \ldots) \to (\omega_\sigma)_*(P_i) = (-; -; 0, \ldots, 0; -, \ldots), \quad (i > n)
\end{aligned}$$

(значения координат, отмеченные знаком минус, для доказательства не существенны). Отсюда следует, что

$$(d; \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n; \mu_{n+1}, \ldots) \xrightarrow{(\omega_\sigma)_*} (-; -, d - \mu_0 - \mu_1, \ldots, d - \mu_0 - \mu_n; \ldots).$$

Из условия инвариантности X относительно $\sigma\omega_\gamma$, если учесть, что $P_i^\sigma = P^i$ $(i = \overline{0,n})$ (так как неприводимые над k множители $f(x)$ не разложимы в $k(\sqrt{a})[x]$), немедленно получаем:

$$d - \mu_0 - \mu_i = \mu_i \quad (i = \overline{1,n}),$$

или, если положить $\mu_1 = \mu$,

$$\mu_i = \mu, \quad d = \mu_0 + 2\mu \quad (i = \overline{1,n}).$$

Лемма доказана. □

3. Приступим к доказательству теоремы.

Пусть X — виртуальная линейная система на P^2, соответствующая пучку $\widetilde{X}$ на V (лемма 1). Тогда, согласно лемме 4, она имеет вид:

$$dL - \mu_0 P_0 - \sum_{i=1}^{n} \mu P_i - \sum_{i>n} \mu_i P_i,$$

где $d = \mu_0 + 2\mu$.

Есть две возможности (см. условие 1) леммы 2): а) $\mu = 0$ и б) $\mu > 0$. В случае а) система $X = X_0$, т. е. соответствует пучку $\widetilde{X}_0$. Действительно, X_0 — пучок прямых на P^2 с базисной точкой P_0о, или $X_0 = L - P_0$, и для него $\mu = 0$, $d = \mu_0 = 1$. Обратно, если $\mu = 0$, то $d = \mu_0$ и так как $3d - \sum \mu_i = 2$ (лемма 3) и все $\mu_i \geqslant 0$ (лемма 2), то $d = \mu_0 = 1$.

Разберем случай б). Если $\mu_0 < \mu$, то, переписав неравенство

$$d^2 - \mu_0^2 - n\mu^2 \geqslant 0$$

в виде

$$(\mu_0 + 2\mu)^2 - \mu_0^2 - n\mu^2 = 4\mu_0\mu + 4\mu^2 - n\mu^2 \geqslant 0$$

получаем:

$$4\mu^2 + 4\mu^2 - n\mu^2 = (8-n)\mu^2 > 0,$$

что невозможно при $n > 7$ (даже при $n > 6$, когда $n = 2m$ четно); теорема доказана.

Если $\mu_0 \geqslant \mu$, то можно построить такое бирациональное преобразование $\tau\colon P^2 \to P^2$, что $\tau_*(X)$ будет иметь вид:

$$d'L - \mu_0' P_0 - \sum_{i=1}^{n} \mu P_i' - \sum_{i>n} \mu_i' P_i',$$

где $d' = \mu_0' + 2\mu$ и $\mu_0' < \mu$.

Так как $(\tau_*(X), \tau_*(X)) = (X, X)$ (см. утверждение 2) § 3) и все $\mu_i' \geqslant 0$, поскольку $\tau_*(X)$ «произошла» в конечном счете из эффективной линейной системы (леммы 1, 2), то неравенство

$$d'^2 - \mu_0'^2 - n\mu^2 \geqslant 0$$

вновь приводит к противоречию при $n > 7$.

Нам осталось построить τ. Заметим, что из $\mu_0 \geqslant \mu$ следует $d \leqslant 3\mu$ и по лемме 3 в системе X найдется точка P' с кратностью μ' такая, что $d < \mu_0 + \mu + \mu'$. Пусть P' имеет наибольшую кратность из всех точек, обладающих этим свойством. Тогда, по лемме 2, она лежит либо на плоскости, либо на прямой $l_0' = \operatorname{dil}_{P_0} P_0$, если $P' > P_0$. В последнем случае, если $P' \neq Q$ (см. п. 2), точка $(\sigma\omega_\sigma)_*(P')$ лежит на плоскости и имеет ту же кратность μ' (здесь мы пользуемся инвариантностью X относительно $\sigma\omega_\sigma$); выберем ее за P'. Обозначим через τ_1 квадратичное преобразование с центрами в точках P_0, P_1, P'. Если $P' \in P^2$, то τ_1 — стандартное преобразование Кремоны $C(P_0, P_1, P')$. В случае $P' = Q$ преобразование τ_1 задается формулой

$$\{x_0, (x_1 - a_1x_0), x_2\} \to \{(x_1 - a_1x_0)^2, x_0(x_1 - a_1x_0), x_0x_2\}.$$

Как нетрудно проверить (см. п. 4, § 3),

$$\tau_{1*}(X) = d_1L - \mu_{01}P_0 - \mu_1'P' - \mu_1P_1 - \sum_{i=2}^{n} \mu P_i^* - \ldots,$$

где $d = 2d - (\mu_0 + \mu + \mu')$, $\mu_{01} = d - \mu - \mu'$, $\mu_1' = d - \mu_0 - \mu = \mu$, $\mu_1 = d - \mu_0 - \mu'$, или, вводя обозначение $P' = P_1^*$,

$$\tau_{1*}(X) = d_1L - \mu_{01}P_0 - \sum_{i=1}^{n} \mu P_i^* - \mu_1P_1 - \ldots,$$

где $d_1 = \mu_{01} + 2\mu$ и $\mu_{01} < \mu_0$. Если при этом $\mu_{01} < \mu$, то $\tau = \tau_1$. Если же еще $\mu_{01} \geqslant \mu$, то снова найдется точка P'' с кратностью μ'' такая, что $d_1 < \mu_{01} + \mu + \mu''$. За центры очередного квадратичного преобразования τ_2 можно взять P_0, P_1^*, P'', если $P_1^* \in P^2$, или P_0, P_i^*, P'' $(i \neq 1)$ в противном случае. Так как $\mu_0 > 0$ — целое, то через конечное число шагов этот процесс оборвется и $\tau = \tau_k \circ \ldots \circ \tau_2 \circ \tau_1$. Теорема полностью доказана.

С л е д с т в и е 1. *Пусть k — поле действительных чисел. Для каждого поля K со свойствами* а) *и* б) *можно выбрать аффинную модель вида*

$$z^2 + y^2 = \prod_{i=1}^{2m}(x - a_i), \quad a_i \in k,$$

если $m \geqslant 1$, или $z^2 + y^2 = \pm 1$.

С точностью до бирациональной эквивалентности над k семейство таких поверхностей при $m > 3$ описывается $2m - 3$ параметрами (этот результат получен Комессатти [2]).

С л е д с т в и е 2. *Пусть k — конечное поле. Тогда множество $H^1(k, \mathfrak{A})$ бесконечно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В $k[x]$ есть бесконечно много неприводимых над $k(\sqrt{a})$ многочленов. □

Литература

[1] E n r i q u e s F. Sulle irrazionalità da cui può farsi dipendere la risoluzione d'un' equazione algebrica $f(x, y, z) = 0$ con funzioni razionale di due parametri // Math. Ann. — 1897. — V. 49. — P. 1–23.

[2] C o m e s s a t t i A. Fondamenti per la geometria sopra le superficie razionali dal punto di vista reale // Math. Ann. — 1912. — V. 73. — P. 1–72.

[3] Алгебраические поверхности. Труды МИАН СССР. — 1965. — Т. 75.

[4] Н а г а т а М. Рациональные поверхности. II // Сб. переводов «Математика». — 1964. — Т. 8(4). — С. 75–94.

[5] Ф а д д е е в Д. К. Простые алгебры над полем алгебраических функций от одной переменной // Труды МИАН СССР. — 1951. — Т. 38. — С. 321–344.

[6] В а н д е р В а р д е н Б. Л. Современная алгебра. Ч. 2. — М.–Л.: Гостехиздат, 1947.

[7] R o q u e t t e P. On the Galois cohomology of the projective linear group and its applications to the constructions of generic splitting fields of algebras // Math. Ann. — 1963. — V. 150, № 5. — P. 411–439.

Рациональные поверхности с пучком рациональных кривых

Введение

В работе изучаются бирациональные свойства одного класса алгебраических поверхностей, определенных над совершенным полем k. Этот класс состоит из геометрически неприводимых (в старой терминологии «абсолютно неприводимых») поверхностей V, для которых существует определенное над k рациональное отображение $g\colon V \to C$ на кривую рода нуль C такое, что общий слой отображения g является геометрически неприводимой кривой тоже рода нуль. Иначе говоря, V обладает однопараметрическим семейством или пучком рациональных кривых, параметризованным кривой C. По известной лемме Нётера (или по теореме Тзена) все такие поверхности являются рациональными, т. е. бирационально эквивалентными над алгебраическим замыканием $\overline{k}$ поля k проективной плоскости $\mathbf{P}^2_{\overline{k}}$. Поэтому их изучение представляет интерес в связи с общей задачей бирациональной классификации рациональных поверхностей над незамкнутыми полями.

Приведем здесь основные известные моменты этой классификации. Стимулируемая диофантовыми проблемами, с одной стороны, и чисто геометрическим интересом — с другой, эта задача исследовалась еще Нётером и Энриквесом (см. [7], а также ссылки, указанные в этой статье). С современной когомологической точки зрения она представляет собой изучение $H^1(k, \mathrm{Cr})$ — одномерного множества когомологий Галуа с коэффициентами в группе Cr — бирациональных автоморфизмов плоскости $\mathbf{P}^2_{\overline{k}}$.

Энриквес в цитируемой выше работе показал, что бирациональные классы рациональных поверхностей над k можно объединить в 4 семейства по некоторым инвариантным геометрическим признакам. Одно из этих семейств составляют поверхности с пучком рациональных кривых. Оставался открытым вопрос о дальнейшей классификации внутри каждого семейства. Впоследствии этим вопросом занимались Комессатти [6] и Сегре [22] в случае, когда k — поле действительных чисел. Сегре изучал также кубические поверхности в $\mathbf{P}^3_k$ над полем нулевой характеристики [21].

Матем. сборник. — 1967. — Т. 74(116), № 4. — С. 608–638.

В работе автора [13] получены частные результаты, относящиеся к поверхностям с пучком рациональных кривых над произвольным совершенным полем.

Наконец, Манин в цикле работ [16–18] пересмотрел и уточнил классификацию Энриквеса, нашел новые бирациональные инварианты, вскрыл интересную связь изучаемого вопроса с задачей описания классов сопряженных конечных подгрупп группы Кремоны Cr и получил глубокие результаты в решении основной проблемы — бирациональной классификации. В [18] он показывает, что любая рациональная поверхность бирациональными преобразованиями над k может быть приведена к одной из следующих двух стандартных форм:

1. Поверхности дель Пеццо. Неособая проективная рациональная поверхность F называется невырожденной (соответственно вырожденной) поверхностью дель Пеццо, если ранг группы классов обратимых пучков $\operatorname{Pic} F$ равен единице (соответственно больше единицы, $\operatorname{Pic} F$ порожден Ω_F и классами рациональных кривых с индексом самопересечения — 2).

2. Поверхности с рациональным пучком. К ним относятся проективные, неособые, геометрически неприводимые поверхности F, для которых существует определенный над k морфизм $f\colon F \to C$, где C — неособая кривая рода нуль над k, а общий слой F_τ геометрически неприводим, приведен и также имеет род нуль. Кроме того, все слои F_t, $t \in C$, неприводимы над полем вычетов $k(t)$, хотя среди них могут быть геометрически приводимые.

Поверхности дель Пеццо различаются прежде всего своей степенью n, $1 \leqslant n \leqslant 9$, которая по определению равна индексу самопересечения $(\Omega_F \cdot \Omega_F)$ канонического класса. Геометрически над $\overline{k}$ они устроены как поверхности, полученные из плоскости $\mathbf{P}^2_{\overline{k}}$ моноидальным преобразованием с центром в $9-n$ замкнутых точках. Для невырожденных поверхностей дель Пеццо эти точки лежат в «общем положении», для вырожденных — нет. Невырожденный случай, а также все поверхности старших степеней $n \geqslant 4$ хорошо изучены в [16] и [18]; в [18] получена полная бирациональная классификация невырожденных поверхностей дель Пеццо степеней $1, 2, 3$.

Осталось, таким образом, исследовать вырожденный случай поверхностей дель Пеццо и стандартные поверхности с рациональным пучком (к последним, конечно, приводится любая рациональная поверхность с пучком рациональных кривых). Для стандартных форм $2(\Omega_F \cdot \Omega_F)$ может принимать любые целые значения n в интервале $-\infty < n \leqslant 8$.

В настоящей работе мы даем бирациональную классификацию стандартных поверхностей с рациональным пучком, для которых $(\Omega_F \cdot \Omega_F) \leqslant 0$. В общих чертах она состоит в следующем. По теореме Витта (см. [26]) о взаимно однозначном соответствии между множеством классов бирациональной эквивалентности над основным полем кривых рода нуль и множеством кватернионных алгебр над этим полем каждому пучку рациональных кривых можно сопоставить пару кватернионных алгебр. Одна из них соответствует базисной (параметризующей) кривой пучка, другая — общему слою, определенному над полем вычетов общей точки базы. Насколько это сопоставление инвариант-

но для поверхности? Прежде всего оно зависит от выбора базисной кривой пучка — на заданной поверхности, при изоморфной замене базы общий слой может заменяться на неизоморфный. Однако эта неинвариантность контролируема, так как все изоморфизмы кривых рода нуль или, что то же самое, соответствующих алгебр легко описываются. Более существенная неинвариантность происходит из того, что на поверхности может существовать много трансверсальных пучков, не переводящихся друг в друга бирациональными над k автоморфизмами поверхности. Этот случай, например, может (представиться, когда между двумя стандартными поверхностями существуют бирациональные изоморфизмы над k, не переводящие слои в слои. Основная теорема, доказанная в § 1, утверждает, что на стандартных поверхностях с рациональным пучком и $(\Omega_F \cdot \Omega_F) \leqslant 0$ не может быть никакого другого трансверсального пучка рациональных кривых. Отсюда немедленно следует, что проверка бирациональной эквивалентности над k таких поверхностей сводится к проверке изоморфизма двух пар кватернионных алгебр, что, по крайней мере, в случае конечных и числовых полей k делается локальными средствами.

В действительности, результаты § 1 так же, как и большая часть результатов работ [16, 17, 18], относятся не только к рациональным поверхностям, а к более широкому классу объектов так называемых G-поверхностей. G-поверхности были введены в [17]. Кроме рациональных поверхностей над незамкнутым полем к ним относятся еще и рациональные поверхности над замкнутым полем $\overline{k}$, на которые действует конечная группа G как группа автоморфизмов. Поводом для изучения последних служит старая задача (см. [25]) классификации с точностью до сопряженности конечных подгрупп группы Кремоны. Так, в частности, основная теорема 1.6 позволяет решить эту задачу для конечных подгрупп, сохраняющих пучки рациональных кривых на плоскости (с некоторыми ограничениями). Следует отметить, что техника, используемая для изучения G-поверхностей, — это бирациональная техника алгебраических поверхностей с учетом дополнительной структуры — действия группы G.

Основное содержание § 2 составляют вычисления бирационального инварианта $H^1(k, \operatorname{Pic} F \otimes \overline{k})$ для поверхностей с рациональным пучком. Этот важный инвариант был найден Маниным в работе [16]. Там же вычислены его значения для поверхностей дель Пеццо степени 4 и для некоторого частного семейства поверхностей с рациональным пучком. Группа $H^1(k, \operatorname{Pic} F \otimes \overline{k})$ может быть с успехом использована в различных ситуациях, например, для доказательства бирациональной нетривиальности конкретной поверхности.

Для стандартных форм 2 с $(\Omega_F \cdot \Omega_F) > 0$, а также для поверхностей дель Пеццо степени 4 это пока единственный известный способ различать бирациональные классы.

Весьма любопытно, что группа $H^1(k, \operatorname{Pic} F \otimes \overline{k})$ тесно связана с другим бирациональным инвариантом, а именно, с группой Брауэра (см. [10]) поверхности F *). Эта связь получается формально посредством некоторой спектраль-

*) На эту связь указал М. Артин в частной беседе.

ной последовательности в накрывающей топологии (теорема 2.5). В некоторых случаях эти две группы совпадают, например, если k — конечное поле.

В § 2 изложены также некоторые известные факты о группе Брауэра полей и алгебраических кривых. Хотя для нашей основной задачи нужны только кватернионные алгебры, мы сочли возможным привести результаты во всей общности. Ограничение кватернионами, вероятно, не намного сократило бы изложение.

§ 3 носит характер иллюстраций общей теории на примерах конкретных полей k. В начале предлагается прямой способ приведения поверхностей с пучком рациональных кривых к стандартным формам. Далее для поля действительных чисел и конечных полей явно описывается «пространство модулей» бирациональных классов таких поверхностей, разумеется, с $(\Omega_F \cdot \Omega_F) \leqslant 0$. Над полем рациональных чисел $\mathbf{Q}$ строится пример бирационально нетривиальной поверхности, обладающей по крайней мере двумя различными пучками.

В § 4 обсуждается проблема унирациональности изучаемых поверхностей. Доказывается, что над полем действительных чисел все они унирациональны, при условии, конечно, что на них есть хотя бы одна точка. В самом конце формулируются некоторые нерешенные задачи.

Работа выполнена под руководством Ю. И. Манина, автор сердечно благодарит его за многочисленные указания и полезные советы.

§ 0. Предварительные результаты

0.1. Алгебраическую схему V над полем k вместе с группой G, действующей на $V \otimes_k \overline{k}$, где $\overline{k}$ — алгебраическое замыкание поля k, мы будем называть, следуя статье [18], G-схемой. В дальнейшем мы будем рассматривать G-схемы размерностей $0, 1, 2$ следующих двух типов.

а) Алгебраический случай. Поле k совершенно, $G = G(\overline{k}/k)$ — группа Галуа, действующая на $V \otimes \overline{k}$ через второй множитель. Действие G на V тривиально.

б) Геометрический случай. Поле k алгебраически замкнуто, G — произвольная конечная группа. Действие G на $V \otimes \overline{k} = V$ задается гомоморфизмом $G \to \operatorname{Aut}_k V$.

Будем говорить, что G-схема V проективна, неособа, геометрически неприводима, приведена, если этими свойствами обладает V.

Для любых двух G-схем V_1 и V_2 одного и того же типа рациональным G-отображением (в частности, G-морфизмом, бирациональным G-отображением) $f\colon V_1 \to V_2$ называется любое рациональное k-отображение (соответственно k-морфизм, бирациональное k-отображение) в алгебраическом случае и любое рациональное отображение (соответственно морфизм, бирациональное отображение), коммутирующее с действием G, в геометрическом случае.

Условимся всюду в дальнейшем отмечать чертой сверху результат тензорного умножения на $\overline{k}$. Так, например, мы будем писать $\overline{V}$, $\overline{x}$, вместо $V \otimes \overline{k}$, $x \otimes \overline{k}$ и т. д.

Пусть $\mathcal{K}^*_{\overline{V}}$ — пучок частных структурного пучка $\mathcal{O}_{\overline{V}}$-схемы $\overline{V}$, $\mathcal{O}^*_{\overline{V}} \subset \mathcal{O}_{\overline{V}}$ — подпучок обратимых элементов. Группа G действует на $\mathcal{K}^*_{\overline{V}}$ и $\mathcal{O}^*_{\overline{V}}$, а также на когомологии с коэффициентами в них. В частности, структурой G-модулей снабжены $H^0(\overline{V}, \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*)$ — группа дивизоров Картье и $H^1(\overline{V}, \mathcal{O}^*) = \operatorname{Pic}\overline{V}$ — группа классов обратимых пучков. Аналогично G действует на произвольные подпучки идеалов $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{\overline{V}}$ и, следовательно, на замкнутые подсхемы $\overline{W} \subset \subset \overline{V}$. Группа $D(\overline{V})$ дивизоров Вейля и группа $\operatorname{Cl}(\overline{V})$ классов дивизоров таким образом также становятся G-модулями.

Каждая подсхема $V' \subset V$ в алгебраическом случае и каждая G-инвариантная — в геометрическом случае естественным образом снабжены структурой G-схем. G-схема V называется G-н е п р и в о д и м о й, если G действует транзитивно на множестве неприводимых компонент $\overline{V}$.

Обозначим через Ω_V канонический пучок на V. Если V регулярна и неприводима, то Ω_V — обратимый пучок, и $\Omega_{\overline{V}} \in (\operatorname{Pic} V)^G$ (для любого G-модуля A через A^G обозначается, как обычно, подмодуль инвариантных элементов).

Ниже мы условимся относительно дальнейших определений и приведем список свойств G-схем, которыми будем пользоваться. Доказательства встречающихся фактов в основном хорошо известны в литературе, по крайней мере, в алгебраическом случае. Действие группы G вносит незначительные усложнения в геометрическом случае. Поверхностью мы называем двумерную алгебраическую схему, геометрически неприводимую и приведенную. Кривая на поверхности — это замкнутая подсхема, все неприводимые компоненты которой имеют размерность 1 и не имеют вложенных компонент.

0.2. Пусть F — проективная неособая G-поверхность. Естественное отображение $H^0(\overline{F}, \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*) \to D(\overline{F})$ является в этом случае изоморфизмом G-модулей. Оно индуцирует также G-изоморфизм $\operatorname{Pic}\overline{F} \simeq \operatorname{Cl}(\overline{F})$. Для любых двух дивизоров $D_1, D_2 \in D(\overline{F})$ (в частности, для любых двух кривых — эффективных дивизоров) определен индекс пересечения $(D_1 \cdot D_2)$. Он задает G-инвариантное симметрическое билинейное спаривание $\operatorname{Cl}(\overline{F}) \times \operatorname{Cl}(\overline{F}) \to \mathbf{Z}$ и равным образом, в силу изоморфизма, $\operatorname{Pic}\overline{F} \times \operatorname{Pic}\overline{F} \to \mathbf{Z}$. Для каждого D, а также для соответствующего обратимого пучка $\mathcal{O}_{\overline{F}}(D)$ имеет место формула арифметического рода $p_a(D) = p_a(\mathcal{O}_{\overline{F}}(D)) = \dfrac{(D \cdot D + \omega_{\overline{F}})}{2} + 1$, где $\omega_{\overline{F}}$ — класс дивизоров, соответствующий каноническому пучку $\Omega_{\overline{F}}$ (см. [20, 2, 18]).

Приведенную кривую $X \subset F$ (не обязательно неприводимую) мы будем называть исключительной кривой первого рода, если для каждой неприводимой компоненты $\overline{X}_i$ кривой $\overline{X}$ выполнены условия: $(\overline{X}_i \cdot \overline{X}_i) = -1$, $p_a(\overline{X}_i) = 0$, и $(\overline{X}_i \cdot \overline{X}_j) = 0$ для каждой пары $\overline{X}_i, \overline{X}_j$, $i \neq j$.

0.3. Л е м м а. а) *Пусть $x \subset F$ — приведенная нульмерная подсхема (т. е. объединение конечного числа замкнутых точек на F). Существует неособая проективная поверхность F' и бирациональный морфизм $d\colon F' \to \to F$ — моноидальное преобразование с центром в x — такой, что $d^{-1}(x) \subset \subset F'$ — исключительная кривая первого рода, и ограничение d на $F \setminus d^{-1}(x)$ является изоморфизмом с $F \setminus x$. Кроме того, если x — G-схема, то F' — G-поверхность и d — G-морфизм.*

б) *Пусть $X \subset F$ — исключительная кривая первого рода. Тогда существует проективная неособая поверхность F'' и бирациональный морфизм $c\colon F \to F''$ — стягивание кривой X — такой, что $c(X) \subset F''$ — нульмерная приведенная подсхема, ограничение c на $F \setminus X$ является изоморфизмом с $F'' \setminus c(X)$. Кроме того, если X — G-кривая, то F'' — G-поверхность и c — G-морфизм* (см. [27, 81]).

0.4. Лемма. а) *Пусть $Y \subset F$ — неприводимая, приведенная кривая, η — ее общая точка. В обозначениях предыдущей леммы положим $Y' = \overline{d^{-1}(\eta)}$ и $Y'' = \overline{c(\eta)}$, где $\overline{d^{-1}(\eta)}$ — замыкание $d^{-1}(\eta)$ на F', соответственно $\overline{c(\eta)}$ — замыкание $c(\eta)$ на F''. Пусть, далее, $\overline{x} = \bigcup\limits_{i=1}^{r} \overline{x}_i$, где $\overline{x}_i$ — замкнутые точки; m_i — кратности точек $\overline{x}_i$ на кривой $\overline{Y}$. Тогда имеют место соотношения:*

$$(Y' \cdot Y') = (Y \cdot Y) - \sum_{i=1}^{r} m_i^2, \tag{0.4.1}$$

$$(Y'' \cdot Y'') = (Y \cdot Y) + \sum_{i=1}^{r} (\overline{Y} \cdot \overline{X}_i)^2. \tag{0.4.2}$$

б) *Поведение канонического класса и $\operatorname{Pic} \overline{F}$ при моноидальном преобразовании $d\colon F' \to F$ описывается следующими формулами:*

$$\Omega_{F'} \simeq d^*(\Omega_F) \otimes \mathcal{O}_{F'}(d^{-1}(x)), \tag{0.4.3}$$

$$\operatorname{Pic} \overline{F}' \simeq d^*(\operatorname{Pic} \overline{F}) \oplus \underbrace{\mathbf{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}}_{r \text{ раз}}, \tag{0.4.4}$$

где дополнительные слагаемые $\mathbf{Z}$ порождены классами неприводимых компонент $\overline{X}_i$ кривой $\overline{X} = d^{-1}(\overline{x})$, d^* обозначает, как всегда, обратный образ (см., например, [19, 2]).

Пусть теперь $X \subset F$ — произвольная приведенная кривая, $\eta_1, \ldots, \eta_s$ — общие точки ее неприводимых компонент. Бирациональный морфизм $h\colon F' \to F$, где F' — проективная неособая поверхность, называется нормализацией кривой X, если выполнены следующие условия:

1) замыкание $\overline{\bigcup\limits_{i}^{s} h^{-1}(\eta_i)} = X'$ является неособой кривой на F';

2) для любого другого бирационального морфизма $h_1\colon F'' \to F$ со свойством 1) существует морфизм $h_2\colon F'' \to F'$ такой, что $h_1 = h \circ h_2$.

0.5. Лемма. а) *Для любой приведенной кривой $X \subset F$ существует нормализация $h\colon F' \to F$, причем $h = d_1 \circ \ldots \circ d_r$, где $d_i\colon F_i \to F_{i-1}$ — моноидальные преобразования с центрами в приведенных нульмерных подсхемах $x_{i-1} \subset F_{i-1}$, состоящих из всех особых точек кривых $X_{i-1} = \overline{\bigcup\limits_{j=1}^{s} (d_1 \circ \ldots \circ d_{i-1})^{-1}(\eta_j)} \subset F_{i-1}$ (здесь $F_0 = F$, $F_r = F'$, $X_0 = X$, $X_r = X'$). Кроме того, если X — G-кривая, то F_i — G-поверхности, h, d_i — G-морфизмы.*

б) *В предыдущих обозначениях пусть, кроме того,* $\overline{x}_i = \bigcup_{j=1}^{l_i} \overline{x}_{ij}$ *— разложение на замкнутые точки на* $\overline{F}_i$, m_{ij} *— кратности точек* $\overline{x}_{ij}$ *на кривых* $\overline{X}_i$. *Тогда* $\max_i m_{ij}$ *достигается при* $i = 1$ (*т. е. особая точка с самой большой кратностью лежит на* $\overline{X}_0 = \overline{X}$), *и имеют место формулы*:

$$p_a(X') = p_a(X) - \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{l_i} \frac{m_{ij}(m_{ij}-1)}{2}, \tag{0.5.1}$$

$$(X' \cdot X') = (X \cdot X) - \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{l_i} m_{ij}^2 \tag{0.5.2}$$

(см., например, [12, 19]).

0.6. Дальнейшие свойства относятся к рациональным G-поверхностям. G-поверхность называется р а ц и о н а л ь н о й, если $\overline{F}$ бирационально эквивалентна плоскости $\mathbf{P}^2_{\overline{k}}$. В теории рациональных поверхностей, определенных над замкнутым полем, особое место занимают линейчатые поверхности, т. е. такие поверхности F, для которых существует морфизм $f\colon F \to \mathbf{P}^1_{\overline{k}}$, каждый слой которого изоморфен проективной прямой. Хорошо известно (см., например, [19, 2]), что каждая такая поверхность изоморфна одной из поверхностей F_n, $n \geqslant 0$, определенных следующим образом: $F_0 \simeq \mathbf{P}^1_{\overline{k}} \times \mathbf{P}^1_{\overline{k}}$ с проекцией, скажем, на первый множитель. При $n \geqslant 1$ F_n получается из F_0 моноидальным преобразованием с центром в n замкнутых точках, лежащих на одной из образующей вида $\mathbf{P}^1_{\overline{k}} \times x$, с последующим стягиванием других образующих, проходящих через эти точки. Структурный морфизм $F_n \to \mathbf{P}^1_{\overline{k}}$ определяется при этом, очевидным образом, морфизмом $F_0 \to \mathbf{P}^1_{\overline{k}}$. Для $n \geqslant 1$ существует каноническое сечение $s\colon \mathbf{P}^1_{\overline{k}} \to F_n$, образ которого S_n является единственной неприводимой кривой на F_n с отрицательным индексом самопересечения $(S_n \cdot S_n) = -n$. Любая другая неприводимая кривая S'_n, для которой $(S'_n \cdot F_{n,t}) = 1$, является образом некоторого сечения $s'\colon \mathbf{P}^1_{\overline{k}} \to F_n$, и справедливо неравенство

$$(S'_n \cdot S'_n) \geqslant n. \tag{0.6.1}$$

Для каждой F_n имеет место изоморфизм групп

$$\operatorname{Pic} F_n \simeq \operatorname{Cl}(F_n) \simeq \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}; \tag{0.6.2}$$

образующими при $n \geqslant 1$ являются классы кривых S_n и $F_{n,t}$, при $n = 0$ — классы множителей. Легко вычисляется канонический класс

$$\omega_{F_n} \sim -(2+n)F_{n,t} - 2S_n. \tag{0.6.3}$$

0.7. Л е м м а. *Для всякой неособой рациональной поверхности* F *над замкнутым полем* $\overline{k}$ *существует морфизм, отображающий ее либо на плоскость* $\mathbf{P}^2_{\overline{k}}$, *либо на* F_n, *для некоторого* n $\operatorname{Pic} F$ *является свободным* $\mathbf{Z}$-*модулем конечного ранга. Справедлива следующая формула* (*Нётера*)

$$(\Omega_F \cdot \Omega_F)^{\perp} \operatorname{rank} \operatorname{Pic} F = 10 \tag{0.7.1}$$

(см. [19, 27]).

0.8. Рациональная, проективная, неособая G-поверхность F называется стандартной G-поверхностью с рациональным пучком, если существует неособая, проективная G-кривая рода нуль C и G-морфизм $f\colon F \to C$ такой, что общий слой F_τ — геометрически неприводим, приведен и имеет род нуль над полем вычетов $k(\tau)$ общей точки $\tau \in C$.

Заметим, что если каждый слой к тому же геометрически неприводим, то, очевидно, $\overline{F} \to \overline{C}$ — линейчатая поверхность.

0.9. Лемма. *Пусть $F \to C$ — стандартная G-поверхность с рациональным пучком, $\bar{t} \in \overline{C}$ — геометрическая точка. Если геометрический слой $F_{\bar{t}}$ вырожден, то он имеет вид $F_{\bar{t}} = \overline{Z} \cup \overline{Z}'$, где $\overline{Z}, \overline{Z}' \subset \overline{F}$ — неприводимые исключительные кривые первого рода и $(\overline{Z} \cdot \overline{Z}') = 1$.*

(Доказательство см. в [16], 1.6).

0.10. Любые отображения g в коммутативной диаграмме вида

$$\begin{tikzcd} F' \arrow[rr, "g"] \arrow[dr] & & F'' \arrow[dl] \\ & C & \end{tikzcd}$$

мы называем C-отображениями. В частности, понятны сочетания C-морфизм, C-бирациональное отображение и т. д. Если, кроме того, g является G-отображением, то о нем мы говорим как о (G, C)-отображении.

§ 1. Бирациональная классификация стандартных G-поверхностей с рациональным пучком и с $(\Omega_F \cdot \Omega_F) \leqslant 0$

1.1. Теорема. *Пусть F — стандартная G-поверхность с рациональным пучком и $f\colon F \to C$ — структурный G-морфизм, Если $\overline{F} \not\simeq F_n$ ни при каком $n \geqslant 0$, то существует такая исключительная кривая первого рода $\overline{X} \subset \overline{F}$, морфизм стягивания которой отображает $\overline{F}$ на $\mathbf{P}^1_{\bar{k}} \times \overline{C} \simeq F_0$ и является $\overline{C}$ -морфизмом.*

Доказательство. Пусть $\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_r \in \overline{C}$ — все замкнутые точки, слои $F_{\bar{t}_i}$ над которыми приводимы. Структура этих слоев известна (см. 0.9) $F_{\bar{t}_i} = \overline{Z}_i \cup \overline{Z}'_i$ для каждого $1 \leqslant i \leqslant r$, $\overline{Z}_i$, $\overline{Z}'_i$ — неприводимые компоненты с $p_a(\overline{Z}_i) = p_a(\overline{Z}'_i) = 0$ и $(\overline{Z}_i \cdot \overline{Z}_i) = (\overline{Z}'_i \cdot \overline{Z}'_i) = -1$, $(\overline{Z}_i, \overline{Z}'_i) = 1$. Кривую X составим из компонент слоев $\overline{Z}_i, \overline{Z}'_j$ по одной из каждого $F_{\bar{t}_i}$. Из условий, которым удовлетворяют $\overline{Z}_i, \overline{Z}_j$ немедленно следует, что любая кривая $\overline{Y}$, составленная таким образом, является исключительной кривой первого рода на $\overline{F}$ (см. 0.2). Кроме того, если $\overline{S} \subset \overline{F}$ — неприводимая кривая с $(\overline{S} \cdot F_{\bar{t}} = 1$, то $0 \leqslant (\overline{S} \cdot \overline{Y}) \leqslant r$, и, когда $\overline{Y}$ пробегает все указанным способом составленные кривые, $(\overline{S} \cdot \overline{Y})$ принимает все целые значения из этого интервала, так как $(\overline{S} \cdot \overline{Z}_i)$, $(\overline{S} \cdot \overline{Z}'_i)$ могут равняться только 0 или 1 и $(\overline{S} \cdot \overline{Z}_i) \neq (\overline{S} \cdot \overline{Z}'_i)$. Для доказательства теоремы достаточно найти такую кривую $\overline{S}$ с дополнительным свойством $0 \geqslant (\overline{S} \cdot \overline{S}) \geqslant -r$. Действительно, пусть такая кривая $\overline{S} \subset \overline{F}$ существует. Тогда по предыдущему

в множестве кривых $\{\overline{Y}\}$ найдется такая, обозначим ее через $\overline{X}$, для которой $(\overline{S}\cdot\overline{X}) = -(\overline{S}\cdot\overline{S})$. Морфизм стягивания $\overline{X}$ $c\colon \overline{F} \to \overline{F}''$ является $\overline{C}$-морфизмом, и $\overline{F}'' \to \overline{C}$ — линейчатая поверхность. Отождествляя $\overline{C}$ с прямой $\mathbf{P}^1_{\overline{k}}$ при помощи некоторого изоморфизма, получаем морфизм $\overline{F}'' \to \mathbf{P}^1_{\overline{k}}$, и, следовательно, $\overline{F}''$ изоморфна одной из линейчатых поверхностей F_n. Так как при этом $(c(\overline{S})\cdot F_{\overline{t}}) = 1$ и $(\overline{S}\cdot\overline{S}) = (c(\overline{S})\cdot c(\overline{S})) - (\overline{S}\cdot\overline{X})$ (см. (0.4.2)), откуда $(c(\overline{S})\cdot c(\overline{S})) = 0$, то из (0.6.1) следует, что $n = 0$ и $\overline{F}'' \simeq F_0$.

Покажем теперь, что $\overline{S}$ с указанными свойствами существует. Пусть $c_1\colon \overline{F} \to F_n$ — стягивание кривой $\overline{Y}$, $n \geqslant 1$. Обозначим через ξ_n общую точку кривой $S_n \subset F_n$ — образа канонического сечения $s\colon \mathbf{P}^1_{\overline{k}} \to F_n$. Замыкание $\overline{c_1^{-1}(\xi_n)} \subset \overline{F}$ является неприводимой кривой, обозначим ее через $\overline{S}$. Ясно, что $(\overline{S}\cdot F_{\overline{t}}) = 1$ и $(\overline{S}\cdot\overline{S}) \leqslant -n \leqslant 0$. Для любого $\sigma \in G$ кривая $\sigma^*(\overline{S})$ также обладает этими свойствами (см. 0.2), и для некоторого $\sigma_0 \in G$ имеем $\sigma_0^*(\overline{S}) \neq \overline{S}$. В качестве σ_0 можно взять любое σ_i, переводящее $\overline{Z}_i$ в $\overline{Z}'_i$ (такое существует, поскольку $\overline{Z}_i$ и $\overline{Z}'_i$, являются компонентами G-неприводимой кривой (см. 0.8)). Действительно, $\sigma_i^*(\overline{S}) \neq \overline{S}$, так как $(\sigma_i^*(\overline{S})\cdot\overline{Z}_i) \neq (\sigma_i^*(\overline{S})\cdot\overline{Z}'_i) = (\overline{S}\cdot\overline{Z}_i)$. Для индекса самопересечения $(\overline{S}\cdot\overline{S})$ получаем нужную оценку

$$(\overline{S}\cdot\overline{S}) = (\sigma_0^*(\overline{S})\cdot\sigma_0^*(\overline{S})) = (c_1(\sigma_0^*\overline{S})\cdot c_1(\sigma_0^*\overline{S})) - (\sigma_0^*\overline{S}\cdot\overline{Y}) \geqslant n - r \geqslant -r,$$

учитывая, что $(c_1(\sigma_0^*\overline{S})\cdot c_1(\sigma_0^*\overline{S})) \geqslant n$, так как $c_1(\sigma_0^*\overline{S}) \neq S_n$ на F_n.

Теорема доказана. □

Эта теорема показывает, что для всякой стандартной G-поверхности с рациональным пучком F $\overline{F}$ изоморфна либо F_n, либо поверхности, полученной из F_0 моноидальным преобразованием с центром в r замкнутых точках. Отметим, что для стандартных G-поверхностей дель Пеццо F (см. [16, 18]) $\overline{F}$, в свою очередь, изоморфна поверхности, полученной моноидальным преобразованием из $\mathbf{P}^2_{\overline{k}}$ с центром в m точках, $0 \leqslant m \leqslant 8$.

1.2. Следствие. *В предыдущих обозначениях,* $\operatorname{Pic}\overline{F}$ *— свободный* $\mathbf{Z}$*-модуль ранга* $2+r$*, порожденный классами кривых* $\overline{S}$*,* $F_{\overline{t}}$ *и неприводимыми компонентами кривой* $\overline{X}$*. Кроме того,*

$$\omega_{\overline{F}} \sim -2F_{\overline{t}} - 2c^{-1}\circ c(\overline{S}) + \overline{X}; \quad (\omega_F\cdot\omega_F) = 8 - r.$$

Доказательство. Все утверждения немедленно получаются из теоремы 1.1 с использованием результатов 0.4 б), 0.6, 0.7. □

Следующая теорема является незначительным уточнением одного из фактов, доказанных в [18] (см. [18], теорема 4.3).

1.3. Теорема. *Для всякой стандартной* G*-поверхности* F *с рациональным пучком и* $(\Omega_F\cdot\Omega_F) \neq 8$ *группа* $(\operatorname{Pic}\overline{F})^G$ *порождена* $\Omega_{\overline{F}}$ *и классом геометрического слоя* $F_{\overline{t}}$*.*

Доказательство. Обозначим через M подмодуль в $\operatorname{Pic}\overline{F}$, порожденный классом слоя $F_{\overline{t}}$, и через P — подмодуль, порожденный M и $\Omega_{\overline{F}}$. Заведомо

$M \subset (\operatorname{Pic}\overline{F})^G$ и $P \subset (\operatorname{Pic}\overline{F})^G$. Для точной последовательности G-модулей

$$0 \to M \to \operatorname{Pic}\overline{F} \to N \to 0,$$

где $N = \operatorname{Pic}\overline{F}/M$, напишем точную последовательность когомологий групп

$$0 \to M^G \to (\operatorname{Pic}\overline{F})^G \to N^G \to H^1(G, M) \to \dots$$

Здесь $M^G \simeq M \simeq \mathbf{Z}$, $H^1(G, M) \simeq \operatorname{Hom}(G, \mathbf{Z}) = 0$. Модуль N^G порожден образами классов кривых $\overline{S}$ и неприводимых компонент $\overline{X}$ (см. 1.2). В действительности образ классов компонент $\overline{X}$ в N^G равен нулю. Это следует из того, что G-орбита каждой такой компоненты, в силу G-неприводимости вырожденных слоев, пропорциональна классу слоя $F_{\overline{t}}$. Таким образом, $N^G \simeq \mathbf{Z}$ и порожден некоторой кратностью класса $\overline{S}$. Поскольку среди сечений $\overline{S}$ нет G-инвариантных ($(\Omega_F \cdot \Omega_F) \neq 8$), кратность эта отлична от 1 или -1. Далее, образ $\Omega_{\overline{F}}$ в N^G совпадает с образом $2\overline{S}$ (см. 1.2). Поэтому последовательность

$$0 \to M \to P \to N^G \to 0$$

также точна. Отсюда $P = (\operatorname{Pic}\overline{F})^G$, и теорема доказана. □

1.4. Лемма. *Пусть $X \subset F$ — G-неприводимая, приведенная G-кривая, $\eta \in X$ — ее общая G-точка. Пусть $\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_\mu \in \overline{F}$ — все замкнутые точки, которые являются особыми точками с кратностями $m_1, \dots, m_\mu$ для кривой $\overline{X}$. Тогда существует стандартная G-поверхность с рациональным пучком $F' \to C$ и бирациональное (G, C)-отображение $g\colon F \to F'$ такое, что кривая $X' = \overline{g(\eta)} \subset F'$ — G-неприводима, приведена, $(X' \cdot F'_{\overline{t}}) = (X \cdot F_{\overline{t}})$ и $m'_i \leqslant \frac{1}{2}(X' \cdot F'_{\overline{t}})$, где m'_i — кратности всех особых точек $\overline{X}'$. Кроме того, $(\Omega_F \cdot \Omega_F) = (\Omega_{F'} \cdot \Omega_{F'})$.*

Доказательство. Среди точек $\overline{x}_i$ выберем все те, для которых $m_i > \frac{1}{2}(X \cdot F_{\overline{t}})$. Пусть это будут, скажем, точки $\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_\nu$, $\nu \leqslant \mu$. Нульмерная подсхема $\overline{x} = \bigcup_{i=1}^{\nu} \overline{x}_i \subset \overline{F}$ G-инвариантна и $\overline{x} = x \otimes \overline{k}$ для некоторой G-схемы x. Обозначим через $\xi_1, \dots, \xi_s$ общие G-точки G-неприводимых компонент G-кривой $F_{f(x)} = f^{-1}(f(x))$. В результате моноидального преобразования $d_1\colon F^{(1)} \to F$ с центром в x кривые $\overline{d_1^{-1}(\xi_j)}$ становятся исключительными кривыми первого рода и, конечно, G-кривыми. Действительно, так как $m_i > \frac{1}{2}(X \cdot F_{\overline{t}})$, то на геометрическом слое $F_{\overline{t}}$ не может лежать более одной точки $\overline{x}_i$, и, следовательно, на каждом $F_{\overline{t}} \subset \overline{F}_{f(x)}$ лежит ровно по одной такой точке. $F_{\overline{t}}$ не может быть вырожденным по той же причине. Численные характеристики $\overline{d_1^{-1}(\xi_j)}$ немедленно получаются из формул (0.4.1), (0.4.2). Кратности особых точек кривой $\overline{d_1^{-1}(\eta)} \subset F^{(1)}$ вне $d_1^{-1}(x)$ остались такими же, как и у кривой X, т. е. меньшими или равными $\frac{1}{2}(X \cdot F_{\overline{t}})$, и уменьшились на $d_1^{-1}(x)$. Стягивая кривые $\overline{d_1^{-1}(\xi_j)}$, $c_1\colon F^{(1)} \to F^1$, получаем поверхность F^1, которая (G, C)-бирационально эквивалентна F, причем является стандартной G-поверхностью.

Соотношение $(\Omega_F \cdot \Omega_F) = (\Omega_{F^1} \cdot \Omega_{F^1})$ следует из леммы 0.4 б). Образ X^1 кривой $X^{(1)}$ при стягивании c_1 может приобрести новые особенности только в точках $c_1(\overline{d_1^{-1}(\xi_j)}) \in F^1$. Кратность каждой из особых точек равна индексу пересечения стягиваемой в эту точку кривой с кривой $X^{(1)}$ (см. (0.4.1), (0.4.2)), т. е. равна $(X \cdot F_{\overline{t}}) - m_i$ и, следовательно, не больше $\frac{1}{2}(X \cdot F_{\overline{t}}) = \frac{1}{2}(X^1 \cdot F_{\overline{t}})^1)$. Итак, мы видим, что для поверхности F^1 и кривой X^1 выполнены все условия леммы, причем кратности особых точек кривой $\overline{X}^1$ меньше, чем m_i, $1 \leqslant i \leqslant \nu$. Повторяя те же рассуждения для F^1 и X^1, мы получим F^2 и X^2 и т. д. Через конечное число шагов процесс оборвется, так как кратности — целые положительные числа и их конечное число. В итоге получим F' и X' с требуемыми свойствами.

Лемма доказана. □

Докажем теперь основную лемму.

1.5. Лемма. *Пусть $F \to C$ — стандартная G-поверхность с рациональным пучком и с $(\Omega_F \cdot \Omega_F) \leqslant 0$. Пусть $X \subset F$ — G-неприводимая, приведенная G-кривая, нормализация которой $X' \subset F'$ (см.* 0.5) *удовлетворяет условиям*

$$(X' \cdot X') \geqslant 0, \quad p_a(X') \leqslant 0, \tag{1.5.1}$$

тогда $X = F_t$ для некоторой G-точки $t \in C$.

Доказательство. Из теоремы 1.3 следует, что существуют целые числа a, b такие, что $X \sim aF_{\overline{t}} + b\omega_{\overline{F}}$. При этом $b \leqslant 0$, так как $0 \leqslant (X \cdot F_{\overline{t}}) = (aF_{\overline{t}} + b\omega_{\overline{F}} \cdot F_{\overline{t}}) = -2b$. Для доказательства леммы достаточно показать, что $b = 0$. Пусть $m_1, \ldots, m_s$ — кратности всех особых точек кривой. Предположим сначала, что $m_i \leqslant -b$, для каждого $1 \leqslant i \leqslant s$. Принимая во внимание 0.5, условия (1.5.1) можно переписать в виде

$$(X \cdot X) - \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{l_i} m_{ij}^2 = q_1, \quad p_a(X) - \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{l_i} \frac{m_{ij}(m_{ij}-1)}{2} = -q_2, \tag{1.5.2}$$

где $m_{ij} = \max\limits_j m_{ij} \leqslant -b$, $q_1 \geqslant 0$, $q_2 \geqslant 0$. Покажем, что при сделанных предположениях система (1.5.2) не разрешима в целых числах с $b < 0$. Вычитая первое уравнение системы из удвоенного второго, получаем (см. 0.2)

$$(X \cdot \omega_F) + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{l_i} m_{ij} + 2 + 2q_2 + q_1 = 0, \tag{1.5.3}$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{l_i} m_{ij} = -(X \cdot \omega_F) - 2 - 2q_2 - q_1.$$

Из первого уравнения следует очевидное неравенство

$$(X \cdot X) \leqslant -b\left(\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{l_i} m_{ij}\right) + q_1,$$

которое можно переписать с учетом предыдущего в виде

$$(X \cdot X) \leqslant b(X \cdot \omega_F) + 2b + 2bq_2 + (b+1)q_1. \tag{1.5.4}$$

Так как $b < 0$ и целое, то $(b+1) \leqslant 0$ и неравенство (1.5.4) влечет $(X \cdot X) < < b(X \cdot \omega_F)$. С другой стороны, из (1.5.3) следует $(X \cdot \omega_F) < 0$. Последние два неравенства исключают друг друга. Действительно, их можно переписать в форме

$$(aF_{\bar t} + b\omega_F \cdot aF_{\bar t} + b\omega_F) - b(aF_{\bar t} + b\omega_F \cdot \omega_F) =$$
$$= -4ab + b^2(\omega_F \cdot \omega_F) + 2ab - b^2(\omega_F \cdot \omega_F) = -2ab < 0,$$
$$(aF_{\bar t} + b\omega_F \cdot \omega_F) = -2a + b(\omega_F \cdot \omega_F) < 0,$$

откуда

$$a < 0, \quad b(\omega_F \cdot \omega_F) < 2a,$$

что противоречиво, так как $(\omega_F \cdot \omega_F) \leqslant 0$ и $b < 0$. Осталось разобрать случай, когда некоторое $m_i > -b$. Но на основании леммы 1.4 этот случай сводится к только что разобранному. Доказательство закончено. □

Лемма 1.5 позволяет установить следующий основной результат.

1.6. Теорема. *Пусть $F \to C$ и $F' \to C'$ — две стандартные G-поверхности с рациональным пучком и $(\Omega_F \cdot \Omega_F) \leqslant 0$. Тогда для всякого бирационального G-отображения $g\colon F' \to F$ существует G-изоморфизм $u\colon C' \to C$ такой, что диаграмма рациональных G-отображений*

$$\begin{tikzcd} F' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f'"] & F \arrow[d, "f"] \\ C' \arrow[r, "u"] & C \end{tikzcd}$$

коммутативна или, что то же самое, g индуцирует G-изоморфизм общих слоев морфизмов $u \circ f'$ и f.

Доказательство. Почти для всех G-точек $t \in C'$, кроме конечного числа, слои $F'_{t'}$ не вырождены и не содержат точек неопределенности отображения g. Обозначим через η' общую точку $F'_{t'}$. Покажем, что для кривой $X = \overline{g(\eta')} \subset F$ выполнены предположения леммы 1.5. Действительно, устраняя точки неопределенности g при помощи моноидальных G-преобразований (см. [1]), получим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} F'' \arrow[d, "h_1"'] \arrow[dr, "h_2"] & \\ F' \arrow[r, "g"] & F, \end{tikzcd}$$

где h_1 и h_2 — G-морфизмы, F'' — неособая G-поверхность. Кривая $X'' = = \overline{h_1^{-1}(\eta')} \subset F''$ является неособой G-кривой, G-изоморфной кривой $F'_{t'}$. Легко видеть, что для нее выполнены условия

$$(X'' \cdot X'') = 0, \quad p_a(X'') = p_a(F'_{t'}) \leqslant 0. \tag{1.6.1}$$

Морфизм h_2 можно провести через нормализацию кривой X (см. 0.4, так как X'' — неособая и $h_2(X'') = X$). Получаем диаграмму

$$\begin{tikzcd} F'' \arrow[r, "h_3"] \arrow[dr, "h_2"'] & F''' \arrow[d, "h"] \\ & F \end{tikzcd}$$

G-морфизмов. Здесь $h\colon F''' \to F$ — G-морфизм нормализации X. Так как $X''' \subset F'''$ и $X'' \subset F''$ — неособые, то $h_3|_{X''}\colon X'' \to X'''$ — G-изоморфизм. Поэтому $p_a(X'') = p_a(X''')$. Индекс самопересечения $(X''' \cdot X''')$ может разве только увеличиться (см. (0.5.2)). Итак, для нормализации X''' кривой X выполнены условия:

$$(X''' \cdot X''') \geqslant 0, \quad p_a(X''') \leqslant 0. \tag{1.6.2}$$

Поскольку $(\Omega_F \cdot \Omega_F) \leqslant 0$, из леммы 1.5 следует, что $X = F_t$ для некоторой G-точки $t \in C$. Таким образом, g индуцирует отображение $t' \to t$, которое из-за полноты и регулярности C' и C продолжается до G-изоморфизма $u\colon C' \to C$. При этом $u \circ f' = f \circ g$ там, где g определено. Теорема доказана. □

1.7. Следствие. *Обозначим через $\mathcal{S}$ группу бирациональных G-автоморфизмов F, через $\mathcal{R}$ — группу G-автоморфизмов общего слоя F_τ и через $\mathcal{J}$ — группу G-автоморфизмов базы C. Если $(\Omega_F \cdot \Omega_F) \leqslant 0$, то $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ и $\mathcal{J}$ связаны точной последовательностью*[*)]

$$1 \to \mathcal{R} \to \mathcal{S} \to \mathcal{J}.$$

Доказательство немедленно получается из теоремы 1.6, если взять $F' = F$ и $C' = C$.

Другим важным следствием теоремы 1.6 является следующий результат, относящийся к строению конечных подгрупп группы Кремоны Cr. Он оправдывает, в сущности, рассмотрение геометрического случая G-поверхностей.

Прежде чем сформулировать этот результат, докажем некоторое вспомогательное утверждение. Начнем с определения. Пусть K — конечно порожденное поле над полем k. Моделью поля K называется неприводимая, приведенная алгебраическая схема V над k вместе с фиксированным k-изоморфизмом полей K и $k(V)$, где $k(V)$ — как обычно, поле функций на V.

1.8. Лемма. *Пусть G — конечная группа автоморфизмов поля K над k. Предположим, что степень трансцендентности $K/k \leqslant 2$. Тогда существует неособая проективная модель V поля K, которая является G-схемой.*

Доказательство (предложено Маниным). Выберем какую-нибудь систему образующих $x_1, \ldots, x_r \in K$ и рассмотрим G-инвариантное подкольцо $A \subset K$, порожденное x_i, x_i^σ для всех $1 \leqslant i \leqslant r$ и $\sigma \in G$. Очевидно, что $\operatorname{Spec} A$ является некоторой моделью K и в то же время G-схемой, G действует на $\operatorname{Spec} A$ даже линейно. Рассмотрим ее проективизацию V', соответствующую погружению $\operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} k[x, x^\sigma]$. V' — снова G-схема, но, вообще говоря,

[*)] Образ $\mathcal{S}$ в $\mathcal{J}$ — конечная группа. Она переводит в себя множество точек $\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_r \in \overline{C}$, слои над которыми вырождены.

особая. В силу классических результатов, нормализацию и разрешение изолированных особенностей для V, если $\dim V' \leqslant 2$, можно делать согласованно с действием автоморфизмов; устранив особенности, мы получим проективную неособую G-схему V. Лемма доказана. □

1.9. Следствие. *Пусть $G \subset \mathrm{Cr}$ — конечная подгруппа группы автоморфизмов поля рациональных функций от двух независимых переменных $\overline{k}(x,y)$. Пусть $\mathbf{P}^2_{\overline{k}}$ — модель $\overline{k}(x,y)$ и G, действуя бирациональными автоморфизмами, сохраняет некоторый пучок рациональных кривых на $\mathbf{P}^2_{\overline{k}}$. Тогда существует модель F поля $\overline{k}(x,y)$, которая является стандартной G-поверхностью с рациональным пучком.*

Доказательство. Из леммы 1.8 следует существование неособой рациональной G-поверхности V, на которой есть G-инвариантный пучок рациональных кривых. Существование G-бирационального отображения $V \to F$ доказано в [18]. □

1.10. Теорема. *Пусть G_1, G_2 — конечные подгруппы группы Cr, каждая из которых изоморфна некоторой группе G. Предположим, что для G_1 и G_2 выполнены условия 1.9, и пусть $F^1 \xrightarrow{f^1} C^1$ и $F^2 \xrightarrow{f^2} C^2$ — соответствующие стандартные поверхности. Фиксируя изоморфизмы $G \to G_1$ и $G \to G_2$, рассмотрим их как G-поверхности. Если $(\Omega_{F^1} \cdot \Omega_{F^1}) \leqslant 0$, то G_1 и G_2 сопряжены в Cr тогда и только тогда, когда существует G-изоморфизм $u\colon C^1 \to C^2$ такой, что общие слои морфизмов $u \circ f^1$ и f^2 G-изоморфны.*

Эта теорема является, в сущности, ослабленным вариантом теоремы 1.6 для геометрического случая G-поверхностей. В действительности теорема 1.6 позволяет описать даже нормализаторы групп G_1 и G_2 в Cr (см. 1.7).

1.11. Сделаем теперь несколько замечаний по поводу G-поверхностей с $(\Omega_F \cdot \Omega_F) > 0$. Прежде всего, среди них существуют G-бирационально нетривиальные. Соответствующие примеры имеются в алгебраическом случае даже над конечным полем k (см. 3.7). Далее, лемма 1.5 без предположения $(\Omega_F \cdot \Omega_F) \leqslant 0$, вообще говоря, не верна. Уже на поверхности с $(\Omega_F \cdot \Omega_F) = 1$ априори возможно существование G-кривой $X \sim -F_{\overline{t}} - 4\omega_{\overline{F}}$, для которой $(X \cdot X) = 0$, $p_a(X) = 0$. Несложно строятся примеры поверхностей с двумя и более различными пучками рациональных кривых (см. п. 3). Над полем $k = \mathbf{Q}$ рациональных чисел (в алгебраическом случае) существует пример поверхности с двумя такими пучками, не переводящимися друг в друга бирациональными k-автоморфизмами. Как утверждает Комессатти в [6], такого положения дел не может быть, когда $k = \mathbf{R}$ — поле действительных чисел. Однако, его доказательство осталось неразобранным.

§ 2. Группа Брауэра

В этом пункте мы пользуемся когомологической техникой накрывающей топологии (см. [4]).

2.1. Начнем с изложения некоторых известных фактов о группе Брауэра поля и алгебраической кривой.

Пусть K — произвольное поле. Напомним (см., например, [5]), что $\operatorname{Br} K$ — группа Брауэра поля K — есть группа классов центральных простых алгебр над K с тензорным произведением в качестве групповой операции и с отношением эквивалентности — домножением на полную матричную алгебру. $\operatorname{Br} K$ допускает когомологическую интерпретацию. Она совпадает с двумерной группой когомологий Галуа $H^2(K, \overline{K}^*)$ с коэффициентами в мультипликативной группе $\overline{K}^*$ алгебраического замыкания $\overline{K}$ поля K. В свою очередь, $H^2(K, \overline{K}^*)$ в накрывающей топологии схемы $X = \operatorname{Spec} K$, может быть истолковано как $H^2(X, G_{m,X})$, где $G_{m,X}$ — пучок обратимых элементов структурного пучка O_X*). В общем случае, для любой предсхемы X группа $H^2(X, G_{m,X})$ называется когомологической группой Брауэра. Это обобщение принадлежит Гротендику (см. [10], I, II, III). Для одномерных и неособых двумерных нётеровых предсхем когомологическая группа Брауэра интерпретируется как группа классов алгебр Ацумая соответствующей предсхемы. Подробности см. в [10]. Для некоторых классов полей группа Брауэра вычислена. В основном это классические и очень глубокие результаты.

а) $K = F_q$ — конечное поле или, вообще, поле (C_1), т. е. такое поле, над которым любая форма $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ степени $d < n$ представляет нетривиальным образом нуль. В этом случае группа $\operatorname{Br} K = 0$ (см. [24]).

б) $K = \mathbf{R}$ — поле действительных чисел. $\operatorname{Br} \mathbf{R} = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, единственный ненулевой элемент в $\operatorname{Br} \mathbf{R}$ соответствует алгебре обычных кватернионов.

в) $K = K_{\mathfrak{P}}$ — локальное числовое поле. Из локальной теории полей классов (см. [24]) известно, что $\operatorname{Br} K_{\mathfrak{P}} = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ — рациональные числа.

г) K — глобальное числовое поле или поле алгебраических функций от одной переменной с конечным полем констант. Имеет место точная последовательность

$$0 \to \operatorname{Br} K \to \bigoplus_{\mathfrak{P}} \operatorname{Br} K_{\mathfrak{P}} \xrightarrow{\Sigma} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0,$$

где сумма берется по всем нормированиям поля K. Этот факт доказывается в теории полей классов (см. [3]). Ненулевые компоненты образа элемента из $\operatorname{Br} K$ в $\oplus \operatorname{Br} K_{\mathfrak{P}}$ называются локальными инвариантами соответствующего класса алгебр. Единственное соотношение между ними — сумма их равна нулю в $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ — носит название закона взаимности.

Пусть теперь K — поле алгебраических функций от одной переменной над совершенным полем констант k, X — неособая полная модель этого поля. Группа $\operatorname{Br} K$ связь ее с группой $\operatorname{Br} X$ изучена в статьях Д. К. Фаддеева [8, 9] и Гротендика [10]. Следуя [10], мы приводим здесь основные моменты этих исследований. Отметим прежде всего, что если k алгебраически замкнуто, то по теореме Тзена (см. [15]) K — поле (C_1) и, следовательно, $\operatorname{Br} K = 0$.

2.2. Теорема (Гротендик, [10], III, 2.1). *Обозначим через η общую точку кривой X, через $X^{(1)}$ — множество всех замкнутых точек $x \in X$.*

*) Следуя [10], мы пишем $G_{m,X}$ вместо $\mathfrak{G}_X^*$, чтобы подчеркнуть, что пучок рассматривается в накрывающей топологии.

Точна следующая последовательность

$$0 \to \operatorname{Br} X \to \operatorname{Br} K \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} H^1(x, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to H^3(X, G_{m,X}) \to H^3(\eta, G_{m,\eta}) \to \dots,$$

где, как обычно, $H^i(x, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ и $H^i(\eta, G_{m,\eta})$ можно отождествить с когомологиями Галуа соответственно $H^i(k(x), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ и $H^i(K, \overline{K}^*)$; $k(x)$ — поле вычетов точки x.

Доказательство. Для точной последовательности пучков

$$0 \to G_{m,X} \to \mathcal{K}_X^* \to \operatorname{Div}_X \to 0,$$

где $\mathcal{K}_X^*$ — пучок обратимых функций на X, а Div_X — пучок дивизоров Картье, пишем точную последовательность когомологий

$$\dots \to H^1(X, \operatorname{Div}_X) \to H^2(X, G_{m,X}) \to H^2(X, \mathcal{K}_X^*) \to$$
$$\to H^2(X, \operatorname{Div}_X) \to H^3(X, G_{m,X}) \to H^3(X, \mathcal{K}_X^*) \to \dots \quad (2.2.1)$$

Так как кривая X — неособая, пучок дивизоров Картье Div_X совпадает с пучком дивизоров Вейля, поэтому можно написать

$$\operatorname{Div}_X = \bigoplus_{x \in X^{(1)}} \mathbf{Z}_\tau,$$

где $\mathbf{Z}_x$ — постоянный пучок целых чисел над точкой x. Далее, для всех $i \geqslant 1$ имеет место изоморфизм

$$H^i(X, \mathcal{K}_X^*) \simeq H^i(\eta, G_{m,\eta}).$$

Это следует из спектральной последовательности Лере для морфизма вложения общей точки $i\colon \eta \to X$ и пучка $G_{m,\eta}$. В этой последовательности $E_2^{p,q} = H^p(X, R^q i_* G_{m,\eta}) \Rightarrow H^n(\eta, G_{m,\eta})$ высшие прямые образы $R^q i_* G_{m,\eta}$ для $q \geqslant 1$ все равны нулю. Чтобы в этом убедиться, достаточно сделать локальную проверку, т. е. вычислить слои пучка $R^q i_* G_{m,\eta}$ в геометрических точках $\overline{x} \in \overline{X}$. Из общего правила счета имеем

$$(R^q i_* G_{m,\eta})_{\overline{x}} = H^q(\operatorname{Spec} K \bigoplus_k \overline{\mathcal{O}}_{\overline{x}}, G_{m,\eta}) = H^q(\operatorname{Spec} K'_{\overline{x}}, G_{m,\eta}),$$

где $\overline{\mathcal{O}}_{\overline{x}}$ — строго гензелево локальное кольцо в точке $\overline{x}$, $K'_{\overline{x}}$ — его поле частных, содержащее сепарабельное замыкание поля k. Поскольку k совершенно, поле $k'_{\overline{x}}$ является полем (C_1) (см. [15]) и $H^q(\operatorname{Spec} K'_{\overline{x}}, G_{m,\eta}) \simeq H^q(K'_{\overline{x}}, \overline{K}'^*_{\overline{x}}) = 0$ для $i \geqslant 1$ (см. [23], II). Поэтому $R^q i_* G_{m,\eta} = 0$ при $q \geqslant 1$, и спектральная последовательность дает

$$H^i(X, i_* G_{m,\eta}) \simeq H^i(\eta, G_{m,\eta}), \quad i \geqslant 1.$$

Заметив, что $i_* G_{m,\eta} = \mathcal{K}_X^*$, можем переписать теперь последовательность (2.2.1) в виде

$$\dots \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} H^1(x, \mathbf{Z}) \to \operatorname{Br} X \to \operatorname{Br} K \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} H^2(x, \mathbf{Z}) \to$$
$$\to H^3(X, G_{m,X}) \to H^3(\eta, G_{m,\eta}) \to \dots$$

Наконец, здесь $H^1(x,\mathbf{Z}) \simeq H^1(k(x),\mathbf{Z}) = \operatorname{Hom}(G(\bar{k}(x)/k(x),\mathbf{Z}) = 0$, $H^2(x,\mathbf{Z}) \simeq$ $\simeq H^1(x,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, что получается из стандартной последовательности $0 \to \mathbf{Z} \to$ $\to \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0$ с учетом $H^i(x,\mathbf{Q}) = 0$, $i \geqslant 1$, и теорема доказана. □

2.3. Теорема ([10], 2.5). *Пусть* $\operatorname{Pic} X$ *обозначает, как обычно, группу классов обратимых пучков на* X (*или группу классов дивизоров*), G — *группа Галуа* $\bar{k}/k$. *Имеет место точная последовательность*

$$0 \to \operatorname{Pic} X \to (\operatorname{Pic} \overline{X})^G \to \operatorname{Br} k \to \operatorname{Br} X \to H^1(k, \operatorname{Pic} \overline{X}) \to$$
$$\to H^3(k,\bar{k}^*) \to H^3(X, G_{m,X}) \to H^2(k, \operatorname{Pic} \overline{X}) \to \dots \quad (2.3.1)$$

Доказательство. Эта последовательность получается из спектральной последовательности Лере для структурного морфизма $h\colon X \to \operatorname{Spec} k$ и пучка $G_{m,X}$

$$E_2^{p,q} = H^p(k, R^q h_* G_{m,\overline{X}}) \Rightarrow H^n(X, G_{m,X}).$$

Имеем $R^q h_* G_{m,X} = 0$ для $q \geqslant 2$. Действительно, слой этого пучка в геометрической точке равен $H^q(\overline{X}, G_{m,X})$. Из предыдущей теорем, заменяя k на $\bar{k}$ и принимая во внимание, что поле $K \otimes_k \bar{k}$ является полем (C_1), получаем требуемое. При этих условиях имеет место точная последовательность (см. [14], XV, 5.11)

$$0 \to H^1(k, h_* G_{m,\overline{X}}) \to H^1(X, G_{m,X}) \to H^0(k, H^1(\overline{X}, G_{m,X})) \to$$
$$\to H^2(k, h_* G_{m,X}) \to H^2(X, G_{m,X}) \to H^1(k, H'(\overline{X}, G_{m,\overline{X}})) \to$$
$$\to H^3(k, h_* G_{m,\overline{X}}) \to \dots$$

Здесь $h_* G_{m,\overline{X}} = \bar{k}^*$, так как X неприводима; $H^1(k,\bar{k}^*) = 0$ по теореме Гильберта «90», $H^2(X, G_{m,X}) = \operatorname{Pic} X$ — ее обобщение в накрывающей топологии. В результате соответствующих замен получается доказательство теоремы. □

Точная последовательность в теореме 2.2 является аналогом последовательности 2.1 г) в числовом случае. Роль локальных инвариантов играют элементы из $H^1(x,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. $\operatorname{Br} X$ состоит в таком случае из «локально тривиальных» элементов в $\operatorname{Br} K$, т. е. из таких элементов, для которых все локальные инварианты равны нулю. Обе эти последовательности совпадают, если k — конечное поле.

Действительно, из теоремы 2.3 имеем $\operatorname{Br} X \simeq H^1(k, \operatorname{Pic} \overline{X})$, так как $H^i(k,\bar{k}^*) = 0$, $i \geqslant 1$. Далее, из точной последовательности

$$0 \to \operatorname{Pic}^0 \overline{X} \to \operatorname{Pic} \overline{X} \to \mathbf{Z} \to 0,$$

где $\operatorname{Pic}^0 \overline{X}$ — якобиево многообразие кривой X, следует, что

$$H^1(k, \operatorname{Pic}^0 \overline{X}) \simeq H^1(k, \operatorname{Pic} \overline{X}).$$

Но $H^i(k, \operatorname{Pic}^0 \overline{X}) = 0$, $i \neq 0$, по теореме Ленга. Итак, $\operatorname{Br} X = 0$. Снова из теоремы 2.3 и из той же точной последовательности получаем

$$H^3(X, G_{m,X}) \simeq H^2(k, \operatorname{Pic} \overline{X}) \simeq H^2(k, \mathbf{Z}).$$

Осталось заметить, что для конечного поля

$$H^2(k, \mathbf{Z}) \simeq H^1(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Q}/\mathbf{Z}.$$

Для наших приложений важен случай, когда X — кривая рода нуль. Из теорем 2.2 и 2.3 вытекает

2.4. Следствие. *Пусть X — неособая кривая рода нуль. Тогда*

а) *если X имеет k-точку, то* $\operatorname{Br} X = \operatorname{Br} k$,

б) *если X не имеет k-точки, то имеет место точная последовательность*

$$0 \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \to \operatorname{Br} k \to \operatorname{Br} X \to 0.$$

В обоих случаях алгебры из $\operatorname{Br} k$ *с точностью до «числовых алгебр», т. е.* $\operatorname{Br} k$, *однозначно определяются набором своих локальных инвариантов.*

Доказательство. Так как $\operatorname{Pic} X \simeq \mathbf{Z}$, то в последовательности (2.3.1)

$$H^1(k, \operatorname{Pic} \overline{X}) \simeq H^1(k, \mathbf{Z}) = 0.$$

Пусть d — общий наибольший делитель степеней дивизоров на X. Тогда, как легко видеть, $\operatorname{Pic} X/(\operatorname{Pic} \overline{X})^G = \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$. Для кривой рода нуль $d = 1$, если есть k-точка, и $d = 2$ — в противном случае. Это доказывает а) и б). Заметим, что в случае б) нетривиальная алгебра, «распадающаяся» в $\operatorname{Br} X$, соответствует в смысле изоморфизма Витта самой кривой X. □

Возвратимся к рациональным поверхностям. Следующая теорема, аналогичная теореме 2.3, устанавливает связь между двумя бирациональными инвариантами рациональной поверхности F, группой $\operatorname{Br} F$ и $H^1(k, \operatorname{Pic} \overline{F})$. Бирациональная инвариантность $\operatorname{Br} F$ доказана в [10], инвариантность $H^1(k, \operatorname{Pic} \overline{F})$ — в [16].

2.5. Теорема. *Пусть F — неособая рациональная поверхность над совершенным полем k. Точна следующая последовательность*

$$0 \to \operatorname{Pic} F \to (\operatorname{Pic} \overline{F})^G \to \operatorname{Br} k \to \operatorname{Br} F \to H^1(k, \operatorname{Pic} \overline{F}) \to H^3(k, \overline{k}^*),$$

где G — группа Галуа $\overline{k}/k$.

Доказательство. Так же, как и в 2.3, эту последовательность порождает спектральная последовательность Лере

$$E_2^{p,q} = H^p(k, R^q h_* G_{m,\overline{F}}) \Rightarrow H^n(F, G_{m,F})$$

для морфизма $h\colon F \to \operatorname{Spec} k$ и пучка $G_{m,F}$. Покажем, что $R^2 h_* G_{m,\overline{F}} = 0$. Слой этого пучка в геометрической точке равен $H^2(\overline{F}, G_{m,\overline{F}}) = \operatorname{Br} \overline{F}$.

В силу бирациональной инвариантности группы Брауэра, для ее вычисления поверхность $\overline{F}$ можно считать линейчатой (см. 0.7). Пользуясь теоремой об изоморфизме группы Брауэра и группы Тейта–Шафаревича якобиевого многообразия общего слоя (см. [10], III, 4.6), получаем $\operatorname{Br} \overline{F} = 0$, и, следовательно,

$$R^2 h_* G_{m,\overline{F}} = 0.$$

На основании результатов предложений 5.7, 5.9 гл. XV в [14], можно написать точную последовательность

$$0 \to H^1(k, h_*G_{m,\overline{F}}) \to H^1(F, G_{m,F}) \to H^0(k, R^1h_*G_{m,\overline{F}}) \to$$
$$\to H^2(k, h_*G_{m,\overline{F}}) \to H^2(F, G_{m,F}) \to H^1(k, R^1h_*G_{m,\overline{F}}) \to H^3(k, h_*G_{m,\overline{F}}).$$

Так как F неприводима, то $h_*G_{m,\overline{F}}$ как G-модуль совпадает с $\overline{k}^*$.

Изоморфны также G-модули

$$R^1h_*G_{m,\overline{F}} \simeq H^1(\overline{F}, G_{m,\overline{F}}) \simeq \operatorname{Pic}\overline{F}.$$

Сделав соответствующие подстановки и приняв во внимание, что $H^1(k, \overline{k}^*) = 0$, получаем утверждение теоремы. □

Пусть снова F — стандартная G-поверхность с рациональным пучком, $f\colon F \to C$ — структурный морфизм. Мы рассматриваем здесь и далее только алгебраический случай и пишем везде приставку k- вместо G-. Следующий факт, касающийся вычисления $H^1(k, \operatorname{Pic}\overline{F})$, является основным в этом пункте.

2.6. Теорема. *Пусть $t_1, \dots, t_s \in C$ — все замкнутые точки, слои F_{t_i} над которыми вырождены. Пусть k_1/k — нормальное расширение поля k с группой Галуа G, над которым определены все компоненты вырожденных геометрических слоев. Тогда $H^1(k, \operatorname{Pic}\overline{F}) \simeq H^1(G, \operatorname{Pic} F \otimes k_1)$, и имеет место следующая точная последовательность групп*:

$$0 \to H^1(G, \operatorname{Pic} F \otimes k_1) \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \to \prod_{i=1}^{s} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \to \operatorname{Hom}(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to \dots$$

Доказательство. То, что $H^1(k, \operatorname{Pic}\overline{F}) \simeq H^1(G, \operatorname{Pic} F \otimes k_1)$, есть немедленное следствие точной последовательности когомологий групп (см. [24])

$$0 \to H^1(G, \operatorname{Pic} F \otimes k_1) \xrightarrow{\text{inf}} H^1(k, \operatorname{Pic}\overline{F}) \xrightarrow{\text{res}} H^1(H, \operatorname{Pic}\overline{F});$$

здесь H — группа Галуа $\overline{k}/k_1$, она действует тривиально на свободный $\mathbf{Z}$-модуль $\operatorname{Pic}\overline{F}$, поэтому $H^1(H, \operatorname{Pic}\overline{F}) = 0$. Для вычисления $H^1(G, \operatorname{Pic} F \otimes k_1)$ рассмотрим гомоморфизм ограничения $\operatorname{Pic} F \otimes k_1$ на общий слой морфизма $f \otimes k_1 : F \otimes k_1 \to C \otimes k_1$

$$0 \to \operatorname{Pic}^0 F \otimes k_1 \to \operatorname{Pic} F \otimes k_1 \to \operatorname{Pic} F_\tau \otimes k_1 \to 0;$$

отображение $\operatorname{Pic} F \otimes k_1 \to \operatorname{Pic} F_\tau \otimes k_1 \simeq \mathbf{Z}$ эпиморфно потому, что над k_1 существует сечение $C \otimes k_1 \to F \otimes k_1$: $\operatorname{Pic}^0 F \otimes k_1$ обозначает ядро этого отображения, оно порождено компонентами слоев $F_{t_i} \otimes k_1$. В соответствующей точной последовательности когомологий

$$0 \to \operatorname{Pic}^0 F \to \operatorname{Pic} F \to \mathbf{Z} \to H^1(G, \operatorname{Pic}^0 F \otimes k_1) \to$$
$$\to H^1(G, \operatorname{Pic} F \otimes k_1) \to H^1(G, \mathbf{Z}) = 0$$

$\operatorname{Pic} F \simeq \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ (см. 1.3), $\operatorname{Pic}^0 F \simeq \mathbf{Z}$ и порожден классом $F_{\bar{t}}$. Образ $\operatorname{Pic} F$ при гомоморфизме $\operatorname{Pic} F \to \mathbf{Z}$ совпадаете подгруппой $2\mathbf{Z} \subset \mathbf{Z}$. Действительно, он порожден образом канонического класса (см. 1.3), степень ограничения которого на общий слой равна -2. Итак,

$$0 \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \to H^1(G, \operatorname{Pic}^0 F \otimes k_1) \to H^1(G, \operatorname{Pic} F \otimes k_1) \to 0, \tag{2.6.1}$$

Достаточно поэтому вычислить $H^1(G, \operatorname{Pic}^0 F \otimes k_1)$. Для этого рассмотрим еще одну точную последовательность

$$0 \to \operatorname{Pic} C \otimes k_1 \to \operatorname{Pic}^0 F \otimes k_1 \to P \to 0,$$

где через P обозначен фактор $\operatorname{Pic}^0 F \otimes k_1 / \operatorname{Pic} C \otimes k_1$. Так как $\operatorname{Pic} C \otimes k_1 \simeq \mathbf{Z}$, то в соответствующей когомологической последовательности

$$\begin{aligned} 0 \to \operatorname{Pic} C \to \operatorname{Pic}^0 F \to H^0(G, P) \to H^1(G, \mathbf{Z}) \to \\ \to H^1(G, \operatorname{Pic}^0 F \otimes k_1) \to H^1(G, P) \to H^2(G, \mathbf{Z}) \to \dots \end{aligned} \tag{2.6.2}$$

имеем

$$H^1(G, \operatorname{Pic} C \otimes k_1) = H^2(G, \mathbf{Z}) = 0, \quad H^2(G, \mathbf{Z}) \simeq \operatorname{Hom}(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}),$$

G-модуль P порожден компонентами вырожденных слоев $F_{t_i} \otimes k_1$. Из описания их строения (см. 0.9) видим, что $P = \prod\limits_{\bar{t} \in \bigcup\limits_i t_i} \mathbf{Z}$, где $\bar{t}$ пробегает все геометрические точки с центром в замкнутых точках t_i. Действие G на $\mathbf{Z}$ не тривиальное, существуют элементы $\sigma \in G$, переводящие $+1$ в -1. Имеем

$$H^q(G, P) = H^q\Big(G, \prod_{\bar{t} \in \bigcup\limits_i t_i} \mathbf{Z}\Big) = \prod_{i=1}^{s} H^q\Big(G, \prod_{t \in t_i} \mathbf{Z}\Big)_0.$$

Пусть H_i для каждой точки t_i обозначает подгруппу разложения некоторой геометрической точки $\bar{t} \in t_i$. По лемме Шапиро о когомологиях индуцированных модулей (см. [23]), получаем

$$H^1\Big(G, \prod_{\bar{t} \in t_i} \mathbf{Z}\Big) \simeq H^1(H_i, \mathbf{Z}),$$

где H_i также действует нетривиально на модуль $\mathbf{Z}$. Покажем, что $H^1(H_i, \mathbf{Z}) \simeq$ $\simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Действительно, пусть H_i^0 — наибольшая подгруппа в H_i, действующая тождественно на $\mathbf{Z}$. Тогда можно написать точную последовательность

$$0 \to H_i^0 \to H_i \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \to 0,$$

так как $H^1(H_i^0, \mathbf{Z}) = 0$, то последовательность инфляции и ограничения дает

$$H^1(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) \simeq H^1(H_i, \mathbf{Z}),$$

Нелегко непосредственно проверить, что $H^1(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. В итоге, $H^1(G, P) \simeq \prod\limits_{i=1}^{s} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. С учетом вышеизложенного из точной последовательности (2.6.2) можно получить точную последовательность

$$0 \to H^1(G, \operatorname{Pic}^0 F \otimes k_1) \to \prod_{i=1}^{s} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \to \operatorname{Hom}(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to \\ \to H^2(G, \operatorname{Pic}^0 F \otimes k_1) \to H^2(G, P) \to \dots \quad (2.6.3)$$

Поскольку $H^1(G, \operatorname{Pic}^0 F \otimes k_1)$ — группа 2-кручений, расширение (2.6.1) тривиально. Следовательно,

$$H^1(G, \operatorname{Pic}^0 F \otimes k_1) \simeq H^1(G, \operatorname{Pic} F \otimes k_1) \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}.$$

Это завершает доказательство теоремы, □

2.7. Следствие. *Предположим, что для данной поверхности F существует конечное циклическое расширение k_1/k с группой Галуа G, для которого выполнены все условия теоремы* 2.6. *Тогда $H^1(k, \operatorname{Pic} \overline{F}) \simeq (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{s-2}$. В частности, это всегда так, если k — конечное поле или поле действительных чисел.*

Доказательство. В циклической группе $\operatorname{Hom}(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \simeq G$ существует единственная подгруппа порядка 2 (так как G необходимо имеет четный порядок). Достаточно поэтому показать, что в точной последовательности (2.6.3) гомоморфизм $\operatorname{Hom}(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to H^2(G, \operatorname{Pic}^0 F \otimes k_1)$ неинъективен. Из-за периодичности когомологий циклической группы двумерные группы можно заменить нульмерными когомологиями Тейта. Все сводится, следовательно, к проверке неинъективности гомоморфизма

$$\widehat{H}^0(G, \operatorname{Pic} C \otimes k_1) \to \widehat{H}^0(G, \operatorname{Pic}^0 F \otimes k_1).$$

Имеем $\widehat{H}^0(G, \operatorname{Pic} C \otimes k_1) \simeq \mathbf{Z}/[G]\mathbf{Z}$ и $\widehat{H}^0(G, \operatorname{Pic}^0 F \otimes k_1) \simeq \mathbf{Z}/\operatorname{Norm} \operatorname{Pic}^0 F \otimes k_1$. Доказательство следует из того, что класс $F_{\overline{t}}$ с кратностью $\frac{1}{2}[G]$ является нормой в G-модуле $\operatorname{Pic}^0 F \otimes k_1$. □

2.8. Теорема 2.6 доставляет примеры вычислений группы Брауэра поверхности с рациональным пучком для полей k когомологической размерности $\operatorname{cd} \leqslant 1$ (например полей (C_1)); поскольку в этом случае $H^2(k, \overline{k}^*) = H^3(k, \overline{k}^*) = 0$, то из теоремы 2.5 $\operatorname{Br} F \simeq H^1(k, \operatorname{Pic} \overline{F})$. Для всех числовых полей (локальных и глобальных) $H^3(k, \overline{k}^*) = 0$, и группа $\operatorname{Br} F$ вычисляется только с точностью до числовых алгебр.

§ 3. Примеры

Ниже рассматриваются вопросы, относящиеся к более конкретному, чем в п. 1, описанию классов бирациональной эквивалентности k-поверхностей с пучком рациональных кривых для некоторых полей k.

Докажем сначала несколько фактов общего характера, в которых изложен более явный, чем в работах [16] и [18], способ приведения изучаемых поверхностей к стандартным формам.

3.1. Лемма. *Пусть V — произвольная рациональная поверхность с пучком рациональных кривых над полем k характеристики, не равной 2. Бирациональными преобразованиями над k V может быть приведена к одной из поверхностей V_{I} или V_{II}, заданных следующим образом: V_{I} — в $\mathbf{P}^1_k \times \mathbf{P}^2_k$ уравнением вида*

$$\Phi_0(t_0,t_1)x_0^2 + \Phi_1(t_0,t_1)x_1^2 + \Phi_2(t_0,t_1)x_2^2 = 0,$$

где $(t_0 : t_1) \times (x_0 : x_1 : x_2)$ — координаты в $\mathbf{P}^1_k \times \mathbf{P}^2_k$, $\Phi_i(t_0,t_1)$, $i = 0,1,2$, — формы одинаковой степени с коэффициентами из k, не имеющие общего делителя. Проекция на первый множитель $V_{\mathrm{I}} \to \mathbf{P}^1_k$ определяет пучок плоских кривых второго порядка, V_{II} в $\mathbf{P}^2_k \times \mathbf{P}^2_k$ задается системой уравнений

$$\Psi_0(t_0,t_1,t_2)x_0^2 + \Psi_1(t_0,t_1,t_2)x_1^2 + \Psi_2(t_0,t_1,t_2)x_2^2 = 0,$$
$$a_0t_0^2 + a_1t_1^2 + a_2t_2^2 = 0,$$

где $(t_0 : t_1 : t_2) \times (x_0 : x_1 : x_2)$ — координаты в $\mathbf{P}^2_k \times \mathbf{P}^2_k$, $\Psi_i(t_0,t_1,t_2)$ — формы одинаковой степени с коэффициентами из k, также не имеющие общего делителя, $a_i \in k$ и $a_0a_1a_2 \neq 0$. Пучок плоских кривых второго порядка на V_{II} параметризуется не имеющей k-точки коникой $Q\colon a_0t_0^2 + a_1t_1^2 + a_2t_2^2 = 0$ также через проекцию на первый множитель.

Доказательство. Пучок рациональных кривых на V задает рациональное k-отображение $g\colon V \to C$, где C и слой V_τ над общей точкой $\tau \in C$ — геометрически неприводимые рациональные кривые. В силу хорошо известного факта из теории рациональных кривых мы можем заменить бирационально над k кривую C либо прямой $\mathbf{P}^1_k$, либо коникой Q без k-точки. Получим, соответственно, рациональные k-отображения $g_1\colon V \to \mathbf{P}^1_k$ и $g_2\colon V \to Q$. На основании того же факта можно найти поверхность вида V_{I} (соответственно V_{II}) такую, чтобы общий слой $V_{\mathrm{I},\tau}$ (соответственно $V_{\mathrm{II},\tau}$) был бирационально эквивалентен над полем вычетов $k(\tau)$ общему слою отображения g_1 (соответственно g_2). Но бирациональный изоморфизм общих слоев продолжается до бирационального $(k,\mathbf{P}^1_k)$- (соответственно (k,Q)-)-отображения поверхностей V и V_{I} (соответственно V_{II}). Лемма доказана. □

Поверхности вида V_{I} имеющие k-сечение $\mathbf{P}^1_k \to V_{\mathrm{I}}$, очевидно, бирационально тривиальны над k. К ним, например, относятся линейчатые поверхности с базой $\mathbf{P}^1_k$. Среди поверхностей вида V_{II} бирационально тривиальных нет, на них нет даже k-точек.

3.2. Теорема. *Существует бирациональное $(k,\mathbf{P}^1_k)$- (соответственно (k,Q)-)-отображение*

$$\begin{tikzcd} V_{\mathrm{I}} \arrow[rr] \arrow[dr] & & F_{\mathrm{I}} \arrow[dl] \\ & \mathbf{P}^1_k & \end{tikzcd} \quad (\textit{соответственно} \quad \begin{tikzcd} V_{\mathrm{II}} \arrow[rr] \arrow[dr] & & F_{\mathrm{II}} \arrow[dl] \\ & Q & \end{tikzcd}),$$

где $F_{\mathrm{I}} \to \mathbf{P}^1_k$ (*соответственно* $F_{\mathrm{II}} \to Q$) — *стандартная* k-*поверхность с рациональным пучком.*

Доказательство. Разберем отдельно поверхности V_{I} и V_{II}. Начнем с V_{I}. Разрешим прежде всего особенности. Убеждаемся непосредственно, например, выписывая явно систему частных производных

$$\begin{cases} 2\Phi_0(t_0,t_1)x_0 = 0, \\ 2\Phi_1(t_0,t_1)x_1 = 0, \\ 2\Phi_2(t_0,t_1)x_2 = 0, \\ \Phi'_{0,t_0}x_0^2 + \Phi'_{1,t_0}x_1^2 + \Phi'_{2,t_0}x_2^2 + = 0, \\ \Phi'_{0,t_1}x_0^2 + \Phi'_{1,t_1}x_1^2 + \Phi'_{2,t_1}x_2^2 + = 0, \end{cases} \tag{3.2.1}$$

что особенности лежат в слоях под теми точками $t \in \mathbf{P}^1_k$, в которых либо $\Phi_i(t) = 0$ (для некоторого $i = 0,1,2$) имеет кратные корни, либо Φ_i, Φ_j, $i \neq j$, имеют общий нуль. Рассмотрим стандартное покрытие базы $\mathbf{P}^1_k$ двумя аффинными прямыми $\mathbf{A}^1_0$ и $\mathbf{A}^1_1$. Устраним сначала особенности на отдельных частях поверхности V_{I}, именно, на ограничениях ее на $\mathbf{A}^1_0 \times \mathbf{P}^2_k$ и $\mathbf{A}^1_1 \times \mathbf{P}^2_k$, после чего склеим их с помощью некоторого естественного отображения. Из-за симметричности достаточно рассматривать, например, часть в $\mathbf{A}^1_0 \times \mathbf{P}^1_k$. Она задается уравнением вида

$$P_0\Big(\frac{t_1}{t_0}\Big)x_0^2 + P_1\Big(\frac{t_1}{t_0}\Big)x_1^2 + P_2\Big(\frac{t_1}{t_0}\Big)x_2^2 = 0, \tag{3.2.2}$$

где P_i $(i = 0,1,2)$ — многочлены от $\dfrac{t_1}{t_0}$. $(k, \mathbf{A}^1_0)$-преобразованием вида

$$\Big(\frac{t_1}{t_0}; x_0 : x_1 : x_2\Big) \to \Big(\frac{t_1}{t_0}; f_0\Big(\frac{t_1}{t_0}\Big)x_0 : f_1\Big(\frac{t_1}{t_0}\Big)x_1 : f_2\Big(\frac{t_1}{t_0}\Big)x_2\Big),$$

где $f_i\Big(\dfrac{t_1}{t_0}\Big)$ — специальным образом подобранные рациональные функции, освобождаемся от кратных и общих множителей у $P_i\Big(\dfrac{t_1}{t_0}\Big)$ и тем самым от особенностей. Склейка очевидна. Получившаяся в результате неособая k-поверхность снабжена морфизмом на $\mathbf{P}^1_k$.

Вырожденные слои его могут быть двух сортов:

1) пара пересекающихся в одной точке прямых, каждая из которых определена над полем вычетов соответствующей точки базы;

2) пара не распадающихся над полем вычетов прямых.

Нетрудно убедиться, что каждая компонента вырожденного слоя 1) является исключительной кривой первого рода и в силу критерия Кастельнуово может быть стянута. Мы укажем сейчас явный способ этого стягивания. Освободившись таким образом от вырождений 1), мы получим стандартную k-поверхность с рациональным пучком.

Снова можно ограничиться рассмотрением локального куска в $\mathbf{A}^1_0 \times \mathbf{P}^1_k$, предполагая его уже неособым; т. е. он задан уравнением вида (3.2.2), где

$P_i\left(\frac{t_1}{t_0}\right)$, $i = 0, 1, 2$, попарно взаимно просты и не содержат кратных делителей. Правая часть этого уравнения представляет собой квадратичную форму от трех переменных x_0, x_1, x_2 над кольцом (главных идеалов) $k\left[\frac{t_1}{t_0}\right]$. Обозначим ее через Φ. Дискриминант ее $d(\Phi) = P_0P_1P_2$. Слои над теми точками $t \in \mathbf{A}^1_0$, которые соответствуют неприводимым многочленам $P \in k\left[\frac{t_1}{t_0}\right]$, не входящим в дискриминант $d(\Phi)$, не вырождены, так как редукция Φ по P определяет невырожденную конику над полем вычетов $k(t) = k\left[\frac{t_1}{t_0}\right]/P$. Наша цель — освободиться от множителей, входящих в $d(\Phi)$, редукция по которым определяет распадающуюся вырожденную форму. Рассмотрим один из таких неприводимых многочленов $P/d(\Phi)$. Можно написать

$$\Phi = L_1L_2 + P\Phi',$$

где L_1, L_2 — некоторые линейные формы над $k\left[\frac{t_1}{t_0}\right]$, Φ' — снова квадратичная форма.

В выборе форм L_1, L_2 есть некоторый произвол. Мы воспользуемся им для того, чтобы сделать равным 1 один из отличных от нуля коэффициентов, например, формы L_1. Не теряя общности, будем считать, что таким является коэффициент при x_0. Невырожденным линейным преобразованием вида

$$L_1 = Px_0', \quad x_1 = x_1', \quad x_2 = x_2',$$

определитель которого равен P, приведем форму Φ к виду $PL_2'x_0' + P\Phi''$.

Сокращая на P, получим форму Φ_1 с дискриминантом $d(\Phi_1) = \dfrac{d(\Phi)}{P}$.

Не представляет труда проверить, что построенное преобразование $\Phi \to \Phi_1$ является стягиванием одной из компонент вырожденного слоя над точкой P. Это стягивание можно согласованно со склейкой продолжить целиком на всю поверхность. Продолжая в случае необходимости этот процесс, в конце концов освободимся от всех вырожденных слоев типа 1) и получим требуемое.

Случай поверхностей V_{II} в идейном отношении не отличается от предыдущего. Особенности здесь лежат в слоях над кратными точками пересечения кривой $\Psi_0 \cdot \Psi_1 \cdot \Psi_2 = 0$ с коникой Q. Пусть $\{\mathbf{A}^2_0, \mathbf{A}^2_1, \mathbf{A}^2_2\}$ — покрытие $\mathbf{P}^2_k$ аффинными плоскостями, положим $Q_i = Q \cap \mathbf{A}^2_i$, $i = 0, 1, 2$. Ограничение V_{II} на $Q_i \times \mathbf{P}^2_k$ имеет вид

$$\varphi_0x_0^2 + \varphi_1x_1^2 + \varphi_2x_2^2 = 0,$$

где φ_i — регулярные функции на Q_i. Каждую точку $t_0 \in Q_i$, над которой лежат особенности, окружим достаточно малой окрестностью $U_{i,0}$ такой, чтобы она не содержала других таких точек и кольцо регулярных функций $\Gamma(U_{i,0})$ на ней было бы кольцом главных идеалов. Последнее возможно, так как Q — неособая кривая. Пользуясь предыдущими рассуждениями, мы можем устранить особенности отдельно на части поверхности в $U_{i,0} \times \mathbf{P}^2_k$, после чего вклеить ее в $V_{\mathrm{II}} \setminus V_{\mathrm{II},t_0}$. Аналогичным образом можно освободиться от вырожденных слоев типа 1). Доказательство закончено. $\square$

3.3. З а м е ч а н и е. Способ, которым мы пользовались в теореме для устранения вырождений 1), применим также в случае, когда кольцо $k\left[\frac{t_1}{t_0}\right]$ заменено кольцом $\mathbf{Z}$ целых чисел. Таким образом можно получить доказательство самого принципиального места в теореме Минковского–Хассе — случая форм от трех переменных. Действительно, если редукции по всем $p \neq 2$, входящим в дискриминант, распадаются, то эти p можно «угнать» из дискриминанта. Случай $p = 2$ разбирается отдельно. В результате получится целочисленная форма с дискриминантом, равным ± 1. Существует конечное число таких форм, и неопределенные среди них всегда нетривиально представляют нуль, что легко проверить.

3.4. Каждый вырожденный слой F_t стандартной k-поверхности с рациональным пучком, как мы установили при доказательстве теоремы 3.3, представляет собой вырожденную конику, распадающуюся над квадратичным расширением k_1 поля вычетов $k(t)$. Поле k_1 определяет гомоморфизм группы Галуа $G(\bar{k}/k(t))$ в $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, ядром которого является подгруппа $H \subset G$, соответствующая k_1 в смысле теории Галуа.

Так определенные элементы из $H^1(k(t), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ назовем л о к а л ь н ы м и и н в а р и а н т а м и поверхности с рациональным пучком.

3.5. Т е о р е м а. *Локальные инварианты поверхности с рациональным пучком совпадают с локальными инвариантами алгебры кватернионов* (см. 2.3)*, соответствующей общему слою пучка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По заданной поверхности эту алгебру легко восстановить. Для этого достаточно ограничиться локальным рассмотрением относительно базы, так как ее общая точка принадлежит каждому открытому множеству на ней. Пусть U — какое-нибудь открытое множество базы. Как было установлено в 3.2, часть поверхности, лежащую над U, можно задать в $U \times \mathbf{P}^2_k$ уравнением

$$\varphi_0(u)x_0^2 + \varphi_1(u)x_1^2 + \varphi_2(u)x_2^2 = 0,$$

где $\varphi_i(u)$ — регулярные функции на U. Соответствующая алгебра кватернионов A в таком случае определяется базисом $(1, i, j, ij)$ с таблицей умножения

$$i^2 = \frac{\varphi_1}{\varphi_0}, \quad j^2 = \frac{\varphi_2}{\varphi_0}, \quad ij = -ji.$$

Пусть t — некоторая точка базы. Предположим, что U выбрано так, что $t \in U$. Инвариант A не тривиален в точке t тогда и только тогда, когда локальную алгебру $A \otimes \widehat{k(\tau)}$, где $\widehat{k(\tau)} = k(\tau) \otimes \widehat{\mathcal{O}}_t$ — пополнение*) в точке t, τ — общая точка базы, можно задать таблицей умножения $i^2 = \alpha$, $j^2 = \beta\pi$, $ij = -ji$, где π — униформизирующий элемент в точке t, $\alpha, \beta \in k(t)$, $\sqrt{\alpha} \notin k(t)$ (см. [13, 8]). Значение инварианта определяется так же, как и в 3.4, квадратичным расширением $k_1 = k(t)(\sqrt{\alpha})$. Следовательно, в точке t с нетривиальным инвариантом, по крайней мере, одна из функций $\varphi_i(u)$, $i = 0, 1, 2$, обращается в нуль, значит, слой F_t вырожден и распадается над квадратичным рас-

*) Вместо пополнения $\widehat{\mathfrak{O}}_t$ локального кольца $\mathfrak{O}_t$ можно взять также его гензелизацию.

ширением k_1 поля k. Обратное также проверяется простыми вычислениями. Теорема доказана. □

Сопоставляя этот факт с результатами 2.4 получаем

3.6. Следствие. *Если для поля k выполнено условие* $\operatorname{Br} k = 0$, *то общие слои стандартных k-поверхностей $F \to C$ и $F' \to C$ изоморфны над $k(\tau)$, $\tau \in C$, тогда и только тогда, когда совпадают их локальные инварианты. В общем случае совпадение инвариантов является только необходимым условием: соответствующие алгебры могут отличаться на кватернионную алгебру над k.*

Разберем несколько конкретных случаев.

3.7. $k = [q]$ — конечное поле из q элементов. Предположим, что характеристика $p \neq 2$. Так как любая невырожденная коника Q над k имеет точку, то могут существовать только поверхности типа V_{I}. Для описания множества классов их k-бирациональной эквивалентности необходимо знать: во-первых, описание множества всех кватернионных алгебр над полем $k(T)$ — рациональных функций от одной переменной; во-вторых, характер их склейки при естественном отображении на стандартные k-поверхности. Ответ на первый вопрос известен из теории полей классов (см. [3]). Все кватернионные алгебры в этом случае совпадают с элементами второго порядка в группе Брауэра поля $k(T)$. Группа $\operatorname{Br}_2 k(T)$, состоящая из таких элементов, определяется из точной последовательности

$$0 \to \operatorname{Br}_2 k(T) \to \bigoplus_{t \in \mathbf{P}^1_k} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \to 0, \tag{3.7.1}$$

суммирование распространено на все замкнутые точки $t \in \mathbf{P}^1_k$, $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ — группа значений локальных инвариантов. Для элементов из $\operatorname{Br}_2 k(T)$ локальные инварианты связаны единственным соотношением — сумма их равна нулю в $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Ответ на второй вопрос дает теорема 1.6 вместе с 3.6 для алгебр, у которых степень дивизора точек с нетривиальными инвариантами не меньше 8 (см. 1.2). В этом случае склейка происходит только за счет автоморфизмов базы $\mathbf{P}^1_k$. Группа автоморфизмов $\mathrm{PGL}_2(k)$ действует на кватернионные алгебры перестановкой их локальных инвариантов. Множество орбит (относительно этого действия) на множестве кватернионов со степенью дивизора нетривиальных элементов, не меньшей 8, есть, таким образом, пространство модулей относительно k-бирациональной эквивалентности стандартных форм с рациональным пучком и с $(\Omega_F \cdot \Omega_F) \leqslant 0$.

Среди оставшегося конечного числа стандартных поверхностей с $(\Omega_F \cdot \Omega_F) > 0$ (или со степенью дивизора нетривиальных инвариантов, меньшей 8) есть k-бирационально нетривиальные. На основании вычислений $H^1(k, \operatorname{Pic} \overline{F})$ в 2.7 нетривиальной будет всякая поверхность с числом инвариантов, большим 2. Но из (3.7.1) следует, что существуют кватернионные алгебры, а значит, и поверхности с любым набором локальных инвариантов в четном числе. Можно еще добавить, что все стандартные поверхности с рациональным пучком локально могут быть заданы уравнением $\Phi(x_0, x_1, x_2) = 0$, где Φ — квадратичная форма от трех переменных над $k[T]$, в дискриминант $d(\Phi)$ которой

входят неприводимые многочлены P только с нетривиальным значением инварианта (см. 3.3).

З а м е ч а н и е. Изложенное выше описание множества классов k-бирациональной эквивалентности поверхностей с рациональным пучком и с $(\Omega_F \cdot \Omega_F) \leqslant 0$ дает, в действительности, вычисление множества $H^1(k, \mathrm{Cr})$ — классов k-бирациональной эквивалентности всех рациональных поверхностей, кроме конечного числа. В самом деле, для оставшихся поверхностей, к которым относятся также и все поверхности дель Пеццо, $0 < (\Omega_F \cdot \Omega_F) \leqslant 9$, таким образом, они зависят от конечного числа параметров.

3.8. $k = \mathbf{R}$ — поле действительных чисел. Ни одна из стандартных поверхностей типа F_{II} в этом случае не может иметь нетривиальные инварианты, так как поле вычетов каждой точки $t \in Q$, $Q\colon t_0^2 + t_1^2 + t_2^2 = 0$, изоморфно полю комплексных чисел $\mathbf{C}$. Поэтому они составляют только два класса k-бирациональной эквивалентности $\mathbf{P}_k^1 \times Q$ и $Q \times Q$.

Все поверхности вида V_{I} приводятся, как показано в [13], к виду

$$x_0^2 + x_1^2 = \pm \prod_{i=1}^{2m} \Big(\frac{t_1}{t_0} - a_i\Big) x_2^2; \qquad (3.8.1)$$
$$a_i \in \mathbf{R}, \quad a_i \neq a_j, \quad m \geqslant 1, \quad x_0^2 + x_2^2 = \pm x_2^2.$$

Точки a_i, $1 \leqslant i \leqslant 2m$, и только они обладают нетривиальными инвариантами. Если $2m \geqslant 8$, то на основании 1.6 и 3.6 склеиваются только поверхности из одной и той же орбиты относительно действия $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{R})$. Таким образом, множество классов бирациональной эквивалентности таких поверхностей с $(\Omega_F \cdot \Omega_F) \leqslant 0$ состоит из двух серий непрерывных семейств, каждое из которых описывается $2m - 3$, $m \geqslant 4$, вещественными параметрами. Это было установлено также Комессатти в [6].

3.9. $k = \mathbf{Q}$ — поле рациональных чисел. В этом случае существуют поверхности обоих типов V_{I} и V_{II}. Описание множества всех коник Q (или алгебр кватернионов над $\mathbf{Q}$) известно также из теории полей классов. Оно изоморфно подгруппе $\mathrm{Br}_2\,\mathbf{Q} \subset \mathrm{Br}\,\mathbf{Q}$ и определяется из точной последовательности

$$0 \to \mathrm{Br}_2\,\mathbf{Q} \to \bigoplus_{\nu} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \xrightarrow{\Sigma} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \to 0,$$

где сумма берется по всем нормированиям поля $\mathbf{Q}$. Информацию о строении кватернионных алгебр над функциональным полем $k(Q)$ нам дает 2.4. Однако, мы не можем получить точного описания множества всех таких алгебр: оно, вообще говоря, не совпадает с подгруппой $\mathrm{Br}_2\,k(Q) \subset \mathrm{Br}\,k(Q)$.

Как любезно сообщил автору Д. К. Фаддеев, к этому существуют некоторые препятствия. Так, например, для того чтобы алгебра A над полем $\mathbf{Q}(T)$ — рациональных функций с инвариантами $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ в точках $t_1 = 0$, $t_2 = \infty$ и $\mathbf{Q}(\sqrt{b})$ в точках $t_3 = 1$, $t_4 = c$, $a, b, c \in \mathbf{Q}$, была алгеброй кватернионов, необходимо, чтобы формы

$$ax_1^2 - cx_2^2 + bcx_3^2 - bx_4^2, \quad by_1^2 - cy_2^2 + acy_2^2 - ay_4^2$$

представляли нуль в $\mathbf{Q}$.

3.10. Приведем теперь пример поверхности с двумя различными пучками рациональных кривых.

Рассмотрим поверхность V_{II}, заданную уравнением

$$t_0^2x_0^2 - t_1t_0x_1^2 + (t_0+t_1)(2t_0+t_1)x_2^2 = 0.$$

Один из пучков на V_{I} параметризован, как обычно, прямой $\mathbf{P}^1$ с координатами (t_0, t_1). Ему соответствуют локальные инварианты: $\mathbf{Q}(\sqrt{-2})$ в точке $\dfrac{t_1}{t_0} = -2$, $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$ — в $\dfrac{t_1}{t_0} = -1$, $\mathbf{Q}(\sqrt{-2})$ — в $t_1 = 0$ и $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$ — в $t_0 = 0$. Поверхность V_{I} бирационально не тривиальна даже над полем $\mathbf{R} \supset \mathbf{Q}$, так как $H^1(\mathbf{R}, \operatorname{Pic} V) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Для соответствующей стандартной поверхности F_{I} имеем $(\Omega_{F_{\mathrm{I}}} \cdot \Omega_{F_{\mathrm{I}}}) = 4$. Другой пучок на V_{I} параметризован $\dfrac{x_1}{x_2}$. Его инварианты сосредоточены в нулях многочлена $\left[\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^2 - 3\right]^2 - 8$. Значение их равно $K(\sqrt{-1})$, где K — поле вычетов этого многочлена. Эти два пучка не могут быть переведены друг в друга никаким бирациональным k-преобразованием поверхности V_{I}, так как их инварианты существенно различны. Отметим, что если рассматривать V_{I} над нолем $\mathbf{R}$, т. е. $V_{\mathrm{I}} \times \mathbf{R}$, то эти два пучка с помощью некоторого $\mathbf{R}$-изоморфизма баз $\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}} \to \mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$ переходят в изоморфные.

§ 4. Унирациональность некоторых поверхностей с рациональным пучком

4.1. Напомним, что поверхность V над k называется у н и р а ц и о н а л ь н о й, если существует рациональное отображение конечной степени $u\colon \mathbf{P}^2 \to V$. Если $k = \bar{k}$ алгебраически замкнуто, то из критерия рациональности Кастельнуово (см. [2]) следует, что унирациональность поверхности влечет бирациональную эквивалентность ее плоскости (обратное тривиально). Над незамкнутым полем это не так. Существующие примеры относятся к поверхностям дель Пеццо (см. [18]). Ниже мы показываем, что такие примеры есть и среди поверхностей с пучком рациональных кривых (и даже с $(\Omega_F \cdot \Omega_F) \leqslant 0$).

Отметим, что необходимым условием унирациональности является, конечно, наличие k-точки на V; так что в нашем случае выпадают из рассмотрения все поверхности вида V_{II} (см. 3.1).

4.2. Т е о р е м а. *Пусть $F \to \mathbf{P}^1_k$ — стандартная поверхность с рациональным пучком. Следующие условия эквивалентны*:

а) *F унирациональна*;

б) *существует рациональная, геометрически неприводимая и приведенная k-кривая $X \subset F$ такая, что $(X \cdot F_t) \neq 0$ и X имеет неособую k-точку*;

в) *существует конечное накрытие $C \to \mathbf{P}^1_k$, где C — k-кривая рода нуль с k-точкой такая, что поле функций на ней $k(C)$ является полем разложения для кватернионной алгебры $A(F_\tau)$, соответствующей общему слою F_τ.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из а) $\Rightarrow$ б). Действительно, при отображении $u\colon \mathbf{P}^2 \to F$ за X можно взять образ любой прямой, трансверсальной к слою F_t. Обратно, из б) $\Rightarrow$ а). Это получается поднятием базы $\mathbf{P}^1$ до X. Именно,

пусть $F' = F \times_{\mathbf{P}^1} X$ — расслоенное произведение. Каноническая проекция $F' \to X$, очевидно, имеет k-сечение $X \to F'$. Так как X имеет неособую k-точку, то существует k-бирациональное отображение $X \to \mathbf{P}^1_k$. Следовательно, F' k-бирационально эквивалентна $\mathbf{P}^2_k$. Эквивалентность б) $\Leftrightarrow$ в) следует из теоремы соответствия Витта между рациональными кривыми и кватернионными алгебрами. Доказательство теоремы закончено. □

4.3. Следствие. *Если на F есть k-точка, не являющаяся точкой пересечения компонент вырожденного слоя, и на F существуют два трансверсальных пучка рациональных кривых, то она унирациональна.*

4.4. Следствие. *Пусть $k = \mathbf{R}$ — поле действительных чисел. Тогда все поверхности с рациональным пучком, имеющие k-точку, унирациональны. Степень отображения равна* 2.

Доказательство. Любая такая поверхность приводится k-бирациональными преобразованиями к виду (см. 3.3)

$$x_0^2 + x_1^2 = \pm \prod_{i=1}^{2m} \Big(\frac{t_1}{t_0} - a_i \Big); \quad a_i \in \mathbf{R}, \quad m \geqslant 1.$$

В результате замены базы $\mathbf{P}^1$ на C, где C задается уравнением — $at_0^2 + t_0 t_1 - t_2^2 = 0$, получаем

$$F' \colon x_0^2 + x_1^2 = \pm \prod_{i=1}^{2m} \left(\frac{t_2^2}{t_0^2} + a - a_i \right).$$

Пусть среди a_i, $1 \leqslant i \leqslant 2m$, скажем, a_1 — наибольшее. Если a выбрать так, что $a_1 > a > a_i$, $2 \leqslant i \leqslant 2m$, то F' можно привести к $F'' \colon x_0^2 + x_1^2 = \pm \left(\frac{t_2^2}{t_0^2} - a_1 + a \right)$. Но F'' бирационально тривиально, что совсем легко проверить. □

4.5. Сформулируем в заключение несколько нерешенных задач. Прежде всего остается открытым вопрос о бирациональной классификации стандартных G-поверхностей с рациональным пучком и с $(\Omega_F \cdot \Omega_F) > 0$. Как видно на простых примерах, группа бирациональных G-автоморфизмов на них должна быть более богатой, чем на поверхностях с $(\Omega_F \cdot \Omega_F) \leqslant 0$. Возможно, что для некоторых значений $(\Omega_F \cdot \Omega_F) > 0$ эта группа действует транзитивно на множестве всех пучков рациональных кривых на F*). Как показывает пример 3.10, это заведомо не так для поверхностей с $(\Omega_F \cdot \Omega_F) = 4$. Изучение группы бирациональных G-автоморфизмов представляет, разумеется, и самостоятельный интерес.

Далее, что можно сказать об унирациональности поверхностей над произвольным полем? Из теоремы 4.2 мы можем вывести еще, что существуют унирациональные поверхности со сколь угодно большим числом локальных

*) Примечание при корректуре. После того как эта работа была сдана в печать, автору удалось получить новые результаты, относящиеся к G-поверхностям с $(\Omega_F \cdot \Omega_F) > 0$. Справедливо, в частности, высказанное выше предположение для поверхностей с $(\Omega_F \cdot \Omega_F) = 1$ и с $(\Omega_F \cdot \Omega_F) = 2$. Полностью изучены поверхности с $(\Omega_F \cdot \Omega_F) \geqslant 5$.

инвариантов, но нам неизвестно ни одного примера не унирациональной поверхности, имеющей k-точку.

Наконец, почти совсем не изучена арифметика этого класса поверхностей над числовыми полями.

Литература

[1] A b h y a n k a r S. Ramification theoretic methods in algebraic geometry. — Princeton, 1959.

[2] Алгебраические поверхности // Труды МИАН СССР. — 1965. — Т. 75.

[3] A r t i n E., T a t e J. Class field theory. — Princeton, 1961.

[4] A r t i n M. Grothendieck topologies. Lecture notes. — Harvard, 1962.

[5] Б у р б а к и Н. Алгебра. Модули, кольца, формы. — М.: Наука, 1966.

[6] C o m e s s a t t i A. Fondamenti per la geometria sopra le superficie razionali dal punto di vista reale // Math. Ann. — 1912. — V. 73. — P. 1–72.

[7] E n r i q u e s F. Sulle irrazionalità da cui può farsi dipendere la risoluzione d'un' equazione algebrica $f(x, y, z) = 0$ con funzione razionali di due parametri // Math. Ann. — 1897. — V. 49. — P. 1–23.

[8] Ф а д д е е в Д. К. Простые алгебры над полем алгебраических функций от одной переменной // Труды МИАН СССР. — 1951. — Т. 38. — С. 321–344.

[9] Ф а д д е е в Д. К. К теории алгебр над полем алгебраических функций одной переменной // Вест. Ленингр. ун-та. — 1957. — Т. 7. — С. 45–51.

[10] G r o t h e n d i e c k A. Le groupe de Brauer, I, II, III // Séminaire Bourbaki. — 1965. — V. 290; 1965. — V. 297; 1966.

[11] G r o t h e n d i e c k A. Éléments de géométrie algébrique. I, II. Publ. Math. IHES. — 1960. — V. 4; 1961. — V. 8.

[12] H i r o n a k a H. On the arithmetic genera and the effective genera of algebraic curves // Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto. — 1957. — V. 30. — P. 177–195.

[13] И с к о в с к и х В. А. О бирациональных формах рациональных поверхностей // Известия АН СССР, серия матем. — 1965. — Т. 29. — С. 1417–1433.

[14] К а р т а н А., Э й л е н б е р г С. Гомологическая алгебра. — М.: ИЛ, 1960.

[15] L a n g S. On quasi-algebraic closure // Ann. Math. — 1952. — V. 55. — P. 373–390.

[16] М а н и н Ю. И. Рациональные поверхности над совершенными полями. I // Publ. Math. IHES. — 1966. — V. 30.

[17] М а н и н Ю. И. Рациональные G-поверхности // ДАН СССР. — 1967. — Т. 175, № 1. — С. 28–30.

[18] М а н и н Ю. И. Рациональные поверхности над совершенными полями. II // Матем. сб. — 1967. — Т. 72(114). — С. 161–192.

[19] Н а г а т а М. Рациональные поверхности. I, II // Математика. — 1964. — Т. 8:1. — С. 55–71; 1964. — Т. 8:4. — С. 75–94.

[20] M u m f o r d D. Lectures on curves on an algebraic surface. — Harvard, 1964.

[21] S e g r e B. On the rational solutions of homogeneous cubic equations in four variables // Math. notae. — 1951. — V. 11. — P. 1–68.

[22] S e g r e B. The non-singular cubic surfaces. — Oxford Univ. Press, 1942.

[23] S e r r e J. P. Cohomologie galoisienne. — Springer, 1994. — (Lecture Notes in Math.; V. 5).

[24] S e r r e J. P. Corps locaux. — Paris, 1962. — (Act. Sci. Ind.; № 1296).

[25] W i m a n A. Zur Theorie der endlichen Gruppen von birationalen Transformationen in der Ebene // Math. Ann. — 1897. — V. 48. — P. 195–240.

[26] W i t t E. Über ein Gegenbeispiel zum Normen-Satz // Math. Z. — 1934. — V. 39. — P. 462–467.

[27] S h a f a r e v i c h I. R. Lectures on minimal models and birational transformations of the two dimensional schemes. — Bombay, 1966.

Рациональные поверхности с пучком рациональных кривых и с положительным квадратом канонического класса

Введение

В этой работе продолжается бирациональная классификация рациональных G-поверхностей с лучком рациональных кривых, начатая в работе автора [6]. Понятие рациональной G-поверхности было введено в работе [1] в связи с изучением следующих двух классических задач:

а) бирациональная классификация рациональных поверхностей над незамкнутым полем k,

б) классификация с точностью до сопряженности конечных подгрупп группы Кремоны бирациональных автоморфизмов проективной плоскости $\mathbf{P}^2_{\bar{k}}$ над алгебраически замкнутым полем $\bar{k}$.

Как заметил Манин, обе эти задачи могут быть решены единым методом и сводятся к описанию классов бирационально G-эквивалентных рациональных G-поверхностей; в первом случае группа G — это группа Галуа алгебраического замыкания основного поля, во втором — некоторая конечная подгруппа группы Кремоны. Согласно результатам работ [2, 3] все такие G-поверхности (поле констант k предполагается совершенным) приводятся к двум типам стандартных форм: G-поверхности дель Пеццо и G-поверхности с пучком рациональных кривых*) Мы занимаемся изучением последних.

Напомним, что основной численной характеристикой стандартных G-поверхностей с рациональным пучком F служит индекс самопересечения $(\omega_F \cdot \omega_F)$ канонического класса поверхности F. Целое число $n = (\omega_F \cdot \omega_F)$ может принимать значения в интервале $-\infty < n \leqslant 8$. В работе [6] доказана классификационная теорема (теорема 1.6) для стандартных форм с $(\omega_F \cdot \omega_F) \leqslant 0$. В этой статье мы изучаем эти формы для оставшихся значений $0 < (\omega_F \cdot \omega_F) \leqslant 8$, кроме $(\omega_F \cdot \omega_F) = 4$. Оказывается, что, в отличие от случая $(\omega_F \cdot \omega_F) \leqslant 0$, G-инвариантный пучок рациональных кривых на

Матем. сборник. — 1970. — Т. 83(125), № 1(9). — С. 90–119.

*) В работе [3] предполагается, что группа G в геометрическом случае абелева. Можно показать, однако, что это предположение излишне.

таких поверхностях, вообще говоря, не единственен, но, как правило, все такие пучки на заданной поверхности G-бирационально эквивалентны, т. е. переводятся друг в друга бирациональными G-автоморфизмами поверхности. Точнее, основные результаты работы, относящиеся к G-поверхностям с рациональным пучком, можно сформулировать в виде следующих утверждений.

Теорема 1. *Каждый G-инвариантный пучок рациональных кривых на стандартной G-поверхности F с рациональным пучком и с $(\omega_F \cdot \omega_F) = 1, 2$ и 3 бирационально G-эквивалентен стандартному.*

Теорема 2. *При $(\omega_F \cdot \omega_F) = 5$ и 7, G-поверхность F бирационально тривиальна, при $(\omega_F \cdot \omega_F) = 6$ существует G-морфизм $F \to F'$, где F' — неособая G-поверхность такая, что F' изоморфна квадрике в $\mathbf{P}^2_{\bar{k}}$, при $(\omega_F \cdot \omega_F) = 8$ F бирационально G-эквивалентна G-поверхности вида $C \times C'$; где C и C' — некоторые G-кривые рода нуль.*

Доказательство теоремы 1 составляет содержание первых двух параграфов. Из нее, в частности, следует, что произвольная стандартная G-поверхность F' тогда и только тогда бирационально G-эквивалентна стандартной G-поверхности F с $(\omega_F \cdot \omega_F) = 1, 2$ и 3, когда ее стандартный пучок бирационально G-эквивалентен стандартному пучку поверхности F. Теорема 2 доказывается в последнем параграфе.

В § 3 изучаются стандартные G-поверхности дель Пеццо степени 4. Их отношение к теме данной статьи обусловлено тем фактом, что при наличии на них G-точек степени 1 они обладают G-инвариантными пучками рациональных кривых. Поскольку стандартные поверхности дель Пеццо степени 4 — это единственный не полностью изученный в [2] и [3] случай среди всех невырожденных стандартных поверхностей дель Пеццо, мы сочли уместным рассмотреть здесь и поверхности, не имеющие G-точек степени 1. Сформулируем основные результаты § 3.

Теорема 3. а) *Стандартная невырожденная G-поверхность дель Пеццо степени 4 V бирационально G-эквивалентна стандартной G-поверхности с рациональным пучком тогда и только тогда, когда на ней существует G-точка степени 1.*

б) *Для любой G-поверхности V' с $(\omega_{V'} \cdot \omega_{V'}) \geqslant 4$, антиканоническая линейная система которой не имеет базисных точек и неподвижных компонент, и любого бирационального G-отображения $h\colon V \to V'$, где V — стандартная G-поверхность дель Пеццо без G-точек степени 1, существует такой бирациональный G-автоморфизм $g\colon V \to V$, что отображение $h \cdot g\colon V \to V'$ является G-изоморфизмом.*

В действительности, если на V есть G-точка, то она бирационально G-эквивалентна стандартной поверхности с рациональным пучком и с $(\omega_F \cdot \omega_F) = 3$. Следовательно, бирациональные классы таких поверхностей V описываются теоремой 1, в частности, V бирационально нетривиальна.

Стандартные формы с рациональным пучком и с $(\omega_F \cdot \omega_F) = 4$ будут изучены в следующей публикации.

Автор благодарит Ю. И. Манина за ряд полезных замечаний.

§ 0. Предварительные результаты

0.1. Напомним (см. [3, 6]), что *G-поверхностью* называется алгебраическая поверхность V над полем k вместе с группой G, действующей на $V \underset{k}{\otimes} \overline{k}$, где $\overline{k}$ — алгебраическое замыкание поля k. При этом имеется в виду один из следующих двух случаев:

а) алгебраический случай: поле k совершенно, $G = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ — группа Галуа, действующая на $V \otimes \overline{k}$ через второй множитель,

б) геометрический случай: поле k алгебраически замкнуто, G — произвольная конечная группа, действующая на $V \otimes \overline{k}$ посредством некоторого гомоморфизма $G \to \mathrm{Aut}_k V$.

Обычным образом определяются G-морфизм, рациональное G-отображение, G-бирациональная эквивалентность G-поверхностей. Без особых уточнений мы будем пользоваться также понятиями G-кривой, G-точки, G-неприводимой G-кривой и др. (при желании их определения можно найти в статьях [3] и [6]).

Для любого G-объекта X через $\overline{X}$ мы будем обозначать объект $X \underset{k}{\otimes} \overline{k}$ над $\overline{k}$, в геометрическом случае это означает, что объект X рассматривается без G-структуры,

Группа G действует естественным образом на поле рациональных функций $k(\overline{V})$, на группу дивизоров (Картье или Вейля) $D(\overline{V})$, а также на группу Пикара $\mathrm{Pic}\,\overline{V}$. Пусть поверхность V проективна и неособа и ω_V — канонический класс на V, тогда, очевидно, $\omega_{\overline{V}} \in (\mathrm{Pic}\,\overline{V})^G$ и, более того, $\omega_V \in \mathrm{Pic}\,V$ (в геометрическом случае $\mathrm{Pic}\,V$ обозначает подгруппу группы $\mathrm{Pic}\,\overline{V}$, порожденную G-инвариантными дивизорами). Отметим также, что индекс пересечения $(X \cdot Y)$, $X, Y \in \mathrm{Pic}\,\overline{V}$, инвариантен относительно действия группы G на $\mathrm{Pic}\,\overline{V}$.

0.2. При доказательстве основных теорем мы пользуемся бирациональной техникой на алгебраических поверхностях в том виде, в каком она изложена в работах [3] и [4]. Для удобства ссылок воспроизведем здесь ее беглое описание.

Каждой проективной неособой поверхности $\overline{V}$ над алгебраически замкнутым полем $\overline{k}$ функториально (относительно бирациональных отображений $\overline{V}' \to \overline{V}$) сопоставляется абелева группа $Z(\overline{V})$, снабженная следующими структурами.

1) Если V — G-поверхность, то группа $Z(\overline{V})$ снабжена структурой G-модуля.

2) Существует G-инвариантное билинейное симметрическое спаривание («индекс пересечения») $Z(\overline{V}) \times Z(\overline{V}) \to \mathbf{Z}$.

3) Определен канонический G-гомоморфизм $\Omega\colon Z(\overline{Z}) \to \mathbf{Z}$ — «индекс пересечения с каноническим классом».

4) Задано совместимое с действием группы G упорядочение — выделен конус положительных элементов $Z^+(\overline{V}) \subset Z(\overline{V})$.

5) Выделено G-инвариантное подмножество $Z^{++}(\overline{V}) \subset Z^+(\overline{V})$.

Группа $Z(\overline{V})$, снабженная указанными структурами, является основным G-бирациональным инвариантом G-поверхности V: всякое бирациональное G-отображение $f\colon V' \to V$ индуцирует изоморфизм $f^*\colon Z(\overline{V}) \to Z(\overline{V}')$, сохраняющий все описанные структуры.

0.3. Мы ограничимся кратким указанием на неформальное (и неинвариантное) определение группы $Z(\overline{V})$ в терминах поверхности $\overline{V}$, которое в сущности и используется на практике. Воспользуемся существованием G-изоморфизма G-модулей см. [3], предложение (1.13))

$$Z^0(\overline{V}) \oplus \operatorname{Pic}\overline{V} \simeq Z(\overline{V}), \qquad (*)$$

который сводит нашу задачу к определению G-модуля $Z^0(\overline{V})$. Рассмотрим множество $\bigcup\limits_{\overline{V}'} \overline{V}'(k)$, где объединение берется по всем бирациональным G-морфизмам $\overline{V}' \to \overline{V}$, а $\overline{V}'(k)$ обозначает множество замкнутых точек поверхности $\overline{V}'$. Введем в множестве $\bigcup \overline{V}'(k)$ отношение эквивалентности R: точки $\overline{x}' \in \overline{V}'(k)$ и $\overline{x}'' \in \overline{V}''(k)$ будем считать эквивалентными, если бирациональное G-отображение $\overline{V}' \to \overline{V}''$, канонически определяемое морфизмами $\overline{V}' \to \overline{V}$ и $\overline{V}'' \to \overline{V}$, является локальным изоморфизмом некоторых окрестностей точек $\overline{x}'$ и $\overline{x}''$.

Положим $Z^0(\overline{V}) = \bigoplus\limits_{x \in \mathcal{E}(\overline{V})}$, где $\mathcal{E}(\overline{V}) = \Big(\bigcup\limits_{\overline{V}'} \overline{V}'(\overline{k}')\Big)/R$. Тогда при отождествлении $Z(\overline{V}) = \operatorname{Pic}\overline{V} \oplus Z^0(\overline{V})$ структуры 1)–5) на группе $Z(\overline{V})$ задаются следующим образом.

1′) Действие группы G на $\operatorname{Pic}\overline{V}$ совпадает с обычным, а действие на $Z^0(\overline{V})$ определяется ее действием на множествах $\overline{V}'(\overline{k})$.

2′) Индекс пересечения $(z \cdot z')$ на $\operatorname{Pic}\overline{V} \oplus Z^0(\overline{V})$ определяется так: если $z, z' \in \operatorname{Pic}\overline{V}$, то $(z \cdot z')$ совпадает с обычным индексом пересечения на группе $\operatorname{Pic}\overline{V}$; если $z \in \operatorname{Pic}\overline{V}$, а $z' \in Z^0(\overline{V})$, то $(z \cdot z') = 0$; наконец $(\overline{x} \cdot \overline{x}) = -1$, $(\overline{x} \cdot \overline{x}') = 0$, если $\overline{x}, \overline{x}' \in \mathcal{E}(\overline{V})$, $\overline{x}' \neq \overline{x}$.

3′) Гомоморфизм $\Omega\colon \operatorname{Pic}\overline{V} \oplus Z^0(\overline{V}) \to \mathbf{Z}$ на первом слагаемом совпадает с индексом пересечения с каноническим классом $\omega_{\overline{V}}$, а на группе $Z^0(\overline{V})$ задается формулой $\Omega(\overline{x}) = -1$, где $\overline{x} \in \mathcal{E}(\overline{V})$ — любой канонический образующий элемент группы $Z^0(\overline{V})$.

4′) Произвольный элемент $z = X - \sum\limits_{i=1}^{r} n_i \overline{x}_i \in Z(\overline{V})$, где $X \in \operatorname{Pic}\overline{V}$, $\overline{x}_i \in \mathcal{E}(\overline{V})$, $n_i \in \mathbf{Z}$, тогда и только тогда принадлежит $Z^+(\overline{V})$, когда существует такой бирациональный морфизм $\overline{f}\colon \overline{V}' \to \overline{V}$, что $f^*(z) = X' \in \operatorname{Pic}\overline{V}'$, и полная линейная система $|X'|$ не пуста.

5′) В предыдущих обозначениях, $z \in Z^{++}(\overline{V})$ тогда и только тогда, когда размерность линейной системы $|X'|$ больше нуля и $|X'|$ не имеет базисных точек и неподвижных компонент.

0.4. Известно (см. [3], 0.4), что каждое бирациональное G-отображение $f\colon V' \to V$ можно представить в виде $f = f_2 \cdot f_1^{-1}$, где f_1, f_2 — G-морфизмы, каждый из которых разлагается в композицию моноидальных G-преобразова-

ний с центрами в G-точках. Поэтому для построения изоморфизма

$$f^*\colon \operatorname{Pic}\overline{V} \oplus Z^0(\overline{V}) \to Z(\overline{V}')$$

достаточно рассмотреть случай, когда f является моноидальным G-преобразованием с центром в G-точке $x \in V$. В этом случае изоморфизм f^* определяется следующим образом: на группе $\operatorname{Pic}\overline{V}$ он совпадает с естественным мономорфизмом («взятием обратного образа») $f^*\colon \operatorname{Pic}\overline{V} \to \operatorname{Pic}\overline{V}'$; $f^*(\overline{x}) = [f^{-1}(\overline{x})] \in \operatorname{Pic}\overline{V}'$, где $[f^{-1}(\overline{x})]$ обозначает класс обратимого пучка $\mathcal{O}(f^{-1}(\overline{x}))$ в группе $\operatorname{Pic}\overline{V}'$; $f^*(\overline{x}') = f^{-1}(\overline{x}')$ для любого $\overline{x}' \in \mathcal{E}(\overline{V})$, $\overline{x}' \notin x \otimes \overline{k} = x$.

З а м е ч а н и е. Здесь и далее мы отождествляем, если в этом есть необходимость, точки $\overline{x} \in \bigcup \overline{V}'(\overline{k})$ с их классами в $\mathcal{E}(\overline{V})$.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые необходимые условия принадлежности элемента $z \in Z(V)$ множеству $Z^{++}(\overline{V})$. Прежде чем их сформулировать, заметим, что на множестве $\mathcal{E}(\overline{V})$ задано частичное упорядочение, согласованное с действием группы G. Оно индуцировано следующим упорядочением на множестве $\bigcup \overline{V}'(\overline{k})$; $\overline{x}' \geqslant \overline{x}''$, где $\overline{x}' \in \overline{V}'(\overline{k})$, $\overline{x}'' \in \overline{V}''(\overline{k})$, если естественное бирациональное отображение $g\colon \overline{V}' \to \overline{V}''$, определяемое морфизмами $\overline{V}' \to \overline{V}$ и $\overline{V}'' \to \overline{V}$, определено в точке $\overline{x}'$ и $g(\overline{x}') = \overline{x}''$.

0.5. Л е м м а. *Если элемент* $X - \sum\limits_{i=1}^{r} n_i\overline{x}_i = z \in Z(\overline{V})$ *принадлежит множеству* $Z^{++}(\overline{V})$, *то он обладает следующими свойствами*:

а) *линейная система* $|X|$ *имеет размерность больше нуля и не имеет неподвижных компонент*;

б) $n_i \geqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant r$;

в) *если* $x_i \geqslant \overline{x}_j$, *то* $n_i \leqslant n_j$

(см. [3], 1.18).

0.6. Приведем теперь несколько фактов из теории рациональных G-поверхностей, которыми мы будем пользоваться.

О п р е д е л е н и е 1. Проективная неособая рациональная G-поверхность V называется *G-поверхностью с пучком рациональных кривых*, если существует такой G-инвариантный элемент $z \in Z^{++}(V)$, что $(z \cdot z) = 0$ и $\Omega(z) = -2$.

Отметим сразу же, что группа $\mathcal{B}(V)$ бирациональных G-автоморфизмов поверхности V, действуя па группу $Z(\overline{V})$ (с сохранением всех структур), переводит пучки рациональных кривых снова в пучки рациональных кривых.

О п р е д е л е н и е 2. Проективная неособая рациональная G-поверхность F называется *стандартной формой с рациональным пучком*, если существуют такая G-кривая рода нуль C, такой G-морфизм $\pi\colon F \to C$, что каждый геометрический слой $F_{\overline{t}}$, $\overline{t} \in C$, является кривой рода нуль и в слоях нет G-инвариантных стягиваемых кривых.

Очевидно, что на стандартной поверхности F существует по крайней мере один пучок рациональных кривых — это класс $z = [F_{\overline{t}}] \in (\operatorname{Pic}\overline{F})^G \subset Z(\overline{F})$ геометрического слоя $F_{\overline{t}}$ стандартного морфизма π. Заметим, что G-морфизм

π классом $z = [F_{\overline{t}}]$ определяется не однозначно: он определен с точностью до G-изоморфизма базы $\varphi\colon C \to C'$.

0.7. Доказательства следующих свойств стандартных G-поверхностей с рациональным пучком имеются в работах [6] и [3].

1) Каждая рациональная G-поверхность с пучком рациональных кривых бирациональными G-преобразованиями приводится к стандартной форме*).

2) Группа $(\operatorname{Pic}\overline{F})^G$ на стандартной G-поверхности F является свободным $\mathbf{Z}$-модулем ранга 2, порожденным классом $[F_{\overline{t}}]$ геометрического слоя $F_{\overline{t}}$ стандартного морфизма и каноническим классом $\omega_{\overline{F}}$; подгруппа $\operatorname{Pic} F$ в в группе $(\operatorname{Pic}\overline{F})^G$ имеет конечный индекс.

3) Каждый вырожденный геометрический слой $F_{\overline{t}}$ стандартного морфизма $\pi\colon F \to C$ состоит из двух пересекающихся в одной точке неприводимых исключительных кривых первого рода $\overline{Z}_{\overline{t}}$ и $\overline{Z}'_{\overline{t}}$, принадлежащих, разумеется, одной G-орбите. Число r геометрических вырожденных слоев и числа $\operatorname{rg}\operatorname{Pic}\overline{F}$ и $(\omega_F \cdot \omega_F)$ связаны следующими формулами:

$$r + 2 = \operatorname{rg}\operatorname{Pic}\overline{F},$$
$$(\omega_F \cdot \omega_F) + \operatorname{rg}\operatorname{Pic}\overline{F} = 10 \quad \text{(формула Нётера)}.$$

4) Для произвольной стандартной G-поверхности с рациональным пучком $F \to C$ и любого G-инвариантного элемента $z = a[F_{\overline{t}}] - b\omega_F - \sum\limits_{i=1}^{s} m_i\overline{x}_i \in Z^{++}(\overline{F})$, $b > 0$, существует такая стандартная G-поверхность $F' \to C$ с $(\omega_{F'} \cdot \omega_{F'}) = (\omega_F \cdot \omega_F)$ и такое бирациональное (G, C)-отображение $g\colon F' \to F$, что элемент $z' = g^*(z) \in Z(\overline{F}')$ имеет вид $a'[F'_{\overline{t}}] - b\omega_{F'} - \sum\limits_{i=1}^{s'} m'_i\overline{x}'_i$, где $0 \leqslant m_i \leqslant b$ для всех $1 \leqslant i \leqslant s'$.

Наконец, нам понадобятся следующие факты из геометрии поверхностей дель Пеццо (см. [3, 5]). Следуя работе [3], поверхностью дель Пеццо мы будем называть неособую проективную k-поверхность V, на которой антиканонический обратимый пучок ω_V^{-1} обилен и линейная система $|-\omega_V|$ не имеет неподвижных компонент. Число $n = (\omega_V \cdot \omega_V)$ условно называется степенью поверхности дель Пеццо V.

Множество, состоящее из r, $r = 1, 2, 3, \ldots$, замкнутых точек поверхности V называется «хорошим», если моноидальное преобразование с центром в этом конечном множестве точек $V' \to V$ снова приводит к поверхности дель Пеццо. Легко показать, что $r \leqslant 8$. Хорошее множество, состоящее из одной точки, мы будем называть просто «хорошей» точкой, хорошее множество из двух точек — «хорошей» парой точек (но не парой хороших точек, что не одно и то же!) и т. д.

0.8. Лемма. *Пусть V — некоторая поверхность дель Пеццо степени n. Тогда*

1) *если $n = 1$ или 2, то на поверхности V существует автоморфизм второго порядка s, соответственно t, действие которого на класс*

*) См. замечание на с. 54.

$[\overline{Z}]$ геометрически неприводимой исключительной кривой первого рода $\overline{Z}$ в группе $Z(\overline{V})$ определяется формулой

$$s^*([\overline{Z}]) = -[\overline{Z}] - 2\omega_V, \quad \textit{соответственно} \quad t^*([\overline{Z}]) = -[\overline{Z}] - \omega_V.$$

Если V — G-поверхность, то s и t являются G-автоморфизмами;

2) *если $n = 3$, то с каждой «хорошей» точкой $x \in V$ степени 1 связан бирациональный автоморфизм второго порядка $t_x \colon V \to V$ и с каждой «хорошей» парой точек (x, x') или с «хорошей» замкнутой точкой степени 2 — бирациональный автоморфизм второго порядка $s_{xx'} \colon V \to V$, действие которых на группу $Z(\overline{V})$ определяется следующими формулами*[*)]:

$$t_x^*([\overline{Z}]) = -[\overline{Z}] - \omega_V - x, \quad t_x^*(\omega_V) = 2\omega_V + 3x,$$
$$t_x^*(x) = -\omega_V - 2x, \quad t_x^*(y) = t(y), \quad y \neq x.$$
$$s_{xx'}^*([\overline{Z}]) = -[\overline{Z}] - 2\omega_V - 2(x + x'), \quad s_{xx'}^*(\omega_V) = 5\omega_V + 6(x + x'),$$
$$s_{xx'}^*(x + x') = -4\omega_V - 5(x + x'), \quad s_{xx'}^*(y) = s(y), \quad y \neq x, x'.$$

Если V — G-поверхность, а точка x и пара точек (x, x') G-инвариантны, то t_x и $s_{xx'}$ являются бирациональными G-автоморфизмами.

Доказательство. Ограничимся кратким указанием к построению автоморфизмов s, t и бирациональных автоморфизмов t_x, $s_{xx'}$. Если $n = 1$, то на поверхности V антиканоническая линейная система $|-\omega_V|$ представляет собой пучок эллиптических кривых с единственной простой базисной точкой $x_0 \in V$. Так как обратимый пучок ω_V^{-1} обилен, то легко проверить, что в слоях пучка $|-\omega_V|$ нет исключительных кривых первого рода. Следовательно, определен послойный групповой закон с нулем в точке x_0. Групповой автоморфизм отражения относительно нуля в каждом слое пучка $|-\omega_V|$ продолжается до автоморфизма всей поверхности V — это и есть требуемый автоморфизм s. Если поверхность V снабжена G-структурой, то, очевидно, s является G-автоморфизмом.

Если $n = 2$, то пучок ω_V^{-1} реализует поверхность V в виде двойной плоскости с неособой кривой ветвления четвертого порядка. Тогда t — это автоморфизм, переставляющий между собой точки, лежащие над одной и той же точкой плоскости. Очевидно также, что t является G-автоморфизмом, если V — G-поверхность.

Наконец, если $n = 3$, то бирациональный G-автоморфизм t_x (соответственно $s_{xx'}$) определяется как композиция бирациональных G-отображений $d_x^{-1} \cdot t \cdot d_x$ (соответственно $d_{xx'}^{-1} \cdot s \cdot d_{xx'}$), где d_x (соответственно $d_{xx'}$) — моноидальное преобразование с центром в точке x (соответственно в паре точек (x, x')).

Выписанные в формулировке леммы формулы легко проверяются непосредственно, исходя из определений соответствующих автоморфизмов (см. также, [3], 4.7, 5.10). Доказательство закончено. □

[*)] В работе [4] показано, что бирациональные автоморфизмы $s_{xx'}$ выражаются через автоморфизмы вида t_x.

В некоторых частных случаях «хорошие» множества точек можно находить с помощью следующих простых критериев.

0.9. Лемма. *Пусть V — поверхность дель Пеццо степени $n = 2, 3$ или 4. Тогда*

1) *если $n = 2$, то замкнутая точка $x \in V$ степени 1 тогда и только тогда является «хорошей», когда она не лежит на исключительных кривых первого рода поверхности $\overline{V}$ и $t(x) \neq x$;*

2) *если $n = 3$, то замкнутая точка $x \in V$ степени 1 является «хорошей» тогда и только тогда, когда она не лежит на исключительных кривых поверхности V. Пара точек (x, x') — «хорошая» тогда и только тогда, когда прямая в $\mathbf{P}^3_k = \operatorname{Proj} S(\Gamma(V, \omega_V^{-1}))$, соединяющая точки x, x', не касается поверхности V ни в одной из этих точек и когда третья точка пересечения этой прямой с V не лежит на исключительной кривой поверхности V;*

3) *если $n = 4$, то замкнутая точка x степени 1 является «хорошей» тогда и только тогда, когда она не лежит на исключительных кривых первого рода поверхности V. Пара точек (x, x') «хорошая» тогда и только тогда, когда каждая из точек x, x' — «хорошая» и при антиканоническом вложении $V \subset \mathbf{P}^4_k$ они не лежат одновременно ни на какой геометрически неприводимой компоненте степени 2 гиперплоского сечения. Тройка точек (x, x', x'') — «хорошая» тогда и только тогда, когда любая пара, составленная из точек x, x', x'', — «хорошая» и когда все они не лежат одновременно ни на какой геометрически неприводимой компоненте степени 3 гиперплоского сечения.*

По поводу утверждений 1) и 2) см. [3] (предложение 4.10). Утверждение 3) легко выводится из первых двух и из хорошо известных свойств поверхностей дель Пеццо, изложенных, например, в работе [5].

§ 1. Стандартные поверхности с $(\omega_F \cdot \omega_F) = 1$ и 2

Следующие две леммы относятся к произвольным стандартным G-поверхностям с рациональным пучком. Первая из них является уточнением леммы 1.5 работы [6].

1.1. Лемма. *Пусть F — стандартная G-поверхность с рациональным пучком и $z = a[F_{\bar{t}}] - b\omega_F - \sum\limits_{i=1}^{s} m_i \overline{x}_i$ — некоторый G-инвариантный элемент группы $Z(\overline{F}) = \operatorname{Pic} \overline{F} \oplus Z^0(\overline{F})$. Предположим, что $0 \leqslant m_i \leqslant b$, $1 \leqslant i \leqslant s$, $b > 0$ и $(z \cdot z) = q \geqslant 0$, тогда*

$$a < g,$$

где $g = \dfrac{(z \cdot z) + \Omega(z)}{2} + 1 = p_a(a[F_{\bar{t}}] - b\omega_F) - \sum\limits_{i=1}^{s} \dfrac{m_i(m_i - 1)}{2}$.

Доказательство. Пользуясь формулами п. 0.3, находим

$$g = (z \cdot z) = 4ab + b^2(\omega_F \cdot \omega_F) - \sum_{i=1}^{s} m_i^2 \geqslant b(4a + b(\omega_F \cdot \omega_F)) - b\sum_{i=1}^{s} m_i.$$

Отсюда $\sum\limits_{i=1}^{s} m_i \geqslant 4a + b(\omega_F \cdot \omega_F) - \dfrac{q}{b}$. С другой стороны,

$$2g = q - 2a - b(\omega_F \cdot \omega_F)) + \sum_{i=1}^{s} m_i + 2 \geqslant$$
$$\geqslant -2a - b(\omega_F \cdot \omega_F) + 4a + b(\omega_F \cdot \omega_F) + q\Big(1 - \frac{1}{b}\Big) + 2.$$

В результате получаем $2g \geqslant 2a + 2 + q\Big(1 - \dfrac{1}{b}\Big)$ или $g > a$, что и требовалось доказать. □

1.2. Лемма. *Пусть $F \to C$ — стандартная G-поверхность с рациональным пучком. Тогда индекс подгруппы $\operatorname{Pic} F$ в группе $(\operatorname{Pic} \overline{F})^G$ равен индексу подгруппы $\operatorname{Pic} C$ в группе $(\operatorname{Pic} \overline{C})^G = \mathbb{Z} = \operatorname{Pic} \overline{C}$. Кроме того, в алгебраическом случае индекс $[\operatorname{Pic} \overline{C} : \operatorname{Pic} C]$ равен 1 или 2 в зависимости от того имеет кривая C G-точку степени 1 или нет, а при $(\omega_F \cdot \omega_F)$ нечетном он всегда равен единице. В геометрическом случае, если группа G абелева, он также равен единице.*

Доказательство. Как известно (см. п. 0.7) группа $(\operatorname{Pic} \overline{F})^G$ порождена классом $[F_{\overline{t}}]$ геометрического слоя $F_{\overline{t}}$ морфизма $\pi\colon F \to C$ и каноническим классом $\omega_{\overline{F}}$ (или $\dfrac{1}{2}\omega_{\overline{F}}$, когда поверхность F G-бирационально эквивалентна произведению $C \times \mathbf{P}^1_k$). Так как $\omega_F \in \operatorname{Pic} F$ и образ группы $(\operatorname{Pic} \overline{C})^G$ при естественном вложении $\overline{\pi}^*\colon \operatorname{Pic} \overline{C} \to \operatorname{Pic} \overline{F}$ совпадает с подгруппой, порожденной классом $[F_{\overline{t}}]$, то отсюда легко следует первая часть утверждения. Далее, очевидно, что $[\operatorname{Pic} \overline{C} : \operatorname{Pic} C] = 1$, если на кривой C есть G-точка степени 1; если это не так, то в алгебраическом случае (факт хорошо известный) $[\operatorname{Pic} \overline{C} : \operatorname{Pic} C] = 2$. При нечетном $(\omega_F \cdot \omega_F)$ степень r G-инвариантного дивизора, состоящего из точек кривой C, над которыми слои морфизма $\pi\colon F \to C$ вырождены, равна $8 - (\omega_F \cdot \omega_F)$ и, следовательно, тоже нечетна. Из этого в алгебраическом случае легко можно установить существование на кривой C G-точки степени 1, значит, $[\operatorname{Pic} \overline{C} : \operatorname{Pic} C] = 1$. Наконец, если в геометрическом случае группа G абелева, то на кривой C всегда имеется G-инвариантная точка степени 1. Здесь мы пользуемся тем фактом, что над алгебраически замкнутым полем каждое представление конечной абелевой группы G содержит одномерное под представление. Лемма доказана. □

Первое, что мы хотим установить для стандартных G-поверхностей F с $(\omega_F \cdot \omega_F) = 1$ или 2, это доказать следующую альтернативу: либо на F существует единственный G-инвариантный пучок рациональных кривых — класс $[F_{\overline{t}}]$ стандартного морфизма, либо она G-бирационально эквивалентна стандартной G-поверхности $F' \to C$, имеющей то же значение $(\omega_{F'} \cdot \omega_{F'})$, что и поверхность F, и являющейся поверхностью дель Пеццо.

Этому посвящены предложения 1.3 и 1.5.

1.3. Предложение. *Стандартная G-поверхность F с $n = 1$ или 2 тогда и только тогда является поверхностью дель Пеццо, когда линейные системы $|-F_{\overline{t}} - 4\omega_F|$ при $n = 1$ и $|-F_{\overline{t}} - 2\omega_F|$ при $n = 2$ не имеют неподвижных компонент.*

Доказательство. Если F является поверхностью дель Пеццо, то по лемме 0.8 на ней существует G-автоморфизм второго порядка s при $n = 1$, соответственно t при $n = 2$. Как следует из указанных в этой лемме формул, автоморфизм s переводит стандартный пучок рациональных кривых $[F_{\bar{t}}]$ в пучок $-[F_{\bar{t}}] - 4\omega_F$, а автоморфизм t переводит пучок $[F_{\bar{t}}]$ в пучок $-[F_{\bar{t}}] - 2\omega_F$. Каждый из этих пучков принадлежит подмножеству $Z^{++}(\overline{F}) \subset Z(\overline{F})$, так как ему, очевидно, принадлежит пучок $[F_{\bar{t}}]$. Следовательно, согласно свойству 5′) п. 0.3 линейные системы $|-F_{\bar{t}} - 4\omega_F|$ при $n = 1$ и $|-F_{\bar{t}} - 2\omega_F|$ при $n = 2$ не имеют неподвижных компонент.

Обратно, пусть на стандартной поверхности F линейная система $|-F_{\bar{t}} - 4\omega_F|$ при $n = 1$ и $|-F_{\bar{t}} - 2\omega_F|$ при $n = 2$ не имеет неподвижных компонент. Тогда надо показать, что антиканоническая линейная система $|-\omega_F|$ также не имеет неподвижных компонент и обильна. Выясним сначала, какие неподвижные компоненты могут существовать в линейной системе $|-\omega_F|$ на произвольной стандартной G-поверхности F с $n = 1$ или 2. Отметим, что неподвижная часть G-инвариантной линейной системы, очевидно, G-инвариантна, и, поскольку $\operatorname{rg}\operatorname{Pic} F = 2$, она должна быть (если существует) G-неприводимой кривой. Обозначим предполагаемую неподвижную компоненту линейной системы $|-\omega_F|$ через X_0, а класс соответствующей подвижной части через X. Тогда, так как $X_0 + X \sim -\omega_F$ и $(X \cdot F_{\bar{t}}) \geqslant 0$, $(X_0 \cdot F_{\bar{t}}) > 0$, то G-кривая X_0 принадлежит некоторому классу дивизоров вида $-a_1[F_{\bar{t}}] - \omega_F$, $a_1 > 0$.

Чтобы найти a_1, воспользуемся теоремой Римана–Роха и тем фактом, что $\dim|-\omega_F| = \dim|X| = \dim|a_1 F_{\bar{t}}|$. Имеем

$$n + 1 \leqslant \dim H^0(F, \omega_F^{-1}) = \dim H^0(F, \mathcal{O}(a_1 F_{\bar{t}})) = a_1 + 1.$$

Отсюда следует, что $a_1 \geqslant 1$, если $(\omega_F \cdot \omega_F) = 1$, и $a_1 \geqslant 2$, если $(\omega_F \cdot \omega_F) = 2$. На самом деле в обоих случаях имеет место знак равенства, т. е. $a_1 = 1$ при $n = 1$ и $a_1 = 2$ при $n = 2$. Действительно, так как $(X_0 \cdot F_{\bar{t}}) = 2$, то кривая $\overline{X}_0$ не может состоять более чем из двух компонент, поскольку G-орбита любой компоненты слоя стандартного пучка эквивалентна некоторой кратности класса $[F_{\bar{t}}]$. Более того, при $n = 1$ она не может состоять и из двух компонент, ибо они должны быть G-сопряжены, и поэтому индекс самопересечения $(X_0 \cdot X_0)$ должен быть четным, вопреки равенству $(X_0 \cdot X_0) = (-a_1 F_{\bar{t}} - \omega_F - a_1 F_{\bar{t}} - \omega_F) = -4a_1 + 1$. Следовательно, при $n = 1$ кривая X_0 геометрически неприводима, значит,

$$0 \leqslant p_a(X_0) = \frac{(X_0 \cdot X_0) + (X_0 \cdot \omega_F)}{2} + 1 = -a_1 + 1.$$

Отсюда $a_1 = 1$, $p_a(X_0) = 0$ и $(X_0 \cdot X_0) = -3$.

При $n = 2$ кривая $\overline{X}_0$, напротив, состоит из двух компонент $\overline{X}_0'$, $\overline{X}_0''$, так как $a_1 \geqslant 2$ и

$$p_a(X_0) = -a_1 + 1 < 0.$$

Так как $(\overline{X}_0' \cdot F_{\bar{t}}) = (\overline{X}_0'' \cdot F_{\bar{t}}) = 1$, то $p_a(\overline{X}_0'') = p_a(\overline{X}_0') = 0$, т. е. $(\overline{X}_0' \cdot \overline{X}_0') + (\overline{X}_0' \cdot \omega_F) = -2$ и $(\overline{X}_0'' \cdot \overline{X}_0'') + (\overline{X}_1'' \cdot \omega_F) = -2$. С другой стороны, простые

вычисления показывают, что

$$(\overline{X}_0' \cdot \overline{X}_0') + (\overline{X}_0' \cdot \overline{X}_0'') = (\overline{X}_0'' \cdot \overline{X}_0'') + (\overline{X}_0' \cdot \overline{X}_0'') = -2a_1 + 1,$$
$$(\overline{X}_0' \cdot \omega_F) = (\overline{X}_0'' \cdot \omega_F) = a_1 - 1.$$

Сопоставляя эти равенства с предыдущими, получаем

$$(\overline{X}_0' \cdot \overline{X}_0'') = -a_1 + 2.$$

Но, так как, очевидно, $(\overline{X}_0' \cdot \overline{X}_0'') \geqslant 0$ и $a_1 \geqslant 2$, то из этого следует, что $a_1 = 2$, $(\overline{X}_0' \cdot \overline{X}_0'') = 0$ и $(\overline{X}_0' \cdot \overline{X}_0') = (\overline{X}_0'' \cdot \overline{X}_0'') = -3$.

Итак,

$$X_0 \sim -F_{\overline{t}} - \omega_F \quad \text{при} \quad n = 1, \quad X_0 \sim -2F_{\overline{t}} - \omega_F \quad \text{при} \quad n = 2.$$

Поэтому, если, вопреки утверждению, линейная система $|-\omega_F|$ имеет неподвижную компоненту X_0, то

$$(X_0 \cdot -F_{\overline{t}} - 4\omega_F) = (-F_{\overline{t}} - \omega_F \cdot -F_{\overline{t}} - 4\omega_F) = -6, \quad n = 1,$$
$$(X_0 \cdot -F_{\overline{t}} - 2\omega_F) = (-2F_{\overline{t}} - \omega_F \cdot F_{\overline{t}} - 2\omega_F) = -6, \quad n = 2.$$

Значит, линейные системы $|-F_{\overline{t}} - 4\omega_F|$ и $|-F_{\overline{t}} - 2\omega_F|$ тоже должны иметь неподвижные компоненты, что противоречит предположению.

Для доказательства обильности системы $|-\omega_F|$ достаточно, в силу результатов работ [5] и [3], показать, что на поверхности F не существует G-кривых Z, неприводимые компоненты $\overline{Z}_i$ которых обладают свойствами:

$$(\overline{Z}_i \cdot \omega_F) = 0, \quad (\overline{Z}_i \cdot \overline{Z}_i) = -2, \quad (\overline{Z}_i \cdot \overline{Z}_j) = 0, \quad i \neq j.$$

Для этого, в свою очередь, достаточно показать, что на поверхности F нет G-кривой Z со следующими численными характеристиками:

$$(Z \cdot \omega_F) = 0, \quad (Z \cdot Z) = -2r,$$

где r — число неприводимых компонент кривой $\overline{Z}$. Опять путем несложных вычислений убеждаемся, что на произвольной стандартной G-поверхности с $n = 1$ или 2 для кривой Z имеются только следующие возможности:

$$Z \sim -F_{\overline{t}} - 2\omega_F, \quad n = 1, \quad Z \sim -F_{\overline{t}} - \omega_F, \quad n = 2.$$

Но поскольку в этих случаях $(Z \cdot -F_{\overline{t}} - 4\omega_F) < 0$, $n = 1$, и $(Z \cdot -F_{\overline{t}} - 2\omega_F) < 0$, $n = 2$, существование таких кривых Z противоречит отсутствию неподвижных компонент в соответствующих линейных системах. Предложение доказано. □

В процессе доказательства этого предложения мы установили следующий факт.

1.4. Следствие. *Если стандартная G-поверхность F не является поверхностью дель Пеццо, то на ней существует одна из G-кривых X_0, Z, обладающих следующими свойствами*:

$$\text{а)}\ \ n = 1, \quad X_0 \sim -F_{\overline{t}} - \omega_F, \quad (X_0 \cdot X_0) = -3, \quad p_a(X_0) = 0$$

и X_0 геометрически неприводима; $Z \sim -F_{\bar{t}} - 2\omega_F$, кривая $\overline{Z}$ состоит из двух непересекающихся неособых неприводимых кривых рода нуль с индексом самопересечения -2;

$$\text{б)}\ \ n = 2, \quad X_0 \sim -2F_{\bar{t}} - \omega_F, \quad (X_0 \cdot X_0) = -6, \quad p_a(X_0) = -1$$

и $\overline{X}_0$ состоит из двух непересекающихся неособых неприводимых кривых рода нуль с индексом самопересечения -3; $Z \sim -F_{\bar{t}} - \omega_F$, кривая $\overline{Z}$ состоит из двух непересекающихся неособых неприводимых кривых рода нуль с индексом самопересечения -2.

1.5. Предложение. *На стандартной G-поверхности $F \to C$ с $n = 1$ или 2 тогда и только тогда существует отличный от стандартного G-инвариантный пучок рациональных кривых, когда существует бирациональное (G, C)-отображение ее на такую стандартную G-поверхность $F' \to C$, что $(\omega_{F'} \cdot \omega_{F'}) = (\omega_F \cdot \omega_F)$ и F' является поверхностью дель Пеццо.*

Доказательство. В одну сторону утверждение уже было доказано в начале доказательства предложения 1.3. Обратно, пусть на поверхности F существует G-инвариантный пучок $z = a[F_{\bar{t}}] - b\omega_F - \sum m_i \overline{x}_i \in Z(\overline{F})^G$. По предположению пучок z отличен от пучка $[F_{\bar{t}}]$, следовательно, $b \neq 0$. Более того, $b > 0$, поскольку $[F_{\bar{t}}]$, $z \in Z^{++}(\overline{F})$ и $0 < (z \cdot [F_{\bar{t}}]) = 2b$. Следовательно, элемент z на поверхности F удовлетворяет условию утверждения 4) п. 0.7. Покажем, что поверхность $F' \to C$ с $(\omega_{F'} \cdot \omega_{F'}) = (\omega_F \cdot \omega_F)$, существование которой устанавливается в этом утверждении, является поверхностью дель Пеццо. Точнее, мы покажем, что поверхностью дель Пеццо является всякая стандартная G-поверхность F', в группе $Z(\overline{F'})^G$ которой существует элемент $z' = a'[F'_{\bar{t}}] - b'\omega_{F'} - \sum\limits_{i=1}^{s'} m'_i \overline{x}'_i$, обладающий свойствами: $z' \in Z^{++}(\overline{F'})$, $(z' \cdot z') = 0$, $\Omega(z') = -2$, $b' > 0$ и $m''_i \leqslant b'$ для всех $1 \leqslant i \leqslant s'$. Для этого заметим, что по лемме 1.1 $a' < 0$. Кроме того, в силу леммы 0.5 полная линейная система $|a'F'_{\bar{t}} - b'\omega_{F'}|$ не имеет неподвижных компонент. С другой стороны, непосредственные вычисления показывают, что при $a' < 0$ индексы пересечения

$$(a'F'_{\bar{t}} - b'\omega_{F'} \cdot X_0), \quad (a'F_{\bar{t}} - b'\omega_{F'} \cdot Z),$$

где X_0 и Z — G-кривые из следствия 1.4, отрицательны. Так как линейная система $|a'F'_{\bar{t}} - b'\omega_{F'}|$ не имеет неподвижных компонент, то из этого следует, что на поверхности F' нет кривых X_0 и Z. Тогда, согласно следствию 1.4, поверхность F' является поверхностью дель Пеццо. Предложение 1.5 тем самым полностью доказано. □

Основным результатом этого параграфа является следующая

1.6. Теорема. *Каждый G-инвариантный пучок рациональных кривых на стандартной G-поверхности $F \to C$ с $n = 1$ или 2 бирационально G-эквивалентен стандартному.*

Доказательство. Если на поверхности F не существует других G-инвариантных пучков рациональных кривых, кроме стандартного, то доказывать нечего. Предположим теперь, что такой пучок существует. Обозначим

его через $z = a[F_{\bar{t}}] - b\omega_F - \sum\limits_{i=1}^{s} m_i\overline{x}_i$. Тогда, как уже отмечалось в доказательстве предыдущего предложения, $b > 0$. Согласно утверждению 4) п. 0.7 существуют такая стандартная G-поверхность $F' \to C$ с $(\omega_{F'} \cdot \omega_{F'}) = (\omega_F \cdot \omega_F)$ и такое бирациональное (G, C)-отображение $h\colon F' \to F$, что элемент $h^*(z) = a'[F'_{\bar{t}}] - b'\omega_{F'} - \sum\limits_{i=1}^{s'} m'_i\overline{x}'_i = z' \in Z(\overline{F}')$ обладает следующими свойствами: $b' = b$ и $0 \leqslant m'_i \leqslant b'$ для всех $1 \leqslant i \leqslant s'$. Так как изоморфизм $h^*\colon Z(\overline{F}) \to Z(\overline{F}')$ совместим со всеми описанными в п. 0.2 структурами на группах $Z(\overline{F})$ и $Z(\overline{F}')$, то элемент $z' = h^*(z)$ является G-инвариантным пучком рациональных кривых на поверхности F', т. е. $z' \in Z^{++}(\overline{F}')^G$, $(z' \cdot z') = 0$ и $\Omega(z') = -2$. С другой стороны, из доказательства предложения 1.5 следует, что поверхность F' является поверхностью дель Пеццо, и, следовательно, по лемме 0.8 на ней существуют G-автоморфизмы второго порядка s при $n = 1$ и t при $n = 2$. Они индуцируют автоморфизмы s^* и t^* на группе $Z(\overline{F}')$. Пользуясь формулами из леммы 0.8, без труда получаем

$$s^*(z') = a's^*([F'_{\bar{t}}]) - b\omega_{F'} - \sum_{i=1}^{s'} m'_i s^*(\overline{x}'_i) = a'(-[F'_{\bar{t}}] - 4\omega_{F'}) -$$
$$- b\omega_{F'} - \sum_{i=1}^{s'} m'_i s(\overline{x}'_i) = -a'[F'_{\bar{t}}] - (b + 4a')\omega_{F'} - \sum_{i=1}^{s'} m'_i s(\overline{x}'_i),$$

и аналогично

$$t^*(z') = -a'[F'_{\bar{t}}] - (b + 2a')\omega_{F'} - \sum_i m'_i t(\overline{x}'_i).$$

Заметим теперь, что элемент z' удовлетворяет условию леммы 1.1 и $g = \dfrac{(z \cdot z) + \Omega(z)}{2} + 1 = 0$. Поэтому $a' < 0$. Следовательно, $(b+4a') < b$ и $(b+2a') < b$. Возвращаясь на поверхность F с помощью отображения $h^{-1}\colon F \to F'$, мы получаем G-инвариантный пучок рациональных кривых $z_1 = (h^{-1})^* \cdot s^* \cdot h^*(z)$ (соответственно $z_1 = (h^{-1})^* \cdot t^* \cdot h^*(z)$) на F, коэффициент при $-\omega_F$ которого $b_1 = b + 4a'$ (соответственно, $b_1 = b + 2a'$) меньше, чем коэффициент при $-\omega_F$ у пучка z. Продолжая этот спуск, в конце концов получим, что этот коэффициент станет равным нулю, следовательно, пучок z перейдет в стандартный пучок $[F_{\bar{t}}]$. Теорема доказана. □

1.7. Следствие. *Пусть $\pi\colon F \to C$ — стандартная G-поверхность с $(\omega_F \cdot \omega_F) = 1$ или 2 и $\pi'\colon F' \to C'$ — произвольная стандартная G-поверхность. Тогда для каждого бирационального G-отображения $g\colon F \to F'$ существуют такой G-изоморфизм $u\colon C \to C'$ и такой бирациональный G-автоморфизм $h\colon F \to F$, что коммутативна следующая диаграмма*:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "g\cdot h"] \arrow[d, "\pi"'] & F' \arrow[d, "\pi'"] \\ C \arrow[r, "u"] & C'. \end{tikzcd}$$

В частности, F бирационально нетривиальна.

Доказательство. В качестве h следует взять бирациональный G-автоморфизм, переводящий пучок $g^*([F'_{\bar t}])$ в пучок $[F_{\bar t}]$. Отображение u тогда индуцируется отображением $g \cdot h$. □

1.8. Следствие. *В условиях теоремы* 1.6 *группа бирациональных G-автоморфизмов поверхности F порождена бирациональными G-автоморфизмами, сохраняющими пучок $[F_{\bar t}]$, и бирациональными G-автоморфизмами вида $h^{-1} \cdot s \cdot h$ при $n = 1$ и $h^{-1} \cdot t \cdot h$ при $n = 2$, указанными в доказательстве теоремы* 1.6.

§ 2. Стандартные G-поверхности с $(\omega_F \cdot \omega_F) = 3$

Как показано ниже, эти стандартные G-поверхности с пучком рациональных кривых относятся к классу тех неособых кубических поверхностей в $\mathbf{P}^3_k$, на которых существует G-инвариантная прямая. Стягивая ее, мы получаем стандартную невырожденную G-поверхность дель Пеццо степени 4. Напомним (см. [3]), что стандартной невырожденной G-поверхностью дель Пеццо называется любая неособая G-поверхность дель Пеццо V с $\operatorname{rg}\operatorname{Pic} V = 1$.

2.1. Предложение. *Стандартная G-поверхность F с пучком рациональных кривых и с $(\omega_F \cdot \omega_F) = 3$ удовлетворяет условиям леммы* 0.8. *Антиканоническая линейная система $|-\omega_F|$ задает G-изоморфное вложение ее в пространство $\mathbf{P}^3_k$ в виде кубической поверхности. Поверхность F не является G-минимальной: на ней существует G-инвариантная геометрически неприводимая кривая $L \sim -F_{\bar t} - \omega_F$, дважды пересекающая слои стандартного морфизма, морфизм стягивания которой $c\colon F \to V$ отображает ее на невырожденную стандартную G-поверхность дель Пеццо V степени* 4.

Доказательство. Для доказательства первого утверждения надо показать, что полная линейная система $|-\omega_F|$ не имеет неподвижных компонент и что на поверхности F не существует G-кривых Z, удовлетворяющих условиям (см. доказательство предложения 1.3)

$$(Z \cdot \omega_F) = 0, \quad (Z \cdot Z) = -2r,$$

где r — число неприводимых компонент кривой $\bar Z$. Предположим, что система $|-\omega_F|$ содержит неподвижную компоненту X_0. Тогда так же, как и в доказательстве предложения 1.4, устанавливается, что кривая X_0 должна быть G-инвариантной, геометрически неприводимой, $X_0 \sim -a_0 F_{\bar t} - \omega_F$, $a_1 > 0$, и $p_a(X_0) = 0$. Из этого следует, что a_1 может принимать только одно значение $a_1 = 1$. Но в этом случае $(X_0 \cdot X_0) = (-F_{\bar t} - \omega_F \cdot -F_{\bar t} - \omega_F) = -1$, следовательно, $X_0 = L$ — исключительная кривая первого рода. Однако и она не может быть неподвижной компонентой полной линейной системы $|-\omega_F|$, так как иначе соответствующая подвижная часть состояла бы из стандартного пучка $|F_{\bar t}|$ и $\dim H^0(F, \omega^{-1}) = \dim H^0(F, \mathcal{O}(X_0 + F_{\bar t})) = \dim H^0(F, \mathcal{O}(F_{\bar t})) = 2$, а по теореме Римана–Роха $\dim H^0(F, \omega^{-1}) \geqslant 4$. Сразу же отметим, что кривая $L \sim -F - \omega_F$ действительно существует.

В самом деле, по теореме Римана–Роха

$$\dim H^0(F, \mathcal{O}(-F_{\bar{t}} - \omega_F)) \geqslant \frac{(-F_{\bar{t}} - \omega_F \cdot -F_{\bar{t}} - 2\omega_F)}{2} + 1 = 1.$$

Чтобы убедиться в отсутствии па поверхности F кривых Z с указанными свойствами, предположим противное. Тогда

$$Z \sim aF_{\bar{t}} - b\omega_F, \quad b > 0 \quad \text{и} \quad (Z \cdot \omega_F) = (aF_{\bar{t}} - b\omega_F \cdot \omega_F) = -2a - 3b = 0,$$
$$(Z \cdot Z) = (aF_{\bar{t}} - b\omega_F \cdot aF_{\bar{t}} - b\omega_F) = 4ab + 3b^2 = 2r.$$

Отсюда получаем, что $3b^2 = 2r$. Но так как число r должно быть не больше, чем $(Z \cdot F_t) = 2b$, то $3b^2 \leqslant 4b$. Единственное целое положительное решение этого неравенства $b = 1$ не удовлетворяет равенству $-2a - 3b = 0$. Это противоречие показывает, что кривых Z на F не существует, следовательно, первое утверждение предложения доказано.

Второе утверждение следует из первого, это — хорошо известный, классический факт.

Наконец, мы уже установили, что на F существует исключительная G-кривая первого рода $L \sim -F_{\bar{t}} - \omega_F$. Ясно, что $(L \cdot F_{\bar{t}}) = 2$. Пусть $c\colon F \to V$ — морфизм стягивания этой кривой. Тогда $\operatorname{rg} \operatorname{Pic} V = 1$ и $(\omega_V \cdot \omega_V) = 4$, следовательно, V является невырожденной G-поверхностью дель Пеццо степени 4 (см. [3]). Антиканоническое вложение реализует ее в виде поверхности четвертой степени в $\mathbf{P}^4_k$. Предложение полностью доказано. □

2.2. Предложение. *Пусть F — стандартная G-поверхность с $(\omega_F \cdot \omega_F) = 3$. Тогда с каждой замкнутой G-точкой x степени 1 (если такая существует!), являющейся точкой пересечения компонент вырожденного слоя стандартного пучка и не лежащей на других исключительных кривых первого рода поверхности $\overline{F}$, связан бирациональный G-автоморфизм второго порядка $\hat{t}_x\colon F \to F$, действие которого на группу $Z(\overline{F})^G$ задается следующими формулами*:

$$\hat{t}_x^*([F_{\bar{t}}]) = -[F_{\bar{t}}] - 2\omega_F - 2x, \quad \hat{t}_x^*(-\omega_F) = -[F_{\bar{t}}] - 2\omega_F - x,$$
$$\hat{t}_x^*(x) = -[F_{\bar{t}}] - \omega_F, \quad \hat{t}_x^*(x') = \hat{t}_x(x'), \quad x' \neq x.$$

Доказательство. Пусть x — G-точка степени 1, являющаяся точкой пересечения компонент $\overline{Z}$ и $\overline{Z}'$ вырожденного слоя $F_{\bar{t}} = \overline{Z} \cup \overline{Z}'$ и не лежащая на других исключительных кривых первого рода на $\overline{F}$. Пусть $d_x\colon F' \to F$ — моноидальное преобразование с центром в этой точке. Тогда антиканонический обратимый пучок $\omega_{F'}^{-1}$ определяет G-морфизм $F' \to \mathbf{P}^2_k$, степень которого в общей точке равна $(\omega_{F'} \cdot \omega_{F'}) = 2$. При этом собственные прообразы кривых $\overline{Z}$ и $\overline{Z}'$ на $\overline{F}'$ отображаются в две G-сопряженные точки плоскости. Так как, кроме этих кривых, на поверхности $\overline{F}'$ нет кривых с индексом самопересечения -2, пересекающихся с классом $\omega_{F'}$ по нулю, то всюду вне них морфизм $F' \to \mathbf{P}^2_k$ конечен и имеет степень 2. Следовательно, там

определен G-автоморфизм второго порядка, переставляющий точки в каждом слое. Он продолжается до бирационального G-автоморфизма второго порядка $\hat{t}\colon F' \to F'$, являющегося в действительности бирегулярным, поскольку собственные прообразы кривых $\overline{Z}$ и $\overline{Z}'$ на $\overline{F}'$ имеют отрицательный индекс самопересечения -2. Легко видеть, что построенный автоморфизм $\hat{t}$ переставляет кривые $d_x^{-1}(L)$ и $d_x^{-1}(x)$ на F', где L — исключительная G-кривая на F. Исходя из этого, не представляет труда написать формулы действия бирационального G-автоморфизма $\hat{t}_x = d_x^{-1}\cdot\hat{t}\cdot d_x\colon F \to F$ на группе $Z(\overline{F})^G$, указанные в формулировке предложения

2.3. Предложение. *Для каждой G-инвариантной пары (x, x') (тройки (x, x', x'')) точек степени 1, $x, x', x'' \in \overline{F}$ такой, что пара $(c(x), c(x'))$ (соответственно тройка $(c(x), c(x'), c(x''))$) является «хорошей» на поверхности дель Пеццо V, где $c\colon F \to V$ — морфизм стягивания G-кривой L, существуют такая стандартная G-поверхность $\widetilde{F} \to C$ и такое бирациональное G-отображение $u_{xx'}\colon \widetilde{F} \to F$ (соответственно $u_{xx'x''}\colon \widetilde{F} \to F$), что имеют место следующие утверждения:*

а) *гомоморфизм $u_{xx'}^*\colon Z(\overline{F})^G \to Z(\overline{\widetilde{F}})^G$ задается формулами:*

$$u_{xx'}^*([F_{\overline{t}}]) = -[\widetilde{F}_{\overline{t}}] - 4\omega_{\widetilde{F}} - 4(\tilde{x} + \tilde{x}'),$$
$$u_{xx'}^*(-\omega_F) = -2[\widetilde{F}_{\overline{t}}] - 5\omega_{\widetilde{F}} - 4(\tilde{x} + \tilde{x}'),$$
$$u_{xx'}^*(x + x') = -2[\widetilde{F}_{\overline{t}}] - 4\omega_{\widetilde{F}} - 3(\tilde{x} + \tilde{x}'),$$
$$u_{xx'}^*(y) = u_{xx'}^{-1}(y), \quad y \neq x, x',$$

где $\tilde{x}, \tilde{x}' \in Z^0(\overline{\widetilde{F}})$;

б) *гомоморфизм $u_{xx'x''}^*\colon Z(\overline{F})^G \to Z(\overline{\widetilde{F}})^G$ задается формулами:*

$$u_{xx'x''}^*([F_{\overline{t}}]) = -5[\widetilde{F}_{\overline{t}}] - 12\omega_{\widetilde{F}} - 8(\tilde{x} + \tilde{x}' + \tilde{x}''),$$
$$u_{xx'x''}^*(-\omega_F) = -6[\widetilde{F}_{\overline{t}}] - 13\omega_{\widetilde{F}} - 8(\tilde{x} + \tilde{x}' + \tilde{x}''),$$
$$u_{xx'x''}^*(x + x' + x'') = -6[\widetilde{F}_{\overline{t}}] - 12\omega_{\widetilde{F}} - 7(\tilde{x} + \tilde{x}' + \tilde{x}''),$$
$$u_{xx'x''}^*(y) = u_{xx'x''}^{-1}(y), \quad y \neq x, x', x'',$$

где $\tilde{x}, \tilde{x}', \tilde{x}'' \in Z^0(\overline{\widetilde{F}})$;

в) *поверхность $\widetilde{F}$ бирационально (G, C)-эквивалентна поверхности F и $(\omega_{\widetilde{F}} \cdot \omega_{\widetilde{F}}) = 3$.*

Доказательство. Мы будем строить не отображения $u_{xx'}$ и $u_{xx'x''}$, а обратные к ним $u_{xx'}^{-1}$ и $u_{xx'x''}^{-1}$. G-поверхность F возникает тогда как образ соответствующего отображения. Определим бирациональное G-отображение $u_{xx'}^{-1}$ формулой

$$u_{xx'}^{-1} = \tilde{c}^{-1} \cdot d_{c(x)c(x')} \cdot t \cdot d_{c(x)c(x')}^{-1} \cdot c,$$

а G-отображение $u_{xx'x''}^{-1}$ соответственно формулой

$$u_{xx'x''}^{-1} = \tilde{c}^{-1} \cdot d_{c(x)c(x')c(x'')} \cdot s \cdot d_{c(x)c(x')c(x'')}^{-1} \cdot c,$$

где $c\colon F \to V$ — морфизм стягивания G-кривой L, $d_{c(x)c(x')}\colon V' \to V$ (соответственно $d_{c(x)c(x')c(x'')}\colon V' \to V$) — моноидальное преобразование с центром в указанном множестве точек, t и s — G-автоморфизмы, определенные в лемме 0.8, и $\tilde{c}\colon \widetilde{F} \to V$ — моноидальное преобразование с центром в G-точке степени 1 $y_1 = d_{c(x)c(x')} \cdot t \cdot d^{-1}_{c(x)c(x')}(y_0)$ (соответственно $y_1 = d_{c(x)c(x')c(x'')} \cdot s \cdot d^{-1}_{c(x)c(x')c(x'')}(y_0)$), где $y_0 \in V$ — G-точка, в которую стягивается кривая L. Отметим, что если $y_1 = y_0$, то $\widetilde{F} = F$ и $u_{xx'}$, $u_{xx'x''}$ — бирациональные G-автоморфизмы. В общем случае покажем, что $\widetilde{F}$ является стандартной G-поверхностью с пучком рациональных кривых и с $(\omega_{\widetilde{F}} \cdot \omega_{\widetilde{F}}) = 3$. Это следует из того, что точка y_1 является «хорошей» на поверхности дель Пеццо V, поскольку точка y_0, очевидно, «хорошая». Тогда $\widetilde{F}$ — поверхность дель Пеццо степени 3 и $\operatorname{rg}\operatorname{Pic}\widetilde{F} = 2$. Далее, образ пучка рациональных кривых $-\omega_V - 2y_1$ является, как легко проверить, стандартным пучком рациональных кривых на $\widetilde{F}$.

Формулы в утверждениях а) и б) проверяются непосредственно, исходя из представления отображений $u_{xx'}$ и $u_{xx'x''}$ в виде композиции моноидальных преобразований, обратных к ним и G-автоморфизмов.

В качестве примера проверим одну из этих формул

$$u^*_{xx'x''}([F_{\bar{t}}]) = -5[\overline{F}_{\bar{t}}] - 12\omega_{\widetilde{F}} - 8(\tilde{x} + \tilde{x}' + \tilde{x}'').$$

Имеем

$$(c^{-1})^*([F_{\bar{t}}]) = -\omega_V - 2y_0,$$

$$d^*_{c(x)c(x')c(x')c(x'')}(-\omega_V - 2y_0) = \\ = -\omega_{V'} + d^{-1}(c(x)) + d^{-1}(c(x')) + d^{-1}(c(x'')) - 2d^{-1}(y_0),$$

$$s^* \cdot d^*_{c(x)c(x')c(x')c(x'')}(-\omega_V - 2y_0) = \\ = -7\omega_{V'} - d^{-1}(c(x)) - d^{-1}(c(x')) - d^{-1}(c(x'')) - 2s \cdot d^{-1}(y_0),$$

$$(d^{-1}_{c(x)c(x')c(x'')})^* \cdot s^* \cdot d^*_{c(x)c(x')c(x'')}(-\omega_V - 2y_0) = \\ = -7\omega_V - 8[c(x) + c(x') + c(x'')| - 2y_1,$$

$$\tilde{c}^* \cdot (d^{-1}_{c(x)c(x')c(x'')})^* \cdot s^* \cdot d^*_{c(x)c(x')c(x'')}(-\omega_V - 2y_0) = \\ = -7\omega_{\widetilde{F}} + 5\tilde{c}^{-1}(y_1) - 8[\tilde{c}^{-1} \cdot c(x) + \tilde{c}^{-1} \cdot c(x') + \tilde{c}^{-1} \cdot c(x'')].$$

Замечая, что $\tilde{c}^{-1}(y_1) = \widetilde{L}$ и $\widetilde{L} + \widetilde{F}_{\bar{t}} = -\omega_{\widetilde{F}}$, и полагая $\tilde{c}^{-1} \cdot c(x) = \tilde{x}$, $\tilde{c}^{-1} \cdot c(x') = \tilde{x}'$, $\tilde{c}^{-1} \cdot c(x'') = \tilde{x}''$, получаем требуемую формулу

$$(u_{xx'x''})^*([F_{\bar{t}}]) = -5[\widetilde{F}_{\bar{t}}] - 12\omega_{\widetilde{F}} - 8(\tilde{x} + \tilde{x}' + \tilde{x}'').$$

Осталось доказать утверждение в). Для этого достаточно проверить, что стандартные пучки G-поверхностей $\widetilde{F}$ и F бирационально G-эквивалентны. Из определения G-поверхности $\widetilde{F}$ и стандартного G-пучка рациональных кривых $[\widetilde{F}_{\bar{t}}]$ на ней немедленно получаем

$$(\tilde{c}^{-1})^*([\widetilde{F}_{\bar{t}}]) = -\omega_V - 2y_1, \quad c^* \cdot (\tilde{c}^{-1})^*([\widetilde{F}_{\bar{t}}]) = -[F_{\bar{t}}] - 2\omega_F - 2c^{-1}(y_1).$$

Будем предполагать далее, что $y_1 \neq y_0$, в противном случае утверждение в) тривиально.

Если G-точка $c^{-1}(y_1)$ является «хорошей» на поверхности F, то мы можем применять к пучку $-[F_{\bar{t}}] - 2\omega_F + 2c^{-1}(y_1)$ бирациональный G-автоморфизм $t_{c^{-1}(y_1)}$. В результате получим

$$t^*_{c^{-1}(y_1)}(-[F_{\bar{t}}] - 2\omega_F - 2c^{-1}(y_1)) = [F_{\bar{t}}] + 2\omega_F + 2c^{-1}(y_1) - \\ - 4\omega_F - 6c^{-1}(y_1) + 2\omega_F + 4c^{-1}(y_1) = [F_{\bar{t}}].$$

Таким образом, $t^*_{c^{-1}(y_1)} \cdot c^* \cdot (\tilde{c}^{-1})^*(-[\widetilde{F}_{\bar{t}}]) = [F_{\bar{t}}]$, иначе говоря, пучки $[\widetilde{F}_{\bar{t}}]$ и $[F_{\bar{t}}]$ бирационально G-эквивалентны.

Если G-точка $c^{-1}(y_1)$ лежит на исключительной кривой поверхности $\widetilde{F}$, то возможен один единственный случай — точка $c^{-1}(y_1)$ является точкой пересечения компонент вырожденного слоя стандартного пучка. В самом деле, очевидно, что она не лежит на G-кривой L. С другой стороны, исключительная кривая, на которой она лежит, должна пересекать L, иначе точка y_1 не была бы «хорошей» на поверхности V. Следовательно, точка $c^{-1}(y_1)$ лежит на компоненте некоторого слоя стандартного морфизма, и поскольку она G-инвариантна, то является точкой пересечения компонент этого слоя. В таком случае мы можем применить к пучку $-[F_{\bar{t}}] - 2\omega_F - 2c^{-1}(y_1)$ бирациональный G-автоморфизм $\hat{t}_{c^{-1}(y_1)}$, определенный в предложении 2.2. В результате получим

$$t^*_{c^{-1}(y_1)}(-[F_{\bar{t}}] - 2\omega_F - 2c^{-1}(y_1)) = [F_{\bar{t}}] + 2\omega_F + \\ +2c^{-1}(y_1) - 2[F_{\bar{t}}] - 4\omega_F - 2c^{-1}(y_1) + 2[F_{\bar{t}}] + 2\omega_F = [F_{\bar{t}}],$$

т. е. опять пучки $[\widetilde{F}_{\bar{t}}]$ и $[F_{\bar{t}}]$ бирационально G-эквивалентны. Предложение полностью доказано.

2.4. Лемма. *Пусть $z = a[F_{\bar{t}}] - b\omega_F - \sum m_i \overline{x}_i$ — G-инвариантный пучок рациональных кривых на стандартной G-поверхности F с $(\omega_F \cdot \omega_F) = 3$ и $m_i \leqslant b$, $b > 0$. Обозначим через m наибольшее из чисел m_i. Среди точек $\overline{x}_i$, входящих в z с кратностью m, существует согласно лемме 0.5 точка, лежащая на самой поверхности $\overline{F}$. Обозначим ее через x, и пусть $x', x'', \ldots$ — точки, G-сопряженные к точке x. Тогда имеют место следующие утверждения*:

а) $m > b + a$;

б) *число точек $x, x', x'', \ldots$, G-сопряженных к точке x, не больше* 3;

в) *G-точка максимальной кратности x, G-инвариантная пара G-сопряженных точек максимальной кратности (x, x') и G-инвариантная тройка G-сопряженных точек максимальной кратности (x, x', x'') либо являются хорошими на поверхности F, либо хорошими являются их образы на поверхности V при стягивании $c\colon F \to V$ кривой L.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что поскольку $z \in Z(\overline{F})^G$, точки $x', x'', \ldots$ (если они есть) входят в пучок z тоже с кратностью m. Для доказательства утверждения а) рассмотрим следующее очевидное неравенство:

$$0 = (z \cdot z) = 4ab + 3b^2 - \sum m_i^2 \geqslant 4ab + 3b^2 - m \sum m_i,$$

или, что то же самое,

$$m\sum m_i \geqslant 4ab+3b^2.$$

С другой стороны, из равенства

$$-2=\Omega(z)=-2a-3b+\sum m_i$$

находим

$$\sum m_i = 2a+3b-2.$$

Отсюда и из предыдущего неравенства получаем

$$m \geqslant \frac{4ab+3b^2}{2a+3b-2}.$$

Заметим теперь, что $2a+b\geqslant 0$, так как $2a+b=(z\cdot[L])$ и линейная система $|aF_{\bar t}-b\omega_F|$ не имеет неподвижных компонент. С учетом этого имеем

$$m \geqslant \frac{4ab+3b^2}{2a+3b-2}=\frac{(a+b)(2a+3b-2)-a(2a+b)+2(2a+b)-2a}{2a+3b-2}>a+b,$$

поскольку $a<0$ согласно лемме 1.1.

Докажем утверждение б). Пусть q — число точек $x, x', x'', \ldots$, G-сопряженных между собой. Тогда справедливо очевидное неравенство

$$qm \leqslant 2a+3b-2.$$

Из него и из только что доказанного неравенства $m>a+b$ получаем неравенство вида

$$(q-3)(a+b)+a+2<0$$

или

$$(q-4)(a+b)+(2a+b)+2<0.$$

Поскольку $2a+b\geqslant 0$, следовательно, $a+b>0$ (так как $a<0$), при $q\geqslant 4$ последнее неравенство, как легко видеть, не выполняется. Это доказывает утверждение б).

Перейдем к доказательству последнего утверждения.

Случай I — точка x G-инвариантна. Заметим прежде всего, что x не может лежать на кривой L. Действительно,

$$m>a+b>2a+b=([L]\cdot z),$$

но L не является неподвижной компонентой, так как $Z\in Z^{++}(\overline{F})$. По аналогичной причине она не может лежать на исключительной кривой первого рода Y поверхности $\overline{F}$, если $(\overline{Y}\cdot\overline{L})=0$. В самом деле, каждая такая кривая $\overline{Y}$ пересекает слой $F_{\bar t}$ в одной точке

$$(\overline{Y}\cdot F_{\bar t})=(\overline{Y}\cdot\overline{L}+F_{\bar t})=(\overline{Y}\cdot -\omega_{\overline{F}})=1;$$

из этого следует, что $(aF_{\bar t}-b\omega_{\overline{F}}\cdot\overline{Y})=a+b<m$.

Отметим, что мы не пользовались тем фактом, что точка x G-инвариантна, следовательно, предыдущие рассуждения проходят для любой точки на $\overline{F}$, входящей в пучок z с максимальной кратностью m. Пусть теперь точка x лежит на некоторой исключительной кривой $\overline{Z} \subset \overline{F}$, пересекающейся с кривой $\overline{L}$. Тогда, поскольку кривая $\overline{Z}$ необходимо является компонентой некоторого вырожденного слоя $F_{\overline{t}}$ и поскольку точка x G-инвариантна, x может быть только точкой пересечения компонент слоя $F_{\overline{t}}$, а слой $F_{\overline{t}}$ должен быть G-инвариантным. Это — единственно возможный случай, когда G-точка x не является «хорошей» на F. Предыдущие рассуждения показывают, что ее образ на V будет и в этом случае «хорошей» точкой.

Случай II — пара G-сопряженных точек (x, x') G-инвариантна. Если какая-нибудь из точек x, x' не является «хорошей» на $\overline{F}$, то по предыдущему она лежит на компоненте некоторого вырожденного слоя $F_{\overline{t}}$ и не лежит на других исключительных кривых поверхности $\overline{F}$. Так как любая компонента вырожденного слоя пересекает стягиваемую кривую L, то по крайней мере образ $(c(x), c(x'))$ пары (x, x') на V состоит из «хороших» точек. Предположим тем не менее, что ни пара (x, x'), ни ее образ $(c(x), c(x'))$ на V не являются «хорошими». Мы хотим показать, что это невозможно, если x и x' входят в пучок z с максимальной кратностью m. Пусть поверхность F вложена в $\mathbf{P}^3_k$, а поверхность V — в $\mathbf{P}^4_k$ с помощью антиканонического обратимого пучка. Тогда $\deg F = 3$, а $\deg V = 4$. Так как, по предположению, пара $(c(x), c(x'))$ не является «хорошей» на V, то по п. 3) леммы 0.9 найдется такое гиперплоское сечение $\overline{H}$ поверхности $\overline{V}$ (не обязательно G-инвариантное), что оно содержит геометрически неприводимую компоненту степени 2 $\overline{H}_1$ и $c(x), c(x') \in \overline{H}_1$. Простые вычисления показывают, что $p_a(\overline{H}_1) = 0$, $(\overline{H}_1 \cdot \overline{H}_1) = 0$. Пусть $y_0 = c(L)$, тогда если $y_0 \in \overline{H}_1$, то собственный прообраз $\overline{G}_1 \subset \overline{F}$ кривой $\overline{H}_1$ является исключительной кривой на $\overline{F}$ и $(\overline{G}_1 \cdot \overline{L}) = 1$, т. е. $\overline{G}_1$ — компонента некоторого вырожденного слоя $F_{\overline{t}}$. Так как пара (x, x') G-инвариантна и $x, x' \in \overline{G}_1$, то компонента $\overline{G}_1$ слоя $F_{\overline{t}}$ должна быть G-инвариантной. Но на поверхности F в стандартном пучке нет G-инвариантных компонент. Если $y_0 \notin \overline{H}_1$, то $\overline{G}_1$ является кривой второго порядка на $\overline{F}$ и $(\overline{G}_1 \cdot \overline{L}) = 0$. Плоскость в $\mathbf{P}^3_k$, проходящая через кривую $\overline{G}_1$, высекает на $\overline{F}$ еще некоторую прямую $\overline{Z}$. Так как $(\overline{Z} \cdot \overline{L}) = 1$, то $\overline{Z}$ является компонентой некоторого вырожденного слоя стандартного пучка. Но тогда

$$2a + 3b = (aF_{\overline{t}} - b\omega_F \cdot -\omega_F) = (aF_{\overline{t}} - b\omega_{\overline{F}} \cdot \overline{G}_1 + \overline{Z}) \geqslant 2m + b,$$

поскольку пучок $z \in Z^{++}(\overline{F})$, значит, не имеет неподвижных компонент, что противоречит неравенству $m > a + b$.

Итак, случай II полностью разобран.

Случай III — тройка G-сопряженных точек (x, x', x'') G-инвариантна. Так же как и в случае II, убеждаемся, что тройка $(c(x), c(x'), c(x''))$ на V состоит, по крайней мере, из «хороших» точек. Более того, каждая пара, составленная из точек $c(x), c(x'), c(x'')$, является «хорошей». Это следует из предыдущих рассуждений со следующим дополнительным замечанием в том месте, где использовалась G-инвариантность пары (x, x'). А именно, G-инвариантность

нужна была для доказательства того, что обе точки не могут лежать на одной и той же компоненте вырожденного слоя $F_{\overline{t}}$. Но ни какие две из G-инвариантной тройки сопряженных точек (x, x', x'') также не могут лежать на такой компоненте, иначе G-орбита любой точки должна состоять из четного числа точек.

Согласно п. 3) леммы 0.9 надо показать еще, что точки $c(x), c(x')$, $c(x'')$ не лежат одновременно ни на какой неприводимой компоненте $\overline{H}'$ степени 3 гиперплоского сечения $\overline{H}$ поверхности $\overline{V}$. Предположим противное, пусть тогда $\overline{G}'$ и $\overline{G}$ — собственные прообразы на $\overline{F}$ кривых $\overline{H}'$ и $\overline{H}$ соответственно. Если $y_0 \in \overline{H}'$, то $\overline{G} \sim -\omega_{\overline{F}}$ и $\overline{G} \setminus \overline{G}'$ — исключительная кривая первого рода, не пересекающая L. Так как $x, x', x'' \in \overline{G}'$, то

$$2a + 3b = (aF_{\overline{t}} - b\omega_F \cdot -\omega_F) = (aF_{\overline{t}} - b\omega_F \cdot \overline{G}' + (\overline{G} - \overline{G}')) \geqslant 3m + a + b,$$

что противоречит неравенствам $2a + b \geqslant 0$ и $m > a + b$. Если $y_0 \notin \overline{H}'$, то $\overline{G}' \sim -\omega_{\overline{F}} + \overline{L} - (\overline{G} \setminus \overline{G}')$, где $(\overline{G} \setminus \overline{G}')$ — исключительная кривая первого рода на $\overline{F}$, не пересекающая $\overline{L}$. Опять из того, что $x, x', x'' \in \overline{G}'$, получаем

$$\begin{aligned} 3m \leqslant (aF_{\overline{t}} - b\omega_F \cdot \overline{G}') = (aF_{\overline{t}} - b\omega_F \cdot -\omega_{\overline{F}} + \overline{L} - (\overline{G} - \overline{G}')) = \\ = 2a + 3b + 2a + b - a - b = 3(a + b), \end{aligned}$$

что противоречит неравенству $m > a + b$. Лемма полностью доказана. □

2.5. Теорема. *Каждый G-инвариантный пучок рациональных кривых на стандартной G-поверхности F с $(\omega_F \cdot \omega_F) = 3$ бирационально G-эквивалентен стандартному.*

Доказательство. Пусть $z = a[F_{\overline{t}}] - b\omega_F - \sum\limits_{i=1}^{s} m_i \overline{x}_i$, $b > 0$, — произвольный G-инвариантный пучок рациональных кривых на F. Тогда согласно п. 4), 0.7 существует такая стандартная G-поверхность $F' \to C$ с $(\omega_{F'} \cdot \omega_{F'}) = (\omega_F \cdot \omega_F) = 3$ и такое бирациональное (G, C)-отображение $h\colon F' \to F$, что пучок $h^*(z) = a'[F'_{\overline{t}}] - b'\omega_{F'} - \sum\limits_{i=1}^{s'} m'_i \overline{x}'_i = z' \in Z(\overline{F}')$ удовлетворяет условиям леммы 2.4 и $b' = b$. Пусть x — точка максимальной кратности среди точек $\overline{x}'_i$ такая, что $x \in \overline{F}'$. Обозначим через m ее кратность в z' и пусть $x', x'', \ldots$ — точки, G-сопряженные к точке x. По лемме 2.4 возможны только три случая: точка x G-инвариантна, пара точек (x, x') G-инвариантна и тройка точек (x, x', x'') G-инвариантна.

Предположим сначала, что в первых двух случаях точка x и пара (x, x') являются «хорошими» на F'. Тогда мы можем применить к пучку z' бирациональные G-автоморфизмы t_x и соответственно $s_{xx'}$. В результате получим

$$\begin{aligned} t_x^*(z') = a'(-[F'_{\overline{t}}] - 2\omega_{F'} - 2x) - b'(2\omega_{F'} + 3x) - m(-\omega_{F'} - 2x) - \sum_{\overline{x}'_i \neq x} m'_i t(\overline{x}'_i) = \\ = -a'[F'_{\overline{t}}] - (2a' + 2b + m)\omega_{F'} - (2a' + 3b' - 2m)x - \sum_{\overline{x}'_i \neq x} m'_i t(\overline{x}'_i); \end{aligned}$$

$$s^*_{xx'}(z') = a'(-[F'_{\bar{t}}] - 4\omega_{F'} - 4(x+x')) - b'(5\omega_{F'} + 6(x+x')) - \\ - m(-4\omega_{F'} - 5(x+x')) - \sum_{\overline{x}'_i \neq x, x'} m'_i s_{xx'}(\overline{x}'_i) = \\ = -a'[F'_{\bar{t}}] - (4a' + 5b - 4m)\omega_{F'} - (4a' + 6b' - 5m)(x+x') - \sum_{\overline{x}'_i \neq x, x'} m'_i s_{xx'}(\overline{x}'_i).$$

Если в первом случае точка x не является «хорошей», то, как показано при доказательстве леммы 2.4, она должна быть точкой пересечения компонент некоторого вырожденного слоя $F'_{\bar{t}}$; и мы можем применить к пучку z' бирациональный G-автоморфизм $\hat{t}_x$:

$$\hat{t}^*_x(z') = a'(-[F'_{\bar{t}}] - 2\omega_{F'} - 2x) - b'([F'_{\bar{t}}] + 2\omega_{F'} + x) - m(-[F'_{\bar{t}}] - \omega_{F'}) - \sum_{\overline{x}'_i \neq x} m'_i \hat{t}(\overline{x}'_i) = \\ = (-a' - b' + m)[F'_{\bar{t}}] - (2a' + 2b' - m)\omega_{F'} - (2a' + b')x - \sum_{\overline{x}'_i \neq x} m'_i \hat{t}(\overline{x}'_i).$$

Смысл применения автоморфизмов t_x, $s_{xx'}$, $\hat{t}_x$ заключается в том, что у преобразованного пучка коэффициент при $-\omega_{F'}$ оказывается меньше, чем у исходного. Действительно, поскольку $a' < 0$ (см. 1.1) и $m > a' + b'$ (см. 2.4 а)),

$$2a' + 3b' - 2m < 2a' + 3b' - 2a' - 2b' = b' = b, \\ 4a' + 5b' - 4m < 4a' + 5b' - 4a' - 4b' = b' = b, \\ 2a' + 2b' - m < 2a' + 2b' - a' - b' = a' + b' < b' = b.$$

Так как отображение h сохраняет неизменным этот коэффициент, то возвращаясь на F с помощью отображения h^{-1}, мы получаем G-инвариантный пучок рациональных кривых z_1, бирационально G-эквивалентный пучку z, коэффициент b_1 при $-\omega_F$ которого меньше, чем b.

Пусть теперь G-инвариантная пара (x, x') не является «хорошей» на F' или тройка (x, x', x'') G-инвариантна. Тогда по лемме 2.4 в) пара $(c(x), c(x'))$, соответственно тройка $(c(x), c(x'), c(x''))$, являются «хорошими» на поверхности дель Пеццо V, и мы можем воспользоваться результатами предложения 2.3. Бирациональные G-отображения $u_{xx'}\colon \widetilde{F}' \to F'$ и $u_{xx'x''}\colon \widetilde{F}' \to F'$ из этого предложения переводят пучок z' в пучки вида

$$u^*_{xx'}(z') = a'(-[\widetilde{F}'_{\bar{t}}] - 4\omega_{\widetilde{F}'} - 4(\tilde{x} + \tilde{x}')) - b'(2[\widetilde{F}'_{\bar{t}}] + 5\omega_{\widetilde{F}'} + 4\tilde{x} + 4\tilde{x}') - \\ - m(-2[\widetilde{F}'_{\bar{t}}] - 4\omega_{\widetilde{F}'} - 3\tilde{x} - 3\tilde{x}') - \sum_{\overline{x}'_i \neq x, x'} m'_i u^{-1}_{xx'}(\overline{x}'_i) = \\ = (-a' - 2b' + 2m)[\widetilde{F}'_{\bar{t}}] - (4a' + 5b' - 4m)\omega_{\widetilde{F}'} - \\ - (4a' + 4b' - 3m)(\tilde{x} + \tilde{x}') - \sum_{\overline{x}'_i \neq x, x'} m'_i u^{-1}_{xx'}(\overline{x}'_i),$$

$$u^*_{xx'x''}(z') = a'(-5[\widetilde{F}'_{\bar{t}}] - 12\omega_{\widetilde{F}'} - 8(\tilde{x} + \tilde{x}' + \tilde{x}'')) - \\ - b'(6[\widetilde{F}'_{\bar{t}}] + 13\omega_{\widetilde{F}'} + 8(\tilde{x} + \tilde{x}' + \tilde{x}'')) -$$

$$- m(-6[\widetilde{F}'_{\tilde{t}}] - 12\omega_{\widetilde{F}'} - 7(\tilde{x} + \tilde{x}' + \tilde{x}'')) - \sum_{\overline{x}'_i \neq x, x', x''} m'_i u^{-1}_{xx'x''}(\overline{x}'_i) =$$

$$= (-5a' - 6b' + 6m)[\widetilde{F}'_{\tilde{t}}] - (12a' + 13b' - 12m)\omega_{\widetilde{F}'} -$$

$$- (8a' + 8b' - 7m)(\tilde{x} + \tilde{x}' + \tilde{x}'') - \sum_{\overline{x}'_i \neq x, x', x''} m'_i u^{-1}_{xx'x''}(\overline{x}'_i),$$

коэффициенты при $-\omega_{\widetilde{F}'}$ которых, как легко видеть, меньше, чем $b' = b$. Воспользуемся теперь тем, что стандартные пучки поверхностей F, F' и $\widetilde{F}'$ бирационально G-эквивалентны (для F' и $\widetilde{F}'$ см. 2.3). Пусть $g\colon F \to \widetilde{F}'$ — некоторое бирациональное (G, C)-отображение. Тогда пучок $z_1 = g^* \cdot u^*_{xx'}(z') = g^* \cdot u^*_{xx'} \cdot h^*(z)$ (соответственно $z_1 = g^* \cdot u^*_{xx'x''}(z') = g^* \cdot u^*_{xx'x''} \cdot h^*(z)$) на F имеет тот же коэффициент при $-\omega_F$, что и пучок $u^*_{xx'}(z')$ (соответственно $u^*_{xx'x''}(z')$), т. е. меньший, чем b. Действительно, этот коэффициент равен половине индекса пересечения соответствующего пучка со слоем стандартного морфизма и, следовательно, остается постоянным при бирациональных (G, C)-отображениях.

Продолжая этот спуск, мы получим в конце пучок, коэффициент при $-\omega_F$ которого равен 0. Но легко видеть, что этим свойством обладает только стандартный пучок. Теорема доказана. □

Ясно, что имеют место следствия этой теоремы, аналогичные 1.7 и 1.8. Мы отметим, однако, еще одно, дающее ответ на один вопрос Б. Сегре.

2.6. Следствие. *Кубические поверхности F в $\mathbf{P}^3_k$, имеющие одну G-инвариантную прямую и* $\operatorname{rg}\operatorname{Pic} F = 2$, *бирационально нетривиальны.*

Доказательство. Действительно, пучок плоскостей в $\mathbf{P}^3_k$, проходящих через эту прямую, определяет на F не распадающийся (так как $\operatorname{rg}\operatorname{Pic} F = 2$) стандартной пучок коник. Результат следует теперь из аналога утверждения 1.7 для поверхности F. □

§ 3. Стандартные G-поверхности дель Пеццо степени 4

Следующее предложение показывает, что бирациональная классификация стандартных G-поверхностей с рациональным пучком и с $(\omega_F \cdot \omega_F) = 3$ эквивалентна бирациональной классификации стандартных (невырожденных) поверхностей дель Пеццо степени 4, имеющих G-точку.

3.1. Предложение. *Морфизм $c\colon F \to V$ стягивания G-кривой $L \subset F$ в предложении* 2.1 *осуществляет биективное соответствие $\{F\} \to \{V\}$ между множествами классов относительно бирациональной G-эквивалентности стандартных G-поверхностей F и G-поверхностей дель Пеццо V, обладающих G-точкой степени* 1.

Доказательство. В проверке нуждается только тот факт, что отображение $\{F\} \to \{V\}$ сюръективно. Пусть $x_0 \in V$ — некоторая G-точка степени 1. Покажем, что она является хорошей точкой на V. Для этого заметим, что на поверхности дель Пеццо $\overline{V}$ степени 4 через одну точку могут проходить самое большее две исключительные кривые первого рода (см., например, [2]). Если x_0 лежит только на одной исключительной кривой $\overline{X} \subset \overline{V}$, то эта кривая

должна быть G-инвариантной, так как x_0 — G-точка. Но на стандартной поверхности дель Пеццо нет G-инвариантных кривых первого рода. Если же x_0 является точкой пересечения двух исключительных кривых первого рода, то вместе они составляют G-инвариантную кривую, индекс пересечения которой с классом $-\omega_{\overline{V}}$ равен 2. Однако, это также невозможно на стандартной G-поверхности дель Пеццо, поскольку $\operatorname{rg}\operatorname{Pic} V = 1$ и любая G-кривая эквивалентна — $n\omega$, где n — некоторое целое число. В частности, $(-n\omega \cdot -n\omega) = 4n^2$ кратно четырем. Следовательно, G-точка x_0 «хорошая». Пусть $F \to V$ — морфизм, являющийся моноидальным преобразованием с центром в x_0. Тогда F — поверхность дель Пеццо степени 3, и если реализовать F в виде кубической поверхности в $\mathbf{P}^3_k$, то пучок плоскостей, проходящих через прообраз точки x_0, будет высекать на F G-инвариантный пучок коник. Очевидно, что он — стандартный, так как $\operatorname{rg}\operatorname{Pic} F = 2$. Предложение доказано. □

Прежде чем сформулировать основной результат о поверхностях дель Пеццо V без G-точек, докажем следующее

3.2. Предложение. *С каждой G-инвариантной «хорошей» парой точек (x, x') на поверхности V связан бирациональный G-автоморфизм второго порядка $v_{xx'}\colon V \to V$, действующий на группу $Z(\overline{V})^G$ по формулам*:

$$v^*_{xx'}(\omega_V) = 3\omega_V + 4(x + x'), \quad v^*_{xx'}(x + x') = -2\omega_V - 3(x + x'),$$
$$v^*_{xx'}(y) = v_{xx'}(y), \quad y \neq x, x'.$$

Доказательство. Определим $v_{xx'}$ в виде композиции $d_{xx'} \cdot t \cdot d^{-1}_{xx'}$, где $d_{xx'}\colon V' \to V$ — моноидальное преобразование с центром в паре точек (x, x'), $t\colon V' \to V'$ — G-автоморфизм из леммы 0.8. Проверка формул действия на группу $Z(\overline{V})^G$ делается обычным способом. Доказательство закончено. □

3.3. Теорема. *Пусть V' — произвольная G-поверхность с $(\omega_{V'} \cdot \omega_{V'}) \geqslant 4$, линейная система $|-\omega_{V'}|$ которой не имеет базисных точек и неподвижных компонент, и V — стандартная невырожденная G-поверхность дель Пеццо степени 4, не имеющая G-точек степени 1. Тогда для любого бирационального G-отображения $h\colon V \to V'$ существует такой бирациональный G-автоморфизм $g\colon V \to V$, что отображение $h \cdot g\colon V \to V'$ является G-изоморфизмом.*

Замечание. Этот результат аналогичен как по содержанию, так и по способу доказательства, результату п. 5.8 работы [3], относящегося к стандартным G-поверхностям дель Пеццо степени $1, 2$ и 3.

Доказательство. Пусть $(\omega_{V'} \cdot \omega_{V'}) = r$, $r \geqslant 4$. Тогда для элемента $z = h^*(-\omega_{V'}) = -a\omega_V - \sum\limits_{i=1}^{s} m_i \overline{x}_i$ в группе $Z(\overline{V})$ выполнены соотношения

$$(z \cdot z) = 4a^2 - \sum_{i=1}^{s} m_i^2 = r, \quad \Omega(z) = -4a + \sum_{i=1}^{s} m_i = -r.$$

Так как $-\omega_{V'} \in V^{++}(\overline{V}')$, то $m_i \geqslant 0$ для всех $1 \leqslant i \leqslant s$. Ясно, что при $0 \leqslant m_i \leqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant s$, существует только одно решение системы

$$m_1 = \ldots = m_s = 0, \quad a = 1, \quad r = 4.$$

В этом случае из леммы 5.11 работы [3] (примененной к h^{-1}) и из того, что $r = 4$, следует, что h является G-изоморфизмом, и в качестве g можно взять тождественный изоморфизм.

Пусть теперь не все m_i равны нулю и пусть x — точка максимальной кратности, скажем m, среди $\overline{x}_i$, лежащая на $\overline{V}$, а $x', x'', \ldots$ — ее сопряженные. Тогда из очевидного неравенства

$$4a^2 = \sum m_i^2 + r < m\Big(\sum m_i + r\Big) = 4am$$

находим, что $m > a$. Следовательно, число G-сопряженных точек максимальной кратности $x, x', x'', \ldots$ не больше 3. Действительно, обозначим это число через q, тогда

$$4a - qm \geqslant 4 \quad \text{или} \quad (4-q)a > 4.$$

Но так как $a > 0$ ($z \in Z^+(\overline{V})$, см. 0.3), то $q < 4$.

По условию поверхность V не имеет G-точек степени 1. Следовательно, на ней нет и G-точек степени 3. Действительно, рассуждениями, аналогичными рассуждениям в доказательстве предложения 3.1, можно показать, что G-точка степени 3 не может лежать на исключительных кривых первого рода поверхности $\overline{V}$. Но тогда четвертая базисная точка пучка кривых из линейной системы $|-\omega_{\overline{V}}|$, проходящих через три G-сопряженные точки, является, очевидно, G-инвариантной и имеет степень 1, что противоречит предположению.

Следовательно, в нашем случае у точки x имеется только одна сопряженная с ней точка x'. Покажем, что G-инвариантная пара (x, x') G-сопряженных точек x, x' является «хорошей» на $\overline{V}$. По лемме 0.9 3) надо проверить, во-первых, что каждая из точек x, x' «хорошая», и, во-вторых, что они не лежат на неприводимой компоненте степени 2 гиперплоского сечения при вложении $\overline{V} \subset \mathbf{P}^4_{\overline{k}}$. Пусть $\overline{X} \subset \overline{V}$ — любая исключительная кривая первого рода, тогда

$$\big(z \cdot [\overline{X}]\big) = \big(-a\omega_V \cdot [\overline{X}]\big) = a < m.$$

И так как $z \in Z^{++}(\overline{V})$, то из этого следует, что ни одна из точек x, x' не может лежать на $\overline{X}$. Пусть теперь $\overline{H}_1$ — любая компонента степени 2 гиперплоского сечения $\overline{H}$. Тогда

$$\big(z \cdot [\overline{H}_1]\big) = \big(-\omega_V \cdot [\overline{H}_1]\big) = 2a < 2m,$$

поэтому обе точки x, x' не могут одновременно лежать на кривой $\overline{H}_1$.

Применим к элементу z бирациональный G-автоморфизм $v_{xx'}$, определенный в предложении 3.1. В результате получим

$$v^*_{xx'}(z) = -a(3\omega_V + 4x + 4x') - m(-2\omega_V - 3x - 3x') - \sum_{\overline{x}_i \neq x, x'} m_i v(\overline{x}_i) =$$
$$= -(3a - 2m)\omega_V - (4a - 3m)(x + x') - \sum_{\overline{x}_i \neq x, x'} m_i v(\overline{x}_i).$$

Так как $m > a$, то $3a - 2m < a$. Таким образом, бирациональный G-автоморфизм $v_{xx'}$ переводит элемент z в элемент $v^*_{xx'}(z)$ с меньшим значением

коэффициента при $-\omega_V$. Продолжая этот спуск, мы добьемся того, что этот коэффициент станет равным 1. Следовательно, элемент z перейдет в элемент $-\omega_V$ и, стало быть, $r = 4$. Обозначим через g композицию отображений $v_{xx'}$ такую, что $g^*(z) = -\omega_V$. Тогда бирациональное G-отображение $h \cdot g\colon V \to V'$ переводит антиканонический класс в антиканонический, значит, как уже отмечалось выше, оно должно быть G-изоморфизмом. Теорема полностью доказана. □

3.4. Следствие. *Группа бирациональных G-автоморфизмов стандартной G-поверхности дель Пеццо степени 4, не имеющей G-точек степени 1, порождена бирациональными G-автоморфизмами $v_{xx'}$, где (x, x') пробегает G-инвариантные «хорошие» пары точек.*

3.5. Теорема. *Стандартная невырожденная G-поверхность дель Пеццо V степени 4, не имеющая G-точек степени 1, не может быть бирационально G-эквивалентной никакой G-поверхности с рациональным пучком.*

Доказательство. Допустим, что существует бирациональное G-отображение $h\colon V \to F$, где F — некоторая стандартная G-поверхность с рациональным пучком. Тогда в группе $Z(\overline{V})^G$ существует элемент $z = h^*([F_{\bar{t}}]) = -a\omega_V - \sum m_i\overline{x}_i$, обладающий свойствами:

$$(z \cdot z) = 4a^2 - \sum m_i^2 = 0, \quad \Omega(z) = -4a + \sum m_i = -2.$$

Так как $z \in Z^{++}(\overline{V})$, то $a > 0$, следовательно, не все m_i равны нулю. Пусть, как и в доказательстве теоремы 3.3, x — точка максимальной кратности m среди x_i, x' — ее G-сопряженная. Тогда из неравенства

$$4a^2 = \sum m_i^2 < m\Big(\sum m_i + 2\Big) = 4am$$

следует, что $m > a$. Так же, как и в доказательстве теоремы 3.3, показывается, что пара точек (x, x') является хорошей на V, следовательно, мы можем применить к пучку z оператор $v^*_{xx'}$ из предложения 3.2. Тогда ввиду того, что $m > a$, простые вычисления показывают, что коэффициент при $-\omega_V$ уменьшится. В то же время операторы $v^*_{xx'}$ переводят z снова в элемент с такими же свойствами, и мы можем продолжать этот спуск неограниченно. Но это противоречит тому, что коэффициент при $-\omega_V$ должен оставаться положительным. Следовательно, элемента z с указанными свойствами не существует. Теорема доказана. □

Замечание. Из этой теоремы и из предложения 3.1 следует, очевидно, утверждение а) теоремы 3.1 сформулированной во введении.

§ 4. Стандартные формы с рациональным пучком и с $(\omega_F \cdot \omega_F) \geqslant 5$

Содержание этого параграфа составляет доказательство следующей теоремы.

4.1. Теорема. *Пусть F — стандартная поверхность с пучком рациональных кривых и $n = (\omega_F \cdot \omega_F) \geqslant 5$. Тогда*

(1) *при* $n = 5$ *поверхность* F *бирационально* G*-эквивалентна плоскости* $\mathbf{P}^2_k$;

(2) *при* $n = 6$ *существует* G*-морфизм* $F \to F'$, *где* F' — *такая неособая* G*-поверхность, что* F' *изоморфна квадрике в* $\mathbf{P}^3_k$;

(3) *не существует стандартных форм с* $n = 7$;

(4) *при* $n = 8$ *поверхность* F *бирационально* G*-эквивалентна* G*-поверхности вида* $C \times C'$, *где* C *и* C' — *неособые геометрически неприводимые* G*-кривые рода нуль.*

З а м е ч а н и е. Число n не может быть больше 8 (см. [6], 1.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) Рассмотрим линейную систему $|-F_{\bar{t}} - \omega_F|$. По теореме Римана–Роха

$$\dim H^0(F, \mathcal{O}(-F_{\bar{t}} - \omega_F)) \geqslant \frac{(-F_{\bar{t}} - \omega_F \cdot F_{\bar{t}} - 2\omega_F)}{2} + 1 = 3.$$

С другой стороны, непосредственные вычисления дают

$$p_a(-F_{\bar{t}} - \omega_F) = 0, \quad (-F_{\bar{t}} - \omega_F \cdot -F_{\bar{t}} - \omega_F) = 1.$$

Покажем, что линейная система $|-F_{\bar{t}} - \omega_F|$ не имеет неподвижных компонент. Пусть X_0 — предполагаемая неподвижная компонента. Тогда $X_0 \sim -aF_{\bar{t}} - \omega_F$, где $a > 1$. Поскольку $(X_0 \cdot F_{\bar{t}}) = 2$ и $(X_0 \cdot X_0) = -4a + 5$ является нечетным числом, кривая X_0 должна быть геометрически неприводима. Но

$$p_a(X_0) = \frac{(X_0 \cdot X_0 + \omega_F)}{2} + 1 = -2a < 0.$$

Это противоречие показывает, что неподвижных компонент в системе $|-F_{\bar{t}} - \omega_F|$ нет. Легко показать также, что эта система не имеет и базисных точек. Следовательно, обратимый пучок $\mathcal{O}(-F_{\bar{t}} - \omega_F)$ задает бирациональный G-морфизм $F \to \mathbf{P}^2_k$. Можно показать, что он стягивает 4 сопряженных исключительных кривых первого рода, сумма которых принадлежит классу $-3F_{\bar{t}} - 2\omega_F$. Утверждение (1) доказано.

(2) Рассмотрим линейную систему $|-2F_{\bar{t}} - \omega_F|$. По теореме Римана–Роха

$$\dim H^0(F, \mathcal{O}(-2F_{\bar{t}} - \omega_F)) \geqslant 1.$$

С другой стороны, $(-2F_{\bar{t}} - \omega_F \cdot -2F_{\bar{t}} - \omega_F) = -2$ и $p_a(-2F_{\bar{t}} - \omega_F) = 0$. Отсюда, как и выше, легко вывести, что в линейной системе существует G-инвариантная пара непересекающихся исключительных кривых первого рода. Пусть $F \to F'$ — G-морфизм сгягивания этих кривых. Тогда $\operatorname{rg} \operatorname{Pic} F' = 1$, $(\omega_{F'} \cdot \omega_{F'}) = 8$. Отсюда следует, что поверхность $\overline{F}'$ (без G-структуры!) изоморфна поверхности $\mathbf{P}^1_k \times \mathbf{P}^1_k$. Если класс слоя $F_{\bar{t}}$ принадлежит $\operatorname{Pic} F$, что имеет место в том и только в том случае, когда $(\operatorname{Pic} \overline{F})^G = \operatorname{Pic} F$ (см. 1.2), то его прямой образ при морфизме $F \to F'$ принадлежит $\operatorname{Pic} F'$ и равен $-\dfrac{1}{2}\omega_{F'}$. Полная линейная система $\left|-\dfrac{1}{2}\omega_{F'}\right|$ осуществляет G-изоморфное вложение поверхности F' в виде квадрики в $\mathbf{P}^3_k$. Если $[F_{\bar{t}}] \in (\operatorname{Pic} \overline{F})^G$, но $[F_{\bar{t}}] \notin \operatorname{Pic} F$, то

$-\frac{1}{2}\omega_{F'} \notin \operatorname{Pic} F'$. Следовательно, каждое G-вложение поверхности F' в проективное пространство осуществляется с помощью некоторой целой кратности антиканонического пучка. Простейшее из них — антиканоническое вложение реализует F' в виде G-поверхности степени 8 в $\mathbf{P}^8$.

(3). Если $n = 7$, то из теоремы 1.1 работы [6] следует, что стандартный морфизм $F \to C$ имеет G-сечение. Значит, компоненты единственного вырожденного слоя являются G-кривыми и каждую из них можно стянуть. Иначе говоря, F не является стандартной G-поверхностью.

(4). Рассмотрим, наконец, случай $n = 8$. Так как стандартный морфизм $F \to C$ не имеет в этом случае вырожденных слоев (см. п. 0.7 3)), то поверхность $\overline{F}$ (без G-структуры) изоморфна некоторой линейчатой поверхности $\mathbf{F}_m$. Если $m > 0$, то образ канонического сечения $S_m \subset \mathbf{F}_m$ на поверхности $\overline{F}$ G-инвариантен, так как он является единственной неприводимой кривой на $\overline{F}$ с отрицательным индексом самопересечения $-m$ (см. [6], 3.1). Следовательно, существует G-сечение $C \to F$, и поверхность F бирационально G-эквивалентна G-поверхности вида $C \times \mathbf{P}^1_k$. Если $m = 0$, то поверхность F является, очевидно, прямым произведением базы C на слой C'. Теорема полностью доказана. □

Литература

[1] Манин Ю. И. Рациональные G-поверхности // ДАН СССР. — 1967. — Т. 175, № 1. — С. 28–30.

[2] Манин Ю. И. Рациональные поверхности над совершенными полями. I // Publ. Math. IHES. — 1966. — V. 30. — P. 55–113.

[3] Манин Ю. И. Рациональные поверхности над совершенными полями. II // Матем. сб. — 1967. — Т. 72(114). — С. 161–192.

[4] Manin Yu. Hypersurfaces cubiques. II. Automorphismes birationnels en dimension deux // Invent. math. — 1969. — V. 6. — P. 334–352.

[5] Нагата М. Рациональные поверхности. II // Математика. — 1964. — Т. 8, № 4. — С. 75–94.

[6] Исковских В. А. Рациональные поверхности с пучком рациональных кривых // Матем. сб. — 1967. — Т. 74(116). — С. 608–638.

Контрпример к принципу Хассе для системы двух квадратичных форм от пяти переменных

Указывается система двух квадратичных форм от пяти переменных с целыми коэффициентами, представляющая нуль в поле вещественных чисел и во всех p-адических полях, но не представляющая его в поле рациональных чисел.

Знаменитая теорема Минковского–Хассе утверждает, что любая квадратичная форма $\sum\limits_{i,j} a_{ij}x_ix_j$ с коэффициентами из поля алгебраических чисел K, $[K:Q]<\infty$, представляет нуль в K, если она представляет его в пополнениях K_γ поля K по всем нормированиям (архимедовым и неархимедовым). Распространение этого утверждения на произвольные формы, а также на системы форм носит название принципа Хассе. В подходящей формулировке этот принцип распространяется на многие другие объекты, определенные над K.

Известны примеры нарушения принципа Хассе уже для форм третьей степени от трех и четырех переменных.

Цель этой заметки — показать, что он не верен для системы двух квадратичных форм от пяти переменных.

П р е д л о ж е н и е. *Система уравнений*

$$\begin{cases} x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_3x_5=0, \\ x_3x_5-x_4^2+3x_5^2=0 \end{cases} \tag{1}$$

имеет нетривиальное решение в поле вещественных чисел $\mathbf{R}$ *и во всех* p*-адических полях* $\mathbf{Q}_p$*, но не имеет нетривиального решения в поле рациональных чисел* $\mathbf{Q}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверить локальную разрешимость не представляет труда. В саном деле, полагая $x_5=0$, получаем, что $x_4=0$, и (1) сводится к уравнению

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0,$$

которое имеет нетривиальное решение во всех локальных полях, кроме $\mathbf{R}$ и $\mathbf{Q}_2$ (см. [1], с. 72). В поле $\mathbf{R}$ можно указать, например, следующие решения:

Матем. заметки. — 1971. — Т. 10, № 3. — С. 253–257.

$x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = \pm\sqrt{3}x_5$. Для проверки разрешимости в поле $\mathbf{Q}_2$ положим $x_3 = -3x_5$; получим

$$x_1^2 + x_2^2 + 6x_5^2 = 0.$$

Это уравнение разрешимо по модулю 8 со значениями $x_1 = x_2 = x_5 \equiv \equiv 1 \pmod 8$, поэтому согласно общей теории (см. [1], с. 74) оно имеет нетривиальное решение в поле $\mathbf{Q}_2$.

Покажем теперь, что система (1) не имеет рациональных (или целых, что то же самое) решений. Для этого преобразуем ее к другому виду. Заметим, что система (1) определяет некоторую проективную поверхность V в $\mathbf{P}^4$. Поверхность V имеет, как легко проверить, только две особые точки $(1, \pm\sqrt{-1}, 0, 0, 0)$ со значениями в поле $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$. Преобразование будет заключаться в том, что мы заменим V на ее неособую модель, т. е. на некоторую полную поверхность F без особых точек, регулярно и бирационально отображающуюся на V. Ясно, что если нет рациональных точек на V, то их не будет и на F, и наоборот (так как особые точки V не рациональны).

Поверхность F мы склеим из двух кусков F_1 и F_2, заданных в $\mathbf{A}^1 \times \mathbf{P}^2$ уравнениями

$$F_1\colon\ z_0^2 + z_1^2 + (y^2-2)(y^2-3)z_2^2 = 0,$$
$$F_2\colon\ z_0^2 + z_1^2 + (1-2y^2)(1-3y^2)z_2^2 = 0,$$

где y — координата аффинной прямой $\mathbf{A}^1$ и (z_0, z_1, z_2) — однородные координаты плоскости $\mathbf{P}^2$. Склейка осуществляется посредством формул

$$y \longleftrightarrow \frac{1}{y},$$
$$(z_0, z_1, z_2) \longleftrightarrow \left(\frac{1}{y^2}z_0, \frac{1}{y^2}z_1, \frac{1}{y^2}z_2\right),$$

отождествляющих подмножества из F_1 и F_2 с $y \neq 0$. Две прямые $\mathbf{A}^1$ склеиваются при этом в проективную прямую $\mathbf{P}^1$ а проекции F_1 и F_2 на первый множитель дают собственный сюръективный морфизм $F \to \mathbf{P}^1$, слоями которого являются проективные коники. Так как F_1 и F_2 не имеют особых точек, то их не имеет и F. Бирациональный морфизм $F \to V$ задается формулами

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \begin{cases} (z_0, z_1, (y^2-3)z_2, yz_2, z_2) & \text{на } F_1, \\ (z_0, z_1, (1-3y^2)z_2, z_2, y^2z_2) & \text{на } F_2. \end{cases}$$

Множество $F \setminus F_1$ состоит только из одного слоя над точкой $y = 0$ поверхности F_2:

$$z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 = 0,$$

который, очевидно, не имеет рациональных точек. Поэтому достаточно показать, что таких точек нет на F_1. Для этого удобно представить F_1 в виде подмножества в $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^2$, определенного уравнением

$$y_0^4 z_0^2 + y_0^4 z_1^2 + (y_1^2 - 2y_0^2)(y_1^2 - 3y_0^2)z_2^2 = 0 \tag{2}$$

и условием $y_0 \neq 0$, где (y_0, y_1) — однородные координаты прямой $\mathbf{P}^1$.

Доказательство предложения завершает теперь следующая

Лемма. *Уравнение* (2) *не имеет решений в целых числах с* $y_0 \neq 0$, *если не равны нулю одновременно* z_0, z_1, z_2.

Доказательство. Ввиду однородности мы можем считать (y_0, y_1) взаимно простыми; то же самое относится и к (z_0, z_1, z_2). Ясно, что решения могут существовать только в интервале $(y_1^2 - 2y_0^2)(y_1^2 - 3y_0^2) < 0$, т. е.

$$\begin{cases} y_1^2 - 2y_0^2 > 0, \\ y_1^2 - 3y_0^2 < 0, \end{cases} \tag{3}$$

где расположены вещественные компоненты. Покажем, что здесь их тоже нет. С учетом условий (3) перепишем уравнение (2) в виде

$$y_0^4 z_0^2 + y_0^4 z_1^2 = (y_1^2 - 2y_0^2)(3y_0^2 - y_1^2) z_2^2, \tag{4}$$

где первые два множителя в правой части положительны. Более того, они взаимно просты. Действительно, их сумма равна y_0^2, следовательно, любой их общий делитель делит y_0, а значит, и y_1. Но мы предположили, что $(y_0, y_1) = 1$ и $y_0 \neq 0$. Ясно, что $z_2 \neq 0$, иначе было бы $z_0 = z_1 = 0$. Далее, если существует целое решение уравнения (4), то число, стоящее в правой части, являясь суммой квадратов, содержит простые делители вида $4n + 3$ только в четных степенях. Отсюда следует, что ни один из первых двух множителей правой части (4) не может иметь вид $4m + 3$, так как эти множители взаимно просты и положительны. Но если

$$y_1^2 - 2y_0^2 \equiv 1 \pmod 4,$$
$$3y_0^2 - y_1^2 \equiv 1 \pmod 4,$$

тогда, складывая, получаем $y_0^2 \equiv 2 \pmod 4$, чего не может быть. Аналогично, невозможно сравнение $y_1^2 - 2y_0^2 \equiv 2 \pmod 4$, или $3y_0^2 - y_1^2 \equiv 2 \pmod 4$. Осталось разобрать случай, когда $y_1^2 - 2y_0^2$ или $3t_0^2 - y_1^2$ делятся на 4. Так как $(y_0, y_1) = 1$ и $y_0 \neq 0$, то, очевидно, $y_1^2 - 2y_0^2 \not\equiv 0 \pmod 4$ ($y_1 \neq 0$, так как $y_1^2 - 2y_0^2 > 0$). Невозможно и сравнение $3y_0^2 - y_1^2 \equiv 0 \pmod 4$. Действительно, y_0 должно быть нечетным, и так как $y_0 \neq 0$, $y_1 \neq 0$, то

$$3y_0^2 \equiv 3 \pmod 4, \quad \text{а} \quad y_1^2 \equiv 0 \ \text{ или } \ 1 \pmod 4.$$

Следовательно, $3y_0^2 - y_1^2 \not\equiv 0 \pmod 4$. Таким образом, уравнение (4) не может иметь целых решений с условиями (3). Доказательство закончено.

Замечание. Если в уравнении (2) число 2 заменить на любое положительное целое число вида $2 + 4n$, а число 3 — на число $3 + 4n$, то те же рассуждения показывают, что утверждение леммы останется справедливым. Это позволяет получить бесконечную серию контрпримеров

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_3 x_5 = 0, \\ x_3 x_5 - x_4^2 + (3 + 4n) x_5^2 = 0, \end{cases}$$

где $n \geqslant 0$ — любое целое число.

И н т е р п р е т а ц и я. Поверхность F, построенная в доказательстве предложения, является рациональной: над полем $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$ она бирационально эквивалентна плоскости. В известных в литературе примерах нарушения принципа Хассе для рациональных поверхностей число Пикара поверхности (т. е. ранг группы Пикара над алгебраическим замыканием основного поля) $\rho \geqslant 7$. Нетрудно вычислить это число для поверхности F, пользуясь, например, формулой Нётера $(\omega_F \cdot \omega_F) + \rho = 10$ и тем фактом, что поверхность V является образом F при отображении с помощью антиканонического обратимого пучка ω_F^{-1}. Оно равно 6. Для рациональных поверхностей с $\rho \leqslant 5$ принцип Хассе справедлив, так что наш пример является в этом смысле экстремальным. Он показывает также, что однопараметрическое семейство коник уже не подчиняется принципу Хассе.

Литература

[1] Б о р е в и ч З. И., Ш а ф а р е в и ч И. Р. Теория чисел. — М.: Наука, 1964.

Бирациональные свойства поверхности степени 4 в $\mathbf{P}^4_k$

1. Пусть k — совершенное поле и $F \subset \mathbf{P}^4_k$ — гладкая проективная поверхность четвертой степени, определенная над k и не лежащая ни в какой гиперплоскости пространства $\mathbf{P}^4_k$. Известно (см. [3, 5]), что

(а) F является рациональной поверхностью, т. е. $F \underset{k}{\otimes} \bar{k}$ бирационально эквивалентна над $\bar{k}$ плоскости $\mathbf{P}^2_{\bar{k}}$, где $\bar{k}$ — алгебраическое замыкание поля k;

(б) F является полным пересечением двух квадрик в $\mathbf{P}^4_k$, и $\Omega_F^{-1} \simeq O_F(1)$, где Ω_F — канонический обратимый пучок на F. В смысле определения 3.1 работы [3] F — поверхность дель Пеццо степени 4;

(в) на $\overline{F} = F \otimes \bar{k}$ лежат 16 прямых. Они и только они являются исключительными кривыми первого рода на $\overline{F}$. Классы этих прямых порождают группу $\operatorname{Pic} \overline{F} \simeq (\mathbf{Z})^6$.

Конфигурация 16 прямых $\mathcal{E}_4$ на $\overline{F}$ описывается графом (3.17.1) в [3]. Группа Галуа $G = \operatorname{Gal}(\bar{k}/k)$ действует на $F \otimes \bar{k}$ и переводит $\mathcal{E}_4$ в себя с сохранением индексов пересечений.

Поверхность F тогда и только тогда k-минимальна (в смысле определения 0.4 из [3]), когда каждая G-орбита в $\mathcal{E}_4$ состоит более чем из одной прямой и содержит хотя бы одну пару пересекающихся прямых.

Индексом минимальности $r(F)$ поверхности F называется максимальное число попарно не пересекающихся прямых, составляющих одну орбиту в $\mathcal{E}_4$.

(г) Индекс $r(F)$ не больше 5. Если $r(F) \equiv 1 \pmod 2$, то F бирационально тривиально над k. Если $r(F) \equiv 0 \pmod 2$, то необходимым и достаточным условием бирациональной тривиальности F является существование на ней k-точки (см. [3], 3.1–3.15).

В этой заметке мы доказываем следующие результаты.

Теорема 1. *Поверхность F k-минимальна тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rk} \operatorname{Pic} F = 1$ *или когда* $\operatorname{rk} \operatorname{Pic} F = 2$ *и F является стандартной поверхностью с рациональным пучком* (см. определение 4.1 в [4]). *В последнем случае F снабжается структурой стандартной поверхности двумя способами.*

Матем. сборник. — 1972. — Т. 88(130). — С. 31–37.

Теорема 2. *Стандартная поверхность с рациональным пучком и с* $(\Omega_F \cdot \Omega_F) = 4$ *бирационально нетривиальна над* k.

Эти утверждения вместе с результатами 2.5, 2.6, 3.1 и 3.3 работы [2] позволяют сделать следующий

Вывод. *Если поверхность* F k*-минимальна, то она бирационально нетривиальна над* k.

2. Доказательство теоремы 1. Обозначим через $D(\mathcal{E}_4)$ группу дивизоров на F, порожденную прямыми $Z_i \in \mathcal{E}_4$, $1 \leqslant i \leqslant 16$. Имеет место точная последовательность G-модулей

$$0 \to D^0(\mathcal{E}_4) \to D(\mathcal{E}_4) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Cl}(\overline{F}) \to 0, \tag{1}$$

где $\mathrm{Cl}(\overline{F}) \simeq \mathrm{Pic}\,\overline{F}$ — группа классов дивизоров поверхности $\overline{F}$, а $D^0(\mathcal{E}_4)$ — ядро естественного отображения α. Пусть P обозначает подгруппу группы $\mathrm{Pic}\,F$, порожденную классами G-инвариантных дивизоров $D(\mathcal{E}_4)^G$ или, что то же самое, классами G-орбит прямых Z_i из $\mathcal{E}_4$. Тогда точная последовательность когомологий, ассоциированная с (1), показывает, что подгруппа P в $(\mathrm{Pic}\,\overline{F})^G$ имеет конечный индекс. Так как, кроме того, $\mathrm{Pic}\,\overline{F} \subset (\mathrm{Pic}\,\overline{F})^G$, то индекс $[\mathrm{Pic}\,F : P]$ также конечен.

Предположим теперь, что поверхность F k-минимальна, и воспользуемся тем, что в этом случае имеется таблица (см. [3], 3.22.1, 3.21.1) всевозможных разбиений $\mathcal{E}_4$ на орбиты. Покажем, что если в $\mathcal{E}_4$ имеется орбита Z вида

(2)

состоящая из m пар прямых (Z_i, Z_i'), где $(Z_i \cdot Z_i') = 1$ и $(Z_i \cdot Z_j) = (Z_i \cdot Z_j') = 0$ для $i \neq j$, то $\mathrm{rk}\,\mathrm{Pic}\,F = 2$ и F является стандартной поверхностью с рациональным пучком. Для этого заметим, что $(Z \cdot Z) = 0$ и $p_a(Z) = 1 - m$. По теореме Римана–Роха $\dim H^0(F, O_F(Z)) \geqslant m + 1$. Так как Z неприводима как кривая над k, то линейная система $|Z|$ не имеет неподвижных компонент, и, следовательно, обратимый пучок $O_F(Z)$ определяет k-морфизм (поскольку $(Z \cdot Z) = 0$) $F \to C$, где C — некоторая кривая, необходимо имеющая род нуль. Легко видеть, что геометрический слой этого морфизма $F_{\overline{t}}$, $\overline{t} \in \overline{C}$, тоже имеет род нуль. Так как F k-минимальна, то в слоях морфизма $F \to C$ не может быть G-инвариантных стягиваемых кривых. А это означает по определению (см. [4], 4.1), что $F \to C$ — стандартная поверхность с рациональным пучком. Согласно 1.3 из [1], группа $(\mathrm{Pic}\,\overline{F})^G$ имеет в этом случае ранг 2 и порождена классом геометрического слоя $F_{\overline{t}}$ и каноническим классом ω_F. Более того, в силу 1.2 из [2] индекс $[(\mathrm{Pic}\,\overline{F})^G : \mathrm{Pic}\,F]$ равен 1 или 2 в зависимости от того, имеет ли C k-точку или нет.

Чтобы показать, что на F есть два стандартных пучка рациональных кривых, рассмотрим линейную систему $|-F_{\bar{t}} - \omega_F|$ в случае $\operatorname{Pic} F = (\operatorname{Pic} \overline{F})^G$ и $|-2F_{\bar{t}} - 2\omega_F|$ в противном случае. Эти линейные системы определены над k и, как показывает теорема Римана–Роха, подвижны. Численные характеристики у них такие же, как и у стандартного пучка рациональных кривых. Надо показать только, что линейная система $|-F_{\bar{t}} - \omega_F|$ (соответственно $|-2F_{\bar{t}} - 2\omega_F|$) не содержит неподвижных компонент и G-инвариантных стягиваемых кривых. Впрочем, последнее очевидно ввиду k-минимальности F или в силу того, что $\operatorname{rk} \operatorname{Pic} F = 2$. Так как $(-F_{\bar{t}} - \omega_F \cdot -\omega_F) = 2$ и так как $-\omega_F$ — класс гиперплоского сечения, то система $|-F_{\bar{t}} - \omega_F|$ состоит из кривых второго порядка. Следовательно, неподвижной компонентой может быть только прямая. Но это невозможно из-за G-инвариантности неподвижной компоненты и k-минимальности F. Аналогично разбирается случай с системой $|-2F_{\bar{t}} - 2\omega_F|$.

В таблицах 3.21.1 и 3.22.1 работы [3] только 7 разбиений $\mathcal{E}_4$ на орбиты не содержат орбит вида (2), а именно это разбиения с номерами I, X, VI, XVI–XIX. Покажем, что во всех этих случаях ранг группы P равен 1, и, следовательно, $\operatorname{rk} \operatorname{Pic} F = 1$. Для этого достаточно показать, что класс каждой орбиты, входящей в указанные разбиения, пропорционален в $\operatorname{Pic} F$ классу гиперплоского сечения. Заметим, что конфигурация прямых

(3)

описываемая графом

высекается гиперплоскостью. В самом деле, проводя через любую из двух пар скрещивающихся прямых гиперплоскость, видим, что она высекает на F дополнительную пару, так как содержит по две точки каждой из оставшихся прямых. Осталось проверить, что любая из рассматриваемых орбит представляется в виде суммы (как дивизор) орбит вида (3). Но это непосредственно видно из таблиц.

Итак, в одну сторону теорема 1 доказана. Обратно, если $\operatorname{rk} \operatorname{Pic} F = 1$, то поверхность F, очевидно, k-минимальна. Пусть $\operatorname{rk} \operatorname{Pic} F = 2$ и F — стандартная k-поверхность с рациональным пучком. Достаточно показать тогда, что «до-

полнительный» пучок $|-F_{\bar t}-\omega_F|$ (соответственно $|-2F_{\bar t}-2\omega_F|$, если $\operatorname{Pic} F \neq (\operatorname{Pic}\overline{F})^G$) тоже является стандартным на F. Действительно, если это так, то 16 прямых на F разбиваются на две восьмерки, каждая из которых составляет конфигурацию типа (2) с $m=4$ — это все вырожденные геометрические слои соответствующих стандартных пучков. Следовательно, поскольку в слоях стандартных пучков нет стягиваемых над k кривых, их нет и на F.

Осталось проверить, что линейная система $|-F_{\bar t}-\omega_F|$ (соответственно $|-2F_{\bar t}-2\omega_F|$) не имеет неподвижных компонент и стягиваемых над k кривых. Так как степень любой кривой из $|-F_{\bar t}-\omega_F|$ равна 2, то как подвижная, так и неподвижная части системы $|-F_{\bar t}-\omega_F|$ должны были бы иметь степень 1, что невозможно, поскольку на $\overline{F}$ конечное число прямых. Следовательно, $|-F_{\bar t}-\omega_F|$ не имеет неподвижных компонент даже на $\overline{F}$, а значит, их не имеет и удвоенная система $|-2F_{\bar t}-2\omega_F|$. Существование стягиваемых над k кривых в слоях пучка $|-F_{\bar t}-\omega_F|$ (соответственно $|-2F_{\bar t}-2\omega_F|$) противоречит тому, что $\operatorname{rk}\operatorname{Pic} F=2$. В самом деле, после стягивания таких кривых мы снова получили бы стандартную поверхность с рациональным пучком и с меньшим рангом группы Пикара, что невозможно (см. [1], 1.3). Теорема 1 полностью доказана.

3. Доказательство теоремы 2. Начнем со следующего утверждения.

Предложение 1. *Антиканоническая линейная система $|-\omega_F|$ на стандартной поверхности F с рациональным пучком и с $(\omega_F\cdot\omega_F)=4$ не имеет базисных точек и неподвижных компонент. Она определяет бирациональный k-морфизм $h\colon F\to F'\subset\mathbf{P}^4$, где F' — поверхность степени 4, причем h либо изоморфизм, либо стягивает кривую X_0 из класса $-2F_{\bar t}-\omega_F$ в особую точку.*

Доказательство. Рассуждая так же, как и в доказательстве предложения 1.3 работы [2], заключаем, что предполагаемая неподвижная компонента X_0 системы $|-\omega_F|$ должна принадлежать классу дивизоров вида $-aF_{\bar t}-\omega_F$, где $a>0$ — некоторое целое число. Здесь $a\neq 1$, так как по теореме Римана–Роха $\dim H^0(F,O_F(-F_{\bar t}-\omega_F))\geqslant 2$. Имеем

$$p_a(X_0)=\frac{(X_0\cdot X_0+\omega_F)}{2}+1=-a+1<0.$$

Следовательно, кривая X_0 геометрически приводима. Но так как $(X_0\cdot F_{\bar t})=2$, то $\overline{X}_0$ не может состоять более чем из двух компонент. Поэтому $p_a(X_0)=-1$, откуда $a=2$ и $\overline{X}_0$ состоит из двух сопряженных непересекающихся кривых рода нуль с индексом самопересечения -2. Но кривая $X_0\sim -2F_{\bar t}-\omega_F$ не может быть неподвижной компонентой системы $|-\omega_F|$, так как в противном случае

$$\dim H^0(F,O_F(-\omega_F))=\dim H^0(F,O_F(-2F_{\bar t}))=3,$$

а по теореме Римана–Роха $\dim H^0(F,O_F(-\omega_F))\geqslant 5$.

В действительности имеет место равенство $\dim H^0(F,\Omega_F^{-1})=5$, так как $\dim H^2(F,\Omega_F^{-1})=\dim H^0(F,\Omega_F^2)=0$ и $\dim H^1(F,\Omega_F^{-1})=0$. Последнее

равенство вытекает из точной последовательности когомологий, связанной с точной последовательностью пучков

$$0 \to O_F \to O_F(X) \to O_X \otimes O_F(X) \to 0,$$

где X — некоторая кривая из линейной системы $|-\omega_F|$.

Предположим, что на F нет эффективной кривой $X_0 \sim -2F_{\bar{t}} - \omega_F$. Тогда линейная система $|-F_{\bar{t}} - \omega_F|$ при $\operatorname{Pic} F = (\operatorname{Pic} \overline{F})^G$ ($|-2F_{\bar{t}} - 2\omega_F|$ при $\operatorname{Pic} F \neq (\operatorname{Pic} \overline{F})^G$) определяет на F второй стандартный пучок рациональных кривых. Действительно, простой подсчет индексов пересечений показывает, что класс неподвижной части в системе $|-F_{\bar{t}} - \omega_F|$ должен иметь вид $-2F_{\bar{t}} - \omega_F$, а в системе $|-2F_{\bar{t}} - 2\omega_F|$ — соответственно $-4F_{\bar{t}} - 2\omega_F$, т. е. неподвижной компонентой может быть только кривая X_0 или $2X_0$. Условие $\operatorname{rk} \operatorname{Pic} F = 2$ обеспечивает, как объяснялось в конце доказательства теоремы 1, отсутствие стягиваемых над k кривых в слоях пучка $|-F_{\bar{t}} - \omega_F|$ (соответственно $|-2F_{\bar{t}} - 2\omega_F|$).

Если на F есть два стандартных пучка, то очевидно, что линейная система $|-\omega_F|$ не имеет базисных точек и поэтому определяет морфизм $h\colon F \to \mathbf{P}^4$. Ясно также, что образом является некоторая поверхность F'. Степень F' не может быть 1 или 2, иначе F' лежала бы в некоторой гиперплоскости пространства $\mathbf{P}^4$. Следовательно, $\deg F' = 4$, и h — бирациональный морфизм. Любая G-инвариантная кривая X на F эквивалентна $aF_{\bar{t}} + b(-F_{\bar{t}} - \omega_F)$, где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $a + b > 0$. Поэтому $(X \cdot -\omega_F) > 0$, и, следовательно, h ничего не стягивает. Более того, ограничение h на каждый слой любого стандартного пучка является, как легко проверить, изоморфизмом. Следовательно, h — изоморфизм.

Пусть теперь кривая $X_0 \sim -2F_{\bar{t}} - \omega_F$ на F существует. В этом случае $|-\omega_F|$ также не имеет базисных точек и задает бирациональный морфизм на поверхность четвертой степени в $\mathbf{P}^4$. В самом деле, подсистема вида $\{X_0 + |F_{\bar{t}}|\}$ не имеет базисных точек вне кривой X_0. Но на X_0 система $|-\omega_F|$ не может иметь базисных точек ввиду $(X_0 \cdot \omega_F) = 0$. Так как система $|-\omega_F|$ содержит пучок $\{|F_{\bar{t}}| + X_0\}$ и X_0 не является неподвижной компонентой в $|-\omega_F|$, то образом морфизма $h\colon F \to \mathbf{P}^4$ должна быть поверхность. То, что h бирационален, устанавливается так же, как и выше. Ясно, что он стягивает две компоненты кривой $\overline{X}_0$ в две сопряженные особые точки, так как $(X_0 \cdot \omega_F) = 0$ и индекс самопересечения каждой из компонент равен -2. Доказательство закончено. □

Предложение 2. *На стандартной поверхности $F \to C$ тогда и только тогда существует G-инвариантный пучок рациональных кривых, отличный от $|F_{\bar{t}}|$, когда существует бирациональное (k, C)-отображение поверхности F на гладкую поверхность степени 4, $F' \subset \mathbf{P}^4$.*

Доказательство. Если $F \sim F'$, то на F существует пучок, отличный от $|F_{\bar{t}}|$ — это образ «дополнительного» к $|F'_{\bar{t}}|$ стандартного пучка.

Обратно, пусть $z = aF_{\bar{t}} - b\omega_F - \sum\limits_{i=1}^{s} m_i \overline{x}_i$ — некоторый G-инвариантный пучок рациональных кривых на F' (в обозначениях [2]). Тогда, согласно 0.7

из [2], можно считать, с точностью до бирациональной (k, C)-эквивалентности, что $m_i \leqslant 6$ и, следовательно (см. [2], 1.1), что $a < 0$. Покажем, что в таком случае на F нет эффективной кривой $X_0 \sim -2F_{\bar{t}} - \omega_F$. В силу предложения 1, этого будет достаточно для завершения доказательства.

Рассмотрим полную линейную систему нашего пучка $|aF_{\bar{t}} - b\omega_F|$. По определению пучка она не имеет неподвижных компонент. Но

$$(X_0 \cdot aF_{\bar{t}} - \omega_F) = (-2F_{\bar{t}} - \omega_F \cdot aF_{\bar{t}} - b\omega_F) = 2a < 0,$$

поэтому кривой X_0 на F не существует. □

Теорема 2 будет доказана, если мы докажем следующее

П р е д л о ж е н и е 3. *Пусть $F \to C$ — стандартная поверхность с $(\omega_F \cdot \omega_F) = 4$ и с рациональным пучком. Для любого G-инвариантного пучка рациональных кривых z на F существует такое бирациональное k-преобразование $g\colon F \to F'$ на стандартную поверхность F' с рациональным пучком и с $(\omega_{F'} \cdot \omega_{F'}) = 4$, которое отображает пучок z в стандартный пучок $[F'_{\bar{t}}]$.*

Из этого предложения немедленно следует бирациональная нетривиальность поверхности F, так как в противном случае на F существовали бы пучки рациональных кривых, имеющие сечение над k, а $|F'_t|$, очевидно, его не имеет.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если на F нет других пучков рациональных кривых, кроме стандартного, то доказывать нечего. Если такие пучки есть, то согласно предложению 2 можно считать F гладкой поверхностью степени 4 в $\mathbf{P}^4$. Тогда на ней имеются два стандартных пучка $|F_{\bar{t}}|$ и $|-F_{\bar{t}} - \omega_F|$ (определенных над k, если $\operatorname{Pic} F = (\operatorname{Pic} \overline{F})^G$; $|2F_{\bar{t}}|, |-2F_{\bar{t}} - 2\omega_F|$, если $\operatorname{Pic} F \neq (\operatorname{Pic} \overline{F})^G$).

Обозначим для удобства класс пучка $|F_{\bar{t}}|$ через Π_1, а класс пучка $|-F_{\bar{t}} - \omega_F|$ через Π_2. В этих обозначениях имеем $\Pi_1 + \Pi_2 = -\omega_F$. Пусть $z = aF_{\bar{t}} - b\omega_F - \sum\limits_{i=1}^{s} m_i \overline{x}_i$ — некоторый G-инвариантный пучок рациональных кривых. Сделав в случае необходимости бирациональное k-преобразование, сохраняющее пучок Π_1, мы можем считать (см. [2], 0.7, 1.1), что $m_i \leqslant b$, $a < 0$. При этом получившаяся поверхность опять будет стандартной с двумя стандартными пучками (см. конец доказательства предложения 2) и с $(\omega_F \cdot \omega_F) = 4$. Перепишем пучок z в виде

$$z = a(-\Pi_2 - \omega_F) - b\omega_F - \sum m_i x_i = -a\Pi_2 - (b + a)\omega_F - \sum m_i \overline{x}_i.$$

Здесь коэффициент при Π_2 положителен. Его можно сделать отрицательным с помощью предыдущих рассуждений, примененных к стандартному пучку Π_2. Производя последовательно преобразования такого типа, мы уменьшаем коэффициент при $-\omega_F$. Через конечное число шагов этот коэффициент станет равным 0 и пучок z преобразуется в стандартный на некоторой, вообще говоря, другой стандартной поверхности. Предложение 3, а вместе с ним и теорема 2 доказаны. □

Литература

[1] Исковских В. А. Рациональные поверхности с пучком рациональных кривых // Матем. сб. — 1967. — Т. 74(116). — С. 608–638.

[2] Исковских В. А. Рациональные поверхности с пучком рациональных кривых и с положительным квадратом канонического класса // Матем. сб. — 1970. — Т. 83(125). — С. 90–119.

[3] Манин Ю. И. Рациональные поверхности над совершенными полями. I // Publ. Math. IHES. — 1966. — V. 30.

[4] Манин Ю. И. Рациональные поверхности над совершенными полями. II // Матем. сб. — 1967. — Т. 72(114). — С. 161–192.

[5] Нагата М. Рациональные поверхности. I // Математика. — 1964. — Т. 8, № 1. — С. 55–81.

Проверка гипотезы Римана для некоторых локальных дзета-функций

1. Пусть X — гладкое проективное многообразие над конечным полем $k = \mathbf{F}_q$, l — простое число, отличное от характеристики поля k и $H^i(\overline{X}, \mathbf{Q}_l)$ — l-адические когомологии многообразия X, где $\overline{X} = X \otimes_k \overline{k}$, $\overline{k}$ — алгебраическое замыкание поля k. Обозначим через $F\colon X \to X$ морфизм Фробениуса и через $F^*\colon H^i(\overline{X}, \mathbf{Q}_l) \to H^i(\overline{X}, \mathbf{Q}_l)$ — соответствующий морфизм когомологий. Под гипотезой Римана для дзета-функции $\zeta(X, s)$ последние время принято понимать следующее утверждение:

характеристические корни морфизма F^* являются целыми алгебраическими числами, равными по абсолютной величине $q^{i/2}$.

В статье [2] Ю. И. Манин показал, что гипотеза Римана верна для трехмерных унирациональных многообразий. В этой заметке мы, пользуясь теми же соображениями, проверяем справедливость этой гипотезы еще для одного класса трехмерных многообразий.

Теорема. *Пусть* $\dim X = 3$ *и* X *удовлетворяет одному из следующих условий*:

(1) *существует рациональное отображение* $g\colon X \to Y$, *где* Y — *рациональное многообразие размерности* 1 *или* 2 *и общий слой отображения* g *тоже рациональное многообразие.*

(2) X — *гладкая гиперповерхность степени* 4 *в* $\mathbf{P}^4_k$.

Тогда для $\zeta(X, s)$ *выполнена гипотеза Римана.*

Замечание 1. Вполне вероятно, что «общее» многообразие типа (1) не является унирациональным, хотя построить такой пример пока не удается.

Замечание 2. В случае (2) гипотеза Римана была доказана другим способом П. Делинем. Здесь также не известно, унирациональна ли общая квартика.

2. Суть метода Манина заключается в следующих двух утверждениях. Пусть $f\colon X' \to X$ — морфизм гладких проективных многообразий. Тогда

(A) *если морфизм* f *конечен в общей точке и для* $\zeta(X', s)$ *выполнена гипотеза Римана, то она выполнена и для* $\zeta(X, s)$;

(B) *если морфизм* f *бирационален и* $\dim X = 3$, *то* $\zeta(X, s)$ *и* $\zeta(X', s)$ *одновременно удовлетворяют или не удовлетворяют гипотезе Римана.*

УМН. — 1973. — Т. 28, № 3(171). — С. 181–182.

Действительно, в обоих случаях f индуцирует вложение когомологий $H^i(\overline{X}, \mathbf{Q}_l)$ на прямое слагаемое, как $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$-модулей, в $H^i(\overline{X}', \mathbf{Q}_l)$. Поэтому характеристические корни морфизма Фробениуса для X являются частью корней морфизма Фробениуса для X'. В случае (B) известно, кроме того, как устроено дополнительное прямое слагаемое: оно комбинируется из когомологий гладких кривых и проективных пространств $\mathbf{P}^r$, $r = 1, 2$. Поскольку для кривых, проективных пространств и всевозможных произведений тех и других гипотеза Римана справедлива, то отсюда и из (A) следует (B).

Утверждение (B) можно сформулировать иначе, если воспользоваться теоремой Абьянкора об устранении точек неопределенности рациональных отображений в характеристике $p > 0$ и в размерности 3.

(B′) *Гипотеза Римана для гладких проективных* 3*-мерных многообразий является бирациональным инвариантом.*

3. Доказательство теоремы. Отметим прежде всего, что гипотеза Римана инвариантна относительно замены основного поля его конечным расширением, поскольку морфизм Фробениуса и его характеристические корни возвышаются при этом в степень, равную степени расширения поля. На такую же степень увеличивается и число элементов основного поля. Пусть сначала X удовлетворяет условию (1).

Редукция 1. Расширив в случае необходимости основное поле, можно изменить отображение g так, чтобы Y стало проективной прямой $\mathbf{P}^1_k$, а общий слой отображения $g\colon X \to \mathbf{P}^1_k$ рациональной поверхностью над полем рациональных функций $k(\mathbf{P}^1_k)$. Устранив точки неопределенности отображения g, мы получим морфизм $q'\colon X' \to \mathbf{P}^1_k$ с тем же общим слоем, что и у отображения g. Здесь мы пользуемся утверждением (B)

Редукция 2. Выберем гладкую кривую C над некоторым конечным расширением k' поля k и конечный (не обязательно сепарабельный) морфизм $C \to \mathbf{P}^1_{k'}$ так, чтобы над $k'(C)$ общий слой морфизма g' обладал бирациональным изоморфизмом с $\mathbf{P}^2_{k'(C)}$. Тогда, ввиду того, что проективная плоскость не варьируется, мы будем иметь рациональное и конечное в общей точке отображение $C \times \mathbf{P}^2_{k'} \to X' \otimes_k k'$. Устраняя точки неопределенности этого отображения и используя утверждения (B′) и (A), получаем доказательство теоремы в случае (1), поскольку для $\zeta(C \times \mathbf{P}^2, s)$ гипотеза Римана верна. Для того чтобы найти C, поступим следующим образом. Возьмем какое-нибудь конечное расширение K поля $k(\mathbf{P}^1)$, над которым общий слой морфизма g' «распадается» и пусть D — модель этого поля над k. Тогда в качестве k' можно взять алгебраическое замыкание k в поле K, т. е. поле констант поля K, а в качестве C — одну из неприводимых компонент кривой $D \otimes k'$, предварительно редуцировав ее и нормализовав.

Пусть теперь X удовлетворяет условию (2). Покажем, что существует рациональное отображение конечной степени $h\colon Z \to X$, где Z удовлетворяет условию (1). В силу (A) и изложенного выше этого достаточно для доказательства теоремы.

Конструкция $Z \to X$. Она аналогична классическим конструкциям унирациональности многообразий, поэтому мы ограничимся кратким наброском.

Выберем некоторую геометрическую точку $x \in X(\bar{k})$ и пусть $F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 0$ — уравнение квартики и локальных координатах с началом в x. Здесь F_i — формы степени i. Почти для всех точек x (назовем их хорошими) пересечение гиперповерхностей $F \cdot F_1 \cdot F_2$ в $\mathbf{P}^4$ является неприводимой рациональной кривой $Q(x)$, бирационально проектирующейся на конику — основание конуса $F_1 \cdot F_2$. Существует единственное k-подмногообразие $W \subset X \times X$, $\dim W = 4$, множество геометрических точек которого $W(\bar{k})$ является замыканием множества $\{x, y \mid y \in Q(x)\}$, где x пробегает множество «хороших» точек из $X(\bar{k})$. Обозначим через $p_1, p_2 \colon W \to X$ проекции, соответственно на первый и второй множители. Пусть $S \subset X$ — рациональная поверхность такая, что 3-мерное многообразие $Z' = p_1^{-1}(S)$ не лежит целиком в множестве вырождений морфизма p_1 и $p_2|_{Z'} \colon Z' \to X$ отображение конечной степени в общей точке. Разрешив особенности многообразия Z', мы получим многообразие Z, удовлетворяющее, очевидно, условию (1) теоремы.

Для того чтобы указать такую поверхность S, вспомним, что мы вправе расширить конечным образом основное поле k. Возьмем достаточно общую хорошую точку $x \in X(\bar{k})$ и в качестве основного поля возьмем ее поле определения. Обозначим через S замыкание поверхности, которую заметают кривые $Q(y)$, когда y пробегает множество хороших точек из $Q(x)$. Тогда S — рациональная поверхность, поскольку она «расслаивается» на рациональные кривые с рациональной базой. Если точка x выбрана достаточно общей, то почти все точки $S(\bar{k})$ будут «хорошими» и первое условие для S выполнено. Далее нетрудно проверить, что степень отображения $p_2 \colon Z' \to X$ конечна. Доказательство закончено.

Литература

[1] D e l i g n e P. Les intersections complètes de niveau de Hodge un // Invent. Math. — 1972. — V. 15:3. — P. 237–250.

[2] М а н и н Ю. И. Соответствия, мотивы и моноидальные преобразования // Матем. сб. — 1968. — Т. 77(199). — С. 475–507.

Минимальные модели рациональных поверхностей над произвольными полями

Введение и формулировка основных результатов

Пусть F — полная гладкая алгебраическая поверхность над полем k. Поверхность F называется (относительно) минимальной, если любой бирациональный морфизм $F \to F'$ на гладкую поверхность F' является изоморфизмом. Пусть, как обычно,

$$q(F) = \dim H^1(F, \mathcal{O}_F), \quad p(F) = \dim H^2(F, \mathcal{O}_F),$$
$$P_n(F) = \dim H^0(F, \Omega_F^{\otimes n}),$$

где $P_n(F)$ — n-кратный род, $n \geqslant 1$, Ω_F — канонический обратимый пучок.

В этой статье мы изучаем минимальные проективные геометрически неприводимые поверхности, удовлетворяющие условиям:

$$q(F) = P_2(F) = 0. \tag{$*$}$$

Согласно критерию рациональности Кастельнуово (см., например, [1], а также § 2 настоящей статьи), условия $(*)$ характеризуют рациональные поверхности, т. е. такие поверхности F над k, которые над алгебраическим замыканием $\overline{k}$ поля k становятся бирационально эквивалентными проективной плоскости $\mathbf{P}_k^2$. Хорошо известно (см. [1, 7, 11, 8]), что над алгебраически замкнутым полем минимальные модели рациональных поверхностей исчерпываются плоскостью $\mathbf{P}_k^2$ и серией линейчатых поверхностей $\mathbf{F}_N$, $N \geqslant 0$, $N \neq 1$.

В случае незамкнутого (но совершенного) поля k известно только (см. [11]), что любую рациональную поверхность можно бирациональными преобразованиями над k привести к одному из трех типов стандартных форм Энриквеса–Манина. В этой работе мы показываем, что на самом деле уже все минимальные рациональные поверхности над любым полем k содержатся в двух из трех семейств стандартных форм Энриквеса–Манина (см. замечание 2 на с. 107).

В § 1 доказывается

Теорема 1. *Любая минимальная поверхность F с условиями $(*)$ изоморфна либо $\mathbf{P}_k^2$, либо квадрике $Q \subset \mathbf{P}_k^3$ с $\operatorname{Pic} Q \simeq \mathbf{Z}$, либо принадлежит*

Известия АН СССР. Сер. матем. — 1979. — Т. 43, № 1. — С. 19–43.

к одному из следующих двух семейств поверхностей, определяемых условиями:

I. $\operatorname{Pic} F \simeq \mathbf{Z}$ *и порождается антиканоническим обильным пучком* Ω_F^{-1};

II. $\operatorname{Pic} F \simeq \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, *существует морфизм* $f\colon F \to C$, *общий слой* F_η *которого и* C — *гладкие кривые рода нуль. Для любой замкнутой точки* $t \in C$ *слой* F_t *неприводим над полем вычетов* $k(t)$, *геометрически приведен и* $H^1(F_t, \mathcal{O}_{F_t}) = 0$. *Каждый негладкий геометрический слой* F_t*-изоморфен паре пересекающихся в одной точке прямых* $\mathbf{P}^1_{\bar{k}} \vee \mathbf{P}^1_{\bar{k}}$.

З а м е ч а н и е. Квадрика $Q \subset \mathbf{P}^3_k$ с $\operatorname{Pic} Q \simeq \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ принадлежит, очевидно, семейству II.

Эта теорема является естественным обобщением соответствующего результата для алгебраически замкнутого поля k (см. [11, 7]) и в ее доказательстве используются обычные технические средства: теория пересечений, теорема Римана–Роха и классическая лемма о присоединении (лемма 2).

В § 2 приводится новое доказательство критерия рациональности Кастельнуово (теорема 2) в характеристике $p > 0$. В отличие от конструктивного и очень длинного доказательства Зарисского [15, 16], мы, используя технику подъема в характеристику 0, сводим доказательство к простому и идейно прозрачному рассуждению Кодаиры [7] в случае комплексного поля $k = \mathbf{C}$. Другое доказательство, использующее l-адические когомологии и группу Брауэра, было дано М. Артином (см., например, [8]).

В § 3 изучается геометрия поверхностей из семейств I и II. Поверхности из семейства I относятся к так называемым поверхностям дель Пеццо (это гладкие поверхности с обильным Ω_F^{-1}). Геометрия последних хорошо изучена (см. [10, 11]). Для них $1 \leqslant (\Omega_F \cdot \Omega_F) \leqslant 9$ и для $n = (\Omega_F \cdot \Omega_F) \geqslant 3$ — это поверхности степени n в $\mathbf{P}^n_k$. Мы приводим без доказательств в начале § 3 очень короткий список основных свойств поверхностей дель Пеццо. Для поверхностей из семейства II доказывается следующая

Т е о р е м а 3. *Пусть* $f\colon E \to C$ — *морфизм, как в теореме* 1, *где* C — *гладкая кривая не обязательно рода нуль. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *Пучок* $f_*\Omega_F^{-1}$ *локально свободен на* C *и имеет ранг* 3; *естественное отображение*

$$\varphi\colon F \to \mathbf{P}_C(f_*\Omega_F^{-1})$$

является изоморфным вложением над C, *отображающим каждый слой* F_t *на конику в* $\mathbf{P}^2_{k(t)}$.

(2) *Если морфизм* f *гладкий и* $p(C) = \dim H^1(C, \mathcal{O}_C) = 0$, *то либо* $F \simeq C \times C'$, *где* C' — *гладкая кривая рода нуль, не имеющая* k*-точек, либо* $F \simeq \mathbf{P}_C(E)$, *где* E — *некоторое двумерное векторное расслоение на* C *ранга* 2. *В любом случае* $\overline{F} \simeq \mathbf{F}_N$, $N \geqslant 0$, *где* $\mathbf{F}_N$ — *стандартная линейчатая поверхность и* $(\Omega_F \cdot \Omega_F) = 8$. *Если* N *нечетно, то* $C \simeq \mathbf{P}^1_k$.

(3) *Если морфизм* f *не гладкий, то* $\operatorname{Pic} F = f^* \operatorname{Pic} C + \mathbf{Z} \cdot \Omega_F^{-1}$. *Пусть* $r = \sum_{i=1}^{s} \deg t_i$, *где* $\{t_1, \ldots, t_s\}$ — *множество всех точек с вырожденными сло-*

ями, и пусть $p(C) = 0$, *тогда* $\operatorname{rk}\operatorname{Pic}\overline{F} = r+2$, $(\Omega_F \cdot \Omega_F) = 8-r$. *Если* $p(C) = 0$ *и число* $(\Omega_F \cdot \Omega_F)$ *нечетно, то* $C \simeq \mathbf{P}^1_k$.

(4) *Множество всех поверхностей* F *из семейства* II *с фиксированной гладкой базисной кривой (не обязательно рода* 0) C, *бирационально эквивалентных над* C, *находится в естественном биективном соответствии с множеством всех максимальных порядков над* C *в алгебре кватернионов* A_η, *соответствующей общему слою* F_η *над* $k(\eta)$.

Отметим, что поверхности из семейства I минимальны, так как $\operatorname{Pic} F \simeq \mathbf{Z}$. Также, очевидно, что поверхности из семейства II C-минимальны, так как слои морфизма $F \to C$ неприводимы.

Теорема 4. *Все поверхности из семейства* II *минимальны, кроме следующих*:

(а) $(\Omega_F \cdot \Omega_F) = 8$ *и* $\overline{F} \simeq \mathbf{F}_1$, *где* $\mathbf{F}_1$ — *стандартная линейчатая поверхность — образ плоскости* $\mathbf{P}^2_{\overline{k}}$ *при раздутии одной точки.*

(б) $(\Omega_F \cdot \Omega_F) = 3$, 5 *и* 6.

Теорема 5. *Пусть* F *принадлежит семейству* II:

(1) $(\Omega_F \cdot \Omega_F) = 3$, 5 *и* 6, *то* F — *поверхность Цель Пеццо*;

(2) *если* $(\Omega_F \cdot \Omega_F) = 8$ *и* $\overline{F} \not\simeq \mathbf{F}_N$ *с* $N \geqslant 2$, *т. е. если* $N = 0$ *или* 1, *то* F — *поверхность дель Пеццо*;

(3) *если* $(\Omega_F \cdot \Omega_F) = 1$, 2, 4, *то* F *тогда и только тогда поверхность дель Пеццо, когда она имеет два различных представления в виде стандартной формы* II.

Не существует минимальных гладких рациональных поверхностей F *с* $(\Omega_F \cdot \Omega_F) = 7$.

В § 4 устанавливается аналог теоремы 1 для поверхностей с условиями $(*)$, на которых действует конечная группа G, т. е. задано представление $G \to \operatorname{Aut}_k F$. Для таких поверхностей обычным образом определяется понятие G-отображения (в частности G-морфизма), G-минимальности и т. п. Как показал Манин в [11], бирациональная классификация рациональных G-поверхностей аналогична бирациональной классификации рациональных поверхностей над незамкнутыми полями и проводится единым методом с использованием леммы о присоединении. В случае, когда поле k алгебраически замкнуто, бирациональная классификация G-поверхностей равносильна описанию с точностью до сопряженности конечных подгрупп G в группе Кремоны для $\mathbf{P}^2_k$. В [11] описаны с точностью до бирациональной G-эквивалентности стандартные формы G-поверхностей только для абелевых групп G.

Следующая теорема усиливает и обобщает этот результат на произвольные конечные группы G.

Обозначим через $P(F)$, следуя [11], группу, порожденную классами G-инвариантных дивизоров. Тогда легко видеть, что $\Omega_F \in P(F)$.

Теорема 1G. *Для любой* G-*минимальной поверхности* F, *удовлетворяющей условиям* $(*)$, *справедливы утверждения теоремы* 1 *с* G-*морфизмами вместо обычных морфизмов, с* $P(F)$ *вместо* $\operatorname{Pic} F$ *и* G-*неприводимостью вместо* k-*неприводимости.*

Отметим, что все результаты § 3 формулируются и доказываются аналогичным образом также и для рациональных G-поверхностей.

§ 1. Доказательство теоремы 1

Лемма 1. *Пусть F — полная гладкая поверхность над полем k, $L \in \operatorname{Pic} F$ — обратимый пучок такой, что $(L \cdot L) > 0$, $\dim H^0(F, L) \geqslant 2$ и полная линейная система кривых $|L|$ (нулей сечений $H^0(F, L)$) не имеет неподвижных компонент. Тогда для любой кривой $X \in |L|$ имеем $H^0(X, \mathcal{O}_x) = k$.*

Доказательство. В случае, когда поле k алгебраически замкнуто, этот результат доказан в [12]. Общий случай сводится к этому путем применения простейших формул Кюннета (см. [6], § 6) для $F \otimes \overline{k}$, $L \otimes \overline{k}$ и $X \otimes \overline{k}$, где $\overline{k}$ — алгебраическое замыкание k. □

Лемма 2 (о присоединении). *Пусть F — гладкая проективная минимальная поверхность над k, удовлетворяющая условиям $(*)$. Тогда для любого обратимого пучка $L \in \operatorname{Pic} F$ существует такое целое число $n_i \geqslant 0$, что $H^0(F, L \otimes \Omega_F^{\otimes n}) = 0$ для всех $n > n_L$.*

Это доказывается так же, как и в случае алгебраически замкнутого поля $k = \overline{k}$ (см., например, [1, 7, 8]).

Лемма 3. *Пусть F — поверхность такая, как в лемме 2, и предположим, что $\operatorname{Pic} F \neq \mathbf{Z} \cdot \Omega_F$, тогда на F существует обратимый пучок L, обладающий следующими свойствами*:

(1) $\dim H^0(F, L) \geqslant 1$, $\dim H^0(F, L \otimes \Omega_F) = 0$,

(2) $(L \cdot \Omega_F) < 0$,

(3) *для любого сечения $s \in H^0(F, L)$ кривая его нулей X неприводима и приведена.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что если существует пучок L' со свойствами (1) и (2), то существует и пучок L, обладающий всеми тремя свойствами. Действительно, пусть $s' \in H^0(F, L')$ — некоторое сечение и $X' = \sum\limits_i r_i X'_i$, $r_i \geqslant 0$, — дивизор его нулей, где X'_i — неприводимые и приведенные компоненты. Тогда любой обратимый пучок вида $\mathcal{O}_F(X'_i)$ удовлетворяет условиям (1), так как

$$\dim H^0(F, \mathcal{O}_F(X'_i) \otimes \Omega_F) \leqslant \dim H^0\left(F, \mathcal{O}_F\left(\sum_i r_i X'_i\right) \otimes \Omega_F\right) = 0$$

и, очевидно, $\dim H^0(F, \mathcal{O}_F(X'_i)) \geqslant 1$. Далее, ясно, что по крайней мере один из пучков $\mathcal{O}_F(X'_i)$ удовлетворяет условию (2), поскольку

$$\left(\mathcal{O}_F\left(\sum_i r_i X'_i\right) \cdot \Omega_F\right) < 0.$$

Если среди нулей сечений пучка $L'_i = \mathcal{O}_F(X'_i)$ есть приводимые или кратные кривые, то можно повторить процесс отщепления компонент. Он, очевидно, обрывается, так как при этом уменьшается степень пучка L относительно некоторого очень обильного пучка $\mathcal{O}_F(1)$.

Существование пучка L со свойствами (1) и (2) мы будем доказывать с помощью леммы 2. Так как $\operatorname{Pic} F \neq \mathbf{Z} \cdot \Omega_F$, то найдется очень обильный обратимый пучок $H \in \operatorname{Pic} F$ и $H \notin \mathbf{Z} \cdot \Omega_F \subset \operatorname{Pic} F$. По лемме 2 существует такое число n_H, что для пучка $L = H \otimes \Omega_F^{\otimes n_H}$ будут выполнены условия (1). Если $(L \cdot \Omega_F) < 0$, то все доказано. Если же $(L \cdot \Omega_F) \geqslant 0$, то $(L \cdot L) < 0$ и $(\Omega_F \cdot \Omega_F) > 0$. Действительно, по теореме Римана–Роха

$$0 = \dim H^0(F, L \otimes \Omega_F) \geqslant \frac{(L \cdot L \otimes \Omega_F)}{2} + 1.$$

Здесь $H^2(F, L \otimes \Omega_F) = H^0(F, L^{-1}) = 0$, так как $L \not\simeq \mathcal{O}_F$ (иначе $H \in \mathbf{Z} \cdot \Omega_F$), откуда $(L \cdot L) + (L \cdot \Omega_F) \leqslant -2$, следовательно, $(L \cdot L) \leqslant -2$. Далее, имеем:

$$0 < (H \cdot H) = (L \cdot L) - 2n_H(L \cdot \Omega_F) + n_H^2(\Omega_F \cdot \Omega_F),$$

откуда $(\Omega_F \cdot \Omega_F) > 0$.

Будем искать требуемый пучок в виде $L_n = L^{-1} \otimes \Omega_F^{-n}$. Для достаточно больших n имеем $H^2(F, L^{-1} \otimes \Omega_F^{-n}) = 0$. Действительно, по двойственности Серра это равносильно тому, что $H^0(F, L \otimes \Omega_F^{n+1}) = 0$ для больших n, а последнее верно в силу леммы 2. Поэтому для больших n из теоремы Римана–Роха мы получаем неравенство

$$\dim H^0(F, L^{-1} \otimes \Omega_F^{-n}) \geqslant \frac{(L \cdot L) + (2n+1)(L \cdot \Omega_F) + n^2(\Omega_F \cdot \Omega_F)}{2} + 1.$$

Ввиду $(\Omega_F \cdot \Omega_F) > 0$, правая часть неравенства положительна для больших n. Можно, следовательно, найти такое наименьшее $n_0 > 0$, что

$$\dim H^0(F, L^{-1} \otimes \Omega_F^{-n_0}) \geqslant 1$$

и

$$\dim H^0(F, L^{-1} \otimes \Omega_F^{-n_0+1}) = 0,$$

так как $H^0(F, L^{-1}) = 0$. Тем самым условия (1) для пучка L_{n_0} выполняются. Выполняется и условие (2):

$$(L^{-1} \otimes \Omega_F^{-n_0} \cdot \Omega_F) = -(L \cdot \Omega_F) - n_0(\Omega_F \cdot \Omega_F) < 0.$$

Лемма 3 доказана. □

Лемма 4. *В условиях теоремы* 1 *пусть на* F *существует обратимый пучок* L, *обладающий свойствами* (1)–(3) *леммы* 3, *тогда справедливы следующие утверждения*:

(а) $(L \cdot L) \geqslant 0$, $\dim H^1(F, L) = 0$;

(б) *существует обратимый пучок* L' *со свойствами* (1)–(3) *леммы* 3, *для которого* $(L' \cdot L') \leqslant 2$.

Доказательство. (а). Предположим, вопреки утверждению, что $(L \cdot L) < 0$. Тогда $\dim H^0(F, L) = 1$, так как согласно свойству (3) линейная

системы $|L|$ не может иметь неподвижных компонент. Пусть X — (единственная) неприводимая и приведенная кривая, такая, что $L = \mathcal{O}_F(X)$. Рассмотрим точную последовательность пучков

$$0 \to \mathcal{O}_F(-X) \to \mathcal{O}_F \to \mathcal{O}_X \to 0$$

и соответствующую точную последовательность когомологий

$$\ldots \to H^1(F, \mathcal{O}_F) \to H^1(X, \mathcal{O}_X) \to H^2(F, \mathcal{O}_F(-X)) \to \ldots \tag{1.1}$$

Здесь $H^1(F, \mathcal{O}_F) = 0$ по условию, $H^2(F, \mathcal{O}_F(-X)) = H^0(F, L \otimes \Omega_F) = 0$ по свойству (1), поэтому $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$. С другой стороны, воспользуемся формулой для рода кривой на поверхности:

$$\dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = \frac{(\mathcal{O}_F(X) \cdot \mathcal{O}_F(X)) + (\mathcal{O}_F(X) \cdot \Omega_F)}{2} + \dim H^0(X, \mathcal{O}_X). \tag{1.2}$$

Подставляя $\dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ и полагая $\Omega_F = \mathcal{O}_F(K)$, где K — канонический дивизор на F, перепишем (2) в виде

$$(X \cdot X) + (X \cdot K) = -2 \dim H^0(X, \mathcal{O}_X), \tag{1.3}$$

где для любых дивизоров D_1 и D_2 символ $(D_1 \cdot D_2)$ означает индекс пересечения, равный $(\mathcal{O}_F(D_1) \cdot \mathcal{O}_F(D_2))$. Интерпретируя индексы пересечения как характеристики Эйлера–Пуанкаре (см. [9]) и пользуясь формулами Кюннета, замечаем, что $(D_1 \cdot D_2) = (\overline{D}_1 \cdot \overline{D}_2)$ на поверхности $\overline{F}$ над $\overline{k}$. Поэтому из (1.3) следует:

$$(\overline{X} \cdot \overline{X}) + (\overline{X} \cdot \overline{K}) = -2 \dim_{\overline{k}} H^0(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}).$$

Пусть $\overline{X} = q \sum\limits_{i=1}^{m} \overline{X}_i$ — разложение на неприводимые компоненты, где q — кратность (если k несовершенно, то, вообще говоря, $q \neq 1$).

Группа Галуа $\mathrm{Gal}(\overline{k}_s/k)$ сепарабельного замыкания действует транзитивно на множестве компонент $\{\overline{X}_i\}$ с сохранением индексов пересечения, поэтому $(\overline{X}_i \cdot \overline{X}) = (\overline{X}_j \cdot \overline{X})$ и $(\overline{X}_i \cdot \overline{K}) = (\overline{X}_j \cdot \overline{K})$ для любых i и j. Имеем:

$$qm(\overline{X}_i \cdot \overline{X}) + qm(\overline{X}_i \cdot \overline{K}) = -2 \dim_{\overline{k}} H^0(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}).$$

Из условия $(L \cdot \Omega_F) < 0$ получаем $(\overline{X}_i \cdot \overline{K}) < 0$, а из предположения $(L \cdot L) = (X \cdot X) < 0$ следует, что $(\overline{X}_i \cdot \overline{X}) < 0$. Более того, $(\overline{X}_i \cdot \overline{X}) = (\overline{X}_i \cdot q \sum \overline{X}_i) \leqslant -q$.

Поскольку кривая X неприводима и приведена, то $H^0(X, \mathcal{O}_X)$ — поле и является конечным расширением поля k, степень сепарабельной части которого равна числу геометрических связных компонент кривой $\overline{X}$, а степень несепарабельной части не больше геометрической кратности q. Поэтому $\dim H^0(X, \mathcal{O}_X) \leqslant mq$ и мы получаем неравенство

$$qm(\overline{X}_i \cdot \overline{X}) + qm(\overline{X}_i \cdot \overline{K}) \geqslant -2qm,$$

которое в силу вышеизложенных ограничений имеет единственное решение $(\overline{X}_i \cdot \overline{X}) = (\overline{X}_i \cdot \overline{K}) = -1$ и $q = 1$. Таким образом, каждая неприводимая компонента $\overline{X}_i$ является компонентой связности. Отсюда $(\overline{X}_i \cdot \overline{X}_j) = 0$, $i \neq j$, $(X_i \cdot X_i) = -1$, $(\overline{X}_i \cdot \overline{K}) = -1$. Но эти условия в силу критерия стягиваемости Кастельнуово–Энриквеса (см., например, [18]) означают, что X — исключительная кривая первого рода на F. Так как F — минимальная, то полученное противоречие означает, что предположение $(L \cdot L) < 0$ не верно.

Покажем теперь, что $H^1(F, L) = 0$. Пусть X — любая кривая такая, что $L \simeq \mathcal{O}_F(X)$. Напишем точную последовательность пучков

$$0 \to \mathcal{O}_F(-X) \otimes \Omega_F \to \Omega_F \to \mathcal{O}_X \otimes \Omega_F \to 0.$$

Из соответствующей когомологической последовательности получаем:

$$H^1(F, \mathcal{O}_F(-X) \otimes \Omega_F) = H^0(X, \mathcal{O}_X \otimes \Omega_F) = 0,$$

так как по условию $\deg_k(\mathcal{O}_X \otimes \Omega_F) = (L \cdot \Omega) < 0$ на X. Отсюда по двойственности Серра имеем:

$$\dim H^1(F, \mathcal{O}_F(-X) \otimes \Omega) = \dim H^1(F, \mathcal{O}(X)) = 0.$$

Тем самым утверждения (а) доказаны.

(б) Заметим, что если $(L \cdot L) > 0$, то

$$\dim H^0(F, L) = (L \cdot L) + 2. \tag{1.4}$$

Действительно, в формуле Римана–Роха $H^1(F, L) = 0$ по только что доказанному; $\dim H^2(F, L) = \dim H^0(F, L^{-1} \otimes \Omega_F) = 0$, так как $\dim H^0(F, \Omega_F) = 0$ и $L^{-1} \simeq \mathcal{O}_F(-X)$ — пучок идеалов. Поэтому

$$\dim H^0(F, L) = \frac{(L \cdot L) - (L \cdot \Omega_F)}{2} + 1 \geqslant 2$$

и, следовательно, для L выполнены условия леммы 1.

Пусть X — любая кривая из линейной системы $|L|$. Тогда по лемме 1 $H^0(X, \mathcal{O}_X) = k$. С другой стороны, как и в точной последовательности (1.1), $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Поэтому из формулы для рода (1.2) имеем:

$$(L \cdot \Omega_F) = -(L \cdot L) - 2 \tag{1.5}$$

и из формулы Римана–Роха получаем (1.4).

Пусть теперь $(L \cdot L) \geqslant 3$. Рассмотрим обратимый пучок $\Omega_F \otimes L^2$. Проверим, что он обладает свойствами (1) и (2) из леммы 3. Так как

$$\dim H^0\big(F, \Omega_F \otimes L^2\big) = \dim H^0(F, L^{-2}) = 0,$$

то, пользуясь (1.5), находим:

$$\dim H^0\big(F, \Omega_F \otimes L^2\big) \geqslant \frac{4(L \cdot L) + 2(L \cdot \Omega_F)}{2} + 1 = (L \cdot L) - 1 \geqslant 2.$$

Далее, поскольку

$$\bigl(L\cdot\Omega_F^2\otimes L^2\bigr)=2(L\cdot L)+2(L\cdot\Omega_F)=-4$$

и линейная система $|L|$ подвижна согласно (1.4) и не имеет неподвижных компонент по свойству (3) леммы 3, то

$$H^0\bigl(F,\bigl(\Omega_F\otimes L^2\bigr)\otimes\Omega_F\bigr)=0.$$

Тем самым проверены свойства (1).

Прежде чем приступить к проверке свойства (2), нам необходимо напомнить формулу Нётера:

$$\frac{(\Omega_F\cdot\Omega_F)+c_2(F)}{12}=\dim H^0(F,\mathcal{O}_F)-\dim H^1(F,\mathcal{O}_F)+\dim H^2(F,\mathcal{O}_F),\quad(1.6)$$

где $c_2(F)$ — второй класс Чженя касательного расслоения на F. Известно (см. [3]) выражение $c_2(F)$ через l-адические числа Бетти b_l ($l\neq\operatorname{char}k$):

$$c_2(F)=c_2(\overline{F})=\sum_{i=0}^{s}(-1)^ib_i$$

— это топологическая характеристика Эйлера–Пуанкаре. Для поверхностей F с условиями $(*)$ имеем $b_0=b_4=1$, $b_1=b_3=0$, и формула (1.6) принимает вид:

$$(\Omega_F\cdot\Omega_F)=10-b_2.$$

Так как $b_2\geqslant 1$ на проективной поверхности, то $(\Omega_F\cdot\Omega_F)\leqslant 9$, что нам и нужно.

Поскольку $(L\cdot L)\geqslant 3$ и $(\Omega_F\cdot\Omega_F)\leqslant 9$, то

$$\bigl(\Omega_F\otimes L^2\cdot\Omega_F\bigr)=(\Omega_F\cdot\Omega_F)+2(L\cdot\Omega_F)=(\Omega_F\cdot\Omega_F)-2(L\cdot L)-4<0.$$

Следовательно, свойство (2) для пучка $\Omega_F\otimes L^2$ также выполняется. Более того, имеем:

$$H^1\bigl(F,\Omega_F\otimes L^2\bigr)=0.$$

Действительно, линейная система $|L^2|$ не имеет неподвижных компонент, поскольку их не имеет $|L|$. По лемме 1, следовательно, $H^0(Y,\mathcal{O}_Y)=k$ для любой кривой Y такой, что $L^2=\mathcal{O}_F(Y)$. Из точной последовательности когомологий, ассоциированной с точной последовательностью пучков

$$0\to\mathcal{O}_F(-Y)\to\mathcal{O}_F\to\mathcal{O}_Y\to 0,$$

немедленно получаем, что $H^1(F,L^{-2})=H^1(F,\mathcal{O}_F(-Y))=0$, и по двойственности $H^1(F,\Omega_F\otimes L^2)=0$.

Таким образом, теорема Римана–Роха с учетом (1.5) дает:

$$\dim H^0\bigl(F,\Omega_F\otimes L^2\bigr)=(L\cdot L)-1.$$

По пучку $\Omega_F \otimes L^2$ мы можем найти теперь, как в начале доказательства леммы 3, некоторый обратимый пучок L_1, обладающий всеми тремя свойствами леммы 3. По построению

$$\Omega_F \otimes L^2 = L_1 \otimes L_2,$$

где $H^0(F, L_2) \geqslant 1$. Имеем:

$$(L \cdot L) - 1 = \dim H^0\big(F, \Omega_F \otimes L^2\big) \geqslant \dim H^0(F, L_2) = (L_1 \cdot L_1) + 2$$

в силу (1.4), откуда $(L_1 \cdot L_1) \leqslant (L \cdot L) - 3$. Если $(L_1 \cdot L_1) \leqslant 2$, то это и есть искомый пучок L_1', если же $(L_1 \cdot L_1) \geqslant 3$, то процесс можно продолжить; этот процесс, очевидно, обрывается. Этим доказано утверждение (б), а вместе с ним и лемма 4. □

Лемма 5. *В условиях леммы* 4 *если* $(L_1 \cdot L_1) = 1$, *то* $F \simeq \mathbf{P}_k^2$, *если* $(L \cdot L) = 2$ *и на* F *нет пучка* L' *с* $(L' \cdot L') = 0$, *обладающего свойствами* (1)–(3) *леммы* 3, *то* $F \simeq Q$, *где* $Q \subset \mathbf{P}_k^3$ — *гладкая квадрика с* $\operatorname{Pic} Q \simeq \mathbf{Z}$.

Доказательство. Если $(L \cdot L) = 1$, то по (1.4) $\dim H^0(F, L) = 3$. Пучок L порождается своими сечениями. Действительно, пусть $X \in |L|$ — любая кривая, тогда имеем точную последовательность

$$0 \to H^0(F, \mathcal{O}_F) \to H^0(F, \mathcal{O}_F(X)) \to H^0(F, \mathcal{O}_X \otimes \mathcal{O}_F(X)) \to 0$$

и, следовательно, след L на X имеет размерность 2, а при наличии базисной точки в $|L|$ он равнялся бы 1.

Таким образом, L определяет морфизм степени 1 $\varphi_L \colon F \to \mathbf{P}_k^2$. Так как F минимальна, то φ_L — изоморфизм.

Если $(L \cdot L) = 2$, то как и при $(L \cdot L) = 1$ существует морфизм $\varphi_L \colon F \to F' \subset \mathbf{P}_k^3$. Образ $\varphi_L(F) = F'$ не лежит ни в какой плоскости в $\mathbf{P}_k^3$ и не может быть кривой, так как $(L \cdot L) > 0$. Стало быть, $F' = Q$ — квадрика в $\mathbf{P}_k^3$ и φ_L — бирациональный морфизм. Если Q регулярна, то, ввиду минимальности F, φ_L — изоморфизм и Q гладка. Возможны два случая:

а) $\operatorname{Pic} Q \simeq \mathbf{Z}$ с образующей — плоским сечением; здесь $\Omega_F \simeq \mathcal{Q}_F(-2)$;

б) $\operatorname{Pic} Q \simeq \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ — образующими являются прямые, высекаемые некоторой касательной плоскостью; здесь в качестве L' с $(L' \cdot L') = 0$ можно взять $\mathcal{Q}_F(l)$, где l — любая из этих прямых, и по условию леммы этот случай исключается.

Если Q — квадратичный конус и $F'' \to Q$ — разрешение его особой точки, то $\varphi_L' \colon F \to F''$ — изоморфизм в силу минимальности F. Пусть $Z \subset F''$ — вклеенная кривая, тогда легко проверить, что $(Z \cdot Z) = -2$. Этот случай мы тоже исключим, взяв в качестве пучка L' с $(L' \cdot L') = 0$ пучок $L \otimes \mathcal{O}_F(\varphi_L'^{-1}(Z))$.

Итак, остается единственная возможность: $\operatorname{Pic} F \simeq \mathbf{Z}$, $F \simeq Q$, $\Omega_F \simeq \mathcal{O}_F(-2)$. Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 1. Если $\operatorname{Pic} F \simeq \mathbf{Z} \cdot \Omega_F^{-1}$, то F принадлежит семейству 1. В любом другом случае, согласно леммам 3 и 4, на F существует обратимый пучок L со свойствами (1)–(3) леммы 3 и $(L \cdot L) = 0, 1$ или 2. Если $(L \cdot L) = 1$, то $F \simeq \mathbf{P}_k^2$ по лемме 5. Если минимальный (по L)

индекс самопересечения $(L \cdot L)$ равен 2, то по лемме 5 F — квадрика в $\mathbf{P}^3_k$ и $\operatorname{Pic} F \simeq \mathbf{Z}$. Осталось разобрать случай $(L \cdot L) = 0$. Покажем, что F в этом случае принадлежит семейству II. По теореме Римана–Роха с учетом второго из утверждений (a) леммы 4 имеем:

$$\dim H^0(F, L) = -\frac{(L \cdot \Omega_F)}{2} + 1 \geqslant 2,$$

так как $(L \cdot \Omega_F) < 0$. Линейная система $|L|$ не имеет неподвижных компонент (по свойству (3) леммы 3) и $(L \cdot L) = 0$, поэтому пучок L определяет морфизм F на некоторую кривую. Из результатов работы [17] следует, что градуированная алгебра $R = \bigoplus\limits_{m \geqslant 0} H^0(F, L^m)$ конечно порождена и существует сюръективный морфизм

$$f\colon F \to \operatorname{Proj} R = C,$$

где C — полная неособая кривая. Ввиду формул Кюннета, морфизм f коммутирует с расширением основного поля и мы имеем:

$$\overline{f}\colon \overline{F} \to \overline{C} = \operatorname{Proj}(R \otimes \overline{k}).$$

Как показано в [17], $\overline{C}$ — нормальная неприводимая кривая и, следовательно, C — гладкая над k; поле функций $\overline{k}(\overline{C})$ алгебраически замкнуто в поле $\overline{k}(\overline{F})$, поэтому каждый слой $\overline{F}_{\overline{t}}$ связен, а общий слой F_η геометрически неприводим. Отсюда следует, что $\overline{f}_*\mathcal{O}_{\overline{F}} = \mathcal{O}_{\overline{C}}$ и $f_*\mathcal{O}_F = \mathcal{O}_C$. В следующей лемме вскрываются дальнейшие свойства морфизма f.

Лемма 6. *Для любой точки $t \in C$ $H^1(F_t, \mathcal{O}_{F_t}) = 0$, слой F_t неприводим над $k(t)$ и геометрически приведен. Каждый вырожденный геометрический слой $\overline{F}_{\overline{t}}$, $\overline{t} \in \overline{C}$, имеет вид $\overline{F}_{\overline{t}} = \overline{X}_1 + \overline{X}_2$, где $\overline{X}_i$, $i = 1, 2$, — неприводимые гладкие кривые рода нуль и $(\overline{X}_i \cdot \overline{X}_i) = -1$, $(\overline{X}_1 \cdot \overline{X}_2) = 1$.*

Доказательство. Морфизм $f\colon F \to C$ плоский ([9], лекция 6) и $R^q f_*\mathcal{O}_F = 0$ для $q \geqslant 2$ по соображениям размерности. Поэтому (см. [9], лекция 7) пучок $R^1 f_*\mathcal{O}_F$ локально свободен на C и

$$(R^1 f_*\mathcal{O}_F) \otimes k(t) = H^1(F_t, \mathcal{O}_{F_t}) \quad \forall\, t \in C.$$

Но для некоторой замкнутой точки $t \in C$ имеем $F_t = X \in |L|$. Из точной последовательности (1.1) получаем: $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$, что доказывает первое утверждение леммы.

Пусть $F_t = Y_1 + \ldots + Y_r$, $r \geqslant 2$, где Y_i — неприводимые кривые на F. Так как $F_t \in |L^m|$ для некоторого $m \geqslant 1$, то $(\mathcal{O}_F(F_t) \otimes \Omega_F) = m(L \cdot \Omega_F) < 0$. Не теряя общности можно считать, что $(\mathcal{O}_F(Y_1) \cdot \Omega_F) < 0$. Ясно, что $(Y_1 \cdot F_t) = 0$ и, поскольку слой F_t связен, $(Y_1 \cdot F_t - Y_1) > 0$. Отсюда $(Y_1 \cdot Y_1) < 0$. Так как

$$(\mathcal{O}_F(Y_1) \otimes \Omega_F \cdot L) = (\Omega_F \cdot L) < 0,$$

то

$$\dim H^0(F, \mathcal{O}_F(Y_1) \otimes \Omega) = 0.$$

Итак, на F существует обратимый пучок $\mathcal{O}_F(Y_1)$, удовлетворяющий условиям (1), (2) леммы 3, и $(\mathcal{O}_F(Y_1)\cdot\mathcal{O}_F(Y_1)) < 0$. Из начала доказательства леммы 3 видно, что в таком случае на F есть пучок $\mathcal{O}_F(Y)$, обладающий всеми тремя свойствами и $(\mathcal{O}_F(Y)\cdot\mathcal{O}_F(Y)) < 0$. Но это противоречит лемме 4. Тем самым неприводимость слоев доказана.

Пусть теперь $\overline{F}_{\bar t}$, $\bar t \in \overline{C}$, — некоторый замкнутый геометрический слой. Так как $R^1 f_*\mathcal{O}_F = 0$, то

$$H^0(\overline{F}_{\bar t}, \mathcal{O}_{\overline{F}_{\bar t}}) = \overline{f}_*\mathcal{O}_{\overline{F}} \otimes k(\bar t) = \mathcal{O}_{\overline{C}} \otimes k(\bar t) = \overline{k}.$$

Так как $(\overline{F}_t \cdot \overline{F}_t) = 0$ и $H^1(F_{\bar t}\cdot \mathcal{O}_{\overline{F}_{\bar t}}) = 0$, то из формулы для рода (1.3) получаем $(\overline{F}_{\bar t}\cdot K_{\overline{F}}) = -2$. Если $\overline{F}_{\bar t} = q\overline{X}_0$, где $\overline{X}_0$ — приведенная кривая, q — кратность (ввиду неприводимости слоя F_t кратность его геометрических неприводимых компонент одинакова), то аналогично имеем $(\overline{X}_0\cdot K_{\overline{F}}) = -2$. Но $(\overline{F}\cdot K_{\overline{F}}) = q(\overline{X}_0\cdot K_{\overline{F}})$; отсюда $q = 1$ и слой $F_{\bar t}$ приведен. Из приведенности каждого геометрического слоя следует геометрическая приведенность и общего слоя F_η.

Для доказательства последнего утверждения леммы заметим, что ввиду неприводимости слоя F_t для любой неприводимой компоненты $\overline{X}_i$ кривой $F_t \otimes \overline{k}$ индекс $(\overline{X}_i\cdot K_{\overline{F}})$ не зависит от i. Поэтому из равенства $(\overline{F}_{\bar t}\cdot K_{\overline{F}}) = -2$ вытекает, что $\overline{F}_{\bar t}$ не может состоять более чем из двух компонент. Пусть $F_{\bar t} = \overline{X}_1 + \overline{X}_2$, тогда $(\overline{X}_i\cdot K_{\overline{F}}) = -1$, $i = 1, 2$, и нет других возможностей, кроме $(\overline{X}_i\cdot\overline{X}_i) = -1$, $(\overline{X}_1\cdot\overline{X}_2) = 1$ и $p(\overline{X}_i) = 0$. Лемма доказана. □

Следствие. *Для каждого вырожденного слоя F_t поле вычетов $k(t)$ сепарабельно над k.*

Действительно, пусть q — степень несепарабельности $k(t)/k$. Слой F_t распадается на две компоненты над некоторым сепарабельным расширением поля k и мы можем считать поэтому, что k сепарабельно замкнуто. Тогда $\overline{F}_t = q(\overline{X}_1 + \overline{X}_2)$. По формуле для рода

$$(\overline{F}_{\bar t}\cdot\overline{F}_{\bar t}) + (\overline{F}_{\bar t}\cdot K_{\overline{F}}) = -2\dim H^0(F_t, \mathcal{O}_{F_t}) = -2[k(t):k] = -2q$$

и, аналогично,

$$(\overline{X}_i\cdot\overline{X}_i) + q(\overline{X}_i\cdot K_{\overline{F}}) = -2q.$$

Так как $(\overline{X}_i\cdot\overline{X}_i) = -1$, то отсюда $q = 1$.

Продолжим доказательство теоремы 1. Из спектральной последовательности Лере для морфизма f и пучков $\mathcal{O}_F$ и $G_{m,F}$ ($G_{m,F}$ — пучок обратимых элементов пучка $\mathcal{O}_F$) в топологии Зарисского

$$E_2^{p,q} = H^p(C, R^q f_*\mathcal{O}_F) \Rightarrow H^{p+q}(F, \mathcal{O}_F),$$
$$E_2^{p,q} = H^p(C, R^q f_* G_{m,F}) \Rightarrow H^{p+q}(F, G_{m,F})$$

получаем точные последовательности начальных членов:

$$0 \to H^1(C, f_*\mathcal{O}_F) \to H^1(F, \mathcal{O}_F) \to \dots,$$
$$0 \to H^1(C, f_* G_{m,F}) \to H^1(F, G_{m,F}) \to H^0(C, R^1 f_* G_{m,F}) \to \dots$$

Поскольку $f_*\mathcal{O}_F = \mathcal{O}_C$, то $f_*G_{m,F} = G_{m,C}$. Поэтому из первой последовательности получаем $H^1(C, \mathcal{O}_C) = 0$, а из второй (ввиду $H^1(X, G_{m,F}) = \operatorname{Pic} X$ для любой схемы X) — точную последовательность

$$0 \to \operatorname{Pic} C \xrightarrow{f^*} \operatorname{Pic} F \to \operatorname{Pic} F/C \to \dots, \tag{1.7}$$

где $\operatorname{Pic} F/C$ — группа глобальных сечений пучка относительных групп Пикара: она порождена неприводимыми компонентами слоев и группой Пикара общего слоя F_η морфизма f. В нашем случае по лемме 6 все слои неприводимы, поэтому нетривиальных компонент слоев нет. Более того, как было установлено в начале доказательства, F_η является геометрически неприводимой кривой, а по лемме 6 F_η — гладкая кривая рода нуль. Поэтому $\operatorname{Pic} F_\eta \simeq \mathbf{Z}$ и также $\operatorname{Pic} C \simeq \mathbf{Z}$. Пучок $L \in \operatorname{Pic} F$ эффективен, но не обилен ($(L \cdot L) = 0$), поэтому $\operatorname{Pic} F \not\simeq \mathbf{Z}$. Следовательно, из (1.7) мы получаем: $\operatorname{Pic} F \simeq \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$. Теорема 1 доказана.

Следствие (Энриквес–Манин). *Любая гладкая полная рациональная поверхность F' над k бирационально эквивалентна над k некоторой поверхности F из теоремы* 1.

В действительности из теоремы 1 следует существование даже бирационального k-морфизма.

Замечания. 1. Если поле k совершенно, то известно, что любая полная регулярная поверхность является гладкой. Поэтому по теореме о разрешении особенностей любую неприводимую и приведенную поверхность над k (в частности, рациональную) можно бирационально преобразовать в полную и гладкую. Интересно было бы описать полные регулярные (но не гладкие) минимальные рациональные поверхности.

2. Кроме поверхностей (стандартных форм), описанных в теореме 1, в работе [11] указано еще одно семейство стандартных форм (вырожденные поверхности дель Пеццо в определении [11]). К ним относятся полные гладкие поверхности F над k, полученные разрешением особых точек нормальных рациональных поверхностей F^* (имеющих только обыкновенные двойные особые точки) с $\operatorname{Pic} F^* \simeq \mathbf{Z} \cdot \Omega_{F^*}^{-1}$. Из нашей теоремы 1 следует, что поверхности этого семейства либо не являются минимальными, либо принадлежат семейству II. Например, если $F^* \subset \mathbf{P}^3_k$ — кубическая поверхность с тремя сопряженными геометрическими двойными точками и $F \to F^*$ — их разрешение, то на F есть геометрически приводимая исключительная кривая 1-го рода Z: собственный прообраз плоского сечения F^*, определяемого тройкой особых точек. В результате стягивания Z получается поверхность дель Пеццо степени 6.

§ 2. Критерий рациональности Кастельнуово

Следующее предложение является частичным обращением теоремы 1.

Предложение 4. (а). *Всякая полная гладкая поверхность F над k с обильным пучком Ω_F^{-1} удовлетворяет условиям* $(*)$.

(б) (Лемма Нётера). *Пусть F — гладкая полная поверхность над k и $g\colon F \to C$ — рациональное отображение на кривую рода нуль C, общий слой которого — геометрически неприводимая и геометрически приведенная рациональная кривая. Тогда F — рациональная поверхность (и, следовательно, удовлетворяет условиям $(*)$).*

Доказательство. а) Из обильности Ω_F^{-1} немедленно следует, что

$$H^0(F, \Omega_F^m) = 0 \quad \forall\, m \geqslant 1,$$

в частности, $p = P_2 = 0$.

Так как условия $(*)$ инвариантны относительно расширения поля констант, то можно считать k алгебраически замкнутым. По формуле Нётера (1.6) $(\Omega_F \cdot \Omega_F) + c_2(F) = 12(1-q)$. Поскольку $p(F) = 0$, то схема Пикара $\operatorname{Pic}^0 F$ приведена (см. [9]) и

$$b_1(F, l) = \dim \operatorname{Pic}^0 F = q, \quad l \neq \operatorname{char} k.$$

Это непосредственно следует из точной последовательности

$$0 \to H^1(F, \mu_{l^n}) \to \operatorname{Pic} F \xrightarrow{l^n} \operatorname{Pic} F \to \ldots,$$

соответствующей точной последовательности Куммера

$$0 \to \mu_{l^n} \to G_{m,F} \xrightarrow{l^n} G_{m,F} \to 0.$$

Подставляя в формулу Нётера, получаем:

$$(\Omega_F \cdot \Omega_F) = 8(1-q) + 2 - b_2(F, l).$$

Так как $b_2(F, l) \geqslant 1$, то при $q > 1$ мы получаем $(\Omega_F \cdot \Omega_F) < 0$, что противоречит обильности. Если $q = 1$, то $b_2(F, l) = 1$, но в этом случае отображение Альбанезе $F \to A$ является морфизмом на эллиптическую кривую ($\dim A = q = 1$) и для любого слоя F_a имеем $(F_a \cdot F_a) = 0$, что противоречит соотношению

$$1 \leqslant \operatorname{rk} \operatorname{Pic} F / \operatorname{Pic}^0 F \leqslant b_2(F, l) = 1$$

и обильности Ω_F^{-1}.

б) Пусть G — полная кривая рода нуль над $k(C)$, бирационально эквивалентная F_η. Тогда G является гладкой кривой и при антиканоническом вложении изоморфна невырожденной конике Q на плоскости $\mathbf{P}^2_{k(C)}$. Если $\overline{k}$ — алгебраическое замыкание k, то по теореме Тзена коника $Q \otimes \overline{k}(C)$ имеет $\overline{k}(C)$-точку и, следовательно, изоморфна $\mathbf{P}^1_{k(C)}$. Это означает, что $F \otimes \overline{k}$ бирационально эквивалентна над $\overline{k}$ поверхности $\mathbf{P}^1_{\overline{k}} \times C \otimes \overline{k}$. Так как по условию $C \otimes \overline{k} \simeq \mathbf{P}^1_{\overline{k}}$, то поверхность $\overline{F}$ рациональна и, ввиду бирациональной инвариантности условий $(*)$, она им удовлетворяет. Доказательство закончено. $\square$

Хорошо известно, что в случае алгебраически замкнутого поля k условия $(*)$ для F — это знаменитый критерий рациональности Кастельнуово.

Наиболее прозрачное доказательство этого критерия в $\operatorname{char} k = 0$ дано в работе Кодаиры [7]. В $\operatorname{char} k = p > 0$ он был доказан Зарисским [15, 16]. М. Артин распространил доказательство Кодаиры в характеристику $p > 0$, используя l-адические когомологии вместо классических (см., например, [8]).

Наше доказательство — это редукция к доказательству Кодаиры посредством подъема поверхности F в характеристику нуль.

Теорема 2 (критерий рациональности (Кастельнуово)). *Гладкая проективная поверхность над алгебраически замкнутым полем k тогда и только тогда рациональна, когда $q(F) = P_2(F) = 0$.*

Доказательство. В доказательстве нуждается только импликация $(*) \Rightarrow$ рациональность F. Можно предполагать F минимальной. Так как k алгебраически замкнуто, то по лемме Нётера (см. предложение 1,(б)) любая поверхность из семейства II теоремы 1 рациональна. Квадрика в $\mathbf{P}^3_k$ рациональна. Поэтому остается рассмотреть случай, когда F принадлежит семейству I.

Следующая лемма завершает доказательство теоремы 2.

Лемма 7. *Над алгебраически замкнутым полем k не существует гладких поверхностей F из семейства* I.

Доказательство. Если $\operatorname{char} k = 0$, то это показал Кодаира [7]. Его рассуждения очень просты. Можно считать $k = \mathbf{C}$, тогда экспоненциальная последовательность дает изоморфизм

$$H^2(F, \mathbf{Z}) \simeq \operatorname{Pic} F.$$

Но по условию $\operatorname{Pic} F \simeq \mathbf{Z} \cdot \Omega_F^{-1}$. Тогда по двойственности Пуанкаре должно быть $(\Omega_F \cdot \Omega_F) = \pm 1$, а формула Нётера (1.6) дает $(\Omega_F \cdot \Omega_F) = 9$. Противоречие.

Пусть теперь $\operatorname{char} k = p > 0$. Так как $\dim H^0(F, \Omega_F^{-1}) \geqslant (\Omega_F \cdot \Omega_F) + 1$, то существует кривая $X \in |\Omega_F^{-1}|$. Из условия $\operatorname{Pic} F \simeq \mathbf{Z} \cdot \Omega_F^{-1}$ следует, что X неприводима, приведена и по формуле для рода (1.2) имеем $p(X) = 1$.

Покажем, что F удовлетворяет достаточному условию подъема в характеристику 0, т. е. $H^2(F, T_F) = 0$, где T_F — пучок ростков касательного расслоения.

Рассмотрим точную последовательность пучков

$$0 \to \mathcal{O}_F((n-1)X) \otimes T_F \to \mathcal{O}_F(nX) \otimes T_F \to \mathcal{O}_X \otimes \mathcal{O}_F(nX) \otimes T_F \to 0, \quad n \geqslant 0,$$

и соответствующую последовательность когомологий

$$\ldots \to H^1(X, \mathcal{O}_X \otimes \mathcal{O}_F(nX) \otimes T_F) \to H^2(F, \mathcal{O}_F((n-1)X) \otimes T_F) \to \\ \to H^2(F, \mathcal{O}_F(nX) \otimes T_F) \to 0. \quad (2.1)$$

По теореме Серра $H^2(F, \mathcal{O}_F(nX) \otimes T_F) = 0$ для достаточно больших n, так как пучок $\mathcal{O}_F(X) \simeq \Omega_F^{-1}$ обилен. Поэтому для обращения в нуль $H^2(F, T_F)$ достаточно, чтобы

$$H^1(X, \mathcal{O}_X \otimes \mathcal{O}_F(nX) \otimes T_F) = 0 \quad \text{для всех} \quad n \geqslant 1.$$

Разберем по отдельности два случая:

а) в линейной системе $|\Omega_F^{-1}|$ существует гладкая кривая X;

б) все кривые из $|\Omega_F^{-1}|$ особые.

В случае а) пусть X — гладкая кривая, тогда $T_X \simeq \mathcal{O}_X$, так как $p(X) = 1$, и мы имеем точную последовательность пучков на X:

$$0 \to \mathcal{O}_X \to T_{F/X} \to N \to 0,$$

где $N = \mathcal{O}_X \otimes \mathcal{O}_F(X)$ — нормальный пучок на X в F. Умножая ее тензорно на $\mathcal{O}_F(nX)$ и переходя к когомологиям, получаем:

$$\ldots \to H^1(X, \mathcal{O}_X \otimes \mathcal{O}_F(nX)) \to H^1(X, \mathcal{O}_F(nX) \otimes T_{F/X}) \to \\ \to H^1(X, \mathcal{O}_F(nX) \otimes N) \to 0. \quad (2.2)$$

Здесь

$$H^1(X, \mathcal{O}_X \otimes \mathcal{O}_F(nX)) = H^1(X, \mathcal{O}_F(nX) \otimes N) = 0$$

при $n \geqslant 1$ по теореме Римана–Роха на X, откуда

$$H^1(X, \mathcal{O}_F(nX) \otimes T_{F/X}) = 0$$

и, следовательно, $H^2(F, T_F) = 0$.

Случай б) не реализуется. Действительно, если все кривые из $|\Omega_F^{-1}|$ особы, то, согласно [14], это возможно только в случае $\operatorname{char} k = 2$ и 3, причем каждая кривая X имеет только одну каспидальную особую точку (т. е. вида $t_1^2 - t_2^2 = 0$). Выберем некоторый линейный подпучок $M \subset |\Omega_F^{-1}|$. Тогда геометрическое место особых точек слоев пучка M — это некоторая кривая Y. Как замечено в [19], кривая Y не может иметь особых точек. Пучок M определяет чисто несепарабельное накрытие $Y \to \mathbf{P}^1$. Отсюда следует, что Y — рациональная кривая и, поскольку она неособа, то $p_a(Y) = 0$. С другой стороны, так как $\operatorname{Pic} F \simeq \mathbf{Z} \cdot \mathcal{O}_F(X)$, то существует целое число m такое, что $Y \sim mX$ и $p_a(Y) = \dfrac{m(m-1)}{2} + 1 > 0$. Противоречие.

Таким образом, но теории Гротендика (SGA3 и [6], гл. III) поверхность F может быть поднята в характеристику 0 и, более того, алгебраизуема, ввиду проективности F. Точнее, существует полное кольцо дискретного нормирования W с полем вычетов k и полем частных K, $\operatorname{char} K = 0$, и плоский собственный морфизм $h\colon \widetilde{F} \to \operatorname{Spec} W$ с замкнутым слоем $F \simeq F \otimes k$. Так как замкнутый слой гладок, то гладок и общий слой $\widetilde{F}_w$, где $w \in \operatorname{Spec} W$ — общая точка. Поэтому h — гладкий морфизм. Имеем $h_*\mathcal{O}_{\widetilde{F}} = W$ и $R^i h_* \mathcal{O}_{\widetilde{F}} = 0$, $i > 2$, так как слои двумерны. Следовательно (см. [9], лекция 7), $R^2 h_* \mathcal{O}_{\widetilde{F}}$ локально свободен и, поскольку его значение на замкнутом слое равно 0, он равен нулю всюду. Теперь, аналогично, имеем: $R^1 h_* \mathcal{O}_{\widetilde{F}} = 0$. Таким образом, для любого слоя, в частности, для общего геометрического

$$p(\widetilde{F}_w \otimes \overline{K}) = q(\widetilde{F}_w \otimes \overline{K}) = 0.$$

Группа $\operatorname{Pic} F$ с обильной образующей Ω_F^{-1} поднимается на $\widetilde{F}$ и в силу полунепрерывности ранга (см. [13], Exp. X, (7.16.2))

$$\operatorname{Pic}(\widetilde{F}_w \otimes \overline{K}) \simeq \mathbf{Z} \cdot \Omega^{-1}_{\widetilde{F}\otimes\overline{K}}$$

(ранг на геометрическом общем слое не больше, чем на замкнутом слое, но $\operatorname{rk}\operatorname{Pic} F = 1$).

Поверхность $\widetilde{F}_w \otimes \overline{K}$ над алгебраически замкнутым полем $\overline{K}$, $\operatorname{char}\overline{K} = 0$, обладает всеми свойствами поверхностей из семейства 1, которое, как было показано, пусто. Следовательно, не существует и семейства I над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 0$. Лемма, а вместе с ней и теорема полностью доказаны. □

§ 3. Геометрия стандартных форм

О п р е д е л е н и е. Гладкая полная поверхность F над полем k называется поверхностью дель Пеццо, если пучок Ω_F обилен.

Все поверхности из семейства I в теореме 1 являются поверхностями дель Пеццо. Некоторые F из семейства II тоже могут быть поверхностями дель Пеццо.

Отметим основные свойства поверхностей дель Пеццо (см. [10, 11]).

(а) $1 \leqslant (\Omega_F \cdot \Omega_F) \leqslant 9$, это следует из формулы (1.6).

(б) Если $n = (\Omega_F \cdot \Omega_F) \geqslant 3$, то пучок Ω_F^{-1} очень обилен и осуществляет изоморфное вложение F в $\mathbf{P}_k^n$ в качестве поверхности степени n; обратно, всякая гладкая (нормальная) поверхность F степени $3 \leqslant n \leqslant 9$ в $\mathbf{P}_k^n$, не лежащая ни в какой гиперплоскости, является поверхностью дель Пеццо. Если $n = 2$, то Ω_F^{-1} осуществляет двулистное накрытие $F \to \mathbf{P}_k^2$ с кривой степени 4 в качестве кривой ветвления. Если $n = 1$, то пучок Ω_F^{-1} осуществляет двулистное накрытие $F \to Q \subset \mathbf{P}_k^3$, Q — квадратичный конус, с кривой ветвления, не проходящей через вершину конуса, высекаемой на Q некоторой кубикой.

(в) Каждая геометрически неприводимая кривая X на F с отрицательным индексом самопересечения является исключительной кривой первого рода. Число таких кривых на $F \otimes \overline{k}$ конечно и подсчитано, конфигурация их изучена (см. [10], с. 147). Если на F нет исключительных кривых, то либо $n = 9$ и $\overline{F} \simeq \mathbf{P}^2_{\overline{k}}$, либо $n = 8$ и $\overline{F} \simeq \mathbf{P}^1_{\overline{k}} \times \mathbf{P}^1_{\overline{k}}$.

(г) Над алгебраически замкнутым полем k поверхность дель Пеццо F с $n = 9$ изоморфна $\mathbf{P}_k^2$; с $n = 8$ либо $F \simeq \mathbf{P}_k^1 \times \mathbf{P}_k^1$, либо $F \simeq \mathbf{F}_1$ — образу $\mathbf{P}_k^2$ при моноидальном преобразовании с центром в одной точке. Если $1 \leqslant n \leqslant 7$, то F тогда и только тогда является поверхностью дель Пеццо, когда она изоморфна образу $\mathbf{P}_k^2$ при моноидальном преобразовании с центром в $9 - n$ замкнутых точках, никакие три из которых не лежат на одной прямой, никакие шесть — на одной конике и все восемь при $n = 1$ не лежат на кубике, одна из восьми точек на которой особая.

(д) Пусть $F \to F'$ — бирациональный морфизм гладких проективных поверхностей. Если F — поверхность дель Пеццо, то F' — также поверхность

дель Пеццо. Если F' — поверхность дель Пеццо, $(\Omega_F \cdot \Omega_F) \geqslant 1$ и все кривые на $\overline{F}$ с отрицательным индексом пересечения являются исключительными, то F — также поверхность дель Пеццо.

З а м е ч а н и е. В книге [10] (гл. IV, п. 2.5, п. 2.8, п. 4.3) оставлен открытым вопрос о достаточности условий «общности положения» точек, сформулированных в пункте (г). Ответ на этот вопрос дает следующее простое рассуждение.

Пусть $g\colon F \to \mathbf{P}^2_k$ — моноидальное преобразование с центром в $r = 9 - n$ различных точек $\mathbf{P}^2_k$ (k алгебраически замкнуто) $x_1, \ldots, x_r$. Морфизм g отображает кривые из линейной системы $|\Omega_F^{-1}|$ в кубические кривые, проходящие через $x_1, \ldots, x_r$ (поскольку $f_*\Omega_F = \Omega_{\mathbf{P}^2_k}$). Так как $n \leqslant 8$, то $(\Omega_F \cdot \Omega_F) > 1$ и $\dim H^0(F, \Omega_F^{-1}) = (\Omega_F \cdot \Omega_F) + 1 \geqslant 2$. По численному критерию обильности пучок Ω_F^{-1} будет обилен, если:

(α) линейная система $|\Omega_F^{-1}|$ не содержит неподвижных компонент;

(β) на F нет неприводимых и приведенных кривых Z с $(\mathcal{O}_F(Z) \cdot \Omega_F) = 0$;

если $|\Omega_F^{-1}|$ не имеют неподвижных компонент, то Ω_F^{-m} стягивает такие кривые в особые точки.

В случае (α) пусть Y — неподвижная компонента, тогда $g(Y)$ является компонентой всех кубических кривых, проходящих через $x_1, \ldots, x_r$, следовательно, $g(Y)$ — либо прямая, либо коника. Если $g(Y)$ — прямая, проходящая не более чем через 2 точки x_i, то пространство дополнительных коник, проходящих по крайней мере через $r - 2$ точки, строго меньше $(\Omega_F \cdot \Omega_F)$ — размерности линейной системы $|\Omega_F^{-1}|$. Поэтому $g(Y)$ проходит через $s \geqslant 3$ точек. Аналогично, если $g(Y)$ — коника.

В случае (β) необходимо имеем (из отрицательности самопересечения стягиваемых кривых и формулы для рода) $(Z \cdot Z) = -2$. Пусть $g(Z)$ на $\mathbf{P}^2_k$ — кривая степени m, проходящая через x_i с кратностями ν_i. Тогда

$$(Z \cdot Z) = m^2 - \sum_{i=1}^{r} \nu_i^2 = -2, \quad (\mathcal{O}_F(Z) \cdot \Omega_F) = 3m - \sum_{i=1}^{r} \nu_i = 0$$

или

$$\sum_{i=1}^{r} \nu_i^2 = m^2 + 2, \quad \sum_{i=1}^{r} \nu_i = 3m.$$

Квадратичная форма $\sum\limits_{i=1}^{r} \nu_i^2$ имеет минимум при $\nu_1 = \ldots = \nu_r = \nu$, $\nu = \dfrac{3m}{r}$, который равен $\dfrac{9m^2}{r}$. Следовательно, $\dfrac{9m^2}{r} \leqslant m^2 + 2$ или $(9 - r)m^2 \leqslant 2r$. Отсюда видно, что могут представиться только следующие возможности: $3 \leqslant r < 6$, $m = 1$, $6 \leqslant r < 8$, $m = 1$ и 2; $r = 8$, $m = 3$ ($m \neq 4$, так как $\nu = \dfrac{12}{8}$ нецелое и минимум не достигается). В первых двух случаях кривая $g(Z)$ может быть только прямой или коникой. Из равенства $(Z \cdot Z) = -2$ следует, что прямая должна проходить через 3 точки x_i, а коника — через 6. В случае $r = 8$, $m = 3$ одна из точек должна иметь кратность 2, а остальные 1. Таким образом, доказано, что Ω_F^{-1} обилен тогда и только тогда, когда выполнены условия, сформулированные в конце пункта (г).

Далее в этом параграфе мы будем рассматривать в основном поверхности из семейства II.

Доказательство теоремы 3. (1). Так как $p(F_t) = 0$, то простые вычисления показывают, что $H^1(F_t, \Omega_F^{-1} \otimes \mathcal{O}_{F_t}) = 0$ для любого слоя F_t, $t \in C$. Поэтому $R^1 f_* \Omega_F^{-1} = 0$ и пучок $f_* \Omega_F^{-1}$ локально свободен ранга $\dim H^0(F_t, \Omega_F^{-1} \otimes \mathcal{O}_{F_t}) = 3$ [см. [9], лекция 7]. Далее, из строения геометрических слоев $\overline{F}_{\overline{t}}$ видно, что ограничение пучка Ω_F^{-1} на любую компоненту слоя $\overline{F}_{\overline{t}}$ является очень обильным пучком. Отсюда получаем требуемое изоморфное вложение над C

$$\varphi\colon F \to \mathbf{P}_C\bigl(f_* \Omega_F^{-1}\bigr).$$

Так как

$$\deg_{\overline{k}}\bigl(\Omega_{\overline{F}}^{-1} \otimes \mathcal{O}_{\overline{F}_{\overline{t}}}\bigr) = \bigl(\Omega_{\overline{F}}^{-1} \cdot \mathcal{O}_{\overline{F}}\bigl(\overline{F}_{\overline{t}}\bigr)\bigr) = 2,$$

то $\varphi(\overline{F}_{\overline{t}})$ является коникой в соответствующей плоскости

$$\mathbf{P}\bigl(H^0\bigl(\overline{F}_{\overline{t}}, \Omega_{\overline{F}} \otimes \mathcal{O}_{\overline{F}_{\overline{t}}}\bigr)\bigr) \simeq \mathbf{P}^2_{\overline{k}}.$$

Если $\overline{F}_{\overline{t}}$ приводим, то $\varphi(\overline{F}_{\overline{t}})$ — пара прямых в $\mathbf{P}^2_{\overline{k}}$.

(2) Пусть $p(C) = 0$ и морфизм f гладкий. Предположим сначала, что существует сечение $s\colon C \to F$ и $s(C) = S$. Тогда, как и в (1), $R^i f_* \mathcal{O}_F(S) = 0$, $i \geqslant 1$, и $f_* \mathcal{O}_F(S)$ — локально свободный пучок ранга $\dim H^0(F_i, \mathcal{O}_F(S) \otimes \mathcal{O}_{F_t}) = 2$. Пусть E — соответствующее двумерное расслоение, тогда нетрудно проверить, что отображение $\psi\colon F \to \mathbf{P}_C(E)$ является изоморфизмом над C. Из классификации векторных расслоений на прямой известно, что $\mathbf{P}_{\overline{C}}(E \otimes \overline{k}) \simeq \mathbf{F}_N$, где

$$\mathbf{F}_N = \operatorname{Proj}_{\mathbf{P}^1_{\overline{k}}}\bigl(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1_{\overline{k}}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1_{\overline{k}}}(N)\bigr), \quad N \geqslant 0,$$

— стандартная линейчатая поверхность.

Пусть теперь $f\colon F \to C$ не имеет сечения над k. Тогда $\overline{f}\colon \overline{F} \to \overline{C}$ имеет сечение по лемме Нётера–Тзена и, по предыдущему, существует изоморфизм $\overline{F} \simeq \mathbf{F}_N$ для некоторого $N \geqslant 0$.

Пусть $N \geqslant 1$ и $S \subset \mathbf{F}_N$ — образ канонического сечения: $(S \cdot S) = -N$ и $(S \cdot K_{\mathbf{F}_N}) = 2N - 2$. Ввиду единственности неприводимой кривой S с отрицательным индексом самопересечения на $\mathbf{F}_N$ на поверхности F должна существовать геометрически неприводимая и приведенная над k кривая X такая, что $X \otimes \overline{k} = qS$. Из неприводимости и геометрической связности X поле $H^0(X, \mathcal{O}_X)$ должно быть чисто радикальным расширением поля k, причем $q \geqslant \dim H^0(X, \mathcal{O}_X)$. По формуле для рода (1.3) немедленно получаем $q = 1$, т. е. в этом случае $F \to C$ должно иметь сечение. Следовательно, остается $N = 0$, $F \simeq C \times C'$, где C' не имеет k-точки.

Известно, что $(\Omega_{\mathbf{F}_N} \cdot \Omega_{\mathbf{F}_N}) = 8$, поэтому $(\Omega_F \cdot \Omega_F) = 8$.

(3) Если морфизм f не гладкий, то он не имеет сечений. Действительно, если $S = s(C)$, то $(\overline{S} \cdot \overline{F}_{\overline{t}}) = 1$. Пусть $\overline{F}_{\overline{t}} = \overline{X}_1 + \overline{X}_2$ — вырожденный слой, тогда поскольку $(\overline{S} \cdot \overline{X}_1) = (\overline{S} \cdot \overline{X}_2)$, то $(\overline{S} \cdot \overline{F}_{\overline{t}}) > 1$. Противоречие. Следовательно, общий слой F_η, не имеет точек степени 1 над $k(\eta)$ и $\operatorname{Pic} F_\eta$ порождается $\Omega_F^{-1} \otimes \mathcal{O}_{F_\eta}$ —

пучком степени 2. В точной последовательности (1.7) $\operatorname{Pic} F/C \simeq \operatorname{Pic} F_\eta \simeq \mathbf{Z}$, поэтому

$$\operatorname{Pic} F = f^* \operatorname{Pic} C \oplus \mathbf{Z} \cdot \Omega_F^{-1}.$$

Каждая компонента геометрического вырожденного слоя по лемме 6 является исключительной кривой первого рода на $\overline{F}$. Стягивая по одной из компонент из каждого такого слоя (всего r штук), мы получаем одну из поверхностей $\mathbf{F}_N$ (см. п. 2 этой теоремы). Отсюда непосредственно следует: $\operatorname{rk} \operatorname{Pic} \overline{F} = 2 + r$, так как $\operatorname{rk} \operatorname{Pic} F_N = 2$, и $(\Omega_{\overline{F}} \cdot \Omega_{\overline{F}}) = 8 - r$ (если $(\Omega_F \cdot \Omega_F)$ нечетно, то $r = \sum \deg t_i$ нечетно, т. е. на C есть дивизор степени, равной ОНД$(r, 2p(C) - 2) = 1$). По теореме Римана–Роха на кривой рода нуль C имеется в таком случае k-точка и $C \simeq \mathbf{P}^1_k$.

(4) Прежде всего отметим, что $F \to C$ и $F' \to C$ тогда и только тогда бирационально эквивалентны над C, когда изоморфны их общие слои F_η и F'_η над $k(\eta)$. Поэтому по классической теории соответствующие алгебры кватернионов A_η и A'_η над $k(\eta)$ изоморфны.

Рассмотрим сначала случай, когда морфизм $f\colon F \to C$ — гладкий. Тогда по определению Гротендика [5] $F \to C$ является схемой Севери–Брауэра над C относительной размерности 1 и ей соответствует алгебра Ацумая ранга 4 над C, значение которой в общей точке равно A_η. Соответствие между алгебрами Ацумая и схемами Севери–Брауэра биективно [5], поэтому надо только убедиться в том, что алгебры Ацумая, продолжающие A_η, — это в точности все максимальные порядки в A_η над C. Это в общем случае доказано в [4].

Обобщение предыдущего соответствия на негладкие морфизмы относительной размерности 1 с двумерной базой C дано в работе [2]. Когда база C одномерна, как в нашем случае, рассуждения, приведенные в [2], несколько упрощаются и мы очень коротко воспроизведем их здесь. Пусть A — любой максимальный порядок в A_η над C. Тогда ему можно сопоставить (как и в гладком случае) — C-схему его левых идеалов $X \to C$ (замкнутая подсхема грассманиана над C, представляющая функтор $X(C') = \{$левые идеалы I в $A \underset{\mathcal{O}_C}{\otimes} \mathcal{O}'_C$ ранга 2$\}$). Алгебра A_η может иметь только конечное число точек ветвления $t_1, \ldots, t_s \in C$, вне которых она продолжается до алгебры Ацумая. Ясно, что t_i содержатся в множестве точек вырождения морфизма $f\colon F \to C$. Мы хотим выяснить строение схемы $X \to C$ локально в окрестности любой точки $t \in C$. Если t не является точкой ветвления, то ввиду максимальности порядка A локально $A \otimes \mathcal{O}_t$ является алгеброй Ацумая и, следовательно, соответствующий слой X_t гладок и имеет род нуль (как слой схемы Севери–Брауэра $X \otimes \mathcal{O}_t \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_t$).

Пусть теперь $t \in \{t_1, \ldots, t_s\}$. Тогда, как хорошо известно, максимальный порядок в A_η над кольцом (дискретного нормирования) $\mathcal{O}_t$ можно задать с помощью базиса $(1, i, j, ij)$ с таблицей умножения:

$$\begin{gathered} i^2 = \alpha, \quad j^2 = \beta t, \quad ij = -ji, \quad \text{если} \quad \operatorname{char} k \neq 2, \\ i^2 = i + \alpha, \quad j^2 = \beta t, \quad ij = ji + j, \quad \text{если} \quad \operatorname{char} k = 2, \end{gathered} \tag{3.1}$$

где t — локальный параметр в точке t, α, $\beta \in \mathcal{O}_t$ — обратимые элементы и

$$\begin{aligned} x^2 - \alpha \not\equiv 0 \pmod{t}, \quad \text{если} \quad \operatorname{char} k \neq 2, \\ x^2 + x + \alpha \not\equiv 0 \pmod{t}, \quad \text{если} \quad \operatorname{char} k = 2, \end{aligned} \tag{3.2}$$

для любого $x \in \mathcal{O}_t$. Обратно, для любых обратимых α, $\beta \in \mathcal{O}_t$, удовлетворяющих (3.2), соотношения (3.1) определяют максимальный $\mathcal{O}_t$-порядок в некоторой нетривиальной кватернионной алгебре. Элементы α, β обратимы в некоторой окрестности t, поэтому наш максимальный порядок A задается соотношениями (3.1) в некоторой окрестности $U \ni t$. По (3.1) легко восстановить уравнения, задающие схему левых идеалов $X_U \to U$, как замкнутую подсхему в $\mathbf{P}^2_U$:

$$\begin{aligned} x_0^2 - \alpha x_1^2 - \beta t x_2^2 = 0, \quad \text{если} \quad \operatorname{char} k \neq 2, \\ x_0^2 + x_0 x_1 + \alpha x_1^2 + \beta t x_2^2 = 0, \quad \text{если} \quad \operatorname{char} k = 2, \end{aligned} \tag{3.3}$$

где (x_0, x_1, x_2) — однородные координаты в $\mathbf{P}^2_U$. Из (3.3) непосредственно видно, что X_U — гладкая поверхность над k, так как $k(t)/k$ сепарабельно (см. следствие из леммы 6) и все слои морфизма $X_U \to U$ — гладкие коники, кроме слоя X_t, который над квадратичным расширением $k(t)\big(\sqrt{\alpha \bmod t}\big)$ распадается на две различные прямые.

Таким образом, для каждого максимального $\mathcal{O}_C$-порядка A схема его левых идеалов X является полной гладкой поверхностью над k и морфизм $X \to C$ обладает всеми свойствами II из теоремы 1.

Для доказательства биективности соответствия $A \to X$ заметим, что все максимальные порядки в A_η являются C-формами в этальной топологии некоторого стандартного порядка A_0 в тривиальной кватернионной алгебре, а именно, имеющего локальное представление (3.1) с $\alpha = \beta = 1$. Аналогично, если $X_0 \to C$ — схема левых идеалов порядка A_0, то схема $X \to C$ локально изоморфна в этальной топологии $X_0 \to C$. Поэтому, согласно стандартному когомологическому описанию форм, для биективности достаточно показать, что естественное отображение этальных пучков автоморфизмов $\operatorname{Aut} A_0 \to \operatorname{Aut} X_0$ является изоморфизмом. Вне критических точек это хорошо известно [5], в критической точке проверяется непосредственно, используя явное вид (3.1) и (3.3). Мы опускаем эту простую проверку (см. [4]).

Ясно, что в биективном соответствии $A \to X$ максимальным порядкам из A_η соответствуют те и только те стандартные формы $F' \to C$, общие слои которых изоморфны слою F_η. Доказательство теоремы 3 закончено. □

З а м е ч а н и е. Пункт 4 теоремы 3 дает некоторое описание относительных минимальных моделей полей рода нуль $k(F)/k(C)$ над гладкой алгебраической кривой C (ср. [18]).

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 4. Пусть $f\colon F \to C$ — стандартная форма из семейства II и $(\Omega_F \cdot \Omega_F) = 8$. Тогда в силу утверждений (2)–(3) теоремы 3, морфизм f — гладкий и $\overline{F} \simeq \mathbf{F}_N$ для некоторого $N \geqslant 0$. Хорошо известно (см. [1]), что при $N \neq 1$ все $\mathbf{F}_N$ минимальны, а значит, минимальна и F. Как и в доказательстве утверждения (2) теоремы 3, если $\overline{F} \simeq \mathbf{F}_1$, то на

F существует кривая — сечение X, которая в силу критерия Кастельнуово–Энриквеса может быть стянута. Образом F при этом стягивании будет уже минимальная поверхность F' с $\operatorname{Pic} F' \simeq \mathbf{Z}$ и легко извлечь из доказательства теоремы 1, что $F' \simeq \mathbf{P}^2_k$.

Пусть теперь $(\Omega_F \cdot \Omega_F) \neq 8$. Тогда морфизм $f\colon F \to C$ не гладкий и по теореме 3 $\operatorname{Pic} F = f^* \operatorname{Pic} C \oplus \mathbf{Z}\cdot\Omega_F^{-1}$. Предположим, что F не минимальна. Тогда должна существовать исключительная кривая первого рода $X \subset F$, и пусть $a, b \in \mathbf{Z}$ таковы, что $X \sim aF_t - bK_F$, где F_t — некоторая образующая группа $f^* \operatorname{Pic} C$ (класса слоя над некоторой точкой $t \in C$), а K_F — канонический дивизор. Поскольку в слоях f нет стягиваемых кривых, то $0 < (X \cdot F_t) = 2 \deg t b$, т. е. $b > 0$. Имеем:

$$\begin{aligned} (X \cdot X) &= 4ab \deg t + b^2(\Omega_F \cdot \Omega_F) = -m, \\ (X \cdot K_F) &= -2a \deg t - b(\Omega_F \cdot \Omega_F) = -m, \end{aligned} \tag{3.4}$$

где $m \geqslant 1$ — число геометрических компонент кривой $\overline{X}$. Положим $n = (\Omega_F \cdot \Omega_F)$. Тогда из (3.4) получаем уравнение

$$-nb^2 + 2mb + m = 0. \tag{3.5}$$

При $n \leqslant 0$ это уравнение не имеет решений в натуральных числах m и b, следовательно, соответствующие поверхности минимальны. Если $1 \leqslant n \leqslant 9$, то, решая (3.5), получаем:

$$b_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{m(m+n)}}{n}.$$

Для существования целых решений необходимо, чтобы $m(m+n)$ было квадратом целого числа, т. е. должно быть разрешимо в натуральных числах уравнение

$$m(m+n) = r^2, \quad 1 \leqslant n \leqslant 9. \tag{3.6}$$

Пусть $d = \text{О.Н.Д.}(m, m+n)$, тогда необходимо $m \leqslant \dfrac{n-d}{2}$. Отсюда легко получить все решения уравнения (3.6), а вместе с ним и (3.5). Имеем:

n	m	a	b	$\deg t$
3	1	-1	1	1
5	4	-3	2	1
6	2	-2	1	1
6	2	-1	1	2

Осталось убедиться, что исключительные кривые с указанными числовыми характеристиками на соответствующих поверхностях действительно существуют. Так как

$$K_F - X \sim -aF_t + (b+1)K_F$$

и

$$(K_F - X \cdot F_t) = -2(b+1) \deg t < 0,$$

то

$$\dim H^0(F, \Omega_F \otimes \mathcal{O}_F(-X)) = \dim H^2(F, \mathcal{O}_F(X)) = 0.$$

По теореме Римана–Роха

$$\dim H^0(F, \mathcal{O}_F(X)) \geqslant \frac{-m+m}{2} + 1 = 1.$$

Следовательно, все числовые типы, указанные в таблицы, реализуются и поверхности F с $n = 3, 5$ и 6 не минимальны. Так как $\operatorname{rk} \operatorname{Pic} F = 2$, то на F не может быть более одной стягиваемой кривой X. После стягивания X мы получаем поверхность F' из семейства I, для которой, соответственно, $(\Omega_{F'} \cdot \Omega_{F'}) = 4, 9, 8$. Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 5. (1) Пусть $n = (\Omega_F \cdot \Omega_F)$. Проверим, что на F с $n = 3, 5, 6$ пучок Ω_F^{-1} обилен. По численному критерию обильности надо показать, что на F нет неприводимых приведенных кривых Y таких, что $(Y \cdot -K_F) \leqslant 0$. Поскольку $\dim H^0(F, \Omega_F^{-1}) \geqslant n+1$, то, если такая кривая Y существует, она должна быть либо неподвижной компонентой линейной системы $|\Omega_F^{-1}|$, либо $(Y \cdot K_F) = 0$, $(Y \cdot Y) < 0$.

Если Y — неподвижная компонента, то $Y \sim -aF_t - K_F$, где $a \geqslant 1$. Имеем:

$$(Y \cdot -K_F) = -2a \deg t + n \leqslant 0,$$
$$(Y \cdot Y) = -4a \deg t + n,$$
$$(Y \cdot F_t) = 2 \deg t,$$
$$p(Y) = \frac{(Y \cdot Y + K_F)}{2} + 1 = -a \deg t + 1 \leqslant -\frac{n}{2} + 1.$$

Из третьего равенства следует, что $\overline{Y}$ может иметь не более чем две геометрические компоненты или кратность 2. Если $n \geqslant 3$, то последнее неравенство означает, что Y геометрически приводима или кратна, что противоречит второму равенству при нечетных n. С другой стороны, если число геометрических компонент или кратность не больше 2, то по формуле для рода

$$p(Y) \geqslant -1,$$

что при $n \geqslant 5$ противоречит четвертому неравенству.

Аналогично, если $Y \sim -\alpha F_t - \beta K_F$, $\beta \geqslant 1$, и $(Y \cdot K_F) = 0$, то

$$(Y \cdot K_F) = 2\alpha \deg t - \beta n = 0,$$
$$(Y \cdot Y) = -2\alpha\beta \deg t < 0.$$

Пусть $Y = q\sum\limits_{i=1}^{m} \overline{Y}_i$, где $\overline{Y}_i$ — компоненты связности, q — кратность. Так как $(\overline{Y}_i \cdot \overline{K}_F) = 0$ и $(\overline{Y}_i \cdot \overline{Y}_i) < 0$, то $(\overline{Y}_i \cdot \overline{Y}_i) = -2$ и $p(\overline{Y}_i) = 0$ (по формуле (1.2)). Отсюда имеем: $(Y \cdot Y) = -2q^2 m$ и $(F_t \cdot Y) = 2\beta \deg t = \deg t \cdot m \cdot q \cdot s$, где $s = (\overline{Y}_i \cdot \overline{F}_{\overline{t}})$ — число точек пересечения геометрического слоя с любой из связных компонент $\overline{Y}_i$. Сделав соответствующие подстановки, получаем соотношение

$$2q^2 m = \frac{m^2 q^2 s^2 n}{4},$$

или $ms^2n = 8$, что возможно только при $n = 1, 2, 4, 8$. Тем самым первое утверждение доказано.

(2) Если $n = 8$, то существует такое N, что $\overline{F} \simeq \mathbf{F}_N$. Пусть $S \subset \mathbf{F}_N$ — кривая — сечение с $(S \cdot S) = -N$, тогда $(S \cdot -K_{\mathbf{F}_N}) = -N + 2$, так что при $N \geqslant 2$ пучок $\Omega^{-1}_{\mathbf{F}_N}$, а следовательно, и Ω^{-1}_F не может быть обилен. Тривиально проверяется, что Ω^{-1}_F обилен, даже очень обилен для $N = 0$ и 1.

(3) Пусть $n = 1, 2, 4$, и предположим, что F имеет еще некоторое представление $h\colon F \to C'$ в виде стандартной формы II. Тогда из численных характеристик геометрического слоя $F_{\bar{t}'} = h^{-1}(\bar{t}')$, $\bar{t}' \in \overline{C}'$, немедленно получаем единственную возможность

$$F_{\bar{t}'} \sim \begin{cases} -F_{\bar{t}} - 4K_F, & n = 1, \\ -F_{\bar{t}} - 2K_F, & n = 2, \\ -F_{\bar{t}} - K_F, & n = 4, \end{cases}$$

где $F_{\bar{t}}$ — геометрический слой, $\bar{t} \in \overline{C}$. Теперь с помощью тех же соображений, что и в пункте (1) и с использованием теоремы Римана–Роха убеждаемся, что эти возможности реализуются тогда и только тогда, когда Ω^{-1}_F обилен. Отметим, что из свойств (б) для поверхностей дель Пеццо F (см. с. 111) видно, что при $n = 1$ и 2 на F существует инволюция, которая, как нетрудно проверить, переставляет стандартные морфизмы f и h.

Если $n = 7$, то $\overline{F}$ не минимальна и $\overline{F} \to \mathbf{F}_N$ — стягивание одной исключительной кривой, либо $\overline{F} \to \mathbf{P}^2_{\bar{k}}$ — стягивание двух. В любом случае на $\overline{F}$ имеется только три кривых с отрицательным самопересечением и легкий перебор показывает, что на F должна существовать исключительная кривая первого рода, определенная над некоторым несепарабельным расширением поля k. Далее, как в доказательстве п. (2) теоремы 3, убеждаемся, что она определена, в действительности, над k и, следовательно, может быть стянута. Доказательство закончено. □

Из теорем 5, 4 и 1 немедленно вытекает следующий критерий минимальности для поверхностей дель Пеццо, обобщающий критерий Б. Сегре для кубических поверхностей.

Следствие. *Пусть F — поверхность дель Пеццо и $(\Omega_F \cdot \Omega_F) = 3$, 5, 6, 9. Тогда F минимальна, если и только если* $\operatorname{Pic} F \simeq \mathbf{Z}$. *Если $(\Omega_F \cdot \Omega_F) = 1$, 2, 4, то F минимальна тогда и только тогда, когда либо* $\operatorname{Pic} F \simeq \mathbf{Z}$, *либо* $\operatorname{Pic} F \simeq \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ *и F принадлежит семейству* II. *В оставшихся случаях $(\Omega_F \cdot \Omega_F) = 7, 8$ поверхность F минимальна, если только $(\Omega_F \cdot \Omega_F) = 8$ и либо* $\operatorname{Pic} F \simeq \mathbf{Z}$, *либо $F \simeq C \times C'$, где C, C' — гладкие кривые рода нуль.*

§ 4. Минимальные рациональные G-поверхности

Определения (см. [11]). Полная гладкая поверхность F над полем k вместе с конечной группой G, действующей на F посредством k-автоморфизмов, называется G-поверхностью. Морфизм $f\colon F \to F'$ G-поверхностей называется G-морфизмом, если $g \cdot f = f \cdot g$ $\forall\, g \in G$. Если любой бира-

циональный G-морфизм $F \to F'$ гладких полных G-поверхностей является G-изоморфизмом, то F называется G-минимальной поверхностью.

G-инвариантная кривая $X \subset F$ называется G-неприводимой, если $X = \sum\limits_{i=1}^{r} X_i$, где X_i — различные неприводимые кривые на F, принадлежащие одной G-орбите.

Рассмотрим точную последовательность G-модулей

$$1 \to k(F)^* \to \operatorname{Div} F \to \operatorname{Pic} F \to 1$$

и соответствующую последовательность когомологий

$$1 \to k(F)^{*G} \to (\operatorname{Div} F)^G \to (\operatorname{Pic} F)^G \to \dots$$

Обозначим через $P(F)$ образ группы $(\operatorname{Div} F)^G$ в $(\operatorname{Pic} F)^G$: это подгруппа в $\operatorname{Pic} F$, порожденная классами обратимых пучков вида $\mathcal{O}_F(X)$, где X — G-инвариантный дивизор.

Пусть $L \in P(F)$ — обратимый пучок, тогда линейные пространства $H^i(F, L)$ снабжены естественной структурой G-модулей.

Легко видеть, что $\Omega_F \in P(F)$. Действительно, $\Omega_F \simeq \mathcal{O}_F(K)$, где в качестве K можно выбрать дивизор некоторой G-инвариантной дифференциальной 2-формы.

Отметим, наконец, что спаривание $\operatorname{Pic} F \times \operatorname{Pic} F \to \mathbf{Z}$, определяемое индексом пересечения, G-инвариантно на G-поверхности F.

Доказательство теоремы $1G$. Мы будем последовательно анализировать доказательство теоремы 1 и останавливаться только в тех местах, которые нуждаются в дополнительных рассуждениях.

Шаг 1. Леммы 1 и 2 не зависят от G-структуры.

Шаг 2. В лемме 3 надо заменить $\operatorname{Pic} F$ на $P(F)$ и $L \in P(F)$; свойство (3) заменить на:

($3G$) Пучок L не представим в виде $L_1 \otimes L_2$, где $L_i \in P(F)$, $L_i \neq \mathcal{O}_F$ и $\dim H^0(F, L_i) \geqslant 1$, $i = 1, 2$.

При доказательстве в качестве H достаточно взять G-орбиту любого очень обильного пучка.

Шаг 3. В доказательстве леммы 4 (а) линейная система $|L|$ не может иметь неподвижную компоненту, в противном случае, так как неподвижная компонента является, очевидно, G-кривой, то для L не выполнялось бы свойство ($3G$). По той же причине кривая X должна быть G-неприводимой и G-приведенной. Если кривая X к тому же k-неприводима, то последующие рассуждения проходят без всяких изменений. Если же $X = \sum X_i$, то X_i — неприводима и приведена $\forall\, i$ и $(X_i \cdot X_i) < 0$, поскольку $(X \cdot X) < 0$. Более того, для пучка $L_i = \mathcal{O}_F(X_i)$ выполняются все условия леммы 4 и уже без G-структуры, поэтому противоречие достигается тем же способом.

Утверждения 4 (б) проходят без изменений. Всюду предполагается, если не оговорено противное, что все встречающиеся обратимые пучки принадлежат $P(F)$.

Шаг 4. В лемме 5 и далее изоморфизмы надо понимать как G-изоморфизмы. В доказательстве теоремы 1 построенный морфизм $f\colon F \to \operatorname{Proj} R = C$ является, очевидно, G-морфизмом: G-структура на C индуцирована действием G на кольце R. В лемме 4 первое утверждение не зависит от G-структуры. Во втором утверждении о неприводимости слоев надо иметь в виду G-неприводимость слоев над G-точками $t \in C$ (под G-точкой понимается G-орбита любой точки). Остальные утверждения леммы не зависят от G-структуры.

Наконец, утверждение о группе $P(F)$ получается с помощью тех же рассуждений и учетом того факта, что все члены спектральной последовательности являются G-модулями. Из (1.7) мы получаем последовательность

$$0 \to \operatorname{Pic}^G C \to \operatorname{Pic}^G F \to \operatorname{Pic}^G(F/C) \to \dots,$$

откуда $\operatorname{Pic}^G F \simeq \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, и легко видеть, что $P(F) \subset \operatorname{Pic}^G F$ является подгруппой конечного индекса. Теорема 1G полностью доказана.

Литература

[1] Алгебраические поверхности (под ред. И. Р. Шафаревича). — 1965. — (Труды МИАН СССР; Т. 75).

[2] Artin M., Mumford D. Some elementary examples of unirational varieties which are not rational // Proc. London Math. Soc. — 1972. — V. 25, № 1. — P. 715–95.

[3] Artin M., Grothendieck A., Verdier J.-L. Séminaire de géometrie algébrique: cohomologie étale des schémas. — 1972. — (Lecture notes in Mathematics; V. 269, 270).

[4] Auslander M., Goldman O. The Brauer group of a commutative ring // Trans. Amer. Math. Soc. — 1960. — V. 9. — P. 367–409.

[5] Grothendieck A. Le groupe de Brauer // Dix exposés sur la cohomologie des schémas. — North Holland: Amsterdam, 1968. — P. 46–188.

[6] Grothendieck A., Dieudonné J. Eléments de géometrie algebrique. — Paris, 1962–1966. — (Publ. Math. IHES, № 17, 24, 28, 32).

[7] Kodaira K. On the structure of complex analytic surfaces. IV // Amer. J. Math.. — 1968. — V. 90, № 4. — P. 1048–1066.

[8] Bombieri E., Husemoller D. Classification and embeddings of surfaces // Proc. Symp. in Pure Math. — 1974. — V. 29. — P. 324–420.

[9] Мамфорд Д. Лекции о кривых на алгебраической поверхности. — М.: Мир, 1968.

[10] Манин Ю. И. Кубические формы. — М.: Наука, 1972.

[11] Манин Ю. И. Рациональные поверхности над совершенными полями. II // Матем. сб. — 1967. — Т. 72(114). — С. 161–192.

[12] Ramanujan C. P. Remarks on the Kodaira vanishing theorem // J. Indian Math. Soc. — 1972. — V. 36, № 1–2. — P. 41–51.

[13] Séminaire de géometrie algébrique (SGA 6). — 1971. — (Lecture Notes in Mathematics; V. 225).

[14] T a t e J. Genus change in inseparable extensions of functions fields // Proc. Amer. Math. Soc. — 1952. — V. 3. — P. 400–406.

[15] Z a r i s k i O. The problem of minimal models in the theory of algebraic surfaces // Amer. J. Math. — 1958. — V. 80, № 1. — P. 146–184.

[16] Z a r i s k i O. On Castelnuovo's criterion of rationality $p_a = P_2 = 0$ of an algebraic surface // Illinoise J. Math. — 1958. — V. 2, № 3. — P. 303–315.

[17] Z a r i s k i O. The theorem of Riemann–Roch for high multiples of an effective divisor on an algebraic surface // Ann. Math. — 1962. — V. 76, № 3. — P. 561–615.

[18] S h a f a r e v i c h I. R. Lectures on minimal models and birational transformations of the two dimensional schemes. — Bombay, 1966.

[19] Р у д а к о в А. Н., Ш а ф а р е в и ч И. Р. Квазиэллиптические поверхности типа $K3$ // Успехи матем. наук. — 1978. — V. 33, № 1. — P. 227–228.

Образующие и соотношения в двумерной группе Кремоны

1. Двумерная группа Кремоны Cr_2 — это группа бирациональных автоморфизмов плоскости $\mathbf{P}^2$ над алгебраически замкнутым полем k. Она изоморфна группе $\mathrm{Aut}_k\, k(u,v)$ автоморфизмов над k поля рациональных функций от двух переменных $k(u,v)$. Известная теорема М. Нётера (см., например, [1, 2]) утверждает, что группа Cr_2 порождена проективными и бирациональными квадратичными преобразованиями $\mathbf{P}^2$. Недавно М. Х. Гизатуллин [3] описал определяющие соотношения между этими образующими. Для группы Cr_2 известны и другие системы образующих, в частности заданных в терминах поверхности $F_0 = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ — одной из моделей поля $k(u,v)$. Группа Cr_2, как группа $\mathrm{Bir}\, F_0$ бирациональных автоморфизмов F_0, порождается подгруппой $\mathrm{Aut}\, F_0$ и элементарным (бирациональным) преобразованием e_{xy} (см., например, [4], а также пункт 2, следующий далее).

Наша цель — описать определяющие соотношения между образующими в группе $\mathrm{Bir}\, F_0 \simeq \mathrm{Cr}_2$ и показать, что все эти соотношения порождаются, по существу, одним $(\tau e_{xy})^3 = 1$ (ср. [5]), где $\tau\colon F_0 \to F_0$ — инволюция, переставляющая множители $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. В отличие от очень длинных комбинаторных рассуждений, проведенных в [3], наша техника изучения бирациональных автоморфизмов обычна [6, гл. V] и наш индуктивный метод быстро приводит к цели. Кроме того, в терминах поверхности F_0 соотношения между образующими в $\mathrm{Bir}\, F_0 \simeq \mathrm{Cr}_2$ принимают более компактный вид, чем соотношения между квадратичными преобразованиями, которые указаны в [3].

2. Зафиксируем одну из проекций $\pi\colon F_0 \to \mathbf{P}^1$, и пусть $\tau\colon F_0 \to F_0$ — инволюция, переставляющая множители $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Группа $\mathrm{Aut}\, F_0$ представляется в виде полупрямого произведения:

$$1 \to \mathrm{PGL}(2,k) \times \mathrm{PGL}(2,k) \to \mathrm{Aut}\, F_0 \to \{1,\tau\} \to 1.$$

Для каждого целого $n \geqslant 0$ пусть F_n означает стандартную линейчатую поверхность с проекцией $\pi_n\colon F_n \to \mathbf{P}^1$; f_n — класс слоя и s_n — класс исключительного сечения морфизма π_n в группе $\mathrm{Pic}\, F_n \simeq \mathbf{Z}f_n + \mathbf{Z}s_n$. Пусть $e_x\colon F_n \to F_{n\pm1}$ означает элементарное преобразование с центром в точке $x \in F_n$, т. е. e_x — бирациональное преобразование над $\mathbf{P}^1$, которое являет-

Вестник МГУ. Сер. 1. — 1983. — № 5.— С. 43–48.

ся композицией раздутия точки x и стягивания собственного прообраза слоя, проходящего через x (см. [4], пункт 2.5). Для пары точек x, y, таких, что

а) x, y принадлежат F_0 и не лежат на одном вертикальном и одном горизонтальном слоях $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$;

б) $x \in F_0$, а y — точка, «бесконечно близкая» к x, соответствующая направлению в $x \in \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, отличному от вертикального и горизонтального,

композиция $e_{xy} = e_y \cdot e_x$ является бирациональной инволюцией F_0 над $\mathbf{P}^1$, которая называется *первого типа* в случае а) и *второго типа* в случае б).

Для определенности пусть $(u_0, u_1) \times (v_0, v_1)$ — биоднородные координаты $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Тогда

$$\pi\colon (u_0, u_1) \times (v_0, v_1) \to (u_0, u_1), \quad \tau\colon (u_0, u_1) \times (v_0, v_1) \to (v_0, v_1) \times (u_0, u_1),$$

и если

$$x_0 = (0, 1) \times (0, 1), \quad y_0 = (1, 0) \times (1, 0),$$

то

$$e_{x_0 y_0}\colon (u_0, u_1) \times (v_0, v_1) \to (u_0, u_1) \times (u_0 v_1, u_1 v_0).$$

Легко убедиться, что имеет место соотношение

$$\tau e_{x_0 y_0} \tau e_{x_0 y_0} \tau e_{x_0 y_0} = a_0, \tag{1}$$

где

$$a_0\colon (u_0, u_1) \times (v_0, v_1) \to (u_1, u_0) \times (v_1, v_0).$$

Отметим, что если в качестве τ возьмем инволюцию

$$(u_0, u_1) \times (v_0, v_1) \to (v_1, v_0) \times (u_1, u_0),$$

то в (1) получим $a_0 = 1$.

Инволюция τ действует на $A = \mathrm{PGL}(2, k) \times \mathrm{PGL}(2, k)$ так, что выполняются соотношения

$$\tau a' = \tau a \quad \forall\, a \in A, \tag{2}$$

где $a' = a^\tau = \tau a \tau$. Для бирациональной (первого или второго типа) инволюции e_{xy} имеет место соотношение, аналогичное (1):

$$\tau e_{xy} \tau e_{x'y'} \tau e_{xy} = a, \tag{3}$$

где $x' = \tau(x)$, $y' = \tau(y)$, $a \in A$.

Обозначим через B группу бирациональных отображений F_0 в F_0, которые переводят слои π снова в слои, т. е. пучок прямых $|f|$ переводят в себя. Она представляется в виде полупрямого произведения:

$$1 \to \mathrm{PGL}(2, k(\mathbf{P}^1)) \to B \to \mathrm{PGL}(2, k) \to 1. \tag{4}$$

Основным результатом настоящей заметки является следующая

Теорема. (i) *Группа* $\mathrm{Bir}\, F_0 \simeq \mathrm{Cr}_2$ *порождается* τ *и подгруппой* $B \subset \subset \mathrm{Bir}\, F_0$.

(ii) *Все соотношения между* B *и* $\{1, \tau\}$ *в* $\mathrm{Bir}\, F_0$ *порождаются соотношениями* (2) *и* (3). *Иначе говоря, если* $B * \{1, \tau\}$ — *свободное произведение*

и $R(F_0)$ *— ядро (сюръективного по* (i)*) гомоморфизма* $p\colon B*\{1,\tau\}\to \operatorname{Bir} F_0$, *то* $R(F_0)$, *как нормальная подгруппа в* $B*\{1,\tau\}$, *порождается соотношениями* (2) *и* (3).

(iii) *В обозначениях* (ii) *нормальная подгруппа* $R(F_0)$ *порождается соотношениями* (2) *и одним соотношением*

$$(\tau_0 e_{x_0y_0})^3=1,\quad \text{где}\quad \tau_0\colon (u_0,u_1)\times(v_0,v_1)\to(v_1,v_0)\times(u_1,u_0).$$

3. Доказательство. Утверждение (i) доказано в [4, теорема 2.6]. Утверждение (iii) проверяется непосредственно. Надо убедиться, что каждое соотношение вида (3) выражается через (1) и (2). Если e_{xy} — преобразование первого типа, то его можно записать в виде $e_{xy}=a_1^{-1}e_{x_0y_0}a_1$, где a_1 принадлежит A и переводит точки x,y в x_0,y_0. Подставив последнее выражение в (3) и использовав (2), получим (1). Если e_{xy} — преобразование второго типа, то его можно представить в виде $e_{xy}=e_{y_1y}\cdot e_{xy_1}$, где e_{xy_1} и e_{y_1y} — преобразования первого типа. Подставив это в (3), получим соотношение, которое с помощью (2) и (3) можно выразить через (1) и (2).

Осталось доказать утверждение (ii). Элемент из $R(F_0)$ можно записать в виде

$$R=b_r\tau b_{r-1}\dots\tau b_2\tau b_1, \tag{5}$$

где $b_i\in B$ для любого $i=1,\dots,r$. Покажем, что посредством соотношений (2) и (3) слово R можно привести к единичному слову $R=1$. Прежде всего заметим, что если $b_i\in A$ для некоторого i, то, использовав (2), можно сократить длину R. Действительно, $b_i\tau=\tau b_i'$ в силу (2), поэтому в (5) в результате соответствующей замены получаем два рядом стоящих элемента τ, которые сокращаются, поскольку $\tau^2=1$. Следовательно, можно считать, что слово (5) не содержит элементов b_i из A. Аналогично можно считать, что все b_i, кроме, быть может, последнего b_r, являются преобразованиями над $\mathbf{P}^1$, т. е. принадлежат $\mathrm{PGL}(2,k(\mathbf{P}^1))$. Этого мы добьемся, подправив b_i слева или справа на элементы из $\mathrm{PGL}(2,k)$ и использовав (4) и (2). Таким образом, будем предполагать, что слово (5) не содержит b_i из A, кроме, возможно, b_r, и что все b_i, кроме, возможно, b_r, являются бирациональными преобразованиями над $\mathbf{P}^1$. Такую запись слова R будем называть *нормальной*.

Теперь воспользуемся техникой и обозначениями Ю. И. Манина ([6], гл. V), который развил и обосновал классический формализм линейных систем с предписанными базисными условиями, т. е. формализм линейного представления бирациональных отображений в группах циклов $Z^*(F)$. Имеем ([6], гл. V, § 3):

$$Z^*(F_0)=\mathbf{Z}f+\mathbf{Z}s-Z^0(F_0),$$

где $Z^0(F_0)$ — свободная абелева группа, порожденная замкнутыми точками пенистого пространства $E(F_0)$. Пусть $h=f+s$ — класс гиперплоского сечения квадрики $F_0\subset\mathbf{P}^3$. Для каждого бирационального отображения $u\colon F_0\to F_0$ имеем в $\mathbf{Z}^*(F_0)$

$$z=u(h)=\alpha f+\beta s-\sum\nu_i x_i,$$

где $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\nu_i \geqslant 0$ — целые числа, $x_i \in E(F_0)$. Имеем, кроме того,

$$(z \cdot z) = 2\alpha\beta - \sum \nu_i^2 = 2, \quad -\Omega(z) = 2\alpha + 2\beta - \sum \nu_i = 4, \tag{6}$$

и существует i, для которого $\nu_i > \min\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$ (см. [3, пункт 2.6]).

Будем доказывать утверждение (ii), используя представление $\operatorname{Bir} F_0$ в $Z^*(F_0)$. Для каждого элемента слова R, заданного в нормальной форме (5), определим наборы целых чисел, исходя из действия $\operatorname{Bir} F_0$ на $Z^*(F_0)$:

$$\begin{aligned}
\alpha_i &= \alpha(b_i \cdot \tau \cdot b_{i-1} \dots b_1),\\
\beta_i &= \beta(b_i \cdot \tau \cdot b_{i-1} \dots b_1),\\
\nu_i(x) &= \nu_x(b_i \cdot \tau \cdot b_{i-1} \dots b_1),\\
\alpha_i' &= \alpha(\tau \cdot b_i \cdot \tau \dots b_1),\\
\beta_i' &= \beta(\tau \cdot b_i \cdot \tau \dots b_1),\\
\nu_i'(x) &= \nu_x(\tau \cdot b_i \cdot \tau \dots b_1) \quad \forall\, x \in E(F_0).
\end{aligned}$$

Эти наборы удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$\begin{gathered}
\alpha_i' = \beta_i, \quad \beta_i' = \alpha_i, \quad \nu_i'(x) = \nu_i(\tau(x)),\\
\alpha_{i+1} = \alpha_i' + \beta_i' - \nu_i'(x_1) - \nu_i'(x_2), \quad \beta_{i+1} = \beta_i',\\
\nu_{i+1}(x_1) = \beta_i' - \nu_i'(x_1), \quad \nu_{i+1}(x_2) = \beta_i' - \nu_i'(x_2),
\end{gathered} \tag{7}$$

если $b_{i+1} = e_{x_1x_2}$ — элементарное преобразование с центром в точках x_1, x_2. Имеем следующие начальные и конечные данные: $\beta_1 = 1$, $\beta_r = 1$.

Пусть $\beta = \max\{\beta_i \mid i = 1, \dots, r\}$. Если $\beta = 1$, то $b_i \in A$ для любого i и в силу предположения нормальности $R = 1$. Если $\beta \geqslant 2$, то элементарно проверяется, что $r \geqslant 3$, и потому существует индекс s, такой, что выполняются условия:

$$\beta = \beta_s \geqslant \beta_{s-1} \geqslant \dots \geqslant \beta_1, \quad \beta_{s+1} < \beta_s. \tag{8}$$

Из условий (8) и формул (7) немедленно получаем, что $\alpha_s < \beta_s = \beta$ и $\alpha_{s+1}' \leqslant \leqslant \beta$. По лемме (см. ее далее) преобразование b_s может быть представлено как композиция не более семи элементарных преобразований вида $e_{x_1x_2}$ первого или второго типа.

Рассмотрим сначала случай, когда $b_s = e_{x_1x_2}$. В этом случае слово R можно записать следующим образом:

$$R = b_r\tau b_{r-1} \dots b_{s+1}\tau e_{x_1'x_2'}\tau e_{x_1x_2}e_{x_1x_2}^{-1}b_{s-1}\tau \dots b_1$$

и, использовав соотношение (3), привести его к слову

$$R' = b_r\tau b_{r-1} \dots b_{s+1}e_{x_1x_2}\tau a e_{x_1x_2}b_{s-1}\tau \dots b_1,$$

в котором число элементов τ равно $r - 1 < r$. С помощью соотношений (2) слово R можно опять записать в нормальной форме, не увеличив длину. Таким образом, в этом случае индукция по длине позволит нам преобразовать слово R в 1.

Если

$$b_s = e_{x_{2m-1}x_{2m}} \dots e_{x_3x_4} \cdot e_{x_1x_2}, \quad m \leqslant 7,$$

как в лемме (см. ее далее), то с помощью соотношений (2) и (3) слово R можно привести к рассмотренному случаю, не увеличив β. Действительно, пусть

$$R = b_r \tau b_{r-1} \dots b_{s+1} \tau e_{x_{2m-1}x_{2m}} \dots e_{x_1x_2} \tau e_{x'_1x'_2} e_{x'_1x'_2} b_{s-1} \tau \dots b_2 \tau b_1.$$

Тогда, использовав (3), можно заменить часть $e_{x_1x_2}\tau e_{x'_1x'_2}$ слова R частью $\tau e_{x_1x_2}\tau a$ нового слова R', которое содержит $r+1 > r$ элементов τ, но не увеличивает коэффициент β, что следует из формул (7) и утверждения леммы (см. ее ниже). Приведя полученное слово к нормальному виду с помощью соотношений (2) и продолжив процесс, подготовим слово R так, чтобы $b_s = e_{xy}$ для всех индексов s, для которых выполняются условия (8). Такое слово будем называть нормально подготовленным относительно максимального значения β. Отметим, что применение соотношений (3) к нормально подготовленному относительно коэффициента β слову R и последующая нормализация R с помощью соотношений (2) оставляют слово нормально подготовленным со значением $\beta' \leqslant \beta$ и с меньшим числом элементов τ (см. рассмотренный первый случай). Таким образом, указанный индуктивный процесс приводит к доказательству утверждения (ii) и тем самым к доказательству теоремы.

Осталось доказать следующее утверждение.

Лемма. *Пусть $b\colon F_0 \to F_0$ — бирациональное отображение над $\mathbf{P}^1$ (относительно $\pi\colon F_0 \to \mathbf{P}^1$),*

$$z = \alpha f + \beta s - \sum_{i=1}^{N} \nu_i x_i$$

есть бирациональный образ $h = f + s$ и

$$z' = \alpha' f + \beta s - \sum_{i=1}^{N'} \nu'_i x'_i = b(z).$$

Предположим, что $\alpha \leqslant \beta$ и $\alpha' \leqslant \beta$. Тогда либо b — изоморфизм, либо его можно разложить в композицию не более семи элементарных преобразований e_{xy} первого или второго типа. Кроме того, в процессе последовательного применения этих преобразований к z коэффициент α при f не будет превосходить β.

Доказательство. Пусть

$$z = \alpha f + \beta s - \sum_{i=1}^{m} \nu_i x_i - \sum_{i>m} \nu_i x_i$$

и

$$z' = \alpha' f + \beta s - \sum_{j=1}^{m'} \nu'_j x'_j - \sum_{j>m'} \nu'_j x'_j,$$

где

$$\nu_i \geqslant \frac{\beta}{2} \ \ \forall\, i = 1, \dots, m \ \ (\text{если} \ \ m \neq 0); \ \ \nu_i < \frac{\beta}{2} \ \ \forall\, i > m,$$

$$\nu'_j \geqslant \frac{\beta}{2} \ \ \forall\, j = 1, \dots, m' \ \ (\text{если} \ \ m' \neq 0); \ \ \nu'_j < \frac{\beta}{2} \ \ \forall\, j > m'.$$

Тогда из формул (6) немедленно получаем

$$m \leqslant 8\,\frac{(\beta-1)}{\beta} < 8 \quad \text{и} \quad m' \leqslant 8\,\frac{(\beta-1)}{\beta} < 8.$$

Предположим, что преобразование b не является изоморфизмом. Тогда его можно представить в виде несократимой композиции элементарных преобразований типа e_x. При этом после подходящей перенумерации точек x_i, $i = 1, \dots, m$, и x'_j, $j = 1, \dots, m'$, можно записать b в виде

$$b = e^{-1}_{x'_1} \dots e^{-1}_{x'_q} e_{x_p} \dots e_{x_2} e_{x_1}, \tag{9}$$

где $p \leqslant m$ и $q \leqslant m'$. Действительно, если e_x — элементарное преобразование с центром в x, а $x' = e_x(f - x)$ — образ стягиваемого слоя, то

$$\nu' = \beta - \nu, \tag{10}$$

где ν — кратность z в x, а ν' — кратность $e_x(z)$ в x'. Если при этом в разложении b на элементарные преобразования встречается e_x с центром в $x' = e_x(f-x)$, то $e_{x'}$ можно сократить с e_x, так как элементарные преобразования с центрами в разных слоях коммутируют.

Отметим, что можно выбрать разложение (9), удовлетворяющее следующим условиям: (i) $p + q \equiv 0 \pmod 2$, и если $p + q = 0$, то b — изоморфизм; (ii) точки $x_1, \dots, x_p$, $x'_1, \dots, x'_q$ можно выбрать и занумеровать так, чтобы в разложении (9)

а) или $q = 0$, или $\nu'_j > \dfrac{\beta}{2}$ $\forall\, j = 1, \dots, q$;

б) если $p \neq 0$, то $e_{x_i x_{i+1}} = e_{x_{i+1}} \cdot e_{x_i}$, $i = 1, 3, \dots, \left[\dfrac{p-1}{2}\right]$, являются элементарными преобразованиями $F_0 \to F_0$ первого или второго типа;

в) если $q \neq 0$, то $e^{-1}_{x'_j x'_{j+1}} \overset{\text{def}}{=} e^{-1}_{x'_j} e^{-1}_{x'_{j+1}}$, $j = 1, 3, \dots, \left[\dfrac{q-1}{2}\right]$, являются элементарными преобразованиями $F_0 \to F_0$ первого или второго типа;

г) если $p \equiv 1 \pmod 2$, то $q \equiv 1 \pmod 2$ и $e_{x_q x_p} \overset{\text{def}}{=} e^{-1}_{x_q} e_{x_p}$ являются элементарными преобразованиями первого или второго типа.

Действительно, четность $p+q$ — непосредственное следствие того, что b — бирациональный автоморфизм F_0 и что каждое e_x отображает F_n в $F_{n\pm1}$. Утверждение (ii, в) вытекает из формулы (10).

Если среди центров x_i элементарных преобразований в (9) есть такие, что $\nu_i = \dfrac{\beta}{2}$, то соответствующая точка x'_i имеет кратность $\nu'_i = \dfrac{\beta}{2}$ и, следовательно, встречается среди x'_j, $j = 1, \dots, m'$. Поэтому такого типа точки мы можем отнести как к $x_1, \dots, x_p$, так и к $x'_1, \dots, x'_q$. Отнесем их к $x_1, \dots, x_p$, тогда условие а) будет автоматически выполняться. Далее, для того чтобы композиция, скажем, $e_{x_2} \cdot e_{x_1}$ была элементарным преобразованием F_0 первого или второго типа, необходимо и достаточно, чтобы точка x_2 не лежала на исключительном сечении поверхности F_1 — образа F_0 при преобразовании $e_{x_1} \colon F_0 \to F_1$, т. е. чтобы x_1, x_2 не лежали на одном горизонтальном слое F_0, или чтобы в случае, когда x_2 бесконечно близка к x_1, направление x_2 не совпадало с горизонтальным. Так как $\nu_i \geqslant \dfrac{\beta}{2}$, то из формул (6) и (7) немедленно получаем, что

в условиях леммы из любой тройки точек среди $x_1, \ldots, x_p$ можно выбрать пару, удовлетворяющую предыдущему условию. Кроме того, если из двух любых точек с кратностями, не меньшими $\frac{\beta}{2}$, хотя бы одна удовлетворяет условию $> \frac{\beta}{2}$, то существует элементарное преобразование $F_0 \to F_0$ с центрами в этой паре. Таким образом, условие в) выполняется при любой нумерации точек, лишь бы композиция отображений имела смысл. В случае б), последовательно выбирая из троек точек подходящие пары и производя соответствующую перенумерацию точек, приходим к ситуации, когда среди $x_1, \ldots, x_p$ останутся две точки, скажем x_{p-1}, x_p, или одна, скажем x_p. В первом случае композиция $e_{x_p} \cdot e_{x_{p-1}}$ будет автоматически элементарным преобразованием F_0, поскольку $b\colon F_0 \to F_0$ — бирациональный автоморфизм. В последнем случае по той же причине преобразование, указанное в условии г), также будет элементарным преобразованием F_0.

Последнее утверждение леммы немедленно вытекает из формул (7).

Литература

[1] Алгебраические поверхности. — Труды МИАН СССР, 1965. — Т. 75.

[2] Hudson H. Cremona transformation in plane and space. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1927.

[3] Гизатуллин М. Х. Определяющие соотношения для кремоновой группы плоскости // Известия АН СССР. Сер. мат. — 1982. — Т. 46, № 5. — С. 909–970.

[4] Исковских В. А. Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Т. 12. — М.: ВИНИТИ, 1979. — С. 159–236.

[5] Исковских В. А. Образующие и соотношения в группе Кремоны // Вестник МГУ. Математика. Механика. — 1979. — № 4.— С. 98.

[6] Манин Ю. И. Кубические формы. — М.: Наука, 1972.

Образующие и соотношения в группах бирациональных автоморфизмов двух классов рациональных поверхностей

1. Введение и обзор результатов

1. Пусть k — произвольное поле и F — гладкая проективная поверхность над k. Напомним, что F называется рациональной поверхностью, если над алгебраическим замыканием $\overline{k}$ поля k поверхность $\overline{F} = F \otimes \overline{k}$ бирационально эквивалентна плоскости $\mathbf{P}^2_{\overline{k}}$. Обозначим через $\operatorname{Bir} F$ группу всех бирациональных отображений над k поверхности F в себя, т. е. бирациональных k-автоморфизмов F. Изучение группы бирациональных автоморфизмов рациональных поверхностей представляет интерес прежде всего в связи с арифметическими вопросами таких поверхностей (см., например, [1]), а также в связи с проблемами рациональности и описания групп бирациональных автоморфизмов трехмерных алгебраических многообразий над алгебраически замкнутыми полями (см. [2]).

Всякое бирациональное отображение $h\colon F' \to F$ индуцирует изоморфизм групп $h^*\colon \operatorname{Bir} F \to \operatorname{Bir} F'$, поэтому достаточно ограничиться изучением $\operatorname{Bir} F$ только для минимальных над $\overline{k}$ поверхностей F. Минимальные гладкие рациональные поверхности над произвольным полем описаны в работе [3]. Они исчерпываются следующим списком:

(i) $\mathbf{P}^2_k$.

(ii) квадрика $Q \subset \mathbf{P}^3_k$ с $\operatorname{Pic} Q \simeq \mathbf{Z}$;

(iii) поверхности F с группой Пикара $\operatorname{Pic} F \simeq \mathbf{Z}$, порожденной обильным антилаконическим пучком $Q_F(-K_F)$; мы будем называть их поверхностями дель Пеццо первого рода;

(iv) поверхности F с $\operatorname{Pic} F \simeq \mathbf{Z} + \mathbf{Z}$, обладающие морфизмом $\pi\colon F \to C$ на гладкую кривую рода нуль C, общим слоем F_η, $\eta \in C$, которого также является гладкая рациональная кривая; мы будем называть их стандартными расслоениями на коники, а те из них, для которых $Q_F(-K)$ обилен — поверхностями дель Пеццо второго рода.

2. Дадим краткий обзор известных результатов о группах бирациональных автоморфизмов рациональных поверхностей над незамкнутым совершенным

Труды МИАН СССР. — 1984. — Т. 165. — Р. 67–78.

полем k. Для поверхностей из класса (iv) в работе автора [4] доказано, что если $(K_F \cdot K_F) \leqslant 0$, то группа $\operatorname{Bir} F$ представляется в виде расширения

$$1 \to \operatorname{Bir} F_\eta \to \operatorname{Bir} F \to G \to 1, \tag{1}$$

где $\operatorname{Bir} F_\eta = \operatorname{Aut} F_\eta$ — группа автоморфизмов общего слоя F_η (т. е. коники над $k(\eta)$) структурного морфизма $\pi\colon F \to C$, где $\eta \in C$ — общая точка, а G — некоторая (конечная) группа, реализующаяся как подгруппа группы $\operatorname{Aut} C$. Отметим, что для всех оставшихся поверхностей из (i)–(iv) справедливы неравенства $0 < (K_F \cdot K_F) \leqslant 9$.

Целое число $d = (K_F \cdot K_F)$ будем условно называть степенью поверхности F. Оказывается, что для оставшихся поверхностей достаточно вычислить группы $\operatorname{Bir} F$ только для поверхностей дель Пеццо первого и второго рода ввиду следующего факта: для F из (iv) с $d > 0$ группа $\operatorname{Bir} F$ тогда и только тогда представляется в виде (1), когда не существует (а это может случиться только при $d = 1, 2$ и 4) бирационального C-отображения (с сохранением степени d) на поверхность дель Пеццо второго рода (см. [3, 5, 6]). Более того, поверхности F из (i)–(iv) с $d = 5$ и 7 всегда бирационально тривиальны над k (см. [7, 9, 31), поэтому $\operatorname{Bir} F \simeq \operatorname{Bir} \mathbf{P}^2_k$, то же самое имеет место и для поверхностей F с $d = 6, 8$ и 9, для которых $F(k) \neq \varnothing$, где $F(k)$ — множество рациональных k-точек F. Таким образом, для дальнейшего рассмотрения остается всего несколько случаев. Остановимся на них подробнее.

3. Для поверхностей дель Пеццо первого рода F степени $d = 1, 2$ и 3 группы $\operatorname{Bir} F$ были изучены Ю. И. Маниным (см. [1, 8]). Оказалось, что при $d = 1$ группа $\operatorname{Bir} F$ совпадает с группой (бирегулярных) автоморфизмов $\operatorname{Aut} F$, которая в этом случае является подгруппой группы Вейля типа $\mathbf{E}_8$. В случае $d = 2$ группа $\operatorname{Bir} F$ представляется в виде полупрямого произведения подгруппы $\operatorname{Aut} F$ и нормального делителя $B(F)$, который является свободным произведением бирациональных инволюций, связанных с рациональными k-точками на F (см. [8]). Для минимальных кубических поверхностей F в $\mathbf{P}^3$ (т. е. поверхностей дель Пеццо первого рода и степени 3) в [1] вычислены образующие и соотношения в группах $\operatorname{Bir} F$. В этом случае образующими являются бирациональные инволюции t_x и s_y, связанные с точками степени один $x \in F$ и точками степени два $y \in F$, и элементы $\operatorname{Aut} F$.

Для поверхностей дель Пеццо первого рода степени $d = 4$ группы $\operatorname{Bir} F$ изучались в работе [5]. В случае $F(k) = \varnothing$ группа $\operatorname{Bir} F$ устроена так же, как и при $d = 2$, только здесь бирациональные инволюции связаны с точками степени 2. Если $F(k) \neq \varnothing$, то F бирационально эквивалентна над k поверхности дель Пеццо второго рода с $d = 3$ (кубической поверхности в $\mathbf{P}^3$, одна из прямых на которой определена над k). Для таких поверхностей в работе [5] найдены образующие групп $\operatorname{Bir} F$. Отметим также, что образующие группы $\operatorname{Bir} \mathbf{P}^2_k$ ($k = \mathbf{Q}$) описаны в классической работе Кантора [10].

Итак, среди поверхностей дель Пеццо первого рода F и степени d группы $\operatorname{Bir} F$ остаются не изученными только при $d = 6, 8$ и 9, если F не имеет k-точек; если же $F(k) \neq \varnothing$, то в этих случаях $\operatorname{Bir} F \simeq \operatorname{Bir} \mathbf{P}^2_k$ и открыт вопрос о соотношениях в последней группе.

4. Для поверхностей дель Пеццо второго рода F и степени d в [5] и [6] описаны только образующие групп $\operatorname{Bir} F$ в случаях $d = 1, 2, 3$ и 4. В настоящей статье мы изучаем соотношения между этими образующими для $d = 1$ и 2. Среди поверхностей этого класса остаются не изученными только группы $\operatorname{Bir}(C \times C')$, где C и C' — кривые рода нуль, не имеющие k-точек, и не описаны соотношения в случаях $d = 3$ и 4.

5. Для того чтобы точно сформулировать результаты настоящей работы, надо ввести некоторые обозначения. Пусть F — поверхность дель Пеццо второго рода и степени d, $\pi\colon F \to C$ — ее представление в виде стандартного расслоения на коники и пусть $\{F_i \mid i \in I(F)\}$ — множество всех стандартных расслоений на коники $\pi_i\colon F_i \to C$, бирационально эквивалентных над C поверхности F, являющихся поверхностями дель Пеццо (второго рода).

С каждой поверхностью F_i, $i \in I(F)$, связаны следующие группы: $\mathcal{F}_i$ — группа всех бирациональных автоморфизмов поверхности F_i, переводящих стандартный пучок коник $\pi_i\colon F_i \to C$ в себя; она представляется в виде расширения

$$1 \to \operatorname{Aut} F_{i\eta} \to \mathcal{F}_i \to B_i \to 1, \tag{2}$$

где $\operatorname{Aut} F_{i\eta}$ — группа автоморфизмов общего слоя $F_{i\eta}$ морфизма $\pi_i\colon F_i \to C$ над полем вычетов $k(\eta) \sim k(C)$ общей точки $\eta \in C$, а B_i — некоторая конечная (при $d \leqslant 5$) группа; $G_i = \operatorname{Aut} F_i$ — группа k-автоморфизмов F_i, $A_i \subset G_i$ — ее подгруппа, переводящая пучок $\pi_i\colon F_i \to C$ в себя; в случае $d = 1$ и 2 в G_i выделена инволюция τ_i (инволюция Бертини при $d = 1$ и Гейзера при $d = 2$), так что G_i является полупрямым произведением групп

$$1 \to A_i \to G_i \to \{1, \tau_i\} \to 1 \tag{3}$$

(при $d \leqslant 5$ группа G_i всегда конечна [1]), ясно, что $A_i \subset \mathcal{F}_i$.

Инволюция τ_i действует на A_i, так что для каждого элемента $a_i \in A_i$ найдется элемент $a_i' \in A_i$

$$\tau_i a_i = a_i' \tau_i, \quad \forall a_i \in A_i, \quad i \in I(F). \tag{4}$$

Для каждого $i \in I(F)$ зафиксируем бирациональный C-изоморфизм $h_i\colon F \to F_i$. Пусть $\mathcal{F}$ обозначает группу всех бирациональных автоморфизмов F, переводящих пучок $\pi\colon F \to C$ в себя. Тогда h_i индуцирует изоморфизм $h_i^*\colon \mathcal{F}_i \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$, определяет вложение $h_i^*\colon A_i \hookrightarrow \mathcal{F}$, $h_i^*(a_i) = h_i^{-1} a_i h_i$ и поднимает инволюцию τ_i до бирациональной инволюции $h_i^*(\tau_i) = h_i^{-1}\tau_i h_i$. При этом естественно соотношения (4) переписываются в виде

$$h_i^*(\tau_i) h_i^*(a_i) = h_i^*(a_i') h_i^*(\tau_i). \tag{5}$$

6. Следующий факт доказан в [5] (см. также раздел 2 настоящей работы).

Теорема 1. *Пусть F — поверхность дель Пеццо второго рода с $d = (K_F \cdot K_F) = 1$ или 2 и $\pi\colon F \to C$ — представление F в виде стандартного расслоения на коники. Тогда в предыдущих обозначениях группа $\operatorname{Bir} F$ порождена подгруппой $\mathcal{F}$ и инволюциями $h_i^*(\tau_i)$, $\forall\, i \in I(F)$.*

Обозначим через $B(F) = \mathcal{F} \underset{i\in I(F)}{*} \tau_i$ — свободное произведение группы $\mathcal{F}$ и всех групп второго порядка $\{1, h_i^*(\tau_i)\}$, $i \in I(F)$. По теореме 1 естественный гомоморфизм $p\colon B(F) \to \operatorname{Bir} F$ сюръективен, так что имеет место точная последовательность групп

$$1 \to R(F) \to B(F) \to \operatorname{Bir} F \to 1, \tag{6}$$

где $R(F)$ — ядро гомоморфизма p. Первым основным результатом настоящей работы является следующая.

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *при* $d = 1$ *соотношения* (5) *или* (4), *что эквивалентно, порождают полную систему соотношений между* $\mathcal{F}$ *и инволюциями* τ_i, $i \in I(F)$, *т. е. соответствующие слова в* $B(F)$ *порождают нормальный делитель* $R(F)$. *В частности, если* $A_i = \{1\}$, $\forall\, i \in I(F)$, *то* $\operatorname{Bir} F = B(F)$ — *свободное произведение группы* $\mathcal{F}$ *и инволюций* τ_i, $i \in I(F)$.

7. Для того чтобы сформулировать соответствующий результат в случае $d = 2$, введем еще некоторые определения и обозначения. Для каждой поверхности F_i, $i \in I(F)$, обозначим через $F_i^0(k)$ множество замкнутых точек $x \in F_i$ степени 1, не лежащих на исключительных кривых поверхности F_i. Точки $x \in F_i^0(k)$ будем называть хорошими точками степени 1 (аналогично определяются хорошие точки степени > 1). Отметим, что почти все точки из $F_i(k)$ хорошие, кроме, быть может, конечного числа точек пересечения исключительных кривых на $\overline{F}_i$. С каждой поверхностью F_i, $i \in I(F)$, и хорошей точкой $x \in F_i^0(k)$ связано бирациональное отображение $e_{ij}(x)\colon F_i \to F_j$ над C поверхности F_i на некоторую поверхность F_j, $i, j \in I(F)$, называемое элементарным преобразованием с центром в x. Оно определяется как композиция $e_{ij}(x) = \sigma_{x'} \cdot \sigma_x^{-1}$ раздутия $\sigma_x\colon F_i' \to F_i$ точки x с последующим стягиванием $\sigma_{x'}\colon F_i' \to F_j$ собственного прообраза слоя $F_{i\pi(x)}$, проходящего через точку x.

Пусть F — поверхность дель Пеццо второго рода с $d = 2$, F_0 — произвольная поверхность из $\{F_i \mid i \in I(F)\}$ и $x_0 \in F_0$ — хорошая точка степени 1. Рассмотрим композицию отображений

$$F_0 \xrightarrow{e_{01}(x_0)} F_1 \xrightarrow{\tau_1} F_1 \xrightarrow{e_{12}(x_1)} F_2 \xrightarrow{\tau_2} F_2 \xrightarrow{e_{23}(x_2)} F_3 \xrightarrow{\tau_3} F_3 \xrightarrow{e_{34}(x_3)} F_4 \xrightarrow{\tau_4} F_4, \tag{7}$$

где $e_{ss+1}(x_s)$, $s = 0, 1, 2, 3$, — элементарное преобразование с центром в точке $x_s \in F_s$, $x_s = \tau_s(x_s')$, x_{s+1}' — образ стягиваемого при отображении $e_{ss+1}(x_s)$ слоя, проходящего через x_s.

Предложение 1. *Для любой поверхности* $F_0 \in \{F_i \mid i \in I(F)\}$, $d = 2$ *и любой хорошей точки степени один* $x_0 \in F_0$ *все указанные в* (7) *отображения определены,* $F_4 \simeq F_0$ *и при отождествлении* $F_4 = F_0$, $\tau_4 = \tau_0$ *композиция отображений* (7) *определяет некоторый элемент* $a_0 \in A_0$

$$a_0 = \tau_0 \cdot e_{34}(x_3) \cdot \tau_3 \cdot e_{23}(x_2) \cdot \tau_2 \cdot e_{12}(x_1) \cdot \tau_1 \cdot e_{01}(x_0). \tag{8}$$

С помощью отображений h_i, $i \in I(F)$, (8) можно переписать в виде следующего соотношения в группе $\operatorname{Bir} F$:

$$h_0^{-1} \cdot a_0 \cdot h_0 = h_0^{-1} \cdot \tau_0 \cdot h_0 \cdot h_0^{-1} \cdot e_{34}(x_3) \cdot h_3 \cdot h_3^{-1} \cdot \tau_3 \ldots h_1^{-1} \cdot \tau_1 \cdot h_1^{-1} \cdot e_{01}(x_0) \cdot h_0. \tag{9}$$

Теперь мы можем сформулировать второй основной результат этой работы.

Теорема 3. *В условиях теоремы* 1 *при* $d = 2$ *соотношения типа* (5) *и* (9) (*или равносильно* (4) *и* (8) *для всех* $F_0 \in \{F_i \mid i \in I(F)\}$ *и хороших замкнутых точек степени один* $x_0 \in F_0^0(k)$ *порождают полную систему соотношений между* $\mathcal{F}$ *и инволюциями* τ_i, $i \in I(F)$, *т. е. соответствующие слова в* $B(F)$ *порождают нормальный делитель* $R(F)$. *В частности, если* $F^0(k) = \varnothing$, *то* $F_i^0(k) = \varnothing$, $\forall\, i \in I(F)$ *и группа* $\operatorname{Bir} F$ *устроена так же, как и в теореме* 2.

В разделе 2 доказывается теорема 1, а в разделе 3 — теоремы 2 и 3. Поле k предполагается совершенным.

2. Группы $\operatorname{Bir} F$ для поверхностей дель Пеццо второго рода с $d = 1$ и 2. Образующие

1. Пусть $\pi_i\colon F_i \to C$, $i \in I(F)$ (см. п. 5 раздела 1), — поверхность дель Пеццо второго рода с $d = 1$ или 2. Обозначим через f_i класс геометрического слоя структурного морфизма $\pi_i\colon F_i \to C$, т. е. положительную образующую группы $\pi_i^* \operatorname{Pic} \overline{C} \simeq \mathbf{Z}$ (напомним, что $\overline{C} = C \otimes \overline{k}$ и $\operatorname{Pic} \overline{C} = (\operatorname{Pic} \overline{C})^G \simeq \mathbf{Z}$, где $G = \operatorname{Gal}(\overline{k}/k)$, см. [4]). Отметим, что в случае нечетного d всегда $C \simeq \mathbf{P}_k^1$, а в случае четного d возможны два случая:

а) $C(k) \neq \varnothing \Longrightarrow C \simeq \mathbf{P}_k^1$;

б) $C(k) = \varnothing \Longrightarrow C$ — гладкая плоская коника, не имеющая k-точек.

Отметим следующие свойства поверхностей дель Пеццо второго рода и степени $d = 1$ и 2. Пусть $\pi\colon F \to C$ — такая поверхность, тогда:

(i) $\operatorname{Pic} F \simeq \pi^* \operatorname{Pic} C + \mathbf{Z} K_F$, где K_F — канонический класс;

(ii) в случае $d = 1$ на F существует бирегулярная инволюция τ (называемая инволюцией Бертини), действующая на $\operatorname{Pic} F$ по формулам (см., например, [5]):

$$\tau(f) = -f - 4K_F, \quad \tau(K_F) = K_F; \tag{10}$$

здесь всегда $C \simeq \mathbf{P}_k^1$;

(iii) в случае $d = 2$ на F существует бирегулярная инволюция τ (называемая инволюцией Гейзера), действующая на $\operatorname{Pic} F$ по формулам (см. [5]):

$$\tau(f) = -f - 2K_F, \quad \tau(K_F) = K_F; \tag{11}$$

здесь возможны оба случая: $C \simeq \mathbf{P}_k^1$ и $C(k) = \varnothing$;

(iv) на каждой поверхности дель Пеццо второго рода F с $d = 1$ и 2 существуют ровно два пучка рациональных кривых, представляющих F в виде стандартного расслоения на коники: это $|f|$ и $|\tau(f)|$.

Замечание 1. Автору неизвестны примеры стандартных расслоений на коники $F \to C$ с $d = 1, 2$ и 4, которые не имеют бирациональных C-отображений на поверхности дель Пеццо (второго рода) и для которых, как отмечалось в п. 2 раздела 1, группы $\operatorname{Bir} F$ представляются в виде (1).

2. Мы будем свободно пользоваться техникой и даже некоторыми обозначениями из книги Ю. И. Манина [1, гл. V]. Отметим только некоторые отклонения. Группа $Z^*(F)$ будет обозначать группу $(\operatorname{Pic}\overline{F})^G + Z^0(F)$, где $(\operatorname{Pic}\overline{F})^G \subset \subset \operatorname{Pic}\overline{F}$ — подгруппа $G = \operatorname{Gal}(\overline{k}/k)$-инвариантных элементов, $Z^0(F)$ — свободная абелева группа, порожденная замкнутыми точками пенистого пространства $E(F)$, а не геометрическими $\overline{k}$-точками, как в [1, гл. V, § 3]. Мы рассматриваем группу $(\operatorname{Pic}\overline{F})^G$, а не просто $\operatorname{Pic} F$ при определении $Z^*(F)$ потому, что в случае $C(k) = \varnothing$ класс геометрического слоя f принадлежит $(\operatorname{Pic}\overline{F})^G$, а не $\operatorname{Pic} F$ (см. [4]).

Пусть $u\colon F' \to F$ — бирациональное отображение поверхностей, являющихся стандартными расслоениями на коники, f' и f — классы геометрических слоев соответствующих пучков, тогда образ класса f' в $Z^*(F)$ при отображении u имеет вид (см. [1, гл. V, § 5])

$$z = u(f') = af - bK_F - \sum n_i x_i, \tag{12}$$

где $a, b, n_i \in \mathbf{Z}$, $n_i \geqslant 0$ $\forall\, i$, $b \geqslant 0$, $x_i \in E(F)$.

В обозначениях [1, гл. V] имеем $z \in Z^{+*}(F)$, откуда $0 \leqslant (z \cdot f) = 2b \Longrightarrow b \geqslant \geqslant 0$, и если $d = (K_F \cdot K_F)$, то

$$\begin{gathered} (z \cdot z) = 4ab + b^2 d - \sum \deg x_i n_i^2 = 0, \\ -\Omega(z) = 2a + bd - \sum \deg x_i n_i = 2. \end{gathered} \tag{13}$$

Лемма 1. *В предыдущих обозначениях имеем*:

1) *если* $x_j < x_i$ *в смысле* [1, гл. V, § 3] (*т. е. если* x_j *лежит над* x_i), *то* $n_i \geqslant n_j \geqslant 0$;

2) $n_i \leqslant 2b$, $\forall\, i$;

3) *если* $n_i \leqslant b$, $\forall\, i$, *и* $b > 0$, *то* $d < 0$;

4) *если* $a < 0$ *и* $d = (K_F \cdot K_F) \geqslant 1$, *то пучок* $O_F(-K)$ *обилен, т. е.* F — *поверхность дель Пеццо второго рода*;

5) *если* $x_1, \ldots, x_r$ — *все точки с* $n_i \geqslant b > 0$ *и* $a \leqslant 0$, *то* $\sum\limits_{i=1}^{r} \deg x_i < d$.

Доказательство. Утверждение 1) следует из того, что $z \in Z^{+*}(F)$ (см. [1, гл. V, 3.11]). Далее, пусть $F_{\pi(x_i)} = \pi^{-1}(\pi(x_i))$ — слой пучка $\pi\colon F \to \to C$, проходящий через $x_i \in F$, тогда $\deg x_i f - x_i \in Z^{+*}(F)$ (в обозначениях [1, гл. V, § 2]). Отсюда

$$0 \leqslant (\deg x_i f - x_i \cdot z) = 2 \deg x_i b - \deg x_i n_i$$

и, стало быть, $n_i \leqslant 2b$. Это доказывает 2). Утверждение 3) немедленно следует из соотношений (13) и того факта, что $z \in Z^{+*}(F)$. Действительно, так как $n_i \leqslant b$, то первое равенство в (13) влечет неравенство

$$4ab + b^2 d \leqslant b \sum \deg x_i n_i.$$

Откуда, пользуясь вторым равенством (13), находим $4ab + b^2 d \leqslant b(2a + bd - 2)$ или $a \leqslant -1$, так как $b > 0$. Проверим утверждение 4), пользуясь численным критерием обильности. Пусть $X \sim pf - qK_F$, $p, q \in \mathbf{Z}$ — произвольная неприводимая кривая на F, тогда $(X \cdot f) \geqslant 0 \Longrightarrow q \geqslant 0$. Предположим,

что $(X \cdot (-K_F)) \leqslant 0$, тогда $(X \cdot (-K_F)) = 2p + qd \leqslant 0$ и $(X \cdot af - bK_F) = 2aq + (2p + qd)b < 0$, так как $a < 0$. Но это невозможно, так как $z \in Z^{+*}(F)$ ($|af - bK_F|$ не имеет неподвижных компонент). Последнее утверждение 5) немедленно следует из второго равенства (13). Лемма доказана.

Лемма 2. *В предыдущих обозначениях пусть $u\colon F' \to F$ — бирациональное отображение поверхностей, являющихся стандартными расслоениями на коники, тогда*:

1) *если F' и F — поверхности дель Пеццо степеней d' и $d = 1$ или 2 и $u(-K_{F'}) = -K_F$ в группе $Z^*(F) = (\operatorname{Pic}\widetilde{F})^G + Z^0(F)$, то u — изоморфизм*;

2) *если $u = e(x')$; $F' \to F$ — элементарное преобразование с центром в замкнутой точке $x' \in F'$, то $d = d'$ и соответствующее отображение $e(x')\colon Z^*(F') \to Z(F)$ имеет вид*:

$$\begin{aligned} &e(x')(f') = f,\\ &e(x')(-K_{F'}) = \deg x'f - K_F - 2x,\\ &e(x')(x') = \deg x'f - x,\\ &e(x')(y') = y, \quad y' \neq x', \end{aligned} \tag{14}$$

где x — образ стягиваемого слоя при элементарном преобразовании $e(x')$;

3) *если $u(f') = f$, то существует такой автоморфизм $a \in A$ ($A \subset \operatorname{Aut} F$ — подгруппа элементов, переводящих в себя пучок $|f|$), что au представляется в виде композиции элементарных преобразований с центрами в замкнутых точках.*

Доказательство. Утверждение 1) непосредственно следует из [1, гл. V, 3.12]. Утверждения 2) легко выводятся из формул поведения группы $Z^*(F)$ при моноидальных преобразованиях (см. [1, гл. V, § 2 и 3]) и из определения $e(x')$ как композиции раздутия точки x' и стягивания собственного прообраза слоя, проходящего через x'. Докажем, последнее утверждение 3). Пусть $u(-K_{F'}) = pf - qK_F - \sum m_i x_i$ в $Z^*(F)$. Так как $u(f') = f$, то $2 = (f' \cdot (-K_{F'}) = (u(f') \cdot u(-K_{F'})) = (f \cdot pf - qK_F - \sum m_i x_i) = 2q$. Откуда $q = 1$. Следовательно, $0 \leqslant m \leqslant 2q = 2$. Имеем

$$\begin{aligned} (K_{F'} \cdot K_{F'}) &= 4pq + q^2 d - \sum \deg x_i m_i^2 = d,\\ -\Omega(-K_{F'}) &= 2p + qd - \sum \deg x_i m_i = d. \end{aligned} \tag{15}$$

Отсюда, как и раньше, если $m_i \leqslant q$, $\forall i$, то

$$2qp + (q-1)d \leqslant 0. \tag{16}$$

Следовательно, при $q = 1$ условия (16) и (15) приводят к равенствам $p = 0$, $m_i = 0$, $\forall i$, т. е. $u(-K_{F'}) = -K_F$. Если существует точка x_i с $m_i > q$, то можно считать $x_i \in F$. В таком случае точка x_i не может лежать на выраженных слоях морфизма $\pi\colon F \to C$ и степень точки x_i на слое $F_{\pi(x_i)}$, проходящего через x_i, над полем вычетов $k(x_i)$ равна 1. Следовательно, определено элементарное преобразование $e(x_i)$ с центром x_i. Продолжая этот процесс и используя (14), мы получим преобразование $e\colon F \to F''$ над C, являвшееся

композицией элементарных преобразований с центрами в замкнутых точках и такое, что $u' = e \cdot u\colon F' \to F''$ обладает свойствами:

$$u'(f') = f'', \quad u'(-K_{F'}) = -K_{F''}.$$

Следовательно, u' индуцирует изоморфизм $\operatorname{Pic} F' \to \operatorname{Pic} F''$ и по лемме 3.11 гл. V в [1] u' — изоморфизм. Отсюда немедленно следует требуемое утверждение 3). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. В сущности эта теория доказана в [5]. Здесь мы только воспроизведем это доказательство, во-первых, с целью иллюстрации метода н, во-вторых, для удобства ссылок при доказательстве теорем 2 и 3. Пусть F — поверхность дель Пеццо второго рода с $d = 1$ или 2, $\pi\colon F \to C$ — ее представление в виде стандартного расслоения на коники и $u\colon F \to F$ — произвольное бирациональное преобразование. Тогда

$$z = u(f) = af - bK_F - \sum n_i x_i$$

в группе $Z^*(F) = (\operatorname{Pic} \overline{F})^G + Z^0(F)$ и удовлетворяет соотношениям (13). Если $b = 0$, то по лемме 1, 2) $n_i = 0$, $\forall\, i$, $a = 1$ и $u(f) = f$. Следовательно, $u \in \mathcal{F}$. Если же $b > 0$ и $n_i \leqslant b$, $\forall\, i$, то по лемме 1, 3) $a < 0$. Так как F — поверхность дель Пеццо степени 1 или 2, то на ней присутствует инволюция τ, действующая на $Z^*(F)$ по формулам (10) или (11). Применяя ее к z, получаем:

$$d = 1: \quad z' = \tau(z) = \tau \cdot u(f) = -af - (b + 4a)K_F - \sum n_i \tau(x_i),$$
$$d = 2: \quad z' = \tau(z) = \tau \cdot u(f) = -af - (b + 2a)K_F - \sum n_i \tau(x_i).$$

Здесь $b + 4a < b$ и $b + 2a < b$, так как $a < 0$, и мы имеем спуск по целому неотрицательному коэффициенту при $-K_F$.

Если существует точка x_i с $n_i > b$, то в силу леммы 1, 1) существует точка, скажем, x_1 с $n_1 > b$ и $x_1 \in F$. Из того, что $(f \cdot z) = 2b$, следует, что x_1 не может лежать на вырожденном слое морфизма π и степень ее на слое $F_{\pi(x_i)}$ над полем вычетов $k(x_1)$ равна 1. Поэтому определено элементарное преобразование $e(x_1)\colon F \to F'$ с центром в x_1. При этом $\pi'\colon F' \to C$ также является стандартным расслоением на коники с $d' = d$ и с тем же значением b и $z' = e(x_1)(z)$. С помощью конечного числа элементарных преобразований типа $e(x_1)$ можно избавиться от всех точек кратности $> b$, перейдя на некоторую поверхность $F_1 \in \{F_i \mid i \in I(F)\}$. Пусть $g_{01}\colon F = F_0 \to F_1$ — композиция всех этих элементарных преобразований, тогда

$$z_1 = g_{01}(z) = a_1 f_1 - bK_{F_1} - \sum n_{1i} x_{1i},$$

где $n_{1i} \leqslant b$, $\forall\, i$, $a_1 < 0$ и F_1 — поверхность дель Пеццо степени d по лемме 1, 3), 4). Следовательно, можно применить инволюцию τ_1 и уменьшить коэффициент при $-K_{F_1}$. Продолжая процесс, мы на некотором r-м шаге получим нулевой коэффициент при $-K_{F_r}$, и, следовательно, $z_r = f_r$ в $Z^*(F_r)$. Тогда композиция полученных отображений $F \to F_r$, начиная с u, переводит f в f_r

и до лемме 2, 3) либо является изоморфизмом, либо становится изоморфизмом после некоторого бирационального C-отображения $F_r \to F$. Таким образом, мы получаем разложение вида

$$u^{-1} = a g_{r0} \tau_r g_{r-1\,r} \tau_{r-1} \dots g_{12} \tau_1 g_{01}, \tag{17}$$

где τ_s — инволюция на F_s, $s = 1, \dots, r$, $g_{s-1\,s} \colon F_{s-1} \to F_s$ и $g_{r0} \colon F_r \to F_0 = F$ — бирациональные отображения над C, $F_s \in \{F_i \mid i \in I(F)\}$, $a \in A$. Отметим, что здесь может быть $g_{01} = 1$ (т. е. тождественным отображением), $g_{r0} = 1$ и $a = 1$. Посредством бирациональных отображений h_i, $i \in I(F)$, и обратных к ним (17) можно переписать в виде

$$u^{-1} = a g_{r0} h_r h_r^{-1} \dots \tau_2 h_2 h_2^{-1} g_{12} h_1 h_1^{-1} \tau_1 h_1 h_1^{-1} g_{01}. \tag{18}$$

Ясно, что правая часть этого равенства является композицией отображающей из группы $\mathcal{F}$ и инволюций $h_i^*(\tau_i) = h_i^{-1} \tau_i h_i$. Теорема доказана.

3. Группы Bir F для поверхностей дель Пеццо второго рода с $d = 1$ и 2. Соотношения

1. Доказательство теоремы 2. Любой элемент из $B(F)$ может быть записан в виде слова без сокращений, состоящее из элементов группы $\mathcal{F}$ и инволюций $h_i^*(\tau_i)$, $i \in I(F)$. Положим $F = F_0$. С помощью отображений h_i слово можно записать в виде

$$R = g_{r0} \tau_r g_{r-1\,r} \tau_{r-1} \dots \tau_2 g_{12} \tau_1 g_{01}, \tag{19}$$

где $g_{s-1\,s} \colon F_{s-1} \to F_s$, $s = 1, \dots, r$, и $g_{r0} \colon F_r \to F_0$ — бирациональные отображения, переводящие класс f_{s-1} в f_s и f_r в f_0. Они не являются, вообще говоря, отображениями над C, а становятся таковыми после домножения $g_{s-1\,s}$ слева на некоторый элемент $a_s \in A_s$, или справа на элемент $a_{s-1} \in A_{s-1}$. Отметим, что некоторые из $g_{s-1\,s}$ могут быть изоморфизмами и тогда при отождествлении $F_{s-1} = F_s$ они являются элементами из $A_{s-1} = A_s$, кроме того, в (19) могут отсутствовать один или оба крайних элемента g_{r0}.

Используя соотношение (4), можно избавиться от элементов $g_{s-1\,s}$ в (19), являющихся изоморфизмами, т. е. элементами $a_{s-1} \in A_{s-1}$, перебрасывая их справа налево посредством (4) и сокращая рядом стоящие элементы τ, так как $\tau^2 = 1$. Аналогично, с помощью соотношений (4) мы можем, подправляя $g_{s-1\,s}$ слева на элементы a_s из A_s (т. е. рассматривая $a_s^{-1} a_s g_{s-1\,s}$) и заменяя $\tau_s a_s^{-1}$ на $a_s' \tau_s$, добиться того, что все $g_{s-1\,s}$ будут бирациональными отображениями над C (не являющимися изоморфизмами), кроме, быть может, последнего отображения g_{r0}. Будем считать, что слово (19) уже имеет такой *нормальный вид*.

Для каждого бирационального отображения $u_{ij} \colon F_i \to F_j$, $i, j \in I(F)$, определим целозначные функции $a(u_{ij})$, $b(u_{ij})$, $n_x(u_{ij})$, исходя из представления

$$u_{ij}(f_i) = a(u_{ij}) f_j - b(u_{ij}) K_{F_j} - \sum n_x(u_{ij}) x$$

в группе $Z^*(F_j) = (\operatorname{Pic} \overline{F}_j)^G + Z^0(F_j)$.

Теперь для каждого индекса s, $s = 1, \ldots, r$, по слову $R \in B(F)$ в нормальной форме (19) выпишем наборы целых чисел:

$$\begin{gathered} a_s = a(\tau_s g_{s-1\,s} \ldots g_{01}), \quad b_s = b(\tau_s g_{s-1\,s} \ldots g_{01}), \\ n_s(x) = n_x(\tau_s g_{s-1\,s} \ldots g_{01}), \\ a'_s = a(g_{s-1\,s} \cdot \tau_{s-1} \ldots g_{01}), \quad b'_s = b(g_{s-1\,s} \cdot \tau_{s-1} \ldots g_{01}), \\ n'_s(x) = n_x(g_{s-1\,s} \cdot \tau_{s-1} \ldots g_{01}). \end{gathered} \tag{20}$$

В силу формул (2), (3) и леммы 2, 2), 3) эти числа удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$\begin{gathered} a_s = -a'_s, \quad b_s = b'_s + \frac{4}{d} a'_s, \\ n_s(x) = n'_s(\tau_s(x)), \quad b'_{s+1} = b_s. \end{gathered} \tag{21}$$

Кроме того, $b_s \geqslant 0$, $2b_s \geqslant n_s(x) \geqslant 0$, $2b'_s \geqslant n'_s(x) \geqslant 0$.

Пусть теперь слово $R \in R(F)$, т. е. представляет тождественное отображение, тогда должны выполняться следующие начальные и конечные условия:

$$\begin{gathered} a'_1 = 1, \quad b'_1 = 0, \quad n'_1(x) = 0, \quad \forall\, x \in E(F_1), \\ a_1 = -1, \quad b_1 = \frac{4}{d}, \quad n_1(x) = 0, \\ a_r = 1, \quad b_r = 0, \quad n_r(x) = 0, \quad \forall\, x \in E(F_r). \end{gathered} \tag{22}$$

Предположим, что $R \neq 1$ и приведем это предположение к противоречию при $d = 1$. Так как $R \neq 1$, то $r > 1$, иначе при $r = 1$ начальное и конечные условия (22) оказываются противоречивыми, или $r = 0$ и $R = g_{01} = 1$. Стало быть, должен существовать индекс $s \geqslant 1$, удовлетворяющий условиям:

1) $b_s \geqslant b_{s-1} \geqslant \ldots \geqslant b_1$;

2) $b_{s+1} < b_s$.

Покажем, что при $d = 1$ это невозможно. Так как по (21) $b_{s+1} = b'_{s+1} + 4a'_{s+1} = b_s + 4a'_{s+1}$ и так как $b_{s+1} < b_s$ по условию 2), то $a'_{s-1} < 0$. С другой стороны, из условия 1) получаем, что $a'_s \geqslant 0$, т. е. $a_s = -a'_s \leqslant 0$. Теперь из леммы 3 (ниже) следует, что $a'_{s+1} = a_s$ и g_{ss+1} — изоморфизм, что противоречит нормальности слова R. Следовательно, $R = 1$, что и требовалось установить.

Осталось доказать следующую лемму.

Лемма 3. *Пусть F, F' — стандартные расслоения на коники над C с $d = d' = 1$ или 2, $z = af - bK_F - \sum n_i x_i$ и $z' = a'f' - bK_{F'} - \sum n'_i x'_i$ — классы пучков рациональных кривых на F и F' с $b > 0$ и $a' \leqslant a \leqslant 0$. Предположим, что существует бирациональное над C отображение $g\colon F \to F'$ такое, что $g(z) = z'$, тогда*

1) *если $d = 1$, то g — изоморфизм;*

2) *если $d = 2$, то g — либо изоморфизм, либо элементарное преобразование с центром в замкнутой точке x степени 1, не лежащей на вырожденных слоях морфизма $\pi\colon F \to C$.*

Доказательство. Представим g в виде композиции элементарных преобразований $g = e(x_m) \ldots e(x_1)$ (лемма 2) и среди всех таких представле-

ний выберем одно с наименьшим значением m. Тогда по лемме 2

$$\begin{gathered} g(x_i) = \deg x_i f' - x_i', \quad i = 1, \dots, m, \\ g(-K_F) = a'' f' - K_{F'} - \sum_{i=1}^{m} 2x_i', \\ g(x) = x', \quad x \neq x_1, \dots, x_m, \end{gathered} \tag{23}$$

где $a'' = \sum\limits_{i=1}^{m} \deg x_i$. Здесь мы пользуемся тем фактом, что элементарные преобразования с центрами на слоях над различными точками базы коммутируют с точностью до C-изоморфизма, и тем, что последовательность элементарных преобразований с центрами в точках, лежащих на слоях над одной точкой базы, однозначно определена (с точностью до C-изоморфизма). Пользуясь формулами (23), получаем:

$$\begin{aligned} z' &= a' f' - bK_{F'} - \sum n_i' x_i' = g(z) = g\Big(af - bK_F - \sum n_i x_i\Big) = \\ &= af' - b\Big(-a'' f' + K_{F'} + \sum_{i=1}^{m} 2x_i'\Big) - \sum_{i=1}^{m} n_i(\deg x_i f' - x_i') - \sum_{i>m} n_i x_i' = \\ &= \Big[a + \sum_{i=1}^{m} \deg x_i (b - n_i)\Big] - bK_{F'} - \sum_{i=1}^{m} (2b - n_i) x_i' - \sum_{i>m} n_i x_i'. \end{aligned} \tag{24}$$

Отсюда $a' = a + \sum\limits_{i=1}^{m} \deg x_i (b - n_i)$, $n_i' = 2b - n$, $i = 1, \dots, m$, $n_i' = n_i$ для $i > m$. Так как по условию $a' \leqslant 0$ и $a \leqslant 0$, то по лемме 1, 5) при $d = 1$ имеем: $n_i' < b$ и $n_i < b$, $\forall\, i$. Следовательно, в (24) при $d = 1$ имеем $m = 0$, т. е. g — изоморфизм и $a = a'$, $n_i = n_i'$, $\forall\, i$.

В случае $d = 2$ опять до лемме 1, 5) ситуация может быть такая же, как и при $d = 1$, или может существовать только одна точка, скажем, x_1 с $n_1 \geqslant b$ и $\deg x_1 = 1$ (аналогично, x_1' с $n_1' \geqslant b$ и $\deg x_1' = 1$). Стало быть, $m = 0$ или 1. В первом случае g — изоморфизм, во втором $g = e(x_1)$ — элементарное преобразование с центром в замкнутой точке x_1 степени 1, которая не может лежать на вырожденном слое, иначе элементарное преобразование невозможно. Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы 3. Как и в доказательстве теоремы 1 в п. 1, предположим, что слово R из $R(F)$ записано в виде (19), и предположим, что с помощью соотношений (4) оно уже приведено к нормальному виду. Нам надо показать, что в случае $d = 2$ соотношения (7) позволяют преобразовать слово R в нормальной форме (19) к 1. Для этого, как и в доказательстве теоремы 1, воспользуемся соотношениями (21) и (22) для наборов целых чисел (20), и пусть, как и выше, индекс s определен условиями 1) и 2) из п. 1.

Заметим, прежде всего, что в таком случае преобразование g_{ss+1} должно быть элементарным преобразованием с центром в замкнутой точке $x_s \in F_s$ степени 1. Действительно, оно не является изоморфизмом в силу предположения нормальности R и для него выполняются условия леммы 3, так как

$a'_{s+1} < 0$ и $a_s \leqslant 0$, в силу условий 1) и 2) выше. Поэтому $g_{ss+1} = e(x_s)$ по лемме 3. Если точки x_s с $\deg x_s = 1$ нет на F_s, то, как и в теореме 1, мы получаем противоречие с предположением $R \neq 1$.

Пусть x'_{s+1} — образ стягиваемого слоя при отображении $e(x_s)\colon F_s \to F_{s+1}$. Для удобства положим $a'_{s+1} = a$, $b'_{s+1} = b_s = b$, $n'_{s+1}(x'_{s+1}) = n$. Имеем $a < 0$, $b \geqslant 2$ и из условий $0 \geqslant -a'_s = a_s = a + b - n$ получаем $n \geqslant a + b$.

Из рекуррентных формул (21) и формул (14) находим:

$$\begin{gathered} a_{s+1} = -a, \quad a_s = a + b - n, \quad a'_s = -a - b + n, \\ b_{s+1} = b + 2a, \quad b_s = b, \quad b'_s = 2a + 3b - 2n, \\ n_{s+1}(x_{s+1}) = n, \quad n_s(x_s) = 2b - n, \quad n'_s(x'_s) = 2b - n, \\ x_{s+1} = \tau_{s+1}(x'_{s+1}), \quad x'_s = \tau_s(x_s). \end{gathered} \tag{25}$$

Из формул (25) и начальных данных (22) немедленно следует, что $s \geqslant 2$. Рассмотрим случаи $n = a + b$ и $n > a + b$ по отдельности.

Случай $n = a + b$. Покажем, что в этом случае $g_{s-1\,s}$ также является элементарным преобразованием $e(x_{s-1})\colon F_{s-1} \to F_s$, обратным к элементарному преобразованию $e(x'_s)$ с центром в точке $x'_s = \tau_s(x_s)$. Имеем в этом случае:

$$a'_s = 0, \quad b'_s = b, \quad n'_s(x'_s) = b - a, \quad a_{s-1} = a, \quad b_{s-1} = b.$$

Поэтому утверждение $g_{s-1\,s} = e(x_{s-1})$ следует здесь так же, как и в случае g_{ss+1} из леммы 3.

Слово R мы можем записать теперь в виде

$$R = g_{r0}\tau_r \dots g_{s+1\,s+2}\tau_{s+1}e(x_s)\tau_s e(x_{s-1})\tau_{s-1}e(x_{s-2})e^{-1}(x_{s-2})g_{s-2\,s-1}\dots g_{01},$$

где $e(x_{s-2})$ — элементарное преобразование, обратное к $e(x'_{s-1})\colon F_{s-1} \to F'_{s-2}$. Используя соотношения (8), заменим часть $\tau_{s+1}e(x_s)\tau_s e(x_{s-1})\tau_{s-1}e(x_{s-2})$ слова R на часть $e(x'_{s-2})\tau'_{s-2}a$ другого слова

$$R' = g_{r0}\tau_r \dots g_{s+1\,s+2}e(x'_{s-2})\tau'_{s-2}ae(x'_{s-1})g_{s-2\,s-1}\dots g_{01},$$

также принадлежащего $R(F)$ и содержащего $r - 2 < r$ элементов типа τ. Остается воспользоваться индукцией по r.

Случай $n > a + b$. В этом случае мы можем R записать в виде

$$R = g_{r0}\tau_r \dots g_{s+1\,s+2}\tau_{s+1}e(x_s)\tau_s e(x_{s-1})e^{-1}(x_{s-1})g_{s-1\,s}\dots g_{01}.$$

Используя (8), заменим часть $\tau_{s+1}e(x_s)\tau_s e(x_{s-1})$ на $e(x'_s)\tau'_s e(x'_{s-1})\tau''_{s-1}a$, где $e(x'_{s-1})\colon F''_{s-1} \to F'_s$ — элементарное преобразование с центром в $x'_{s-1} = \tau''_{s-1}\cdot a(x''_{s-1})$, $a \in A(F''_{s-1})$ и $e(x'_s)\colon F'_s \to F_{s+1}$ — элементарное преобразование с центром в $x'_s = \tau'_s(x''_s)$, x''_s — образ стягиваемого слоя при отображении $e(x'_{s-1})$. В результате получим слово

$$R' = g_{r0}\tau_r \dots g_{s+1\,s+2}e(x'_s)\tau'_s e(x'_{s-1})\tau''_{s-1}ae(x''_{s-1})g_{s-1\,s}\dots g_{01}$$

тоже из $R(F)$ с тем же числом r элементов типа τ, но с $b'_s = 3b + 2a - 2n = b + 2(a + b - n) < b_s$, и при этом остальные b_i остались без изменений.

Следовательно, в этом случае к цели приводит индукция по $\sum\limits_{i=1}^{r} b_i$. Тем самым основное утверждение теоремы 3 доказано. Если же $F_i^0(k) = \varnothing$, то, как было отмечено в доказательстве, все соотношения исчерпываются соотношением (4) и результат получается такой же, как и в случае $d = 1$.

3. Доказательство предложения 1. Если все указанные в (6) отображения определены, то, пользуясь формулами (11) и (14), легко находим, что композиция α отображений (7) индуцирует следующее отображение $Z^*(F_0) \to Z^*(F_4)$:

$$\alpha(f_0) = f_4, \quad \alpha(-K_{F_0}) = -K_{F_4}, \quad \alpha(x) = x',$$
$$x \in E(F_0), \quad x' \in E(F_4).$$

Отсюда в силу леммы 2, 1) следует, что $\alpha\colon F_0 \to F_4$ — изоморфизм, переводящий пучок $|f_0|$ в пучок $|f_4|$. Таким образом, осталось проверить корректность композиции отображений (6). Так как $x_0 \in F_0$ — хорошая точка на поверхности дель Пеццо с $d = 2$, то раздутие $\sigma_{x_0}\colon F_0' \to F_0$ этой точки приводит к поверхности дель Пеццо F_0' с $d = 1$ (см. [1, гл. IV, § 2]). Стягивание $\sigma_{x_1'}\colon F_0' \to F_1$ — собственного прообраза на поверхности дель Пеццо F_0' слоя, проходящего через x_0 на F_0, также приводит к поверхности дель Пеццо F_j ([1, гл. IV, § 2]). Стало быть, F_1 — поверхность дель Пеццо с $d = 2$ и определено отображение τ_1, при этом $l_{01}(x_0) = \sigma_{x_1'}\sigma_{x_0}^{-1}\colon F_0 \to F_1$. Точка $x_1' \in F_1$ не может лежать на исключительных кривых первого рода, иначе ее раздутие $\sigma_{x_1'}\colon F_0' \to F_1$ не приводило бы к поверхности дель Пеццо F_0'. Далее, точка $x_1 = \tau_1(x_1')$ тоже не лежит на исключительных кривых первого рода поверхности $\overline{F}_1$, так как инволюция τ_1 переводит исключительные кривые снова в исключительные кривые. Таким образом, четырехкратная итерация приведенных рассуждений доказывает требуемое утверждение, а вместе с ним и предложение.

Литература

[1] Манин Ю. И. Кубические формы. — М.: Наука, 1972.

[2] Исковских В. А. Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. — М.: ВИНИТИ, 1979. — Т. 12. — С. 159–235.

[3] Исковских В. А. Минимальные модели рациональных поверхностей над произвольными полями // Известия АН СССР. Сер. мат. — 1979. — Т. 43, № 1. — С. 19–43.

[4] Исковских В. А. Рациональные поверхности с пучком рациональных кривых // Матем. сб. — 1967. — Т. 74, № 4. — С. 608–638.

[5] Исковских В. А. Рациональные поверхности с пучком рациональных кривых и с положительным квадратом канонического класса // Матем. сб. — 1970. — Т. 83, № 1. — С. 90–119.

[6] Исковских В. А. Бирациональные свойства поверхности степени 4 в $\mathbf{P}_k^4$ // Матем. сб. — 1972. — Т. 88, № 1. — С. 31–37.

[7] Манин Ю. И. Рациональные поверхности над совершенными полями. I // Publ. Math. IHES. — 1966. — V. 30. — P. 55–113.

[8] Манин Ю. И. Рациональные поверхности над совершенными полями. II // Матем. сб. — 1967. — Т. 72, № 2. — С. 161–192.

[9] Swinnerton-Dyer H. P. F. Rational points on del Pezzo surfaces of degree 5 // Algebraic Geometry (Oslo, 1970). — Groningen: Wolters and Noordhoff, 1972. — P. 287–290.

[10] Kantor S. Rationale Zerlegung der Birationalen Transformationen in ihre Primfaktoren // Monatsh. Math. und Phys. — 1899. — Bd. 10, № 1. — S. 54–74.

Доказательство теоремы о соотношениях в двумерной группе Кремоны

1. Цель этой заметки — дать полное доказательство теоремы о соотношениях в двумерной группе Кремоны, кратко намеченное в заметке автора [1]. Мы будем использовать определения и обозначения из [1] и только кратко напомним некоторые из них.

Пусть $F_0 = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ с фиксированной проекцией $\pi\colon F_0 \to \mathbf{P}^1$ на первый множитель. Основное поле k предполагается алгебраически замкнутым. Двумерная группа Кремоны Cr_2 изоморфна группе бирациональных автоморфизмов $\operatorname{Bir} F_0$ поверхности F_0 над k. Группа $\operatorname{Aut} F_0$ бирегулярных автоморфизмов F_0 представляется в виде расширения $1 \to A \to \operatorname{Aut} F_0 \to \{1, \tau\} \to 1$, где $A = \mathrm{PGL}(2, k) \times \mathrm{PGL}(2, k)$ и $\tau\colon \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ — инволюция переставляющая множители. В биоднородных координатах $(u_0, u_1) \times (v_0, v_1)$ на $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ инволюция τ задается формулой: $(u_0, u_1) \times (v_0, v_1) \mapsto (v_0, v_1) \times (u_0, u_1)$. Пусть $B \subset \operatorname{Bir} F_0$ — подгруппа, состоящая из всех бирациональных автоморфизмов, которые переводят слои проекции $\pi\colon F_0 \to \mathbf{P}^1$ снова в слои этой проекции. Группа B представляется в виде следующего полупрямого произведения:

$$1 \to \mathrm{PGL}(2, k(\mathbf{P}^1)) \to B \to \mathrm{PGL}(2, k) \to 1.$$

Известно (см., например, [2]), что группа B порождена подгруппой $A \subset B$ и бирациональной инволюцией $e\colon (u_0, u_1) \times (v_0, v_1) \mapsto (u_0, u_1) \times (u_0 v_1, u_1 v_0)$. Инволюция e является композицией двух элементарных преобразований e_0 и e_∞, связанных с точками $(0, 1) \times (0, 1)$ и $(1, 0) \times (1, 0)$ соответственно.

Вообще, с каждой парой точек x, y на F_0, не лежащих на одном вертикальном и на одном горизонтальном слоях $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, включая случай, когда точка y бесконечно близка к x (с направлением, отличным от вертикального и горизонтального), связана бирациональная инволюция $e_{yx} = e_y \cdot e_x$, где e_x, e_y — элементарные преобразования линейчатой поверхности $\pi\colon F_0 \to \mathbf{P}^1$, связанные с точками x и y. Бирациональная инволюция e_{yx} относится к первому типу, если $x, y \in F_0$, и — ко второму типу, если точка y бесконечно близка к x.

2. Группа $\mathrm{Cr}_2 \simeq \operatorname{Bir} F_0$ порождается подгруппами $\{1, \tau\}$ и B (см. [2]). Известно [1], что для них выполняются следующие соотношения:

(i) обычные групповые соотношения в группах $\{1, \tau\}$ и B, т. е. $\tau^2 = 1$ и $b_1 b_2 b_3 = 1$, если произведение $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3$ равно 1 в группе B, $b_1, b_2, b_3 \in B$;

УМН. — 1985. — Т. 40, № 5(245). — С. 255–256.

(ii) действия τ на элементы группы A, т. е. $\tau a'\tau a^{-1} = 1$, если $a' = \tau a\tau$ $\forall a \in A$;

(iii) соотношение между τ и бирациональной инволюцией e, а именно: $\tau e\tau e\tau e a_0^{-1} = 1$, где $a_0 \in A$ задается формулой $(u_0, u_1) \times (v_0, v_1) \mapsto (u_0, u_1) \times \times (v_1, v_0)$.

Отметим, что система этих соотношений эквивалентна системе соотношений (i), (ii), и (iii′): $\tau e_{yx}\tau e_{y'x'}\tau e_{yx}a^{-1} = 1$, где $e_{yx} = e_y \cdot e_x$ — бирациональная инволюция первого или второго типа, связанная с точками x, y, $x' = \tau(x)$, $y' = \tau(y)$, $a = \tau \cdot e_{yx} \cdot \tau \cdot e_{y'x'} \cdot \tau \cdot e_{yx} \in A$.

Теорема. *Соотношения (i), (ii), (iii) (или (i), (ii), (iii′)) являются полной системой определяющих соотношений для порождения группы* $\operatorname{Bir} F_0 \simeq \simeq \mathrm{Cr}_2$ *подгруппами* $\{1, \tau\}$ *и* B.

3. Доказательство. Как и в [1], обозначим через $B * \{1, \tau\}$ свободное произведение групп B и $\{1, \tau\}$. Ядро сюръективного гомоморфизма $B * \{1, \tau\} \to \operatorname{Bir} F_0$ обозначим через $R(F_0)$. Всякий элемент $R \in R(F_0)$ можно записать в виде

$$R = b_r\tau b_{r-1} \dots \tau b_1, \quad b_i \in B.$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что посредством соотношений (ii) и (iii′) слово R можно привести к единичному слову $R = 1$. Как и в [1], можно считать, что R имеет нормальную форму, т. е. $b_i \notin A$, кроме, возможно, b_r, и все b_i, кроме, возможно, b_r, являются бирациональными преобразованиями над $\mathbf{P}^1$ относительно проекции $\pi\colon F_0 \to \mathbf{P}^1$.

В обозначениях [1] пусть $\beta = \max\{\beta_i \mid i = 1, \dots, 2m\}$ и пусть s — наименьший индекс, такой, что $\beta_s = \beta$ и $\beta_s > \beta_{s-1}$. Рассмотрим кусок $R_s = = b_{s+1}\tau b_s\tau b_{s-1}$ слова R. Пользуясь формулами (7) из [1], находим $\alpha'_{s-1} = = \beta_{s-1} < \beta$, $\beta'_{s-1} = \alpha_{s-1} = \beta_s = \beta$, $\alpha_s = \beta'_s = \beta_{s+1} \leqslant \beta$. Пусть $x_1, \dots, x_{2m}$ — все точки неопределенности бирационального отображения b_s, включая бесконечно близкие. Их четное число, поскольку b_s — бирациональный автоморфизм F_0 над $\mathbf{P}^1$ и $m \geqslant 1$, так как $b_s \notin A$. Пусть $\nu_1, \dots, \nu_{2m}$ — кратности точек $x_1, \dots, x_{2m}$ в линейной системе $\tau \cdot b_{s-1} \cdot \tau \cdot \dots \cdot \tau \cdot b_1(h)$, где $h = f + s$ — класс гиперплоского сечения квадрики $F_0 \subset \mathbf{P}^3$. Возможны два случая:

1) найдутся две точки x_i, x_j, такие, что $\nu_i + \nu_j > \beta_{s-1}$;

2) для любой пары точек x_i, x_j имеем $\nu_i + \nu_j \leqslant \beta_{s-1}$.

В случае 1) среди пар точек (x_i, x_j) с $\nu_i + \nu_j > \beta_{s-1}$ можно выбрать пару, скажем, x_1, x_2, так, что либо обе точки x_1, x_2 лежат на F_0, либо точка x_2 является бесконечно близкой первого порядка к точке x_1. Точки x_1 и x_2 не могут лежать на одном горизонтальном слое. Действительно, иначе $0 \leqslant \leqslant (\tau \cdot b_{s-1} \cdot \tau \cdot \dots \cdot \tau \cdot b_1(h) \cdot s - x_1 - x_2) = \beta_{s-1} - \nu_1 - \nu_2$, что противоречит неравенству $\nu_1 + \nu_2 > \beta_{s-1}$.

По аналогичной причине точка x_2 не может быть бесконечно близкой к x_1 в горизонтальном направлении. Следовательно, существует бирациональная инволюция $e_{x_2x_1}$ первого или второго типа.

Положим $b_s = b'_s e_{x_2x_1}$. Пользуясь соотношениями (iii′), заменим $e_{x_2x_1}\tau$ на $\tau a e_{x_2x_1}\tau e_{x'_2x'_1}$ в R_s и с помощью соотношений (ii) заменим τa на $a'\tau$. В ре-

зультате R_s заменится на $R'_s = b_{s+1}\tau b'_s a'\tau e_{x_2x_1}\tau e_{x'_2x'_1} b_{s-1}$, а слово R — на соответствующее слово R'. В R' имеем

$$\beta(e_{x'_2x'_1} \cdot b_{s-1} \cdot \tau \cdot \ldots \cdot b_1(h)) = \beta_{s-1} < \beta;$$
$$\alpha(e_{x'_2x'_1} \cdot b_{s-1} \cdot \tau \cdot \ldots \cdot b_1(h)) = \alpha_{s-1} + \beta_{s-1} - \nu_1 - \nu_2 < \nu_{s-1} = \beta;$$
$$\beta(e_{x_2x_1} \cdot \tau \cdot e_{x'_2x'_1} \cdot b_{s-1} \cdot \tau \cdot \ldots \cdot b_1(h)) = \alpha_{s-1} - \beta_{s-1} - \nu_1 - \nu_2 < \beta;$$
$$\alpha(e_{x_2x_1} \cdot \tau \cdot e_{x'_2x'_1} \cdot b_{s-1} \cdot \tau \cdot \ldots \cdot b_1(h)) = \beta_{s-1} + \alpha_{s-1} + \beta_{s-1} -$$
$$-(\beta_{s-1} - \nu_1) - (\beta_{s-1} - \nu_2) = \alpha_{s-1} = \beta.$$

Следовательно, в слове R' индекс s максимального значения коэффициента β остался тем же, но теперь элемент $b'_s a'$ имеет уже на 2 точки неопределенности меньше, чем b_s. Если же $b'_s \in A$ — бирегулярный автоморфизм, то по (ii) имеет $\tau b'_s a^1 = a''_s \tau$ для некоторого $a'_s \in A$. Поэтому с учетом $\tau^2 = 1$ кусок R'_s можно переписать в виде $R''_s = b_{s+1}a'' e_{x_2x_1}\tau e_{x'_2x'_1} b_{s-1}$ и в соответствующем слове R'' будем иметь $\beta(b_{s+1} \cdot a'' \cdot e_{x_2x_1} \cdot \ldots \cdot b_1(h)) = \beta(e_{x_2x_1} \cdot \tau \cdot \ldots \cdot b_1(h)) < \beta$. Стало быть, в этом случае индекс s максимального значения β сдвинулся влево, т. е. уменьшилось число $r - s$. Через конечное число шагов такой процесс приведет к уменьшению β.

В случае 2) пусть $x_1, \ldots, x_{2m}$ — все точки неопределенности b_s с кратностями $\nu_1, \ldots, \nu_{2m}$. Имеем $\nu_i + \nu_j \leqslant \beta_{s-1}$ $\forall\, i \neq j$. Представляя b_s в виде композиции элементарных преобразований (любым способом) и пользуясь формулами (7) из [1], находим $\alpha_s = \beta_{s-1} + m\beta - \sum\limits_{i=1}^{2m} \nu_i$. Так как $\alpha_s = \beta_{s+1} \leqslant \beta$ и $\nu_i + \nu_j < \beta_{s-1}$, отсюда получаем неравенство $(m-1) \times (\beta - \beta_{s-1}) \leqslant 0$, и поскольку $\beta_{s-1} < \beta$ $m \geqslant 1$, то остается единственная возможность $m = 1$, $b_s = e_{x_2x_1}$ и $\nu_1 + \nu_2 = \beta_{s-1}$. В этом случае кусок $R'_s = b_{s-1}\tau e_{x_2x_1}\tau b_{s-1}$ с помощью соотношения $\tau e_{x_2x_1}\tau = a e_{x_2x_1}\tau e_{x'_2x'_1}$ заменяется на $R'_s = b_{s+1} a e_{x_2x_1}\tau e_{x'_2x'_1} b_{s-1}$ и соответствующее слово R' будет содержать на 1 меньше элементов τ, чем R, т. е. длина R' будет меньше длины R.

Таким образом, индукция по указанным параметрам завершает доказательство теоремы.

Литература

[1] Исковских В. А. Образующие и соотношения в двумерной группе Кремоны // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. — 1983. — № 5. — С. 43–48.

[2] Исковских В. А. Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий // В кн.: Современные проблемы математики. — М.: ВИНИТИ, 1979. — С. 159–236.

Простое доказательство теоремы Гизатуллина

1. Введение. Пусть Cr обозначает группу Кремоны бирациональных автоморфизмов плоскости $\mathbb{P}^2$ над алгебраически замкнутым полем k. Известная теорема М. Нётера утверждает, что группа Cr порождается квадратичными (бирациональными) и линейными преобразованиями $\mathbb{P}^2$. В работе [2] М. Х. Гизатуллин описал полную систему определяющих соотношений между этими образующими, используя комбинаторно-топологический метод изучения действия групп на пространствах, а именно, он доказал следующий результат.

Т е о р е м а. *Пусть $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ обозначают множества соответственно проективных и квадратичных преобразований в* Cr. *Тогда всякое соотношение между этими образующими в* Cr *выводимо из соотношений вида*

$$c_3c_2c_1 = 1, \quad c_i \in \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}. \tag{1}$$

(Эти соотношения означают, что преобразование $c_2 \circ c_1 = c_3^{-1}$ должно быть квадратичным или линейным.)

В данной заметке мы предлагаем другое индуктивное доказательство этой теоремы.

2. Предварительные замечания. Пусть

$$c_m \dots c_2c_1 = 1, \quad c_i \in \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}, \quad i = 1, \dots, m, \tag{2}$$

— произвольное соотношение. Наша цель — сделать индуктивный шаг упрощения (2), используя соотношения типа (1). Так как композиция линейных преобразований дает линейное преобразование, а композиция линейного и квадратичного преобразований — квадратичное, то в (2) можно считать все преобразования квадратичными. Будем предполагать также, что запись (2) несократима в том смысле, что $c_{i+1} \neq c_i^{-1}$, $\forall\, i = 1, \dots, m-1$. Число m в таком случае будем называть длиной соотношения (2).

Введем следующие обозначения. Квадратичное преобразование $c_i \in$ Cr будем обозначать в виде $c_i(x_{i-1}^1, x_{i-1}^2, x_{i-1}^3; y_i^1, y_i^2, y_i^3)$, где x_{i-1}^1, x_{i-1}^2, x_{i-1}^3 — фундаментальные точки (точки неопределенности) преобразования c_i, а y_i^1, y_i^2, y_i^3 — точки, являющиеся образами стягиваемых прямых, т. е. фундаментальные точки преобразования c_i^{-1}. Среди точек x_{i-1}^j, y_i^j, $j = 1, 2, 3$, могут быть и бесконечно близкие. Каждая из троек фундаментальных точек (x^1, x^2, x^3) квадратичного преобразования $c \in \mathcal{Q}$ удовлетворяет следующим условиям

Труды МИАН СССР. — 1990. — Т. 183. — С. 111–116.

(см., например, [1], гл. V), сформулированным ниже и обозначаемым звездочкой.

Если $x^1, x^2, x^3 \in \mathbb{P}^2$, т. е. среди них нет бесконечно близких, то они не могут лежать на одной прямой. $(*)$ Если среди них есть ровно одна бесконечно близкая точка, скажем, x^3 бесконечно близка к x^2, то отвечающее x^3 направление в x^2 отлично от прямой $\overline{x^1x^2}$. Если $x^1 \in \mathbb{P}^2$, а x^2, x^3 бесконечно близки к x^1, то одна из них, скажем x^2, лежит на прямой E_1, вклеенной при раздутии точки x^1, т. е. является бесконечно близкой первого порядка к x^1, а точка x^3 лежит на прямой E_2, вклеенной при раздутии точки x^2, т. е является бесконечно близкой первого порядка к x^2 и, следовательно, бесконечно близкой второго порядка к x^1; при этом точка x^3 отлична от точки пересечения E_1 и E_2 и от точки пересечения E_2 с собственный прообразом прямой $L_{1,2} \subset \mathbb{P}^2$, направление которой в точке x^1 соответствует точке x^2. По крайней мере одна из точек, скажем x^1, лежит на $\mathbb{P}^2$.

Если тройка точек (x^1, x^2, x^3) удовлетворяет условиям $(*)$, то существует квадратичное преобразование с фундаментальными точками x^1, x^2, x^3, или, как часто говорят, с центрами в этих точках. Два квадратичных преобразования с одинаковыми центрами совпадают с точностью до линейного преобразования.

Рассмотрим бирациональные преобразования

$$g_i := c_i \circ c_{i-1} \circ \ldots \circ c_1, \quad i = 1, \ldots, m,$$

связанные с левой частью соотношения (2). Пусть l — класс прямой в $\mathbb{P}^2$, тогда в классических терминах линейных систем с базисными условиями (см., например, [1], гл. V) имеем:

$$g_i(l) = n_i l - r(y_i^1)y_i^1 - r(y_i^2)y_i^2 - r(y_i^3)y_i^3 - \ldots ,$$

где $n_i \in \mathbb{Z}$ — степень преобразования g_i и $r(y_i^j)$ — кратность базисной точки y_i^j, $j = 1, 2, 3$, в линейной системе $g_i(l)$. Для преобразования $g_{i+1} = c_{i+1} \circ g_i$ получаем:

$$g_{i+1}(l) = \left(2n_i - \sum_{j=1}^{3} r(x_i^j)\right) l - (n_i - r(x_i^2) - r(x_i^3))y_{i+1}^1 - \\ - (n_i - r(x_i^1) - r(x_i^3))y_{i+1}^2 - (n_i - r(x_i^1) - r(x_i^2))y_{i+1}^3 - \ldots \quad (3)$$

Из (3) видно, в частности, что композиция двух квадратичных преобразований является квадратичным (соответственно линейным) преобразованием тогда и только тогда, когда две (соответственно все три) фундаментальные точки второго преобразования совпадают с двумя (соответственно всеми тремя) фундаментальными точками преобразования, обратного первому. Это удобный критерий для проверки соотношений типа (1).

3. Начало доказательства теоремы. Пусть $n := \max n_i$, $i = 1, \ldots, m$, $s := \max\{i \mid n_i = n\}$, тогда $n_j < n$, $\forall j > s$. Доказательство основано на индукции по лексикографически упорядоченной паре неотрицательных целочисленных параметров (n, s). По определению индекса s, квадратичное преобразование $c_{s+1}(x_s^1, x_s^2, x_s^3; y_{s+1}^1, y_{s+1}^2, y_{s+1}^3)$, примененное к бирациональному

преобразованию g_s, уменьшает его степень: $\deg g_{s+1} = n_{s+1} < n = n_s = \deg g_s$. Отсюда

$$r(x_s^1) + r(x_s^2) + r(x_s^3) > n. \tag{4}$$

Аналогично

$$r(y_s^1) + r(y_s^2) + r(y_s^3) \geqslant n, \tag{5}$$

поскольку $\deg g_{s-1} = n_{s-1} \leqslant n_s = n$. Будем предполагать далее, что фундаментальные точки упорядочены так, что $r(x_s^1) \geqslant r(x_s^2) \geqslant r(x_s^3)$ и $r(y_s^1) \geqslant \geqslant r(y_s^2) \geqslant r(y_s^3)$. Тогда x_s^1, y_s^1 как точки максимальной кратности не могут быть бесконечно близкими и, следовательно, $x_s^1, y_s^1 \in \mathbb{P}^2$. Рассмотрим по отдельности все возможные случаи.

Случай 1. Множества $\{x_s^1, x_s^2, x_s^3\}$ и $\{y_s^1, y_s^2, y_s^3\}$ имеют по крайней мере две общие точки. Согласно замечанию в конце п. 2, преобразование $c_{s+1} \circ c_s$ можно заменить в таком случае одним квадратичным или линейным преобразованием c'_s. Тогда либо уменьшится параметр n, либо n не изменится, но тогда уменьшится параметр s, так что новое соотношение $c_m \dots c_{s+2} c'_s c_{s-1} \dots c_1 = 1$, эквивалентное соотношению (2), будет иметь меньшее значение параметров (n, s).

Случай 2. В множествах $\{x_s^1, x_s^2, x_s^3\}$ и $\{y_s^1, y_s^2, y_s^3\}$ точка y_s^1 отлична от x_s^1 и от x_s^2. Рассмотрим вспомогательное квадратичное преобразование $c = = c(x_s^1, x_s^2, y_s^1; z^1, z^2, z^3)$ с центрами в x_s^1, x_s^2, y_s^1; точки z^1, z^2, z^3 — любые из набора допустимых. Отметим, что не обязательно $r(x_s^2) \geqslant r(y_s^1)$. В силу (4) и (5) справедливо неравенство

$$r(x_s^1) + r(x_s^2) + r(y_s^1) > n, \tag{6}$$

и так как $x_s^1, y_s^1 \in \mathbb{P}^2$, то для (x_s^1, x_s^2, y_s^1) выполняются условия $(*)$ и, следовательно, преобразование c существует.

Так как $\{x_s^1, x_s^2, x_s^3\}$ и $\{x_s^1, x_s^2, y_s^1\}$ имеют две или три общие точки, то преобразование $c'_{s+1} := c_{s+1} \circ c^{-1}$ квадратично или линейно. Следовательно, кусок $c_{s+1} c^{-1} c c_s$ левой части соотношения (2) можно заменить на $c'_{s+1} c c_s$. В полученном новом и эквивалентном (2) соотношении параметры n и s не изменились, поскольку из (6) и (3) следует, что

$$\deg c \circ g_s < \deg g_s = n, \quad \deg c'_{s+1} \circ c \circ g_s = \deg g_{s+1} < n.$$

Однако квадратичные преобразования c и c_s^{-1} имеют общую фундаментальную точку y_s^1 и мы попадаем в условия следующих случаев.

Случай 3. Множества $\{x_s^1, x_s^2, x_s^3\}$ и $\{y_s^1, y_s^2, y_s^3\}$ имеют одну общую точку y_s^1 и $y_s^1 = x_s^2$ или $y_s^1 = x_s^3$. Рассмотрим вспомогательное квадратичное преобразование c вида $c = c(x_s^1, y_s^1, y_s^2; z^1, z^2, z^3)$, где z_1, z_2, z_3 — произвольные допустимые. Здесь $x_s^1 \neq y_s^2$, иначе множества $\{x_s^1, x_s^2, x_s^3\}$ и $\{y_s^1, y_s^2, y_s^3\}$ имели бы две общие точки, что уже было рассмотрено в случае 1. Из (3) и (4) имеем неравенство

$$r(x_s^1) + r(y_s^1) + r(y_s^2) > n. \tag{7}$$

В силу (7) и того, что $x_s^1, y_s^1 \in \mathbb{P}^2$, $x_s^1 \neq y_s^2$, выполняются условия $(*)$, и поэтому такое преобразование c существует. Тогда композиции $c'_{s+1} := c_{s+1} \circ \circ\, c^{-1}$ и $c'_s := c \circ c_s$ являются квадратичными преобразованиями. Согласно случаю 1, соотношение (2) можно заменить эквивалентным соотношением $c_m \dots c'_{s+1} c'_s c_{s-1} \dots c_1 = 1$, параметр n и которого не увеличился, а если он остался прежним, то уменьшился параметр s, так как $\deg c'_s \circ g_{s-1} = \deg c \circ g_s < < n$ в силу (7) и (3).

С л у ч а й 4. Множества $\{x_s^1, x_s^2, x_s^3\}$ и $\{y_s^1, y_s^2, y_s^3\}$ имеют одну общую точку $x_s^1 = y_s^1$, и одна из точек x_s^2, y_s^2 не является бесконечно близкой к x_s^1. Здесь вспомогательное преобразование имеет вид $c = c(x_s^1, x_s^2, y_s^2; z^1, z^2, z^3)$. Из (3) и (4) имеем:

$$r(x_s^1) + r(x_s^2) + r(y_s^2) > n. \tag{8}$$

Это неравенство вместе с условием, что x_s^2 и y_s^2 не являются одновременно бесконечно близкими к x_s^1, означает, что преобразование c существует. Теперь, как и в случае 3, мы заменяем слово (2) на эквивалентное, с меньшим значением параметров (n, s).

4. Доказательство теоремы в случае, когда $x_s^1 = y_s^1$ и точки x_s^2 и y_s^2 бесконечно близки к x_s^1. В силу упорядоченности точек по кратностям можно считать, что обе точки, x_s^2 и y_s^2, являются бесконечно близкими первого порядка к $x_s^1 = y_s^1$. Выберем произвольную достаточно общую точку $p \in \mathbb{P}^2$. Рассмотрим вспомогательное квадратичное преобразование $b_1 = b_1(x_s^1, y_s^2, p; z^1, z^2, z^3)$. Здесь точка $z^3 \in \mathbb{P}^2$ находится в общем положении по отношению к z^1 и z^2, можно даже считать, что $z^1 = x_s^1$, $z^2 = y_s^2$, $z^3 = p$. Преобразование $b_1 \circ c_s = c'_s(x_{s-1}^1, x_{s-1}^2, c_s^{-1}(p); z^1, z^2, b_1(y_s^3))$ квадратично и, по (3),

$$\begin{gathered} r(z^1) = n - r(y_s^2), \quad r(z^2) = n - r(x_s^1), \quad r(z^3) = n - r(x_s^1) - r(y_s^2), \\ n'_s := \deg b_1 \circ g_s = 2n - r(x_s^1) - r(y_s^2), \end{gathered} \tag{9}$$

так как $r(p) = 0$. Рассмотрим также квадратичное преобразование $b_2 = = b_2(x_s^1, x_s^2, p; u^1, u^2, u^3)$. Тогда точка u^3 находится в общем положении с u^1, u^2 и

$$\begin{gathered} r(u^1) = n - r(x_s^2), \quad r(u^2) = n - r(x_s^1), \quad r(u^3) = n - r(x_s^1) - r(x_s^2), \\ n''_s := \deg b_2 \circ b_1^{-1} \circ b_1 \circ g_s = 2n - r(x_s^1) - r(x_s^2). \end{gathered} \tag{10}$$

Преобразования $c = b_2 \circ b_1^{-1} = c(z^1, b_1(x_s^2), z^3; u^1, b_2(y_s^2), u^3)$ и $c_{s+1} \circ b_2^{-1} = = c'_{s+1}(u^1, u^2, b_2(x_s^3); y_{s+1}^1, y_{s+1}^2, c_{s+1}(p))$ квадратичны, и точки $z^3, u^3, b_2(x_s^3)$, $c_{s+1}(p)$ лежат на $\mathbb{P}^2$. Из неравенств (4) и (5) вытекает, что одновременно невозможно выполнение неравенств $r(x_s^1)+r(x_s^2)+r(x_s^3) \leqslant n$, $r(y_s^1)+r(y_s^2)+r(y_s^3) \leqslant n$. Поэтому возможны два случая, которые мы и рассмотрим по отдельности.

С л у ч а й 5. Предположим, что выполняется неравенство $r(y_s^1) + r(y_s^2) + + r(y_s^3) > n$. Рассмотрим квадратичное преобразование $b_3 = b_3(u^1, b_2(y_s^2), b_2(x_s^3); v^1, v^2, v^3)$. Оно существует, поскольку $b_2(x_s^3) \in \mathbb{P}^2$, $b_2(y_s^2)$ бесконечно

близка (порядка 1) к точке u^1 и $n' - r(u^1) - r(b_2(y_s^2)) - r(b_2(x_s^3)) = 2n - r(x_s^1) - r(x_s^2) - n + r(x_s^2) - r(y_s^2) - r(x_s^3) = n - r(x_s^1) - r(y_s^2) - r(x_s^3) < 0$, так как $r(x_s^1) = r(y_s^1)$.

По формуле (3), используя (9) и (10), находим:

$$\begin{gathered}
r(v^1) = n^1 - r(y_s^2) - r(x_s^3) = 2n - r(x_s^1) - r(x_s^2) - r(x_s^3) - r(y_s^2),\\
r(v^2) = n' - r(u^1) - r(x_s^3) = 2n - r(x_s^1) - r(x_s^2) - n + r(x_s^2) - r(x_s^3) =\\
= n - r(x_s^1) - r(x_s^2),\\
r(v^3) = n' - r(u^1) - r(y_s^2) = 2n - r(x_s^1) - r(x_s^2) - n + r(x_s^2) - r(y_s^2) =\\
= n - r(x_s^1) - r(y_s^2),\\
n' := \deg b_3 \circ c \circ b_1 \circ g_s = 2n' - r(u^1) - r(y_s^2) - r(x_s^3) =\\
= 4n - 2r(x_s^1) - 2r(x_s^2) - n + r(x_s^2) - r(y_s^2) - r(x_s^3) =\\
= 3n - 2r(x_s^1) - r(x_s^2) - r(x_s^3) - r(y_s^2).
\end{gathered} \tag{11}$$

Преобразования $b_3 \circ c = c'(z^1, b_1(x_s^2), b_1(x_s^3); v^1, v^2, b_3(u^3))$ и $c'_{s+1} \circ b_3^{-1} = c''_{s+1}(v^1, b_3(u^2), v^3; y_{s+1}^1, c_{s+1}(y_s^2), c_{s+1}(p))$ квадратичны, и $b_3(u^3)$, $v^3 \in \mathbb{P}^2$. Так как точка u^3 — достаточно общая по отношению к точкам u^1, u^2, то можно считать, что точка $b_2(u^3)$ находится в общем положении с точками $v^1, b_3(u^2)$. Следовательно, существует квадратичное преобразование $b_4 = b_4(v^1, b_3(u^2), b_3(u^3); w^1, w^2, w^3)$. Тогда преобразования $b_4 \circ b_3 \circ b_2 \circ b_1^{-1} = b_4 \circ c' = c''(z^1, c^{-1}(u^2), b_1(x_s^3); w^1, b_4(v^2), w^3)$ и $c''_{s+1} \circ b_4^{-1} = c'''_{s+1}(w^{-1}, w^2, b_4(v^3); y_{s+1}^1, c_{s+1}(y_s^2), c'_{s+1}(u^3))$ квадратичны и

$$\begin{gathered}
n''' := \deg c'' \circ c'_s \circ g_{s-1} = 2n'_s - r(z^1) - r(u^2) - r(x_s^3) =\\
= 4n - 2r(x_s^1) - 2r(y_s^2) - n + r(x_s^1) - r(x_s^3) =\\
= 2n - r(x_s^1) - r(y_s^2) - r(x_s^3) < n.
\end{gathered} \tag{12}$$

Таким образом, с помощью соотношений (1) мы заменили слово $c_m \dots c_2 c_1$ на эквивалентное слово $c_m \dots c''_{s+1} c'' c'_s c_{s-1} \dots c_2 c_1$ с параметрами (n'_s, s), так как $\deg c'' \circ c'_s \circ g_{s-1} = n''' < n$. Преобразования $c''(z^1, c^{-1}(u^2), b_1(x_s^3); w^1, b_4(v^2), w^3)$ и ${c'}_s^{-1}(z^1, z^2, b_1(y_s^3); x_{s-1}^1, x_{s-1}^2, c_s^{-1}(p))$ имеют одну общую фундаментальную точку z^1, z^2 бесконечно близка к z^1 порядка 1 и $b_1(x_s^3) \in \mathbb{P}^2$. Рассмотрим квадратичное преобразование $b_s = b_s(z^1, z^2, b_1(x_s^3); y^1, y^2, y^3)$. Оно существует, поскольку $r(z^1) + r(z^2) + r(x_s^3) - n'_s = n - r(y_s^2) + n - r(x_s^1) + r(x_s^3) - 2n + r(x_s^1) + r(y_s^2) = r(x_s^3) > 0$. Здесь $r(x_s^3) \neq 0$ по предположению, $r(y_s^1) + r(y_s^2) + r(x_s^3) > n$, так как $r(y_s^1) + r(y_s^2) \leqslant n$ (сумма кратностей любых двух точек не превосходит степени, см. [1], гл. V). Преобразования $c''' := c'' \circ b_s^{-1}$ и $c''_s := b_s \circ c'_s$ квадратичны и $\deg c''_s \circ g_{s-1} = 2n'_s - r(z^1) - r(z^2) - r(x_s^3) = 2n - r(x_s^1) - r(y_s^2) - r(x_s^2) < n$, так как $r(x_s^1) = r(y_s^1)$. Следовательно, параметры слова $c_m \dots c''_{s+1} c''' c''_s c_{s-1} \dots c_2 c_1$ меньше, чем (n, s).

С л у ч а й 6. Пусть теперь $r(x_s^1) + r(x_s^2) + r(y_s^3) > n$. В обозначениях начала п. 4 рассмотрим квадратичное преобразование $b_3 = b_3(z^1, b_1(x_s^2), b_1(y_s^3); v^1,$

v^2, v^3). Оно существует, так как точка $b_1(x_s^2)$ бесконечно близка к точке z^1 порядка 1, точка $b_1(y_s^3)$ лежит на $\mathbb{P}^2$ и $r(x_s^1) + r(x_s^2) + r(y_s^3) - n > 0$.

Используя (3) и (9), имеем:

$$\begin{gathered} r(v^1) = n'_s - r(x_s^2) - r(y_s^3) = 2n - r(x_s^1) - r(x_s^2) - r(y_s^2) - r(y_s^3), \\ r(v^2) = n'_s - r(z^1) - r(y_s^3) = n - r(x_s^1) - r(y_s^3), \\ r(v^3) = n'_s - r(z^1) - r(x_s^2) = n - r(x_s^1) - r(x_s^2), \\ n''_s := \deg b_3 \circ c'_s \circ g_{s-1} = 2n'_s - r(z^1) - r(x_s^2) - r(y_s^3) = \\ = 3n - 2r(x_s^1) - r(x_s^2) - r(y_s^2) - r(y_s^3). \end{gathered} \tag{13}$$

Как обычно,

$$\begin{gathered} b_3(z^1, b_2(x_s^2), b_1(y_s^3); v^1, v^2, v^3) \circ c'_s(x_{s-1}^1, x_{s-1}^2, c_s^{-1}(p); z^1, z^2, b_1(y_s^3)) = \\ = c''_s(x_{s-1}^1, c_s^{-1}(x_s^2), c_s^{-1}(p); v^1, b_3(z^2), v^3), \\ c(z^1, b_1(x_s^2), z^3; u^1, b_1(y_s^2), u^3) \circ b_3^{-1}(v^1, v^2, v^3; z^1, b_1(x_s^2), b_1(y_s^3)) = \\ = c'(v^1, v^2, b_3(z^3); u^1, b_2(x_s^2), u^3). \end{gathered}$$

Преобразования c' и ${c''}_s^{-1}$ имеют одну общую фундаментальную точку v^1. Рассмотрим квадратичное преобразование $b_4 = b_4(v^1, b_3(z^2), b_3(z^3); w^1, w^2, w^3)$. Оно существует, поскольку точка z^3, следовательно, и $b_3(z^3)$ достаточно произвольная ввиду произвольности выбора точки p. Имеем:

$$\begin{gathered} b_4 \circ c''_s = c''_s(x_{s-1}^1, c_s^{-1}(x_s^2), {c'}_s^{-1}(z^3); w^1, w^2, b_4(v^3)), \\ c' \circ b_4^{-1} = c''(w^1, b_4(v^2), w^3; u^1, b_3(z^2), u^3). \end{gathered}$$

Вычислим $n''_s := \deg c''_s \circ g_{s-1}$, пользуясь формулами (9) и (13):

$$n''_s = 2n''_s - r(v^1) - r(z^2) - r(z^3) = 2n - r(x_s^1) - r(x_s^2) - r(y_s^3) < n.$$

Теперь преобразования c'_{s+1} и ${c''}^{-1}$ имеют одну общую фундаментальную точку u^1. Рассмотрим преобразование $b_5 = b_5(u^1, b_3(z^2), b_2(x_s^3); y^1, y^2, y^3)$. Оно существует, поскольку $b_3(x_s^3) \in \mathbb{P}^2$, а точка $b_3(z^2)$ бесконечно близка к точке u^1 порядка 1 и

$$\begin{aligned} n'' := \deg c'' \circ c''_s \circ g_{s-1} = \deg b_2 \circ g_s = 2n - r(x_s^1) - r(x_s^2) < \\ < 2n - r(x_s^1) - r(x_s^2) + r(x_s^3) = r(u^1) + r(z^2) + r(x_s^3). \end{aligned}$$

Вычислим

$$\begin{aligned} n''' := \deg b_5 \circ c'' \circ c''_s \circ g_{s-1} = 2n'' - r(u^1) - r(z^2) - r(x_s^3) = \\ = 4n - 2r(x_s^1) - 2r(x_s^2) - n + r(x_s^2) - n + r(x_s^1) - r(x_s^3) = \\ = 2n - r(x_s^1) - r(x_s^2) - r(x_s^3) < n. \end{aligned}$$

Опять преобразования $c''_{s+1} = c'_{s+1} \circ b_5^{-1}$ и $c''' = b_5 \circ c''$ квадратичны и слово $c_m \dots c''_{s+1} c''' c''_s c_{s-1} \dots c_2 c_1$ имеет параметры, меньшие, чем (n, s), так как $n''_s < < n$ и $n''' = \deg c''' \circ c'''_s \circ g_{s-1} < n$.

Таким образом, индуктивный шаг уменьшения параметров (n, s) сделан и, следовательно, лексикографическая индукция по (n, s) завершает доказательство теоремы.

Литература

[1] Алгебраические поверхности // Труды МИАН СССР. — 1965. — Т. 75. — 215 с.

[2] Гизатуллин М. Х. Определяющие соотношения для кремоновой группы плоскости // Известия АН СССР. Сер. мат. — 1982. — Т. 46, № 5. — С. 909–970.

Образующие в двумерной группе Кремоны над незамкнутым полем

1. Пусть k — совершенное поле, $\mathbf{P}^2_k$ — проективная плоскость над k и $k(\mathbf{P}^2) = k(x, y)$ — поле рациональных функций от двух переменных над k. Группой Кремоны $\mathrm{Cr}_2(k)$ мы будем называть группу бирациональных автоморфизмов $\mathbf{P}^2_k$ над k: она изоморфна группе $\mathrm{Aut}_k\, k(x, y)$. В случае алгебраически замкнутого поля $k = \overline{k}$ известная теорема Нётера (см. например, [1, 6, 7]) утверждает, что группа Кремоны $\mathrm{Cr}_2(k)$ порождается квадратичными бирациональными и невырожденными линейными преобразованиями плоскости $\mathbf{P}^2_k$. Над незамкнутым полем k ($k = \mathbf{Q}$) некоторая система образующих группы $\mathrm{Cr}_2(k)$ описана в классической работе Кантора [8].

В этой статье мы указываем некоторую вообще говоря другую систему образующих для группы $\mathrm{Cr}_2(k)$. Она возникает естественным образом (почти алгоритмически) при упрощении произвольного бирационального автоморфизма $\chi\colon \mathbf{P}^2_k \dashrightarrow \mathbf{P}^2_k$, исходя из действия $\mathrm{Cr}_2(k)$ на предельной группе циклов $Z^*(\mathbf{P}^2_k)$, формализм которой изложен в книге Ю. И. Манина [5, гл. V]. Мы будем свободно пользоваться этим формализмом вплоть до обозначений. Отметим, что изучение группы Кремоны над незамкнутым полем представляет интерес в связи с задачами описания групп бирациональных автоморфизмов для трехмерных алгебраических многообразий над алгебраически замкнутыми полями (см. [2]).

Пусть $l \in Z^*(\mathbf{P}^2_k) = \mathrm{Pic}\,\mathbf{P}^2_k + \mathbf{Z}^0(\mathbf{P}^2_k)$ — класс прямой на плоскости $\mathbf{P}^2_k$, $\varphi\colon \mathbf{P}^2 \dashrightarrow V$ — некоторое бирациональное отображение над k на гладкую проективную поверхность V.

Пусть $z = \varphi(l) \in Z^*(V) = \mathrm{Pic}\,V + \mathbf{Z}^0(V)$ — образ элемента l, тогда его можно записать в виде

$$z = D - \sum n_i x_i, \quad D \in \mathrm{Pic}\,V, \quad n_i \in \mathbf{Z}, \quad n_i \geqslant 0,$$

где $x_i \in E(V)$ — замкнутые точки пенистого пространства $E(V)$ над k (см. [5, гл. V, § 31). В отличие от [5] через $\mathbf{Z}^0(V)$ мы обозначаем свободную абелеву группу, порожденную замкнутыми точками $E(V)$ (а не геометрическими, как в [5]). Как бирациональный образ класса прямой $l \in \mathbf{P}^2_k$ элемент

Труды МИАН СССР. — 1991. — Т. 200. — С. 157–170.

z удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}(z\cdot z) &:= (D\cdot D)-\sum \deg x_i n_i^2 = 1,\\ -\Omega(z) &:= (-K_V\cdot D)-\sum \deg x_i n_i = 3,\end{aligned} \tag{1}$$

где K_V — канонический класс на V. Дальнейшие нужные нам свойства элемента z мы изложим в следующих леммах.

Лемма 1. (i) *В предыдущих обозначениях пусть V — поверхность дель Пеццо (т. е. $-K_Y$ обилен, см. [5]), $h\in \operatorname{Pic} V$ — такой элемент, что $rh=-K_Y$ ($r=1,2$ или 3 — индекс V). Предположим, что $z=\varphi(l)=ah-\sum n_i x_i \in$ $\in Z^*(V)$, $a\geqslant 1$ в случае $r=1$ и 2 и $a\geqslant 2$ в случае $r=3$. Тогда существует точка $x_j\in V$ с $n_j>a/r$; если $x_{j_1},\dots,x_{j_m}$ — все точки из $E(V)$ с $n_{j_s}>a/r$, $s=1,\dots,m$, (включая бесконечно близкие), то $\sum\limits_{s=1}^{m}\deg x_{j_s}<r^2h^2\leqslant 9$.*

(ii) *Пусть $V=\mathbf{F}_N$ — стандартная линейчатая поверхность с исключительным сечением S_N, $(S_N\cdot S_N)=-N$, и $z=\varphi(l)=af_N+bs_N-\sum n_i x_i$, где f_N — класс слоя и s_N — класс S_N в $\operatorname{Pic}\mathbf{F}_N$. Предположим, что $b\geqslant 1$ и $n_i\leqslant b/2$ $\forall i$, тогда $N=0$ или 1, $b>2a/(+N)$ и существует точка $x_j\in\mathbf{F}_N$ такая, что*

$$n_j>\begin{cases}a/2, & \text{если } N=0,\\ a/3, & \text{если } N=1,\end{cases}$$

и в случае $N=1$ точка x_j не лежит на исключительном сечении S_1.

Если $N=1$ и $x_{j_1},\dots,x_{j_m}$ — все точки из $E(V)$ с $a_{j_s}>a/3$, то $\sum\limits_{s=1}^{m}\deg x_{j_s}\leqslant 8$.

(iii) *Пусть $\pi\colon V\to\mathbf{P}^1$ — расслоение на коники с $\operatorname{Pic} V=\pi^*\operatorname{Pic}\mathbf{P}^1+\mathbf{Z}K^V$ и $z=\varphi(l)=af_\pi-bK_V-\sum n_i x_i$, где f_π — класс слоя морфизма π (т. е. положительная образующая группы $\pi^*\operatorname{Pic}\mathbf{P}^1$) и пусть $b\geqslant 1$. Тогда, если $n_i\leqslant b$ $\forall i$, то $a<0$; если кроме того $(K_V\cdot K_V)=d>0$, то V — поверхность дель Пеццо.*

Замечание 1. Утверждения леммы 1 о существовании точек максимальных кратностей (такие точки мы будем называть *максимальными* для z) — это аналоги известного неравенства Нётера для $\mathbf{P}^2_k$: если $z=\varphi(l)=$ $=al-\sum n_i x_i$ в $Z^*(\mathbf{P}^2_k)$ над алгебраически замкнутым полем $\overline{k}$, $a>1$, $n_1\geqslant$ $\geqslant n_2\geqslant\dots$, то $n_1+n_2+n_3>a$ (см., например, [1, 6, 7]).

Доказательство. Пусть

$$\begin{tikzcd} V_n \arrow[d, "\sigma_n"'] \arrow[ddr, "\psi"] & \\ \vdots \arrow[d, "\sigma_1"'] & \\ V \arrow[r, dashed, "\varphi^{-1}"] & \mathbf{P}^2_N \end{tikzcd} \tag{2}$$

диаграмма разрешения бирационального отображения $\varphi^{-1}\colon V\dashrightarrow\mathbf{P}^2_k$.

(i) Если V — поверхность дель Пеццо и $-K_V = rh$, то $K_{V_n} = -r\sigma^* h + \sum \sigma^{-1} x_i$ — канонический класс поверхности композиция всех раздутий. Тогда

$$rl + aK_{\mathbf{P}^2} = \psi(r\psi^*(l) + aK_{V_n}) = \psi_*\Big(r\Big(a\sigma^* h - \sum n_i \sigma^{-1} x_i\Big) + \\ + a\Big(-r\sigma^* h + \sum \sigma^{-1} x_i\Big)\Big) = \psi_*\Big(\sum (a - rn_i)\sigma^{-1} x_i\Big). \quad (3)$$

Так как $a \geqslant 1$ в случае $r = 1$ и 2 и $a \geqslant 2$ в случае $r = 3$, то левая часть в (3) отрицательна, следовательно, дивизор $\sum (a - rn_i)\sigma^{-1} x_i$ не может быть эффективным. Стало быть, существует максимальная точка x_j с $n_j > a/r$. В силу монотонности поведения кратностей при разрешении, можно сказать, что точка x_j лежит на самой поверхности V (т. е. не является бесконечно близкой к какой-нибудь другой точке, см. [5, гл. V, 3.11]). Это доказывает первое утверждение в (i). Второе утверждение немедленно следует из условий (1) и из того, что для поверхностей дель Пеццо $r^2 h^2 \leqslant 9$.

Действительно, из первого равенства (1) имеем

$$a^2 h^2 - \frac{a^2}{r^2} \sum_{s=1}^{m} \deg x_{j_s} \geqslant 0. \quad (4)$$

Сокращая на a^2, получаем требуемое неравенство.

(ii) Пусть $V = \mathbf{F}_N$ — стандартная линейчатая поверхность, тогда в диаграмме (2) имеем

$$K_{V_n} = \sigma^*(-(N+2)f_N - 2s_N) + \sum \sigma^{-1} x_i,$$

$$2l + bK_{\mathbf{P}^2} = \psi_*(\psi^*(2l) + bK_{V_n}) = \\ = \psi_*(2af_N + 2bs_N - \sum n_i \sigma^{-1} x_i) - (N+2)bf_N - 2bs_N + b\sum \sigma^{-1} x_i) = \\ = \psi_*((2a - (N+2)b)f_N) + \psi_*\Big(\sum (b - 2n_i)\sigma^{-1} x_i\Big) \quad (5)$$

Левая часть в (5) отрицательна, в правой части второе слагаемое не отрицательно по условию, следовательно, $b > 2a/(2+N)$. Далее, так как $z = \varphi(l)$, то линейная система $|z|$ не имеет неподвижных компонент. Стало быть, $0 \leqslant (z \cdot s_N) = a - bN$. Комбинируя это неравенство с предыдущим, получаем $N < 2$, т. е. $N = 0$ или 1.

Пусть теперь $N = 0$. Меняя местами f_0 и s_0 и учитывая, что $b > a$, из предыдущего получаем, что неравенства $n_i \leqslant a/2 \ \forall i$, невозможны, т. е. существует индекс j такой, что $x_j \in F_0$ и $n_j > a/2$.

Пусть $N = 1$ и $\nu\colon \mathbf{F}_1 \to \mathbf{P}^2$ — стягивание исключительного сечения S_1. Тогда

$$\nu(z) = al - (a-b)\nu(S_1) - \sum n_i \nu(x_i).$$

Здесь $a \geqslant b \geqslant 1$ и $a - b < a/3$, по доказанному выше. Стало быть, согласно (i), существует $\nu(x_j) \in \mathbf{P}^2$, $\nu(x_j) \neq \nu(S_1)$, с $n_j > a/3$. В таком случае $x_j \in \mathbf{F}_1$ удовлетворяет требованиям леммы. Последнее утверждение следует из неравенства (4) для $\nu(x_{j_s})$ с $h = l$ и $r = 3$.

(iii) Пусть $\pi\colon V \to \mathbf{P}^1$ — расслоение на коники, как в условии леммы и $z = af_\pi - bK_V - \sum n_i x_i$ с $b \geqslant 1$ и $n_i \leqslant b$ $\forall i$. Имеем $K_{V_n} = \sigma^* K_V + \sum \sigma^{-1} x_i$ и

$$l + bK_{\mathbf{P}^2} = \psi_*(\psi^*(l) + bK_{V_n}) = \psi_*\Big(a\sigma^* f_\pi - b\sigma^* K_V - \sum n_i \sigma^{-1} x_i + \\ + b\sigma^* K_V + b\sum \sigma^{-1} x_i\Big) = \psi_*\Big(a\sigma^* f_\pi + \sum (b - n_i)\sigma^{-1} x_i\Big). \quad (6)$$

При $b \geqslant 1$ левая часть в (6) отрицательна, а второе слагаемое в правой части неотрицательно по условию. Следовательно, $a < 0$. Для доказательства обильности $-K_V$ в случае $K_V^2 = d > 0$ достаточно по численному критерию обильности показать, что $(-K_V \cdot X) > 0$ для любой кривой $X \subset V$. Если $(-K_V \cdot X) \leqslant 0$, то $(af_\pi - bK_V \cdot X) = a(f_\pi \cdot X) - b(K_V \cdot X) < 0$, так как $a < 0$. Но это невозможно, поскольку линейная система $|af_\pi - bK_V| \supset |af_\pi - bK_V - \sum n_i x_i|$ не имеет неподвижных компонент. Лемма доказана.

Лемма 2. *В условиях леммы* 1, (i), (ii) *максимальные точки* $x_1, \ldots, x_m$ *находятся в общем положении в том смысле, что раздутие* $\sigma\colon V' \to V$ *любого количества этих точек снова приводит к поверхности дель Пеццо* V'.

Доказательство. Утверждение леммы инвариантно относительно расширения поля k. Поэтому мы можем считать, что $k = \overline{k}$ алгебраически замкнуто, $V = \overline{V}$ и x_{j_s} — геометрические точки $E(\overline{V})$. Рассмотрим случай, когда V — поверхность дель Пеццо, отличная от $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Пусть $\delta\colon V \to \mathbf{P}^2$ — представление V в виде раздутия $\mathbf{P}^2$ в $9 - (K_V \cdot K_V)$ точек $x_{m+1}, \ldots, x_n$, тогда $\delta(z) = 3al - ax_{m+1} - \ldots - ax_n - \sum n_i \delta(x_i)$ — если $r = 1$ и $\delta(z) = z = al - \sum n_i x_i$, если $r = 3$. Надо проверить, что точки $x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n$, где $n \leqslant 8$ по лемме 1, (i), находятся в общем положении, т. е. никакие три из них не лежат на одной прямой, никакие шесть — на одной конике и все восемь — на кубической кривой, одна из восьми точек на которой двойная (см. [5, гл. V; 3, § 3]).

Отметим, что точки $x_{m+1}, \ldots, x_n$ находятся в общем положении, так как их раздутие приводит к поверхности дель Пеццо V. Предположим, например, что некоторые шесть точек $x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}$ из $x_1, \ldots, x_n$, среди которых имеется хотя бы одна точка из $x_1, \ldots, x_m$, лежат на одной конике.

Тогда $2l - x_{j_1} - \ldots - x_{j_6} \in Z_+^*(\mathbf{P}^2)$ в обозначениях [5], гл. V, т. е. представлен эффективным циклом на некоторой модели (на раздутии $\mathbf{P}^2$ в точках $x_{j_1}, \ldots, x_{j_6}$). Так как $\delta(z) \in Z^{+*}(\mathbf{P}^2)$ (элемент $\delta(z)$ представлен подвижной линейной системой без неподвижных компонент), то $0 \leqslant (2l - x_{j_1} - \ldots - x_{j_6} \cdot \delta(z)) \leqslant 6a - n_{j_1} - \ldots - n_{j_6}$ в случае $r = 1$, и $0 \leqslant (2l - x_{j_1} - \ldots - x_{j_6} \cdot \delta(z)) \leqslant 2a - n_{j_1} - \ldots - n_{j_6}$ в случае $r = 3$. Поскольку среди $x_{j_1}, \ldots, x_{j_6}$ имеется хотя бы одна точка из множества $\{x_1, \ldots, x_m\}$, то по лемме 1, (i) имеем

$$6a - n_{j_1} - \ldots - n_{j_6} < 0 \ \text{ в случае } \ r = 1,$$
$$2a - n_{j_1} - \ldots - n_{j_6} < 0 \ \text{ в случае } \ r = 3.$$

Полученные противоречия показывают, что точки $x_{j_1}, \ldots, x_{j_6}$ не могут лежать на одной конике. Аналогично разбираются все остальные случаи, включая и случаи бесконечно близких точек. Подобным же образом

рассматривается случай $V = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ и случай леммы 1, (ii). Доказательство леммы 2 закончено.

2. Инволюции Бертини и Гейзера. В этой статье мы укажем некоторый набор конкретных бирациональных автоморфизмов над незамкнутым совершенным полем k, который вместе с линейными проективными преобразованиями из группы $\mathrm{PGL}_3(k)$ порождают всю группу Кремоны $\mathrm{Cr}_2(k)$. Схема рассуждений обычная: если $\chi\colon \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ — произвольное бирациональное преобразование и $z = \chi(l) = al - \sum n_i x_i$ — образ класса прямых l в группе $Z^*(\mathbf{P}^2_k)$, то при $a = 1$ имеем $n_i = 0\ \ \forall i$, и тогда χ — линейное проективное преобразование. Если же $a = 1$, то по лемме 1, (i), существуют максимальные точки и число геометрических максимальных точек не больше 8, тогда с каждой замкнутой максимальной точкой (над k) мы находим связанное с ней бирациональное преобразование, применение которого к z уменьшает коэффициент a при l. Итерируя процесс, мы придем к случаю $a = 1$, т. е. к линейному автоморфизму. Таким образом, мы представим χ в виде композиции бирациональных преобразований из некоторого стандартного набора: этот набор будет системой образующих группы $\mathrm{Cr}_2(k)$. Бирациональные преобразования связанные с максимальными точками, мы будем строить в виде композиций подходящих раздутий и стягиваний, указывая их представления в группе $Z^*(\mathbf{P}^2_k)$ и интерпретируя в виде преобразований $\mathbf{P}^2$ с помощью линейных систем с базисными условиями.

Начнем с описания классических бирациональных инволюций Бертини и Гейзера. На плоскости $\mathbf{P}^2_k$ над алгебраически замкнутым полем $\overline{k}$ выберем любые 8 точек $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_8$ в общем положении (т. е. никакие три из них не лежат на одной прямой, никакие шесть — на одной конике и все восемь — на кубике, одна из восьми точек на которой двойная (см. [5], гл. V, 3, § 3]). Через $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_8$ проходит пучок эллиптических (кубических) кривых. Пусть $\overline{x}_0$ — девятая базисная точка этого пучка. Заметим, что в виду общности положения точек $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_8$ каждая кривая пучка неприводима и не имеет особенности в точках $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_8$.

Возьмем точку $\overline{x}_0$ в качестве нуля группового закона на общем слое рассматриваемого пучка кубических кривых. Тогда инволюция взятия обратного в смысле группового закона продолжается до бирациональной инволюции $\beta = \beta(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_8)$ плоскости $\mathbf{P}^2_k$ с точками неопределенности $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_8$ (см. [7]). Пусть $\sigma\colon V_1 \to \mathbf{P}^2$ — раздутие точек $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_8$. Тогда V_1 — поверхность дель Пеццо степени $(K_{V_1} \cdot K_{V_1}) = 1$, на которой инволюция β (точнее ее образ на V_1) действует бирегулярно и сохраняет, следовательно, канонический класс $K_{V_1} = -3\sigma^* l + \sum\limits_{i=1}^{8} \sigma^{-1}\overline{x}_i$.

Бирациональное преобразование $\beta\colon \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ и его образ на V_1, который мы также будем обозначать через β, называется инволюцией Бертини, связанной с точками $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_8$.

Можно дать другое, более инвариантное описание инволюции Бертини. На поверхности V_1 линейная система $|-2K_{V_1}|$ задает морфизм $\psi\colon V_1 \to Q^* \subset \mathbf{P}^3$ степени 2 на квадратичный конус Q^* в $\mathbf{P}^3$. Инволюция β — это автоморфизм

двойного накрытия $\psi\colon V_1 \to Q^*$, переставляющий точки в слоях. Всякую исключительную кривую $X \subset V_1$ морфизм ψ отображает бирационально на конику в Q^*. Следовательно, $\beta(X) = -2K_{V_1} - X$. Отсюда мы получаем формулы действия инволюции Бертини β на $Z^*(\mathbf{P}^2_k)$:

$$\begin{gathered}\beta(l) = 17l - 6\overline{x}_1 - \ldots - 6\overline{x}_8,\\ \beta(\overline{x}_i) = 6l - 2\overline{x}_1 - \ldots - 2\overline{x}_{i-1} - 3\overline{x}_i - 2\overline{x}_{i+1} - \ldots - 2\overline{x}_8,\\ \beta(\overline{x}_0) = \overline{x}_0, \quad i = 1, \ldots, 8.\end{gathered} \tag{7}$$

Это означает, что на $\mathbf{P}^2_{\overline{k}}$ инволюция β задается линейной системой кривых 17-го порядка, проходящих с кратностью 6 через точки $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_8$. Отметим, что над незамкнутым полем k инволюции Бертини также имеет смысл и определена над k, если только нульмерный цикл $\sum\limits_{i=1}^{8} \overline{x}_i$ определен над k. Более того, если поверхность дель Пеццо V_1 определена над k, то ее инволюция β также определена над k.

Инволюция Гейзера определяется аналогичным образом и связана с заданием 7 точек $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_7$ в общем положении на $\mathbf{P}^2_{\overline{k}}$. Линейная система кубических кривых, приходящих через все эти точки, задает рациональное отображение степени 2 $\eta\colon \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$, которое не определено только в точках $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_7$. Пусть $\sigma\colon V_2 \to \mathbf{P}^2$ — раздутие точек $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_7$, тогда V_2 — поверхность дель Пеццо степени $(K_{V_2} \cdot K_{V_2}) = 2$. Линейная система $|-K_{V_2}|$ задает морфизм $\varphi\colon V_2 \to \mathbf{P}^2$ степени 2 с ветвлением в неособой квартике на $\mathbf{P}^2$. Автоморфизм этого двойного накрытия, переставляющий точки в слоях φ, и есть инволюция Гейзера $\gamma = \gamma(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_7)$, которая на $\mathbf{P}^2$ действует как бирациональное преобразование порядка 2. На $Z^*(\mathbf{P}^2_{\overline{k}})$ инволюция γ действует по формулам

$$\begin{gathered}\gamma(l) = 8l - 3\overline{x}_1 - \ldots - 3\overline{x}_7,\\ \gamma(\overline{x}_i) = 3l - \overline{x}_1 - \ldots - \overline{x}_{i-1} - 2\overline{x}_i - \overline{x}_{i+1} - \ldots - \overline{x}_8,\\ i = 1, \ldots, 7.\end{gathered} \tag{8}$$

Таким образом, инволюция Гейзера γ на $\mathbf{P}^2_{\overline{k}}$ задается линейной системой кривых 8-го порядка, трижды проходящих через точки $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_7$ (см. [7]).

Если V_2 — поверхность дель Пеццо степени 2 над k, то бирегулярная инволюция двойного накрытия $\varphi_{-K}\colon V_2 \to \mathbf{P}^2$ определена над k и мы будем называть ее также инволюцией Гейзера и обозначать той же буквой γ. Как и в случае инволюции Бертини, если цикл $\sum\limits_{i=1}^{7} \overline{x}_i$ определен над k, то и γ определена над k.

3. Бирациональные преобразования $\mathbf{P}^2$, связанные с точками степени один. Пусть $\chi\colon \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ — бирациональное преобразование, $z = \chi(l) = al - \sum n_i x_i$ и $a \leqslant 2$. По лемме 1, (i), существует замкнутая точка, скажем, x_1, кратность которой $n_1 > a/3$ и $\deg x_1 \leqslant 8$. Для каждой такой точки мы укажем одно или несколько бирациональных преобразований $\mathbf{P}^2$, применение

которых к z понижает «степень», т. е. коэффициент a при l. Рассмотрим по отдельности каждое из значений $\deg x_1$.

Случай $\deg x_1 = 1$. Пусть $\sigma_1\colon \mathbf{F}_1 \to \mathbf{P}^2$ — раздутие x_1, тогда $z_1 = \sigma_1^{-1}(z) = af_1 + bs_1 - \sum\limits_{i\geqslant 2} n_i x_i$ в $Z^*(\mathbf{F}_1)$, где f_1 и s_1 — классы слоя и исключительного сечения линейчатой поверхности $\mathbf{F}_1$, $b = a - n_1 > 0$ по (1). Так как $n_1 > a/3$, то $b < 2/3a$ и по лемме 1, (ii) существует точка, скажем, $x_2 \in \mathbf{F}_1$ кратности $n_2 > b/2$. На геометрическом слое $\overline{\mathbf{F}}_{\bar t}$, $\bar t \in \mathbf{P}^1_{\bar k}$, $\deg \bar t = 1$ не может лежать более одной геометрической точки с центром x_2, иначе кривая $\overline{\mathbf{F}}_{\bar t}$ была бы неподвижной компонентой в линейной системе $|z_1|$, что невозможно (поскольку $|z_1|$ является собственным бирациональным образом линейной системы $|l|$ прямых на $\mathbf{P}^2$). Следовательно, определено элементарное преобразование $\varepsilon_{x_2}\colon \mathbf{F}_1 \to \mathbf{F}_m$ для некоторого целого $m \geqslant 0$ с центром в точке x_2 (т. е. раздутие x_2 с последующим стягиванием собственного прообраза слоя линейчатой поверхности $\mathbf{F}_1$, содержащего точку x_2, $\deg x_2 = d \geqslant 1$).

Последовательность элементарных преобразований с централи в точках кратности $> b/2$, которую мы обозначим через $\varepsilon_1\colon \mathbf{F}_1 \to \mathbf{F}_N$, отображает бирационально $\mathbf{F}_1$ на $\mathbf{F}_N$ для некоторого целого $N \geqslant 1$, так что для

$$\varepsilon_1(z_1) = \varepsilon_1\sigma_1^{-1}\chi(l) = a_N f_N + b_N s_N - \sum_{i\geqslant 2} n_{N_i} x_{N_i},$$

в $Z^*(\mathbf{F}_N)$ будут выполняться условия:

$b_N = b$ и $n_{N_i} \leqslant b/2$ $\forall\, i \geqslant 2$. Тогда по лемме 1, (ii) имеются следующие две возможности:

а) $N = 1$ и $a_1 < 3b/2$,

б) $N = 0$ и $a_0 < b$.

В случае а) образ элемента $\varepsilon_1(z_1)$ в $Z^*(\mathbf{P}^2)$ при стягивании $\sigma_1\colon \mathbf{F}_1 \to \mathbf{P}^2$ будет иметь вид

$$\sigma_1\varepsilon_1\sigma_1^{-1}(z) = \sigma_1\varepsilon_1\sigma_1^{-1}\chi(l) = a_1 l - (a_1 - b)x_1 - \ldots$$

Имеем $a_1 < 3b/2 = 3(a - n_1)/2 < a$, т. е. бирациональное преобразование

$$\alpha_1 = \sigma_1\varepsilon_1\sigma_1^{-1}\colon \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$$

уменьшает коэффициент a при l бирационального автоморфизма χ. Преобразования типа α_1 в классической литературе (см., например, [7]) называются преобразованиями Жонкьера.

В случае б) $\mathbf{F}_0 \simeq \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ и на $\mathbf{F}_0$ имеется бирегулярная инволюция $\tau\colon \mathbf{F}_0 \to \mathbf{F}_0$, представляющая множители $\mathbf{P}^1$. Применяя τ к $\varepsilon_1\sigma_1^{-1}(z)$, получаем

$$\tau\varepsilon_1\sigma_1^{-1}(z) = bf_0 + as_0 - \sum_{i\geqslant 2} n_i\tau(x_i).$$

По лемме 1, (ii) существует точка, скажем, $\tau(x_2)$ с $n_2 > a_0/2$. С помощью элементарных преобразований, композицию которых обозначим через ε_2, мы можем добиться того, что все кратности будут не больше $a_0/2$, причем по лемме 1, (ii) мы придем к поверхности $\mathbf{F}_1$ или $\mathbf{F}_0$. Если мы оказались на $\mathbf{F}_1$, то спускаясь на $\mathbf{P}^2$ посредством σ_1, получаем

$$\sigma_1\varepsilon_2\tau\varepsilon_1\sigma_1^{-1}(z) = a_2 l - (a_2 - a_0)x_1 - \ldots,$$

где $a_2 < 3a_0/2 < 3b/2 < a$. Если же мы оказались на $\mathbf{F}_0$, то опять применяем τ и продолжаем процесс «раскручивания χ» до тех пор, пока не окажемся, в конце концов, на $\mathbf{F}_1$. В результате получим

$$\sigma_1\varepsilon_n\tau\sigma_{n-1}\tau\ldots\tau\varepsilon_1\sigma_1^{-1}(z) = a_n l - \ldots,$$

где $a_n < a$, т. е. бирациональное преобразование

$$\alpha_n = \sigma_1\varepsilon_n\tau\varepsilon_{n-1}\ldots\tau\varepsilon_1\sigma_1^{-1} \tag{9}$$

уменьшает коэффициент a при l.

Если выбрать точку $x_0 \in \mathbf{F}_0$, $\deg x_0 = 1$, $\tau(x_0) = x_0$ и обозначить через $\varepsilon_0\colon \mathbf{F}_0 \to \mathbf{F}_1$ — элементарное преобразование с центром x_0, то преобразование α_n, можно переписать в виде

$$\alpha_n = \sigma_1\varepsilon_n\varepsilon_0^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_1\varepsilon_0\tau\ldots\varepsilon_2\varepsilon_0^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_1\varepsilon_0\tau\varepsilon_0^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_1\varepsilon_0\varepsilon_1\sigma_1^{-1}. \tag{9'}$$

Это означает, что α_n представляется в виде композиции преобразований Жонкьера $\sigma_1\varepsilon_0\varepsilon_1\sigma_1^{-1}$, $\sigma_1\varepsilon_0\varepsilon_i\varepsilon_0^{-1}\sigma_1^{-1}$, $2 \leqslant i \leqslant n$, и преобразования $\sigma_1\varepsilon_0\tau\varepsilon_0^{-1}\sigma_1^{-1}$. Последнее, как легко проверить, является линейным проективным преобразованием на $\mathbf{P}_k^2$. Таким образом, доказано следующее

Предложение 1. *Если $z = \chi(l) = al - n_1x_1 - \ldots$, $a \geqslant 2$, обладает максимальной точкой x_1 степени 1, что коэффициент a можно уменьшить, применяя преобразования Жонкьера типа* (9) (*или* 9′) *и проективные преобразования $\mathbf{P}_k^2$.*

4. Бирациональные автоморфизмы $\mathbf{P}_k^2$, связанные с точками степени два.

Случай $\deg x_1 = 2$. Обозначим через $\delta\colon \mathbf{P}^2 \to Q$ — бирациональное преобразование, состоящее из раздутия точки x_1 и стягивания собственного прообраза прямой на $\mathbf{P}^2$ проходящей через геометрические точки $x_1 \otimes \overline{k} = (\overline{x}_{11}, \overline{x}_{12}) \in \mathbf{P}_{\overline{k}}^2$. Эта прямая определена над k, поэтому δ тоже определено над k. Образом δ является гладкая квадрика $Q \in \mathbf{P}_k^3$ с $\operatorname{Pic} Q = \mathbf{Z}h$, где h — класс пучка $\mathcal{O}_Q(1)$. Имеем $-K_Q = 2h$, $h^2 = 2$ и

$$\delta(l) = h - x_0, \quad \delta(x_1) = h - 2x_0,$$

где x_0 — образ стягиваемой прямой $l - x_1$. Тогда

$$\delta(z) = \delta\chi(l) = (a - n_1)h - (a - 2n_1)x_0 - \sum_{i\geqslant 2} n_i x_i.$$

Так как $(a-2n_1) < (a-n_1)/2$, поскольку $n_1 > a/3$ и $a-n_1 \geqslant 1$, то по лемме 1, (i) существует максимальная точка, скажем, x_2 с $n_2 > (a-n_1)/2$, и тогда $\deg x_2 \leqslant 7$. Предстоит рассмотреть все случаи в зависимости от значений $\deg x_2 = 1, 2, \ldots, 7$. Можно считать, что $n_1 \geqslant n_2$.

Случай $\deg x_1 = 2$, $\deg x_2 = 7$. По лемме 2 геометрические точки $\overline{x}_{21}, \ldots, \overline{x}_{27}$ находятся в общем положении на $\widetilde{Q} = Q \otimes \overline{k}$. Тогда раздутие $\sigma_2\colon V_1 \to Q$ точки x_2 приводит к поверхности дель Пеццо V_1 степени 1. Применяя инволюцию Бертини β на V_1 и пользуясь формулами

$$\beta(K_{V_1}) = K_{V_1}, \quad \beta(X_2) = -14K_{V_1} - X_2, \quad \text{где} \quad X_2 = \sigma_2^{-1}(x_2)$$

находим

$$\beta\sigma_1^{-1}(h) = 15\sigma_2^{-1}(h) - 8X_2, \quad \beta\sigma_2^{-1}(x_2) = 28\sigma_2^{-1}(h) - 15X_2.$$

Отсюда получаем

$$\sigma_2\beta\sigma_2^{-1}\delta(z) = (15a - 15n_1 - 28n_2)h - (a - 2n_1)x_0 - (8a - 8n_1 - 15n_2)x_2 - \dots$$

Положим теперь

$$15a - 15n_1 - 28n_2 = a' - n_1', \quad a - 2n_1 = a' - 2n_1'.$$

Отсюда $n' = 14a - 13n_1 - 28n_2 = 14(a - n_1) - 28n_2 + n_1 < n_1$, так как $n_2 > > (a - n_1)/2$.

Спускаясь на $\mathbf{P}_k^2$ посредством бирационального отображения $\delta^{-1}\colon Q \to \mathbf{P}_k^2$, получаем

$$\delta^{-1}\sigma_2\beta\sigma_2^{-1}\delta(z) = a'l - \dots,$$

где $a' = 28(a - n_1) - 56n_2 + a < a$, так как $a - n_1 < 2n_2$.

Тем самым мы получили

П р е д л о ж е н и е 2. *В случае* $\deg x_1 = 2$ *и* $\deg x_2 = 7$ *преобразование* $\gamma_{2,7} = \delta^{-1}\sigma_2\beta\sigma_2^{-1}\delta$ *уменьшает коэффициент* a. *На* $\mathbf{P}_k^2$ *это преобразование имеет вид*

$$\begin{aligned} l &\to 29l - 14x_1 - 8x_2, \\ x_1 &\to 28l - 13x_1 - 8x_2, \\ x_2 &\to 56l - 28x_1 - 15x_2. \end{aligned} \tag{10}$$

С л у ч а й $\deg x_1 = 2$, $\deg x_2 = 6$. Как и в предыдущем случае геометрические точки $\overline{x}_{21}, \dots, \overline{x}_{26}$ на $\overline{Q}$ находятся в общем положении по лемме 2. Пусть $\sigma_2\colon V \to Q$ — раздутие x_2, тогда V_2 — поверхность дель Пеццо степени 2 и можно использовать инволюцию Гейзера γ на V_2. Имеем

$$\begin{aligned} \gamma\sigma_2^{-1}(h) &= 7\sigma_2^{-1}(h) - 4X_2, \\ \gamma\sigma_2^{-1}(x_2) &= 12\sigma_2^{-1}(h) - 7x_2, \end{aligned}$$

где $X_2 = \sigma_2^{-1}(x_2)$. Отсюда

$$\sigma_2\gamma\sigma_2^{-1}\delta(z) = (7a - 7n_1 - 12n_2)h - (a - 2n_1)x_0 - (4a - 4n_1 - 7n_2)x_2 - \dots$$

и, полагая как и раньше $7a - 7n_1 - 12n_2 = a' - n_1'$, $a - 2n_1 = a' - 2n_1'$, имеем

$$\begin{gathered} n_1' = 6a - 5n_1 - 12n_2 = 6(a - n_1) - 12n_2 + n_1 < n_1 \quad \text{и} \\ a' = 12(a - n_1) - 24n_2 + a < a. \end{gathered}$$

П р е д л о ж е н и е 3. *В случае* $\deg x_1 = 2$, $\deg x_2 = 6$ *преобразование* $\gamma_{2,6} = \delta^{-1}\sigma_2\gamma\sigma_2^{-1}\delta$ *уменьшает коэффициент* a. *На* $\mathbf{P}_k^2$ *это преобразование задается следующей линейной системой*:

$$\begin{aligned} l &\to 13l - 6x_1 - 4x_2, \\ x_1 &\to 12l - 5x_1 - 4x_2, \\ x_2 &\to 24l - 12x_1 - 7x_2. \end{aligned} \tag{11}$$

Случай $\deg x_1 = 2$, $\deg x_2 = 5$. На квадрике $\overline{Q} = Q \otimes \overline{k}$ существует определенная над k пара сопряженных кривых в классе $3h - 2x_2$. Пусть $\sigma_2 \colon V_3 \to Q$ — раздутие x_2. Тогда V_3 — гладкая кубическая поверхность (т. е. поверхность дель Пеццо степени 3). Пусть $X_2 = \sigma_2^{-1}(x_2)$ и $X_2' = 3\sigma_2^{-1}(h) - 2X_2$ — собственный прообраз пары сопряженных кривых из класса $3h - 2x_2$. Тогда X_2' — пара сопряженных непересекающихся прямых на кубической поверхности V_3. Имеем $\sigma_2^{-1}(h) = -2K_{V_3} - X_2'$, $X_2 = -3K_{V_3} - 2X_2'$ и образ z на V_3 представляется в виде

$$\begin{aligned}\sigma_2^{-1}\delta(z) &= (a - n_1)\sigma_2^{-1}(h) - n_2X_2 - (a - 2n_1)x_0 - \ldots = \\ &= (a - n_1)(-2K_{V_3} - X_2') - n_2(-3K_{V_3} - 2X_2') - (a - 2n_1)x_0 - \ldots = \\ &= -(2a - 2n_1 - 3n_2)K_{V_3} - (a - n_1 - 2n_2)X_2' - (a - 2n_1)x_0 - \ldots\end{aligned}$$

Пусть $\tau_2 \colon V_3 \to V_5$ — стягивание X_2' в точку x_2' на поверхность дель Пеццо V_5 степени 5. В группе $Z^*(V_5)$ образ элемента z запишется в виде

$$\tau_2\sigma_2^{-1}\delta(z) = -(2a - 2n_1 - 3n_2)K_{V_3} - (3a - 3n_1 - 5n_2)x_2' - (a - 2n_1)x_0 - \ldots$$

Так как $n_2 > (a - n_1)/2$, то $(3a - 3n_1 - 5n_2) < (2a - 2n_1 - 3n_2)$. Далее, если $n_2 > a/3$, то элемент z на $\mathbf{P}^2$ обладает максимальной точкой степени 5 и этот случай будет рассмотрен ниже (случай $\deg x_1 = 5$). Если же $n_2 \leqslant a/3$, то $(a - 2n_1) \leqslant 2a - 2n_1 - 3n_2$. Тогда по лемме 1, (i), должна существовать максимальная точка, скажем, x_3, лежащая на V_5, с $n_3 > 2a - 2n_1 - 3n_2$ и $\deg x_3 \leqslant 4$. Опять предстоит рассмотреть несколько случаев, причем можно считать, что $n_1 \geqslant n_2 \geqslant n_3$.

Случай $\deg x_1 = 2$, $\deg x_2 = 5$, $\deg x_3 = 4$. Геометрические точки $\overline{x}_{31}, \overline{x}_{32}, \overline{x}_{33}, \overline{x}_{34}$ находятся на $\overline{V}_5$ в общем положении по лемме 2. Пусть $\sigma_3 \colon V_1 \to V_5$ раздутие точки x_3. Тогда V_1 — поверхность дель Пеццо степени 1 и можно воспользоваться инволюцией Бертини β. Имеем:

на V_1: $X_3 = \sigma^{-1}(x_3)$, $\beta(X_3) = -8K_{V_1} - X_3$;

на V_5: $\sigma_3\beta\sigma_3^{-1}(x_3) = -8K_{V_5} - 9x_3$; $\sigma_3\beta\sigma_3^{-1}(K_{V_5}) = 9K_{V_5} + 10x_3$;

$$\begin{aligned}\sigma_3\beta\sigma_3^{-1}\pi_2\sigma_2^{-1}\delta(z) &= -(18a - 18n_1 - 27n_2 - 8n_3)K_{V_5} - (a - 2n_1)x_0 - \\ &\quad -(3a - 3n_1 - 5n_2)x_2' = (20a - 20n_1 - 30n_2 - 9n_3)x_3 - \ldots;\end{aligned}$$

на Q: $$\begin{aligned}&\sigma_2\tau_2^{-1}\sigma_3\beta\sigma_3^{-1}\tau_2\sigma_2^{-1}\delta(z) - (81a - 81n_1 - 120n_2 - 40n_3)h - (a - 2n_1)x_0 - \\ &\quad -(48a - 48n_1 - 71n_2 - 24n_3)x_2 - (20a - 20n_1 - 30n_2 - 9n_3)x_3 - \ldots;\end{aligned}$$

на $\mathbf{P}_k^2$: $$\begin{aligned}&\delta^{-1}\sigma_2\tau_2^{-1}\sigma_3\beta\sigma_3^{-1}\tau_2\sigma_2^{-1}\delta(z) = \\ &\quad = (161a - 160n_1 - 240n_2 - 80n_3)l - \ldots = a'l - \ldots\end{aligned}$$

Здесь $a' = (161a - 161n_1 - 240n_2 - 80n_3) < 160a - 160n_1 - 240n_2 - 80(2a - 2n_1 - 3n_2) = a$.

Предложение 4. *В случае* $\deg x_1 = 2$, $\deg x_2 = 5$ *с* $n_2 \leqslant a/3$ *и* $\deg x_3 = 4$ *коэффициент* a *при* l *уменьшает преобразование* $\gamma_{2,5,4} = \delta^{-1}\sigma_2\tau_2^{-1}\sigma_3\beta\sigma_3^{-1}\tau_2\sigma_2^{-1}\delta$; *на* $\mathbf{P}_k^2$ *оно имеет вид*

$$l \to 161l - 80x_1 - 48x_2 - 20x_3. \tag{12}$$

С л у ч а й $\deg x_1 = 2$, $\deg x_2 = 5$, $\deg x_3 = 3$. Здесь алгоритм тот же, что и в предыдущем случае, только вместо инволюции Бертини надо воспользоваться инволюцией Гейзера на V_2, где V_2 — поверхность дель Пеццо степени 2, полученная в результате раздутия $\sigma_3\colon V_2 \to V_5$ точки $x_3 \in V_5$. Имеем:

на V_2: $X_3 = \sigma^{-1}(x_3)$, $\gamma(X_3) = -3K_{V_2} - X_3$;

на V_5: $\sigma_3\gamma\sigma_3^{-1}(x_3) = -3K_{V_5} - 4x_3$; $\sigma_3\gamma\sigma_3^{-1}(K_{V_5}) = 4K_{V_5} + 5x_3$;

$$\sigma_3\gamma\sigma_3^{-1}\tau_2\sigma_2^{-1}\delta(z) = -(8a - 8n_1 - 12n_2 - 3n_3)K_{V_5} - (a - 2n_1)x_0 - \\ -(3a - 3n_1 - 5n_2)x_2' - (10a - 10n_1 - 15n_2 - 4n_3)x_3 - \ldots;$$

на $\mathbf{P}_k^2$: $\delta^{-1}\sigma_2\tau_2^{-1}\sigma_3\gamma\sigma_3^{-1}\tau_2\sigma_2^{-1}\delta(z) =$

$$= (61a - 60n_1 - 90n_2 - 30n_3)l - \ldots = a'l - \ldots$$

Здесь $a' = 61a - 60n_1 - 90n_2 - 30n_3 < 61a - 60n_1 - 90n_2 - 30(2a - 2n_1 - 3n_2) = a$.

П р е д л о ж е н и е 5. *В случае* $\deg x_1 = 2$, $\deg x_2 = 5$ *и* $\deg x_3 = 3$ *коэффициент* a *уменьшает преобразование* $\gamma_{2,5,3} = \delta^{-1}\sigma_2\tau_2^{-1}\sigma_3\gamma\sigma_3^{-1}\tau_2\sigma_2^{-1}\delta$. *На* $\mathbf{P}_k^2$ *оно имеет вид*

$$l \to 61l - 30x_1 - 18x_2 - 10x_3. \tag{13}$$

С л у ч а й $\deg x_1 = 2$, $\deg x_2 = 5$, $\deg x_3 = 2$. Пусть $\sigma_3\colon V_3 \to V_5$ — раздутие точки x_3. Тогда V_3 — поверхность дель Пеццо степени 3, т. е. кубическая поверхность в $\mathbf{P}_k^3$ с парой сопряженных непересекающихся прямых $(\overline{X}_{31}, \overline{X}_{32}) = X_3 \otimes \overline{k}$, где $X_3 = \sigma_3^{-1}(x_3)$.

На V_3 в классе $-3K_{V_3} - 2X_3$ существует пятерка сопряженных попарно непересекающихся прямых. Вместе они составляют неприводимую над k кривую X_2'. Пусть $\sigma_2'\colon V_3 \to Q'$ — стягивание X_3' в точку x_3' на квадрике Q'. Тогда мы имеем:

на Q': $\sigma_2'\sigma_3^{-1}\tau_2\sigma_2^{-1}\delta(z) = (10a - 10n_1 - 15n_2 - 3n_3)h' - (a - 2n_1)x_0' -$

$$-(3a - 3n_1 - 5n_2)x_2' - (6a - 6n_1 - 9n_2 - 2n_3)x_3' - \ldots;$$

на $\mathbf{P}_k^2$: $\delta'^{-1}\sigma_2'\sigma_3^{-1}\tau_2\sigma_2^{-1}\delta(z) = (19a - 18n_1 - 30n_2 - 6n_3)l - \ldots = a'l - \ldots$

Здесь $a' = 19a - 18n_1 - 30n_2 - 6n_3 < 19a - 18n_1 - 30n_2 - 6(2a - 2n_1 - 2n_2) = = 7a - 6n_1 - 12n_2 < 7a - 6n_1 - 6(a - n_1) = a$.

П р е д л о ж е н и е 6. *В случае* $\deg x_1 = 2$, $\deg x_2 = 5$ *и* $\deg x_3 = 2$ *коэффициент* a *уменьшается преобразование* $\gamma_{2,5,2} = \delta'^{-1}\sigma_2'\sigma_3^{-1}\tau_2\sigma_2^{-1}\delta$, *задаваемым линейной системой*

$$l \to 19l - 9x_1 - 6x_2 - 3x_3. \tag{14}$$

С л у ч а й $\deg x_1 = 2$, $\deg x_2 = 5$, $\deg x_3 = 1$. Здесь можно воспользоваться преобразованием из предложения 3 (т. е. случая $\deg x_1 = 2$, $\deg x_2 = 6$). Действительно, легко проверить, что точки x_2 и x_3 находятся в общем положении на Q и $\deg x_2 + \deg x_3 = 6$. Выполняя преобразование, получаем: $a - 2n_1 = a' - 2n_1'$, $7a - 7n_1 - 10n_2 - 2n_3 = a' - n_1'$, отсюда $n' = 6a - 5n_1 - 10n_2 - 2n_3$ и $a' = 13a - 12n_1 - 20n_2 - 4n_3 < 13a - 12n_1 - 20n_2 - 4(2a - 2n_1 - 3n_2) = = 4(a - n_1) - 8n_2 + a < a$. На $\mathbf{P}^2$ преобразование задается линейной системой

$$l \to 13l - 6x_1 - 4x_2 = 4x_3. \tag{11'}$$

С л у ч а й $\deg x_1 = 2$, $\deg x_2 = 4$. В этом случае, как и в случае $\deg x_1 = 6$ ниже, коэффициент, a уменьшает преобразование $\mu\colon \mathbf{P}_k^2 \to \mathbf{P}_k^2$, задаваемое

линейной системой кривых 5-го порядка, дважды проходящих через x_1 и x_2:

$$\mu\colon l \to 5l - 2x_1 - 2x_2. \tag{15}$$

По лемме 2 геометрические точки $\overline{x}_{11}, \overline{x}_{12}, \overline{x}_{21}, \overline{x}_{22}, \overline{x}_{23}, \overline{x}_{24}$ находятся в общем положении, поэтому $\dim|5l-2x_1-2x_2| = 6\cdot 7/2-1-6-2\cdot 3/2 = 2$ и $(5l-2x_4-$ $-2x_2\cdot 5l-2x_1-2x_2) = 25-6\cdot 4 = 1$, так что преобразование (15) действительно является бирациональным. Применяя его к z, получаем $\mu(z) = \mu(\chi(l)) =$ $= a'l - \ldots$, где $a' = 5a - 4n_1 - 4n_2 < 5a - 4n_1 - 4a + 4n_1 = a$.

Предложение 7. *В случае* $\deg x_1 = 2$, $\deg x_2 = 4$ *указанное выше преобразование* μ *уменьшает* a.

Случай $\deg x_1 = 2$, $\deg x_2 = 3$. На квадрике Q через точку x_2 проходит единственное гиперплоское сечение $X_2' \sim h - x_2$. Пусть $\sigma_2\colon V_5 \to Q$ — раздутие x_2 и $\tau_2\colon V_5 \to V_6$ — стягивание собственного прообраза кривой X_2' на V_5 в точку $x_2' \in V_6$. Тогда V_6 — поверхность дель Пеццо степени 6 и $\operatorname{rk}\operatorname{Pic} V_6 = 1$ над k. Имеем: $X_2 = \sigma_2^{-1}(x_2)$, $-K_{V_5} = \sigma_2^{-1}(h) - X_2$, $X_2' = \sigma_2^{-1}(h) - X_2$ и

$$\tau_2\sigma_2^{-1}\delta(z) = -(a-n_1-n_2)K_{V_6} - (a-2n_1)x_0 - (2a-2n_1-3n_2)x_2' - \ldots$$

Так как $2a-2n_1-3n_2 < a-n_1-n_2$ и $a-2n_1 \leqslant a-n_1-n_2$, то по лемме 1 (i), существует максимальная точка, скажем, $x_3 \in V_6$ с $n_3 > a-n_1-n_2$ и $\deg x_3 \leqslant$ $\leqslant 5$. Можно считать $n_1 \geqslant n_2 \geqslant n_3$. Опять возникает несколько случаев.

Случай $\deg x_1 = 2$, $\deg x_2 = 3$, $\deg x_3 = 5$. Обозначим через $\sigma_3\colon V_1 \to$ $\to V_6$ — раздутие x_3. Тогда по лемме 2 V_1 является поверхностью дель Пеццо степени 1. Применяя инволюцию β, получаем:

на V_1: $X_3 = \sigma_3^{-1}(x_3)$, $\beta(X_3) = -10K_{V_1} - X_3$;

на V_6: $\sigma_3\beta\sigma_3^{-1}\tau_2\sigma_2^{-1}\delta(z) = -(11a-11n_1-11n_2-10n_3)K_{V_6} - (a-2n_1)x_0 -$
$-(2a-2n_1-3n_2)x_2' - (12a-12n_1-12n_2-11n_3)x_3 - \ldots$;

на Q: $\sigma_2\tau_2^{-1}\sigma_3\beta\sigma_3^{-1}\tau_2\sigma_2^{-1}\delta(z) = (31a-31n_1-30n_2-30n_3)h - (a-2n_1)x_0 -$
$-(20a-20n_1-19n_2-20n_3)x_2 - (12a-12n_1-12n_2-11n_3)x_3 - \ldots$;

на $\mathbf{P}^2$: $\delta^{-1}\sigma_2\tau_2^{-1}\sigma_3\beta\sigma_3^{-1}\tau_2\sigma_2^{-1}\delta(z) =$
$= (61a-60n_1-60n_2-60n_3)l - \ldots = a'l - \ldots$

Здесь $a' = 61a-60n_1-60n_2-60n_3 < 61a-60n_1-60n_2-60(a-n_1-n_2) = a$.

Предложение 8. *В случае* $\deg x_1 = 2$, $\deg x_2 = 3$ *и* $\deg x_3 = 5$ *коэффициент* a *уменьшает построенное выше преобразование* $\gamma_{2,3,5} =$ $= \delta^{-1}\sigma_2\tau_2^{-1}\sigma_3\beta\sigma_3^{-1}\tau_2\sigma_2^{-1}\delta$, *заданное на* $\mathbf{P}^2$ *линейной системой*

$$l \to 61l - 30x_1 - 20x_2 - 12x_3. \tag{16}$$

Случай $\deg x_1 = 2$, $\deg x_2 = 3$, $\deg x_3 = 4$. В этом случае алгоритм тот же, что и в предыдущем, только с инволюцией Гейзера γ на V_2 вместо инволюции Бертини на V_1. Имеем:

на V_6: $\sigma_3\gamma\sigma_3^{-1}\tau_2\sigma_2^{-1}\delta(z) = -(5a-5n_1-5n_2-4n_3)K_{V_6} - (a-2n_1)x_0 -$
$-(2a-2n_1-3n_2)x_2' - (6a-6n_1-6n_2-5n_3)x_3 - \ldots$;

на Q: $\sigma_2\tau_2^{-1}\sigma_3\gamma\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}\delta(z) = (13a-13n_1-12n_2-12n_3)h - (a-2n_1)x_0 -$
$-(8a-8n_1-7n_2-8n_3)x_2 - (6a-6n_1-6n_2-5n_3)x_3 - \ldots$;

на $\mathbf{P}^2_k$: $\delta^{-1}\sigma_2\tau_2^{-1}\sigma_3\gamma\sigma_3^{-1}\tau_2\sigma_2^{-1}\delta(z) = (25a - 24n_1 - 24n_2 - 24n_3)l - \ldots = a'l$.
Здесь $a' = (25a - 24n_1 - 24n_2 - 24n_3) < (25a - 24n_1 - 24n_2) - 24(a - n_1 - n_2) = a$.

П р е д л о ж е н и е 9. *В случае* $\deg x_1 = 2$, $\deg x_2 = 3$ *и* $\deg x_3 = 4$ *коэффициент* a *уменьшает преобразование* $\gamma_{2,3,4} = \delta^{-1}\sigma_2\tau_2^{-1}\sigma_3\gamma\sigma_3^{-1}\tau_2\sigma_2^{-1}\delta$, *заданное на* $\mathbf{P}^2$ *линейной системой*

$$l \to 25l - 12x_1 - 8x_2 - 6x_3. \tag{17}$$

С л у ч а й $\deg x_1 = 2$, $\deg x_2 = 3$, $\deg x_3 = 3$. Здесь можно воспользоваться преобразованием типа (11) или (11′):

$$l \to 13l - 6x_1 - 4x_2 - 4x_3. \tag{11''}$$

С л у ч а й $\deg x_1 = 2$, $\deg x_2 = 3$, $\deg x_3 = 2$. Пусть $\sigma_3\colon V_4 \to V_6$ — раздутие точки x_3, тогда V_4 — поверхность дель Пеццо степени 4, на которой лежит пара непересекающихся сопряженных прямых в классе $X_3 = \sigma_3^{-1}(x_3)$. Пусть $X_3' \sim -K_{V_4} - X_3$ — дополнительная пара непересекающихся сопряженных прямых на V_4 и пусть $\sigma_3'\colon V_4 \to V_6'$ — стягивание X_3' в точку $x_3' \in V_6'$, $\deg x_3' = 2$, $\operatorname{Pic} V_6' \simeq \mathbf{Z}$. Имеем:

на Q': $\sigma_2'\tau_2'^{-1}\sigma_3^{-1}\gamma_3^{-1}\tau_2\sigma_2^{-1}\delta(z) = (4a - 4n_1 - 3n_2 - 3n_3)h' - (a - 2n_1)x_0' -$
$-(2a - 2n_1 - n_2 - 2n_3)x_2' - (3a - 3n_1 - 3n_2 - 2n_3)x_3 - \ldots;$

на $\mathbf{P}^2$: $\delta'^{-1}\sigma_2'\tau_2'^{-1}\sigma_3'\sigma_3^{-1}\tau_2\sigma_2^{-1}\delta(z) = (7a - 6n_1 - 6n_2 - 6n_3)l - \ldots = a'l - \ldots$
Здесь $a' = 7a - 6n_1 - 6n_2 - 6n_3 < 7a - 6n_1 - 6n_2 - 6(a - n_1 - n_2) = a$.

П р е д л о ж е н и е 10. *В случае* $\deg x_1 = 2$, $\deg x_2 = 3$, $\deg x_3 = 2$ *коэффициент* a *уменьшает преобразование* $\gamma_{2,3,2} = \delta'^{-1}\sigma_2'\tau_2'^{-1}\sigma_3'\sigma_3^{-1}\tau_2\sigma_2^{-1}\delta$, *заданное на* $\mathbf{P}^2$ *формулой*

$$l \to 7l - 3x_1 - 2x_2 - 3x_3. \tag{18}$$

С л у ч а й $\deg x_1 = 2$, $\deg x_2 = 4$, $\deg x_3 = 1$. Здесь, как и в случае $\deg x_1 = 2$, $\deg x_2 = 4$ (или как в случае $\deg x_1 = 6$ ниже), коэффициент a уменьшает преобразование

$$\mu\colon l \to 5l - 2x_1 - 2x_2 - 2x_3. \tag{15'}$$

Здесь $a' = 5a - 4n_1 - 6n_2 - 2n_3 < 3a - 2n_1 - 4n_2 < a$.

С л у ч а й $\deg x_1 = 2$, $\deg x_2 = 2$. Пусть $\sigma_2\colon V_6 \to Q$ — раздутие x_2, тогда V_6 — поверхность дель Пеццо степени 6, на которой имеется пучок рациональных кривых без базисных точек и неподвижных компонент в классе $\sigma_2^{-1}(h) - X_2$, где $X_2 = \sigma_2^{-1}(x_2)$. Пусть f — класс слоя этого пучка, тогда $-K_{V_6} = 2\sigma_2^{-1}(h) - X_2$, $X_2 = -2f - K_{V_6}$, $\sigma_2^{-1}(h) = -f - K_{V_6}$. Имеем:

$$\sigma_2^{-1}\delta(z) = (2n_2 + n_1 - a)f - (a - n_1 - n_2)K_{V_6} - (a - 2n_1)x_0 - \ldots$$

Здесь $(a - n_1 - n_2) > 0$, так как $0 < (\sigma_2^{-1}\delta(z)\cdot f) = 2(a - n_1 - n_2)$. Следовательно, по лемме 1, (iii), существуют максимальные точки кратности $> (a - n_1 - n_2)$. Элементарными преобразованиями вдоль пучка можно бирационально отобразить V_6 на некоторую, вообще говоря, другую поверхность дель Пеццо V_6' степени 6 с пучком рациональных кривых $|f'|$, так что кратности базисных точек образа z на V_6' не будут превосходить $(a - n_1 - n_2)$. Тогда по лемме 1, (iii),

коэффициент a' при f' будет отрицательным. Стягивая $X_2' \sim -2f' - K_{V_6'}$ (см. [4]), мы получим квадрику Q'. Пусть $\sigma_2' \colon V_6' \to Q'$ — это стягивание и $\varepsilon \colon V_6 \to V_6'$ — композиция упомянутых выше элементарных преобразований, тогда имеем:

на Q': $\sigma_2'\varepsilon\sigma_2^{-1}\delta(z) = (2a - 2n_1 - 2n_2 - a')h - (a - 2n_1)x_0' -$
$$-(a - n_1 - n_2 + a')x_2' - \ldots;$$
на $\mathbf{P}^2$: $\delta'^{-1}\sigma_2'\varepsilon\sigma_2^{-1}\delta(z) = (3a - 2n_1 - 4n_2 + 2a')l - \ldots$

Здесь $3a - 2n_1 - 4n_2 + 2a' < a$, так как $a' < 0$ и $n_2 > (a - n_1)/2$.

Предложение 11. *В случае* $\deg x_1 = 2$, $\deg x_2 = 2$ *коэффициент* a *уменьшает преобразование* $\gamma_{2,2,\varepsilon} = \delta'^{-1}\sigma_2'\varepsilon\sigma_2^{-1}\delta$, *которое является в сущности аналогом преобразования Жонкьера: оно переводит в себя пучок коник на* $\mathbf{P}_k^2$ *с базисными точками* x_1 *и* x_2, *т. е. пучок* $2l - x_1 - x_2$.

Случай $\deg x_1 = 2$, $\deg x_2 = 1$. Здесь достаточно применить квадратичное преобразование $\varkappa_{2,1} \colon l \to 2l - x_1 - x_2$. Действительно, $\varkappa_{2,1}(z) = (2a - 2n_1 - 2n_2)l - \ldots = a'l - \ldots$ и $a' = 2a - 2n_1 - n_2 < 2a - 2n_1 - 1/2(a - n_1) < a$, так как $n_1 > a/3$.

Предложение 12. *В случае* $\deg x_1 = 2$, $\deg x_2 = 1$ *коэффициент* a *уменьшает квадратичное преобразование*

$$\varkappa_{2,1} \colon l \to 2l - x_1 - x_2. \tag{19}$$

5. Бирациональные автоморфизмы $\mathbf{P}^2$, связанные с замкнутыми точками степени d, $3 \leqslant d \leqslant 8$.

Случай $\deg x_1 = 3$.

Предложение 13. *В этом случае коэффициент* a *уменьшает квадратичное преобразование*

$$\varkappa_3 \colon l \to 2l - x_1. \tag{19'}$$

Случай $\deg x_1 = 4$. Через точку $x_1 \in \mathbf{P}^2$ проходит единственный пучок коник $2l - x_1$. Пусть $\sigma_1 \colon V_5 \to \mathbf{P}^2$ — раздутие x_1, тогда V_5 — поверхность дель Пеццо степени 5 с пучком рациональных кривых. Если f — класс слоя этого пучка, то $f = 2\sigma_1^{-1}(l) - X_1$, где $X = \sigma_1^{-1}(x_1)$, и мы имеем

$$\sigma_1^{-1}(z) = (3n_1 - a)f - (a - 2n_1)K_{V_5} - \ldots$$

По лемме 1, (iii), должны существовать максимальные точки кратности $> (a - 2n_1)$, поскольку $(3n_1 - a) > 0$. Пусть $\varepsilon \colon V_5 \to V_5'$ — композиция элементарных преобразований вдоль пучка, уменьшающих все кратности до значений не превосходящих $a - 2n_1$. Тогда $\varepsilon\sigma_1^{-1}(z) = a'f' - (a - 2n_1)K_{V_5'} - \ldots$, где $a' < 0$. На поверхности дель Пеццо V_5' существует (см. [4]) четверка непересекающихся сопряженных прямых в классе $X_1' \sim -3f' - K_{V_5'}$. Пусть $\sigma_1' \colon V_5' \to \mathbf{P}^2$ — стягивание X_1', тогда

$$\sigma_1'\varepsilon\sigma_1^{-1}(z) = (3a - 6n_1 + 2a')l - \ldots \tag{20}$$

Здесь $(3a - 6n_1 + 2a') < a$, так как $a' < 0$ и $n_1 > a/3$.

П р е д л о ж е н и е 14. *В случае* $\deg x_1 = 4$ *коэффициент* a *уменьшает указанное выше преобразование типа Жонкьера* $\gamma_{4,\varepsilon} = \sigma'\varepsilon\sigma_1^{-1}$, *переводящее в себя пучок коник* $2l - x_1$.

С л у ч а й $\deg x_1 = 5$. Пусть $\delta\colon \mathbf{P}^2 \to V_5$ — бирациональное преобразование раздутия точки x_1, и стягивания собственного прообраза единственной коники на $\mathbf{P}^2$, проходящей через x_1. Тогда

$$\delta(z) = -(a - 2n_1)K_{V_5} - (2a - 5n_1)x_0 - \dots,$$

где x_0 — образ стягиваемой коники. Так как $n_1 > a/3$, то $2a - 5n_1 < a - 2n_1$ и по лемме 1, (i), существует точка, скажем, x_2 с $n_2 > a - 2n_1$ и $\deg x_2 \leqslant 4$. Можно считать, что $n_1 \geqslant n_2$. Опять предстоит рассмотреть ряд случаев.

С л у ч а й $\deg x_1 = 5$, $\deg x_2 = 4$. Здесь мы воспользуемся инволюцией Бертини. Пусть $\sigma_2\colon V_1 \to V_5$ — раздутие точки x_2, $X_2 = \sigma_2^{-1}(x_2)$, тогда

$$\sigma_2^{-1}\delta(z) = -(a - 2n_1)(K_{V_1} - X_2) - n_2X_2 - (2a - 5n_1)x_0 - \dots$$

Применяя инволюцию Бертини, получаем

$$\beta\sigma_2^{-1}\delta(z) = -(9a - 18n_1 - 18n_2)K_{V_1} - (a - 2n_1 - n_2)X_2 - (2a - 5n_1)x_0 - \dots$$

и на $\mathbf{P}^2$: $\delta^{-1}\sigma_2\beta\sigma_2^{-1}\delta(z) = (41a - 80n_1 - 40n_2)l - \dots$

Здесь $41a - 80n_1 - 40n_2 < 41a - 80n_1 - 40a - 80n_1 = a$.

П р е д л о ж е н и е 15. *В случае* $\deg x_1 = 5$, $\deg x_2 = 4$ *коэффициент* a *уменьшает преобразование* $\gamma_{5,4} = \delta^{-1}\sigma_2\beta\sigma_2^{-1}\delta$

$$l \to 41l - 16x_1 - 10x_2. \tag{21}$$

С л у ч а й $\deg x_1 = 5$, $\deg x_2 = 3$. Этот случай аналогичен предыдущему, только вместо инволюции Бертини надо использовать инволюцию Гейзера γ. С учетом этого в предыдущих обозначениях имеем:

на V_2: $\gamma\sigma_2^{-1}\delta(z) = -(4a - 8n_1 - 3n_2 - a')K_{V_2} - (a - 2n_1 - n_2)X_2 - {}$
$$-(2a - 5n_1)x_0 - \dots;$$

на $\mathbf{P}^2$: $\delta^{-1}\sigma_2\gamma\sigma_2^{-1}\delta(z) = (16a - 30n_1 - 15n_2)l - \dots$

Здесь $16a - 30n_1 - 15n_2 < 16a - 30n_1 - 15a + 30n_1 = a$.

П р е д л о ж е н и е 16. *В случае* $\deg x_1 = 5$, $\deg x_2 = 3$ *коэффициент* a *уменьшает преобразование* $\gamma_{5,3} = \delta^{-1}\sigma_2\gamma\sigma_2^{-1}\delta$

$$l \to 16l - 6x_1 - 5x_2. \tag{22}$$

С л у ч а й $\deg x_1 = 5$, $\deg x_2 = 2$. Здесь достаточно применить инволюцию Гейзера γ

$$\gamma(z) = (8a - 15n_1 - 6n_2)l - \dots,$$

поскольку $8a - 15n_1 - 6n_2 < 8a - 15n_1 - 6a + 12n_1 = a$.

С л у ч а й $\deg x_1 = 5$, $\deg x_2 = 1$. Как и в случае $\deg x_1 = 6$ ниже, здесь к цели приводит преобразование

$$\mu\colon l \to 5l - 2x_1 - 2x_2. \tag{15''}$$

Здесь $\mu(z) = (5a - 10n_1 - 2n_2)l - \ldots = a'l$, где $a' = 5a - 10n_1 - 2n_2 < < 3a - 6n_1 < a$.

Случай $\deg x_1 = 6$. В этом случае, как уже отмечалось, можно использовать преобразование

$$\mu\colon l \to 5l - 2x_1, \quad x_1 \to 12l - 5x_1. \tag{15'''}$$

Здесь $a' = 5a - 12n_1 < a$, что и требуется получить.

Случай $\deg x_1 = 7$. Здесь прямое применение инволюции Гейзера γ достигает цели: $a' = 8a - 21n_1 < a$.

Случай $\deg x_1 = 8$. Здесь применима и приводит к цели инволюция Бертини β. Имеем $a' = 17a - 48n_1 < a$.

Предложение 17. *В случае* $\deg x_1 = 8$ *коэффициент* a *уменьшает инволюция Бертини, а в случаях* $\deg x_1 = 7$ *и* $\deg x_1 = 5$, $\deg x_2 = 2$ — *инволюция Гейзера.*

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема. *Группа Кремоны* $\mathrm{Cr}_2(k)$ *бирациональных автоморфизмов плоскости* $\mathbf{P}^2_k$ *над совершенным полем* k *порождается линейными проективными преобразованиями и серией бирациональных преобразований типа* (7)–(22).

Литература

[1] Алгебраические поверхности / Под ред. И. Р. Шафаревича // Труды МИАН СССР. — 1965. — Т. 75.

[2] Исковских В. А. Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий // Современные проблемы математики. — М.: ВИНИТИ, 1979. — С. 159–235. (Итоги науки и техники, Т. 12).

[3] Исковских В. А. Минимальные модели рациональных поверхностей над произвольными полями // Известия АН СССР. Сер. мат. — 1979. — Т. 43, № 1. — С. 19–43.

[4] Исковских В. А. Рациональные поверхности с пучком рациональных кривых и с положительным квадратом канонического класса // Матем. сб. — 1970. — Т. 83, № 1. — С. 90–119.

[5] Манин Ю. И. Кубические формы. — М.: Наука, 1972.

[6] Нагата М. О рациональных поверхностях. II // Математика. — 1964. — Т. 8, № 4. — С. 76–94.

[7] Hudson H. P. Cremona transformation in plane and space. — Cambridge: CUP, 1927.

[8] Kantor S. Rational Zerlegung der Birationalen Transformationen in ihre Primfaktoren // Monatsh. Math. und Phys. — 1889. — Bd. 10, № 1. — S. 54–74.

О бирациональных автоморфизмах рациональных поверхностей

(*совместно с С. Л. Трегубом*)

В работе дается описание образующих и соотношений для групп бирациональных автоморфизмов шести классов (k-минимальных) рациональных поверхностей. Для поверхностей F с $p := \operatorname{rk}\operatorname{Pic} F = 2$, $d := K_F^2 = 3, 4$ и $\rho = 1$, $F(k) = \varnothing$, $d = 9$ описаны соотношения между известными образующими, а для поверхностей с $\rho = 1$, $F(k) = \varnothing$, $d = 8, 6$ и $\rho = 2$, $F(k) = \varnothing$, $d = 8$ — образующие и соотношения.

§ 0. Введение

0.1. Пусть F — гладкая проективная поверхность над полем k. Как обычно, F называется *рациональной поверхностью*, если поверхность $F := F \otimes \overline{k}$ бирационально эквивалентна $\mathbf{P}^2$ над $\overline{k}$, где $\overline{k}$ — алгебраическое замыкание поля k. В этой статье мы изучаем группу бирациональных k-автоморфизмов $\operatorname{Bir}_k F$ рациональной поверхности F. Любой бирациональный k-изоморфизм $g\colon F \to F'$ индуцирует изоморфизм $g^*\colon \operatorname{Bir}_k F' \xrightarrow{\sim} \operatorname{Bir}_k F$, поэтому достаточно ограничиться k-минимальными рациональными поверхностями, которые описаны в работе [5]. Минимальные рациональные поверхности над k исчерпываются следующим списком (см. [5], а также [11]).

I. Поверхности дель Пеццо F индекса $r = 1, 2, 3$ с $\operatorname{Pic} F \simeq \mathbf{Z}$; причем если $r = 3$, то $F \simeq \mathbf{P}^2$ над k, если $r = 2$, то F — неособая квадрика в $\mathbf{P}^3_k$, если $r = 1$, то $d := K_F^2 = 1, \dots, 9$, где K_F — канонический дивизор на F (число $d = K_F^2$ называется *степенью* поверхности дель Пеццо F).

II. Расслоения на коники, т. е. существует морфизм $\pi\colon F \to C$ на гладкую проективную кривую рода нуль C, слой которого F_t над любой (вообще говоря, схемной) точкой $t \in C$ изоморфен конике в $\mathbf{P}^2_{k(t)}$ над полем вычетов $k(t)$ точки t, причем морфизм π относительно минимален — это равносильно тому, что каждая из коник $F_t \subset \mathbf{P}^2_{k(t)}$ неприводима над $k(t)$ (хотя она может быть приводимой над $\overline{k}(t)$: коника F_t может иметь ранг 3 или 2, см. [2]). Если морфизм $\pi\colon F \to C$ гладкий (т. е. все коники F_t имеют максимальный ранг 3), то имеются только две возможности:

Известия АН СССР. Сер. матем. — 1991. — Т. 55, № 2. — С. 254–281.

а) $\pi\colon F \to C$ является $\mathbf{P}^1$-расслоением (т. е. локально тривиальным расслоением в топологии Зарисского со слоем $\mathbf{P}^1_k$);

б) $F \simeq C' \times C$, где C' — гладкая кривая рода нуль, не имеющая k-точек, т. е. $C'(k) = \varnothing$, и $\pi\colon C' \times C \to C$ — проекция на второй множитель (см. [5]).

Отметим, что для поверхностей F из семейства II имеем $d := K_F^2 = 8 - m$, где m — число геометрических вырожденных, т. е. приводимых слоев морфизма π, и $\operatorname{Pic} F \simeq \pi^* \operatorname{Pic} C + \mathbf{Z}$.

0.2. Группы $\operatorname{Bir} F$ для рациональных поверхностей изучались в работах [1–4, 6–10, 12]. Отметим некоторые из основных известных результатов. Поле k здесь и далее будет предполагаться совершенным. Для поверхностей из класса II в работе [2] доказано, что при $K_F^2 \leqslant 0$ группа $\operatorname{Bir} F$ представляется в виде расширения:

$$0 \to \operatorname{Bir} F_\eta \to \operatorname{Bir} F \to G \to 0,$$

где $\operatorname{Bir} F_\eta = \operatorname{Aut} F_\eta$ — группа автоморфизмов общего слоя (т. е. невырожденной коники над $k(\eta)$) морфизма $\pi\colon F \to C$, где $\eta \in C$ — общая (схемная) точка, а G — некоторая (конечная) подгруппа в $\operatorname{Aut}_k C$. Для оставшихся значений $0 < K_F^2 \leqslant 8$ поверхностей F из семейства II группы $\operatorname{Bir} F$ достаточно изучить, как отмечено во введении к работе [7], только для поверхностей с обильным — K_F (т. е. для поверхностей дель Пеццо); напомним, что в данном случае $\rho := \operatorname{rk} \operatorname{Pic} F = 2$.

Образующие и соотношения для групп $\operatorname{Bir} F$ поверхностей дель Пеццо F с $\rho = 2$ и $K_F^2 = 1, 2$ описаны в [7]. В [3] описаны образующие для таких поверхностей с $K_F^2 = 3, 4$.

Минимальные поверхности дель Пеццо F (с $\rho = 1$, 2) с $d = K_F^2 = 6$, 7, а также с $d = 6$ и $F(k) \neq \varnothing$ бирационально изоморфны $\mathbf{P}^2_k$ над k. Образующие группы $\operatorname{Bir} \mathbf{P}^2_k = \operatorname{Cr}_k \mathbf{P}^2$ над незамкнутым полем описаны в [6, 8]. В случае $k = \overline{k}$ классическая теорема Нётера описывает систему образующих в $\operatorname{Bir} \mathbf{P}^2 = \operatorname{Cr} \mathbf{P}^2$; соотношения между этими образующими изучены в [1].

Случай поверхностей дель Пеццо F с $\rho = 1$ и $d = 1, 2, 3$ полностью изучен в работах [9, 10]. При $d = 4$ и $F(k) = \varnothing$ группа $\operatorname{Bir} F$ вычислена в [3], а при $F(k) \neq \varnothing$ указаны только образующие. Отметим, что в последнем случае F бирационально эквивалентна кубической поверхности с $\rho = 2$, расслоенной на коники. Образующие в $\operatorname{Bir} F$ для случая поверхности дель Пеццо с $\rho = 1$, $d = 9$ и $F(k) = \varnothing$ описаны в работе [12].

Таким образом, остается изучить только следующие вопросы:

1) описать соотношения между образующими в $\operatorname{Bir} F$, где F — поверхность дель Пеццо степени $d = 3$ (кубическая поверхность в $\mathbf{P}^3$), расслоенная на коники (стало быть, $\rho = 2$);

2) описать соотношения в группе $\operatorname{Bir} F$, где F — поверхность дель Пеццо степени 4, расслоенная на коники;

3) найти образующие и соотношения для поверхностей дель Пеццо F с $\rho = 1$, $F(k) = \varnothing$ и $d = 6, 8$ и описать соотношения для таких поверхностей в случае $d = 9$;

4) найти образующие и соотношения в группе $\operatorname{Bir} F$, где F — поверхность дель Пеццо с $\rho = 2$ (расслоенная на коники), $F(k) = \varnothing$ и $d = 8$ (случай $\rho = 2$ и $d = 6$ сводится к $\rho = 1$, $d = 8$ [3]);

5) описать соотношения между образующими [6] в группе Кремоны $\operatorname{Cr}_k \mathbf{P}^2$ над незамкнутым полем.

В этой работе мы даем ответы на вопросы 1)–4) для гладких рациональных поверхностей F, определенных над совершенным полем k. Вопрос 5) будет изучен отдельно.

Авторы благодарят Оргкомитет «III Сибирской школы по алгебре и анализу» за предоставленную возможность для работы над завершением статьи.

§ 1. Определяющие соотношения в группе бирациональных автоморфизмов кубической поверхности, расслоенной на коники

1.1. Пусть $F \subset \mathbf{P}^3$ — гладкая кубическая поверхность над k. Предположим, что F обладает стандартным пучком рациональных кривых $\pi\colon F \to \mathbf{P}^1$, в этом случае $\rho(F) = 2$ и пучок рациональных кривых является пучком коник, высекаемым пучком плоскостей в $\mathbf{P}^3$, проходящих через прямую $L \subset F$ (единственную определенную над k прямую на F). Образующие группы $\operatorname{Bir} F$ описаны в [3]. Мы напомним кратко основные результаты, касающиеся рассматриваемого случая.

Для описания образующих (а также и соотношений) мы будем пользоваться классическим формализмом линейных систем с базисными условиями. Современный вариант этого формализма изложен в [10, гл. V], и мы сохраним даже его обозначения, работая с предельной группой циклов $Z^*(F) = \operatorname{Pic} F \oplus Z^0(F)$.

Пусть f — класс слоя пучка $\pi\colon F \to \mathbf{P}^1$ и $h = -K_F$ — класс плоского сечения F в $\mathbf{P}^3_k$. Пусть $x \in F$ — замкнутая точка и $\deg x$ — ее степень; тогда если $\deg x \leqslant 2$ и точка x достаточно общая, то с ней связаны бирациональные инволюции. Мы их обозначаем через τ_x и η_x, если $\deg x = 1$ или 2 соответственно. Эти инволюции действуют на $Z^*(F) = \operatorname{Pic}(F) \oplus Z^0(F)$, причем возможны только следующие случаи в зависимости от степени точки x и ее расположения:

(i) $\deg x = 1$ и x не лежит на исключительных кривых первого рода (-1-кривых) поверхности $\overline{F} = F \otimes \overline{k}$ (т. е. через x не проходит ни одна из 27 прямых, лежащих на $F \subset \mathbf{P}^3_{\overline{k}}$):

$$\tau_x(h) = 2h - 3x, \quad \tau_x(x) = h - 2x,$$
$$\tau_x(f) = 2h - f - 2x, \quad \tau_x(z) = z', \quad z, z' \neq x;$$

(ii) $\deg x = 1$ и x является точкой пересечения компонент приводимого слоя пучка $\pi\colon F \to \mathbf{P}^1$ и x не лежит на прямой $L \in |h - f|$:

$$\tau_x(h) = 2h - f - x, \quad \tau_x(f) = 2h - f - 2x,$$
$$\tau_x(x) = h - f, \quad \tau_x(z) = z', \quad z, z' \neq x;$$

(iii) $\deg x = 1$ и x является точкой пересечения компонент приводимого слоя и лежит на прямой $L \in |h - f|$. В этом случае τ_x является бирегулярным автоморфизмом, тождественно действующим на $\operatorname{Pic} F$;

(iv) $\deg x = 2$ и ни одна из геометрических точек $(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = \overline{x} := x \otimes \overline{k}$ не лежит на -1-кривой на $\overline{F}$:

$$\tau_x(h) = 5h - 6x, \quad \tau_x(f) = 4h - f - 4x,$$
$$\tau_x(x) = 4h - 5x, \quad \tau_x(z) = z', \quad z, z' \neq x;$$

(v) $\deg x = 2$ и x является точкой пересечения вырожденного слоя $f_t = \pi^{-1}(t)$, $t \in \mathbf{P}^1$, $\deg t = 2$, и ни одна из точек $(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = \overline{x}$ не лежит на других -1-кривых на $\overline{F}$:

$$\tau_x(h) = 5h - 2f - 4x, \quad \tau_x(f) = 4h - f - 4x,$$
$$\tau_x(x) = 4h - 2f - 3x, \quad \tau_x(z) = z', \quad z, z' \neq x;$$

(vi) если $x \in F$, $\deg x = 3$ и ни одна из геометрических точек $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3) = \overline{x}$ не лежит на -1-кривых поверхности $\overline{F}$, то с x связано бирациональное преобразование $\mu_x \colon F \to F'$ на, вообще говоря, другую кубическую поверхность с пучком коник $\pi' \colon F' \to \mathbf{P}^1$ ($\rho(F') = \rho(F) = 2$), отображающее $Z^*(F) \to Z^*(F')$ по формулам

$$\mu_x(h) = 13h' - 6f' - 8x', \quad \mu_x(f) = 12h' - 5f' - 8x',$$
$$\mu_x(x) = 12h' - 6f' - 7x', \quad \mu_x(z) = z', \quad z \neq x, \quad z' \neq x',$$

где $f' = \pi'^{-1}(t)$, $t \in \mathbf{P}^1$, $\deg t = 1$, $h' = -K_{F'}$, $x' \in F'$ — точка степени 3 такая, что преобразование $\mu_{x'} \colon F' \to F$ является обратным к μ_x;

(vii) наконец, для любой точки $x \in F$, не лежащей на вырожденных слоях морфизма $\pi \colon F \to \mathbf{P}^1$ и такой, что геометрические точки $(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{\deg x}) = \overline{x}$ лежат не более чем по одной на геометрических слоях π, существует (элементарное) бирациональное преобразование $\sigma_x \colon F \to F'$, вообще говоря, на другую кубическую поверхность с пучком коник $\pi' \colon F' \to \mathbf{P}^1$, отображающее $Z^*(F) \to Z^*(F')$ по формулам

$$\sigma_x(h) = h' + (\deg x)f' - 2x', \quad \sigma_x(f) = f',$$
$$\sigma_x(x) = (\deg x)f' - x', \quad \sigma_x(z) = z', \quad z \neq x, \quad z' \neq x'.$$

З а м е ч а н и е. Формулы (i)–(vii) получены в [3], однако там не было отмечено, что отображение η_x в (v) всегда является инволюцией [3, п. 2.3.]. Преобразование μ_x в (vi) можно превратить в бирациональный автоморфизм с помощью преобразований типа σ из (vii), так как в [3, п. 2.3] показано, что поверхности F и F' бирационально эквивалентны над $\mathbf{P}^1$. Вместо τ_x, η_x, μ_x, σ_x мы часто будем писать τ, η, μ, σ, опуская индекс x, если ясно, с какой точкой связано преобразование.

1.2. Обозначим через $I(F)$ множество кубических поверхностей (с точностью до k-изоморфизма) со стандартным пучком коник (т. е. с $\rho = 2$ [5]), бирациоиально изоморфных поверхности F над $\mathbf{P}^1_k$, и для каждой поверхности $F_i \in I(F)$ с пучком коник $\pi_i\colon F_i \to \mathbf{P}^1_k$ зафиксируем бирациональный изоморфизм над $\mathbf{P}^1$ $h_i\colon F \to F_i$. Пусть $X(F_i)$ обозначает множество бирациональных преобразований для F_i, описанных в (i)–(vii). Каждому бирациональному преобразованию $\chi_{ij}\colon F_i \to F_j$ соответствует бирациональный автоморфизм $h_j^{-1}\chi_{ij}h_i\colon F \to F$, поэтому множества $X(F_i)$ мы можем отождествить с подмножествами бирациональных автоморфизмов поверхности F. Аналогично, если $A_i = \operatorname{Aut} F_i$ — группа бирегулярных автоморфизмов F_i, то $h_i^{-1}A_ih_i$ является подгруппой в группе $\operatorname{Bir} F$. Поэтому имеет смысл следующее

Определение 1. Определим группу $B(F)$ как свободное произведение групп A_i, $i \in I(F)$, и свободной группы, порожденной $\bigcup\limits_{i\in I(F)} X(F_i)$.

Существует естественный гомоморфизм групп $\varphi\colon B(F) \to \operatorname{Bir} F$. В [3, § 2] доказано, что гомоморфизм φ сюръективен. Доказано также, что множество $I(F)$ совпадает с множеством всех кубических поверхностей, бирационально эквивалентных F. Пусть $K = \operatorname{Ker}\varphi$ — ядро этого гомоморфизма. Цель этого параграфа — описать порождающие элементы нормальной подгруппы $K \subset \subset B(F)$.

Определение 2. Рассмотрим композицию бирациональных отображений $\alpha = \alpha_n \dots \alpha_1$, $\alpha_k \in \cup X(F_i)$, $k = 1, \dots, n$. Мы будем записывать α в виде

$$\prod_{k=1}^{n} \alpha_k(l), \quad l \in [1, k-1],$$

и говорить, что преобразование α_k сцеплено с α_l, если α_l стягивает свой исключительный дивизор в фундаментальную точку преобразования α_k и отображение $\alpha_{k-1}, \dots, \alpha_{i+1}$ является изоморфизмом в окрестности этой точки.

Лемма 1. *Следующие бирациональные преобразования являются (бирегулярными) автоморфизмами поверхности F, тождественно действующими на* $\operatorname{Pic} F$:

(1) τ^2, η^2, $\mu(1)\mu$, $\sigma(1)\sigma$, $\sigma(2)\sigma(1)\sigma_y\sigma_x$, *где точки x и y лежат в разных слоях пучка коник*;

(2) $\sigma(3)\tau(2)\sigma(1)\tau$, $\sigma(3)\eta(2)\sigma(1)\eta$, *где τ — преобразование типа* (i) *и η — преобразование типа* (iv);

(3) $\beta''(1)\beta'\beta$, *где β, β', β'' обозначают одно из преобразований типа* (ii), *или $\sigma(1)\tau_x$, τ_x — преобразование типа* (i);

(4) $\beta(2)\mu(1)\beta\mu$, *где β — такое же, как и в* (3);

(5) $\beta'(2)\gamma'(1)\beta\gamma$, *где β, β' — как и в* (3), *а γ, γ' — одно из преобразований типа* (v), *или $\sigma(1)\eta_x$, где η_x — преобразование типа* (iv);

(6) $\sigma(6)\tau(5)\sigma(4)\tau(3)\sigma(2)\tau(1)\sigma_y\tau_x$, *где* $\deg x = 1$, $\deg y = 1$;

(7) *для каждого бирационального отображения $\varphi_{ji}\colon F_i \to F_j$, $F_i, F_j \in \in I(F)$, и автоморфизма $a_i \in \operatorname{Aut} F_i$ существуют бирациональное отображение $\varphi_{ij}\colon F_j \to F_i$ и автоморфизм $a_j \in \operatorname{Aut} F_j$ такие, что $\varphi_{ij}a_j\varphi_{ji}a_i = \operatorname{id}(F_i)$.*

Доказательство. Первые две формулы из (1) означают просто, что соответствующие преобразования являются инволюциями. Последняя формула из (1) означает, что преобразования типа σ коммутируют, если их фундаментальные точки лежат на разных слоях.

Поскольку доказательства всех утверждений (1)–(7) однотипны и используют только формулы (i)–(vii), то мы приведем только некоторые из них. Заметим, что преобразования β типа (ii) и $\beta = \sigma(1)\tau_x$ в (3) действуют на класс h одинаково:

$$\beta(h) = 2h - f - x; \quad \beta(f) = 2h - f - 2x, \quad \beta(x) = h - f.$$

Аналогично, $(\sigma(1)\eta_x)(h) = 5h - 2f - 4x$ и т. д., как в (v). Теперь проверим, например, формулу (3):

$$h \xrightarrow{\beta} 2h' - f' - x' \xrightarrow{\beta'} 2h'' - f'' - \beta'(x') \xrightarrow{\beta''} h'''.$$

Так как сквозное отображение переводит обильный класс снова в обильный класс, то оно является изоморфизмом [10, гл. 5]. Отметим, что если β и β' — преобразования типа (ii), то β'' не обязательно имеет тип (ii), возможно, $\beta'' = \sigma(1)\tau$. □

Теорема 1. *Все соотношения между образующими, указанными в определении* 1, *группы* $\operatorname{Bir} F$ *выводятся из соотношений* (1)–(7) *леммы* 1 *и естественных соотношений между преобразованиями типа* σ.

1.3. Для доказательства теоремы введем следующие обозначения. Пусть $\beta = \beta_n \dots \beta_2\beta_1$ — слово из $B(F)$. Положим $\beta(k) = \beta_k \dots \beta_2\beta_1$, $k = 1, \dots, n$. Целые числа a_k, b_k, r_k определяются из равенства

$$\beta(k)(h) = a_k h' + b_k f' - r_k x_k - \sum r_j x_j,$$

где $\beta(k)\colon F \to F_k$ — соответствующее бирациональное отображение, $F_k \in I(F)$, x_k — базисная точка, в которую отображение β_k стягивает исключительный дивизор, r_k — кратность этой точки в линейной системе $\beta(k)(h)$, x_j — остальные базисные точки и r_j — их кратности. Пусть y_k — фундаментальная точка для преобразования β_{k+1} и $r(y_k)$ — ее кратность в линейной системе $\beta(k)h$.

Положим

$$A = a(\beta) = \max\{a_i \mid i = 1, \dots, n\}, \quad s = s(\beta) = \max\{i \mid a_i = A\},$$

$t = t(\beta)$ — ближайший не превосходящий s индекс, нумерующий одну из букв τ, η, μ в слове $\beta = \beta_n \dots \beta_1$. Отметим, что поскольку преобразования типа σ не изменяют коэффициент a_k, то при $s < n$ преобразование β_{s+1} одно из τ, η и μ.

Лемма 2 [3, § 2]. *Пусть* $\chi\colon F' \to F$ — *бирациональное преобразование,* $F, F' \in I(F)$ *и*

$$\chi(h') = ah + bf - \sum r_i x_i, \quad a \geqslant 0, \quad r_i \geqslant 0.$$

Тогда:

(1) $3a^2+4ab = 3+\sum r_i^2 \deg x_i$, $3a+2b = 3+\sum r_i \deg x_i$, $r_i \leqslant 2a\ \forall i$, $-2b \leqslant a$;

(2) *если* $b \geqslant 0$, *то существует точка* $x_i \in F$ *такая, что* $r_i > a$; *если* $b < 0$, *то существует* x_j *такая, что* $r_j \geqslant a+b$, *причем равенство возможно только в одном единственном случае*: $a = 2$, $b = -1$, $r = 1$, $\deg x = 1$, *т. е.* $\chi(h') = 2h - f - x$, $\deg x = 1$.

Эта лемма доказывается точно так же, как лемма 2.4 в [3], с заменой пучка f на гиперплоское сечение h и соответствующим пересчетом индексов пересечения.

Лемма 3. *Пусть* $\chi\colon F' \to F$ — *такое же, как и в лемме* 2, $\psi \in \operatorname{Bir} F$ — *бирациональное преобразование такое, что* $a = a(\chi) \geqslant a(\psi\chi)$, *где* $a(\alpha)$ *обозначает, как обычно, коэффициент при* h *в линейной системе* $\alpha(h)$.

Тогда:

(1) *если* $\psi = \tau_x$, *то* $r(x) \geqslant a + 2b$, *где* $r(x)$ — *кратность* x *в линейной системе* $\chi(h)$;

(2) *если* $\psi = \eta_x$ *или* μ_x, *то* $r(x) \geqslant a + b$;

(3) *если* $\psi = \mu(1)\sigma_x$, *то* $2r(x) \geqslant 2a + b$;

(4) *если* $\psi = \eta_x$, *где* x — *точка пересечения компонент вырожденного слоя, как в* (v), *или* $\psi = \mu_x$, *то* $a(\chi) + 2b(\chi) = a(\psi\chi) + 2b(\psi\chi)$.

Более того, равенство в (1)–(3) *достигается тогда и только тогда, когда* $a(\chi) = a(\psi\chi)$.

Эта лемма доказывается прямыми вычислениями с использованием формул (i)–(vii).

Определение 3. Слово $\beta = \beta_n \dots \beta_2\beta_1 \in K$ назовем *специальным*, если для всех индексов $k_1, k_2, \dots, k_m$, последовательно нумерующих все буквы τ, η, μ (пропуская σ и бирегулярные автоморфизмы), выполняются следующие условия:

а) $a_{k_1} < a_{k_2} < \dots < a_{k_t} \leqslant a_{t(\beta)}$, где $k_t < t(\beta)$ — ближайший к $t(\beta)$, меньший, чем $t(\beta)$, индекс, нумерующий одну из букв τ, η, μ, т. е. $a_{k_{t+1}} = a_{t(\beta)}$;

б) $a_{k_m} < a_{k_{m-1}} < \dots < a_{s(\beta)} = A(\beta)$.

Если в а) последнее неравенство строгое, то слово β будем называть *очень специальным*. Множество всех специальных слов будем обозначать через $S = S(F)$, а очень специальных — через $S' = S'(F) \subset S(F)$.

Лемма 4. *Любое слово* $\alpha = \alpha_n \dots \alpha_1 \in K$ *может быть представлено в виде произведения специальных слов* $\alpha = \beta_l \dots \beta_1$, $\beta_i \in S$, $i = 1, \dots, l_s$, *причем* $A(\beta_i) \leqslant A(\alpha)$.

Доказательство. Если слово α специальное, то доказывать нечего. Предположим, что слово α не специальное. Пусть t_1 — наибольший индекс такой, что для слова $\alpha_{t_1} \dots \alpha_1$ выполняются условия а) и б) с $t(\beta) = t_1$, и пусть $\alpha(t_1)\colon F \to F_{t_1}$ — соответствующее бирациональное преобразование. Как показано в [3, § 2], мы можем найти (не однозначно) последовательность преобразований $\delta = \delta_r \dots \delta_1\colon F_{t_1} \to F$ такую, что преобразование $\delta\alpha(t_1)\colon F \to F$ будет тождественным, каждое δ_i является одним из преобразований типа (i)–(vii), и слово $\delta_r \dots \delta_1\alpha_{t_1} \dots \alpha_1$ будет удовлетворять обоим условиям а) и б) определения 3.

Положим $\beta_1 = \delta\alpha(t_1)$ и представим α в виде $\alpha = \alpha_n \dots \alpha_{t_1+1}\delta^{-1}\beta_1$. Слово β_1 специальное и, очевидно, $A(\beta_1) \leqslant A(\alpha)$. Для того чтобы продолжить разложение слова α в произведение специальных, заметим, что слово $\delta^{-1} = \delta_1^{-1} \dots \delta_r^{-1}$ удовлетворяет условию а) со строгим последним неравенством (таков способ раскручивания бирационального отображения $\alpha(t_1)\colon F \to F_{t_1}$, описанный в [3, § 2]). Следовательно, если t_2 — наибольший индекс, для которого выполняются условия а) и б) в слове $\alpha_n \dots \alpha_{t_1+1}\delta_1^{-1} \dots \delta_r^{-1}$, то $t_2 \geqslant t_1+1$. Поэтому процесс отщепления от α специальных слов обрывается на конечном шаге, что доказывает лемму. □

1.4. Доказательство теоремы 1. Ниже, в леммах 5–8, мы покажем, что с помощью соотношений (1)–(7) из леммы 1 любое слово $\alpha \in S$ можно редуцировать к произведению слов $\alpha' \in S'$ с $A(\alpha') \leqslant A(\alpha)$. Затем покажем, что любое слово $\alpha' \in S'$ может быть разложено по модулю соотношений в произведение слов $\beta \in S$ с $A(\beta) < A(\alpha)$. Все слова, естественно, мы будем считать приведенными, т. е. в них не встречаются рядом стоящие взаимно обратные буквы, и, более того, нормализованными, т. е. в них не встречаются буквы из бирегулярных автоморфизмов, кроме, быть может, последней буквы. Нормализацию любого слова можно сделать с помощью соотношений (1) и (6) из леммы 1.

Лемма 5. *По модулю соотношений* (1), (2) *и* (7) *любое слово* $\alpha = \alpha_n \dots \alpha_1$ *из* S (*соответственно из* S') *эквивалентно нормализованному слову* $\beta = \beta_m \dots \beta_1 \in S$ (*соответственно из* S') *с* $A(\alpha) = A(\beta)$, *в котором среди* $\beta_{t+1} \dots \beta_s$ *нет преобразований, связанных с точками степени* 1 *или* 2, *сцепленных с* $\beta_{t(\beta)}$ *и* $\beta_{s(\beta)+1}$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что по определению $s(\alpha)$ и $t(\alpha)$ все преобразования $\alpha_{t+1}, \dots, \alpha_s$ имеют тип σ. Предположим, что среди $\alpha_{t+1}, \dots, \alpha_s$ есть преобразование $\alpha_i = \sigma_x$, $\deg x = 1$, сцепленное с α_t. Тогда по определению 2 преобразование $\alpha_{i-1} \dots \alpha_{i+1}$ является изоморфизмом в окрестности x, и поэтому его фундаментальные точки находятся вне слоя пучка коник, проходящего через x. Используя последнее из соотношений (1) (т. е. коммутирование преобразований σ, фундаментальные точки которых лежат в разных слоях), можно α_i поставить на место α_{t+1}. Так как $\deg x = 1$, α_i сцеплено с α_t и α_t одно из τ, η, μ, то $\alpha_t = \tau_x$. Используя первое из соотношений (2), можно сделать замену $\sigma_x(1)\tau_x = \tau(1)\sigma_x$. Таким образом, мы исключили α_i из $\alpha_{t+1}, \dots, \alpha_s$. Ясно, что после нормализации полученное слово останется в множестве S (соответственно в S'), если $\alpha \in S$ (соответственно $\alpha \in S'$) и коэффициент $A(\alpha)$ не изменится. Аналогично, если $\alpha_i = \sigma_x$ сцеплено с α_{s+1}, $\deg x = 1$, то $\alpha_{s+1} = \tau$ и α_i можно перегнать на место α_{s+2}. Точно так же с использованием второго из соотношений (2) можно избавиться от преобразований $\alpha_i \in \{\alpha_{t+1}, \dots, \alpha_s\}$, сцепленных с α_{s+1} или α_t и связанных с точками степени 2. Доказательство закончено. □

Лемма 6. *Пусть* $\alpha = \alpha_n \dots \alpha_1 \in S$ — *нормализованное специальное слово, удовлетворяющее заключению леммы* 5, *с* $\alpha_t = \mu_x$. *Тогда*:

(i) $s = t$ *и* $\alpha_{t+1} = \tau$;

(ii) *по модулю соотношений* (1)–(7) α *эквивалентно слову* $\beta = \beta_2\beta_1$ *со*

следующими свойствами:

$$A(\beta_1) < A(\alpha), \quad \textit{если} \;\; \alpha \in S',$$
$$A(\beta_1) \leqslant A(\alpha) \;\; \textit{и} \;\; \beta_1 \in S', \quad \textit{если} \;\; \alpha \in S \setminus S',$$
$$A(\beta_2) < A(\alpha).$$

Доказательство. (i) Покажем, прежде всего, что среди $\alpha_{t+1}, \ldots, \alpha_s$ нет преобразований, сцепленных α_t и α_{s+1}. По условию нет таких преобразований, которые связаны с точками степени 1 и 2. Предположим, что $\alpha_i = \sigma_y$, $\deg y = 3$, сцеплено с μ_x, $i \in [t+1, s]$. Тогда, как и в доказательстве леммы 5, используя соотношения (1), можно считать, что $i = t+1$. Тогда $\alpha_{t+1}\alpha_t = \sigma(1)\mu$. Используя лемму 3, (3), с $\chi = \sigma\mu\alpha(t-1)$ и $\psi\chi = \alpha(t-1)$ и тот факт, что $a_{t-1} \leqslant a_t = A(\alpha)$, получаем $2a_{t+1} + b_{t+1} \leqslant 2r_{t+1}$. Отсюда и из леммы 2, (1), следует, что $b_{t+1} > 0$ и $b_{t+1} \leqslant 2a_{t+1}$. Рассмотрим в отдельности следующие две возможности.

1) $b_s \geqslant b_{t+1}$. В этом случае, если $\alpha_{s+1} = \eta_z$ или μ_z, то по лемме 3, (2), имеем $r(y_s) > a_s + b_s \geqslant a_{t+1} + b_{t+1}$, так как $a_s = A = a_{t+1}$ ($y_s := z$). Отсюда получаем $2r_{t+1} + r(y_s) > 3a_{t+1} + 2b_{t+1}$. Теперь если $\alpha_{s+1} = \eta_z$, то по предположению среди $\alpha_{t+1}, \ldots, \alpha_s$ нет преобразований, сцепленных с α_{s+1}. Стало быть, образ z' точки z присутствует с той же кратностью $r(y_s)$ в линейной системе $\alpha(t+1)(h)$. То же происходит и в случае $\alpha_{s+1} = \mu_z$ при условии, что среди $\alpha_{t+1}, \ldots, \alpha_s$ нет сцепленных с α_{s+1} преобразований. Так что в этой ситуации имеем неравенство $2r_{t+1} + r_{t+1}(z') > 3a_{t+1} + 2b_{t+1}$. Так как $\deg x_{t+1} = 3$, то в любом случае $z' \neq x_{t+1}$ или $z' = x_{t+1}$ — мы получаем противоречие с леммой 2, (1).

Если $\alpha_{s+1} = \tau_z$, то по лемме 3, (2), $r(y_s) > a_s + 2b_s \geqslant a_{t+1} + 2b_{t+1}$. Отсюда $2r_{t+1} + r(y_s) > 3a_{t+1} + 3b_{t+1} > 3a_{t+1} + 2b_{t+1}$. Опять, как и выше, среди $\alpha_{t+1}, \ldots, \alpha_s$ нет преобразований, сцепленных с $\alpha_{s+1} = \tau_z$, так что в линейной системе $\alpha(t+1)(h)$ присутствует базисная точка z' с кратностью $r(y_s)$. Противоречие с леммой 2.

Осталось рассмотреть случай, когда $\alpha_{s+1} = \mu_z$ и среди $\alpha_{t+1}, \ldots, \alpha_s$ есть преобразование σ, сцепленное с μ_z. Как и выше, можно предполагать, что это α_s, т. е. $\alpha_{s+1}\alpha_s = \mu(1)\sigma_{y_s - 1}$. По лемме 3, (3), $2r(y_{s-1}) > 2a_{s-1} + b_{s-1}$. Если $b_{s-1} \geqslant b_{t+1}$, то

$$2r_{t+1} + 2r(y_{s-1}) > 4a_{t+1} + 2b_{t+1} > 3a_{t+1} + 2b_{t+1}.$$

Если $b_{s-1} < b_{t+1}$, то

$$2r(y_{s-1}) > 2a_{s-1} + b_{s-1} \quad \text{и} \quad 2r_{t+1} \geqslant 2a_{t+1} + b_{t+1} > 2a_{s-1} + b_{s-1},$$

так как $a_s = a_{s-1} = a_{t+1} = a_t$ (преобразования типа σ между α_t и α_{s+1} сохраняют коэффициент a). Отсюда получаем неравенство

$$2r_{t+1} + 2r(y_{s-1}) > 4a_{s-1} + 2b_{s-1} > 3a_{s-1} + 2b_{s-1}.$$

Теперь заметим, что точки y_{s-1} и x_{t+1} различные, поскольку в противном случае α_{t+1} и α_s были бы сцеплены, а мы предполагаем, что в нормализованном слове среди $\alpha_{t+1}, \ldots, \alpha_s$ нет сцепленных преобразований (иначе их

можно было бы сократить по лемме 1, (1)). Таким образом, в обоих случаях мы получаем противоречие с леммой 2.

2) $b_s < b_{t+1}$. В этом случае среди $\alpha_{t+1}, \ldots, \alpha_s$, кроме $\alpha_{t+1} = \sigma_y$, должно присутствовать еще по крайней мере одно преобразование типа σ, чтобы уменьшить коэффициент b. Поэтому $s - t \geqslant 2$. По формулам (vii) для преобразований σ находим

$$b_s = b_{t+1} + \sum_{i=t+1}^{s-1} (\deg y_i) a_{t+1} - \sum_{i=t+1}^{s-1} (\deg y_i) r(y_i).$$

Отсюда

$$\sum_{i=t+1}^{s-1} (\deg y_i) r(y_i) > \sum_{i=t+1}^{s-1} (\deg y_i) a_{t+1} \geqslant a_{t+1},$$

и мы имеем неравенство

$$3r_{t+1} + \sum_{i=t+1}^{s-1} (\deg y_i) r(y_i) > 3a_{t+1} + \frac{3}{2} b_{t+1} + a_{t+1} \geqslant 3a_{t+1} + 2b_{t+1},$$

поскольку $b_{t+1} \leqslant a_{t+1}$. Можно предполагать, что среди преобразований $\alpha_{t+1}, \ldots, \alpha_s$ (напомним, что все они типа σ) нет сцепленных друг с другом. Поэтому точки y_i, $i = t+1, \ldots, s-1$, с соответствующими кратностями присутствуют в линейной системе $\alpha(t+1)(h)$. Следовательно, предыдущее неравенство противоречит лемме 2, (1).

Полученные в 1) и 2) противоречия показывают, что среди $\alpha_{t+1}, \ldots, \alpha_s$ нет преобразований, сцепленных с $\alpha_t = \mu_x$. Аналогично доказывается, что среди $\alpha_{t+1}, \ldots, \alpha_s$ нет преобразований, сцепленных с α_{s+1}. Действительно, если $\alpha_{s+1} = \tau_x$ или η_x, то их нет по предположению. Если же $\alpha_{s+1} = \mu_x$, то противоречие с предположением о существовании сцепленного с μ_x преобразования σ достигается по прежней схеме (или в точности так же только для слова α^{-1}).

Покажем теперь, что если среди $\alpha_{t+1}, \ldots, \alpha_s$ нет σ, сцепленных с α_t и α_{s+1}, то $s = t$ и $\alpha_{s+1} = \tau$. Имеем $a_s = a_t$, поскольку все $\alpha_{t+1}, \ldots, \alpha_s$ являются преобразованиями типа σ и не меняют коэффициент a. По формулам (vii) для преобразований σ находим

$$b_s = b_t + \sum_{i=t}^{s-1} (\deg y_i) a_t - \sum_{i=t}^{s-1} (\deg y_i) r(y_i).$$

Из неравенств $r(y_s) > a_s + b_s$, если $\alpha_{s+1} = \eta_y$ или μ_y, $r(y_s) > a_s + 2b_s$, если $\alpha_{s+1} = \tau_y$, получаем соответственно

$$3r_t + \sum_{i=t}^{s-1} (\deg y_i) r(y_i) + r(y_s) > 4a_t + 4b_t \geqslant 3a_t + 2b_t,$$

$$6r_t + 2\sum_{i=t}^{s-1} (\deg y_i) r(y_i) + r(y_s) > 9a_t + 8b_t > 6a_t + 4b_t,$$

поскольку $a_t + 2b_t \geqslant 0$ по лемме 2, (1), и $\sum(\deg y_i)a_t \geqslant a_t$, если $\sum \deg y_i$ не нуль.

В первом случае мы сразу приходим к противоречию с леммой 2, а во втором противоречие достигается только при $\sum \deg y_i \neq 0$. Остается единственная возможность $s = t$ и $\alpha_{s+1} = \tau_z$ — преобразование типа (i) или (ii).

(ii) Из леммы 3, (4), следует, что $a_{t-1} + 2b_{t-1} = a_t + 2b_t < r(y_s)$, где y_s — фундаментальная точка преобразования $\alpha_{s+1} = \tau_{y_s}$. Воспользовавшись соотношением (4) из леммы 1, заменим $\alpha_{s+1}\alpha_s = \tau_{y_s}\mu_x$ в слове α на $\sigma'(1)\mu_{x'}\beta_{y'}$, где $\sigma' = \sigma$, если $\alpha_{s+1} = \tau_{y_s}$ — преобразование типа (i), и $\sigma' = 1$, если $\alpha_{s+1} = \tau_{y_s}$ — преобразование типа (ii). В результате мы получаем слово $\beta = \beta_2\beta_1$, где $\beta_1 = \delta\beta_{y'}\alpha(t-1)$, и $\delta = \delta_r \dots \delta_1$ — слово, полученное процедурой раскручивания преобразования $\beta_{y'}\alpha(t-1)$ до тождественного, как в доказательстве леммы 4, а $\beta_2 = \alpha_n \dots \alpha_{s+2}\sigma'\mu_{x'}\delta^{-1}$.

Имеем $A(\beta_1) = A(\alpha(t-1))$ и $\beta_1 \in S'$ при $A(\alpha(t-1)) = A(\alpha)$. Это следует из того, что $a(\beta_{y'}\alpha(t-1)) < a(\alpha(t-1))$ в силу неравенства $r(y_s) > a_{t-1} + 2b_{t-1}$. Если $\alpha \in S'$, то $A(\beta_1) = A(\alpha(t-1)) < A(\alpha)$. Если $\alpha \in S \setminus S'$, то $A(\alpha(t-1)) = A(\alpha)$, но тогда β_1 принадлежит уже S'. Далее, $A(\beta_2) = \max\{A(\delta^{-1}), A((\alpha_n, \dots, \alpha_{s+2})^{-1})\} < A(\alpha)$. Тем самым мы получили разложение $\beta = \beta_2\beta_1$, удовлетворяющее требованиям леммы 6. □

Лемма 7. *Пусть $\alpha = \alpha_n \dots \alpha_1 \in S$ — нормализованное слово, удовлетворяющее условию леммы 4, и $\alpha_t = \eta_x$. Тогда*:

(i) $s = t$ *и* $\alpha_{t+1} = \tau$;

(ii) *по модулю соотношений* (1)–(7) *слово α эквивалентно слову $\beta = \beta_2\beta_1$ со следующими свойствами*:

$$A(\beta_1) < A(\alpha), \quad \textit{если} \ \ \alpha \in S',$$
$$A(\beta_1) \leqslant A(\alpha) \ \ \textit{и} \ \ \beta_1 \in S', \quad \textit{если} \ \ \alpha \in S \setminus S',$$
$$A(\beta_2) < A(\alpha).$$

Доказательство. (i) По лемме 5 для слова α^{-1} можно считать, что $\alpha_{s+1} \neq \mu$. Предположим, что $s - t \geqslant 1$. Тогда если $b_s < b_t$, то

$$\sum_{i=t}^{s-1}(\deg y_i)r(y_i) > \sum_{i=t}^{s-1}(\deg y_i)a_t \geqslant a_t,$$
$$2r_t + 2\sum_{i=t}^{s-1}(\deg y_i)r(y_i) > 2(a_t + b_t) + \sum_{i=t}^{s-1}(\deg y_i)a_t > 3a_t + 2b_t.$$

Противоречие с леммой 2. Если $b_s \geqslant b_t$, то

$$\sum_{i=t}^{s-1}(\deg y_i)r(y_i) \leqslant \sum_{i=t}^{s-1}(\deg y_i)a_t$$

и в случае $\alpha_{s+1} = \eta_{y_s}$ имеем $2r_t + 2r(y_s) > 4a_t + 4b_t \geqslant 3a_t + 2b_t$, так как

$a_t + 2b_t \geqslant 0$. Противоречие. В случае $\alpha_{s+1} = \tau_{y_s}$ имеем

$$2r_t + r(y_s) + \sum_{i=t}^{s-1}(\deg y_i)r(y_i) > \left(3 + \sum_{i=t}^{s-1}(\deg y_i)\right)a_t + 4b_t +$$
$$+ \sum_{i=t}^{s-1}(\deg y_i)a_t - \sum_{i=t}^{s-1}(\deg y_i)r(y_i) > 3a_t + 2b_t.$$

Отсюда если $\sum \deg y_i \neq 0$, то мы получаем противоречие. Если же $\sum \deg y_i = 0$, то $s = t$ и $\alpha_{s+1} = \tau$, что и утверждалось.

(ii) Пользуясь соотношением (5) из леммы 1, заменим $\alpha_{s+1}\alpha_s = \tau_y\eta_x$ на $\gamma'(1)\beta'\sigma'$, где $\sigma' = \sigma$, если $\alpha_s = \eta$ — преобразование типа (iv), и $\sigma' = 1$, если $\alpha_s = \eta$ — преобразование типа (v). В результате мы получаем слово $\beta = \beta_2\beta_1$, где $\beta_1 = \delta\beta'\sigma'\alpha(t-1)$ и $\delta = \delta_r \dots \delta_1$ — слово, состоящее из преобразований, раскручивающих преобразование $\beta'\sigma'\alpha(t-1)$ до тождественного (как в доказательстве леммы 4), а $\beta_2 = \alpha_n \dots \alpha_{s+2}\gamma'\delta^{-1}$. Это разложение удовлетворяет требованиям леммы. Действительно, из леммы 3, (4), следует, что

$$a(\sigma'\alpha(t-1)) + 2b(\sigma'\alpha(t-1)) = a_t + 2b_t < r(y_s),$$

где y_s — фундаментальная точка преобразования $\alpha_{s+1} = \tau_{y_s}$. Поэтому $A(\beta_1) = A(\alpha(t-1)) \leqslant A(\alpha)$, и $\beta_1 \in S'$ при $a_{t-1}(\alpha) = A(\alpha)$; $A(\beta_2) = \max\{a(\gamma'\sigma'\alpha(t-1)), a((\alpha_n, \dots, \alpha_{s+2})^{-1})\} < A(\alpha)$. Лемма доказана. □

Лемма 8. *Пусть $\alpha = \alpha_n \dots \alpha_1 \in S$ — нормализованное слово, удовлетворяющее условиям леммы 4, и $\alpha_t = \eta_x$, $\alpha_{s+1} = \tau_{y_s}$. Тогда*:

(i) *имеется одна из следующих трех возможностей*:

а) $s = t$ *и* $\alpha_{t+1} = \tau$;

б) α *эквивалентно по модулю соотношений произведению* $\gamma\beta$, *где* $\beta, \gamma \in S'$ *и для них выполняются условие леммы и утверждение* (i), а); *кроме того,* $A(\beta) = A(\alpha)$ *и* $A(\gamma) < A(\alpha)$;

в) $\alpha_{s+1} \dots \alpha_t = \tau(1)\sigma_y\tau$, $\deg y = 1$;

(ii) *в случаях* а) *и* б) *слово* α *эквивалентно по модулю соотношений слову* $\beta = \beta_2\beta_1$, *где* $\beta_1, \beta_2 \in S$ *и*

$$A(\beta_1) < A(\alpha), \quad \text{если} \quad \alpha \in S',$$
$$A(\beta_1) = A(\alpha) \quad \text{и} \quad \beta_1 \in S', \quad \text{если} \quad \alpha \in S \setminus S',$$
$$A(\beta_2) < A(\alpha).$$

Доказательство. По леммам 6 и 7 для α^{-1} можно считать, что $\alpha_{s+1} \neq \mu, \eta$. Предположим сначала, что $s > t$ и преобразование α_{s+1} не сцеплено с α_t. Из неравенств

$$r_t \geqslant a_t + 2b_t,$$
$$r(y_s) > a_s + 2b_s = a_t + 2\left(\sum_{i=t}^{s-1}(\deg y_i)a_t - \sum_{i=t}^{s-1}(\deg y_i)r(y_i)\right)$$

получаем

$$r_t + r(y_s) + \sum_{i=t}^{s-1}(\deg y_i)r(y_i) > \left(2 + 2\sum_{i=t}^{s-1}\deg y_i\right)a_t + 4b_t - \sum_{i=t}^{s-1}(\deg y_i)r(y_i). \quad (*)$$

При $\sum\limits_{i=t}^{s-1}\deg y_i \geqslant 2$ отсюда находим, что $r(y_s) + r_t + \sum(\deg y_i)r(y_i) > 3a_t + 2b_t$, так как $\sum(\deg y_i)r(y_i) < 3a_t + 2b_t$. Следовательно, этот случай невозможен.

Если $\sum\limits_{i=t}^{s-1}\deg y_i = 1$, т. е. $\alpha_s = \alpha_{t+1} = \sigma_{y_t}$, $\deg y_t = 1$, то из $(*)$ с использованием неравенства $r_t + r(y_t) + r(y_s) < 3a_t + 2b_t$ получаем $r(y_t) > a_t + 2b_t$. Отсюда можно сделать вывод, что для слова $\beta := \delta\tau_{y_t}\alpha(t)$, где $\delta = \delta_r \dots \delta_1$ обозначает, как обычно, слово, полученное раскручиванием преобразования $\tau\alpha(t)$ до тождественного, выполняется равенство $A(\beta) = A(\alpha(t)) = A(\alpha)$, $\beta \in S'$, и $\beta_{t(\beta)+1}\beta_{t(\beta)}$ имеет вид $\tau_{y_t}\tau_x$. Для слова $\gamma' := \alpha_n \dots \alpha_{t+1}\tau_{y_t}^{-1}\delta^{-1}$ имеем $A(\gamma') = a(\alpha(t)) = A(\alpha)$, $\gamma' \in S'$, $\gamma'_{t(\gamma')} = \tau_{y_t}^{-1}$, $\gamma'_{t(\gamma')+2} = \alpha_{t+2} = \tau_{y_s}$ и $\gamma'_{t(\gamma')+1} = \alpha_{t+1} = \sigma_{y_t}$ сцеплено с $\gamma'_{t(\gamma')}$. Применяя соотношение (2) из леммы 1, заменим в слове γ' пару $\gamma'_{t(\gamma')+1}\gamma'_{t(\gamma')}$ на $\tau(1)\sigma_{y_t}$. В результате получим слово γ, эквивалентное по модулю соотношений γ' и такое, что $A(\gamma) = A(\gamma') = A(\alpha)$, $\gamma \in S'$, и $\gamma_{t(\gamma)+1} = \tau$. Таким образом, мы получаем доказательство утверждения (i), б).

Предположим, что α_{s+1} сцеплено с α_t. Покажем, что $s = t + 1$. Имеем

$$r_t > a_t + 2b_t,$$

$$r_t = r(y_s) > a_t + 2\left(b_t + \sum_{i=t}^{s-1}(\deg y_i)a_t - \sum_{i=t}^{s-1}(\deg y_i)r(y_i)\right) = a_t + 2b_t.$$

Отсюда получаем

$$2r_t + 2\sum_{i=t}^{s-1}(\deg y_i)r(y_i) > 2\left(a_t + 2b_t + \sum_{i=t}^{s-1}(\deg y_i)a_t\right).$$

Если $\sum \deg y_i \geqslant 2$, то это неравенство противоречит лемме 2. Поэтому $\sum \deg y_i \leqslant 1$. Равенство нулю невозможно, поскольку α_{s+1} и α_t сцеплены и в нормализованном слове они должны сократиться. Стало быть, $\sum \deg y_i = 1$, т. е. между α_{s+1} и α_t имеется ровно одно преобразование σ, связанное с точкой степени 1. Таким образом, мы получаем утверждение (i), в).

Докажем теперь утверждение (ii) в этой ситуации. В этом случае имеем $r_t + r(y_t) > 2a_t + 2b_t$, и так как $a_{t-1} = 2a_t + 2b_t - r_t$ по формулам (i) и (ii) для преобразования τ, то получаем, что $r(y_t) > a_{t-1}$. Теперь заменим $\alpha_{t+2}\alpha_{t+1}\alpha_t$ на $\sigma(3)\tau(2)\sigma(1)\tau_{y_t-1}\sigma_{y_t}$, в результате получим эквивалентное слово α', которое представляется в виде произведения $\beta_2\beta_1$, где $\beta_1 = \delta\tau_{y_t-1}\sigma_{y_t}\alpha(t-1)$, δ — слово, составленное из преобразований, раскручивающих $\tau_{y_t-1}\sigma_{y_t}\alpha(t-1)$ до тождественного преобразования, $\beta_2 = \alpha_n \dots \alpha_{s+2}\sigma\tau\sigma\delta^{-1}$ (напомним, что $s + 2 = t + 3$). Ясно, что $\beta_1, \beta_2 \in S$.

Имеем $A(\beta_1) < A(\alpha)$, если $\alpha \in S'$, и $A(\beta_1) = A(\alpha)$, если $\alpha \in S \setminus S'$, но при этом $\beta_1 \in S'$. Действительно, $A(\beta_1) = \max\{A(\alpha(t-1)), a(\tau\sigma\alpha(t-1))\}$. Но $a(\tau\sigma\alpha(t-1)) < a(\alpha(t)) = A(\alpha)$, так как $a_t = 2a_{t-1} + 2b_{t-1} - r(y_{t-1})$ и $a(\tau\sigma\alpha(t-1)) = 2a(\sigma\alpha(t-1)) + 2b(\sigma\alpha(t-1)) - r(y_{t-1})$, и $b_{t-1} > b(\sigma\alpha(t-1))$, поскольку $b(\sigma\alpha(t-1)) = b_{t-1} + a_{t-1} - r(y_t)$ и $r(y_t) > a_{t-1}$ по доказанному выше. Отсюда следует, что если $\alpha \in S \setminus S'$, то $\beta_1 \in S'$ и $A(\beta_1) = A(\alpha)$. Если $\alpha \in S'$, то $A(\beta_1) < A(\alpha)$. Для слова β_2 имеем $A(\beta_2) = \max\{a(\tau\sigma\alpha(t-1), a((\alpha_n \dots \alpha_{t+3})^{-1})\} < A(\alpha)$.

Осталось доказать утверждение (ii) в случае а). Заменим $\alpha_{t+1}\alpha_t$ на $\sigma(1)\tau_{y_t}\sigma'_{y_t-1}$, где $\sigma'_{y_t-1} = \sigma_{y_t-1}$, если $\alpha_t = \tau_x$ — преобразование типа (i), и $\sigma'_{y_t-1} = 1$, если $\alpha_t = \tau_x$ — преобразование типа (ii). В результате получаем эквивалентное по модулю соотношений слово β_1. Имеем $A(\beta_1) = \max\{a(\alpha(t-1)), a((\alpha_n \dots \alpha_{t+2})^{-1})\}$. Если $\alpha \in S'$, то $A(\beta_1) < A(\alpha)$ и $\beta_1 \in S$; если $\alpha \in S \setminus S'$, то $A(\beta_1) = A(\alpha)$ и $\beta_1 \in S'$. Полагая $\beta_2 = 1$, мы получаем доказательство утверждений (ii) в случае а). Лемма доказана. □

Окончание доказательства теоремы 1. Пусть $\alpha \in K$ — любое слово, $\alpha = \alpha_n \dots \alpha_1$, где K — ядро сюръективного гомоморфизма $\varphi\colon B(F) \to \operatorname{Bir} F$. Тогда бирациональное преобразование $\alpha(n)$ тождественно и, следовательно, $a_n = 1$. Если $A = A(\alpha) = 1$, то α_i, $i = 1, \dots, n$, являются преобразованиями типа σ, или бирегулярными автоморфизмами. Пользуясь естественными соотношениями между преобразованиями типа σ и соотношениями (7), можно привести слово α к единичному. Если $A(\alpha) > 1$, то по лемме 4, используя соотношения (1) и (7), слово α можно считать специальным и нормализованным. Леммы 5–8 позволяют редуцировать все такие слова с заданным значением параметра A к очень специальным, т. е. принадлежащим подмножеству $S' \subset S$. Для слов из S' те же леммы обеспечивают уменьшение коэффициента A. Следовательно, индукция по целому положительному параметру A завершает доказательство теоремы 1.

§ 2. Образующие и соотношения в случае $\rho = 1$, $d = 6$

2.1. В этом параграфе мы рассматриваем поверхность дель Пеццо F с $\rho = 1$ и $d = 6$. Предполагается, что F не содержит замкнутых точек степени 1 (иначе F бирационально тривиальна над k).

Опишем образующие группы $\operatorname{Bir} F$.

Лемма 1. *Пусть $h = -K_F$ и $h' = -K_{F'}$ соответственно. Тогда*:

а) *с каждой замкнутой точкой x степени 2 такой, что геометрические точки $(x_1, x_2) = x$ не лежат на исключительных кривых $\overline{F} = F \otimes \overline{k}$, связан бирациональный изоморфизм $\tau_x\colon F \to F'$, действие которого на $Z^*(F)$ задается формулами*

$$\tau_x(h) = 2h' - 3x', \quad \tau_x(x) = h' - 2x',$$
$$\tau_x(z) = z', \quad z \neq x, \quad z' \neq x';$$

б) *с каждой замкнутой точкой x степени 3 такой, что ни одна из геометрических точек $(x_1, x_2, x_3) = x$ не лежит на исключительных кривых $\overline{F}$,*

никакие две не лежат на конике на $\overline{F}$ *и все не лежат на кривой степени* 3, *связан бирациональный изоморфизм* $\eta_x\colon F \to F'$ *со следующим действием на* $Z^*(F)$:

$$\eta_x(h) = 3h' - 4x', \quad \eta_x(x) = 2h' - 3x',$$
$$\eta_x(z) = z', \quad z \neq x, \quad z' \neq x';$$

в) *с каждой достаточно общей точкой* x *степени* 4 *такой, что ни одна из геометрических точек* $(x_1, \dots, x_4) = x$ *не лежит на исключительных кривых* $\overline{F}$, *никакая пара не лежит на конике, никакая тройка не лежит на кривой степени* 3 *и все четыре не лежат на рациональной кривой степени* 4, *связан бирациональный автоморфизм* $\mu_x\colon F \to F$ *со следующим действием на* $Z^*(F)$:

$$\mu_x(h) = 5h - 6x, \quad \mu_x(x) = 4h - 5x,$$
$$\mu_x(z) = z', \quad z \neq x.$$

(*Вопрос о совпадении* F' *с* F *в пп.* а), б) *мы здесь не обсуждаем.*)

Доказательство. Если выполнены указанные в пп. а), б) условия общности точки x, то линейная система $|h - 2x|$ (соответственно $|2h - 3x|$) содержит единственную кривую C. После раздутия точки x, $\delta_x\colon \widehat{F} \to F$, собственный прообраз C стягивается в неособую точку $\delta'_C\colon \widehat{F} \to F'$, F' — поверхность дель Пеццо с $\rho = 1$, $d = 6$ и τ_x (соответственно η_x) определяется как $\tau_x = \delta'_C \delta_x^{-1}$.

в) Раздутие x, $\delta_x\colon \widehat{F} \to F$, приводит к поверхности дель Пеццо с $\rho = 2$ и $d = 2$. Пусть γ — бирегулярный автоморфизм, $\widehat{F}$ — инволюция Гейзера [3, 0.8]. Автоморфизм μ_x определяется как $\delta'_x \gamma \delta_x^{-1}$. □

Замечание. При условии $F(k) = \varnothing$ и $\rho = 1$ на F нет одновременно точек степеней 2 и 3: подпространство L коразмерности 2 (в $\mathbf{P}^6_k$), проходящее через x_1 — точку степени 2, и x_2 — точку степени 3, определено над k; $L \cap F$ не содержит кривых (поскольку $\rho = 1$ и $\operatorname{Pic} F$ порожден K_F) и, значит, $F \cap L = x_1 + x_2 + x_3$. Степень точки x_3 равна 1. Точно так же на F нет одновременно точек степеней 3 и 4. Авторам неизвестно, могут ли реализоваться обе возможности.

Лемма 2. *Пусть* $\chi\colon F \to F'$ — *бирациональный изоморфизм и* $\chi(h) = ah' - \sum r_i x_i$. *Тогда*:

а) *имеют место следующие равенства*:

$$6a^2 - 6 = \sum r_i^2 \deg x_i, \quad 6a - 6 = \sum r_i \deg x_i;$$

б) *если* $a > 1$, *то найдется такая точка* x_i, *что* $r_i > a$;

в) *если* x_i — *точка, для которой* $r_i > a$, *то* $\deg x_i \leqslant 5$ *и* x_i *удовлетворяет условиям общности, которые были описаны в лемме* 1.

Доказательство а) и б) совершенно стандартно [3, 10]. Неравенство $\deg x_i \leqslant 5$ следует из а). Условия общности x_i выполняются, поскольку для соответствующего автоморфизма $\overline{\chi}\colon \overline{F} \to \overline{F}'$ невыполнение этих условий влечет существование неподвижных компонент в $\overline{\chi}(\hbar)$.

Используя эту лемму стандартным образом [3, 10], можно доказать следующую лемму.

Лемма 3. *Любой бирациональный автоморфизм* $\chi\colon F \to F$ *раскладывается в композицию*

$$F \xrightarrow{\chi_1} F_1 \xrightarrow{\chi_2} F_2 \to \ldots \xrightarrow{\chi_n} F_n \xrightarrow{a} F$$

бирациональных изоморфизмов χ_i, *описанных в лемме 1, и бирегулярного изоморфизма* $a\colon F_n \to F$.

Обозначим через $I(F)$ множество поверхностей дель Пеццо с $d = 6$ и $\rho = 1$, бирационально изоморфных F. Пусть $X(F_1)$ — множество бирациональных преобразований F_i описанных в лемме 1, и A_i — группа бирегулярных автоморфизмов F_i. Определим группу $B(F)$ как свободное произведение групп A_i и свободной группы, порожденной $\bigcup\limits_i X(F_i)$. Как в § 1, выбор бирациональных изоморфизмов $h_i\colon F \to F_i$ задает (сюръективный) гомоморфизм $\varphi\colon B(F) \to \operatorname{Bir} F$.

Теорема 2. а) *Преобразования, соответствующие следующим словам из* $B(F)$, *являются бирегулярными автоморфизмами* F, *тождественно действующими на* $\operatorname{Pic} F$ (*напомним, что* $B(F)$ *не содержит одновременно преобразований типа* τ *и* η):

(i) $\tau(1)\tau$, $\eta(1)\eta$, $\mu(1)\mu$;

(ii) $\tau(4)\tau(3)\tau(2)\tau(1)\tau_y\tau_x$;

(iii) $\chi_{a(x')}a\chi_x$, *здесь* $\chi_x \in X(F_i)$, $\chi_x\colon F_i \to F_j$ *связан с точкой* x, x' — *образ исключительного дивизора* χ_x, $a \in A_j$, *преобразование* $\chi_{a(x')}\colon F_j \to F_i$ *связано с точкой* $a(x')$.

б) *Любое соотношение между описанными образующими* $\operatorname{Bir} F$ *есть следствие соотношений вида* (i)–(iii).

2.2. Доказательство теоремы. Мы будем пользоваться обозначениями § 1 (п. 1.3).

Лемма 4. *Пусть* $\alpha, \beta \in B(F)$ *и* α — *специальное нормализованное слово. Тогда*:

а) *условие* $a_n(\beta) > a_{n+1}(\beta)$ *эквивалентно условию* $r(y_n) \geqslant a_n(\beta)$, *причем равенство имеет место одновременно*;

б) *для* $\alpha_{s+1}\alpha_s$ *есть только одна возможность*: $\alpha_{s+1}\alpha_s = \tau_y\tau_x$.

Доказательство. Пункт а) проверяется простым вычислением. Используя а), из $a_s \geqslant a_{s-1}$ и $a_s > a_{s+1}$ получаем $r_s \geqslant a_s$ и $r(y_s) > a_s$; откуда

$$(\deg x_s)r_s + (\deg y_s)r(y_s) > (\deg x_s + \deg y_s)a_s.$$

Из леммы 2, а) следует, что $\deg x_s + \deg y_s < 6$ (точки x_s и y_s не могут совпадать, поскольку слово α нормализованное). □

Лемма 5. *Любое специальное нормализованное слово* α *эквивалентно по модулю соотношений* (i)–(iii) *слову* β, *которое представляется в виде*

$\beta = \beta_4\beta_3\beta_2\beta_1$. *При этом*

$$A(\beta_1) < A(\alpha), \quad \text{для } \alpha \in S',$$
$$A(\beta_1) \leqslant A(\alpha) \quad \text{и } \beta_1 \in S', \quad \text{для } \alpha \in S \setminus S',$$
$$A(\beta_i) < A(\alpha) \quad \text{для } i = 2, 3, 4.$$

Доказательство. Заменим $\alpha_{s+1}\alpha_s = \tau_y\tau_x$ на $\tau_u(2)\tau_z(1)\tau_{x_1}\tau_{y_1}$ ($y_1 = \tau^{-1}(y)$, $x_1 = \tau_{y_1}(x)$) — мы пользуемся соотношением (ii) — получаем слово β. Положим $\beta_1 = \delta\tau_{y_1}\alpha(s-1)$, $\beta_2 = \delta'\tau_{x_1}\delta^{-1}$, $\beta_3 = \delta''\tau_z\delta'^{-1}$, $\beta_4 = \alpha_N \dots \alpha_{s+2}\tau_u\delta''^{-1}$, где $\delta = \delta_t \dots \delta_1$ (соответственно $\delta' = \delta'_{t'} \dots \delta'_1$, $\delta'' = \delta''_{t''} \dots \delta''_1$), — последовательность преобразований (из $\bigcup X(F_i)$), раскручивающая $\tau_{y_1}\alpha(s-1)$ (соответственно $\tau_{x_1}\delta^{-1}$, $\tau_z\delta'^{-1}$). Из условия $r(y_s) > a_s \geqslant a_{s-1}$ следует, что

1) $a(\tau_{y_1}\alpha(s-1)) < a(\alpha(s-1))$;

2) $a(\tau_{x_1}\delta^{-1}) = a(\tau_{x_1}\tau_{y_1}\alpha(s-1)) < a(\alpha(s-1))$ (поскольку $a(\tau_{y_1}\alpha(s-1)) < a_{s-1}(\alpha)$, $r(x_1) = r(y_{s-1})$ и, значит, $a(\tau_{x_1}\tau_{y_1}\alpha(s-1)) < a_s(\alpha)$);

3) $a(\tau_z\tau_{x_1}\delta^{-1}) = a(\delta''^{-1}) = a(\tau_u^{-1}\alpha_{s+2}^{-1} \dots \alpha_N^{-1}) < a(\alpha_{s+2}^{-1} \dots \alpha_N^{-1}) = a(\alpha_{s+1} \dots \alpha_1) < A(\alpha)$ (аналогично 1)).

Эти неравенства показывают, что β_i удовлетворяют требованиям леммы. □

Отметим теперь, что для рассматриваемого типа поверхностей верна лемма 4 из § 1 (с дословным повторением доказательства). Из леммы 5 и леммы 4 § 1 точно так же, как в § 1, с помощью индукции получается доказательство теоремы 2.

§ 3. Соотношения в случае $\rho = 1$, $d = 6$

3.1. В этом параграфе мы рассматриваем форму проективной плоскости F. Характеристика основного поля отлична от 2, 3 [12]. Через h мы будем обозначать антиканонический класс F.

Известны образующие группы $\operatorname{Bir} F$.

Лемма 1. а) *С каждой замкнутой точкой $x \in F$ степени 3 связан бирациональный изоморфизм $\tau_x\colon F \to F'$, действующий на $Z^*(F)$ по формулам ($h' = -K_{F'}$)*

$$\tau_x(h) = 2h' - 3x', \quad \tau_x(x) = h' - 2x',$$
$$\tau_x(z) = z', \quad z \neq x, \quad z' \neq x'.$$

б) *С каждой замкнутой точкой $x \in F$ степени 6 связан бирациональный изоморфизм $\eta_x\colon F \to F'$, действующий на $Z^*(F)$ по формулам*

$$\eta_x(h) = 5h' - 6x', \quad \eta_x(x) = 4h' - 5x',$$
$$\eta_x(z) = z', \quad z \neq x, \quad z' \neq x'.$$

в) *Поверхность F' из пп.* а), б) *есть форма проективной плоскости, соответствующая в группе* $\operatorname{Br}(k)$ *элементу, обратному к соответствующему элементу для F.*

Доказательство см. в [12].

Обозначим через $X(F)$ (соответственно $X(F')$) множество всех отображений $F \to F'$ (соответственно $F' \to F$), описанных в лемме 1. Определим группу $B(F)$ как свободное произведение $\operatorname{Aut} F$, $\operatorname{Aut} F'$ и свободной группы, порожденной $X(F) \cup X(F')$. Фиксировав бирациональный изоморфизм $h\colon F \to F'$, можно определить (см. § 1) гомоморфизм $\varphi\colon B(F) \to \operatorname{Bir} F$, сюръективность которого доказана в [12].

Лемма 2. *Следующие бирациональные преобразования являются бирегулярными автоморфизмами F, тождественно действующими на* $\operatorname{Pic} F$:

(i) $\tau(1)\tau$, $\eta(1)\eta$;

(ii) $\tau(4)\tau(3)\tau(2)\tau(1)\tau_x\tau_y$;

(iii) $\chi_{a(x')}a\chi_x$, *здесь* $\chi_x \in X(F)$ *связан с точкой* x, x' — *фундаментальная точка* χ_x^{-1}, a — *бирегулярный автоморфизм* F'.

Доказательство этой леммы — прямые вычисления с использованием формул леммы 1.

Теорема 3. *Все соотношения между описанными образующими группы* $\operatorname{Bir} F$ *выводятся из соотношений* (i)–(iii) *леммы* 2.

3.2. Доказательство теоремы. Мы будем пользоваться обозначениями § 1 (п. 1.3).

Лемма 3. *Пусть* $\chi\colon F \to F'$ — *бирациональный изоморфизм и* $\chi(h) = ah' - \sum r_i x_i$.

а) *Имеют место равенства*

$$9a^2 - 9 = \sum r_i^2 \deg x_i, \quad 9a - 9 = \sum r_i \deg x_i.$$

б) *Если* $a > 1$, *то найдется* x_i, *для которой* $r_i > a$.

в) *Если* $r_i > a$, *то* $\deg x_i < 9$.

Доказательство см. в [12].

Лемма 4. а) *Пусть* β — *слово из* $B(F)$. *Условие* $a_{i+1}(\beta) \leqslant a_i(\beta)$ *эквивалентно* $r(y_i) \geqslant a_i$, *причем равенство в обоих условиях имеет место одновременно.*

б) *Если* α — *нормализованное специальное слово* ($\alpha \in S$), *то* $\alpha_{s+1}\alpha_s = \tau_y\tau_x$.

Доказательство. Пункт а) проверяется прямым вычислением a_{i+1} через a_i и $r(y_i)$; б) следует из неравенств $r_s \geqslant a_s$ ($a_s \geqslant a_{s-1}$), $r(y_s) > a_s$ ($a_{s+1} < a_s$) и $(\deg x_s)r_s + (\deg y_s)r(y_s) < 9a_s$ (по лемме 2, а)). □

Лемма 5. *Пусть* α — *нормализованное специальное слово. Тогда* α *эквивалентно по модулю соотношений* (i)–(iii) *слову* β, *которое представляется в виде* $\beta = \beta_4\beta_3\beta_2\beta_1$, *причем*

$$\begin{aligned} &A(\beta_1) < A(\alpha), \quad \text{для } \alpha \in S', \\ &A(\beta_1) = A(\alpha) \ \text{ и } \ \beta_1 \in S', \quad \text{для } \alpha \in S \setminus S', \\ &A(\beta_i) < A(\alpha) \ \text{ для } \ i = 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Доказательство. Замена в слове α: $\alpha_{s+1}\alpha_s = \tau_y\tau_x$ на $\tau_u(2) \times \tau_z(1)\tau_{x_1}\tau_{y_1}$ (используется соотношение (ii)), приводит к слову β (здесь

$y_1 = \tau_x^{-1}(y)$, $x_1 = \tau_{y_1}(x)$). Слово β представляется в виде $\beta = \beta_4\beta_3\beta_2\beta_1$, где $\beta_1 = \delta\tau_{y_1}\alpha(s-1)$, $\beta_2 = \delta'\tau_{x_1}\delta^{-1}$, $\beta_3 = \delta''\tau_z\delta'^{-1}$, $\beta_4 = \alpha_N\dots\alpha_{s+2}\tau_u\delta''^{-1}$. Через $\delta = \delta_t\dots\delta_1$ (соответственно $\delta' = \delta'_{t'}\dots\delta'_1$, $\delta'' = \delta''_{t''}\dots\delta''_1$) обозначена последовательность, раскручивающая $\tau_{y_1}\alpha(s-1)$ (соответственно $\tau_{x_1}\delta^{-1}$, $\tau_z\delta'^{-1}$) до тождественного отображения. При этом имеют место неравенства:

1) $a(\tau_{y_1}\alpha(s-1)) < a(\alpha(s-1))$ (поскольку $r(y_1) > a_s \geqslant a_{s-1}$);

2) $a(\tau_{x_1}\delta^{-1}) = a(\tau_{x_1}\tau_{y_1}\alpha(s-1)) < a(\alpha(s))$ (поскольку $a(\tau_{y_1}\alpha(s-1)) < a(\alpha(s-1))$, $r(x_1) = r(y_{s-1})$, $a(\tau_{x_1}\delta^{-1}) = 2a(\tau_{y_1}\alpha(s-1)) - r(x_1)$, $a(\alpha(s)) = 2a(\alpha(s-1)) - r(y_{s-1})$);

3) $a(\tau_z\delta'^{-1}) = a(\tau_u^{-1}\alpha_{s+2}^{-1}\dots\alpha_N^{-1}) < a(\alpha(s+1))$.

Эти неравенства показывают, что $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ удовлетворяют требованиям леммы. □

Из леммы 5 и леммы 4 § 1 (для рассматриваемого класса поверхностей лемма 4 § 1 и ее доказательство сохраняются без изменений) с помощью индукции, как в § 1, получается доказательство теоремы 3.

§ 4. Образующие и соотношения в случае $\rho = 1$, $d = 8$

4.1. В этом параграфе мы рассматриваем случай поверхностей дель Пеццо F с $\rho = 1$, $d = K_F^2 = 8$ и $F(k) = \varnothing$ (напомним, что если $F(k) \neq \varnothing$, то $F \overset{\mathrm{Bir}\,F}{\sim} \mathbf{P}^2$). Имеем $\operatorname{Pic} F = \mathbf{Z}\cdot h$, где $h = -K_F$ или $h = -K_F/2$. Мы изучим обе возможности.

Пусть $I(F)$ обозначает множество поверхностей дель Пеццо с $\rho = 1$ и $d = 8$, бирационально изоморфных F, $A_i = \operatorname{Aut} F_i$, $F_i \in I(F)$.

Лемма 1. (i) *С каждой достаточно общей замкнутой точкой $x \in F$ степени $\deg x = 6$ (все геометрические точки $\overline{x} = (\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_6)$ не лежат одновременно на кривой $\overline{D} \subset \overline{F} = F \otimes \overline{k}$ степени $\deg_{-(1/2)K_{\overline{F}}} \overline{D} \leqslant 6$) связана бирациональная инволюция $\mu_x\colon F \to F$, действующая на $Z^*(F)$ по формулам*

$$\mu_x(h) = 7h - 8x, \quad \mu_x(x) = 6h - 7x,$$
$$\mu_x(z) = z', \quad z \neq x, \quad z' \neq x.$$

(ii) *С каждой замкнутой точкой $x \in F$ степени 4 такой, что никакая пара геометрических точек $(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_4) = \overline{x}$ не лежит на одной из прямолинейных образующих квадрики $\overline{F} = \mathbf{P}^1_{\overline{k}} \times \mathbf{P}^1_{\overline{k}}$ и все $\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_4$ не лежат на кривой из $|-(1/2)K_{\overline{F}}|$ на $\overline{F}$, связан бирациональный изоморфизм $\eta_x\colon F \to F'$, $F' \in I(F)$, действующий на $Z^*(F)$ по формулам (не обязательно $F' \simeq F$)*

$$\eta_x(h) = 3h' - 4x', \quad \eta_x(x) = 2h' - 3x',$$
$$\eta_x(z) = z', \quad z \neq x, \quad z' \neq x'.$$

(iii) *Любая замкнутая точка $x \in F$ степени 2 и достаточно общая точка y определяют бирациональный изоморфизм $\sigma_{x,y}\colon F \to F'$, $F' \in I(F)$, такой,*

что

$$\sigma_{x,y}(h) = (\deg y)h' - 2(\deg y)x' - 4y',$$
$$\sigma_{x,y}(x) = \frac{1}{2}(\deg y)h' - (\deg y - 1)x' - 2y',$$
$$\sigma_{x,y}(y) = \frac{1}{2}(\deg y)h' - (\deg y)x' - y',$$
$$\sigma_{x,y}(z) = z', \quad z \neq x, y; \quad z' \neq x', y'.$$

Все формулы написаны для случая $h = -K_F$. В случае $h = -(1/2)K_F$ надо заменить h на $2h$.

Доказательство. (i) Раздутие $\delta_x\colon F' \to F$ точки x приводит к поверхности дель Пеццо с $K_F^2 = 2$. На F' действует (бирегулярная) инволюция Гейзера γ (см. [3]). Полагая $\mu_x = \delta_x\gamma\delta_x^{-1}$ и проводя элементарные вычисления, получаем утверждение (i).

(ii) При указанных условиях общности $(\overline{x}_i, \overline{x}_j, \overline{x}_k) \subset (\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_4) = \overline{x}$ определяют единственную кривую $\overline{C}_{ijk} \subset \overline{F}$ из класса $-K_F/2$. Группа $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ переставляет эти кривые, поэтому $C = \sum \overline{C}_{ijk}$ определена над k. После раздутия $\delta_x\colon \widehat{F} \to F$ точки x собственный прообраз C может быть стянут в неособую точку x', $\delta_{x'}\colon \widehat{F} \to F'$. Поскольку $\overline{F}' = F' \otimes \overline{k}$ изоморфна $\mathbf{P}^1_{\overline{k}} \times \mathbf{P}^1_{\overline{k}}$, то $F' \in I(F)$ и $\eta_x = \delta_{x'}\delta_x^{-1}$ — требуемый изоморфизм.

(iii) Раздутие $\delta_x\colon \widehat{F} \to F$ точки x приводит к расслоенной на коники поверхности дель Пеццо $\widehat{F}$ с $K_F^2 = 6$ (морфизм $\pi\colon \widehat{F} \to C$ задает система $|-K_F - 2x|$). Если геометрические точки $(\overline{y}_1, \dots, \overline{y}_{\deg y}) = \overline{y}$ лежат на невырожденных слоях π и не более чем по одной на слое, то существует (элементарное) бирациональное преобразование $\sigma_y\colon \widehat{F} \to \widehat{F}'$. В [3] показано, что существует морфизм $\delta_{x'}\colon \widehat{F}' \to F'$, где F' — поверхность дель Пеццо с $\rho = 1$ и $d = 8$. Определим $\sigma_{x,y} = \delta_{x'}\sigma_y\delta_x^{-1}$. Формулы действия на $Z^*(F)$ получаются с помощью простых вычислений. □

Пусть $X(F_i)$ обозначает множество бирациональных преобразований для F_i, описанных в лемме 1.

Лемма 2. *Пусть $\chi\colon F \to F'$ — бирациональное преобразование, $F' \in I(F)$ и $\chi(-K_F) = a(-K_{F'}) - \sum r_i x_i$. Тогда*:

(1) *имеют место равенства*

$$8a^2 - 8 = \sum r_i^2 \deg x_i, \quad 8a - 8 = \sum r_i \deg x_i;$$

(2) *если $a > 1$, то существует точка $x_i \in F'$ такая, что $r_i > a$; при этом если $\deg x_i = 4, 6$, то x_i — достаточно общая точка в смысле леммы* 1;

(3) *если $r_i > a$, $\deg x_i = 2$, то найдется точка x_j такая, что $r_i + r_j > 2a$*;

(4) *если $r_i > a$, то $\deg x_i < 8$ и, значит, $\deg x_i = 2, 4, 6$.*

См. доказательство аналогичных утверждений в [3].

Лемма 3. *Любой бирациональный автоморфизм $\chi\colon F \to F$ представляется в виде композиции*

$$\chi\colon F \xrightarrow{\chi_1} F_1 \to \dots \xrightarrow{\chi_n} F_n \xrightarrow{a} F,$$

где $\chi_i \in X(F_i)$, $F_i \in I(F)$ и a — бирегулярный изоморфизм.

Доказательство стандартно (см. [3, 10]).

Определим группу $B(F)$ как свободное произведение групп A_i, $i \in I(F)$, и свободной группы, порожденной $\bigcup\limits_{i \to I(F)} X(F_i)$. Как в § 1, после выбора бирациональных изоморфизмов $h_i\colon F \to F_i$ можно определить естественный гомоморфизм групп $B(F) \to \operatorname{Bir} F$, который по лемме 3 сюръективен.

Если нам будет нужно отразить в записи слова $\beta = \beta_n \dots \beta_1$ следующую информацию: β_l стягивает свой исключительный дивизор в фундаментальную точку β_k, $k > l$, и $\beta_{k-1} \dots \beta_{l+1}$ является изоморфизмом в окрестности этой точки, то мы будем писать в слове β вместо β_k: $\beta_k(\hat{l})$ для $\beta_k = \mu_x, \eta_x$ и $\beta_k(\hat{l}_1; \hat{l}_2)$ для $\beta_k = \sigma_{x,z}$. Здесь $\hat{l} = l$, если $\beta_l = \eta, \mu$, и $\hat{l} = (l, j)$, $j = 1, 2$, если $\beta_l = \sigma_{x_1 y_1}$; $j = 1$, если в x стягивается кривая из $\left|\frac{t}{2}(-K_F) - (t-1)x_1 - 2y_1\right|$, $t = \deg y_1$; $j = 2$, если в x стягивается кривая $\left|\frac{t}{2}(-K_F) - tx_1 - y_1\right|$. Аналогично определяются $\hat{l}_1$ для точки x и $\hat{l}_2$ для точки z.

Лемма 4. *Следующие бирациональные преобразования являются бирегулярными автоморфизмами поверхности F, тождественно действующими на* $\operatorname{Pic} F$:

(1) $\eta(1)\eta$, $\mu(1)\mu$, $\sigma(1,1;1,2)\sigma$;

(2) $\sigma(3,1;2,2)\sigma(2,1;1,2)\sigma_{x_1,y_1}(1,1;\cdot)\sigma_{x,y}$, $y_1 \notin \sigma_{x,y}(y)$;

(3) $\sigma(1,2;1,1)\sigma_{x,y}$, $\deg y = 2$;

(4) $\eta(3,2)\sigma(1,1;2)\eta(1,2)\sigma_{x,y}$, $\deg y = 4$;

(5) $\chi_{a(x')} a \chi_x$, *где* $\chi_x\colon F_i \to F_j$, $\chi_x \in I(F_i)$, x — *фундаментальная точка* χ, $a \in A_j$ — *бирегулярный автоморфизм* F_j, $\chi_{a(x')} \in X(F_j)$, $\chi_{a(x')}\colon F_j \to F_i$ — *того же типа, что и* χ_x, x' — *фундаментальная точка* χ_x^{-1}.

Доказательство этой леммы проводится так же, как доказательство леммы 1 § 1.

Теорема 4. *Все соотношения между описанными образующими группы* $\operatorname{Bir} F$ *выводятся из соотношений* (1)–(5) *леммы* 4.

Доказательство теоремы. Мы будем пользоваться следующими обозначениями. Пусть $\beta = \beta_n \dots \beta_1$ — слово из $B(F)$. Точка, в которую β_k стягивает свой исключительный дивизор, будет обозначаться через x_k. Если $\beta_k = \sigma_{x,z}$, то точка, в которую стягивается дивизор из $\left|\frac{t}{2}(-K_F) - (t-1)x - 2z\right|$, будет обозначаться через $x_{k,1}$, а точка, в которую стягивается дивизор из $\left|\frac{t}{2}(-K_F) - tx - z\right|$, — через $x_{k,2}$ ($t = \deg z$). Целые числа a_k, r_k (или $r_{k,j}$, если $\beta_k = \sigma_{x,z}$) определяются равенством

$$\beta(k)(-K_F) = a_k(-K_{F'}) - r_k x_k - \sum r_j x_j.$$

Фундаментальную точку β_k для $\beta_k = \eta, \mu$ мы обозначим через y_{k-1}; для $\beta_k = \sigma_{x,y}$ через $y_{k-1,1}$ мы обозначим точку x, а через $y_{k-1,2}$ — точку y. Кратность точки y_k ($y_{k,j}$) в линейной системе $\beta(k)(-K_F)$ будет обозначаться через $r(y_k)$ ($r(y_{k,j})$). Положим

$$A = A(\beta) = \max\{a_i \mid i = 1, \dots, n\};\ s = s(\beta) = \max\{i \mid a_i = A\}.$$

Лемма 5. *Пусть $\beta \in B(F)$. Условие $a_i \geqslant a_{i+1}$ эквивалентно*:

а) $r(y_i) \geqslant a_i$, *если* $\alpha_{i+1} = \eta, \mu$;

б) $r(y_{i,1}) + r(y_{i,2}) \geqslant 2a_i$, *если* $\alpha_{i+1} = \sigma_{x,y}$.

При этом равенство в обоих условиях имеет место одновременно.

Доказательство — прямое вычисление a_{i+1} через a_i и $r(y_i)$. Далее перебираются все возможные значения для α_s и α_{s+1}.

Лемма 6. *Пусть $\alpha \in S$ (см. определение 3 § 1). Тогда*:

а) *одно из α_s, α_{s+1} связано с точкой степени 2 (т. е. α_s или $\alpha_{s+1} = \sigma_{x,y}$)*;

б) *α_s, α_{s+1} не могут быть связаны с точкой степени 6 (α_s, $\alpha_{s+1} \neq \mu$).*

Доказательство. а) Предполагая противное, из $r_s \geqslant a_s$ ($a_s \geqslant a_{s-1}$), $r(y_s) > a_s$ ($a_{s+1} < a_s$) и леммы 2, (1), получаем $\deg x_s + \deg y_s < 8$.

б) Если, например, $\alpha_s = \sigma_{x,y}$ и $\alpha_{s+1} = \mu$, то, поскольку $r_{s,1} + r_{s,2} \geqslant 2a_s$ и $r(y_s) > a_s$, должно быть верно $2r_{s,1} + 2r_{s,2} + 4r(y_s) > 8a_s$, что противоречит лемме 2, (1) вне зависимости от того, совпадает ли точка $x_{s,2}$ с y_s, или нет. □

Лемма 7. *Пусть α — нормализованное специальное слово, $\alpha_s = \sigma_{x,y}$, $\alpha_{s+1} = \eta$. Тогда*:

а) $\deg y = 4$ *и* $\alpha_{s+1}\alpha_s = \eta(1,2)\sigma_{x,y}$;

б) *по модулю соотношений* (1)–(5) *α эквивалентно слову $\beta = \beta_2\beta_1$ со следующими свойствами*:

$$\begin{aligned}
&A(\beta_1) < A(\alpha), \ \textit{если}\, \alpha \in S',\\
&A(\beta_1) \leqslant A(\alpha), \ \textit{и}\, \beta_1 \in S', \ \textit{если}\, \alpha \in S \setminus S',\\
&A(\beta_2) < A(\alpha).
\end{aligned}$$

Доказательство. а) Предположим, что $\alpha_{s+1}\alpha_s \neq \eta(1,2)\sigma_{x,y}$ (или $x_{s,2} \neq y_s$). Из $r_{s,1}+r_{s,2} \geqslant 2a_2$ и $r(y_s) > a_s$ следует, что $2r_{s,1}+2r_{s,2}+4r(y_s) > 8a_s$, что противоречит лемме 2, (1).

б) Вычисляя a_s и $r(y_s)$ через a_{s-1}, $r(y_{s-1,j})$, находим

$$r(y_s) = 4a_{s-1} - 2r(y_{s-1,1}) - r(y_{s-1,2}) > 5a_{s-1} - 2r(y_{s-1,1}) - 2r(y_{s-1,2}) = a_s$$

или

$$r(y_{s-1,2}) > a_{s-1}.$$

Используя соотношение (4), можно, сделав замену $\alpha_{s+1}\alpha_s = \eta(1,2)\sigma_{x,y}$ на $\sigma_{x_1,y_1}(1)\eta_y$, получить слово β ($x_1 = \eta_y(x)$). Положим $\beta_1 = \delta\eta_y\alpha_{s-1}\ldots\alpha_1$ и $\beta_2 = \alpha_N\ldots\alpha_{s+2}\sigma_{x_1,y_1}(1)\delta^{-1}$. Здесь $\delta = \delta_t\ldots\delta_1$ — последовательность преобразований, раскручивающая $\eta_y\alpha(s-1)$ до тождественного преобразования. Неравенство $r(y_{s-1,2}) > a_{s-1}$ показывает, что $a(\eta_y\alpha(s-1)) < a(\alpha(s-1))$. Для $\alpha \in S \setminus S'$ отсюда следует, что $A(\beta_1) = A(\alpha)$ и $\beta_1 \in S'$, а для $\alpha \in S'$ — что $A(\beta_1) < A(\alpha)$. Поскольку $A(\beta_2) = \max(a(\alpha(s+1)), a(\eta\alpha(s-1)))$, то $A(\beta_2) < A(\alpha)$. Таким образом, лемма 7 доказана. □

Лемма 8. *Пусть α — нормализованное специальное слово, $\alpha_s = \sigma_{x_1,y_1}$, $\alpha_{s+1} = \sigma_{x_2,y_2}$. Тогда α эквивалентно по модулю соотношений* (1)–(5) *слову*

β, которое представляется в виде $\beta = \beta_2\beta_1$, где

$$\begin{aligned} &A(\beta_1) < A(\alpha), \text{ если } \alpha \in S', \\ &A(\beta_1) \leqslant A(\alpha), \text{ и } \beta_1 \in S', \text{ если } \alpha \in S \setminus S', \\ &A(\beta_2) < A(\alpha). \end{aligned}$$

Доказательство. Предположим сначала, что $x_{s,1} \neq y_{s,1}$. Из неравенств $r_{s,1} + r_{s,2} \geqslant 2a_2$ и $r(y_{s,1}) + r(y_{s,2}) > 2a_s$ и леммы 2, (1) мы получаем, что среди $x_{s,1}, x_{s,2}$, $y_{s,1}, y_{s,2}$ есть две совпадающие точки степени 2. Пользуясь соотношением (3) и заменяя слово α на эквивалентное, мы приходим к случаю, когда $x_{s,1} = y_{s,1}$. Заменяя теперь в слове α $\alpha_{s+1}\alpha_s = \sigma_{x_2,y_2}$, σ_{x_1,y_1} на $\sigma_{u,v}(1,1;\cdot)\sigma_{x_1,w}$ ($w = \sigma^{-1}_{x_1,y_1}(y_2)$, $v = \sigma_{x_1,w}(y_1)$), получаем слово β. Положим $\beta_1 = \delta\sigma_{x_1,w}\alpha(s-1)$, $\beta_2 = \alpha_N \dots \alpha_{s+2}\sigma_{u,v}\delta^{-1}$, где $\delta = \delta_t \dots \delta_1$ — последовательность преобразований из $\bigcup X(F_i)$, раскручивающая $\sigma_{x_1,w}\alpha(s-1)$ до тождественного преобразования. Из условия $a_{s+1} < a_s$ следует, что $a(\sigma_{x_1,w}\alpha(s-1)) < a(\alpha(s-1))$. Тем самым мы получаем, что $A(\beta_1) < A(\alpha)$ при $\alpha \in S'$ и $A(\beta_1) = A(\alpha)$, $\beta_1 \in S'$, при $\alpha \in S \setminus S'$. Для слова β_2 есть неравенство

$$A(\beta_2) = \max\{a(\sigma_{x_1,w}\alpha(s-1)), a(\alpha(s+1))\} < A(\alpha),$$

из которого следует, что $\beta = \beta_2\beta_1$ — требуемое в лемме разложение β. □

Заметим в заключение, что для рассматриваемого в этом параграфе класса поверхностей верна лемма 4 § 1 с дословным повторением доказательства. Из этой леммы и лемм 6–8 мы точно так же, как в § 1, получаем доказательство теоремы 4.

§ 5. Соотношения в группе $\operatorname{Bir} F$ для поверхности F с $\rho = 2$ и $d = 4$

5.1. В этом параграфе через F обозначается (минимальная) поверхность, расслоенная на коники $\pi\colon F \to C$ с $d = K_F^2 = 4$. Чтобы рассмотреть одновременно оба случая: а) $C(k) = \varnothing$ и б) $C(k) \neq \varnothing$, мы будем понимать в этом параграфе под $Z^*(F)$ группу $\operatorname{Pic}(\overline{F})^G + Z^0(F)$, $G = \operatorname{Gal}(\bar{k}/k)$. Имеем $\operatorname{Pic}(\overline{F})^G = \mathbf{Z}f + \mathbf{Z}(-K_F)$, где f — класс геометрического слоя морфизма π.

Образующие группы $\operatorname{Bir} F$ описаны в [3]. Приведем точную формулировку этого результата.

Лемма 1. (i) *Если $-K_F$ обилен, то он задает вложение F в $\mathbf{P}^4$ на поверхность дель Пеццо степени 4; линейная система $|-K_F - f|$ (или $|-2K_F - 2f|$, если $C(k) = \varnothing$) задает другой (дополнительный) пучок коник $\lambda\colon F \to C'$ с классом геометрического слоя $l = -K_F - f$ в $\operatorname{Pic}(\overline{F})^G$.*

(ii) *Любая замкнутая точка $x \in F$, не лежащая на вырожденных слоях морфизма π (соответственно λ) и такая, что никакие две геометрические точки из $\overline{x} = (\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_{\deg x})$ не лежат на одном геометрическом слое морфизма π (соответственно λ), определяет бирациональное преобразование $\sigma_x\colon F \to F'$ (соответственно $\sigma'_x\colon F \to F''$) — элементарное преобразование с центром x вдоль пучка π (соответственно λ), действующее на $Z^*(F)$ по*

формулам

$$\sigma_x(-K_F) = -K_{F'} + (\deg x)f' - 2x', \quad \sigma_x(f) = f',$$
$$\sigma_x(x) = (\deg x)f' - x', \quad \sigma_x(z) = z', \quad z \neq x$$

(*соответственно* l, l' *вместо* f, f').

(iii) *Любой бирациональный автоморфизм* $\chi\colon F \to F$ *может быть разложен в композицию*

$$F = F_0 \xrightarrow{\alpha_0} F_1 \xrightarrow{\beta_1} F_2 \xrightarrow{\alpha_2} \ldots \to F_n \xrightarrow{a} F,$$

где $\alpha_0, \alpha_2, \ldots$ — *произведения элементарных преобразований вдоль одного пучка, а* $\beta_1, \beta_3, \ldots$ — *вдоль дополнительного, а — бирегулярной изоморфизм.*

Отметим, что если F обладает только одним пучком коник (т. е. не может быть бирационального отображения F на поверхность дель Пеццо степени 4, см. [4]), то в предыдущей диаграмме $n = 1$, т. е. все бирациональные автоморфизмы F сохраняют пучок коник.

З а м е ч а н и е. Мы хотим подчеркнуть, что может оказаться невозможным согласованно перенумеровать стандартные пучки на поверхностях дель Пеццо с $d = 4$, бирационально изоморфных F, т. е. в диаграмме из (iii) может случаться, что $F_j \simeq F$, $F_0 \to F_1$ и $F_j \to F_{j+1}$ — перестройки вдоль одного пучка, но обозначаются они разными буквами. Таким образом, мы используем обозначения σ_x, σ'_y только с целью указания момента перехода к другому (дополнительному) пучку коник.

Обозначим через $I(F)$ множество поверхностей со стандартным лучком коник и $K_F^2 = 4$, бирационально изоморфных F. Пусть $X(F_i)$ — множество бирациональных преобразований $F_i \in I(F)$, описанных в лемме 1, (ii), а A_i — группа бирегулярных автоморфизмов этой поверхности. Определим группу $B(F)$ как свободное произведение групп A_i и свободной группы, порожденной $\bigcup X(F_i)$. Зафиксировав бирациональные изоморфизмы $h_i\colon F \to F_i$, можно определить гомоморфизм $\varphi\colon B(F) \to \operatorname{Bir} F$, который по лемме 1 является эпиморфизмом.

Л е м м а 2. *Образы следующих элементов* $B(F)$ *в* $\operatorname{Bir} F$ *являются бирегулярными автоморфизмами* F:

(1) $\sigma(1)\sigma$, $\sigma'(1)\sigma'$;

(2) $\sigma(2)\sigma(1)\sigma_y\sigma_x$, $y \notin \sigma_x(x)$;

(3) $\sigma(2)\sigma'(1)\sigma_x$, $\deg x = 1$;

(4) $\sigma'(3)\sigma(2)\sigma'(1)\sigma_x$, $\deg x = 2$;

(5) $\sigma'(5)\sigma(4)\sigma'(3)$, $\sigma(2)\sigma'(1)\sigma_x$, $\deg x = 3$;

(6) *для любого* $\chi_{ij} \in X(F_j)$, $\chi_{ij}\colon F_j \to F_i$, *и* $a \in A_i$ *существуют* $\chi_{ji} \in X(F_i)$, $\chi_{ji}\colon F_i \to F_j$, *и* $a' \in A_j$ *такие, что* $a'\chi_{ji}a\chi_{ij} = 1$.

Доказательство леммы состоит в вычислении образа $\beta(-K_F)$ для всех слов β вида (1)–(6) (см. лемму 1 § 1).

Т е о р е м а 5. *Ядро* K *эпиморфизма* $\varphi\colon B(F) \to \operatorname{Bir} F$ *порождено словами вида* (1)–(6) *из леммы* 2, *т. е. все соотношения между описанными образующими* $\operatorname{Bir} F$ *выводятся из соотношений* (1)–(6).

5.2. Доказательство теоремы. Любое слово $\alpha = \alpha_n \dots \alpha_1 \in B(F)$ разбивается на (максимальные) отрезки $I_k = \alpha_{n_k} \dots \alpha_{m_k} = \alpha_{k,n(k)} \dots \alpha_{k,1}$ такие, что внутри каждого отрезка все преобразования связаны с одним пучком коник. Точку, в которую стягивается исключительный дивизор α_m $(= \alpha_{k,t})$, мы будем обозначать через x_m $(= x_{k,t})$, а кратность линейной системы $(\alpha_m \dots \alpha_1)(-K_F)$ в этой точке — через r_m $(= r_{k,t})$. Фундаментальную точку α_m (или $\alpha_{k,t}$) мы будем обозначать через y_m $(= y_{k,t})$, а кратность линейной системы в ней — через $r(y_m)$ $(= r(y_{k,t}))$.

Числа a_i, $\{b_{ij}\}_{j=1}^{n(i)}$ определяются равенством

$$(\alpha_{i,j} \dots \alpha_{1,1}(-K_F) = a_i f_1 + b_{ij} f_2 - \sum r''_{ij} x_{ij},$$

где f_2 — класс геометрического слоя пучка коник, вдоль которого действует $\alpha_{i,j}$, а $f_1 = -K_F - f_2$. Положим

$$b_i = b_{i,n(i)}, \quad A = A(\alpha) = \max\{a_i \mid i = 1, \dots, n\},$$
$$s = s(\alpha) = \max\{k \mid A = a_k\}.$$

Лемма 3. *Пусть $\chi\colon F \to F'$ — бирациональный изоморфизм $(F' \in I(F))$ и $\chi(-K_F) = af_1 + bf_2 - \sum r_i x_i$ (здесь f_2 — класс геометрического слоя пучка π', а $f_1 = -K_{F'} - f_2$). Тогда*:

а) *имеют место равенства*

$$4ab - 4 = \sum r_i^2 \deg x_i, \quad 2a + 2b - 4 \sum r_i \deg x_i;$$

б) *если $b < a$, то F' — поверхность дель Пеццо и f_1 — класс геометрического слоя дополнительного к π' пучка коник*;

в) *предположим, что $a \leqslant b$ и $b > 1$; тогда найдутся $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ такие, что $r_{i_1} \geqslant \dots \geqslant r_{i_k} > a$, и для числа b', определяемого равенством*

$$(\sigma_{x_{i_k}} \dots \sigma_{x_{i_1}} \chi)(-K_F) = af_1 + b' f_2 - \sum r'_j x_j,$$

имеет место $b' < a$ для $a > 1$ и $b' = a$ для $a = 1$;

г) *предположим, что $(\sigma_x \chi)(-K_F) = af_1 + b' f_2 - \sum r'_i x_i$ (σ_x — перестройка в пучке π') и $b' < b$; тогда кратность r_x линейной системы $\chi(-K_F)$ в точке x удовлетворяет неравенству $r_x > a$.*

См. доказательство аналогичных утверждений в [3].

Определение 1. Назовем слово $\alpha \in B(F)$ *специальным*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1) $a_1 < a_2 < \dots < a_{s-1}$;

2) $a_{s-1} \leqslant a_s$;

3) $b_{k,j} < b_{k,j+1}$ и $b_{k,1} \geqslant a_k$ для $k < s$;

4) $a_s > a_{s+1} > \dots > a_N$;

5) $b_{k,j} > b_{k,j+1}$ при $k > s$, и если $b_{k,j} < a_k$, то $f = n(k)$, т. е. $\alpha_{k,j}$ — последний элемент в отрезке I_k;

6) отрезок I_s состоит из одного элемента.

Если слово α удовлетворяет условиям 1)–6) и $\alpha_{s-1} < \alpha_s$, то мы его будем называть *очень специальным*. Множество специальных (соответственно очень специальных слов) будет обозначаться через S (соответственно S').

Лемма 4. *Любое слово $\alpha = \alpha_{N,n(N)} \dots \alpha_{1,1} \in K$ эквивалентно по модулю соотношений* (1)–(6) *слову β, которое представляется в виде произведения $\beta = \beta_n \dots \beta_1$ специальных слов с не большим, чем у α значением A.*

Доказательство. Пусть $k = k(\alpha)$ — минимальный индекс, для которого не выполняется одно из условий $b_{k,j} < b_{k,j+1}$, $b_{k,1} \geqslant a_k$, $b_{k,n(k)} > a_k$, $j = 1, \dots, n(k)-1$ ($\alpha_{k,n(k)}$ — последний элемент в отрезке I_k). Переставляя $\alpha_{k,i}$ так, чтобы $b_{k,i} - b_{k,i-1} \leqslant b_{k,i+1} - b_{k,i}$ для $i = 1, \dots, m$ (т. е. $r(y_{k,i}) \geqslant r(y_{k,i+1})$) и $b_{k,i+1} - b_{k,i} > 0$ для $i > m$ — здесь используются соотношения (2)), — получаем слово β.

Положим $\beta_1 = \delta\beta_{k,1}\beta_{k-1,n(k-1)} \dots \beta_{1,1}$. Здесь $\delta = \delta_t \dots \delta_1$ — последовательность преобразований из $\bigcup X(F_i)$, раскручивающая $\beta_{k,1} \dots \beta_{1,1}$ до тождественного преобразования. Эта последовательность может быть выбрана так, чтобы:

а) для слова $\delta_1^{-1} \dots \delta_t^{-1}$ выполнялись $b_{ij}(\delta^{-1}) < b_{i,j+1}(\delta^{-1})$ и $b_{i,1}(\delta^{-1}) \geqslant$ $\geqslant a_i(\delta^{-1})$, $i = 1, \dots, t$, $j = 0, \dots, n(i) - 1$;

б) δ_1 было перестройкой в пучке коник, дополнительном к пучку, который перестраивает $\beta_{k,1}$.

Покажем, что на поверхности $F_{k,1}$ ($\beta_{k,1}$ действует из $F_{k-1,n(k-1)}$ в $F_{k,1}$) есть два стандартных пучка коник. Если отрезок I_k состоит из одного элемента, то это так по условию. Если в I_k больше одного элемента, то верно $b_{k,1}(\beta) <$ $< a_k(\beta)$. Действительно, для $m \neq 0$ $b_{k,1}(\beta) \leqslant b_{k,0}(\beta) = a_{k-1}(\beta) < a_k(\beta)$, а для $m = 0$ либо не выполняется $b_{k,1}(\beta) \geqslant a_k(\beta)$, либо не выполняется $b_{k,n(k)}(\beta) >$ $> a_k(\beta)$, но в этом случае $b_{k,1}(\beta) < b_{k,2}(\beta) < \dots \leqslant a_k(\beta)$. Из леммы 3, б) следует теперь, что $F_{k,1}$ — поверхность дель Пеццо, и по лемме 1, (i) на $F_{k,1}$ есть два стандартных пучка коник. Из неравенства $b_{k,1} \leqslant a_k$ (если I_k состоит из одного элемента, то $b_{k,1} = a_k$) следует, что $A(\beta_1) \leqslant A(\beta) = A(\alpha)$. Мы получили, что $\beta_1 \in S$ и $\beta = \beta'\beta_1$, где $\beta' = \beta_{N,n(N)} \dots \beta_{k,2}\delta^{-1}$. Доказательство завершает индукция по числу элементов в слове $I_{N(\beta)} \dots I_{k(\beta)}$. □

Лемма 5. *Пусть α — специальное нормализованное слово и σ_x — единственный элемент I_s. Тогда* $\deg x \leqslant 3$.

Действительно, записывая условие $a_{s+1} < a_s$ через a_{s-1}, b_{s-1}, $r(y_{s,1})$, получаем $a_{s+1} = b_s = b_{s,0} + (\deg x)a_s - (\deg x)r(y_{s,1}) < a_s = b_{s-1}$ или ($b_{s,0} = a_{s-1}$, $b_{s-1} = a_s$, $x = y_s$):

$$(\deg x)r(y_{s,1}) > a_{s-1} + (\deg x - 1)b_{s-1}. \tag{I}$$

Из леммы 3, а) и $b_{s-1} \geqslant a_{s-1}$ ($\alpha \in S$) находим $\deg x \leqslant 3$.

Лемма 6. *Пусть α — специальное нормализованное слово, $a_{s,1} = \sigma_x$ и* $\deg x = 3$. *Тогда*:

а) $I_{s+1}I_sI_{s-1} = \sigma'(2)\sigma_x(1)\sigma'_y$;

б) *α эквивалентно по модулю соотношений* (1)–(6) *слову β с $A(\beta) < A(\alpha)$.*

Доказательство. а) В лемме 5 показано (неравенство (I)), что $3r(y_{s,1}) > a_{s-1} + 2b_{s-1}$. Если в I_{s-1} существует элемент $\alpha_{s-1,i}$, с которым $\alpha_{s,1}$ не сцеплен (см. § 1, определение 2), то $r_{s-1,i} \geqslant a_{s-1}$ (лемма 3, г))

и $3r(y_{s,1})+r_{s-1,i} > 2a_{s-1}+2b_{s-1}$, что противоречит лемме 3, а). Аналогично — для I_{s+1}.

б) Замена $I_{s+1}I_sI_{s-1} = \sigma'(2)\sigma_x(1)\sigma'_y$ на $\sigma(2)\sigma'_x(1)\sigma_y$ (мы пользуемся соотношением (5)) приводит к слову β, для которого $A(\beta) < A(\alpha)$.

Действительно,

$$a_{s-2}(\beta) = a_{s-2}(\alpha);$$
$$a_{s-1}(\beta) = b_{s-2}(\beta) = b_{s-2}(\alpha) + 3a_{s-2}(\alpha) - 3r(y_{s-1,1}) <$$
$$< a_{s-2}(\alpha) + 3b_{s-2}(\alpha) - 3r(y_{s-1,1}) = a_{s-1}(\alpha)$$

(последнее неравенство следует из $b_{s-2}(\alpha) > a_{s-2}(\alpha)$, $b_{s-2}(\alpha) = a_{s-1}(\alpha)$, $a_{s-2}(\alpha) = b_{s-1,0}(\alpha)$); $a_s(\beta) = a_{s+1}(\alpha)$. Это доказывает, что $A(\beta) < A(\alpha)$. Для завершения доказательства леммы надо обосновать возможность, перехода к другому пучку коник после применения σ_y и σ'_z, или, что то же самое, показать, что $\gamma'' = \sigma(3)\alpha_{s+1,1}\alpha_{s,1}\alpha_{s-1,1}\colon F' \to F''$ и $\gamma''' = \sigma'(4)\sigma(3)\alpha_{s+1,1}\alpha_{s,1}\alpha_{s-1,1}\colon F' \to F'''$ отображают F' ($\alpha_{s-2,n(s-2)}\dots\alpha_{1,1}$ действует из F в F') на поверхность дель Пеццо. Но $\alpha_{s+1,1}\alpha_{s,1}\alpha_{s-1,1}$ отображает F' на поверхность дель Пеццо по условию, и тот факт, что F'', F''' — поверхности дель Пеццо, следует из явного вычисления $\gamma''(-K_{F'})$, $\gamma'''(-K_{F'})$ и леммы 3, б). Лемма 6 доказана. □

Лемма 7. *Пусть α — специальное нормализованное слово, $a_{s,1} = \sigma_x$ и $\deg x = 3$. Тогда α эквивалентно по модулю соотношений* (1)–(6) *слову β такому, что $A(\beta) < A(\alpha)$, если $\alpha \in S'$. Если же $\alpha \in S \setminus S'$, то $\beta = \beta_r \dots \beta_1$, где $\beta_i \in S'$, $A(\beta_i) \leqslant A(\alpha)$ для $i = 1, \dots, r-1$, и $A(\beta_r) < A(\alpha)$.*

Доказательство. Неравенство (I) из леммы 5 выглядит в рассматриваемом случае следующим образом: $a_{s-1} + b_{s-1} < 2r(y_{s,1})$. Замена $\alpha_{s,1} = \sigma_x$ в слове α (используется соотношение (4)) на $\sigma'_z(2)\sigma_y(1)\sigma'_x$ приводит к слову β, для которого:

1) $a_{s-1}(\beta) = a_{s-1}(\alpha)$;

2) $a_s(\beta) = b_{s-1}(\beta) = b_{s-1}(\alpha) + 2a_{s-1}(\alpha) - 2r(y_{s,1}) < a_{s-1}(\alpha)$ — это неравенство следует из (I);

3) $a_{s+1}(\beta) = a_{s+1}(\alpha)$.

Таким образом, если $\alpha \in S'$, то $a_{s-1}(\alpha) < b_{s-1}(\alpha) = A(\alpha)$ и $A(\beta) = \max\{a_{s-1}(\alpha), a_{s+1}(\alpha)\} < A(\alpha)$. Если $\alpha \in S \setminus S'$, то положим $\beta = \beta_r\beta'$, где $\beta' = \delta\sigma'_x\alpha_{s-1,n(s-1)}\dots\alpha_{1,1}$ (δ, как обычно, раскручивает $\sigma'_x\alpha_{s-1,n(s-1)}\dots\alpha_{1,1}$) и $\beta_r = \alpha_{N,n(N)}\dots\alpha_{s+1,1}\sigma_z\sigma_y\delta^{-1}$). Процедура разложения слова в произведение специальных слов, описанная в лемме 4, дает $\beta' = \beta_{r-1}\dots\beta_1$, где $\beta_i \in S'$, $i = 1, \dots, r-1$. Это следует из того, что в обозначениях леммы 4 $k(\beta') = s(\alpha) - 1$, а как проверено выше, $b_{k(\beta')}(\beta') = b_{s(\alpha)-1}(\beta') < a_{s(\alpha)-1}(\beta')$ ($\beta_i \in S \setminus S'$ в лемме 4 появлялись только в одной ситуации: когда $b_{k(\alpha)} = a_{k(\alpha)}$ и $I_{k(\alpha)}(\alpha)$ состоит из одного элемента); $A(\beta_r) = \max\{a_s(\beta), a_{s+1}(\beta)\} < A(\alpha)$. Возможность перехода к другому пучку коник после применения σ'_x и σ_y обосновывается точно так же, как и в лемме 6. Лемма 7 доказана. □

Лемма 8. *Пусть α — специальное нормализованное слово, $a_{s,1} = \sigma_x$ и $\deg x = 1$. Тогда α эквивалентно по модулю соотношений* (1)–(6) *слову β*

такому, что $A(\beta) < A(\alpha)$, *если* $\alpha \in S'$. *Если же* $\alpha \in S \setminus S'$, *то* $\beta = \beta_r \dots \beta_1$, *где* $\beta_i \in S'$, $A(\beta_i) \leqslant A(\alpha)$ *для* $i = 1, \dots, r-1$, *и* $A(\beta_r) < A(\alpha)$.

Доказательство. Неравенство (I) выглядит в этом случае следующим образом: $a_{s-1} < r(y_{s,1})$. Заменяя $\alpha_{s,1} = \sigma_x$ в слове α на $\sigma_y(1)\sigma'_x$ (используется соотношение (3)), получаем слово β. Из

1) $a_{s-1}(\beta) = a_{s-1}(\alpha)$;

2) $a_s(\beta) = b_{s-1}(\beta) = b_{s-1}(\alpha) + a_{s-1}(\alpha) - r(y_{s,1}) < b_{s-1}(\alpha) = a_s(\alpha)$;

3) $a_{s+1}(\beta) = a_{s+1}(\alpha)$

следует, что при $\alpha \in S'$ $A(\beta) < A(\alpha)$. Если $\alpha \in S \setminus S'$, то положим $\beta = \beta_r\beta'$, где $\beta' = \delta\sigma'_x\alpha_{s-1,n(s-1)} \dots \alpha_{1,1}$, $\beta_r = \alpha_{N,n(N)} \dots \alpha_{s+1,1}\sigma_y\delta^{-1}$). Как и в лемме 7, условие $b_{s-1}(\beta') < a_{s-1}(\beta')$ и процедура, описанная в доказательстве леммы 4, позволяют разложить β' по модулю соотношений (1)–(6) в произведение слов β_i, $i = 1, \dots, r-1$, из S' с $A(\beta_i) \leqslant A(\beta)$. Для β_r имеем $A(\beta_r) = \max\{a_s(\beta), a_{s+1}(\beta)\} < A(\alpha)$. Лемма 8 доказана. □

Доказательство теоремы 5 получается с помощью индукции по A из лемм 6–8 (см. § 1, окончание доказательства теоремы 1).

§ 6. Образующие и соотношения для поверхности F с $\rho = 2$ и $d = 8$

В этом параграфе мы рассматриваем поверхности $F = C_1 \times C_2$ следующих двух типов:

I. C_1 — гладкая кривая рода нуль без k-точек, т. е. $C_1(k) = \varnothing$ и $C_2 \simeq \mathbf{P}^1_k$,

II. C_i — гладкие кривые рода нуль без k-точек, $i = 1, 2$.

Обозначим через $I(F)$ множество минимальных поверхностей с $K_F^2 = 8$, расслоенных на коники, бирационально изоморфных F.

Лемма 1. *Пусть* $F' \in I(F)$, $\pi' \colon F' \to C'_1$ — *пучок коник на* F' *и* $f' = \pi'^{-1}(-K_{C'_1})$.

а) *Если* $-K_{F'}$ *обилен, то линейная система* $|-K_{F'} - f'|$ *задает на* F' *другой пучок коник* $\lambda' \colon F' \to C'_2$ *и* $F' \simeq C'_1 \times C'_2$.

б) *Любая замкнутая точка* x *такая, что никакие две геометрические точки из* $\overline{x} = (\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_{\deg x})$ *не лежат на одном геометрическом слое пучка* π', *определяет элементарное бирациональное преобразование* $\sigma_x \colon F' \to F''$, $F'' \in I(F)$:

$$\sigma_x(-K_{F'}) = -K_{F''} + \frac{1}{2}(\deg x)f'' - 2x'', \quad \sigma_x(f') = f'',$$
$$\sigma_x(x) = \frac{1}{2}(\deg x)f'' - x'', \quad \sigma_x(z) = z', \quad z \neq x.$$

Если на F' *есть еще один пучок коник* λ', *то мы будем обозначать элементарные преобразования вдоль него через* σ' (*см. замечание к лемме* 1 § 5).

в) *Любой бирациональный автоморфизм* $\chi \colon F \to F$ *может быть разложен в композицию*

$$F = F_0 \xrightarrow{\alpha_0} F_1 \xrightarrow{\beta_1} F_2 \xrightarrow{\alpha_2} \dots \to F_n \xrightarrow{a} F,$$

где F_i — *поверхности дель Пеццо,* $\alpha_0, \alpha_2, \dots$ — *произведение элементарных*

преобразований вдоль одного пучка коник, а $\beta_1, \ldots$ *— вдоль другого; а — бирегулярный изоморфизм.*

Доказательство п. в) стандартным образом выводится из леммы 2 (см. [3]).

Лемма 2. *Пусть* $\chi\colon F \to F'$ *— бирациональный изоморфизм* ($F' \in I(F)$), $f_2 = \pi'(-K_{C_1'})$ ($\pi'\colon F' \to C_1'$ *— пучок коник на* F'), $f_1 = -K_{F'} - f_2$, *и* $\chi(-K_F) = af_1 + bf_2 - \sum r_i x_i$ ($b \in (1/2)\mathbf{Z}$). *Тогда*:

а) *имеют место равенства*

$$8ab - 8 = \sum r_i^2 \deg x_i, \quad 4a + 4b - 8 = \sum r_i \deg x_i;$$

б) *если* $b < a$, *то* F' *— поверхность дель Пеццо и* $f_1 = \lambda'^{-1}(-K_{C_2'})$, *где* $\lambda'\colon F' \to C_2'$ *— другой пучок коник на* F';

в) *предположим, что* $a \leqslant b$ *и* $b > 1$; *тогда найдутся* $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ *такие, что* $r_{i_1} \geqslant \ldots \geqslant r_{i_k} > a$ *и для числа* b', *определяемого* $(\sigma_{x_{i_k}} \ldots \sigma_{x_{i_1}} \chi)(-K_F) = af_1 + b_1' f_2 - \sum r_i' x_i$, *имеет место* $b' < a$ *для* $a > 1$ *и* $b' = a$ *для* $a = 1$;

г) *предположим, что* $(\sigma_x \chi)(-K_F) = af_1 + b'f_2 - \sum r_i' x_i$ (σ_x *— перестройка в пучке* π') *и* $b' < b$; *тогда кратность* r_x *линейной системы* $\chi(-K_F)$ *в точке* x *удовлетворяет неравенству* $r_x > a$.

Доказательство стандартно (см. аналогичные утверждения в [3]).

Обозначим через $X(F_i)$ множество описанных в п. б) леммы 1 отображений $F_i \to F_i'$ ($F_i \in I(F)$). Определим группу $B(F)$ как свободное произведение групп A_i со свободной группой, порожденной $\bigcup X(F_i)$ (A_i — группа бирегулярных автоморфизмов F_i), Фиксировав бирациональные изоморфизмы $h_i\colon F \to F_i$, можно определить гомоморфизм $\varphi\colon B(F) \to \mathrm{Bir}(F)$.

Лемма 3. *Образы следующих слов в* $\mathrm{Bir}\, F$ *являются бирегулярными автоморфизмами* F:

(1) $\sigma(1)\sigma$;

(2) $\sigma(2)\sigma(1)\sigma_y\sigma_x$, $y \notin \sigma_x(x)$;

(3) $\sigma(2)\sigma'(1)\sigma_x$, $\deg x = 2$;

(4) $\sigma'(3)\sigma(2)\sigma'(1)\sigma_x$, $\deg x = 4$;

(5) $\sigma'(5)\sigma(4)\sigma'(3)$, $\sigma(2)\sigma'(1)\sigma_x$, $\deg x = 6$;

(6) *для любых* $\varphi_{ij}\colon F_j \to F_i$, $\varphi_{ij} \in X(F_j)$, *и* $a \in A_i$ *существуют* $\varphi_{ji}\colon F_i \to F_j$, $\varphi_{ji} \in X(F_i)$, *и* $a' \in A_j$ *такие, что* $a'\varphi_{ji}a\varphi_{ij} = 1_{F_j}$.

Лемма доказывается проверкой того, что все перечисленные преобразования сохраняют $-K_F$.

Теорема 6. *Все соотношения между описанными образующими группы* $\mathrm{Bir}\, F$ *выводятся из соотношений леммы* 3.

Доказательство дословно повторяет доказательство теоремы 5, если только использовать в качестве «степеней» точек $x \in F_i$ числа $(1/2)\deg x$ (степени замкнутых точек над F_i четны).

Литература

[1] Гизатуллин М. Х. Определяющие соотношения для кремоновой группы плоскости // Известия АН СССР. Сер. матем. — 1982. — Т. 46, № 5. — С. 909–970.

[2] Исковских В. А. Рациональные поверхности с пучком рациональных кривых // Матем. сб. — 1967. — Т. 74(116), № 4. — С. 608–638.

[3] Исковских В. А. Рациональные поверхности с пучком рациональных кривых и с положительным квадратом канонического класса // Матем. сб. — 1970. — Т. 83(125), № 1. — С. 90–119.

[4] Исковских В. А. Бирациональные свойства поверхности степени 4 в $\mathbf{P}_k^4$ // Матем. сб. — 1972. — Т. 88(130), № 1. — С. 31–37.

[5] Исковских В. А. Минимальные модели рациональных поверхностей над произвольными полями // Известия АН СССР. Сер. матем. — 1979. — Т. 43, № 1. — С. 19–43.

[6] Исковских В. А. Образующие в двумерной группе Кремоны над совершенным полем // Исследования по алгебре. — Тбилиси, 1984. — С. 88–114.

[7] Исковских В. А. Образующие и соотношения в группах бирациональных автоморфизмов двух классов рациональных поверхностей // Труды МИАН СССР. — Т. 165. — С. 67–78.

[8] Kantor S. Rationale Zerlegung der birationalen Transformationen in ihre Primfaktoren // Monatsh. Math. und Phys. — 1899. — Bd. 10, № 1. — S. 54–74.

[9] Манин Ю. И. Рациональные поверхности над совершенными полями. II // Матем. сб. — 1967. — Т. 72(114), № 2. — С. 161–192.

[10] Манин Ю. И. Кубические формы. — М.: Наука, 1972.

[11] Mori S. Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective // Ann. of Math. — 1982. — V. 116. — P. 133–176.

[12] Weinstein F. W. On birational automorphisms of Severi–Brauer surfaces // Rept. Dep. Math. Univ. Stockholm. — 1989. — № 1. — P. 1–14.

Соотношения в двумерной группе Кремоны над совершенным полем

(*совместно с Ф. К. Кабдыкаировым, С. Л. Трегубом*)

К семидесятилетию И. Р. Шафаревича

Введение

В этой статье мы изучаем определяющие соотношения для образующих в группе бирациональных автоморфизмов плоскости $\mathbf{P}^2_k$ над совершенным полем k. Эта группа обычно называется *двумерной группой Кремоны* и обозначается через $\mathrm{Cr}_2(k)$. Она изоморфна группе k-автоморфизмов $\mathrm{Aut}_k\, k(x,y)$ поля рациональных функций от двух переменных $k(x,y)$ над k.

Напомним, что в случае алгебраически замкнутого поля $k=\overline{k}$ образующие в $\mathrm{Cr}_2(k)$ были найдены М. Нётером еще в прошлом веке — это линейные и бирациональные квадратичные преобразования $\mathbf{P}^2_{\overline{k}}$ (см., например, [2]). Определяющие соотношения между этими образующими были описаны более века спустя в работе [1] (другое доказательство см. в [4]). Образующие в группе $\mathrm{Cr}_2(k)$ над незамкнутым полем впервые были найдены также в классической работе С. Кантора [11] (над полем рациональных чисел $\mathbf{Q}$). Недавно первый из авторов [3] описал некоторую систему образующих в $\mathrm{Cr}_2(k)$ над произвольным совершенным полем k, несколько отличающуюся от системы образующих Кантора.

Основным результатом настоящей работы является полное описание определяющих соотношений для образующих из [3] в группе Кремоны $\mathrm{Cr}_2(k)$ над совершенным полем k. Некоторые из соотношений получены в [9, 10]. Изучением $\mathrm{Cr}_2(k)$ завершается цикл исследований групп бирациональных автоморфизмов рациональных поверхностей над совершенными полями в терминах образующих и соотношений (см. [12, 13] и [6, 8]). Эти группы представляют интерес как для арифметики рациональных поверхностей [13], так и для изучения бирациональных автоморфизмов 3-мерных алгебраических многообразий [7].

В § 1 мы напоминаем список образующих из [3]. Полная система определяющих соотношений для этих образующих приведена в § 2. Формулировка

Известия РАН. Сер. матем. — 1993. — Т. 57, № 3. — С. 3–69.

основного результата и лемма о редукции к специальным соотношениям содержится в § 3. Основные технические леммы собраны в § 4. Доказательству основной теоремы посвящены § 5,6.

В заключение отметим, что в случае алгебраически замкнутого поля $k = \bar{k}$, как следствие основной теоремы, мы получаем также некоторое альтернативное к [1] описание соотношений в группе $\mathrm{Cr}_2(k)$, близкое к приведенному в [5].

Первый из авторов благодарит Математический институт Макса Планка за предоставленную возможность работать в сентябре–октябре 1992 г. над окончательной редакцией статьи. Авторы благодарят также М. Х. Гизатуллина за полезные замечания.

§ 1. Образующие в группе $\mathbf{Cr_2}(k)$

1.1. Следуя [3], воспроизведем здесь список образующих в двумерной группе Кремоны $\mathrm{Cr}_2(k)$ над произвольным совершенным полем k. Группа $\mathrm{Cr}_2(k)$ имеет естественное точное представление на предельной группе циклов $Z^*(\mathbf{P}^2_k) = \operatorname{Pic}\mathbf{P}^2_k + Z^0(\mathbf{P}^2_k)$ (см. [13, гл. V]), поэтому все бирациональные преобразования из $\mathrm{Cr}_2(k)$, в частности образующие, мы будем записывать в терминах их действия на $Z^*(\mathbf{P}^2_k)$. Будем свободно пользоваться формализмом предельных групп циклов, описанным в [13, гл. V]. Отметим только одно отличие: через $Z^0(V)$ мы обозначаем свободную абелеву группу, порожденную замкнутыми, а не геометрическими, как в [13], точками пространства $E(V)$ поверхности V над полем k. Для замкнутой точки $x \in E(V)$ степени $\deg x = d$ мы будем придерживаться обозначения x^d. Через l будем обозначать класс прямой в $\operatorname{Pic}\mathbf{P}^2_k$.

Пусть $\chi\colon \mathbf{P}^2_k \dashrightarrow \mathbf{P}^2_k$ — бирациональное отображение, задаваемое линейной системой (с базисными условиями)

$$|\chi| = \left| al - \sum_{i=1}^{N} r(y_i^{d_i}) y_i^{d_i} \right|,$$

и χ^{-1} — обратное отображение, задаваемое системой

$$|\chi^{-1}| = \left| al - \sum_{j=1}^{N} r(x_j^{c_j}) x_j^{c_j} \right|.$$

Тогда на группе $Z^*(\mathbf{P}^2_k) = \operatorname{Pic}\mathbf{P}^2_k + Z^0(\mathbf{P}^2_k)$ отображение χ представляется в виде

$$\begin{gathered} l \to al - r(x_1^{c_1})x_1^{c_1} - \ldots - r(x_N^{c_N})x_N^{c_N}, \\ y_i^{d_i} \to r_i^0 l - r_i^1(x_1^{c_1})x_1^{c_1} - \ldots - r_i^N(x_N^{c_N})x_N^{c_N}, \quad x_i^{c_i}, y_i^{d_i} \in E(\mathbf{P}^2_k), \\ y \to x, \quad x, y \in E(\mathbf{P}^2_k), \quad y \notin \{y_i^{d_i}\}, \quad x \notin \{x_i^{c_i}\}, \\ a, r_i^j, r(x_i^{c_i}) \in \mathbf{Z}, \quad a \geqslant 1, \quad r_i^j \geqslant 0, \quad r(x_i^{c_i}) \geqslant 0, \\ i = 1, \ldots, N, \quad j = 0, \ldots, N; \end{gathered}$$

и аналогично для χ^{-1}. Для отображения χ удобно использовать обозначение $\chi_{d_1,\ldots,d_N}$, указывая явно степени фундаментальных точек (а иногда и сами

эти точки, если в этом есть необходимость): $y_1^{d_1}, \ldots, y_N^{d_N}$. Действие $\chi_{d_1,\ldots,d_N}$ на $Z^*(\mathbf{P}_k^2)$ будем записывать в виде матрицы

$$\chi_{d_1,\ldots,d_N}: \begin{vmatrix} a & r_1^0 & r_2^0 & \ldots & r_N^0 \\ -r(x_1^{c_1}) & -r_1^1 & -r_2^1 & \ldots & -r_N^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -r(x_N^{c_N}) & -r_1^N & -r_2^N & \ldots & -r_N^N \end{vmatrix}.$$

Отметим, что в такой записи действие $\chi_{d_1,\ldots,d_N}$ на $y \in E(\mathbf{P}_k^2)$, $y \notin \{y_i^{d_i}\}$, теряется. Существенный факт состоит в том, что оно может быть «восстановлено» с точностью до действия на $E(\mathbf{P}_k^2)$ бирегулярных автоморфизмов.

1.2. Список образующих и матриц их действий на $Z^*(\mathbf{P}_k^2)$ (см. [3]):

$$\chi_8: \begin{vmatrix} 17 & 48 \\ -6 & -17 \end{vmatrix}; \quad \chi_7: \begin{vmatrix} 8 & 21 \\ -3 & -8 \end{vmatrix}; \quad \chi_6: \begin{vmatrix} 5 & 12 \\ -2 & -5 \end{vmatrix};$$

$$\chi_{5,4}: \begin{vmatrix} 41 & 80 & 40 \\ -16 & -34 & -16 \\ -10 & -20 & -9 \end{vmatrix}; \quad \chi_{5,3}: \begin{vmatrix} 16 & 30 & 15 \\ -6 & -11 & -6 \\ -5 & -10 & -4 \end{vmatrix}; \quad \chi_{5,2}: \begin{vmatrix} 8 & 15 & 6 \\ -3 & -6 & -2 \\ -3 & -5 & -3 \end{vmatrix};$$

$$\chi_{5,1}: \begin{vmatrix} 5 & 10 & 2 \\ -2 & -4 & -1 \\ -2 & -5 & 0 \end{vmatrix}.$$

Следующая серия преобразований (типа Жонкьера $(4;d)$) — это композиции элементарных преобразований с центрами в точках $y_2^{d_2}, \ldots, y_N^{d_N}$ вдоль пучка коник на $\mathbf{P}_k^2$, проходящих через замкнутую точку y_1^4 степени 4; положим $d = \sum\limits_{i=2}^{N} d_i$:

$$\chi_{4;d_2,\ldots,d_N}: \begin{vmatrix} 2d+1 & 4d & 2d_2 & \ldots & 2d_i & \ldots & 2d_N \\ -d & -(2d-1) & -d_2 & \ldots & -d_i & \ldots & -d_N \\ -2 & -4 & -1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -2 & -4 & 0 & \ldots & -1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -2 & -4 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & -1 \end{vmatrix};$$

$$\chi_3: \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}; \quad \chi_{2,7}: \begin{vmatrix} 29 & 28 & 56 \\ -14 & -13 & -28 \\ -8 & -8 & -15 \end{vmatrix}; \quad \chi_{2,6}: \begin{vmatrix} 13 & 12 & 24 \\ -6 & -5 & -12 \\ -4 & -4 & -7 \end{vmatrix};$$

$$\chi_{2,5,4}\colon \begin{vmatrix} 161 & 160 & 240 & 80 \\ -80 & -79 & -120 & -40 \\ -48 & -48 & -71 & -24 \\ -20 & -20 & -30 & -9 \end{vmatrix}; \quad \chi_{2,5,3}\colon \begin{vmatrix} 61 & 60 & 90 & 30 \\ -30 & -29 & -45 & -15 \\ -18 & -18 & -26 & -9 \\ -10 & -10 & -15 & -4 \end{vmatrix};$$

$$\chi_{2,5,2}\colon \begin{vmatrix} 19 & 18 & 30 & 6 \\ -9 & -8 & -15 & -3 \\ -6 & -6 & -9 & -2 \\ -3 & -3 & -5 & 0 \end{vmatrix}; \quad \chi_{2,5,1}\colon \begin{vmatrix} 13 & 12 & 20 & 4 \\ -6 & -5 & -10 & -2 \\ -4 & -4 & -6 & -1 \\ -4 & -4 & -5 & -2 \end{vmatrix};$$

$$\chi_{2,4}\colon \begin{vmatrix} 5 & 4 & 8 \\ -2 & -1 & -4 \\ -2 & -2 & -3 \end{vmatrix}; \quad \chi_{2,3,5}\colon \begin{vmatrix} 61 & 60 & 60 & 60 \\ -30 & -29 & -30 & -30 \\ -20 & -20 & -19 & -20 \\ -12 & -12 & -12 & -11 \end{vmatrix};$$

$$\chi_{2,3,4}\colon \begin{vmatrix} 25 & 24 & 24 & 24 \\ -12 & -11 & -12 & -12 \\ -8 & -8 & -7 & -8 \\ -6 & -6 & -6 & -5 \end{vmatrix}; \quad \chi_{2,3,3}\colon \begin{vmatrix} 13 & 12 & 12 & 12 \\ -6 & -5 & -6 & -6 \\ -4 & -4 & -3 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & -3 \end{vmatrix};$$

$$\chi_{2,3,2}\colon \begin{vmatrix} 7 & 6 & 6 & 6 \\ -3 & -2 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & -1 & -2 \\ -3 & -3 & -3 & -2 \end{vmatrix}; \quad \chi_{2,3,1}\colon \begin{vmatrix} 5 & 4 & 6 & 2 \\ -2 & -1 & -3 & -1 \\ -2 & -2 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}; \quad \chi_{2,1}\colon \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Следующая серия преобразований (типа Жонкьера $(2,2;d)$) — это композиции элементарных преобразований с центрами в точках $y_3^{d_3},\dots,y_N^{d_N}$ вдоль пучка коник на $\mathbf{P}_k^2$, проходящих через две замкнутые точки y_1^2, y_2^2 степени 2; $d=\sum\limits_{i=3}^{N} d_i$:

$$\chi_{2,2;d_3,\dots,d_N}\colon \begin{vmatrix} 2d+1 & 2d & 2d & 2d_3 & \dots & 2d_i & \dots & 2d_N \\ -d & -(d-1) & -d & -d_3 & \dots & -d_i & \dots & -d_N \\ -d & -d & -(d-1) & -d_3 & \dots & -d_i & \dots & -d_N \\ -2 & -2 & -2 & -1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -2 & -2 & -2 & 0 & \dots & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -2 & -2 & -2 & 0 & \dots & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}.$$

Следующая серия преобразований (типа Жонкьера $(1;d)$) связана с точкой y_1^1 степени 1 на $\mathbf{P}_k^2$. Пусть $\sigma_1\colon \mathbf{F}_1 \to \mathbf{P}_k^2$ — раздутие y_1^1 и $\varepsilon_{d_{N_1}}\dots\varepsilon_{d_2}\colon \mathbf{F}_1 \dashrightarrow \mathbf{F}_1'$ — композиция элементарных преобразований вдоль пучка прямых

$\mathbf{F}_1 \mapsto \mathbf{P}^1$ с центрами в точках $y_2^{d_2}, \dots, y_{N_1}^{d_{N_1}}$. Как показано в [3], в процессе «раскручивания» любого бирационального преобразования $\chi\colon \mathbf{P}_k^2 \dashrightarrow \mathbf{P}_k^2$ возникают две ситуации:

a) $\mathbf{F}' = \mathbf{F}_1$; в этом случае после стягивания исключительного сечения мы имеем чистое преобразование Жонкьера

$$\chi_{1;d_2,\dots,d_{N_1}} := \sigma_1 \varepsilon_{d_{N_1}} \dots \varepsilon_{d_2} \sigma_1^{-1};$$

b) $\mathbf{F}' = \mathbf{P}_k^1 \times \mathbf{P}_k^1$; в этом случае композиция элементарных преобразований вдоль второго пучка прямых на $\mathbf{F}_0 = \mathbf{P}_k^1 \times \mathbf{P}_k^1$ (или вдоль исходного пучка после предварительного применения бирегулярной инволюции τ перестановки множителей на $\mathbf{P}_k^1 \times \mathbf{P}_k^1$) с центрами в точках $y_{N_1+1}^{d_{N_1+1}}, \dots, y_{N_2}^{d_{N_2}}$ опять приводит к ситуации a) или b).

Через конечное число шагов мы оказываемся в ситуации a) и в итоге имеем преобразование

$$\begin{aligned} &\chi_{1;d_2,\dots,d_{N_1};d_{N_1+1},\dots,d_{N_2};\dots;d_{N_{m-1}+1},\dots,d_{N_m}} = \\ &= \sigma_1 \varepsilon_{d_{N_m}} \dots \varepsilon_{d_{N_{m-1}+1}} \tau \varepsilon_{d_{N_{m-1}}} \dots \varepsilon_{d_{N_{m-2}+1}} \tau \varepsilon_{d_{N_{m-2}}} \dots \tau \varepsilon_{d_{N_1}} \dots \varepsilon_{d_2} \sigma_1^{-1}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $\tau\colon \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ — инволюция перестановки множителей.

Формулы действия чистых преобразований Жонкьера на $Z^*(\mathbf{P}_k^2)$ имеют вид

$$\begin{gathered} l \to \Big(\frac{1}{2}d + 1\Big) l - \frac{1}{2} d x_1^1 - \sum_{i=2}^{N_1} x_i^{d_i}, \\ y_1^1 \to \frac{1}{2} d l - \Big(\frac{1}{2} d - 1\Big) x_1^1 - \sum_{i=2}^{N_1} x_i^{d_i}, \quad y_i^{d_i} \to d_i l - d_i x_1^1 - x_i^{d_i}, \\ i = 2, \dots, N_1, \quad d = \sum_{i=2}^{N_1} d_i. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Написать общие формулы для действия всех преобразований (1.1), очевидно, затруднительно, удобнее поэтому разложить их в композиции элементарных преобразований между линейчатыми поверхностями $\mathbf{F}_n$, раздутия σ_1^{-1} точки на $\mathbf{P}_k^2$, стягивания $\sigma_1\colon \mathbf{F}_1 \to \mathbf{P}_k^2$ исключительного сечения, инволюции τ. При этом в качестве одной из образующих в группе $\operatorname{Pic} \mathbf{F} \otimes \mathbf{Q}$, где $\mathbf{F} = \mathbf{P}_k^2$ или $\mathbf{F}_n$, удобно будет использовать антиканонический класс, обозначая его через h (или h_n в случае $\mathbf{F} = \mathbf{F}_n$), так что

$$\operatorname{Pic} \mathbf{P}_k^2 = \frac{1}{3} \mathbf{Z} h, \quad \operatorname{Pic} \mathbf{F}_n = \mathbf{Z} s_n + \mathbf{Z} f_n, \quad h_n = 2 s_n + (n+2) f_n,$$

где s_n — класс исключительного сечения, а f_n — класс слоя линейчатой поверхности $\mathbf{F}_n$ и, стало быть,

$$\operatorname{Pic} \mathbf{F}_n = \begin{cases} \frac{1}{2} \mathbf{Z} h_n + \mathbf{Z} f_n, & \text{если } n \text{ четно.} \\ \frac{1}{2} \mathbf{Z} (h_n - f_n) + \mathbf{Z} f_n, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Пусть $\sigma_1\colon \mathbf{F}_1 \to \mathbf{P}^2_k$ — раздутие точки y^1_1, $\deg y^1_1 = 1$. Тогда

$$\sigma_1\colon \begin{array}{l} f_1 \to \dfrac{1}{3}h_{\mathbf{P}^2} - y^1_1, \\ h_1 \to h_{\mathbf{P}^2} - y^1_1; \end{array} \qquad \sigma_1^{-1}\colon \begin{array}{l} h_{\mathbf{P}^2} \to \dfrac{3}{2}(h_1 - f_1), \\ y^1_1 \to \dfrac{1}{2}(h_1 - 3f_1). \end{array} \tag{1.3}$$

Пусть теперь $\varepsilon_d\colon \mathbf{F}' \dashrightarrow \mathbf{F}''$ — элементарное преобразование линейчатых поверхностей с центром в замкнутой точке y^d степени d. Тогда

$$\varepsilon_d\colon \begin{array}{l} f' \to f'', \\ h' \to h'' + df'' - 2x^d, \\ y^d \to df'' - x^d. \end{array} \tag{1.4}$$

Пусть $\tau\colon \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ — инволюция перестановки множителей на линейчатой поверхности $\mathbf{F}_0 = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Тогда

$$\tau\colon \begin{array}{l} h_0 \to h_0, \\ f_0 \to \dfrac{1}{2}h_0 - f_0. \end{array} \tag{1.5}$$

1.3. Замечание. (i) Преобразования тина Жонкьера $\chi_{4;d}$ и $\chi_{2,2;d}$ раскладываются в композиции:

$$\chi_{4;d_2,\dots,d_N} = \chi_{4;d_N}\chi_{4;d_{N-1}}\cdots\chi_{4;d_2},$$
$$\chi_{2,2;d_3,\dots,d_N} = \chi_{2,2;d_N}\chi_{2,2;d_{N-1}}\cdots\chi_{2,2;d_3},$$

элементарных преобразований с центрами в отдельных замкнутых точках. При этом предполагается, что фундаментальные точки $y_2^{d_2},\dots,y_N^{d_N}$ занумерованы в том порядке, в каком выполняются элементарные преобразования. Чтобы осуществить указанные выше разложения, надо убедиться в том, что элементарные преобразования вдоль пучков коник на поверхностях дель Пеццо V_5, полученных раздутием замкнутых точек y^4_1 или пар замкнутых точек y^2_1, y^2_2, снова приводят к поверхностям дель Пеццо того же типа. Отметим, прежде всего, что в число образующих включаются только те преобразования типа Жонкьера $\chi_{4;d}$ и $\chi_{2,2;d}$, для которых четыре геометрические точки $y^4_1 \otimes \overline{k}$ и, соответственно, $(y^2_1 \otimes \overline{k}) \cup (y^2_2 \otimes \overline{k})$ находятся в общем положении на $\mathbf{P}^2_{\overline{k}}$ (это видно из способа раскручивания любого бирационального автоморфизма плоскости, описанного в [3]).

Пусть теперь $\varepsilon_d\colon V_5 \dashrightarrow V'$ — элементарное преобразование вдоль пучка коник на поверхности дель Пеццо V_5, полученной раздутием точки $y^4 \in \mathbf{P}^2_k$. Покажем, что V' — тоже поверхность дель Пеццо того же типа, т. е. V' получено раздутием некоторой замкнутой точки $x^4 \in \mathbf{P}^2_k$. Достаточно показать, что антиканонический класс $-K_{V'}$ обилен. Действительно, тогда V' — поверхность дель Пеццо степени 5, так как при элементарном преобразовании степень сохраняется, более того V', как и V_5, является расслоением на коники с $\operatorname{Pic} V' = \mathbf{Z}K_{V'} + \mathbf{Z}f'$, где f' — класс слоя. В таком случае в классе $-2K_{V'} - 3f'$ существует четверка сопряженных попарно непересекающихся (-1)-кривых,

стягивание которой приводит к $\mathbf{P}^2_k$ (см. [3]). Предположение, что $-K_{V'}$ не обилен, приводится к противоречию следующим образом.

Пусть $X \sim af' - bK_{V'}$ — кривая с $(-K_{V'}, X) \leqslant 0$, $a, b \in \mathbf{Z}$, $b > 0$. По теореме Римана–Роха проверяем, что линейные системы $|-K_{V'}|$ и $|-f' - K_{V'}|$ непусты. Так как $(-f' - K_{V'}, X) \leqslant -2b < 0$, то X — неподвижная компонента в $|-f' - K_{V'}|$, следовательно, $b = 1$ и $(-K_{V'}, X) = 2a + 5 \leqslant 0$, т. е. $a \leqslant -3$. Тогда по формуле для рода $p_g(X) = a + 1 \leqslant -2$, что невозможно, поскольку кривая $\overline{X} = X \otimes \overline{k}$ над алгебраическим замыканием $\overline{k}$ поля k не может состоять более чем из двух компонент связности, так как $(X, f') = 2$. Это противоречие показывает, что $-K_{V'}$ обилен и V' обладает требуемыми свойствами. Аналогично рассматривается случай $\chi_{2,2;d}$.

(ii) Для преобразований типа (1.1), связанных с точками степени 1, точно такое же разложение получить, вообще говоря, нельзя, поскольку промежуточные элементарные преобразования могут действовать на линейчатых поверхностях $\mathbf{F}_n$ с $n \neq 1$, и поэтому немедленный спуск на $\mathbf{P}^2$ невозможен. Тем не менее, для преобразований типа (1.1) возможны разбиения на блоки, каждый из которых состоит из наименьшей цепочки преобразований ε_{d_i} и τ, действующей из $\mathbf{F}_1$ в $\mathbf{F}_1$, и никакое промежуточное звено не действует на $\mathbf{F}_1$. Вставляя между такими блоками тождественное преобразование $\sigma_1^{-1}\sigma_1$ — стягивание исключительного сечения на $\mathbf{F}_1$ и обратного раздутия, — получаем разложение преобразований типа (1.1) в композиции «неразложимых».

(iii) Непосредственная проверка показывает, что обратное преобразование к каждому из преобразований списка п. 1.2 имеет тот же тип, иначе говоря, соответствующая матрица совпадает со своей обратной (т. е. имеет порядок 2 в группе матриц). Это означает, что такие преобразования и обратные к ним имеют одинаковые числовые типы, т. е. являются симметричными в классической терминологии (см. [2]).

(iv) В списке п. 1.2 некоторые из образующих выражаются через другие. Например, $\chi_{2,3,2} = \chi_{2,2;3}$ и $\chi_{2,4} = \chi_{4;2}$, как это видно из формул действия на $Z^*(\mathbf{P}^2_k)$. Далее,

$$\begin{gathered}\chi_{2,2;1} = \chi_{2,1}\chi_{2,1}, \quad \chi_{2,3,1} = \chi_{2,1}\chi_3\chi_{2,1}, \quad \chi_{2,5,1} = \chi_{5,2}\chi_{5,1}\chi_{2,1}, \\ \chi_{2,5,2} = \chi_{5,2}\chi_{5,2}, \quad \chi_{2,5,3} = \chi_{5,2}\chi_{5,3}\chi_{5,2}, \quad \chi_{2,5,4} = \chi_{5,2}\chi_{5,4}\chi_{5,2}.\end{gathered} \tag{1.6}$$

Следовательно, эти преобразования могут быть исключены из списка образующих. Однако по причинам, связанным с методом доказательства основной теоремы, мы исключим только часть из них, а именно, $\chi_{2,3,2}, \chi_{2,4}, \chi_{2,2;1}, \chi_{2,3,1}, \chi_{2,5,1}$ и $\chi_{2,5,4}$ (см. пп. 4.1, 4.3).

§ 2. Соотношения в группе $\mathbf{Cr_2}(k)$

2.1. Как и в [8], обозначим через $B(\mathbf{P}^2_k)$ свободное произведение проективной группы $\mathrm{PGL}(3, k)$ и свободной группы, порожденной множеством образующих X из п. 1.2, кроме $\chi_{2,3,2}, \chi_{2,4}, \chi_{2,2;1}, \chi_{2,3,1}, \chi_{2,5,1}$ и $\chi_{2,5,4}$ (см. замечание 1.3, (iv)). Пусть R — ядро естественного сюръективного по [3] гомо-

морфизма $\rho\colon B(\mathbf{P}^2_k) \mapsto \mathrm{Cr}_2(k)$. Наша цель — описать соотношения в $\mathrm{Cr}_2(k)$, т. е. порождающие в нормальной подгруппе $R \subset B(\mathbf{P}^2_k)$.

Пусть $\alpha = \alpha_n \dots \alpha_2\alpha_1$ — слово из $B(\mathbf{P}^2_k)$. Положим $\alpha(m) = \alpha_m \dots \alpha_1$, $m = 1, 2, \dots, n$. Через гомоморфизм ρ определено действие $B(\mathbf{P}^2_k)$ на $Z^*(\mathbf{P}^2_k)$, тогда

$$\begin{gathered} \alpha(m)(l) = a_m l - \sum_{i=1}^{N} r(x_m^{c_i}) x_m^{c_i} - \sum_j r(x^{e_j}) x^{e_j}, \\ a_m \geqslant 1, \quad r(x_m^{c_i}) \geqslant 0, \quad r(x^{e_j}) \geqslant 0, \quad x_m^{c_i}, x^{e_j} \in E(\mathbf{P}^2_k), \end{gathered} \tag{2.1}$$

где $x_m^{c_1}, \dots, x_m^{c_N}$ — точки, в которые отображение α_m стягивает свои исключительные дивизоры, т. е. фундаментальные точки обратного к α_m отображения α_m^{-1}; x^{e_j} — остальные фундаментальные точки преобразования $\alpha(m)^{-1}$; $r(x_m^{c_i})$, $r(x^{e_j})$ — кратности соответствующих точек в линейной системе $|\alpha(m)(l)|$. Обозначим через $y_m^{d_1}, \dots, y_m^{d'_N}$ фундаментальные точки преобразования α_{m+1} и через $r(y_m^{d_j})$ кратности этих точек в $|\alpha(m)(l)|$.

2.2. Определение. (i) Слово $\alpha = \alpha_n \dots \alpha_1$ называется *приведенным*, если в нем не встречаются рядом стоящие взаимно обратные буквы, и *нормализованным*, если в нем нет букв из $\mathrm{PGL}(3, k)$, кроме, быть может, последней (ср. [8, п. 1.4]).

(ii) Пусть $\alpha = \alpha_n \dots \alpha_1 \in B(\mathbf{P}^2_k)$. Будем говорить, что отображение $\alpha_l = \chi^l_{d_1,\dots,d_N}$, $2 \leqslant l \leqslant n$, *сцеплено* с отображением $\alpha_k = \chi^k_{c_1,\dots,c_M}$, $1 \leqslant k < l$, если образ $x_k^{c_j}$ некоторого исключительного дивизора отображения α_k является одной из фундаментальных точек $y_l^{d_i}$ отображения α_l, и преобразования $\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_{l-1}\alpha_{l-2}\dots\alpha_{k+1}$ являются изоморфизмами в окрестности точки.

Для преобразований типа (1.1) возможно сцепление внутри одного преобразования, т. е. возможно $k = l$ и различаются только порядковые номера фундаментальных точек. Условие сцепленности будем записывать в виде $\chi^l_{d_1,\dots,d_N}(\dots, ijk, \dots)$, где i — номер точки $y_l^{d_i}$ (фундаментальной для $\alpha_l = \chi^l_{d_1,\dots,d_N}$), j — номер точки $x_k^{c_j}$ (фундаментальной для α_k^{-1}) и k — порядковый номер преобразования α_k в композиции $\alpha = \alpha_n \dots \alpha_1$.

Для преобразований типа (1.1) индексы i, j обозначают порядковые номера фундаментальных точек в обычном линейном порядке, например, если $\alpha = \alpha_1 = \chi_{1;1;2;2;2,1} = \sigma_1\varepsilon_1\varepsilon_2\tau\varepsilon_2\tau\varepsilon_2\tau\varepsilon_1\sigma_1^{-1}$, то запись $\chi_{1;1;2;2;2,1}(621, 541, 431)$ обозначает, что два элементарных преобразования ε_1 сцеплены, что закодировано как 621, и три элементарных преобразования ε_2 последовательно попарно сцеплены, что закодировано как 541 и 431, последняя цифра 1 обозначает только то, что рассматриваемое слово состоит из единственного преобразования α_1.

При изучении ниже соотношений мы не рассматриваем, конечно, соотношения в группе $\mathrm{PGL}(3, k)$, считая ее известной, и все соотношения между образующими из X рассматриваем с точностью до проективных преобразова-

ний, т. е. естественных соотношений вида

$$\begin{gathered}\chi_{d_1,\dots,d_N} g = g' \chi'_{d_1,\dots,d_N}, \quad g, g' \in \mathrm{PGL}(3,k), \\ \chi_{d_1,\dots,d_N}, \chi'_{d_1,\dots,d_N} \in X.\end{gathered} \tag{2.2}$$

Выписанные ниже соотношения понимаются в том смысле, что соответствующие композиции указанных преобразований с правилами сцепления являются линейными проективными преобразованиями. Отметим, что мы не стремимся к тому, чтобы выписанная ниже система была минимальной. Некоторые из соотношений дублируют другие, например соотношения для $\chi_{2,4}$ выводятся из соотношений для $\chi_{4;2}$ и соотношения 2.5, (iii), аналогично для $\chi_{1,4}$. Более того, мы исключили из образующих $\chi_{2,3,2}$, $\chi_{2,4}$, $\chi_{2,2;1}$, $\chi_{2,3,1}$, $\chi_{2,5,1}$, $\chi_{2,5,4}$, однако для полноты картины включили их в список соотношений. Конечно, эти дополнительные соотношения никак не участвуют в доказательстве основной теоремы.

2.3. Общие соотношения.

(i) При $d_1 \geqslant 2$

$$\chi_{d_1,\dots,d_N}(111, 221, \dots, NN1)\chi_{d_1,\dots,d_N}$$

(см. замечание 1.3, (iii)), в частности, $\chi_8(111)\chi_8$, $\chi_7(111)\chi_7$, $\chi_6(111)\chi_6$, $\chi_{5,d}(111)\chi_{5,d}$.

(ii) При $d_1 = 1$ имеется аналогичное соотношение. Отличие заключается в том, что некоторые элементарные преобразования из разложения (1.1) преобразования $\chi_{1;d_2,\dots;d_{N_{m-1}+1},\dots,d_{N_m}}$ могут быть сцеплены друг с другом. Пусть $\chi_{1;d_2,\dots;d_{N_m}}(i_1j_11, i_2j_21, \dots, i_sj_s1)$ — преобразование типа (1.1), $i_g > j_g$, $1 \leqslant g \leqslant s$. Рассмотрим все максимальные цепочки индексов $i > j > k > \dots$ такие, что $(ij1)$, $(jk1), \dots$ входят в описание сцепленностей для рассматриваемого $\chi_{1;\dots}$, т. е. равны (i_gj_g1) для некоторых g, $1 \leqslant g \leqslant s$. Если $i \neq i_g$ и $i \neq j_g$ для всех g, $1 \leqslant g \leqslant s$, $2 \leqslant i \leqslant N_m$, то будем считать, что цепочка состоит из одного индекса i. Перенумеруем такие цепочки; максимальный и минимальный индексы в цепочке C_t обозначим через $r(t)$ и $l(t)$ соответственно. Теперь мы можем написать соотношение

$$\begin{aligned}\chi_{1;d_2,\dots,d_{N_m}}(111, i_1j_12, i_2j_22, \dots, i_sj_s2, l(1)r(1)1, l(2)r(2)1, \dots)\times \\ \times \chi_{1;d_2,\dots,d_{N_m}}(i_1j_12, i_2j_21, \dots, i_sj_s1).\end{aligned}$$

(ii)$'$ Соотношение из (ii) является следствием (1.1) и следующих соотношений для бирациональных преобразований линейчатых поверхностей:

$$\sigma_1^{-1}(111)\sigma_1, \quad \tau\tau, \quad \varepsilon_d(111)\varepsilon_d$$

(понимаемых в обычном смысле, т. е. это — изоморфизмы, тождественно действующие на группах Пикара).

2.4. Соотношения: случай $d_1 \geqslant 5$:

(i) $\chi_6(123)\chi_{2,6}(111, 212)\chi_6(121)\chi_{2,6}$;

(ii) $\chi_{5,4}(113, 222)\chi_{5,1}(112, 221)\chi_{5,4}(111)\chi_{5,1}$;

(iii) $\chi_{5,3}(113,222)\chi_{5,1}(112,221)\chi_{5,3}(111)\chi_{5,1}$;
(iv) $\chi_{5,3}(112,213)\chi_3(122)\chi_{5,3}(211)\chi_3$;
(v) $\chi_{5,2}(113,222)\chi_{5,1}(112,221)\chi_{5,2}(111)\chi_{5,1}$;
(vi) $\chi_{5,2}(113,212)\chi_{5,1}(121,222)\chi_{2,1}(111,231)\chi_{2,5,1}$;
(vii) $\chi_{5,2}(123,213)\chi_{2,5,2}(131,212,322)\chi_{5,2}(121,211)\chi_{2,5,2}$;
(viii) $\chi_{5,2}(113,222)\chi_{5,4}(112,231)\chi_{5,2}(121,211)\chi_{2,5,4}$;
(ix) $\chi_{5,2}(113,222)\chi_{5,3}(112,231)\chi_{5,2}(121,211)\chi_{2,5,3}$;
(x) $\chi_{5,2}(112,231)\chi_{5,2}(121,211)\chi_{2,5,2}$;
(xi) $\chi_{5,2}(135,215)\chi_{2,2;5}(124,223,314)\chi_{5,2}(113,212)\chi_{5,2}(132,222)\times$
$\times\chi_{2,2;5}(221,311)\chi_{5,2}$;
(xii) $\chi_{5,1}(112,221)\chi_{5,1}(111)\chi_{5,1}$;
(xiii) $\chi_{5,1}(116,227)\chi_{4;1}(115,226)\chi_{5,1}(114,225)\chi_{4;1}(113,224)\times$
$\times\,\chi_{5,1}(112,223)\chi_{4;1}(111,222)\chi_{5,1}(221)\chi_{4;1}$;
(xiv) $\chi_{5,1}(114,225)\chi_{2,1}(113,224)\chi_{5,1}(112,223)\chi_{2,1}(111,222)\chi_{5,1}(221)\chi_{2,1}$.

Все эти соотношения проверяют обычным перемножением соответствующих матриц из п. 1.2; достаточно установить, что $l \to l$ (см. [13, гл. V]). Проверим, например, соотношение (xi):

$$(1,0,0,0) \xrightarrow{\chi_{5,2}} (8,-3,-3,0) \xrightarrow{\chi_{2,2;5}} (28,-10,-13,-7) \xrightarrow{\chi_{5,2}}$$
$$\xrightarrow{\chi_{5,2}} (41,-10,-10,-16) \xrightarrow{\chi_{5,2}} (28,-13,-10,-7) \xrightarrow{\chi_{2,2;5}}$$
$$\xrightarrow{\chi_{2,2;5}} (8,-3,-3,0) \xrightarrow{\chi_{5,2}} (1,0,0,0).$$

2.5. Соотношения: случай $d_1 = 4$:

(i) $\chi_{4;4}(123,213)\chi_{4;4}(122,212)\chi_{4;4}(121,211)\chi_{4;4}$;
(ii) $\chi_{4;3}(112,213)\chi_3(122)\chi_{4;3}(211)\chi_3$;
(iii) $\chi_{4;2}(121,211)\chi_{2,4}$;
(iv) $\chi_{4;2}(133,213)\chi_{2,3,4}(122,221,312)\chi_{4;2}(131,211)\chi_{2,3,4}$;
(v) $\chi_{4;2}(133,213)\chi_{2,2,4}(122,221,312)\chi_{4;2}(131,211)\chi_{2,2,4}$;
(vi) $\chi_{4;2}(112,213)\chi_{2,1}(122,221)\chi_{4;2}(211)\chi_{2,1}$;
(vii) $\chi_{4;1}(112,223)\chi_{4;1}(111,222)\chi_{4;1}(221)\chi_{4;1}$;
(viii) $\chi_{4;1}(116,226)\chi_3(115)\chi_{4;1}(114,224)\chi_3(113)\chi_{4;1}(112,222)\chi_3(111)\chi_{4;1}\chi_3$;
(ix) $\chi_{4;1}(112,223)\chi_{2,1}(111,222)\chi_{4;1}(221)\chi_{2,1}$;
(x) $\chi_{4;1}(116,226)\chi_{2,1}(115,225)\chi_{4;1}(114,224)\chi_{2,1}(113,223)\chi_{4;1}(112,222)\times$
$\times\chi_{2,1}(111,221)\chi_{4;1}\chi_{2,1}$;
(xi) $\chi'_{4;d'}(113,222)\chi_{4;d}(112,221)\chi'_{4;d'}(111)\chi_{4;d}$.

Используя определение сцепленности преобразований, можно убедиться, что для существования такого слова необходимо и достаточно, чтобы $y'^{d'}$ не была бесконечно близкой к y^d.

2.6. Соотношения: случай $d_1 = 3$:

(i) $\chi'_3(114)\chi_3(113)\chi'_3(112)\chi_3(111)\chi'_3\chi_3$;
(ii) $\chi_3(114)\chi_{2,1}(113,223)\chi_3(112)\chi_{2,1}(111,221)\chi_3\chi_{2,1}$;
(iii) $\chi_3(123)\chi_{2,3,5}(111,212,331)\chi_3(121)\chi_{2,3,5}$;
(iv) $\chi_3(123)\chi_{2,3,4}(111,212,331)\chi_3(121)\chi_{2,3,4}$;

(v) $\chi_3(123)\chi_{2,3,3}(111,212,331)\chi_3(121)\chi_{2,3,3}$;
(vi) $\chi_3(123)\chi_{2,3,2}(111,212,331)\chi_3(121)\chi_{2,3,2}$;

2.7. Соотношения: случай $d_1 = 2$:

(i) $\chi_{2,7}(113,222)\chi_{2,1}(112,221)\chi_{2,7}(111)\chi_{2,1}$;
(ii) $\chi_{2,6}(113,222)\chi_{2,1}(112,221)\chi_{2,7}(111)\chi_{2,1}$;
(iii) $\chi_{2,5,3}(113,223,332)\chi_{2,5,2}(112,222,321)\chi_{2,5,3}(111,221)\chi_{2,5,2}$;
(iv) $\chi_{2,5,2}(112,222,331)\chi_{2,5,2}(111,221)\chi_{2,5,2}$;
(v) $\chi_{2,5,3}(113,222,332)\chi_{2,1}(112,221)\chi_{2,5,3}(111)\chi_{2,1}$;
(vi) $\chi_{2,5,2}(113,233,323)\chi_{2,2;5}(112,232,322)\chi_{2,5,2}(111,231,321)\chi_{2,2;5}$;
(vii) $\chi_{2,5,2}(115,235,334)\chi_{2,2;5}(114,233,324)\chi_{2,5,2}(113,223,322)\times$
$\times\chi_{2,5,2}(112,232,331)\chi_{2,2;5}(111,321)\chi_{2,5,2}$;
(viii) $\chi_{2,5,2}(113,222,332)\chi_{2,1}(112,221)\chi_{2,5,2}(111)\chi_{2,1}$;
(ix) $\chi_{2,4}(112,223)\chi_{2,4}(111,222)\chi_{2,4}(221)\chi_{2,4}$;
(x) $\chi_{2,4}(113,233)\chi_{2,3,4}(112,221,322)\chi_{2,4}(111,231)\chi_{2,3,4}$;
(xi) $\chi_{2,4}(113,233)\chi_{2,2;4}(112,221,322)\chi_{2,4}(111,231)\chi_{2,2;4}$;
(xii) $\chi_{2,4}(113,222)\chi_{2,1}(112,221)\chi_{2,4}(111)\chi_{2,1}$;
(xiii) $\chi_{2,3,5}(113,222,332)\chi_{2,1}(112,221)\chi_{2,3,5}(111)\chi_{2,1}$;
(xiv) $\chi_{2,3,4}(113,222,332)\chi_{2,1}(112,221)\chi_{2,3,4}(111)\chi_{2,1}$;
(xv) $\chi_{2,3,3}(113,222,332)\chi_{2,1}(112,221)\chi_{2,3,3}(111)\chi_{2,1}$;
(xvi) $\chi_{2,3,2}(113,222,332)\chi_{2,1}(112,221)\chi_{2,3,2}(111)\chi_{2,1}$;
(xvii) $\chi_{2,3,3}(111,231,321)\chi_{2,3,3}$;
(xviii) $\chi_{2,3,3}(117,227,336)\chi_{2,3,2}(116,226,335)\chi_{2,3,3}(115,225,334)\times$
$\times\chi_{2,3,2}(114,224,333)\chi_{2,3,3}(113,223,332)\chi_{2,3,2}(112,222,331)\times$
$\times\chi_{2,3,3}(111,221)\chi_{2,3,2}$;
(xix) $\chi_{2,3,2}(115,225,334)\chi_{2,3,2}(114,224,333)\chi_{2,3,2}(113,223,332)\times$
$\times\chi_{2,3,2}(112,222,331)\chi_{2,3,2}(111,221)\chi_{2,3,2}$;
(xx) $\chi_{2,3,2}(131,221,311)\chi_{2,3,2}$;
(xxi) $\chi_{2,3,2}(111,231,321)\chi_{2,2;3}$;
(xxii) $\chi_{2,3,1}(113,212,323)\chi_{2,1}(111,221)\chi_3\chi_{2,1}$;
(xxiii) $\chi_{2,2;d}(121,211,331)\chi_{2,2;d}$;
(xxiv) $\chi'_{2,2;d'}(113,223,332)\chi_{2,2;d}(112,222,331)\chi'_{2,2;d'}(111,221)\chi_{2,2;d}$,

здесь аналогично 2.5, (xi) для существования слова необходимо и достаточно, чтобы $y'^{d'}$ не являлась бесконечно близкой к y^d;

(xxv) $\chi_{2,2;d}(113,222,332)\chi_{2,1}(112,221)\chi_{2,2;d}(111)\chi_{2,1}$;
(xxvi) $\chi_{2,2;1}(111,212,322)\chi_{2,1}(221)\chi_{2,1}$;
(xxvii) $\chi'_{2,1}(114,224)\chi_{2,1}(113,223)\chi'_{2,1}(112,222)\chi_{2,1}(111,221)\chi'_{2,1}\chi_{2,1}$;
(xxviii) $\chi'_{2,1}(112,223)\chi_{2,1}(111,222)\chi'_{2,1}(221)\chi_{2,1}$;
(xxix) $\chi_{2,1}(112,221)\chi'_{2,1}(111)\chi_{2,1}$.

2.8. Соотношения: случай $d_1 = 1$:

(i) $\chi_{1;1;1}(321)$;
(ii) $\chi_{1;1;2;2;2;1}(621,541,431)$ или эквивалентно на $\mathbf{F}_0$;
(ii)′ $\tau\varepsilon_2(3)\tau\varepsilon_2(1)\tau\varepsilon_2$;
(iii) $\chi_{1;1;4;4;4;4;1}(721,651,541,431)$, или на $\mathbf{F}_0$;

(iii)′ $\tau\varepsilon_4(5)\tau\varepsilon_4(3)\tau\varepsilon_4(1)\tau\varepsilon_4$;

(iv) $\chi_{1;1;6;6;6;6;6;1}(921, 871, 761, 651, 541, 431)$, или на $\mathbf{F}_0$;

(iv)′ $\tau\varepsilon_6(9)\tau\varepsilon_6(7)\tau\varepsilon_6(5)\tau\varepsilon_6(3)\tau\varepsilon_6(1)\tau\varepsilon_6$;

(v) $\chi_{1;2}(121, 211)\chi_{2,1}$;

(vi) $\chi_{1;3;3}(211, 322)\chi_3$;

(vii) $\chi_{1;4}(121, 211)\chi_{4;1}$;

(viii) $\chi_{1;5;5}(121, 221, 322)\chi_{5,1}$;

(ix) $\chi_{1;6}(112, 213)\chi_6(122)\chi_{1;6}(211)\chi_6$;

(x) $\chi_{1;7;7}(112, 213, 324)\chi_7(132)\chi_{1;7;7}(211, 322)\chi_7$;

(xi) $\chi_{1;6}(11\,10, 22\,10)\chi_3(119)\chi_{1;6}(118, 228)\chi_3(117)\chi_{1;6}(116, 226)\chi_3(115)\times$
$\times\chi_{1;6}(114, 224)\chi_3(113)\chi_{1;6}(112, 222)\chi_3(111)\chi_{1;6}\chi_3$;

(xii) $\chi_{1;6}(11\,11, 22\,10)\chi_{1;5;5}(11\,10, 239, 32\,11)\chi_{1;6}(119, 228)\times$
$\times\chi_{1;5;5}(118, 237, 329)\chi_{1;6}(117, 226)\chi_{1;5;5}(116, 235, 327)\chi_{1;6}(115, 224)\times$
$\times\chi_{1;5;5}(114, 233, 325)\chi_{1;6}(113, 222)\chi_{1;5;5}(112, 231, 323)\chi_{1;6}(111)\times$
$\times\chi_{1;5;5}(321)$;

(xiii) $\chi_{1;6}(11\,11, 22\,10)\chi_{1;7;7}(11\,10, 239, 32\,11)\chi_{1;6}(119, 228)\times$
$\times\chi_{1;7;7}(118, 237, 329)\chi_{1;6}(117, 226)\chi_{1;7;7}(116, 235, 327)\chi_{1;6}(115, 224)\times$
$\times\chi_{1;7;7}(114, 233, 325)\chi_{1;6}(113, 222)\chi_{1;7;7}(112, 231, 323)\chi_{1;6}(111)\times$
$\times\chi_{1;7;7}(321)$;

(xiv) $\chi_{1;7;7}(115, 234, 326)\chi_{1;2}(114, 223)\chi_{1;7;7}(113, 232, 324)\chi_{1;2}(112, 221)\times$
$\times\chi_{1;7;7}(111, 322)\chi_{1;2}$;

(xv) $\chi_{1;7;7}(117, 236, 328)\chi_{1;4}(116, 225)\chi_{1;7;7}(115, 234, 326)\times$
$\times\chi_{1;4}(114, 223)\chi_{1;7;7}(113, 232, 324)\chi_{1;4}(112, 221)\chi_{1;7;7}(111, 322)\chi_{1;4}$;

(xvi) $\chi_{1;6}(11\,11, 22\,10)\chi_{2,1}(119, 229)\chi_{1;6}(118, 228)\chi_{2,1}(117, 227)\times$
$\times\chi_{1;6}(116, 226)\chi_{2,1}(115, 225)\chi_{1;6}(114, 224)\chi_{2,1}(113, 223)\chi_{1;6}(112, 222)\times$
$\times\chi_{2,1}(111, 221)\chi_{1;6}\chi_{2,1}$;

(xvii) $\chi_{1;6}(114, 225)\chi_{1;6}(113, 224)\chi_{1;6}(112, 223)\chi_{1;6}(111, 222)\chi_{1;6}(221)\chi_{1;6}$;

(xviii) $\varepsilon'_{d'}(112)\varepsilon_d(111)\varepsilon'_{d'}\varepsilon_d$, где $\varepsilon_d, \varepsilon'_{d'}$ — элементарные преобразования с центрами в y^d и $y'^{d'}$; из условий сцепленности вытекает, что $y'^{d'}$ не является точкой бесконечно близкой к y^d (это условие эквивалентно существованию слова с данными условиями сцепленности);

(xix) $\chi_{1;d;d}(115, 214, 326)\sigma_1\varepsilon_d(112)\tau\varepsilon_d\sigma_1^{-1}$, $d = 1, 3, 5, 7$;

(xx) $\chi_{1;d}(113, 212)\sigma_1\varepsilon_d\sigma_1^{-1}$, $d = 2, 4, 6$.

2.9. З а м е ч а н и е. (i) В [14], где были анонсированы результаты настоящей работы, имеется ряд неточностей в формулировке основного результата, а именно, нуждаются в уточнении соотношения: 2.4, (xi), 2.6, (xxvii), 2.8, (i), (xvii) из [14].

(ii) Ввиду того что в [3] для преобразований из 1.2 требовались условия общности фундаментальных точек, возникает вопрос о корректности определения слов из 2.3–2.8. Сделаем необходимые пояснения. Мы рассматриваем только такие слова из 2.3–2.8, элементы которых определены корректно. При этом, всякий раз применяя нужное соотношение, эту корректность определения следует проверять. Это будет делаться точно так же, как это делалось

в [3], где общность положения фундаментальных точек следовала из некоторых неравенств. Здесь мы, фактически, будем иметь те же неравенства (см. подробнее § 5).

(iii) Ввиду того что запись соотношений для общих преобразований типа (1.1) выглядит довольно громоздко, мы решили заменить их эквивалентной системой соотношений 2.3, (ii)$'$ и 2.8, (xviii) между σ_1, τ, ε_d на линейчатых поверхностях.

(iv) Упоминавшееся несколько раз отношение бесконечной близости при рассмотрении элементарных преобразований понимается и используется следующим образом. Пусть ε'_{d_2}, ε_{d_1} — два элементарных преобразования вдоль одного пучка прямых или коник с центрами в замкнутых точках $y_2^{d_2}$ и $y_1^{d_1}$. Тогда $\varepsilon'_{d_2}(2)\varepsilon_{d_1}(1)\varepsilon'_{d_2}\varepsilon_{d_1}$, если точка $y_2^{d_2}$ не является бесконечно близкой к точке $y_1^{d_1}$. В приложениях обычно каждой фундаментальной точке y^d приписана некоторая кратность $r(y^d)$ в подходящей линейной системе. В такой ситуации если $r(y_2^{d_2}) > r(y_1^{d_1})$, то точка $y_2^{d_2}$ не может быть бесконечно близкой к $y_1^{d_1}$ (см. [13, гл. V]).

(v) Соотношения 2.8, (ii)–(iv) являются обобщениями основного соотношения из [5] на квадрике $\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1$. Действительно, воспользуемся формулой (1.1); тогда в случае 2.8, (ii) имеем

$$\chi_{1;1;2;2;2,1}(621,541,431)=\sigma_1\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2\tau\varepsilon_2\tau\varepsilon_2\tau\varepsilon_1\sigma_1^{-1},$$

где два элементарных преобразования $\varepsilon_1,\varepsilon_1^{-1}$ сцеплены между собой и три ε_2 также сцеплены между собой. Здесь $\varepsilon_1\sigma_1^{-1}\colon \mathbf{P}^2\to\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1$ — отображение $\mathbf{P}^2$ на квадрику $\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1$ и $\sigma_1\varepsilon_1^{-1}\colon \mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1\to\mathbf{P}^2$ — обратное к нему, а $(\tau\varepsilon_2)^3$ — это соотношение из [5] (ср. также [8, § 6]).

(vi) Соотношения 2.8, (xi)–(xvi) выводятся из соотношений 2.3, (ii)$'$, 2.8, (i)–(iv), (xviii). Мы включили их в список соотношений по чисто техническим соображениям удобства ссылок при доказательстве основной теоремы (см. § 6).

§ 3. Основная теорема и некоторые вспомогательные результаты

3.1. Определение. Пусть $\alpha=\alpha_r\dots\alpha_1$ — приведенное нормальное слово из $B(\mathbf{P}_k^2)$. Заменим каждое α_i, являющееся преобразованием типа (1.1), кроме, быть может, некоторых, равных $\chi_{1;2}$, $\chi_{1;4}$, $\chi_{1;6}$, $\chi_{1;5;5}(321)$, $\chi_{1;7;7}(321)$, на выражение вида $\alpha_i=\alpha_{iN}\dots\alpha_{i1}$, где, как в (1.1),

$$\alpha_{i1}=\sigma_1^{-1},\ \ \alpha_{i2}=\varepsilon_{d_2},\ \ \dots,\ \ \alpha_{iN_1}=\varepsilon_{d_{N_1}},\ \ \alpha_{i(N_1+1)}=\tau,$$
$$\alpha_{i(N_1+2)}=\varepsilon_{d_{N_1+1}},\ \ \dots,\ \ \alpha_{iN}=\sigma_1,\ \ N=N_m+m$$

(в обозначениях (1.1)), и введем единую нумерацию $\alpha=\alpha_n\dots\alpha_1$, нумеруя последовательно все буквы, включая формальные α_{ij}. Полученное таким образом слово будем называть *расширенным*.

Как правило, все слова, рассматриваемые в дальнейшем, будут расширенными в этом смысле. Пусть $\alpha=\alpha_n\dots\alpha_1$ — расширенное слово. Как и в п. 2.1,

пусть $\alpha(m) = \alpha_m \dots \alpha_1$, $m = 1, \dots, n$; $h = h(m)$ — антиканонический класс на образе $\alpha(m)(\mathbf{P}^2)$, т. е. либо на $\mathbf{P}^2$, либо на некоторой линейчатой поверхности $\mathbf{F}_q$; $f = f(m)$ — класс слоя, если $\alpha(m)(\mathbf{P}^2) = \mathbf{F}_q$ — линейчатая поверхность. Тогда

$$\alpha(m)(l) = \begin{cases} A_m h - \sum r(x_i)x_i, \\ \text{если } \ \alpha(m)(\mathbf{P}^2) = \mathbf{P}^2;\ A_m \in \frac{1}{3}\mathbf{Z},\ A_m \geqslant \frac{1}{3}, \\ A_m h + B_m f - \sum r(x_i)x_i, \\ \text{если } \ \alpha(m)(\mathbf{P}^2) = \mathbf{F}_q;\ A_m, B_m \in \frac{1}{2}\mathbf{Z},\ A_m \geqslant \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{3.1}$$

Мы распространим обозначения п. 2.1. на этот расширенный случай: множества $\{x_m^{c_i}\}$ и $\{y_m^{d_j}\}$ обозначают то же, что и в п. 2.1, $a_m = 3A_m$ в случае $\mathbf{P}^2$. Мы будем использовать в дальнейшем как обозначение a_m, так и A_m; при замене $a_m = 2A_m$ первый столбец матриц в п. 1.2 надо поделить на 3.

3.2. Лемма. (i) *В условиях и обозначениях* (3.1) *имеем: в случае* $\mathbf{P}^2$

$$a_m^2 - \sum \deg x_i r(x_i)^2 = 1, \quad 3a_m - \sum \deg x_i r(x_i) = 3;$$

в случае $\mathbf{F}_q$

$$8A_m^2 + 4A_m B_m - \sum \deg x_i r(x_i)^2 = 1, \quad 8A_m + 2B_m - \sum \deg x_i r(x_i) = 3.$$

(ii) *Предположим, что* $\alpha_m = \sigma_1^{-1}$ *— раздутие точки* y_{m-1}^1 *степени* 1 *и кратности* $r(y_{m-1}^1)$ *в линейной системе* $|\alpha(m-1)(l)|$; *тогда*

$$A_m = \frac{3A_{m-1} - r(y_{m-1}^1)}{2}, \quad B_m = \frac{3(A_{m-1} - r(y_{m-1}^1))}{2},$$

в частности,

$$A_m \geqslant A_{m-1} \Longleftrightarrow r(y_{m-1}^1) \leqslant A_{m-1}.$$

(iii) *Предположим, что* α_m *— стягивание исключительного сечения* $\sigma_1 \colon \mathbf{F}_1 \to \mathbf{P}^2$; *тогда*

$$A_m = A_{m-1} + \frac{1}{3}B_{m-1},$$

в частности,

$$A_m \geqslant A_{m-1} \Leftrightarrow B_{m-1} \geqslant 0.$$

(iv) *Предположим, что* $\alpha_m = \varepsilon_d$ *— элементарное преобразование линейчатой поверхности с центром в точке* y_{m-1}^d *кратности* $r(y_{m-1}^d)$; *тогда*

$$A_m = A_{m-1}, \quad B_m = B_{m-1} + d(A_{m-1} - r(y_{m-1}^d)),$$
$$r(x_m^d) = 2A_{m-1} - r(y_{m-1}^d),$$

в частности,

$$B_m \geqslant B_{m-1} \Longleftrightarrow A_{m-1} \geqslant r(y_{m-1}^d).$$

(v) *Предположим, что* $\alpha_m = \tau$ *— инволюция перестановки множителей на* $\mathbf{F}_0 = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$; *тогда*

$$A_m = A_{m-1} + \frac{1}{2}B_{m-1}, \quad B_m = -B_{m-1},$$

в частности,

$$A_m \geqslant A_{m-1} \Leftrightarrow B_{m-1} \geqslant 0.$$

Доказательство. Указанные пары равенств в (i) — это хорошо известные бирационально инвариантные выражения для индекса самопересечения и линейной формы пересечения с антиканоническим классом в терминах $\mathbf{P}^2$ и $\mathbf{F}_q$ соответственно (см. [13, гл. V]). Равенства (ii)–(v) получены непосредственно из соответствующих формул (1.3), (1.4) и (1.5). Доказательство закончено. □

Пусть теперь $\alpha = \alpha_n \dots \alpha_1$ — расширенное слово. Положим

$$A = A(\alpha) = \max\{A_m \mid m = 1, \dots, n\}. \tag{3.2}$$

Число $A = A(\alpha)$ будем называть *высотой* слова α.

3.3. Определение (ср. [8, § 1, опр. 3 и § 5, опр. 1]. Пусть $\alpha = \alpha_n \dots \alpha_1$ — расширенное слово, представляющее некоторое соотношение, т. е. элемент из ядра R гомоморфизма $\rho\colon B(\mathbf{P}^2_k) \to \mathrm{Cr}_2(k)$ (оно характеризуется свойством $\alpha(n)(l) = l$). Будем называть слово α *специальным*, если выполнены следующие условия для некоторого индекса $s = s(\alpha)$:

(i) $A_i < A_{i+1}$, если $1 \leqslant i \leqslant s-2$ и α_{i+1} не является элементарным преобразованием типа ε_d из разложения (1.1);

(ii) $A_{s-1} \leqslant A_s$;

(iii) $B_i < B_{i+1}$, если $1 \leqslant i \leqslant s-2$ и α_{i+1} является элементарным преобразованием;

(iv) $B_{i+1} \geqslant 0$, если $1 \leqslant i \leqslant s-2$, α_{i+1} — элементарное преобразование, а α_i — нет;

(v) $A_{i+1} < A_i$, если $s \leqslant i \leqslant n-1$ и α_{i+1} не является элементарным преобразованием;

(vi) $B_{i+1} < B_i$, если $s \leqslant i \leqslant n-1$ и α_{i+1} — элементарное преобразование;

(vii) если $B_i < 0$ для $s \leqslant i \leqslant n-1$, то α_{i+1} не является элементарным преобразованием;

(viii) если α_s — элементарное преобразование, то $B_s < 0$ и $\alpha_{s-1}, \alpha_{s+1}$ не являются элементарными преобразованиями.

Если $A_{s-1} < A_s$ или α_s — элементарное преобразование, то специальное слово α называется *очень специальным*. Множество специальных слов будем обозначать через S, а очень специальных — через S' (ср. [8]).

Перечислим несколько простых следствий этого определения.

а) Для $\alpha \in S$ индекс $s(\alpha)$ определен однозначно.

б) Если $\alpha_{s+1} = \varepsilon_d$ — элементарное преобразование, то $\alpha \in S \setminus S'$. Действительно, при $A_s > A_{s-1}$ (α_s не является элементарным преобразованием по (viii)) $B_s < 0$ по лемме 3.2, (ii), (v), откуда α_{s+1} не может быть элементарным преобразованием по (vii).

в) $\alpha_s \neq \sigma_1^{-1}$, τ во всех случаях, кроме $A_{s-1} = A_s$, т. е. $\alpha \in S \setminus S'$. Это следует из того, что в этом случае всегда $\alpha_{s+1} = \varepsilon_d$.

Опишем поведение индекса $s(\alpha)$ при переходе к обратному слову:

г) Если $\alpha \in S'$ и $\alpha_s \neq \varepsilon_d$, то α_{s+1} — не элементарное преобразование по утверждению б) выше. После чего очевидно следующее:

$$(\alpha^{-1})_{s(\alpha^{-1})} = \alpha_{s+1}^{-1}, \quad (\alpha^{-1})_{s(\alpha^{-1})+1} = \alpha_s^{-1}, \quad \text{т. е.} \quad s(\alpha^{-1}) = n - s.$$

д) Если $\alpha \in S'$ и $\alpha_s = \varepsilon_d$, то по (viii) α_{s-1} не является элементарным преобразованием и

$$(\alpha^{-1})_{s(\alpha^{-1})} = \alpha_s^{-1} = \varepsilon_d^{-1}, \ (\alpha^{-1})_{s(\alpha^{-1})+1} = \alpha_{s-1}^{-1}, \ \text{т. е.} \ s(\alpha^{-1}) = n - s + 1.$$

е) если $\alpha \in S \setminus S'$, то $\alpha_s \neq \varepsilon_d$. Далее,

$$(\alpha^{-1})_{s(\alpha^{-1})} = \alpha_s^{-1}, \quad (\alpha^{-1})_{s(\alpha^{-1})+1} = \alpha_{s-1}^{-1}, \quad s(\alpha^{-1}) = n - s + 1..$$

3.4. Лемма (ср. [8, § 1, лемма 4, § 5, лемма 4]). *Любое расширенное слово $\alpha = \alpha_n \dots \alpha_1$ из R по модулю соотношений* 2.8, (xviii) *и* (2.2) *может быть разложено в произведение специальных слов высоты, не превосходящей $A(\alpha)$.*

Доказательство. Отметим прежде всего, что по лемме 3.2, (iv) $A_{i+1} = A_i$, если α_{i+1} — элементарное преобразование. Далее, по модулю соотношений 2.8, (xviii) можно предполагать, что всегда выполнено следующее условие: если $\alpha_{p+q} \dots \alpha_p$ — отрезок слова α, целиком состоящий из элементарных преобразований вдоль одного и того же пучка, то $B_{i+1} - B_i \geqslant B_i - B_{i-1}$ для $i = p, \dots, p+q-1$. Такая монотонность достигается с помощью замен $\alpha_{i+1}\alpha_i = \varepsilon_{d_i}(y_i^{d_i})\varepsilon_{d_{i-1}}(y_{i-1}^{d_{i-1}})$ $(p \leqslant i \leqslant q-1)$ на $\alpha'_{i+1}\alpha'_1 = \varepsilon_{d_{i-1}}(y_i'^{d_{i-1}})\varepsilon_{d_i}(y_{i-1}'^{d_i})$, где $y_{i-1}^{d_{i-1}}$, $y_i^{d_i}$, $y_{i-1}'^{d_i}$, $y_i'^{d_{i-1}}$ — фундаментальные точки преобразований соответственно α_i, α_{i+1}, α'_i, α'_{i+1} и $y_{i-1}'^{d_i} = \alpha_i^{-1}(y_i^{d_i})$, $y_i'^{d_{i-1}} = \alpha'_i(y_{i-1}^{d_{i-1}})$. При этом, очевидно, $r(y_i^{d_i}) = r(y_{i-1}'^{d_i})$, $r(y_{i-1}^{d_{i-1}}) = r(y_i'^{d_{i-1}})$. Замены выполняются всякий раз, когда $d_i(A_i - r(y_i^{d_i})) < d_{i-1}(A_{i-1} - r(y_{i-1}^{d_{i-1}}))$ (напомним, что здесь $A_i = A_{i-1}$). Это возможно сделать, поскольку при $d_i \neq d_{i-1}$ соответствующие элементарные преобразования независимы в смысле отношения бесконечной близости, а при $d_i = d_{i-1}$ указанные неравенства сводятся к $r(y_{i-1}^{d_{i-1}}) < r(y_i^{d_i})$, откуда следует, что $y_i^{d_i}$ не является точкой, бесконечно близкой к $y_{i-1}^{d_{i-1}}$ (см. замечание 2.9, (iv)).

Используя соотношения (2.2), можно предполагать, что слово $\alpha = \alpha_n \dots \alpha_1$ не только удовлетворяет предыдущим условиям монотонности, но и является нормализованным.

Пусть t — наибольший индекс, $1 \leqslant t \leqslant n$, такой, что для подслова $\alpha_t\alpha_{t-1} \dots \dots \alpha_1$ выполнены условия 3.3, (i), (iii), (iv) определения. Это значит, что имеет место одно из трех:

1) $A_{t+1} < A_t$;

2) $A_{t+1} = A_t$, и α_{t+1} не является элементарным преобразованием;

3) α_{t+1} — элементарное преобразование и $B_{t+1} < 0$.

Положим $s = t$ в случае 1) и $s = t+1$ в случаях 2) и 3). Бирациональное отображение $\alpha(t+1)\colon \mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbf{F}$, где $\mathbf{F} = \mathbf{P}^2$ или $\mathbf{F}_q$, задаваемое линейной системой $|\alpha(t+1)^{-1}(l)|$, можно с помощью алгоритма работы [3] «раскрутить» до линейного проективного преобразования $\mathbf{P}^2_k$. При этом встречающиеся элементарные преобразования мы будем упорядочивать так же, как и выше, чтобы выполнялись условия монотонности. Более того, сразу же, как только B_j становится отрицательным (а это может случиться только на $\mathbf{F}_0$ или $\mathbf{F}_1$, поскольку линейная система $|A_j h + B_j f|$ не имеет неподвижных компонент — как собственный прообраз линейной системы прямых на плоскости, то ввиду $B_j < 0$ антиканонический класс h обилен), на следующем шаге раскручивания мы используем преобразования τ в случае $\mathbf{F}_0$ и $\sigma_1\colon \mathbf{F}_1 \to \mathbf{P}^2$ в случае $\mathbf{F}_1$ (т. е. отказываемся от элементарных преобразований, хотя, возможно, с их помощью можно было бы еще более уменьшить коэффициент B: это нужно для выполнения условия (vii)).

Пусть $\delta = \delta_r \dots \delta_1$ — композиция преобразований, раскручивающих $\alpha(t+1)$ в предыдущем смысле; при этом предполагается, что каждое из преобразований типа (1.1) разложено на элементарные составляющие в смысле определения 3.1, так что $\delta\alpha(t+1) = \delta_r \dots \delta_1\ \alpha_{t+1}\alpha_t \dots \alpha_1$ представляет собой расширенное слово. Проверим, что оно является специальным. Условия (i)–(iv) определения 3.3 выполняются в силу выбора индекса s, условия (v)–(vii) — в силу алгоритма раскручивания с отмеченными выше уточнениями.

Осталось проверить условия (viii). Предположим, что α_s — элементарное преобразование. Это означает, что выполнен случай 3) из перечисленных выше, т. е. $B_s < 0$. Согласно уточненному алгоритму раскручивания мы в качестве δ_1 выбираем σ_1 или τ в зависимости от того, будет ли поверхность — образ преобразования α_s, — изоморфна $\mathbf{F}_1$ или $\mathbf{F}_0$. Таким образом, δ_1 — не элементарное преобразование. С другой стороны, для $i \leqslant s-2$ выполнены условия (i), (iii), (iv) определения 3.3 — это объясняется способом выбора s (или t). Если α_{s-1} при этом оказывается элементарным преобразованием, то по (iv) $B_{s-1} \geqslant 0$. Далее, в начале доказательства мы упорядочили элементарные преобразования таким образом, что B_i либо монотонно возрастают, либо монотонно убывают на всех максимальных отрезках слова α, состоящих из элементарных преобразований. Для $i < s$, вследствие п. (iii) определения 3.3, B_i на таких отрезках возрастают, откуда $B_{s-1} < B_s$ (строгость неравенства обеспечивается условием $B_{i+1} - B_i \geqslant B_i - B_{i-1}$, которое также использовалось выше).

Положим теперь $\beta_1 = \delta\alpha_{t+1}\alpha_t \dots \alpha_1$ и представим α в виде $\alpha = \alpha_n \dots \dots \alpha_{t+2}\delta^{-1}\beta_1$. Слово β_1, как было показано, является специальным, и, очевидно, $A(\beta_1) \leqslant A(\alpha)$.

Для того чтобы продолжить разложение α в произведение специальных слов, заметим, что слово $\delta^{-1} = \delta_1^{-1} \dots \delta_r^{-1}$ по способу построения удовлетворяет условиям (i), (iii) и (iv) для всех индексов. Следовательно, применяя к слову $\alpha_n \dots \alpha_{t+2}\delta_1^{-1} \dots \delta_r^{-1}$ описанный выше процесс отщепления специального слова, мы получили слово β_2, в которое обязательно попадает α_{t+2} (пер-

вые $r+1$ элементов β_2 будут $\alpha_{t+2}\delta_1^{-1}\dots\delta_r^{-1}$). Поэтому процесс отщепления от α специальных слов обрывается на конечном шаге, что доказывает лемму. $\square$

3.5. Основная теорема. *Все соотношения между образующими X группы Кремоны $\mathrm{Cr}_2(k)$ над совершенным полем k выводятся из соотношений* 2.3–2.8.

Схема доказательства основной теоремы такая же, так и в [8], где описаны образующие и соотношения для многих классов рациональных поверхностей, бирационально нетривиальных над k. По лемме 3.4 любое расширенное слово $\alpha \in R$, представляющее некоторое соотношение, раскладывается в произведение специальных расширенных слов. Далее, для специального расширенного слова α изучаются все допустимые возможности для преобразований α_s, α_{s+1} (лемма 4.4 ниже). Оказывается, что для каждой такой возможности имеется соотношение, применение которого разбивает специальное слово α по модулю соотношения в произведение конечного числа слов $\beta_r\dots\beta_1$, каждое из которых либо имеет меньшую, чем $A(\alpha)$, высоту, либо имеет ту же высоту, но является очень специальным. Если же исходное слово α было очень специальным, то высота каждого из $\beta_1,\dots,\beta_r$ будет меньше $A(\alpha)$. Таким образом, лексикографическая индукция по двум параметрам (высота, специальное — очень специальное) завершает доказательство теоремы (подробно об этом в § 5, 6).

§ 4. Основные леммы

4.1. Как было отмечено в конце предыдущего параграфа, прежде всего мы должны отобрать все возможности для преобразований α_s, α_{s+1} в вершине специального расширенного слова $\alpha = \alpha_n\dots\alpha_{s+1}\alpha_s\dots\alpha_1$. Мы начнем, однако, с одного общего результата — условий уменьшения коэффициентов A_i под действием всевозможных α_{s+1} из списка образующих, а также несколько второстепенного результата исключения из списка образующих некоторых преобразований (см. замечание 1.3, (iv)). Отметим, что при выбранном нами методе доказательства основной теоремы с использованием понятия специального слова мы не можем, вообще говоря, заранее исключить из списка образующих любое преобразование, выражающееся через другие: некоторые придется оставить в виде соотношений (например, $\chi_{2,5,2}$, $\chi_{2,5,3}$ — см. 1.3, (iv)). Дело в том, что в лемме 3.4 о разложении слов в произведение специальных используется алгоритм раскручивания преобразований при помощи образующих с монотонным уменьшением степени линейной системы. Отказавшись от использования некоторых из образующих, являющихся композицией других, монотонного уменьшения степени получить не удается. Если же некоторое преобразование выражается через другие, и при этом всякий раз, как оно употребляется для уменьшения степени, может быть употреблено с этой целью другое преобразование, то оно может быть исключено из списка образующих без всяких оговорок.

4.2. Лемма. *Пусть $\alpha = \alpha_n\dots\alpha_1$ — некоторое слово, и пусть преобразование α_{i+1} — одно из списка п.* 1.2. *Тогда условие $A_{i+1} \leqslant A_i$ (в обозначени-*

ях (3.1)) *равносильно соответствующему неравенству в следующей таблице* (*причем* $A_{i+1} = A_i$ *тогда и только тогда, когда равенство имеет место и в соответствующей формуле*):

№	α_{i+1}	
1	χ_8	$A_i \leqslant r(y_i^8)$
2	χ_7	$A_i \leqslant r(y_i^7)$
3	χ_6	$A_i \leqslant r(y_i^6)$
4	$\chi_{5,4}$	$3A_i \leqslant 2r(y_i^5) + r(y_i^4)$
5	$\chi_{5,3}$	$3A_i \leqslant 2r(y_i^5) + r(y_i^3)$
6	$\chi_{5,2}$	$7A_i \leqslant 5r(y_i^5) + 2r(y_i^2)$
7	$\chi_{5,1}$	$6A_i \leqslant 5r(y_i^5) + r(y_i^1)$
8	$\chi_{4;d}$	$3A_i \leqslant 2r(y_i^4) + r(y_i^d)$
9	χ_3	$A_i \leqslant r(y_i^3)$
10	$\chi_{2,7}$	$3A_i \leqslant r(y_i^2) + 2r(y_i^7)$
11	$\chi_{2,6}$	$3A_i \leqslant r(y_i^2) + 2r(y_i^6)$
12	$\chi_{2,5,4}$	$6A_i \leqslant 2r(y_i^2) + 3r(y_i^5) + r(y_i^4)$
13	$\chi_{2,5,3}$	$6A_i \leqslant 2r(y_i^2) + 3r(y_i^5) + r(y_i^3)$
14	$\chi_{2,5,2}$	$9A_i \leqslant 3r(y_i^2) + 5r(y_i^5) + r(\hat{y}_i^2)$
15	$\chi_{2,5,1}$	$9A_i \leqslant 3r(y_i^2) + 5r(y_i^5) + r(\hat{y}_i^1)$
16	$\chi_{2,4}$	$3A_i \leqslant r(y_i^2) + 2r(y_i^4)$
17	$\chi_{2,3,5}$	$3A_i \leqslant r(y_i^2) + r(y_i^3) + r(y_i^5)$
18	$\chi_{2,3,4}$	$3A_i \leqslant r(y_i^2) + r(y_i^3) + r(y_i^4)$
19	$\chi_{2,3,3}$	$3A_i \leqslant r(y_i^2) + r(y_i^3) + r(\hat{y}_i^3)$
20	$\chi_{2,3,2}$	$3A_i \leqslant r(y_i^2) + r(y_i^3) + r(\hat{y}_i^2)$
21	$\chi_{2,3,1}$	$6A_i \leqslant 2r(y_i^2) + 3r(y_i^3) + r(y_i^1)$
22	$\chi_{2,2;d}$	$3dA_i \leqslant r(y_i^2) + r(\hat{y}_i^2) + r(y_i^d)$
23	$\chi_{2,1}$	$3A_i \leqslant 2r(y_i^2) + r(y_i^1)$
24	$\chi_{1;7;7(321)}$	$9A_i \leqslant 7r(y_i^7) + 2r(y_i^1)$
25	$\chi_{1;6}$	$3A_i \leqslant r(y_i^1) + 2r(y_i^6)$

Здесь $r(y_i^{d_j})$ — *кратности фундаментальных точек* $\{y_i^{d_j}\}$ *преобразования* α_{i+1} *в линейной системе* $|\alpha(i)(l)|$. *В случаях, когда* α_{i+1} *имеет две фундаментальные точки одинаковой степени* d, *одна из них для удобства обозначается через* $\hat{y}_i^d$.

Доказательство. Все эти неравенства проверяются прямыми вычислениями A_{i+1} через A_i $r(y_i^{d_j})$ по формулам из п. 1.2.

Напомним, что аналогичные формулы для преобразований типа σ_1, σ_1^{-1}, τ и ε_d, входящих в расширенное слово $\alpha = \alpha_n \dots \alpha_1$, содержатся в лемме 3.2. □

4.3. Лемма. *В условиях предыдущей леммы, если α_{i+1} — одно из преобразований $\chi_{2,2;1}$, $\chi_{2,3,1}$, $\chi_{2,5,1}$ или $\chi_{2,5,4}$, то*

$$\begin{aligned}
\chi_{2,2;1} &= \chi_{2,1}(221)\chi_{2,1},\\
\chi_{2,3,1} &= \chi_{2,1}(111,221)\chi_3\chi_{2,1},\\
\chi_{2,5,1} &= \chi_{5,2}(112,211)\chi_{5,1}(221)\chi_{2,1},\\
\chi_{2,5,4} &= \chi_{5,2}(112,221)\chi_{5,4}(111)\chi_{5,2}.
\end{aligned}$$

Кроме того, если выполняется неравенство $A_{i+1} \leqslant A_i$ и, значит, соответствующее неравенство из предыдущей леммы, то выполняются также неравенства для некоторых из множителей α_{i+1}, указанных выше (не требуется, чтобы неравенства выполнялись для первого из множителей).

Доказательство. Тот факт, что такие разложения существуют, проверяется непосредственно по формулам действия их на $Z^*(\mathbf{P}^2)$ из п. 1.2 (ср. замечание 1.3, (iv)). Для доказательства надо сопоставить соответствующие неравенства из леммы 4.2. В первых трех случаях оказывается, что неравенство для композиции представляется в виде линейной комбинации неравенств для множителей с положительными коэффициентами, откуда немедленно следует результат. Эти линейные комбинации имеют вид

$\chi_{2,2;1}$: неравенство $3A_i \leqslant r(y_i^2) + r(\hat{y}_i^2) + r(y_i^1)$ есть полусумма неравенств
$\chi_{2,1}$: $3A_i \leqslant 2r(y_i^2) + r(y_i^1)$, $\chi_{2,1}$: $3A_i \leqslant r(y_i^1) + 2r(\hat{y}_i^2)$;
$\chi_{2,3,1}$: неравенство $6A_i \leqslant 2r(y_i^2) + 3r(y_i^3) + r(y_i^1)$ есть сумма неравенств
$\chi_{2,1}$: $3A_i \leqslant 2r(y_i^2) + r(y_i^1)$, χ_3: $3A_i \leqslant 3r(y_i^3)$;
$\chi_{2,5,1}$: неравенство $9A_i \leqslant 3r(y_i^2) + 5r(y_i^5) + r(y_i^1)$ есть сумма, деленная на 4, следующих неравенств:

$$\begin{aligned}
\chi_{5,1}&:\ 6A_i \leqslant 5r(y_i^5) + r(y_i^1),\\
\chi_{2,1}&:\ 9A_i \leqslant 6r(y_i^2) + 3r(y_i^1),\\
\chi_{5,2}&:\ 21A_i \leqslant 6r(y_i^2) + 15r(y_i^5).
\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь последний случай $\chi_{2,5,4}$. Достаточно показать, что из неравенства для $\chi_{2,5,4}$ следует неравенство для $\chi_{5,2}$, так как $\chi_{2,5,4} = \chi_{5,2}\chi_{5,4}\chi_{5,2}$. Из неравенств

$$\begin{aligned}
&6A_i \leqslant 2r(y_i^2) + 3r(y_i^5) + r(y_i^4),\\
&9A_i = 3a_i > 2r(y_i^2) + 5r(y_i^5) + 4r(y_i^4)
\end{aligned}$$

(второе следует из леммы 3.2, (i)) находим $3A_i > 2r(y_i^5) + 3r(y_i^4)$. Вычитая это неравенство из утроенного первого, получаем $15A_i \leqslant 6r(y_i^2) + 7r(y_i^5)$. Вычитая отсюда очевидное неравенство $3A_i = a_i \geqslant 2r(y_i^2)$ (прямая, проходящая через две сопряженные точки $y_i^2 \otimes \overline{k}$, является эффективным циклом в $Z^*(\mathbf{P}_k^2)$ и поэтому неотрицательно пересекается с линейной системой $|\alpha(i)(l)|$ — см. [13,

гл. V]), получаем $6A_i \leqslant 7r(y_i^5)$ и тем более $6A_i \leqslant 8r(y_i^5)$. Складывая это с неравенством $15A_i \leqslant 6r(y_i^2) + 7r(y_i^5)$ и деля на 3, окончательно получаем

$$7A_i \leqslant 2r(y_i^2) + 5r(y_i^5),$$

т. е. неравенство для $\chi_{5,2}$, что и требовалось установить. Лемма доказана. □

Пользуясь этой леммой, мы можем:

а) заменить во всех рассматриваемых словах $\chi_{2,2;1}$, $\chi_{2,3,1}$, $\chi_{2,5,1}$, $\chi_{2,5,4}$ на соответствующие произведения;

б) не использовать $\chi_{2,2;1}$, $\chi_{2,3,1}$, $\chi_{2,5,1}$, $\chi_{2,5,4}$ в алгоритме раскручивания.

Таким образом, эти четыре преобразования из наших рассмотрений исключаются.

В следующей лемме мы отберем допустимые значения для преобразований α_s, α_{s+1} в вершине специального расширенного слова $\alpha = \alpha_n \dots \alpha_{s+1}\alpha_s \dots \alpha_1$. При этом мы не будем рассматривать случаи, когда α_s или α_{s+1} принимают значения σ_1, σ_1^{-1}, τ и ε_d. Они рассматриваются непосредственно в процессе доказательства основной теоремы. Для остальных преобразований по определению 3.3 имеем $A_{s+1} < A_s$ и $A_{s-1} \leqslant A_s$. Через $Y_i = \{y_i^{d_1}, \dots, y_i^{d_p}\}$ обозначается множество фундаментальных точек преобразования α_{i+1}, а через $X_i = \{x_i^{c_1}, \dots, x_i^{c_q}\}$ — множество фундаментальных точек преобразования α_i^{-1}. Положим $Z_i = X_i \cup Y_i = \{z_i^{e_1}, \dots, z_i^{e_r}\}$. Далее, из двух возможностей $\alpha_{s+1}\alpha_s = \chi''\chi'$ и $\alpha_{s+1}\alpha_s = \chi'\chi''$ мы будем рассматривать только одну. Этого достаточно по следующей причине. Предположим, что слово α очень специальное (и $\alpha_s \neq \varepsilon_d$); переходя к обратному слову, имеем $(\alpha^{-1})_{s(\alpha^{-1})} = \alpha_{s+1}^{-1}$, $(\alpha^{-1})_{s(\alpha^{-1})+1} = \alpha_s^{-1}$. Поскольку α_i и α_i^{-1} имеют одинаковые числовые типы (соотношение 2.3, (i)), переход к обратному слову меняет порядок в паре χ'', χ'.

В § 5 показывается, что $\alpha \in R$ представляется по модулю соотношений в виде произведения слов с меньшим значением высоты. Очевидно, это условие инвариантно относительно перехода от α к α^{-1} ($A(\alpha) = A(\alpha^{-1})$). В случае $\alpha \in S \setminus S'$ есть одна тонкость: $(\alpha^{-1})_{s(\alpha^{-1})} = \alpha_s^{-1}$, $(\alpha^{-1})_{s(\alpha^{-1})+1} = \alpha_{s-1}^{-1}$, и здесь переход к обратному слову может поменять пару χ'', χ'. В данном случае для α^{-1} доказательства из § 5 дословно повторяются со следующим изменением: вместо $(\alpha^{-1})_{s(\alpha^{-1})+1}(\alpha^{-1})_{s(\alpha^{-1})}$ надо рассматривать $(\alpha^{-1})_{s(\alpha^{-1})}(\alpha^{-1})_{s(\alpha^{-1})-1}$, при этом единственное отличие будет состоять в том, что нестрогое и строгое неравенства, которыми мы оперируем, поменяются местами. Кроме того, имеются несколько преобразований, а именно $\chi_{2,2;d}$, $\chi_{2,3,2}$, $\chi_{2,3,3}$, симметричных относительно перестановки точек одинаковой степени (как это видно из соответствующих формул п. 1.2), поэтому в приведенной ниже таблице мы из двух вариантов для каждого из этих преобразований оставляем только один; $\chi_{2,2;2}$ симметрично относительно всех трех точек.

Ниже мы, естественно, предполагаем, что $\alpha_{s+1} \neq \alpha_s^{-1}$. Напомним, что $\chi_{2,4}$, $\chi_{2,5,4}$, $\chi_{2,5,1}$, $\chi_{2,3,1}$, $\chi_{2,2;1}$ из рассмотрения исключены.

4.4. Лемма. *В предыдущих условиях и обозначениях для α_s и α_{s+1} имеются только следующие возможности*:

№	α_s	α_{s+1}	$X_s \cap Y_s$
1	χ_6	$\chi_{2,6}$	$x_s^6 = y_s^6$
2	$\chi_{5,4}$	$\chi_{5,1}$	$x_s^5 = y_s^5$
3	$\chi_{5,3}$	$\chi_{5,2}$	$x_s^5 = y_s^5$
4	$\chi_{5,3}$	$\chi_{5,1}$	$x_s^5 = y_s^5$
5	$\chi_{5,3}$	χ_3	$x_s^3 = y_s^3$
6	$\chi_{5,2}$	$\chi_{5,2}$	$x_s^5 = y_s^5$
7	$\chi_{5,2}$	$\chi_{5,1}$	$x_s^5 = y_s^5$
8	$\chi_{5,2}$	$\chi_{2,5,3}$	$x_s^5 = y_s^5;\ x_s^2 = y_s^2$
9	$\chi_{5,2}$	$\chi_{2,5,2}$	$x_s^5 = y_s^5;\ x_s^2 = y_s^2$
10	$\chi_{5,2}$	$\chi_{2,5,2}$	$x_s^5 = y_s^5;\ x_s^2 = \hat{y}_s^2$
11	$\chi_{5,2}$	$\chi_{2,2;5}$	$x_s^5 = y_s^5;\ x_s^2 = y_s^2$
12	$\chi_{5,2}$	$\chi_{2,1}$	$x_s^2 = y_s^2$
13	$\chi_{5,1}$	$\chi_{5,1}$	$x_s^5 = y_s^5$
14	$\chi_{5,1}$	$\chi_{4,1}$	$x_s^1 = y_s^1$
15	$\chi_{5,1}$	$\chi_{2,5,2}$	$x_s^5 = y_s^5$
16	$\chi_{5,1}$	$\chi_{2,1}$	$x_s^1 = y_s^1$
17	$\chi_{4;d}$	$\chi_{4;d'}$	$x_s^4 = y_s^4$
18	$\chi_{4;4}$	$\chi_{4;4}$	$x_s^4 = \hat{y}_s^4;\ \hat{x}_s^4 = \hat{y}_s^4$
19	$\chi_{4;3}$	χ_3	$x_s^3 = y_s^3$
20	$\chi_{4;2}$	$\chi_{2,3,4}$	$x_s^2 = y_s^2;\ x_s^4 = y_s^4$
21	$\chi_{4;2}$	$\chi_{2,2;4}$	$x_s^4 = y_s^4;\ x_s^2 = y_s^2$
22	$\chi_{4;2}$	$\chi_{2,1}$	$x_s^2 = y_s^2$
23	$\chi_{4;1}$	$\chi_{4;1}$	$x_s^1 = y_s^1$
24	$\chi_{4;1}$	χ_3	
25	$\chi_{4;1}$	$\chi_{2,1}$	$x_s^1 = y_s^1$
26	$\chi_{4;1}$	$\chi_{2,1}$	
27	χ_3	χ_3	
28	χ_3	$\chi_{2,3,c}$	$c = 2,3,4,5;\ x_s^3 = y_s^3$
29	χ_3	$\chi_{2,2;3}$	$x_s^3 = y_s^3$
30	χ_3	$\chi_{2,1}$	
31	$\chi_{2,7}$	$\chi_{2,1}$	$x_s^2 = y_s^2$
32	$\chi_{2,6}$	$\chi_{2,1}$	$x_s^2 = y_s^2$
33	$\chi_{2,5,3}$	$\chi_{2,5,2}$	$x_s^5 = y_s^5;\ x_s^2 = y_s^2$

№	α_s	α_{s+1}	$X_s \cap Y_s$
34	$\chi_{2,5,3}$	$\chi_{2,1}$	$x_s^2 = y_s^2$
35	$\chi_{2,5,2}$	$\chi_{2,5,2}$	$x_s^5 = y_s^5;\ x_s^2 = y_s^2$
36	$\chi_{2,5,2}$	$\chi_{2,2;5}$	$x_s^5 = y_s^5;\ x_s^2 = y_s^2$
37	$\chi_{2,5,2}$	$\chi_{2,2;5}$	$x_s^5 = y_s^5;\ x_s^2 = y_s^2;\ \hat{x}_s^2 = \hat{y}_s^2$
38	$\chi_{2,5,2}$	$\chi_{2,1}$	$x_s^2 = y_a^2$
39	$\chi_{2,3,5}$	$\chi_{2,1}$	$x_s^2 = y_a^2$
40	$\chi_{2,3,4}$	$\chi_{2,1}$	$x_s^2 = y_a^2$
41	$\chi_{2,3,3}$	$\chi_{2,3,2}$	$x_s^2 = y_a^2;\ x_s^3 = y_a^3$
42	$\chi_{2,3,3}$	$\chi_{2,1}$	$x_s^2 = y_s^2$
43	$\chi_{2,2;d}$	$\chi_{2,2;d'}$	$x_s^2 = y_s^2;\ \hat{x}_s^2 = \hat{y}_s^2$
44	$\chi_{2,2;3}$	$\chi_{2,2;3}$	$x_s^2 = y_s^2;\ x_s^3 = y_s^3$
45	$\chi_{2,2;d}$	$\chi_{2,1}$	$x_s^2 = y_s^2$
46	$\chi_{2,1}$	$\chi_{2,1}$	$x_s^2 = y_s^2$
47	$\chi_{2,1}$	$\chi_{2,1}$	$x_s^1 = y_s^1$
48	$\chi_{2,1}$	$\chi_{2,1}$	
49	$\chi_{1;7;7}^{(321)}$	χ_7	$x_s^7 = y_s^7$
50	$\chi_{1;7;7}^{(321)}$	$\chi_{1;4}$	$x_s^1 = y_s^1$
51	$\chi_{1;7;7}^{(321)}$	$\chi_{2,1}$	$x_s^1 = y_s^1$
52	$\chi_{1;7;7}^{(321)}$	$\chi_{1;6}$	$x_s^1 = y_s^1$
53	$\chi_{1;6}$	χ_6	$x_s^6 = y_s^6$
54	$\chi_{1;6}$	$\chi_{5,1}$	$x_s^1 = y_s^1$
55	$\chi_{1;6}$	$\chi_{4;1}$	$x_s^1 = y_s^1$
56	$\chi_{1;6}$	$\chi_{2,1}$	$x_s^1 = y_s^1$
57	$\chi_{1;6}$	$\chi_{1;6}$	$x_s^1 = y_s^1$
58	$\chi_{1;6}$	χ_3	
59	$\chi_{1;6}$	$\chi_{2,1}$	
60	$\chi_{1;6}$	$\chi_{1;6}$	$x_s^6 = y_s^6$

Доказательство. Воспользуемся неравенствами из леммы 4.2: для кратностей $r(y_s^{d_i})$ они строгие, так как $A_{s+1} < A_s$, а для $r(x_s^{c_i})$ — не обязательно строгие, так как $A_{s-1} \leqslant A_s$. Из 2.4 мы имеем следующий набор неравенств:

$$(1)\quad 3A_3 < r(y_s^{d_1}) + r(y_s^{d_2}) + r(y_s^{d_3}), \quad d_1 \geqslant 2,\ d_2 \geqslant 2,\ d_3 \geqslant 2$$

(для $\chi_{2,2;d}, \chi_{2,3,2}, \chi_{2,3,3}, \chi_{2,3,4}$ и $\chi_{2,3,5}$);

$$
\begin{aligned}
&(2)\quad 3A_s < r(y_s^{d_1}) + 2r(y_s^{d_2}), \quad d_1 \geqslant 2,\ d_2 \geqslant 4\\
&\qquad (\text{для } \chi_{2,4}, \chi_{2,6}, \chi_{4,d}, \chi_{2,7}, \chi_{5,3}, \chi_{5,4});\\
&(3)\quad 3A_s < 2r(y_s^4) + r(y_s^1) \quad (\text{для } \chi_{4;1});\\
&(4)\quad 6A_s < 5r(y_s^5) + r(y_s^1) \quad (\text{для } \chi_{5,1});\\
&(5)\quad 9A_s < 3r(y_s^2) + 5r(y_s^5) + r(\hat{y}_s^2) \quad (\text{для } \chi_{2,5,2});\\
&(6)\quad 7A_s < 5r(y_s^5) + 2r(y_s^2) \quad (\text{для } \chi_{5,2});\\
&(7)\quad A_s < 5r(y_s^d), \quad d = 3,6,7,8 \quad (\text{для } \chi_3, \chi_6, \chi_7, \chi_8);\\
&(8)\quad 3A_s < 2r(y_s^2) + r(y_s^1) \quad (\text{для } \chi_{2,1});\\
&(9)\quad 6A_s < 2r(y_s^2) + 3r(y_s^5) + r(y_s^3) \quad (\text{для } \chi_{2,5,3});\\
&(10)\quad 9A_s < 7r(y_s^7) + 2r(y_s^1) \quad (\text{для } \chi_{1;7;7}(321));\\
&(11)\quad 3A_s < 2r(y_s^6) + r(y_s^1) \quad (\text{для } \chi_{1;6});
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

и аналогичный набор неравенств со знаком «$\leqslant$» для $r(x_s^{c_i})$, $x_s^{c_i} \in X_s$. Соответствующие неравенства для $r(x_s^{c_i})$ и A_s мы будем нумеровать тем же номером, только со штрихом: $(1'), \dots, (11')$.

Множества $X_s = \{x_s^{c_1}, \dots, x_s^{c_p}\}$ и $Y_s = \{y_s^{d_1}, \dots, y_s^{d_q}\}$, как правило, пересекающиеся, связаны, с одной стороны, условиями (4.1), а с другой — условиями леммы 3.2. Исходя из этого, рассмотрим комбинации неравенств $\{(ij') \mid 1 \leqslant i \leqslant j' \leqslant 11\}$ и отберем все случаи, которые не противоречат условиям 3.2, (i); именно они включены в таблицу леммы 4.4.

Для определенности выпишем неравенства, которыми мы будем пользоваться для $z_s^{e_i} \in X_s \cup Y_s = Z_s$, $e_i = \deg z_s^{e_i}$:

$$
\begin{aligned}
&9A_s > \sum e_i r(z_s^{e_i});\\
&3A_s \geqslant r(z_s^{e_i}) + r(z_s^{e_j}), \quad z_s^{e_i} \neq z_s^{e_j};\\
&3A_s \geqslant 2r(z_s^{e_i}), \quad e_i \geqslant 2;\\
&6A_s \geqslant \sum a_i r(z_s^{e_i}), \quad a_i \leqslant e_i, \quad \sum a_i = 5;\\
&9A_s \geqslant \sum_{i=1}^{k} b_i r(z_s^{e_i}), \quad \sum_{i=1}^{k} b_i = 8, \quad b_i \leqslant e_i, \quad \forall\, i \leqslant k-1, \quad b_k \leqslant e_k + 1.
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

Первое из этих неравенств — следствие 3.2, (i), остальные — частные случаи общего утверждения, что линейная система $|\alpha(s)(l)|$, как собственный прообраз линейной системы прямых на $\mathbf{P}^2$, численно эффективна в $Z^*(\mathbf{P}^2)$, т. е. принадлежит $Z^{++}(\mathbf{P}^2)$ в обозначениях [13, гл. V], и надо указать только соответствующие эффективные циклы в $Z^*(\mathbf{P}^2)$.

В случаях (4.2) такими циклами являются собственные прообразы: прямой, проходящей через две точки, — второе неравенство; прямой, проходящей через пару сопряженных точек, — третье неравенство; коники, проходящей не более чем через пять точек, — четвертое неравенство; кубики, проходящей

не более чем через 9 точек или через 7, одна из которых двойная, — пятое неравенство.

С л у ч а й (1.1′). Здесь пересечение $X_s \cap Y_s$ состоит из двух точек: степень одной из них равна 2, степень другой — 2 или 3. Кроме того, если $X_s = \{x_s^2, x_s^e, x_s^c\}$ и $Y_s = \{y_s^2 = x_s^2, y_s^e = x_s^e, y_s^d\}$, $e = 3$, то $c + d \leqslant 5$.

Действительно, по предположению $X_s \neq Y_s$, и для $z_s^{e_i} \in X_s \cup Y_s = Z_s$ имеем неравенство (4.2). С другой стороны, складывая удвоенные неравенства (1) и (1′), получаем

$$12A_s < \sum d_i r(z_s^{e_i}), \quad z_s^{e_i} \in Z_s,$$

где $d_i = 2$, если $z_s^{e_i} \in Z_s \setminus (X_s \cap Y_s)$, и $d_i = 4$, если $z_s^{e_i} \in X_s \cap Y_s$.

Из сопоставления неравенств находим, что возможно только следующее: $X_s = \{x_s^2, x_s^2, x_s^c\}$, $Y_s = \{y_s^2 = x_s^2, y_s^e = x_s^e, y_s^d\}$, где $e = 2, 3$, $x_s^c \neq y_s^d$. Чтобы доказать последнее утверждение, сложим неравенство (1), умноженное на c, и (1′), умноженное на d, и вычтем неравенства

$$9A_s > 2r(x_s^2) + er(x_s^e) + cr(x_s^c) + dr(x_s^d)$$

и

$$6A_s \geqslant 2r(x_s^2) + er(x_s^e)$$

(см. (4.2)). В результате получим

$$3(c + d - 5)A_s < (c + d - 4)r(x_s^2) + (c + d - 2e)r(x_s^e).$$

При $c + d > 5$ и $e = 3$ это неравенство противоречит неравенствам

$$3A_s \geqslant 2r(x_s^2) \quad \text{и} \quad 3A_s \geqslant r(x_s^2) + r(x_s^e).$$

С л у ч а й (1.2′). Здесь $\{x_s^{c_1}, x_s^{c_2}\} = X_s \subset Y_s = \{y_s^{d_1}, y_s^{d_2}, y_s^{d_3}\}$, причем если $x_s^{c_1} = y_s^{d_1}$ и $x_s^{c_2} = y_s^{d_2}$, то $c_1 = d_1 = 2$ и $c_2 = d_2 < 6$.

Действительно, складывая удвоенное (1) с (2′), видим, что полученное неравенство противоречит первому из неравенств (4.2), если $x_s^{c_1} \neq y_s^{d_1}$ или $x_s^{c_1} = y_s^{d_1}$ и $c_1 = d_1 > 2$. Складывая удвоенные (1) и (2′) и вычитая третье из неравенств (4.2) $3A_s \geqslant 2r(x_s^{c_1})$, получаем противоречие с первым из неравенств (4.2) в случае, если $x_s^{c_2} \neq y_s^{d_2}$ или $x_s^{c_2} = y_s^{d_2}$ и $c_2 = d_2 \geqslant 6$.

С л у ч а й (1.3′). Этот случай невозможен. Действительно, складывая (1) с (3′), получаем противоречие с первым неравенством (4.2).

С л у ч а й (1.4′). Этот случай также невозможен. Действительно, складывая удвоенное (1) с (4′) и вычитая третье из неравенств (4.2) для $z_s^5 = x_s^5$, получаем противоречие с первым.

С л у ч а й (1.5′). Здесь $y_s^2 = x_s^2$ и $y_s^5 = x_s^5$. Действительно, в противном случае противоречие достигается из сопоставления неравенств (1) + (5′) с неравенствами (4.2).

С л у ч а й (1.6′). Здесь также $y_s^2 = x_s^2$ и $y_s^5 = x_s^5$. Действительно, в противном случае противоречие достигается из сопоставления неравенств 2(1) + (6′) с (4.2).

С л у ч а й (1.7′). Возможно только $y_s^3 = x_s^3$ (вычитаем из $2(1)+d(7')$ неравенство $3A_s \geqslant 2r(x_s^d)$).

С л у ч а й (1.8′). Возможно только $y_s^2 = x_s^2$ (рассматриваем $2(1)+(8')$).

С л у ч а й (1.9′). Этот случай невозможен. Действительно, складывая удвоенное (1) с (9′) и вычитая неравенство $3A_s \geqslant 2r(x_s^2)$, получаем противоречие с (4.2).

С л у ч а й (1.10′). Невозможен (вычитаем из $(1)+(10')$ неравенство $3A_s \geqslant r(x_s^7)+r(x_s^1)$).

С л у ч а й (1.11′). Невозможен (вычитаем из $2(1)+2(10')$ неравенство $3A_s \geqslant r(x_s^1)$).

С л у ч а й (2.2′). Возможны только следующие варианты:

$$x_s^{c_2} = y_s^{d_2}, \quad c_2 = d_2 = 4, \quad \alpha_s = \chi_{4;c_1}, \quad \alpha_{s+1} = \chi_{4;d_1};$$
$$x_s^{c_1} = y_s^{d_2}, \quad x_s^{c_2} = y_s^{d_1}, \quad c_1 = c_2 = d_1 = d_2 = 4, \quad \alpha_s = \chi_{4;4}, \quad \alpha_{s+1} = \chi_{4;4}.$$

Действительно, если $y_s^{d_2}, x_s^{c_2} \notin X_s \cap Y_s$, то, вычитая из $2(2)+2(2')$ неравенство $3A_s \geqslant r(y_s^{d_1})+r(x_s^{c_1})$, получаем противоречие с первым из (4.2). Если $x_s^{c_2} = y_s^{d_2}$, то $x_s^{c_1} \neq y_s^{d_1}$. Вычитая из $2(2)+2(2')$ $3A_s \geqslant 2r(y_s^{d_2})$, получаем противоречие с первым из (4.2) во всех случаях, кроме $d_2 = c_2 < b$. При $d_2 = c_2 = 5$ имеем $c_1, d_1 \geqslant 3$. Вычитая тогда из $3(2)+(2')$ $3A_s \geqslant 2r(y_s^{d_2})$, также получаем противоречие. Случай $d_2 = c_2 = 4$ указан среди возможных.

Пусть теперь $x_s^{c_1} = y_s^{d_2}$. При $x_s^{c_2} \neq y_s^{d_1}$ противоречие с (4.2) получается вычитанием из $2(2)+2(2')$ $3A_s \geqslant 2r(y_s^{d_2})$. При $x_s^{c_2} = y_s^{d_1}$ и $c_1 = d_2 = 4$, $c_2 = d_1 = 5$ неравенство $(2)+2(2')$ также противоречит (4.2).

С л у ч а й (2.3′). Возможен только при $y_s^4 = x_s^4$ и $\alpha_{s+1} = \chi_{4;d}$ (рассматриваем $2(2)+(3')$).

С л у ч а й (2.4′). Возможен только при $y_s^{d_2} = x_s^5$ и $\alpha_{s+1} = \chi_{5,4}$ или $\chi_{5,3}$ (рассматриваем разность $2(2)+(4')$ и $3A_s \geqslant 2r(y_s^{d_1})$).

С л у ч а й (2.5′). Невозможен. Действительно, $Y_s \not\subset X_s$. При $x_s^5 \notin X_s \cap Y_s$, рассматривая разность $(2)+(5')$ и $3A_s \geqslant r(y_s^{d_1})+r(x_s^2)$, получаем противоречие с (4.2). При $x_s^5 \in X_s \cap Y_s$, рассматривая разность $2(2)+(5')$ и $6A_s \geqslant r(y_s^2) + 4r(x_s^5)$, опять получаем противоречие.

С л у ч а й (2.6′). Возможно только при $y_s^{d_2} = x_s^5$ и $\alpha_{s+1} = \chi_{5,4}$ или $\chi_{5,3}$. Действительно, при $y_s^{d_2} \neq x_s^5$, вычитая из $2(2)+(6')$ $3A_s \geqslant 2r(y_s^{d_1})$, получаем противоречие с первым из неравенств (4.2).

С л у ч а й (2.7′). Возможны только: $y_s^{d_2} = x_s^c$, $c = 6$, $\alpha_{s+1} = \chi_{2,6}$ или $y_s^{d_1} = x_s^c$, $c = 3$, $(\alpha_{s+1} = \chi_{5,3}, \chi_{4,3})$. Действительно, при $y_s^{d_1} \neq x_s^c$ неравенство $2(2)+3(7')$ противоречит первому из (4.2), если $c \geqslant 7$ или $y_s^{d_2} \neq x_s^c$. Если $y_s^{d_1} = x_s^c$, то $2(2)+3(7')$ противоречит (4.2) при $c \geqslant 6$.

С л у ч а й (2.8′). Возможно только $y_s^{d_1} = x_s^2$ (рассматриваем $2(2)+(8')$).

С л у ч а й (2.9′). Невозможен. Действительно, $(2)+(9')$ противоречит первому из неравенств (4.2), если $y_s^{d_1} \neq x_s^2$. Если $y_s^{d_1} = x_s^2$, то $2(2)+(9')$ противоречит первому и третьему неравенствам (4.2).

С л у ч а й (2.10′). Невозможен. Вычитая из $2(2)+(10')$ неравенство $6A_s \geqslant r(y_s^1) + 4r(x_s^7)$, т. е. четвертое из (4.2), получаем противоречие с первым.

С л у ч а й (2.11′). Невозможен: $2(2) + (11')$ противоречит (4.2).

С л у ч а й (3.3′). Возможно только $x_s^1 = y_s^1$ или $x_s^4 = y_s^4$. Рассматривая $2(3) + 2(3')$ и вычитая $3A_s \geqslant r(y_s^1) + r(y_s^1)$, получаем противоречие с первым неравенством (4.2), если $X_s \cap Y_s = \varnothing$.

С л у ч а й (3.4′). Возможно только $y_s^1 = x_s^1$; при $y_s^1 \neq x_s^1$ $(3) + (4')$ противоречит (4.2).

С л у ч а й (3.5′). Невозможен: $(3) + (5')$ противоречит (4.2).

С л у ч а й (3.6′). Невозможен. Разность $2(3) + (6')$ и $3A_s \geqslant r(x_s^2) + r(y_s^1)$ противоречит первому неравенству (4.2).

С л у ч а й (3.7′). Возможен только при $\alpha_s = \chi_3$, т. е. $\deg x_s^c = 3$. При $c > 3$ $(3) + 6(7')$ противоречит (4.2).

С л у ч а й (3.8′). Возможна любая ситуация: $X_s \cap Y_s = \varnothing$ или $y_s^1 = x_s^1$.

С л у ч а й (3.9′). Невозможен: $(3) + (9')$ противоречит (4.2).

С л у ч а й (3.10′). Возможен только при $x_s^1 = y_s^1$. Действительно, в противном случае разность $(3) + (10')$ и $3A_s \geqslant r(x_s^1)$ противоречит (4.2).

С л у ч а й (3.11′). Возможен только при $x_s^1 = y_s^1$. Действительно, в противном случае, вычитая из $2(3) + 3(11')$ $3A_s \geqslant r(x_s^1)$ и $3A_s \geqslant r(x_s^1) + r(y_s^1)$, получаем неравенство, противоречащее (4.2).

С л у ч а й (4.4′)–(4.6′). Возможны только при $x_s^5 = y_s^5$ (при $x_s^5 \neq y_s^5$ сумма (4) и соответствующего неравенства (4′), (5′), (6′) противоречит (4.2)).

С л у ч а й (4.7′). Невозможен: $(4) + 3(7')$ противоречит (4.2).

С л у ч а й (4.8′). Возможен только при $y_s^1 = x_s^1$ (рассматриваем $(4) + (8')$).

С л у ч а й (4.9′). Невозможен. Действительно, неравенство $(4) + (9')$ противоречит первому из неравенств (4.2) во всех случаях, кроме $y_s^5 = x_s^5$. Вычитая в последнем случае из $(4) + 3(9')$ неравенства $6A_s \geqslant 2r(z_s^2) + 3r(z_s^5)$ и $9A_s \geqslant 2r(z_s^2) + 6r(z_s^5)$ (т. е. четвертое и пятое из (4,2)), получаем неравенство, противоречащее первому из неравенств (4.2).

С л у ч а й (4.10′). Невозможен. Складывая (4) и (10′) и вычитая $6A_s \geqslant$ $\geqslant 2r(x_s^1)$, получаем противоречие.

С л у ч а й (4.11′). Возможен только при $x_s^1 = y_s^1$ (рассматриваем $(4) + (11')$).

С л у ч а й (5.5′). Возможно только $x_s^2 = y_s^2$, $x_s^5 = y_s^5$. Действительно, складывая (5) и (5′) и вычитая $6A_s \geqslant 2r(y_s^2) + 2r(x_s^2)$, получаем противоречие с первым из неравенств (4.2), если $y_s^5 \neq x_s^5$. При $y_s^5 = x_s^5$ и $y_s^2 = x_s^2$ полусумма $\frac{1}{2}(5) + \frac{1}{2}(5')$ также противоречит (4.2).

С л у ч а й (5.6′). Возможны только либо $x_s^2 = y_s^2$ и $x_s^5 = y_s^5$, либо $x_s^2 = \hat{y}_s^2$ и $x_s^5 = y_s^5$. Действительно, $(5) + (6')$ противоречит первым трем неравенствам (4.2), если $y_s^5 \neq x_s^5$. Предположим теперь, что $y_s^2 \neq x_s^2$ и $\hat{y}_s^2 \neq x_s^2$. Вычитая из $2(5) + (6')$ первое из неравенств (4.2), получаем после деления на 2.

$$8A_s < 2r(z_s^2) + 5r(z_s^5).$$

Складывая последнее неравенство с (6′), получаем

$$7A_s < 5r(z_s^5) + 2r(\hat{z}_s^2)$$

и, вычитая $6A_s \geqslant 5r(z_s^5)$, получаем неравенство, противоречащее первому из (4.2).

Случай (5.7′). Невозможен: вычитая из (5) + 3(7′) $3A_s \geqslant 2r(y_s^2)$, получаем противоречие с (4.2).

Случай (5.8′). Возможен только при $y_s^2 = x_s^2$. При $y_s^2 \neq x_s^2$ вычитая из (5) + (8′) неравенство $3A_s \geqslant r(y_s^2) + r(x_s^2)$, получаем противоречие с (4.2).

Случай (5.9′). Возможен только при $x_s^2 = y_s^2$, $x_s^5 = y_s^5$. Действительно, сопоставляя (5) + (9′) с $6A_s \geqslant 3r(y_s^2) + r(x_s^2)$ при $x_s^5 \neq y_s^5$ или с $6A_s \geqslant 3r(y_s^5) + r(y_s^2) + r(x_s^2)$ при $x_s^5 = y_s^5$, получаем требуемое.

Случай (5.10′) и (5.11′). Невозможны: (5) + (10′) и (5) + (11′) противоречат (4.2).

Случай (6.6′). Возможен только при $y_s^5 = x_s^5$ (в противном случае (6) + (6′) противоречит $3A_s \geqslant 2r(z_s^2)$ и первому из неравенств (4.2)).

Случай (6.7′). Невозможен: (6) + 3(7′) противоречит (4.2).

Случай (6.8′). Возможен только при $y_s^2 = x_s^2$ (в противном случае (6) + (8′) противоречит (4.2)).

Случай (6.9′). Возможен только при $y_s^2 = x_s^2$, $y_s^5 = x_s^5$. Действительно, (6)+(9′) противоречит $3A_s \geqslant 2r(y_s^2)$ и первому из неравенств (4.2) при $y_s^5 \neq x_s^5$. При $y_s^5 = x_s^5$ и $x_s^2 \neq y_s^2$, вычитая из (6) + 3(9′) первое из неравенств (4.2), получаем $16A_s \geqslant 4r(z_s^2) + 9r(z_s^5)$. Далее противоречие достигается так же, как и в случае (5.6′).

Случай (6.10′), (6.11′), очевидно, невозможны.

Случай (7.7′). Возможен только один вариант $\alpha_s = \chi_3$, $\alpha_{s+1} = \chi_3$, $y_s^3 \neq x_s^3$. В противном случае, рассматриваем $d(7) + c(7')$ ($d = \deg y_s^d$, $c = \deg x_s^c$).

Случай (7.8′). Возможно только $\alpha_{s+1} = \chi_3$, $d = 3$ (аналогично предыдущему случаю, (7) + (8′) противоречит (4.2) при $d \geqslant 6$).

Случай (7.9′). Невозможен. Сравнивая 3(7) + (9′) с первым из неравенств (4.2), убеждаемся, что должно быть $y_s^3 = x_s^3$. Вычитая далее из 3(7) + 2(9′) неравенство $6A_s \geqslant 2r(x_s^2) + r(x_s^5) + 2r(z_s^3)$, получаем противоречие с первым из неравенств (4.2).

Случай (7.10′). Возможен только при $y_s^7 = x_s^7$.

Случай (7.11′). Возможен только либо при $\alpha_{s+1} = \chi_3$, либо при $\alpha_{s+1} = \chi_6$ и $y_s^6 = x_s^6$.

Случай (8.8′). Реализуются все три возможности: $X_s \cap Y_s = \varnothing$, $y_s^1 = x_s^1$, $y_s^2 = x_s^2$.

Случай (8.9′). Возможен только при $y_s^2 = x_s^2$ (достаточно рассмотреть (8) + (9′)).

Случай (8.10′). Возможен только при $x_s^1 = y_s^1$.

Случай (8.11′). Реализуются обе возможности: $X_s \cap Y_s = \varnothing$ или $x_s^1 = y_s^1$.

Случай (9.9′). Невозможен. Складывая (9) и (9′) и вычитая $3A_s \geqslant 2r(z_s^2)$ или $3A_s \geqslant r(z_s^5)$, получаем противоречие во всех случаях, кроме $x_s^2 = y_s^2$ и $x_s^5 = y_s^5$. При этих условиях, вычитая из 3(9) + 3(9′) первое из неравенств (4.2), получаем неравенство $27A_s < 10r(z_s^2) + 13r(z_s^5)$, которое противоречит неравенствам $3A_s \geqslant 2r(z_s^2)$, $6A_s \geqslant 2r(z_s^2) + 3r(z_s^5)$ и $9A_s \geqslant 3r(z_s^2) + 5r(z_s^5)$. В самом деле, достаточно сложить первое со вторым и с удвоенным третьим.

С л у ч а й (9.9′), (9.11′), очевидно, невозможны.

С л у ч а й (10.10′). Невозможен: при $y_s^1 \neq x_s^1$ рассматриваем $\frac{1}{2}(10)+\frac{1}{2}(10')$; при $y_s^1 = x_s^1$, $y_s^7 \neq x_s^7$ рассматриваем разность $(10)+(10')$ и $9A_s \geqslant 3r(z_s^1)$.

С л у ч а й (10.11′). Возможен только при $x_s^1 = y_s^1$.

С л у ч а й (11.11′). Возможен либо при $x_s^1 = y_s^1$, либо при $x_s^6 = y_s^6$.

На основании всех этих данных мы можем заполнить указанную в лемме таблицу. При этом, однако, нужно исключить еще два случая:

С л у ч а й $\alpha_s = \chi_{5,2}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{2,3,5}$. Невозможен. Действительно, по (1.6′) здесь $y_s^2 = x_s^2$ и $y_s^5 = x_s^5$. Вычитая из утроенного неравенства (1) первое из неравенств (4.2), получаем $r(y_s^2) > 2r(y_s^5)$.

Покажем, что $r(y_s^5) < r(y_s^3)$. Предположим $r(y_s^5) \geqslant r(y_s^3)$; тогда из предыдущего неравенства имеем $r(y_s^2) > 2r(y_s^5) \geqslant 2r(y_s^3)$. Используя третье из неравенств (4.2), находим $r(y_s^2) + r(y_s^3) + r(y_s^5) \leqslant 2r(y_s^2) \leqslant 3A_s$, что противоречит неравенству (1). Стало быть, $r(y_s^5) < r(y_s^3)$. Теперь рассмотрим два случая:

$$\text{(a)} \quad r(y_s^3) \geqslant \frac{2}{3}A_s \Leftrightarrow 2A_s \leqslant 3r(y_s^3);$$

$$\text{(b)} \quad r(y_s^3) < \frac{2}{3}A_s \Rightarrow r(y_s^5) < \frac{2}{3}A_s.$$

Складывая неравенство (a) с (6′), получаем противоречие с неравенством (1). В случае (b) из неравенства (1) имеем $r(y_s^2) > \frac{5}{3}A_s > \frac{3}{2}A_s$, что противоречит неравенству $3A_s \geqslant 2r(y_s^2)$.

С л у ч а й $\alpha_s = \chi_{2,5,2}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{2,3,5}$. Невозможен. Действительно, здесь также $y_s^2 = x_s^2$, $y_s^5 = x_s^5$. Вычитая из удвоенного неравенства (1) неравенство $3A_s \geqslant 2r(y_s^2)$, получаем следующее неравенство: $3A_s > 2r(y_s^3) + 2r(y_s^5)$. Удвоенное это неравенство сложим с (1) и (5') и разделим пополам, в результате получим противоречие с первым из неравенств (4.2).

Теперь осталось заполнить таблицу, учитывая все допустимые возможности, и лемма доказана. □

§ 5. Начало доказательства основной теоремы

Как сказано в § 3, для доказательства основной теоремы мы воспользуемся индукцией по лексикографически упорядоченной паре параметров (высота, специальное — очень специальное) специального слова $\alpha = \alpha_n \dots \alpha_{s+1}\alpha_s \dots \alpha_1$. Нужно будет рассмотреть все допустимые возможности для преобразований α_s, α_{s+1} из таблицы леммы 4.4, а также значения σ_1, σ_1^{-1}, τ и ε_d. Напомним, что множество специальных слов обозначается через S, а очень специальных — через S', $S' \subset S$. Напомним также, что из двух вариантов $\alpha_s = \chi'$, $\alpha_{s+1} = \chi''$ и $\alpha_s = \chi''$, $\alpha_{s+1} = \chi'$ достаточно рассматривать только один (см. замечание в конце п. 4.3). Начнем с рассмотрения следующей типичной ситуации, когда используются соотношения длины 4.

5.1. Л е м м а. *Предположим, что для расширенного специального слова* $\alpha = \alpha_n \dots \alpha_{s+1}\alpha_s \dots \alpha_1$ *пара* α_s, α_{s+1} *такая, как в табл.* 4.4, *№№* 1–5, 7–9, 12,

17–23, 25, 28, 29, 31–34, 37–40, 42, 43, 45, 47, 49, 53, 55–57; *тогда по модулю соотношений* 2.3–2.8 *слово* α *эквивалентно произведению* (*расширенных*) *слов* $\beta_2\beta_1$ *таких, что*

$$\begin{aligned} &A(\beta_2) < A(\alpha) = A, \\ &A(\beta_1) < A(\alpha) = A, \quad \text{если} \ \ \alpha \in S', \\ &A(\beta_1) = A(\alpha) \ \ \text{и} \ \ \beta_1 \in S', \quad \text{если} \ \ \alpha \in S \setminus S'. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Напомним, что $A(\alpha)$ *обозначает высоту слова* α (*см.* 3.2).

Доказательство. Случай $\alpha_s = \chi_6$, $\alpha_{s+1} = \chi_{2,6}$, $x_s^6 = y_s^6$. Воспользуемся соотношениями 2.3, (i), 2,4, (i) для χ_6 и $\chi_{2,6}$; заменим $\alpha_{s+1}\alpha_s = \chi_{2,6}(211)\chi_6$ на $\alpha'_{s+1}\alpha'_s = \chi'_6(121)\chi'_{2,6}$, где $\chi'_{2,6}$ имеет в качестве фундаментальных точек y_{s-1}^6 и $y_{s-1}'^2 = \alpha_s^{-1}(y_s^2)$ с $r(y_{s-1}'^2) = r(y_s^2)$*). Это видно из правила сцепления точек, указанного в соответствующем соотношении. Покажем, что в новом слове $\alpha' = \alpha_n \dots \alpha_{s+2}\alpha'_{s+1}\alpha'_s\alpha_{s-1}\dots\alpha_1$ выполнено неравенство $A'_s < A_{s-1}$ (см. (3.1)). По формулам 1.2 для χ_6 получаем

$$a_s = 5a_{s-1} - 12r(y_{s-1}^6), \quad r(x_s^6) = 2a_{s-1} - 5r(y_{s-1}^6)$$

(напомним, что $a_i = 3A_i$). Подставляя эти выражения в соответствующее (строгое) неравенство № 11 из леммы 4.2, получаем

$$a_s < r(y_s^2) + 2r(y_s^6),$$

и, учитывая, что $y_s^6 = x_s^6$, получаем $a_{s-1} < r(y_s^2) + 2r(y_{s-1}^6)$. Отсюда, заменяя $r(y_s^2)$ на $r(y_{s-1}'^2)$, получаем требуемое неравенство $A'_s < A_{s-1}$ по лемме 4.2. Теперь, как и в работе [8], воспользуемся следующим приемом.

Утверждение (*). *В предыдущих обозначениях положим* $\alpha' = \beta_2\beta_1$, *где* $\beta_1 = \delta\alpha'_s\alpha_{s-1}\dots\alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_n\dots\alpha_{s+2}\alpha'_{s+1}\delta^{-1}$, $\delta = \delta_r\dots\delta_1$ — *расширенное слово, полученное из композиции отображений, раскручивающих отображение* $\alpha'_s\alpha(s-1)$, *как в доказательстве леммы* 3.4. *Тогда* $A(\beta_1) = A_{s-1} \leqslant A(\alpha)$, $A(\beta_2) = \max(A_{s+1}, A'_s) < A(\alpha)$, *и если* $\alpha \in S'$, *то* $A_{s-1} < A(\alpha)$, *и, стало быть,* $A(\beta_1) < A(\alpha)$; *если же* $\alpha \in S\setminus S'$, *то* $A_{s-1} < A_s = A(\alpha)$ *и* $A(\beta_1) = A(\alpha)$. *В последнем случае, слово* β_1 *расширенное и специальное по построению, является очень специальным, так как* $A'_s < A_s = A_{s-1}$.

Все это видно непосредственно из конструкции, и, следовательно, требуемые условия (5.1) выполнены.

Случай $\alpha_s = \chi_{5,d}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{5,1}$, $d = 3, 4$; $x_s^5 = y_s^5$. Заменим $\alpha_{s+1}\alpha_s = \chi_{5,1}(111)\chi_{5,d}$, $d = 3, 4$, на $\alpha'_{s+1}\alpha'_s = \chi'_{5,d}(111)\chi'_{5,1}$, пользуясь соотношениями 2.3, (i) и 2.4, (ii), (iii), где $\chi'_{5,1}$ имеет в качестве фундаментальных точек y_{s-1}^5 и $y_{s-1}'^1 = \alpha_s^{-1}(y_s^1)$ с $r(y_{s-1}'^1) = r(y_s^1)$. Покажем, что для α' выполнено

*) Существование преобразования $\chi_{2,6}$ с этими фундаментальными точками обусловлено соответствующими неравенствами на кратности (см. ниже), из которых следует, что точки находятся в общем положении [3, лемма 2]. Аналогичные соображения работают во всех рассматриваемых случаях.

неравенство $A'_s < A_{s-1}$. По формулам 1.2 для $\chi_{5,d}$, $d = 3, 4$ имеем

$$\begin{aligned} d = 3\colon\quad & a_s = 16a_{s-1} - 30r(y^5_{s-1}) - 15r(y^3_{s-1}),\\ & r(x^5_s) = 6a_{s-1} - 11r(y^5_{s-1}) - 6r(y^3_{s-1});\\ d = 4\colon\quad & a_s = 41a_{s-1} - 80r(y^5_{s-1}) - 40r(y^4_{s-1}),\\ & r(x^5_s) = 16a_{s-1} - 31r(y^5_{s-1}) - 16r(y^4_{s-1}). \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в соответствующее неравенство из леммы 4.2, получаем

$$2a_s < r(y^1_s) + 5r(y^5_s),$$

и, учитывая, что $y^5_s = x^5_s$, получаем $2a_{s-1} < r(y^1_s) + 5r(y^5_{s-1})$. Так как $r(y^1_s) = r(y'^1_{s-1})$, то по лемме 4.2 это неравенство равносильно неравенству $A'_s < A_s$. Осталось воспользоваться утверждением $(*)$.

Случай $\alpha_s = \chi_{5,3}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{5,2}$; $y^5_s = x^5_s$. Воспользуемся соотношениями 2.3, (i), 2.4, (ix) и заменим $\alpha_{s+1}\alpha_s = \chi_{5,3}(111)\chi_{5,2}$ на $\alpha'_{s+1}\alpha'_s = \chi'_{5,2}(121, 211)\chi'_{2,5,3}$. Фундаментальными точками преобразования $\chi'_{2,5,3}$ являются y^2_{s-1}, y^5_{s-1} и $y'^3_{s-1} = \alpha_s^{-1}(y^3_s)$ с $r(y'^3_{s-1}) = r(y^3_s)$. По формулам 1.2. для $\chi_{5,2}$ имеем

$$\begin{aligned} a_s &= 8a_{s-1} - 15r(y^5_{s-1}) - 6r(y^3_{s-1}),\\ r(x^5_s) &= 3a_{s-1} - 6r(y^5_{s-1}) - 2r(y^3_{s-1}). \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в неравенство $a_s < r(y^3_s) + 2r(x^5_s)$ (напомним, что рассматривается случай $x^5_s = y^5_s$), получаем неравенство

$$2a_{s-1} < 3r(y^5_{s-1}) + 2r(y^2_{s-1}) + r(^3_{s-1}),$$

которое равносильно неравенству $A'_s < A_{s-1}$ по лемме 4.2. Далее, как в утверждении $(*)$.

Случай $\alpha_s = \chi_{5,3}$, $\alpha_{s+1} = \chi_3$; $x^3_s = y^3_s$. Пользуясь соотношениями 2.3, (i), 2.4, (iv), заменим $\alpha_{s+1}\alpha_s = \chi_3(121)\chi_{5,3}$ на $\alpha'_{s+1}\alpha'_s = \chi'_{5,3}(211)\chi'_3$. Преобразование χ'_3 имеет в качестве фундаментальной точки y^3_{s-1}. Проверим, что $A'_s < A_{s-1}$. По формулам 1.2 для $\chi'_{5,3}$ имеем

$$a_s = 16a_{s-1} - 30r(y^5_{s-1}) - 15r(y^3_{s-1}), \quad r(x^3_s) = 5a_{s-1} - 10r(y^5_{s-1}) - 4r(y^3_{s-1}).$$

Подставляя эти выражения в неравенство $A_s < r(y^3_s)$, $a_s = 3A_s$, $y^3_s = x^3_s$, получаем $A_{s-1} < r(y^3_{s-1})$, что равносильно неравенству $A'_s < A_{s-1}$ по лемме 4.2. Осталось воспользоваться утверждением $(*)$.

Случай $\alpha_s = \chi_{5,2}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{5,1}$; $y^5_s = x^5_s$. Пользуясь соотношениями 2.3, (i), 2.4, (v), заменим $\alpha_{s+1}\alpha_s = \chi_{5,1}(111)\chi_{5,2}$ на $\alpha'_{s+1}\alpha'_s = \chi'_{5,2}(211)\chi'_{2,1}$ с фундаментальными точками y^2_{s-1}, $y'^1_{s-1} = \alpha_s^{-1}(y^1_s)$ для $\chi'_{2,1}$ с $r(y'^1_{s-1}) = r(y^1_s)$. По формулам 1.2 для $\chi_{5,2}$

$$a_s = 8a_{s-1} - 15r(y^5_{s-1}) - 6r(y^2_{s-1}), \quad r(x^5_s) = 3a_{s-1} - 6r(y^5_{s-1}) - 2r(y^2_{s-1}).$$

Подставляя эти выражения в неравенство $2a_s < r(y_s^1) + 5r(x_s^5)$, где $x_s^5 = y_s^5$, получаем неравенство

$$a_{s-1} < 2r(y_{s-1}^2) + r(y_{s-1}'^1),$$

которое равносильно по лемме 4.2 неравенству $A_s' < A_{s-1}$. Далее, как в утверждении $(*)$.

Случай $\alpha_s = \chi_{5,2}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{2,5,3}$. Здесь $x_s^5 = y_s^5$ и $x_s^2 = y_s^2$. Пользуясь соотношениями 2.3, (i), 2.4, (ix), заменим $\alpha_{s+1}\alpha_s = \chi_{2,5,3}(121,211)\chi_{5,2}'$ на $\alpha_{s+1}'\alpha_s' = \chi_{5,2}'(111)\chi_{5,3}'$, где фундаментальными точками для $\chi_{5,3}'$ являются точки y_{s-1}^5 и $y_{s-1}'^3 = \alpha_s^{-1}(y_s^3)$. Теперь, как и в предыдущих случаях, по формулам 1.2 для $\chi_{5,2}$ из неравенства

$$2a_s < 2r(y_s^2) + 3r(y_s^5) + r(y_s^3)$$

с учетом того, что $y_s^5 = x_s^5$, $y_s^2 = x_s^2$, $r(y_s^3) = r(y_{s-1}'^3)$, получаем неравенство $a_{s-1} < 2r(y_{s-1}^5) + r(y_{s-1}'^3)$, равносильное по 4.2 неравенству $A_s' < A_{s-1}$, и воспользуемся утверждением $(*)$.

Случай $\alpha_s = \chi_{5,2}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{2,5,2}$. Здесь также $x_s^5 = y_s^5$, $x_s^2 = \hat{y}_s^2$. По предыдущей схеме используем соотношения 2.3, (i), 2.4, (vii) и выражения

$$\begin{aligned} a_s &= 8a_{s-1} - 15r(y_{s-1}^5) - 6r(y_{s-1}^2),\\ r(x_s^5) &= 3a_{s-1} - 6r(y_{s-1}^5) - 2r(y_{s-1}^2),\\ r(x_s^2) &= 3a_{s-1} - 5r(y_{s-1}^5) - 3r(y_{s-1}^2). \end{aligned}$$

Подставляя их в неравенство $3a_s < 3r(y_s^2) + 5r(y_s^5) + r(\hat{y}_s^2)$, с учетом того, что $r(x_s^5) = r(y_s^5)$, $r(\hat{y}_s^2) = r(x_s^2)$, получаем

$$6a_{s-1} < 10r(y_{s-1}^5) + 3r(y_s^2) + 5r(y_{s-1}^2).$$

Вычитая $3a_{s-1} > 5r(y_{s-1}^5) + 2r(y_s^2) + 2r(y_{s-1}^2)$ (см. (4.2)), находим, что

$$3a_{s-1} < 5r(y_{s-1}^5) + r(y_s^2) + 3r(y_{s-1}^2).$$

Заменяя теперь $\alpha_{s+1}\alpha_s = \chi_{2,5,2}(211,321)\chi_{5,2}$ на $\alpha_{s+1}'\alpha_s' = \chi_{5,2}(121,231)\chi_{2,5,2}$, где α_s' имеет в качестве фундаментальных точек $y_{s-1}'^5 = y_{s-1}^5$, $y_{s-1}'^2 = y_{s-1}^2$, $\hat{y}_{s-1}'^2 = \alpha_s^{-1}(y_s^2)$, видим, что полученное выше неравенство равносильно $A_s' < A_s$. Осталось воспользоваться утверждением $(*)$.

Случай $\alpha_s = \chi_{5,2}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{2,1}$. Здесь $x_s^2 = y_s^2$. Воспользуемся соотношениями 2.3, (i), 2.4, (v), заменим $\alpha_{s+1}\alpha_s = \chi_{2,1}(121)\chi_{5,2}$ на $\alpha_{s+1}'\alpha_s' = \chi_{5,2}'(111)\chi_{5,1}'$, где $\chi_{5,1}'$ имеет в качестве фундаментальных точек y_{s-1}^5 и $y_{s-1}'^1 = \alpha_s^{-1}(y_s^1)$. По формулам 1.2 для $\chi_{5,2}$

$$a_s = 8a_{s-1} - 15r(y_{s-1}^5) - 6r(y_{s-1}^2), \quad r(x_s^2) = 3a_{s-1} - 5r(y_{s-1}^5) - 3r(y_{s-1}^2).$$

Из неравенства $a_s < 2r(y_s^2) + r(y_s^1)$ с учетом $y_s^2 = x_s^2$ и $r(y_s^1) = r(y_{s-1}'^1)$, получаем $2a_{s-1} < 5r(y_{s-1}^5) + r(y_{s-1}'^1)$, что равносильно $A_s' < A_{s-1}$; далее утверждение $(*)$.

Случай $\alpha_s = \chi_{4;d}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{4;d'}$, $x_s^4 = y_s^4$, $x_s^d \neq y_s^{d'}$. Так как $a_{s-1} \leqslant a_s$, $a_{s+1} < a_s$, то по лемме 4.2 для $\chi_{4;d}$ и формулам 1.2 для выражения a_s, $r(x_s^4)$, $r(x_s^d)$ через a_{s-1}, $r(y_{s-1}^4)$, $r(y_{s-1}^d)$ имеем, учитывая, что $x_s^4 = y_s^4$,

$$r(y_{s-1}^d) \leqslant a_{s-1} - 2r(y_{s-1}^4) = a_s - 2r(x_s^4) < r(y_s^{d'}).$$

Из неравенства $r(y_s^{d'}) > r(y_{s-1}^d)$ следует, что точка $y_s^{d'}$ не может быть бесконечно близкой к точке y_{s-1}^d, так что мы можем воспользоваться соотношением 2.5, (xi). Заменим $\alpha_{s+1}\alpha_s = \chi_{4;d'}(111)\chi_{4;d}$ на $\alpha'_{s+1}\alpha'_s = \chi'_{4;d}(111)\chi'_{4;d'}$ с фундаментальными точками y_{s-1}^4 и $y'^{d'}_{s-1} = \alpha_s^{-1}(y_s^{d'})$ для $\chi'_{4;d'}$. По формулам 1.2 для $\chi'_{4;d}$

$$a_s = (2d+1)a_{s-1} - 4dr(y_{s-1}^4) - 2dr(y_{s-1}^d),$$
$$r(x_s^4) = da_{s-1} - (2d-1)r(y_{s-1}^4) - dr(y_{s-1}^d).$$

Подставляя эти выражения в неравенство $a_s < 2r(y_s^4) + r(y_s^d)$ и учитывая, что $r(y_s^{d'}) = r(y'^{d'}_{s-1})$, получаем

$$a_s < 2r(y_{s-1}^4) + r(y'^{d'}_{s-1}),$$

что равносильно неравенству $A'_s < A_{s-1}$.

Случай $\alpha_s = \chi_{4;4}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{4;4}$, $\hat{x}_s^4 = y_s^4$, $x_s^4 = \hat{y}_s^4$. Здесь используется соотношение 2.5, (i). Заменим $\alpha_{s+1}\alpha_s = \chi_{4;4}(121,211)\chi_{4;4}$ на $\alpha'_{s+1}\alpha'_s = \chi'_{4;4}(121,211)\chi'_{4;4}$, где $\alpha'_s = \chi'_{4;4}$ имеет в качестве фундаментальных точек $y'^4_{s-1} = \hat{y}_{s-1}^4$, $\hat{y}_{s-1}^4 = y_{s-1}^4$. Имеем для $\chi_{4;4}$

$$a_s = 9a_{s-1} - 16r(y_{s-1}^4) - 8r(\hat{y}_{s-1}^4),$$
$$r(x_s^4) = 4a_{s-1} - 7r(y_{s-1}^4) - 4r(\hat{y}_{s-1}^4),$$
$$r(x'^4_s) = 2a_{s-1} - 4r(y_{s-1}^4) - r(\hat{y}_{s-1}^4).$$

Подставляя это в неравенство $a_s < 2r(y_s^4) + r(\hat{y}_s^4)$, с учетом того, что $y_s^4 = \hat{x}_s^4$, $\hat{y}_s^4 = x_s^4$, получаем требуемое неравенство $a_{s-1} > 2r(\hat{y}_s^4) + r(y_s^4)$.

Случай $\alpha_s = \chi_{4;3}$, $\alpha_{s+1} = \chi_3$, $x_s^3 = y_s^3$. Воспользуемся соотношением 2.5, (ii) и заменим $\alpha_{s+1}\alpha_s = \chi_3(121)\chi_{4;3}$ на $\alpha'_{s+1}\alpha'_s = \chi'_{4;3}(211)\chi'_3$ с фундаментальной точкой y_{s-1}^3 для χ'_3. Для $\alpha_s = \chi_{4;3}$ имеем

$$a_s = 7a_{s-1} - r(y_{s-1}^4) - 6r(y_{s-1}^3), \quad r(x_s^3) = 2a_{s-1} - 4r(y_{s-1}^4) - r(y_{s-1}^3).$$

Подставляя это в неравенство $a_s < 3r(x_s^3)$, получаем

$$a_{s-1} < 3r(y_{s-1}^3),$$

откуда $A'_s < A_{s-1}$.

Случай $\alpha_s = \chi_{4;2}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{2,3,4}$, $x_s^4 = y_s^4$, $x_s^2 = y_s^2$. Здесь используется соотношение 2.7, (x) или 2.5, (iv) (напомним, что $\chi_{4;2} = \chi_{2,4}$ — см. замечание 1.3, (iv)). Заменим $\alpha_{s+1}\alpha_s = \chi_{2,3,4}(121,311)\chi_{4;2}$ на $\alpha'_{s+1}\alpha'_s = \chi'_{4;2}(131,211)\chi'_{2,3,4}$, где $\chi'_{2,3,4}$ имеет в качестве фундаментальных точек

y^2_{s-1}, y^4_{s-1}, $y'^3_{s-1} = \alpha_s^{-1}(y^3_s)$ с $r(y'^3_{s-1}) = r(y^3_s)$. Имеем для $\chi_{4;2}$

$$a_s = 5a_{s-1} - 4r(y^2_{s-1}) - 8r(y^4_{s-1}),$$
$$r(x^4_s) = 2a_{s-1} - 2r(y^2_{s-1}) - 3r(y^4_{s-1}),$$
$$r(x^2_s) = 2a_{s-1} - r(y^2_{s-1}) - 4r(y^4_{s-1}).$$

Подставляя эти выражения в неравенство $a_s < r(y^2_8)+r(y^4_s)+r(y^3_s)$ и принимая во внимание, что $r(y^2_s) = r(x^2_s)$, $r(y^4_s) = r(x^4_s)$ и $r(y^3_s) = r(y'^3_{s-1})$, получаем

$$a_{s-1} < r(y^2_{s-1}) + r(y^4_{s-1}) + r(y'^3_{s-1}),$$

что равносильно неравенству $A'_s < A_{s-1}$.

Случай $\alpha_s = \chi_{4;2}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{2,2;4}$, $x^4_s = y^4_s$, $x^2_s = y^2_s$. Здесь используется соотношение 2.7, (xi) или 2.5, (v). Как и выше, заменим $\alpha_{s+1}\alpha_s = \chi_{2,2;4}(121,311)\chi_{4;2}$ на $\alpha'_{s+1}\alpha'_s = \chi'_{4;2}(131,211)\chi'_{2,2;4}$ с фундаментальными точками y^4_{s-1}, y^2_{s-1}, $\hat{y}'^1_{s-1} = \alpha_s^{-1}(\hat{y}^2_s)$, $r(\hat{y}'^2_{s-1}) = r(\hat{y}^2_s)$ для $\chi'_{2,2;4}$. Предыдущие формулы для $\chi'_{4;2}$ подставляем в неравенство $a_s < r(y^2_s) + r(y^4_s) + r(\hat{y}^2_s)$, в результате, как и и предыдущем случае, убеждаемся, что $A'_s < A_{s-1}$.

Случай $\alpha_s = \chi_{4;2}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{2,1}$, $x^2_s = y^2_s$. Здесь используются соотношения 2.7, (xii) и 2.5, (vi). Заменим $\alpha_{s+1}\alpha_s = \chi_{2,1}(121)\chi_{4;2}$ на $\alpha'_{s+1}\alpha'_s = \chi'_{4;2}(211)\chi'_{2,1}$ с фундаментальными точками y^2_{s-1}, $y'^1_{s-1} = \alpha_s^{-1}(y^1_s)$, $r(y'^1_{s-1}) = r(y^1_s)$ для $\chi'_{2,1}$. Предыдущие формулы для $\chi'_{4;2}$ вместе с неравенством $a_s < 2r(y^2_s) + r(y^1_s)$ для $\chi_{2,1}$, как и выше, дают неравенство $A'_s < A_{s-1}$.

Случай $\alpha_s = \chi_{4;1}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{4;1}$, $x^1_s = y^1_s$. Здесь используется соотношение 2.5, (vii). По предыдущей схеме имеем

$$a_s = 3a_{s-1} - 4r(y^4_{s-1}) - 2r(y^1_{s-1}), \quad r(x^1_s) = 2a_{s-1} - 4r(y^4_{s-1}) - 2r(y^1_{s-1}).$$

Подставляя это в неравенство $a_s < 2r(y^4_s)+r(y^1_s)$ и принимая во внимание, что $r(y^1_{s-1}) = r(x^1_{s-1})$, $r(y'^4_{s-1}) = r(y^4_s)$, где $y'^4_{s-1} = \alpha_s^{-1}(y^4_s)$, получаем неравенство $a_{s-1} < 2r(y'^4_{s-1}) + r(y^1_{s-1})$, что равносильно неравенству $A'_s < A_{s-1}$.

Случай $\alpha_s = \chi_{4;1}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{2,1}$, $x^1_s = y^1_s$. Здесь используется соотношение 2.5, (ix). Подставляя предыдущие выражения для $\chi_{4;1}$ в неравенство $a_s < 2r(y^2_s) + r(y^1_s)$, получаем $A'_s < A_{s-1}$ после замены $\alpha_{s+1}\alpha_s = \chi_{2,1}(211)\chi_{4;1}$ на $\alpha'_{s+1}\alpha'_s = \chi'_{4;1}(211)\chi'_{2,1}$.

Случай $\alpha_s = \chi_3$, $\alpha_{s+1} = \chi_{2,3,c}$, $c = 2,3,4,5$, $x^3_s = y^3_s$. Здесь используется соотношение 2.6, (iii)–(vi). Заменим, как и выше, $\alpha_{s+1}\alpha_s = \chi_{2,3,c}(211)\chi_3$ на $\alpha'_{s+1}\alpha'_s = \chi'_3(211)\chi'_{2,3,c}$ с фундаментальными точками $y'^2_{s-1} = \alpha_s^{-1}(y^2_s)$, y^3_{s-1}, $y'^c_{s-1} = \alpha_s^{-1}(y^c_s)$ с $r(y'^c_{s-1}) = r(y^c_s)$, $r(y'^2_{s-1}) = r(y^2_s)$ для $\chi'_{2,3,c}$. Подставляя выражения для a_s, $r(x^3_s)$, записанные через a_{s-1}, $r(y^3_{s-1})$, для χ_3 в неравенство

$$a_s < r(y^2_s) + r(y^3_s) + r(y^c_s), \quad c = 2,3,4,5,$$

получаем аналогичное неравенство для a_{s-1}, $r(y'^2_{s-1})$, $r(y^3_{s-1})$, $r(y'^c_{s-1})$, которое равносильно $A'_s < A_{s-1}$, что и требуется.

Случай $\alpha_s = \chi_3$, $\alpha_{s+1} = \chi_{2,2;3}$, $x_s^3 = y_s^3$. Этот случай — частный случай предыдущего, поскольку $\chi_{2,2;3} = \chi_{3,3,2}$ (см. замечание 1.3, (iv)).

Случай $\alpha_s = \chi_{2,7}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{2,1}$, $x_s^2 = y_s^2$. Здесь используется соотношение 2.7, (i). Как обычно, заменим $\alpha_{s+1}\alpha_s = \chi_{2,1}(111)\chi_{2,7}$ на $\alpha'_{s+1}\alpha'_s = \chi'_{2,7}(111)\chi'_{2,1}$ с фундаментальными точками y_{s-1}^2, $y_{s-1}'^1 = \alpha_s^{-1}(y_s^1)$ с $r(y_{s-1}'^1) = r(y_s^1)$. Подставим формулы для $\chi_{2,7}$

$$a_s = 29a_{s-1} - 28r(y_{s-1}^2) - 56r(y_{s-1}^7), \quad r(x_s^2)=14a_{s-1} - 13r(y_{s-1}^2) - 28r(y_{s-1}^7)$$

в неравенство $a_s < 2r(y_s^2) + r(y_s^1)$ для $\chi_{2,1}$ в результате получим неравенство

$$a_{s-1} < 2r(y_{s-1}^2) + r(y_{s-1}'^1),$$

равносильное неравенству $A'_s < A_{s-1}$.

Случай $\alpha_s = \chi_{2,6}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{2,1}$, $x_s^2 = y_s^2$. Здесь используется соотношение 2.7, (ii). Отличие от предыдущего случая состоит только в том, что вместо формул для $\chi_{2,7}$ используются формулы для $\chi_{2,6}$:

$$a_s = 13a_{s-1} - 12r(y_{s-1}^2) - 24r(y_{s-1}^6), \quad r(x_s^2) = 6a_{s-1} - 5r(y_{s-1}^2) - 12r(y_{s-1}^6).$$

Случай $\alpha_s = \chi_{2,5,3}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{2,5,2}$, $x_s^2 = y_s^2$, $x_s^5 = y_s^5$. Воспользуемся соотношением 2.7, (iii) и заменим $\alpha_{s+1}\alpha_s = \chi_{2,5,2}(111,221)\chi_{2,5,3}$ на $\alpha'_{s+1}\alpha'_s = \chi'_{2,5,3}(111,211)\chi'_{2,5,2}$ с фундаментальными точками y_{s-1}^2, y_{s-1}^5, $\hat{y}_{s-1}'^2 = \alpha_s^{-1}(\hat{y}_s^2)$, $r(\hat{y}_{s-1}'^2) = r(\hat{y}_s^2)$ для $\chi'_{2,5,2}$. Для $\chi_{2,5,3}$ имеем

$$\begin{aligned} a_s &= 61a_{s-1} - 60r(y_{s-1}^2) - 90r(y_{s-1}^5) - 30r(y_{s-1}^3), \\ r(x_s^2) &= 30a_{s-1} - 29r(y_{s-1}^2) - 45r(y_{s-1}^5) - 15r(y_{s-1}^3), \\ r(x_s^5) &= 18a_{s-1} - 18r(y_{s-1}^2) - 26r(y_{s-1}^5) - 9r(y_{s-1}^3). \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в неравенство для $\chi_{2,5,2}$, получаем требуемое неравенство $A'_s < A_{s-1}$.

Случай $\alpha_s = \chi_{2,5,3}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{2,1}$, $x_s^2 = y_s^2$. Заменим, используя соотношение 2.7, (v), $\alpha_{s+1}\alpha_s = \chi_{2,1}(111)\chi_{2,5,3}$ на $\alpha'_{s+1}\alpha'_s = \chi'_{2,5,3}(111)\chi'_{2,1}$ с фундаментальными точками y_{s-1}^2, $y_{s-1}'^1 = \alpha_s^{-1}(y_s^1)$ для $\chi'_{2,1}$. Подставляя в неравенство для $\chi_{2,1}$ предыдущие выражения для $\chi_{2,5,3}$, получаем $A'_s < A_{s-1}$.

Случай $\alpha_s = \chi_{2,5,2}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{2,2;5}$, $x_s^2 = y_s^2$, $x_s^5 = y_s^5$, $\hat{x}_s'^2 = \hat{y}_s^2$. Здесь используется соотношение 2.7, (vi). Заменим $\alpha_{s+1}\alpha_s = \chi_{2,2;5}(111,231,321)\chi_{2,5,2}$ на $\alpha'_{s+1}\alpha'_s = \chi'_{2,5,2}(111,231,321)\chi'_{2,2;5}$ с фундаментальными точками y_{s-1}^2, y_{s-1}^5, $\hat{y}_{s-1}'^2 = \alpha_s^{-1}(\hat{y}_s^2)$ для $\chi'_{2,2;5}$. Для $\chi_{2,5,2}$ имеем

$$\begin{aligned} a_s &= 19a_{s-1} - 18r(y_{s-1}^2) - 30r(y_{s-1}^5) - 6r(\hat{y}_{s-1}^2), \\ r(x_s^2) &= 9a_{s-1} - 8r(y_{s-1}^2) - 15r(y_{s-1}^5) - 3r(\hat{y}_{s-1}^2), \\ r(x_s^5) &= 6a_{s-1} - 6r(y_{s-1}^2) - 9r(y_{s-1}^5) - 2r(\hat{y}_{s-1}^2), \\ r(\hat{x}_s^2) &= 3a_{s-1} - 3r(y_{s-1}^2) - 5r(y_{s-1}^5). \end{aligned}$$

Подставляя это в неравенство $a_s < r(y_s^2) + r(y_s^5) + r(\hat{y}_s^2)$ для $\chi_{2,2;5}$, получаем аналогичное неравенство $a_{s-1} < r(y_{s-1}^2) + r(y_{s-1}^5) + r(\hat{y}_{s-1}^2)$ для $\chi'_{2,2;5}$, что равносильно неравенству $A'_s < A_{s-1}$.

Случай $\alpha_s = \chi_{2,5,2}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{2,1}$, $x_s^2 = y_s^2$. Здесь используется соотношение 2.7, (viii). Заменим $\alpha_{s+1}\alpha_s = \chi_{2,1}(111)\chi_{2,5,2}$ на $\alpha'_{s+1}\alpha'_s = \chi'_{2,5,2}(111)\chi'_{2,1}$. Подставляя выражения для a_s, $r(x_s^2)$ из предыдущих формул для $\chi_{2,5,2}$ в неравенство $a_s < 2r(y_s^2) + r(y_s^1)$, получаем неравенство

$$a_{s-1} < 2r(y_{s-1}^2) + r(y_{s-1}'^1),$$

равносильное $A'_s < A_{s-1}$.

Случай $\alpha_s = \chi_{2,3,5}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{2,1}$, $x_s^2 = y_s^2$. Заменим, пользуясь соотношением 2.7, (xiii), $\alpha_{s+1}\alpha_s = \chi_{2,1}(111)\chi_{2,3,5}$ на $\alpha'_{s+1}\alpha'_s = \chi'_{2,3,5}(111)\chi'_{2,1}$. с фундаментальными точками y_{s-1}^2, $y_{s-1}'^2 = \alpha_s^{-1}(y_s^1)$, $r(y_{s-1}'^1) = r(y_s^1)$ для $\chi'_{2,1}$. Для $\chi_{2,3,5}$ имеем

$$a_s = 61a_{s-1} - 60r(y_{s-1}^2) - 60r(y_{s-1}^3) - 60r(y_{s-1}^5),$$
$$r(x_s^2) = 30a_{s-1} - 29r(y_{s-1}^2) - 30r(y_{s-1}^3) - 30r(y_{s-1}^5).$$

Подставляя это в неравенство $a_s < 2r(y_s^2) + r(y_s^1)$ для $\chi_{2,1}$, получаем аналогичное неравенство для $\chi'_{2,1}$, равносильное неравенству $A'_s < A_{s-1}$.

Случай $\alpha_s = \chi_{2,3,4}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{2,1}$, $x_s^2 = y_s^2$. Здесь используется соотношение 2.7, (xiv). Для $\chi_{2,3,4}$ имеем

$$a_s = 25a_{s-1} - 24r(y_{s-1}^2) - 24r(y_{s-1}^3) - 24r(y_{s-1}^4),$$
$$r(x_s^2) = 12a_{s-1} - 11r(y_{s-1}^2) - 12r(y_{s-1}^3) - 12r(y_{s-1}^4).$$

Далее — как в предыдущем случае.

Случай $\alpha_s = \chi_{2,3,3}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{2,1}$, $x_s^2 = y_s^2$. Здесь используется соотношение 2.7, (xv). Как и в двух предыдущих случаях, достаточно использовать формулы для $\chi_{2,3,3}$:

$$a_s = 13a_{s-1} - 12r(y_{s-1}^2) - 12r(y_{s-1}^3) - 12r(\hat{y}_{s-1}^3),$$
$$r(x_s^2) = 6a_{s-1} - 5r(y_{s-1}^2) - 6r(y_{s-1}^3) - 6r(\hat{y}_{s-1}^3).$$

Случай $\alpha_s = \chi_{2,2;d}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{2,2;d}$, $x_s^2 = y_s^2$, $\hat{x}_s^2 = \hat{y}_s^2$. Этот случай аналогичен случаю $\chi_{4;d}$, $\chi_{4;d'}$. Как и там, имеем

$$r(y_{s-1}^d) \leqslant a_{s-1} - r(y_{s-1}^2) - r(\hat{y}_{s-1}^2) = a_s - r(x_s^2) - r(\hat{x}_s^2) < r(y_s^{d'}).$$

Отсюда следует, что точка $y_s^{d'}$ не является бесконечно близкой к точке y_{s-1}^d, стало быть, можно воспользоваться соотношением 2.7, (xxiv). Заменим $\alpha_{s+1}\alpha_s = \chi_{2,2;d'}(111,221)\chi_{2,2;d'}$ на $\alpha'_{s+1}\alpha'_s = \chi_{2,2;d}(111,221)\chi'_{2,2;d'}$. По формулам 1.2 для $\chi_{2,2;d}$

$$a_s = (2d+1)a_{s-1} - 2dr(y_{s-1}^2) - 2dr(\hat{y}_{s-1}^2) - 2dr(y_{s-1}^d),$$
$$r(x_s^2) = da_{s-1} - (d-1)r(y_{s-1}^2) - dr(\hat{y}_{s-1}^2) - dr(y_{s-1}^d).$$
$$r(x_s'^2) = da_{s-1} - dr(y_{s-1}^2) - (d-1)r(\hat{y}_{s-1}^2) - dr(y_{s-1}^d).$$

Подставляя это в неравенство $a_s < r(y_s^2) + r(\hat{y}_s^2) + r(y_s^d)$, с учетом $r(y_s^d) = r(y_{s-1}'^d)$, $y_{s-1}'^d = \alpha_s^{-1}(y_s^d)$ получаем аналогичное неравенство для a_{s-1}, следовательно, $A_s' < A_{s-1}$.

Случай $\alpha_s = \chi_{2,2;d}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{2,1}$, $x_s^2 = y_s^2$. Воспользуемся соотношением 2.7, (xxv) и заменим $\alpha_{s+1}\alpha_s = \chi_{2,1}(111)\chi_{2,2;d}$ на $\alpha_{s+1}'\alpha_s' = \chi_{2,2;d}(111)\chi_{2,1}'$, где $\chi_{2,1}'$ имеет фундаментальные точки y_{s-1}^2, $y_{s-1}'^1 = \alpha_s^{-1}(y_s^1)$ с $r(y_{s-1}'^1) = r(y_s^1)$. Подставляя первые два из предыдущих выражений для $\chi_{2,2;d}$ в неравенство $a_s < 2r(y_s^2) + r(y_s^1)$, получаем нужное неравенство.

Случай $\alpha_s = \chi_{2,1}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{2,1}'$, $x_s^1 = y_s^1$. Здесь используется соотношение 2.7, (xxviii). Заменим $\alpha_{s+1}\alpha_s = \chi_{2,1}'(221)\chi_{2,1}$ на $\alpha_{s+1}'\alpha_s' = \chi_{2,1}(221)\chi_{2,1}'$. Для $\chi_{2,1}$

$$a_s = 2a_{s-1} - 2r(y_{s-1}^2) - r(y_{s-1}^1), \quad r(x_s^1) = a_{s-1} - 2r(y_{s-1}^2).$$

Подставляя в неравенство $a_s < 2r(y_s^2) + r(y_s^1)$, $y_s^1 = x_s^1$, получаем требуемое неравенство.

Случай $\alpha_s = \chi_{1;7;7}$, $\alpha_{s+1} = \chi_7$. Здесь используется соотношение 2.8,(x). Как обычно, заменяя $\alpha_{s+1}\alpha_s = \chi_7(137)\chi_{1;7;7}(321)$ на $\alpha_{s+1}'\alpha_s' = \chi_{1;7;7}'(221,322)\chi_7'$ с фундаментальной точкой y_{s-1}^7 для χ_7' и подставляя выражения для $\chi_{1;7;7}(321)$

$$\begin{aligned} a_s &= 16a_{s-1} - 21r(y_{s-1}^7) - 6r(y_{s-1}^1), \\ r(x_s^7) &= 3a_{s-1} - 6r(y_{s-1}^7) - 2r(y_{s-1}^1), \\ r(x_s^1) &= 6a_{s-1} - 14r(y_{s-1}^7) - 3r(y_{s-1}^1) \end{aligned}$$

в неравенство $a_s < 3r(y_s^7)$, получаем $a_{s-1} < 3r(y_{s-1}^7)$, что равносильно неравенству $A_s' < A_{s-1}$.

Случай $\alpha_s = \chi_{1;6}$, $\alpha_{s+1} = \chi_6$, $x_s^6 = y_s^6$. Здесь используется соотношение 2.8, (ix). Как и в предыдущем случае, достаточно воспользоваться выражениями a_s, $r(x_s^6)$, $r(x_s^1)$ для $\chi_{1;6}$:

$$\begin{aligned} a_s &= 4a_{s-1} - 6r(y_{s-1}^6) - 3r(y_{s-1}^1), \\ r(x_s^6) &= a_{s-1} - r(y_{s-1}^6) - r(y_{s-1}^1), \\ r(x_s^1) &= 3a_{s-1} - 6r(y_{s-1}^6) - 2r(y_{s-1}^1). \end{aligned}$$

Подставляя их в неравенство $a_s < 3r(y_s^6)$, получаем требуемое.

Случай $\alpha_s = \chi_{1;6}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{4;1}$, $x_s^1 = y_s^1$. Здесь используются соотношения 2.8, (vii), (xviii). Подставляя первое и третье выражения для $\chi_{1;6}$ в неравенство $a_s < 2r(y_s^4) + r(y_s^1)$ и учитывая, что $r(y_s^4) = r(y_{s-1}'^4)$, $y_{s-1}'^4 = \alpha_s^{-1}(y_s^4)$, получаем неравенство $a_{s-1} < 2r(y_{s-1}'^4) + r(y_{s-1}^1)$.

Случай $\alpha_s = \chi_{1;6}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{2,1}$, $x_s^1 = y_s^1$. Здесь используются соотношения 2.8, (xviii) и 2.8, (v), а в остальном все точно так же, как в предыдущем случае.

Случай $\alpha_s = \chi_{1;6}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{1;6}'$, $x_s^1 = y_s^1$. Здесь используем соотношение 2.8, (xviii), а в остальном все, как в двух предыдущих случаях.

Доказательство леммы 5.1 закончено. □

5.2. Лемма. *Предположим, что для расширенного специального слова* $\alpha = \alpha_n \dots \alpha_{s+1}\alpha_s \dots \alpha_1$ *пара* α_s, α_{s+1} *такая, как в табл.* 4.4, *№№* 6, 10, 13, 35, 46; *тогда по модулю соотношений* 2.3–2.8 *слово* α *эквивалентно слову* $\alpha' = \alpha_n \dots \alpha_{s+2}\alpha'_s\alpha_{s-1} \dots \alpha_1$ *такому, что*

$$\begin{aligned} &A(\alpha') < A(\alpha), \quad \text{если} \ \ \alpha \in S', \\ &A(\alpha') = A(\alpha), \quad \text{и} \ \ \alpha' \in S', \quad \text{если} \ \ \alpha \in S \setminus S'. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Доказательство. Случай $\alpha_s = \chi_{5,2}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{5,2}$, $x_s^5 = y_s^5$. Пользуясь соотношением 2.4, (x), заменим $\alpha_{s+1}\alpha_s = \chi_{5,2}(111)\chi_{5,2}$ на $\alpha'_s = \chi'_{2,5,2}$ с фундаментальными точками y_{s-1}^2, $y_{s-1}'^2 = \alpha_s^{-1}(y_s^2)$, $y_{s-1}'^5 = y_{s-1}^5$, $\hat{y}_{s-1}'^2 = y_{s-1}^2$. Полученное слово $\alpha' = \alpha_n \dots \alpha_{s+2}\alpha'_s\alpha_{s-1} \dots \alpha_1$ будет расширенным и специальным, кроме того, $A(\alpha') = \max(A_{s-1}, A_{s+1})$. Отсюда немедленно следуют утверждения (5.2).

Случай $\alpha_s = \chi_{5,2}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{2,5,2}$, $x_s^5 = y_s^5$, $x_s^2 = y_s^2$. Пользуясь соотношением 2.4, (x), заменим $\alpha_{s+1}\alpha_s = \chi'_{2,5,2}(211, 321)\chi_{5,2}$ на $\alpha'_s = \chi'_{5,2}$ с фундаментальными точками y_{s-1}^5, $y_{s-1}'^2 = \alpha_s^{-1}(\hat{y}_s^2)$ (по правилу сцепления в указанном соотношении). Тогда для $\alpha' = \alpha_n \dots \alpha_{s+2}\alpha'_s\alpha_{s-1} \dots \alpha_1$ выполнены те же свойства, что и в предыдущем случае.

Случай $\alpha_s = \chi_{5,1}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{5,1}$, $x_s^5 = y_s^5$. Здесь используется соотношение 2.4, (xii), из которого находим $\alpha'_s = \chi'_{5,1}$ с фундаментальными точками y_{s-1}^5, $y_{s-1}'^1 = \alpha_s^{-1}(y_s^1)$. Далее, как и двух предыдущих случаях.

Случай $\alpha_s = \chi_{2,5,2}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{2,5,2}$, $x_s^2 = y_s^2$, $x_s^5 = y_s^5$. Воспользуемся соотношением 2.7, (iv) и заменим $\alpha_{s+1}\alpha_s = \chi_{2,5,2}(111, 221)\chi_{2,5,2}$ на $\alpha'_s = \chi'_{2,5,2}$ с фундаментальными точками $y_{s-1}'^2 = y_{s-1}^2$, $y_{s-1}'^5 = y_{s-1}^5$, $\hat{y}_{s-1}'^2 = \alpha_s^{-1}(\hat{y}_s^2)$. Тогда, как и выше, для слова $\alpha' = \alpha_n \dots \alpha_{s+2}\alpha'_s\alpha_{s-1} \dots \alpha_1$ выполняются условия (5.2).

Случай $\alpha_s = \chi_{2,1}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{2,1}$, $x_s^2 = y_s^2$. Здесь используется соотношение 2.7, (xxix). Заменим $\alpha_{s+1}\alpha_s = \chi_{2,1}(111)\chi_{2,1}$ на $\alpha'_s = \chi_{2,1}$ с фундаментальными точками y_{s-1}^2 и $y_{s-1}'^1 = \alpha_s^{-1}(y_s^1)$. Тогда новое слово $\alpha' = \alpha_n \dots \alpha_{s+2}\alpha'_s\alpha_{s-1} \dots \alpha_1$ удовлетворяет условиям (5.2). Лемма доказана. □

5.3. Лемма. *В предыдущих обозначениях предположим, что* $\alpha_s = \chi_{5,1}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{2,5,2}$; *тогда* α *эквивалентно по модулю соотношений произведению* $\alpha' = \beta_2\beta_1$, *где* $A(\beta_2) < A(\alpha)$, $A(\beta_1) < A(\alpha)$, *слово* β_1 *является специальным или очень специальным одновременно с* α, *с тем же максимальным индексом* s (*определение* 3.3) *и*

$$(\beta_1)_{s+1}(\beta_1)_s = \chi'_{5,2}(111)\chi_{5,1}.$$

Доказательство. Пользуясь соотношением 2.4, (x), заменим $\alpha_{s+1} = \chi_{2,5,2}$ на $\alpha''_{s+1}\alpha'_{s+1} = \chi''_{5,2}(111)\chi'_{5,2}$ и положим $\beta_1 = \delta\alpha'_{s+1}\alpha_s \dots \alpha_1$, где δ — композиция отображений, раскручивающих $\alpha'_{s+1}\alpha_s \dots \alpha_1$, как в доказательстве леммы 3.4, $\beta_2 = \alpha_n \dots \alpha_{s+2}\alpha''_{s+1}\delta^{-1}$.

Покажем, что $A'_{s+1} < A_s = A(\alpha)$. По лемме 4.2 достаточно доказать неравенство $7a_s < 15r(y_s^5) + 6r(y_s^2)$, где $y_s^5 = x_s^5$, y_s^2 — фундаментальные точки для $\alpha'_{s+1} = \chi'_{5,2}$. Имеем $2a_s \leqslant 5r(x_s^5) + r(x_s^1)$ и $3a_s < 3r(y_s^2) + 5r(y_s^5) + r(\hat{y}_s^2)$.

Кроме того, $a_s \geqslant r(y_s^2) + r(y_s^5) + r(\hat{y}_s^2)$, так как противоположное неравенство противоречит первому из предыдущих неравенств по лемме 4.4 — случай (1.4′). Вычитая это неравенство из предыдущего и деля на 2, получаем неравенство $a_s < r(y_s^2) + 2r(y_s^5)$. Если $a_s \leqslant 3r(y_s^5)$, то получаем, что нужно. Если $a_s > 3r(y_s^5)$, то из неравенства $2a_s \leqslant 5r(x_s^5) + r(x_s^1)$, поскольку $y_s^5 = x_s^5$, получаем $\frac{1}{3}a_s < r(x_s^1)$. Складывая это с удвоенным неравенством для $\chi_{2,5,2}$ и вычитая первое из неравенств (4.2), получаем после умножения на 3 неравенство $10a_s < 15r(y_s^5) + 12r(y_s^2)$. Вычитая из него неравенство $3a_s \geqslant 6r(y_s^2)$, получаем требуемое неравенство $7a_s < 15r(y_s^5) + 6r(y_s^2)$.

По конструкции имеем $A(\beta_2) = \max(A_{s+1}, A'_{s+1}) < A(\alpha)$, $A(\beta_1) = A(\alpha)$, слово β_1 специальное или очень специальное в соответствии с α и $(\beta_1)_{s(\beta_1)+1}(\beta_1)_{s(\beta_1)} = \chi'_{5,2}(111)\chi_{5,1}$ для слова β_1. Лемма доказана. □

5.4. Лемма. *В предыдущих обозначениях предположим, что* $\alpha_s = \chi_{2,5,3}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{2,5,2}$, $x_s^2 = y_s^2$, $x_s^5 = y_s^5$; *тогда по модулю соотношений* α *эквивалентно произведению* $\alpha' = \beta_2\beta_1$, *где* $A(\beta_2) < A(\alpha)$, $A(\beta_1) = A(\alpha)$, *слово* β_1 *является специальным или очень специальным одновременно с* α *с тем же максимальным индексом* s *и* $(\beta_1)_{s+1}(\beta_1)_s = \chi_{5,2}(121, 211)\chi_{2,5,3}$.

Доказательство. Этот случай аналогичен предыдущему. Как и выше, в тех же обозначениях для доказательства леммы достаточно доказать неравенство $7a_s < 15r(y_s^5) + 6r(y_s^2)$, где y_s^5, y_s^2 — фундаментальные точки для $\chi'_{5,2}$. По лемме 4.2 имеем

$$\chi_{2,5,3}\colon \quad 2a_s \leqslant 2r(x_s^2) + 3r(x_s^5) + r(x_s^3),$$
$$\chi_{2,5,2}\colon \quad 3a_s < 3r(y_s^2) + 5r(y_s^5) + r(\hat{y}_s^2),$$

где $x_s^2 = y_s^2$, $x_s^5 = y_s^5$. Складывая утроенное первое неравенство с удвоенным вторым и вычитая первое из неравенств (4.2), получаем

$$9a_s < 10r(y_s^2) + 14r(y_s^5).$$

Вычтем из этого неравенства $2a_s \geqslant 4r(y_s^2)$ (третье из неравенств (4.2)) и прибавим к правой части $r(y_s^5)$. В результате получаем требуемое неравенство. Далее точно так же, как в предыдущей лемме. Доказательство закончено. □

5.5. Лемма. *В предыдущих обозначениях пусть* α_s, α_{s+1} *такие, как в табл.* 4.4, *№№* 11, 16, 27, 30, 36, 44, 48, 51, 60; *тогда по модулю соотношений* 2.3–2.8 *слово* α *эквивалентно слову* $\alpha' = \beta_2\beta_1$, *где* β_1, β_2 *удовлетворяют условиям* (5.1).

Доказательство. Случай $\alpha_s = \chi_{5,2}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{2,2;5}$, $x_s^2 = y_s^2$, $x_s^5 = y_s^5$. Воспользуемся соотношениями 2.3, (i), 2.4, (xi) и заменим $\alpha_{s+1}\alpha_s = \chi_{2,2;5}(121, 311)\chi_{5,2}$ на $\alpha'_{s+3}\alpha'_{s+2}\alpha'_{s+1}\alpha'_s = \chi'_{5,2}(113, 222)\chi'_{5,2}(132, 212)\chi'_{2,2;5}(121, 311)\chi'_{5,2}$. Положим $\alpha' = \alpha_n \dots \alpha_{s+2}\alpha'_{s+3} \dots \alpha'_s\alpha_{s-1} \dots \dots \alpha_1$ и покажем, пользуясь формулами (1.2), что $A'_s < A_{s-1}$, $A'_{s+1} < A_{s-1}$ и $A'_{s+2} < A_{s-1}$. Согласно лемме 4.2 достаточно установить соответствующие неравенства для кратностей фундаментальных точек. Фундаментальными точками для $\alpha'_s = \chi'_{5,2}$ являются y_{s-1}^5 и $y'^2_{s-1} = \alpha_s^{-1}(\hat{y}_s^2)$, где $\hat{y}_s^2$ — вторая фундаментальная точка преобразования $\chi_{2,2;5}$.

Покажем, что $7a_{s-1} < 15r(y^5_{s-1}) + 6r(\hat{y}^2_{s-1})$. Для $\chi_{5,2}$ имеем

$$a_s = 8a_{s-1} - 15r(y^5_{s-1}) - 6r(y^2_{s-1}),$$
$$r(x^5_s) = 3a_{s-1} - 6r(y^5_{s-1}) - 2r(y^2_{s-1}),$$
$$r(x^2_s) = 3a_{s-1} - 5r(y^5_{s-1}) - 3r(y^2_{s-1}).$$

Подставляя это в неравенство $a_s < r(y^5_s) + r(y^2_s) + r(\hat{y}^2_s)$, $y^5_s = x^5_s$, $y^2_s = x^2_s$, $r(\hat{y}^2_s) = r(\hat{y}'^2_{s-1})$ для $\alpha_s = \chi_{2,2;5}$, получаем

$$2a_{s-1} < 4r(y^5_{s-1}) + r(y^2_{s-1}) + r(\hat{y}'^2_{s-1}).$$

Умножая это неравенство на 6 и вычитая неравенство $7a_{s-1} \geqslant 15r(y^5_{s-1}) + 6r(y^2_{s-1})$, равносильное неравенству $a_s \geqslant a_{s-1}$, получаем

$$5a_{s-1} < 94r(y^5_{s-1}) + 6r(\hat{y}'^2_{s-1}).$$

Складывая это с $2a_{s-1} < 6r(y^5_{s-1})$, получаем требуемое неравенство. Отметим, что неравенство $2a_{s-1} < 6r(y^5_{s-1})$ следует из неравенства $2a_{s-1} < 4r(y^5_{s-1}) + r(y^2_{s-1}) + r(y'^2_{s-1})$. Действительно, умножая последнее на 2 и вычитая первое из неравенств (4.2), получаем $a_{s-1} < 3r(y^5_{s-1})$.

Итак, по лемме 4.2 $A'_s < A_{s-1}$.

Теперь рассмотрим $\alpha'_{s+1} = \chi'_{2,2;5}$ с фундаментальными точками $y'^2_s = x'^2_s$, $y'^5_s = x'^5_s$, $\hat{y}'^2_s = \alpha'_s(y^2_{s-1})$. Матрица для композиции $\alpha'_{s+1}\alpha'_s = \chi'_{2,2;5}(121,311)\chi'_{5,2}$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} 28 & 16 & 10 & 55 \\ -13 & -8 & -5 & -25 \\ 40 & -5 & -4 & -20 \\ -7 & -4 & -2 & -4 \end{vmatrix}$$

(в базисе l, y'^2_{s-1}, y^2_{s-1}, y^5_{s-1}). Отсюда $a'_{s+1} = 28a_{s-1} - 55r(y^5_{s-1}) - 16r(y'^2_{s-1}) - 10r(y^2_{s-1})$, так что требуемое неравенство $a'_{s+1} < a_{s-1}$ равносильно сумме полученных выше неравенств: $7a_{s-1} < 15r(y^5_{s-1}) + 6r(y'^2_{s-1})$ и 10-кратного $2a_{s-1} < 4r(y^5_{s-1}) + r(y^2_{s-1}) + r(y'^2_{s-1})$.

Итак, $A'_{s+1} < A_{s-1}$, и теперь рассмотрим $\alpha'_{s+2} = \chi'_{5,2}$ с фундаментальными точками $y'^5_{s+1} = x'^5_{s+1}$, $y'^2_{s+1} = x'^2_{s+1}$ по указанному выше правилу сцепления. Вычисляя, получаем

$$a'_{s+2} = 41a_{s-1} - 80r(y^5_{s-1}) - 20r(y^2_{s-1}) - 20r(y'^2_{s-1}),$$

так что условие $a'_{s+1} < a_{s-1}$ равносильно установленному выше неравенству $2a_{s-1} < 4r(y^5_{s-1}) + r(y^2_{s-1}) + r(y'^2_{s-1})$. Следовательно, $A'_{s+2} < A_{s-1}$. Наконец, $A'_{s+3} = A_{s+1} < A_s = A(\alpha)$. Осталось воспользоваться следующим утверждением.

Утверждение (**). *В предыдущих обозначениях положим $\alpha' = \beta_2\beta_1$, где $\beta_1 = \delta\alpha'_s\alpha_{s-1}\ldots\alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_n\ldots\alpha_{s+2}\alpha'_{s+3}\alpha'_{s+2}\alpha'_{s+1}\delta^{-1}$, $\delta = \delta_r\ldots\delta_1$ — расширенное слово, полученное из композиции отображений, раскручивающих*

отображение $\alpha'_s\alpha(s-1)$, *как в доказательстве леммы* 3.4. *Тогда для* β_1, β_2 *выполняются условия* (5.1).

Действительно, по предыдущим вычислениям

$$A(\beta_2) = \max(A_{s+1}, A'_{s+2}, A'_{s+1}, A'_s) < A(\alpha).$$

Если α было очень специальным, то $A(\beta_1) = \max\{A'_s, A_{s-1}\} < A(\alpha)$, если же $\alpha \in S \setminus S'$, то $A(\beta_1) = A(\alpha)$, но $A'_s < A_{s-1} = A(\alpha)$ и $A_{s-2} < A_{s-1}$, т. е. слово β_1 очень специальное, что и требовалось доказать.

Случай $\alpha_s = \chi_{5,1}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{2,1}$, $x^1_s = y^1_s$. Здесь используются соотношения 2.3, (i), 2.4, (xiv). Заменим $\alpha_{s+1}\alpha_s = \chi_{2,1}(221)\chi_{5,1}$ на $\alpha'_{s+3}\alpha'_{s+2}\alpha'_{s+1}\alpha'_s = \chi'_{5,1}(112,223)\chi'_{2,1}(111,222)\chi'_{5,1}(221)\chi'_{2,1}$.

Положим $\alpha' = \alpha_n \dots \alpha_{s+2}\alpha'_{s+3}\alpha'_{s+2}\alpha'_{s+1}\alpha'_s\alpha_{s-1}\dots\alpha_1$ и покажем, пользуясь формулами (1.2) и указанным правилом сцепления, что $A'_s < A_{s-1}$, $A'_{s+1} < A_{s-1}$ и $A'_{s+2} < A_{s-1}$. Отсюда, как и в предыдущем случае, пользуясь утверждением (**), получаем требуемое.

По лемме 4.2 достаточно установить соответствующие неравенства, для кратностей. Для $\chi'_{2,1}$ с фундаментальными точками y^1_{s-1}, $y'^2_{s-1} = \alpha_s^{-1}(y^2_s)$, $r(y'^2_{s-1}) = r(y^2_s)$, надо доказать неравенство $a_{s-1} < 2r(y'^2_{s-1}) + r(y^1_{s-1})$. Имеем для $\chi_{5,1}$

$$a_s = 5a_{s-1} - 10r(y^5_{s-1}) - 2r(y^1_{s-1}), \quad r(x^1_s) = 2a_{s-1} - 5r(y^5_{s-1}).$$

Подставляя это в неравенство $a_s < 2r(y^2_s) + r(y^1_s)$, $y^1_s = x^1_s$, $r(y^2_s) = r(y'^2_{s-1})$, получаем

$$3a_{s-1} < 5r(y^5_{s-1}) + 2r(y^1_{s-1}) + 2r(y'^2_{s-1}).$$

Вычитая неравенство $2a_{s-1} \geqslant 5r(y^5_{s-1}) + r(y^1_{s-1})$, равносильное по лемме 4.2 неравенству $a_s \geqslant a_{s-1}$, получаем требуемое неравенство.

Теперь рассмотрим $\alpha'_{s+1} = \chi'_{5,1}$ с фундаментальными точками x'^5_s, y'^1_s. По формулам 1.2 имеем

$$\alpha'_{s+1}\alpha'_s = \chi'_{5,1}(221)\chi'_{2,1}\colon \begin{vmatrix} 8 & 10 & 6 & 5 \\ -3 & -4 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -4 & -5 & -4 & -2 \end{vmatrix},$$

$$\alpha'_{s+2}\alpha'_{s+1}\alpha'_s = \chi'_{2,1}(111,222)\chi'_{5,1}(221)\chi'_{2,1}\colon \begin{vmatrix} 10 & 15 & 6 & 6 \\ -3 & -4 & -2 & -2 \\ -3 & -5 & -1 & -2 \\ -6 & -10 & -4 & -3 \end{vmatrix},$$

в базисе $(l, y^5_{s-1}, y'^2_{s-1}, y^1_{s-1})$ с учетом правил сцепления. Отсюда получаем, что требуемые неравенства $\alpha'_{s+1} < a_{s-1}$, $\alpha'_{s+2} < a_{s-1}$ равносильны соответственно неравенствам

$$7a_{s-1} < 10r(y^5_{s-1}) + 6r(y'^2_{s-1}) + 5r(y^1_{s-1}),$$
$$9a_{s-1} < 15r(y^5_{s-1}) + 6r(y'^2_{s-1}) + 6r(y^1_{s-1}).$$

Второе из этих неравенств, деленное на 3, было получено выше, первое получается из второго вычитанием неравенства $2a_{s-1} \geqslant 5r(y^5_{s-1}) + r(y^1_{s-1})$, равносильного неравенству $a_s \geqslant a_{s-1}$. Наконец, как и в предыдущем случае, $a'_{s+3} = a_{s+1} < a_s$. Осталось воспользоваться утверждением (**).

Случай $\alpha_s = \chi_3$, $\alpha_{s+1} = \chi_3$, $x^3_s \neq y^3_s$. Пользуясь соотношениями 2.3, (i), 2.6, (i), заменим $\alpha_{s+1}\alpha_s = \chi_3\chi_3$ на $\alpha'_{s+3}\alpha'_{s+2}\alpha'_{s+1}\alpha'_s = \chi'_3(112)\chi'_3(111)\chi'_3\chi'_3$. Положим $\alpha' = \alpha_n \dots \alpha_{s+2}\alpha'_{s+3} \dots \alpha'_s\alpha_{s-1} \dots \alpha_1$ и покажем, что $\alpha'_{s+i} < a_s$ для $i = 0, 1, 2, 3$.

Для $i = 0$ имеем $a_{s-1} \leqslant a_s < 3r(y^3_s) = 3r(y'^3_{s-1})$, где $y'^3_{s-1}) = \alpha_s^{-1}(y^3_s)$. По лемме 4.2 получаем требуемое неравенство $a'_s < a_{s-1} \leqslant \alpha_s$.

Для $i = 1$ имеем $a'_{s+1} = 2a'_s - 3r(y'^3_s) < 2a_{s-1} - 3r(y^3_{s-1}) = a_s$, так как $y'^3_s = \alpha_s^{-1}(y^3_{s-1})$ с $r(y'^3_s) = r(y^3_{s-1})$.

Для $i = 2$ имеем $a'_{s+2} = 5a_{s-1} - 6r(y^3_{s-1}) - 6r(y'^3_{s-1})$, так что неравенство $a'_{s+2} < a_{s-1}$ равносильно неравенству $a_s = 2a_{s-1} - 3r(y^3_{s-1}) < 3r(y'^3_{s-1}) = 3r(y^3_s)$, что в свою очередь по лемме 4.2 эквивалентно $a'_{s+1} < a_s$.

Для $i = 3$ имеем $a'_{s+3} = a_{s+1} < a_s$.

Далее, как в утверждении (**).

Случай $\alpha_s = \chi_3$, $\alpha_{s+1} = \chi_{2,1}$. Пользуясь соотношениями 2.3 (i), 2.6 (ii), заменим $\alpha_{s+1}\alpha_s = \chi'_{2,1}\chi'_3$ на $\alpha'_{s+3}\alpha'_{s+2}\alpha'_{s+1}\alpha'_s = \chi'_3(112)\chi'_{2,1}\ (111, 221)\chi'_3\chi'_{2,1}$, где $\alpha'_s = \chi'_{2,1}$ имеет в качестве фундаментальных точек $y'^2_{s-1} = \alpha_s^{-1}(y^2_s)$, $y'^1_{s-1} = \alpha_s^{-1}(y^1_s)$, $r(y'^2_{s-1}) = r(y^2_s)$, $r(y'^1_{s-1}) = r(y^1_s)$, а $\alpha'_{s+1} = \chi'_3$ определяется точкой $y'^3_s = \alpha'_3(y^3_{s-1})$ с $r(y'^3_s) = r(y^3_{s-1})$.

Покажем, как и в предыдущем случае, что $a'_{s+1} < a_s$, $i = 0, 1, 2, 3$.

Для $i = 0$ имеем $a_{s-1} \leqslant a_s < 2r(y^2_s) + r(y^1_s) = 2r(y'^2_{s-1}) + r(y'^1_{s-1})$, следовательно, $a'_s < a_{s-1} \leqslant a_s$.

Для $i = 1$ имеем $a'_{s+1} = 2a'_s - r(y^3_s) < 2a_{s-1} - r(y^3_{s-1}) = a_s$.

Для $i = 2$ имеем $a'_{s+2} = 5a_{s-1} - 6r(y'_{s-1}) - 4r(y'^2_{s-1}) - 2r(y'^1_{s-1})$, так что неравенство $a'_{s+2} < a_{s-1}$ равносильно неравенству

$$a_s = 2a_{s-1} - 3r(y^3_{s-1}) < 2r(y'^2_{s-1}) + r(y'^1_{s-1}) = 2r(y^2_s) + r(y^1_s)$$

или по лемме 4.2 неравенству $a'_{s+1} < a_s$.

Для $i = 3$ имеем $a'_{s+3} = a_{s+1} < a_s$.

Далее, как в утверждении (**).

Случай $\alpha_s = \chi_{2,5,2}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{2,2;5}$, $x^2_s = y^2_s$, $x^5_s = y^5_s$, $\hat{x}^2_s \neq \hat{y}^2_s$. Пользуясь соотношениями 2.3, (i), 2.7 (vii), заменим $\alpha_{s+1}\alpha_s = \chi_{2,2;5}(111, 321)\chi_{2,5,2}$ на $\alpha'_{s+3}\alpha'_{s+2}\alpha'_{s+1}\alpha'_s = \chi'_{2,5,2}(113, 223, 322)\chi'_{2,5,2}\ (112, 232, 331)\chi'_{2,2;5}(111, 321)\chi'_{2,5,2}$.

В силу соотношения 2.7, (iv) мы можем заменить $\alpha'_{s+3}\alpha'_{s+2} = \chi'_{2,5,2}(111, 221)\chi'_{2,5,2}$ на $\alpha''_{s+2} = \chi''_{2,5,2}$. Теперь, как и выше, положим $\alpha'' = \alpha_n \dots \alpha_{s+2}\alpha''_{s+2}\alpha'_{s+1}\alpha'_s\alpha_{s-1} \dots \alpha_1$ и покажем, что $a'_s < a_s$, $a'_{s+1} < a_s$; и так как $a''_{s+2} = a_{s+1} < a_s$, то требуемый результат будет следовать из утверждения (**).

Фундаментальными точками преобразования α'_s являются $y'^2_{s-1} = y^2_{s-1}$, $\hat{y}'^2_{s-1} = \alpha_s^{-1}(\hat{y}^2_s)$, $r(\hat{y}'^2_{s-1}) = r(\hat{y}^2_s)$, $y'^5_{s-1} = y^5_{s-1}$, где $\hat{y}^2_s$ — вторая фундаментальная точка степени 2 для $\alpha_{s+1} = \chi'_{2,2;5}$.

Докажем, что $a'_s < a_s$. Действительно,

$$a'_s = 19a_{s-1} - 18r(y^2_{s-1}) - 30r(y^5_{s-1}) - 6r(\hat{y}'^2_{s-1}),$$
$$a_s = 19a_{s-1} - 18r(y^2_{s-1}) - 30r(y^5_{s-1}) - 6r(\hat{y}^2_{s-1}).$$

Поэтому достаточно показать, что $r(\hat{y}'^2_{s-1}) > r(\hat{y}^2_{s-1})$. Выражая a_s, $r(y^2_s) = r(x^2_s)$, $r(y^5_s) = r(x^5_s)$ через a_{s-1}, $r(y^2_{s-1})$, $r(\hat{y}^2_{s-1})$, $r(y^5_{s-1})$ и подставляя в неравенство $a_s < r(y^2_s) + r(\hat{y}^2_s) + r(y^5_s)$, находим

$$4a_{s-1} < 4r(y^2_{s-1}) + r(\hat{y}^2_{s-1}) + 6r(y^5_{s-1}) + r(\hat{y}'^2_{s-1}).$$

Вычитая отсюда неравенство $3a_{s-1} \geqslant 3r(y^2_{s-1}) + 5r(y^5_{s-1}) + r(\hat{y}^2_{s-1})$, равносильное $a_s \geqslant a_{s-1}$ находим (по лемме 4.2)

$$a_{s-1} < r(y^2_{s-1}) + r(\hat{y}'^2_{s-1}) + r(y^5_{s-1}).$$

Сложим последнее неравенство, умноженное на 4, с неравенством $4a_{s-1} < 4r(y^2_{s-1}) + r(\hat{y}^2_{s-1}) + 6r(y^5_{s-1}) + r(\hat{y}'^2_{s-1})$ и отнимем неравенство $2a_{s-1} \geqslant 4r(y^2_{s-1})$. В результате получим $6a_{s-1} \leqslant 4r(y^2_{s-1}) + 10r(y^5_{s-1}) + 5r(\hat{y}'^2_{s-1}) + r(\hat{y}^2_{s-1})$. Если $r(\hat{y}^2_{s-1}) \geqslant r(\hat{y}'^2_{s-1})$, то

$$3a_{s-1} < 2r(y^2_{s-1}) + 5r(y^5_{s-1}) + 2r(\hat{y}'^2_{s-1}) + r(\hat{y}^2_{s-1}).$$

Противоречие.

Итак, $r(\hat{y}'^2_{s-1}) > r(\hat{y}^2_{s-1})$, поэтому $a'_s < a_s$. Для доказательства $a'_{s+1} < a_s$ воспользуемся явными вычислениями:

$$a'_{s+1} = 11a'_s - 10r(x^2_s) - 10r(y'^2_s) - 10r(x^5_s),$$
$$a'_s = 19a_{s-1} - 18r(y^2_{s-1}) - 30r(y^5_{s-1}) - 6r(\hat{y}'^2_{s-1}),$$
$$r(x^2_s) = 9a_{s-1} - 8r(y^2_{s-1}) - 15r(y^5_{s-1}) - 3r(\hat{y}'^2_{s-1}),$$
$$r(x^5_s) = 6a_{s-1} - 6r(y^2_{s-1}) - 9r(y^5_{s-1}) - 2r(\hat{y}'^2_{s-1}),$$
$$r(y'^2_s) = r(\hat{y}^2_{s-1}), \quad y'^2_s = \alpha'_s(\hat{y}^2_{s-1}).$$

Отсюда требуемое неравенство $a'_{s+1} < a_{s-1}$ эквивалентно неравенству

$$29a_{s-1} < 29r(y^2_{s-1}) + 45r(y^5_{s-1}) + 8r(\hat{y}'^2_{s-1}) + 5r(\hat{y}^2_{s-1}).$$

Докажем это неравенство. Вычитая из неравенства $4a_{s-1} \leqslant 4r(y^2_{s-1}) + r(\hat{y}^2_{s-1}) + 6r(y^5_{s-1}) + r(\hat{y}'^2_{s-1})$, умноженного на 8, неравенство $3a_{s-1} \geqslant 3r(y^2_{s-1}) + 5r(y^5_{s-1}) + r(\hat{y}^2_{s-1})$, получаем

$$29a_{s-1} < 29r(y^2_{s-1}) + 7r(y'^2_{s-1}) + 43r(y^5_{s-1}) + 8r(\hat{y}'^2_{s-1}).$$

Отсюда достаточно показать, что $r(y^5_{s-1}) > r(\hat{y}^2_{s-1})$. Но предположив противное и сравнив с $4a_{s-1} < 4r(y^2_{s-1}) + r(\hat{y}^2_{s-1}) + 6r(y^5_{s-1}) + r(\hat{y}'^2_{s-1})$, получим

$$4a_{s-1} < 4r(y^2_{s-1}) + 5r(y^5_{s-1}) + 2r(\hat{y}^2_{s-1}) + r(\hat{y}'^2_{s-1}).$$

Вычитая из последнего неравенство $a_{s-1} \geqslant 2r(y^2_{s-1})$, получаем противоречие с $3a_{s-1} > \sum d_i r_i$, что и требовалось установить, т. е. $a'_{s+1} < a_{s-1}$. Далее, как в утверждении $(**)$.

Случай $\alpha_s = \chi_{2,2;3}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{2,2;3}$, $x_s^2 = y_s^2$, $x_s^3 = y_s^3$. Здесь используются соотношения 2.7, (xix), (xxi). Заменим $\alpha_{s+1}\alpha_s = \chi_{2,2;3}(111, 321)\ \chi_{2,2;3}$ на $\alpha'_{s+3}\alpha'_{s+2}\alpha'_{s+1}\alpha'_s = \chi'_{2,2;3}(113, 222, 333)\chi'_{2,2;3}\ (112, 221, 332)\chi'_{2,2;3}(111, 331)\chi'_{2,2;3}$. Как и выше, положим $\alpha' = \alpha_n \dots \alpha_{s+2}\alpha'_{s+3} \dots \alpha'_s\alpha_{s-1} \dots \alpha_1$ и покажем, что $a'_s < a_{s-1}$, $a'_{s+1} < a_{s-1}$, $a'_{s+2} < a_{s-1}$. По лемме 4.2 нужно установить соответствующие неравенства для кратностей фундаментальных точек.

Для $\alpha'_s = \chi'_{2,2;3}$ фундаментальными точками являются y_{s-1}^2, $\hat{y}'^2_{s-1} = \alpha_s^{-1}(\hat{y}_s^2)$, y_{s-1}^3, $r(\hat{y}'^2_{s-1}) = r(\hat{y}_s^2)$, где $\hat{y}_s^2$ — вторая фундаментальная точка степени 2 для $\alpha_{s+1} = \chi_{2,2;3}$. Нужное неравенство $a'_s < a_{s-1}$ равносильно неравенству $a_{s-1} < r(y_{s-1}^2) + r(\hat{y}'^2_{s-1}) + r(y_{s-1}^3)$. Мы получим его из неравенства $a_s < r(y_s^2) + r(\hat{y}_s^2) + r(y_s^3)$, подставив соответствующие выражения через a_{s-1}, $r(y_{s-1}^2)$, $r(\hat{y}_{s-1}^2)$, $r(y_{s-1}^3)$ по формулам (1.2) для $\chi_{2,2;3}$ с учетом того, что $y_s^2 = x_s^2$, $y_s^3 = x_s^3$ и $r(\hat{y}_s^2) = r(\hat{y}'^2_{s-1})$. Имеем

$$2a_{s-1} < 2r(y_{s-1}^2) + r(\hat{y}_{s-1}^2) + 2r(y_{s-1}^3) + r(\hat{y}'^2_{s-1}).$$

Вычитая отсюда неравенство $a_{s-1} \geqslant r(y_{s-1}^2) + r(\hat{y}_{s-1}^2) + r(y_{s-1}^3)$, равносильное $a_s \geqslant a_{s-1}$, получаем то, что нужно. Отметим, что из этих двух неравенств следует также, что $r(\hat{y}_{s-1}^2) < r(\hat{y}'^2_{s-1})$.

Вычислим теперь a'_{s+1}, пользуясь формулами (1.2) для $\chi_{2,2;3}$ и правилом сцепления в композиции $\alpha'_{s+1}\alpha'_s = \chi'_{2,2;3}(111, 331)\chi_{2,2;3}$. Имеем

$$a'_{s+1} = 7a'_s - 6r(y_s^2) - 6r(\hat{y}'^2_s) - 6r(y_s^3),$$

где $\hat{y}'^2_s = \alpha'_s(\hat{y}_{s-1}^2)$ — вторая фундаментальная точка степени 2 преобразования $\alpha'_{s+1} = \chi'_{2,2;3}$ с $r(\hat{y}'^2_s) = r(\hat{y}'^2_{s-1})$. Подставляя в предыдущее равенство соответствующие выражения, получаем

$$a'_{s+1} = 19a_{s-1} - 18r(y_{s-1}^2) - 6r(\hat{y}'^2_s) - 12r(\hat{y}'^2_{s-1}) - 18r(y_{s-1}^3).$$

Отсюда неравенство $a'_{s+1} < a_{s-1}$ равносильно неравенству

$$18a_{s-1} < 18r(y_{s-1}^2) + 6r(\hat{y}'^2_s) + 12r(\hat{y}'^2_{s-1}) + 18r(y_{s-1}^3),$$

которое после деления на 6 является суммой неравенств для a_{s-1} и для $2a_{s-1}$, указанных выше.

Аналогично,

$$a'_{s+2} = 7a'_{s+1} - 6r(y'^2_{s+1}) - 6r(\hat{y}'^2_{s+1}) - 6r(y_{s+1}^3),$$

где $\hat{y}'^2_{s+1} = \alpha'_{s+1}(\hat{x}'^2_s)$ — вторая фундаментальная точка степени 2 преобразования $\alpha'_{s+2} = \chi'_{2,2;3}$ с $r(\hat{y}_{s+1}^2) = r(\hat{x}'^2_{s+1})$. Выражая через a_{s-1}, $r(y_{s-1}^2)$, $r(\hat{y}_{s-1}^2)$, $r(\hat{y}'^2_{s-1})$ и $r(y_{s-1}^3)$, получаем

$$a'_{s+2} = 25a_{s-1} - 24r(y_{s-1}^2) - 12r(\hat{y}_{s-1}^2) - 12r(\hat{y}'^2_{s-1}) - 24r(y_{s-1}^3).$$

Отсюда, как и выше, получаем требуемое неравенство $a'_{s+2} < a_{s-1}$. Осталось заметить, что $a'_{s+3} = a_{s+1} < a_s$, и воспользоваться утверждением $(**)$.

Случай $\alpha_s = \chi_{2,1}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{2,1}$, $x_s^2 \neq y_s^2$, $x_s^1 \neq y_s^1$. Воспользуемся соотношением 2.7, (xxvii) и заменим $\alpha_{s+1}\alpha_s = \chi'_{2,1}\chi_{2,1}$ на $\alpha'_{s+3}\alpha'_{s+2}\alpha'_{s+1}\alpha'_s = \chi'_{2,1}(112,222)\chi'_{2,1}(111,221)\chi''_{2,1}\chi'_{2,1}$ и положим, как и раньше, $\alpha' = \alpha_n \ldots \alpha_{s+2}\alpha'_{s+3}\ldots\alpha'_s\alpha_{s-1}\ldots\alpha_1$.

Покажем,что $a'_{s+i} < a_s$, $i = 0,1,2,3$, и воспользуемся затем утверждением $(**)$. Отметим сразу же, что, как и выше, $a'_{s+3} = a_{s+1} < a_s$.

Для $i = 0$ имеем $a_{s-1} \leqslant a_s < 2r(y_s^2) + r(y_s^1) = 2r(y'^2_{s-1}) + r(y'^1_{s-1})$, где $y'^1_{s-1} = \alpha_s^{-1}(y_s^1)$, $y'^2_{s-1} = \alpha_s^{-1}(y_s^2)$ — фундаментальные точки $\chi'_{2,1}$ с $r(y'^1_{s-1}) = r(y_s^1)$, $r(y'^2_{s-1}) = r(y_s^2)$, так что $a_{s-1} < 2r(y'^2_{s-1}) + r(y'^1_{s-1})$, что равносильно по лемме 4.2 неравенству $a'_s < a_{s-1}$.

Для $i = 1$ имеем

$$a'_{s+1} = 2a'_s - 2r(y'^2_s) - r(y'^1_s),$$
$$y'^1_s = \alpha'_s(y^1_{s-1}), \quad y'^2_s = \alpha'_s(y^2_{s-1}),$$
$$r(y'^1_s) = r(y^1_{s-1}), \quad r(y'^2_s) = r(y^2_{s-1}),$$
$$a'_s = 2a_{s-1} - 2r(y'^2_{s-1}) - r(y'^1_{s-1}).$$

Отсюда и из неравенства $a_{s-1} \geqslant 2r(y^2_{s-1}) + r(y^1_{s-1})$, равносильного неравенству $a_s \geqslant a_{s-1}$, получаем, что $a'_{s+1} < a_{s-1}$ эквивалентно полученному выше неравенству $a_{s-1} < 2r(y'^2_{s-1}) + r(y'^1_{s-1})$.

Для $i = 2$ имеем

$$a'_{s+2} = 5a_{s-1} - 4r(y'^2_{s-1}) - 2r(y'^1_{s-1}) - 4r(y^2_{s-1}) - 2r(y^1_{s-1}).$$

Неравенство $a'_{s+2} < a_{s-1}$, таким образом, эквивалентно

$$2a_{s-1} - 2r(y^2_{s-1}) - r(y^1_{s-1}) = a_s < 2r(y^2_s) + r(y^1_s) = 2r(y'^2_{s-1}) + r(y'^1_{s-1}),$$

что и имеет место по условию.

Случай $\alpha_s = \chi_{1;7;7}(3,2,1)$, $\alpha_{s+1} = \chi_{2,1}$, $x_s^1 = y_s^1$. Воспользуемся соотношениями 2.8, (xiv), (v) и заменим $\alpha_{s+1}\alpha_s = \chi_{2,1}(211)\chi_{1;7;7}(321)$ на $\alpha'_{s+3}\alpha'_{s+2}\alpha'_{s+1}\alpha'_s = \chi'_{1;7;7}(123,232,324)\chi'_{2,1}(111,212)\chi'_{1;7;7}(121,322)\chi'_{2,1}$. Положим $\alpha' = \alpha_n\ldots\alpha_{s+2}\alpha'_{s+3}\ldots\alpha'_s\alpha_{s-1}\ldots\alpha_1$ и покажем, как обычно, что $a'_s < a_{s-1}$, $a'_{s+1} < a_{s-1}$, $a'_{s+2} < a_{s-1}$. Так как $a'_{s+3} = a_{s+1} < a_s$, то отсюда по утверждению $(**)$ мы получим требуемый результат.

Для $\alpha'_s = \chi'_{2,1}$ с фундаментальными точками y^1_{s-1}, $y'^2_{s-1} = \alpha_s^{-1}(y^2_s)$, $r(y'^2_{s-1}) = r(y^2_s)$ по формулам преобразования для $\chi_{1;7;7}(321)$ с матрицей

$$\begin{vmatrix} 10 & 21 & 6 \\ -3 & -6 & -2 \\ -6 & -14 & -3 \end{vmatrix}$$

и неравенствам (8) и (10) из (4.1) находим

$$a_s < 2r(y^2_s) + r(y^1_s) \Leftrightarrow 4a_{s-1} < 7r(y^7_{s-1}) + 3r(y^1_{s-1}) + 2r(y^2_s).$$

Вычитая неравенство $3a_{s-1} \geqslant 7r(y^7_{s-1}) + 2r(y^1_{s-1})$, равносильное $a_s \geqslant a_{s-1}$, получаем $a_{s-1} < 2r(y'^2_{s-1}) + r(y^1_{s-1})$, что эквивалентно $a'_s < a_{s-1}$.

Для $\alpha'_{s+1} = \chi'_{1;7;7}(321)$ с фундаментальными точками y'^1_s, $y'^7_s = \alpha'_s(y^7_{s-1})$, $r(y'^7_s) = r(y^7_{s-1})$, имеем

$$a'_{s+1} = 14a_{s-1} - 21r(y^7_{s-1}) - 8r(y'^2_{s-1}) - 10r(y^1_{s-1}),$$

так что неравенство $a'_{s+1} < a_{s-1}$ равносильно

$$13a_{s-1} < 21r(y^7_{s-1}) + 8r(y'^2_{s-1}) + 10r(y^1_{s-1}).$$

Складывая утроенное неравенство $4a_{s-1} < 7r(y^7_{s-1}) + 3r(y^1_{s-1}) + 2r(y^2_s)$ с $a_{s-1} < 2r(y'^2_{s-1}) + r(y^1_{s-1})$ (оба получены выше), получаем требуемое неравенство.

Для $\alpha'_{s+2} = \chi'_{2,1}$ с фундаментальными точками y'^1_{s+1}, $y'^2_{s+1} = \alpha'_{s+1}(x'^2_s)$, $r(y'^2_{s+2}) = r(y'^2_s)$, находим

$$a'_{s+2} = 2a'_{s+1} - 2r(y'^2_{s+1}) - r(y'^1_{s+1}) = 17a_{s-1} - 28r(y^7_{s-1}) - 8r(y'^2_{s-1}) - 12r(y^1_{s-1}),$$

после чего неравенство $a'_{s+2} < a_{s-1}$ — это в точности неравенство $4a_{s-1} < 7r(y^7_{s-1}) + 3r(y^1_{s-1}) + 2r(y^2_s)$, умноженное на 4.

Случай $\alpha_s = \chi_{1;6}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{1;6}$, $x^6_s = y^6_s$. Заменим, пользуясь соотношением 2.8, (xvii), $\alpha_{s+1}\alpha_s = \chi_{1;6}(221)\chi_{1;6}$ на $\alpha'_{s+3}\alpha'_{s+2}\alpha'_{s+1}\alpha'_s = \chi_{1;6}(112,223)\chi_{1;6}(111,222)\chi_{1;6}(221)\chi_{1;6}$, в результате получаем слово α'. Фундаментальными точками α'_s являются $y'^6_{s-1} = y^6_{s-1}$ и $y'^1_{s-1} = \alpha_s^{-1}(y^1_s)$, $r(y'^1_{s-1}) = r(y^1_s)$. Фундаментальные точки α'_s — $y'^6_s = x'^6_s$ и $y'^1_s = \alpha'_s(y^1_{s-1})$, $r(y'^1_s) = r(y^1_{s-1})$.

Покажем далее, что $\alpha'_{s+i} < a_{s-1}$, $i = 0, 1, 2$, и воспользуемся утверждением (**). Как и в предыдущих случаях, $a'_{s+3} = a_{s+2} < a_s$.

Для $i = 0$ получаем, используя $r(y^6_s) = a_{s-1} - r(y^1_{s-1}) - r(y^6_{s-1})$ и формулы п. 1.2, что $a_s < r(y^1_s) + 2r(y^6_s)$ эквивалентно $2a_{s-1} < r(y^1_s) + r(y^1_{s-1}) + 4r(y^6_{s-1})$. Вычитая $a_{s-1} \geqslant r(y^1_{s-1}) + 2r(y^6_{s-1})$, равносильное $a_{s-1} \leqslant a_s$, получаем $a_{s-1} < r(y'^1_{s-1}) + 2r(y^6_{s-1})$, что эквивалентно $a'_s < a_{s-1}$.

Для $i = 1$ вычисление a'_{s+1} дает с учетом $y'^6_s = x'^6_s$, $y'^1_s = \alpha'_s(y^1_{s-1})$, $r(y'^1_s) = r(y^1_{s-1})$, что

$$a'_{s+1} = 10a_{s-1} - 6r(y'^1_{s-1}) - 18r(y^6_{s-1}) - 3r(y^1_{s-1}),$$

откуда следует, что $a'_{s+1} < a_{s-1}$ равносильно $3a_{s-1} < 2r(y'^1_{s-1}) + 6r(y^6_{s-1}) + r(y^1_{s-1})$. Последнее неравенство есть сумма двух: $a_{s-1} < 2r(y^6_{s-1}) + r(y'^1_{s-1})$ и $2a_{s-1} < r(y'^1_{s-1}) + 4r(y^6_{s-1}) + r(y^1_{s-1})$, полученных выше.

Для $i = 2$, вычисляя a'_{s+2} через a_{s-1}, $r(y'^1_{s-1})$, $r(y^6_{s-1})$, $r(y^1_{s-1})$, получаем

$$a'_{s+2} = 13a_{s-1} - 6r(y^1_{s-1}) - 24r(y^6_{s-1}) - 6r(y'^1_{s-1}).$$

Неравенство $a'_{s+2} < a_{s-1}$ оказывается далее эквивалентным $2a_{s-1} < r(y^1_{s-1}) + 4r(y^6_{s-1}) + r(y'^1_{s-1})$, полученному выше. □

5.6. Лемма. *Пусть α_s, α_{s+1} такие, как в табл.* 4.4, *№№* 14, 24, 26, 41, 50; *тогда по модулю соотношений* 2.3–2.8 *слово $\alpha \in S$ эквивалентно слову $\alpha' = \beta_2\beta_1$, где β_1, β_2 удовлетворяют условиям* (5.1).

Доказательство. Во всех указанных случаях длина соответствующего соотношения равна 8. Пользуясь этими соотношениями, заменим в каждом случае $\alpha_{s+1}\alpha_s$ на $\alpha'_{s+5}\dots\alpha'_{s+1}\alpha'_s$ и представим полученное слово $\alpha' = \alpha_n\dots\alpha_{s+2}\alpha'_{s+5}\dots\alpha'_s\alpha_{s-1}\dots\alpha_1$ в виде $\beta_2\beta_1$, где $\beta_1 = \delta\alpha'_s\alpha_{s-1}\dots\alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_n\dots\alpha_{s+2}\alpha'_{s+5}\dots\alpha'_{s+1}\delta^{-1}$, $\delta = \delta_r\dots\delta_1$ — расширенное слово, полученное из композиции отображений, раскручивающих отображение $\alpha'_s\alpha(s-1)$, как в доказательстве леммы 3.4. Теперь для того, чтобы β_1, β_2 удовлетворяли условиям (5.1), достаточно доказать, что $A'_{s+i} < A_s = A(\alpha)$, $i = 0,\dots,4$, в каждом из указанных случаев. Во всех случаях $A'_{s+5} = A_{s+1} < A_s$.

Случай $\alpha'_{s+2}\alpha'_{s+1}\alpha'_s\alpha_s = \chi_{5,1}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{4;1}$, $x^1_s = y^1_s$. Здесь $\alpha'_{s+5}\alpha'_{s+4}\alpha'_{s+3} = \chi'_{5,1}(114,225)\chi'_{4;1}(113,224)\chi'_{5,1}(112,223)\chi'_{4;1}(111,222)\ \chi'_{5,1}(221)\chi'_{4;1}$ (используется 2.4, (xiii)).

Фундаментальными точками $\alpha'_s = \chi'_{4;1}$ являются y^1_{s-1}, $y'^4_{s-1} = \alpha_s^{-1}(y^4_s)$ с $r(y'^4_{s-1}) = r(y^4_s)$. Фундаментальными точками $\alpha'_{s+1} = \chi'_{5,1}$ будут $y'^5_s = \alpha'_s(y^5_{s-1})$ с $r(y'^5_s) = r(y^5_{s-1})$ и $y'^1_s = x'^1_s$, где, как обычно, x'^1_s обозначает фундаментальную точку α'^{-1}_s. Подставляя в неравенство $a_s < 2r(y^4_s) + r(y^1_s)$ выражения через a_{s-1}, $r(y^5_{s-1})$, $r(y^1_{s-1})$, $r(y'^4_{s-1})$, получаем

$$3a_{s-1} < 5r(y^5_{s-1}) + 2r(y^1_{s-1}) + 2r(y'^4_{s-1}).$$

Вычитая отсюда неравенство $2a_{s-1} \geqslant 5r(y^5_{s-1}) + r(y^1_{s-1})$, равносильное $a_s \geqslant a_{s-1}$, получаем $a_{s-1} < 2r(y'^4_{s-1}) + r(y^1_{s-1})$, что эквивалентно $a'_s < a_{s-1}$ по лемме 4.2.

Для a'_{s+i}, $i = 1,\dots,4$, явные вычисления по формулам (1.2) с учетом сцепления дают:

$$\begin{aligned}
a'_{s+1} &= 11a_{s-1} - 12r(y'^4_{s-1}) - 8r(y^1_{s-1}) - 10r(y^5_{s-1}),\\
a'_{s+2} &= 17a_{s-1} - 16r(y'^4_{s-1}) - 12r(y^1_{s-1}) - 20r(y^5_{s-1}),\\
a'_{s+3} &= 21a_{s-1} - 16r(y'^4_{s-1}) - 14r(y^1_{s-1}) - 30r(y^5_{s-1}),\\
a'_{s+4} &= 19a_{s-1} - 12r(y'^4_{s-1}) - 12r(y^1_{s-1}) - 30r(y^5_{s-1}).
\end{aligned}$$

Отсюда требуемые неравенства $a'_{s+i} < a_{s-1}$, $i = 1,\dots,4$ равносильны соответственно неравенствам

$$\begin{aligned}
5a_{s-1} &< 6r(y'^4_{s-1}) + 4r(y^1_{s-1}) + 5r(y^5_{s-1}),\\
4a_{s-1} &< 4r(y'^4_{s-1}) + 3r(y^1_{s-1}) + 4r(y^5_{s-1}),\\
10a_{s-1} &< 8r(y'^4_{s-1}) + 7r(y^1_{s-1}) + 15r(y^5_{s-1}),\\
3a_{s-1} &< 2r(y'^4_{s-1}) + 2r(y^1_{s-1}) + 5r(y^5_{s-1}).
\end{aligned}$$

Последнее из них уже было получено выше. Прибавляя к нему $2a_{s-1} < 4r(y'^4_{s-1}) + 2r(y^1_{s-1})$, получаем первое, прибавляя $a_{s-1} < 2r(y'^4_{s-1}) + r(y^1_{s-1})$, получаем второе, умножая последнее на 3 и прибавляя к нему $a_{s-1} < 2r(y'^4_{s-1}) + r(y^1_{s-1})$, получаем третье, что и требовалось установить.

Случай $\alpha_s = \chi_{4;1}$, $\alpha_{s+1} = \chi_3$. Здесь $\alpha'_{s+5}\alpha'_{s+4}\dots\alpha'_{s+1}\alpha'_s = \chi'_{4;1}(114,224)\chi'_3(113)\chi'_{4;1}(112,222)\chi'_3(111)\chi'_{4;1}\chi'_3$ (использовано 2.5, (viii)). Фундаментальной точкой для χ'_3 является $y'^3_{s-1} = \alpha_s^{-1}(y^3_s)$ с $r(y'^3_{s-1}) = r(y^3_s)$. Фундаментальными точками $\alpha'_{s+1} = \chi'_{4;1}$ являются $y'^4_s = \alpha'_s(y'^4_{s-1})$ и $y'^1_s = \alpha'_s(y'^1_{s-1})$

с $r(y_s'^4) = r(y_{s-1}^4)$ и $r(y_s'^1) = r(y_{s-1}^1)$ соответственно. Для $\alpha_s' = \chi_3'$ имеем $a_{s-1} \leqslant a_s < 3r(y_s^3) = 3r(y_{s-1}'^3)$. Откуда по лемме 4.2 $a_s' < a_{s-1}$.

Для $i = 1, \ldots, 4$, как и выше, воспользуемся явными вычислениями по формулам (1.2) с учетом правил сцепления и установим следующие неравенства:

$$\begin{aligned}
a_{s+1}' &= 6a_{s-1} - 9r(y_{s-1}'^3) - 4r(y_{s-1}^4) - 2r(y_{s-1}^1) < a_{s-1},\\
a_{s+2}' &= 9a_{s-1} - 12r(y_{s-1}'^3) - 8r(y_{s-1}^4) - 4r(y_{s-1}^1) < a_{s-1},\\
a_{s+3}' &= 11a_{s-1} - 12r(y_{s-1}'^3) - 12r(y_{s-1}^4) - 6r(y_{s-1}^1) < a_{s-1},\\
a_{s+4}' &= 10a_{s-1} - 9r(y_{s-1}'^3) - 12r(y_{s-1}^4) - 6r(y_{s-1}^1) < a_{s-1}.
\end{aligned}$$

Последнее из этих неравенств, деленное на 3, — это в точности неравенство $a_s < 3r(y_s^3)$, выраженное через a_{s-1}, $r(y_{s-1}'^3)$, $r(y_{s-1}^4)$, $r(y_{s-1}^1)$. Второе, деленное на 4, получается из последнего, деленного на 3, вычитанием $a_{s-1} \geqslant$ $\geqslant 2r(y_{s-1}^4) + r(y_{s-1}^1)$ (что равносильно $a_s \geqslant a_{s-1}$ по лемме 4.2). Складывая после соответствующего деления второе н последнее, получаем третье, деленное на 2. Первое является суммой последнего, деленного на 3, и $2a_{s-1} < 6r(y_{s-1}'^3)$.

Случай $\alpha_s = \chi_{4;1}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{2,1}$, $x_s^1 \neq y_s^1$. Здесь $\alpha_{s+5}' \ldots \alpha_s' =$ $= \chi_{4;1}'(114, 224)\chi_{2,1}'(113, 223)\chi_{4;1}'(112, 222)\chi_{2,1}'(111, 221)\chi_{4;1}'\chi_{2,1}'$ (использовано 2.5, (x)). Этот случай очень похож на предыдущий. Вместо одной точки $y_{s-1}'^3$ надо взять две точки $y_{s-1}'^1$ и $y_{s-1}'^2$, здесь $y_{s-1}'^1 = \alpha_s^{-1}(y_s^1)$, $y_{s-1}'^2 = \alpha_s^{-1}(y_s^2)$, $r(y_{s-1}'^1) = r(y_s^1)$, $r(y_{s-1}'^2) = r(y_s^2)$. Фундаментальными точками $\alpha_{s+1}' = \chi_{4;1}'$ будут $y_s'^4 = \alpha_s'(y_{s-1}^4)$ и $y_s'^1 = \alpha_s'(y_{s-1}^1)$ с $r(y_s'^4) = r(y_{s-1}^4)$ и $r(y_s'^1) = r(y_{s-1}^1)$. Для $\alpha_s' = \chi_{2,1}'$ имеем

$$a_{s-1} \leqslant a_s < 2r(y_s^2) + r(y_s^1) = 2r(y_{s-1}'^2) + r(y_{s-1}'^1),$$

что равносильно $a_s' < a_{s-1}$. Для $i = 1, \ldots, 4$ нужно установить неравенства

$$\begin{aligned}
a_{s+1}' &= 6a_{s-1} - 6r(y_{s-1}'^2) - 3r(y_{s-1}'^1) - 4r(y_{s-1}^4) - 2r(y_{s-1}^1) < a_{s-1},\\
a_{s+2}' &= 9a_{s-1} - 8r(y_{s-1}'^2) - 4r(y_{s-1}'^1) - 8r(y_{s-1}^4) - 4r(y_{s-1}^1) < a_{s-1},\\
a_{s+3}' &= 11a_{s-1} - 8r(y_{s-1}'^2) - 4r(y_{s-1}'^1) - 12r(y_{s-1}^4) - 6r(y_{s-1}^1) < a_{s-1},\\
a_{s+4}' &= 10a_{s-1} - 6r(y_{s-1}'^2) - 3r(y_{s-1}'^1) - 12r(y_{s-1}^4) - 6r(y_{s-1}^1) < a_{s-1}.
\end{aligned}$$

Последнее из этих неравенств, деленное на 3, есть в точности неравенство $a_s < 2r(y_s^2) + r(y_s^1)$, выраженное через a_{s-1}, $r(y_{s-1}'^2)$, $r(y_{s-1}'^1)$, $r(y_{s-1}^4)$, $r(y_{s-1}^1)$. Второе, деленное на 4, получается из последнего, деленного на 3, вычитанием $a_{s-1} \geqslant 2r(y_{s-1}^4) + r(y_{s-1}^1)$ (что равносильно $a_s \geqslant a_{s-1}$ по лемме 4.2). Каждое из остальных получается как положительная линейная комбинация уже полученных неравенств (см. предыдущий случай).

Случай $\alpha_s = \chi_{2,3,3}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{2,2;3}$, $x_s^2 = y_s^2$ и $x_s^3 = y_s^3$. Здесь $\alpha_{s+5}' \ldots \alpha_{s+1}'\alpha_s' = \chi_{2,3,3}'(115, 235, 334)\chi_{2,2;3}'(114, 223, 324)\chi_{2,3,3}'(113, 233, 332) \times$ $\times \chi_{2,2;3}'(112, 221, 322)\chi_{2,3,3}'(111, 231)\chi_{2,2;3}'$ (использовано 2.7, (xviii), (xxi)).

Фундаментальными точками для $\chi_{2,2;3}'$ являются y_{s-1}^2, $\hat{y}_{s-1}'^2 = \alpha_s^{-1}(\hat{y}_s^2)$, y_{s-1}^3, $r(\hat{y}_{s-1}'^2) = r(\hat{y}_s^2)$, где $\hat{y}_s^2$ — вторая фундаментальная точка степени 2 для

$\alpha_{s+1} = \chi_{2,2;3}$. Фундаментальными точками $\alpha'_{s+1} = \chi'_{2,3,3}$ будут $y'^2_s = x'^2_s$, $y'^3_s = x'^3_s$ и $\hat{y}^3_s = \alpha'_s(\hat{y}'^3_{s-1})$, $r(\hat{y}'^3_s) = r(\hat{y}^3_{s-1})$. Как и раньше, находим

$$a_s < r(y^2_s) + r(\hat{y}^2_s) + r(y^3_s) \Longleftrightarrow 3a_{s-1} < 3r(y^2_{s-1}) + r(\hat{y}'^2_{s-1}) + 2r(\hat{y}^3_{s-1}) + 3r(y^3_s).$$

Вычитая из последнего неравенства $2a_{s-1} \geqslant 2r(y^2_{s-1}) + 2r(y^3_{s-1}) + 2r(\hat{y}^3_{s-1})$, получаем $a_{s-1} < r(y^2_{s-1}) + r(\hat{y}'^2_{s-1}) + r(y^3_{s-1})$, что равносильно неравенству $a'_s < a_{s-1}$.

Матрица, выражающая $(a'_{s+1}, \ldots, a'_{s+4})$ через $(a_{s-1},\ r(y^2_{s-1}),\ r(\hat{y}'^2_{s-1}),\ r(y^3_{s-1}),\ r(\hat{y}^3_{s-1}))$, имеет вид

$$\begin{vmatrix} 31 & -30 & -18 & -30 & -12 \\ 49 & -48 & -24 & -48 & -24 \\ 61 & -60 & -24 & -60 & -36 \\ 55 & -54 & -18 & -54 & -36 \end{vmatrix}.$$

Стало быть, чтобы доказать, что $a'_{s+i} < a_{s-1}$, $i = 1, \ldots, 4$, нам надо установить неравенства

$$\begin{aligned} 5a_{s-1} &< 5r(y^2_{s-1}) + 3r(\hat{y}'^2_{s-1}) + 5r(y^3_{s-1}) + 2r(\hat{y}^3_{s-1}), \\ 2a_{s-1} &< 2r(y^2_{s-1}) + r(\hat{y}'^2_{s-1}) + 2r(y^3_{s-1}) + r(\hat{y}^3_{s-1}), \\ 5a_{s-1} &< 5r(y^2_{s-1}) + 2r(\hat{y}'^2_{s-1}) + 5r(y^3_{s-1}) + 3r(\hat{y}^3_{s-1}), \\ 3a_{s-1} &< 3r(y^2_{s-1}) + r(\hat{y}'^2_{s-1}) + 3r(y^3_{s-1}) + 2r(\hat{y}^3_{s-1}). \end{aligned}$$

Последнее их этих неравенств установлено выше. Вычитая из него $a_{s-1} \geqslant r(y^2_{s-1}) + r(y^3_{s-1}) + r(\hat{y}^3_{s-1})$, получаем второе. Складывая второе и последнее, получаем третье. Первое есть сумма последнего с удвоенным неравенством $a_{s-1} < r(y^2_{s-1}) + r(\hat{y}'^2_{s-1}) + r(y^3_{s-1})$, что и требовалось доказать.

С л у ч а й $\alpha_s = \chi_{1;7;7}(321)$, $\alpha_{s+1} = \chi_{1;4}$, $x^1_s = y^1_s$. Здесь

$$\begin{aligned} \alpha'_{s+5} \ldots \alpha'_s = \chi'_{1;7;7}(115, 234, 326)\chi'_{1;4}(114, 223)\chi'_{1;7;7}(113, 232, 324) \times \\ \times \chi'_{1;4}(112, 221)\chi'_{1;7;7}(111, 322)\chi'_{1;4} \end{aligned}$$

(использовано 2.8, (xv)). Фундаментальными точками $\alpha'_s = \chi'_{1;4}$ являются y^1_{s-1}, $y'^4_{s-1} = \alpha^{-1}_s(y^4_s)$, $r(y'^4_{s-1}) = r(y^4_s)$. Фундаментальными точками $\alpha'_{s+1} = \chi'_{1;7;7}(321)$ являются x'^1_s и $y'^7_s = \alpha'_s(y^7_{s-1})$ с $r(y'^7_s) = r(y^7_{s-1})$. Выражая неравенство $a_s < 2r(y^4_s) + r(y^1_s)$ в терминах a_{s-1}, $r(y^1_{s-1})$, $r(y^7_{s-1})$, $r(y'^4_{s-1})$, находим

$$4a_{s-1} < 7r(y^7_{s-1}) + 3r(y^1_{s-1}) + 2r(y'^4_{s-1}).$$

Вычитая отсюда неравенство $3a_{s-1} \geqslant 7r(y^7_{s-1}) + 2r(y^1_{s-1})$, равносильное $a_s \geqslant a_{s-1}$, получаем $a_{s-1} < 2r(y'^4_{s-1}) + r(y^1_{s-1})$, что эквивалентно $a'_s < a_{s-1}$.

Матрица, выражающая $(a'_{s+1}, a'_{s+2}, a'_{s+3}, a'_{s+4})$ через $(a_{s-1}, r(y^7_{s-1}), r(y^1_{s-1}), r(y'^4_{s-1}))$, имеет вид

$$\begin{vmatrix} 18 & -21 & -14 & -16 \\ 26 & -35 & -20 & -20 \\ 35 & -56 & -26 & -20 \\ 33 & -56 & -24 & -16 \end{vmatrix}.$$

Отсюда требуемые неравенства $a'_{s+i} < a_{s-1}$, $i = 1, \dots, 4$, эквивалентны соответственно

$$\begin{aligned}
17a_{s-1} &< 21r(y^7_{s-1}) + 14r(y^1_{s-1}) + 16r(y'^4_{s-1}),\\
5a_{s-1} &< 7r(y^7_{s-1}) + 4r(y^1_{s-1}) + 4r(y'^4_{s-1}),\\
17a_{s-1} &< 28r(y^7_{s-1}) + 13r(y^1_{s-1}) + 10r(y'^4_{s-1}),\\
4a_{s-1} &< 7r(y^7_{s-1}) + 3r(y^1_{s-1}) + 2r(y'^4_{s-1}).
\end{aligned}$$

Последнее из этих неравенств установлено выше. Складывая его с неравенством $a_{s-1} < 2r(y'^4_{s-1}) + r(y^1_{s-1})$, получаем второе; складывая второе с утроенным четвертым, получаем третье; умножая второе на 4 и вычитая $3a_{s-1} \geqslant \geqslant 7r(y^7_{s-1}) + 2r(y^1_{s-1})$, получаем первое.

Доказательство леммы закончено. □

5.7. Лемма. *Пусть α_s, α_{s+1} такие, как в табл.* 4.4, №№ 52, 54, 58, 59. *Тогда по модулю соотношений* 2.3–2.8 *слово α эквивалентно слову $\alpha' = \beta_2\beta_1$, где β_1, β_2 удовлетворяют условиям* (5.1).

Доказательство. Во всех указанных случаях длина соответствующего соотношения равна 12. Как и в предыдущих случаях, заменим $\alpha_{s+1}\alpha_s$ на $\alpha'_{s+9} \dots \alpha'_{s+1}\alpha'_s$ и представим полученное слово α' в виде $\beta_2\beta_1$. Как и раньше, достаточно доказать, что $A'_{s+i} < A_s$, $i = 0, \dots, 8$ так как $A'_{s+9} = A_{s+1} < A_s$.

Случай $\alpha_s = \chi_{1;7;7}(321)$, $\alpha_{s+1} = \chi_{1;6}$, $y^1_s = x^1_s$. Здесь $\alpha'_{s+9} \dots \alpha'_s = = \chi'_{1;7;7} \dots \chi'_{1;6}$ с соответствующими правилами сцепления, как в соотношении 2.8 (xiii). Фундаментальными точками для $\alpha'_s = \chi_{1;6}$ служат точки y^1_{s-1} и $y'^6_{s-1} = \alpha_s^{-1}(y^6_s)$ с $r(y'^6_{s-1}) = r(y^6_s)$. Фундаментальными точками $\alpha'_{s+1} = = \chi'_{1;7;7}(321)$ являются x'^1_s и $y'^7_s = \alpha'_s(y^7_{s-1})$, $r(y'^7_{s-1}) = r(y^7_{s-1})$. Подставляя в неравенство $a_s < 2r(y^6_s) + r(y^1_s)$ выражения через a_{s-1}, $r(y^7_{s-1})$, $r(y^1_{s-1})$, $r(y'^6_{s-1})$, получаем

$$4a_{s-1} < 7r(y^7_{s-1}) + 3r(y^1_{s-1}) + 2r(y'^6_{s-1}).$$

Вычитая отсюда неравенство $3a_{s-1} \geqslant 7r(y^7_{s-1}) + 2r(y^1_{s-1})$, равносильное $a_s \geqslant \geqslant a_{s-1}$, получаем $a_{s-1} < 2r(y'^6_{s-1}) + r(y^1_{s-1})$, что эквивалентно $a'_s < a_{s-1}$.

Для A'_{s+i}, $i = 1, \dots, 8$, неравенства $A'_{s+i} < A_{s-1}$ эквивалентны соответственно неравенствам

$$\begin{aligned}
21a_{s-1} &< 18r(y^1_{s-1}) + 24r(y'^6_{s-1}) + 21r(y^7_{s-1}),\\
36a_{s-1} &< 30r(y^1_{s-1}) + 36r(y'^6_{s-1}) + 42r(y^7_{s-1}),\\
63a_{s-1} &< 51r(y^1_{s-1}) + 54r(y'^6_{s-1}) + 84r(y^7_{s-1}),\\
75a_{s-1} &< 60r(y^1_{s-1}) + 60r(y'^6_{s-1}) + 105r(y^7_{s-1}),\\
84a_{s-1} &< 60r(y^1_{s-1}) + 60r(y'^6_{s-1}) + 126r(y^7_{s-1}),\\
81a_{s-1} &< 63r(y^1_{s-1}) + 54r(y'^6_{s-1}) + 126r(y^7_{s-1}),\\
63a_{s-1} &< 48r(y^1_{s-1}) + 36r(y'^6_{s-1}) + 105r(y^7_{s-1}),\\
48a_{s-1} &< 36r(y^1_{s-1}) + 24r(y'^6_{s-1}) + 84r(y^7_{s-1}).
\end{aligned}$$

Последнее из этих неравенств, деленное на 12, было установлено выше. Второе неравенство, деленное на 6, есть сумма неравенства $4a_{s-1} < 7r(y^7_{s-1}) + 3r(y^1_{s-1}) + 2r(y'^6_{s-1})$ и удвоенного неравенства $a_{s-1} < 2r(y'^6_{s-1}) + r(y^1_{s-1})$. Первое неравенство, деленное на 7, есть сумма неравенства $4a_{s-1} < 7r(y^7_{s-1}) + 3r(y^1_{s-1}) + 2r(y'^6_{s-1})$ и утроенного неравенства $a_{s-1} < 2r(y'^6_{s-1}) + r(y^1_{s-1})$. Третье неравенство, деленное на 7, есть сумма неравенства $4a_{s-1} < 7r(y^7_{s-1}) + 3r(y^1_{s-1}) + 2r(y'^6_{s-1})$, умноженного на 4, и неравенства $a_{s-1} < 2r(y'^6_{s-1}) + r(y^1_{s-1})$, умноженного на 5. Четвертое неравенство, деленное на 15, есть сумма неравенства $4a_{s-1} < 7r(y^7_{s-1}) + 3r(y^1_{s-1}) + 2r(y'^6_{s-1})$ и неравенства $a_{s-1} < 2r(y'^6_{s-1}) + r(y^1_{s-1})$. Пятое неравенство, деленное на 6, есть сумма неравенства $4a_{s-1} < 7r(y^7_{s-1}) + 3r(y^1_{s-1}) + 2r(y'^6_{s-1})$, умноженного на 3, и неравенства $a_{s-1} < 2r(y'^6_{s-1}) + r(y^1_{s-1})$, умноженного на 2. Шестое неравенство, деленное на 9, есть сумма неравенства $4a_{s-1} < 7r(y^7_{s-1}) + 3r(y^1_{s-1}) + 2r(y'^6_{s-1})$, умноженного на 2, и неравенства $a_{s-1} < 2r(y'^6_{s-1}) + r(y^1_{s-1})$. Седьмое неравенство, деленное на 3, есть сумма неравенства $4a_{s-1} < 7r(y^7_{s-1}) + 3r(y^1_{s-1}) + 2r(y'^6_{s-1})$, умноженного на 5, и неравенства $a_{s-1} < 2r(y'^6_{s-1}) + r(y^1_{s-1})$.

Случай $\alpha_s = \chi_{5,1}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{1;6}$, $x^1_s = y^1_s$. Здесь $\alpha'_{s+9} \dots \alpha'_s = \chi'_{5,1} \dots \chi'_{1;6}$ с соответствующими правилами сцепления, как в соотношении 2.8 (xii). Фундаментальными точками для $\alpha'_s = \chi_{1;6}$ служат точки y^1_{s-1} и $y'^6_{s-1} = \alpha_s^{-1}(y^6_s)$ с $r(y'^6_{s-1}) = r(y^6_s)$. Фундаментальными точками $\alpha'_{s+1} = \chi'_{5,1}$ являются x'^1_s и $y'^5_s = \alpha'_s(y^5_{s-1})$, $r(y'^5_s) = r(y^5_{s-1})$. Подставляя в неравенство $a_s < 2r(y^6_s) + r(y^1_s)$ выражения через a_{s-1}, $r(y^5_{s-1})$, $r(y^1_{s-1})$, $r(y'^6_{s-1})$, полученные из матрицы действия $\chi_{5,1}$ на $Z^*(\mathbf{P}^2)$, получаем

$$3a_{s-1} < 5r(y^5_{s-1}) + 2r(y^1_{s-1}) + 2r(y'^6_{s-1}).$$

Вычитая отсюда неравенство $2a_{s-1} \geqslant 5r(y^5_{s-1}) + r(y^1_{s-1})$, равносильное $a_s \geqslant a_{s-1}$, получаем $a_{s-1} < 2r(y'^6_{s-1}) + r(y^1_{s-1})$, что эквивалентно неравенству $a'_s < a_{s-1}$.

Для a'_{s+i}, $i = 1, \dots, 8$, неравенства $a'_{s+i} < a_{s-1}$ равносильны соответственно неравенствам

$$\begin{aligned}
13a_{s-1} &< 11r(y^1_{s-1}) + 18r(y'^6_{s-1}) + 10r(y^5_{s-1}),\\
25a_{s-1} &< 20r(y^1_{s-1}) + 30r(y'^6_{s-1}) + 25r(y^5_{s-1}),\\
39a_{s-1} &< 30r(y^1_{s-1}) + 42r(y'^6_{s-1}) + 45r(y^5_{s-1}),\\
48a_{s-1} &< 36r(y^1_{s-1}) + 48r(y'^6_{s-1}) + 60r(y^5_{s-1}),\\
52a_{s-1} &< 38r(y^1_{s-1}) + 48r(y'^6_{s-1}) + 70r(y^5_{s-1}),\\
49a_{s-1} &< 35r(y^1_{s-1}) + 42r(y'^6_{s-1}) + 70r(y^5_{s-1}),\\
39a_{s-1} &< 27r(y^1_{s-1}) + 30r(y'^6_{s-1}) + 60r(y^5_{s-1}),\\
27a_{s-1} &< 18r(y^1_{s-1}) + 18r(y'^6_{s-1}) + 45r(y^5_{s-1}).
\end{aligned}$$

Последнее из этих неравенств, деленное на 9, было установлено выше. Первое неравенство есть сумма неравенства $3a_{s-1} < 5r(y^5_{s-1}) + 2r(y^1_{s-1}) + 2r(y'^6_{s-1})$, умноженного на 2, и неравенства $a_{s-1} < 2r(y'^6_{s-1}) + r(y^1_{s-1})$, умноженного

на 7. Второе неравенство эквивалентно сумме неравенства $3a_{s-1} < 5r(y^5_{s-1}) + 2r(y^1_{s-1}) + 2r(y'^6_{s-1})$ и удвоенного неравенства $a_{s-1} < 2r(y'^6_{s-1}) + r(y^1_{s-1})$. Третье неравенство, деленное на 3, есть сумма неравенства $3a_{s-1} < 5r(y^5_{s-1}) + 2r(y^1_{s-1}) + 2r(y'^6_{s-1})$, умноженного на 3, и неравенства $a_{s-1} < 2r(y'^6_{s-1}) + r(y^1_{s-1})$, умноженного на 4. Четвертое неравенство, деленное на 12, есть сумма неравенств $3a_{s-1} < 5r(y^5_{s-1}) + 2r(y^1_{s-1}) + 2r(y'^6_{s-1})$, и $a_{s-1} < 2r(y'^6_{s-1}) + r(y^1_{s-1})$. Пятое неравенство, деленное на 2, есть сумма неравенства $3a_{s-1} < 5r(y^5_{s-1}) + 2r(y^1_{s-1}) + 2r(y'^6_{s-1})$, умноженное на 7, с неравенством $a_{s-1} < 2r(y'^6_{s-1}) + r(y^1_{s-1})$, умноженным на 5. Шестое неравенство, деленное на 7, есть сумма удвоенного неравенства $3a_{s-1} < 5r(y^5_{s-1}) + 2r(y^1_{s-1}) + 2r(y'^6_{s-1})$ и неравенства $a_{s-1} < 2r(y'^6_{s-1}) + r(y^1_{s-1})$. И наконец, седьмое неравенство, деленное на 3, есть сумма неравенства $3a_{s-1} < 5r(y^5_{s-1}) + 2r(y^1_{s-1}) + 2r(y'^6_{s-1})$, умноженного на 4, и неравенства $a_{s-1} < 2r(y'^6_{s-1}) + r(y^1_{s-1})$.

Случай $\alpha_s = \chi_3$, $\alpha_{s+1} = \chi_{1;6}$. Здесь $\alpha'_{s+9} \dots \alpha'_s = \chi'_3 \dots \chi'_{1;6}$ с соответствующими правилами сцепления, как в соотношении 2.8 (xi). Фундаментальными точками для $\alpha'_s = \chi'_{1;6}$ служат точки $y'^1_{s-1} = \alpha_s^{-1}(y^1_s)$, $y'^6_{s-1} = \alpha_s^{-1}(y^6_s)$ с $r(y'^1_{s-1}) = r(y^1_s)$, $r(y'^6_{s-1}) = r(y^6_s)$. Фундаментальной точкой $\alpha'_{s+1} = \chi'_3$ является $y'^3_s = \alpha^1_s(y^3_{s-1})$ с $r(y'^3_s) = r(y^3_{s-1})$. Имеем

$$a_{s-1} \leqslant a_s < 2r(y'^6_s) + r(y^1_s) = 2r(y'^6_{s-1}) + r(y'^1_{s-1}).$$

что равносильно неравенству $a'_s < a_{s-1}$.

Для a'_{s+i}, $i = 1, \dots, 8$, неравенства $a'_{s+i} < a_{s-1}$ равносильны соответственно неравенствам

$$\begin{aligned}
&7a_{s-1} < 6r(y'^1_{s-1}) + 12r(y'^6_{s-1}) + 3r(y^3_{s-1}),\\
&16a_{s-1} < 12r(y'^1_{s-1}) + 24r(y'^6_{s-1}) + 12r(y^3_{s-1}),\\
&21a_{s-1} < 15r(y'^1_{s-1}) + 30r(y'^6_{s-1}) + 18r(y^3_{s-1}),\\
&27a_{s-1} < 18r(y'^1_{s-1}) + 36r(y'^6_{s-1}) + 27r(y^3_{s-1}),\\
&28a_{s-1} < 18r(y'^1_{s-1}) + 36r(y'^6_{s-1}) + 30r(y^3_{s-1}),\\
&25a_{s-1} < 15r(y'^1_{s-1}) + 30r(y'^6_{s-1}) + 30r(y^3_{s-1}),\\
&21a_{s-1} < 12r(y'^1_{s-1}) + 24r(y'^6_{s-1}) + 27r(y^3_{s-1}),\\
&12a_{s-1} < 6r(y'^1_{s-1}) + 12r(y'^6_{s-1}) + 18r(y^3_{s-1}).
\end{aligned}$$

Последнее неравенство, деленное на 6, — это в точности неравенство $a_s < 2r(y^6_s) + r(y^1_s)$, выраженное через a_{s-1}, $r(y^3_{s-1})$, $r(y'^1_{s-1})$, $r(y'^6_{s-1})$. Все остальные неравенства есть линейные комбинации неравенств $2a_{s-1} < r(y'^1_{s-1}) + 2r(y'^6_{s-1}) + 3r(y^3_{s-1})$ и $a_{s-1} < 2r(y'^6_{s-1}) + r(y'^1_{s-1})$; обозначим их соответственно (H.1) и (H.2). Тогда первое неравенство эквивалентно (H.1)+5(H.2), второе эквивалентно (H.1)+2(H.2), третье эквивалентно 2(H.1)+3(H.2), четвертое эквивалентно (H.1)+(H.2), пятое эквивалентно 5(H.1)+4(H.2), шестое эквивалентно 2(H.1)+(H.2), седьмое эквивалентно 3(H.1)+(H.2).

Случай $\alpha_s = \chi_{2,1}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{1;6}$, $x^1_s \neq y^1_s$. Этот случай очень похож на предыдущий с заменой y^3_{s-1} на пару y^1_{s-1}, y^2_{s-1}. Здесь $\alpha'_{s+9} \dots \alpha'_s = \chi'_{2,1} \dots \chi'_{1;6}$

с соответствующими правилами сцепления, как в соотношении 2.8 (xvi). Фундаментальными точками $\alpha'_s = \chi'_{1;6}$ служат точки $y'^1_{s-1} = \alpha^1_s(y^1_s)$, $y'^6_{s-1} = \alpha_s^{-1}(y^6_s)$ с $r(y^1_{s-1}) = r(y^1_s)$ и $r(y'^6_{s-1}) = r(y^6_s)$. Фундаментальными точками α'_{s+1} будут точки $y'^1_s = \alpha^1_s(y^1_{s-1})$ и $y'^2_s = \alpha'_s(y^2_{s-1})$, $r(y'^1_s) = r(y^1_{s-1})$, $r(y'^2_s) = r(y^2_{s-1})$. Имеем

$$a_{s-1} \leqslant a_s < 2r(y^6_s) + r(y^1_s) = 2r(y'^6_{s-1}) + r(y'^1_{s-1}),$$

что равносильно $a'_s < a_{s-1}$.

Для a'_{s+i}, $i = 1, \dots, 8$, неравенства $a'_{s+i} < a_{s-1}$ эквивалентны соответственно

$$\begin{aligned}
7a_{s-1} &< 6r(y'^1_{s-1}) + 12r(y'^6_{s-1}) + 2r(y^2_{s-1}) + r(y^1_{s-1}),\\
16a_{s-1} &< 12r(y'^1_{s-1}) + 24r(y'^6_{s-1}) + 8r(y^2_{s-1}) + 4r(y^1_{s-1}),\\
21a_{s-1} &< 15r(y'^1_{s-1}) + 30r(y'^6_{s-1}) + 12r(y^2_{s-1}) + 6r(y^1_{s-1}),\\
27a_{s-1} &< 18r(y'^1_{s-1}) + 36r(y'^6_{s-1}) + 18r(y^2_{s-1}) + 9r(y^1_{s-1}),\\
28a_{s-1} &< 18r(y'^1_{s-1}) + 36r(y'^6_{s-1}) + 20r(y^2_{s-1}) + 10r(y^1_{s-1}),\\
25a_{s-1} &< 15r(y'^1_{s-1}) + 30r(y'^6_{s-1}) + 20r(y^2_{s-1}) + 10r(y^1_{s-1}),\\
21a_{s-1} &< 12r(y'^1_{s-1}) + 24r(y'^6_{s-1}) + 18r(y^2_{s-1}) + 9r(y^1_{s-1}),\\
12a_{s-1} &< 6r(y'^1_{s-1}) + 12r(y'^6_{s-1}) + 18r(y^2_{s-1}) + 9r(y^1_{s-1}).
\end{aligned}$$

Последнее неравенство, деленное на 6, — это в точности неравенство $a_s < 2r(y^6_s) + r(y^1_s)$, выраженное через a_{s-1}, $r(y^2_{s-1})$, $r(y^1_{s-1})$, $r(y'^1_{s-1})$, $r(y'^6_{s-1})$. Остальные неравенства есть линейные комбинации неравенств $2a_{s-1} < r(y'^1_{s-1}) + 2r(y'^6_{s-1}) + 2r(y^2_{s-1}) + r(y^1_{s-1})$ и $a_{s-1} < 2r(y'^6_{s-1}) + r(y'^1_{s-1})$ в точности так же, как в предыдущем случае. □

5.7. Замечание. (i) Редукция случая $\alpha_s = \chi_{2,5,3}$, $\alpha_{s+1} = \chi_{2,5,2}$ к рассмотренному ранее случаю $\chi_{5,2}$, $\chi_{2,5,3}$, приведенная в лемме 5.4, вообще говоря, не нужна, поскольку этот случай рассмотрен в лемме 5.1 с использованием соотношения 2.7, (iii). Поэтому лемму 5.4 можно рассматривать как альтернативный вариант доказательства основной теоремы в этом случае.

(ii) Соотношение 2.7, (vii), использованное в лемме 5.5 при рассмотрении случая $\chi_{2,5,2}$, $\chi_{2,2;5}$, является комбинацией соотношений 2.4, (x), (xi).

§ 6. Окончание доказательства основной теоремы

6.1. В этом параграфе мы рассмотрим оставшиеся возможности для α_s, α_{s+1}, которые связаны, в основном, с преобразованиями типа (1.1). Напомним, что такие преобразования в рассмотренных словах мы разложили в композиции раздутия точки σ_1^{-1} на $\mathbf{P}^2$, элементарных преобразований ε_d линейчатых поверхностей, инволюции τ на квадрике $\mathbf{F}_0 = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, переставляющей множители, и стягивания $\sigma_1 \colon \mathbf{F}_1 \to \mathbf{P}^2$ исключительного сечения на $\mathbf{F}_1$.

Однако по техническим соображениям (см. 6.5–6.8 ниже) некоторые из таких преобразований с фундаментальными точками степени $d \leqslant 7$ нам будет

удобно включить в множество образующих целиком, не раскладывая на элементарные составляющие. А именно, следующие преобразования:

$\chi_{1;2}$, $\chi_{1;4}$, $\chi_{1;6}$ — четный случай,

$\chi_{1;1;1}(321)$, $\chi_{1;3;3}(321)$, $\chi_{1;5;5}(321)$, $\chi_{1;7;7}(321)$ — нечетный случай.

Соответствующие матрицы (в базисах l, y^1, y^d; l, x^1, x^d) для преобразований $\chi_{1;d}$, $d = 2c$ четно, в $\chi_{1;d;d}(321)$, $d = 2c+1$ нечетно, имеет вид

$$\chi_{1;d}, \quad d = 2c\colon \begin{vmatrix} c+1 & c & 2c \\ -c & -(c-1) & -2c \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix},$$

$$\chi_{1;d;d}(321), \quad d = 2c+1\colon \begin{vmatrix} c^2+1 & c(c-1) & c(2c+1) \\ -c(c-1) & -(c-2) & -(c-1)(2c+1) \\ -c & -(c-1) & -2c \end{vmatrix}, \tag{6.1}$$

где $c = 1, 2, 3$.

Сопоставляя эти формулы с формулами п. 1.2, видим, что $\chi_{1;2} = \chi_{2,1}$, $\chi_{1;4} = \chi_{4;1}$, $\chi_{1;3;3}(321) = \chi_3$, $\chi_{1;5;5}(321) = \chi_{5,1}$, $\chi_{1;1;1}(321)$ — проективные преобразования. Следовательно, среди добавленных образующих новыми являются только $\chi_{1;6}, \chi_{1;7;7}(321)$.

Отметим, что в лемме 4.4 перечислены и в § 5 уже рассмотрены все возможные случаи, когда одно из α_s, α_{s+1} есть $\chi_{1;6}$ или $\chi_{1;7;7}(321)$, а другое отличие от σ_1, σ_1^{-1} (понятно, что оно не может быть τ или ε_d). Поэтому нам остается рассмотреть все возможные случаи, когда по крайней мере одно из α_s, α_{s+1} есть σ_1, σ_1^{-1}, ε_d или τ, что и будет сделано ниже.

Опять предстоит рассмотреть несколько возможностей.

6.2. Лемма. *Пусть $\alpha = \alpha_n \dots \alpha_{s+1}\alpha_s \dots \alpha_1$ — специальное расширенное слово. Предположим, что $\alpha_s = \sigma_x$ — стягивание исключительного сечения на $\mathbf{F}_1$ в точку $x \in \mathbf{P}^2$, $\deg x = 1$, $\alpha_{s+1} = \sigma_y^{-1}$ — раздутие точки $y \in \mathbf{P}^2$, $\deg y = 1$. Тогда по модулю соотношений* 2.3–2.8 *слово α эквивалентно $\alpha' = \beta_2\beta_1$, где β_1, β_2 удовлетворяют условиям* (5.1).

Доказательство. Предположим сначала, что $x \neq y$, и пусть для определенности $r(y) \geqslant r(x)$. Пользуясь соотношением 2.8, (i), заменим $\alpha_{s+1}\alpha_s = \sigma_y^{-1}\sigma_x$ на $\alpha'_{s+2}\alpha'_{s+1}\alpha'_s = \varepsilon_{y'}(111)\tau\varepsilon_y$, где $\varepsilon_{y'}, \varepsilon_y$ — элементарные преобразования с центрами в y', y соответственно (y' определено условием сцепления), τ — автоморфизм $\mathbf{F}_0 = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, переставляющий множители. Тогда $A'_s = A_{s-1} \leqslant A_s$, и для доказательства леммы надо проверить, что $B'_s < B_{s-1}$ и что $A'_{s+1} < A_s$ (отметим, что $A'_{s+2} = A'_{s+1}$, так как $\alpha'_{s+2} = \varepsilon_{y'}$ — элементарное преобразование). По формулам 3.2, (iv) имеем $B'_s = B_{s-1} + (A_{s-1} - r(y))$ и по 4.2, (ii) имеем $A_{s+1} = (3A_s - r(y))/2$. Из $A_{s+1} < A_s$ следует, что $r(y) > A_s$, тем более, $r(y) > A_{s-1}$, так что $B'_s < B_s$, что и требовалось установить.

Теперь проверим, что $A'_{s+1} < A_s$. Так как $\alpha'_{s+1} = \tau$, то по 4.2, (v) $A'_{s+1} = A'_s + \dfrac{1}{2}B'_s$. Теперь $A'_s = A_s$, и, выражая в формуле $B'_s = B_{s-1} + (A_{s-1} - r(y))$

члены A_{s+1} и B_{s-1} через A_s и $r(x)$, получаем

$$B'_s = -\frac{3A_s - r(x)}{2} + \Big(\frac{3A_s - r(x)}{2} - r(y)\Big) = r(x) - r(y) \leqslant 0.$$

Следовательно, $A'_{s+1} = A_{s-1} + \frac{1}{2}B'_s \leqslant A_{s-1}$. Если $A_{s-1} < A_s$, то все доказано, если же $A_{s-1} = A_s$, тогда $B'_s = r(x) - r(y) < 0$. Действительно, из $A_{s-1} = A_s$ следует, что $r(x) = A_s$, в то время как $r(y) > A_s$, как мы видели выше. Стало быть, опять $A'_{s+1} < A_s$. В случае, когда $r(y) < r(x)$, имеем $A_{s-1} < A_{s+1} < A_s$. Так что этот случай сводится к рассмотренному при переходе к обратному слову α^{-1}.

Определим β_1 и β_2. Пусть $t < s$ — максимальный индекс такой, что $\alpha_t = \sigma_v^{-1}$ или τ (для точки v степени 1). Положим

$$\beta_1 = \delta\alpha'_s\alpha_t \dots \alpha_1, \quad \beta_2 = \alpha_n \dots \alpha_{s+2}\alpha'_{s+2}\alpha'_{s+1}\alpha_{s-1} \dots \alpha_{t+1}\delta^{-1},$$

где δ составлено из отображений, раскручивающих $\alpha'_s\alpha_t \dots \alpha_1$ как в лемме 3.4.

Предположим теперь, что $x = y$. Тогда $\alpha_{s-1} = \varepsilon_{y^c}$ и $\alpha_{s+2} = \varepsilon_{y^d}$ — элементарные преобразования и $A_{s-1} = A_{s+1} < A_s$. Действительно, так как $x = x_s^1 = y_s^1 = y$, то $r(x_s^1) = r(y_s^1)$. По условию (v) определения 3.3 имеем

$$A_{s+1} = \frac{3A_s - r(y_s^1)}{2} < A_s.$$

С другой стороны,

$$A_{s-1} = \frac{3A_s - r(x_s^1)}{2} = A_{s+1},$$

так как $r(x_s^1) = r(y_s^1)$. Заменяя $\sigma_y^{-1}\sigma_x$ в слове α на бирегулярный автоморфизм $\mathbf{F}_1$ и нормализуя, мы получаем слово α' с $A(\alpha') = A_{s+1} < A(\alpha)$, что и требовалось установить. Лемма доказана. □

6.3. Лемма. *Предположим, что $\alpha \in S$ такое, как одно из преобразований табл. 4.4 (т. е. $\alpha_s \neq \sigma_x$, σ_y^{-1}, ε_d, τ), а $\alpha_{s+1} = \sigma_y^{-1}$ — раздутие точки $y = y'_s$ степени 1. Тогда α представляется в виде $\alpha = \beta_2\beta_1$, где β_i — расширенные специальные слова такие, что*:

(i) $A(\beta_i) \leqslant A(\alpha)$, $i = 1, 2$;

(ii) *в вершине слова β_1 (т. е. элементы с индексом $s(\beta_1)$, $s(\beta_1) + 1$) находятся преобразования из табл. 4.4*;

(iii) *$y = y_s^1$ является одной из базисных точек преобразования $(\beta_2)^{-1}_{s(\beta_2)}$ (т. е. $y_s^1 = x^1_{s(\beta_2)}$) и преобразования $(\beta_2)_{s(\beta_2)+1}$*;

(iv) *если $\alpha \in S'$ и $A(\beta_i) = A(\alpha)$, то β_i также принадлежит S'.*

Доказательство. Из условия $A_s \geqslant A_{s-1}$ следует, что существует точка x_s^d кратности $r(x_s^d) \geqslant A_{s-1}$. Кроме того, в линейной системе $|\alpha(s)(l)|$ есть точка $y_s^1 = y$ кратности $r(y_s^1) > A_s$ в силу $A_{s+1} < A_s$ и леммы 3.2, (ii). В случае, когда $x_s^d = y_s^1$ с $d = 1$, в качестве β_1 можно взять 1, а в качестве β_2 — само α.

Предположим, что $x_s^d \neq y_s^1$. Тогда из леммы 3.2, (i) следует, что $d+1<9$, т. е. $d \leqslant 7$. Пусть $\alpha'_{s+1} = \chi_{1;2c}$, если $d = 2c$ четно, и $\alpha'_{s+1} = \chi_{1;d;d}(321)$, $d = 2c+1$ нечетно, $c = 1, 2, 3$ (см. 6.1). Положим

$$\beta_1 = \delta\alpha'_{s+1}\alpha_s \dots \alpha_1, \quad \beta_2 = \alpha_n \dots \alpha_{s+1}\alpha'^{-1}_{s+1}\delta^{-1},$$

здесь $\delta = \delta_r \dots \delta_1$, как обычно, отображение, раскручивающее $\alpha'_{s+1}\alpha_s \dots \alpha_1$. По лемме 4.2 имеем $A'_{s+1} < A_s$, так что β_1 — специальное расширенное слово с $A(\beta_1) = A(\alpha)$ и оба преобразования в вершине, α_s и α'_{s+1}, из табл. 4.4. Кроме того, β_1 будет очень специальным одновременно с α. Слово β_2 также является расширенным и специальным с $A(\beta_2) = A(\alpha)$, в вершине которого находятся преобразования α'^{-1}_{s+1} и α_{s+1}, причем $\alpha'_{s+1} = (\alpha'^{-1}_{s+1})^{-1}$ и α_{s+1} имеют общую фундаментальную точку $y_s^1 = y$ степени 1. Очевидно также (эквивалентно $A'_{s+1} < A_s$), что β_2 очень специальное. Доказательство закончено. □

6.4. Лемма. *Пусть $\alpha \in S$, $\alpha_s = \chi_{1;2c}$ или $\chi_{1;2c+1;2c+1}(321)$, $c = 1, 2, 3$, а $\alpha_{s+1} = \sigma^{-1}_{y_s^1}$ — раздутие точки y_s^1 степени 1, причем $x_s^1 = y_s^1$. Тогда слово α эквивалентно слову α' такому, что $A(\alpha') < A(\alpha)$ при $\alpha \in S'$ и $\alpha' = \beta_2\beta_1$, где $A(\beta_1) = A(\alpha)$, $\beta_1 \in S'$, $A(\beta_2) < A(\alpha)$ при $\alpha \in S \setminus S'$.*

Доказательство. Рассмотрим два случая:

a) $\alpha_s = \chi_{1;d}$, $d = 2c$;

b) $\alpha_s = \chi_{1;d;d}(321)$, $d = 2c+1$.

Разложим α_s стандартным образом в композицию:

a) $\alpha_s = \chi_{1;d} = \alpha'_{s+2}\alpha'_{s+1}\alpha'_s = \sigma_{x_s^1}\varepsilon_{y_{s-1}^d}\sigma_{y_{s-1}^1}$;

b) $\alpha_s = \chi_{1;d;d}(321) = \alpha'_{s+4}\alpha'_{s+3}\alpha'_{s+2}\alpha'_{s+1}\alpha'_s = \sigma_{x_s^1}\varepsilon_d(112)\tau\varepsilon_d\sigma_{y_{s-1}^1}$.

Подставим далее соответствующие композиции в α. По условию $y_s^1 = x_s^1$, т. е. $\alpha_{s+1}\alpha'_{s+2} = 1$ в случае a) и $\alpha_{s+1}\alpha'_{s+4} = 1$ в случае b). Произведя это сокращение, получим слово α'.

Случай a) Имеем $A'_{s+1} = A_{s+1} < A_s$; $A'_s = A'_{s+1}$, поскольку α'_{s+1} — элементарное преобразование. Таким образом, $A(\alpha') = \max(A_{s-1}, A_{s+1})$. При $\alpha \in S'$ отсюда следует, что $A(\alpha') < A(\alpha)$. Если $\alpha \in S \setminus S'$, то $A(\alpha') = A_{s-1} = A(\alpha)$. Записывая в этом случае $\alpha'' = \beta_2\beta_1$, где $\beta_1 = \delta\alpha'_s\alpha_{s-1} \dots \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_n \dots \alpha_{s+2}\alpha_{s+1}\delta^{-1}$ (δ, как обычно, раскручивающее отображение), получаем $\beta_1 \in S'$, $A(\beta_1) = A(\alpha)$, $A(\beta_2) = A_{s+1} < A(\alpha)$.

Случай b) Вычислим A'_{s+i} через A_s, $r(x_s^1)$, $r(x_s^d)$, используя формулы из леммы 3.2, (ii)–(v):

$$A'_{s+3} = A_{s+1} < A_s, \quad A'_{s+3} = \frac{3}{2}A_s - \frac{1}{2}r(x_s^1),$$

откуда $r(x_s^1) > A_s$,

$$A_{s+2} = A'_{s+3},$$

поскольку $\alpha_{s+2} = \varepsilon_d$,

$$A'_{s+1} = \frac{3}{4}(d+1)A_s - \frac{d-1}{4}r(x_s^1) - \frac{d}{2}r(x_s^d), \quad A'_s = A'_{s+1},$$

поскольку $\alpha'_{s+1} = \varepsilon_d$.

Неравенство $A'_{s+1} < A_s$ эквивалентно

$$(3d-1)A_s < (d-1)r(x_s^1) + 2dr(x_s^d),$$

которое есть сумма $(3d-3)A_s \leqslant (d-3)r(x_s^1) + 2dr(x_s^d)$, эквивалентного $A_{s-1} \leqslant \leqslant A_s$ по лемме 4.2, и $2A_s < 2r(x_s^1)$. Таким образом, $A(\alpha') = \max(A_{s-1}, A'_{s+1}, A_{s+1})$, причем $A'_{s+1} < A_s$. Откуда для $\alpha \in S \setminus S'$ имеем $A(\alpha') < A(\alpha)$. Для $\alpha \in S \setminus S'$ поступаем аналогично предыдущему случаю: $\alpha' = \beta_2\beta_1$, где $\beta_1 = \delta\alpha'_s\alpha_{s-1}\ldots\alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_n\ldots\alpha_{s+2}\alpha'_{s+3}\alpha'_{s+2}\alpha'_{s+1}\delta^{-1}$ (δ — раскручивающее отображение). При этом $\beta_1 \in S'$ ($A_{s-1} = A_s > A'_{s+1}$, $A_{s-1} > A_{s+1}$), $A(\beta_1) = A(\alpha)$, $A(\beta_2) = \max(A'_{s+1}, A_{s+1}) < A(\alpha)$. □

6.5. Лемма. *Предположим, что $\alpha_s = \varepsilon_d$ — элементарное преобразование с центром y_{s-1}^d, а $\alpha_{s+1} = \tau$ — автоморфизм $\mathbf{F}_0 \simeq \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, переставляющий множители. Тогда по модулю соотношений* 2.3–2.8 *слово α эквивалентно или $\alpha' = \beta_2\beta_1$, где $A(\beta_1) < A(\alpha)$ и $A(\beta_2) < A(\alpha)$, или α' с $A(\alpha') < A(\alpha)$.*

Доказательство. По 3.3, (viii) α_{s-1} не может быть элементарным преобразованием, стало быть $\alpha_{s-1} = \sigma_y^{-1}$ или τ, где $y = y_{s-2}^1$ — точка степени 1 на $\mathbf{P}^2$. Из $A_{s-2} < A_{s-1}$ и леммы 3.2, (ii), (v) следует, что $B_{s-1} < 0$; кроме того из $A_{s+1} < A_s$ и 3.2, (v) следует, что $B_s < 0$. Вычисляя B_s с помощью 3.2, (iv), находим

$$B_s = B_{s-1} + d(A_{s-1} - r(y_{s-1}^d)) < 0.$$

Вычитая последнее неравенство из последнего неравенства в 3.2, (i), находим

$$(8-d)A_{s-1} + B_{s-1} > 0,$$

что при $B_{s-1} < 0$ и $d \geqslant 8$ невозможно.

Теперь рассмотрим несколько случаев.

Случай $\alpha_{s-1} = \sigma_y^{-1}$ — раздутие точки $y = y_{s-2}^1 \in \mathbf{P}^2$. Здесь элементарное преобразование α_s действует из $\mathbf{F}_1$ в $\mathbf{F}_0$, так как $\alpha_{s+1} = \tau$ — преобразование на $\mathbf{F}_0$; следовательно, $d = 2c+1 \leqslant 7$ нечетно. Используя формулы (3.2), (ii), (iiii), запишем условие $B_s < 0$ через A_{s-2}, $r(y_{s-2}^1)$, $r(y_{s-1}^d)$:

$$B_s = \frac{3(d-1)}{2}A_{s-2} - \frac{d-3}{2}r(y_{s-2}^1) - dr(y_{s-1}^d) < 0.$$

Полученное неравенство совпадает с неравенствами $9, 5, 24$ леммы 4.2 при $d = 3$, 5, 7 и с неравенством $r(y_{s-2}^1) < r(y_{s-1}^1)$ при $d = 1$. Это позволяет воспользоваться стандартным приемом:

Пусть $\alpha'_{s+2} = \varepsilon_d$ — элементарное преобразование с центром в $y'^d_{s+1} = \alpha_{s+1}(x_s^d)$, действующее из $\mathbf{F}_0$ в $\mathbf{F}_1$, а $\alpha'_{s+3} = \sigma_{x'_{s+2}}$ — стягивание исключительного сечения $\mathbf{F}_1 \to \mathbf{P}^2$. Обозначим

$$\alpha'_{s-1} := \alpha'_{s+3}\alpha'_{s+2}\alpha_{s+1}\alpha_s\alpha_{s-1} = \chi_{1;d;d}(321)$$

с фундаментальными точками $y'^1_{s-2} = y_{s-2}^1$, $y'^d_{s-2} = \alpha_{s-1}^{-1}(y_{s-1}^d)$. Положим теперь

$$\beta_1 = \delta\alpha'_{s-1}\alpha_{s-2}\ldots\alpha_1, \quad \beta_2 = \alpha_n\ldots\alpha_{s+2}\alpha'^{-1}_{s+2}\alpha'^{-1}_{s+3}\delta^{-1}.$$

Тогда при $d > 1$ $A(\beta_1) = \max\{A'_{s-1}, A_{s-2}\} < A_{s-1}$ (неравенство $A'_{s-2} < A_{s-1}$ эквивалентно по лемме 4.2 неравенству, полученному выше). Для слова β_2 имеем $A(\beta_2) = \max(A_{s+1}, A'_{s-1}) < A_s$.

При $d = 1$ имеем вследствие соотношения 2.8, (i) $\alpha'_{s-1} = 1$. Слово α эквивалентно $\alpha' = \alpha_n \dots \alpha_{s+2}\alpha'^{-1}_{s+2}\alpha'^{-1}_{s+3}\alpha_{s-2}\dots\alpha_1$. При этом α'^{-1}_{s+3} является раздутием точки $z^1_{s-1} = \alpha^1_{s-1}(y^1_{s-1})$, а α'^{-1}_{s+2} — элементарное преобразование с центром в $z^1_s = \alpha'^{-1}_{s+3}(y^1_{s-2})$. Ввиду полученного выше $r(y^1_{s-1}) = r(z^1_{s-1}) > r(y^1_{s-2})$; имеем по формулам леммы 3.2, (ii) $A(\alpha'^{-1}_{s+3}\dots\alpha_1) < A_{s-1}$ и $A(\alpha'^{-1}_{s+2}\alpha'^{-1}_{s+3}\dots\alpha_1) = A(\alpha'^{-1}_{s+3}\dots\alpha_1)$; $A(\alpha_{s+2}\alpha'^{-1}_{s+2}\dots\alpha_1) = A_{s+2}$; откуда, полагая $\beta_1 = \delta\alpha'^{-1}_{s+3}\dots\alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_n\dots\alpha'^{-1}_{s+2}\delta^{-1}$, получаем требуемое представление $\alpha' = \beta_2\beta_1$.

С л у ч а й $\alpha_{s-1} = \tau$, $\alpha_s = \varepsilon_2$ (ср. [8, § 6]). Пользуясь соотношением 2.8, (ii)$'$ заменим $\alpha_{s+1}\alpha_s = \tau\varepsilon_2$ на $\alpha'_{s+3}\alpha'_{s+2}\alpha'_{s+1}\alpha'_s = \varepsilon_2(112)\tau\varepsilon_2\tau$, где $\alpha'_{s+1} = \varepsilon_2$ имеет фундаментальной точкой $y'^2_s = \tau(y^2_{s-1})$. Полученное слово обозначим через α'.

Мы хотим проверить, что $A'_{s+i} < A_{s-1}$ для $i = 0, 1, 2, 3$. Пользуясь формулами леммы 3.2, (iv), (v), вычислим A'_s, A_{s-1}, B_s:

$$A'_s = A_{s-2} \text{ (ввиду того, что } \alpha'_s\alpha_{s-1} = 1);$$
$$B'_s = B_{s-2} > 0 \text{ (эквивалентно } A_{s-1} > A_{s-2});$$
$$A'_{s+1} = A_{s-2};\ A'_{s+2} = 2A_{s-2} + \frac{1}{2}B_{s-2} - r(y^2_{s-1});$$
$$A'_{s+3} = A'_{s+2};\ A_{s-1} = A_{s-2} + \frac{1}{2}B_{s-2};\ B_s = 2A_{s-2} - 2r(y^2_{s-1}).$$

Откуда видно, что $A'_s < A_{s-1}$ (поскольку $A_{s-2} < A_{s-1}$) и $A'_{s+2} < A_{s-1} \iff A_{s-2} < r(y^2_{s-1})$. Последнее неравенство эквивалентно $B_s < 0$, что является следствием определения 3.3. Легко понять, что остальные коэффициенты A' слова α' совпадают с соответствующими коэффициентами $A_1, \dots, A_{s-2}$, $A_{s+1}, \dots$ слова α, откуда следует утверждение леммы $A(\alpha') < A(\alpha)$.

С л у ч а й $\alpha_{s-1} = \tau$, $\alpha_s = \varepsilon_4$. Пользуясь соотношением 2.8, (iii)$'$ заменим $\alpha_{s+1}\alpha_s = \tau\varepsilon_4$ в слове α на $\alpha'_{s+3}\alpha'_{s+4}\dots\alpha'_s = \varepsilon_4(114)\tau\varepsilon_4(112)\tau\varepsilon_4\tau$, где фундаментальная точка α'_{s+1} есть $y'_s = \tau(y^4_{s-1})$. Полученное слово обозначим через α'.

Мы хотим проверить, что $A'_{s+i} < A_s$, $i = 0, \dots, 5$. Вычисления с помощью формул леммы 3.3, (iv), (v) дают:

$$A'_s = A_{s-2} < A_s;\ B'_s = B_{s-2} > 0 \text{ (ввиду } A_{s-1} > A_{s-2});$$
$$A'_{s+1} = A_{s-2};\ A'_{s+2} = 3A_{s-2} + \frac{1}{2}B_{s-2} - 2r(y^4_{s-1});$$
$$A'_{s+3} = A'_{s+2};\ A'_{s+4} = 3A_{s-2} + B_{s-2} - 2r(y^4_{s-1});$$
$$A'_{s+5} = A'_{s+4};\ A_{s-1} = A_{s-2} + \frac{1}{2}B_{s-2}.$$

Откуда находим, что

$$A'_{s+2} < A_{s-1} \Leftrightarrow A_{s-2} < (y^4_{s-1});$$
$$A_{s+4} < A_{s-1} \Leftrightarrow A_{s-2} + \frac{1}{4}B_{s-2} < (y^4_{s-1}).$$

Заметим теперь, что первое неравенство есть следствие второго ($B_{s-2} > 0$), а второе эквивалентно $B_s < 0$ (см. определение 3.3 специального слова):

$$B_s = 4A_{s-2} + B_{s-2} - 4r(y^4_{s-1}) < 0.$$

Остальные коэффициенты A_j для α' равны соответствующим коэффициентам для α. Таким образом, доказано, что $A(\alpha') < A(\alpha)$ (a priori α' не обязано получиться специальным словом).

Случай $\alpha_{s-1} = \tau$, $\alpha_s = \varepsilon_6$. Используя соотношение 2.8, (iv)$'$, заменим $\alpha_{s+1}\alpha_s = \tau\varepsilon_6$ в слове α на $\alpha'_{s+9}\dots\alpha'_s = \varepsilon_6(118)\tau\varepsilon_6(116)\tau\dots\varepsilon_6\tau$, где фундаментальной точкой $\alpha'_{s+9} = \tau_6$ служит $y'^6_s = \tau(y^6_{s-1})$. Полученное слово обозначим через α'. Как и в предыдущих случаях, покажем, что $A'_{s+i} < A_{s-1}$, $i = 0,\dots,9$. Опять пользуясь формулами леммы 3.2, (iv), (v), вычисляем A'_{s+i}, A_{s-1} и B_s:

$$A'_s = A_{s-2} < A_s;\ B'_s = B_{s-2} > 0 \text{ (эквивалентно } A_{s-1} > A_{s-2}):$$
$$A'_{s+1} = A_{s-2};\ A'_{s+2} = 4A_{s-2} + \frac{1}{2}B_{s-2} - 3r(y^6_{s-1});$$
$$A'_{s+3} = A'_{s+2};\ A'_{s+4} = 7A_{s-2} + \frac{3}{2}B_{s-2} - 6r(y^6_{s-1});$$
$$A'_{s+5} = A'_{s+4};\ A'_{s+6} = 7A_{s-2} + 2B_{s-2} - 6r(y^6_{s-1});$$
$$A'_{s+7} = A'_{s+6};\ A'_{s+8} = 4A_{s-2} + \frac{3}{2}B_{s-2} - 3r(y^6_{s-1});$$
$$A'_{s+9} = A'_{s+8};\ A'_{s-1} = A_{s-2} + \frac{1}{2}B_{s-2};\ B_s = 6A_{s-2} + 2B_{s-2} - 6r(y^6_{s-1}).$$

Откуда находим, что

$$A'_{s+2} < A_{s-1} \iff A_{s-2} < r(y^6_{s-1});$$
$$A'_{s+4} < A_{s-1} \iff A_{s-2} + \frac{1}{6}B_{s-2} < r(y^6_{s-1});$$
$$A'_{s+6} < A_{s-1} \iff A_{s-2} + \frac{1}{4}B_{s-2} < r(y^6_{s-1});$$
$$A'_{s+8} < A_{s-1} \iff A_{s-2} + \frac{1}{3}B_{s-2} < r(y^6_{s-1}).$$

Как видим, первые три неравенства — следствия четвертого ввиду того, что $B_{s-2} > 0$. Четвертое неравенство эквивалентно $B_s < 0$; $B_s < 0$ — следствие определения 3.3. Лемма доказана. □

6.6. Лемма. *Пусть $\alpha_s = \varepsilon_d$ — элементарное преобразование с центром в точке y^d_{s-1}, $\alpha_{s+1} = \sigma_x$ — стягивание исключительного сечения; тогда по модулю соотношений* 2.3–2.8 *α эквивалентно α' с $A(\alpha') < A(\alpha)$.*

Доказательство. Для α_{s-1} имеются две возможности σ_y^{-1} — раздутие точки $y = y^1_{s-2}$ или τ. В любом случае, как и выше, $d \leqslant 7$. Действительно, $B_s = B_{s-1} + d(A_{s-1} - r(y^d_{s-1}))$ по 3.2, (iv). Далее, $B_s < 0$ ($\iff A_{s+1} < A_s$) и $B_s < 0$ ($\iff A_{s-2} < A_{s-1}$). Теперь из $8A_{s-1} + 2B_{s-1} > dr(y^d_{s-1})$ (лемма 3.2, (i)), $B_{s-1} + dA_{s-1} < dr(y^d_{s-1})$, $B_{s-1} < 0$ находим $d \leqslant 7$.

Если $\alpha_{s-1} = \sigma_y^{-1}$, то α_s действует из $\mathbf{F}_1$ в $\mathbf{F}_1$ и, следовательно, $d = 2c$ четно. Заменим $\alpha_{s+1}\alpha_s\alpha_{s-1} = \sigma_x\varepsilon_d\sigma_y^{-1}$ на $\alpha'_s = \chi_{1;2c}$, $c = 1,2,3$; в результате для $\alpha' = \alpha_n\dots\alpha_{s+2}\alpha'_s\alpha_{s-2}\dots\alpha_1$ имеем $A(\alpha') = \max\{A_{s-2}, A_{s+1}\} < A(\alpha)$.

Если $\alpha_{s-1} = \tau$, то $d = 2c+1$ нечетно, и этот случай сводится к случаю $\alpha_s = \varepsilon_d$, $\alpha_{s+1} = \tau$, рассмотренному в предыдущей лемме, обычным приемом перехода к обратному слову α^{-1}. Лемма доказана. □

Нам осталось рассмотреть два случая: $\alpha_s = \sigma_y^{-1}$ или τ, а α_{s+1} — элементарное преобразование. Как показано в следствии определения 3.3, в такой ситуации для $\alpha \in S$ всегда $B_s = 0$, $A_{s-1} = A_s$ и $\alpha \notin S'$. Понятно, что аналогично

рассмотренным в § 5 случаям разбор слов, не являющихся очень специальными, и очень специальных слов проводится одинаково (то, что оставшиеся два случая оказались выделенными, в каком-то смысле является недостатком определения специального слова).

Один случай мы все же разберем подробно.

6.7. Лемма. *Пусть $\alpha \in S$, $\alpha_s = \sigma_y^{-1}$ — раздутие точки $y = y_{s-1}^1$, а $\alpha_{s+2} = \varepsilon_d$ — элементарное преобразование с центром в точке y_s^d. Тогда по модулю соотношений из* 2.3–2.8 *слово α эквивалентно $\alpha' = \beta_2\beta_1$, где $\beta_1 \in S'$, $A(\beta_1) = A(\alpha)$ и $A(\beta_2) < A(\alpha)$.*

Доказательство. Имеем $B_s = 0$, $B_{s+1} < B_s$ (по 3.3, (vi)), $B_{s+1} = B_s + d(A_s - r(y_s^d))$, откуда $B_{s+1} < 0$ и $r(y_s^d) > A_s$. Кроме того, из 3.2, (i) вытекает, что $d \leqslant 7$.

Предположим сначала, что d четно. Образ α_{s+1} в этом случае — поверхность $\mathbf{F}_1$. Условие 3.3, (vii) вместе с $B_{s+1} < 0$ гарантирует, что α_{s+2} не является элементарным преобразованием. Поэтому $\alpha_{s+2} = \sigma_x$ — стягивание исключительного сечения $\mathbf{F}_1$ в точку $x = x_{s+2}^1$. Положим $\alpha'_s = \chi_{1;d} = \alpha_{s+2}\alpha_{s+1}\alpha_s$ и, заменяя в α подслово $\alpha_{s+2}\alpha_{s+1}\alpha_s$ на α'_s, получим слово α'. Имеем $A'_s = A_{s+2} < A_s = A_{s-1}$. Откуда $A(\alpha') = A_{s-1} = A(\alpha)$, однако $\alpha' \in S'$. Можно положить $\beta_1 = \alpha'$, $\beta_2 = 1$.

Рассмотрим теперь случай нечетного d. Из $B_{s+1} < B_s = 0$ следует, что α_{s+2} не является элементарным преобразованием. Кроме того, образ α_{s+1} — поверхность $\mathbf{F}_0$, откуда $\alpha_{s+2} = \tau$.

Обозначим через $\alpha'_{s+3} = \varepsilon_d$ элементарное преобразование в точке $y'_{s+2} = \tau(x_{s+1}^d)$ (после применения α_{s+2}), а через $\alpha'_{s+4} = \sigma_{x'}$ — стягивание исключительного сечения на поверхности $\mathbf{F}_1$, образе α'_{s+3}. Положим

$$\alpha'_s = \chi_{1;d;d}(321) = \alpha'_{s+4}\alpha'_{s+3}\alpha_{s+2}\alpha_{s+1}\alpha_s = \sigma_{x'}\varepsilon_d(112)\tau\varepsilon_d\sigma_y^{-1}$$

и заменим в слове α $\alpha_{s+2}\alpha_{s+1}\alpha_s$ на $\alpha'^{-1}_{s+3}\alpha'^{-1}_{s+4}\alpha'_s$. Полученное слово α' представляется в виде $\alpha' = \beta_2\beta_1$, где $\beta_1 = \delta\alpha'_s\alpha_{s-1}\ldots\alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_n\ldots\alpha_{s+3}\alpha'^{-1}_{s+3}\alpha'^{-1}_{s+4}\times\delta^{-1}$ (δ, как обычно, раскручивающее отображение). Проверим, что $A'_s < A_s$.

В случае $d = 3, 5, 7$, записывая неравенство $B_{s+1} < 0$ через B_{s-1}, $r(y_{s-1}^1)$, $r(y_s^d)$, получаем

$$3(d-1)A_{s-1} < (d-3)r(y_{s-1}^1) + 2dr(y_s^d).$$

Это неравенство совпадает с неравенствами $9, 5, 24$ леммы 4.2, откуда и следует $A'_s < A_s$. Таким образом $\beta_1 \in S'$ и $A(\beta_1) = A(\alpha)$. В случае $d = 1$ α'_s — бирегулярное отображение. Нормализуя β_1, получаем $A_s(\beta_1) < A_s(\alpha)$, поскольку $(\beta_1)_s = \delta_1$ и $\delta_r\ldots\delta_1$ — композиция раскручивающих преобразований (здесь имелось в виду $s = s(\alpha)$). Что касается β_2, то $A(\beta_2) = \max(A_{s+1}, A'_s) < A(\alpha)$. Лемма доказана (ср. с леммой 6.6 в случае четного d и с леммой 6.5, случай $\alpha_{s-1} = \sigma^{-1}$ для нечетного d). □

6.8. Лемма. *Пусть $\alpha \in S$, $\alpha_s = \tau$, $\alpha_{s+1} = \varepsilon_d$. Тогда по модулю соотношений из* 2.3–2.8 *слово α эквивалентно $\alpha' = \beta_3\beta_2\beta_1$, где $\beta_1, \beta_2 \in S'$, $A(\beta_1) = A(\alpha)$, $A(\beta_2) = A(\alpha)$, $A(\beta_3) < A(\alpha)$. (Напомним, что $\alpha \notin S'$.)*

Доказательство. Как в предыдущей лемме, $B_s = 0$, $B_{s+1} < 0$ и $d \leqslant 7$, кроме того, $B_{s-1} = 0$ ($\Longleftrightarrow B_s = 0$), отсюда, используя 3.3, (iv), (vii), получаем, что α_{s-1} — элементарное преобразование, а α_{s-2} и α_{s+2} элементарными преобразованиями не являются.

Пусть сначала d нечетно. В этом случае $\alpha_{s+2} = \sigma_x$ — стягивание исключительного сечения поверхности $\mathbf{F}_1$ в точку x^1_{s+2}. Обозначим через $\alpha'_s = \varepsilon'_d$ элементарное преобразование в точке $y'^d_{s-1} = \alpha_s^{-1}(y^d_s)$. Ввиду того что $B_{s+1} < 0$, $r(y^d_s) > A_s = A_{s-1}$, поэтому $B'_s < B_{s-1} = 0$ и образ α'_s — поверхность $\mathbf{F}_1$. Стягивание исключительного сечения этой поверхности обозначим через α'_{s+1}.

Представим α в виде $\alpha = \beta_2\beta_1$, где $\beta_1 = \delta'\alpha'_s\alpha_{s-2}\ldots\alpha_1$, $\beta_2 = \delta''\alpha'_{s+1}\alpha_{s-1}\delta'^{-1}$, $\beta'_3 = \alpha_n\ldots\alpha_s\alpha_s'^{-1}\alpha_{s+1}'^{-1}\delta''^{-1}$. Имеем $\beta_1 \in S'$ и $A(\beta_1) = A_{s-2} = A(\alpha)$ (поскольку $A_{s-2} = A_{s-1} = A - s$). Слово β_2 также очень специальное (и $A(\beta_2) = A(\alpha)$); это следует из того, что δ' — композиция раскручивающих отображений, и того, что $B(\alpha'_s\alpha_{s-1}\ldots\alpha_1) := B'_s < 0$. В слове β'_3 заменим $\alpha_{s+2}\alpha_{s+1}\alpha_s\alpha_s'^{-1}\alpha_{s+1}'^{-1}$ на $\alpha_{s+2}'^{-1} := \chi_{1;d;d}(321) = \alpha_{s+2}\alpha_{s+1}\alpha_s\alpha_s'^{-1}\alpha_{s+1}'^{-1}$ ($\alpha_s'^{-1}$ и α_{s+1} сцеплены по построению). Далее, $A(\alpha'_{s+2}\delta''^{-1}) = A_{s+2} < A(\alpha)$ и $A(\delta''^{-1}) = A(\alpha'_{s+1}\alpha_{s-1}\ldots\alpha_1) < A(\alpha)$ (проверено выше), т. е. $A(\beta_3) < A(\alpha)$.

Перейдем к случаю, когда d четно. В частности, $\alpha_{s+2} = \tau$. Доказательство в этом случае почти дословно повторяет доказательство в лемме 6.5 для $\alpha_{s-1} = \tau$, $\alpha_s = \varepsilon_d$ и $\alpha_{s+1} = \tau$ со сдвигом индексов на единицу $i \to i+1$. Отличие в формулировках лемм — разложение $\alpha' = \beta_3\beta_2\beta_1$ и $\alpha' = \beta_2\beta_1$ — объясняется тем, что в лемме 6.5 мы не требовали специальности слова β_1, поскольку могли добиться $A(\beta_1) < A(\alpha)$.

В случае же настоящей леммы мы, действуя как в 6.5, можем получить $\alpha' = \beta_3\beta'_1$, при этом $A(\beta_3) < A(\alpha)$, $A(\beta'_1) = A(\alpha)$ и β'_1 таково, что при любом $(\beta'_1)_i$, отличном от элементарного преобразования, коэффициент A либо строго убывает, либо строго возрастает, т. е. $A_i > A_{i-1}$ или $A_i < A_{i-1}$. Далее надо воспользоваться алгоритмом леммы 3.4 и получить $\beta'_1 = \beta_2\beta_1$ с $\beta_i \in S'$ и $A(\beta_i) = A(\beta'_1)$. Лемма доказана. □

Литература

[1] Гизатуллин М. Х. Определяющие соотношения для кремоновой группы плоскости // Известия АН СССР. Сер. матем. — 1982. — Т. 46, № 5. — С. 909–970.

[2] Hudson H. P. Cremona transformation in plane and space. — Cambridge: CUP, 1927.

[3] Исковских В. А. Образующие в двумерной группе Кремоны над незамкнутым полем // Труды МИРАН. — 1991. — Т. 200. — С. 157–170.

[4] Исковских В. А. Простое доказательство теоремы Гизатуллина о соотношениях в двумерной группе Кремоны // Труды МИАН СССР. — 1990. — Т. 183. — С. 111–116.

[5] Исковских В. А. Доказательство теоремы о соотношениях в двумерной группе Кремоны // УМН. — 1985. — Т. 40, № 5(245). — С. 255–256.

[6] Исковских В. А. Рациональные поверхности с пучком рациональ-

ных кривых и с положительным квадратом канонического класса // Матем. сб. — 1967. — Т. 83(125), № 1. — С. 90–119.

[7] Исковских В. А. Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Т. 12. — М: ВИНИТИ, 1979. — С. 159–235.

[8] Исковских В. А., Трегуб С. Л. О бирациональных автоморфизмах рациональных поверхностей // Известия АН СССР. Сер. матем. — 1991. — Т. 55, № 2. — С. 254–281.

[9] Кабдыкаиров Ф. К. О соотношениях в двумерной группе Кремоны над незамкнутым полем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. I. — 1991. — № 3. — С. 16–21.

[10] Кабдыкаиров Ф. К. О соотношениях в двумерной группе Кремоны над незамкнутым полем. II // Вестн. Моск. ун-та. Сер. I. — 1991. — № 4. — С. 81–83.

[11] Kantor S. Rational Zerlegung der birationalen Transformationen in ihre Primfaktoren // Monatsh. Math. and Phys. — 1899. — Bd. 10, № 1. — S. 54–74.

[12] Манин Ю. И. Рациональные поверхности над совершенными полями. II // Матем. сб. — 1967. — Т. 72(114), № 2. — С. 161–192.

[13] Манин Ю. И. Кубические формы. — М.: Наука, 1972.

[14] Iskovskikh V. A., Tregub S. L. Relations in Cremona's two-dimensional group over non-closed field // Number theory and analysis / Ed. A. A. Karatsuba. Proceedings of International Conference to 100th anniversary of I. M. Vinogradov. — Intern. Center Math. Moscow, 1992. — P. 117–153.

Факторизация бирациональных отображений рациональных поверхностей с точки зрения теории Мори

К 60-летию Ю. И. Манина

Введение

0.1. В этой статье мы передоказываем результаты о факторизации бирациональных отображений между минимальными рациональными поверхностями над совершенными полями в контексте теории Мори. В терминах образующих и соотношений в группах бирациональных автоморфизмов эти результаты были получены в ряде работ (см., например, [14, 15, 18], обзор [19] и ссылки в этих статьях), в основном, с целью решения проблемы рациональности таких поверхностей над основным полем и обобщения на трехмерный случай [7].

Проблема факторизации бирациональных отображений в классической постановке заключается в разложении кремоновых преобразований, т. е. бирациональных отображений проективных пространств $\mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$, на элементарные составляющие. При этом речь идет о существенно бирациональных отображениях, т. е. отображениях с непустыми множествами неопределенностей, и задача изучается с точностью до изоморфизма. Хотя этой проблеме было посвящено огромное количество работ, начиная с середины прошлого столетия, удовлетворительное решение было получено только в двумерном случае. Знаменитая теорема М. Нётера утверждает, что всякое бирациональное отображение $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ над алгебраически замкнутым полем раскладывается в композицию квадратичных (бирациональных) и линейных отображений, или, если рассматривать вопрос с точностью до изоморфизма (т. е. линейных проективных преобразований), состоит из итераций одного «стандартного» квадратичного отображения

$$(x, y) \to \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right),$$

УМН. — 1996. — Т. 51, № 4(310). — С. 3–72.

где x, y — неоднородные (аффинные) координаты $\mathbb{P}^2$, и линейных отображений.

Техническим средством для доказательства этого результата служит классическая теория линейных систем с предписанными базисными условиями и основным инградиентом — неравенство Нётера: сумма трех максимальных кратностей базисных точек линейной системы, задающей отображение $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$, больше степени этой линейной системы (т. е. степени ее общей кривой).

Эта теория легко обобщается на случай поверхностей, определенных над любыми совершенными полями (см., например, [18, гл. V]), и уже в классических работах использовалась для доказательства аналога теоремы Нётера для бирациональных отображений $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ (см. [25]) и для доказательства нерациональности над основным (алгебраически незамкнутым) полем некоторых классов рациональных поверхностей (см., например, [18, 31]). Конечно, при этом проблема факторизации рассматривается более широко, т. е. для любых бирациональных отображений между рациональными многообразиями и близкими к ним.

0.2. Прямое обобщение теории в высшие размерности даже над алгебраически замкнутыми полями в классических исследованиях не привело к существенным законченным результатам (см., например, [22–24], [31]), хотя на этом пути удалось доказать некоторые теоремы о нерациональности (см. [7, 13, 20]), и здесь тоже основным инградиентом в доказательстве является неравенство Нётера–Фано, обобщающее неравенство Нётера.

Идея привлечения теории Мори экстремальных стягиваний к изучению проблемы факторизации бирациональных отображений была высказана впервые В. Саркисовым [27] и развита затем М. Ридом [30] и А. Корти [21]. Такой подход к проблеме М. Рид назвал программой Саркисова. Объектами изучения являются бирациональные отображения $X \dashrightarrow X'$ между $\mathbb{Q}$-Фано расслоенными пространствами $\varphi\colon X \to S$ и $\varphi'\colon X' \to S'$ (не сохраняющими, вообще говоря, структуру расслоения), где X, X' — проективные многообразия с не более чем $\mathbb{Q}$-факториальными терминальными особенностями и φ, φ' — экстремальные стягивания Мори расслоенного типа.

В терминах теории минимальных моделей Мори определяются элементарные бирациональные отображения, так называемые элементарные линки. Используя основные теоремы теории минимальных моделей в размерности $\leqslant 3$, А. Корти [21] доказывает анонсированную В. Саркисовым [27] теорему о том, что для 3-мерных $\mathbb{Q}$-Фано расслоенных пространств всякое бирациональное отображение раскладывается в композицию конечного числа элементарных линков.

0.3. В случае рациональных поверхностей над совершенным полем $\mathbb{Q}$-Фано расслоенные пространства $\varphi\colon X \to S$ — это в точности относительно минимальные модели из семейств $\{\mathbb{D}\}$ и $\{\mathbb{C}\}$, определяемых в § 1, где $S = \operatorname{Spec} k$ — точка для поверхностей из семейства $\{\mathbb{D}\}$ и S — гладкая проективная рациональная кривая над k (т. е. либо $\mathbb{P}^1$, либо плоская коника $C \subset \mathbb{P}^2$, не имеющая k-точек) для поверхностей из семейства $\{\mathbb{C}\}$.

Как уже было сказано, бирациональные k-отображения между ними описаны. Здесь мы передокажем все эти результаты с единой новой точки зрения теории Мори. Хотя новый формализм и не прибавляет результатов, он дает идейно прозрачное понимание процесса факторизации, полезное для обобщения в высшие размерности. Мы будем существенно использовать также и старый формализм, особенно при конструкциях элементарных линков и описаний соотношений между ними. В комментариях даны сравнения двух языков.

0.4. В § 1 мы напоминаем основные определения и некоторые результаты из теории рациональных поверхностей над произвольным совершенным полем k, в частности, теорему об описании минимальных моделей. Приводим краткое описание классической теории линейных систем с предписанными базисными условиями, напоминаем доказательство неравенства Нётера в контексте этой теории, выписываем основные численные бирациональные инварианты: индекс самопересечения и арифметический род. В качестве первых следствий теории доказываем теорему о бирациональной жесткости некоторых классов рациональных поверхностей над основным совершенным полем.

В § 2 обсуждаются проблемы факторизации бирациональных отображений между минимальными рациональными поверхностями из семейств $\{\mathbb{D}\}$ и $\{\mathbb{C}\}$ в терминах теории Мори. Передоказывается неравенство Нётера в новых терминах, определяются элементарные бирациональные отображения–линки и доказывается теорема (теорема 2.5) о разложении бирациональных отображений между рациональными поверхностями из семейств $\{\mathbb{D}\}$ и $\{\mathbb{C}\}$ в композиции элементарных линков. Далее приводится классификация элементарных линков (образующих) для всех классов минимальных рациональных поверхностей (теорема 2.6).

Соотношения между элементарными линками изучаются в §§ 3–5.

В § 3 доказывается лемма о том, что всякое соотношение между элементарными линками раскладывается в произведение специальных. Затем в качестве иллюстрации дальнейших общих результатов о соотношениях между элементарными линками для бирациональных отображений между рациональными поверхностями из семейств $\{\mathbb{D}\}$ и $\{\mathbb{C}\}$ рассматривается частный (с классической точки зрения, наиболее интересный) случай бирациональных (кремоновых) отображений $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ над алгебраически замкнутым полем $k = \overline{k}$ (теорема 3.5).

В § 4 описываются соотношения для разложений бирациональных отображений на элементарные линки для всех классов бирационально нетривиальных над k (т. е. бирационально не эквивалентных над k плоскости $\mathbb{P}^2$) классов рациональных поверхностей.

Пятый параграф посвящен изучению соотношений для разложения кремоновых отображений $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ над произвольным совершенным полем. Ранее эти результаты в несколько ином контексте получены в [15].

0.5. Эта статья написана на основе курса лекций по бирациональным автоморфизмам рациональных поверхностей над произвольным совершенным полем, которые автор читал в Пизанском университете на семинаре Ф. Ка-

танезе в сентябре–ноябре 1993 г. Я искренне благодарен участникам этого семинара и особенно Фабрицио Катанезе за гостеприимство, полезные критические замечания и исключительное терпение.

§ 1. Обсуждение проблемы, описание формализма и первоначальные результаты

1.1. Напомним, что гладкая проективная поверхность X над полем k называется *минимальной над* k (в классическом смысле), если любой бирациональный морфизм $f\colon X \to Y$ на гладкую проективную поверхность Y над k является изоморфизмом. С точностью до изоморфизма минимальные рациональные поверхности над совершенным полем k исчерпываются следующими двумя семействами (см. [6], а также [26]):

$\{\mathbb{D}\}$ поверхности дель Пеццо X с $\operatorname{Pic} X = \mathbb{Z}$; это семейство поверхностей с группой Пикара, порожденной антиканоническим классом $-K_X$ степени $\deg X := (-K_X)^2 = 1, 2, \dots, 6, 8$, и 9, а также $X = \mathbb{P}^2$, $\operatorname{Pic}\mathbb{P}^2 = \frac{1}{3}\mathbb{Z}(-K_{\mathbb{P}^2})$, и $X = Q \subset \mathbb{P}^3$ — неособой квадрикой, $\operatorname{Pic} Q = \frac{1}{2}\mathbb{Z}(-K_Q)$;

$\{\mathbb{C}\}$ расслоения на коники $\pi\colon X \to C$ над гладкой рациональной кривой C над k с $\operatorname{Pic} X = \pi^* \operatorname{Pic} C + \mathbb{Z}$; $K_X^2 = 8 - \sum \deg t_i$, $\{t_i\} \subset C$ — множество всех замкнутых точек вырождения морфизма π (т. е. $\sum \deg t_i$ — число геометрических вырожденных слоев морфизма π).

Отметим, что если для поверхности X из семейства $\{\mathbb{C}\}$ морфизм π имеет сечение, то $X \to C$ является $\mathbb{P}^1$-расслоением над C; если π имеет хотя бы один вырожденный слой X_t, $t \in C$, т. е. неприводимый над полем вычетов $k(t)$, но распадающиеся на две пересекающиеся (-1)-кривые над подходящим квадратичным расширением, то π не имеет сечений, и в таком случае $\operatorname{Pic} X = \pi^* \operatorname{Pic} C + \mathbb{Z}(-K_X)$.

Если морфизм $\pi\colon X \to C$ гладкий (т. е. $\overline{X} = X \otimes \overline{k} \to C \otimes \overline{k} \cong \mathbb{P}^1$ является $\mathbb{P}^1$-расслоением над алгебраическим замыканием $\overline{k}$ поля k, т. е. $\overline{X}$ — геометрически линейчатая поверхность над $\mathbb{P}^1_{\overline{k}}$), то либо $\pi\colon X \to C$ является $\mathbb{P}^1$-расслоением уже над k, либо $X \cong C \times C'$, где C' — кривая рода нуль (возможно, не имеющая k-точек). Действительно, если $X \ncong C \times C'$, то $\overline{X} \cong \mathbb{F}_n$, $n \geqslant 1$, и исключительное сечение ввиду его единственности определено над k, стало быть, $\pi\colon X \to C$ является $\mathbb{P}^1$-расслоением.

В случае, когда $k = \overline{k}$ алгебраически замкнуто, семейство $\{\mathbb{D}\}$ состоит из одной единственной поверхности $\mathbb{P}^2$, и семейство $\{\mathbb{C}\}$ — из геометрически линейчатых рациональных поверхностей $\mathbb{F}_n$, $n = 0, 1, \dots$ Поскольку все эти поверхности бирационально эквивалентны $\mathbb{P}^2$, то вопрос о бирациональных отображениях между ними сводится к изучению кремоновых преобразований $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ (см. § 5).

Теперь, следуя [18], напомним основные положения классической теории линейных систем с предписанными базисными условиями на гладких проективных поверхностях над совершенными полями.

1.2. Пусть X, X' — гладкие проективные поверхности над совершенным полем k и $\chi\colon X \dashrightarrow X'$ — бирациональное отображение. Пусть

$$\begin{tikzcd}
X_N \arrow[d, "\sigma_{N,N-1}"'] \arrow[ddddrr, "\psi"] & & \\
X_{N-1} \arrow[d, "\sigma_{N,N-2}"'] & & \\
\vdots \arrow[d, "\sigma_{2,1}"'] & & \\
X_1 \arrow[d, "\sigma_{1,0}"'] & & \\
X_0 \cong X \arrow[rr, dashed] & & X'
\end{tikzcd} \tag{1.2.1}$$

есть диаграмма разрешения неопределенностей отображения χ, где $\sigma_{i+1,i}\colon X_{i+1} \to X_i$ — раздутие замкнутой точки $x_i \in X_i$ (точки неопределенности отображения χ), ψ — бирациональный морфизм, $E_{i+1} = \sigma_{i+1,i}^{-1}(x_i) \subset X_{i+1}$ — исключительный дивизор морфизма $\sigma_{i+1,i}$, $\sigma_{i,j} := \sigma_{j+1,j} \circ \ldots \circ \sigma_{i,i-1}\colon X_i \to X_j$, $i > j$, $\sigma := \sigma_{1,0} \circ \ldots \circ \sigma_{N,N-1}\colon X_N \to X_0 = X$, $i, j = 0, \ldots, N$. Пусть $\mathcal{H}'$ — подвижная линейная система дивизоров на X' (т. е. $\dim \mathcal{H}' \geqslant 1$), не имеющая неподвижных компонент, и $\mathcal{H} = \chi^{-1}(\mathcal{H}')$ — собственный прообраз ее на X. Если $H' \in \mathcal{H}'$ — общий дивизор и H — собственный прообраз его на X, то $H \in \mathcal{H}$, $\mathcal{H}$ не имеет неподвижных компонент и $\dim \mathcal{H} = \dim \mathcal{H}'$, линейные системы $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}'$ не обязаны быть полными, и $\mathcal{H}'$ является собственным образом $\mathcal{H}$.

Изучение бирациональных отображений в классической теории основано на бирациональных свойствах присоединенных линейных систем $\mathcal{H} + m\mathcal{K}_X$, ($\mathcal{K}_X$ — каноническая линейная система), в частности, на свойстве обрыва присоединения $\mathcal{H} + m\mathcal{K}_X = \varnothing$ при $m \gg 0$. Из бирациональной инвариантности условия обрыва присоединения выводится неравенство Нётера в следующей общей форме. В предыдущих условиях будем обозначать через $\mathcal{H}_X$, $\mathcal{H}_{X'}$, $\mathcal{H}_{X_i}$ собственные образы линейной системы $\mathcal{H}$ на соответствующих многообразиях.

В группе $\operatorname{Pic} X_N$ имеем:

$$\begin{aligned} H_{X_N} &= \sigma^* H_X - \sum_{i=0}^{N-1} r(x_i)\sigma_{N,i+1}^*(E_{i+1}), \\ K_{X_N} &= \sigma^* K_X + \sum \sigma_{N,i+1}^*(E_{i+1}), \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

где $r(x_i)$ — кратность базисных точек x_i в линейной системе $\mathcal{H}_X$.

1.3. Лемма (неравенство Нётера: общая форма).

(i) *В обозначениях п.* 1.2 *пусть* $\mathcal{H}_{X'} + m\mathcal{K}_{X'} = \varnothing$ *для некоторого целого* $m \geqslant 1$, *тогда либо существует «максимальная особенность», т. е. базисная*

точка x_i кратности $r(x_i) > m$, либо присоединенная линейная система $\mathcal{H}_X + m\mathcal{K}_X$ пуста на X.

(ii) (Численный вариант). *В предыдущих условиях пусть линейная система $\mathcal{H}_{X'} + m\mathcal{K}_{X'}$ существенно численно не эффективна, т. е. существует подвижное семейство кривых $\mathcal{C}'$ на X такое, что $(\mathcal{H}_{X'} + m\mathcal{K}_{X'})\mathcal{C}' < 0$, тогда либо существует максимальная особенность, либо линейная система $\mathcal{H}_X + m\mathcal{K}_X$ численно не эффективна, т. е. существует кривая $C \subset X$ такая, что $(\mathcal{H}_X + m\mathcal{K}_X)C < 0$.*

Доказательство. В диаграмме (1.2.1), используя (1.2.2), имеем:

$$H_{X_N} + mK_{X_N} = \sigma^*(H_X + mK_X) + \sum (m - r(x_i))\sigma^*_{N,i+1}(E_{i+1}). \qquad (1.2.3)$$

Рассматривая это равенство в группе $\operatorname{Pic} X_N$, применим к обеим частям ψ_*:

$$\begin{array}{c} \psi_*(H_{X_N} + mK_{X_N}) = \psi_*\sigma^*(H_X + mK_X) + \psi_*\Big(\sum (m - r(x_i))\sigma^*_{N,i+1}(E_{i+1})\Big). \\ \| \\ H_{X'} + mK_{X'} \end{array}$$

Так как по предположению $\mathcal{H}_{X'} + m\mathcal{K}_{X'} = \varnothing$, то правая часть последнего равенства не может быть эффективным дивизором, т. е. либо $r(x_i) > m$ по крайней мере для одного i, либо $\mathcal{H}_X + m\mathcal{K}_X = \varnothing$. Это доказывает (i). Для доказательства (ii) заметим, что $(H_{X_N} + mK_{X_N})\psi^*\mathcal{C}' = (H_{X'} + mK_{X'})\mathcal{C}' < 0$, так как $\psi^*(H_{X'} + mK_{X'}) = (H_{X_N} + mK_{X_N}) + F$, где дивизор F составлен из исключительных дивизоров для морфизма ψ, и, значит, $F - \psi^*\mathcal{C}' = 0$. Теперь, если $r(x_i) \leqslant m \ \ \forall\, i = 0, \ldots, N-1$, то, умножая обе части равенства (1.2.3) на $\psi^*\mathcal{C}$, получаем $\sigma^*(H_X + mK_X)\psi^*\mathcal{C}' < 0$. Отсюда $(H_X + mK_X)\sigma_*\psi^*\mathcal{C}' < 0$. Так как общая кривая из семейства $\sigma_*\psi^*\mathcal{C}'$ может быть приводима, то по крайней мере для одной из ее неприводимых компонент C имеем $(H_X + mK_X)C < 0$, что и утверждалось. □

Замечание. В утверждении (ii) число m можно считать любым рациональным или даже вещественным положительным и равенство в (1.2.3) понимать как численную эквивалентность. Пусть, например, $\chi\colon \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ — кремоново преобразование, $\mathcal{H}' = |l|$ — полная линейная система прямых, $\mathcal{H} = \left| nl - \sum\limits_{i=0}^{N-1} r(x_i)x_i \right|$, и $m = \dfrac{n}{3}$. Если $n > 1$, т. е. χ — не изоморфизм, то условия леммы 1.3 (ii) выполнены, линейная система $\mathcal{H} + m\mathcal{K}_{\mathbb{P}^2} \equiv 0$ численно эффективна и, стало быть, существует максимальная особенность x_i с $r(x_i) > n/3$. Поскольку любое бирациональное отображение неособых поверхностей над совершенным полем раскладывается в композицию неособых раздутий и стягиваний и для любого такого раздутия или стягивания легко вычисляется поведение индексов пересечения дивизоров, в частности, с каноническим классом, то в терминах теории пересечений и кратностей базисных точек вычисляются два основных бирациональных инварианта для линейных систем без неподвижных компонент: индекс самопересечения и арифметический род. Пусть

$\sigma\colon X' \to X$ — раздутие замкнутой точки $x \in X$ степени $\deg x = d$, D — эффективный дивизор на X, имеющий кратность $r(x) = r$ в точке x, $D' = \sigma_{\text{соб}}^{-1}(D)$ — собственный прообраз дивизора D на X' и $E = \sigma^{-1}(x)$ — исключительный дивизор (так что $\sigma^*(D) = D' + r(x)E$), тогда

$$(D' \cdot D') = (D \cdot D) - dr^2, \quad p_a(D') = p_a(D) - d\frac{r(r-1)}{2}\,.$$

В условиях и обозначениях п. 1.2 отсюда мы немедленно получаем следующие численные бирациональные инварианты: предположим, что линейная система $\mathcal{H}'$ в диаграмме (1.2.1) не имеет базисных точек, $H' \in \mathcal{H}'$ — общий дивизор и $H = \chi^{-1}(H') \in \mathcal{H}$ — его собственный прообраз, тогда

$$\begin{gathered} H'^2 = H^2 - \sum_{i=0}^{N-1} \deg x_i r(x_i)^2, \\ p_a(H') = p_a(H) - \sum_{i=0}^{N-1} \deg x_i \frac{r(x_i)(r(x_i)-1)}{2}\,. \end{gathered} \tag{1.3.1}$$

Вычитая из удвоенного второго равенства первое, получаем равносильную систему равенств:

$$\begin{gathered} H'^2 = H^2 - \sum \deg x_i r(x_i)^2, \\ K_{X'}H' = K_X H - \sum \deg x_i r(x_i). \end{gathered} \tag{1.3.2}$$

Бирациональная инвариантность понимается здесь в том смысле, что бирациональными образами линейных систем являются их собственные образы вместе со всеми базисными условиями (базисными точками, включая и бесконечно близкие, с соответствующими кратностями); иначе говоря, линейные системы, точнее их классы, рассматриваются как элементы так называемой предельной группы Пикара, порожденной обычной группой Пикара поверхности X, ее замкнутыми точками и всеми бесконечно близкими точками, т. е. замкнутыми точками всех поверхностей X', обладающих бирациональным морфизмом $X' \to X$ (с естественными отождествлениями). Соответствующий строгий формализм описан в литературе и мы, следуя [18, гл. V], отметим некоторые основные его положения.

1.4. Для всякой гладкой проективной поверхности X над совершенным полем k определена предельная группа циклов $Z^*(X)$ следующим образом. Пусть $\{f\colon Y \to X\}$ — множество всех бирациональных k-морфизмов, где Y — гладкая проективная поверхность над k, тогда $Z^*(X) = \varinjlim \operatorname{Pic} Y$, где предел берется по всем инъективным гомоморфизмам $f^*\colon \operatorname{Pic} X \to \operatorname{Pic} Y$. Группа $Z^*(X)$ играет роль группы Пикара поля рациональных функций $k(X)$ на X. Она обладает следующими структурами:

(a) $\exists$ симметрическое билинейное спаривание, задаваемое индексом пересечения:

$$Z^*(X) \times Z^*(X) \to \mathbb{Z};$$

(b) $\exists$ выделенный конус эффективных циклов:

$$Z^*_+(X) = \varinjlim \operatorname{Pic}_+ Y,$$

где $\operatorname{Pic}_+ Y$ обозначает конус эффективных классов дивизоров на Y;

(c) $\exists$ двойственный конус численно эффективных циклов:

$$Z^{*+}(X) = \bigl\{z \in Z^*(X) \mid z - z' \geqslant 0 \text{ для всех } z' \in Z^*_+(X)\bigr\};$$

(d) $\exists$ выделенный гомоморфизм $K\colon Z^*(X) \to \mathbb{Z}$, задаваемый на каждом $\operatorname{Pic} Y \subset Z^*(X)$ пересечением с каноническим классом K_Y:

$$K(z) = K_Y \cdot z \qquad \forall\, z \in \operatorname{Pic} Y.$$

Группа $Z^*(X)$ вместе со структурами (a)–(d) является основным бирациональным инвариантом X (см. [18, гл. V]).

Для того чтобы можно было фактически работать с предыдущим формальным определением, вводится так называемое пространство Римана–Зарисского $E(X)$, точками которого являются замкнутые точки X и замкнутые точки всех поверхностей Y, бирационально доминирующих X (т. е. обладающих бирациональным морфизмом $f\colon Y \to X$) с естественными отождествлениями (см. [18, гл. V], а также [33, Добавление к гл. 2]). Иными словами, $E(X)$ — это множество всех возможных базисных точек линейных систем на X, как точек на самой поверхности X, так и бесконечно близких к ним.

Пусть $Z^0(X)$ обозначает абелеву группу, порожденную точками пространства $E(X)$. Тогда существует изоморфизм $Z^*(X) \cong \operatorname{Pic} X \oplus Z^0(X)$ и всякое бирациональное отображение $\chi\colon X \dashrightarrow X'$ индуцирует изоморфизмы:

$$\begin{tikzcd}
Z^*(X) \arrow[r, "\chi_*", "\sim"'] \arrow[d, equal] & Z^*(X') \arrow[d, equal] \\
\operatorname{Pic} X \oplus Z^0(X) \arrow[d, equal] & \operatorname{Pic} X' \oplus Z^0(X') \arrow[d, equal] \\
Z^*(X) & Z^*(X'). \arrow[l, "\chi_*", "\sim"']
\end{tikzcd} \tag{1.4.1}$$

Эти изоморфизмы (собственный образ и собственный прообраз) не сохраняют, конечно, разложение в прямую сумму, если χ не изоморфизм. Каждый элемент $z \in Z^*(X)$ записывается в виде

$$z = D - \sum r(x_i)x_i, \quad D \in \operatorname{Pic} X, \quad x_i \in E(X), \quad r(x_i) \in \mathbb{Z}.$$

Индекс пересечения (a) задается формулами:

$D_1 \cdot D_2$ — обычное пересечение дивизоров, если $D_1, D_2 \in \operatorname{Pic} X$;

$D \cdot x = 0$, если $D \in \operatorname{Pic} X$, $x \in E(X)$;

$x \cdot x = -\deg x$, если $x \in E(X)$;

$x \cdot y = 0$, если $x, y \in E(X)$, $x \neq y$;

$K(D) = K_X \cdot D$, если $D \in \operatorname{Pic} X$;

$K(x) = -\deg x$, если $x \in E(X)$.

На множестве $E(X)$ имеется отношение частичного порядка: $x_1 < x_2$, если $x_1 \neq x_2$ и точка x_1 является бесконечно близкой к точке x_2, $x_1, x_2 \in E(X)$. Это означает, что существуют поверхности X_1, X_2 с бирациональными морфизмами $f_i\colon X_i \to X$ такие, что $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ и соответствующее бирациональное отображение $f_2^{-1} \cdot f_1\colon X_1 \dashrightarrow X_2$ регулярно в точке x_1 и переводит x_1 в x_2, т. е. x_1 лежит на исключительном дивизоре отображения $f_2^{-1} \cdot f_1$.

Отметим некоторые свойства численно эффективных циклов. Предположим, что $D \in \operatorname{Pic} X$, $x_i \in E(X)$, $r(x_i) \in \mathbb{Z}$, такие, что $D - \sum r(x_i)x_i \in Z^{*+}(X)$, тогда

(i) $D \in \operatorname{Pic}^+ X$, т. е. D численно эффективен;

(ii) $r(x_i) \geqslant 0$;

(iii) $r(x_i) \geqslant r(x_j)$, если $x_i > x_j$ (в смысле частичного порядка на $E(X)$).

1.5. Примеры. (i) Пусть $\chi\colon \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ — кремоново преобразование проективной плоскости над (совершенным) полем k, $l \in \operatorname{Pic} \mathbb{P}^2 = \mathbb{Z}$ — класс прямой. Тогда в предыдущих обозначениях отображению χ сопоставляется элемент $z = z(\chi) \in Z^*(\mathbb{P}^2)$ — собственный прообраз элемента l:

$$z = \chi^{-1}(l) = al - \sum r(x_i)x_i,$$

где $a \in \mathbb{Z}$, $a \geqslant 1$, $x_i \in E(\mathbb{P}^2)$, $r(x_i)$ — кратности базисных точек x_i (включая и бесконечно близкие) в линейной системе $\mathcal{H} = \chi^{-1}(|l|)$, являющейся собственным прообразом линейной системы прямых $\mathcal{L} = |l|$ на $\mathbb{P}^2$. Отображение χ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $a = 1$. Если $a > 1$, то по лемме 1.3 существует максимальная особенность $x_i \in E(\mathbb{P}^2)$ кратности $r(x_i) > a/3$. По свойству (iii) из предыдущего пункта можно считать, что точка x_i не бесконечно близкая, т. е. лежит на $\mathbb{P}^2$ (так как кратности не возрастают при разрешениях с помощью σ-процессов). Соотношения (1.3.2) принимают здесь следующий вид:

$$\begin{aligned} l^2 = z^2 = a^2 - \sum \deg x_i r(x_i)^2 = 1, \\ K_{\mathbb{P}^2} l = -3a + \sum \deg x_i r(x_i) = -3. \end{aligned} \tag{1.5.1}$$

Пусть $\{x_j\}$ — множество всех максимальных особенностей для z, тогда из (1.5.1) немедленно получаем оценку

$$\sum_j \deg x_j < 9. \tag{1.5.2}$$

(ii) Пусть X — поверхность дель Пеццо из семейства $\{\mathbb{D}\}$ с $\operatorname{Pic} X = \mathbb{Z}$, X' — одна из относительно минимальных поверхностей из семейств $\{\mathbb{D}\}$ или $\{\mathbb{C}\}$.

$\mathcal{H}'$ — линейная система, класс которой порождает группу $\operatorname{Pic} X'$, если X' — поверхность из семейства $\{\mathbb{D}\}$, и пучок коник, если X' — поверхность из семейства $\{\mathbb{C}\}$. Пусть $\chi\colon X \dashrightarrow X'$ — бирациональное отображение, $\mathcal{H} = \chi^{-1}(\mathcal{H}')$ — собственный прообраз линейной системы $\mathcal{H}'$, $z = -aK_X - \sum r(x_i)x_i$ есть ее класс в группе $Z^*(X)$, $a \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \cup \frac{1}{3}\mathbb{Z}$. По лемме 1.3, если χ — не изоморфизм, то существует максимальная особенность $x_i \in E(X)$ кратности $r(x_i) > a$, если $a > 1$, в случае $\operatorname{Pic} X' = \mathbb{Z}(-K_{X'})$, и $a \geqslant 1$ в остальных случаях. Соотношения (1.3.2) переписываются здесь в виде

$$z^2 = a^2K_X^2 - \sum \deg x_i r(x_i)^2 = \begin{cases} K_{X'}^2, & \text{если} \quad \operatorname{Pic} X' = \mathbb{Z}(-K_{X'}); \\ 1, & \text{если} \quad X' \cong \mathbb{P}^2; \\ 2, & \text{если} \quad X' \cong Q \subset \mathbb{P}^3 \text{ — квадрика}; \\ 0, & \text{если} \quad X' \in \{\mathbb{C}\}; \end{cases}$$

$$K(z) = -aK_X^2 + \sum \deg x_i r(x_i) = \begin{cases} -K_{X'}^2, & \text{если} \quad \operatorname{Pic} X' = \mathbb{Z}(-K_{X'}); \\ -3, & \text{если} \quad X' = \mathbb{P}^2; \\ -4, & \text{если} \quad X' = Q \subset \mathbb{P}^3 \text{ — квадрика}; \\ -2, & \text{если} \quad X' \in \{\mathbb{C}\}. \end{cases} \tag{1.5.3}$$

Пусть множество $\{x_j\}$ — множество всех максимальных особенностей, тогда из (1.5.3) немедленно получаем оценку

$$\sum_j \deg x_j < K_X^2 - \frac{1}{a^2}\mathcal{H}'^2 \leqslant 9. \tag{1.5.4}$$

(iii) Пусть теперь $X \in \{\mathbb{C}\}$, $X' \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$, линейная система $\mathcal{H}'$ как в предыдущем примере, $\chi\colon X \dashrightarrow X'$ — бирациональное отображение, а $\mathcal{H} = \chi^{-1}(\mathcal{H}')$ — собственный прообраз линейной системы и

$$z = -aK_X + bf - \sum r(x_i)x_i$$

есть ее класс в группе $Z^*(X)$, где f — класс геометрического слоя морфизма $\pi\colon X \to C$, $b \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $a \geqslant 0$, $a \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, если $\pi\colon X \to C$ является $\mathbb{P}^1$-расслоением, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ в противном случае. По лемме 1.3 при $a > 0$ либо существует максимальная особенность x_i с $r(x_i) > a$ (в случае $\operatorname{Pic} X' = \mathbb{Z}(-K_{X'})$ предполагается $a > 1$), либо $b < 0$. Отметим, что в том случае, когда $a > 0$ и $b < 0$, антиканонический класс $-K_X$ необходимо должен быть обильным. Действительно, линейная система $\mathcal{H}$ подвижна и не имеет неподвижных компонент, и $\mathcal{H} \sim -aK_X + bf$, следовательно, $\mathcal{H}^2 = 4ab + a^2K_X^2 > 0$. Отсюда $K_X^2 \geqslant -4b > 0$, $-K_X f = 2$ и $-K_X D = a^{-1}(-aK_X + bf)D - ba^{-1}(f \cdot D) > 0$ для любого эффективного дивизора $D \neq f$. Следовательно, по численному критерию $-K_X$ обилен.

Пусть $\{x_j\}$ — множество всех максимальных особенностей (т. е. $r(x_j) > a$), тогда из соотношений (1.3.2) получаем оценку

$$\sum_j \deg x_j < K_X^2 + 2\frac{b}{a} + \frac{1}{a} K_{X'}\mathcal{H}'. \tag{1.5.5}$$

Ясно, что неравенства (1.5.2), (1.5.4) и (1.5.5) не зависят от выбора подвижной без неподвижных компонент линейной системы $\mathcal{H}'$ на X' во всех трех примерах, а правые части формул (1.5.3) — это $\mathcal{H}'^2$ и $K_{X'}\mathcal{H}'$, соответственно. Оценки для сумм степеней максимальных особенностей будут неоднократно использоваться в дальнейшем, особенно при изучении соотношений. Более того, очевидно, эти неравенства со знаком «$\leqslant$» дают оценку сумм степеней всех особенностей с кратностями $r(x_j) \geqslant a$.

Вот первые выводы из предыдущих рассмотрений.

1.6. Теорема. (i) *Пусть X — поверхность из семейства $\{\mathbb{D}\}$ степени $d = K_X^2 = 1$ и $\chi\colon X' \dashrightarrow X$ — бирациональное отображение на любую поверхность $X' \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$. Тогда X' так же, как и X, — поверхность дель Пеццо степени 1 и χ — изоморфизм.*

(ii) *Пусть $\chi\colon X \dashrightarrow X'$ — бирациональное отображение, где $X \in \{\mathbb{D}\}$ и $X' \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$. Предположим, что X не имеет замкнутых точек x степени $\deg x < d = K_X^2$. Тогда χ — изоморфизм.*

(iii) *Пусть $\chi\colon X \dashrightarrow X'$ — бирациональное отображение, где $X \in \{\mathbb{C}\}$ и $X' \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$. Предположим, что $d = K_X^2 \leqslant 0$, тогда $X' \in \{\mathbb{C}\}$, $K_{X'}^2 = K_X^2$ и χ переводит пучок коник на X в пучок коник на X', т. е. следующая диаграмма коммутативна*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "\chi"] \arrow[d, "\pi"'] & X' \arrow[d, "\pi'"] \\ C \arrow[r, "\varphi", "\sim"'] & C', \end{tikzcd}$$

где φ — некоторый изоморфизм над k.

Доказательство. Утверждения (i) и (ii) следуют из рассуждений примера 1.5 (ii), в частности, из неравенства (1.5.4). В дополнительном рассмотрении нуждается только случай, когда $X' \in \{\mathbb{D}\}$, $\operatorname{Pic} X' = \mathbb{Z}(-K_{X'})$ и $a = 1$, т. е. $\mathcal{H} \subset \left|-K_X\right|$ (в обозначениях 1.5 (ii)). Так как по теореме Римана–Роха $\dim\left|-K_X\right| = K_X^2$ и $\dim \mathcal{H} = \dim \mathcal{H}' = \dim\left|-K_{X'}\right| = K_{x'}^2 = d'$. Соотношения (1.3.2) здесь принимают вид:

$$d - \sum \deg x_i r(x_i)^2 = d', \quad d - \sum \deg x_i r(x_i) \ = d'.$$

Отсюда, $r(x_i) = 0$ или $1 \ \ \forall i$ и в случае $d = 1$ имеем $r(x_i) = 0 \ \forall i$, $d' = 1$, т. е. χ переводит обильную линейную систему $\left|-K_X\right|$ в обильную $|-K_{X'}|$. Следовательно, χ индуцирует изоморфизм антиканонических колец и, стало быть, χ — изоморфизм. Это доказывает утверждение (i). Аналогично, по условию утверждения (ii), $\deg x_i \geqslant d \ \ \forall i$, так что опять $r(x_i) = 0 \ \ \forall i$ и, следовательно, χ — изоморфизм.

Для доказательства утверждения (iii) воспользуемся рассуждениями из примера 1.5 (iii). В обозначениях этого примера равенства (1.3.2) принимают здесь следующий вид:

$$\begin{aligned} a^2K_X^2 + 4ab - \sum \deg x_i r(x_i)^2 &= H'^2, \\ -aK_X^2 - 2b + \sum \deg x_i r(x_i) &= K_{X'}H'. \end{aligned} \tag{1.6.2}$$

Так как $H \cdot f = (-aK_X + bf)f = 2a$, то $r(x_i) \leqslant 2a \quad \forall\, i$. Поэтому из первого равенства (1.6.2) получаем

$$a^2K_X^2 + 4ab - 2a\sum \deg x_i r(x_i) \leqslant H'^2.$$

Из второго равенства $\sum \deg x_i r(x_i) = aK_X^2 + 2b + K_{X'}H'$, следовательно,

$$a^2K_X^2 + 4ab - 2a(aK_X^2 + 2b + K_{X'}H') \leqslant H'^2.$$

Отсюда при $a > 0$ находим

$$K_X^2 \geqslant \begin{cases} \dfrac{2a-1}{a^2}K_{X'}^2, & \text{если} \quad \operatorname{Pic} X' = \mathbb{Z}(-K_{X'}); \\ \dfrac{ba-1}{a^2}, & \text{если} \quad X' = \mathbb{P}^2; \\ \dfrac{2(4a-1)}{a^2}, & \text{если} \quad X' = Q \subset \mathbb{P}^3; \\ \dfrac{4}{a}, & \text{если} \quad X' \in \{\mathbb{C}\}. \end{cases} \tag{1.6.3}$$

По предположению $K_X^2 \leqslant 0$, следовательно, морфизм $\pi\colon X \to C$ имеет $8 - K_X^2 \geqslant 8$ геометрических вырожденных слоев и, стало быть, не имеет сечения, так что a — целое число. В таком случае при $a \neq 0$ предыдущие неравенства приводят к противоречию. Если же $a = 0$, то из равенств (1.6.2) немедленно следует, что $r(x_i) = 0\ \forall\, i$, $\mathcal{H}' = |f'|$ — пучок коник на X', $b = 1$ и $\mathcal{H} = |f|$ — пучок коник на X. Следовательно, $X' \in \{\mathbb{C}\}$, отображение χ переводит пучок $\mathcal{H} = |f|$ в пучок $\mathcal{H}' = |f'|$. Равенство $K_X^2 = K_{X'}^2$ можно доказать, например, следующим образом.

Отображение χ, переводящее пучок коник $|f|$ на X в пучок коник $|f'|$ на X', является изоморфизмом в окрестности каждого вырожденного слоя морфизма $\pi\colon X \to C$. Действительно, так как вырожденный слой X_t, $t \in C$, неприводим над полем вычетов $k(t)$ замкнутой точки t, но распадается на две пересекающиеся (-1)-кривые над квадратичным расширением поля $k(t)$, то ни одна из этих компонент не может быть стянута в (неособую) точку на X' при бирациональном отображении. Если χ имеет точку неопределенности на слое X_t, то, поскольку она определена над k и слой X_t неприводим над k, на каждой из двух (-1)-кривых слоя X_t над квадратичным расширением также есть точка неопределенности χ. Следовательно, при разрешении индекс самопересечения каждой из компонент уменьшается и, стало быть, ни одна из них не может быть стянута в неособую точку при отображении χ.

Аналогично, обратное отображение χ^{-1} также является изоморфизмом в окрестности вырожденных слоев. Следовательно, число геометрических вырожденных слоев для $\pi\colon X \to C$ и $\pi'\colon X' \to C'$ одинаково и равно $8 - K_X^2 = 8 - K_{X'}^2$. Отсюда $K_X^2 = K_{X'}^2$. Теорема доказана. $\square$

Эта теорема подсказывает следующее

Определение. Поверхность $X \in \{\mathbb{D}\}$ называется (бирационально) *жесткой*, если любое бирациональное отображение $X \dashrightarrow X'$ на поверхность $X' \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$ является изоморфизмом. Поверхность $X \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$ называется (бирационально) *полужесткой*, если для всякого бирационального отображения $\chi\colon X \dashrightarrow X'$, $X' \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$, существует бирациональный автоморфизм $\psi\colon X \dashrightarrow X$ такой, что композиция $\chi \circ \psi\colon X \dashrightarrow X'$ является изоморфизмом. Поверхность $X \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$ называется (бирационально) *d-устойчивой*, если K_X^2 — бирациональный инвариант. Будем говорить, что $X \in \{\mathbb{C}\}$ обладает (бирационально) *единственной структурой расслоения на коники*, если всякое бирациональное отображение $\chi\colon X \dashrightarrow X'$ сохраняет структуру расслоения на коники, т. е. $X' \in \{\mathbb{C}\}$ и χ переводит пучок коник $|f|$ на X в пучок коник $|f'|$ на X'.

Утверждения (i) и (ii) теоремы 1.6 доставляют примеры жестких поверхностей, а утверждение (iii) — это результат о бирациональной стабильности поверхностей $X \in \{\mathbb{C}\}$ с $K_X^2 \leqslant 0$: такие поверхности обладают единственной структурой расслоения на коники и, в частности, d-устойчивы.

§ 2. Элементарные линки и теорема о разложении

2.1. Начнем с изложения некоторых элементов теории минимальных моделей Мори для алгебраических поверхностей над совершенным полем k (см. [26]). Пусть X — гладкая проективная поверхность над k с K_X, численно не эффективным (т. е. существует кривая $C \subset X$ с $K_X C < 0$). Тогда на X существует экстремальный луч R. Пусть $\varphi_R\colon X \to Y$ — стягивания экстремального луча R (экстремальное стягивание). Тогда φ_R является одним из следующих (см. [26]):

(i) $\varphi_R\colon X \to Y$ — дивизориальное стягивание, т. е. бирациональный морфизм, стягивающий k-неприводимый дивизор E в неособую замкнутую точку $y \in Y$; E является (-1)-кривой над полем вычетов $k(y)$ точки y, и $\overline{E} = E \otimes \overline{k} = \sum\limits_{i=1}^{\deg y} \overline{E}_i$, где $\overline{E}_i$ — попарно непересекающиеся (-1)-кривые над алгебраическим замыканием $\overline{k}$ поля k;

(ii) $\varphi_R\colon X \to Y$ — расслоение на коники над гладкой проективной кривой Y; здесь $\operatorname{Pic} X = \pi^* \operatorname{Pic} Y \oplus \mathbb{Z}$, следовательно, все слои k-неприводимы, а вырожденные слои X_y, если они существуют, над алгебраическим замыканием $\overline{k}$ поля k распадаются на непересекающиеся пары пересекающихся в одной точке (-1)-кривых:

$$X_y \otimes \overline{k} = \overline{X}_y = \sum_{i=1}^{\deg y} (X_{\overline{y}_i} \vee X'_{\overline{y}_i});$$

(iii) $\varphi_R\colon X \to Y = \operatorname{Spec} k$ — стягивание в точку; здесь X — поверхность дель Пеццо с $\operatorname{Pic} X = \mathbb{Z}$, как в семействе $\{\mathbb{D}\}$ из § 1.

Отметим, что если X — минимальная над k рациональная поверхность, то K_X численно не эффективен и, следовательно, на ней существует экстремальный луч R, который имеет в силу минимальности тип (ii) или (iii). В случае (ii) кривая Y необходимо рациональна, так что X принадлежит одному из семейств $\{\mathbb{D}\}$ или $\{\mathbb{C}\}$ из § 1. Обратно, каждая из поверхностей из этих семейств обладает экстремальным лучом типа (iii) или (ii), соответственно. Отметим также, что экстремальные стягивания не выводят из категории гладких поверхностей.

Объектами изучения в этой статье являются бирациональные отображения

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "\chi"] \arrow[d, "\varphi"'] & X' \arrow[d, "\varphi'"] \\ S & S', \end{tikzcd} \tag{2.1.1}$$

где $X, X' \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$ — минимальные рациональные поверхности из семейств $\{\mathbb{D}\}$ и $\{\mathbb{C}\}$, φ, φ' — экстремальные стягивания Мори, т. е. $S = \operatorname{Spec} k$, и $\varphi\colon X \to \operatorname{Spec} k$ — стягивание в точку, если $X \in \{\mathbb{D}\}$ и $S = C$ — рациональная кривая, $F = \pi\colon X \to C$ — расслоение на коники, если $X \in \{\mathbb{C}\}$. Аналогично для S' и φ'. Бирациональное отображение $\chi\colon X \dashrightarrow X'$ никак не согласовано, вообще говоря, с морфизмами φ и φ'.

Основная задача — разложить отображение χ на элементарные составляющие — линки — и изучить вопрос об однозначности таких разложений. Для этого, прежде всего, надо определить и классифицировать элементарные линки.

2.2. Определение и примеры элементарных линков (см. [21]).

Линки типа I. Это коммутативные диаграммы вида

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\varphi"'] & Z = X' \arrow[l, "\sigma"'] \arrow[d, "\varphi'"] \\ S & S', \arrow[l, "\psi"'] \end{tikzcd} \tag{2.2.1}$$

где $\sigma\colon Z \to X'$ — дивизориальное элементарное стягивание Мори, как в 2.1 (i), $\psi\colon S' \to S$ — морфизм. Здесь $X \in \{\mathbb{D}\}$, $\varphi\colon X \to S = \operatorname{Spec} k$ — стягивание в точку, $Z = X' \in \{\mathbb{C}\}$, $\varphi'\colon X' \to S' = C'$ — расслоение на коники.

Простейший пример: $X = \mathbb{P}^2$, $\sigma\colon \mathbb{F}_1 \to \mathbb{P}^2$ — раздутие точки, $\varphi'\colon \mathbb{F}_1 \to \mathbb{P}^1$ — естественное $\mathbb{P}^1$-расслоение, $\psi\colon S' = \mathbb{P}^1 \to S = \operatorname{Spec} k$ — морфизм в точку.

Линки типа II. Это коммутативные диаграммы вида

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\varphi"'] & Z \arrow[l, "\sigma"'] \arrow[r, "\varphi"] & X' \arrow[d, "\varphi'"] \\ S \arrow[rr, "\sim"] & & S', \end{tikzcd} \tag{2.2.2}$$

где $\sigma\colon Z \to X$, $\tau\colon Z \to X'$ — экстремальные дивизориальные стягивания Мори, как в 2.1 (i).

Вот наиболее употребительный пример: $\varphi\colon X \to S = C$ — расслоение на коники, $\varphi'\colon X' \to S' = C$ — тоже расслоение на коники, $\sigma\colon Z \to X$ — раздутие замкнутой точки $x \in X$, не лежащей на вырожденном слое и такой, что в каждом геометрическом слое $\overline{X}_{\overline{t}}$ лежит не более одной из геометрических точек $\{\overline{x}_i\} = x \otimes \overline{k}$, $j = 1, \ldots, \deg x$, $\tau\colon Z \to X'$ — стягивание собственного прообраза на Z слоя $X_{\varphi(x)}$ морфизма φ в неособую точку $x' \in X'$. Это преобразование над $C = S = S'$. Такой линк называется элементарным преобразованием ε_x расслоения на коники с центром в точке x.

Другой пример: $X = \mathbb{P}^2$, $S = \operatorname{Spec} k$, $x \in \mathbb{P}^2$ — замкнутая точка степени $\deg x = 2$, L_x — единственная прямая на $\mathbb{P}^2$, содержащая точку x, $\sigma\colon Z \to X$ — раздутие x, $\tau\colon Z \to X'$ — стягивание собственного прообраза прямой L_x в неособую точку $x' \in X'$, $\deg x' = 1$. Здесь $X' \simeq Q \subset \mathbb{P}^3$ — квадрика $\operatorname{Pic} Q \simeq \mathbb{Z}$, $S' = \operatorname{Spec} k$.

Линки типа III. Это коммутативные диаграммы вида

$$\begin{tikzcd} X = Z \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\varphi"'] & X' \arrow[d, "\varphi'"] \\ S \arrow[r, "\psi"] & S', \end{tikzcd} \tag{2.2.3}$$

где $\sigma\colon Z \to X'$ — экстремальное дивизориальное стягивание Мори, как в 2.1 (i), $\psi\colon S \to S'$ — морфизм. Здесь $X \in \{\mathbb{C}\}$, $S = C$ — кривая, $\varphi\colon X \to S$ — расслоение на коники, $X' \in \{\mathbb{D}\}$, $S' = \operatorname{Spec} k$.

Эти линки являются обратными к линкам типа I. Рассмотрим один из примеров: $X \subset \mathbb{P}^3$ — гладкая кубическая поверхность с одной единственной прямой $E \subset X$, определенной над k, пучок плоскостей в $\mathbb{P}^3$, проходящих через E, высекает на X пучок коник $\pi\colon X \to \mathbb{P}^1$, морфизм $\sigma\colon X = Z \to X'$ является стягиванием (-1)-кривой E в неособую точку $x' \in X'$ степени 1, $X' \in \{\mathbb{D}\}$ является поверхностью дель Пеццо степени 4, $\psi\colon S = \mathbb{P}^1 \to \operatorname{Spec} k = S'$ — стягивание в точку.

Линки типа IV. Это диаграммы вида

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, equal] \arrow[d, "\varphi"'] & & X' \arrow[d, "\varphi'"] \\ S \arrow[dr] & & S', \arrow[dl] \\ & \operatorname{Spec} k & \end{tikzcd} \tag{2.2.4}$$

где $X, X' \in \{\mathbb{C}\}$, φ, φ' — различные расслоения на коники на X над кривыми рода нуль $S = C$, $S' = C'$, соответственно. Таким образом, каждый линк типа IV предполагает существование на X двух экстремальных лучей.

Простейший пример: $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, φ, φ' — проекции на первый и второй множитель. Другой пример: $X \subset \mathbb{P}^4$ — гладкая поверхность дель Пеццо степени 4, обладающая структурой расслоения на коники $\varphi\colon X \to \mathbb{P}^1$, $\operatorname{Pic} X \simeq \mathbb{Z}+\mathbb{Z}$; на X существует другой пучок коник $\varphi'\colon X \to \mathbb{P}^1$, класс слоя f' которого эквивалентен $-K_X - f$, где f — класс слоя φ. Если в первом примере существует автоморфизм $\tau\colon \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, переставляющий множители и, стало быть, экстремальные стягивания φ и φ', то во втором примере такого автоморфизма, вообще говоря, не существует. Соответствующий пример см. в [4].

2.3. Разложение бирационального отображения (2.1.1) на элементарные линки основано на изучении поведения линейных систем без неподвижных компонент при бирациональных отображениях и свойствах численных характеристик присоединенных линейных систем.

Определение 5. Пусть $\mathcal{H} = \mathcal{H}_X$ — линейная система без неподвижных компонент на поверхности X и $b \in \mathbb{Q}$, $b > 0$. Говорят, что пара $(X, b\mathcal{H})$ имеет *терминальные* (соответственно, *канонические*) *особенности*, если для всякого бирационального морфизма $g\colon Y \to X$ с неособым Y и g — исключительными дивизорами F_i, имеет место равенство

$$K_Y + b\mathcal{H}_Y = g^*(K_X + b\mathcal{H}_X) + \sum_{i=1}^{N} s_i F_i \tag{2.3.1}$$

с $s_i > 0$, $s_i \in \mathbb{Q}$ (соответственно, $s_i \geqslant 0$), где $\mathcal{H}_Y$ — собственный прообраз на Y линейной системы $\mathcal{H}$. Числа s_i называются *дискрепантностями*.

Каноническим порогом пары $(X, \mathcal{H})$ называется максимальное положительное рациональное число $c = c(X, \mathcal{H})$ такое, что $(X, c\mathcal{H}_X)$ имеет канонические особенности.

Комментарий 1. Прежде всего, выясним, как связаны дискрепантности s_i в (2.3.1) с кратностями $r(x_j)$ в (1.2.2), где $Y = X_N \to X_{N-1} \to \ldots \ldots \to X_0 = X$ — разложение морфизма g на экстремальные дивизориальные стягивания, как в (1.2.1). Для этого перепишем (2.3.1) в обозначениях (1.2.1)

$$K_Y + b\mathcal{H}_Y = g^*(K_X + b\mathcal{H}_X) + \sum_{i=1}^{N} \bigl(1 - br(x_{i-1})\bigr)\sigma^*_{N,i}(E_i),$$

поскольку для неособых поверхностей X, Y имеем $K_Y = g^*K_X + \sum \sigma^*_{N,i}(E_i)$. Так как F_i являются неприводимыми над k исключительными дивизорами, а $\sigma^*_{N,i+1}(E_{i+1})$ — их полные прообразы на $Y = X_N$, то существуют целые $\delta_{ij} \geqslant 0$ с $\delta_{ii} = 1$ такие, что $\sigma^*_{N,i}(E_i) = \sum\limits_{j \geqslant i} \delta_{ij} F_j$ и

$$s_j = \sum_{i \leqslant j} \delta_{ij}\bigl(1 - br(x_{i-1})\bigr). \tag{2.3.2}$$

Отсюда получаем, что пара $(X, \mathcal{H}_X)$ имеет только канонические особенности, если $s_j = \sum\limits_{i \leqslant j} \delta_{ij}\bigl(1 - br(x_{i-1})\bigr) \geqslant 0$ для бирационального морфизма $g\colon Y \to X$ такого, что линейная система $\mathcal{H}_Y$ — собственный прообраз $\mathcal{H}_X$ — свободна. Предыдущие неравенства эквивалентны неравенствам $1 - br(x_{i-1}) \geqslant 0$ $\forall\, i$. Действительно, в одну сторону доказательство очевидно. Обратно, если

$1-br(x_{i-1})<0$ для некоторого i, то $s_i=\sum\limits_{k\leqslant i}\delta_{ki}\bigl(1-br(x_{k-1})\bigr)<0$, потому что $\delta_{ki}\geqslant 0$, $\delta_{ki}=0$ для всех $k\leqslant i-1$, для которых $g(F_i)\not\subset F_k$, и $1-br(x_{k-1})<0$ для остальных $k\leqslant i-1$, поскольку для них $r(x_{k-1})\geqslant r(x_{i-1})$ в силу свойства (iii) пункта 1.4. В частности, если для некоторого i $g(F_i)\not\subset F_k$ для всех $k<i$, т. е. точка x_{i-1} не является бесконечно близкой ни для какой точки x_{k-1}, $k<i$, то $s_i=1-br(x_{i-1})$. Отсюда в силу свойства 1.4 (iii) получаем для канонического порога равенство

$$c=\frac{1}{r}\,, \tag{2.3.3}$$

где $r=\max\{r(x_i)\}$, $r(x_i)$ — кратности базисных точек линейной системы.

Отметим, что для многообразий X размерности $n\geqslant 3$ соотношение (2.3.3), вообще говоря, перестает быть верным ввиду более сложного поведения канонического класса при раздутиях, чем в случае неособых поверхностей. Кроме того, на X допускаются терминальные особенности.

Для разложения χ в (2.1.1) на элементарные линки мы будем пользоваться линейными системами вида

$$\mathcal{H}'=\begin{cases}\bigl|-a'K_{X'}\bigr|, \quad a'\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}\cup\frac{1}{3}\mathbb{Z}, \quad a'>0, & \text{если } X'\in\{\mathbb{D}\};\\ \bigl|-a'K_{X'}+b'f'\bigr|, \quad a',b'\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}, \ a'\geqslant 0, \ b'\geqslant 0, & \text{если } X'\in\{\mathbb{C}\};\end{cases} \tag{2.3.4}$$

и $\mathcal{H}=\mathcal{H}_X$ — собственный прообраз на X линейной системы $\mathcal{H}'$ при бирациональном отображении χ, тогда

$$\mathcal{H}\sim\begin{cases}-aK_X, \quad a\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}\cup\frac{1}{3}\mathbb{Z}, \quad a>0, & \text{если } X\in\{\mathbb{D}\};\\ -aK_X+bf, \quad a,b\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}, \quad a\geqslant 0, & \text{если } X\in\{\mathbb{C}\}.\end{cases} \tag{2.3.5}$$

Принимая во внимание соотношение (2.3.3), введем следующее

О п р е д е л е н и е. В предыдущих обозначениях пусть c — канонический порог для пары $(X,\mathcal{H})$. Будем говорить, что $\mathcal{H}=\mathcal{H}_X$ имеет *максимальную особенность*, если $1/c>a$.

Теперь сформулируем и передокажем лемму 1.3 о неравенстве Нётера в контексте этого параграфа.

2.4. Л е м м а (неравенство Нётера, см. [21]: общая форма). *В предыдущих обозначениях пусть $a'>0$, $b'\geqslant 0$ такие, что линейная система $\mathcal{H}'$ очень обильна на X', тогда*

(i) *$a\geqslant a'$ и равенство выполнимо только в случае, когда или χ — изоморфизм, или $X,X'\in\{\mathbb{C}\}$ и χ индуцирует изоморфизм $C\xrightarrow{\sim}C'$ такой, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "\chi"] \arrow[d, "\pi"'] & X' \arrow[d, "\pi'"] \\ C \arrow[r, dash, "\sim"] & C' \end{tikzcd} \tag{2.4.1}$$

коммутативна;

(ii) *если* $K_X+\frac{1}{a}\mathcal{H}_X$ *имеет только канонические особенности* (*т. е.* $r(x_i)\leqslant a\ \forall i$ *в силу* (2.3.3), *иначе говоря,* $\mathcal{H}$ *не имеет максимальных особенностей*) *и* $b\geqslant 0$ *в случае* $X\in\{\mathbb{C}\}$, *тогда* $a=a'$, χ — *изоморфизм и индуцирует изоморфизм* $S\xrightarrow{\sim}S'$ (*в частности,* $C\xrightarrow{\sim}C'$ *в случае* $X\in\{\mathbb{C}\}$).

Доказательство. Рассмотрим диаграмму (1.2.1) разрешения отображения χ, где $X_N=Y$; $X=X\xrightarrow{\varphi}S$, $X'=X'\xrightarrow{\varphi'}S'$, $\mathcal{H}'$ — как в условии леммы и $\mathcal{H}=\mathcal{H}_X$ — ее собственный прообраз. Для некоторого положительного числа $\alpha\in\mathbb{Q}$ запишем

$$K_Y+\alpha\mathcal{H}_Y=\psi^*(K_{X'}+\alpha\mathcal{H}')+\sum s'_jF'_j=\sigma^*(K_X+\alpha\mathcal{H})+\sum s_iF_i,\qquad(2.4.2)$$

где F_i, F'_j — исключительные дивизоры для морфизмов σ и ψ, соответственно. Дискрепантности s_i, s'_j зависят, естественно, от α и, поскольку линейная система $\mathcal{H}'$ по условию очень обильна, $\mathcal{H}_Y=\psi^*\mathcal{H}'$, т. е. $K_Y=\psi^*K_{X'}+\sum s'_jF'_j$, откуда $s'_j=\sum\limits_{k\leqslant j}\delta_{kj}$ — целые положительные числа, как в (2.3.2), если ψ не изоморфизм.

Пусть Γ (соответственно, Γ') — общая кривая на X (соответственно, X') такая, что

$$\Gamma\sim\begin{cases}-K_X, & \text{если } X\in\{\mathbb{D}\};\\ f, & \text{если } X\in\{\mathbb{C}\} \text{ и } f \text{ — слой } \pi\colon X\to C\end{cases}$$

(соответственно, для Γ').

Положим $\alpha=\dfrac{1}{a'}$ в (2.4.2), тогда первое из равенств дает

$$\Big(K_Y+\frac{1}{a'}\mathcal{H}_Y\Big)\sigma^*\Gamma=\begin{cases}\Big(\sum s'_jF'_j\Big)\sigma^*\Gamma\geqslant 0, & \text{если } X'\in\{\mathbb{D}\};\\ \Big(\dfrac{b'}{a'}\psi^*f'+\sum s'_jF'_j\Big)\sigma^*\Gamma\geqslant 0, & \text{если } X'\in\{\mathbb{C}\}.\end{cases}\qquad(2.4.3)$$

Так как $a'>0$, $b'\geqslant 0$, $s'_j\geqslant 0$, то равенство здесь возможно, если только либо $\{F'_j\}=\{F_i\}$, $X,X'\in\{\mathbb{D}\}$ и χ — изоморфизм, либо $\chi(\Gamma)$ содержится в слоях пучка $|f'|$ на X', т. е. имеет место коммутативная диаграмма (2.4.1).

Из (2.4.3) и второго равенства (2.4.2) получаем

$$\Big(K_X+\frac{1}{a}\mathcal{H}\Big)\Gamma\geqslant 0.$$

Отсюда по (2.3.5) находим $\dfrac{1}{a'}\geqslant\dfrac{1}{a}$, т. е. $a\geqslant a'$ и равенство имеет место только в указанных выше случаях. Это доказывает (i).

Пусть теперь $K_X+\dfrac{1}{a}\mathcal{H}$ канонично, т. е. в (2.4.2) с $\alpha=\dfrac{1}{a}$ имеем $s_i\geqslant 0\ \forall i$. Обращая предыдущие рассуждения и учитывая, что $b\geqslant 0$, получаем $a=a'$ и, стало быть, χ — изоморфизм, если $X\in\{\mathbb{D}\}$, и χ включается в коммутативную диаграмму (2.4.1), если $X\in\{\mathbb{C}\}$. Чтобы показать, что χ — изоморфизм,

и в этом случае положим в (2.4.2) $\alpha = \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{a'}$. В результате получим

$$\psi^*\Big(\frac{b'}{a}f'\Big) + \sum s'_j F'_j = \sigma^*\Big(\frac{b}{a}f\Big) + \sum s_i F_i. \tag{2.4.4}$$

Если ψ не изоморфизм, то $s'_j > 0 \quad \forall\, j$ и $s_i \geqslant 0$ по предположению. Вычисляя пересечение обеих частей равенства (2.4.4) с F'_j, получаем

$$\Big(\sum s'_j F'_j\Big)F'_j = \Big(\sum s_i F_i\Big)F'_j \geqslant 0,$$

что противоречит отрицательной определенности матрицы пересечений для исключительных дивизоров $\{F'_j\}$. Отсюда следует, что $\psi\colon Y \xrightarrow{\sim} X'$ — изоморфизм, и, сравнивая числа Пикара (т. е. ранги групп Пикара) $2 = \rho(X) = \rho(X') = \rho(Y)$, получаем, что $\{F_i\} = \varnothing$, т. е. $\sigma\colon Y \xrightarrow{\sim} X$ — тоже изоморфизм. Это доказывает лемму. □

З а м е ч а н и е. Нетрудно обобщить это доказательство на случай, когда система $\mathcal{H}'$ не обязательно очень обильна, а лишь свободна, чтобы получить утверждения, как в лемме 1.3.

Численные характеристики отображения χ определяются линейной системой $\mathcal{H}_X$ на X, как в лемме 2.4. А именно,

О п р е д е л е н и е. *Степенью* $(\mathcal{H}_X,\ \varphi\colon X \to S)$ называется тройка $(a, r, m) = A(X, \mathcal{H}_X)$, где a — как в лемме 2.4, $r = 1/c$ есть максимум кратностей особенностей линейной системы $\mathcal{H} = \mathcal{H}_X$ (c — канонический порог для $(X, \mathcal{H})$) и m — число особенностей $\mathcal{H}$ кратности r. Отношение порядка определяется лексикографически:

$$A_1 = (a_1, r_1, m_1) < A = (a, r, m),$$

если $a_1 < a$, или $a_1 = a$, $r_1 < r$, или $a_1 = a$, $r_1 = r$, $m_1 < m$.

Числа a, r, m в определении степени являются неотрицательными, r, m — целые, $a \in \dfrac{1}{2}\mathbb{Z} \cup \dfrac{1}{3}\mathbb{Z}$, т. е. множество степеней дискретно и ограничено снизу. Этот факт, теория Мори для поверхностей и неравенства Нётера позволяют доказать следующий общий результат о факторизации бирациональных отображений (2.1.1).

2.5. Т е о р е м а (см. [21]). *Любое бирациональное отображение, как в* (2.1.1), *раскладывается в композицию конечного числа элементарных линков типа* I–IV.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого отображения χ, как в (2.1.1), мы найдем элементарный линк Φ_1

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "\Phi_1"] \arrow[d, "\varphi"'] & X_1 \arrow[d, "\varphi_1"] \\ S & S' \end{tikzcd} \tag{2.5.1}$$

такой, что степень $A_1 = (a_1, r_1, m_1)$ отображения $\chi \circ \Phi_1^{-1}\colon X_1 \dashrightarrow X'$ относительно линейной системы $\mathcal{H}_{X_1}$ — собственного образа линейной системы $\mathcal{H}$ при

Φ_1 — меньше, чем $A = (a, r, m)$, если только χ не является изоморфизмом. Через конечное число шагов процесс откручивания оборвется на изоморфизме.

Рассмотрим по отдельности следующие две возможности: $\mathcal{H}_X$ имеет или не имеет максимальные особенности.

Случай 1. Линейная система $\mathcal{H} = \mathcal{H}_X$ имеет максимальную особенность кратности $r > a$. Согласно свойству (iii) пункта 1.4 среди всех максимальных особенностей существует такая, которая лежит на X (т. е. не является бесконечно близкой). Пусть $\sigma\colon Y \to X$ — раздутие этой максимальной особенности, $x \in X$. По предположению $K_Y + \frac{1}{r}\mathcal{H}_Y = \sigma^*\Big(K_X + \frac{1}{r}\mathcal{H}_X\Big)$ канонично и не является численно эффективным над S (поскольку $r > a$). Пусть c_Y — канонический порог для $(Y, \mathcal{H}_Y)$ и $\alpha = \min\Big\{\frac{1}{a}, c_Y\Big\}$.

Ближайшая цель — применить теорию минимальных моделей для $K_Y + \alpha\mathcal{H}_Y$ над S. Прежде всего, заметим, что $K_Y + \alpha\mathcal{H}_Y$ численно не эффективно, т. е. существует кривая F в слоях $Y \to S$ такая, что $(K_Y + \alpha\mathcal{H}_Y)F < 0$. Действительно, пусть E — исключительная кривая для $\sigma\colon Y \to X$, тогда

$$K_Y + \alpha\mathcal{H}_Y = \sigma^*(K_X + \alpha\mathcal{H}_X) + (1 - \alpha r)E. \tag{2.5.2}$$

Если $c_Y < 1/a$, то $\alpha = c_Y$, и дивизор $K_X + \alpha\mathcal{H}_X$ численно не эффективен над S, следовательно, $K_Y + \alpha\mathcal{H}_Y$ тоже численно не эффективен. Если $c_Y \geqslant \frac{1}{a}$, то $\alpha = \frac{1}{a}$, и из (2.3.5) и (2.5.2) видим, что найдется кривая F в слое $Y \to S$ такая, что $(K_Y + \alpha\mathcal{H}_Y)F < 0$: F — собственный прообраз на Y слоя f_x, проходящего через раздуваемую точку x, если $X \in \{\mathbb{C}\}$, и F — любая кривая на Y, пересекающая E, поскольку $(1 - \alpha r) = \Big(1 - \frac{r}{a}\Big) < 0$, если $X \in \{\mathbb{D}\}$.

Следовательно, по программе минимальных моделей для $(K_Y + \alpha\mathcal{H}_Y)$ над S существует экстремальный луч R на Y, $(K_Y + \alpha\mathcal{H}_Y)R < 0$, представленный некоторой кривой, отличной от E (так как $(K_Y + \alpha\mathcal{H}_Y)E \geqslant 0$). Поскольку $\mathcal{H}_Y$ не имеет неподвижных компонент, то $\mathcal{H}_Y R \geqslant 0$, следовательно, $K_Y R < 0$, т. е. R является экстремальным лучом для K_Y.

Из классификации экстремальных лучей видим, что R принадлежит либо типу 2.1 (i), либо типу 2.1 (ii). Случай 2.1 (iii) невозможен, поскольку $\rho(Y) = \operatorname{rk}\operatorname{Pic} Y \geqslant 2$.

Предположим сначала, что R типа 2.1 (i), т. е. соответствующее стягивание $\varphi_R\colon Y \to Z$ дивизориально. Полагая, что $X_1 = Z$ и $\varphi_1\colon X_1 \to S_1 = S$ — структурный морфизм, получаем линк $\Phi_1\colon X \dashrightarrow X_1$ типа II. Пусть Γ_1 — общая кривая в слоях $X_1 \to S$, как в доказательстве леммы 2.4. Так как $K_X + \frac{1}{a}\mathcal{H}_X$ не канонично, то $\sigma^*\Big(K_X + \frac{1}{a}\mathcal{H}_X\Big) = K_Y + \frac{1}{a}\mathcal{H}_Y + \lambda E$ с $\lambda > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} 0 = \Big(K_X + \frac{1}{a}\mathcal{H}_X\Big)\sigma_*\varphi_R^*\Gamma_1 &= \Big(K_Y + \frac{1}{a}\mathcal{H}_Y\Big)\varphi_R^*\Gamma_1 + \lambda E\varphi_R^*\Gamma_1 \geqslant \\ &\geqslant \Big(K_Y + \frac{1}{a}\mathcal{H}_Y\Big)\varphi_R^*\Gamma_1 = \Big(K_{X_1} + \frac{1}{a}\mathcal{H}_{X_1}\Big)\Gamma_1, \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

и равенство выполнено только в случае, когда $E \cap \varphi_R^* \Gamma_1 = 0$, т. е. когда $X, X_1 \in \{\mathbb{C}\}$ и Φ_1 — элементарное преобразование расслоений на коники $X \to S$.

Следовательно, $a_1 < a$, если $X \in \{\mathbb{D}\}$, $a_1 = a$, если $X \in \{\mathbb{C}\}$. В последнем случае, так как $\alpha \geqslant 1/r$ и $K_{X_1} + \alpha \mathcal{H}_{X_1}$ канонично по построению, то кратность максимальной особенности линейной системы $\mathcal{H}_{X_1}$ не превосходит r, а в случае равенства $\alpha = 1/r$ число максимальных особенностей $m_1 = m(X_1, \mathcal{H}_X)$ на единицу меньше, чем $m = m(X, \mathcal{H}_X)$:

$$m_1 = m(X_1, \mathcal{H}_{X_1}) = m(Y, \mathcal{H}_Y) = m(X, \mathcal{H}_X) - 1,$$

поскольку экстремальное дивизориальное стягивание $\varphi_R \colon Y \to Z = X_1$ не является $\left(K_{X_1} + \dfrac{1}{a}\mathcal{H}_{X_1}\right)$-крепантным, а остальные максимальные особенности сохраняются при отображении Φ_1.

Таким образом, линк Φ_1 уменьшает степень: $A_1 = (a_1, 1/\alpha, m_1) < A = (a, r, m)$.

Пусть теперь R типа 2.1 (ii), т. е. соответствующее стягивание $\varphi_R \colon Y \to Z$ является расслоением на коники. Это возможно, если только $X \in \{\mathbb{D}\}$, так как $2 = \rho(Y) = \rho(X) + 1$. Полагая здесь $X_1 = Y$, $S_1 = Z$ и $\varphi_1 = \varphi_R$, мы имеем линк Φ_1 типа I. Точно так же, как и в (2.5.3), находим, что $a_1 \leqslant a$. В действительности, неравенство строгое: $a_1 < a$, потому что Γ_1 в этом случае является слоем f_1 расслоения на коники $X_1 \to S_1$ и $\lambda E \cdot \Gamma_1 > 0$, поскольку $\lambda > 0$ и E не содержится в слое φ_R.

Таким образом, и в этом случае $A_1 = (a_1, r_1, m_1) < A = (a, r, m)$.

Случай 2. Линейная система $\mathcal{H} = \mathcal{H}_X$ не имеет максимальных особенностей. В случае $X = \{\mathbb{D}\}$ по лемме 2.4 это возможно только в случае, когда χ — изоморфизм. Можно предполагать, следовательно, что $X \in \{\mathbb{C}\}$, и пусть $\pi \colon X \to C$ — структурный морфизм со слоем f. Если χ — не изоморфизм, тогда по лемме 2.4 из каноничности $K_X + \dfrac{1}{a}\mathcal{H}_X$ следует, что $\mathcal{H}_X \sim -aK_X + bf$ с $b < 0$, т. е. $K_X + \dfrac{1}{a}\mathcal{H}_X = \dfrac{b}{a} f$ численно не эффективно. Стало быть, существует $(K_X + \dfrac{1}{a}\mathcal{H}_X)$ — экстремальный луч R на X, отличный от $\mathbb{R}_+[f]$. Так как $\mathcal{H}_X$ не имеет неподвижных компонент, то $\mathcal{H}_X R \geqslant 0$ и, следовательно, $K_X R < 0$, т. е. R является K_X-экстремальным лучом. Пусть $\varphi_R \colon X \to Z$ — стягивание R. Как и выше, возможны два случая:

1) R имеет тип 2.1 (i), т. е. $\varphi_R \colon X \to Z$ — дивизориальное стягивание. В этом случае положим $X_1 = Z$ и $\varphi_1 \colon X_1 \to S_1 = \operatorname{Spec} k$, так что $X_1 \in \{\mathbb{D}\}$ и мы имеем линк $\Phi_1 \colon X \dashrightarrow X_1$ типа III. Здесь

$$\mathcal{H}_{X_1} \sim -a_1 K_{X_1} = \varphi_{R^*}(-aK_X + bf) = -aK_{X_1} + b\varphi_{R^*}(f).$$

Так как $\rho(X_1) = 1$, то $\varphi_{R^*}(f) = -\mu K_{X_1}$, $\mu \in \dfrac{1}{2}\mathbb{Z} \cup \dfrac{1}{3}\mathbb{Z}$, $\mu > 0$, и $a_1 = a + b\mu < 0$, поскольку $b < a$. Отсюда $A_1 = (a_1, r_1, m_1) < (a, r, m)$.

2) R имеет тип 2.1 (ii), т. е. $\varphi_R \colon X \to Z$ — расслоение на коники. Положим $X_1 = X$, $S_1 = Z = C_1$ и $\varphi_1 = \varphi_R \colon X_1 \to S_1 = C_1$, так что на $X = X_1$

существует другая структура расслоения на коники. В этом случае $\Phi_1\colon X = X_1$ — линк типа IV — переход к другой структуре расслоения на коники. Если $\mathcal{H}_X \sim -aK_X + bf$ и $\mathcal{H} = \mathcal{H}_X \sim -a_1K_X + b_1f_1$, то $2a_1 = \mathcal{H}_1 f_1 = \mathcal{H}f_1 = 2a + b(f \cdot f_1) < 2a$, так как $b < 0$ и $(f \cdot f_1) > 0$. Опять имеем уменьшение степени: $A_1 = (a_1, r_1, m_1) < A = (a, r, m)$. Теорема доказана. □

Комментарий 2. Из доказательства теоремы видно, что если $\mathcal{H}_X$ обладает максимальной особенностью и $\sigma\colon Z \to X$ — ее раздутие, то K_Z обилен, когда $X \in \{\mathbb{D}\}$, или когда $X \in \{\mathbb{C}\}$ и $K_Z^2 > 0$. Действительно, если $X \in \{\mathbb{D}\}$, то $\rho(Z) = 2$ и, как видно из доказательства теоремы, на Z кроме $\mathbb{R}_+(E)$ существует еще один экстремальный луч. Следовательно, 2-мерный конус эффективных циклов $NE(Z)$ порожден двумя экстремальными лучами, т. е. по численному критерию Клеймана $-K_Z$ обилен. Аналогично, если $X \in \{\mathbb{C}\}$, то $\rho(Z) = 3$ и $NE(Z)$ порожден двумя экстремальными лучами и эффективен (по теореме Римана–Роха для рациональной поверхности Z с $K_Z^2 > 0$) антиканоническим дивизором $-K_Z$. Так как $(-K_Z)^2 = K_Z^2 > 0$, то опять по численному критерию Клеймана $-K_Z$ обилен.

Если $\mathcal{H}_X$ не имеет максимальных особенностей и χ — не изоморфизм, то $-K_X$ обилен. Действительно, утверждение не тривиально, только если $X \in \{\mathbb{C}\}$. Тогда по лемме 2.4 (ii) $\mathcal{H}_X \sim -aK_X + bf$ с $b < 0$. Из доказательства теоремы видим, что на X в этом случае существует другой экстремальный луч и, так как $\rho(X) = 2$, то $-K_X$ обилен, как и выше.

Результат 2.5 был получен раньше, как уже отмечалось во введении, с помощью явных вычислений линков для конкретных классов поверхностей и действий этих линков на предельных группах $Z^*(X)$. Приведенное здесь доказательство не использует явных формул, а использует лишь элементы двумерной теории Мори. В таком виде теорема 2.5 обобщается на трехмерный случай (см. [21]).

Отметим, что теорема 2.5 в такой общей форме не позволяет ответить на вопросы типа теоремы 1.6 о существовании или несуществовании бирациональных отображений над k между различными классами поверхностей $X \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$, в частности, решить вопрос о k-рациональности. Явные вычисления линков и их действий на группах $Z^*(X)$ необходимы также для описания соотношений между ними.

Приводим соответствующий классификационный результат.

2.6. Теорема. *Пусть Φ_1 — элементарный линк типа* I–IV, *как в диаграмме* 1.5.1. *Тогда для Φ_1 имеются только следующие возможности.*

(i) Линки типа I. *Здесь необходимо $X \in \{\mathbb{D}\}$, $X_1 \in \{\mathbb{C}\}$, $\mathcal{H}_X \sim -aK_X$, $\sigma\colon Z = X_1 \to X$ — раздутие точки $x \in X$ степени $d = \deg x$ и кратности $r(x)$ в линейной системе $\mathcal{H}_X$, $\mathcal{H}_{X_1} \sim -a_1K_{X_1} + b_1f_1 = -a\sigma^*K_X - r(x)E$, где E — исключительная кривая для σ, f_1 — класс геометрического слоя структурного морфизма расслоения на коники $\varphi_1\colon X_1 \to C_1$ (геометрические точки $\{x_i\} = x \otimes \overline{k}$ предполагаются всегда в общем положении). Тогда возможны только следующие случаи*:

$K_X^2 = 9$:

a) $d = 1$, $X \simeq \mathbb{P}^2$, $X_1 \simeq \mathbb{F}_1 \to \mathbb{P}^1$ — *геометрически линейчатая поверхность,* $f_1 \sim -\frac{1}{3}\sigma^* K_X - E = -\frac{1}{3}K_{X_1} - \frac{2}{3}E$;

$$a_1 = \frac{3a - r(x)}{2}, \qquad b_1 = \frac{3(r(x) - a)}{2}\,;$$

b) $d = 4$, $X \simeq \mathbb{P}^2$, $\varphi_1\colon X_1 \to \mathbb{P}^1$ — *расслоение на коники,* $K_{X_1}^2 = 5$, $f_1 \sim -\frac{2}{3}\sigma^* K_X - E = -\frac{2}{3}K_{X_1} - \frac{1}{3}E$;

$$a_1 = 3a - 2r(x), \qquad b_1 = 3(r(x) - a);$$

$K_X^2 = 8$:

a) $d = 2$, $X \simeq Q \subset \mathbb{P}^3$ — *квадрика с* $\operatorname{Pic} Q \simeq \mathbb{Z}$, $\varphi_1\colon X_1 \to \mathbb{P}^1$ — *расслоение на коники,* $K_{X_1}^2 = 6$, $f_1 \sim -\frac{1}{2}\sigma^* K_X - E = -\frac{1}{2}K_{X_1} - \frac{1}{2}E$;

$$a_1 = 2a - r(x), \qquad b_1 = 2(r(x) - a);$$

b) $d = 2$, $X \not\simeq Q \subset \mathbb{P}^3$, $\varphi_1\colon X_1 \to C$ — *расслоение на коники,* $C(k) = \varnothing$, *если взять* $f_1 = \varphi_1^{-1}(t)$, $t \in C$, $\deg t = 2$, *то* $f_1 \sim -\sigma^* K_X - 2E = -K_{X_1} - E$;

$$a_1 = 2a - r(x), \qquad b_1 = r(x) - a,$$

здесь b_1 — *коэффициент при* f_1, *а не при геометрическом слое*;

$K_X^2 = 4$:

$d = 1$, $X \subset \mathbb{P}^4$ — *полное пересечение двух квадрик* $\varphi_1\colon X_1 \to \mathbb{P}^1$ — *расслоение на коники,* $X_1 \subset \mathbb{P}^3$ — *кубическая поверхность с прямой* E, *определенной над* k;

$$K_{X_1}^2 = 3, \quad f_1 \sim -\sigma^* K_X - 2E = -K_{X_1} - E,$$
$$a_1 = 2a - r(x), \quad b_1 = r(x) - a.$$

(ii) Линки типа II. *Здесь различаются два случая:* $X, X_1 \in \{\mathbb{D}\}$, $X, X_1 \in \{\mathbb{C}\}$. *Пусть* $\sigma\colon Z \to X$ — *раздутие точки* $x \in X$, $\deg x = d$, $E = \sigma^{-1}(x)$ — *исключительный дивизор,* $r(x)$ — *кратность* x *в* $\mathcal{H}_X$; $\sigma_1\colon Z \to X$ — *стягивание исключительного дивизора* $E_1 \subset Z$ *в точку* $x_1 \in X_1$, $\deg x_1 = d_1$, $r(x_1)$ — *кратность точки* x_1 *в линейной системе* $\mathcal{H}_{X_1}$ (*геометрические точки* $\{\overline{x}_i\} = x \otimes \overline{k}$ *находятся в общем положении на* $\overline{X} = X \otimes \overline{k}$).

Случай $X, X_1 \in \{\mathbb{D}\}$. *Здесь* $\mathcal{H}_Z \sim -a\sigma^* K_X - r(x)E = -a_1\sigma_1^* K_{X_1} - r(x_1)E$. *Тогда имеются только следующие возможности для линков типа* II.

$K_X^2 = 9$:

a) $d = d' = 8$, $X \simeq \mathbb{P}^2$, $X_1 \simeq \mathbb{P}^2$. *В терминах п.* 1.4 *линк* Φ_1^{-1} *действует следующим образом*:

$$-K_X \to -17K_{X_1} - 18x_1, \qquad x \to -16K_{X_1} - 17x_1,$$

так что матрица преобразования в базисе $(-K_{X_1}, x_1)$ *имеет вид*

$$M_{9,8} = \begin{pmatrix} 17 & 16 \\ -18 & -17 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} a_1 &= 17a - 16r(x), \\ r(x_1) &= 18a - 17r(x). \end{aligned}$$

Отметим, что обратное преобразование имеет тот же вид, т. е. $M_8^2 = 1$, *более того, с точностью до проективного преобразования* $\mathbb{P}^2$ *этот линк является бирациональной инволюцией (называемой инволюцией Бертини, см.* [24]).

b) $d = d_1 = 7$, $X \simeq \mathbb{P}^2$, $X_1 \simeq \mathbb{P}^2$,

$$M_{9,7} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ -9 & -8 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} a_1 &= 8a - 7r(x), \\ r(x_1) &= 9a - 8r(x). \end{aligned}$$

С точностью до проективного преобразования этот линк также является бирациональной инволюцией (Гейзера), в частности, $M_7^2 = 1$.

c) $d = d_1 = 6$, $K_{X_1}^2 = K_X^2 = 9$,

$$M_{9,6} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} a_1 &= 5a - 4r(x), \\ r(x_1) &= 6a - 5r(x). \end{aligned}$$

В общем случае это преобразование не является бирациональной инволюцией, хотя обратное преобразование имеет тот же вид, т. е. $M_6^2 = 1$.

d) $d = 5$, $d_1 = 1$, $X \simeq \mathbb{P}^2$, $K_{X_1}^2 = 5$,

$$M_{9,5} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} a_1 &= 3a - 2r(x), \\ r(x_1) &= 6a - 5r(x). \end{aligned}$$

e) $d = d_1 = 3$, $K_{X_1}^2 = K_X^2 = 9$,

$$M_{9,3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} a_1 &= 2a - r(x), \\ r(x_1) &= 3a - 2r(x). \end{aligned}$$

Если $X \simeq \mathbb{P}^2$ *(т. е.* X *обладает* k*-точкой), то с точностью до проективного преобразования* $\mathbb{P}^2$ *этот линк является бирациональной инволюцией (называемой стандартным квадратичным преобразованием).*

f) $d = 2$, $d_1 = 1$, $X \simeq \mathbb{P}^3$, $X_1 = Q \subset \mathbb{P}^2$ — *квадрика с* $\rho(Q) = 1$, $K_{X_1}^2 = 8$;

$$M_{9,2} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} a_1 &= \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}r(x), \\ r(x_1) &= 3a - 2r(x). \end{aligned}$$

$K_X^2 = 8$:

a) $d = d_1 = 7$, $X_1 \simeq X \simeq Q \subset \mathbb{P}^3$ — *квадрика с* $\rho(Q) = 1$,

$$M_{8,7} = \begin{pmatrix} 15 & 14 \\ -16 & -15 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} a_1 &= 15a - 14r(x), \\ r(x_1) &= 16a - 15r(x). \end{aligned}$$

С точностью до автоморфизма, это бирациональная инволюция на X — *вариант инволюции Бертини для квадрики* $Q \subset \mathbb{P}^3$.

b) $d = d_1 = 6$, $X_1 \simeq X$ — *квадрика в* $\mathbb{P}^3$,

$$M_{8,6} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -8 & -7 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} a_1 &= 7a - 6r(x), \\ r(x_1) &= 8a - 7r(x). \end{aligned}$$

Как в предыдущем случае, это бирациональная инволюция Гейзера на квадрике в $\mathbb{P}^3$.

c) $d = 5$, $d_1 = 2$, $K^2_{X_1} = 5$;

$$M_{8,5} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} a_1 &= 4a - 3r(x), \\ r(x_1) &= 6a - 5r(x). \end{aligned}$$

d) $d = 4$, $d_1 = 4$, $K^2_{X_1} = 8$;

$$M_{8,4} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} a_1 &= 3a - 2r(x), \\ r(x_1) &= 4a - 3r(x). \end{aligned}$$

e) $d = 3$, $d_1 = 1$, $K^2_{X_1} = 6$;

$$M_{8,3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} a_1 &= 2a - r(x), \\ r(x_1) &= 4a - 3r(x). \end{aligned}$$

f) $d = 1$, $d_1 = 2$, $X \simeq Q \subset \mathbb{P}^3$, $X_1 \simeq \mathbb{P}^2$;

$$M_{8,1} = \begin{pmatrix} 4/3 & 1/3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} a_1 &= \frac{4}{3}a - \frac{1}{3}r(x), \\ r(x_1) &= 2a - r(x). \end{aligned}$$

Этот линк является обратным к линку $M_{9,2}$ (*случай* $K^2_X = 9$, f), d=2).

$K^2_X = 6$:

a) $d = d_1 = 5$, $X_1 \simeq X$,

$$M_{6,5} = \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ -12 & -11 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} a_1 &= 11a - 10r(x), \\ r(x_1) &= 12a - 11r(x). \end{aligned}$$

Это вариант бирациональной инволюции Бертини на поверхности дель Пеццо степени 6.

b) $d = d_1 = 4$, $X_1 \simeq X$;

$$M_{6,4} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} a_1 &= 5a - 4r(x), \\ r(x_1) &= 6a - 5r(x). \end{aligned}$$

Это вариант бирациональной инволюции Гейзера на поверхности дель Пеццо степени 6.

c) $d = d_1 = 3$, $K^2_{X_1} = 6$;

$$M_{6,3} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} a_1 &= 3a - 2r(x), \\ r(x_1) &= 4a - 3r(x). \end{aligned}$$

В общем случае этот линк не является бирациональной инволюцией.

d) $d = d_1 = 2$, $K_{X_1}^2 = 6$;

$$M_{6,2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} a_1 &= 2a - r(x), \\ r(x_1) &= 3a - 2r(x). \end{aligned}$$

В общем случае этот линк также не является бирациональной инволюцией.

e) $d = 1$, $d_1 = 3$, $X_1 \simeq Q \subset \mathbb{P}^3$ — *квадрика*;

$$M_{6,1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} a_1 &= \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}r(x), \\ r(x_1) &= 2a - r(x). \end{aligned}$$

Этот линк обратен линку $M_{8,3}$ (*случай* $K_X^2 = 8$, d), $d = 3$).

$K_X^2 = 5$:

a) $d = d_1 = 4$, $X_1 \simeq X$;

$$M_{5,4} = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ -10 & -9 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} a_1 &= 9a - 8r(x), \\ r(x_1) &= 10a - 9r(x). \end{aligned}$$

Это бирациональная инволюция Бертини на поверхности дель Пеццо степени 5.

b) $d = d_1 = 3$, $X_1 \simeq X$;

$$M_{5,3} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} a_1 &= 4a - 3r(x), \\ r(x_1) &= 5a - 4r(x). \end{aligned}$$

Это инволюция Гейзера на поверхности дель Пеццо степени 5.

c) $d = 2$, $d_1 = 5$, $X_1 \simeq Q \subset \mathbb{P}^3$ — *квадрика*;

$$M_{5,2} = \begin{pmatrix} 5/2 & 3/2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} a_1 &= \frac{5}{2}a - \frac{3}{2}r(x), \\ r(x_1) &= 3a - 2r(x). \end{aligned}$$

Этот линк обратен линку $M_{8,5}$ (*случай* $K_X^2 = 8$, c), $d = 5$).

d) $d = 1$, $d_1 = 5$, $X_1 \simeq \mathbb{P}^2$;

$$M_{5,1} = \begin{pmatrix} 5/3 & 2/3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} a_1 &= \frac{5}{3}a - \frac{2}{3}r(x), \\ r(x_1) &= 2a - r(x). \end{aligned}$$

Этот линк обратен линку $M_{9,5}$ (*случай* $K_X^2 = 9$, d), $d = 5$).

$K_X^2 = 4$:

a) $d = d_1 = 3$, $X_1 \simeq X$;

$$M_{4,3} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -8 & -7 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} a_1 &= 7a - 6r(x), \\ r(x_1) &= 8a - 7r(x). \end{aligned}$$

Это инволюция Бертини, действующая на поверхности дель Пеццо степени 4.

b) $d = d_1 = 2$, $X_1 \simeq X$;

$$M_{4,2} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} a_1 &= 3a - 2r(x), \\ r(x_1) &= 4a - 3r(x). \end{aligned}$$

Это инволюция Гейзера, действующая на X.

$K_X^2 = 3$:

a) $d = d_1 = 2$; $X_1 \simeq X$;

$$M_{3,2} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} a_1 &= 5a - 4r(x), \\ r(x_1) &= 6a - 5r(x). \end{aligned}$$

Это инволюция Бертини на кубической поверхности.

b) $d = d_1 = 1$, $X_1 \simeq X$;

$$M_{3,1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} a_1 &= 2a - r(x), \\ r(x_1) &= 3a - 2r(x). \end{aligned}$$

Это инволюция Гейзера на X.

$K_X^2 = 2$:

a) $d = d_1 = 1$; $X_1 \simeq X$;

$$M_{2,1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} a_1 &= 3a - 2r(x), \\ r(x_1) &= 4a - 3r(x). \end{aligned}$$

Это инволюция Бертини на поверхности дель Пеццо степени 2.

Случай $X, X_1 \in \{\mathbb{C}\}$. *Здесь*

$$\mathcal{H}_Z \sim -a\sigma^* K_X + b\sigma^* f - r(x)E = -a_1\sigma_1^* K_{X_1} + b_1 f_1 - r(x_1)E_1.$$

Имеются только следующие возможности.

$K_X^2 \leqslant 8$ (*это наиболее общий случай*): *пусть* $\pi\colon X \to C$, $\pi_1\colon X_1 \to C_1$ — *структурные морфизмы,* $x \in X$ — *замкнутая точка степени* $d = \deg x$, *не лежащая на вырожденных слоях морфизма* π, $X_x = \pi^{-1}(\pi(x))$ — *соответствующий слой. Предположим, что каждый геометрический слой* $\overline{X}_i \subset \subset X_x \otimes \overline{k}$ *содержит только одну из геометрических точек* $\overline{x}_i \in x \otimes \overline{k}$. *Тогда линк* $\Phi_1 = \sigma_{x_1} \circ \sigma_x^{-1}$ *состоит из раздутия точки* x *и последующего стягивания собственного прообраза на* Z *слоя* X_x. *Этот линк мы называем элементарным преобразованием с центром в точке* x (*вдоль морфизма* $\pi\colon X \to C$) *и обозначаем через* ε_x. *Преобразование* ε_x^{-1} *действует следующим образом*:

$$-K_X \to -K_{X_1} + df_1 - 2x_1, \qquad f \to f_1, \qquad x \to df_1 - x_1,$$

т. е. в базисе $(-K_X, f, x)$ *задается матрицей*:

$$E_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & 1 & d \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} a_1 &= a, \\ b_1 &= b + d(a - r(x)), \\ r(x_1) &= 2a - r(x). \end{aligned} \tag{2.6.5}$$

Обратное преобразование имеет тот же вид, т. е. $E_x^2 = 1$.

(iii) Линки типа III. *Конструкция таких линков обратна конструкции линков типа* I. *Здесь* $X \in \{\mathbb{C}\}$, $X_1 \in \{\mathbb{D}\}$, $\mathcal{H}_X \sim -aK_X + bf$, $\sigma\colon X \to X_1$ — *стягивание неприводимого исключительного дивизора* E *в неособую точку* $x_1 \in X_1$ *степени* $d_1 = \deg x_1$, $\mathcal{H}_{X_1} \sim -a_1 K_{X_1}$.

$K_{X_1}^2 = 9$:

a) $d_1 = 1$, $X \simeq \mathbb{F}_1 \to \mathbb{P}^1$, $\sigma\colon X \to \mathbb{P}^2 = X_1$ — *стягивание исключительного сечения. Линк действует следующим образом*:

$$-K_X \to -K_{X_1} - x_1, \qquad a_1 = a + \frac{1}{3}b,$$
$$f \to -\frac{1}{3}K_{X_1} - x_1, \qquad r(x_1) = a + b;$$

b) $d_1 = 4$, $\varphi\colon X \to \mathbb{P}^1$ — *расслоение на коники,* $K_X^2 = 5$, $-K_X$ *обилен,* $X_1 \simeq \mathbb{P}^2$, $\sigma\colon X \to X_1 = \mathbb{P}^2$ — *стягивание четверки попарно непересекающихся* (-1)*-кривых* $E \sim -2K_X - 3f$. *Линк действует по формулам*:

$$-K_X \to -K_{X_1} - x_1, \qquad a_1 = a + \frac{2}{3}b,$$
$$f \to -\frac{2}{3}K_{X_1} - x_1, \qquad r(x_1) = a + b.$$

$K_{X_1}^2 = 8$:

$d_1 = 2$, $\varphi\colon X \to \mathbb{P}^1$ — *расслоение на коники,* $K_X^2 = 6$, $-K_X$ *обилен,* $\sigma\ X \to X_1 = Q \subset \mathbb{P}^3$ — *стягивание пары непересекающихся сопряженных* (-1)*-кривых* $E \sim -K_X - 2f$. *Этот линк действует по формулам*:

$$-K_X \to -K_{X_1} - x_1, \qquad a_1 = a + \frac{1}{2}b,$$
$$f \to -\frac{1}{2}K_{X_1} - x_1, \qquad r(x_1) = a + b.$$

$K_{X_1}^2 = 4$:

$d_1 = 1$, $\varphi\colon X \to \mathbb{P}^1$ — *расслоение на коники,* $-K_X^2 = 3$, $\sigma\colon X \to X_1$ — *стягивание* (-1)*-кривой* $E \sim -K_X - f$. *Линк действует по формулам*:

$$-K_X \to -K_{X_1} - x_1, \qquad a_1 = a + b,$$
$$f \to -K_{X_1} - 2x_1, \qquad r(x_1) = a + 2b.$$

(iv) Линки типа IV. *Здесь* $X = X_1 \in \{\mathbb{C}\}$ *и линк состоит в переходе от одной структуры расслоения на коники к другой,* $\mathcal{H}_X \sim -aK_X + bf = -a_1K_X + b_1f_1$, $-K_X$ *обилен и имеются только следующие возможности*:

$K_X^2 = 8$:

$X = C \times C_1 = X_1$, *где* C, C_1 — *гладкие кривые рода нуль,* $\varphi = \mathrm{pr}_1\colon X \to C$, $\varphi_1\colon \mathrm{pr}_2\ X_1 = X \to C_1$ — *проекции на соответствующие множители. Линк действует следующим образом*:

$$-K_X = -K_{X_1}, \qquad a_1 = a + \frac{1}{2}b,$$
$$f \sim -\frac{1}{2}K_{X_1} - f_1, \qquad b_1 = -b.$$

Если $C \simeq C_1$, то этот линк представлен автоморфизмом (инволюцией) $\tau\colon C \times C_1 \to C_1 \times C$ перестановки множителей. Инволюция τ переставляет две структуры расслоения.

$K_X^2 = 4$:

$\varphi\colon X \to C$, $\varphi_1\colon X_1 = X \to C_1$ — *расслоения на коники*:

$$\begin{aligned} -K_X &= -K_{X_1}, & a_1 &= a + b, \\ f &\sim -K_{X_1} - f, & b_1 &= -b. \end{aligned}$$

В некоторых случаях этот линк также представлен (бирегулярной) инволюцией, переставляющей структуры расслоений, например, над $\mathbb{R}$. В общем случае, однако, это не так (см. [3]).

$K_X^2 = 2$:

$X_1 = X$, $C_1 = C$, $\varphi\colon X \to C$, $\varphi_1\colon X_1 = X \to C_1$ — *расслоения на коники. Линк представлен (бирегулярной) инволюцией Гейзера $\gamma\colon X \to X$, действующей по формулам*:

$$\gamma\colon \begin{aligned} -K_X &= -K_{X_1}, & a_1 &= a + 2b, \\ f &\to -2K_{X_1} - f_1, & b_1 &= -b. \end{aligned}$$

$K_X^2 = 1$:

$X_1 = X$, $C = C_1 = \mathbb{P}^1$, $\varphi\colon X \to C$, $\varphi_1\colon X_1 = X \to C_1$ — *расслоения на коники. Линк представлен инволюцией Бертини $\beta\colon X \to X$, действующей по формулам*:

$$\beta\colon \begin{aligned} -K_X &= -K_{X_1} = -K_X, & a_1 &= a + 4b, \\ f &\to -4K_{X_1} - f_1, & b_1 &= -b. \end{aligned}$$

Доказательство. Мы ограничимся краткими указаниями, так как все эти результаты известны и опубликованы в цикле статей [2–18]. Предположение об общности положения геометрических точек $\{\overline{x}_i\} = x \otimes \overline{k}$ на $\overline{X} = X \otimes \overline{k}$, $x \in X$, $X \in \{\mathbb{D}\}$, означает всюду, что на раздутии $\sigma\colon Z \to X$ точки x антиканонический класс $-K_Z$ обилен. По определению линков типа (I)–(III) в этой ситуации на Z существуют два экстремальных луча и $\rho(Z) = 2$, так что $-K_Z$ обилен по численному критерию Клеймана. Именно такие линки используются в доказательстве теоремы 2.5 (см. комментарий 2 в конце доказательства).

(i) Каждый линк типа I определяется раздутием $\sigma\colon X_1 \to X$ замкнутой точки $x \in X$, $X \in \{\mathbb{D}\}$, так, чтобы $X_1 \in \{\mathbb{C}\}$, т. е. на X_1 существует структура расслоения на коники $\varphi_1\colon X_1 \to C_1$ со слоем f_1. В терминах п. 1.4 собственный образ на X пучка $|f_1|$ имеет вид

$$-\lambda K_X - \mu x, \quad \mu \in \mathbb{Z}, \quad \mu > 0, \quad \lambda \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \cup \frac{1}{3}\mathbb{Z}, \quad \lambda > 0.$$

Соотношения (1.3.2) здесь принимают вид

$$\lambda^2 K_X^2 - \mu^2 d = 0, \qquad \lambda K_X^2 - \mu d = 2, \tag{2.6.1}$$

где $d = \deg x$. Так как K_X^2 принимает только 8 значений 1, 2, …, 6, 8, 9 и $\mu/\lambda = \sqrt{K_X^2/d}$ — в рациональное число, то элементарные вычисления

показывают, что решениями уравнений (2.6.1) являются только те, что указаны в 2.6 (i) и все они, очевидно, реализуются. Формулы преобразования численных характеристик — стандартные следствия пересечений для раздутия неособой точки на гладкой поверхности.

(ii) В случае $X, X_1 \in \{\mathbb{D}\}$ пусть $\lambda, \lambda_1 \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \cup \frac{1}{3}\mathbb{Z}$, $\mu, \mu_1 \in \mathbb{Z}$, $\lambda, \lambda_1, \mu, \mu_1 > 0$, таковы, что собственный образ линейной системы $|-K_{X_1}|$ на X и собственный образ линейной системы $|-K_X|$ на X_1 имеют вид

$$-K_{X_1} \to -\lambda K_X - \mu x, \qquad -K_X \to -\lambda_1 K_{X_1} - \mu_1 x_1.$$

Из (1.3.2) получаем следующие системы равенств:

$$\begin{cases} K_{X_1}^2 = \lambda^2 K_X^2 - \mu^2 d, \\ K_{X_1}^2 = \lambda K_X^2 - \mu^2 d, \end{cases} \qquad \begin{cases} K_X^2 = \lambda_1^2 K_{X_1}^2 - \mu_1^2 d_1, \\ K_X^2 = \lambda_1 K_{X_1}^2 - \mu_1 d_1. \end{cases} \tag{2.6.2}$$

Так как Φ_1 не является изоморфизмом, то по лемме Нётера 2.4 имеем: $\lambda > 1$, $\lambda_1 > 1$, $\mu > \lambda$, $\mu_1 > \lambda_1$. Отсюда по (1.5.4) $d < K_X^2 - \frac{1}{\lambda^2} K_{X_1}^2$, $d_1 < K_{X_1}^2 - \frac{1}{\lambda_1^2} K_X^2$, т. е. d, d_1 могут принимать только целые значения из множества $\{1, 2, \dots, 8\}$. Поскольку K_X^2, $K_{X_1}^2$ тоже целые из множества $\{1, 2, \dots, 6, 8, 9\}$, μ, μ_1 — целые положительные, то при указанных выше ограничениях на λ, λ_1, μ, μ_1 непосредственно проверяем, что системы (2.6.2) не имеют других решений, кроме указанных в формулировке теоремы.

Для доказательства существования линков с заданными численными характеристиками — решениями систем (2.6.2) — достаточно указать на раздутии $\sigma\colon Z \to X$ точки $x \in X$ другой, отличный от E, экстремальный луч E_1. Для этого используется теория перечисления на неособой поверхности Z с обильным $-K_Z$, включая теорему Римана–Роха. Например, рассмотрим случай $K_X^2 = 9$: c) $d = 6$. Из (2.6.2) при требуемых ограничениях находим единственное решение: $K_{X_1}^2 = 9$, $\lambda = \lambda_1 = 5$, $\mu = \mu_1 = 6$, $d_1 = 6$. Отсюда для линка

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, equal] \arrow[d, "\sigma"'] & Z \arrow[d, "\sigma"] \\ X & X_1 \end{tikzcd}$$

находим $K_Z = \sigma^* K_X + E = \sigma_1^* K_{X_1} + E_1$. Тогда $E_1 \sim -uK_Z - vE$ для некоторых u, v с $u \geqslant 0$ и должна быть шестеркой попарно непересекающихся сопряженных над k (-1)-кривых. Имеем:

$$-K_Z E_1 = 6 = 3u - 6v, \qquad E_1^2 = -6 = 3u^2 - 12uv - 6v^2.$$

Решая эту систему, находим $u = 4$, $v = 1$, т. е. $E_1 \sim -4K_Z - E$, $E \sim -4K_Z - E_1$. По теореме Римана–Роха

$$h^0(\mathcal{O}_Z(E_1)) \geqslant \frac{E_1(E_1 - K_Z)}{2} + 1 = 1,$$

т. е. требуемая кривая E_1 существует (т. е. дивизор E_1 эффективен) и неприводима над k, так как является одной из образующих группы $\operatorname{Pic}_k Z$.

Аналогично рассматриваются случаи $K_X^2 = 9$: d)–f); $K_X^2 = 8$: c)–e); $K_X^2 = 6$: c)–e); $K_X^2 = 5$: c), d).

В остальных случаях существование другого экстремального луча E_1 на Z можно доказать, используя инволюции Бертини и Гейзера. Напомним их определения.

Инволюция Бертини действует бирегулярно на поверхности дель Пеццо Y степени $K_Y^2 = 1$. Здесь линейная система $|-2K_Y|$ задает двулистное накрытие $\varphi_{-2K_Y}\colon Y \to Q^* \subset \mathbb{P}^3$ квадратичного конуса Q^* в $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в дивизоре $D \subset Q^*$, высекаемом кубикой, не проходящей через вершину конуса. Тогда инволюция Бертини $\beta\colon Y \to Y$ — это по определению инволюция этого двойного накрытия. Если $E \subset Y$ — (-1)-кривая, то $E' = \beta(E) \sim -2K_Y - E$. Отсюда легко определить действие β на группе циклов $Z^*(X)$ для любой рациональной поверхности X с фиксированным бирациональным изоморфизмом $g\colon X \dashrightarrow Y$.

Аналогично, инволюция Гейзера действует бирегулярно на поверхности дель Пеццо Y степени $K_Y^2 = 2$. Здесь линейная система $|-K_Y|$ задает двулистное накрытие $\varphi_{-K_Y}\colon Y \to \mathbb{P}^2$. Инволюция Гейзера — это инволюция $\gamma\colon Y \to Y$ этого двойного накрытия. Если $E \subset Y$ — (-1)-кривая, то $E' = \gamma(E) \sim -K_Y - E$. Отсюда, как и в предыдущем случае, определяется действие на $Z^*(X)$ для любой рациональной поверхности X с бирациональным отображением $X \dashrightarrow Y$.

Таким образом, во всех остальных случаях 2.6 (ii), случай $X, X_1 \in \{\mathbb{D}\}$, элементарные линки — это просто бирациональные действия инволюций Бертини и Гейзера на соответствующих поверхностях.

В относительном случае $X, X_1 \in \{\mathbb{C}\}$ линк является преобразованием над базой S

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, dashed, "\Phi_1"] \arrow[dr] & & X_1 \arrow[dl] \\ & S. & \end{tikzcd}$$

На раздутии $\sigma\colon Z \to X$ точки $x \in X$ антиканонический класс $-K_X$ должен быть относительно обилен, поскольку по конструкции линка на $Z \to S$ должны существовать два относительных экстремальных луча. Этим объясняются условия общности для геометрических точек $\{\overline{x}_i\} = x \otimes \overline{k}$, указанные в формулировке теоремы.

(iii) Как уже отмечалось, конструкция линков типа III обратна конструкции линков типа I. Следует отметить только, что на любой поверхности $X \in \{\mathbb{C}\}$ степени $K_X^2 = 3$, 5 и 6 антиканонический дивизор $-K_X$ обилен. Так как $\rho(X) = 2$, то достаточно показать, что на X существует другой отличный от f экстремальный луч E. Если $K_X^2 = 3$, то $E \sim -K_X - f$. Действительно, $E^2 = -1$, $-K_X E = K_X^2 - K_X f = -1$, $h^0(\mathcal{O}_X(E)) \geqslant 1$, E неприводимо, посколь-

ку $(-K_X - bf)^2 = 3 - 4b$ и $p_a(-K_X - bf) = 1 - b < 0$ при $b \geqslant 2$. Кроме того, так как $3 = K_X^3 = 8 - \sum \deg t_i$, где $\{t_i\} \subset C$ — множество точек вырождения структурного морфизма, то дивизор $\sum \deg t_i$ на C определен над k и имеет нечетную степень. Следовательно, на C существует k-точка и $C \simeq \mathbb{P}^1$. Отсюда слой f, а вместе с ним и E, определены над k.

Аналогично рассматриваются случаи $K_X^2 = 5$ и 6. В случае $K_X^2 = 5$ $E \sim -2K_X - 3f$ состоит из четырех сопряженных непересекающихся (-1)-кривых, а в случае $K_X^2 = 6$ $E \sim -K_X - 2f$ есть пара сопряженных непересекающихся (-1)-кривых. В последнем случае кривая C может не иметь k-точек.

(iv) Вычисления этих линков элементарны: в случаях $K_X^2 = 1$ и 2 — это инволюции Бертини и Гейзера, соответственно; в случае $K_X^2 = 4$ — вторая структура расслоения на коники высекается пучком плоскостей в $\mathbb{P}^4 \supset X$, проходящих через один из слоев f структурного морфизма $\pi\colon X \to C$. При этом C и C' одновременно имеют или не имеют k-точки. Доказательство теоремы 2.6 закончено. $\square$

Отметим, что из определения линков и доказательства теоремы 2.6 видно, что для каждого линка Φ_1 обратное отображение Φ_1^{-1} также является линком, при этом, если Φ_1 — линк типа I, то Φ_1^{-1} — линк типа III, и, наоборот, если Φ_1 — линк типа II или IV, то и Φ_1^{-1} — линк, соответственно, типа II или IV.

§ 3. Соотношения между элементарными линками: определения и общие свойства

3.1. По теореме 2.5 любое бирациональное отображение $\chi\colon X \dashrightarrow X'$, $X, X' \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$, над совершенным полем k раскладывается в композицию $\chi = \Phi_n \circ \ldots \circ \Phi_1$ элементарных линков типа I–IV. В теореме 2.6 дана полная классификация всех таких линков. Здесь мы начинаем обсуждение вопроса о степени однозначности разложения χ на элементарные составляющие. Прежде всего отметим, что по определению каждый элементарный линк в диаграмме (2.5.1) определен с точностью до изоморфизмов X и X_1, сохраняющих структуры, т. е. k-изоморфизмов, если $X, X_1 \in \{\mathbb{D}\}$, и k-изоморфизмов, сохраняющих соответствующие пучки коник, если $X, X_1 \in \{\mathbb{C}\}$.

Определение. Произведение элементарных линков $R = \Phi_n \cdots \Phi_2 \Phi_1$ называется *соотношением* (между линками) на X, если R имеет смысл как композиция бирациональных отображений Φ_i и бирациональное отображение $\Phi_n \circ \ldots \circ \Phi_1 = 1$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\varphi"'] & X_1 \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\varphi_1"'] & X_2 \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\varphi_2"'] & \cdots \arrow[r, dashed] & X_n \arrow[r, equal] \arrow[d, "\varphi_n"'] & X' \arrow[d, "\varphi'"'] \\
S & S_1 & S_2 & & S_n & S'
\end{tikzcd} \tag{3.1.1}$$

является изоморфизмом $X \xrightarrow{\sim} X'$, сохраняющим структуры, т. е. индуцирующим изоморфизм $S \xrightarrow{\sim} S'$. Соотношение $R = \Phi_n \cdots \Phi_1$ называется *приведенным*, если $n > 2$ и $\Phi_{i+1} \circ \Phi_i \neq 1 \quad \forall\, i = 1, \ldots, n-1$.

Большинство из линков типа II и все линки типа IV (см. 2.6) удовлетворяют простейшему соотношению $\Phi^2 = 1$, хотя и не все из них представлены бирациональными инволюциями. Ясно, что соотношения возникают там, где процесс раскручивания (т. е. разложения в произведения элементарных линков) бирационального отображения не является однозначно определенным, например, когда соответствующая линейная система имеет несколько независимых максимальных особенностей одинаковой кратности и тем самым имеется произвол в выборе линков типа I или II (см. доказательство теоремы 2.5). Разумеется, это не единственная причина для возникновения соотношений.

По аналогии с разложением бирациональных отображений на элементарные линки мы хотим получить разложение всех соотношений между линками на элементарные соотношения. Поэтому нам предстоит классифицировать все элементарные соотношения и доказать соответствующие результаты о разложении. Для этого, прежде всего, нужно ввести численные характеристики соотношений и уточнить понятие разложения соотношений на элементарные.

Пусть $R = \Phi_n \cdots \Phi_1$ — соотношение. Рассматривая его как композицию бирациональных отображений (3.1.1), определим последовательность линейных систем $\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_{X_i}$ и их численные характеристики — степени $A_i = A_i(R, \mathcal{H}_X) = (a_i, r_i, m_i)$, $i = 0, \ldots, n$, следующим образом:

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_X \sim \begin{cases} -aK_X, & \text{если } X \in \{\mathbb{D}\}, \\ -aK_X + bf, & \text{если } X \in \{\mathbb{C}\}, \end{cases}$$

— очень обильная линейная система на X; $A_0 = A(X, \mathcal{H}_X) = (a_0, r_0, m_0)$ — степень $(\mathcal{H}_X, \varphi\colon X \to S)$, как в определении п. 2.4; $\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_{X_i}$, $i = 1, \ldots, n$, — собственный образ на X_i линейной системы $\mathcal{H}_0$ при бирациональном отображении $R(i) := \Phi_i \circ \Phi_{i-1} \circ \ldots \circ \Phi_1$ ($\mathcal{H}_{X_i}$ является также собственным прообразом $\mathcal{H}_0$ при бирациональном отображении $R^{-1}(i)\colon X_i \dashrightarrow X$); $A_i = A_i(\Phi, \mathcal{H}_X) = A(\Phi_i) = A(X_i, \mathcal{H}_i) = (a_i, r_i, m_i)$ — степень $(\mathcal{H}_i, \varphi_i\colon X_i \to S_i)$. Ясно, что $A_n = A_0 = (a, 0, 0)$.

О п р е д е л е н и е. *Высотой* $A(R) = A(R, \mathcal{H})$ соотношения R называется $\max\{A_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ в смысле лексикографического порядка, как в п. 2.4.

Для любого нетривиального соотношения R $\;A(R) > A_0 = A_n$.

Перечислим теперь некоторые из свойств соотношений:

(i) если $R = \Phi_n \cdots \Phi_1$ — соотношение на X, то $R = \Phi_1^{-1} \cdots \Phi_n^{-1}$ также является соотношением на X и $A(R^{-1}) = A(R)$ так же, как $\mathcal{H}_i$ на X_i, не меняется;

(ii) если R и R' — соотношения на X, то RR' и $R'R$ — тоже соотношения на X, называемые произведениями R и R', и $A(RR') = A(R'R) = \max(A(R), A(R'))$;

(iii) для любого бирационального отображения $\chi\colon Y \dashrightarrow X$, $X, Y \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$ и его разложения в композицию элементарных линков $\chi = \psi_m \cdots \psi_1$ выражение $\chi^{-1} R \chi = \psi_1^{-1} \cdots \psi_m^{-1} \Phi_n \cdots \Phi_1 \psi_m \cdots \psi_1$ является соотношением на Y;

(iv) если $R = \Phi_n \cdots \Phi_1$ — соотношение на X и $S = \psi_{im} \cdots \psi_{i1}$ — соотношение на X_i в диаграмме (3.1.1), то $R' = \Phi_n \cdots \Phi_{i+1} \psi_{im} \cdots \psi_{i1} \Phi_i \cdots \Phi_1$ —

тоже соотношение на X, называемое расширением соотношения R при помощи S;

(v) если $R = \Phi_n \cdots \Phi_{i+m+1}\Phi_{i+m} \cdots \Phi_{i+1}\Phi_i \cdots \Phi_1$ — соотношение на X и $S = \Phi_{i+m} \cdots \Phi_{i+1}$ — соотношение на X_i (в частности, $X_i/S_i \simeq X_{i+m}/S_{i+m}$ — изоморфизм, сохраняющий структуры), то $R' = \Phi_n \cdots \Phi_{i+m+1}\Phi_i \cdots \Phi_1$ — тоже соотношение на X, называемое сокращением (или редукцией) R при помощи S.

Два соотношения, получаемые одно из другого с помощью процедур (ii)–(v), будем называть эквивалентными (указывая, в случае необходимости, способ установления эквивалентности).

Комментарий 3. Элементарные линки и соотношения между ними имеют следующую теоретико-групповую интерпретацию. Пусть $X \in \{\mathbb{D}\} \cup \cup \{\mathbb{C}\}$ — минимальная рациональная поверхность над k, $K = k(X)$ — поле рациональных функций на X и $\{X_i\}_{i\in I} \subset \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$ — семейство всех минимальных рациональных поверхностей над k, бирационально эквивалентных X. Выберем k-изоморфизмы $\theta_i\colon K_i = k(X_i) \xrightarrow{\sim} K = k(X)$, т. е. рассмотрим $\{X_i\}_{i\in I}$ как семейство k-минимальных моделей поля K над k. Тогда любое бирациональное отображение $\chi_{ij}\colon X_i \to X_j$ индуцирует изоморфизм полей $\widehat{\chi}_{ij}\colon K_j \xrightarrow{\sim} K_i$ и автоморфизм поля K над k: $\theta_i\widehat{\chi}_{ij}\theta_j^{-1}\colon K \xrightarrow{\sim} K$. При этих отображениях образы линков между $\{X_i\}_{i\in I}$ и групп автоморфизмов $\operatorname{Aut}_R X_i$, $i \in I$, сохраняющих структуру $X_i \to S_i$, порождают в силу теоремы 2.5 группу $\operatorname{Aut}_k K$.

Соотношения между линками в такой интерпретации — это не что иное, как соотношения в групповом смысле между порождающими (образами линков) группы $\operatorname{Aut}_k K$ с точностью до образов группы $\operatorname{Aut}_k X_i$.

Наша цель — определить набор простейших соотношений, с помощью которых любое соотношение между линками может быть редуцировано к тривиальному. Прежде всего, всякое соотношение раскладывается в произведение специальных в следующем смысле.

Определение. Соотношение $R = \Phi_n \cdots \Phi_1$ высоты $A(R) > A_0$ называется *специальным*, если существует индекс s, называемый *вершиной* R, $1 \leqslant s < n$, такой, что для степеней $A_i = (a_i, r_i, m_i)$ выполняются следующие условия:

1) $A_{i-1} < A_i$, $1 \leqslant i \leqslant s-1$;

2) $A_{s-1} \leqslant A_s$;

3) $A_i > A_{i+1}$, $s < i < n$.

Если, кроме того, $A_{s-1} < A_s$, то R называется *очень специальным* (ср. [14, 15]).

3.2. Лемма. *Любое нетривиальное приведенное соотношение* $R = \Phi_n \cdots \Phi_i$ *эквивалентно произведению специальных, высоты* $\leqslant A(R)$.

Доказательство. Пусть s_1 — наибольший индекс, $1 < s_1 < n$, для которых выполняются условия: $A_{i-1} < A_i$ для $1 < i < s_1$ и $A_{s_1-1} \leqslant A_{s_1}$. Рассмотрим бирациональное отображение $R(s_1) = \Phi_{s_1}\Phi_{s_1-1} \cdots \Phi_1$. Для отображения $R(s_1)^{-1}\colon X_{s_1} \dashrightarrow X$ пусть $\psi = \psi_m \cdots \psi_n$ — композиция линков, раскручивающих отображение $R(s_1)^{-1}$, как в теореме 2.5, т. е. $\psi_m \cdots \psi_1\Phi_{s_1} \cdots \Phi_1$ — изомор-

физм (обратный к $R(s_1)^{-1}\psi^{-1}$), сохраняющий структуру над S. Стало быть, это — некоторое соотношение между линками, причем приведенное и специальное, высоты $\leqslant A(R)$. Действительно, часть $\Phi_{s_1}\cdots\Phi_1$ является приведенной как часть приведенного соотношения R, а часть $\psi_m\cdots\psi_1$ приведена, поскольку раскручивание по теореме 2.5 понижает степень на каждом шаге. Осталось проверить, что $\psi_1 \neq \Phi_{s_1}^{-1}$. Так как ψ_1 уменьшает степень, то в случае $A_{s_1} = A_{s_1-1}$, очевидно, линк $\Phi_{s_1}^{-1}$ не равен ψ_1, так как сохраняет степень, и в случае $A_{s_1} > A_{s_1-1}$ по выбору индекса s_1 должно быть $A_{s_1+1} < A_{s_1}$. Тогда в процессе раскручивания отображения $R(s_1)^{-1}$ в качестве ψ_1 можно взять Φ_{s_1+1} и, поскольку по условию оно приведено, то $\psi_1 \neq \Phi_{s_1}^{-1}$. Расширим соотношение R при помощи $\psi_1^{-1}\cdots\psi_m^{-1}\psi_m\cdots\psi_1 = 1$ и положим $R_1 = \psi_m\cdots\psi_1\Phi_{s_1}\cdots\Phi_1$, тогда от соотношения $\Phi_n\cdots\Phi_{s_1+1}\psi_1^{-1}\cdots\psi_m^{-1}R_1$, эквивалентного R, отщепляется множитель R_1, являющийся специальным соотношением высоты $\leqslant A(R)$. Если оставшаяся часть соотношения $\Phi_n\cdots\Phi_{s+1}\psi_1^{-1}\cdots\psi_m^{-1}$ не является приведенной (это случается тогда и только тогда, когда $\Phi_{s+1} = \psi_1$), то после сокращения рядом стоящих взаимно обратных линков мы получим либо тривиальное, либо приведенное соотношение

$$\Phi_n\cdots\Phi_{s_1+r}\psi_r^{-1}\cdots\psi_m^{-1} = 1 \tag{3.2.1}$$

для некоторого целого r, $0 \leqslant r \leqslant m$.

В соотношении (3.2.1), если оно не тривиально, степень A_i обладает свойствами: $A(\psi_j^{-1}) = A(\psi_{j-1})$, $A(\psi_{j-1}^{-1}) > A(\psi_j^{-1})$, $j = r,\dots,m$, и можно считать, что $A(\Phi_{s_1+r}) \geqslant A(\psi_r^{-1}) = A(\psi_{r-1})$, в противном случае можно считать $\psi_r = \Phi_{s_1+r}$ и слово (3.2.1) не будет приведенным. □

Теперь, как и выше, от соотношения можно отщепить множителем специальное соотношение R_2 высоты $\leqslant A(R)$, причем по предыдущим свойствам степени $s_2 > s_1 + r + 1$. Таким образом, продолжая этот процесс отщепления, через конечное число мы получим требуемое разложение в произведение специальных $R = R_m\cdots R_1$.

Далее для удобства вычислений мы несколько изменим определение степени $A(X,\mathcal{H}_X)$, данное в п. 4.2.

Определение. В обозначениях (2.3.5) *модифицированной степенью* $\widehat{A}(X,\mathcal{H}_X)$, где

$$\mathcal{H}_X \sim \begin{cases} -aK_X, & \text{если } X \in \{\mathbb{D}\},\\ -aK_X + bf, & \text{если } X \in \{\mathbb{C}\},\end{cases}$$

есть собственный прообраз очень обильной линейной системы $\mathcal{H}'$ на X', как в (2.3.4) при некотором бирациональном отображении $\chi\colon X \dashrightarrow X'$, будем называть пару чисел $(a,b) = \widehat{A}(X,\mathcal{H}_X)$, где $a,b \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}\cup\frac{1}{3}\mathbb{Z}$, $a > 0$, и по определению $b = 0$, если $X \in \{\mathbb{D}\}$. Отношение порядка определяется, как и для степени $A(X,\mathcal{H}_X)$, в п. 4.2 лексикографически.

Отметим, что b может принимать и отрицательные значения, но при фиксированном a ограничено снизу. Действительно, из (1.6.2) имеем неравенство

$a^2K_X^2 + 4ab > 0$. Отсюда $b > -\frac{1}{4}aK_X^2 \geqslant -2a$, так как $K_X^2 < 8$ и $a > 0$. Связь между $A(X, \mathcal{H}_X)$ и $\widehat{A}(X, \mathcal{H}_X)$ объясняет следующая

3.3. Лемма. *Степени $A(X, \mathcal{H}_X)$ и $\widehat{A}(X, \mathcal{H}_X)$ эквивалентны в том смысле, что для любого бирационального отображения $\Phi_1\colon X \dashrightarrow X_1$, $X, X_1 \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$,*

$$A(X_1, \mathcal{H}_{X_1}) \leqslant A(X, \mathcal{H}_X) \Longleftrightarrow \widehat{A}(X_1, \mathcal{H}_{X_1}) \leqslant \widehat{A}(X, \mathcal{H}_X). \tag{3.3.1}$$

Доказательство. В силу теоремы 2.5 достаточно установить (3.3.1) для любого элементарного линка Φ_1 типа I–IV. Это немедленно проверяется, исходя из определений и явных формул теоремы 2.6 действия линков на коэффициенты (a, b). Проверим это, например, для линков типа I. В этом случае $X \in \{\mathbb{D}\}$, $X_1 \in \{\mathbb{C}\}$. Из формул 2.6 (i) имеем: $a_1 \leqslant a \Leftrightarrow r(x) \geqslant a \Longleftrightarrow b_1 \geqslant \geqslant 0$. Поэтому, если $\sigma\colon Z \to X$ — раздутие точки x кратности $r(x)$ в $\mathcal{H}_X$, то степени $A(X, \mathcal{H}_X)$ и $\widehat{A}(X, \mathcal{H}_X)$ одновременно уменьшаются, равны или увеличиваются, если $r(x) > a$, $r(x) = a$ или $r(x) < a$, соответственно, Действительно, если $a_1 = a$, то $r(x) = a$, $b_1 = 0$ и $A(X, \mathcal{H}_X) = A(X_1, \mathcal{H}_{X_1})$, поскольку раздувается не максимальная особенность и, следовательно, число и кратности максимальных особенностей не меняются, что соответствует $\widehat{A}(X, \mathcal{H}_X) = (a, 0) = (a_1, 0) = \widehat{A}(X_1, \mathcal{H}_{X_1})$. Аналогично для линков типа II–IV. Доказательство леммы закончено. □

Замечание. Ввиду этого результата мы всюду можем заменить степень A на модифицированную степень $\widehat{A}$, в частности, и в доказательстве теоремы 2.5, используя, правда, теорему о классификации линков 2.6.

Прежде чем перейти к описанию соотношений между линками, сформулируем еще одно общее определение.

Определение. Пусть $\Phi_n \cdots \Phi_1$ — произведение линков, являющееся разложением некоторого бирационального отображения (т. е. имеет смысл как композиция отображения). Для $n \geqslant i > j \geqslant 1$ будем говорить, что линк Φ_i *сцеплен* с линком Φ_j и писать $\Phi_i[j]$, если Φ_i — линк типа I или II, Φ_j — линк типа III или II, образ $y_j \in X_j$ стягиваемого дивизора для линка Φ_i является раздуваемой точкой $x_{i-1} \in X_{i-1}$ для линка Φ_i, и все промежуточные линки $\Phi_{j+1}, \ldots, \Phi_{i-1}$ и их последовательные произведения являются изоморфизмами в окрестностях точек y_i, x_{i-1} (ср. [14, 15]). Так что вместо $\Phi_n \cdots \Phi_i$ мы будем использовать запись $\Phi_n \cdots \Phi_{i+1}\Phi_i[j]\Phi_{i-1} \cdots \Phi_1$, если Φ_i сцеплено с Φ_j.

Теперь в качестве иллюстрации результатов о соотношениях между линками, излагаемых в следующих двух параграфах §§ 4, 5, рассмотрим частный классический случай кремоновых преобразований плоскости $\mathbb{P}^2$ над алгебраически замкнутым полем.

Согласно теоремам 2.5 и 2.6 образующими в этом случае являются следующие линки.

Тип I. Это только $\sigma_x^{-1}\colon \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{F}_1$ — раздутие точки x.

Тип II. Это элементарные преобразования $\varepsilon_x\mathbb{F}_n \dashrightarrow \mathbb{F}_{n\pm1}$ — раздутие точки x и стягивание собственного образа слоя, проходящего через x.

Тип III. Это стягивание исключительного сечения $\sigma_x\colon \mathbb{F}_1 \to \mathbb{P}^2$ в точку $x \in \mathbb{P}^2$.

Тип IV. Это $\tau\colon \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ — инволюция перестановки множителей.

По теореме 2.5 любое кремоново преобразование $\chi\colon \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ с точностью до линейного проективного преобразования раскладывается в композицию указанных линков. Выясним, насколько такое разложение неоднозначно.

3.4. Лемма. *Следующие произведения линков являются соотношениями*:

(i) $\Phi[1]\Phi$, $\Phi = \varepsilon_x$ *или* τ, $\Phi_4[2]\Phi_3[1]\Phi_2\Phi_1$, *где* $\Phi_1 = \varepsilon_x$, $\Phi_2 = \varepsilon_y$, $x \in \mathbb{F}_n$, $y \in \mathbb{F}_{n\pm1}$ — *замкнутые точки линейчатых поверхностей, лежащие на разных слоях*;

(ii) $\Phi_5\Phi_4[2]\Phi_3\Phi_2\Phi_1$, *где* $\Phi_1 = \sigma_x^{-1}$, $x \in \mathbb{P}^2$, $\Phi_2 = \varepsilon_y$, $y \in \mathbb{F}_1 \setminus E$, $E = \sigma_x^{-1}(x)$ — *исключительный дивизор*, $\Phi_3 = \tau$, $\Phi_4[2] = \varepsilon_{y'}$ — *элементарное преобразование, где точка* y' *определяется по указанному правилу сцепления*, $\Phi_5 = \sigma_x\colon \mathbb{F}_1 \to \mathbb{P}^2$ — *стягивание исключительного сечения.*

Доказательство. Пусть (a,b) выбраны так, что линейная система $\mathcal{H}_X = |-aK_X + bf|$ на $X = \mathbb{F}_n$ очень обильна. Для доказательства (i) достаточно показать, используя формулы леммы 2.6, что указанные композиции линков переводят очень обильную линейную систему в себя. Проверка сводится к интегрированию формул преобразований степеней и кратностей с учетом правил сцепления. Пусть $(a,b;r_{d_1},r_{d_2},\ldots)$ обозначает характеристику линейной системы $\mathcal{H}_X$ на X, где $(a,b) = \widehat{A}(\mathcal{H}_X)$ — модифицированная степень, $r_{d_i} = r(x_i)$ — кратности базисных точек x_i, $\deg x_i = d_i$, в $\mathcal{H}_X$. Пусть $\mathcal{H}_X = \big|-aK_X + bf\big|$ на X очень обильна. Проверим соотношение (i). Ясно, что $\Phi[1]\Phi = 1$. Далее,

$$(a,b;0,0,\ldots) \xrightarrow{\varepsilon_x} (a,a+b;r_1 = 2a,0,\ldots) \xrightarrow{\varepsilon_y}$$
$$\xrightarrow{\varepsilon_y} (a,2a+b;r_1 = 2a,r_2 = 2a,0,\ldots) \xrightarrow{\Phi_3[1]}$$
$$\xrightarrow{\Phi_3[1]} (a,a+b;0,r_2 = 2a,0,\ldots) \xrightarrow{\Phi_4[2]} (a,b;0,0,\ldots).$$

Композиции указанных линков как бирациональных отображений определена, поскольку точки x и y лежат в разных слоях.

Аналогично в случае (ii). Композиция линков определена, поскольку точка y не лежит на исключительном сечении $E \subset \mathbb{F}_1$, и, следовательно, $\varepsilon_y\colon \mathbb{F}_1 \dashrightarrow \mathbb{F}_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Имеем

$$(a,0;0,0,\ldots) \xrightarrow{\sigma_x^{-1}} \left(\frac{3a}{2},-\frac{3a}{2};0,0\right) \xrightarrow{\varepsilon_y} \left(\frac{3a}{2},0;r_1 = 3a,0,\ldots\right) \xrightarrow{\tau}$$
$$\xrightarrow{\tau} \left(\frac{3a}{2},0;3a,0,\ldots\right) \xrightarrow{\varepsilon_{y'}} \left(\frac{3a}{2},-\frac{3a}{2};0,0,\ldots\right) \xrightarrow{\sigma_x} (a,0;0,0,\ldots).$$

Лемма доказана. □

Отметим, что соотношение (ii) является специальным, а соотношение (i) — очень специальным.

3.5. Теорема. *Любое соотношение $R = \Phi_n \cdots \Phi_1$ между элементарными линками в случае алгебраически замкнутого поля k с помощью соотношений* (i) *и* (ii) *из* 3.4 *редуцируется к тривиальному.*

Доказательство. По лемме 3.2 можно предполагать, что соотношение R специальное и приведенное.

Пусть $\widehat{A} = \widehat{A}(R)$ — (модифицированная) высота соотношения R и s — его вершина. Доказательство будем проводить индукцией по высоте. По определению специального соотношения имеем:

$$(a_{s-1}, b_{s-1}) \leqslant (a_s, b_s) = \widehat{A}(R); \quad (a_{s+1}, b_{s+1}) < (a_s, b_s). \tag{3.5.1}$$

Перебирая все возможные значения линков Φ_s, Φ_{s+1} и пользуясь подходящими соотношениями из леммы 3.4, мы редуцируем соотношение R либо к соотношению R' с $\widehat{A}(R') < \widehat{A}(R)$, либо к произведению $R' = R_2 R_1$, для которого выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} \widehat{A}(R') < \widehat{A}(R), & \text{если } R \text{ очень специально,} \\ \left.\begin{array}{l} \widehat{A}(R_2) < \widehat{A}(R), \\ \widehat{A}(R_1) \leqslant A(R), \\ R_1 \text{ — очень специально,} \end{array}\right\} & \begin{array}{l}\text{если } R \text{ специально,} \\ \text{но не очень специально.}\end{array} \end{cases} \tag{3.5.2}$$

Отсюда по индукции немедленно будет следовать утверждение теоремы.

Эти соображения будут часто использоваться в дальнейшем при изучении соотношений.

Итак, предстоит рассмотреть несколько случаев для возможных значений Φ_s, Φ_{s+1}. При этом достаточно перебрать только примерно половину всевозможных значений, поскольку другая половина сводится к рассмотренной путем обращения R^{-1} соотношения R.

Случай $\Phi_s = \varepsilon_{x_{s-1}} \colon \mathbb{F}_1 \dashrightarrow \mathbb{F}_0$, $\Phi_{s+1} = \tau$. Пользуясь соотношением 3.4 (ii) и первым из соотношений 3.4 (i), заменим $\Phi_{s+1}\Phi_s$ на $\Phi'_{s+2}\Phi'_{s+1}\Phi'_s$, где $\Phi'_s = \sigma_{y'_s} \colon \mathbb{F}_1 \to \mathbb{P}^2$ — стягивание исключительного сечения в точку $y'_s \in X'_s \simeq \mathbb{P}^2$, $\Phi'_{s+1} = \sigma^{-1}_{x'_s} \colon X'_s \to X'_{s+1} \simeq \mathbb{F}_1$ — раздутие точки $x'_s = \sigma_{y_s}(x_{s-1})$, $r(x'_s) = r(x_{s-1})$, $\Phi'_{s+2} = \varepsilon_{x'_{s+1}} \colon X'_{s+1} \dashrightarrow X'_{s+2} \simeq \mathbb{F}_0$ — элементарное преобразование с центром в точке $x'_{s+1} = \sigma^{-1}_{x'_s}(y'_s)$, $r(x'_{s+1}) = r(y'_s)$. В результате получим соотношение

$$R' = \Phi_n \cdots \Phi_{s+1}\Phi'_{s+2}\Phi'_{s+1}\Phi'_s\Phi_{s-1} \cdots \Phi_1.$$

Оценим степень $\widehat{A}(R')$. Для этого вычислим $\widehat{A}(\Phi'_{s+i})$, $i = 0, 1, 2$. Из второго неравенства (3.5.1) имеем $b_s < 0$, так как $(a_{s+1}, b_{s+1}) = (a_s + \frac{1}{2}b_s, -b_s) <$

$< (a_s, b_s)$. Далее, первое неравенство (3.5.1) дает $0 > b_s \geqslant b_{s-1}$. Отсюда

$$\widehat{A}(\Phi'_s) := (a'_s, b'_s) = (a'_s, 0) = (a_{s-1} + \frac{1}{3}b_{s-1}, 0) < (a_{s-1}, b_{s-1}) \leqslant (a_s, b_s) = \widehat{A}(R),$$
$$r(y'_s) = a_{s-1} + b_{s-1};$$
$$\widehat{A}(\Phi'_{s+1}) := (a'_{s+1}, b'_{s+1}) = \left(\frac{3a_s - r(x_{s-1})}{2}, \frac{3(r(x_{s-1}) - a'_s)}{2}\right) =$$
$$= \left(a_{s-1} + \frac{a_{s-1} + b_{s-1} - r(x_{s-1})}{2}, \frac{3(r(x_{s-1}) - a'_s)}{2}\right) <$$
$$< (a_{s-1}, b_{s-1}) \leqslant (a_s, b_s) = \widehat{A}(R),$$

так как $b_{s-1} + a_{s-1} - r(x_{s-1}) = b_s < 0$;

$$\widehat{A}(\Phi'_{s+2}) := (a'_{s+2}, b'_{s+2}) = (a'_{s+1}, b'_{s+1} + a'_{s+1} - r(y'_s)) =$$
$$= \left(a_{s-1} + \frac{b_s}{2}, -(b_{s-1} + a_{s-1} - r(x_{s-1}))\right) =$$
$$= \left(a_s + \frac{b_s}{2}, -b_s\right) = (a_{s+1}, b_{s+1}) < (a_{s-1}, b_{s-1}) \leqslant (a_s, b_s) = \widehat{A}(R),$$

так как $a_{s+1} = a_{s-1} + b_s/2 < a_{s-1}$.

Отметим, что $\widehat{A}(\Phi'_{s+2})$ можно было не вычислять, поскольку заранее ясно, что $\widehat{A}(\Phi'_{s+2}) = \widehat{A}_{s+1}$, ввиду равенства отображений $\Phi_{s+1}\Phi_s = \Phi'_{s+2}\Phi'_{s+1}\Phi'_s$.

Из предыдущих вычислений получаем $\widehat{A}(R') = \widehat{A}_{s-1} \leqslant \widehat{A}_s = \widehat{A}(R)$. Если $\widehat{A}_{s-1} < \widehat{A}_s = \widehat{A}(R)$, т. е. если соотношение R очень специально, то $\widehat{A}(R') < \widehat{A}(R)$ и шаг индукции по высоте осуществлен. Если $\widehat{A}_{s-1} = \widehat{A}_s = \widehat{A}(R)$, т. е. если R не очень специально, то, как и в доказательстве леммы 3.2, мы можем отщепить от R' в качестве множителя очень специальное соотношение R_1 с вершиной $s_1 = s - 1$ и представить R' в виде произведения R_2R_1, как в (3.5.2), где $\widehat{A}(R_2) < \widehat{A}(R)$, а $\widehat{A}(R_1) = A(R)$, но R_1 уже очень специально и следующий шаг индукции уменьшает его высоту.

Случай $\Phi_s = \varepsilon_{x_{s-1}}$, $\Phi_{s+1} = \varepsilon_{x_s}$. Имеем:

$$(a_s, b_s) = (a_{s-1}, b_{s-1} + a_{s-1} - r(x_{s-1})),$$
$$(a_{s+1}, b_{s+1}) = (a_s, b_s + a_s - r(x_s)) = (a_{s-1}, b_{s-1} + 2a_{s-1} - r(x_{s-1}) - r(x_s)).$$

Так как по условию $(a_s, b_s) \geqslant (a_{s-1}, b_{s-1})$, то $r(x_{s-1}) \leqslant a_{s-1}$, и

$$(a_{s+1}, b_{s+1}) < (a_s, b_s) \Rightarrow r(x_s) > a_s = a_{s-1} \geqslant r(x_{s-1}).$$

Отсюда точка x_s не может быть бесконечно близкой к точке x_{s-1} и по свойству п. 1.4 (iii) точки x_{s-1}, x_s лежат в слоях над различными точками базы $\mathbb{P}^1$ соответствующих линейчатых поверхностей X_{s-1}, X_s. Следовательно, мы можем воспользоваться соотношением (i) из 3.4, так что

$$R \sim \Phi_n \cdots \Phi_{s+2}\Phi'^{-1}_{s+2}\Phi'^{-1}_{s+3}\Phi'_{s+3}[s+1]\Phi'_{s+2}[s]\Phi_{s+1}\Phi_s\Phi_{s-1}\cdots\Phi_1,$$

где $\Phi'_{s+3}[s+1]\Phi'_{s+2}[s]\Phi_{s+1}\Phi_s$ на 1. В результате R эквивалентно

$$R' = \Phi_n \cdots \Phi_{s+2}\Phi'^{-1}_{s+2}\Phi'^{-1}_{s+3}\Phi_{s-1}\cdots\Phi_1.$$

Оценим степень $\widehat{A}(R')$. Имеем:

$$\widehat{A}(\Phi'^{-1}_{s+2}) = \widehat{A}(\Phi_{s+1}) < \widehat{A}(\Phi_s) = \widehat{A}(R),$$
$$\widehat{A}(\Phi'^{-1}_{s+3}) = \widehat{A}(\Phi'_{s+2}) = (a_{s+1}, b_{s+1} + a_{s+1} - r(y_s)) = (a_s, b_s + r(x_{s-1}) - r(x_s)),$$

где y_s — точка, в которую Φ_s стягивает исключительный дивизор, так что $r(y_s) = 2a_{s-1} - r(x_{s-1}) = 2a_s - r(x_{s-1})$. Так как $r(x_s) > r(x_{s-1})$, то $\widehat{A}(\Phi'^{-1}_{s+3}) = (a_s, b_s + r(x_{s-1}) - r(x_s)) < (a_s, b_s) = \widehat{A}(R)$. Отсюда $\widehat{A}(R') = \max\bigl(A(\Phi_{s+1}), \widehat{A}(\Phi'^{-1}_{s+3}), \widehat{A}(\Phi_{s-1})\bigr)$. Если $\widehat{A}(\Phi_{s-1}) < \widehat{A}(\Phi_s) = \widehat{A}(R)$, т. е. соотношение R очень специально, то $\widehat{A}(R') < \widehat{A}(R)$ и шаг индукции по высоте осуществлен.

Далее как в предыдущем случае.

Случай $\Phi_s = \tau$, $\Phi_{s+1} = \varepsilon_{x_s}$. Здесь $X_{s-1} = X_s = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $\Phi_{s-1} = \varepsilon_{x_{s-2}}\colon \mathbb{F}_1 \dashrightarrow \mathbb{F}_0$, $\Phi_{s+1} = \varepsilon_{x_s}\colon \mathbb{F}_0 \dashrightarrow \mathbb{F}_1$. Этот случай аналогичен первому из рассмотренных выше, здесь также используется соотношение (ii) из 3.4. Соотношение R эквивалентно следующему:

$$\Phi_n \cdots \Phi_{s+2}\Phi'^{-1}_{s+2}\Phi'_{s+2}\Phi_{s+1}\Phi_s\Phi'_{s-1}\Phi'_{s-2}\Phi'^{-1}_{s-2}\Phi'^{-1}_{s-1}\Phi_{s-1}\cdots\Phi_1,$$

где $\Phi'_{s+2} = \sigma_{y'_{s+2}}\colon \mathbb{F}_1 \to \mathbb{P}^2$ — стягивание исключительного сечения в точку $y'_{s+2} \in \mathbb{P}^2$, а $\Phi'_{s-1}\Phi'_{s-2}$ подобраны так, чтобы выполнялось соотношение

$$\Phi'_{s+2}\Phi_{s+1}\Phi_s\Phi'_{s-1}\Phi'_{s-2} = 1.$$

Подставляя это в предыдущее соотношение, получаем

$$R' = \Phi_n \cdots \Phi_{s+2}\Phi'^{-1}_{s+2}\Phi'^{-1}_{s+2}\Phi'^{-1}_{s-2}\Phi'^{-1}_{s-1}\Phi_{s-1}\cdots\Phi_1.$$

Оценим $\widehat{A}(R')$. Имеем:

$$\widehat{A}(\Phi'^{-1}_{s+2}) = \widehat{A}(\Phi_{s+1}) < \widehat{A}(R);$$
$$\widehat{A}(\Phi'^{-1}_{s+2}) = \widehat{A}(\Phi'_{s+2}) = \Bigl(a_{s+1} + \frac{1}{3}b_{s+1}, 0\Bigr) = \Bigl(a_s + \frac{1}{3}(b_s + a_s - r(x_s))\Bigr) < \widehat{A}(R),$$

так как $a_s = r(x_s) < 0$, ввиду (3.5.1), $(a_s, b_s) > (a_{s+1}, b_{s+1}) = (a_s, b_s + a_s - r(x_s))$, и $b_s < 0$ ввиду (3.5.1), $(a_{s-1}, b_{s-1} \leqslant (a_s, b_s) = (a_{s-1} + \frac{1}{2}b_{s-1}, -b_{s-1})$;

$$\widehat{A}(\Phi'^{-1}_{s-1}) = \widehat{A}(\Phi'_{s-2}) = (a_{s-1}, b_{s-1} + a_{s-1} - r(x_s)) < \widehat{A}(\Phi_{s-1}).$$

Отсюда $\widehat{A}(R') = \max\bigl\{\widehat{A}(\Phi_{s+1}), \widehat{A}(\Phi'^{-1}_{s-2}), \widehat{A}(\Phi_{s-1})\bigr\}$. Если $\widehat{A}(\Phi_{s-1}) < \widehat{A}(\Phi_s) = A(R)$, из предыдущих вычислений $A(R') < A(R)$. Если же $\widehat{A}(\Phi_{s-1}) = \widehat{A}(\Phi_s)$, т. е. R не очень специально, то, поскольку $\widehat{A}(\Phi'^{-1}_{s-1}) < \widehat{A}(\Phi_{s-1})$, соотношение

R' можно представить в виде произведения R_2R_1, как в предыдущих случаях со свойствами (3.5.2). Доказательство теоремы закончено. $\square$

Комментарий 4. Как отмечалось в комментарии 3, факторизацию бирациональных отображений в композиции линков и соотношения между линками можно трактовать в теоретико-групповых терминах образующих и соотношений в группе $\operatorname{Bir} X$ бирациональных автоморфизмов на любой модели X поля рациональных функций $k(X)$. Так, например, рассмотренный выше случай алгебраически замкнутого поля $k = \overline{k}$ эквивалентен описанию двумерной группы Кремоны $\operatorname{Cr}_2(\overline{k})$ в терминах образующих и соотношений. При этом, если в качестве исходной модели взять $X = \mathbb{P}^2$, то образующие линки типа I–IV можно представить в виде линейных и квадратичных преобразований $\mathbb{P}^2$ и преобразований Жонкьера (т. е. бирациональных преобразований $\mathbb{P}^2$, сохраняющих некоторый пучок прямых), которые также раскладываются в композицию квадратичных. Это дает доказательство теоремы М. Нётера об образующих группы $\operatorname{Cr}_2(\overline{k})$ в варианте Кастельнуово (см., например, [7]). Теорема 3.5 о соотношениях в таком случае эквивалентна теореме Гизатулина [1] о соотношениях между квадратичными образующими (см. также [10]). Теорема 3.5 для $X = \mathbb{P}^2$ является частным случаем общего результата о соотношении в двумерной группе Кремоны $\operatorname{Cr}_2(k)$ над произвольным совершенным полем k (см. [15], а также § 5).

Если в качестве исходной модели взять $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, то из теоремы о разложении на элементарные линки получаем в этом случае следующее описание группы $\operatorname{Bir} X$. Пусть $A = \operatorname{Aut}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$, тогда A представляется в виде полупрямого произведения

$$1 \longrightarrow \operatorname{PGL}(2, \overline{k}) \times \operatorname{PGL}(2, \overline{k}) \longrightarrow A \longrightarrow \{1, \tau\} \longrightarrow 1,$$

где $\tau\colon \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ — инволюция перестановки множителей. Обозначим через B группу бирациональных преобразований $\mathbb{F}_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, переводящих в себя один из пучков прямолинейных образующих. Тогда B представляется в виде расширения

$$1 \longrightarrow \operatorname{PGL}(2, \overline{k}(\mathbb{P}^1)) \longrightarrow B \longrightarrow \operatorname{PGL}(2, \overline{k}) \longrightarrow 1.$$

Группа B порождается подгруппой $\operatorname{PGL}(2, k) \times \operatorname{PGL}(2, k)$ и бирациональной инволюцией $\beta = \varepsilon_\infty \varepsilon_0$, являющейся композицией двух элементарных преобразований с центром в точках $0 = (0, 1) \times (0, 1)$ и $\infty = (1, 0) \times (1, 0)$ в биоднородных координатах $(u_0, u_1) \times (v_0, v_1)$ на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ с фиксированной проекцией $\mathbb{F}_0 \to \mathbb{P}^1$ на первый множитель. В этих координатах бирациональная инволюция β задается формулой

$$(u_0, u_1) \times (v_0, v_1) \to (u_0, u_1) \times (u_0 v_1, u_1 v_0).$$

Если в качестве инволюции перестановки множителей выбрать $\tau\colon (u_0, u_1) \times \times (v_0, v_1) \to (v_1, v_0) \times (u_1, u_0)$, то элементарная проверка показывает, что выполняется следующее соотношение (эквивалентное 3.4 (ii)):

$$\beta\tau\beta\tau\beta\tau = 1. \tag{3.5.3}$$

Обозначим $A_0 = \mathrm{PGL}(2,\bar{k}) \times \mathrm{PGL}(2,\bar{k})$, тогда $A_0 \subset A$ и $A_0 \subset B$. Пусть $B \underset{A_0}{*} A$ — амальгомированное произведение групп A и B, объединенных по подгруппе A_0. Тогда группа $\mathrm{Bir}\, X = \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ в виде факторгруппы $B \underset{A_0}{*} A/\langle(\beta\tau)^3\rangle$ по нормальной подгруппе, порожденной соотношением (3.5.3) (см. [9]).

Такая реализация двумерной группы Кремоны $\mathrm{Cr}_2(\bar{k})$ кажется наиболее подходящей для дальнейшего изучения ее структуры (например, вопроса о простоте) алгебраическими методами.

§ 4. Соотношения в случае отображений бирационально нетривиальных над k поверхностей

4.1. Результаты теоремы 1.6 показывают, что над произвольными достаточно общими совершенными полями k (например, $k = \mathbb{Q}$) могут существовать бирационально жесткие классы k-минимальных поверхностей X, для которых всякое бирациональное отображение над k является изоморфизмом, в частности, $\mathrm{Bir}\, X = \mathrm{Aut}\, X$. Для отображений таких поверхностей нет никаких разложений на линки и, следовательно, нет и соотношений. Далее в этом параграфе мы увидим, что для всех классов поверхностей $X \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$, кроме указанных в теореме 1.6 (i) и (ii), существуют нетривиальные бирациональные отображения, т. е. такие поверхности уже не являются жесткими. Большинство из них (в смысле неограниченное число семейств) — это поверхности $X \in \{\mathbb{C}\}$, обладающие единственной структурой расслоения на коники. Согласно 1.6 (iii) к ним относятся все $X \in \{\mathbb{C}\}$ с $K_X^2 \leqslant 0$, но в зависимости от основного поля k возможно существование таких $X \in \{\mathbb{C}\}$ с $K_X^2 > 0$. Соответствующий пример был построен Скоробогатовым над полем из трех элементов с $K_X^2 = 4$. Для таких поверхностей разложения в композиции линков и соотношения очень просты.

4.2. Предложение. *Пусть X обладает (бирационально) единственной структурой расслоения на коники в смысле определения § 1 (в частности, если $K_X^2 \leqslant 0$, как в 1.6 (iii)). Тогда любое бирациональное отображение $\chi\colon X \dashrightarrow X'$ раскладывается в композицию линков типа* II, *(т. е. элементарных преобразований), и все соотношения между этими линками порождаются соотношениями вида (как в 3.4 (i)):*

$$\Phi_4[2]\Phi_3[1]\Phi_2\Phi_1 = 1, \tag{4.2.1}$$

где $\Phi_1 = \varepsilon_x$, $\Phi_2 = \varepsilon_y$ — элементарные преобразования с центрами в замкнутых точках x, y, принадлежащих различным слоям структурных морфизмов $\pi\colon X \to C$; эти соотношения есть не что иное, как коммутатирование элементарных преобразований с независимыми центрами.

Доказательство. По теореме 2.5 о разложении отображения χ в композицию элементарных линков и каждый из этих линков, являясь бирациональным отображением, сохраняет структуру расслоения на коники, т. е. согласно классификации линков 2.6 является элементарным преобразованием.

Утверждение о соотношении доказывается точно так же, как во втором случае доказательства теоремы 3.5. Доказательство закончено. □

Теперь изучим отображения бирационально нетривиальных над k поверхностей из семейства $\{\mathbb{D}\}$. Напомним, что для таких поверхностей X имеем $K_X^2 = 1, 2, \ldots, 6, 8, 9$. Поскольку жесткие поверхности нас уже не интересуют, то мы будем предполагать, что на X существует точка x с $\deg x < K_X^2$. Выясним, какие из поверхностей $X \in \{\mathbb{D}\}$ бирационально тривиальны. Это, прежде всего, любая поверхность с $K_X^2 = 5$ над любым полем k. Для рациональности над k такой поверхности достаточно показать, что на ней существует k-точка, и тогда проекция из касательного пространства к этой точке является бирациональным изоморфизмом с $\mathbb{P}^2$. Существование точки было установлено геометрическими методами (общая проекция в $\mathbb{P}^3$) еще Энриквесом в конце прошлого века. Современные доказательства даны в [28], [29]. На такой поверхности $K_X^2 = 5$, а второй класс Чженя $c_2 = 7$. Интересно, можно ли извлечь из этого наличие k-точки?

Далее, рациональной над k является всякая поверхность $X \in \{\mathbb{D}\}$ с $K_X^2 \leqslant \leqslant 6$, обладающая точкой $x \in X$ степени $\deg x < K_X^2$ и взаимно простой с K_X^2. Действительно, в этом случае на X существует точка степени 1 и бирациональная k-тривиальность устанавливается элементарно [19]. Существование точки степени 1 в такой ситуации доказывается следующим образом. Через точку $x \in X$ можно провести гиперплоское сечение (X предполагается вложенной в $\mathbb{P}^d$), которое является кривой E рода 1. На E имеются точки взаимно простых степеней, значит, есть класс дивизоров над k степени 1. Теперь по теореме Римана–Роха в этом классе есть эффективный дивизор, т. е. k-точка.

4.3. Таким образом, остается рассмотреть только следующие случаи:

$K_X^2 = 2$, X обладает точкой степени 1;

$K_X^2 = 3$, X обладает точкой степени 1 или 2 (отметим, что если X имеет точку степени 2, то имеет также точку степени 1 и наоборот);

$K_X^2 = 4$, X обладает точкой $x \in X$ степени $\deg x < 4$;

$K_X^2 = 6$, X обладает точкой степени 2, 3 или 4 (отметим, что если X имеет точку степени 4, то имеет также точку степени 2 по соображениям, описанным выше);

$K_X^2 = 8$, X обладает точкой степени 2, 4 или 6 (опять, если X имеет точку степени 6, то имеет и точку степени 2);

$K_X^2 = 9$, X обладает точкой степени 3 или 6 (здесь опять из существования точки степени 6 следует существование точки степени 3).

Кроме того, в каждом случае, если на X существует одна точка $x \in X$ заданной степени $\deg x = d$, то существует полное по Зарисскому подмножество точек такой степени. Это следует из унирациональности, а в случае $K_X^2 \geqslant 6$ рациональности, таких поверхностей над полем вычетов $k(x) \supset k$ точки x (см., например, [19]).

Изучение бирациональных отображений перечисленных классов поверхностей начнем с наиболее простой ситуации.

4.4. Теорема [21], [4], [14]. *Пусть X — поверхность из перечисленных выше одного из следующих типов*:

$K_X^2 = 2$, *X обладает точкой степени* 1;

$K_X^2 = 4$, *X обладает точкой степени* 2, *но не имеет точек степени* 1 *или* 3;

$K_X^2 = 6$, *X обладает точкой степени* 3, *но не имеет точек меньшей степени*;

$K_X^2 = 8$, *X обладает точкой степени* 4, *но не имеет точек меньшей степени.*

Пусть $\chi\colon X \dashrightarrow X'$ — бирациональное отображение на поверхность $X' \in \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$. Тогда $X' \simeq X$ в случае $K_X^2 = 2$ и 4, $X' \in \{\mathbb{D}\}$ и $K_{X'}^2 = 8$ в случае $K_X^2 = 8$. Отображение χ раскладывается в произведение следующих линков типа II:

$K_X^2 = 2$ — *линки типа $M_{2,1}$, т. е. инволюции Бертини, связанные с точками степени* 1, *не лежащими на (-1)-кривых $\overline{X}$, см. теорему* 2.6 (ii), *случай $K_X^2 = 2$,* a);

$K_X^2 = 4$ — *линки типа $M_{4,2}$, см.* 2.6 (ii), *случай $K_X^2 = 4$,* b);

$K_X^2 = 6$ — *линки типа $M_{6,3}$, см.* 2.6 (ii), *случай $K_X^2 = 6$,* c);

$K_X^2 = 8$ — *линки типа $M_{8,4}$, см.* 2.6 (ii), *случай $K_X^2 = 8$,* d).

Более того, во всех этих случаях такое разложение однозначно с точностью до изоморфизма, т. е. нет никаких соотношений между указанными линками, кроме, конечно, $\Phi^2 = 1$ в случае $K_X^2 = 2$ и 4, $\Phi[1]\Phi = 1$ в случае $K_X^2 = 6$ и 8.

Доказательство. Если χ — не изоморфизм, то в обозначениях примера 1.5 (ii) из неравенства Нётера следует существование максимальной особенности $x \in X$ кратности $r(x) > a$ (точку x можно считать лежащей на X, а не бесконечно близкой, в силу невозрастания кратностей при разрешении неопределенностей свойства 1.4 (iii)). Мы знаем, что геометрические точки максимальной кратности находятся в общем положении в том смысле, что раздутие максимальной особенности снова приводит к поверхности дель Пеццо, см. комментарий 2.

Из неравенства (1.5.4) получаем, что $\deg x < K_X^2$. Теперь по предположению теоремы во всех случаях такая точка может быть только одна. По алгоритму доказательства теоремы 2.5 с этой точкой связан некоторый элементарный линк типа I или II. Из теоремы 2.6 о классификации линков и предположения теоремы о степенях замкнутых точек на X находим, что возможны только указанные линки. Теорема 2.5 о разложении доказывает первое утверждение теоремы.

Предположим, что разложение не однозначно, тогда между указанными линками должно существовать нетривиальное соотношение. Пусть

$$R = \Phi_n \cdots \Phi_2 \Phi_1$$

есть такое соотношение, которое можно предполагать специально. Пусть $\widehat{A}(R)$ — его высота и s — вершина. Так как из процесса разложения видно, что

каждое $X_i \in \{\mathbb{D}\}$, то $\widehat{A}_i = a_i$. По определению имеем $\widehat{A}_{s+1} = a_{s+1} < a_s = \widehat{A}_s$ и $\widehat{A}_{s-1} = a_{s-1} \leqslant a_s = \widehat{A}_s$. Если $x_s \in X_s$ — максимальная особенность, а $y_s \in X_s$ — точка, в которую линк Φ_s стягивает исключительный дивизор, то предыдущие неравенства означают, что $r(x_s) > a_s$ и $r(y_s) \geqslant a_s$ (см. формулы 2.6). Если $x_s = y_s$, то линк Φ_{s+1} обратен линку Φ_s, что невозможно, поскольку соотношение R приведено. Значит, $x_s \neq y_s$, но тогда

$$\deg x_s r(x_s)^2 + \deg y_s r(y_s)^2 > a_s^2 K_X^2,$$

что противоречит (1.5.3). Это противоречие показывает, что не существует нетривиального соотношения и теорема доказана. □

Изучим теперь бирациональные отображения поверхностей $X \in \{\mathbb{D}\}$, для которых разложения на элементарные линки не однозначно, но соотношения между ними еще довольно просты.

4.5. Теорема. *Пусть $\chi\colon X \dashrightarrow X'$ — бирациональное отображение, где $X \in \{\mathbb{D}\}$, $X' \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$, $K_X^2 = 3$, 6 или 9, причем X обладает точкой $x \in X$ степени $\deg x < K_X^2$; в случаях $K_X^2 = 6$ и 9 не имеет точек степени 1 и в случае $K_X^2 = 6$ имеет точку степени 2. Тогда*

(i) *$X' \in \{\mathbb{D}\}$, $K_{X'}^2 = 3$, 6 или 9, соответственно, и χ раскладывается в произведение следующих линков типа* II:

$K_X^2 = 3$: линки с матрицами $M_{3,1}$ и $M_{3,2}$ из 2.6 (iii), *которые мы будем обозначать через τ_x, $\deg x = 1$, η_x, $\deg x = 2$, соответственно; в этом случае $X' \simeq X$;*

$K_X^2 = 6$: линки с матрицами $M_{6,2}$ и $M_{6,4}$ из 2.6 (ii), *которые мы будем также обозначать через τ_x, $\deg x = 2$, η_x, $\deg x = 4$, соответственно; в этом случае не обязательно $X' \simeq X$;*

$K_X^2 = 9$: линки с матрицами $M_{9,3}$ и $M_{9,6}$ из 2.6 (ii), *которые мы будем обозначать для удобства также через τ_x, $\deg x = 3$, η_x, $\deg x = 6$, соответственно; здесь возможны только два варианта: либо $X' \simeq X$, либо X' — форма проективной плоскости, соответствующая в группе Брауэра $\operatorname{Br} k$ элементу, обратному к соответствующему элементу для X.*

(ii) *Все соотношения между линками во всех трех случаях выводятся из соотношений вида*

$$\Phi[1]\Phi = 1, \quad \Phi_6[4]\,\Phi_5[3]\,\Phi_4[2]\,\Phi_3[1]\,\Phi_2\Phi_1 = 1, \tag{4.5.1}$$

где $\Phi = \tau_x$ или η_x, $\Phi_i = \tau_{x_i}$, $x_1 \neq x_2$, далее, по указанному сцеплению, $\deg x_i = 1$, 2, 3 при $K_X^2 = 3$, 6, 9, соответственно. В случае $K_X^2 = 3$ τ_x и η_x являются бирациональными инволюциями, т. е. $\tau_x^2 = 1$, $\eta_x^2 = 1$, в случае $K_X^2 = 6$ бирациональной инволюцией является η_x (ср. [18], *в случае $K_X^2 = 3$,* [14], *в случаях $K_X^2 = 6$ и 9).*

Доказательство. Прежде всего отметим, что поскольку предполагается, что X, $K_X^2 \neq 3$, не имеет точек степени 1, то в случае $K_X^2 = 6$ X не имеет точек степени 3, так как по предположению имеет точку степени 2, а в случае $K_X^2 = 9$ X не имеет точек x степени $\deg x < 9$, взаимно простой с 9, по соображениям, уже использованным выше. Утверждение о разложении

χ на элементарные линки — это частный случай теоремы 2.5. Из явного описания линков в 2.6 следуют все утверждения пункта (i), кроме последнего, которое вытекает из теории многообразий Севери–Брауэра форм проективных пространств (см., например, [32]).

Утверждения (ii) о соотношениях одинаковы во всех 3 случаях, поскольку, как видно из классификации линков 2.6 (ii), все соответствующие матрицы имеют одинаковый вид. Чтобы проверить справедливость соотношений (4.5.1), достаточно показать, что указанные композиции линков переводят антиканоническую (очень обильную) линейную систему $|-K_X|$ в $|-K_{X'}|$. Это проверяется явно посредством итерации соответствующих формул из 2.6 (ii) с учетом указанных правил сцепления. □

Имеет место следующее

Утверждение. *Для любого бирационального отображения $\psi\colon X \dashrightarrow X'$, где X — одна из поверхностей, указанных в формулировке теоремы, не являющегося изоморфизмом, и любой линейной системы $\mathcal{H} \sim -aK_X$, являющейся собственным прообразом какой-нибудь очень обильной линейной системы $\mathcal{H}'$ на X', $\mathcal{H}$ не может иметь базисную точку $y \in X$ кратности $r(y) = a$.*

Действительно, предположим противное, и пусть X, ψ и $\mathcal{H}$, обладающие этим свойством, выбраны с наименьшим коэффициентом a. Мы построим другое бирациональное отображение с меньшим коэффициентом $a_1 < a$, что приведет к противоречию.

По неравенству Нётера $\mathcal{H}$ имеет базисную точку $x \in X$ кратности $r(x) > a$ и $\deg r(x) + \deg r(y) < K_X^2$ по неравенству (1.5.4). Принимая во внимание ограничения на степени точек на X, указанные в теореме, получаем, что $r(x) = r(y) = 1$ в случае $K_X^2 = 3$, $r(x) = r(y) = 2$ в случае $K_X^2 = 6$, и $r(x) = r(y) = 3$ в случае $K_X^2 = 9$. После применения линка $\Phi_1 = \tau_x$ коэффициент a уменьшается. Образ y_1 точки y будет иметь ту же кратность $r(y_1) = r(y) = a$ и, стало быть, окажется максимальной особенностью $r(y_i) = a > a_1$. Значит, y_1 находится в общем положении и можно применить линк $\Phi_2 = \tau_{y_1}$, $y_1 = \tau_x(y)$. По 2.6 (ii) находим:

$$a_1 = 2a - r(x_1), \quad r(x_1) = 3a - 2r(x),$$
$$a_2 = 2a_1 - r(y_1) = 3a - 2r(x),$$

где $x_1 \in X_1$ — точка, являющаяся образом стягиваемого дивизора линком Φ_1, т. е. x_1 — фундаментальная точка для $\Phi_1^{-1} = \tau_x^{-1}$. В итоге мы получаем многообразие X_2, бирациональное X (в случае $K_X^2 = 3$, изоморфное X) и бирациональное отображение $X_2 \dashrightarrow X'$ с линейной системой $\mathcal{H}_2$, обладающей базисной точкой $x_2 = \tau_{y_1}(x_1)$ кратности $r(x_2) = r(x_1) = 3a - 2r(x) = a_2 < a$, где a_2 — коэффициент при $-K_{X_2}$ линейной системы $\mathcal{H}_2$. Противоречие.

Из этого утверждения следует, что всякое специальное соотношение в рассматриваемой ситуации является очень специальным. В самом деле, если

$$R = \Phi_n \cdots \Phi_{s+1}\Phi_s\Phi_{s-1} \cdots \Phi_1$$

— специальное соотношение и $a_s = a_{s-1}$, то Φ_s^{-1} может быть только τ_{y_s} с $y_s \in \in X_s$, $r(y_s) = a_s$, что невозможно по утверждению, значит, $a_s > a_{s-1}$.

Итак, пусть R — очень специальное нетривиальное соотношение. Рассмотрим возможные варианты.

Случай $\Phi_s = \eta_{x_{s-1}}$, $\deg x_{s-1} = 2, 4, 6$, *если* $K_X^2 = 3, 6, 9$, *соответственно.* Этот случай невозможен. Действительно, пусть $y_s \in X_s$ — образ стягиваемого дивизора отображения $\eta_{x_{s-1}}$, тогда $r(y_s) > a_s$, поскольку y_s является фундаментальной точкой для $\Phi_s^{-1} = \eta_{x_{s-1}}^{-1}$, которое по первому из соотношений (4.5.1) является отображением η_{y_s}. Теперь неравенство следует из соответствующих формул 2.6 (ii), потому что $a_{s-1} < a_s$. Так как $a_{s+1} < a_s$, то на X_s существует максимальная особенность $x_s \in X$, $x_s \neq y_s$, поскольку соотношение R приведено, а по первому из соотношений (4.5.1), если $x_s = y_s$, то $\Phi_{s+1} = \eta_{x_s} = \eta_{y_s} = \Phi_s^{-1}$. Но если $x_s \neq y_s$, то $\deg x_s + \deg y_s \geqslant K_s^2$, что противоречит неравенству (1.5.4).

Случай $\Phi_s = \tau_{x_{s-1}}$, $\deg x_{s-1} = 1, 2, 3$, *если* $K_X^2 = 3, 6, 9$, *соответственно.* В этом случае точка $y_s \in X_s$ — образ стягиваемого дивизора отображения Φ_s, как и выше, имеет кратность $r(y_s) > a$, поскольку $a_s > a_{s-1}$. Кроме того, линейная система $\mathcal{H}_s$ имеет максимальную особенность $x_s \in X_s$, $r(x_s) > a_s$, $x_s \neq y_s$, как и выше, ввиду первого из соотношений (4.5.1). Из (1.5.4) находим, что имеется единственная возможность $\deg x_s = \deg y_s = 1, 2, 3$ в случаях $K_X^2 = 3, 6, 9$, соответственно, т. е. $\Phi_{s+1} = r_{x_s}$, как и Φ_s. Теперь воспользуемся соотношениями (4.5.1):

$$\tau_{x_s} = \tau_{x'_{s+4}} \tau_{x'_{s+3}} \tau_{x'_{s+2}} \tau_{x'_{s+1}} \tau_{y_s}, \tag{4.5.2}$$

где $x'_{s+1} = \tau_{y_s}(x_s)$, $x'_{s+2} = \tau_{x'_{s+1}}(y'_{s+1})$, y'_{s+1} — образ стягиваемого дивизора отображением $\tau_{x'_{s+1}}$, $x'_{s+3} = \tau_{x'_{s+2}}(y'_{s+2})$, y'_{s+2} — образ стягиваемого дивизора отображения $\tau_{x'_{s+1}}$, $x'_{s+4} = \tau_{x'_{s+2}}(y'_{s+3})$, y'_{s+3} — образ стягиваемого дивизора отображения $\tau_{x'_{s+2}}$. Это расшифровка правил сцепления в последнем соотношении (4.5.1), при этом используется, конечно, и первое соотношение в том плане, что обратное отображение к τ_x тоже является отображением τ_y (где y — образ стягиваемого дивизора). Использование соотношений возможно потому, что точки x_s и y_s находятся в общем положении, так как $r(x_s) > a_s$ и $r(y_s) > a_s$.

Заменим теперь в соотношении R линк Φ_{s+1} на композицию линков (4.5.2) с учетом указанных правил сцепления. В результате получим эквивалентное соотношение

$$R' = \Phi_n \cdots \Phi_{s+2} \Phi'_{s+5} \Phi'_{s+4} \Phi'_{s+3} \Phi'_{s+2} \Phi'_{s+1} \Phi_s \Phi_{s-1} \cdots \Phi_1,$$

где $\Phi'_{s+1} = \tau_{y_s} = \Phi_s^{-1}$, так что $\Phi'_{s+1}\Phi_s$ можно сократить, $\Phi'_{s+i+1} = \tau_{x'_{s+i}}$, $i = 1, \ldots, 4$. Покажем, что

$$\widehat{A}(R') < \widehat{A}(R) = a_{s^0}.$$

Вычисляя по соответствующим формулам из 2.6 (ii) (напомним, что они име-

ют одинаковый вид во всех трех случаях), получаем:

$$\Phi_{s+1} = \tau_{y_s}\colon \begin{cases} a'_{s+1} = 2a_s - r(y_s) = a_{s-1} < a_s; \\ r(y'_{s+1}) = 3a_s - 2r(y_s); \\ r(x'_{s+1}) = r(x_s); \end{cases}$$

последнее равенство следует из того, что $x_s \neq y_s$ и ввиду максимальности не лежит на исключительном дивизоре отображения τ_{y_s}, так что τ_{y_s} является изоморфизмом в окрестности x_s.

$$\Phi'_{s+2} = \tau_{x'_{s+1}}\colon \begin{cases} a'_{s+2} = 2(2a_s - r(y_s)) - r(x_s) = 4a_s - 2r(y_s) - r(x_s) < a_s; \\ r(y'_{s+2}) = 6a_s - 3r(y_s) - 2r(x_s); \\ r(x'_{s+2}) = r(y'_{s+1}); \end{cases}$$

$$\Phi'_{s+3} = \tau_{x'_{s+2}}\colon \begin{cases} a'_{s+3} = 2a'_{s+2} - r(x'_{s+2}) = 5a_s - 2r(x_s) - 2r(y_s) < a_s; \\ r(y'_{s+3}) = 3a'_{s+2} - 2r(x'_{s+2}) = 6a_s - 3r(x_s) - 2r(y_s); \\ r(x'_{s+3}) = r(y'_{s+2}); \end{cases}$$

$$\Phi'_{s+4} = \tau_{x'_{s+3}}\colon a'_{s+4} = 2a'_{s+3} - r(x'_{s+3}) = 4a_s - 2r(x_s) - r(y_s) < a_s.$$

Кроме того, $a'_{s+5} = a_{s+1} < a_s$, потому что мы заменили Φ_{s+1} равным ему выражением из (4.5.2). Следовательно,

$$\widehat{A}(R') = \max\bigl\{a_{s+1}, a'_{s+4}, a'_{s+3}, a'_{s+2}, a_{s-1}\bigr\} < a_s = \widehat{A}(R).$$

По лемме 3.2 соотношение R' раскладывается в произведение специальных высоты $\leqslant \widehat{A}(R')$. Теперь индукция по высоте завершает доказательство теоремы.

Бирациональное отображение нерациональных над k поверхностей $X \in \{\mathbb{D}\}$ из двух оставшихся классов изучаются в следующей теореме.

4.6. Теорема. *Пусть $X \in \{\mathbb{D}\}$, $K_X^2 = 4$ или 8, причем в случае $K_X^2 = 4$ X обладает точкой степени 1, а в случае $K_X^2 = 8$ поверхность X обладает точкой степени 2, но не имеет точек степени 1 (значит, не имеет точек любой степени $\deg x < 8$, взаимно простой с 8). Пусть $\chi\colon X \dashrightarrow X'$ — бирациональное отображение на поверхность $X' \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$. Тогда*

(i) *X раскладывается в композицию следующих линков*:

$K_X^2 = 4$: *линки σ_x^{-1} ($\deg x = 1$) из* 2.6 (i), *линки ε_x из* 2.6 (ii), *линки σ_x ($\deg x = 1$) из* 2.6 (iii), *случай $K_{X_1}^2 = 4$ и линки с матрицами $M_{4,2}$ и $M_{4,3}$ из* 2.6 (ii), *которые мы будем обозначать через τ_x ($\deg x = 2$), η_x ($\deg x = 3$), соответственно*; *в этом случае $X' \in \{\mathbb{D}\}$ и $K_{X'}^2 = 4$, или $X' \in \{\mathbb{C}\}$ и $K_X^2 = 3$*;

$K_X^2 = 8$: *линки σ_x^{-1} ($\deg x = 2$) из* 2.6 (i), *линки ε_x из* 2.6 (ii), *линки σ_x ($\deg x = 2$) из* 2.6 (iii), *случай $K_{X_1}^2 = 8$, а также линки с матрицами $M_{8,4}$ и $M_{8,6}$ из* 2.6 (ii), *которые мы будем для удобства обозначать теми*

же буквами τ_x ($\deg x = 4$), η_x ($\deg x = 6$), *соответственно; в этом случае* $X' \in \{\mathbb{D}\}$, $K^2_{X'} = 8$, *или* $X' \in \{\mathbb{C}\}$, $K^2_{X'} = 6$.

(ii) *Все соотношения между указанными линками выводятся из соотношений вида*

$$\Phi[1]\Phi = 1 \tag{4.6.1}$$

для всех линков, кроме σ_x, σ_x^{-1} (*которые, как мы знаем, взаимно обратны*);

соотношения коммутирования для элементарных преобразований с независимыми центрами

$$\Phi_4[2]\Phi_3[1]\Phi_2\Phi_1 = 1, \tag{4.6.2}$$

где $\Phi_1 = \varepsilon_{x_1}$, $\Phi_2 = \varepsilon_{x_2}$ — *элементарные преобразования расслоений на коники* $X' \in \{\mathbb{C}\}$, x_1, x_2 *лежат в слоях над различными точками базы расслоения* $\pi'\colon X' \to C$;

соотношения вида

$$\Phi_6\Phi_5[3]\Phi_4[2]\Phi_3\Phi_2\Phi_1 = 1, \tag{4.6.3}$$

где $\Phi_1 = \sigma_x^{-1}$, $\Phi_2 = \varepsilon_y$, $\deg x = 1$ *при* $K^2_X = 4$ *и* $\deg x = 2$ *при* $K^2_X = 8$, *аналогично,* $\deg y = 1$ *при* $K^2_X = 4$ *и* $\deg y = 2$ *при* $K^2_X = 8$, $\Phi_3 = \sigma_{x'}$, $\Phi_4 = \sigma_{y'}^{-1}$, $\Phi_5 = \varepsilon_{x''}$, $\Phi_6 = \sigma_{y''}$; *точка* x' *однозначно определяется линком* Φ_1, Φ_2, *а точки* y', x'', y'' *выбираются по указанным правилам сцепления*; *в этих обозначениях* (4.6.3) *может быть переписано в явном виде*

$$\sigma_{y''}\varepsilon_{x''}[3]\sigma_{y'}^{-1}[2]\sigma_{x'}\varepsilon_y\sigma_x^{-1} = 1, \tag{4.6.3$'$}$$

все точки находятся в общем положении; *и, наконец, соотношений длины* 8:

$$\tau_{y'''}[6]\sigma_{x'''}\varepsilon_{y''}[4]\sigma_{x''}^{-1}[3]\tau_{y'}[2]\sigma_{x'}\varepsilon_y\sigma_x^{-1} = 1, \tag{4.6.4}$$

где $\deg x = 1$, $\deg y = 2$, *в случае* $K^2_X = 4$, *и* $\deg x = 2$, $\deg y = 4$, *в случае* $K^2_X = 8$, *точка* x' *однозначно определяется первыми двумя линками* (*или, что эквивалентно, выбором точек* x *и* y), *точки* y', x'', y'', y''' *определяются указанными правилами сцепления, точка* x''' *однозначно определяется предыдущими линками и их правилами сцепления* (*как обычно, все точки находятся в общем положении*).

Доказательство. Утверждение (i) о разложении χ в композицию элементарных линков — это частный случай теоремы 2.5. Теорема 2.6 дает явное описание линков, участвующих в разложении. Из этого явного описания видно, какие из поверхностей $X' \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$ могут быть образами бирациональных отображений $\chi\colon X \dashrightarrow X'$. отметим, что в случае $K^2_X = 8$ существуют два типа поверхностей X:

1) $-K_X$ делится на 2 в $\operatorname{Pic} X$, в этом случае $X \simeq Q \subset \mathbb{P}^3$, где Q — гладкая квадрика с $\operatorname{Pic} Q \simeq \mathbb{Z}$. Раздутие точки $x \in X$ в общем положении, $\deg x = 2$, приводит к расслоению на коники $\pi\colon X' \to \mathbb{P}^1$, $K^2_{X'} = 6$. Обратно, если $\pi\ X' \to \mathbb{P}^1$ — стандартное расслоение на коники $\pi\colon X' \to \mathbb{P}^1$ с $K^2_{X'} = 6$, то $K_{X'}$ всегда очень обилен (см., например, [15]) и существует исключительный дивизор $E \sim -K_{X'} - 2f'$ такой, что $\overline{E} = E \otimes \overline{k} = \overline{E}_1 + \overline{E}_2$, $\overline{E}_i$ — (-1)-кривые

на X', $(\overline{E}_1 \cdot \overline{E}_2) = 0$. Стягивание E линейной системой $|-K_{X'} - f'|$ отображает X' на квадрику $Q \subset \mathbb{P}^3$.

2) $\operatorname{Pic} X = \mathbb{Z}(-K_X)$, в этом случае раздутие точки $x \in X$ степени 2, находящейся в общем положении, приводят к стандартному расслоению на коники $\pi\colon X' \to C$, с $K_{X'}^2 = 6$, где $C \subset \mathbb{P}^2$ — коника, не имеющая k-точек, $-K'_X$ обилен. Обратно, если $\pi\colon X' \to C$ — стандартное расслоение на коники над C, $C(k) = \varnothing$, то $-K_{X'}$, как и в предыдущем случае, очень обилен (см. [15]) и на X' существует исключительный дивизор $E \sim -K_X - 2\overline{f}'$, состоящий из двух непересекающихся сопряженных (относительно действия группы Галуа $\operatorname{Gal}(\overline{k}/k)$) (-1)-кривых, где $\overline{f}'$ — класс геометрического слоя морфизма $\pi\colon X' \to C$. Здесь удобнее, однако, вместо $\overline{f}'$ использовать класс слоя $f' = \pi^{-1}(t)$, где $t \in C$ — точка степени 2. Тогда $-K_{X'}$ и f' порождают $\operatorname{Pic} X'$, и формулы для действий элементарных линков имеют точно такой же вид, как и в случае $K_X^2 = 4$ (см. 2.6, случай $K_X^2 = 4$ и 8). Стягивание E линейной системой $|-2K_{X'} - f'|$ отображает X' в $\mathbb{P}^8$ на поверхность степени 8 и $\rho = 1$.

В случае $K_X^2 = 4$ раздутие точки $x \in X$, $\deg x = 1$, в общем положении приводит к кубической поверхности $X' \subset \mathbb{P}^3$ с одной инвариантной (относительно действия $\operatorname{Gal}(\overline{k}/k)$) прямой $E \sim -K_{X'} - f'$, где f' — класс слоя расслоения на коники $\pi\colon X' \to \mathbb{P}^1$. Обратно, если $\pi\colon X' \to \mathbb{P}^1$ — любое стандартное расслоение на коники с $K_{X'}^2 = 3$, то $-K_{X'}$ очень обилен и отображает изоморфно $X' \hookrightarrow \mathbb{P}^3$. На X' существует единственная инвариантная прямая (т. е. (-1)-кривая) $E \sim -K_{X'} - f'$, стягивание которой приводит к поверхности дель Пеццо степени 4 с $\rho = 1$.

Соотношения в (ii) проверяются, как обычно, непосредственно по формулам действий линков из 2.6 с учетом правил сцепления. Достаточно показать по 2.4, что указанные композиции линков приводят к равенству в $-K_X$ степеней $\widehat{A}(X) = (a, 0) = \widehat{A}(X') = (a', 0)$, где X' — образ при отображении композиции линков соответствующего соотношения. Проверим, например, соотношение (4.6.4). Мы рассматриваем оба случая $K_X^2 = 4$ и 8 одновременно, поскольку, как уже отмечалось, формулы действия линков одинаковы при условии, что $\deg x = 1$, $\deg y = 2$, f — класс слоя — в случае $K_X^2 = 4$, $\deg x = 2$, $\deg y = 4$, f — класс удвоенного геометрического слоя — в случае $K_X^2 = 8$:

$$(a, 0) \xrightarrow{\sigma^{-1}} (2a, -b) \xrightarrow{\varepsilon} (2a, 3b) \xrightarrow{\sigma} (5a, 0) \xrightarrow{\tau} (7a, 0) \xrightarrow{\sigma^{-1}}$$
$$\xrightarrow{\sigma^{-1}} (6a, b) \xrightarrow{\varepsilon} (6a, 3b) \xrightarrow{\sigma} (3a, 0) \xrightarrow{\tau} (a, 0),$$

отсюда получаем, что $X \simeq X' = X_8$.

Теперь доказательство утверждения (ii) о соотношениях аналогично доказательству теоремы 3.5 о соотношениях в случае кремоновых отображений плоскости $\mathbb{P}^2$ над алгебраически замкнутым полем. Пусть

$$R = \Phi_n \cdots \Phi_{s+1} \Phi_s \Phi_{s-1} \cdots \Phi_1$$

есть нетривиальное специальное соотношение высоты $\widehat{A}(R) = \widehat{A}_s = (a_s, b_s)$ между линками, указанными в формулировке теоремы. По замечанию выше, приводимое ниже доказательство пригодно для каждого из двух случаев

$K_X^2 = 4$ и 8 (поэтому не случайно линки τ_x, η_x, относящиеся к разным классам поверхностей, мы обозначим одними и теми же символами). Как и в 3.5, надо рассмотреть возможные случаи для пары Φ_s, Φ_{s+1}, при этом, как и там, достаточно рассмотреть примерно половину всех возможных случаев, другая половина сводится к первой переходом к обратному соотношению R^{-1}.

Случай $\Phi_s = \varepsilon_{x_{s-1}}$, $\Phi_{s+1} = \varepsilon_{x_s}$. Так как соотношение R специально, то

$$\widehat{A}_s = (a_s, b_s) \geqslant (a_{s-1}, b_{s-1}) = \widehat{A}_{s-1} \Rightarrow r(x_{s-1}) \leqslant a_{s-1},$$

поскольку $a_s = a_{s-1}$ и $b_s = b_{s-1} + \deg x_{s-1}(a_{s-1} - r(x_{s-1}))$ по формулам (2.6.5). Аналогично, $r(x_s) > a_s$, так как $(a_{s+1}, b_{s+1}) < (a_s, b_s)$. Следовательно, $r(x_s) > r(x_{s-1})$ и точка x_s не может быть бесконечно близкой к точке x_{s-1}, значит, они независимы, т. е. лежат в слоях над различными точками базы. Пользуясь соотношением коммутирования независимых элементарных преобразований (4.6.2), поменяем местами Φ_s и Φ_{s+1}. В результате получим эквивалентное соотношение

$$R = \Phi_n \cdots \Phi_{s+2} \Phi'_{s+1} \Phi'_s \Phi_{s-1} \cdots \Phi_1,$$

где $\Phi'_s = \varepsilon_{x'_{s-1}}$, $x'_{s-1} = \Phi_s^{-1}(x_s)$, $r(x'_{s-1}) = r(x_s)$, $\Phi'_{s+1} = \varepsilon'_{x'_s}$, $x'_s = \Phi'_s(x_{s-1})$, $r(x'_s) = r(x_{s-1})$. Вычислим степени:

$$\widehat{A}(\Phi'_s) = (a'_s, b'_s) = (a_{s-1}, b_{s-1} + \deg x_s(a_{s-1} - r(x_s))) < (a_{s-1}, b_{s-1}),$$
$$\widehat{A}(\Phi'_{s+1}) = (a'_{s+1}, b'_{s+1}) = (a_s, b'_s + \deg x_{s-1}(a_{s-1} - r(x_{s-1}))) < (a_s, b_s),$$

так как $a_s = a_{s-1}$ и $b_s = b_{s-1} + \deg x_{s-1}(a_{s-1} - r(x_{s-1}))$, но $b'_s < b_{s-1}$. Следовательно, высота соотношения R' равна

$$\widehat{A}(R') = \max\{\widehat{A}_{s+1}, \widehat{A}'_{s+1}, \widehat{A}_{s-1}\},$$

где $\widehat{A}_{s+1} < \widehat{A}_s$, $\widehat{A}'_{s+1} < \widehat{A}_s$ и $\widehat{A}_{s-1} \leqslant \widehat{A}_s = \widehat{A}(R)$.

Если R очень специально, то $\widehat{A}_{s-1} < \widehat{A}_s$, тогда $\widehat{A}(R) < \widehat{A}(R)$, и мы можем воспользоваться индукцией по высоте с применением леммы 3.2.

Если R не очень специально, т. е. $\widehat{A}_{s-1} = \widehat{A}_s$, то представим соотношение R' в виде произведения $R' = R_2 R_1$, где $R_1 = \Psi \Phi_{s-1} \cdots \Phi_1$, Ψ — композиция линков, раскручивающих отображение $\Phi_{s-1} \circ \cdots \circ \Phi_1$ по алгоритму теоремы 2.5, а $R_2 = \Phi_n \cdots \Phi_{s+2} \Phi'_{s+1} \Phi'_s \Psi^{-1}$. Тогда $\widehat{A}(R_2) < \widehat{A}(R)$ и работает индукция по высоте; $\widehat{A}(R_1) = \widehat{A}(R)$, но соотношение R_1 уже очень специально, т. е. для $R' = R_2 R_1$, выполняются условия (3.5.2) и доказательство такое же, как в 3.5.

Случай $\Phi_s = \sigma_{x_{s-1}}^{-1}$, $\Phi_{s+1} = \varepsilon_{x_s}$. Здесь $\deg x_{s-1} = 1$ в случае $K_X^2 = 4$ и $\deg x_{s-1} = 2$ в случае $K_X^2 = 8$. По соответствующим формулам из 2.6 (i) $r(x_{s-1}) \leqslant a_{s-1}$, так как $\widehat{A}_s = (a_s, b_s) \geqslant (a_{s-1}, 0) = \widehat{A}_{s-1}$, так что $a_s \geqslant a_{s-1}$ и $b_s \leqslant 0$. Так как $\widehat{A}_{s+1} < \widehat{A}_s$, то $r(x_s) > a_s$. Отсюда и из неравенства (1.5.5) получаем, принимая во внимание, что в случае $K_X^2 = 8$ X не имеет k-точек, $\deg x_s = 1$ или 2 в случае $K_{X_5}^2 = 3$, $\deg x_s = 2$ или 4 в случае $K_{X_5}^2 = 6$. Возникают две возможности:

a) $K^2_{X_s} = 3$, $\deg x_s = 1$, или $K^2_{X_s} = 6$, $\deg x_s = 2$. Здесь мы воспользуемся соотношениями (4.6.3), (4.6.1) и заменим $\Phi_{s+1}\Phi_s$ на $\Phi'_{s+3}\Phi'_{s+2}\Phi'_{s+1}\Phi'_s$, где $\Phi'_s = \sigma^{-1}_{x'_{s-1}}$, $x'_{s-1} = \sigma_{x_{s-1}}(x_s)$, $r(x'_{s-1}) = r(x_s)$, $\Phi'_{s+1} = \varepsilon_{x'_s}$, $x'_s = \sigma^{-1}_{x'_{s-1}}(x_{s-1})$, $r(x'_s) = r(x_{s-1})$, $\Phi'_{s+2} = \sigma_{y'_{s+2}}\colon X'_{s+1} \to X'_{s+2}$ — стягивание исключительного дивизора (который однозначно определен, как отмечено в начале доказательства), $\Phi'_{s+3} = \varepsilon_{x'_{s+2}}$, $x'_{s+2} = \sigma'(y'_{s+1})$, где y'_{s+1} — образ стягиваемого дивизора отображением $\Phi'_{s+1} = \varepsilon_{x'_s}$. В результате мы получим эквивалентное соотношение

$$R = \Phi_n \cdots \Phi_{s+2}\Phi'_{s+3}\Phi'_{s+2}\Phi'_{s+1}\Phi'_s\Phi_{s-1}\cdots\Phi_1.$$

Как обычно, надо вычислить степени $\widehat{A}_i$ и оценить высоту $\widehat{A}(R')$. По соответствующим формулам имеем:

$$(a'_s, b'_s) = (2a_{s-1} - r(x_s), r(x_s) - a_{s-1}) < (a_{s-1}, 0) \leqslant (a_s, b_s);$$

$$\begin{aligned}(a'_{s+1}b'_{s+1}) &= (a'_s, b'_s + (a'_s - r(x_{s-1}))) = \\ &= (a'_s, a_{s-1} - r(x_{s-1}) < (a_{s-1}, 0) \quad (\text{так как } a'_s < a_{s-1});\end{aligned}$$

$$r(y'_{s+1}) = 2a'_s - r(x_{s-1}) = 4a_{s-1} - 3r(x_{s-1});$$

$$\begin{aligned}(a'_{s+2}, b'_{s+2}) &= (a'_{s+1} + b'_{s+1}, 0) = (2a_{s-1} - r(x_{s-1}) - r(x_s) + a_{s-1}, 0) = \\ &= (a_s - r(x_s) + a_{s-1}, 0) < (a_{s-1}, b_{s-1}) \leqslant (a_s, b_s);\end{aligned}$$

$$(a'_{s+3}, b'_{s+3}) = (a_{s+1}, b_{s+1}) < (a_s, b_s).$$

Отсюда $\widehat{A}(R') = \max\{\widehat{A}_{s+1}, \widehat{A}_{s-1}\}$. Если $\widehat{A}_{s-1} < \widehat{A}_s$, то $\widehat{A}(R') < \widehat{A}_s = \widehat{A}(R)$ и можем использовать индукцию по высоте. Если $\widehat{A}_{s-1} = A_s$, то, как в предыдущем случае, представим R' в виде произведения $R' = R_2R_1$, так что для R_1, R_2 выполняются условия (3.5.2), и опять применима индукция по высоте.

b) $K^2_{X_s} = 3$, $\deg x_s = 2$, или $K^2_X = 6$, $\deg x_s = 4$. Здесь используются соотношения (4.6.4) и (4.6.1). Заменим $\Phi_{s+1}\Phi_s$ на $\Phi'_{s+5}\cdots\Phi'_{s+1}\Phi'_s$, где $\Phi'_s = \tau_{x'_{s-1}}$, $x'_{s-1} = \sigma_{x_{s-1}}(x_s)$, $r(x'_{s-1}) = r(x_s)$; $\Phi'_{s+1} = \sigma^{-1}_{x'_s}$, $x'_s = \tau_{x'_{s-1}}(x_{s-1})$, $r(x'_s) = r(x_{s-1})$; $\Phi'_{s+2} = \varepsilon_{x'_{s+1}}$, $x'_{s+1} = \sigma^{-1}_{x'_s}(y'_s)$, где y'_s — образ стягиваемого дивизора отображениям $\tau_{x'_{s-1}}$, $r(x'_{s+1}) = r(y'_s)$; $\Phi'_{s+3} = \sigma y'_{s+3}\colon X'_{s+2} \to X'_{s+3}$ — стягивание однозначно определенного исключительного дивизора в точку $y'_{s+3} \in X'_{s+3}$; $\Phi'_{s+4} = \tau_{x'_{s+3}}$, $x'_{s+3} = \sigma_{y'_{s+3}}(y'_{s+2})$, y'_{s+2} — образ стягиваемого дивизора отображением $\varepsilon_{x'_{s+1}}$, $r(x'_{s+3}) = r(y'_{s+2})$ и, наконец, $\Phi'_{s+5} = \sigma^{-1}_{x'+4}$, $x'_{s+4} = \tau_{x'_{s+3}}(y'_{s+3})$. Как и выше, мы получаем эквивалентное соотношение

$$R' = \Phi_n \cdots \Phi_{s+2}\Phi'_{s+5}\cdots\Phi'_{s+1}\Phi'_s\Phi_{s-1}\cdots\Phi_1.$$

Вычислим степени (напомним, что в случае $K^2_{X'} = 6$ $\Pi\colon X' \to C$ — расслоение на коники, f' обозначает удвоенный геометрический слой, как в соответству-

ющем случае из 2.6 (i)):

$$(a'_s, 0) = (3a_{s-1} - 2r(x_s), 0) < (a_{s-1}, 0) \leqslant (a_s, b_s);$$

$$r(y'_s) = 4a_{s-1} - 3r(x_s);$$

$$\begin{aligned}(a'_{s+1}, b'_{s+1}) &= (2a'_s - r(x_{s-1}), r(x_{s-1}) - a_{s-1}) = \\ &= (a_s + 4(a_{s-1} - r(x_s)), r(x_{s-1}) - a_{s-1}) < (a_s, b_s);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a'_{s+2}, b'_{s+2}) &= (2a'_s - r(x_{s-1}), r(x_{s-1}) - a_{s-1} + \\ &+ 2(2a'_s - r(x_{s-1}) - 4a_{s-1} + 3r(x_3))) = \\ &= (a_s + 4(a_{s-1} - r(x_s)), a_s + a_{s-1} - 2r(x_s)) < (a_s, b_s);\end{aligned}$$

$$r(y'_{s+2}) = 4a'_s - 2r(x_{s-1}) - 4a_{s-1} + 3r(x_s) = 2a_s + 4a_{s-1} - 5r(x_3);$$

$$(a'_{s+3}, 0) = (a'_{s+2} + b'_{s+2}, 0) = (2a_s + 5a_{s-1} - 6r(x_s), 0) < (a_s, b_s);$$

$$(a'_{s+4}, 0) = (3a'_{s+3} - 2r(y'_{s+2}), 0) = (2a_s + 7a_{s-1} - 8r(x_s), 0) < (a_s, b_s);$$

$$(a'_{s+5}, b'_{s+5}) = (a_{s+1}, b_{s+1}) < (a_s, b_s).$$

Отсюда

$$\widehat{A}(R') = \max\{\widehat{A}_{s+1}, \widehat{A}'_{s+4}, \ldots, \widehat{A}'_s, \widehat{A}_{s-1}\},$$

так что, если $\widehat{A}_{s-1} < \widehat{A}_s$, то $\widehat{A}(R') < \widehat{A}(R)$, если же $\widehat{A}_{s-1} = A_s$, то опять как в (3.5.2).

Случай $\Phi_s = \tau_{x_{s-1}}$, $\Phi_{s+1} = \sigma^{-1}_{x_s}$. Здесь $\deg x_{s-1} = 2$, $\deg x_s = 1$ в случае $K_X^2 = 4$ и $\deg x_{s-1} = 4$, $\deg x_s = 2$ в случае $K_X^2 = 8$. Опять воспользуемся соотношениями (4.6.4) и (4.6.1). Заменим $\Phi_{s+1}\Phi_s$ в R на $\Phi'_{s+5}\cdots\Phi'_{s+1}\Phi'_s$, где $\Phi'_s = \sigma^{-1}_{x'_{s-1}}$, $x'_{s-1} = \Phi_s^{-1}(x_s)$, $r(x'_{s-1}) = r(x_s)$; $\Phi'_{s+1} = \varepsilon_{x'_s}$, $x'_s = \Phi'_s(x_{s-1})$, $r(x'_s) = r(x_{s-1})$; $\Phi'_{s+2} = \sigma_{y'_{s+2}}\colon X'_{s+1} \to X'_{s+2}$ — стягивание исключительного дивизора в точку $y'_{s+2} \in X'_{s+2}$; $\Phi'_{s+3} = \tau_{x'_{s+2}}$, $x'_{s+2} = \sigma_{y'_{s+2}}(y'_{s+1})$, y'_{s+1} — образ стягиваемого дивизора отображением $\varepsilon_{x'_s}$, $r(x'_{s+2}) = r(y'_{s+1})$; $\Phi'_{s+4} = \sigma^{-1}_{x'_{s+3}}$, $x'_{s+3} = \tau_{x'_{s+2}}(y'_{s+2})$, $r(x'_{s+3}) = r(y'_{s+2})$; $\Phi'_{s+5} = \varepsilon_{x'_{s+4}}$, $x'_{s+4} = \sigma^{-1}_{x'_{s+3}}(y'_{s+3})$, y'_{s+3} — образ стягиваемого дивизора отображением $\tau_{x'_{s+2}}$. Как обычно, вычислим последовательные степени в соотношении R', принимая во внимание, что $r(x_s) > a_s$ и $r(x_{s-1}) \leqslant a_{s-1}$, где

$$R' = \Phi_n \cdots \Phi_{s+2}\Phi'_{s+5} \cdots \Phi'_s\Phi_{s-1} \cdots \Phi_1.$$

Имеем:

$$(a'_s, b'_s) = (2a_{s-1} - r(x_s), r(x_s) - a_{s-1}) < (a_{s-1}, 0) \leqslant (a_s, 0);$$

$$\begin{aligned}(a'_{s+1}, b'_{s+1}) &= (2a_{s-1} - r(x_s) + r(x_s) - a_{s-1} + 2(2a_{s-1} - r(x_s) - r(x_s - 1))) = \\ &= (2a_{s-1} - r(x_s), a_s - r(x_s)) < (a_{s-1}, 0) \leqslant (a_s, 0);\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
r(y'_{s+1}) &= 4a_{s-1} - 2r(x_s) - r(x_{s-1});\\
(a'_{s+2}, 0) &= (a'_{s+1} + b'_{s+1}, 0) = (a_s + 2a_{s-1} - 2r(x_s), 0) < (a_{s-1}, 0) \leqslant (a_s, 0);\\
(a'_{s+3}, 0) &= (3a'_{s+2} - 2r(y'_{s+1}), 0) =\\
&= (2a_s + a_{s-1} - 2r(x_s), 0) < (a_{s-1}, 0) \leqslant (a_s, 0);\\
r(y'_{s+2}) &= a'_{s+1} + 2b'_{s+1} = 2a_s + 2a_{s-1} - 3r(x_3);\\
(a'_{s+4}, b'_{s+4}) &= (2a'_{s+3} - r(y'_{s+2}), r(y'_{s+2} - a'_{s+3})) =\\
&= (2a_s - r(x_s), a_{s-1} - r(x_s)) < (a_s, 0);\\
(a'_{s+5}, b'_{s+5}) &= (a_{s+1}, b_{s+1}) < (a_s, 0).
\end{aligned}
$$

Отсюда

$$\widehat{A}(R') = \max\{\widehat{A}_{s+1}, \widehat{A}'_{s+4}, A_{s-1}\}$$

и далее по индукции, как и в предыдущих случаях.

Случай $\Phi_s = \sigma^{-1}_{x_{s-1}}$, $\Phi_{s+1} = \sigma_{y_{s+1}}$ невозможен, потому что, как отмечалось в начале доказательства, на раздутии X_s имеется только один исключительный дивизор, так что $\sigma_{y_{s+1}}\sigma^{-1}_{x_{s-1}} = \mathrm{id}$, что противоречит приведенности соотношения R.

Случай $\Phi_s = \tau_{x_{s-1}}$, $\Phi_{s+1} = \tau_{x_s}$ также невозможен, потому что тогда $\deg(x_s) + \deg(y_s) > K_X^2$, где y_s — образ стягиваемого дивизора для $\tau_{x_{s-1}}$, что невозможно по (1.5.4). Здесь $r(x_s) > a_s$, поскольку $a_{s+1} < a_s$, и $r(y_s) \geqslant a_s$, поскольку $a_{s-1} \leqslant a_s$.

Остальные случаи сводятся к изученным при рассмотрении обратного соотношения R^{-1}. Теорема доказана. □

Комментарий 5. Как видно из предыдущих теорем, все рассмотренные в них классы поверхностей $X \in \{\mathbb{D}\}$ действительно бирационально не тривиальны над k, т. е. не рациональны над k. Более того, поверхности X из теоремы 4.4 с $K_X^2 = 2$ и 4, а также из теоремы 4.5 с $K_X^2 = 3$ являются бирационально полужесткими в смысле определения в конце § 1.

Остальные поверхности из этих двух теорем являются deg-устойчивыми (поверхности X из теоремы 4.6 этими свойствами, очевидно, не обладают).

Для полужестких поверхностей из теорем 4.4 и 4.5 следует довольно простое описание групп бирациональных автоморфизмов $\operatorname{Bir} X$. Действительно, обозначим через $B(X)$ группу, являющуюся свободным произведением бирациональных инволюций τ_x по всем точкам $x \in X$ степени 1 в общем положении (т. е. в этом случае не лежащих на (-1)-кривых $X \otimes \overline{k} = \overline{X}$) в случае $K_X^2 = 2$; бирациональных инволюций τ_x, связанных с замкнутыми точками степени 2 в общем положении, в случае $K_X^2 = 4$. Тогда группа $\operatorname{Bir} X$ представляется в виде полупрямого произведения

$$1 \longrightarrow B(X) \longrightarrow \operatorname{Bir} X \longrightarrow \operatorname{Aut} X \longrightarrow 1.$$

Аналогично, для X из теоремы 4.5 с $K_X^2 = 3$ пусть $B(X)$ обозначает факторгруппу свободного произведения бирациональных инволюций τ_x, $\deg x = 1$,

η_y, $\deg y = 2$, по всем точкам x, y в общем положении, по нормальной подгруппе, порожденной соотношениями (4.5.1), тогда $\operatorname{Bir} X$ также представляется как полупрямое произведение вида (4.6.5) (ср. [18]).

Для других поверхностей X из этих двух теорем группа $\operatorname{Bir} X$ описывается несколько сложнее: в качестве образующих надо брать соответствующие бирациональные инволюции, связанные с точками в общем положении на всех минимальных моделях $\{X_i\}$, $i \in I$, из бирационального класса поверхности X, перенося их на X с помощью выбранных заранее бирациональных изоморфизмов $X_i \dashrightarrow X$, как в комментарии 3, и факторизовать по соотношениям. Аналогично, но еще сложнее, описываются группы $\operatorname{Bir} X$ для всех остальных классов поверхностей $X \in \{\mathbb{D}\}$, поскольку в бирациональном классе X уже могут быть минимальные модели не только из $\{\mathbb{D}\}$, но также из $\{\mathbb{C}\}$, как, например, для поверхностей из теоремы 4.6, а также для всех рациональных над k поверхностей. Такая же картина наблюдается и для поверхностей $X \in \{\mathbb{C}\}$: их группы $\operatorname{Bir} X$ всегда содержат подгруппу автоморфизмов общего слоя, т. е. коники над полем функций $k(C)$ базы C (см. [3, 8, 14]).

4.7. Изучим теперь бирациональные отображения поверхностей $X \in \{\mathbb{C}\}$ с $K_X^2 > 0$ (для $K_X^2 \leqslant 0$ всякое такое отображение сохраняет расслоение на коники по теореме 1.6 (iii)). Как уже отмечалось, возможны случаи, когда $X \in \{\mathbb{C}\}$ с $K_X^2 > 0$ также обладает единственной структурой расслоения на коники, тогда всякое бирациональное отображение $X \dashrightarrow X'$ сохраняет эту структуру и, стало быть, раскладывается в композицию линков, являющихся элементарными преобразованиями расслоений на коники.

Расслоения на коники $X \in \{\mathbb{C}\}$ с $K_X^2 > 0$ существуют для $K_X^2 = 1, 2, \ldots$ $\ldots, 6, 8$. Отметим, что в случае нечетного K_X^2 база C всегда имеет k-точки [19]. В случае $K_X^2 = 8$ существуют два типа таких поверхностей: $\mathbb{P}^1$-расслоения $\pi\colon X \to C$ над кривой рода нуль C и прямые произведения $C \times C'$, где C, C' — кривые рода нуль, не имеющие k-точек (см. 1.1 (ii)). Более того, всякая поверхность первого типа бирационально эквивалента над C произведению $\mathbb{P}^1 \times C$. На $C \times C'$ имеются две структуры расслоения на коники, переход от одной к другой — это линк типа IV из 2.6 (iv), случай $K_X^2 =$ $= 8$.

Случай $K_X^2 = 6$ нам уже встречался при доказательстве теоремы 4.6. Здесь всегда $-K_X$ очень обилен и существует однозначно определенный исключительный дивизор $E \sim -K_X - 2f$, где f — класс геометрического слоя; стягивание E приводит к поверхности X_1 с $K_{X_1}^2 = 8$ и $\rho(X_1) = 1$ (линк из 2.6 (iii), случай $K_{X_1}^2 = 8$). При этом имеются две возможности: $X_1 \simeq Q \subset \mathbb{P}^3$, Q — гладкая квадрика, если и только если $C(k) \neq \varnothing$; $X_1 \subset \mathbb{P}^8$ — поверхность степени 8 и $-K_X$ не делится на 2 в группе $\operatorname{Pic} X = \mathbb{Z}$, если и только если $C(k) = \varnothing$.

Случай $K_X^2 = 5$ (см. [4], [15]). Здесь также $-K_X$ всегда очень обилен, $C(k) \neq \varnothing$ и существует однозначно определенный исключительный дивизор $E \sim -2K_X - 3f$, состоящий из четверки непересекающихся сопряженных (-1)-кривых, стягивание которого приводит к $\mathbb{P}^2$ (линк из 2.6 (iii), случай $K_{X_1}^2 = 9$, b)).

Случай $K_X^2 = 3$ также встречался в начале доказательства теоремы 4.6. Здесь всегда $-K_X$ очень обилен и отображает $X \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ на кубическую поверхность. На X существует однозначно определенный исключительный дивизор — (-1)-кривая $E \sim -K_X - f$ (E — прямая на кубической поверхности, пучок плоскостей в $\mathbb{P}^3$, проходящих через E, высекает на X пучок коник). Стягивание E приводит к поверхности X_1 с $K_{X_1}^2 = 4$ и $\rho(X_1) = 1$ (линк из 2.6 (iii), случай $K_{X_1}^2 = 4$).

Для оставшихся классов поверхностей $X \in \{\mathbb{C}\}$ с $K_X^2 = 1$, 2 или 4 справедливы следующие утверждения.

4.8. Предложение. (i) *Пусть* $X \in \{\mathbb{C}\}$, $K_X^2 = 1$, 2 *или* 4 *и* $-K_X$ *обилен, тогда на* X *существует другая* (*бирегулярная*) *структура расслоений на коники* $\pi' \colon X \to C'$, *класс геометрического слоя* f' *которого равен*:

$$-4K_X - f', \quad \text{если} \quad K_X^2 = 1;$$

$$-2K_X - f', \quad \text{если} \quad K_X^2 = 2;$$

$$-K_X - f', \quad \text{если} \quad K_X^2 = 4.$$

Переход к другой структуре $|f| \leftrightarrow |f'|$ — *это линки типа* IV *из* 2.6 (iv), *случай* $K_X^2 = 1$, 2 *и* 4, *соответственно. Более того, в случаях* $K_X^2 = 1$ *и* 2 *эти линки являются бирегулярными инволюциями: Бертини* $\beta \colon f \to -4K_X - f = f'$ *в случае* $K_X^2 = 1$ *и Гейзера* $\gamma \colon f \to -2K_X - f = f'$ *в случае* $K_X^2 = 2$.

(ii) *Пусть* $X \in \{\mathbb{C}\}$ *и* $K_X^2 = 1$, 2 *или* 4, $\pi \colon X \to C$ — *структурный морфизм. На* X *тогда и только тогда существует другая* (*бирациональная*) *структура расслоения на коники, когда существует бирациональное отображение* φ *над* C

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, dashed, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & X' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

на поверхность X' *с* $K_{X'}^2 = K_X^2$, $X' \in \{\mathbb{C}\}$, *и* $-K_{X'}$ *на* X' *обилен.*

Доказательство. (i) Существование другого пучка коник на X в случае обильного $-K_X$ прямо следует из теоремы Римана–Роха (см., например, [4]). Можно, однако, воспользоваться несколько другими соображениями. В случае $K_X^2 = 1$ линейная система $|-2K_X|$ задает двулистное накрытие $\varphi_{-2K_X} \colon X \to Q^* \subset \mathbb{P}^3$ квадратичного конуса Q^*, при этом слои пучка коник $|f|$ отображаются бирационально на кривые степени 4 на Q^*, так что $\varphi_{-2K}^{-1}\varphi_{-2K}(f) \sim -4K_X$. Инволюция этого двойного накрытия (инволюция Бертини β), переставляющая точки в слоях, переводит f в $f' \sim -4K_X - f$. Аналогично, в случае $K_X^2 = 2$ линейная система $|-K_X|$ задает двулистное накрытие $\mathbb{P}^2$, при этом слои пучка $|f|$ отображаются бирационально на коники в $\mathbb{P}^2$, так что $\varphi_{-K}^{-1}\varphi_{-K}(f) \sim -2K_X$. Инволюция этого двойного накрытия (инволюция Гейзера γ) переводит f в $f' \sim -2K_X - f$. В случае $K_X^2 = 4$ антиканоническое вложение реализует X в виде гладкой поверхности степени 4

в $\mathbb{P}^4$, являющейся пересечением двух квадрик. Слои пучка коник $|f|$ отображаются при этом изоморфно на коники, лежащие на $X \subset \mathbb{P}^4$. Тогда пучок гиперплоскостей в $\mathbb{P}^4$, проходящих через двумерную плоскость $\langle f \rangle \simeq \mathbb{P}^2$ коники f, высекает на X другой пучок коник $|f'|$, так что $f' \sim -K_X - f$. В общем случае нет никакой естественной инволюции, переставляющей эти два пучка, более того, в [3] приводятся примеры, когда пучки не изоморфны.

(ii) В одну сторону утверждение уже доказано в (i): если существует бирациональное отображение (4.8.1), то собственный прообраз второго пучка на X' (существующего по утверждению (i)) является пучком рациональных кривых на X (вообще говоря, с базисными точками и особенностями), трансверсальным к структурному пучку $|f|$.

Обратно, предположим, что на X существует другой пучок рациональных без неподвижных компонент, трансверсальный к $|f|$, и $z = -aK_X + bf - \sum r(x_i)x_i$ — его класс в группе циклов $Z^*(X)$. Тогда по лемме 1.3 либо существует максимальная особенность, скажем, $x_1 \in X$ с $r(x_1) > a$, либо $b < 0$. Если $b < 0$, то, как показано в примере 1.5 (iii), $-K_X$ обилен. Если же существуют максимальные особенности, то их можно раскрутить линками типа II из 2.6, т. е. элементарными преобразованиями над C вдоль пучка коник $|f|$. Тогда коэффициент b' при f' станет отрицательным и $-K_X$ обильным. Доказательство закончено. □

Итак, поскольку мы откладываем изучение k-рациональных поверхностей до следующего параграфа, то здесь нам остается рассмотреть только следующие случаи $X \in \{\mathbb{C}\}$:

$K_X^2 = 1, 2, 4$ и для X существует диаграмма (4.8.1);

$K_X^2 = 8$, X бирационально над C произведению $C \times C'$, где $C(k) = \varnothing$.

Отметим, что в случае $K_X^2 = 3$ и 6 изучение бирациональных отображений $\chi\colon X \dashrightarrow X'$ ($X(k) = \varnothing$ в случае $K_X^2 = 6$) сводится к теореме 4.6 стягиванием соответствующих исключительных дивизоров. В случае $K_X^2 = 8$, если X бирационально эквивалентно $C \times C'$, где $C(k) = \varnothing$, то для C' имеются три возможности: $C' \simeq \mathbb{P}^1$, $C' \simeq C$ и $C' \not\simeq C$, $C'(k) = \varnothing$. В каждом из этих случаев бирациональное отображение $\chi\colon X \dashrightarrow X'$ раскладывается в композицию линков типа II (элементарных преобразований) и линков типа IV (переход к другому пучку коник). В случае $C' \simeq C$ этот переход осуществляется бирегулярной инволюцией перестановки множителей, как в случае $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ в теореме 3.5.

Теперь рассмотрим отмеченные выше случаи.

4.9. Теорема [8], [14]. *Пусть $X \in \{\mathbb{C}\}$ — одна из поверхностей с $K_X^2 = 1, 2, 4$, для которых имеет место диаграмма* (4.8.1) (*так что можно предполагать, что $-K_X$ обилен*), *и $K_X^2 = 8$, $X = C \times C$, $C(k) = \varnothing$. Пусть $\chi\colon X \dashrightarrow X'$ — бирациональное отображение на поверхность $X' \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(i) $K_X^2 = 1$; *отображение χ раскладывается в произведение линков типа* II *и* IV, *т. е. элементарных преобразований над C и инволюций Бертини β_i, действующих на $X_i \in \{\mathbb{C}\}$, где X_i из бирационального над C класса поверхности X с обильным $-K_{X_i}$, $K_X^2 = 1$; все соотношения выводятся из*

уже известных соотношений:

$$\Phi[1]\Phi = 1, \qquad \Phi_4[2]\Phi_3[1]\Phi_2\Phi_1 = 1, \tag{4.9.1}$$

где Φ *— любой из указанных линков (если* $\Phi = \beta$*, то просто* $\beta^2 = 1$*),* Φ_i*,* $i = 1, \dots, 4$*, — элементарные преобразования, центры* x*,* y *для* $\Phi_1 = \varepsilon_x$ *и* $\Phi_2 = \varepsilon_y$ *независимы*;

(ii) $K_X^2 = 2$: a) $X(k) = \varnothing$ *(в частности, это так, если* $C(k) = \varnothing$*), тогда, как и в* (i)*,* χ *раскладывается в произведение линков типа* II *и* IV*, т. е. элементарных преобразований и инволюций Гейзера* γ_i*, действующих на* $X_i \in \{\mathbb{C}\}$ *из бирационального класса* X *с обильным* $-K_{X_i}$*,* $K_{X_i}^2 = 2$*; все соотношения такие же, как и в* (i);

b) $X(k) \neq 0$*, тогда* k*-точки на* X *всюду плотны в топологии Зарисского (*X *универсально над* k*, см., например,* [19]); χ *раскладывается в композицию элементарных преобразований над* C *и инволюций Гейзера*; *кроме соотношений* (4.9.1) *здесь добавляются еще соотношения, связанные с точками степени* 1 *в общем положении* $x \in X_i$*,* $X_i \in \{\mathbb{C}\}$ *из бирационального класса* X *с обильным* $-K_{X_i}$*,* $K_{X_i}^2 = 2$;

$$\Phi_8\Phi_7[5]\Phi_6\Phi_5[3]\Phi_4\Phi_3[1]\Phi_2\Phi_1 = 1, \tag{4.9.2}$$

где $\Phi_{2m} = \gamma$*,* $m = 1, \dots, 4$*, — инволюции Гейзера (т. е. соответствующий линк типа* IV *из* 2.6 (iv)), $\Phi_{2m-1} = \varepsilon_{x_m}$ *— элементарные преобразования с центрами в точках степени* 1 *в общем положении*; *любое соотношение выводится из соотношений типа* (4.9.1) *и* (4.9.2);

(iii) $K_X^2 = 4$; χ *раскладывается в композицию линков типа* II *и* IV*, т. е. элементарных преобразований вдоль каждого из двух стандартных пучков коник на каждой из моделей* $X_i \in \{\mathbb{C}\}$*,* $K_{X_i}^2 = 4$*,* $-K_{X_i}$ *обилен, из бирационального класса поверхности* X*; все соотношения выводятся из соотношений типа* (4.9.1) *и следующих (точки* $x \in X$ *в общем положении)*:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x_2}[3]\alpha\varepsilon_{x_1}[1]\alpha\varepsilon_x = 1, &\quad \deg x = 1; \\ \alpha\varepsilon_{x_3}[5]\alpha\varepsilon_{x_2}[3]\alpha\varepsilon_{x_1}[1]\alpha\varepsilon_x = 1, &\quad \deg x = 2; \\ \alpha\varepsilon_{x_5}[9]\varepsilon_{x_4}[7]\alpha\varepsilon_{x_3}[5]\alpha\varepsilon_{x_2}[3]\alpha\varepsilon_{x_1}[1]\alpha\varepsilon_x = 1, &\quad \deg x = 3, \end{aligned} \tag{4.9.3}$$

где α *— линки типа* IV *— переход к другому пучку коник,* ε_{x_i} *— элементарные преобразования*;

(iv) $K_X^2 = 8$; $X = C \times C'$*,* $C(k) = \varnothing$*,* χ *раскладывается в композицию линков типа* II *(элементарные преобразования) и* IV *(переход ко второй структуре расслоения на коники)*; *все соотношения выводятся из соотношений типа* (4.9.1) *и* (4.9.3)*, где степени* $\deg x$ *удвоены, т. е.* $\deg x = 2$*,* 4 *и* 6*, соответственно.*

Доказательство. (i) Если в линейной системе $\mathcal{H}$ на X — собственном прообразе очень обильной линейной системы $\mathcal{H}'$ на X' относительно χ — есть максимальная особенность $x \in X$ с $r(x) > a$, то с помощью элементарных преобразований мы можем открутить все такие максимальные особенности,

как в доказательстве теоремы 2.5. Так что можно считать, что максимальных особенностей нет. Только $b < 0$, $-K_X$ обилен (см. 1.5 (iii)) и применима инволюция Бертини β и т. д. по алгоритму 2.5. Так как K_X^2 — инвариант относительно элементарных преобразований и β — бирациональный автоморфизм, то $X' \in \{\mathbb{C}\}$ и $K_{X'}^2 = K_X^2 = 1$.

Проверим, что все соотношения порождаются соотношениями (4.9.1). Пусть $R = \Phi_n \cdots \Phi_{s+1}\Phi_s\Phi_{s-1}\cdots\Phi_i$ — нетривиальное специальное соотношение высоты $\widehat{A}(R) = \widehat{A}_s = (a_s, b_s)$ и вершиной s.

Случай $\Phi_s = \varepsilon_{x_{s-1}}$, $\Phi_{s+1} = \varepsilon_{x_s}$. Этот случай полностью аналогичен соответствующему случаю в теореме 4.6, используются те же соотношения; первое из них означает, что обратное к элементарному преобразованию является элементарным преобразованием, а второе — коммутирование элементарных преобразований с независимыми центрами.

Случай $\Phi_s = \varepsilon_{x_{s-1}}$, $\Phi_{s+1} = \beta_{s+1}$. Из условия $A_{s+1} < A_s$ по соответствующим формулам из 2.6 (iv) имеем $b_s < 0$, а из условия $A_{s-1} \leqslant A_s$ и формул 2.6 (iii) следует, что $r(y_s) \geqslant a_s$, где y_s — точка, в которую Φ_s стягивает свой исключительный дивизор. Неравенство (1.5.5) в нестрогом варианте «$\leqslant$» дает

$$\deg y_s \leqslant K_{X_s}^2 + 2\frac{b_s}{a_s} + \frac{1}{a_s}K_{X_{s+1}}\mathcal{H}_{s+1}.$$

Здесь $b_s < 0$, $K_{X_{s+1}}\mathcal{H}_{s+1} \leqslant 0$, поскольку $\mathcal{H}_{s+1}$ не имеет неподвижных компонент и, значит, численно эффективна, а $-K_{X_{s+1}}$ — эффективный дивизор по теореме Римана–Роха, так что

$$\deg y_s < K_{X_s}^2 = 1.$$

Это противоречие означает, что рассматриваемый случай невозможен.

Случай $\Phi_s = \beta_s$, $\Phi_{s+1} = \varepsilon_{x_m}$. Этот случай можно свести к предыдущему переходом к обратному соотношению R^{-1}, однако, нетрудно убедиться и непосредственно, что он также невозможен. Действительно, здесь $r(x_s) > a_s$ и $b_s \leqslant 0$, и противоречие, как и выше, дает неравенство (1.5.5). Таким образом, все утверждения (i) доказаны.

(ii) Случай a) и утверждение о разложении в случае b) дословно повторяют предыдущий случай (i) с инволюцией Гейзера γ вместо инволюции Бертини β. Соотношения (4.9.2) проверяются, как обычно, по соответствующим формулам из 2.6 с учетом указанных сцеплений:

$$(a,b) \xrightarrow{\varepsilon} (a, a+b) \xrightarrow{\gamma} (3a+2b, -a-b) \xrightarrow{\varepsilon} (3a+2b, b) \xrightarrow{\gamma} (3a+4b, -b) \xrightarrow{\varepsilon}$$
$$\xrightarrow{\varepsilon} (3a+4b, -a-b) \xrightarrow{\gamma} (a+2b, a+b) \xrightarrow{\varepsilon} (a+2b, -b) \xrightarrow{\gamma} (a,b).$$

Пусть $R = \Phi_n \cdots \Phi_{s+1}\Phi_s\Phi_{s-1}\cdots\Phi_1$ — специальное соотношение с вершиной s и высотой $\widehat{A}(R) = \widehat{A}_s = (a_s, b_s)$. Почти все случаи, которые предстоит рассмотреть, полностью аналогичны предыдущим, кроме двух, даже одного, потому что второй сводится к первому для обратного соотношения R^{-1}.

Случай $\Phi_s = \varepsilon_{x_{s-1}}$, $\Phi_{s+1} = \gamma_{s+1}$, $\deg x_{s-1} = 1$. Из условий $\widehat{A}_{s+1} < \widehat{A}_s$, $\widehat{A}_{s-1} \leqslant \widehat{A}_s$ вытекает, что $b_{s-1} \leqslant b_s < 0$. Отсюда по 1.5 (iii) антиканонические

классы $-K_{X_{s-1}}$ и $-K_{X_s}$ обильны. Проверим, что точка $x_{s-1} \in X_{s-1}$ находится в общем положении, т. е. не лежит на (-1)-кривых на $\overline{X}_{s-1}$. Если $\overline{E} \subset \overline{X}_{s-1}$ — (-1)-кривая и $x_{s-1} \in \overline{E}$, то в обозначениях п. 1.4 имеем:

$$\overline{E} - x_{s-1} \in Z_t^*(\overline{X}_{s-1}),$$
$$-a_{s-1}K_{\overline{X}_{s-1}} + b_{s-1}\overline{f}_{s-1} - r(x_{s-1})x_{s-1} \in Z^{**}(\overline{X}_{s-1}),$$

так что

$$(-a_{s-1}K_{\overline{X}_{s-1}} + b_{s-1}\overline{f}_{s-1} - r(x_{s-1})x_{s-1})(\overline{E} - x_{s-1}) \geqslant 0.$$

С другой стороны, вычисления показывают, что это пересечение отрицательно. Действительно, $-K_{\overline{X}_{s-1}}\overline{E} = 1$, $\overline{f}_{s-1}\overline{E} = 1$ или 2 ($\overline{E}$ не является компонентой слоя $\overline{f}$, поскольку определено ε_{x-1}) и мы получаем, что рассматриваемое пересечение равно

$$b_{s-1}(\overline{f}_{s-1} \cdot \overline{E}) + a_{s-1} - r(x_{s-1}) = \begin{cases} b_s, & \text{если } (\overline{f}_{s-1} \cdot \overline{E}) = 1, \\ b_{s-1} + b_s, & \text{если } (\overline{f}_{s-1} \cdot E) = 2. \end{cases}$$

Это приводит к противоречию, так как $b_{s-1} \leqslant b_s < 0$.

Используя соотношения (4.9.2) и первое из соотношений (4.9.1), заменим $\Phi_{s+1}\Phi_s$ на $\Phi'_{s+5}\cdots\Phi'_{s+1}\Phi'_s$, где $\Phi'_s = \gamma_s$, $\Phi'_{s+1} = \varepsilon_{x'_s}$, $x'_s = \gamma_s(x_{s-1})$, $r(x'_s) = r(x_{s-1})$, $\Phi'_{s+2} = \gamma_{s+2}$, $\Phi'_{s+3} = \varepsilon_{x'_{s+2}}$, $x'_{s+2} = \gamma_{s+2}(y'_{s+1})$, y'_{s+1} — образ стягиваемого дивизора для отображения $\varepsilon_{x'_s}$, $\Phi'_{s+4} = \gamma_{s+4}$, $\Phi_{s+5} = \varepsilon_{x'_{s+4}}$. В результате получим соотношение

$$R' = \Phi_n \cdots \Phi_{s+1}\Phi'_{s+5}\cdots\Phi'_s\Phi_{s-1}\cdots\Phi_1.$$

Обычные вычисления дают:

$$\begin{aligned}
(a'_s, b'_s) &= (a_{s-1} + 2b_{s-1}, -b_{s-1}) < (a_{s-1}, b_{s-1}) \leqslant (a_s, b_s);\\
(a'_{s+1}, b'_{s+1}) &= (a_{s-1} + 2b_{s-1}, a_{s-1} + b_{s-1} - r(x_{s-1})) =\\
&= (a_{s-1} + 2b_{s-1}, b_s) < (a_{s-1}, b_{s-1}) \leqslant (a_s, b_s);\\
r(y'_{s+1}) &= 2a_{s-1} + 4b_{s-1} - r(x_{s-1}) = a_{s-1} + 3b_{s-1} + b_s;\\
(a'_{s+2}, b'_{s+2}) &= (a_{s-1} + 2b_{s-1} + 2b_s, -b_s) < (a_{s-1}, b_{s-1}) \leqslant (a_s, b_s);\\
(a'_{s+3}, b'_{s+3}) &= (a_{s-1} + 2b_{s-1}, -b_{s-1}) < (a_{s-1}, b_{s-1}) \leqslant (a_s, b_s);\\
(a'_{s+4}, b'_{s+4}) &= (a_{s-1} + 2b_{s-1}, b_{s-1}) < (a_{s-1}, b_{s-1}) \leqslant (a_s, b_s);\\
(a'_{s+5}, b'_{s+5}) &= (a_{s+1}, b_{s+1}) < (a_s, b_s).
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\widehat{A}(R') = \max\{\widehat{A}_{s+1}, \widehat{A}_{s-1}\},$$

и доказательство завершается как обычно (см. (3.5.2)).

(iii) Разложение на элементарные линки как в 2.5. Явный вид линков 2.6 в этом случае показывает, что все $X_i \in \{\mathbb{C}\}$, $K_{X_i}^2 = 4$. Кроме того, если $\mathcal{H}_i$ не имеет максимальных особенностей, то $-K_{X_i}$ обилен (как в 1.5 (iii)).

Проверка соотношений (4.9.3) стандартна. Для редукции специального соотношения R, как и выше, надо рассмотреть несколько случаев. Поскольку вычисления однотипны, ограничимся рассмотрением только одного случая, в котором используется последнее из соотношений (4.9.3).

Случай $\Phi_s = \varepsilon_{x_{s-1}}$, $\Phi_{s+1} = \alpha_{s+1}$, $\deg x_{s-1} = 3$. Из условий $\widehat{A}_{s+1} < \widehat{A}_s$, $\widehat{A}_{s-1} \leqslant \widehat{A}_s$ получаем, что $b_{s-1} \leqslant b_s < 0$ и $r(y_s) \geqslant a_s$, где y_s — точка, $\deg y_s = 3$, в которую Φ_s стягивает свой исключительный дивизор. По 1.5 (iii) $-K_{s-1}$ и $-K_s$ обильны. Проверим, что точка $x_{s-1} \in X_{s-1}$ находится в общем положении, т. е. $-K_Z$ обилен, где $\sigma\colon Z \to X_{s-1}$ — раздутие точки x_{s-1}. Пусть $E = \sigma^{-1}(x_{s-1})$ — исключительный дивизор, тогда линейная система

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_Z \sim -a_{s-1}\sigma^* K_{X_{s-1}} + b_{s-1}\sigma^* f_{s-1} - r(x_{s-1})E = \\ = -a_{s-1}K_Z + b_{s-1}\sigma^* f_{s-1} + (a_{s-1} - r(x_{s-1}))E = \\ = -a_{s-1}K_Z + \bigl(b_{s-1} + \deg x_{s-1}(a_{s-1} - r(x_{s-1}))\sigma^* f_{s-1} - (a_{s-1} - r(x_{s-1}))\bigr)E',\end{aligned}$$

где E' — стягиваемый дивизор отображения $\varepsilon_{x_{s-1}}$, т. е. $E + E' \sim 3\sigma^* f_{s-1}$ подвижна и не имеет неподвижных компонент, значит, она численно эффективна. Так как $-K_Z\sigma^* f = 2$, $-K_Z E = -K_Z E' = 3$, то по численному критерию обильности достаточно проверить, что $-K_Z$ положителен на любой неприводимой кривой $F \subset Z$, не лежащей в слоях пучка $|\sigma^* f_{s-1}|$. Принимая во внимание, что

$$b_{s-1} + \deg x_{s-1}(a_{s-1} - r(x_{s-1})) = b_s < 0,$$

имеем:

$$-a_{s-1}K_Z \cdot F = \mathcal{H}_Z \cdot F - b_s\sigma^* f_{s-1} \cdot F + (a_{s-1} - r(x_{s-1}))E' \cdot F > 0,$$

поскольку $\mathcal{H}_Z \cdot F \geqslant 0$, $-b_s\sigma^* f_{s-1} \cdot F > 0$, $E' \cdot F > 0$ и $a_{s-1} - r(x_{s-1}) \geqslant 0$. Следовательно, $-K_Z$ обилен, что и утверждалось.

Таким образом, мы можем воспользоваться соотношением (4.9.3) и первым из соотношений (4.9.1). Заменим $\Phi_{s+1}\Phi_s$ на $\Phi'_{s+9}\cdots\Phi'_{s+1}\Phi'_s$, где $\Phi'_{s+2m} = \alpha_{s+2m}$, $m = 0, 1, \ldots, 4$, — линки типа IV (переходы от одного пучка коник к другому: $f \to f' \sim -K_X - f$), $\Phi_{s+2m+1} = \varepsilon_{x'_{s+2m}}$ — элементарные преобразования со следующими правилами сцепления центров: $x'_s = \alpha_s(x_{s-1})$, $r(x'_s) = r(x_{s-1})$, $x'_{s+2m} = \alpha_{s+2m}(y'_{s+2m-1})$, y'_{s+2m-1} — образ стягиваемого дивизора отображением Φ'_{s+2m-1}, $m = 1, \ldots, 4$. Для соотношения $R' = \Phi_m \cdots \Phi_{s+2}\Phi'_{s+9}\cdots\Phi'_s\Phi_{s-1}\cdots\Phi_1$, эквивалентного R (по модулю соотношений (4.9.3) и (4.9.1)), стандартные вычисления дают:

$$(a'_s, b'_s) = (a_{s-1} + b_{s-1}, -b_{s-1}) < (a_{s-1}, b_{s-1}) \leqslant (a_s, b_s);$$

$$\begin{aligned}(a'_{s+1}, b'_{s+1}) &= (a_{s-1} + b_{s-1}, -b_{s-1} + 3(a_{s-1} + b_{s-1} - r(x_{s-1}))) = \\ &= (a_{s-1} + b_{s-1}, b_{s-1} + b_s) < (a_{s-1}, b_{s-1}) \leqslant (a_s, b_s);\end{aligned}$$

$$r(y'_{s+1}) = 2a_{s-1} + 2b_{s-1} - r(x_{s-1});$$

$$(a'_{s+2}, b'_{s+2}) = (a_{s-1} + 2b_{s-1} + b_s, -b_{s-1} - b_s) < (a_{s-1}, b_{s-1}) \leqslant (a_s, b_s);$$

$$\begin{aligned}(a'_{s+3}, b'_{s+3}) &= (a_{s-1} + 2b_{s-1} + b_s, 2b_s - b_{s-1} - 3(a_{s-1} - r(x_{s-1}))) = \\ &= (a_{s-1} + 2b_{s-1} + b_s, b_s) < (a_{s-1}, b_{s-1}) \leqslant (a_s, b_s);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r(y'_{s+3}) &= 2a_{s-1} + 4b_{s-1} + 2b_s - 2a_{s-1} - 2b_{s-1} + r(x_{s-1}) = \\ &= 2b_{s-1} + 2b_s + r(x_{s-1});\end{aligned}$$

$$(a'_{s+4}, b'_{s+4}) = (a_{s-1} + 2b_{s-1} + 2b_s, -b_s) < (a_{s-1}, b_{s-1}) \leqslant (a_s, b_s);$$

$$\begin{aligned}(a'_{s+5}, b'_{s+5}) &= (a_{s-1} + 2b_{s-1} + 2b_s, -b_s + 3(a'_{s+4} - r(y'_{s+3})) = \\ &= (a_{s-1} + 2b_{s-1} + 2b_s, -b_{s-1}) < (a_{s-1}, b_{s-1}) \leqslant (a_s, b_s);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r(y'_{s+5}) &= 2a_{s-1} + 4b_{s-1} + 4b_s - 2b_{s-1} - 2b_s - r(x_{s-1}) = \\ &= 2(a_{s-1} + b_{s-1} + b_s) - r(x_{s-1});\end{aligned}$$

$$(a'_{s+6}, b'_{s+6}) = (a_{s-1} + b_{s-1} + 2b_s, b_{s-1}) < (a_{s-1}, b_{s-1}) \leqslant (a_s, b_s);$$

$$(a'_{s+7}, b'_{s+7}) = (a_{s-1} + b_{s-1} + 2b_s, -b_{s-1} - b_s) < (a_{s-1}, b_{s-1}) \leqslant (a_s, b_s);$$

$$\begin{aligned}r(y'_{s+7}) &= 2a_{s-1} + 2b_{s-1} + 4b_s - 2a_{s-1} - 2b_{s-1} - 2b_s + r(x_{s-1}) = \\ &= 2b_s + r(x_{s-1});\end{aligned}$$

$$(a'_{s+8}, b'_{s+8}) = (a_{s-1} + b_s, b_{s-1} + b_s) < (a_{s-1}, b_{s-1}) \leqslant (a_s, b_s);$$

$$\begin{aligned}(a'_{s+9}, b'_{s+9}) &= (a_{s-1} + b_s, b_{s-1} + b_s + 3(a_{s-1} + b_s - 2b_s - r(x_{s-1}))) = \\ &= (a_{s-1} - b_s, -b_s) = (a_{s+1}, b_{s+1}) < (a_{s-1}, b_{s-1}) \leqslant (a_s, b_s).\end{aligned}$$

Последнее вычисление можно было бы и не делать, так как в соотношении R мы заменили $\Phi_{s+1}\Phi_s$ на равную в силу соотношения (4.9.3) часть.

Итак, $\widehat{A}(R') = \widehat{A}_{s-1} = (a_{s-1}, b_{s-1}) \leqslant (a_s, b_s) = \widehat{A}_s = \widehat{A}(R)$ и далее, как обычно, индукция по принципу (3.5.2) завершает доказательство.

(iv) Этот случай полностью аналогичен предыдущему. Более того, формулы действия используемых линков будут иметь тот же вид, что и соответствующие линки в случае $K_X^2 = 4$, если, как в теореме 4.6 с $K_X^2 = 8$, мы вместо класса f геометрического слоя пучка коник будем работать с классом $2f$ удвоенного геометрического слоя, который, на самом деле, и является одной из образующих группы $\operatorname{Pic} X = \mathbb{Z}(-K_X) + 2\mathbb{Z}f$, поскольку $X(k) = \varnothing$, и, значит, $C(k) = \varnothing$ по условию. Следовательно, все вычисления при замене соотношения R на R' типа (4.9.4) будут в точности теми же самыми, что и при $K_X^2 = 4$. Доказательство теоремы закончено. $\square$

Из результатов этого параграфа следует, что все поверхности $X \in \{\mathbb{D}\} \cup \cup \{\mathbb{C}\}$, участвующие в формулировках основных теорем и предположительно не рациональные над k, на самом деле, оказываются k-нерациональными, а все остальные — k-рациональными. Таким образом, мы получаем следующий критерий рациональности над k для поверхностей $X \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$. Поверхность

$X \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$ тогда и только тогда рациональна над k, когда выполняются следующие два условия:

(i) X обладает k-точкой;

(ii) $K_X^2 \geqslant 5$.

Как мы убедились выше, достаточность этих условий доказывается легко с помощью теоремы Римана–Роха и проекций из k-рациональных точек. Напротив, для доказательства необходимости условия (ii) (необходимость условия (i) очевидна) потребовалось изучить бирациональные отображения всех поверхностей $X \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$, для которых не выполняется условие (ii), и убедиться, что они не рациональны над k. Метод доказательства, как видим, не очень простой, но другого пока нет.

Комментарий 6. Бирациональная теория рациональных поверхностей над незамкнутыми полями занимает промежуточное место между теорией рациональных поверхностей над замкнутым полем (относительно минимальные модели, критерий рациональности Кастельнуово, поверхности дель Пеццо) и бирациональной теорией 3-мерных $\mathbb{Q}$-Фано расслоенных пространств $\varphi\colon X \to S$ с рациональной базой (т. е. S — либо точка, либо $\mathbb{P}^1$, либо рациональная поверхность) также над алгебраически замкнутым полем.

Итальянские геометры пытались создать бирациональную теорию 3-мерных алгебраических многообразий, похожую на бирациональную теорию поверхностей, в частности, найти подходящий критерий рациональности типа критерия Кастельнуово. Однако, как мы знаем теперь, ситуация оказалась намного сложнее. Теория минимальных моделей Мори дала бирациональную характеризацию 3-мерных многообразий отрицательной кодаировой размерности: каждое такое многообразие с точностью до бирациональной эквивалентности является $\mathbb{Q}$-Фано расслоенным пространством $\varphi\colon X \to S$ (S не обязательно рационально). С развитием бирациональной теории рациональных поверхностей над незамкнутыми полями, еще до возникновения теории Мори, было ясно, что бирациональная геометрия трехмерных многообразий отрицательной кодаировой размерности должна быть похожа на двумерную теорию над незамкнутым полем (хотя и значительно сложнее, в частности, не было надежды на существование простого когомологического критерия рациональности типа Кастельнуово). Именно с этой точки зрения изучались многообразия Фано, расслоения на коники и пучки поверхностей дель Пеццо. При этом использовались обычные классические методы для неособых 3-мерных многообразий: неравенства Нётера–Фано, разрешение неопределенностей бирациональных отображений и конструкций элементарных бирациональных отображений (линков) посредством раздутий и стягиваний с неособыми центрами (см., например, [7]).

Теория Мори позволила более четко сформулировать проблему разложения бирациональных отображений между $\mathbb{Q}$-Фано расслоенными пространствами на элементарные линки. В рамках программы минимальных моделей дан метод такого разложения и единообразный способ конструкции элементарных линков. Вот существенные отличия от классической теории Нётера–Фано:

(i) категория изучаемых объектов расширяется до категории $\mathbb{Q}$-Фано расслоенных пространств, т. е. нормальных проективных многообразий X с не более чем $\mathbb{Q}$-факториальными терминальными особенностями, обладающих структурой стягивания Мори $\varphi\colon X \to S$ расслоенного типа, $0 \leqslant \dim S < \dim X$, $\rho(X/S) = 1$ и $-K_X$ относительно обилен;

(ii) при конструкции элементарных линков и процессе факторизации используются элементарные стягивания Мори, флипы, флипы и антифлипы вместо раздутий и стягиваний с неособыми центрами;

(iii) использование при отрицательной степени вместо максимальной кратности особенностей линейной системы, задающей бирациональное отображение, в некотором смысле обратную к ней величину — канонический порог, являющийся неотрицательным числом или ∞.

Преимущество нового подхода заключается в том, что развитая теория минимальных моделей позволила доказать теорему [21] о разложении бирациональных отображений между 3-мерными $\mathbb{Q}$-Фано расслоенными пространствами на элементарные линки, обобщающую теорему 2.5. Для дальнейшего изучения, в частности, решения проблемы рациональности, нужна теорема, аналогичная теореме 2.6, о классификации элементарных линков в размерности 3, что весьма затруднительно ввиду отсутствия хорошей теории пересечений на многообразиях с $\mathbb{Q}$-факториальными терминальными особенностями такой, как теория пересечения в кольцах Чжоу на неособых многообразиях и их раздутиях. Кроме того, в конструкции элементарных линков входят неявным образом преобразования типа флипов, являющиеся изоморфизмами в коразмерности 1 — новое явление в бирациональной геометрии многообразий размерности $\geqslant 3$.

Для решения проблемы классификации элементарных линков в размерности три нужно прежде всего получить результаты, обобщающие теорему 1.6 о жестких, полужестких и обладающих единственной структурой $\mathbb{Q}$-Фано расслоенных многообразиях, типа результатов [13], [7] о многообразиях Фано и [20] о расслоениях на коники. В [12] сделана попытка выделить подкласс 3-мерных многообразий с единственной структурой расслоения на поверхности дель Пеццо в неособом случае.

Вопрос о соотношениях может быть поставлен только после решения проблемы классификации линков. Отметим, что изучение соотношений не влияет на решение проблемы рациональности, так как классификация элементарных линков и теорема о разложении уже позволят получить описание всех рациональных и нерациональных $\mathbb{Q}$-Фано расслоенных пространств по аналогии с результатами настоящей статьи.

§ 5. Соотношения при факторизациях бирациональных отображений k-рациональных поверхностей

5.1. В этом параграфе мы передокажем результаты работ [11] и [15] об образующих и соотношениях в двумерной группе Кремоны $\mathbb{G}_2(k)$ над совершенным полем k в контексте теории Мори. Точнее, следуя теоремам 2.5 и 2.6,

мы укажем явные разложения бирациональных отображений k-рациональных поверхностей $X \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$ на элементарные линки и опишем соотношения между этими линками.

По критерию k-рациональности из предыдущего параграфа, рациональными над k поверхностями $X \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$ являются только те, которые имеют k-точку и $K_X^2 = 5, 6$ и 9. Описание элементарных линков для таких поверхностей содержится в классификационной теореме 2.6. Для удобства дальнейшего изложения мы выпишем их здесь, введя для них более конкретные обозначения.

5.2. Лемма. *Пусть $X \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$ — k-рациональная поверхность, $x \in X$ — точка степени $d = \deg x$ в общем положении (для расслоений на коники общность точки x предполагает, между прочим, существование элементарного преобразования $\varepsilon_x \colon X \dashrightarrow X'$ с центром в x). Тогда все элементарные линки типа* I–IV *для X исчерпываются следующими*:

(i) Линки типа I. *Пусть $\sigma_{n,d} \colon X_1 \to X$ — раздутие точки $x \in X$, где $n = K_X^2$ (тогда ясно, что $K_{X_1}^2 = n - d$). Для $\sigma_{n,d}$ имеются только следующие возможности*:

$n = 9;\ d = 1;$

$n = 8;\ d = 2,\ X = Q \subset \mathbb{P}^3$ — *квадрика*, $\rho(X) = 1$.

(ii) Линки типа II: a) случай $X \in \{\mathbb{D}\}$.

Пусть $\sigma \colon Z \to X_1$ — раздутие точки $x \in X$, $\deg x = d$, $\sigma_1 \colon Z \to X_1$ — стягивание исключительного дивизора $E_1 \subset Z$, $E_1 \neq E = \sigma^{-1}(x)$, в точку $x_1 \in X$, $\deg x_1 = d_1$. Линк $\Phi_1 \colon X \dashrightarrow X_1$ — это преобразование вида $\gamma_{n;d,d_1} := \sigma_1 \circ \sigma^{-1}$, где $n = K_X^2$ (ясно, что $K_{X_1}^2 = n_1 = n - d + d_1$). Тогда для n, d, d_1 имеются только следующие возможности:

$n = 9;\ d = d_1 = 8,\ \gamma_{9;8,8}$ — *бирациональная инволюция Бертини на* $\mathbb{P}^2$;

$n = 9;\ d = d_1 = 7,\ \gamma_{9;7,7}$ — *бирациональная инволюция Гейзера на* $\mathbb{P}^2$;

$n = 9;\ d = d_1 = 6;$

$n = 9;\ d = 5,\ d_1 = 1;$

$n = 9;\ d = d_1 = 3;$

$n = 9;\ d = 2,\ d_1 = 1,\ \gamma_{9;2,1} \colon \mathbb{P}^2 \dashrightarrow Q$, *где Q — квадрика в* $\mathbb{P}^3$, $\rho(Q) = 1$;

$n = 8;\ d = d_1 = 7,\ \gamma_{8;7,7}$ — *бирациональная инволюция Бертини на* $\mathbb{Q}$;

$n = 8;\ d = d_1 = 6,\ \gamma_{8;6,6}$ — *бирациональная инволюция Гейзера на* $\mathbb{Q}$;

$n = 8;\ d = 5,\ d_1 = 2;$

$n = 8;\ d = d_1 = 4;$

$n = 8;\ d = 3,\ d_1 = 1;$

$n = 8;\ d = 1,\ d_1 = 2,\ \gamma_{8;1,2};\ Q \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ — *отображение, обратное к* $\gamma_{9;2,1}$;

$n = 6;\ d = d_1 = 5,\ \gamma_{6;5,5}$ — *инволюция Бертини на* X;

$n = 6;\ d = d_1 = 4,\ \gamma_{6;4,4}$ — *инволюция Гейзера на* X;

$n = 6;\ d = d_1 = 3;$

$n = 6;\ d = d_1 = 2;$

$n = 6;\ d = 1,\ d_1 = 3,\ \gamma_{6;1,3} = \gamma_{8;3,1}^{-1};$

$n = 5;\ d = d_1 = 4,\ \gamma_{5;4,4}$ — *инволюция Бертини на* X;

$n = 5;\ d = d_1 = 3,\ \gamma_{5;3,3}$ — *инволюция Гейзера на* X;

$n = 5;\ d = 2,\ d_1 = 5,\ \gamma_{5;2,5} = \gamma_{8;5,2}^{-1}$;

$n = 5;\ d = 1,\ d_1 = 5,\ \gamma_{5;1,5} = \gamma_{9;5,1}^{-1}$.

b) Случай $X \in \{\mathbb{C}\}$. *Каждый линк типа* II *в этом случае является элементарным преобразованием над базой C, которое мы будем обозначать через $\varepsilon_{n;d}$, где $n = K_X^2$, $d = \deg x$, $x \in X$ — замкнутая точка — центр элементарного преобразования. Для n здесь только три возможности: $n = 5$,* 6 *или* 8; $d \in \mathbb{Z}$, $d \geqslant 1$.

(iii) Линки типа III. *Каждый такой линк, как отображение, обратен одному из линков типа* I, *и наоборот. В частности, если $X \in \{\mathbb{C}\}$ и $K_X^2 = 5$ или* 6, *то $-K_X$ обилен и на X существует исключительный дивизор $E \sim \sim -2K_X - 3f$ в случае $K_X^2 = 5$ и $E \sim -K_X - 2f$ в случае $K_X^2 = 6$, стягивание которого приводит к $\mathbb{P}^2$ и $Q \to \mathbb{P}^3$, соответственно.*

(iv) Линки типа IV. *Здесь имеется только одна возможность: $X \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ и $\Phi_1 = \tau\colon \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ — бирегулярная инволюция перестановки множителей.*

Утверждения этой леммы составляют часть утверждений теоремы 2.6, где даны указания для их доказательства.

Таким образом, частным случаем теоремы 2.5 является следующий результат:

5.3. Следствие. *Любое бирациональное отображение $\chi\colon X \dashrightarrow X'$ между k-рациональными поверхностями X, $X' \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$ раскладывается в композицию элементарных линков из леммы* 5.2. *В частности, это верно и для кремоновых преобразований $\chi\colon \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$* (ср. [11]).

Остается изучить соотношения между описанными выше линками. Часть из них нам уже известна: лемма 3.4, соотношения.

Из опыта изучения соотношений в предыдущем параграфе видим, что для упрощения специального соотношения $R = \Phi_n \cdots \Phi_{s+1}\Phi_s \cdot \Phi_{s-1} \cdots \Phi_1$ с вершиной s нужно для каждой пары линков Φ_s, Φ_{s+1} иметь подходящее соотношение, позволяющее выразить Φ_{s+1}, Φ_s через другие линки так, чтобы выполнялись условия (3.5.2). Поиск таких определяющих соотношений значительно упрощают следующие замечания, которые уже неоднократно использовались ранее.

5.4. Лемма. *В предыдущих обозначениях пусть $x_s \in \Phi_s$ есть базисная точка линка Φ_{s+1}, если Φ_{s+1} — линк типа* I *или* II, *$y_s \in X_s$ — точка, в которую линк Φ_s стягивает свой исключительный дивизор, если он имеет тип* II *или* III, *и $n = K_X^2$. Тогда*

$$\deg x_s + \deg y_s < n, \tag{5.4.1}$$

если $X_s \in \{\mathbb{D}\}$, или если $X_s \in \{\mathbb{C}\}$, и по крайней мере один из линков Φ_s, Φ_{s+1} не является элементарным преобразованием (в этом случае K_{X_s} обилен).

Доказательство. По определению специального соотношения

$$\widehat{A}_{s+1} = (a_{s+1}, b_{s+1}) < (a_s, b_s) = \widehat{A}_s,$$

что по формулам (2.6) для линков типа I и II равносильно неравенству $r(x_s) > a_s$. Аналогично,

$$\widehat{A}_{s-1} \leqslant A_s \Longleftrightarrow r_{y_s} \geqslant a_s$$

для линков Φ_s типа II и III. Теперь, если $X_s \in \{\mathbb{D}\}$, то Φ_{s+1} не может быть линком типа III или IV, а Φ_s — линком I или IV, стало быть, $\deg r_s > 0$, $\deg y_s > 0$ и (5.4.1) немедленно следует из (1.5.3).

Если $X_s \in \{\mathbb{C}\}$ и Φ_s не является элементарным преобразованием, то Φ_s — линк типа I или IV. Из классификации таких линков в 2.6 следует, что в обоих случаях $-K_{X_s}$ обилен, и условие $(a_s, b_s) \geqslant (a_{s-1}, b_{s-1})$ влечет за собой $b_s \leqslant 0$. Для линков типа I и IV точки y_s нет, и мы получаем $\deg y_s = 0$. Линк Φ_{s+1} может иметь тип II, III или IV. В случае II $\deg x_s > 0$, $r(x_s) > a_s$ и (5.4.1) следует из (1.5.5). В случаях III и IV точки x_s нет, т. е. $\deg x_s = 0$, и утверждение тривиально.

Если $\Phi_s = \varepsilon_{x_{s-1}}$ — элементарное преобразование, а Φ_{s+1} нет, то условие $(a_{s+1}, b_{s+1}) < (a_s, b_s)$ влечет за собой $b_s < 0$, значит, K_{X_s} обилен, $\deg x_s = 0$, $\deg y_s > 0$, $r(y_s) \geqslant a_s$, и $\deg y_s < K^2_{X_s}$ по нестрогому неравенству типа (1.5.5), где $b = b_s < 0$.

Отметим в дополнение к утверждениям леммы 5.4, что точка $x_{s-1} \in X_{s-1}$ в последнем случае находится в общем положении. Это доказывается точно так же, как и в доказательстве теоремы 4.6. Если $X_s \in \{\mathbb{C}\}$ и оба линка Φ_s, Φ_{s+1} являются элементарными преобразованиями, то они коммутируют, т. е. для них выполняется соотношение типа (4.6.2).

Итак, с учетом утверждений 5.4 для описания соотношений между линками из леммы 5.2 предстоит рассмотреть всего несколько случаев: $X \in \{\mathbb{D}\} \cup \cup \{\mathbb{C}\}$, $X(k) \neq \varnothing$, $n = K^2_X = 5, 6, 8, 9$ с неравенствами (5.4.1) для степеней базисных точек. □

5.5. Теорема. *В обозначениях леммы* 5.2 *следующие композиции линков являются соотношениями*:

Общий случай:

(i) $\Phi[1]\Phi$, *где* $\Phi = \gamma_{n;d,d}$ *или* $\Phi = \varepsilon_{n;d}$, *для соответствующих* n, d *из леммы* 5.2, $\gamma_{5;1,5}[1]\gamma_{9;5,1}$, $\gamma_{8;1,2}[1]\gamma_{9;2,1}$, $\gamma_{5;2,5}[1]\gamma_{8;5,2}$, $\gamma_{6;1,3}[1]\gamma_{8;3,1}$, Φ^2 *в случае* $\Phi = \tau$ — *линк типа* IV; *а также соотношение типа* (4.6.2) *для элементарных преобразований с независимыми центрами.*

Случай $n = 5$, $X \in \{\mathbb{D}\}$:

(ii) $\gamma_{9;5,1}[6]\gamma_{5;3,3}[5]\gamma_{5;1,5}[4]\gamma_{5;3,3}[3]\gamma_{9;5,1}[2]\gamma_{9;3,3}[1]\gamma_{5;1,5}\gamma_{5;3,3}$;

(iii) $\gamma_{8;5,2}[8]\sigma_{8;2}\varepsilon_{6;5}[6]\sigma^{-1}_{8;2}[5]\gamma_{5;2,5}[4]\gamma_{8;5,2}[3]\sigma_{8;2}\varepsilon_{6;5}[1]\sigma^{-1}_{8;2}\gamma_{5;2,5}$;

(iv) $\gamma_{9;5,1}\gamma_{8;1,2}[3]\gamma_{5;2,5}[2]\gamma_{9;5,1}[1]\gamma_{8;1,2}\gamma_{5;2,5}$;

(v) $\gamma_{9;5,1}[5]\sigma_{9;1}\varepsilon_{8,5}[3]\tau\varepsilon_{8;5}[1]\sigma^{-1}_{9;1}\gamma_{5;2,5}$.

Случай $n = 5$, $X \in \{\mathbb{C}\}$:

(vi) $\sigma^{-1}_{9;4}[10]\sigma_{9;4}\varepsilon_{5;4}[8]\sigma^{-1}_{9;4}[7]\sigma_{9;4}\varepsilon_{5;4}[5]\sigma^{-1}_{9;4}[4]\sigma_{9;4}\varepsilon_{5;4}[2]\sigma^{-1}_{9;4}[1]\sigma_{9;4}\varepsilon_{5;4}$;

(vii) $\sigma^{-1}_{9;4}[6]\gamma_{9;3,3}[5]\sigma_{9;4}\varepsilon_{5;3}[3]\sigma^{-1}_{9;4}[2]\gamma_{9;3,3}[1]\sigma_{9;4}\varepsilon_{5;3}$;

(viii) $\sigma^{-1}_{9;4}[4]\gamma_{8;1,2}[3]\gamma_{8;4,4}[2]\gamma_{9;2,1}[1]\sigma_{9;4}\varepsilon_{5;2}$;

(ix) $\sigma^{-1}_{9;4}[4]\sigma_{8;1}\varepsilon_{8;4}[2]\sigma^{-1}_{9;1}[1]\sigma_{9;4}\varepsilon_{5;1}$.

Случай $n = 6$, $X \in \{\mathbb{D}\}$:

(x) $\gamma_{8;3,1}[6]\gamma_{8;4,4}[5]\gamma_{6;4,4}[3]\gamma_{8;3,1}[2]\gamma_{8;4,4}[1]\gamma_{6;1,3}\gamma_{6;4,4}$;

(xi) $\gamma_{6;2,2}[6]\gamma_{6;3,3}[5]\gamma_{6;2,2}[4]\gamma_{6;3,3}[3]\gamma_{6;2,2}[2]\gamma_{6;3,3}[1]\gamma_{6;2,2}\gamma_{6;3,3}$;

(xii) $\gamma_{8;3,1}[4]\gamma_{6;1,3}[3]\gamma_{6;3,3}[2]\gamma_{8;3,1}[1]\gamma_{6;1,3}\gamma_{6;3,3}$;

(xiii) $\gamma_{6;2,2}[4]\gamma_{6;2,2}[3]\gamma_{6;2,2}[2]\gamma_{6;2,2}[1]\gamma'_{6;2,2}\gamma_{6;2,2}$;

(xiv) $\gamma_{8;3,1}[4]\sigma_{8;2}\varepsilon_{6;3}[2]\sigma_{8;2}^{-1}[1]\gamma_{6;1}\gamma_{6;2,2}$;

(xv) $\gamma_{8;3,1}[3]\gamma_{9;2,1}[2]\gamma_{9;3,3}[1]\gamma_{8;1,2}\gamma_{6;1,3}$.

Случай $n = 6$, $X \in \{\mathbb{C}\}$:

(xvi) $\sigma_{8;2}^{-1}[6]\gamma_{8;4,4}[5]\sigma_{8;2}\varepsilon_{6;4}[3]\sigma_{8;2}^{-1}[2]\gamma_{8;4,4}[1]\sigma_{8;2}\varepsilon_{6;4}$;

(xvii) $\varepsilon_{6;2}[2]\sigma_{8;2}^{-1}[1]\sigma_{8;2}\varepsilon_{6;2}$;

(xviii) $\sigma_{3;2}^{-1}[3]\gamma_{9;2,1}[2]\gamma_{8;1,2}[1]\sigma_{8;2}\varepsilon_{6;1}$;

соотношения для $\varepsilon_{6;5}$ *и* $\varepsilon_{6;3}$ *равносильны* (iii) *и* (xiv), *соответственно.*

Случай $n = 8$, $X \in \{\mathbb{D}\}$:

(xix) $\gamma_{9;2,1}[6]\gamma_{9;6,6}[5]\gamma_{8;1,2}[4]\gamma_{8;6,6}[3]\gamma_{9;2,1}[2]\gamma_{9;6,6}[1]\gamma_{8;1,2}\gamma_{8;6,6}$;

(xx) $\sigma_{8;2}\varepsilon_{6;2}[3]\sigma_{8;2}^{-1}[2]\sigma_{8;2}\varepsilon_{6;2}\sigma_{8;2}^{-1} \Longleftrightarrow \sigma_{8;2}$;

(xvii) $\sigma_{8;2}^{-1}$;

(xxi) $\gamma_{9;2,1}[3]\sigma_{9;1}\varepsilon_{8;2}[1]\sigma_{9;1}^{-1}\gamma_{8;1,2}$;

соотношение для $(\gamma_{8;5,2}, \gamma_{5;2,5})$ *равносильно соотношению* (iii), *соотношение для* $(\gamma_{8;5,2}, \gamma_{5;1,5})$ *равносильно обратному к соотношению* (iv) *с использованием соответствующих соотношений* (i),

$$(\gamma_{8;4,4}, \gamma_{8;3,3}) \Longleftrightarrow \text{(x)}, \qquad (\gamma_{8;4,4}, \gamma_{8;2}^{-1}) \Longleftrightarrow \text{(xvi)}, \qquad (\gamma_{8;4,4}, \gamma_{8;1,2}) \Longleftrightarrow \text{(viii)},$$
$$(\gamma_{8;3,1}, \gamma_{6;3,3}) \Longleftrightarrow \text{(xii)}, \qquad (\gamma_{8;3,1}, \gamma_{6;2,2}) \Longleftrightarrow \text{(xiv)}, \qquad (\gamma_{8;3,1}, \gamma_{6;1,3}) \Longleftrightarrow \text{(xv)}^{-1},$$
$$(\sigma_{8;2}^{-1}, \varepsilon_{6;1}) \Longleftrightarrow \text{(xviii)},$$

Случай $n = 8$, $X \simeq \mathbb{F}_1$ — *линейчатая поверхность* (*раздутие* $\mathbb{P}^2$):

(xxii) $\sigma_{9;1}^{-1}[10]\gamma_{9;7,7}[9]\sigma_{9;1}\varepsilon_{8;7}[7]\tau\varepsilon_{8;7}[5]\sigma_{9;1}^{-1}[4]\gamma_{9;7,7}[3]\sigma_{9;1}\varepsilon_{8;7}[1]\tau\varepsilon_{8;7}$;

(xxiii) $\sigma_{9;1}^{-1}[4]\gamma_{9;6,6}[5]\sigma_{9;1}\varepsilon_{8;6}[3]\sigma_{9;1}^{-1}[2]\gamma_{9;6,6}[1]\sigma_{9;1}\varepsilon_{8;6}$;

(xxiv) $\sigma_{9;1}^{-1}[4]\gamma_{9;3,3}[3]\sigma_{9;1}\varepsilon_{8;3}[1]\tau\varepsilon_{8;3}$;

(xxv) $\sigma_{9;1}^{-1}[3]\sigma_{9;1}\varepsilon_{8;1}[1]\tau\varepsilon_{8;1} \Longleftrightarrow (3, 4, \text{ii})$;

соотношение для $\varepsilon_{8;5}$ *равносильно* (v), *для* $\varepsilon_{8;3}$ — (ix), *для* $\varepsilon_{8;2}$ — (xxi).

Случай $n = 8$, $X \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$:

(xxvi) $\tau\varepsilon_{8;6}[9]\tau\varepsilon_{8;6}[7]\tau\varepsilon_{8;6}[5]\tau\varepsilon_{8;6}[3]\tau\varepsilon_{8;6}[1]\tau\varepsilon_{8;6}$;

(xxvii) $\tau\varepsilon_{8;4}[5]\tau\varepsilon_{8;4}[3]\tau\varepsilon_{8;4}[1]\tau\varepsilon_{8;4}$;

(xxviii) $\tau\varepsilon_{8;2}[3]\tau\varepsilon_{8;2}[1]\tau\varepsilon_{8;2}$;

соотношения для $\varepsilon_{8;7}$, $\varepsilon_{8;5}$, $\varepsilon_{8;3}$, $\varepsilon_{8;1}$ *равносильны* (xxii), (v), (xxiv), (xxv), *соответственно.*

Случай $n = 9$, $X \simeq \mathbb{P}^2$:

(xxix) $\gamma_{9;3,3}[4]\gamma_{9;3,3}[3]\gamma_{9;3,3}[2]\gamma_{9;3,3}[1]\gamma_{9;3,3}\gamma_{9;3,3}$;
соотношение для $(\gamma_{9;7,7}, \sigma_{9;1}^{-1})$ *равносильно* (xxii),

$$
\begin{array}{lll}
(\gamma_{9;6,6}, \gamma_{9;2,1}) \Longleftrightarrow \text{(xix)}, & (\gamma_{9;6,6}, \sigma_{9;1}^{-1}) \Longleftrightarrow \text{(xxiii)}, & (\gamma_{9;5}, \gamma_{5;3}) \Longleftrightarrow \text{(ii)}, \\
(\sigma_{9;4}^{-1}, \varepsilon_{5,4}) \Longleftrightarrow \text{(vi)}, & (\sigma_{9;4}^{-1}, \varepsilon_{5,3}) \Longleftrightarrow \text{(vii)}, & (\sigma_{9;4}^{-1}, \varepsilon_{5,2}) \Longleftrightarrow \text{(viii)}, \\
(\sigma_{9;4}^{-1}, \varepsilon_{5,1}) \Longleftrightarrow \text{(ix)}, & (\gamma_{9;3,3}, \gamma_{9;2,1}) \Longleftrightarrow \text{(xv)}, & (\gamma_{9;3,3}, \sigma_{9;1}^{-1}) \Longleftrightarrow \text{(xxiv)}, \\
(\gamma_{9;2,1}, \sigma_{8;2}^{-1}) \Longleftrightarrow \text{(xviii)}, & (\gamma_{9;2,1}, \gamma_{8;1,2}) \Longleftrightarrow \text{(xviii)}^{-1}, & (\sigma_{9;1}^{-1}, \varepsilon_{8,1}) \Longleftrightarrow \text{(xxv)}.
\end{array}
$$

Доказательство. Все соотношения проверяются обычным образом: достаточно показать с помощью формул (2.6), что указанные композиции линков переводят очень обильную полную линейную систему на X в себя. Соотношения (i) непосредственно видны из явной конструкции соответствующих линков в 2.6. Поскольку проверка всех других соотношений стандартна и сводится к итерированию формул преобразования степеней $\widehat{A}_i = (a_i, b_i)$ и кратностей базисных точек с учетом правил сцепления в 2.6, мы приведем только несколько типичных примеров таких вычислений.

Случай (ii). Пусть здесь и далее $(a, b; r_{d_1}, r_{d2}, \ldots)$ обозначает характеристику линейной системы $\mathcal{H}$ на X, где $(a, b) = \widehat{A}(\mathcal{H})$ — степень, $r_{d_i} = r(x_i)$ — кратность базисных точек x_i степени $d_i = \deg x_i$ в $\mathcal{H}$. По формулам из 2.6 для композиции линков в (ii) с указанными правилами сцепления получаем

$$
\begin{aligned}
(a, 0; 0, 0, \ldots) &\xrightarrow{\gamma_{5;3,3}} (4a, 0; r_3 = 5a, 0, 0, \ldots) \xrightarrow{\gamma_{5;1,5}} \\
&\xrightarrow{\gamma_{5;1,5}} \left(\frac{20}{3}a, 0; 5a, r_5 = 8a, 0, 0, \ldots\right) \xrightarrow{\gamma_{9;3,3}} \\
&\xrightarrow{\gamma_{9;3,3}} \left(\frac{25}{3}a, 0; 10a, 8a, 0, 0, \ldots\right) \xrightarrow{\gamma_{9;5,1}} \\
&\xrightarrow{\gamma_{9;5,1}} (9a, 0; 10a, 0, r_1 = 10a, 0, 0, \ldots) \xrightarrow{\gamma_{5;3,3}} \\
&\xrightarrow{\gamma_{5;3,3}} (6a, 0; 5a, 0, 10, 0, 0, \ldots) \xrightarrow{\gamma_{9;5,1}} (a, 0; 0, 0, \ldots).
\end{aligned}
$$

Случай (vi).

$$
\begin{aligned}
(a, b; 0, 0, \ldots) &\xrightarrow{\varepsilon_{5;4}} (a, 4a + b; r_4 = 2a, 0, 0, \ldots) \xrightarrow{\sigma_{9;4}} \\
&\xrightarrow{\sigma_{9;4}} \left(\frac{11}{3}a + \frac{2}{3}b, 0; 2a, r_4' = 5a + b, 0, 0, \ldots\right) \xrightarrow{\sigma_{9;4}^{-1}} \\
&\xrightarrow{\sigma_{9;4}^{-1}} (7a + 2b; -5a - 2b; 5a + b, 0, 0, \ldots) \xrightarrow{\varepsilon_{5;4}} \\
&\xrightarrow{\varepsilon_{5;4}} (7a + 2b, 3a + 2b; 0, 9a + 3b, 0, 0, \ldots) \xrightarrow{\sigma_{9;4}} \\
&\xrightarrow{\sigma_{9;4}} \left(9a + \frac{10}{3}b, 0; 10a + 4b, 9a + 3b, 0, 0, \ldots\right) \xrightarrow{\sigma_{9;4}^{-1}}
\end{aligned}
$$

$$\xrightarrow{\sigma_{9;4}^{-1}} (9a+4b,-b;10a+4b,0,0,\ldots) \xrightarrow{\varepsilon_{5;4}}$$

$$\xrightarrow{\varepsilon_{5;4}} (9a+4b,-4a-b;8a+4b,0,0,\ldots) \xrightarrow{\sigma_{9;4}}$$

$$\xrightarrow{\sigma_{9;4}} \left(\frac{19}{3}a+\frac{10}{3}b,0;8a+4b,5a+3b,0,0,\ldots\right) \xrightarrow{\sigma_{9;4}^{-1}}$$

$$\xrightarrow{\sigma_{9;4}^{-1}} (3a+2b,5a+2b;0,5a+3b,0,0,\ldots) \xrightarrow{\varepsilon_{5;4}}$$

$$\xrightarrow{\varepsilon_{5;4}} (3a+2b,-3a-2b;0,a+b,0,0,\ldots) \xrightarrow{\sigma_{9;4}}$$

$$\xrightarrow{\sigma_{9;4}} (a+\frac{2}{3}b,0;0,a+b,0,0,\ldots) \xrightarrow{\sigma_{9;4}^{-1}} (a,b;0,0,\ldots).$$

Случай (xx).

$$(a,0;0,0,\ldots) \xrightarrow{\sigma_{8;2}^{-1}} (2a,-2a;0,0,\ldots) \xrightarrow{\varepsilon_{6;2}} (2a,2a;r_2=4a,0,0,\ldots) \xrightarrow{\sigma_{8;2}}$$

$$\xrightarrow{\sigma_{8;2}} (3a,0;4a,r_2'=4a,0,0,\ldots) \xrightarrow{\sigma_{8;2}^{-1}} (2a,2a;0,4a,0,0,\ldots) \xrightarrow{\varepsilon_{6;2}}$$

$$\xrightarrow{\varepsilon_{6;2}} (2a,-2a;0,0,\ldots) \xrightarrow{\sigma_{8;2}} (a,0;0,0,\ldots).$$

Случай (xxii).

$$(a,b;0,0,\ldots) \xrightarrow{\varepsilon_{8;7}} (a,7a+b;2a,0,0,\ldots) \xrightarrow{\tau}$$

$$\xrightarrow{\tau} \left(\frac{9}{2}a+\frac{1}{2}b,-7a-b;2a,0,0,\ldots\right) \xrightarrow{\varepsilon_{8;7}}$$

$$\xrightarrow{\varepsilon_{8;7}} \left(\frac{9}{2}a+\frac{1}{2}b,\frac{21}{2}a+\frac{5}{2}b;7a+b,0,0,\ldots\right) \xrightarrow{\sigma_{9;1}}$$

$$\xrightarrow{\sigma_{9;1}} \left(8a+\frac{4}{3}b,0;7a+b,r_1=15a+3b,0,0,\ldots\right) \xrightarrow{\gamma_{9;7,7}}$$

$$\xrightarrow{\gamma_{9;7,7}} \left(15a+\frac{11}{3}b,0;16a+4b,15a+3b,0,0,\ldots\right) \xrightarrow{\sigma_{9;1}^{-1}}$$

$$\xrightarrow{\sigma_{9;1}^{-1}} (15a+4b,-b;16a+4b,0,0,\ldots) \xrightarrow{\varepsilon_{8;7}}$$

$$\xrightarrow{\varepsilon_{8;7}} (15a+4b,-7a-b;14a+4b,0,0,\ldots) \xrightarrow{\tau}$$

$$\xrightarrow{\tau} \left(\frac{23}{2}a+\frac{7}{2}b,7a+b;14a+4b,0,0,\ldots\right) \xrightarrow{\varepsilon_{8;7}}$$

$$\xrightarrow{\varepsilon_{8;7}} \left(\frac{23}{2}a+\frac{7}{2}b-\frac{21}{2}a-\frac{5}{2}b;9a+3b,0,0,\ldots\right) \xrightarrow{\sigma_{9;1}}$$

$$\xrightarrow{\sigma_{9;1}} \left(8a+\frac{8}{3}b,0;9a+3b,a+b,0,0,\ldots\right) \xrightarrow{\gamma_{9;7,7}}$$

$$\xrightarrow{\gamma_{9;7,7}} \left(a+\frac{1}{3}b,0;a+b,0,0,\ldots\right) \xrightarrow{\sigma_{9;1}^{-1}} (a,b;0,0,\ldots).$$

Доказательство теоремы 5.5 закончено. □

5.6. Теорема. *Всякое соотношение между линками из леммы* 5.2 *выводится из соотношений* (i)–(xxix) *в* 5.5.

Доказательство. Пусть R — нетривиальное соотношение между линками из 5.2. По лемме 3.2 можно считать, что $R = \Phi_n \cdots \Phi_{s+1}\Phi_s\Phi_{s-1}\cdots\Phi_1$ специально с вершиной s. Пусть $\widehat{A}(R) = \widehat{A}_s = (a_s, b_s)$ — приведенная высота R. Как обычно, перебирая всевозможные значения для линков Φ_s, Φ_{s+1} из 5.2 (так, чтобы композиция $\Phi_{s+1}\Phi_s$ имела смысл как бирациональное отображение) и используя подходящее соотношение из 5.5, заменим R на эквивалентное соотношение R' и проверим, что для него выполняются условия (3.5.2). Далее индукция завершит доказательство.

Предстоит рассмотреть довольно много случаев (значительно больше, чем в теоремах 4.6 и 4.9, ср. [15]). Поскольку все вычисления стандартны, мы ограничимся разбором нескольких типичных случаев. Отметим, прежде всего, что соотношения (i) исключают для Φ_s, Φ_{s+1} значения $\Phi_s = \gamma_{n;d,d}$, $\Phi_{s+1} = \gamma_{n;d,d}[1]$ и другие, указанные в (i), кроме (4.6.2), поскольку специальное соотношение по определению является приведенным. Если же Φ_s, Φ_{s+1} — элементарные преобразования, то, как в 3.5 или в 4.6, устанавливается, что их центры независимы и можно воспользоваться соотношением коммутирования, в результате R редуцируется в R', для которого выполняются условия (3.5.2).

Если по крайней мере один из линков Φ_s, Φ_{s+1} не является элементарным преобразованием, то по лемме 4.5 имеет место неравенство (5.4.1). Нетрудно проверить, что для любой пары линков Φ_s, Φ_{s+1}, для которых выполняется это неравенство, в 5.5 найдется соотношение или обратное к нему, которым они связаны. Например, соотношение (ii) связывает следующие пары линков:

$$(\gamma_{5;3,3}, \gamma_{5;1,5}), (\gamma_{5;1,5}, \gamma_{9,3,3}), \ldots, (\gamma_{9;5,1}, \gamma_{5;3,3}).$$

Обратное соотношение по модулю соотношений (i) связывает, соответственно,

$$(\gamma_{9;5,1}, \gamma_{5;3,3}), \ldots, (\gamma_{5;3,3}, \gamma_{5;1,5}).$$

Ясно, что вычисление степеней при редукции R к R' для любой пары линков Φ_s, Φ_{s+1}, связанных одним и тем же соотношением, одинаковы, поэтому достаточно ограничиться рассмотрением одной пары для каждого из соотношений. Кроме того, эти вычисления стандартны и однотипны для любого соотношения, так что мы ограничимся одним примером таких вычислений. Подобные вычисления в несколько ином контексте приведены в [15].

Случай $\Phi_s = \gamma_{5;3,3}$, $\Phi_{s+1} = \gamma_{5;1,5}$. Используя соотношение (ii) и соотношения (i), заменим $\Phi_{s+1}\Phi_s$ на $\Phi'_{s+5}\cdots\Phi'_{s+1}\Phi'_s$, где $\Phi'_s = \gamma^{-1}_{9;5,1} = \gamma_{5;1,5}$, $x'_{s-1} = \gamma^{-1}_{5;3,3}(x_s)$, $\deg x'_{s-1} = \deg x_s = 1$, $r(x'_{s-1}) = r(x_s)$; $\Phi'_{s+1} = \gamma_{9;3,3}$, $x'_s = \Phi'_s(x_{s-1})$, $\deg x'_s = \deg x_{s-1} = 3$, $r(x'_s) = r(x_{s-1})$; $\Phi'_{s+2} = \gamma_{9;5,1}$; $x'_{s+1} = \Phi'_{s+1}(y'_s)$, где y'_s — образ стягиваемого дивизора отображением Φ'_s, $\deg x'_{s+1} = \deg y'_s = 5$, $r(x'_{s+1}) = r(y'_s)$; и так далее по правилу сцепления в соотношении (ii). Как обычно, мы получаем соотношение $R' = \Phi_n \cdots \Phi_{s+2}\Phi'_{s+5}\cdots\Phi'_s\Phi_{s-1}\cdots\Phi_1$, для которого надо вычислить степени для линков $\Phi'_s, \ldots, \Phi'_{s+5}$ и убедиться, что для R' выполняются условия (3.5.2).

Поскольку в этом случае все $X'_{s+i} \in \{\mathbb{D}\}$, то степени Φ'_{s+i} — это коэффициенты a'_{s+i} при $-K_{X'_{s+i}}$ в линейной системе $\mathcal{H}_{X'_{s+i}}$.

$$
\begin{aligned}
a'_s &= \frac{5}{3}a_{s-1} - \frac{2}{3}r(x_s) < a_{s-1} \quad (\text{так как } r(x_s) > a_s \geqslant a_{s-1});\\
r(y'_s) &= 2a_{s-1} - r(x_s);\\
a'_{s+1} &= 2a'_s - r(x_{s-1}) = \frac{10}{3}a_{s-1} - \frac{4}{3}r(x_s) - r(x_{s-1}) =\\
&= 2a_{s-1} - r(x_s) + \frac{a_s - r(x_s)}{3} < a_{s-1} \quad (\text{так как } a_s = 4a_{s-1} - 3r(x_{s-1}));\\
r(y'_{s+1}) &= 3a'_s - 2r(x_{s-1}) = 5a_{s-1} - 2r(x_s) - 2r(x_{s-1});\\
a'_{s+2} &= 3a'_{s+1} - 2r(y'_s) = 2a_{s-1} + a_s - 2r(x_s) < a_{s-1};\\
r(y'_{s+2}) &= 6a'_{s+1} - 5r(y'_s) = 10a_{s-1} - 3r(x_s) - 6r(x_{s-1});\\
a'_{s+3} &= 4a'_{s+2} - 3r(y'_{s+1}) = a_{s-1} + 2a_s - 2r(x_s) < a_{s-1};\\
a'_{s+4} &= \frac{5}{3}a'_{s+3} - \frac{2}{3}r(y'_{s+2}) = 2a_s - r(x_s) + \frac{a_{s-1} - r(x_s)}{3} < a_s;\\
a'_{s+5} &= a_{s+1} < a_s.
\end{aligned}
$$

Отсюда, как обычно, получаем

$$\widehat{A}(R') = \max\{\widehat{A}_{s+1}, \widehat{A}'_{s+4}, \widehat{A}_{s-1}\},$$

следовательно, выполняются условия (3.5.2), что позволяет сделать шаг индукции.

Доказательство теоремы 5.6 закончено. □

Комментарий 7. Хотелось бы иметь общее доказательство теоремы 5.6 и аналогичных теорем из § 4, не прибегая к прямым вычислениям. Это, по-видимому, можно сделать. В таком случае объем вычислений существенно сократился бы и сводился бы только к нахождению соотношений для допустимых пар линков Φ_s, Φ_{s+1} в вершине любого предполагаемого специального соотношения $R = \Phi_n \cdots \Phi_{s+1}\Phi_s \cdots \Phi_1$.

Литература

[1] Гизатуллин М. Х. Определяющие соотношения для кремоновой группы плоскости // Известия АН СССР. Сер. матем. — 1982. — Т. 46, № 5. — С. 909–970.

[2] Исковских В. А. О бирациональных формах рациональных поверхностей // Известия АН СССР. Сер. матем. — 1965. — Т. 29, № 6. — С. 1417–1433.

[3] Исковских В. А. Рациональные поверхности с пучком рациональных кривых // Матем. сб. — 1967. — Т. 74 (116), № 4. — С. 608–638.

[4] Исковских В. А. Рациональные поверхности с пучком рациональных кривых и с положительным квадратом канонического класса // Матем. сб. — 1970. — Т. 83 (125), № 1. — С. 90–119.

[5] Исковских В. А. Бирациональные свойства поверхности степени 4 в $\mathbb{P}^4$ // Матем. сб. — 1972. — Т. 88 (130), № 1. — С. 31–37.

[6] Исковских В. А. Минимальные модели рациональных поверхностей над произвольными полями // Известия АН СССР. Сер. матем. — 1979. — Т. 43, № 1. — С. 19–43.

[7] Исковских В. А. Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Т. 12. — М.: ВИНИТИ, 1979. — С. 159–235.

[8] Исковских В. А. Образующие и соотношения в группах бирациональных автоморфизмов двух классов рациональных поверхностей // Труды МИАН СССР. — 1984. — Т. 165. — С. 67–78.

[9] Исковских В. А. Доказательство теоремы о соотношениях в двумерной группе Кремоны над незамкнутым полем // УМН. — 1985. — Т. 40, № 5 (245). — С. 255–256.

[10] Исковских В. А. Простое доказательство теоремы Гизатуллина о соотношениях в двумерной группе Кремоны // Труды МИАН СССР. — 1990. — Т. 183. — С. 111–116.

[11] Исковских В. А. Образующие в двумерной группе Кремоны над незамкнутым полем // Труды МИАН СССР. — 1991. — Т. 200. — С. 157–170.

[12] Исковских В. А. О проблеме рациональности для трехмерных алгебраических многообразий, расслоенных на поверхности дель Пеццо // Труды МИРАН. — 1995. — Т. 208. — С. 128–138.

[13] Исковских В. А., Манин Ю. И. Трехмерные квартики и контрпримеры к проблеме Люрота // Матем. сб. — 1971. — Т. 86, № 1. — С. 140–166.

[14] Исковских В. А., Трегуб С. Л. О бирациональных автоморфизмах рациональных поверхностей // Известия АН СССР. Сер. матем. — 1991. — Т. 55, № 2. — С. 254–281.

[15] Исковских В. А., Кабдыкаиров Ф. К., Трегуб С. Л. Соотношения в двумерной группе Кремоны над совершенным полем // Известия АН СССР. Сер. матем. — 1993. — Т. 57, № 3. — С. 3–69.

[16] Манин Ю. И. Рациональные поверхности над совершенными полями // Publ. Math. IHES. — 1966. — V. 30. — P. 55–113.

[17] Манин Ю. И. Рациональные поверхности над совершенными полями. II // Матем. сб. — 1967. — Т. 72 (114). — С. 161–192.

[18] Манин Ю. И. Кубические формы. — М.: Наука, 1972.

[19] Манин Ю. И., Цфасман М. А. Рациональные многообразия: алгебра, геометрия, арифметика // УМН. — 1986. — Т. 41, № 2. — С. 43–94.

[20] Саркисов В. Г. Бирациональные автоморфизмы расслоений на коники // Известия АН СССР. Сер. матем. — 1980. — Т. 44, № 4. — С. 818–944.

[21] Corti A. Factoring birational maps of threefolds after Sarkisov // J. Alg. Geom. — 1995. — V. 4. — P. 223–254.

[22] Fano G. Osservazioni sopra alqune varietà algebriche non razionali aventi tutti i generi nulli // Atti Acc. Torino. — 1915. — V. 50. — P. 1067–1072.

[23] Fano G. Nuove ricerche sulle varietà algebraiche a tre dimensioni a curve-sezione canoniche // Pont. Acad. Sci. Comment. — 1947. — V. 11. — P. 635–720.

[24] H u d s o n H. Cremona transformation in plane and space. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1927.

[25] K a n t o r S. Rationale Zerlegung der birationalen Transformationen in ihre Primfaktoren // Monatsh. Math. und Phys. — 1899. — Bd. 10, № 1. — S. 54–74.

[26] M o r i S. Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective // Ann. Math. — 1982. — V. 116. — P. 133–176.

[27] S a r k i s o v V. G. Birational maps of standard Q-Fano fiberings. — Preprint, Kurchatov Inst. Atom. Energy, 1989.

[28] S h e p h e r d - B a r r o n N. I. The Rationality of quintic Del Pezzo surfaces — a short proof // Bull. London Math. Soc. — 1992. — V. 24, № 3. — P. 249–250.

[29] S w i n n e r t o n - D y e r H. P. F. Rational points on del Pezzo surfaces of degree 5 // Algebraic geometry (Oslo, 1970). — Groningen: Wolters and Noordhoff, 1972. — P. 287–290.

[30] R e i d M. Birational geometry of 3-folds according to Sarkisov. — Preprint, Univ. Warwick, 1991.

[31] R o t h L. Algebraic threefolds with special regard to problems of rationality. — Berlin: Springer-Verlag, 1955.

[32] W e i n s t e i n F. W. On birational automorphisms of Severi–Brauer surfaces. — Prepr. Rep. Math. Univ. Stockholm, 1989. — № 1. — P. 1–14.

[33] Z a r i s k i O. Algebraic surfaces. — Berlin: Springer-Verlag, 1971.

Два несопряженных вложения группы $S_3 \times \mathbb{Z}_2$ в группу Кремоны

Приводится конкретный пример двух изоморфных несопряженных подгрупп в двумерной группе Кремоны.

1. Введение и формулировка результата

1.1. Цель этой работы — дать ответ на следующий вопрос, поставленный В. Л. Поповым: пусть (x, y, z) — аффинные координаты в $\mathbb{C}^3$, рассмотрим следующие два действия группы $S_3 \times \mathbb{Z}_2$ (где S_3 — группа подстановок из трех элементов) на поверхностях:

(I) на плоскости $P\colon x + y + z = 0$; S_3 действует перестановками координат, а $\mathbb{Z}_2$ обращением знака $(x, y, z) \to (-x, -y, -z)$;

(II) на двумерном торе $T\colon xyz = 1$; S_3 действует перестановками координат, а $\mathbb{Z}_2$ обращением в мультипликативной группе $(x, y, z) \to \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)$.

В обоих случаях имеем вложения этой группы $G = S_3 \times \mathbb{Z}_2$ в двумерную группу Кремоны $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$; вопрос заключается в том, сопряжены ли образы G при этих вложениях внутри $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$? Наш ответ следующий.

1.2. Предложение. *Образы G при указанных вложениях не сопряжены в $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$.*

Для доказательства мы используем понятие рациональной G-поверхности (см., например, [3]), т. е. гладкой проективной рациональной поверхности X, на которой действует конечная группа G, причем параллельно рассматриваются две ситуации.

(A) Гладкая поверхность X определена над совершенным полем k и G — конечная группа Галуа $\mathrm{Gal}(K/k)$ действует на $X \otimes_k K$ через второй множитель.

(B) Гладкая поверхность X определена над $\mathbb{C}$ и $G \subset \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}} X$.

Рациональные G-поверхности изучаются с точностью до G-бирациональной эквивалентности: в ситуации (A) это приводит к описанию k-минимальных рациональных поверхностей и k-бирациональных отображений между ними (над основным полем k), а в ситуации (B) — к классификации с точностью до сопряженности конечных подгрупп в группе Кремоны $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ (см. [1, 2]).

Труды МИРАН им. В. А. Стеклова. — 2003. — Т. 241. — С. 105–109.

Таким образом, чтобы ответить (отрицательно) на вопрос п. 1.1, нужно найти рациональные G-поверхности X_1 и X_2, соответствующие случаям (I) и (II), и показать, что они не G-бирационально эквивалентны. Конечно, для этого мы будем использовать общую теорию G-поверхностей [1, 2].

1.3. В обоих случаях (I) и (II) G-поверхности определены естественным образом.

Случай (I). Пусть (u_0, u_1, u_2) — однородные координаты на $\mathbb{P}^2$ и $x = \dfrac{u_1}{u_0}$, $y = \dfrac{u_2}{u_0}$, $z = \dfrac{-(u_1+u_2)}{u_0}$, тогда в матричной форме G имеет вид

$$\text{Цикл } (xy) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Цикл } (xyz) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{Z}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Неподвижные элементы: точка $(1, 0, 0)$.

Инвариантные элементы: прямая $u_0 = 0$, пучок прямых, проходящих через точку $(1, 0, 0)$.

Таким образом, на $\mathbb{P}^2$ с действием G существует инвариантный пучок прямых с G-инвариантной базисной точкой $(1, 0, 0)$ и G-инвариантным сечением — прямой $u_0 = 0$.

Случай (II). Наиболее естественной компактификацией 2-мерного тора $xyz = 1$ является гладкая проективная поверхность $X_2 \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ с естественным уравнением

$$x_1 y_1 z_1 = x_0 y_0 z_0, \tag{1}$$

где (x_0, x_1), (y_0, y_1), (z_0, z_1) — однородные координаты множителей и $x = \dfrac{x_0}{x_1}$, $y = \dfrac{y_0}{y_1}$, $z = \dfrac{z_0}{z_1}$. Группа G действует на X_2 очевидным образом: группа S_3 действует перестановками координат, индуцированными перестановками множителей $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, а группа $\mathbb{Z}_2$ действует одновременными обращениями координат $(x_1, y_1, z_1) \longleftrightarrow (x_0, y_0, z_0)$. В классификации [1] X_2 — это G-минимальная поверхность дель Пеццо степени 6 с G-инвариантной группой Пикара $\mathrm{Pic}^G(X_2) \simeq \mathbb{Z}(-K_{X_2})$. Конфигурация (-1)-кривых на X_2 составляет правильный шестиугольник. Эти прямые легко найти из уравнения (1) — это одномерные слои в бирациональных проекциях $X_2 \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, индуцированных тремя проекциями $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ на любые два множителя (по два одномерных слоя в каждой проекции). Все (-1)-кривые составляют, очевидно, одну G-орбиту.

1.4. Далее нам понадобятся классификация нульмерных орбит (0-циклов) длины $d \leqslant 4$ и описание некоторых G-инвариантных конфигураций рациональных кривых на $X = X_2$. Для этого удобнее работать с аффинной моде-

лью $xyz = 1$, поскольку в компактификации на бесконечности лежат только (-1)-кривые, составляющие известную нам орбиту.

$d = 1$. Это единственная неподвижная точка $(1, 1, 1)$.

$d = 2$. Одна орбита $\{(\eta, \eta, \eta), (\eta^2, \eta^2, \eta^2)\}$, где η — первообразный кубический корень из 1: $\eta^3 = 1$.

$d = 3$. Одна орбита $\{(1, -1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1)\}$.

$d = 4$. Таких орбит нет.

Теперь проверим, что тройка рациональных кривых, проходящих через точку $(1, 1, 1)$, Γ_x, Γ_y, Γ_z с соответствующими уравнениями $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ G-инвариантна. Очевидно, что эта тройка S_3-инвариантна и каждая из этих кривых $\mathbb{Z}_2$-инвариантна по определению действия $\mathbb{Z}_2$. В проективной форме уравнения этих кривых в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ имеют вид

$$\begin{aligned} \Gamma_x &\colon y_1 z_1 - y_0 z_0 = 0, \\ \Gamma_y &\colon x_1 z_1 - x_0 z_0 = 0, \\ \Gamma_z &\colon x_1 y_1 - x_0 y_0 = 0. \end{aligned}$$

Каждая из этих кривых Γ является неособой кривой рода нуль с $-K_X\Gamma = 2$, $\Gamma^2 = 0$, они имеют единственную точку пересечения $(1, 1, 1)$. После раздутия этой точки они одновременно могут быть стянуты (G-инвариантно) — это пример элементарного линка (линк $\Phi_{6,1}$ ниже). Мы классифицируем линки в следующем разделе.

2. Элементарные линки и доказательство основного результата

2.1. Для доказательства предложения 1.2 нам надо показать, что не существует отображений между $X_1 = \mathbb{P}^2$ и $X_2 = X$ — указанной выше G-поверхностью дель Пеццо степени 6. Согласно общей теории любое G-инвариантное бирациональное отображение между G-поверхностями раскладывается в конечную композицию элементарных линков — простых явно описанных G-инвариантных бирациональных отображений (см. [2, теоремы 2.5, 2.6]). Ближайшая цель — найти все элементарные линки в нашей ситуации, стартуя с G-поверхности дель Пеццо X и убедиться, что среди них нет ни одного, который заканчивался бы G-поверхностью $X_1 = \mathbb{P}^2$; тем самым будет доказано, что не существует G-инвариантного бирационального отображения $\chi\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$.

Классификация всех элементарных линков известна [2, теорема 2.6], так что нам остается выбрать среди них только те, которые имеют отношение к нашей задаче. Все линки разбиваются на четыре типа и строятся в основном по G-инвариантным нульмерным циклам — максимальным особенностям линейной системы, задающей отображение.

Точнее, предположим, что существует G-инвариантное бирациональное отображение $\chi\colon X \dashrightarrow X'$. Фиксируем на X' очень обильную G-инвариантную линейную систему $\mathcal{H}'$, например, в нашем случае $X' = \mathbb{P}^2$ в качестве $\mathcal{H}'$ можно

взять линейную систему прямых или $\mathcal{H}' = |-K_{\mathbb{P}^2}|$. Пусть $\mathcal{H} = \chi_*^{-1}\mathcal{H}'$ — собственный прообраз на X линейной системы $\mathcal{H}'$. По определению собственного прообраза линейная система $\mathcal{H}$ не имеет неподвижных компонент (но, как правило, имеет базисные точки, $\dim \mathcal{H} = \dim \mathcal{H}'$). Если $\mathrm{Pic}^G(X) = \mathbb{Z}(-K_X)$, как в нашем случае, имеем $\mathcal{H} \sim -aK_X$, $a \in \mathbb{Z}_+$; если $X \to \mathbb{P}^1$ — расслоение на коники и f — класс слоя, то $\mathcal{H} \sim a(-K_X) + bf$ (см. [2, п. 2.3]).

Так как χ не изоморфизм, то по неравенству Нётера [2, лемма 2.4] линейная система $\mathcal{H}$ имеет максимальную особенность — G-инвариантный цикл $x \in X$ степени d (d — длина орбиты) и кратности $r = r(x) > a$ в $\mathcal{H}$. Так как $\mathcal{H}^2 = a^2K_X^2 > r^2d$, то $d < K_X^2$, в нашем случае $d < 6$ и делит порядок группы G, $|G| = 12$, стало быть, для d имеются только следующие возможности: $d = 1, 2, 3$ или 4.

2.2. Разложение отображения χ на элементарные линки происходит посредством применения элементарного линка Φ с центром в максимальной особенности, так что отображение $\chi_1 = \chi \circ \Phi^{-1}$ будет задаваться линейной системой $\mathcal{H}_1 \sim -a_1K_{X_1}$ с $a_1 < a$. Через конечное число таких операций отображение оборвется на G-инвариантном изоморфизме.

Так как по 1.4 нет G-инвариантных циклов длины 4, начнем с $d = 3$. По классификации линков [2, теорема 2.6] существует единственный такой линк: $K_X^2 = 6$, $d = d_1 = 3$, $K_{X_1}^2 = 6$, действующий из X в X_1 по формулам

$$\begin{aligned} a_1 &= 3a - 2r(x), \\ r(x_1) &= 4a - 3r(x), \end{aligned} \tag{2}$$

где $\Phi = \Phi_{6,3}\colon X \dashrightarrow X_1$ есть раздутие $\sigma^{-1}\colon X \dashrightarrow Z$ цикла x и стягивание трех G-сопряженных (-1)-кривых на Z в G-инвариантный цикл $x_1 \in X_1$ длины $d_1 = 3$. Можно показать, хотя это несущественно, что в нашем случае $\Phi_{6,3}$ является бирациональной инволюцией. Так как $r(x) > a$, то из (2) получаем $a_1 < a$.

Предположим, что максимальной особенностью является цикл x степени $d = 2$. Опять по классификации [2, теорема 2.6] существует единственный линк $\Phi = \Phi_{6,2}\colon X \dashrightarrow X_1\colon K_X^2 = 6$, $d = d_1 = 2$, $K_{X_1}^2 = 6$, действующий по формулам

$$\begin{aligned} a_1 &= 2a - r(x), \\ r(x_1) &= 3a - 2r(x). \end{aligned} \tag{3}$$

Как и выше, имеем в (3) уменьшение коэффициента $a_1 < a$.

Рассмотрим теперь случай $d = 1$. По 1.4 существует одна G-неподвижная точка $x = (1, 1, 1)$. Здесь линк $\Phi = \Phi_{6,1}\colon X \dashrightarrow X_1 = Q$ действует из поверхности дель Пеццо степени 6 на квадрику $Q \subset \mathbb{P}^3$ с G-инвариантной группой Пикара $\mathrm{Pic}^G(Q) = \frac{1}{2}\mathbb{Z}(-K_Q)$: $K_X^2 = 6$, $d = 1$, $d_1 = 3$, $X_1 = Q \subset \mathbb{P}^3$, $K_Q^2 = 8$; $\Phi_{6,1}$ действует по формулам

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}r(x), \\ r(x_1) &= 2a - r(x). \end{aligned} \tag{4}$$

В (4) также $a_1 < a$. Все рассмотренные линки имели тип (II) по классификации [2, теорема 2.6].

2.3. Теперь мы оказались на квадрике Q с линейной системой (обозначим ее той же буквой) $\mathcal{H} \sim -aK_Q$ и с максимальной особенностью (по лемме Нётера [2, лемма 2.4]) $x \in X$ степени $d < 8$. Так как $d \mid 12$, то остаются значения $d = 1, 2, 3, 4, 6$. Исключим случаи $d = 1$ и 4. Так как линк $\Phi_{6,1}$ раздувает точку $(1,1,1)$, $\sigma^{-1}\colon X \dashrightarrow Z$, и стягивает тройку кривых $\Gamma_x + \Gamma_y + \Gamma_z$ в G-инвариантный цикл x_1 степени 3 и вне точки $(1,1,1)$ нет G-инвариантных циклов степени 1 и 4, то надо показать, что их нет и на образе $E_1 \subset Q$ исключительной (-1)-кривой $E \subset Z$, $E = \sigma^{-1}(x)$, $x = (1,1,1)$.

Выясним, как действует $G = S_3 \times \mathbb{Z}_2$ на E — проективизации касательного пространства T_x в точке $x = (1,1,1)$.

На T_x группа $\mathbb{Z}_2$ действует обращением знака, значит, на проективизации это действие тривиализуется. Остается действие S_3: оно переставляет тройку касательных векторов к кривым $\Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_z$, так что это единственное неприводимое представление группы S_3. Хорошо известно и элементарно вычисляется непосредственно, что в индуцированном действии S_3 на $E = \mathbb{P}^1$ нет инвариантных циклов степени 1 и 4. Существует единственный цикл степени 3, все остальные имеют степень 6. Так как $E \simeq E_1 \subset Q$, то мы получаем требуемое утверждение.

Теперь начнем с максимальной особенности $x \in Q$, $d = 6$, $r(x) > a$. Существует линк $\Phi_{8,6}\colon Q \dashrightarrow Q$ — бирациональная инволюция, действующая по формулам [2, теорема 2.6]

$$\begin{aligned} a_1 &= 7a - 6r(x), \\ r(x_1) &= 8a - 7r(x). \end{aligned} \tag{5}$$

Так как $r(x) > a$, то в (5) имеем $a_1 < a$.

Случай $d = 3$. Здесь существует единственный G-инвариантный цикл длины 3, $x \in E_1 \subset Q$. Связанный с ним линк $\Phi_{8,3}\colon Q \dashrightarrow X$ возвращает нас на поверхность дель Пеццо степени 6: этот линк является обратным к линку $\Phi_{6,1}$ и действует по формулам

$$\begin{aligned} a_1 &= 2a - r(x), \\ r(x_1) &= 4a - 3r(x). \end{aligned} \tag{6}$$

Опять в (6) $a_1 < a$.

2.4. Следующий линк, связанный с циклом x степени 2, уже принадлежит типу (I) в классификации [2, теорема 2.6]: $\Phi_{8,2}\colon Q \dashrightarrow X_1$ с $\operatorname{Pic}^G(X_1) = \mathbb{Z}(-K_{X_1}) + \mathbb{Z}f_1$, где f_1 — класс слоя. Собственный образ $\mathcal{H}_1$ на X_1 линейной системы $\mathcal{H}$ имеет вид $\mathcal{H}_1 \sim -a_1K_{X_1} + b_1f_1$, где $K_{X_1}^2 = 6$, $f_1 \sim -\frac{1}{2}K_{X_1} - \frac{1}{2}E$, $\mathcal{H} \sim -aK_Q$, $r(x) > a$,

$$\begin{aligned} a_1 &= 2a - r(x), \\ r(x_1) &= 2(a - r(x)), \end{aligned} \tag{7}$$

$E = \sigma^{-1}(x)$, $\sigma\colon X_1 \to Q$ — раздутие x, $\deg x = 2$. В (7) опять имеем $a_1 < a$.

Теперь работаем на X (расслоение на коники $\pi\colon X \to \mathbb{P}^1$) линейной системой $\mathcal{H} \sim -aK_X + bf$. Если $\mathcal{H}$ имеет максимальную особенность $x \in X$ степени

$d = \deg x$, то все точки, входящие в G-инвариантный цикл x, удовлетворяют условию существования линка типа (II), который в нашем случае есть не что иное, как элементарное преобразование $\Phi = \mathcal{E}_x \colon X \dashrightarrow X_1$ над $\mathbb{P}^1$ — раздутие x и стягивание собственных прообразов слоев, на которых лежат точки из x. Линк действует по формулам (см. [2, теорема 2.6])

$$\begin{aligned} -K_X &\to -K_{X_1} + df_1 - 2x_1, & a_1 &= a, \\ f &\to f_1, & b_1 &= b + d(a - 7(x)), \\ x &\to df_1 - x_1, & r(x_1) &= 2(a - r(x)). \end{aligned} \tag{8}$$

Последняя формула в (8) показывает, что кратности максимальных особенностей уменьшаются, так что можно открутить все максимальные особенности. Тогда по неравенству Нётера [2, лемма 2.4] будем иметь $b < 0$, оставаясь на X, расслоенном на коники с $K_X^2 = 6$.

В этой ситуации существует линк $\Phi = \Phi_{8,2}^{-1} \colon X \to Q \subset \mathbb{P}^3$ — стягивание G-инвариантной пары непересекающихся (-1)-кривых (сечение расслоения $\pi \colon X \to \mathbb{P}^1$) в G-инвариантный цикл $x_1 \in Q$ степени 2. Этот линк является обратным к линку $\Phi_{8,2}$ (см. [2]). Он действует по формулам

$$\begin{aligned} -K_X &\to -K_Q - x_1, & a_1 &= a + \frac{1}{2}b, \\ f &\to -\frac{1}{2}K_Q - x_1, & r(x_1) &= a + b. \end{aligned} \tag{9}$$

Так как $b < 0$, то в (9) имеем $a_1 < a$. Мы снова оказались на квадрике Q, и все возможности для линков исчерпаны. Так как коэффициент a, являясь целым или полуцелым положительным, в процессе разложения уменьшается, то через конечное число шагов процесс оборвется на изоморфизме и мы окажемся либо на квадрике Q, либо на поверхности дель Пеццо X степени 6, но никак не на G-поверхности $\mathbb{P}^2$. Это противоречит нашему предположению о существовании G-инвариантного бирационального отображения $\chi \colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$. Предложение 1.2 полностью доказано.

2.5. Замечание. Конечно, для доказательства предложения 1.2 совсем не обязательно приводить явные формулы (2)–(9): на этот счет существует общая теория о разложении на элементарные линки (см. [2, теорема 2.5]). Достаточно было бы выписать все возможные линки и убедиться, что они не выводят из G-поверхностей дель Пеццо степени 6 и квадрик. Для этого можно было бы воспользоваться теоремой о классификации линков [2, теорема 2.6].

Литература

[1] Исковских В. А. Минимальные модели рациональных поверхностей над произвольными полями // Известия АН СССР. Сер. мат. — 1979. – Т. 43, № 1. — С. 19–43.

[2] Исковских В. А. Факторизация бирациональных отображений рациональных поверхностей с точки зрения теории Мори // УМН. — 1996. — Т. 51, № 4. — С. 3–72.

[3] Манин Ю. И. Рациональные поверхности над совершенными полями. II // Матем. сб. — 1967. — Т. 72, № 2. — С. 161–192.

Two non-conjugate embeddings of $S_3 \times \mathbb{Z}_2$ into the Cremona group II

We give a detailed proof of the following main result of [Isk1]. There are two non-conjugate embeddings of $S_3 \times \mathbb{Z}_2$ into the Cremona group given by the linear action of this group on the plane and the action on the two-dimensional torus respectively.

§ 1. Introduction and the main result

1.1. Let us first recall our main result which is inspired by [LPR]. Consider the following two actions of the group $G \simeq S_3 \times \mathbb{Z}_2$ on the rational surfaces P and T (where S_3 denotes the symmetric group and $\mathbb{Z}_2$ denotes the cyclic group of order two).

(I) P — *the plane* $x+y+z=0$: S_3 acts by the permutations on the coordinates and $\mathbb{Z}_2$ is given by $(x,y,z) \to (-x,-y,-z)$;

(II) T — *the two-dimensional torus* $xyz=1$: S_3 acts by the permutations on the coordinates and $\mathbb{Z}_2$ is given by $(x,y,z) \to (x^{-1},y^{-1},z^{-1})$.

In both cases we obtain two embeddings of this group into the two-dimensional Cremona group $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$. A natural question arising here is whether the images of G under these embeddings are conjugate in $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ or not?

Our answer is the following proposition.

1.1.1. P r o p o s i t i o n. *The images of G under the above embeddings are not conjugate in $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$. In the other words, there exists no G-equivariant birational map between G-surfaces P and T.*

1.2. Commentary. Together with [LPR] this result means that the simple algebraic group of type $\mathbb{G}_2$ is not a Cayley group in the following sense. Let G as in [LPR] be a connected algebraic group (we assume it only in this commentary).

Let $\mathfrak{g}$ be its Lie algebra. Consider G as an algebraic variety X with the action of G on itself by the conjugation gxg^{-1}, $g \in G$, $x \in X$, and the Lie algebra $\mathfrak{g}$ as an algebraic variety Y with adjoint action $\mathrm{Ad}_G\, g(y) = gyg^{-1}$, $g \in G$, $y \in$ $\in Y$. The group G is called *a Cayley group* if there exist G-equivariant birational map $\lambda\colon X \dashrightarrow Y$, i. e. $\lambda(gxg^{-1}) = \mathrm{Ad}_G\, g(\lambda(x))$. The question about the Cayley

Algebraic Geometry in East Asia. — Hanoi, 2005. — Tokyo: Math. Soc. Japan, 2008. — V. 50 of Adv. Stud. Pure Math. — P. 251–267.

property is reduced to some property of character lattice $\widehat{T}$ of the maximal torus $T \in G$ with the natural action of the Weyl group W on $\widehat{T}$. Many canonical linear algebraic groups are proved to be non-Cayley ones. However, there are also a lot of exceptions.

The maximal torus of the group of type $\mathbb{G}_2$ is two-dimensional, and its Weyl group is $W \simeq S_3 \times \mathbb{Z}_2$. The question about the Cayley property is exactly problem 1.1.

Our result says that $\mathbb{G}_2$ is not Cayley. Surprisingly it was proved in [LPR] that the group $\mathbb{G}_2 \times G_m^2$ (where G_m is the multiplicative group of the ground field with the trivial action of the Weyl group) is a Cayley group. Thus, $\mathbb{G}_2$ is stable Cayley in this sense. It would be interesting to ask whether the group $\mathbb{G}_2 \times G_m$ is Cayley or not?

In our work [Isk1] we gave a sketchy proof of Proposition 1.1.1 based on the general method of factorization of G-equivariant birational maps between rational G-surfaces (see [Ma1], [Isk3]) with G denoting a finite group. In this paper we shall give a detailed proof of it since after the appearance of [Isk1] a great interest surrounded this fact.

1.3. As in [Isk1] we shall use the concept of a rational G-surface in our proof. Here $G \subset \mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ denotes a finite subgroup of the Cremona group (see, for instance, [Ma1], [Isk2]). In our case $G \simeq S_3 \times \mathbb{Z}_2$ and it acts on the compactifications of Y and X of surfaces P and T corresponding respectively to the cases (I) and (II) above. Let us describe these actions more precisely.

The case (I): $Y = \mathbb{P}^2$. Let (u_0, u_1, u_2) be the homogeneous coordinates on $\mathbb{P}^2$ and $x = \dfrac{u_1}{u_0}$, $y = \dfrac{u_2}{u_0}$ and $z = -\dfrac{u_1 + u_2}{u_0}$. Then the action of G on Y is given in the matrix form as follows (we use the homogeneous coordinates).

The involution $\sigma_{xy} = (xy) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

the 3-cycle $\sigma_{xyz} = (xyz) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;

the involution $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ is the generator of $\mathbb{Z}_2$.

Fixed elements: the point $(1, 0, 0)$.

Invariant elements: the line $L_0 = (u_0 = 0)$. The group $\mathbb{Z}_2$ acts on L_0 trivially and S_3 acts as the standard irreducible two-dimensional linear representation. A unique G-invariant 0-orbit of length 2 is $\{(0, 1, \lambda), (0, \lambda, 1)\}$, where $\lambda = e^{2\pi i/3}$ is the cubic root of 1. There are also two G-invariant 0-orbits of length 3 given by $\{(0, 0, 1), (0, 1, -1), (0, 1, 0)\}$ and $\{(0, 1, 1), (0, 1, -2), (0, -1, 1)\}$.

There is a G-equivariant pencil of lines with G-fixed point $(1,0,0)$ and G-invariant section (the line L_0). The group S_3 acts on the base of this pencil and on the section L_0. The group $\mathbb{Z}_2$ acts on the fibers by $t \to -t$.

The case (II): X is the most natural smooth compactification of the two-dimensional torus T: $(xyz = 1)$. Consider the threefold $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ with homogeneous coordinates $(x_1, x_0) \times (y_1, y_0) \times (z_1, z_0)$ and coordinates $\left(x = \dfrac{x_1}{x_0},\ y = \dfrac{y_1}{y_0},\ z = -\dfrac{z_1}{z_0}\right)$. This compactification is given by

$$x_1 y_1 z_1 = x_0 y_0 z_0. \tag{1}$$

Under the Segre map $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^7$, the equation (1) is the G-invariant equation of the hyperplane $\mathbb{P}^6 \supset X$. The surface X is given there by the quadratic equations that are restrictions on $\mathbb{P}^6$ of the equations which give the Segre map. Under this embedding X is a smooth projective del Pezzo surface of degree 6 in $\mathbb{P}^6$.

G acts in (1) as follows. S_3 acts by the coordinate permutations induced by the permutations of factors of $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ (for example $\sigma_{xy}\colon (x_1, x_0) \longleftrightarrow (y_1, y_0)$). $\mathbb{Z}_2$ acts as follows.

$$(x_1, y_1, z_1) \longleftrightarrow (x_0, y_0, z_0).$$

These actions are linear under the Segre map.

According to the classification of G-minimal rational G-surfaces (see [Isk2], [Mo]), $X \subset \mathbb{P}^6$ is the minimal del Pezzo G-surface of degree 6 with G-invariant Picard group $\operatorname{Pic}^G(X) = \mathbb{Z}(-K_X)$, where K_X denotes the canonical class. The configuration of (-1)-curves on X is a unique G-orbit and has the form of a regular hexagon. Its equation is the infinite hyperplane section

$$x_0 y_0 z_0 = 0. \tag{2}$$

These lines are one-dimensional fibers of three birational projections $X \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, two one-dimensional fibers in each of them.

Further, we need other G-birational equivalent to X models X_0, X_1, X_2 and the classification of some 0-dimensional (of small length) and 1-dimensional orbits on them.

1.4. Start from the surface X given by (1). $\operatorname{Pic} X$ is generated by (-1)-curves and all (-1)-curves form a unique G-orbit, which is equivalent to $-K_X$, so $\operatorname{Pic}_X^G = \mathbb{Z}(-K_X)$. We may consider an affine model T: $(xyz = 1)$ for studying of G-orbits, because the orbit at infinity is known (it is all (-1)-curves) and there is no 0-orbit of length less than 6.

1.4.1. L e m m a. *Let $\mathcal{A} \subset T$ be a G-equivariant 0-orbit of length $d < 6$. Then $\mathcal{A}$ is one of the following*:

$d = 1$: *a unique fixed point* $P = (1,1,1)$;

$d = 2$: *a unique orbit* $\{P_1 = (\lambda, \lambda, \lambda),\ P_{-1} = (\lambda^{-1}, \lambda^{-1}, \lambda^{-1})\}$, *where* $\lambda = e^{2\pi i/3}$ *is a cubic root of* 1 *(notice that* $\lambda^{-1} = \lambda^2$);

$d = 3$: *a unique orbit* $\{Q_1 = (1,-1,-1),\ Q_2 = (-1,1,-1),\ Q_3 = (-1,-1,1)\}$;

$d = 4$: *there are no such orbits*;

$d = 5$: *there are no such orbits, because* $5 \nmid 12 = |G|$.

Indeed, one can see this from the equation $xyz = 1$ and the action of G on T. In the case $d = 4$ the stabilizer of the point is $\langle \sigma_{xyz} \rangle = \mathbb{Z}_3$ acting by $(x, y, z) \to \to (y, z, x)$, which means that $x = y = z$.

1.4.2. We now find some G-orbits consisting of rational curves.

$\mathcal{T} = \Gamma_x + \Gamma_y + \Gamma_z \sim -K_X$. This G-orbit consists of the curves of genus 0 which contain the fixed point $P = (1, 1, 1)$ and is given by $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$. In the projective form these equations on $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ are as follows

$$\begin{gathered} \Gamma_x\colon\ y_1 z_1 - y_0 z_0 = 0, \\ \Gamma_y\colon\ x_1 z_1 - x_0 z_0 = 0, \Gamma_z\colon\ x_1 y_1 - x_0 y_0 = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Each of these curves Γ is smooth of genus 0 with $-K_X\Gamma = 2$, $\Gamma^2 = 0$, and any two of them intersect by a unique point P. Blow up this point. Then after a G-equivariant contraction of these curves we have three G-conjugate points on the image of the exceptional (-1)-curve of the blowing-up on the model $X_2 \subset \mathbb{P}^3$. This is an example of G-equivariant link $\Phi_{6,1}$, *cf*. Section 2 below.

This birational G-map $\gamma\colon X \dashrightarrow X_2$ is a projection from the tangent plane to the fixed point P with the embedding $X \subset \mathbb{P}^6$ described above. Under this projection the point P is blown up, and three conics passing through P are contracted.

$\mathcal{D} = \Delta_x + \Delta_y + \Delta_z \sim -2K_X$. This is a triple of smooth curves of genus 0 with equations $y = z$, $z = x$, and $x = y$ respectively. In the projective form we have

$$\begin{gathered} \Delta_x\colon\ x_1 y_1^2 - x_0 y_0^2 = 0, \\ \Delta_y\colon\ y_1 z_1^2 - y_0 z_0^2 = 0, \Delta_z\colon\ z_1 x_1^2 - z_0 x_0^2 = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

All these curves Δ intersect in three points P, P_1 and P_{-1} with $-K_X\Delta = 4$ and $\Delta^2 = 2$.

1.4.3. Curves Γ and Δ are components of the fibers of the G-invariant pencil of rational curves $\Pi = |-K_X - 2P - P_1 - P_{-1}|$ (i. e. the pencil of curves from the linear system $|-K_X|$ which contain points P_1, P_{-1} and twice point P). Moreover $\Gamma_x + \Delta_x \sim \Gamma_y + \Delta_y \sim \Gamma_z + \Delta_z$ are the fibers of this pencil. Equations (3) and (4) show that $\Gamma_x \cap \Delta_x = \{P, Q_1\}$, $\Gamma_y \cap \Delta_y = \{P, Q_2\}$, $\Gamma_z \cap \Delta_z = \{P, Q_3\}$.

$\mathcal{E} = E_x + E_y + E_z \sim -K_X$. This triple of smooth curves of genus 0 is given by $x = -1$, $y = -1$, $z = -1$ accordingly. One can see from these equations that $E_x \ni Q_2, Q_3$, $E_y \ni Q_1, Q_3$, $E_z \ni Q_1, Q_2$, and Q_i are the only intersection points for the components of $\mathcal{E}$. As above, $-K_X E = 2$, $E^2 = 0$, so after blowing up Q_1, Q_2 and Q_3 strict transforms E'_x, E'_y, E'_z form a G-conjugate triple of (-2)-curves which do not intersect each other. They may be G-equivariant contracted to three ordinary double points on a cubic surface in $\mathbb{P}^3$.

1.5. Consider now a G-birational model X_0 of G-surface X, namely, the standard projectivisation of torus $T \subset \mathbb{A}^3 \subset \mathbb{P}^3$

$$X_0\colon xyz = w^3, \tag{5}$$

where (x, y, z, w) are homogeneous coordinates on $\mathbb{P}^3$. This model differs from X only at infinity $w = 0$. Three lines given by $x = w = 0$, $y = w = 0$ and $z = w = 0$

are on X_0 unlike on X there are 6 lines. It has also 3 ordinary double points $(0,0,1,0)$, $(0,1,0,0)$, and $(1,0,0,0)$. G acts on X_0 not linearly (as on $X \subset \mathbb{P}^3$ it does). More precisely S_3 acts linearly by permutations of x, y, z and $\mathbb{Z}_2$ acts via the birational involution $(x,y,z,w) \mapsto (x^{-1}, y^{-1}, z^{-1}, w^{-1})$.

However there is another cubic model $X_1 \subset \mathbb{P}^3$ such that G acts linearly on it. As X_0 it has three ordinary double points. This model is given by G-equivariant birational projection

$$p_1 \colon X \subset \mathbb{P}^6 \dashrightarrow \mathbb{P}^3 \supset X_1$$

from the plane $\langle Q_1, Q_2, Q_3 \rangle$, which is a linear span of $Q_1, Q_2, Q_3 \in X$ in $\mathbb{P}^6$. As noted in 1.4 conics E_x, E_y, E_z are contracted to the singular points.

Choose homogeneous coordinates (x,y,z,w) in $\mathbb{P}^3$ such that the image of P is the point $(0,0,0,1)$ and $\mathbb{Z}_2$ acts via the involution $(x,y,z,w) \mapsto (-x,-y,-z,w)$. Then S_3 acts by coordinate permutations as on X_0. Under the projection $p_1 \colon X \dashrightarrow X_1$ three singular points (the images of E_x, E_y, and E_z) lie on the plane at infinity $w = 0$. The images of conics Γ_x, Γ_y, and Γ_z are three lines passing through $P_0 = p_1(P)$. Thus P_0 is the Eckardt point whose tangent plane is G-invariant, i. e. it is given by the linear equation $x + y + z = 0$.

So the equation of $X_1 \subset \mathbb{P}^3$ is given by

$$X_1 \colon xyz - aw^2(x+y+z) = 0, \quad a \in \mathbb{C}. \tag{6}$$

For convenience one may assume $a = \dfrac{1}{3}$. Then the singular points are $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$, and the images of P_1 and P_{-1} are $(1,1,1,1)$ and $(-1,-1,-1,-1)$ respectively. Three lines $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ lie on the tangent plane $x + y + z = 0$.

1.6. Remark. As on each cubic surface, there is Geiser's birational involution concerned with P_0, i. e. the projection from this point to the plane composed with the automorphism of the double covering. Obviously this birational involution is G-equivariant and in our case it is biregular because P_0 is the Eckardt point. G-equivariant birational Bertini involution is concerned with two G-conjugate points P_1, $P_{-1} \in X$. Its action on $\operatorname{Pic} X_1$ differs from the standard one because X_1 is singular and the points P_1, P_{-1} are not in the general position. This means that the third intersection point of the line $(P_1, P_{-1}) \subset \mathbb{P}^3$ and X_1 (i. e. P_0) lies on the (-1)-curves.

1.7. Another G-equivariant birational model of X is the quadric $X_2 \subset \mathbb{P}^3$ of type

$$X_2 \colon xy + yz + zx = 3w^2. \tag{7}$$

It can be obtained from X_1 by G-equivariant birational transform $(x,y,z,w) \mapsto (x^{-1}, y^{-1}, z^{-1}, w^{-1})$. Indeed this coordinate change with the multiplication to the common factor transform the equation (6) with $a = \dfrac{1}{3}$ to the equation (7). The action of G on (x,y,z,w) is still linear. Moreover X_2 is nothing but the image of $X \subset \mathbb{P}^6$ under the linear projection

$$p_2 \colon X \subset \mathbb{P}^6 \dashrightarrow \mathbb{P}^3 \supset X_2$$

from the tangent plane to X at the G-fixed point $P \in X$. The projection p_2 blows up P to the conic $C_0\colon (w=0) \subset X_2$ and contracts three conics Γ_x, Γ_y, $\Gamma_z \subset X$ to the G-invariant 0-orbit $\mathcal{A} = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0)\} \subset C_0$.

The curve C_0 is the image of the point $P_0 \in X_1$ and the 0-orbit $\mathcal{A}$ is the image of the lines $x=0$, $y=0$, $z=0$ under our map $X_1 \dashrightarrow X_2$.

1.8. L e m m a. (i): *The surface X_2 is smooth and there are no G-fixed points on it*;

(ii): *The conics $C_0 = (w=0)$ and $C_1 = (x+y+z=0)$ are G-invariant and on C_0 acts only S_3 by a unique two-dimensional irreducible representation and G acts effective on C_1*;

(iii): *The G-invariant 0-orbits of length $d<6$ on X_2 are*:

$d=2$: $\{P_1 = (1,1,1,1),\ P_{-1} = (-1,-1,-1,1)\}$, *the images on X_2 of P_1 and P_{-1} on X (or X_1)*; $\{R_1 = (1,\lambda,\lambda^{-1}),\ R_2 = (\lambda,1,\lambda^{-1})\} = C_0 \cap C_1$ — *the base points of the conic pencil on X_2 generated by C_0 and C_1*, $\lambda = e^{2\pi i/3}$;

$d=3$: $\mathcal{A} = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0)\}$, $\mathcal{B} = \{(-1,2,2,0), (2,-1,2,0), (2,2,-1,0)\}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \subset C_0$;

$d=4$: *there are no such orbits*;

$d=5$: *there are no such orbits*;

(iv): *Let*

$$\Pi_0 = (t_0(x+y+z) + t_1 w = 0), \quad (t_0,t_1) \in \mathbb{P}^1,$$

be the pencil of conics generated by C_0 and C_1; then on the base of this pencil $\mathbb{P}^1$ acts only $\mathbb{Z}_2 = G/S_3\colon (t_0,t_1) \mapsto (-t_0,t_1)$ with two fixed points $(1,0)$ and $(0,1)$; there are two reducible fibers F_1 and F_{-1} on Π_0 with intersection points P_1 and P_{-1} of the components with coordinates $(1,-3)$ and $(1,3)$ accordingly; on the irreducible fibers G acts without fixed points;

(v): *there is another pencil of conics*

$$\Pi_1 = \big\{u_0(x-y) + u_1(y-z) + u_2(z-x) = 0;\ \ u_0+u_1+u_2 = 0,\ \ (u_0,u_1,u_2) \in \mathbb{P}^2\big\}$$

passing through $P_1, P_{-1} \in X_2$; it is an image of Π from 1.4.3 under the projection $p_2\colon X \dashrightarrow X_2$; on the base of this pencil $\mathbb{P}^1 = (u_0+u_1+u_2=0)$ as usual acts S_3 by a two-dimensional irreducible representation, $\mathbb{Z}_2$ acts on each fiber with fixed points $\Pi_1 \cap C_0$ and invariant 2-section $\Pi_1 \cap C_1$.

There are two reducible fibers G_1 and G_2 on Π_1 with intersection points of the components R_1 and R_2 with coordinates $(\lambda^{-1},1,\lambda)$ and $(\lambda^{-1},\lambda,1)$ on the base accordingly.

All these statements are straightforward by analyzing the equations and the action of G.

§ 2. Proof of the main result

2.1. The idea of the proof of Proposition 1.1.1 is the same as in [Isk1]. We have to show that there is no G-equivariant birational map between the G-surfaces X and $Y = \mathbb{P}^2$ denned in section 1.3. According to the general theory (see [Isk3]), each G-equivariant birational map can be decomposed into a sequence

of G-equivariant elementary birational maps-links, via the G-equivariant Sarkisov program. The classification of such links was obtained in the algebraic case for G a finite Galois group acting on smooth k-minimal rational surfaces over a perfect field k (see [Isk3]).

However according to the general concept of rational G-surfaces (see [Ma1], [Isk2]) this classification may be applied to the geometrical case, i. e. to the case of action of a finite group G on smooth projective minimal rational G-surfaces. Their classification is also known (see [Isk2] and G-equivariant 2-dimensional Mori theory [Mo]).

Some differences between geometrical and algebraical cases are concerned with the description of G-orbits. For example, in the geometrical case (with non-trivial G-action) G-orbits are closed proper subsets. In the algebraical case for del Pezzo surfaces, say, of large degrees, the existence of one k-point (orbit of degree 1) implies the density everywhere of such k-points in the Zariski topology.

The decomposition theorem for a birational G-map to a sequence of links is known (see [Isk3], 2.5) and all links are determined by their centers, i. e. G-orbits of dimension 0, all points of which are in the general position on the corresponding G-surface. So for the proof of our main result we need the following

a) Choose from the general classification (see [Isk3], 2.6) the links which are concerned with our case. Indicate minimal G-surfaces on which these links act (as G-equivariant birational maps) starting from X.

b) Classify all zero-dimensional G-orbits of length $d < \deg X_i = K_X^2$, on all of such surfaces X_i, and choose those whose points are in the general position (this is necessary condition for the existence of links).

Recall that the points $x_1, x_2, \dots, x_d \in X$ are in the general position, if

1) X is del Pezzo surface, $\sigma\colon X' \to X$ is the simultaneous blow up of all $x_1, \dots, x_d$ and X' is also del Pezzo surface, or

2) $\pi\colon X \to \mathbb{P}^1$ is a conic bundle, then these points do not lie on the degenerated fibers and any two of $x_1, \dots, x_d$ do not lie on the same fiber; this is necessary and sufficient condition for the existence of link with center in $x_1, \dots, x_d$, i. e. the birational transform

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, dashed] \arrow[dr] & & X' \arrow[dl] \\ & \mathbb{P}^1 & \end{tikzcd}$$

which is a blow up of $x_1, \dots, x_d$ and a contraction of strict transforms of the fibers on which they lie.

2.2. Suppose that there exists a G-equivariant birational map $\chi\colon X \dashrightarrow Y$. Then χ can be decomposed into a composition of links. According to the particular algorithm of decomposition and considering all possibilities for links we will show that there is no link whose image is $\mathbb{P}^2$, i. e. a contradiction with the decomposition theorem. Thus such a χ can not exist. This means that two embeddings of G to the Cremona group, defined in (I) and (II), section 1.1, are not conjugate in $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$.

By the mentioned algorithm, choose a very ample G-invariant linear system $\mathcal{H}' = \mathcal{H}_Y$ on Y, for example, $\mathcal{H}' = |-K_Y|$. Let $\mathcal{H}' = \mathcal{H}_X = \chi_*^{-1}\mathcal{H}'$ be its strict transform on X. By the definition of strict transform, the linear system $\mathcal{H}$ has no fixed components and $\dim \mathcal{H} = \dim \mathcal{H}'$ ($\mathcal{H}$ has base points if χ is not morphism). $\mathrm{Pic}^G(X) = \mathbb{Z}(-K_X)$, so $\mathcal{H} \sim -aK_X$, $a \in \mathbb{Z}_{>0}$.

The map $\chi\colon X \to Y$ is not isomorphism. So by the G-equivariant Noether inequality (see [Isk3], 2.4) the linear system $\mathcal{H}$ has a maximal singularity which is a zero-dimensional G-orbit $x \subset X$ of length $d = d(x)$ and multiplicity $\mathrm{mult}_x \mathcal{H} = r = r(x) > a$ at all points $x_i \in x$. We have $\mathcal{H}^2 = a^2 K_X^2 > r^2 d$ ($\mathcal{H}$ is a linear system without fixed components passing through all points of G-orbits x with multiplicity r and determining a birational map) so $d < K_X^2$. In our case $d < K_X^2 = 6$. The length of the orbit is divided by the order of the group. So the maximal singularities giving rise to our links in the decomposition can be only G-orbits of length $d = 1, 2, 3$ or 4. Such orbits may be found in Lemma 1.4.1.

2.3. Now for every such G-orbit we have to verify whether its points are in the general position or not and if yes, then choose from the classification ([Isk3], 2.6) appropriate link $\Phi\colon X \dashrightarrow X_1$ (do not confuse with X_1 from paragraph 1.5). The decomposition algorithm is going as follows. The map $\chi_1\colon X_1 \dashrightarrow Y$ in the composition $\chi = \chi_1 \circ \Phi$ is given by the linear system $\mathcal{H}_1 = \Phi_*(\mathcal{H}) \sim -a_1 K_{X_1}$ with $a_1 < a$. Since $a \in \mathbb{Z}_{>0}$ the decomposition process must be terminated on an isomorphism after a finite number of steps. We begin to find links. There is no G-orbit of length 4 on X (see 1.4.1). So let's start from $d = 3$.

The case $d = 3$. There is one such orbit (Q_1, Q_2, Q_3). It can be shown that in this case there is no such an «untwisting» link Φ. Indeed the points Q_1, Q_2, Q_3 on X are not in the general position. On the blow up of these three points $\sigma\colon X' \to X$ strict transforms E'_x, E'_y, E'_z of conics E_x, E_y, E_z (see 1.4.2) are G-invariant triple of (-2)-curves, so $-K_X$ is not ample ($-K_X \cdot E'_x = 0$).

(As we have seen in paragraph 1.5, the projection $p_1\colon X \dashrightarrow X_1$ from the plane $(Q_1, Q_2, Q_3) \subset \mathbb{P}^6 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ blows up these three points and contracts E_x, E_y, E_z to the ordinary double points on X_1.)

Notice that in [Isk1] there was an inaccuracy claiming that there is such a link $\Phi_{6,3}$. The reason was that we did not check the condition of generality (although this does not affect to the final result).

2.3.1. Remark. The fact that the link $\Phi_{6,3}$ does not exist can be seen easily. For the existence of a link with center in the maximal singularity $x \subset X$ it is necessary and sufficient that under the blow up $\sigma\colon X' \to X$ of the cycle x on the surface X' there are two extremal rays, one of which is an exceptional divisor. Since $\mathrm{Pic}^G(X') = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, the Mori cone is generated by these extremal rays and $-K_{X'}$ is ample by Kleiman's criterion. The link Φ is nothing but the blow up σ and the extremal contraction of the second ray.

In the classical terms, the non-general position condition for Q_1, Q_2 and Q_3 means that this G-orbit could not be a maximal singularity in the linear system $\mathcal{H}$, because if $r > a$, then E_x, E_y and E_z are fixed components of $\mathcal{H}$. Indeed $\mathcal{H} \subset |-aK_X - rQ_1 - rQ_2 - rQ_3|$, the cycles $E_x - Q_2 - Q_3$, $E_y - Q_1 - Q_3$, $E_z - Q_1 - Q_2$ are effective and must have non-negative intersection with $\mathcal{H}$. But

$\mathcal{H} \cdot (E_x - Q_2 - Q_3) = (-aK_X - rQ_1 - rQ_2 - rQ_3) \cdot (E_x - Q_2 - Q_3) = 2a - 2r < 0$. So we would get a contradiction.

2.3.2. The case $d = 2$. There is such a unique orbit $x = \{P_1, P_{-1}\}$ (see 1.4.1). The pair P_1, P_{-1} is in the general position on X. Indeed, each of these points does not lie on the (-1)-curves (which lie on the infinity $x_0y_0z_0 = 0$), and there is no curve of genus 0 and degree 2 (with respect to $-K_X$) on which both of these points lie.

There is corresponding link $\Phi = \Phi_{6,2}\colon X \dashrightarrow X_1$ (see [Isk3], 2.6). Find out what is X_1. Let $\sigma\colon X' \to X$ be the blow up of $x = \{P_1, P_{-1}\}$. Then $-K_{X'}$ is ample and $K_{X'}^2 = 4$. The linear system $|-K_{X'}|$ gives a G-equivariant embedding $X' \subset \mathbb{P}^4$ into the del Pezzo surface of degree 4 (i. e. into an intersection of two quadrics). The image of the exceptional (-1)-curves are two skew lines whose linear span is a hyperplane $\mathbb{P}^3$. This image is G-invariant and intersects $X' \subset \mathbb{P}^4$ by another G-invariant pair of skew lines which is reducible curve of genus 1 together with the pair that we blow up.

Contracting this residual pair of lines we get a del Pezzo surface $X_1 \subset \mathbb{P}^6$ of degree 6.

In the general algebraic case the surface X_1 may be not isomorphic to X, i. e. $\Phi_{6,2}$ is not always a birational involution (but I do not know such an example). However, in our particular case $\Phi_{6,2}$ is a birational involution of Bertini type. Indeed, if $\sigma\colon X'' \to X' \to X$ is a blow up of G-orbit $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ together with $\{P_1, P_{-1}\}$, then $K_{X''}^2 = 1$. But $-K_{X''}$ is not ample (because X'' is a degenerated del Pezzo surface of degree 1 with three (-2)-curves, or, after their contraction, three ordinary double points). Nevertheless, the linear system $|-2K_{X''}|$ gives a contraction of (-2)-curves composed with double covering $X'' \to Q^* \subset \mathbb{P}^3$ of the quadratic cone branched over a fixed point and a curve on Q^* with three ordinary double points.

The involution of this double covering $X'' \to X$ induces the birational involution $\Phi_{6,2}$. It differs from the standard Bertini involution given by the Picard group, because 5 blown up points are not in the general position. The point P and ordinary double points are still fixed under this involution. It also induces the involution on the cubic surface X_1 considered in Remark 1.6.

The birational involution $\Phi_{6,2}$ maps the pencil of rational curves $\Pi = |-K_X - 2P - P_1 - P_{-1}|$ onto itself and interchanges the components of its three fibers: $\Gamma_x \longleftrightarrow \Delta_x$, $\Gamma_y \longleftrightarrow \Delta_y$, $\Gamma_z \longleftrightarrow \Delta_z$ (see 1.4.3).

Apparently one can write the particular equation for the residual G-invariant pair of the curves of genus 0 on X (although we will not need this in the sequel). This 3-linear 3-homogeneous equation must be as follows

$$H\colon \sum_{g \in G} g\big((x_1 - \lambda x_0)(y_1 - \lambda y_0)\big(z_1 - \lambda^2 z_0\big) + (x - \lambda x_0)\big(y_1 - \lambda^2 y_0\big)\big(z_1 - \lambda^2 z_0\big)\big) = 0.$$

The curve $H \sim -K_X$ is G-invariant. It passes through P_1, P_{-1}, and has them as ordinary double singularities. This means that the curve is reducible.

The link $\Phi_{6,2}\colon X \dashrightarrow X$ maps the linear system $\mathcal{H} \sim -aK_X$ with the maximal singularity $x = \{P_1, P_{-1}\}$ of multiplicity $r = r(x)$ to the linear system

$\mathcal{H}_1 \sim -a_1 K_X$ with the base cycle $x_1 = x = \{P_1, P_{-1}\}$ with the multiplicity $r_1 < a_1$ (this is not maximal singularity for $\mathcal{H}_1$). The formulas for the coefficients are given in [Isk3], Theorem 2.6, case $K_X^2 = 6$, case d):

$$a_1 = 2a - r(x) < a, \quad r_1 = 3a - 2r(x) < a_1. \tag{8}$$

So, $x = \{P_1, P_{-1}\}$ already is not a maximal singularity for $\mathcal{H}_1$. The map $\chi_1 = \chi \circ \Phi^{-1} \colon X \dashrightarrow Y$ defined by $\mathcal{H}_1$ is not isomorphism, so, by Lemma — Noether's inequality, $\mathcal{H}_1$ must have a maximal singularity. Now it can be only the point P of multiplicity $r_1 = r(P) > a_1$.

2.3.3. The case $d = 1$. The only fixed point $x_1 = P$. It does not lie on the (-1)-curves, so it is in a general position. The corresponding link $\Phi_{6,1} \colon X \dashrightarrow X_2$, where $X_2 \subset \mathbb{P}^3$ is a smooth quadric with $\mathrm{Pic}^G(X_2) = \frac{1}{2}\mathbb{Z}(-K_X)$ considered in section 1.7, is the birational projection $p_2 \colon X \dashrightarrow X_2 \subset \mathbb{P}^3$ from the tangent plane in $\mathbb{P}^6$ to X at P. This link blows up the point P and contracts three conics Γ_x, Γ_y, Γ_z to the G-orbit $\mathcal{A}$ of length 3 on the conic $C_0 \subset X_2$ which is the image of blowing up P. The stabilizator of $P \in X$ is the whole G which acts on the projectivisation of tangent plane to C_0 as S_3 by the standard irreducible 2-dimensional linear representation. This situation was completely investigated in the Lemma 1.8.

There is a G-invariant curve $C_0 \sim \frac{1}{2}K_{X_2}$, which generates $\mathrm{Pic}^G(X_2)$ on X_2. In the notations from 1.8 one sees that the formulas for the action of $\Phi_{6,1}$ can be given as follows

$$\begin{gathered} -K_X \mapsto -\frac{3}{2}K_{X_2} - 2\mathcal{A} \sim 3C_0 - 2\mathcal{A}, \\ P \mapsto -\frac{1}{2}K_{X_2} - \mathcal{A} \sim C_0 - \mathcal{A}, \\ \mathcal{H}_1 \subset |-a_1 K_X - r_1 P| \mapsto \mathcal{H}_2 \subset |-a_2 K_{X_2} - r_2 \mathcal{A}|, \quad \text{where} \\ a_2 = \frac{3}{2}a_1 - \frac{1}{2}r_1, \quad r_2 = 2a_1 - r_1. \end{gathered} \tag{9}$$

Under our maximality hypothesis of the singularity at P we have $r_0 = \mathrm{mult}_P \mathcal{H}_1 > a_1$, so $a_2 < a_1$ and $r_2 < a_2$. This means that the G-orbit $\mathcal{A}$ is not a maximal singularity for $\mathcal{H}_2$.

2.4. Now we are on the quadric $X_2 \subset \mathbb{P}^3$ with linear system $\mathcal{H}_2 \sim -a_2 K_{X_2}$. Denote this system by $\mathcal{H}$ and put $a = a_2$ for simplicity. The map $\chi_2 \colon X_2 \dashrightarrow Y = \mathbb{P}^2$ is not isomorphism, so, by Noether inequality, there is a maximal singularity, G-orbit x of multiplicity $r = r(x) > a$ and of length $d < K_{X_2}^2 = 8$; $d \mid 12 = |G|$ so the only possibilities for d are $d = 1, 2, 3, 4, 6$. We can exclude the cases $d = 1$ and $d = 4$ by Lemma 1.8. It remains to consider the cases $d = 2, 3, 6$.

2.4.1. The case $d = 2$. There are two G-orbits $\{R_1, R_2\}$ and $\{P_1, P_{-1}\}$ (see 1.8). First we start from $x = \{R_1, R_2\} = C_0 \cap C_1$ of multiplicity $r = r(x) > a$. Such R_1, R_2 do not lie on one line on the quadric X_2, because each line intersects C_0 at a unique point (C_0 is the hyperplane section). So R_1 and R_2 are in the general position. There exists a link $\Phi_{8,2}$ (see [Isk3], 2.6, the case $K_X^2 = 8$, a), $d = 2$), which is a blow up $X_2 \dashrightarrow X_1$ of the points $\{R_1, R_2\}$. There is a G-invariant structure of

conic bundle $\pi\colon X_1 \to \mathbb{P}^1$ on X_1, which is given by the pencil Π_0 from 1.8(iv). Let $\mathcal{H}_1$ be the strict transform on X_1 of linear system $\mathcal{H}$. Then $\mathcal{H}_1 \sim -a_1 K_{X_1} + b_1 f_1$, where $f_1 \cong C_0'$ is a G-invariant fiber. We have

$$K_{X_1}^2 = 6, \quad -K_{X_1} = E + C_0' + C_1' \sim E + 2f_1,$$

where E is an exceptional divisor on $X_1 \to X_2$, i. e. a G-invariant pair of (-1)-curves, and C_0', C_1' are strict transforms of C_0, C_1. By [Isk3], 2.6

$$\begin{aligned} a_1 &= 2a - r(x) < a, \\ b_1 &= 2(r(x) - a). \end{aligned} \tag{10}$$

From (10) one can see that $a_1 < a$ and $b_1 > 0$. By the Noether inequality (because $X_1 \ncong Y$) there is a maximal singularity in $\mathcal{H}_1$.

2.4.2. L e m m a. *There is no zero-dimensional G-orbit x_1 of length d_1 on X_1, whose points are in the general position in the sense of* 2.12, *i. e. whose points do not lie on the degenerated fibers and no two points among them lie on the same fiber of morphism $\pi\colon X_1 \to \mathbb{P}^1$ (this is a condition of existence of «untwisting» link for $\mathcal{H}_1$ on the conic bundle with $b_1 \geqslant 0$).*

P r o o f. By Lemma 1.8(iv), a cyclic group of order 2 acts on $\mathbb{P}^1$, so for the generality condition the length d_1 must be less or equal than 2. There are no G-fixed points on X_1 (as on X_2). The orbit $\{P_1, P_{-1}\}$ of length 2 by Lemma 1.8 lies on the degenerated fibers. Also on the non-degenerated fibers S_3 acts without fixed points. Q. E. D.

So the decomposition algorithm in this situation is impossible. This means that $\{R_1, R_2\}$ is not maximal, and we need to come back to the quadric X_2. Consider the other possibilities.

2.4.3. The case $d = 2$ with maximal singularity $x = \{P_1, P_{-1}\}$, $r(x) > a$. As in 2.4.1 the pair $\{P_1, P_{-1}\}$ is in the general position and there exists a link $\Phi_{8,2}$ (see [Isk3], Theorem 2.6, the case $K_X^2 = 8$, c), $d = 2$), which is the blow up $X \dashrightarrow X_1$ of P_1, P_{-1}. There is a structure of conic bundle $\pi\colon X_1 \to \mathbb{P}^1$ on X_1 that is given by the pencil Π_1 from 1.8(v).

The difference from the previous case is the following. The action of $G = S_3 \times \mathbb{Z}_2$ on $\pi\colon X_1 \to \mathbb{P}^1$ is given by two commuting actions. S_3 acts on the base $\mathbb{P}^1$ without fixed points and this action can be shifted to X_1 by changing the fibers. $\mathbb{Z}_2$ acts on $X_1 \to \mathbb{P}^1$ only on the fibers. The fixed points in this case are the intersection points of the fibers with the curve $C_0' \subset X_1$, which is the pre-image of the curve $C_0 \subset X_2$. So $\mathbb{Z}_2$ acts as the classical De Jonquieres involution. The fixed curve C_0' determines $\pi\colon X_1 \to \mathbb{P}^1$. Indeed the factor by this involution is ruled surface $\mathbb{F}_1 \to \mathbb{P}^1$ branched over C_0'. The pair of the (-1)-curves E covers the exceptional section $S_1 \subset \mathbb{F}_1$.

Notice that there are no fixed points on the base $\mathbb{P}^1$ (so there is no G-invariant fiber as in the previous case). But the class of the fiber $[f_1]$ in $\mathrm{Pic}^G(X)$ is G-invariant, so the action of this link is the same as in (10).

By the Noether inequality there must be a maximal singularity in the linear system $\mathcal{H} \sim -a_1 K_{X_1} + b_1 f_1$ which is G-orbit $x_1 \subset X_1$ of multiplicity $r_1 = r(x_1) > a_1$, whose points are in the general position in the sense of 2.4.2.

There are no G-fixed points on X_1 and the only length 2 G-invariant orbit $\{R_1, R_2\}$ lies in the degenerated fibers (see 1.8(v)).

Two G-orbits of length 3, $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$, satisfy the generality condition. Both of them lie on C_0' and they are interchanged under the involution of double covering $\pi|_{C_0'}\colon C_0' \to \mathbb{P}^1$ (do not confuse with the involution of the action of $\mathbb{Z}_2$).

There are also G-orbits of length 6. By the generality condition they lie on C_0', one point on the fiber. The other intersection points of C_0' with fibers are complementary G-orbit of length 6.

There is an «untwisting» link concerned with every maximal singularity $x_1 \subset \subset X_1$ of length 3 or 6. That is, the elementary transform

$$\begin{tikzcd} \Phi\colon X_1 \arrow[rr, dashed, "\mathcal{E}_{x_1}"] \arrow[dr] & & X_1' \arrow[dl] \\ & \mathbb{P}^1 & \end{tikzcd} \tag{11}$$

Recall that the elementary transform blows up the points of orbit $x_1 \subset X_1$ and contracts the strict transforms of the fibers on which these points lie. In the general case an elementary transform is not a birational involution. But in our case it is so. Indeed the transform $\mathcal{E}_{x_1}$ induces the isomorphism on the curve C_0' and, as noted above, C_0' completely determines $\pi\colon X_1 \to \mathbb{P}^1$. So $X_1' = X_1$ in (11).

The birational involution $\Phi = \mathcal{E}_x$ acts by the following formulas from [Isk3], 2.6

$$\begin{aligned} -K_{X_1} &\mapsto -K_{X_1} + d_1 f_1 - 2x_1, & a_1' &= a_1, \\ f_1 &\mapsto f_1, & b_1' &= b_1 + d_1(a_1 - r_1), \\ x_1 &\mapsto d_1 f_1 - x_1, & r_1' &= 2(r_1 - a_1), \end{aligned}$$

where d_1 is the length of the orbit x_1. As the last formula shows, the multiplicities of maximal singularities decrease. After a finite number of such transforms we can «untwist» all maximal singularities (which means that the multiplicities of the base points in the modified linear system will be no greater then a). By the Noether inequality the coefficient at b_1 at the fiber will be less than 0.

In this situation the link $\Phi_{8,2}^{-1}\colon X_1 \to X_2$ (the inverse to $\Phi_{8,2}$) contracts G-invariant pair of (-1)-curves E (the sections of the pencil $\pi\colon X_1 \to \mathbb{P}^1$) to G-orbit of length two $x = \{P_1, P_{-1}\}$. It acts by the following formulas

$$\begin{aligned} -K_{X_1} &\mapsto -K_{X_2} - x, & a &= a_1 + \frac{2}{3} b_1, \\ 2f_1 &\mapsto -K_{X_2} - 2x, & r(x) &= a_1 + b_1. \end{aligned} \tag{12}$$

These formulas show that $a < a_1$ and $r(x) < a$, because $b_1 < 0$. It means that the link is untwisted and $x = \{P_1, P_{-1}\}$ already is not a maximal singularity.

2.5. The last cases are those whose singularities of $\mathcal{H}$ are G-orbits of length 3 or 6. There are only two orbits of length 3: $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ (see 1.8). Let us first consider

2.5.1. The case $d = 6$. Suppose that there is a maximal singularity, G-orbit x of length 6, all whose points are in the general position and the multiplicity $r = r(x) > a$, where $\mathcal{H} \sim -aK_{X_2}$.

Then there is an untwisting link $\Phi_{8,6}$, the Geiser's involution (see [Isk3], 2.6). Indeed, blowing up x we get a del Pezzo surface of degree 2, on which the classical Geiser's involution acts biregularly. Now apply this involution and contract the blown up divisor. The link $\Phi_{8,6}$ acts by the following formulas

$$a_1 = 7a - 6r(x) < a, \quad r(x_1) = 8a - 7r(x) < a_1.$$

2.5.2. The case $d = 3$. If the maximal singularity is $x = \mathcal{A}$, then the link $\Phi_{8,3}$ with center in this singularity is the inverse map $\Phi_{6,3}^{-1}\colon X_2 \dashrightarrow X$ and we are in the situation from which we started. If the maximal singularity is $x = \mathcal{B}$ (we missed this case in [Isk1]), then the link $\Phi'_{8,3}\colon X_2 \dashrightarrow X'$ acts from X_2 to del Pezzo surface X' of degree 6. But $X' \cong X$, because the birational involution on X with the center in $\{P_1, P_{-1}\}$ considered in 2.3.2 interchanges $\{\Gamma_2, \Gamma_y, \Gamma_z\} \longleftrightarrow \{\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z\}$. Thus it interchanges the cycles $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ on C_0 that correspond to these directions in the tangent plane to $P \in X$.

So we completed our consideration of all possibilities but have not found any G-equivariant G-map $X \dashrightarrow Y = \mathbb{P}^2$. So there is no such a map, which proves the Proposition 1.1.1.

2.6. Commentary. In the proof we determined that the smooth relative minimal G-models on which there exists G-equivariant map from X are only the quadric X_2 or the conic bundle with two different actions of G. It is interesting to find by this method all G-surfaces on which $Y = \mathbb{P}^2$ may be G-equivariant mapped.

The following fact is also of interest. If we consider only S_3 instead of G with the similar actions on X and Y, then these surfaces are S_3-birational equivalent. Indeed in this case there are three fixed points P, P_1 and P_{-1} on X. Therefore there are two fixed points P_1, P_{-1} on the quadric X_2. The stereographic projection from one of them is the required G-equivariant birational isomorphism, so both of these embeddings of S_3 in $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ are conjugate. On the other hand, the involution $(x, y) \to (x^{-1}, y^{-1})$ of course is conjugate to the linear one.

Acknowledgement. I would like to thank the organizers of the International Symposium «Algebraic Geometry in East Asia. II» held at Hanoi October 10–14, 2005 for the kind invitation and support.

References

[Isk1] Исковских В. А. Два несопряженных вложения группы $S_3 \times \mathbb{Z}_2$ в группу Кремоны // Труды МИРАН им. В. А. Стеклова. — 2003. — Т. 241. — С. 105–109.

[Isk2] Исковских В. А. Минимальные модели рациональных поверхностей над произвольными полями // Известия АН СССР. Сер. матем. — 1979. — Т. 43, № 1. — С. 19–43.

[Isk3] Исковских В. А. Факторизация бирациональных отображений рациональных поверхностей с точки зрения теории Мори // УМН. — 1996. — Т. 51, № 4(310). — С. 3–72.

[LPR] Lemire N, Popov V. L., Reichstein Z. Cayley groups // J. Amer. Math. Soc. — 2006. — V. 19. — P. 921–967.

[Ma1] Манин Ю. И. Рациональные поверхности над совершенными полями. II // Матем. сб. — 1967. — Т. 72(114). — С. 161–192.

[Ma2] Манин Ю. И. Кубические формы. — М.: Наука, 1972.

[Mo] Mori S. Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective // Ann. of Math. — 1982. — V. 116. — P. 133–176.

Василий Алексеевич Исковских

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ: ГЕОМЕТРИЯ И АРИФМЕТИКА

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83

Подписано в печать 12.12.2011 г. Формат $70\times100\,{}^{1}\!/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 22,5. Тираж 400 экз. Заказ .

Отпечатано в ОАО «Можайский полиграфический комбинат».
143200, г. Можайск, ул. Мира, 93.
www.oaompk.ru, www.oaompк.рф тел.: (495) 745-84-28, (49638) 20-685

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга»,
Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-72-85. E-mail: biblio@mccme.ru