ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ԵՊՀ ԻՋԵՎԱՆԻ ՄԱՍՆԱՃՅՈՒՂ

Ա. Գ. ՂԱԼՈՒՄՅԱՆ, Ա. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶ

(դասախոսություններ)

ԵՐԿՐՈՐԴ ՄԱՍ

ԻՆՏԵԳՐԱԼ ԵՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՇԻՎ

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ - 2008

ՀՏԴ 517
ԳՄԴ 22.161
Ղ 249

Ղալումյան Ա. Գ., Սարգսյան Ա. Ս.
Ղ 249 Մաթեմատիկական անալիզ (դասախոսություններ), երկրորդ մաս.: - Եր.: ԵՊՀ-ի հրատ., 2008, 136 էջ:

Ձեռնարկում շարադրված է մաթեմատիկական անալիզի կարևոր բաժիններից որոշյալ (Ռիմանի) ինտեգրալը, պարամետրից կախված ինտեգրալները մի քանի փոփոխականների ֆունկցիաների դիֆերենցիալ հաշիվը: Նախատեսված է ԵՊՀ-ի և Իջևանի մասնաճյուղի, ինչպես նաև այլ բնագիտական ֆակուլտետների ուսանողների համար: Ձեռնարկը հանդիսանում է Ա. Գ. Ղալումյանի «Մաթեմատիկական անալիզ, առաջին մաս, մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դիֆերենցիալ հաշիվ» ձեռնարկի շարունակությունը և պահպանված են այնտեղ ընդունված բոլոր հիմնական նշանակումները:

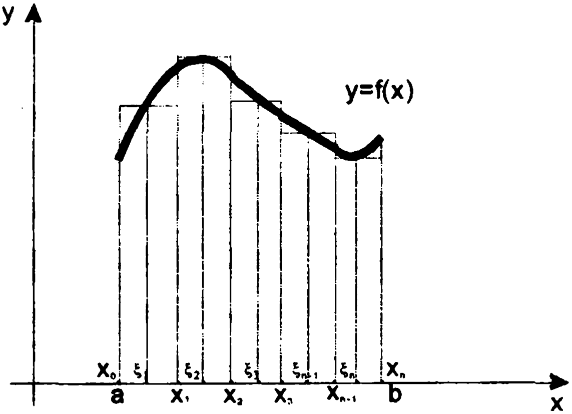
ԳՄԴ 22.161

ISBN 978-5-8084-0932-3

I ՈՐՈՇՅԱԼ ԻՆՏԵԳՐԱԼ

1. ՍԵՂԱՆԱԿԵՐՊԻ ՄԱԿԵՐԵՍԸ

Սահմանում 1: Դիցուք $[a;b]$ հատվածում տրված է f ոչ բացասական անընդհատ ֆունկցիա: Սեղանակերպ է կոչվում $x = a,\ x = b, y = 0$ ուղիղներով և $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$) անընդհատ ֆունկցիայի գրաֆիկով սահմանափակված (D) պատկերը (տես նկ. 1):



Նկ. 1

Սահմանում 2: $[a;b]$ հատվածի տրոհում ($T = T_{[a;b]}$) ասելով հասկանում ենք այդ հատվածի վերջավոր կետերի (տրոհման կետերի) բազմությունը, որտեղ *առկա են նաև ծայրակետերը*՝

$$T = \{x_k\}_{k=0}^{n}\ (a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b):$$

Այժմ փորձենք սահմանել սեղանակերպի մակերեսը: Դիտարկենք $[a;b]$ հատվածի որևէ $T = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ տրոհում: Ընտրենք կամայական $\xi_k \in [x_{k-1};x_k]$ $(k = 1,...,n)$ կետեր և սեղանակերպը մոտավորապես փոխարինենք $[x_{k-1};x_k]$ հիմքով և $f(\xi_k)$ բարձրությունով ուղղանկյուն-ների միավորումով $((\sigma))$, որի մակերեսն է՝

$$\sigma = \sigma_T(f,\xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot \Delta x_k \;,$$

որտեղ ξ - ն $(\xi(\xi_1,...\xi_n))$ վեկտոր է, իսկ Δx_k -ն k-րդ $([x_{k-1};x_k])$ հատվածի երկարությունն է $(\Delta x_k = x_k - x_{k-1} > 0)$: $\lambda = \lambda_T = \max_k \Delta x_k$ կոչվում է տրոհման տրամագիծ: Որքան շատ են և իրար մոտ են տրոհման x_k կետերը (փոքր է λ - ն), այնքան (σ) - ն քիչ է տարբեր-վում (D) սեղանակերպից:

Սեղանակերպի D մակերեսը սահմանենք որպես $\sigma_T(f,\xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot \Delta x_k$ գումարի սահման, երբ տրոհման տրամագիծը ձգտում է զրոյի ($D = \lim_{\lambda\to 0} \sigma_T(f,\xi)$): Նշված սահմանի իմաստը կպար-զաբանենք ստորև:

2. ՈՐՈՇՅԱԼ (ՌԻՄԱՆԻ[1]) ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ

Դիցուք f ֆունկցիան որոշված է $[a;b]$ - ում ($f:[a;b]\to \mathbf{R}$), $T = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ $[a;b]$ հատվածի որևէ տրոհում է: Վերցնենք $\forall \xi_k \in [x_{k-1};x_k]$ $(k = 1,...,n)$ և կազմենք $\sigma_T(f,\xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot \Delta x_k$ գումար, որը կոչվում է ինտեգրալային գումար: Այստեղ, և ստորև ամենուր $\xi(\xi_1,...\xi_n)$ -ն վեկտոր է, որի կոորդինատներն են՝ $\xi_k \in [x_{k-1};x_k]$, $k=1,...,n$:

Կասենք, որ՝ $\lim_{\lambda\to 0} \sigma_T(f,\xi) = I \in \mathbf{R}$, եթե՝

1° (հաջորդականության լեզվով) $\forall T_n = \{x_k^{(n)}\}_{k=0}^{m_n}$ տրոհումների

---

[1] Ռիման Գեորգ Ֆրիդրիխ Բերնհարդ (1826 -1866) գերմանացի մաթեմատիկոս:

հաջորդականության համար, որի տրամագծերի հաջորդականությունը $\lambda_n = \lambda_{T_n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ (T_n տրոհումների հիմնական հաջորդականություն) և

$\forall \xi_k^{(n)} \in \left[x_{k-1}^{(n)}; x_k^{(n)}\right]$ կետերի ընտրության դեպքում $\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{m_n} f\left(\xi_k^{(n)}\right) \cdot \Delta x_k^{(n)}$

թվային հաջորդականությունը զուգամիտում է I թվին ($(\sigma_n \underset{n\to\infty}{\to} I)$:

2° ((ε, δ) լեզվով) $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ այնպիսին, որ $\forall T = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ տրոհման համար, որի տրամագիծը $\lambda_T < \delta$ և $\forall \xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$ կետերի համար ճիշտ է $|\sigma_T(f,\xi) - I| < \varepsilon$ պայմանը:

Թեորեմ 1: 1° և 2° սահմանումները իրար համարժեք են:

Թեորեմը չենք ապացուցի, քանի որ այն ստացվում է նույն կերպ, ինչ համապատասխան փաստը ֆունկցիայի սահմանի երկու սահմանումների մասին:

Եթե գոյություն ունի վերը նշված $\lim\limits_{\lambda\to 0} \sigma_T(f,\xi) = I$ սահմանը, ապա այն կոչվում է որոշյալ կամ Ռիմանի ինտեգրալ, գրվում է $\int\limits_a^b f(x)dx$ և ֆունկցիան կոչվում է ինտեգրելի $(f \in \mathbf{R}[a;b])$:

Նկատենք, որ նշված սահմանումներում ինտեգրալային գումարի սահմանը կախված չէ ոչ տրոհումներից, ոչ էլ $\forall \xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$ կետերի ընտրությունից:

Օրինակ 1: Դիցուք՝ $f(x)$-ը հաստատուն է $f(x) \equiv M$ $(x \in [a;b])$, և $T = \{x_k\}_{k=0}^{n}$, $[a;b]$ հատվածի որևէ տրոհում է: Ինչպես էլ ընտրենք $\xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$ $(k=1,\ldots,n)$ կետերը, ունենք՝ $\sigma_T(f,\xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k =$

$= M \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta x_k = M(b-a) \underset{\lambda\to 0}{\to} M(b-a)$: Այսպիսով $f(x) \equiv M$ հաստատունը ինտեգրելի է և՝ $\boxed{\int\limits_a^b M\,dx = M(b-a)}$

Օրինակ 2: Դիցուք՝ $D : [a;b] \to \mathbf{R}$, $D(x) = 1$, երբ x -ը ռացիոնալ է և $D(x)=0$, երբ x-ը իռացիոնալ է (Դիրիխլեի ֆունկցիա[1]): Են-թադրենք՝ $T=\{x_k\}_{k=0}^{n}$ $[a;b]$ հատվածի որևէ տրոհում է: Ունենք՝ $\sigma_T(D,\xi)=\sum_{k=1}^{n}D(\xi_k)\cdot\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k=b-a$, երբ $\xi_k\in[x_{k-1};x_k]$, ξ_k-ն ռացիոնալ է (k=1,...,n) և $\sigma_T(D,\xi')=\sum_{k=1}^{n}D(\xi_k')\cdot\Delta x_k=0$, երբ $\xi_k'\in[x_{k-1};x_k]$, ξ_k'-ը իռացիոնալ է (k=1,...,n): Այստեղից հետևում է, որ $\sigma_T(D,\xi)$-ն չունի սահման, երբ $\lambda\to 0$, քանի որ այն կախված է ξ_k կետերի ընտրությունից:

3. ԻՆՏԵԳՐԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ԱՆՀՐԱԺԵՇՏ ՊԱՅՄԱՆԸ

Թեորեմ 1: Որպեսզի f ֆունկցիան, որոշված $[a;b]$ հատվածի վրա լինի ինտեգրելի ($f\in R[a;b]$) անհրաժեշտ է, որ այն լինի սահմանա-փակ: Այսինքն ֆունկցիայի ինտեգրելիությունից հետևում է նրա սահ-մանափակությունը:

Ապացույց: Տրված է՝ $f\in\mathbf{R}[a;b]$: Այսինքն՝ $\exists I\in\mathbf{R}$, որ $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0$, այնպիսին որ $\forall\ T=\{x_k\}_{k=0}^{n}$ տրոհման համար, որի տրամագիծը $\lambda_T<\delta$ և $\forall\xi_k\in[x_{k-1};x_k]$ կետերի համար ճիշտ է $|\sigma_T(f,\xi)-I|<\varepsilon$ պայմանը: Այստեղից հետևում է, որ վերը նշված տրոհ-ման համար $\sigma_T(f,\xi)$ ինտեգրալային գումարը, որպես ֆունկցիա $(\xi(\xi_1,...\xi_n))$-ից սահմանափակ է: Իրոք՝

$$|\sigma_T(f,\xi)|=|\sigma_T(f,\xi)-I+I|\le|\sigma_T(f,\xi)-I|+|I|<\varepsilon+|I|$$

$$\Rightarrow\ |\sigma_T(f,\xi)|<\varepsilon+|I|\ \ (\xi_k\in[x_{k-1};x_k]\ ,k=1,...,n,\lambda_T<\delta): \qquad (1)$$

Կատարենք հակասող ենթադրություն՝ f ֆունկցիան անսահմանա-փակ է $[a;b]$-ում: Ուրեմն, այն անսահմանափակ է $[x_{k-1};x_k]$ $(k=1,...,n)$

[1] Դիրիխլե Պետեր Գուստավ Լեժեն (1805 - 1859) գերմանացի մաթեմատիկոս:

հատվածներից գոնե մեկում: Որոշակիության համար, համարենք, որ f-ը անսահմանափակ է $[x_0;x_1]$ հատվածում: Յաստատագրենք՝ $\xi'_k \in [x_{k-1};x_k], k=2,...,n$ կետերը և $\sigma_T(f,\xi)$-ն ներկայացնենք հետևյալ կերպ՝ $\sigma_T(f,\xi) = f(\xi_1)\cdot\Delta x_1 + \sigma'_T$, որտեղ $\sigma'_T = \sum_{k=2}^{n} f(\xi'_k)\cdot\Delta x_k$ գումարը հաստատուն է: ξ_1-ի ընտրությամբ փորձենք ստանալ (1)-ի ժխտումը: Պարզ է, որ՝

$$\left|\sigma_T(f,\xi_k)\right| = \left|f(\xi_1)\cdot\Delta x_1 + \sigma'_T\right| \geq \left|f(\xi_1)\right|\cdot\Delta x_1 - \left|\sigma'_T\right|: \quad (2)$$

Ուրեմն, որպեսզի ստանանք (1) – ին հակասող անհավասարություն բավական է ցույց տանք, որ ξ_1- ի ընտրության շնորհիվ ճիշտ է $\left|f(\xi_1)\right|\cdot\Delta x_1 - \left|\sigma'_T\right| \geq \varepsilon + |I|$ անհավասարությունը, որը համարժեք է հետևյալին՝

$$\left|f(\xi_1)\right| \geq \frac{\left|\sigma'_T\right| + \varepsilon + |I|}{\Delta x_1} \quad (3)$$

Քանի որ f-ը անսահմանափակ է $[x_0;x_1]$-ում, ապա $\exists\, \xi_1 \in [x_0;x_1]$ այնպիսին, որ ճիշտ է (3) – ը:

(2), (3)-ից հետևում է՝ $\left|\sigma_T(f,\xi)\right| \geq \varepsilon + |I|$, որը հակասում է (1) –ին: Ստացված հակասությունը ապացուցում է պնդումը: ■

Դիտողություն 1: Թեորեմից հետևում է, որ անսահմանափակ ֆունկցիան չի կարող լինել ինտեգրելի: Մյուս կողմից, ոչ բոլոր սահմանափակ ֆունկցիաներն են ինտեգրելի: Օրինակ, Դիրիխլեի ֆունկցիան սահմանափակ է, բայց՝ ոչ ինտեգրելի (2., օր. 2)[1]:

Ուսումնասիրենք թե ո՞ր սահմանափակ ֆունկցիաներն են ինտեգրելի:

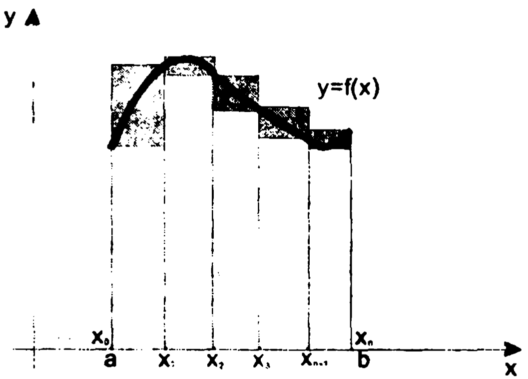
[1] (2., օր. 2) – նշակում է կետ 2 – ի օրինակ 2 – ը (այս գրելաձևը կպահպանվի և ստորև:)

4. ԴԱՐԲՈՒԻ[1] ԳՈՒՄԱՐՆԵՐԸ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Սահմանում 1: Դիցուք f-ը $[a;b]$ հատվածում որոշված սահմանափակ ֆունկցիա է և $T=\{x_k\}_{k=0}^{n}$ այդ հատվածի որևէ տրոհում է: Պարզ է, որ f-ը կլինի սահմանափակ $[x_{k-1};x_k]$ հատվածներից յուրաքանչյուրում: Ներմուծենք հետևյալ նշանակումները՝

$$M_k=\sup_{[x_{k-1};x_k]} f,\ m_k=\inf_{[x_{k-1};x_k]} f\ (k=1,...,n):$$

$S_T=\sum_{k=1}^{n} M_k\cdot\Delta x_k$ և $s_T=\sum_{k=1}^{n} m_k\cdot\Delta x_k$ մեծությունները կոչվում են Դարբուի համապատասխանաբար վերին և ստորին գումարներ: Այդ գումարները և նրանց տարբերությունը (ստվարագծված) անընդհատ, ոչ բացասական ֆունկցիայի դեպքում պատկերված են նկ. 2 –ում:



Նկ. 2

Պարզ է, որ Դարբուի գումարների տարբերությունը փոքրանում է, երբ փոքրանում է տրոհման տրամագիծը: Ստորև ցույց կտանք, որ այդ հատկության ճշգրտումը բերում է ինտեգրելիության անհրաժեշտ և բավարար պայմանին:

Դարբուի գումարները օժտված են հետևալ հատկություններով:

Հատկություն 1: Տվյալ $T=\{x_k\}_{k=0}^{n}$ տրոհման դեպքում՝

---

[1] Դարբու Ժան Գաստոն (1842 – 1917) ֆրանսիացի մաթեմատիկոս:

$$\sup_{\xi}\sigma_T(f,\xi)=S_T\ ,\ \ \inf_{\xi}\sigma_T(f,\xi)=s_T\ \ \left(\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)\right):$$

Ապացուցում: Քանի որ $M_k=\sup\limits_{[x_{k-1};x_k]} f$, իսկ $m_k=\inf\limits_{[x_{k-1};x_k]} f$, ապա $\forall\xi_k\in[x_{k-1};x_k]$:[1] $m_k\le f(\xi_k)\le M_k\quad (k=1,\ldots,n)$: Եթե, ստացված անհավասարությունները բազմապատկենք Δx_k դրական թվերով և գումարենք, կստանանք՝

$s_T\le\sigma_T(f,\xi)\le S_T$: (1)

Բացի այդ՝ $\forall\varepsilon>0,\exists\xi'_k\in[x_{k-1};x_k]$: $f(\xi'_k)>M_k-\dfrac{\varepsilon}{b-a}$: Որտեղից՝ $\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi'_k)\cdot\Delta x_k>\sum\limits_{k=1}^{n}M_k\cdot\Delta x_k-\dfrac{\varepsilon}{b-a}\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta x_k=S_T-\varepsilon\Rightarrow$

$$\sigma_T(f,\xi')>S_T-\varepsilon\ ,\ \xi'=(\xi'_1,\ldots,\xi'_n): \qquad (2)$$

(1), (2) –ից հետևում է, որ $\sup\limits_{\xi}\sigma_T(f,\xi)=S_T$: Մյուս պնդումը (ճշգրիտ ստորին եզրի մասին) ապացուցվում է նմանապես: ■

Դատողություն 2: Եթե տվյալ տրոհմանը ավելացվեն նույն հատվածի նոր, վերջավոր թվով տրոհման կետեր, ապա դրանից Դարբուի վերին գումարը չի մեծանա, իսկ ստորին գումարը չի փոքրանա:

Ապացուցում: Դիցուք $T=\{x_k\}_{k=0}^{n}$ տրոհման կետերին ավելացվել է նոր x' կետ, որը $[x_{k-1};x_k]$ $(k=1,\ldots,n)$ հատվածներից ինչ-որ մեկի ($[x_{i-1};x_i]$) ներքին կետ է: Առաջանում է նոր, $a=x_0<x_1<\ldots<x_{i-1}<$ $<x'<x_i<\ldots<x_n=b$ տրոհման կետերով T' տրոհում: Ապացուցենք, որ $S_{T'}\le S_T$: Քանի որ կամայական $A\subset B$ թվային, վերևից սահմանափակ բազմությունների համար ճիշտ է՝ $\sup A\le\sup B$, ապա՝

$$M'_i=\sup_{[x_{i-1};x']}f\le\sup_{[x_{i-1};x_i]}f=M_i\ ,\ \ M''_i=\sup_{[x';x_i]}f\le\sup_{[x_{i-1};x_i]}f=M_i:$$

Ուրեմն՝ $S_T-S_{T'}=M_i\cdot\Delta x_i-\left(M'_i\cdot(x'-x_{i-1})+M''_i\cdot(x_i-x')\right)\ge$ $\ge M_i(\Delta x_i-\Delta x_i)=0$:

---

[1] : սիմվոլը նշանակում է տեղի ունի [1]

Այսինքն՝ $S_{T'} \leq S_T$:

Եթե տվյալ տրոհմանը ավելացված են մեկից ավելի կետեր, ապա դա նույնն է, ինչ ավելացված լինի մի քանի մեկական կետ: Ամեն անգամ նոր կետի ավելացումը չի մեծացնի Դարբուի վերին գումարը, ուրեմն, ի վերջո, այն չի մեծանա: Համապատասխան փաստը Դարբուի ստորին գումարի մասին ապացուցվում է նմանապես: ■

Հատկություն 3: Դարբուի վերին գումարների բազմությունը սահմանափակ է ներքևից, իսկ ստորին գումարների բազմությունը՝ վերևից:

Ապացուցում: Նախ ապացուցենք, որ $[a;b]$ հատվածի ցանկացած երկու T', T'' տրոհումների համար ճիշտ է $s_{T'} \leq S_{T''}$ անհավասարությունը (այն ակնհայտ է նույն տրոհման համար): Դիցուք՝ $T = T' \bigcup T''$, այն $[a;b]$ հատվածի նոր տրոհում է, որը տարբերվում է T'-ից և T''-ից տրոհման նոր կետերով: Ուրեմն, ըստ հատկություն 2-ի՝ $s_{T'} \leq s_T \leq S_T \leq S_{T''} \Rightarrow s_{T'} \leq S_{T''}$: Այժմ հաստատագրենք $[a;b]$ հատվածի որևէ, նախապես կամայական կերպ ընտրված T_0 տրոհում և ընտրենք կամայական T տրոհում: Համաձայն ապացուցածի, ունենք՝ $S_T \geq s_{T_0}$: Այսպիսով Դարբուի վերին գումարների բազմությունը սահմանափակ է ներքևից s_{T_0} թվով: Ուրեմն՝ $\exists \inf\limits_T \{ S_T \}$, որը նշանակենք I^*-ով ($\inf\limits_T S_T = I^*$): I^*-ը կոչվում է Դարբուի վերին ինտեգրալ: Պարզ է, որ՝ $\forall T_0 \; : \; s_{T_0} \leq I^*$, այսինքն Դարբուի ստորին գումարների բազմությունը սահմանափակ է վերևից (I^*-ով): ■

Դիտողություն 1: Վերջինը նշանակում է, որ $\exists \sup\limits_T \{ s_T \}$, այն նշանակենք I_*-ով ($\sup\limits_T \{ s_T \} = I_*$): I_*-ը կոչվում է Դարբուի ստորին ինտեգրալ: Քանի որ I^*-ը $\{ s_T \}$ բազմության վերին եզր է, ապա՝ $I_* \leq I^*$: Այսպիսով, $\forall T$ տրոհման համար ունենք՝

$$s_T \leq I_* \leq I^* \leq S_T : \tag{3}$$

5. ԻՆՏԵԳՐԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ԱՆՀՐԱԺԵՇՏ և ԲԱՎԱՐԱՐ ՊԱՅՄԱՆԸ

Սահմանում 1: Դիցուք՝ $f:[a;b]\to\mathbf{R}$, f-ը սահմանափակ է $[a;b]$-ում, և $T=\{x_k\}_{k=0}^{n}$ $[a;b]$ հատվածի որևէ տրոհում է: Կասենք, որ $\lim\limits_{\lambda_T\to 0}(S_T-s_T)=0$, եթե՝

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0,\ \forall T\ \lambda_T<\delta:\ S_T\text{-}s_T<\varepsilon:$$

Թեորեմ 1: Որպեսզի $[a;b]$ հատվածի վրա սահմանափակ ֆունկցիան լինի ինտեգրելի ($f\in R[a;b]$) անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա Դարբուի գումարների տարբերությունը ձգտի զրոյի, երբ տրոհման տրամագիծը ձգտում է զրոյի:

Ապացուցում: Անհրաժեշտություն: Տրված է՝ $f\in R[a;b]$, այսինքն՝ $\exists I\in\mathbf{R}$, $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0,\ \forall T=\{x_k\}_{k=0}^{n}$, տրոհման համար,որի տրամագիծը $\lambda_T<\delta$, $\forall\xi_k\in[x_{k-1};x_k]$: $|\sigma_T(f,\xi)-I|<\dfrac{\varepsilon}{2}$: Որտեղից հետևում է՝

$$I\text{-}\frac{\varepsilon}{2}<\sigma_T(f,\xi)<I+\frac{\varepsilon}{2}: \qquad (1)$$

Օգտվելով Դարբուի գումարների հատկ. 1-ից և հաշվի առնելով այն, որ $I-\dfrac{\varepsilon}{2}$-ը և $I+\dfrac{\varepsilon}{2}$-ը $\{\sigma_T(f,\xi)\}$ բազմության համապատասխանաբար ստորին և վերին եզրերն են (փոփոխականները ξ_k կետերն են), կստանանք՝

$$I-\frac{\varepsilon}{2}\le s_T\le S_T\le I+\frac{\varepsilon}{2}: \qquad (2)$$

(2) –ից հետևում է՝ $S_T-s_T\le I+\dfrac{\varepsilon}{2}-\left(I-\dfrac{\varepsilon}{2}\right)=\varepsilon$, երբ $\lambda_T<\delta$: Դա նշանակում է՝ որ $\lim\limits_{\lambda_T\to 0}(S_T-s_T)=0$:

Բավարարություն: Տրված է՝ $\lim\limits_{\lambda_T \to 0}(S_T - s_T) = 0$: Այսինքն՝

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0,\ \forall T = \{x_k\}_{k=0}^{n},\ \lambda_T < \delta\ :\ S_T\text{-}s_T < \varepsilon$: Ըստ 4., դիտ. 1-ի՝ $s_T \le I_* \le I^* \le S_T$, որտեղից՝ $0 \le I^* - I_* \le S_T - s_T < \varepsilon$: Ստացվեց, որ՝ $\forall \varepsilon > 0 : 0 \le I^* - I_* < \varepsilon$ և, ուրեմն $I^* = I_* = I$: Այսպիսով՝ $s_T \le I \le S_T$ և՝ $\forall \xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$: $s_T \le \sigma_T(f,\xi) \le S_T$: Ուրեմն՝ $|\sigma_T(f,\xi) - I| \le S_T\text{-}s_T < \varepsilon$, երբ $\lambda_T < \delta$: Դա նշանակում է՝ $f \in R[a;b]$: ■

Դիտողություն 1: Եթե $f \in R[a;b]$, ապա (տես (2)) ստանում ենք՝

$$\lim_{\lambda_T \to 0} S_T = \lim_{\lambda_T \to 0} s_T = I = \int_a^b f(x)dx :$$

Դարբուի գումարների հատկությունների ավելի խորը ուսումնասիրությունը (տես խնդ.1) թույլ է տալիս ապացուցել հետևյալ (ավելի պարզ)՝

Թեորեմ 2: Որպեսզի $[a;b]$ հատվածում սահմանափակ ֆունկցիան լինի ինտեգրելի ($f \in R[a;b]$) անհրաժեշտ է և բավարար, որ՝

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists\ \ T = T_{[a;b]}\ \ :\ \ S_T - s_T < \varepsilon : \qquad (3)$$

Ակնհայտ է, որ Դարբուի գումարների տարբերության զրոյի ձգտելուց (երբ տրոհման տրամագիծը ձգտում է զրոյի) հետևում է (3) –ը: Ճիշտ է նաև հակառակը (տես խնդ. 2):

Խնդիր 1: Դիցուք՝ $f\ :\ [a;b] \to R$, f -ը սահմանափակ է $[a;b]$ -ում ($\sup\limits_{[a;b]} f = M$, $\inf\limits_{[a;b]} f = m$), և $T = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ $[a;b]$ հատվածի որևէ տրոհում է: Ենթադրենք, այդ տրոհմանը ավելացրել ենք նոր p հատ կետ (ստացված տրոհումը նշանակենք T'): Ապացուցել, որ՝ $0 \le S_T - S_{T'} \le p \cdot \lambda_T \cdot (M\text{-}m)$, $0 \le s_{T'} - s_T \le p \cdot \lambda_T \cdot (M - m)$ (տես [4]):

Խնդիր 2: Ապացուցել, որ թեորեմներ 1-ը և 2-ը իրար համարժեք են:

Այժմ կարող ենք պատասխանել այն հարցին, թե ո՞ր սահմանափակ ֆունկցիաներն են ինտեգրելի: Նախ ձևափոխենք f ֆունկցիայի Դարբուի գումարների տարբերությունը: Նշանակենք՝ $\omega_k(f)=\omega_k=M_k-m_k$: Oգտվելով ճշգրիտ եզրերի հայտնի հատկություններից, ստանում ենք՝

$$\omega_k=M_k-m_k=\sup_{\xi\in[x_{k-1};x_k]}\{f(\xi)\}-\inf_{\eta\in[x_{k-1};x_k]}\{f(\eta)\}=$$

$$=\sup_{\xi\in[x_{k-1};x_k]}\{f(\xi)\}+\sup_{\eta\in[x_{k-1};x_k]}\{-f(\eta)\}=\sup_{\xi,\eta\in[x_{k-1};x_k]}\{f(\xi)-f(\eta)\}=$$

$$=\sup_{\xi,\eta\in[x_{k-1};x_k]}|f(\xi)-f(\eta)|:$$

Այսպիսով՝

$$\omega_k=M_k-m_k=\sup_{\xi,\eta\in[x_{k-1};x_k]}|f(\xi)-f(\eta)|: \qquad (1)$$

$\omega_k=\omega_k(f)$-ը կոչվում է f ֆունկցիայի տատանում k-րդ ($[x_{k-1};x_k]$) հատվածում:

Թեորեմ 1: Հատվածի վրա անընդհատ ֆունկցիան ինտեգրելի է ($f\in C[a;b]\Rightarrow f\in R[a;b]$):

Ապացուցում: Ըստ Կանտորի թեորեմի, f-ը հավասարաչափ անընդհատ է $[a;b]$-ում [1]: Այսինքն՝

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta(\varepsilon)>0,\ \forall\xi,\eta\in[a;b],|\xi-\eta|<\delta:\ |f(\xi)-f(\eta)|<\frac{\varepsilon}{b-a}:$$

Վերցնելով $[a;b]$ $(a<b)$ հատվածի այնպիսի $T=\{x_k\}_{k=0}^{n}$ տրոհում, որի տրամագիծը $\lambda_T<\delta$ և հաշվի առնելով նաև (1)-ը, կստանանք:

$$S_T-s_T=\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k\le\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k=\varepsilon \quad (\lambda_T<\delta\Rightarrow|\xi-\eta|<\delta,\text{ երբ}$$

$\xi,\eta\in[x_{k-1};x_k]$): Ուրեմն՝ $\omega_k=\sup_{\xi,\eta\in[x_{k-1};x_k]}|f(\xi)-f(\eta)|\le\frac{\varepsilon}{b-a}$): Այսպիսով՝ $\lim_{\lambda_T\to0}(S_T-s_T)=0\Rightarrow f\in R[a;b]$: ■

Թեորեմ 2: Հատվածի վրա մոնոտոն ֆունկցիան ինտեգրելի է:

Ապացուցում: Տրված է՝ $f:[a;b]\to\mathbf{R}$, f-ը մոնոտոն է $[a;b]$-ում: Դիցուք, որոշակիության համար f-ը մոնոտոն չնվազող է: Ուրեմն՝ $\forall x\in[a;b]: f(a)\le f(x)\le f(b)\Rightarrow f$-ը սահմանափակ է $[a;b]$-ում: Նկատենք, որ՝ $x_{k-1}\le\xi\le x_k\Rightarrow f(x_{k-1})\le f(\xi)\le f(x_k)\Rightarrow M_k=\max\limits_{[x_{k-1};x_k]}f=f(x_k)$, $m_k=\min\limits_{[x_{k-1};x_k]}f=f(x_{k-1})$:

Եթե՝ $f(a)=f(b)$, ապա f-ը հաստատուն է, որի ինտեգրելիությունը ապացուցված է (տես 2., օր.1): Մնում է քննարկել $f(a)<f(b)$ դեպքը: Վերցնենք $\forall\varepsilon>0$ և ընտրենք δ- ն այնպես, որ՝ $0<\delta<\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$: Դիցուք՝ $T=\{x_k\}_{k=0}^n$, $\lambda_T<\delta$: Այդ դեպքում՝

$$S_T-s_T=\sum_{k=1}^n[M_k-m_k]\cdot\Delta x_k\le\lambda_T\cdot\sum_{k=1}^n[f(x_k)-f(x_{k-1})]<$$
$$<\delta\cdot[f(x_1)-f(x_0)+f(x_2)-f(x_1)+\ldots+f(x_n)-f(x_{n-1})]<$$
$$<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}[f(b)-f(a)]=\varepsilon:$$

Ուրեմն՝ $\lim\limits_{\lambda_T\to0}(S_T-s_T)=0\Rightarrow f\in R[a;b]$: ■

Սահմանում 1: Կասենք որ $X\ (X\subset\mathbf{R})$ բազմությունը ունի զրո չափ, եթե՝ $\forall\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի (Δ_k) բաց միջակայքերի բազմություն, վերջավոր կամ հաշվելի, այնպիսին, որ՝ $\bigcup\limits_k(\Delta_k)\supset X$ և $\sum\limits_k\Delta_k<\varepsilon$, որտեղ Δ_k-ն (Δ_k) միջակայքի երկարությունն է: Այն դեպքում, երբ միջակայքերի բազմությունը հաշվելի է, ապա, ըստ սահմանման՝ $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\Delta_k=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta_k$:

Օրինակ 1: Ցույց տալ, որ դատարկ բազմությունը $(X=\varnothing)$ ունի զրո չափ (ինքնուրույն):

Օրինակ 2: Ցույց տանք, որ վերջավոր $(X=\{x_k\}_{k=1}^n)$ բազմությունը ունի զրո չափ: $\forall\varepsilon>0$ թվի համար $(\Delta_k)(k=1,...,n)$ բաց միջակայքե-

րը ընտրենք այնպես, որ՝ $x_k\in(\Delta_k)$, $\Delta_k<\dfrac{\varepsilon}{n}$ $(k=1,...,n)$: Պարզ է,

որ՝ $\bigcup\limits_{k=1}^{n}(\Delta_k)\supset X$ և $\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta_k<\varepsilon$: Ուրեմն X-ը ունի զրո չափ:

Օրինակ 3: Ցույց տանք, որ հաշվելի $(X=\{x_k\}_{k=1}^{\infty})$ բազմությունը ունի զրո չափ: $\forall\varepsilon>0$ թվի համար $(\Delta_k)(k\in N)$ բաց միջակայքերը ընտրենք այնպես, որ՝

$$x_k\in(\Delta_k)\ ,\ \Delta_k<\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\quad (k\in N\ ,):\ \text{Ունենք՝}\ \bigcup_{k=1}^{\infty}(\Delta_k)\supset X\ \text{և}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Delta_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Delta_k\le\frac{\varepsilon}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}=\frac{\varepsilon}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon:$$

Թեորեմ 3 (Լեբեգի[1]): Որպեսզի հատվածի վրա սահմանափակ ֆունկցիան լինի ինտեգրելի անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա խզումների բազմությունը ունենա զրո չափ:

Թեորեմը չենք ապացուցի (այն հենված է չափի տեսության վրա [5], [6]):

Դիտողություն 1: Նախորդ օրինակներից (1-3) և թեորեմ 3-ից հետևում է: 1) Հատվածի վրա խզման կետեր չունեցող (անընդհատ) ֆունկցիան ինտեգրելի է:

2) Եթե հատվածի վրա սահմանափակ ֆունկցիան ունի վերջավոր թվով խզման կետեր, ապա այն ինտեգրելի է:

3) Եթե հատվածի վրա սահմանափակ ֆունկցիան ունի հաշվելի թվով խզման կետեր, ապա այն ինտեգրելի է:

Գոյություն ունեն զրո չափի անվերջ, ոչ հաշվելի բազմություններ: Դա նշանակում է, որ ֆունկցիան կարող է լինել ինտեգրելի և ունենալ անվերջ, ոչ հաշվելի (զրո չափի) խզման կետերի բազմություն (տես [6]):

---

[1] Լեբեգ Հանրի (1875 - 1941)՝ ֆրանսիացի մաթեմատիկոս:

7. ԻՆՏԵԳՐԵԼԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԵՎ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Թեորեմ 1: Եթե $f,g \in R[a;b]$, ապա՝ $\alpha \cdot f + \beta \cdot g \in R[a;b]$ (α,β-ն իրական թվեր են) և՝

$$\int_a^b (\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx : \tag{1}$$

Ապացույց: Դիցուք $T = \{x_k\}_{k=0}^n$ $[a;b]$ հատվածի որևէ տրոհում է և $\xi_k \in [x_{k-1};x_k]$, $k = 1,...,n$: Ակնհայտ է, որ

$$\sigma_T((\alpha \cdot f + \beta \cdot g),\xi) = \alpha \cdot \sigma_T(f,\xi) + \beta \cdot \sigma_T(g,\xi) : \tag{2}$$

Անցնելով սահմանի (2) –ի մեջ, երբ տրոհման տրամագիծը՝ $\lambda_T \to 0$, կստանանք (1) –ը: ■

Սահմանում 1: Եթե $f \in R[a;b]$ $(a < b)$, ապա համարվում է նաև, որ $f \in R[b;a]$ և՝ $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$: Ըստ սահմանման նաև՝

$$\int_a^a f(x)dx = 0 :$$

Թեորեմ 2: Եթե $f \in R[a;b]$, ապա՝ $f \in R[a;c] \cap R[c;b]$ $(a < c < b)$ և հակառակը՝ $f \in R[a;c] \cap R[c;b] \Rightarrow f \in R[a;b]$: Ընդ որում $f \in R[a;b]$-ից հետևում է, որ՝

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx : \tag{3}$$

Ապացույց: Եթե $f \in R[a;b]$, ապա ըստ 5., թ. 1-ի՝ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$, $\forall\ T_{[a;b]} = \{x_k\}_{k=0}^n$, $\lambda_T < \delta$: $S_{T_{[a;b]}} - s_{T_{[a;b]}} < \varepsilon$: Տրոհումն ընտրենք նաև այնպես, որ $c \in T_{[a;b]}$: Այդ դեպքում, $T_{[a;b]}$ տրոհումը առաջացնում է $T'_{[a;c]}$ և $T''_{[c;b]}$ տրոհումներ և՝ $T_{[a;b]} = T'_{[a;c]} \cup T''_{[c;b]}$: Քանի որ Դարբուի գումարների տարբերությունը ոչ բացասական անդամների գումար է, ապա պարզ է, որ՝ $S_{T'_{[a;c]}} - s_{T'_{[a;c]}} \le S_{T_{[a;b]}} - s_{T_{[a;b]}} < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{T'_{[a;c]}} - s_{T'_{[a;c]}} < \varepsilon$: Նույն կերպ ստանում ենք, որ $S_{T''_{[c;b]}} - s_{T''_{[c;b]}} < \varepsilon$, որտեղից հետևում է, որ $f \in R[a;c] \cap R[c;b]$ (տես 5., թ.2):

Այժմ ենթադրենք $f \in R[a;c] \cap R[c;b]$: Ուրեմն, համաձայն 5., թ.2-ի՝ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists T'_{[a;c]} \; : \; S_{T'_{[a;c]}} - s_{T'_{[a;c]}} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ և $\exists T''_{[c;b]} \; : \; S_{T''_{[c;b]}} - s_{T''_{[c;b]}} < \dfrac{\varepsilon}{2}$: Այստեղից, եթե նշանակենք՝ $T_{[a;b]} = T'_{[a;c]} \cup T''_{[c;b]}$, կստանանք՝

$S_{T_{[a;b]}} - s_{T_{[a;b]}} = S_{T'_{[a;c]}} - s_{T'_{[a;c]}} + S_{T''_{[c;b]}} - s_{T''_{[c;b]}} < \varepsilon$: Ուրեմն, համաձայն նույն 5., թ.2-ի ստանում ենք՝ $f \in R[a;b]$:

Այժմ ապացուցենք (3)-ը: Ենթադրենք, որ $f \in R[a;b]$ և դիտարկենք $[a;b]$ հատվածի տրոհումների հիմնական հաջորդականություն $T^{(n)}_{[a;b]} = \left\{ x_k^{(n)} \right\}_{k=0}^{m_n}$ (տրամագծերի հաջորդականությունը անվերջ փոքր է), այնպիսին, որ $c \in T^{(n)}{}_{[a;b]}$: Այդ դեպքում ստացվում են $T'^{(n)}_{[a;c]}$ և $T''^{(n)}_{[c;b]}$ տրոհումների հիմնական հաջորդականություններ: Ընտրենք $\forall \xi_k^{(n)} \in \left[x_{k-1}^{(n)}; x_k^{(n)}\right]$ $(k = 1,\dots,n)$ և հաշվի առնենք, որ՝

$$\sigma_{T^{(n)}_{[a;b]}} = \sigma_{T'^{(n)}_{[a;c]}} + \sigma_{T''^{(n)}_{[c;b]}} : \qquad (4)$$

Անցնելով (4) –ում սահմանի, երբ n- ը ձգտում է անվերջի (ըստ ապացուցածի, (4) –ի բոլոր երեք գումարները ունեն սահման), ստանում ենք (3) – ը: ■

Դիտողություն 1: Թեորեմ 2 - ի պնդումը մնում է ուժի մեջ, անկախ a, b, c կետերի փոխդասավորությունից: Իրոք, դիցուք, որոշակիության համար՝

$c < b < a$: Ըստ ապացուցածի, եթե $f \in R[c;a]$, ապա $f \in R[c;b] \cap R[b;a]$ և՝

$\int\limits_c^a f(x)dx = \int\limits_c^b f(x)dx + \int\limits_b^a f(x)dx$: Օգտվելով սահմանում 1-ից, կստանանք՝

$$-\int_a^c f(x)dx = \int_c^b f(x)dx - \int_a^b f(x)dx$$: Այստեղից նորից ստանում ենք (3) –ը:

Թեորեմ 3: Եթե $f \in R[a;b]$, ապա $|f| \in R[a;b]$ և $a<b$ դեպքում ճշմարիտ է հետևյալ գնահատականը՝ $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$: (5)

Ապացույց: Դիտարկենք $[a;b]$ հատվածի որևէ $T=\{x_k\}_{k=0}^n$ տրոհում: Տեղի ունեն հետևյալ գնահատականները՝ $\forall \xi_k, \eta_k \in [x_{k-1};x_k]$:

$$\left||f(\xi_k)|-|f(\eta_k)|\right| \le |f(\xi_k)-f(\eta_k)| \le \sup_{[x_{k-1};x_k]} |f(\xi_k)-f(\eta_k)| = \omega_k(f):$$

Այստեղից՝ $\omega_k(|f|) = \sup_{[x_{k-1};x_k]} \left||f(\xi_k)|-|f(\eta_k)|\right| \le \omega_k(f) \quad \Rightarrow S_T(|f|)-$ $-s_T(|f|) \le S_T(f) - s_T(f)$: Հաշվի առնելով, որ f –ը ինտեգրելի է և, ուրեմն՝ $S_T(f)-s_T(f) \underset{\lambda\to 0}{\to} 0$, ստանում ենք՝

$$\lim_{\lambda_T\to 0}\left(S_T(|f|)-s_T(|f|)\right)=0 \Rightarrow |f| \in R[a;b]:$$

Այժմ, (5)–ը ստանալու համար վերցնենք կամայական $\xi_k \in [x_{k-1};x_k]$ $(k=1,...,n)$ և գնահատենք՝

$$\left|\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\cdot \Delta x_k\right| \le \sum_{k=1}^n |f(\xi_k)|\cdot \Delta x_k : \qquad (6)$$

Անցնելով (6) –ի մեջ սահմանի, երբ տրոհման տրամագիծը ձգտում է զրոյի, կստանանք (5) –ը: ■

Դիտողություն 1: Հեշտ է տեսնել, որ a,b կետերի կամայական փոխդասավորության դեպքում (5)-ը ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \left|\int_a^b |f(x)|dx\right|: \qquad (7)$$

Թեորեմ 4: Եթե $f \in R[a;b]$ $(a<b)$ և $\forall x \in [a;b]: f(x) \ge$

$\geq 0\left(f(x)\leq 0\right)$, ապա՝ $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0 \left(\int\limits_a^b f(x)dx \leq 0\right)$:

Թեորեմի ապացույցը անմիջապես հետևում է ինտեգրալի սահմանումից և սահմանի համապատասխան հատկությունից:

Խնդիր 1: Դիցուք $f \in R[a;b]$ $(a<b)$ և $\forall x \in [a;b]$: $f(x)>0$: Ապացուցենք, որ $\int\limits_a^b f(x)dx > 0$:

Լուծում: Կատարենք հակասող ենթադրություն՝ $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$: Այդ դեպքում $\lim\limits_{\lambda\to 0} S_T = \int\limits_a^b f(x)dx = 0$: Վերցնենք որևէ զրոյի ձգտող դրական թվերի հաջորդականություն, օրինակ $\varepsilon_n = {}^1\!/_n$: Քանի որ $\lim\limits_{\lambda\to 0} S_T = \int\limits_a^b f(x)dx = 0$, ապա $\exists$ $[a;b]$ հատվածի այնպիսի T_1 տրոհում, որ $S_{T_1} < \varepsilon_1 \cdot (b\text{-}a)$: Այդ դեպքում, T_1 տրոհմանը համապատասխան M_k ճշգիտ եզրերից գոնե մեկը կլինի փոքր ε_1-ից (հակառակ դեպքում, եթե $\forall k=1,\ldots,n$: $M_k \geq \varepsilon_1$, ապա՝ $S_{T_1} = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k \geq \varepsilon_1 \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta x_k = \varepsilon_1 (b\text{-}a)$): Այլ կերպ ասած՝ $\exists$ $[a_1;b_1] \subset [a;b]$ $(a_1 < b_1)$, $\forall x \in [a_1;b_1]$: $f(x) < \varepsilon_1$: Ընդ որում, եթե հարկավոր է փոքրացնելով $[a_1;b_1]$ հատվածի չափսերը, կարելի է համարել, որ $b_1 - a_1 < \frac{b\text{-}a}{2}$: Քանի որ $0 = \int\limits_a^b f(x)dx = $

$= \int\limits_a^{a_1} f(x)dx + \int\limits_{a_1}^{b_1} f(x)dx + \int\limits_{b_1}^{b} f(x)dx$ և աջ մասի երեք գումարելիներն էլ ոչ բացասական են, ապա նրանցից յուրաքանչյուրը հավասար է

զրոյի, մասնավորապես՝ $\int_{a_1}^{b_1} f(x)dx = 0$: Նույն կերպ դատելով, ստանում ենք՝ $\exists\, [a_2;b_2]$ $(0 < b_2 - a_2 < \frac{b-a}{2^2})$, $\forall x \in [a_2;b_2]$: $f(x) < \varepsilon_2$ և՝ $\int_{a_2}^{b_2} f(x)dx = 0$: Շարունակելով նույն կերպ, ստանում ենք $\{[a_n;b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ ներդրված հատվածների հաջորդականություն, այնպիսին որ՝
$\forall n \in \mathbf{N}: 0 < b_n - a_n < \frac{b-a}{2^n}$ $(\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0)$, $\int_{a_n}^{b_n} f(x)dx = 0$ և
$\forall x \in [a_n;b_n]$: $0 < f(x) < \varepsilon_n$ $(n = 1,2,...)$: Ըստ ներդրված հատվածների հաջորդականության հատկության գոյություն ունի c կետ, պատկանող հատվածներից յուրաքանչյուրին: Այդ կետի համար նույնպես՝ $0 < f(c) < \varepsilon_n$ $(n = 1,2,...)$, որն անհնար է, քանի որ $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$:

Խնդիր 2: Ապացուցել, որ եթե՝ $f \in R[a;b]$ $(a < b)$,
$\forall x \in [a;b]$: $f(x) \geq 0$, $\exists x_0 \in [a;b]$, $f(x_0) > 0$ և f-ը անընդհատ է x_0 կետում, ապա՝ $\int_a^b f(x)dx > 0$ (ինքնուրույն):

Թեորեմ 5 (անհավասարումը ինտեգրելու մասին): Եթե՝ $f, g \in R[a;b]$ $(a < b)$, $\forall x \in [a;b]$: $f(x) \leq g(x)$, ապա՝ $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$:

Ապացուցում: Թեորեմի պայմաններից հետևում է՝ $f - g \in R[a;b]$, $f(x) - g(x) \leq 0$: Թեորեմներ 1, 4-ից ստանում ենք՝

$$0 \geq \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx \Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx \leq$$

$$\leq \int_a^b g(x)\, dx: \qquad \blacksquare$$

Թեորեմ 6: Ինտեգրելի ֆունկցիաների արտադրյալը ինտեգրելի է:

Ապացուցում: Քանի որ $f,g \in R[a;b]$, ապա այդ ֆունկցիաները սահմանափակ են՝ $\exists A,B \in \mathbf{R}, \forall x \in [a;b]: |f(x)| \le A, |g(x)| \le B$: Դիցուք $T = \{x_k\}_{k=0}^{n}$-ն $[a;b]$ հատվածի որևէ տրոհում է և, որոշակիության համար՝ $a < b$: $\forall \xi,\eta \in [x_{k-1};x_k]$ կետերի համար ճիշտ են հետևյալ գնահատականները՝

$$|f(\xi)\cdot g(\xi) - f(\eta)\cdot g(\eta)| =$$

$$= |(f(\xi)\cdot g(\xi) - f(\xi)\cdot g(\eta)) + (f(\xi)\cdot g(\eta) - f(\eta)\cdot g(\eta))| \le$$

$$\le |f(\xi)|\cdot|g(\xi)-g(\eta)| + |g(\eta)|\cdot|f(\xi)-f(\eta)| \le A\cdot\omega_k(g) + B\cdot\omega_k(f):$$

Այստեղից ստանում ենք՝

$$\forall \xi,\eta \in [x_{k-1};x_k] : |f(\xi)\cdot g(\xi) - f(\eta)\cdot g(\eta)| \le A\cdot\omega_k(g) + B\cdot\omega_k(f):$$

և, ուրեմն՝

$$\omega_k(f\cdot g) = \sup_{\xi,\eta\in[x_{k-1};x_k]} |f(\xi)\cdot g(\xi) - f(\eta)\cdot g(\eta)| \le$$

$$\le A\cdot\omega_k(g) + B\cdot\omega_k(f) \quad (k=1,...,n):$$

Բազմապատկելով ստացված անհավասարությունները դրական Δx_k-ով և գումարելով, ստանում ենք՝

$$S_T(f\cdot g) - s_T(f\cdot g) \le A\cdot[S_T(g) - s_T(g)] + B\cdot[S_T(f) - s_T(f)]: \qquad (8)$$

Անցնելով (8)-ի մեջ սահմանի, երբ տրոհման տրամագիծը ձգտում է զրոյի և հաշվի առնելով f,g ֆունկցիաների ինտեգրելիությունը, կստանանք՝ $\lim\limits_{\lambda_T \to 0}[S_T(f\cdot g) - s_T(f\cdot g)] = 0$ և, ուրեմն՝ $f\cdot g \in R[a;b]$: ■

Թեորեմ 7 (միջինի մասին): Դիցուք $f,g \in R[a;b]$ $(a<b)$, $g(x)$ ֆունկցիան ունի որոշակի նշան: f-ը, լինելով ինտեգրելի, սահմանափակ է, այսինքն՝ $\exists M, m \in \mathbf{R}, \forall x \in [a;b] : m \le f(x) \le M$: Այդ դեպքում՝

$$\exists \mu \in [m;M] : \int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = \mu\cdot\int_a^b g(x)\,dx: \qquad (9)$$

Ապացուցում: Դիցուք, որոշակիության համար՝ $\forall x \in [a;b] : g(x) \ge 0$: Հաշվի առնելով թեորեմներ 5,6-ը, կստանանք՝

$m\cdot g(x)\le f(x)\cdot g(x)\le M\cdot g(x)$, որտեղից՝

$$m\int_a^b g(x)\,dx\le\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx\le M\cdot\int_a^b g(x)\,dx: \qquad (10)$$

Եթե՝ 1) $\int_a^b g(x)dx=0$, ապա (10)-ից $\Rightarrow\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx=0$: Ուրեմն, (9)-ը ճիշտ է:

Եթե՝ 2) $\int_a^b g(x)dx>0$, ապա, բաժանելով (10)-ը $\int_a^b g(x)dx$-ի վրա, կստանանք՝

$m\le\mu\le M$, որտեղ նշանակել ենք $\mu=\dfrac{\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$: Այստեղից հետևում է (9)-ը:

Դիտողություն 1: Երբ $g(x)\le 0$, ապա (9)-ը նորից ճշմարիտ է (դատողություններում նշանը փոխվում է երկու անգամ, արդյունքում մնալով նույնը): Եթե $a\ge b$, ապա, ըստ ապացուցածի (9)-ը ճիշտ է, երբ $b\le a$ ($a=b$ դեպքը ակնհայտ է), մնում է այդ հավասարության երկու կողմը բազմապատկել -1 - ով:

Դիտողություն 2: Այն մասնավոր դեպքում, երբ $f\in C[a;b]$, ըստ Բոլցանո- Կոշիի թեորեմի՝ $\exists\xi\in[a;b]$: $f(\xi)=\mu$, ուստի (9)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx=f(\xi)\cdot\int_a^b g(x)dx \quad (\xi\in[a;b]) \qquad (11)$$

Եթե, իր հերթին՝ $g(x)\equiv 1$, ապա (11)-ից ստանում ենք՝

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)\cdot(b-a) \quad (\xi\in[a;b]): \qquad (12)$$

(12)-ը ունի պարզ երկրաչափական իմաստ՝ սեղանակերպի մակերեսը հավասար է որոշակի ($[a;b]$ հիմքով և $f(\xi)$ բարձրությամբ) ուղղանկյան մակերեսին:

8. ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ՍԱՀՄԱՆՆԵՐՈՎ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Սահմանում 1: Դիցուք՝ $f \in R[a;b]$: Ըստ 7. ք.2-ի՝ $\forall x \in [a;b]$: $f \in R[a;x] \cap R[x;b]$: Այսպիսով «ծնվում» են հետևյալ ֆունկցիաները՝ $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, $G(x)=\int_x^b f(t)dt$, որոնք կոչվում են համապատասխանաբար փոփոխական վերին և ստորին սահմանով ինտեգրալներ: Ուսումնասիրենք նրանց հատկությունները:

Թեորեմ 1: Եթե $f \in R[a;b]$, ապա $F,G \in C[a;b]$:

Ապացուցում: Վերցնենք $\forall x_0 \in [a;b]$ և նրան տանք h $(h \neq 0)$ աճ, այնպիսին, որ $x_0+h \in [a;b]$: Այդ դեպքում F-ը ստանում է $\Phi(h)=\Delta F(x_0)=F(x_0+h)-F(x_0)$ աճ, ընդ որում՝ $\Phi(h)=$

$$=\int_a^{x_0+h} f(x)dx-\int_a^{x_0} f(x)dx=\int_a^{x_0} f(x)dx+\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx-\int_a^{x_0} f(x)dx=$$

$$=\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx:$$

Այստեղ, հաշվի առանք 7., ք.2-ը և դիտ.1-ը: Քանի որ f-ը ինտեգրելի է, ուրեմն այն սահմանափակ է՝ $\exists M>0, \forall x \in [a;b]$: $|f(x)| \le M$: Կամայական $\varepsilon>0$ թվի համար $\delta(\varepsilon)$-ը և h-ը ընտրենք այնպես, որ $0<\delta<\dfrac{\varepsilon}{M}$ և $0<|h|<\delta$: Կստանանք՝ $|\Phi(h)|=\left|\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx\right| \le$

$$\le\left|\int_{x_0}^{x_0+h} |f(x)|\,dx\right| \le M\cdot\left|\int_{x_0}^{x_0+h} dx\right|=M\cdot|h|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$$ (տես 7., ք.3, դիտ. 1):

Դա նշանակում է, որ՝ $\lim\limits_{h\to 0}\Phi(h)=\lim\limits_{h\to 0}\Delta F(x_0)=0$: Այսինքն F-ը անընդհատ է $[a;b]$ հատվածի կամայական x_0 կետում, ուրեմն՝ $F \in C[a;b]$: Թեորեմի պնդումը G ֆունկցիայի համար ապացուցվում է նույն կերպ: ■

Թեորեմ 2: Եթե $f \in C[a;b]$, ապա $F,G \in C^1[a;b]$ և $\forall x \in [a;b]$: $F'(x)=f(x), G'(x)=-f(x)$:

Ապացուցում: Ընտրենք $\forall x_0 \in [a;b]$ և նրան տանք $h \neq 0$ աճ, այնպիսին, որ $x_0+h \in [a;b]$: Քանի որ f - ը անընդհատ է x_0 - ում, ապա՝ $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ \forall x, |x-x_0|<\delta : |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$: Կամայական h $(0<|h|<\delta)$ աճի համար, ըստ 7., թեորեմ 7- ի (միջինի մասին) ունենք (տես նաև 7., (12))՝ $\frac{1}{h}\cdot\Delta F(x_0)=\frac{1}{h}\cdot\int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt =$ $=\frac{1}{h}\cdot f(\xi)\cdot h=f(\xi)$ $(\xi \in [x_0;x_0+h])$: Քանի որ $|\xi-x_0|\le|h|<\delta$, ապա $|f(\xi)-f(x_0)|<\varepsilon$ և, ուրեմն՝ $\lim\limits_{h\to 0} f(\xi)=f(x_0)$: Այստեղից հետևում է, որ՝ $\exists F'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\Delta F(x_0)}{h}=f(x_0)$: Քանի որ x_0-ն կամայական է, ուստի՝ $\forall x \in [a;b]$: $F'(x)=f(x)\in C[a;b] \Rightarrow F \in C^1[a;b]$: Թեորեմի պնդումը G ֆունկցիայի համար ապացուցվում է նույն կերպ: ■

Հետևանք 1: $[a;b]$ հատվածում անընդհատ f ֆունկցիան ունի նախնական, օրինակ՝ $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$, $-G(x)=-\int\limits_x^b f(t)dt$:

9. ՈՐՈՇՅԱԼ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ՀԱՇՎՄԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐ

Թեորեմ 1 (Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևը): Եթե $f \in C[a;b]$ և $\Phi(x)$-ը $f(x)$-ի որևէ նախնական է (տես 8., հետ.1) ապա ճշմարիտ է հետևյալ (Նյուտոն -Լայբնիցի) բանաձևը՝

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \Phi(x)\Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)} \qquad (1)$$

Ապացույց: 8., թ.2-ից հետևում է, որ $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ -ը $f(x)$-ի նախնականն է, ուրեմն $\Phi(x)$-ը տարբերվում է $F(x)$ - ից որոշակի M հաստատունով՝ $\Phi(x) \equiv F(x) + M$: Այստեղից՝

$$\Phi(b) - \Phi(a) = F(b) + M - F(a) - M =$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^a f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow (1): \blacksquare$$

Թեորեմ 2 (փոփոխականի փոխարինում): Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a;b]$ - ում, $x = \varphi(t)$ ֆունկցիան բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝ $\varphi \in C^1[\alpha;\beta]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ և արժեքների բազմությունը դուրս չի գալիս $[a;b]$ - ից ($E(\varphi) \subset [a;b]$): Այս դեպքում՝

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt: \qquad (2)$$

Ապացույց: Դիցուք $F(x)$-ը $f(x)$-ի որևէ նախնականն է՝ $F'(x) \equiv f(x)$ $(x \in [a;b])$: Թեորեմի պայմաններից հետևում է, որ $[\alpha;\beta]$ հատվածում որոշված է $\Phi(t) = F(\varphi(t))$ բարդ ֆունկցիան և, հեշտ է տեսնել, որ այն $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ ֆունկցիայի նախնականն է: Իրոք՝ $\Phi'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$: Օգտվելով Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևից, ստանում ենք՝

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt=\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)=$$

$$=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx:$$

Այստեղից հետևում է (2)-ը: ■

Թեորեմ 3 (մասերով ինտեգրում): Եթե՝ $U(x),V(x)\in C^1[a;b]$, ապա ճիշտ է հետևյալ (մասերով ինտեգրման) բանաձևը՝

$$\boxed{\int_a^b U\cdot dV=(U\cdot V)\Big|_a^b-\int_a^b V\cdot dU}: \tag{3}$$

Ապացուցում: Ինտեգրելով $(U(x)\cdot V(x))'\equiv U'(x)\cdot V(x)+V'(x)\cdot U(x)$ առնչության երկու կողմը, և հաշվի առնելով Նյուտոն- Լայբնիցի բանաձևը, կստանանք՝ $(U(x)\cdot V(x))\Big|_a^b=\int_a^b V(x)\cdot dU(x)+\int_a^b U(x)\cdot dV(x)$:

Որտեղից հետևում է (3)-ը: ■

Օրինակ 1: Հաշվել $I=\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx\ (a>0)$: Կատարենք փոփոխականի փոխարինում՝ $t=t(x)=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$, $x=a\sin t$, $dx=a\cos t\cdot dt$, $t(0)=0$, $t(a)=\frac{\pi}{2}$: Արդյունքում, կստանանք՝

$$I=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\frac{a^2}{2}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\,d2t\Big)$$

$$=\frac{a^2}{2}\Big(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\Big)=\frac{\pi a^2}{4}:$$

Օրինակ 2: Հաշվել $I=\int_0^a\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}\ (a\neq 0)$: Մասերով ինտեգրման միջոցով իջեցնենք հայտարարի աստիճանը:

$$I=\frac{1}{a^2}\int_0^a\frac{a^2+x^2-x^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx=\frac{1}{a^2}\int_0^a\frac{dx}{x^2+a^2}-$$

$$-\frac{1}{2a^2}\int_0^a x\cdot\left(x^2+a^2\right)^{-2}\cdot d\left(x^2+a^2\right)=\frac{1}{a^2}\int_0^a\frac{dx}{x^2+a^2}+\frac{1}{2a^2}\int_0^a x\cdot d\frac{1}{x^2+a^2}=$$

$$=\frac{1}{a^2}\int_0^a\frac{dx}{x^2+a^2}+\frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2}\bigg|_0^a-\frac{1}{2a^2}\int_0^a\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{2a^2}\int_0^a\frac{dx}{x^2+a^2}+\frac{1}{2a^2}\frac{a}{2a^2}=$$

$$\frac{1}{2a^3}\int_0^a\frac{d\frac{x}{a}}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}+\frac{1}{4a^3}=\frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\bigg|_0^a+\frac{1}{4a^3}=\frac{\pi}{8a^3}+\frac{1}{4a^3}=\frac{\pi+2}{8a^3};$$

II ՈՐՈՇՅԱԼ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

1. ԿՈՐԻ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅՈՒՆ

Կան կորի տարբեր սահմանումներ: Կտանք կորի սահմանումը ըստ Ժորդանի[1]:

Սահմանում 1: Դիցուք տրված են $x = x(t), y = y(t)$ $[\alpha;\beta]$ հատվածի վրա որոշված և անընդհատ ֆունկցիաներ: $(l) = \{(x(t), y(t))\ ; t \in [\alpha;\beta]\}$ բազմությունը կոչվում է անընդհատ հարթ կոր (ժորդանյան կոր), տրված պարամետրական տեսքով, t-ն կոչվում է պարամետր: $M_0(x(t_0), y(t_0))$ $(t_0 \in [\alpha;\beta])$ -ն կոչվում է (l) կորի կետ: Հարթության $A(x(\alpha), y(\alpha))$ և $B(x(\beta), y(\beta))$ կետերը կոչվում են (l)-ի ծայրակետեր: Ասում են, որ (l) կորը միացնում է A -ն B -ին:

Եթե (l) կորը $y \in C[a;b]$ ֆունկցիայի գրաֆիկն է, ապա ասում են, որ կորը տրված է բացահայտ տեսքով՝ $(l) = \{(x, y(x))\ ; x \in [a;b]\}$: Բացահայտ տեսքով տրված կորը կարելի դիտել, որպես պարամետրական (պարամետրը $t = x$ – ն է) տեսքով տրված կոր:

Սահմանում 2: $(l) = \{(x(t), y(t)); t \in [\alpha;\beta]\}$ անընդհատ կորը կոչվում է պարզ, եթե պարամետրի տարբեր արժեքներին համապատասխանում են կորի տարբեր կետեր՝ $t_1 \neq t_2 \Rightarrow (x(t_1), y(t_1)) \neq \neq (x(t_2), y(t_2))$ (կորն իրեն իրեն չի հատում): Կորը կոչվում է փակ, եթե պարզ լինելու պայմանը խախտվում է միայն ծայրակետերում՝ $A = B$: Նկատենք, որ բացահայտ տեսքով տրված կորը միշտ պարզ է անկախ $y(x)$ ֆունկցիայից, քանի որ՝ $x_1 \neq x_2 \Rightarrow (x_1, f(x_1)) \neq (x_2, f(x_2))$: Պարզ (l) կորի դեպքում առկա է փոխմիարժեք արտապատկերում (l) և $[\alpha;\beta]$ բազմությունների միջև: Դա նշանակում է, որ $[\alpha;\beta]$ հատվածի

---

[1] Ժորդան Մարի Էննոն Կամիլ (1838 - 1922) - ֆրանսիացի մաթեմատիկոս:

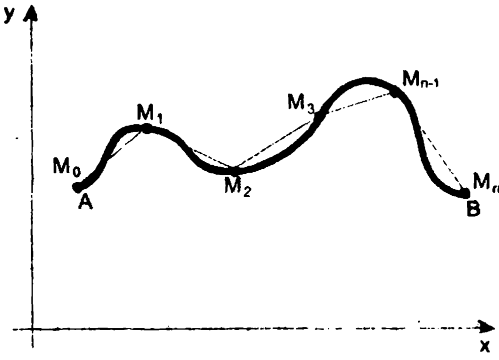
յուրաքանչյուր $T_{[\alpha;\beta]} = \{t_k\}_{k=0}^{n}$ տրոհում առաջացնում է (l) կորի $\{M_k(x(t_k), y(t_k))\}_{k=0}^{n}$ տրոհում $(M_0 = A, M_n = B)$ և՝ հակառակը:

Դիցուք տրված են անընդհատ պարզ $(l) = \{(x(t), y(t)); t \in [\alpha;\beta]\}$ կոր, և $T_{[\alpha;\beta]} = \{t_k\}_{k=0}^{n}$ $[\alpha;\beta]$ հատվածի որևէ տրոհում: $[M_{k-1};M_k]$ հատվածների միավորումը $(\sigma_T) = \sum_{k=1}^{n}[M_{k-1};M_k]$ կոչվում է բեկյալ, ներգծված (l) կորին (տես նկ. 3):

Նրա երկարությունը σ_T-ն կլինի՝

$$\sigma_T = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{\left(x(t_k)-x(t_{k-1})\right)^2+\left(y(t_k)-y(t_{k-1})\right)^2}\,: \qquad (1)$$

Սահմանում 3: Եթե գոյություն ունի $l = \lim\limits_{\lambda_T \to 0} \sigma_T$, ապա (l) կորը կոչվում է ուղղելի, իսկ l-ը՝ կորի երկարություն:



Նկ.3

Թեորեմ 1: Դիցուք՝ $x(t), y(t) \in C^1[\alpha;\beta]$ $(\alpha<\beta)$, $(l) = \{(x(t), y(t)); t \in [\alpha;\beta]\}$-ը պարզ կոր է: Այս դեպքում կորը ուղղելի է, և՝

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt: \qquad (2)$$

Ապացուցում: Կիրառելով Լագրանժի թեորեմը $x(t), y(t)$ ֆունկցիաների նկատմամբ, դիտարկված $[t_{k-1};t_k]$ միջակայքերում, կստանանք՝ $x(t_k)-x(t_{k-1})=x'(\tau_k)$, $y(t_k)-y(t_{k-1})=y'(\tau_k^*)$, որտեղ $\tau_k,\tau_k^*\in(t_{k-1};t_k)$ և, ընդհանրապես ասած, իրարից տարբեր են $\tau_k\neq\tau_k^*$: Ուրեմն, ներգծյալ բեկյալի երկարության համար (տես (1)) կստանանք՝ $\sigma_T=\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(x'(\tau_k))^2+(y'(\tau_k^*))^2}\,\Delta t_k$: Եթե նշանակենք $\sigma_T^*=\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(x'(\tau_k^*))^2+(y'(\tau_k^*))^2}\,\Delta t_k$, և հաշվի առնելով, որ $f(t)=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}$ ֆունկցիան անընդհատ $t[\alpha;\beta]$ հատվածում, կունենանք՝

$$\exists\lim_{\lambda_T\to 0}\sigma_T^*=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt: \qquad (3)$$

Ապացուցենք, որ՝ $\lim\limits_{\lambda_T\to 0}(\sigma_T-\sigma_T^*)=0$, ենթադրելով, որ $\forall k: x'(\tau_k)\neq x'(\tau_k^*)$: Իրոք՝

$$|\sigma_T-\sigma_T^*|\leq\sum_{k=1}^{n}\left|\sqrt{(x'(\tau_k))^2+(y'(\tau_k^*))^2}-\sqrt{(x'(\tau_k^*))^2+(y'(\tau_k^*))^2}\right|\cdot\Delta t_k\leq$$

$$\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{\left|\sqrt{(x'(\tau_k))^2+(y'(\tau_k^*))^2}^{\,2}-\sqrt{(x'(\tau_k^*))^2+(y'(\tau_k^*))^2}^{\,2}\right|}{\sqrt{(x'(\tau_k))^2+(y'(\tau_k^*))^2}+\sqrt{(x'(\tau_k^*))^2+(y'(\tau_k^*))^2}}\Delta t_k=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\left|x'(\tau_k^*)-x'(\tau_k)\right|\cdot\left|x'(\tau_k^*)+x'(\tau_k)\right|}{\sqrt{(x'(\tau_k))^2+(y'(\tau_k^*))^2}+\sqrt{(x'(\tau_k^*))^2+(y'(\tau_k^*))^2}}\cdot\Delta t_k \le$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\left|x'(\tau_k^*)\right|+\left|x'(\tau_k)\right|\right)\cdot\left|x'(\tau_k^*)-x'(\tau_k)\right|}{\left|x'(\tau_k^*)\right|+\left|x'(\tau_k)\right|}\cdot\Delta t_k=\sum_{k=1}^{n}\left|x'(\tau_k^*)-x'(\tau_k)\right|\cdot\Delta t_k : \quad (4)$$

Քանի որ, $x'(t)\in C[\alpha;\beta]$, ապա այն հավասարաչափ անընդհատ է՝

$\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta(\varepsilon)>0$, $\forall t,\tau\in[\alpha;\beta]$, $|t-\tau|<\delta$: $|x'(t)-x'(\tau)|<\dfrac{\varepsilon}{\beta-\alpha}$: **Այժմ**

$T_{[\alpha;\beta]}=\{t_k\}_{k=0}^{n}$ **տրոհումը ընտրենք այնպես, որ $\lambda_T<\delta$: Այստեղից հետևում է, որ**

$$\left|\tau_k^*-\tau_k\right|<\delta\ (k=1,...,n)\ \Rightarrow\ \left|x'(\tau_k^*)-x'(\tau_k)\right|<\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}\ \ (k=1,...,n):$$

Ուրեմն, հաշվի առնելով (4)-ը, ստանում ենք՝

$$\left|\sigma_T-\sigma_T^*\right|<\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}\cdot\sum_{k=1}^{n}\Delta t_k=\varepsilon\ \Rightarrow\ \lim_{\lambda_T\to 0}\left(\sigma_T-\sigma_T^*\right)=0: \quad (5)$$

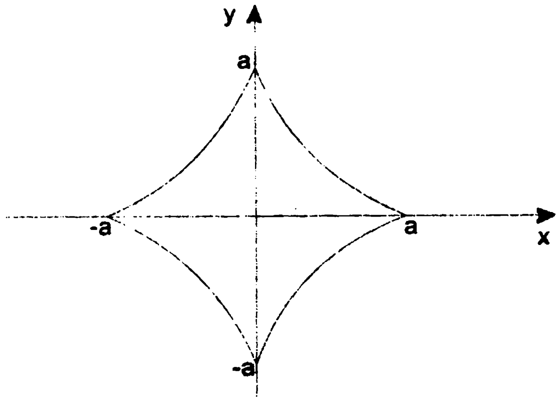
(3), (5)-ից հետևում է $\displaystyle\lim_{\lambda_T\to 0}\sigma_T=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt=l$: ■

Դիտողություն 1: **Երբ կորը տրված է $y=y(x)$ $(y\in C^1[a;b])$, բացահայտ տեսքով (այն կարելի դիտել, որպես պարամետրական տեսքով տրված կոր՝ $x=t, y=f(t)$ $(t\in[a;b])$), ապա կորի երկարությունը որոշվում է հետևյալ կերպ՝** $l=\displaystyle\int_a^b\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx$:

Դիտողություն 2: **Եթե, բավարարված են թեորեմ1-ի պայմանները և կորի պարզ լինելու պայմանը խախտված է միայն $[\alpha;\beta]$ հատվածի ծայրակետերում (փակ կորի դեպքը), ապա վերցնելով այդ կորի վրա երկու կամայական կետ, այն կտրոհենք երկու պարզ կորերի: Ամբողջ կորի երկարությունը, ըստ սահմանման հավասար է առանձին մասերի երկարությունների գումարին: Գրելով յուրաքանչյուրի երկարությունը ինտեգրալի միջոցով և հաշվի առնելով ինտեգրալի ադիտիվ հատկությունը ինտեգրման տիրույթի նկատմամբ, ի վերջո կստանանք, որ**

պարզ փակ կորի երկարությունը որոշվում է նույն (2) բանաձևով:

Օրինակ 1: Հաշվենք աստղակերպի՝ $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\ (a>0)$ երկարությունը (տես նկ. 4):



Նկ. 4

Աստղակերպը կարելի է ներկայացնել պարամետրական տեսքով՝ $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t\ \left(t\in[0;2\pi]\right)$: Հաշվի առնելով կորի համաչափությունը առանցքների նկատմամբ, կստանանք՝

$$l=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(3\cos^2 t\cdot\sin t\right)^2+\left(3\sin^2 t\cdot\cos t\right)^2}\,dt=12a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2 t\cdot\sin^2 t}\,dt=$$

$$=3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,d2t=-3a\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=6a:$$

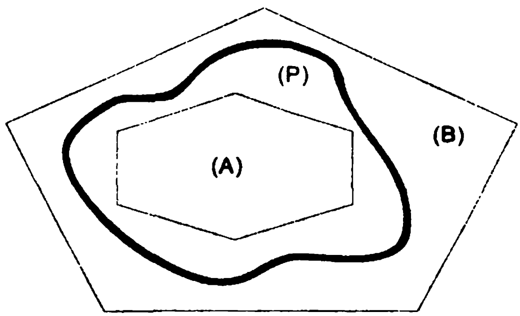
Սահմանում 4: Դիցուք $x,y,z\in C[\alpha;\beta]$, $(l)=\{\,(x(t),y(t),z(t));\ t\in[\alpha;\beta]\,\}$ կոչվում է անընդհատ տարածական կոր: Այն կոչվում է պարզ, եթե պարամետրի տարբեր արժեքներին համապատասխանում են կորի տարբեր կետեր: Կորի երկարությունը սահմանվում է այնպես, ինչպես հարթ կորի դեպքում: Նույն կերպ ինչ թեորեմ 1-ը ապացուցվում է հետևյալ՝

Թեորեմ 2: Դիցուք՝ $x,\ y,z\in C^1[\alpha;\beta]\ (\alpha<\beta)$,

$(l)=\{(x(t),y(t),z(t));t\in[\alpha;\beta]\}$-ը պարզ կոր է: Այս դեպքում կորը ուղղելի է, և՝ $l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt$:

2. ՊԱՏԿԵՐԻ ՄԱԿԵՐԵՍ

Արդեն ծանոթ ենք սեղանակերպի մակերեսի խնդրին (տես I.,1.): Այժմ ընդհանրացնենք մակերեսի գաղափարը: Դիցուք տրված է պարզ, փակ, հարթ, ուղղելի Ժորդանյան ((l)) կոր): Ժորդանը ապացուցել է, որ այդպիսի կորը հարթությունը տրոհում է երկու, տիմանափակ ((P)) և անսահմանափակ մասերի (հարթ բազմությունը (պատկերը), կոչվում է սահմանափակ, եթե գոյություն ունի այն պարունակող շրջան):



Նկ.5

Փակ բեկյալով սահմանափակված պատկերը կանվանենք բազմանկյուն: Դիցուք (P)-ն (ինչպես արդեն նշել էինք) սահմանափակ պատկեր է: (A) բազմանկյունը կոչվում է ներգծված (P) - ին, եթե $(A)\subset(P)$ և՝ արտագծած (P)-ին, եթե $(A)\supset(P)$: Այստեղ, և ստորև ամենուր, առանց փակագծի նշվում է փակագծով գրված բազմության չափը, օրինակ (A) բազմանկյան չափը՝ A - ն (A)-ի մակերեսն է (հայտնի է տարրական մաթեմատիկայից): Նշանակենք $\{(A)\}$- ով (P)-ին ներգծված, իսկ $\{(B)\}$-ով՝ արտագծած բոլոր բազմանկյունների բազմությունները: Դիտարկենք ներգծված և արտագծած բազմանկյունների մակերեսների $\{A\},\{B\}$ բազմությունները: $\{A\}$-ն սահմանափակ է վերևից, օրինակ որևէ արտագծած (B_0) բազմանկյան B_0 մակերեսով՝ $\forall A : A \le B_0$: Այստեղից հետևում է, որ $\exists \sup\{A\}$, որը նշանակենք P_*-ով և անվանենք (P)-ի ստորին մակերես): Պարզ է, որ $\forall B_0 \in \{B\} : B_0 \ge P_*$: Ուրեմն $\{B\}$ բազմությունը սահմանափակ է ներքևից (օրինակ, P_*-ով): Հետևաբար՝ $\exists \inf\{B\}$, այն նշանակենք P^*-ով և անվանենք վերին մակերես: Պարզ է, որ $P_* \le P^*$:

Սահմանում 1: Եթե (P) պատկերի վերին և ստորին մակերեսները իրար հավասար են $P_* = P^* = P$, ապա պատկերը կոչվում է **քառակուսելի** իսկ P-ն՝ **մակերես**: Եթե $P_* < P^*$, ապա պատկերը կոչվում է ոչ քառակուսելի: Այդպիսի պատկերների օրինակներ կան (տես [2]):

Թեորեմ 1: Որպեսզի (P) պատկերը լինի քառակուսելի անհրաժեշտ է և բավարար որ $\forall \varepsilon > 0 \exists (A),(B) : B - A < \varepsilon$:

Ապացուցում: Անհրաժեշտություն: Տրված է, որ (P)-ն քառակուսելի է, այսինքն $P_* = P^* = P$: Օգտվելով այն բանից, որ $\sup\{A\} = \inf\{B\} = P$, ստանում ենք $\exists (A),(B) : A > P - \varepsilon/2,\ B < P + \varepsilon/2 \Rightarrow B - A < \varepsilon$:

Բավարարություն: Տրված է, որ $\forall \varepsilon > 0 \exists (A),(B) : B - A < \varepsilon$: Ունենք նաև՝ $A \le P_* \le P^* \le B$, որտեղից ստանում ենք, որ $\forall \varepsilon > 0 : 0 \le P^* - P_* \le B - A < \varepsilon \Rightarrow P_* = P^* = P$: Այսինքն (P)-ն քառակուսելի է: ■

Թեորեմ 2: Որպեսզի (P) պատկերը լինի քառակուսելի, անհրաժեշտ է և բավարար որ $\forall \varepsilon > 0 \exists (P_1) \subset (P), (P_2) \supset (P) : P_2 - P_1 < \varepsilon$, որտեղ (P_1)-ը և (P_2)-ը քառակուսելի պատկերներ են: Թեորեմի ապացույցը հենվում է նախորդի վրա:

Սահմանում 2: Կասենք, որ (l) անընդհատ փակ կորը, որը սահմանափակում է (P) պատկերը, ունի զրո չափ, եթե

$$\forall \varepsilon > 0 \exists (A),(B) : B - A < \varepsilon:$$

Այսպիսով, (P)-պատկերի քառակուսելիությունը համարժեք է նրա (l) եզրագծի զրո չափ ունենալուն (տես թ. 1):

Խնդիր 1: Ապացուցել, որ ժորդանյան, պարզ,փակ, ուղղելի կորը ունի զրո չափ (նրանով սահմանափակված պատկերը քառակուսելի է):

Թեորեմ 3: $x=a, x=b, y=0$ ուղիղներով և $y=f(x)$ $(f\in C[a;b], f(x)\geq 0)$ ֆունկցիայի գրաֆիկով սահմանափակված (D) սեղանակերպը քառակուսելի է և նրա մակերեսը՝ $D=\int_a^b f(x)dx$:

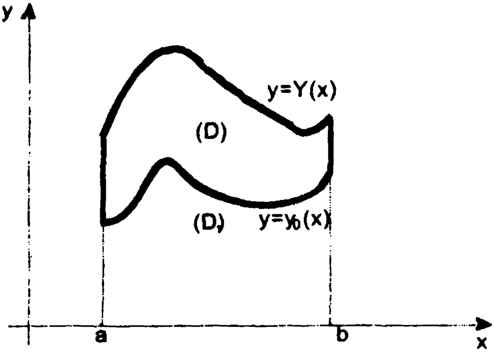
Ապացուցում: Քանի որ f-ը ինտեգրելի է, ապա $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0, \forall\ T=\{x_k\}_{k=0}^{n}, \lambda_T<\delta: 0\leq S_T-s_T<\varepsilon$: Բայց s_T-ն (D)-ին ներգծված բազմանկյան (ուղղանկյունների միավորման) մակերեսն է, իսկ S_T- ն (D)-ին արտագծած բազմանկյան մակերեսն է (նկ. 2): Այստեղից ստացվում է (D) պատկերի քառակուսելիությունը: Ունենք նաև $s_T\leq D\leq S_T$, որտեղից անցնելով սահմանի, երբ $\lambda_T\to 0$ կստանանք $D=\lim\limits_{\lambda\to 0}S_T=\lim\limits_{\lambda\to 0}s_T=\int_a^b f(x)\,dx$: ■

Եթե պատկերը ներկայացվում է վերջավոր թվով քառակուսելի մասերի միավորումով (տարբերությունով), ապա, ըստ սահմանման այդ պատկերը քառակուսելի է և մակերեսը հավասար է առանձին մասերի մակերեսների գումարին (տարբերությանը):

Դիտարկենք ավելի ընդհանուր տեսքի սեղանակերպ պատկեր սահմանափակված $x=a, x=b$ ուղիղներով և $y=y_0(x)$, $y=Y(x)$ ($y_0(x), Y(x)\in C[a;b], Y(x)\geq y_0(x)$) ֆունկցիաների գրաֆիկներով (տես նկ. 6): Ենթադրենք (D_1)-ը այն սեղանակերպն է, որը սահմանափակված է $x=a, x=b, y=0$ ուղիղներով և $y=y_0(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկով, իսկ (D_2)-ը սեղանակերպ է, սահմանափակված $x=a$, $x=b$, $y=0$ ուղիղներով և $y=Y(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկով: Այդ դեպքում՝ $(D_2)=(D_1)\cup(D)$: Ըստ սահմանման, համապատասխան մակերեսները կլինեն՝ $D_2=D_1+D$ ((D)-ն քառակուսելի, քանի որ հանդիսանում է քառակուսելի պատկերների տարբերություն): Ուրեմն՝

$$D = D_2 - D_1 = \int_a^b Y(x)\,dx - \int_a^b y_0(x)\,dx = \int_a^b [Y(x) - y_0(x)]\,dx:$$

Այսպիսով՝ $D = \int_a^b [Y(x) - y_0(x)]dx$:



Նկ. 6

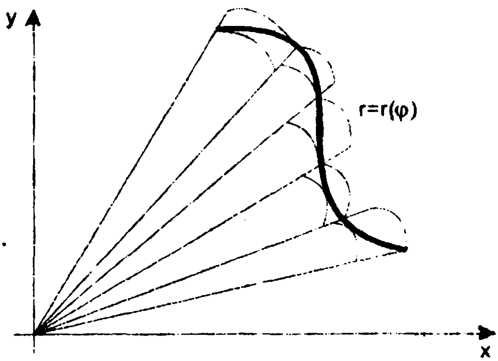
Օրինակ 1: Հաշվել $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$ $(a > 0, b > 0)$ էլիպսի մակերեսը: էլիպսը սահմանափակված է $x = -a, x = a$ ուղիղներով և $y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ $(|x| \le a)$ անընդհատ ֆունկցիաների գրաֆիկներով: Հաշվի առնելով էլիպսի համաչափությունը առանցքների նկատմամբ, ստանում ենք՝ $S = 4b\int_0^a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx$: Անցնենք նոր՝ $t = \arcsin\frac{x}{a}$ $(x = a\sin t, dx = a\cos t\,dt)$ փոփոխականի, կստանանք՝ $S = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt =$

$= 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\,dt = \pi ab + ab\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab$: Շրջանի դեպքում, երբ

$a=b$, ստանում ենք հայտնի, $S=\pi a^2$ բանաձևը:

Թեորեմ 4: Դիցուք տրված է $r=r(\varphi)$ $(r\in C[\alpha;\beta], r(\varphi)\geq 0, \alpha<\beta)$ ֆունկցիա: Այն, բևեռային համակարգում որոշում է $x=r(\varphi)\cdot\cos\varphi$, $y=r(\varphi)\cdot\sin\varphi$ անընդհատ պարզ կոր: Այդ դեպքում, $\varphi=\alpha, \varphi=\beta$ ճառագայթներով և $r=r(\varphi)$ անընդհատ պարզ կորով սահմանափակված ((P)) պատկերը քառակուսելի է և $P=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi$:

Ապացուցում: Դիտարկենք կամայական $T_{[\alpha;\beta]}=\{\varphi_k\}_{k=0}^{n}$ տրոհում և կատարենք նշանակումներ՝ $f(\varphi)=\frac{1}{2}r^2(\varphi)$, $m_k=\min\limits_{[\varphi_{k-1};\varphi_k]} f$, $M_k=\max\limits_{[\varphi_{k-1};\varphi_k]} f\ (k=1,...,n)$: Պարզ է, որ $s_T=\sum\limits_{k=1}^{n} m_k\Delta\varphi_k$, $S_T=\sum\limits_{k=1}^{n} M_k\Delta\varphi_k$ գումարները հանդիսանում են $f(\varphi)=\frac{1}{2}r^2(\varphi)$ ֆունկցիայի համար Դարբուի համապատասխանաբար ստորին և վերին գումարներ (տես նկ. 7):



Նկ. 7

Այդ գումարները իրենցից ներկայացնում են (P)- ին համապատասխանաբար ներգծված և արտագծած սեկտորների միավորումների մակերեսները (տարրական մաթեմատիկայից հայտնի է, որ r շառավղով և ռադիաններով չափված α անկյունով սեկտորի մակերեսը հավասար է $\frac{1}{2}r^2\varphi$): Քանի, որ f-ը ինտեգրելի է ($f\in C[\alpha;\beta]$), ապա

$$\forall\varepsilon>0\,\exists T_{[\alpha;\beta]}\ :\ S_{T_{[\alpha;\beta]}}-s_{T_{[\alpha;\beta]}}<\varepsilon$$

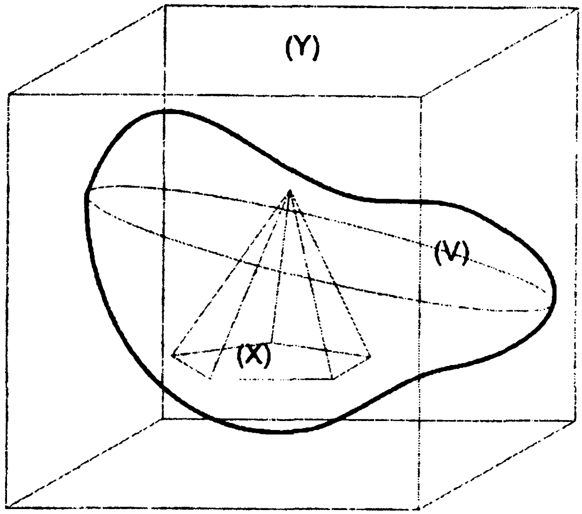
Այստեղից հետևում է նշված պատկերի քառակուսելիությունը և, քանի որ $s_{T_{[\alpha;\beta]}}\le P\le S_{T_{[\alpha;\beta]}}$, ապա $P=\lim\limits_{\lambda\to0}s_{T_{[\alpha;\beta]}}=\lim\limits_{\lambda\to0}S_{T_{[\alpha;\beta]}}=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}r^2(\varphi)d\varphi$:

3. ՄԱՐՄՆԻ ԾԱՎԱԼ

Տարածական կետերի բազմությունը կանվանենք մարմին: (V) մարմինը կանվանենք սահմանափակ, եթե գոյություն ունի այն պարունակող գունդ,:

Նշանակենք $\{(X)\}$- ով բոլոր ներգծված ($(X)\subset(V)$), իսկ $\{(Y)\}$-ով բոլոր արտագծած $(Y)\supset(V)$ բազմանիստերի (բազմանիստերի միավորումների) բազմությունները (տես նկ. 8): Առանց փակագծի կնշանակենք համապատասխան բազմության չափը (ծավալը): Դիտարկենք ներգծված և արտագծած բազմանիստերի մակերեսների $\{X\},\{Y\}$ բազմությունները: $\{X\}$-ը սահմանափակ է վերևից, օրինակ որևէ արտագծած (Y_0) բազմանիստի Y_0 մակերեսով՝ $\forall X\ :\ X\le Y_0$: Այստեղից հետևում է, որ $\exists\sup\{X\}$, այն նշանակենք V_* ($\sup\{X\}=V_*$) և անվանենք ստորին ծավալ: Պարզ է, որ $\forall Y_0\ :\ Y_0\ge V_*$: Ուրեմն $\{(Y)\}$ բազմությունը սահմանափակված է ներքևից (օրինակ, V_*-ով): Հետևաբար՝ $\exists\inf\{(Y)\}$, այն նշանակենք V^* ($\inf\{Y\}=V^*$) և անվանենք վերին ծավալ: Ակնհայտ է, որ՝ $V_*\le V^*$:

Սահմանում 1: (V) մարմինը կոչվում է խորանարդելի, եթե $V_*=V^*=V$, իսկ V-ն կոչվում է այդ մարմնի ծավալ:



Նկ. 8

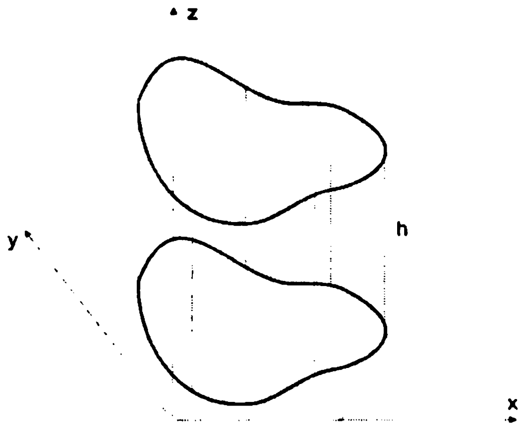
Թեորեմ 1: Որպեսզի (V) մարմինը լինի խորանարդելի անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\forall\varepsilon > 0, \exists(X),(Y) : 0 \le Y - X < \varepsilon$:

Թեորեմի ապացույցը նույն է, ինչ 2. ք.1-ինը:

Թեորեմ 2: Որպեսզի (V) մարմինը լինի խորանարդելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\forall\varepsilon > 0, \exists(E),(F) : 0 \le F - E < \varepsilon$, որտեղ $(E),(F)$-ը ($(E) \subset (V),(F) \supset (V)$) խորանարդելի մարմիններ են:

Ապացույցը հենվում է նախորդ թեորեմի վրա:

Սահմանում 2: Դիցուք xOy հարթության մեջ տրված է ժորդանյան պարզ, փակ, հարթ, ուղղելի ((l)) կոր: Նրանով սահմանափակված (P) պատկերը քառակուսելի է (տես 2 . խնդ. 1): Այն ուղիղների բազմությունը, որոնք անցնում են այդ կորի կետերով և զուգահեռ են z առանցքին կոչվում է ուղիղ գլանային մակերևույթ, որի ծնիչներն են նշված ուղիղները և (l)-ը հանդիսանում է ուղղորդ կոր: Տանենք $(0,0,h)$ $(h > 0)$ կետով հարթություն, զուգահեռ xOy հարթությանը: Առաջացած մարմինը (այն սահմանափակված է գլանային մակերևույթով և $z = 0$, $z = h$ հարթություններով) կոչվում է ուղիղ գլան (տես նկ. 9):



Նկ. 9

Թեորեմ 3: Վերը նշված գլանը խորանարդելի է և նրա ծավալը՝ $V = P \cdot h$:

Ապացուցում: Քանի որ (P)-ն քառակուսելի է, ապա $\forall \varepsilon > 0$ գոյություն ունեն $(A) \subset (V), (B) \supset (V)$ բազմանկյուններ, այնպիսիք, որ $0 \le B\text{-}A < \frac{\varepsilon}{h}$: Դիտարկենք հետևյալ բազմանիստերը՝ $(X) = (A) \times [0;h]$, $(Y) = (B) \times [0;h]$: Պարզ է, որ $(X) \subset (V), (Y) \supset (V)$, $X = A \cdot h$, $Y = B \cdot h$ և՝ $0 \le Y - X = h \cdot (B - A) < \varepsilon$: Ուրեմն (V)-ն խորանարդելի է և $V = P \cdot h$: ■

Դիցուք տրված է (V) մարմինը, սահմանափակված $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ հարթություններով: Այն այնպիսին է, որ յուրաքանչյուր x $(x \in [a;b])$ կետում տարված x առանցքին ուղղահայաց $(P(x))$ հատույթը քառակուսելի է, և մակերեսը՝ $P \in C[a;b]$: Ընդ որում ենթադրվում է, որ $x_1 \ne x_2 \Rightarrow ((P(x_1)) \subset (P(x_2))$, կամ $((P(x_2)) \subset (P(x_1))$[1]: Դիտարկենք $T = \{x_k\}_{k=1}^{n}$ տրոհում և կատարենք նշանակումներ

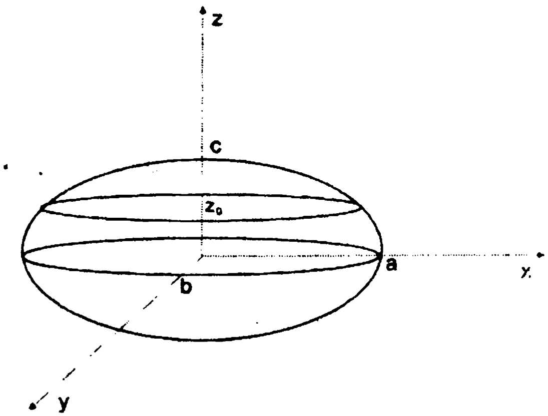
[1] Խոսքը նշված պատկերների պրոյեկցիաների մասին է $x=a$ հարթության վրա:

$m_k = \min\limits_{[x_{k-1};x_k]} P(x), M_k = \max\limits_{[x_{k-1};x_k]} P(x)$: $s_T = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k$ հանդիսանում է (V)-ին ներգծված, իսկ $S_T = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k$՝ (V)-ն արտագծած համապատասխան գլանների միավորումների ծավալները: Քանի որ $P \in C[a;b]$ և, ուրեմն $P \in R[a;b]$, ապա՝ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, $\forall T = \{x_k\}_{k=1}^{n}$, $\lambda_T < \delta$: $0 \le S_T - s_T < \varepsilon$: Այստեղից բխում է (V) գլանի խորանարդելիությունը: Քանի որ $\lim\limits_{\lambda \to 0} s_T = \lim\limits_{\lambda \to 0} S_T = \int\limits_a^b P(x)dx$, ապա՝

$$V = \int\limits_a^b P(x)dx: \qquad (1)$$

Օրինակ 1: Հաշվել $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$ էլիպսոիդի ծավալը (տես նկ10):

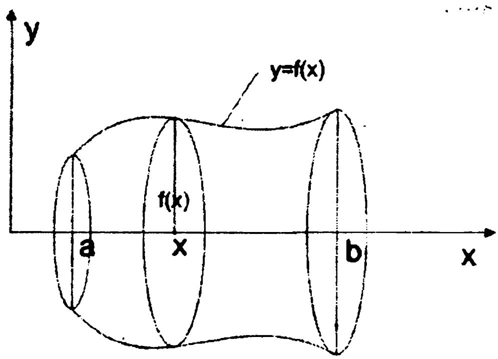
Քանի որ էլիպսոիդը համաչափ է z առանցքի նկատմամբ, ապա բավական է դիտարկել վերին մասը: Այն սահմանափակված է $z = 0, z = c$ հարթություններով, ընդ որում $z = z_0$ $(z_0 \in [0;c])$ հարթությունով առաջացած հատույթը՝



Նկ. 10

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z_0^2}{c^2}$, $\frac{x^2}{a_{z_0}^2}+\frac{y^2}{b_{z_0}^2}\le 1$ էլիպս է, որի կիսառանցքները են՝ $a_{z_0}=a\sqrt{1-\frac{z_0^2}{c^2}}, b_{z_0}=b\sqrt{1-\frac{z_0^2}{c^2}}$: Ուրեմն (տես 2. օր.1) $P(z)=\pi\cdot a_z b_z=\pi\cdot ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)$: Այսպիսով, ըստ (1)-ի $V=2\pi\cdot ab\int_0^c\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz=2\pi\cdot ab\left(c-\frac{1}{3}c\right)=\frac{4}{3}\pi abc$: Մասնավորապես, եթե $a=b=c$, ապա էլիպսոիդը վերածվում է գնդի, և ստանում ենք $V=\frac{4}{3}\pi a^3$:

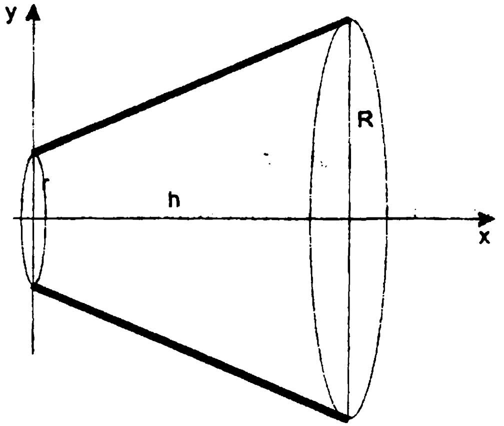
Օրինակ 2: Հաշվել պտտման մարմնի ծավալը: Ըստ սահմանման, պտտման մարմին է կոչվում $x=a, x=b, y=0$ ուղիղներով և $y=f(x)$ $(f\in C[a;b], f(x)\ge 0)$ ֆունկցիայի գրաֆիկով սահմանափակված սեղանակերպի x առանցքի շուրջը պտտումից առաջացած մարմինը (տես Նկ. 11):



Նկ. 11

Պարզ է, որ այս մարմինը բավարարում է վերը նշված պայման-ներին, և $P(x)=\pi\cdot f^2(x)$: Ըստ (1)-ի ունենք՝ $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$:

Օրինակ 3: Հաշվենք հատած կոնի ծավալը (տես նկ. 12): Այն ստացվում է ABCD սեղանի x առանցքի շուրջը պտտումից:



Նկ. 12

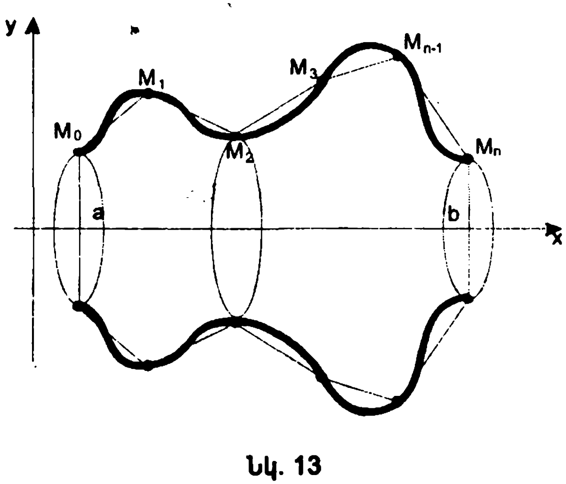
Պարզ է, որ՝ $y=f(x)=\frac{R-r}{h}x+r$: Ուրեմն՝

$$V=\pi\int\limits_0^h f(x)^2dx=\frac{\pi\cdot h}{R-r}\int\limits_0^h(\frac{R-r}{h}x+r)^2d(\frac{R-r}{h}x+r)=$$

$$\frac{\pi\cdot h}{3(R-r)}(\frac{R-r}{h}x+r)^3\Bigg|_{x=0}^{x=h}=\frac{\pi\cdot h(R^3-r^3)}{3(R-r)}=\frac{\pi\cdot h(R^2+Rr+r^2)}{3}:$$

4. ՊՏՏՄԱՆ ՄԱՐՄՆԻ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԻ ՄԱԿԵՐԵՍԸ

Դիցուք տրված է վերը նշված (տես 3., օր.2) պտտման մարմինը: Դիտարկենք $T_{[a;b]} = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ տրոհումը: Նրան համապատասխան $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կտրոհվի $M_k(x_k, y_k)$ $(y_k = f(x_k), k = 0,...,n)$ կետերով մասերի, որոնք միացնենք իրար ուղիղ գծերով (տես նկ.13): Ըստ սահմանման, պտտման մարմնի (S) մակերևույթը քառակուսելի է, եթե գոյություն ունի բեկյալի x առանցքի շուրջը պտտումից ստացված մակերևույթի մակերեսի վերջավոր սահմանը, երբ տրոհման տրամագիծը՝ $\lambda_T = \max\limits_k \Delta x_k$ ձգտում է զրոյի և այդ սահմանը հասար է S-ի: $[M_{k-1};M_k]$ հատվածի x առանցքի շուրջը պտտումից առաջացած հատած կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսն է՝ $S_k = \pi\cdot(y_{k-1} + y_k)\cdot l_k$, որտեղ l_k-ն M_{k-1}, M_k կետերի միջև եղած հեռավորությունն է՝ $l_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}$: Այսպիսով՝ $S = \lim\limits_{\lambda_T \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} S_k$:



Նկ. 13

Թեորեմ 1: Եթե $f \in C^1[a;b]$, $f(x) \geq 0$, ապա վերը նշված պտտման մարմնի մակերևույթը քառակուսելի է և մակերեսը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx: \tag{1}$$

Ապացուցում: Ըստ Լագրանժի թեորեմի՝

$$y_k - y_{k-1} = f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)\cdot\Delta x_k,$$

$$\xi_k \in (x_{k-1};x_k) \quad (k = 1,2,\dots,n)$$

և, ուրեմն՝ $l_k = \sqrt{1+f'(\xi_k)^2}\cdot\Delta x_k$, $k=1,2,\dots,n$: Կատարենք հետևյալ ձևափոխությունները՝

$$\sigma_T = \sum_{k=1}^{n} S_k = \pi\cdot\sum_{k=1}^{n}(y_{k-1}+y_k)\cdot l_k = 2\pi\cdot\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\sqrt{1+f'(\xi_k)^2}\cdot\Delta x_k +$$

$$+\pi\cdot\sum_{k=1}^{n}\left[y_{k-1} - f(\xi_k) + y_k - f(\xi_k)\right]\cdot\sqrt{1+f'(\xi_k)^2}\cdot\Delta x_k \tag{2}$$

Քանի որ $f(x)\cdot\sqrt{1+f'(x)^2}$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a;b]$ հատվածի վրա, ապա՝

$$\exists \lim_{\lambda\to 0} 2\pi\cdot\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\sqrt{1+f'(\xi_k)^2}\cdot\Delta x_k = \int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx:$$

Մնում է ապացուցել, որ

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left[y_{k-1} - f(\xi_k) + y_k - f(\xi_k)\right]\cdot\sqrt{1+f'(\xi_k)^2}\cdot\Delta x_k = 0: \tag{3}$$

Ըստ թեորեմի պայմանի $\sqrt{1+f'(x)^2}$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a;b]$-ում, ուրեմն այն սահմանափակ է՝ $\exists M>0$, $\forall x \in [a;b]: \sqrt{1+f'(x)^2} \leq M$: Քանի որ նաև $f \in C[a;b]$, ապա այն հավասարաչափ անընդհատ է՝

$$\forall \varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0,\ \forall \xi,\eta \in [a;b]\ \ |\xi - \eta|<\delta : |f(\xi) - f(\eta)| < \frac{\varepsilon}{2M(b-a)}: \tag{4}$$

Դիտարկենք $T_{[a;b]} = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ տրոհում, այնպիսին, որ. $\lambda<\delta$: Այդ դեպքում՝ $\left|y_{k-1} - f(\xi_k) + y_k - f(\xi_k)\right| \le \left|f(x_{k-1}) - f(\xi_k)\right| + \left|f(x_k) - f(\xi_k)\right| <$ $< \dfrac{\varepsilon}{M(b-a)}$ և, ուրեմն՝

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\left[y_{k-1} - f(\xi_k) + y_k - f(\xi_k)\right]\cdot\sqrt{1+f'(\xi_k)^2}\cdot\Delta x_k\right| \le$$

$$\le M\cdot\frac{\varepsilon}{M(b-a)}\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = \varepsilon :$$

Այստեղից հետևում է (3) – ը: ■

III ԱՆԻՍԿԱԿԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

1. ԱՆԻՍԿԱԿԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ, ՀԱՇՎՄԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐ

Սահմանում1: Դիցուք f ֆունկցիան որոշված է $[a;+\infty)$ - ում և՝ $\forall A > a : f \in R[a;A]$: Եթե գոյություն ունի վերջավոր սահման $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)\,dx$, ապա այն նշանակում են՝ $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, անվանում առաջին սեռի անիսկական ինտեգրալ և ասում են, որ այն զուգամետ է: Այսպիսով՝ $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx$: Իսկ, եթե նշված սահմանը գոյություն չունի, կամ անվերջ է, ապա $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ անիսկական ինտեգրալը կոչվում է տարամետ:

Օրինակ1: Պարզենք, թե p պարամետրի ինչպիսի՞ արժեքների դեպքում զուգամետ է $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ ինտեգրալը: Նախ, ենթադրենք՝ $p \neq 1$: Դիցուք՝ $A > 1$ և հաշվենք ինտեգրալը $\int\limits_1^A x^{-p}dx = \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^A = \frac{1-A^{1-p}}{p-1}$: Պարզ է, որ $\lim\limits_{A\to+\infty} A^{1-p} = 0$, երբ $1-p<0$ և, $\lim\limits_{A\to+\infty} A^{1-p} = +\infty$, երբ $1-p>0$: Երբ $p=1$- ի, ապա՝ $\int\limits_1^A\frac{dx}{x} = \ln A \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$: Այսպիսով $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$

ինտեգրալը զուգամետ է ($\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\frac{1}{p-1}$), այն և միայն այն դեպքում, երբ $p>1$:

Սահմանում 2: Դիցուք f-ը որոշված է $(-\infty;b]$-ում և $\forall B<b$: $f\in R[B;b]$: Եթե գոյություն ունի վերջավոր սահման

$\lim\limits_{B\to-\infty}\int_B^b f(x)\,dx$, ապա այն նշանակում են $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ և նույնպես անվանում առաջին սեռի զուգամետ անիսկական ինտեգրալ: Եթե նշված սահմանը գոյություն չունի, կամ անվերջ է, ապա $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ ինտեգրալը կոչվում է տարամետ:

Սահմանում 3: Դիցուք f - ը որոշված է $(-\infty;+\infty)$-ում և $\forall A,B>0$ $f\in R[-A;B]$: Եթե միաժամանակ զուգամետ են $\int_{-\infty}^c f(x)dx$, $\int_c^{+\infty} f(x)dx$ անիսկական ինտեգրալները $(c\in\mathbf{R})$, ապա, ըստ սահմանման զուգամետ է առաջին սեռի $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ անիսկական ինտեգրալը, և $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{c} f(x)dx+\int_c^{+\infty} f(x)dx$: Եթե $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$, $\int_c^{+\infty} f(x)dx$ ինտեգրալներից գոնե մեկը տարամետ է, ապա $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ ինտեգրալը համարվում է տարամետ:

Խնդիր1: Ապացուցել, որ վերը նշված սահմանումը կախված չէ c կետի ընտրությունից (օգտվել ինտեգրալի ինտեգրման տիրույթի նկատմամբ ադիտիվ հատկությունից):

Սահմանում 4: Եթե f-ը անսահմանափակ է $[a;b)$-ում և սահմանափակ է յուրաքանչյուր $[a;b-\eta]$ $(\eta\in(0;b-a))$ միջակայքում, ապա b-ն կոչվում է այդ ֆունկցիայի եզակի կետ:

Խնդիր 2: Ապացուցել, որ եթե $f \in C[a;b)$ և $f(b-0)=\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=\infty$, ապա b-ն եզակի կետ է:

Սահմանում 5: Դիցուք f - ը որոշված է $[a;b)$ - ում, b- ն եզակի կետ է և $\forall \eta \in (0;b-a)$: $f \in R[a;b-\eta]$: Եթե գոյություն ունի վերջավոր սահման $\lim\limits_{\eta\to+0} \int\limits_a^{b-\eta} f(x)\,dx$, ապա այն նշանակում են՝ $\int\limits_a^b f(x)dx$ և անվանում երկրորդ սեռի (զուգամետ) անիսկական ինտեգրալ: Իսկ, եթե նշված սահմանը գոյություն չունի, կամ անվերջ է, ապա $\int\limits_a^b f(x)dx$ անիսկական ինտեգրալը կոչվում է տարամետ:

Սահմանում 6: Եթե f - ը անսահմանափակ է $(a;b]$-ում և սահմանափակ յուրաքանչյուր $[a+\eta;b]$ $(\eta \in (0;b-a))$ միջակայքում, ապա a -ն կոչվում է եզակի կետ:

Սահմանում 7: Դիցուք f - ը որոշված է $(a;b]$ - ում, a - ն եզակի կետ է և $\forall \eta \in (0;b-a)$ $f \in R[a+\eta;b]$: Եթե գոյություն ունի վերջավոր սահման $\lim\limits_{\eta\to+0} \int\limits_{a+\eta}^{b} f(x)\,dx$, ապա այն նշանակում են՝ $\int\limits_a^b f(x)dx$, անվանում երկրորդ սեռի անիսկական ինտեգրալ և ասում, որ այն զուգամետ է: Եթե նշված սահմանը գոյություն չունի, կամ անվերջ է, ապա $\int\limits_a^b f(x)dx$ ինտեգրալը կոչվում է տարամետ:

Օրինակ 2: Ելնելով սահմանումից ապացուցել, որ $I=\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p}$ անիսկական ինտեգրալը զուգամետ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $p<1$ (համեմատիր օրինակ1 – ի հետ):

Նկատենք, որ $p \le 0$ դեպքում 0-ն եզակի կետ չէ, բայց քանի որ այդ դեպքում $f(x)=x^{-p} \in C[0;1]$, ապա $G(\eta)=\int\limits_\eta^1 \frac{dx}{x^p}$ $\quad (\eta \in [0;1])$

փոփոխական ստորին սահմանի ֆունկցիան անընդհատ է $[0;1]$ - ում, ուրեմն նաև $\eta=0$ կետում: Այսպիսով՝ $\exists \lim\limits_{\eta\to+0}\int\limits_{\eta}^{1}\frac{dx}{x^p}=\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x^p}$, որը նույնն է, ինչ անիսկական ինտեգրալի սահմանումը: Հետևաբար, իմաստ չունի առանձնացնել $p\le 0$ դեպքը $p>0$ դեպքից,երբ $x=0$- ն եզակի կետ է և, ուրեմն I- ն անիսկական ինտեգրալ: Այս մոտեցումը ընդհանուր է, կիրառելի շատ այլ դեպքերում:

Սահմանում 8: Դիցուք f-ը որոշված է $[a;c)\cup(c;b]$-ում $(c\in(a;b))$:

c կետը կոչվում է եզակի կետ, եթե այն եզակի կետ է, երբ f-ը դիտարկում ենք $[a;c)$ - ում, կամ՝ $(c;b]$ - ում: Եթե $\int\limits_{a}^{c}f(x)\,dx$ և $\int\limits_{c}^{b}f(x)dx$ ինտեգրալները զուգամետ են, ապա ըստ սահմանման զուգամետ է նաև $\int\limits_{a}^{b}f(x)\,dx$-ը և՝ $\int\limits_{a}^{b}f(x)dx=\int\limits_{a}^{c}f(x)dx+\int\limits_{c}^{b}f(x)dx$:

Ըստ սահմանման $+\infty$ $(-\infty)$-ը համարվում է եզակի կետ:

Եթե ինտեգրման միջակայքում f ֆունկկան ունի վերջավոր թվով (մեկից ավելի) եզակի կետեր, ապա ինտեգրալը պետք է տրոհել ինտեգրալների գումարի ըստ այնպիսի միջակայքերի, որոնցից յուրաքանչյուրում f- ը ունի միայն մեկ եզակի կետ:

Օրինակ, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[4]{|x^2-x|^3}}$ իտեգրալում $f(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{|x^2-x|^3}}$ ֆունկցիայի եզակի կետերն են՝ $\pm\infty,0,1$: Ըստ սահմանման՝

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{-1}f(x)dx+\int\limits_{-1}^{0,5}f(x)dx+\int\limits_{0,5}^{1,5}f(x)dx+\int\limits_{1,5}^{+\infty}f(x)dx: \qquad (1)$$

Ընդ որում նշված ինտեգրալը զուգամետ է, եթե զուգամետ են (1)-ում գրված բոլոր ինտեգրալները (ստորև ցույց կտանք, որ տվյալ դեպքում դա այդպես է) և՝ տարամետ, եթե այդ ինտեգրալներից գոնե մեկը տարամետ է: (1)–ում ընտրված կոնկրետ թվերից կախված չէ ոչ զուգամիտությունը, ոչ էլ ինտեգրալի արժեքը (կարևորն այն է, որ ընտրված միջակայքերից յուրաքանչյուրում f ֆունկցիան ունենա մեկական եզակի կետ):

Այժմ զբաղվենք անիսկական ինտեգրալների հաշվման մեթոդների ուսումնասիրությամբ: Քանի որ առաջին և երկրորդ սեռի անիսկական ինտեգրալները սահմանվում են որպես սահման, ապա նրանց հատկությունները նույն կերպ են ձևակերպվում և ապացուցվում: Այդ պատճառով, հիմնականում կսահմանափակվենք առաջին սեռի անիսկական ինտեգրալներով:

Թեորեմ1 **(Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևը):** Դիցուք $f \in C[a;+\infty)$, $F(x)$-ը $f(x)$-ի որևէ նախնականն է և՝ $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = F(+\infty) \in \mathbf{R}$: Այդ դեպքում $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ անիսկական ինտեգրալը զուգամետ է և ճիշտ է Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևը՝

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a): \qquad (2)$$

Ապացուցում: Ըստ որոշյալ ինտեգրալի համար Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևի $\forall A > a$ - ի համար ունենք՝

$$\int\limits_a^{A} f(x)dx = F(A) - F(a): \qquad (3)$$

Անցնելով (3) – ում սահմանի երբ $A \to +\infty$ և հաշվի առնելով թեորեմի պայմանը, կստանանք (2)-ը): ■

Թեորեմ 2 **(փոփոխականի փոխարինում):** Դիցուք $f \in C[a;+\infty)$, $x = \varphi(t)$-ն մոնոտոն աճող է, $\varphi \in C^1[\alpha;\beta)$ (β- ն կարող է լինել $+\infty$), $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta - 0) = +\infty$ (եթե $\beta = +\infty$, ապա $\varphi(+\infty) = +\infty$): Այդ դեպքում՝

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_\alpha^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt, \qquad (4)$$

եթե (4)–ի աջ կամ ձախ մասը իմաստ ունի (զուգամետ է) (այդ դեպքում իմաստ ունի նաև մյուս մասը և տեղի ունի (4)–ը):

Ապացույց: Դիցուք, որոշակիության համար, զուգամետ է (4)-ի ձախ մասը: Թեորեմի պայմաններից հետևում է, որ $x=\varphi(t)$-ն հակադարձելի է ($\exists\, t=\varphi^{-1}(x)$ հակադարձ ֆունկցիան, որը նույնպես կլինի մոնոտոն աճող): Ընդ որում՝ $\varphi^{-1}(a)=\alpha$, $\varphi^{-1}(+\infty)=\beta$, այսինքն՝ $\exists \lim\limits_{x\to+\infty}\varphi^{-1}(x)=\beta$ (եթե $\beta=+\infty$, ապա $\varphi^{-1}(+\infty)=+\infty$, այսինքն $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$): Ըստ որոշյալ ինտեգրալում փոփոխականի փոխարինման բանաձևի՝

$$\forall A>a:\ \int_a^A f(x)\,dx=\int_\alpha^{\varphi^{-1}(A)} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt: \qquad (5)$$

Անցնելով (5)-ում սահմանի, երբ $A\to+\infty$, և հաշվի առնելով այն, որ $\lim\limits_{A\to+\infty}\varphi^{-1}(A)=\beta$ ((5)-ի ձախ մասը ունի սահման, ուրեմն աջ մասը ևս ունի սահման), կստանանք (4)-ը: ■

Դիտողություն1: Թեորեմի պնդումը ճիշտ է նաև այն դեպքում, երբ φ-ն մոնոտոն նվազող է: Այդ դեպքում (4)-ը ընդունում է հետևյալ տեսքը՝ $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\int_\beta^{\alpha} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$: Այն ստացվում է նախորդ թեորեմից, եթե փոխարինենք φ-ն, $-\varphi$-ով:

Թեորեմ 3 (մասերով ինտեգրում): Եթե $u(x),v(x)\in C^1[a;+\infty)$, ապա ճիշտ է հետևյալ բանաձևը՝

$$\int_a^{+\infty} u\cdot dv=u\cdot v\,\Big|_a^{+\infty}-\int_a^{+\infty} v\cdot du: \qquad (6)$$

Ենթադրվում է, որ (6)-ի երեք անդամներից երկուսը իմաստ ունեն (այդ դեպքում իմաստ ունի նաև երրորդը և ճիշտ է (6) - ը):

Ապացույց: Ենթադրենք, որոշակիության համար, զուգամետ է $\int_a^{+\infty} v\cdot du$ ինտեգրալը և $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} u(x)\cdot v(x)=u(+\infty)\cdot v(+\infty)\in\mathbf{R}$: Վերցնենք կամայական $A>a$ թիվը և կիրառենք որոշյալ ինտեգրալում մասերով ինտեգրման բանաձևը՝

$$\int_a^A u\cdot dv = u\cdot v\Big|_a^A - \int_a^A v\cdot du\,: \tag{7}$$

Քանի, որ ըստ պայմանի (7)-ի աջ մասը ունի սահման,երբ $A\to+\infty$, ապա ունի սահման նաև ձախ մասը: Անցնելով (7)-ում սահմանի երբ $A\to+\infty$, կստանանք (6)-ը: ■

Օրինակ. 3: Չաշվել $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2-x+1\right)^2}$ ինտեգրալը: Այս ինտեգրալը հաշվելիս կօգտվենք բոլոր նախորդ թեորեմներից: $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^2}$: Կատարենք $t=x-\frac{1}{2}$ փոփոխականի փոխարինում, կստանանք՝ $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2}$ (ակնհայտ է, որ՝ $x\to\pm\infty\Rightarrow t\to\pm\infty$): Այնուհետև՝ $I=\frac{4}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}+t^2\right)-t^2}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2}dt=$

$$=\frac{4}{3}I_1-\frac{2}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t\cdot d\left(t^2+\frac{3}{4}\right)}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{4}{3}I_1+\frac{2}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}t\cdot d\frac{1}{t^2+\frac{3}{4}},$$ որտեղ

$$I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}:$$

Կիրառելով մասերով ինտեգրման բանաձևը, կստանանք՝

$$I=\frac{4}{3}I_1+\frac{2}{3}\frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}-\frac{2}{3}I_1=\frac{2}{3}I_1=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}:$$ Այստեղ հաշվի առանք, որ՝ $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}=0:$

Այժմ կուսումնասիրենք անիսկական ինտեգրալների (հիմնականում առաջին սեռի) զուգամիտության հարցերը: Հաճախ որոշյալ (և, ուրեմն նաև անիսկական) ինտեգրալը չի լինում ճգրիտ հաշվել: Կան հաշվման մոտավոր մեթոդներ, բայց մինչ դրանց դիմելը անհրաժեշտ է պարզել ինտեգրալի զուգամիտությունը: Բացի այդ, որոշ զուգամետ անիսկական ինտեգրալների համար կան ճգրիտ հաշվելու մեթոդներ, երբ նույնիսկ համապատասխան որոշյալ ինտեգրալները ճշգրտորեն չեն հաշվվում (չեն արտահայտվում տարրական ֆունկցիաներով, կամ նրանց վերջավոր համադրույթով): Անիսկական ինտեգրալի զուգամիտության հարցում հաճախ կարևոր է հետևալը:

Դիտողություն 2: Դիցուք f ֆունկցիան որոշված է $[a;+\infty)$ միջակայքում և $\forall A>a: f\in R[a;A]$: Պահանջվում է պարզել $I=\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ անիսկական ինտեգրալի զուգամիտությունը: Վերցնենք $\forall A>0$ և տրոհենք ինտեգրալը երկու մասի՝ $I=\int\limits_a^{+\infty}f(x)\,dx=\int\limits_a^{A}f(x)\,dx+\int\limits_A^{+\infty}f(x)\,dx:$

Առաջին գումարելին՝ $\int\limits_a^{A}f(x)\,dx$ Ռիմանի ինտեգրալ է: Հետևաբար, ակնհայտ է, որ $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$, $\int\limits_A^{+\infty}f(x)dx$ անիսկական ինտեգրալները միժամանակ են զուգամետ կամ տարամետ: Ընդ որում, երբ զուգամետ է այդ ինտեգրալներից որևէ մեկը, ապա $\int\limits_A^{+\infty}f(x)dx=\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx-\int\limits_a^{A}f(x)dx\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow}0:$

$\int\limits_A^{+\infty} f(x)dx$ ինտեգրալը կոչվում է զուգամետ $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ ինտեգրալի մնացորդ ինտեգրալ, կամ «պոչ», այն անվերջ փոքր է երբ $A \to +\infty$ ($\lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_A^{+\infty} f(x)dx = 0$):

2. ԱՆԻՍԿԱԿԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԻ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅՈՒՆԸ ՈՉ ԲԱՑԱՍԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Թեորեմ 1. Դիցուք՝ f-ը որոշված է $[a;+\infty)$-ում, $\forall A \geq a : f \in R[a;A]$, $\forall x \geq a : f(x) \geq 0$: Այս դեպքում, որպեսզի $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ անիսկական ինտեգրալը լինի զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար որ, $F(A) = \int\limits_a^{A} f(x)dx$ ֆունկցիան լինի սահմանափակ վերևից:

Ապացուցում: Նախ նկատենք, որ ըստ թեորեմի պայմանների՝ $F(A) \geq 0$: Թեորեմի պայմաններից հետևում է, որ $F(A)$-ն մոնոտոն չնվազող է: Իրոք՝

$$a < A_1 < A_2 \;\Rightarrow\; F(A_2) - F(A_1) = \int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)dx \geq 0 \Rightarrow F(A_1) \leq F(A_2):$$

Մնում է օգտվենք հայտնի թեորեմից[1]՝ որպեսզի մոնոտոն չնվազող ֆունկցիան ունենա վերջավոր սահման $+\infty$ - ում անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն լինի սահմանափակ վերևից (հակառակ դեպքում նրա սահմանը $+\infty$ - է): Ըստ նույն այդ թեորեմի՝

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} F(A) = \sup_{[a;+\infty)} F(A): \blacksquare$$

Օգտվելով ապացուցված թեորեմից, ստանանք անիսկական ինտեգրալների զուգամիտության հայտանիշներ ոչ բացասական ֆունկցիաների դեպքում:

Հայտանիշ 1: Դիցուք՝ $f,g:[a;+\infty) \to \mathbf{R}$, $\forall x \geq a : 0 \leq f(x) \leq g(x)$

և $\forall A > a$: $f, g \in R[a; A]$: Այդ դեպքում $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ ինտեգրալի

զուգամիտությունից հետևում է $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ - ի զուգամիտությունը:

Ապացուցում: Դիցուք՝ $F(A) = \int_a^A f(x)dx, G(A) = \int_a^A g(x)dx \ (A > a)$:

Քանի որ $f(x) \le g(x)$, ապա $\forall A > a$ - թվի համար ճիշտ է $\int_a^A f(x)dx \le \int_a^A g(x)dx$ անհավասարությունը, այսինքն՝ $F(A) \le G(A)$:

Ըստ թեորեմի պայմանի՝ $\exists \lim\limits_{A \to +\infty} G(A) = \sup\limits_{[a;+\infty)} G(A) = \int_a^{+\infty} g(x)dx = I$, որտեղից՝ $\forall A > a$: $F(A) \le G(A) \le I \Rightarrow F(A) \le I$: Այսինքն, $F(A)$ - ն սահմանափակ է վերևից: Հետևաբար, ըստ թեորեմ1-ի զուգամետ է $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ինտեգրալը: ■

Դիտողություն 1: Հայտանիշ1-ի պնդումը կարելի է ձևակերպել համարժեք ձևով՝ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ինտեգրալի տարամիտությունից հետևում է $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ ինտեգրալի տարամիտությունը (ակնհայտ է հետևյալ տրամաբանական պնդումը՝ A պայմանից հետևում է B -ն, համարժեք է նրան, որ B –ի ժխտումից հետևում է A -ի ժխտումը):

Օրինակ 1: Պարզենք $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(2x)}{x^2 + x + 1}dx$ ինտեգրալի զուգամիտոթյունը: Նախ նկատենք, որ այստեղ կա միայն մեկ եզակի կետ՝ $+\infty$ -ը: Ուստի, բավական է դիտարկել $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^4(2x)}{x^2 + x + 1}dx$ ինտեգրալը (տես 1., դիտ. 2): Ճշմարիտ է հետևյալ գնահատականը՝ $f(x)= \dfrac{\sin^4(2x)}{x^2+x+1} \le$

$\le \dfrac{1}{x^2} = g(x)$: Քանի որ $\int\limits_1^{+\infty} g(x)dx$-ը զուգամետ է, ապա, ըստ հայտանիշ1-ի, զուգամետ է նաև $\int\limits_0^{+\infty} f(x)dx$ ինտեգրալը:

Օրինակ 2: Պարզենք $\int\limits_e^{+\infty} \dfrac{\ln x\, dx}{x}$ ինտեգրալի զուգամիտությունը:

Քանի որ՝ $\forall x \ge e : f(x) = \dfrac{\ln x}{x} \ge \dfrac{1}{x} = g(x)$ և $\int\limits_e^{+\infty} g(x)dx$ ինտեգրալը տարամետ է, ապա ըստ, հայտանիշ1-ի (տես դիտ.1) տարամետ է նաև $\int\limits_e^{+\infty} f(x)dx$ ինտեգրալը:

Հայտանիշ 2: Դիցուք՝ $f, g : [a;+\infty) \to \mathbf{R}$, $\forall A > a$ $f, g \in R[a; A]$, $\forall x \ge a : f(x) > 0, g(x) > 0$ և $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$ ($\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$):

Այս դեպքում՝ $I_1 = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ և $I_2 = \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ անիսկական ինտեգրալները միաժամանակ զուգամետ են կամ՝ տարամետ:

Ապացուցում: Դիցուք, I_2 ինտեգրալը զուգամետ է: Քանի որ $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$, ապա՝ $\exists A_0 > a$, $\forall x \ge A_0 : \dfrac{f(x)}{g(x)} < 2 \Rightarrow f(x) < 2g(x)$:

I_2-ի զուգամիտությունից հետևում է $\int\limits_{A_0}^{+\infty} 2g(x)dx$ զուգամիտությունը:

Որտեղից հետևում է (տես հայտանիշ1) $\int\limits_{A_0}^{+\infty} f(x)dx$-ի, ուրեմն նաև I_1-ի զումամիտությունը (տես 1 դիտ. 2):

Այժմ ենթադրենք որ I_2 ինտեգրալը տարամետ է: Ուրեմն՝ $\exists A_1, \ \forall x \geq A_1 \ : \dfrac{f(x)}{g(x)} > \dfrac{1}{2} \ \Rightarrow f(x) > \dfrac{1}{2} g(x)$: Այստեղից և I_2-ի տարամիտությունից (տես հայտանիշ1,դիտ.1) հետևում է, որ տարամետ է $\int\limits_{A_1}^{+\infty} f(x)dx$ ինտեգրալը, ուրեմն, տարամետ է նաև $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ անիսկական ինտեգրալը:

Դիտողություն 2: Նկատենք, որ հայտանիշ 2 –ի $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$ ($\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$) պայմանը կարելի է փոխարինել ավելի ընդհանուր $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = K, \ 0 < K \in \mathbf{R}$ պայմանով, բայց դա նույնն է ինչ $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} K \cdot g(x)$:

Օրինակ 3: Պարզենք $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{\sqrt[4]{\left|x^2 - x\right|^3}}$ ինտեգրալի զուգամիտությունը: Ինչպես արդեն նշել էինք III-ի սկզբում (տես 1. (1) - ը), եզակի կետերն են՝ $0, 1, \pm\infty$: Տրոհենք թվային ուղիղը միջակայքերի այնպես, որ նրանցից յուրաքանչյուրում ֆունկցիան ունենա մեկական եզակի կետ, ինտեգրալն էլ տրոհենք համապատասխան ինտեգրալների գումարի՝

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{-1} f(x)dx + \int\limits_{-1}^{0,5} f(x)dx + \int\limits_{0,5}^{1,5} f(x)dx + \int\limits_{1,5}^{+\infty} f(x)dx:$$

Նախ ուսումնասիրենք $\int\limits_{-\infty}^{-1} f(x)dx$ և $\int\limits_{1,5}^{+\infty} f(x)dx$ ինտեգրալները, որոնցում եզակի կետերն են՝ $\pm\infty$: Քանի որ՝ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^6 \left|1 - x^{-1}\right|^3}} =$

$$=\frac{1}{|x|^{1,5}}\cdot\frac{1}{\left|1-x^{-1}\right|^{0,75}}\underset{x\to\pm\infty}{\sim}\frac{1}{|x|^{1,5}}$$ և $1,5>1$, ապա նշված ինտեգրալները զուգամետ են:

Այժմ դիտարկենք $\int_{-1}^{0,5} f(x)dx$ ինտեգրալը: Ունենք՝

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{|x(x-1)|^3}}=\frac{1}{|x|^{0,75}}\cdot\frac{1}{|x-1|^{0,75}}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{1}{|x|^{0,75}}$$ և, քանի որ

$0,75<1$, ուստի $\int_{-1}^{0,5} f(x)dx$ ինտեգրալը զուգամետ է:

Նույն կերպ ուսումնասիրենք $\int_{0,5}^{1,5} f(x)dx$ ինտեգրալը:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{|x(x-1)|^3}}=\frac{1}{|x|^{0,75}}\cdot\frac{1}{|x-1|^{0,75}}\underset{x\to 1}{\sim}\frac{1}{|x-1|^{0,75}}:$$ Ուրեմն, $\int_{0,5}^{1,5} f(x)dx$

ինտեգրալը նույնպես զուգամետ է: Այսպիսով, սկզբնական $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[4]{\left|x^2-x\right|^3}}$

ինտեգրալը զուգամետ է:

Որոշ դեպքերում, անհնար է տվյալ ֆունկցիային $\frac{1}{x^p}$ տեսքի համարժեք ֆունկցիա գտնել: Չաջորդ հայտանիշները վերաբերվում են նշված դեպքերին: Նրանց ապացույցները նույնպես հենված են հայտանիշ1-ի վրա:

Չայտանիշ 3: Դիցուք՝ $f,g:[a;+\infty)\to\mathbf{R}$, $\forall A>a$ $f,g\in R[a;A]$,

$\forall x\ge a: f(x)\ge 0, g(x)>0$ և $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$: Այդ դեպքում՝

$I_2=\int_a^{+\infty} g(x)dx$ - ինտեգրալի զուգամիտությունից հետևում է

$I_1 = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ ինտեգրալի զուգամիտությունը:

Ապացույց: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0 \Rightarrow \exists A_0 \geq a, \forall x \geq A_0 : \frac{f(x)}{g(x)}<1 \Rightarrow f(x)<g(x)$:

Այստեղից, ըստ հայտանիշ1.- ի և I_2 – ի զուգամիտությունից հետևում է I_1 – զուգամիտությունը:

Հայտանիշ 4: Դիցուք՝ $f,g:[a;+\infty)\to \mathbf{R}$, $\forall A>a : f,g \in R[a;A]$, $\forall x \geq a : f(x)>0, g(x)>0$ և՝ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$: Այդ դեպքում՝ $I_2 = \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ ինտեգրալի տարամիտությունից հետևում է $I_1 = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ ինտեգրալի տարամիտությունը:

Ապացույց: Քանի որ՝ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$, ապա՝

$\exists A_0, \forall x \geq A_0 : \frac{f(x)}{g(x)}>1 \Rightarrow f(x)>g(x)$:

Այստեղից, ըստ հայտանիշ 1-ի (տես դիտ. 1), I_2 – ի տարամիտությունից հետևում է I_1 – ի տարամիտությունը:

Օրինակ 4: Պարզենք $\int\limits_{-\infty}^{-1} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{-1} x^{100}e^{2x}dx$ ինտեգրալի զուգամիտությունը: Քանի որ e^{2x} -ը ձգտում է զրոյի, երբ $x\to-\infty$ ավելի արագ քան x – ի յուրաքանչյուր աստիճանը, ապա բնական է սպասել, որ ինտեգրալը զուգամետ է: Օգտվենք հայտանիշ 3 –ից, վերցնելով $g(x)=\frac{1}{x^2}$: Ըստ վերը նշածի՝ $\frac{f(x)}{g(x)}=x^{102}e^{2x}\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}0$ և, բացի այդ՝

$\int\limits_{-\infty}^{-1} g(x)dx$ -ը զուգամետ է: Ուրեմն զուգամետ է նաև $\int\limits_{-\infty}^{-1} f(x)dx$ ինտեգրալը:

Օրինակ 5: Պարզենք $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{(\ln x)^p}{\sqrt{x}} dx$ ինտեգրալի զուգամիտությունը:

Այստեղ բնական է սպասել, որ ինտեգրալը տարամետ է անկախ p պարամետրի արժեքից: Օգտվենք հայտանիշ 4 –ից, վերցնելով $g(x) = x^{\lambda}$: λ - հաստատունը ընտրենք այնպես, որ՝

1. $\int\limits_{1}^{+\infty} g(x)dx$ ինտեգրալը լինի տարամետ, այսինքն՝ $-\lambda < 1$ $(\lambda > -1)$,

2. $\frac{f(x)}{g(x)} = x^{-\lambda - 0,5} \cdot (\ln x)^p \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, այսինքն՝ $-\lambda - 0,5 > 0$ $(\lambda < -0,5)$:

Այսպիսով, պահանջվող պայմաններին բավարարում է $(-1; -0,5)$ միջակայքին պատկանող λ - ն և, ուրեմն $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{(\ln x)^p}{\sqrt{x}} dx$ ինտեգրալը տարամետ է:

3. ԱՆԻՍԿԱԿԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԻ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՍԿԶԲՈՒՆՔԸ: ԲԱՑԱՐՁԱԿ ԵՎ ՊԱՅՄԱՆԱԿԱՆ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅՈՒՆ

Զուգամիտության վերը նշված հայտանիշները ճիշտ են, երբ ֆունկցիան ունի որոշակի նշան (բացասական ֆունկցիայի դեպքը բերվում է դրականի, բազմապատկելով -1 ով, որը չի ազդում զուգամիտության վրա): Այլ է իրավիճակը, երբ ֆունկցիան չունի որոշակի նշան: Այս դեպքում հարկավոր են ավելի նուրբ հայտանիշներ:

Թեորեմ1 (Կոշիի զուգամիտության սկզբունքը): Դիցուք՝ $f : [a; +\infty) \to \mathbf{R}$, $\forall A > a$: $f \in R[a; A]$: Որպեսզի $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ ինտեգրալը լինի զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար

$$\forall\varepsilon>0,\exists A_0(\varepsilon)>a,\forall A_1,A_2\geq A_0\ :\ \left|\int_{A_1}^{A_2}f(x)dx\right|<\varepsilon \qquad (1)$$

Կոշիի պայմանը:

Ապացուցում: Նշված ինտեգրալի զուգամիտությունը համարժեք է նրան, որ $F(A)=\int_a^A f(x)dx$ ֆունկցիան ունենա վերջավոր սահման, երբ A-ն ձգտում է $+\infty$ – ի: Որն իր հերթին [1] համարժեք է նրան, որ $F(A)$-ն բավարարի Կոշիի պայմանին՝ $\forall\varepsilon>0,\ \exists A_0(\varepsilon)>a$, $\forall A_1,A_2\geq A_0$: $|F(A_2)-F(A_1)|<\varepsilon$: Այստեղից, հաշվի առնելով որ՝ $F(A_2)-F(A_1)=\int_{A_1}^{A_2}f(x)dx$, ստանում ենք (1) – ը: ■

Սահմանում 1: $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ ինտեգրալը կոչվում է բացարձակ զուգամետ, եթե զուգամետ է $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ ինտեգրալը:

Թեորեմ 2: Բացարձակ զուգամետ ինտեգրալը զուգամետ է:

Ապացուցում: Ըստ թեորեմի պայմանի, զուգամետ է $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ ինտեգրալը, ուրեմն նրա համար ճիշտ է Կոշիի պայմանը՝

$$\forall\varepsilon>0\,\exists A_0>a,\forall A_1,A_2\geq A_0\ :\ \left|\int_{A_1}^{A_2}|f(x)|dx\right|<\varepsilon: \qquad (1)$$

Քանի որ՝ $\left|\int_{A_1}^{A_2}f(x)\ dx\right|\leq\left|\int_{A_1}^{A_2}|f(x)|\ dx\right|<\varepsilon\ \ (A_1,A_2\geq A_0)$, ապա (1) – ից հետևում է, որ Կոշիի պայմանը տեղի ունի նաև $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ ինտեգրալի համար, որտեղից բխում է $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ինտեգրալի զուգամի-տությունը: ■

Օրինակ 1: Պարզենք $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x^3}{x^2+x+2} dx$ ինտեգրալի զուգամիտու-թյունը: Քանի որ՝ $\frac{|\sin x^3|}{x^2+x+2} \leq \frac{1}{x^2}$, և $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$-ը զուգամետ է, ապա $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x^3}{x^2+x+2} dx$-ը բացարձակ զուգամետ է:

Սահմանում 2: $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ինտեգրալը կոչվում է ոչ բացարձակ կամ պայմանական զուգամետ, եթե $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ինտեգրալը զուգամետ է, իսկ $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ ինտեգրալը՝ տարամետ (պայմանական զուգամետ ինտեգրալների օրինակներ տես ստորև):

Հաջորդ հայտանիշները վերաբերվում են $\int_a^{+\infty} f(x)\cdot g(x)dx$ տեսքի ինտեգրալների զուգամիտությանը:

Թեորեմ 3 (Դիրիխլեի հայտանիշը): Դիցուք՝ $f \in C[a;+\infty)$, $g \in C^1[a;+\infty)$, f-ը ունի սահմանափակ նախնական: Իսկ $g(x)$-ը մոնոտոն չաճող է և ձգտում է զրոյի, երբ $x \to +\infty$-ի: Այս պայմաններից բխում է $\int_a^{+\infty} f(x)\cdot g(x)dx$ անիսկական ինտեգրալի զուգամիտությունը:

Ապացուցում: Դիցուք $F(x)$-ը $f(x)$-ի նախնականն է ($\forall x : F'(x) = f(x)$) Թեորեմի պայմաններից հետևում է, $\exists M, \forall x \geq a : |F(x)| \leq M$ և այն, որ՝ $g(x) \geq 0, g'(x) \leq 0$: Կամայական $A > a$ համար, կիրառելով մասերով ինտեգրման բանաձևը, կստանանք՝

$$\int_a^A f(x)\cdot g(x)\,dx = \int_a^A F'(x)\cdot g(x)\,dx = \int_a^A g(x)\cdot dF(x) =$$

$$= g(x)\cdot F(x)\Big|_a^A - \int_a^A F(x)\cdot g'(x)\,dx =$$

$$= g(A)\cdot F(A) - g(a)\cdot F(a) - \int_a^A F(x)\cdot g'(x)\,dx : \qquad (2)$$

Ապացուցենք, որ (2)-ի առաջին և երրորդ գումարելիներն ունեն սահման, երբ $A \to +\infty$: Իրոք՝

$$\left|g(A)\cdot F(A)\right| \le M\cdot g(A) \underset{A\to+\infty}{\to} 0 \Rightarrow \lim_{A\to+\infty} g(A)\cdot F(A) = 0,$$

$$\int_a^A \left| F(x)\cdot g'(x) \right| dx \le M\cdot \int_a^A \left|g'(x)\right| dx = M\cdot \int_a^A \left(-g'(x)\right) dx =$$

$$= M\cdot\left(g(a) - g(A)\right) \le M\cdot g(a)$$

Այստեղից հետևում է, որ $\int_a^{+\infty} \left|F(x)\cdot g'(x)\right| dx$ ինտեգրալը զուգամետ է (տես 2. թ1), ուրեմն, զուգամետ է նաև (այն էլ բացարձակ) $\int_a^{+\infty} F(x)\cdot g'(x)\,dx$ ինտեգրալը: Այսինքն գոյություն ունի վերջավոր $\lim_{A\to+\infty} \int_a^A F(x)\cdot g'(x)\,dx$: Օգտվելով (2) – ից, ստանում ենք, որ գոյություն ունի վերջավոր $\lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)\cdot g(x)\,dx$, որը նշանակում է, որ $\int_a^{+\infty} f(x)\cdot g(x)\,dx$ ինտեգրալը զուգամետ է: ■

Դիտողություն 1: Թեորեմ 3-ի պնդումը չի փոխվի, եթե $g(x)$-ը լինի ոչ թե մոնոտոն չաճող, այլ՝ մոնոտոն չնվազող (դա նույն է, ինչ

$f(x)\cdot g(x)$ ֆունկցիան բազմապատկվի - 1-ով, որից չի փոխվի զուգամիտությունը):

Թեորեմ 4 (Աբելի[1] հայտանիշը): Դիցուք՝ $f\in C[a;+\infty)$, $g\in C^1[a;+\infty)$, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ինտեգրալը զուգամետ է, $g(x)$-ը մոնոտոն է և՝ սահմանափակ: Այդ դեպքում $\int_a^{+\infty} f(x)\cdot g(x)dx$ ինտեգրալը զուգամետ է:

Ապացուցում: Քանի որ $g(x)$-ը մոնոտոն է և՝ սահմանափակ, ապա այն ունի սահման՝ $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=g(+\infty)\in\mathbf{R}$: Կատարենք ձևափոխություն՝

$$f(x)\cdot g(x)=f(x)\cdot g(+\infty)+f(x)\cdot[g(x)-g(+\infty)]: \qquad (4)$$

Աջ մասի առաջին գումարելին ինտեգրելի է ըստ թեորեմի պայմանի, իսկ երկրորդը՝ ըստ Դիրիխլեի հայտանիշի, որտեղ $g(x)$-ը փոխարինված է $g_1(x)=g(x)-g(+\infty)$ -ով:

Պարզ է, որ $g_1(x)$-ը մոնոտոն է և՝ $\lim\limits_{x\to+\infty} g_1(x)=g(+\infty)-g(+\infty)=0$:

Քանի որ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ -ը զուգամետ է, ապա $f(x)$ -ը ունի սահմանափակ նախնական, օրինակ՝ $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ ֆունկցիան: ■

Օրինակ 2: Պարզենք $I=\int_1^{+\infty}\frac{\cos 4x}{x^p}dx$ ինտեգրալի զուգամիտությունը, կախված p պարամետրի արժեքից: Քանի որ՝ $\left|\frac{\cos 4x}{x^p}\right|\le\frac{1}{x^p}$, ապա ինտեգրալը բացարձակ զուգամետ է, երբ $p>1$: Դժվար չէ տեսնել, որ երբ $p\le 0$, ապա I ինտեգրալը տարամետ է: Մնում է քննարկենք $p\in(0;1]$ դեպքը: Քանի որ $\cos 4x$ ֆունկցիան ունի սահմանափակ

---

[1] Աբել Նիլս Հենրիկ (1802 – 1829) – Նորվեգացի մաթեմատիկոս:

նախնական՝ $\frac{1}{4}\sin 4x$, իսկ $\frac{1}{x^p}$-ն մոնոտոն նվազող է և ձգտում է զրոյի, երբ $x \to +\infty$, ապա I ինտեգրալը, ըստ Դիրիխլեի հայտանիշի զուգամետ է: Մյուս կողմից՝ $\frac{|\cos 4x|}{x^p} \geq \frac{\cos^2 4x}{x^p} = \frac{1}{2x^p} + \frac{\cos 8x}{2x^p}$: Եվ, քանի որ $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x^p}$ տարամետ է $(p \leq 1)$, իսկ՝ $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 8x}{2x^p} dx$ ինտեգրալը ըստ Դիրիխլեի հայտանիշի զուգամետ, ապա $\int_1^{+\infty} \frac{|\cos 4x|}{x^p} dx$ ինտեգրալը տարամետ է: Ուրեմն, այս դեպքում $(p \in (0;1])$ դիտակվող ինտեգրալը պայմանական զուգամետ է:

Օրինակ 3: Պարզենք $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}} \cdot \sin x}{x} dx$ ինտեգրալի զուգամիտությունը:

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ ինտեգրալը ըստ Դիրիխլեի հայտանիշի զուգամետ է, իսկ $e^{-\frac{1}{x}}$ ֆունկցիան մոնոտոն աճող է և՝ սահմանափակ $(0 < e^{-\frac{1}{x}} < 1)$: Ուրեմն, ըստ Աբելի հայտանիշի $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}} \sin x}{x} dx$ ինտեգրալը զուգամետ է: Քանի որ՝ $\frac{e^{-\frac{1}{x}} |\sin x|}{x} \geq \frac{e^{-\frac{1}{x}} \sin^2 x}{x} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{2x} - \frac{e^{-\frac{1}{x}} \cos 2x}{2x}$, $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{2x} dx$ ինտեգրալը տարամետ է ($\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{2x} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$), իսկ $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}} \cos 2x}{2x} dx$ զուգամետ է, ապա $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}} \sin x}{x} dx$ ինտեգրալը պայմանական զուգամետ է:

IV ՄԻ ՔԱՆԻ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱ

1. n-ՉԱՓԱՆԻ ԷՎԿԼԻԴԵՍՅԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ. ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՆՐԱՆՑ ՄԵՋ

Դիտարկենք բոլոր հնարավոր կարգավորված n-յակների բազմությունը՝ $\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \;;\; x_k \in \mathbf{R}\,,\; k = 1,2,...,n\}$: Այդ բազմության տարրերը կանվանենք կետեր, իսկ $x_1,...,x_n$ թվերը՝ $M(x_1,...,x_n)$ կետի կոորդինատներ: Դիցուք $A,B \in \mathbf{R}^n$, $A(a_1,a_2,...a_n)$, $B(b_1,b_2,...b_n)$. կասենք, որ A և B կետերը համընկնում են, եթե հավասար են այդ կետերի համապատասխան կոորդինատները՝ $a_k = b_k$, $k = 1,2,...,n$: A, B կետերի միջև հեռավորություն ասելով հասկանանք՝

$$\rho(A,B) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k)^2}\;:$$

Խնդիր1: Ապացուցենք, որ հեռավորությունը օժտված է հետևյալ հատկություններով՝ 1. $\rho(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$, 2. $\rho(A,B) = \rho(B,A)$, 3. $\rho(A,C) \le \rho(A,B) + \rho(B,C)$ $(A,B,C \in \mathbf{R}^n)$:

Ապացուցում: Առաջին և երկրորդ հատկությունների ապացույցները անմիջապես հետևում են հեռավորության սահմանումից: Անցնենք երրորդ հատկության ապացուցմանը, նախապես նկատելով, որ այն $\mathbf{R}^2$-ում և $\mathbf{R}^3$-ում ունի պարզ երկրաչափական իմաստ՝ եթե A,B,C կետերը ընկած չեն մի ուղղի վրա, ապա առաջացած եռանկյան կողմի երկարությունը փոքր է մյուս երկու կողմերի երկարությունների գումարից (եռանկյան անհավասարություն):

Նախ ապացուցենք, որ a_i, b_i $(i=1,...,n)$ ոչ բացասական թվերի համար ճիշտ է հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\ : \qquad (1)$$

Դիցուք x - ը կամայական թիվ է: Ունենք՝

$$0 \le \sum_{i=1}^{n}(a_i \cdot x + b_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot x^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) \cdot x + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 : \qquad (2)$$

Եթե $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 0$ ($\Rightarrow a_i=0,\ i=1,\dots,n$), (1)–ը ակընհայտ է: Եթե $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 0$, ապա, քանի որ (2) – ի աջ մասի քառակուսային եռանդամը ոչ բացասական է յուրաքանչյուր x - ի համար, ապա նրա տարբերիչը պետք լինի ոչ դրական $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \le 0$, որտեղից հետևում է (1) –ը: Այժ ապացուցենք, որ ճիշտ է հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\ , \qquad (3)$$

որը համարժեք է քառակուսի բարձրացրած անհավասարությանը՝ $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2 \le \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2} + \sum_{i=1}^{n} b_i^2$: Ստացվածը, իր հերթին համարժեք է (1)-ին: Եթե այժմ (3) – ում a_i - ին փոխարինենք $a_i - b_i$ -ով, իսկ b_i -ին՝ $b_i - c_i$ -ով $(i=1,\dots,n)$, ապա կստանանք 3. – ը (եռանկյան անհավասարությունը):

Սահմանում 1: $\mathbf{R}^n$ բազմությունը, այդպես ներմուծված հեռավորության հետ մեկտեղ ($(\mathbf{R}^n, \rho)$) կոչվում է n-չափանի էվկլիդեսյան[1] տարածություն:

Դիտողություն: էվկլիդեսյան տարածության նշված սահմանումը չի հակասում հանրահաշվում ընդունվածին [4]:

Պարզ է, որ $\mathbf{R}^1 = \mathbf{R}$ և, եթե $a, b \in \mathbf{R}$, ապա՝ $\rho(a;b) = \sqrt{(a-b)^2} = |a-b|$: $(\mathbf{R}^2, \rho)$-ն՝ ուղղանկյուն կոորդինատային հարթությունն է, որտեղ $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ կետերի միջև հեռավորու-

---

[1] էվկլիդես – հույն մաթեմատիկոս, մ.թ.ա. 3 – րդ դար:

թյունը է որոշվում է $\rho(A,B)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ բանաձևով: Իսկ $(\mathbf{R}^3,\rho)$-ն մեզ հայտնի եռաչափ ուղղանկյուն կոորդինատային տարածությունն է: $A(x_1,y_1,z_1),B(x_2,y_2,z_2)$ կետերի միջև հեռավորությունը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝ $\rho(A,B)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$: Նկատենք, որ $(\mathbf{R}^n,\rho)$ էվկլիդեսյան տարածությունը $n>3$ դեպքում ունի միայն վերացական ընկալում:

Սահմանում 2: $M_0(x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})\in\mathbf{R}^n$ կենտրոնով $\varepsilon>0$ շառավղով **n–չափանի գունդ** է կոչվում $U_\varepsilon(M_0)=\{M\in\mathbf{R}^n;\ \rho(M,M_0)<\varepsilon\}$ բազմությունը: Այդ բազմությունը կոչվում է նաև M_0 կետի ε **շրջակայք**: $S_\varepsilon(M_0)=\{M\in\mathbf{R}^n:\rho(M,M_0)=\varepsilon\}$-ն կոչվում է M_0 կենտրոնով ε շառավղով **n-չափանի գնդային մակերևույթ (գնդոլորտ)**: $n=1$ դեպքում $M_0(x_0)$ կետի ε շրջակայքն է $U_\varepsilon(M_0)=(x_0-\varepsilon;\ x_0+\varepsilon)$ միջակայքը: Երբ $n=2$, ապա $U_\varepsilon(M_0)$-ն իրենից ներկայացնում է $M_0(x_0;y_0)$ կենտրոնով և ε շառավղով շրջան, իսկ $S_\varepsilon(M_0)$-ն՝ M_0 կենտրոնով և ε շառավղով շրջանագիծ: Երբ $n=3$, ապա $U_\varepsilon(M_0)$-ն իրենից ներկայացնում է $M_0(x_0;y_0;z_0)$ կենտրոնով և ε շառավղով գունդ, իսկ $S_\varepsilon(M_0)$-ն՝ M_0 կենտրոնով և ε շառավղով գնդային մակերևույթ (գնդոլորտ):

Սահմանում 3: Դիցուք G - ն n-չափանի տարածության ենթաբազմություն է $(G\subset\mathbf{R}^n)$: $M_0\in G$ կետը կոչվում է G–ի **ներքին կետ**, եթե գոյություն ունի այդ կետի այնպիսի $U_\varepsilon(M_0)$ շրջակայք,որ $U_\varepsilon(M_0)\subset G$:

Եթե G բազմությունը բաղկացած է միայն ներքին կետերից, ապա այն կոչվում է **բաց**: Դատարկ բազմությունը բաց է, քանի որ այն լինելով կետերից զուրկ, չունի այնպիսի կետ, որը ներքին չլինի: Ամբողջ տարածությունը նույնպես բաց է, քանի որ $\mathbf{R}^n$-ին պատկանող յուրաքանչյուր կետ պարունակվում է $\mathbf{R}^n$-ում իր յուրաքանչյուր շրջակայքի հետ մեկտեղ:

$U_\varepsilon(M_0)$ n-չափանի գունդը բաց բազմություն է, այսինքն՝ $\forall M\in U_\varepsilon(M_0),\ \exists\, U_\delta(M)\subset U_\varepsilon(M_0)$: Իրոք, եթե $\delta=\varepsilon\ \gamma$

$(\gamma=\rho(M_0,M))$, ապա $\forall P\in U_\delta(M)$ կետի համար ունենք $\rho(P,M_0)\le\rho(P,M)+\rho(M,M_0)<\delta+\gamma<\varepsilon-\gamma+\gamma=\varepsilon$: Այսինքն՝ $P\in U_\varepsilon(M_0)$ և, ուրեմն՝ $U_\delta(M)\subset U_\varepsilon(M_0)$:

Բայց, եթե $U_\varepsilon(M_0)$-ին ավելացվի $S_\varepsilon(M_0)$ գնդային մակերևույթին պատկանող գոնե մեկ կետ, ապա պարզ է, որ այն $U_\varepsilon(M_0)$-ի ներքին կետ չէ, ուրեմն ստացված բազմությունը բաց չէ: Իսկ, եթե $U_\varepsilon(M_0)$ գնդից հեռացվի օրինակ M_0 կենտրոնը, ապա պարզ է, որ ստացված $\overset{0}{U}_\varepsilon(M_0)$ գունդը առանց կենտրոնի (M_0 կետի «ծակած» շրջակայքը) կմնա բաց:

Սահմանում 4: A-ն ($A\in R^n$) կոչվում է G ($G\subset R^n$) բազմության կուտակման կետ, եթե $\forall\varepsilon>0\ \exists M\in G\bigcap\overset{0}{U}_\varepsilon(A)$, այսինքն A կետի ցանկացած շրջակայքում կա G-ին պատկանող A-ից տարբեր կետ: Եթե G բազմության յուրաքանչյուր կուտակման կետ պատկանում է իրեն, ապա G-ն կոչվում է փակ:

Եթե տվյալ G բազմությունը զուրկ է կուտակման կետերից (կուտակման կետերի բազմությունը դատարկ է), ապա G-ն փակ է, քանի որ $\varnothing\subset G$: Մասնավորապես, դատարկ և վերջավոր բազմությունները փակ են: Փակ է նաև R^n-ը, քանի, որ R^n-ի յուրաքանչյուր կետ այդ բազմության կուտակման կետ է (և պատկանում է իրեն): Կարելի է ապացուցել, որ $\varnothing$ և R^n բազմություններից բացի չկա R^n-ի այնպիսի ենթաբազմություն,որը լինի միաժամանակ և բաց և փակ:

Խնդիր 2: Դիցուք Z-ը ամբողջ թվերի բազմությունն է: Եթե $m,n\in Z$, ապա նրանց միջև հեռավորությունը սահմանենք՝ $\rho(m,n)=|m-n|$: Ապացուցել, որ (Z,ρ) տարածության մեջ (այն էվկլիդեսյան չէ) յուրաքանչյուր վերջավոր բազմություն և բաց է և փակ:

Դիցուք G-ն R^n-ի ենթաբազմությունն է, նրա կուտակման կետերի բազմությունը նշանակենք G'-ով:

Սահմանում 5: $G\bigcup G'=\overline{G}$ բազմությունը կոչվում է G-ի **փակում:**

Խնդիր 3: Ապացուցել, որ G բազմության փակումը $(\overline{G})$ փակ է:

$U_\varepsilon(M_0)$ գնդի կուտակման կետերի բազմությունն է՝ $U'_\varepsilon(M_0) = U_\varepsilon(M_0) \cup S_\varepsilon(M_0) = \overline{U}_\varepsilon(M_0)$ (փակ գունդ): Եթե $\overline{U}_\varepsilon(M_0)$-ից հեռացնենք, օրինակ կենտրոնը (M_0-ն), ապա ստացված բազմությունը փակ չէ (M_0-ն այդ բազմության կուտակման կետ է): Պարզ է, որ այն նաև բաց չէ:

Սահմանում 6: $A \in \mathbf{R}^n$ կոչվում է G ($G \subset \mathbf{R}^n$) բազմության եզրային կետ, եթե նրա կամայական շրջակայքում կա G-ին պատկանող և՝ չպատկանող կետ: G բազմության բոլոր եզրային կետերի բազմությունը կոչվում է G-ի եզր, այն նշանակում են ∂G: Պարզ է, որ $U_\varepsilon(M_0)$ գնդի եզրն է $S_\varepsilon(M_0)$ գնդային մակերևույթը:

M_0 կետի «ծակված» $\overset{0}{U}_\varepsilon(M_0)$ շրջակայքի եզրն է՝ $S_\varepsilon(M_0) \cup \{M_0\}$:

Խնդիր 4: Ապացուցել, որ բազմության փակումը (տես սահմանում 5) կարելի սահմանել համարժեք ձևով, որպես այդ բազմության և նրա եզրի միավորում:

Սահմանում 7: $\mathbf{R}^n$ ում որոշված

$$(l) = \{(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \; ; \; x_k(t) \in C[\alpha;\beta] \quad (k = 1, \ldots, n)\}$$

բազմությունը կոչվում է անընդհատ կոր, տրված պարամետրական տեսքով, t-ն կոչվում է պարամետր: $M(t_0) = (x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0))$-ն անվանում են պարամետրի t_0 արժեքին ($t_0 \in [\alpha;\beta]$) համապատասխան (l) կորի կետ, իսկ $A(x_1(\alpha), \ldots, x_n(\alpha))$-ն և $B(x_1(\beta), \ldots, x_n(\beta))$-ն՝ (l) կորի ծայրակետեր: Այդ դեպքում ասում են, որ (l)-ը միացնում է A-ն, B-ին և գրում են՝ $(l) = \cup AB$: Կորը կոչվում է պարզ, եթե $t_1 \neq t_2 \Rightarrow M(t_1) \neq M(t_2)$: Եթե պարզ լինելու պայմանը խախտվում է միայն մի դեպքում՝ $\alpha \neq \beta$, բայց՝ $A = B$, ապա կորը կոչվում է պարզ փակ:

Սահմանում 8: G ($G \subset \mathbf{R}^n$) բազմությունը կոչվում է կապակցված, եթե $\forall A, B \in G$ կետերի համար գոյություն ունի նրանց միացնող անընդհատ կոր $(l) = \cup AB$, այնպիսին, որ՝ $(l) \subset G$:

Օրինակ, $U_\varepsilon(M_0)$, $\overline{U}_\varepsilon(M_0)$ և $\overset{0}{U}_\varepsilon(M_0)$ բազմությունները կապակցված են:

Սահմանում 9: $G\ (G \subset \mathbf{R}^2)$ կապակցված բազմությունը կոչվում է միակապ, եթե ինչպիսի անընդհատ փակ (l) կոր էլ վերցնենք $((l) \subset G)$, նրանով սահմանափակված G բազմության G' մասը $(\partial G' = (l))$ պարունակվում է G-ում $(G' \subset G)$: Դա նշանակում է, որ G-ի եզրը (∂G)-ն բաղկացած է մեկ անընդհատ փակ կորից:

Եթե կապակցված G բազմության եզրը բաղկացած է n հատ իրար հետ չհատվող անընդհատ փակ կորերից (առանձին կետերից), ապա G-ն կոչվում է n կապանի: Օրինակ, $U_\varepsilon(M_0)$-ն միակապ է, իսկ $\overset{0}{U}_\varepsilon(M_0)$-ն «ծակած» շրջակայքը՝ երկկապ է, քանի որ նրա եզրը բաղկացած է $S_\varepsilon(M_0)$ շրջանագծից և $\{M_0\}$-ից:

Սահմանում 10: $G\ (G \subset \mathbf{R}^n)$ բաց կապակցված բազմությունը կոչվում է **տիրույթ**: Օրինակ, $U_\varepsilon(M_0)$ և $\overset{0}{U}_\varepsilon(M_0)$ բազմությունները տիրույթ են:

2. ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅՈՒՆԸ $\mathbf{R}^n$ - ՈՒՄ. n- ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱ, ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՍԱՀՄԱՆ

Սահմանում 1: Կասենք, որ $\left\{M_k\left(x_1^{(k)},\dots,x_n^{(k)}\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$ $\mathbf{R}^n$-ին պատկանող կետերի հաջորդականությունը զուգամիտում է $A(a_1,\dots,a_n) \in \mathbf{R}^n$-ին ($\lim\limits_{k\to\infty} M_k = A$), եթե՝ $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(M_k, A) = 0$:

Խնդիր 1: Ապացուցել, որ $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(M_k, A) = 0 \quad \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_i^{(k)} = a_i$, $i = 1,\dots,n$:

Թեորեմ 1: Եթե $A \in \mathbf{R}^n$ $G\ (G \subset \mathbf{R}^n)$-ի կուտակման կետ է, ապա գոյություն ունի $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ հաջորդականություն այնպիսին, որ $M_k \in G$, $M_k \neq A$, $M_k \underset{k\to\infty}{\to} A$: ■

Ապացուցում: Քանի որ $A \in \mathbf{R}^n$ G-ի կուտակման կետ է, ապա կամայական k բնական թվի համար $\exists M_k \in G \bigcap \mathring{U}_{\frac{1}{k}}(A)$ (տվյալ k-ի համար, նշված պայմանին բավարարող կետերից ընտրում ենք որևէ մեկը): Այսպիսով ստացվում է $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ հաջորդականություն, որի համար

$$0 < \rho(M_k, A) < \frac{1}{k} \quad (k = 1, 2, \ldots, t):$$

Հետևաբար $\lim\limits_{k\to\infty} M_k = A$: ■

Դիցուք տրված է $f: G \to \mathbf{R}$ $(G \subset \mathbf{R}^n)$ ֆունկցիա: Այսինքն՝ $\forall M(x_1, \ldots, x_n) \in G$ կետին որոշակի (f) օրենքով համապատասխանության մեջ է դրվում մեկ թիվ՝ $f(x_1, \ldots, x_n) = f(M)$: Այն կոչվում է n-փոփոխականի ֆունկցիա: G-ն կոչվում է f - ի որոշման տիրույթ: Եթե ֆունկցիան տրված է բանաձևով, ապա որոշման տիրույթ ասելով հասկանում ենք գոյության տիրույթը, այսինքն՝ այն բոլոր կետերի բազմությունը, որտեղ իմաստ ունի այդ բանաձևը:

Սահմանում 2: Դիցուք A - ն G-ի կուտակման կետ է: Կասենք, որ $f(M)$ ֆունկցիայի սահմանը $A(a_1, \ldots a_n)$ կետում հավասար է α-ի ($\alpha \in \mathbf{R}$) և կգրենք $\lim\limits_{M\to A} f(M) = \lim\limits_{\substack{x_1\to a_1 \\ \cdots\cdots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, \ldots, x_n) = \alpha$, եթե՝

1° (հաջորդականության լեզվով, կամ ըստ Հայնեի)

$$\forall\, M_k \in G,\, M_k \neq A,\, M_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} A \;:\; f(M_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \alpha:$$

2° ($(\varepsilon - \delta)$ լեզվով, կամ ըստ Կոշիի)

$$\forall \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta(\varepsilon) > 0,\, \forall M \in G,\; 0 < \rho(M, A) < \delta \;:\; \left| f(M) - \alpha \right| < \varepsilon:$$

Թեորեմ 2: 1° և 2° սահմանումները իրար համարժեք են:

Այս թեորեմի և մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի համապատասխան թեորեմի ապացույցները, ըստ էության իրարից չեն տարբերվում: Ուստի, ընդունենք այն առանց ապացույցի:

Օրինակ1: Դիցուք $f(x, y) = \dfrac{x^2 \cdot y^2}{x^2 + y^2}$: Այս ֆունկցիան որոշված չէ միայն $(0,0)$ կետում: Պահանջվում է հաշվել՝ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\to 0}} f(x,y)$: Ունենք՝

$$0 \le f(x,y) = \frac{x^2 \cdot y^2}{x^2 + y^2} \le \frac{x^2 \cdot y^2}{x^2} = y^2,$$ որտեղից՝ $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\to 0}} y^2 = 0$$

(համարել ենք, որ $x \neq 0$, եթե $x=0$, $y \neq 0$, ապա պնդումը ակնհայտ է):

Քանի որ ֆունկցիայի սահմանը սահմանվում է նաև հաջորդականության լեզվով, ապա այն օժտված է բոլոր այն հատկություններով ինչ հաջորդականության սահմանը, օրինակ, այստեղ նույնպես գործում է «ոստիկանների» կանոնը [1]:

Օրինակ 2: Ապացուցենք, որ $\nexists \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ $\left(f(x,y) = \dfrac{x \cdot y}{x^2 + y^2}\right)$:

Օգտվենք 1° սահմանումից: Բավական է գտնենք երկու M_n, M_n' հաջորդականություններ ձգտող $M_0(0;0)$ կետին, այնպիսիք, որ $f(M_n), f(M_n')$ հաջորդականությունները ձգտեն տարբեր թվերի: Վերցնենք $M_n(0;\frac{1}{n})$, $M_n'(\frac{1}{n};\frac{1}{n})$ կետերի հաջորդականությունները:

Ունենք՝ $M_n, M_n' \underset{n\to\infty}{\to} M_0(0,0)$ բայց՝ $f(M_n) = 0 \underset{n\to\infty}{\to} 0$, $f(M_n') = \frac{1}{2} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{2}$:

Ուրեմն վերը նշված սահմանը գոյություն չունի:

Սահմանում 3: Դիցուք f ֆունկցիան որոշված է $\mathbf{R}^2 \setminus U_\gamma(0;0)$-ում: Կասենք, որ $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} f(x;y) = A$ $(A \in \mathbf{R})$, եթե՝

1° (ըստ Հայնեի) $x_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$ և $y_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty \Rightarrow f(x_n, y_n) \underset{n\to\infty}{\to} A$,

2° (ըստ Կոշիի) $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > \gamma, \forall (x,y),\ x^2 + y^2 > \delta^2$: $|f(x;y) - A| < \varepsilon$:

Օրինակ 3: Հաշվել $A = \lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{xy}{x^4 + y^4}$: Քանի որ $|xy| \le \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$,

$$=\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2y^2}\underset{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}{\to}0 \Rightarrow A=0:$$

Սահմանում 4: Դիցուք f-ը որոշված է $R^2\backslash U_\gamma(0;0)$-ում: Կասենք, որ $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} f(x,y)=\infty$, եթե՝

$$1^\circ\ x_n\underset{n\to\infty}{\to}\infty \text{ և } y_n\underset{n\to\infty}{\to}\infty \Rightarrow f(x_n,y_n)\underset{n\to\infty}{\to}\infty,$$

$$2^\circ\ \forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta(\varepsilon)>0, \forall(x,y),\ x^2+y^2>\delta^2:\ |f(x,y)|>\varepsilon\ (\delta>\gamma):$$

Նույն կերպ կարելի է ձևակերպել ֆունկցիայի սահմանի բացակայող սահմանումները:

3. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՍԱՀՄԱՆԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Թեորեմ 1: Դիցուք $f, g : D\to\mathbf{R}^1\ (D\subset\mathbf{R}^n)$, M_0-ն D-ի կուտակման կետ է: Եթե $\exists\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=A\in\mathbf{R}$, $\exists\lim\limits_{M\to M_0} g(M)=B\in\mathbf{R}$, ապա՝

1. $\exists\lim\limits_{M\to M_0}(f(M)\pm g(M))=A\pm B$, **2.** $\exists\lim\limits_{M\to M_0}(f(M)\cdot g(M))=A\cdot B$,

3. $\exists\lim\limits_{M\to M_0}\dfrac{f(M)}{g(M)}=\dfrac{A}{B}\ (B\neq 0):$

Թեորեմի ապացույցն անմիջապես հետևում է ֆունկցիայի սահմանի սահմանումից ըստ Հայնեի և հաջորդականության սահմանի համապատասխան հատկություններից: Ապացուցենք, օրինակ երկրորդ հատկությունը: Դիցուք ունենք $\forall M_k\in G, M_k\underset{k\to\infty}{\to}M_0, M_k\neq M_0$: Այդ դեպքում՝ $f(M_k)\underset{k\to\infty}{\to}A$, $g(M_k)\underset{k\to\infty}{\to}B$ և, ուրեմն՝

$$\lim_{k\to\infty}\left[f(M_k)\cdot g(M_k)\right]=\left[\lim_{k\to\infty}f(M_k)\right]\cdot\left[\lim_{k\to\infty}g(M_k)\right]=A\cdot B:$$

Այստեղից հետևում է, որ $\exists \lim_{M\to M_0}(f(M)\cdot g(M))=A\cdot B$: ■

4. ԱՆԸՆԴՀԱՏՈՒԹՅՈՒՆ: ԱՆԸՆԴՀԱՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Սահմանում 1: Դիցուք $f:G\to\mathbf{R}$ $(G\subset\mathbf{R}^n)$ և M_0-ն $(M_0\in G)$ G բազմության կուտակման կետ է: Կասենք, որ f-ը անընդհատ է M_0 կետում, եթե՝ $\exists\lim_{M\to M_0}f(M)$ և այն հավասար է $f(M_0)$-ի ($\lim_{M\to M_0}f(M)=f(M_0)$): Այսինքն՝

1° $\forall M_n\underset{n\to\infty}{\to}M_0,\ M_n\in G:\ f(M_n)\underset{n\to\infty}{\to}f(M_0)$: Կամ, համարժեք կերպ՝

2^0 $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon,M_0)>0,\ \forall M\in G\bigcap U_\delta(M_0):\left|f(M)-f(M_0)\right|<\varepsilon$:

Դիտողություն 1: Նկատենք, որ ֆունկցիայի սահմանի սահմանման մեջ ընգծվող $M\neq M_0$ պայմանը այստեղ ավելորդ է, քանի որ այս դեպքում ունենք ակնհայտ $0<\varepsilon$ պնդումը:

Թեորեմ 1. Անընդհատ ֆունկցիաների գումարը, տարբերությունը, արտադրյալը և քանորդը (այն կետում, որտեղ հայտարարը զրո չէ) անընդհատ է:

Ապացուցում. Ապացուցենք, օրինակ վերջին պնդումը: Տրված է $f,g:G\to R$ $(G\subset R^n)$, $M_0\in G$ (M_0-ն G-ի կուտակման կետ է) և այդ ֆունկցիաները անդիատ են M_0 կետում $(g(M_0)\neq 0)$: Օգտվելով ֆունկցիաի սահմանի հատկությունից ստանում ենք՝

$$\lim_{M\to M_0}\frac{f(M)}{g(M)}=\frac{\lim_{M\to M_0}f(M)}{\lim_{M\to M_0}g(M)}=\frac{f(M_0)}{g(M_0)}:\quad ■$$

Թեորեմ 2: (անընդհատ ֆունկցիայի նշանապահպանության մասին):

Դիցուք՝ $f:G\to\mathbf{R}$ $(G\subset\mathbf{R}^n)$, M_0-ն G-ի ներքին կետ է: Եթե f-ը անընդհատ է M_0 կետում և $f(M_0)>0$ $(f(M_0)<0)$, ապա գոյություն ունի M_0-կետի $U_\delta(M_0)\subset G$ շրջակայք, այնպիսին որ

$\forall M \in U_\delta(M_0) : f(M) > 0 \ (f(M) < 0)$:

Ապացուցում: Այն, որ M_0- ն ներքին կետ է նշանակում է, որ $\exists U_\gamma(M_0) \subset G$: Դիցուք, որոշակիության համար $f(M_0) > 0$: Անընդհատությունից M_0 կետում, ստանում ենք՝ $\varepsilon = f(M_0) > 0$ թվի համար $\exists U_\delta(M_0) \subset G \ (\delta \le \gamma)$ այնպիսին, որ $\forall M \in U_\varepsilon(M_0) : |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$: Այստեղից ստանում ենք՝ $f(M) > f(M_0) - f(M_0) = 0 \Rightarrow f(M) > 0$: ■

Հաջորդ թեորեմը, պարզության համար ձևակերպենք և ապացուցենք մասնավոր $n = 2$ դեպքում:

Թեորեմ 3 **(բարդ ֆունկցիայի անընդհատության մասին):**

Դիցուք $f(x,y)$ ֆունկցիան որոշված է $M_0(x_0,y_0)$ կետի $U_\mu(M_0)$ շրջակայքում և անըդհատ է այդ կետում, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ ֆունկցիաները որոշված են t_0 կետի $U_\gamma(t_0)$ շրջակայքում և անընդհատ են t_0 կետում ($\varphi(t_0) = x_0$, $\psi(t_0) = y_0$): Այդ դեպքում $g(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$ բարդ ֆունկցիան որոշված է t_0 կետի ինչ-որ շրջակայքում և անընդհատ է այդ կետում:

Ապացուցում: Քանի որ f–ը անընդհատ է M_0 կետում, ապա՝ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0 \ (\delta < \mu)$, $\forall M \in U_\delta \ (M_0) : |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$: $\varphi(t), \psi(t)$ ֆունկցիաների անընդհատությունից t_0 կետում հետևում է՝ $\exists U_\eta(t_0)$

$$(\eta < \gamma) \ \forall t \in U_\eta(t_0) : |\varphi(t) - \varphi(t_0)| < \frac{\delta}{\sqrt{2}} \text{ և } |\psi(t) - \psi(t_0)| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}:$$

Ուրեմն $\forall t \in U_\eta(t_0)$ համար ունենք, որ $(\varphi(t), \psi(t))$, $(\varphi(t_0), \psi(t_0))$ կետերի միջև հեռավորությունը՝ $\rho < \sqrt{2\frac{\delta^2}{2}} = \delta$: Քանի որ $\varphi(t_0) = x_0$, $\psi(t_0) = y_0$, ապա $(\varphi(t_0), \psi(t_0)) = M_0$ և, ուրեմն՝ $(\varphi(t), \psi(t)) \in U_\delta(M_0)$ Այստեղից՝ $|g(t) - g(t_0)| < \varepsilon$: Այսպիսով՝ $g(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$ բարդ ֆունկցիան որոշված է $U_\eta(t_0)$ շրջակայքում և անընդհատ է t_0 կետում: ■

Սահմանում 2: Դիցուք $f : G \to \mathbf{R}$ $(G \subset \mathbf{R}^n)$: Կասենք, որ f-ը անընդհատ է G-ում, եթե f-ը անդիհատ է G-ի յուրաքանչյուր M_0 կետում: Այսինքն՝

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon, M_0) > 0 \ \forall M \in G, \rho(M, M_0) < \delta : \left| f(M) - f(M_0) \right| < \varepsilon :$$

Վայերշտրասի թեորեմները. Փակ, սահմանափակ բազմության վրա անընդհատ ֆունկցիան սահմանափակ է և ունի փոքրագույն ու մեծագույն արժեքներ:

Թեորեմների ապացույցները, ըստ էության չեն տարբերվում մեկ փոփոխականի դեպքում բերված համապատասխան թեորեմների ապացույցներից [1]:

Բոլցանո – Կոշիի թեորեմները: Եթե f ֆունկցիան անդիհատ է կապակցված G բազմության վրա $\left(G \subset \mathbf{R}^n\right)$ և՝

1° $\quad \exists \ A, B \in G : \ f(A) > 0, \ f(B) < 0,$ ապա $\exists \, M_0 \in G : \ f(M_0) = 0$ (M_0 - ն A, B կետերը միացնող և G - ի մեջ պարունակվող կորի կետ է):

2° $\quad \exists \ A, B \in G : \ f(A) < f(B),$ ապա $\forall \mu \in \left(f(A); f(B) \right)$ $\exists \, M \in G : \ f(M) = \mu :$

Ապացուցում: Քանի, որ G- ն կապակցված է, ապա գոյություն ունի A – ն B – ին միացնող (l) անընդհատ կոր այնպիսին,որ $(l) \subset G$: Այսինքն

$$(l) = \left\{ \left(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t) \right); \ t \in [a,b] \right\} \quad \left(\varphi_k \in C[a,b] \,, k = 1, \dots, n \right):$$

Դիցուք $t = a$ - ին համապատասխանում է A - ն, իսկ $t = b$ - ին՝ B - ն, այսինքն՝ $A(\varphi_1(a), \dots, \varphi_n(a)), B(\varphi_1(b), \dots, \varphi_n(b))$: Դիտարկենք $g(t) = f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$, $t \in [a, b]$ բարդ ֆունկցիան: Այն անընդհատ է, որպես անընդհատ ֆունկցիաներից կազմված բարդ ֆունկցիա (տես թ.3): Ընդ որում՝ $g(a) = f(A) > 0, \ g(b) = f(B) < 0$: Օգտվելով Բոլցանո – Կոշիի թեորեմից [1],կստանանք՝ $\exists \, m_0 \in (a, b) \ : \ g(m_0) = 0$: Բայց $M_0 \left(\varphi_1(m_0), \dots, \varphi_n(m_0) \right) \in (l)$ և, քանի որ $(l) \subset G$, ապա $M_0 \in G$: Ստացանք, որ $f(M_0) = 0$, այսպիսով թեորեմի առաջին մասը ապացուցված է: Երկրորդ մասը ապացուցվում է նույն կերպ ինչ մեկ փոփոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում[1]: ■

Սահմանում 3. Դիցուք $f: G \to R$ $(G \subset R^n)$: Կասենք, որ f - ը հավասարաչափ անընդհատ է G վրա, եթե՝

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall M, M_0 \in G, \rho(M, M_0) < \delta : |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$$

(համեմատիր սահմանում 2.-ի հետ):

Պարզ է, որ հավասարաչափ անընդհատությունից հետևում է անընդհատությունը: Հակառակը, ընդհանրապես ասած ճիշտ չէ (տես ստորև օրինակ 1): Բայց ճիշտ է հետևյալ պնդումը:

Կանտորի թեորեմը: Փակ սահմանափակ բազմության վրա անընդհատ ֆունկցիան հավասարաչափ անընդհատ է:

Թեորեմի ապացույցը, ըստ էության չի տարբերվում մեկ փոփոխականի դեպքում բերվածից (տես [1]):

Խնդիր 1: Ապացուցել որ ինչպես և մեկ փոփոխականի դեպքում, այստեղ նույնպես ճիշտ է ոչ հավասարաչափ անընդհատության հետևյալ հայտանիշը:

Եթե գոյություն ունեն $M^{(k)}, M_0^{(k)} \in G$ հաջորդականություններ, այնպիսիք որ՝ $\rho\left(M^{(k)}, M_0^{(k)}\right) \underset{k \to \infty}{\to} 0$, բայց՝ $\left|f\left(M^{(k)}\right) - f\left(M_0^{(k)}\right)\right| \underset{k \to \infty}{\to} \alpha > 0$ (α -ն կարող է լինել նաև $+\infty$), ապա f - ը հավասարաչափ անընդհատ չէ G - ում:

Օրինակ 1: Դիցուք $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ $(0 < x^2 + y^2 < R^2)$: Պարզ է, որ այս ֆունկցիան անընդհատ է նշված շրջանում, բայց այն հավասարաչափ անընդհատ չէ այդտեղ: Իրոք՝ $M^{(k)}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}, 0\right)$, $M_0^{(k)}\left(\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{k}}, 0\right)$ հաջորդականությունները զուգամիտում են $(0,0)$ կետին և, ուրեմն՝ $\rho\left(M^{(k)}, M_0^{(k)}\right) \underset{k \to \infty}{\to} 0$, բայց

$$\left|f\left(M^{(k)}\right) - f\left(M_0^{(k)}\right)\right| = \left|\ln\frac{1}{k} - \ln\frac{e}{k}\right| = \ln e = 1 \underset{k \to \infty}{\to} 1 > 0:$$

5. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՄԱՍՆԱԿԱՆ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐ, ԴԻՖԵՐԵՆՑԵԼԻՈՒԹՅՈՒՆ, ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ

Դիցուք $f:G\to\mathbf{R}$ $\left(G\subset\mathbf{R}^n\right)$ և $M_0\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\dots,x_n^{(0)}\right)$-ն G-ի ներքին կետ է ($\exists U_\delta(M_0)\subset G$): Հաստատագրենք $x_2^{(0)},\dots,x_n^{(0)}$ փոփոխականները, կստանանք մեկ փոփոխականի ֆունկցիա՝ $g(x_1)=$ $=f\left(x_1,x_2^{(0)},\dots,x_n^{(0)}\right)$, որը որոշված է $x_1^{(0)}$-ի $U_\delta\left(x_1^{(0)}\right)$ շրջակայքում:

Սահմանում 1: Եթե գոյություն ունի g ֆունկցիայի ածանցյալը $x_1^{(0)}$ կետում, ապա այն կոչվում է f ֆունկցիայի մասնական ածանցյալ ըստ x_1 փոփոխականի և գրվում է $\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)$, կամ՝ $f'_{x_1}(M_0)$: Այսպիսով՝

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)=g'\left(x_1^{(0)}\right)=\lim_{\Delta x_1\to0}\frac{\Delta_{x_1}f(M_0)}{\Delta x_1},\qquad \text{որտեղ՝}\qquad \Delta_{x_1}f(M_0)=$$
$$=f\left(x_1^{(0)}+\Delta x_1,x_2^{(0)},\dots,x_n^{(0)}\right)-f\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\dots,x_n^{(0)}\right)$$

և կոչվում է ֆունկցիայի մասնական աճ ըստ x_1-ի: Նույն ձևով սահմանվում են մասնական ածանցյալները ըստ մյուս փոփոխականների:

Օրինակ 1: Հաշվենք $f(x,y)=x^{\sin 2y}$ $(x>0)$ ֆունկցիայի ածանցյալը ըստ առանձին փոփոխականների: $f'_x(x,y)=\sin 2y\cdot x^{\sin 2y-1}$, $f'_y(x,y)=x^{\sin 2y}\cdot\ln x\cdot 2\cos 2y$:

Հետագա շարադրանքում, պարզության համար, հիմնականում կդիտարկենք երկու փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքը:

Սահմանում 2: Դիցուք՝ $f:G\to\mathbf{R}$ $\left(G\subset\mathbf{R}^2\right)$, $M_0(x_0,y_0)$-ն G-ի ներքին կետ է ($\exists U_\delta(M_0)\subset G$): Կասենք, որ f-ը դիֆերենցելի է M_0 կետում, եթե ինչպիսին էլ լինեն $\Delta x,\Delta y$ աճերը՝ $M(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\in U_\delta(M_0)$ $\left(0<\rho=\rho(M_0,M)=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}<\delta\right)$, տեղի ունենա հետևյալը՝

$$\Delta f(M_0)=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+o(\rho),\tag{1}$$

որտեղ A–ն, B-ն հաստատուններ են (կախված M_0-ից), $\Delta f(M_0)$-ն ֆունկցիայի աճն է՝ $\Delta f(M_0)=f(M)-f(M_0)$, $o(\rho)$ -ն ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր է, քան ρ–ն, երբ Δx, Δy աճերը ձգտում են զրոյի, այսինքն՝ $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{o(\rho)}{\rho}=0$:

Դիտողություն 1: Նկատենք, որ $\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y=o(\rho)$, որտեղ α– ն և β-ն անվերջ փոքրեր են, երբ Δx, Δy աճերը ձգտում են զրոյի: Իրոք՝ $\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y=o(\rho)$, քանի որ՝ $\left|\frac{\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y}{\rho}\right|\le$

$$\le|\alpha|\frac{|\Delta x|}{\rho}+|\beta|\frac{|\Delta y|}{\rho}\le|\alpha|+|\beta|\underset{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}{\longrightarrow}0\quad(\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\ge|\Delta x|\Rightarrow\frac{|\Delta x|}{\rho}\le 1,(\frac{|\Delta y|}{\rho}\le 1)):$$

Ճիշտ է նաև հակառակը՝ եթե $g(\Delta x,\Delta y)=o(\rho)$ (ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր է, քան ρ–ն, երբ $\Delta x,\Delta y$ աճերը ձգտում են զրոյի), ապա

$$g(\Delta x,\Delta y)=o(\rho)=\frac{o(\rho)}{\rho^2}\left(\Delta x^2+\Delta y^2\right)=\frac{o(\rho)}{\rho}\cdot\frac{\Delta x}{\rho}\cdot\Delta x+\frac{o(\rho)}{\rho}\cdot\frac{\Delta y}{\rho}\cdot\Delta y=$$

$=\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y$, որտեղ $\alpha=\frac{o(\rho)}{\rho}\cdot\frac{\Delta x}{\rho}$, $\beta=\frac{o(\rho)}{\rho}\cdot\frac{\Delta y}{\rho}$ $\Big(|\alpha|\le\frac{|o(\rho)|}{\rho}\underset{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}{\longrightarrow}0$, $|\beta|\le\frac{|o(\rho)|}{\rho}\underset{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}{\longrightarrow}0\Big)$:

Թեորեմ 1: Դիցուք՝ $f:G\to\mathbf{R}$ $(G\subset\mathbf{R}^2)$, $M_0(x_0,y_0)$- ն G-ի ներքին կետ է ($\exists U_\delta(M_0)\subset G$): Որպեսզի f– ը լինի դիֆերենցելի M_0 կետում անհրաժեշտ է, որ այդ կետում՝ $\exists f'_x(M_0)=A$, $\exists f'_y(M_0)=B$:

Ապացուցում: Եթե (1) –ի մեջ համարենք $\Delta y=0$, $0<|\Delta x|<\delta$ և հաշվի առնենք դիտողություն 1–ը, ապա կստանանք՝ $\Delta f(M_0)=$

$= \Delta_x f(M_0) = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$: Որտեղից՝ $\dfrac{\Delta_x f(M_0)}{\Delta x} = A + \alpha \underset{\Delta x \to 0}{\to} A$:

Այսինքն՝ $\exists f'_x(M_0) = A$: Նույն կերպ ապացուցվում է, որ $\exists f'_y(M_0) = B$: ■

Դիտողություն 2: Հաշվի առնելով դիտողություն1-ը և թեորեմ1 – ը, (1) – ը կարելի է ներկայացնել հետևյալ համարժեք տեսքով՝

$$\Delta f(M_0) = f'_x(M_0) \cdot \Delta x + f'_y(M_0) \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y, \qquad (2)$$

որտեղ α -ն և β- ն անվերջ փոքրեր են, երբ Δx , Δy աճերը ձգտում են զրոյի:

Այդ ֆունկցիաներ որոշված չեն, երբ $\Delta x = \Delta y = 0$: Սակայն, երբեմն նպատակահարմար է, որ (2)-ը ճիշտ լինի նաև այդ դեպքում ($\Delta x = \Delta y = 0$): Համարենք, որ $\alpha(0,0) = \beta(0,0) = 0$ (այս ֆունկցիաների անընդհատ շարունակությունը մինչև $(0,0)$ կետը): Այժմ, երբ $\Delta x = \Delta y = 0$ (2) – ի ձախ և աջ մասերը իմաստ ունեն, իրար հավասար են և հավասար են զրոյի:

Դիտողություն 3: Մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում դիֆերենցելիությունը համարժեք է ածանցելիությանը: Բայց մի քանի փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում դա այդպես չէ, այսինքն ֆունկցիայի մասնական ածանցյալների գոյությունից չի հետևում դիֆերենցելիությունը:

Օրինակ 2: Դիցուք՝ $f(x,y) = \sqrt{|x \cdot y|}$: Քանի որ $f(x,0) = f(0,y) = 0$, ապա $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$: Եթե f -ը լիներ դիֆերենցելի $(0,0)$ կետում, ապա ճիշտ կլիներ՝ $\Delta f(0,0) = o(\rho)$ պայմանը: Բայց՝

$$\frac{\Delta f(0,0)}{\rho} = \frac{\sqrt{|\Delta x \cdot \Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = g(\Delta x, \Delta y) \underset{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}}{\not\to} 0,$$ քանի որ

$$g\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \underset{n \to \infty}{\to} \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0:$$ Ուրեմն այս ֆունկցիան դիֆերենցելի չէ $(0,0)$ կետում:

Թեորեմ 2: Դիցուք՝ $f : G \to \mathbf{R}$ $(G \subset \mathbf{R}^2)$, $M_0(x_0, y_0)$- ն G - ի ներքին կետ է ($\exists U_\delta(M_0) \subset G$): Որպեսզի f -ը լինի դիֆերենցելի M_0

կետում բավարար է, որ այն $U_\delta(M_0)$ շրջակայքում ունենա $f'_x(M), f'_y(M)$ մասնական ածանցյալներ, անընդհատ M_0 կետում:

Ապացուցում: Ֆունկցիայի աճը ձևափոխենք հետևյալ կերպ՝
$\Delta f(x_0 y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$
$= [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)] + [f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)]$
$\left(\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta\right)$:

Կիրառենք Լագրանժի թեորեմը (վերջավոր աճերի բանաձևը) $f(x_0 + \Delta x, y)$ $(y \in [y_0; y_0 + \Delta y])$ և $f(x, y_0)$ $(x \in [x_0; x_0 + \Delta x])$ ֆունկցիաների նկատմամբ, կստանանք՝

$$\Delta f(M_0) = f'_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta_1 \cdot \Delta y) \cdot \Delta y + f'_x(x_0 + \theta_2 \cdot \Delta x, y_0) \cdot \Delta x$$

$(0 < \theta_k < 1, k = 1,2)$:

Այսպիսով՝ $\Delta f(M_0) = f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y$, որտեղ $\alpha = f'_x(x_0 + \theta_2 \Delta x, y_0) - f'_x(x_0, y_0) \underset{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}}{\longrightarrow} 0$,

$$\beta = f'_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta_1 \Delta y) - f'_y(x_0, y_0) \underset{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}}{\longrightarrow} 0:$$

Հաշվի առանք այն, որ $(x_0 + \theta_2 \Delta x, y_0)$, $(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta_1 \Delta y)$ արգումենտները ձգտում են M_0-ի, երբ Δx, Δy աճերը ձգտում են զրոյի և f'_x, f'_y ֆունկցիաների անընդհատությունը M_0 կետում: ■

Դիտողություն 4: Թեորեմ 2–ը տալիս է դիֆերենցելիության բավարար, բայց ոչ անհրաժեշտ պայմաններ:

Օրինակ 3: Դիցուք $f(x,y) = (x^2 + y^2) \cdot \cos\dfrac{1}{x^2 + y^2}$, երբ $x^2 + y^2 > 0$, և $f(0,0) = 0$: Ցույց տանք, որ այս ֆունկցիան դիֆերենցելի է $M_0(0,0)$ կետում, սակայն նրա մասնական ածացյալները ոչ միայն անընդհատ չեն M_0 կետում, այլև անսահմանափակ են M_0-ի կամայական շրջակայքում:

$$\frac{\partial}{\partial x}f(M_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2}{\Delta x}\cdot\cos\left(\frac{1}{\Delta x^2}\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot\cos\left(\frac{1}{\Delta x^2}\right)=0:$$

Նույն կերպ ստանում ենք՝ $\frac{\partial}{\partial y}f(M_0)=0$: Մնում է ստուգել, որ $\Delta f(M_0)=o(\rho)$: Իրոք՝

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\cdot\left(\left(\Delta x^2+\Delta y^2\right)\cdot\cos\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}-0\right)=$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\cdot\cos\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}=0:$$

Այժմ համոզվենք այն բանում, որ մասնական ածանցյալները ոչ միայն անընդհատ չեն M_0 կետում այլ նույնիսկ անսահմանափակ են M_0-ի ցանկացած շրջակայքում: Իրոք՝ $\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=2x\cdot\cos\frac{1}{x^2+y^2}+$ $+\left(x^2+y^2\right)\frac{2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\sin\frac{1}{x^2+y^2}$: Դիտարկենք M_0- ին ձգտող $M_n\left(\left(\frac{\pi}{2}+2\pi\cdot n\right)^{-0,5},0\right)$ հաջորդականությունը: Այդ դեպքում $\frac{\partial}{\partial x}f(M_n)=2\sqrt{\frac{\pi}{2}+2\pi\cdot n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}+\infty$: Այստեղից հետևում է, որ $\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$- ը ոչ միայն անընդհատ չէ M_0 կետում, այլ նույնիսկ անսահմանափակ է M_0- ի ցանկացած շրջակայքում: Մյուս՝ $\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$ մասնական ածանցյալի նույնպիսի հատկությունը ապացուցվում է նմանակերպ:

Դիտողություն 5: Ֆունկցիայի դիֆերենցելիությունից M_0 կետում հետևում է այդ կետում անընդհատությունը: Իրոք, անդհատությունը M_0 կետում նշանակում է՝ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$, կամ՝

$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\right]=0$ $(\Delta x=x-x_0,\ \Delta y=y-y_0)$,

այսինքն՝ $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta f(M_0)=0$: Վերջինը հետևում է դիֆերենցելիության (2) պայմանից:

Սահմանում 3: Դիցուք f ֆունկցիան դիֆերենցելի է $M(x,y)$ կետում: Այդ դեպքում $df(M)=f'_x(M)\Delta x+f'_y(M)\Delta y$ արտահայտությունը կոչվում է f-ի դիֆերենցիալ M_0 կետում: Անկախ փոփոխականի դիֆերենցիալը, ըստ սահմանման նրա աճն է՝ $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$: Ուրեմն՝ $\boxed{df(x,y)=f'_x(x,y)\cdot dx+f'_y(x,y)\cdot dy}$:

Օրինակ 3: Եթե $f(x.y)=x^{\sin 2y}$ $(x>0)$, ապա $df(x,y)=$ $=\sin 2y\cdot x^{\sin 2y-1}\cdot dx+x^{\sin 2y}\cdot\ln x\cdot 2\cos 2y\cdot dy$ (f ֆունկցիայի դիֆերենցելիությունը հետևում է, նրա ածանցյալների անընդհատությունից):

Թեորեմ 4: (բարդ ֆունկցիայի ածանցման մասին): Դիցուք $f:G\to\mathbf{R}$, $M_0(x_0,y_0)$-ն G-ի ներքին կետ է: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ ֆունկցիաները որոշված են t_0 կետի $U_\gamma(t_0)$ շրջակայքում, $\varphi(t_0)=x_0$, $\psi(t_0)=y_0$: Եթե f-ը դիֆերենցելի է M_0 կետում, իսկ $\varphi(t),\psi(t)$ ֆունկցիաները դիֆերենցելի են (ածանցելի են) t_0 կետում, ապա $g(t)=f(\varphi(t),\psi(t))$ բարդ ֆունկցիան որոշված է t_0-ի ինչ-որ շրջակայքում, դիֆերենցելի է t_0 կետում և՝ $g'(t_0)=f'_x(M_0)\cdot\varphi'(t_0)+$ $+f'_y(M_0)\cdot\psi'(t_0)$:

Ապացույց: Քանի որ f ֆունկցիան դիֆերենցելի է G բազմության M_0 ներքին կետում ($\exists\, U_\delta(M_0)\subset G$), ապա՝ $\Delta f(M_0)$ $=f'_x(M_0)\cdot\Delta x+f'_y(M_0)\cdot\Delta y+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y$ $\left(0\le\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}<\delta\right)$:(3)

$x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ ֆունկցիաների դիֆերենցելիությունից t_0 կետում հետեղում է նրանց անընդհատությունը t_0-ում, ուրեմն $\exists U_\gamma(t_0)$ շրջակայք, այնպիսին, որ եթե t_0 փոփոխականին տանք Δt $(0<|\Delta t|<\gamma)$ աճ, ապա $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ ֆունկցիաները կստանան $\Delta x=\Delta\varphi(t_0)=$ $=\varphi(t_0+\Delta t)-x_0$, $\Delta y=\Delta\psi(t_0)=\psi(t_0+\Delta t)-y_0$ աճեր (նրանք կարող են միաժամանակ զրո լինել), այնպիսին, որ $|\Delta x|<\frac{\delta}{\sqrt{2}}, |\Delta y|<\frac{\delta}{\sqrt{2}}$ $(\Rightarrow \rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}<\delta)$: $g(t)$- ն կստանա աճ՝

$$\Delta g(t_0)=f(\varphi(t_0+\Delta t),\psi(t_0+\Delta t))-f(\varphi(t_0),\psi(t_0))=$$

$$=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(M_0)=\Delta f(M_0):$$

Օգտվելով f ֆունկցիայի M_0 կետում դիֆերենցելիության (3) պայմանից, կստանանք՝ $\Delta g(t_0)=\Delta f(M_0)=f'_x(M_0)\cdot\Delta x+f'_y(M_0)\cdot\Delta y+$ $+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y$: (4) Հաշվի առնենք $\varphi(t), \psi(t)$ ֆունկցիաների անընդհատությունը t_0 կետում՝, այսինքն՝ $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta x=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta y=0$ և, ուրեմն՝ $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\alpha=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\beta=0$: (3)-ից ստանում ենք $\frac{\Delta g(t_0)}{\Delta t}=f'_x(M_0)\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}+$ $+f'_y(M_0)\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t}+\alpha\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}+\beta\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t}\underset{\Delta t\to 0}{\to}f'_x(M_0)\cdot\varphi'(t_0)+f'_y(M_0)\cdot\psi'(t_0)+$ $+0\cdot\varphi'(t_0)+0\cdot\psi'(t_0)$: Ուրեմն՝ $\exists\ g'(t_0)=f'_x(M_0)\cdot\varphi'(t_0)+$ $+f'_y(M_0)\cdot\psi'(t_0)$: ■

Դիտողություն 6: Առաջին կարգի դիֆերենցիալի տեսքը անփոփոխ է (ինվարիանտ է): Այսինքն նախորդ թեորեմի պայմաններից բխում է, որ f ֆունկցիայի դիֆերենցիալի տեսքը նույնն է ինչ, եթե x, y փոփոխականները լինեին անկախ: Իրոք՝ $dg(t_0)=df(M_0)=g'(t_0)\cdot dt=$ $=f'_x(M_0)\cdot\varphi'(t_0)\cdot dt+f'_y(M_0)\cdot\psi'(t_0)\cdot dt=f'_x(M_0)\cdot dx+f'_y(M_0)\cdot dy$, այսինքն առաջին կարգի դիֆերենցիալի $df(M_0)=f'_x(M_0)\cdot dx+$ $+f'_y(M_0)\cdot dy$ տեսքը նույնն է ինչ, եթե x, y փոփոխականները լինեին անկախ: Բայց միայն տեսքը, քանի որ այս դեպքում՝

$dx=\varphi'(t_0)\cdot dt$, $dy=\psi'(t_0)\cdot dt$: Իսկ անկախ փոփոխականների դեպքում՝ $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$:

Օրինակ 4: Հաշվենք $df\left(\frac{x}{y^2+1},\operatorname{arctg}(xy)\right)$, որտեղ $f(u,v)$ - ն դիֆերենցելի ֆունկցիա է: Ըստ դիտողություն 6.-ի՝

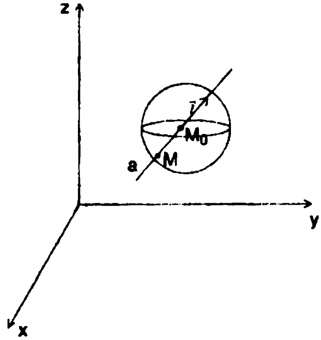
$$df=f'_u\cdot d\left(\frac{x}{y^2+1}\right)+f'_v\cdot d\left(\operatorname{arctg}(xy)\right)=$$

$f'_u\cdot\frac{(y^2+1)\cdot dx-2xy\cdot dy}{(y^2+1)^2}+f'_v\cdot\frac{xdy+ydx}{1+(xy)^2}$ (պարզության համար, այստեղ f ֆունկցիայի մասնական ածանցյալների արգումենտները չեն գրված):

Այժմ ընդհանրացնենք ֆունկցիայի ածանցյալի սահմանումը ըստ առանձին փոփոխականների, դիտարկելով որոշակիություն համար երեք փոփոխականի դեպքը:

6. ԱԾԱՆՑՅԱԼ ՏՎՅԱԼ ՈՒՂՂՈՒԹՅԱՄԲ, ԳՐԱԴԻԵՆՏ

Դիցուք $f(x,y,z)$ ֆունկցիան որոշված է $M_0(x_0,y_0,z_0)$ - կետի $U_\delta(M_0)$ շրջակայքում: $\vec{l}(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ միավոր վեկտոր է, որի սկզբնակետը համընկնում է M_0 կետի հետ, α -ն, β-ն, γ-ն այդ վեկտորի կազմած անկյուններն են համապատասխանաբար Ox, Oy, Oz դրական կիսառանցքների հետ (տես նկ.14):



Նկ. 14

M_0 կետով տանենք $\vec{l}$ վեկտորը պարունակող a ուղիղը: Վերցնենք կամայական

$$M \in \overset{\circ}{U}_\delta(M_0) \cap a$$ կետ: Ուրեմն $\overline{M_0M} \parallel \vec{l} \Rightarrow \overline{M_0M} = \lambda \cdot \vec{l}$

$$(\lambda > 0 \Rightarrow \overline{M_0M} \uparrow\uparrow \vec{l},\ \lambda < 0 \Rightarrow \overline{M_0M} \uparrow\downarrow \vec{l},\ |\lambda| = |\overline{M_0M}|):$$

Սահմանում 1: Եթե գոյություն ունի $\lim\limits_{\lambda \to 0} \dfrac{f(M) - f(M_0)}{\lambda} = \dfrac{\partial f}{\partial l}(M_0)$, ապա այն կոչվում է f ֆունկցիայի ածանցյալ M_0 կետում $\vec{l}$ ուղղությամբ:

Թեորեմ 1: Դիցուք f-ը որոշված է M_0 կետի $U_\delta(M_0)$ շրջակայքում և դիֆերենցելի է M_0 կետում: Այդ դեպքում գոյություն ունի $\dfrac{\partial f}{\partial l}(M_0)$ և՝

$$\frac{\partial f}{\partial l}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \cdot \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \cdot \cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}(M_0) \cdot \cos\gamma \quad (1)$$

Ապացուցում: Քանի որ $M(x,y,z) \in \overset{\circ}{U}_\delta(M_0) \cap a$, ապա՝ $\overline{M_0M} = \lambda\vec{l} \Rightarrow x - x_0 = \lambda\cos\alpha,\ y - y_0 = \lambda\cos\beta,\ z - z_0 = \lambda\cos\gamma \quad (|\lambda| < \delta):$ Ուրեմն՝ $f(x,y,z) = f(x_0 + \lambda\cos\alpha,\ y_0 + \lambda\cos\beta,\ z_0 + \lambda\cos\gamma) = g(\lambda):$ Այստեղից՝ $\dfrac{\partial f}{\partial l}(M_0) = \lim\limits_{\lambda \to 0} \dfrac{f(x_0 + \lambda\cos\alpha,\ y_0 + \lambda\cos\beta,\ z_0 + \lambda\cos\gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{\lambda} =$

$= \lim\limits_{\lambda \to 0} \dfrac{g(\lambda) - g(0)}{\lambda} = g'(0):$ Ըստ բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնի (5., թ. 4)՝ $g'(0) = f'_x(M_0) \cdot (x_0 + \lambda\cos\alpha)' + f'_y(M_0) \cdot (y_0 + \lambda\cos\beta)' +$

$$+ f'_z(M_0) \cdot (z_0 + \lambda\cos\gamma)' = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \cdot \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \cdot \cos\beta +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial z}(M_0) \cdot \cos\gamma = \frac{\partial f}{\partial l}(M_0): \blacksquare$$

Դիտողություն 1: Պարզ է, որ եթե մասնավորապես $\vec{l} = \vec{i} \uparrow\uparrow Ox$, այսինքն՝ $\alpha = 0^\circ$, $\beta = \gamma = 90^\circ$, ապա՝ $\frac{\partial f}{\partial l}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)$: Այսինքն ածանցյալ տված ուղղությամբ սահմանումը ընդհանրացնում է ածանցյալ ըստ առանձին փոփոխականների սահմանումները:

Սահմանում 2: M_0 կետում f ֆունկցիայի գրադիենտ ասելով հասկանում են հետևյալ վեկտորը՝ $\text{grad}f(M_0) = \vec{\nabla}f(M_0) = $
$= (\frac{\partial f}{\partial x}(M_0), \frac{\partial f}{\partial y}(M_0), \frac{\partial f}{\partial z}(M_0))$:

Գրադիենտի միջոցով (1) բանաձևը կգրվի

$$\frac{\partial f}{\partial l}(M_0) = \text{grad}f(M_0) \cdot \vec{l} = |\text{grad}f(M_0)| \cdot \cos\varphi \qquad (2)$$

տեսքով, որտեղ φ – ն $\vec{l}$ և $\text{grad}f(M_0)$ վեկտորների կազմած անկյունն է:

(2)–ից հետևում է, որ f ֆունկցիայի ածանցյալը « f - ի փոփոխության արագությունը» M_0 կետում մեծագույնն է այդ կետում f - ի գրադիենտի ուղղությամբ:

7. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԲԱՐՁՐ ԿԱՐԳԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐ ԵՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼՆԵՐ

Սահմանում 1: Դիցուք $f(x,y)$ ֆունկցիան որոշված է $M_0(x_0, y_0)$ կետի շրջակայքում, որտեղ այն ունի մասնական ածանցյալներ՝ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$: Եթե գոյություն ունեն՝

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = f''_{x^2}(x,y), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) =$$
$$= f''_{y^2}(x,y), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = f''_{xy}(x,y), \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) =$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$$ ածանցյալները, ապա նրանք կոչվում են

երկրորդ կարգի մասնական ածանցյալներ: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = f''_{xy}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$ մասնական ածանցյալները կոչվում են խառը ածանցյալներ:

Ինդուկտիվ մեթոդով սահմանվում են ավելի բարձր կարգի մասնական ածանցյալներ: Օրինակ՝ $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(x,y)$:

Նկատենք, որ խառը մասնական ածանցյալները կարող են չհամընկնել:

Օրինակ: Դիցուք $f(x,y) = xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, եթե $x^2 + y^2 > 0$ և $f(0,0) = 0$: Հաշվենք այս ֆունկցիայի խառը ածանցյալները $(0,0)$ կետում: $f''_{xy}(0,0) = \left(\dfrac{d}{dy}(f'_x(0,y))\right)_{y=0}$,

$$f'_x(0,0) = (f(x,0))'_{x=0} = (0)' = 0: \qquad \textbf{(1)}$$

$$f'_x(0,y) = (f'_x(x,y))_{x=0} = y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2}\right)_{x=0} =$$

$$= y\left(\frac{(3x^2 - y^2)(x^2 + y^2) - 2x(x^3 - xy^2)}{(x^2 + y^2)^2}\right)_{x=0} = -y \ (y \neq 0) \qquad \textbf{(2)}$$

(1), (2) $\Rightarrow \ f'_x(0,y) \equiv -y \ (y \in \mathbb{R}) \Rightarrow f''_{xy}(0,0) = (-y)'\Big|_{y=0} \Rightarrow f''_{xy}(0,0) = -1$: **(3)**

Հաշվենք այժմ $f''_{yx}(0,0) = \left(\dfrac{d}{dx}(f'_y(x,0))\right)_{x=0}$: Ունենք՝

$$f'_y(0,0) = \frac{d}{dy}(f(0,y))_{y=0} = (0)' = 0, \qquad \textbf{(4)}$$

$$f'_y(x,0)=x\left(\frac{(x^2-3y^2)(x^2+y^2)-2y(x^2y-y^3)}{(x^2+y^2)^2}\right)_{y=0}=x\quad (x\neq 0): \quad (5)$$

(4), (5) $\Rightarrow f'_y(x,0)\equiv x\ (x\in \mathbf{R})\Rightarrow f''_{yx}(0,0)=(x)'_{x=0}\Rightarrow f''_{yx}(0,0)=1:$ (6)

(3), (6) $\Rightarrow f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$: Այժմ պարզենք թե խառը ածանցյալները ե՞րբ են հավասար:

Թեորեմ1: Դիցուք f ֆունկցիան որոշված է M_0 կետի $U_\delta(M_0)$ շրջակայքում և ունի այնտեղ խառը $f''_{xy}(x,y)$, $f''_{yx}(x,y)$ ածանցյալներ, որոնք անընդհատ են M_0 կետում: Այդ դեպքում խառը ածանցյալները հավասար են՝ $f''_{xy}(M_0)=f''_{yx}(M_0)$:

Ապացույց: Վերցնենք h աճ $(0<|h|<\delta)$ և ներմուծենք օժանդակ ֆունկցիա $\Phi(h)=f(x_0+h,y_0+h)-f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0+h)$ $+f(x_0,y_0)$:

$\Phi(h)$-ը կարելի դիտարկել որպես $\varphi(x)=f(x,y_0+h)-f(x,y_0)$ ֆունկցիայի աճը $[x_0;x_0+h]$ միջակայքում՝ $\Phi(h)=\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)$: Օգտվելով Լագրանժի թեորեմից (վերջավոր աճերի բանաձևից), կստանանք՝ $\Phi(h)=\varphi'(x_0+\theta_1\cdot h)\cdot h=[f'_x(x_0+\theta_1\cdot h,y_0+h)-$ $-f'_x(x_0+\theta_1\cdot h,y_0)]\cdot h\quad (0<\theta_1<1)$:

Նորից օգտվենք Լագրանժի թեորեմից, դիտարկելով $f'_x(x_0+\theta_1 h,y)$ ֆունկցիան $[y_0;y_0+h]$ միջակայքում, կստանանք

$$\Phi(h)=f''_{xy}(x_0+\theta_1\cdot h,\ y_0+\theta_2\cdot h)\cdot h^2\ (0<\theta_2<1): \quad (1)$$

Նույն $\Phi(h)$ ֆունկցիան կարելի դիտարկել նաև որպես $\psi(y)=f(x_0+h,y)-f(x_0,y)$ ֆունկցիայի աճը $[y_0;y_0+h]$ միջակայքում՝ $\Phi(h)=\psi(y_0+h)-\psi(y_0)$: Կիրառելով Լագրանժի թեորեմը, կստանանք՝ $\Phi(h)=\psi'(y_0+\theta_3\cdot h)\cdot h=[f'_y(x_0+h,y_0+\theta_3\cdot h)-$ $-f'_y(x_0,y_0+\theta_3\cdot h)]\cdot h=f''_{yx}(x_0+\theta_4 h,y_0+\theta_3 h)h^2$:

Այսպիսով՝ $\Phi(h)=f''_{yx}(x_0+\theta_4 h,y_0+\theta_3 h)h^2$: (2)

Ընդ որում (1), (2) – ում՝ $0<\theta_k<1 \ (k=1,2,3,4)$: (3)

(1), (2) $\Rightarrow \quad f''_{xy}(x_0+\theta_1 h, y_0+\theta_2 h) = f''_{yx}(x_0+\theta_4 h, y_0+\theta_3 h)$: (4)

Անցնենք (4)–ում սահմանի, երբ $h \to 0$, հաշվի առնենք (3)–ը և f''_{xy}, f''_{yx} ֆունկցիաների անընդհատությունը M_0 կետում: Կստանանք՝ $f''_{xy}(M_0)=f''_{yx}(M_0)$: ■

Սահմանում 2: f ֆունկցիան, որոշված M_0 - ի կետի ինչ–որ շրջակայքում կոչվում է n անգամ դիֆերենցելի M_0 կետում, եթե այդ կետում դիֆերենցելի է f ֆունկցիան և նրա բոլոր մասնական ածանցյալները մինչև $n-1$ կարգը:

Թեորեմ 2: Եթե f ֆունկցիան, որոշված M_0 -ի կետի ինչ-որ շրջակայքում, երկու անգամ դիֆերենցելի է M_0 կետում, ապա նրա խառը ածանցյալները համընկնում են՝ $f''_{xy}(M_0)=f''_{yx}(M_0)$:

Թեորեմի ապացույցը նման է նախորդ թեորեմի ապացույցին, ուստի այն չենք բերի:

Սահմանում 3: Դիցուք f ֆունկցիան, որոշված M_0 $(M_0 \in \mathbf{R}^n)$ կետի ինչ-որ շրջակայքում, երկու անգամ դիֆերենցելի է M_0 կետում: Երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ M_0 կետում ասելով հասկանում ենք՝

$$d^2f(M_0)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}dx_i dx_j \quad \text{տեսքի գումարը, որտեղ} \quad a_{ij}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M_0):$$

Թեորեմ 2–ից բխում է, որ $a_{ij}=a_{ji}$ $(i,j=1,\ldots,n)$: Երկրորդ կարգի դիֆերենցիալը $(d^2f(M_0))$ կարելի է դիտել, որպես առաջին կարգի դիֆերենցիալի դիֆերենցիալ, երբ dx_i աճերը համարվում են հաստատուններ, իսկ նոր (dx'_i) աճերը համընկնում են համապատասխան հին (dx_i) աճերի հետ:

Երկրորդ կարգի դիֆերենցիալը՝ համաչափ քառակուսային ձև է dx_i աճերի նկատմամբ: Այն կարելի է նաև ներկայացնել հետևյալ կերպ՝

$$d^2f(M)=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^2 f(M):$$ Գրվածի իմաստը բացատրենք

$n=2$ դեպքում $d^2f(M)=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f(M)=dx^2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 f(M)+$

$+2dxdy\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}f(M)+dy^2\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(M)=\frac{\partial^2 f(M)}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f(M)}{\partial x\partial y}dxdy+$

$+\frac{\partial^2 f(M)}{\partial y^2}dy^2$: Նույն կերպ սահմանվում են ավելի բարձր կարգի դի-

ֆերենցիալները՝ $d^k f=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^k f$:

8. ԹԵՅԼՈՐԻ ԲԱՆԱՁԵՎԸ

Նախ հիշենք մեկ փոփոխականի դեպքը: Ինչպես գիտենք (տես [1]), երբ f ֆունկցիան, որոշված x_0 կետի $U_\delta(x_0)$ շրջակայքում և ունի այդ կետում մինչև n կարգի ածանցյալներ, ապա ֆունկցիան ներկայացվում է Թեյլորի բանաձևով՝

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x,x_0), \qquad (1)$$

որտեղ $r_n(x,x_0)$ մնացորդային անդամը ունի Պեանոի տեսքը՝ $r_n(x,x_0)=o\left((x-x_0)^n\right)$:

Եթե $(x-x_0)$ - ն նշանակենք Δx - ով, և հաշվի առնենք, որ $f(x)-f(x_0)=\Delta f(x_0)$, $d^k f(x_0)=f^{(k)}(x_0)\cdot dx^k$ $(dx=\Delta x)$, ապա (1)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը:

$$\Delta f(x_0)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}d^k f(x_0)+o(dx^n) \qquad (2)$$

(եթե f ֆունկցիայից պահանջենք, որ այն x_0 կետի $U_\delta(x_0)$ շրջակայքում ունենա մինչև $n+1$ կարգի ածանցյալներ, ապա Թեյլորի (1) բանաձևի $r_n(x,x_0)$ մնացորդային անդամը կունենա նաև այլ տեսքեր՝ Լագրանժի, Կոշիի և այլն [1]):

Սիա այս ((2)) պարզ տեսքը ընդհանրացվում է շատ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում:

Թեորեմ 1: Եթե f ֆունկցիան որոշված է M_0 $(M_0 \in \mathbf{R}^n)$ կետի $U_\delta(M_0)$ շրջակայքում և n անգամ դիֆերենցելի է M_0 կետում, ապա այն վերլուծվում է Թեյլորի բանաձևի

$$\Delta f(M_0)=\sum_{k=1}^{n}\frac{d^k f(M_0)}{k!}+r(M_0,M),$$ որտեղ $r(M_0,M)$ մնացորդային անդամը ունի Պեանոյի տեսքը $r(M_0,M)=o(\rho^n)$: $\rho=\rho(M_0,M)$, $M\in U_\delta(M_0)$, $\Delta f(M_0)=f(M)-f(M_0)$, $\lim\limits_{M\to M_0}\dfrac{o(\rho^n)}{\rho^n}=0$:

Թեորեմի ապացույցը տես [2] - ում:

Դիտողություն: Որոշ լրացուցիչ պայմանների դեպքում Թեյլորի բանաձևի լրացուցիչ անդամը, $r(M_0,M)$- ը ունի այլ տեսքեր, օրինակ եթե f - ը M_0 կետի $U_\delta(M_0)$ շրջակայքում ունի մինչև $n+1$ կարգի անընդհատ ածանցյալներ, ապա $r(M_0,M)$ մնացորդային անդամը ունի Լագրանժի տեսքը՝ $r(M_0,M)=\dfrac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_0+\theta_1\cdot\Delta x,y_0+\theta_2\cdot\Delta y)$ $(0<\theta_1,\theta_2<1,\ \Delta x^2+\Delta y^2<\delta^2)$ **(տես [2]):**

9. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԷՔՍՏՐԵՄՈՒՄՆԵՐ

Սահմանում 1: Դիցուք $f: G\to\mathbf{R}$ $(G\subset\mathbf{R}^n)$, M_0 - ն G - ի ներքին կետ է ($\exists\, U_\delta(M_0)\subset G$): M_0-ն կոչվում է **մաքսիմումի (մինիմումի)** կետ, եթե $\exists\gamma>0\ (\gamma\le\delta)$, $\forall M\in U_\gamma(M_0): f(M)<f(M_0)$ $(f(M)>f(M_0))$:

Մաքսիմումի կամ մինիմումի կետը կոչվում է **էքստրեմումի կետ**:

Եթե, որքան էլ փոքրացնենք «ծակած» շրջակայքի չափսերը որոշ կետերում ճիշտ է հավասարության նշանը՝ $f(M)\le f(M_0)$ $(f(M)\ge f(M_0))$, ապա M_0 կետը կոչվում է ոչ խիստ մաքսիմումի (մինիմումի) կետ:

Օրինակ1: $f(x,y)=1-(x-y)^2$: Պարզ է, որ (x_0,x_0), $x_0\in R$ կետերը հանդիսանում են ոչ խիստ մաքսիմումի կետեր, քանի որ (x_0,x_0)-ի որքան էլ փոքր շրջակայք ընտրենք, $y=x$ ուղղի կետերում ֆունկցիան ընդունում է մեծագույն, 1-ին հավասար արժեքը:

Թեորեմ1 **(էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը):** Դիցուք $f:G\to R$ $(G\subset R^n)$, M_0-ն G-ի ներքին կետ է: Որպեսզի M_0-ն լինի էքստրեմումի կետ անհրաժեշտ է, որ այդ կետում գոյություն ունեցող առաջին կարգի մասնական ածանցյալները, հավասարվեն զրոյի:

Այսպիսով էքստրեմումի կետեր կարող են լինել միայն որոշման տիրույթի այն ներքին կետերը, որտեղ, միգուցե որոշ առաջին կարգի մասնական ածանցյալներ գոյություն չունեն, իսկ բոլոր գոյություն ունեցողները հավասար լինեն զրոյի:

Ապացուցում: Դիցուք $M_0\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\dots,x_n^{(0)}\right)$- ն մաքսիմումի կետ է՝

$\exists U_\delta(M_0)\subset G$, այնպիսին որ՝ $\forall M\in \overset{\circ}{U}_\delta(M_0)$: $f(M)<f(M_0)$, և, որոշակիության համար $\exists$ $f'_{x_1}(M_0)$: Դիցուք՝ $g(x_1)=f\left(x_1,x_2^{(0)},\dots,x_n^{(0)}\right)$ $\left(\left|x_1-x_1^{(0)}\right|<\delta\right)$: Պարզ է, որ $g(x_1)<g\left(x_1^{(0)}\right)$ երբ $\left(0<\left|x_1-x_1^{(0)}\right|<\delta\right)$, այսինքն $x_1^{(0)}$-ն $g(x_1)$ ֆունկցիայի մաքսիսումի կետ է: Քանի որ $\exists$ $g'\left(x_1^{(0)}\right)=f'_{x_1}(M_0)$ և, ըստ Ֆերմայի թեորեմի (տես [1]) $g'\left(x_1^{(0)}\right)=0$, ապա՝ $f'_{x_1}(M_0)=0$: ■

Էքստրեմումի բավարար պայմանները կապված են երկրորդ կարգի դիֆերենցիալի հետ, որը քառակուսային ձև է dx_k $(k=1,\dots,n)$ աճերի նկատմամբ: Ուստի, ուսումնասիրենք քառակուսային ձևերի հատկությունները:

Քառակուսային ձև է կոչվում հետևյալ տեսքի ֆունկցիան՝

$$\Phi(\xi_1,\dots,\xi_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j, \tag{1}$$

որտեղ a_{ij} գործակիցները հաստատուններ են, ընդորում կենթադրենք, որ քառակուսային ձևը համաչափ է, այսինքն՝ $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1,2,\ldots,n$:

Սահմանում 1: Քառակուսային ձևը կոչվում է դրական որոշված, եթե՝

$$\forall(\xi_1,\ldots,\xi_n) \neq (0,\ldots,0) \;:\; \Phi(\xi_1,\ldots,\xi_n) > 0:$$

Սահմանում 2: Քառակուսային ձևը կոչվում է բացասական որոշված, եթե՝

$$\forall(\xi_1,\ldots,\xi_n) \neq (0,\ldots,0) \;:\; \Phi(\xi_1,\ldots,\xi_n) < 0:$$

Սահմանում 3: Քառակուսային ձևը կոչվում է նշանաանորոշ, եթե՝

$$\exists \;(\xi_1,\ldots,\xi_n)\;,\;(\xi_1',\ldots,\xi_n') \;:\; \Phi(\xi_1,\ldots,\xi_n) > 0\,,\,\Phi(\xi_1',\ldots,\xi_n') < 0:$$

Թեորեմ 1 ([1]Սիլվեստրի պայմանները)

1. Որպեսզի (1) քառակուսային ձևը լինի դրական որոշված անհրաժեշտ է և բավարար, որ $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^{n}$ համաչափ մատրիցի բոլոր գլխավոր անկյունագծային մինորները լինեն դրական՝

$$a_{11} > 0\,,\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} > 0\,,\ldots,\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}\end{vmatrix} > 0\;:$$

2. Որպեսզի (1) քառակուսային ձևը լինի բացասական որոշված անհրաժեշտ է և բավարար, որ $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^{n}$ համաչափ մատրիցի բոլոր գլխավոր անկյունագծային մինորների նշանները հաջորդեն իրար սկսած բացասականից՝

$$a_{11} < 0\,,\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} > 0\,,\ldots,(-1)^n\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}\end{vmatrix} > 0$$

Թեորեմի ապացույցը չենք բերի: Այն մեկնաբանենք $n = 2$ դեպքում՝ $\Phi(\xi,\eta) = a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2$: Քանի որ 1-3 սահմանումներում $\xi\,,\eta$ փոփոխականները միաժամանակ զրո չեն, ապա, օրինակ երբ $\eta \neq 0$, ունենք՝

---

[1] Սիլվեստր Ջեյմս Ջոզեֆ (1814 - 1897) - անգլիացի մաթեմատիկոս:

$$\Phi = \eta^2 \cdot \Psi(x), \quad \Psi(x) = a_{11}x^2 + 2a_{12}x + a_{22} \quad \left(x = \xi/\eta\right):$$

Դիցուք՝ $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -\dfrac{D}{4}$ (D - ն $\Psi(x)$ քառակուսային եռանդամի տարբերիչն է): Տարրական մաթեմատիկայից հայտնի է, որ երբ $\Delta > 0$ $(D < 0)$, ապա $a_{11} > 0$ դեպքում քառակուսային եռանդամը ընդունում է միայն դրական արժեքներ, $a_{11} < 0$ դեպքում՝ միայն բացասական արժեքներ, իսկ երբ $\Delta < 0$ $(D > 0)$, ապա քառակուսային եռանդամը չունի որոշակի նշան (նշանափոխ է): Ստացվածը համապատասխանում է թեորեմի 1,2 պնդումներին (տես նաև սահմանում3.-ը), քանի որ՝ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \Delta$:

Թեորեմ 2 (էքստրեմումի բավարար պայմանները):

Դիցուք՝ $f: G \to R$ $(G \subset R^n)$, $M_0\left(x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(n)}\right)$ - ն G - ի ներքին կետ է $(\exists U_\delta(M_0) \subset G)$: Ենթադրենք նաև, որ f ֆունկցիան երկու անգամ դիֆերենցելի է M_0 կետում և $df(M_0) = 0$, այսինքն՝ $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(M_0) = 0$, $k = 1, \ldots, n$: Եթե՝ 1. $d^2f(M_0) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}dx_i dx_j$ քառակուսային ձևը դրական որոշված է, ապա M_0 - ն մինիմումի կետ է:

2. $d^2f(M_0)$ – ն բացասական որոշված է, ապա M_0 - ն մաքսիմումի կետ է: 3. $d^2f(M_0)$ – ն նշանափոխ է, M_0 - ն էքստրեմումի կետ չէ:

Ապացուցում: Ենթադրենք, որոշակիության համար, որ $d^2f(M_0)$ քառակուսային ձևը դրական որոշված է: f ֆունկցիան վերլուծենք ըստ Թեյլորի բանաձևի $n = 2$ դեպքում: Հաշվի առնելով $df(M_0) = 0$ պայմանը, կստանանք՝

$$f(M) - f(M_0) = \frac{1}{2!}d^2f(M_0) + o(\rho^2),$$

$M(x_1,\dots,x_n) \in \overset{\circ}{U}_\delta(M_0)$, $\quad \rho = \rho(M_0, M) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k^2}$, $\quad \Delta x_k = dx_k =$ $= x_k - x_0$: Այսինքն՝

$$f(M) - f(M_0) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} dx_i dx_j + o(\rho^2) = \frac{\rho^2}{2}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j + \alpha\right), \qquad (1)$$

որտեղ՝ $\xi_i = \dfrac{dx_i}{\rho}$, $\alpha = \dfrac{o(\rho^2)}{\rho^2}$-ն անվերջ փոքր է, երբ $dx_i = \Delta x_i$ աճերը ձգտում են զրոյի: Հաշվի առնենք, որ՝ $\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 = \frac{1}{\rho^2}\sum_{k=1}^{n} dx_k^2 =$ $= \frac{\rho^2}{\rho^2} = 1$, այսինքն $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ կետը պատկանում է միավոր գնդային մակերևույթին $(S_1(O))$: Ուրեմն, $\Phi(\xi_1,\dots,\xi_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j$ ֆունկցիան, որը անընդհատ է այդ փակ, սահմանափակ $S_1(O)$ մակերևույթի վրա, ունի փոքրագույն արժեք՝ $m = \min\Phi(\xi_1,\dots,\xi_n) = \Phi(\xi_1',\dots,\xi_n') > 0$, $(\xi_1',\dots,\xi_n') \in S_1(O)$:

Քանի որ α-ն անվերջ փոքր է, երբ $dx_i = \Delta x_i$ աճերը ձգտում են զրոյի, ապա՝ $\exists U_\gamma(M_0)$ $(\gamma < \delta)$, $\forall M \in \overset{\circ}{U}_\gamma(M_0): |\alpha| < m$: Այստեղից հետևում է, որ $\alpha > -m$ և, ուրեմն՝ $f(M) - f(M_0) = \frac{\rho^2}{2}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j + \alpha\right) >$ $> \frac{\rho^2}{2}(m - m) = 0$: Այսինքն՝ $\forall M \in \overset{\circ}{U}_\gamma(M_0)$: $f(M) > f(M_0)$: Ուրեմն՝ M_0-ն մինիմումի կետ է: Նույն կերպ ապացուցվում է այն, որ եթե $d^2 f(M_0)$ քառակուսային ձևը բացասական որոշված է, ապա M_0-ն մաքսիմումի կետ է:

Այժմ ենթադրենք, որ $d^2f(M_0)=\sum\limits_{i,j}^{n} a_{ij}h_ih_j=\Phi(h_1,...,h_n)$ քառակուսային ձևը նշանաանորոշ է: Այսինքն $\exists H'(h_1',...,h_n'), \Phi(H')>0$ և $\exists H''(h_1'',...,h_n''), \Phi(H'')<0$: Ապացուցենք, որ M_0-ն էքստրեմումի կետ չէ: Եթե, նշանակենք $\xi_i'=\dfrac{h_i'}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}(h_k')^2}}, \xi_i''=\dfrac{h_i''}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}(h_k'')^2}}$ $(i=1,...,n)$, ապա $M'(\xi_1',...,\xi_n'), M''(\xi_1'',...,\xi_n'')$ կետերը պատկանում են $S_1(O)$ միավոր գնդային մակերևույթին ($\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k')^2=\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k'')^2=1$): Պարզ է, որ՝

$$\Phi(M')=\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}(h_k')^2}\Phi(H')=A>0, \Phi(M'')=\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}(h_k'')^2}\Phi(H'')=B<0:$$

Դիցուք՝ $x_i'=x_i^{(0)}+\rho\cdot\xi_i'$, $x_i''=x_i^{(0)}+\rho\cdot\xi_i''$ $(i=1,...,n)$: $M'(x_1',...x_n'), M''(x_1'',...,x_n'')$ կետերը հեռացված են M_0 կետից միևնույն ρ չափով: Իրոք, օրինակ $\rho(M',M_0)=\rho\cdot\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k')^2}=\rho$: Քանի որ (1) – ի մեջ $\lim\limits_{\rho\to 0}\alpha=0$, ապա $\exists\gamma\in(0;\delta)$ այնպիսին, որ $\forall M\in\mathring{U}_\gamma(M_0): |\alpha|<\min(A,-B)$: Քանի որ $\rho<\gamma$, ապա $f(M')=\dfrac{\rho^2}{2}(A+\alpha)>\dfrac{\rho^2}{2}(A-A)=0$, իսկ $f(M'')=\dfrac{\rho^2}{2}(B+\alpha)<\dfrac{\rho^2}{2}(B-B)=0$: Ուրեմն M_0– ն էքստրեմումի կետ չէ: ■

V. ՊԱՐԱՄԵՏՐԻՑ ԿԱԽՎԱԾ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

1. ՊԱՐԱՄԵՏՐԻՑ ԿԱԽՎԱԾ ՈՐՈՇՅԱԼ ԻՆՏԵԳՐԱԼ

Սահմանում 1: Դիցուք $f \in C(D)$, որտեղ $D=[a;b]\times[c;d]$ $(a<b, c<d)$ ուղղանկյուն է: Այդ դեպքում, յուրաքանչյուր $y \in [c;d]$-ի համար $f(x,y)$-ը կլինի անընդհատ ըստ x-ի և, ուրեմն գոյություն ունի $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ ինտեգրալը, որը ֆունկցիա է y-ից՝ $F(y)=\int\limits_a^b f(x,y)dx$ $(y \in [c;d])$, այն կոչվում է պարամետրից կախված ինտեգրալ, իսկ y-ը՝ պարամետր:

Նկատենք, որ պարամետրերը կարող են լինել մեկից ավելի: Բացի այդ, ինտեգրալի սահմանները նույնպես կարող են կախված լինել պարամետրից $F(y)=\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$ $(\alpha,\beta \in C[c;d]$ և՝ $\forall y \in [c;d]: \alpha(y), \beta(y) \in [a;b])$: Ուսումնասիրենք պարամետրից կախված ինտեգրալների հատկությունները:

Թեորեմ 1 (անընդհատության մասին): Եթե $f \in C(D)$, և

$$F(y)=\int\limits_a^b f(x,y)\,dx, \text{ ապա } F \in C[c;d]:$$

Ապացույց: Վերցնենք $\forall y_0 \in [c;d]$ և տանք h աճ, այնպիսին որ $y_0+h \in [c;d]$: $F(y)$ ֆունկցիան կստանա $\Delta F(y_0)=F(y_0+h)-F(y_0)=$ $=\Phi(h)$ աճ, ընդ որում՝ $|\Phi(h)|=\left|\int\limits_a^b [f(x,y_0+h)-f(x,y_0)]\,dx\right| \le$

$$\le \int\limits_a^b |f(x,y_0+h)-f(x,y_0)|\,dx:$$

Քանի որ $f \in C(D)$ և D - ն փակ սահմանափակ բազմություն է, ապա f - ը հավասարաչափ անընդհատ է՝ $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0$, $\forall M_0,\ M \in D$, $\rho(M_0, M) < \delta$: $|f(M_0) - f(M)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$:

Եթե ընտրենք $M_0(x, y_0), M(x, y_0 + h)$ կետերը այնպես, որ $|h| < \delta$, ապա $\rho(M_0, M) = |h| < \delta$ և, ուրեմն $|f(M_0) - f(M)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$: Հետևաբար $|\Phi(h)| \le \dfrac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b dx = \varepsilon$: Այսինքն՝ $\lim\limits_{h\to 0}\Phi(h) = \lim\limits_{h\to 0}\Delta F(y_0) = 0$, որն էլ նշանակում է, որ F-ը անընդհատ է y_0 կետում: Քանի որ y_0 - ն կամայական կետ է $[c;d]$ - ից, ապա $F \in C[c;d]$: ■

Դիտողություն 1: Թեորեմի պայմաններից հետևում է, որ կարելի է անցնել սահմանի ինտեգրալի նշանի տակ, իրոք՝

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\,dx = \lim_{y\to y_0} F(y) = F(y_0) = \int_a^b f(x,y_0)\,dx =$$

$$= \int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)\,dx$$

Թեորեմ 2: Եթե՝ $f \in C(D)$, $\alpha, \beta \in C[c;d]$ և α, β ֆունկցիաների արժեքների բազմությունները պարունակվում են $[a;b]$ - ում, ապա

$F(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$ ֆունկցիան անընդհատ է $[c;d]$ - ում:

Ապացույց: Վերցնենք $\forall y, y_0 \in [c;d]$ և դիտարկենք $\Phi(y) =$

$$= F(y) - F(y_0) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx - \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0)\,dx,$$

$$\Phi(y)=\int_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)} f(x,y)\,dx+\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)\,dx+\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx\ -$$

$$-\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0)\,dx=\int_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)} f(x,y)\,dx+\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx+G(y),$$

որտեղ $G(y)=\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)}[f(x,y)-f(x,y_0)]dx \underset{y\to y_0}{\to} 0$ (տես թ.1): Քանի որ $f\in C(D)$, ապա այն սահմանափակ է՝ $\exists M,\ \forall(x,y)\in D:|f(x,y)|\le M$:

Հաշվի առնելով նաև $\alpha(y)$-ի անընդհատությունը y_0 կետում, ստանում ենք՝ $\left|\int_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)} f(x,y)dx\right|\le M\left|\int_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)} dx\right|=M|\alpha(y)-\alpha(y_0)|\underset{y\to y_0}{\to} 0$: Հետևաբար՝ $\lim\limits_{y\to y_0}\int_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)} f(x,y)\,dx=0$: Նույն կերպ ապացուցվում է, որ $\lim\limits_{y\to y_0}\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx=0$: Այսպիսով՝ $\lim\limits_{y\to y_0}\Phi(y)=0$, այսինքն $F(y)$-ը անընդհատ է $[c;d]$ հատվածի կամայական y_0 կետում և, ուրեմն՝ $F\in C[c;d]$: ■

Դիտողություն 2: Թեորեմ 2 - ը ընդհանրացվում է այն դեպքում, երբ պարամետրերը մեկից ավելին են:

Օրինակ: Եթե $\Phi(u,v,y)=\int_u^v f(x,y)dx\quad (u,v\in[a;b])$ և $f\in C(D)$, ապա $\Phi\in C(G)$ $(G=[a;b]\times[a;b]\times[c;d])$:

Թեորեմ 3. Եթե $f(x,y)$ ֆունկցիան յուրաքանչյուր y-ի համար $(y\in[c;d])$ անընդհատ է ըստ x-ի $[a;b]$ հատվածում և $f'_y\in C(D)$, ապա $F(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ ֆունկցիան օժտված է հետևյալ հատկություններով՝ $F\in C^1[c;d]$ և $F'(y)=\int_a^b f'_y(x,y)dx$:

Ապացուցում: Վերցնենք $\forall y_0\in[c;d]$ և տանք $h\neq 0$ աճ, այնպիսին որ $y_0+h\in[c;d]$: Եթե նշանակենք՝ $\Phi(h)=\frac{F(y_0+h)-F(y_0)}{h}-$ $-\int_a^b f'_y(x,y_0)dx$, ապա բավական է ապացուցել, որ $\lim_{h\to 0}\Phi(h)=0$:

Կիրառելով Լագրանժի թեորեմը [1], կստանանք $\Phi(h)=$

$$=\int_a^b\left[\frac{f(x,y_0+h)-f(x,y_0)}{h}-f'_y(x,y_0)\right]dx=$$

$$=\int_a^b\left[f'_y(x,y_0+\theta\cdot h)-f'_y(x,y_0)\right]dx\left(\theta\in(0,1)\right):$$ Քանի որ $f'_y\in C(D)$, ապա այն հավասարաչափ անընդհատ է D - ում՝ $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta(\varepsilon)>0$, $\forall M_0, M\in D, \rho(M_0,M)<\delta : \left|f'_y(M)-f'_y(M_0)\right|<\frac{\varepsilon}{b-a}$: Եթե ընտրենք $M_0(x,y_0)$, $M(x,y_0+\theta\cdot h)$ կետերը այնպես, որ $|h|<\delta$, ապա $\rho(M_0,M)=\theta\cdot|h|<|h|<\delta$: Ուրեմն՝ $|\Phi(h)|\le\int_a^b\left|f'_y(x,y_0+\theta\cdot h)-f'_y(x,y_0)\right|dx\le$ $\le\frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b dx=\varepsilon$ ($|h|<\delta$): Այսինքն՝ $\lim_{h\to 0}\Phi(h)=0$: Այսպիսով՝ $\forall y\in[c;d]\ \exists F'(y)=\int_a^b f'(x,y)dx$: Այստեղից և թեորեմ1 - ից ստանում ենք, որ $F'\in C[c;d]$, ուրեմն՝ $F\in C^1[c;d]$: ■

Թեորեմ 4 (*ածանցման Լայբնիցի կանոնը*)։ Եթե՝ $f, f'_y \in C(D)$, $\alpha, \beta \in C^1[c;d]$ և α, β ֆունկցիաների արժեքների բազմությունները պարունակվում են $[a;b]$-ում, ապա $F(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$ ֆունկցիան օժտված է հետևյալ հատկություններով՝ $F \in C^1[c;d]$ և $F'(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x,y)\,dx +$

$$+f(\beta(y),y)\cdot\beta'(y) - f(\alpha(y),y)\cdot\alpha'(y) \qquad (1)$$

Ապացուցում: Եթե նշանակենք՝ $\Phi(u,v,y) = \int\limits_u^v f(x,y)\,dx$ ($u,v \in [a;b], y \in [c;d]$), ապա $F(y)$-ը կլինի բարդ ֆունկցիա՝ $F(y) = \Phi(\alpha(y),\beta(y),y)$։ Պարզ է, որ $\Phi \in C(G)$ (տես դիտողություն 2), որտեղ $G = [a;b]\times[a;b]\times[c;d]$։ Օգտվելով փոփոխական վերին և ստորին սահմաններով ինտեգրալների հատկություններից, դիտողություն 2–ից և թեորեմ 3-ից կստանանք՝ $\Phi'_u(u,v,y) = -f(u,y)$ ($\Phi'_u \in C(G)$), $\Phi'_v(u,v,y) = f(v,y)$ ($\Phi'_v \in C(G)$) և $\Phi'_y(u,v,y) = \int\limits_u^v f'_y(x,y)\,dx$ ($f'_y \in C(D) \Rightarrow \Phi'_y \in C(G)$)։ Ստացանք, որ Φ-ն դիֆերենցելի է G-ում, քանի որ նրա մասնական ածանցյալները անընդհատ են։ Կիրառելով բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնը (տես 5. թ.4), ստանում ենք (1)-ը։ ■

Թեորեմ 5 (ինտեգրման կարգը փոխելու մասին)։ Եթե $f \in C(D)$, ապա, ըստ թեորեմ 1- ի $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ ֆունկցիան անընդհատ է $[c;d]$ - ում և, ուրեմն գոյություն ունի $\int\limits_c^d F(y)dy$, որը կարելի հաշվել փոխելով ինտեգրման կարգը՝ $\int\limits_c^d F(y)dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy$, այսինքն՝

$$\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy: \tag{1}$$

Ապացուցում: Վերցնենք $\forall t\in[c;d]$ և ապացուցենք ավելի ընդհանուր պնդում, եթե $\varphi(t)=\int_c^t F(y)\,dy=\int_c^t dy\int_a^b f(x,y)dx$, $\psi(t)=\int_a^b dx\int_c^t f(x,y)\,dy$, ապա՝

$$\varphi(t)\equiv\psi(t)\ \ (t\in[c;d]) \tag{2}$$

(երբ $t=d$, ապա (2) – ից ստացվում է (1) – ը)

Քանի որ $F\in C[c;d]$, ապա

$$\varphi'(t)=\frac{d}{dt}\int_c^t F(y)\,dy=F(t)=\int_a^b f(x,t)\,dx \tag{3}:$$

Իսկ $\psi(t)=\int_a^b G(x,t)\,dx$, որտեղ $G(x,t)=\int_c^t f(x,y)\,dy$: Ըստ թեորեմ1.-ի $G(x,t)$-ն անընդհատ է ըստ x-ի և, ուրեմն $\psi(t)$-ն որոշված է $[c;d]$ հատվածում: Քանի որ $f(x,y)$-ը անընդհատ է ըստ y-ի $[c;d]$ հատվածում, ապա՝ $\exists\, G_t'(x,t)=f(x,t)$ և, որեն՝ $G_t'\in C(D)$: Կիրառելով թեորեմ 3. - ը, կստանանք

$$\psi'(t)=\int_a^b G_t'(x,t)\,dx=\int_a^b f(x,t)\,dx\ : \tag{4}$$

$(3),(4)\Rightarrow\ \varphi'(t)\equiv\psi'(t)\ \ (t\in[c;d])$: Ուրեմն՝ $\varphi(t)\equiv\psi(t)+M$, որտեղ M - ը հաստատուն է:

Բայց $\varphi(c)=\psi(c)=0$, այսինքն՝ $M=0$: Այսպիսով՝ $\varphi(t)\equiv\psi(t)\Rightarrow\ \varphi(d)=\psi(d)\Rightarrow(1)$: ■

2. ՊԱՐԱՄԵՏՐԻՑ ԿԱԽՎԱԾ ԱՆԻՍԿԱԿԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

Այժմ դիտարկենք պարամետրից կախված անիսկական ինտեգրալներ: Որոշակիության համար, քննարկենք միայն առաջին սեռի անիսկական ինտեգրալի դեպքը: Եթե $f(x,y)$-ը անընդհատ է ըստ x-ի ($y \in Y$ միջակայքին), ապա $F(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ կոչվում է պարամետրից կախված անիսկական ինտեգրալ (պարամետրը y - ն է): Y միջակայքում (միջակայքի յուրաքանչյուր կետում) այդ ինտեգրալի զուգամիտությունը նշանակում է՝ $\forall y \in Y$ կետի համար գոյություն ունի վերջավոր $\lim\limits_{A\to\infty} G(A,y)$, որտեղ $G(A,y)=\int_a^{A} f(x,y)\,dx$: Այսինքն՝ $\forall y \in Y$,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ A_0(\varepsilon,y),\ \forall A \ge A_0 : \left|G(A,y)-F(y)\right| < \varepsilon :$$

Վերջինը համարժեք է $\left|\int_A^{+\infty} f(x,y)dx\right| < \varepsilon$ պայմանին, քանի որ $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int_a^{A} f(x,y)dx + \int_A^{+\infty} f(x,y)dx$ և, ուրեմն $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ և $\int_A^{+\infty} f(x,y)dx$ անիսկական ինտեգրալները միաժամանակ զուգամետ են կամ տարամետ յուրաքանչյուր հաստատագրված $y \in Y$ դեպքում:

Եթե A_0-ն կախված է միայն ε-ից, ապա $F(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dy$ անիսկական ինտեգրալը կոչվում է հավասարաչափ զուգամետ Y միջակայքում:

Սահմանում 2: Կասենք, որ $F(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dy$ անիսկական ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է Y միջակայքում, եթե՝

$$\forall\varepsilon>0\,\exists A_0(\varepsilon)>a,\ \forall A\geq A_0,\ \forall y\in Y:\ |G(A,y)-F(y)|<\varepsilon$$

$\left(\left|\int_A^{+\infty} f(x,y)\,dx\right|<\varepsilon\right)$: (5)

Այլ կերպ ասած, (5)–ը նշանակում է ըստ սահմանման, որ $G(A,y)=\int_a^A f(x,y)\,dx$-ը հավասարաչափ ձգտում է $F(y)$-ին, երբ A-ն ձգտում է անվերջի:

$F(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dy$ անիսկական ինտեգրալի հատկությունների հարցում էական դեր ունի ըստ y-ի հավասարաչափ զուգամիտությունը, ուստի, կարևոր են հավասարաչափ զուգամիտության հայտանիշները:

Թեորեմ 6 (հավասարաչափ զուգամիտության Վայերշտրասի հայտանիշը): Եթե $f(x,y)$ ֆունկցիան յուրաքանչյուր y համար ($y\in Y$ միջակայքից), անընդհատ է ըստ x-ի $[a;+\infty)$-ում, $\exists\varphi\in C[a;+\infty)$, $\forall x\in[a;+\infty),\ \forall y\in Y:\ |f(x,y)|\leq\varphi(x)$, իսկ $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ ինտեգրալը զուգամետ է, ապա $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ անիսկական ինտեգրալը բացարձակ և հավասարաչափ զուգամետ է Y-ում:

Ապացույց: $|f(x,y)|\leq\varphi(x)$ պայմանից հետևում է, որ $\forall y\in Y$-ի համար $F(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ ինտեգրալը բացարձակ զուգամետ է: $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ ինտեգրալի զուգամիտությունից հետևում է, որ զուգամետ է նաև $\int_A^{+\infty}\varphi(x)dx\ (A\geq a)$ ինտեգրալը և՝

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists A_0(\varepsilon)>a,\ \forall A\geq A_0:\ \int_A^{+\infty}\varphi(x)dx<\varepsilon: \qquad (1)$$

$$|f(x,y)| \le \varphi(x) \Rightarrow \int_A^B |f(x,y)|dx \le \int_A^B \varphi(x)dx \quad (B > A): \qquad (2)$$

Անցնելով սահմանի (2) –ում, երբ $B \to +\infty$ կստանանք
$\int_A^{+\infty} |f(x,y)|dx \le \int_A^{+\infty} \varphi(x)dx < \varepsilon \Rightarrow \int_A^{+\infty} |f(x,y)|dx < \varepsilon \ (A \ge A_0(\varepsilon))$, որը նշանակում է, որ $\int_a^{+\infty} f(x,y)dy$ ինտեգրալը բացարձակ և հավասարաչափ զուգամետ է Y -ում: ■

Ձևակերպենք, առանց ապացույցի հավասարաչափ զուգամիտության ևս երկու հայտանիշ: Նախապես տանք հետևյալ սահմանումը՝ կասենք, որ $f(x,y)$ ֆունկցիան հավասարաչափ սահմանափակ է իր որոշման D տիրույթում, եթե այն սահմանափակ է որպես երկու փոփոխականի ֆունկցիա՝ $\exists M \in \mathbf{R}, \forall (x,y) \in D \ : \ |f(x,y)| \le M$:

Թեորեմ 7 (Աբելի հայտանիշը): Դիցուք՝ $f(x,y), g(x,y)$ ֆունկցիաները յուրաքանչյուր $y \ (y \in Y)$-ի համար անընդհատ են ըստ x-ի $(x \in [a;+\infty))$, $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ հավասարաչափ զուգամետ է Y միջակայքում, $g(x,y)$-ը մոնոտոն է ըստ x-ի $(y \in Y)$ և հավասարաչափ սահմանափակ: Այդ դեպքում $\int_a^{+\infty} f(x,y) \cdot g(x,y)dx$ անիսկական ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է Y -ում:

Թեորեմ 8 (Դիրիխլեի հայտանիշը): Դիցուք՝ $f(x,y), g(x,y)$ ֆունկցիաները յուրաքանչյուր $y \ (y \in Y)$-ի համար անընդհատ են ըստ x-ի $(x \in [a;+\infty))$, f -ի նախնականը հավասարաչափ սահմանափակ է, իսկ $g(x,y)$ ֆունկցիան մոնոտոն չաճող է ըստ x-ի $(y \in Y)$ և $g(x,y)$-ը հավասարաչափ (ըստ y - ի) ձգտում է զրոյի, երբ $x \to +\infty$):

Որպեսզի ավելի պարզ լինի հավասարաչափ զուգամիտության դերը, նախ տանք ոչ հավասարաչափ զուգամիտության պայմանը (սահմանում 2–ի ժխտումը)՝ Յուրաքանչյուր $(y \in Y)$ կետում զուգամետ $\int_a^{+\infty} f(x,y)dy$ անիսկական ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ չէ Y միջակայքում, եթե՝

$$\exists \varepsilon > 0, \forall A_0 > a, \exists A \ge A_0, \exists y \in Y : \left|\int_A^{+\infty} f(x,y)dx\right| \ge \varepsilon :$$

Խնդիր 1: Ապացուցել, որ $\forall y \in Y$ կետի համար զուգամետ $\int_a^{+\infty} f(x,y)dy$ անիսկական ինտեգրալը ոչ հավասարաչափ զուգամետ է Y միջակայքում, եթե գոյություն ունեն հաջորդականություններ $y_n \in Y$ և $A_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$ այնպիսիք, որ՝

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_{A_n}^{+\infty} f(x,y_n)dx\right| = L > 0 \ (L\text{-ը կարող է լինել և } +\infty):$$

Օրինակ 1: Ապացուցենք, որ $D(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx$ ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է $\alpha \in (\alpha_0;1)$ $(\alpha_0 > 0)$ միջակայքում և ոչ հավասարաչափ զուգամետ $(0;1)$-ում: Իրոք, քանի որ $\left|\int_0^A \sin(\alpha x)dx\right| = \left|\frac{1}{\alpha}(\cos(\alpha A) - 1)\right| \le \frac{2}{\alpha_0}$, այսինքն ունի հավասարաչափ սահմանափակ նախնական, իսկ $\frac{1}{x}$-ը մոնոտոն նվազող է և հավասարաչափ ձգտում է զրոյի (չի պարունակում α) : Ուրեմն, ըստ Դիրիխլեի հայտանիշի այն հավասարաչափ զուգամետ է $(\alpha_0;1)$ միջակայքում: $(0;1)$-ում վերը նշված գնահատականը սխալ է: Քանի որ՝ $\int_A^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x} dx =$

$= \int\limits_{A\cdot\alpha}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \ \ (t = \alpha x)$, ապա վերցնելով $\alpha_n = \frac{1}{n^2} \underset{n\to\infty}{\to} 0$, $A_n = n$, ստանում ենք՝ $\int\limits_{n\frac{1}{n^2}}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int\limits_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \underset{n\to\infty}{\to} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} > 0$ ($\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ անիսկական ինտեգրալը կոչվում է Դիրիխլեի ինտեգրալ,ստորև ցույց կտանք որ այն հավասար է $\pi/2$ -ի):

Այսպիսով $D(\alpha)$ - ն ոչ հավասարաչափ զուգամետ է $(0;1)$ -ում:

Նշանակենք $[a;+\infty)\times[c;d]$ անվերջ շերտը D_∞ -ով ($D_\infty = [a;+\infty)\times[c;d]$):

Թեորեմ 9 (անընդհատության մասին): Եթե $f \in C(D_\infty)$, $F(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dy$ ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է $[c;d]$-ում, ապա $F \in C[c;d]$:

Ապացուցում: Քանի որ $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ -ը հավասարաչափ զուգամետ է $[c;d]$-ում, ապա՝ $\forall \varepsilon > 0\ \exists A_0(\varepsilon) > a,\ \forall A \ge A_0$,

$$\forall y \in [c;d]:\ \int\limits_A^{+\infty} |f(x,y)|\, dx < \frac{\varepsilon}{3}: \qquad (1)$$

Վերցնենք $\forall y_0, y \in [c;d]$ և դիտարկենք $\Phi(y) = \Delta F(y_0) = F(y) - F(y_0) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int\limits_a^{+\infty} f(x,y_0)dx = \int\limits_a^{A_0} [f(x,y) - f(x,y_0)]\, dx + \int\limits_{A_0}^{+\infty} f(x,y)\, dx - \int\limits_{A_0}^{+\infty} f(x,y_0)\, dx$: (1)-ից հետևում է

$$|\Phi(y)| \le \left|\int_a^{A_0}\left[f(x,y)-f(x,y_0)\right]dx\right| + \left|\int_{A_0}^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| + \left|\int_{A_0}^{+\infty} f(x,y_0)\,dx\right| \le$$

$$\le \left|\int_a^{A_0}\left[f(x,y)-f(x,y_0)\right]dx\right| + \int_{A_0}^{+\infty}|f(x,y)|dx + \int_{A_0}^{+\infty}|f(x,y_0)|dx \le$$

$$< \frac{2\varepsilon}{3} + \left|\int_a^{A_0}[f(x,y)-f(x,y_0)]dx\right|$$ գնահատականը:

Քանի որ, ըստ թեորեմ1 - ի՝ $\lim\limits_{y\to y_0}\int_a^{A_0} f(x,y)dx = \int_a^{A_0} f(x,y_0)dx$, ապա կամայական $\varepsilon>0$ թվի համար $\exists\,\delta(\varepsilon)>0, \forall y\in[c;d], \ |y-y_0|<\delta$: $\left|\int_a^{A_0}\left[f(x,y)-f(x,y_0)\right]dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}$: Այստեղից ստանում ենք՝ $\forall y\in[c;d]$, $|y-y_0|<\delta$: $|\Phi(y)|<\varepsilon$, այսինքն $\lim\limits_{y\to y_0}\Phi(y)=0 \Rightarrow \lim\limits_{y\to y_0}F(y)=F(y_0)$: Ստացվեց, որ $F(y)$-ը անընդհատ է $\forall y_0\in[c;d]$ կետում և, ուրեմն՝ $F\in C[c;d]$: ■

Դիտողություն 1: Թեորեմ 9-ում ինտեգրալի հավասարաչափ զուգամիտությունը էական է: Եթե, օրինակ 1 ում, երբ $\alpha\in(0;1)$ և, ուրեմն ինտեգրալը ոչ հավասարաչափ զուգամետ է, փորձենք անցնել սահմանի ինտեգրալի նշանի տակ, ապա ստացվում է սխալ արդյունք: $\lim\limits_{\alpha\to+0}D(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\to+0}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha x)\,dx}{x}=\int_0^{+\infty}\lim\limits_{\alpha\to+0}\frac{\sin(\alpha x)}{x}dx=0$: Բայց $D(\alpha)=D=\frac{\pi}{2}$ (Դիրիխլեի ինտեգրալն է):

Թեորեմ 10 (ածանցման մասին): Եթե $f, f'_y\in C(D_\infty)$, $F(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ ինտեգրալը $\forall y\in[c;d]$ կետում զուգամետ է, իսկ $\int_a^{+\infty} f'_y(x,y)dy$-ը հավասարաչափ զուգամետ $[c;d]$-ում, ապա $F\in C^1[c;d]$ և՝

$$\frac{dF}{dy}=\frac{d}{dx}\int_a^{+\infty} f(x,y)dx=\int_a^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)dx \tag{1}$$

(ածանցում ինտեգրալի նշանի տակ):

Ապացույց: Վերցնենք $\forall y_0\in[c;d]$ և տանք $h\neq 0$ աճ, այնպիսին որ $y_0+h\in[c;d]$: Եթե $\Phi(h)=\dfrac{F(y_0+h)-F(y_0)}{h}-\int_a^{+\infty} f'_y(x,y_0)\,dx$, ապա բավական է ապացուցել, որ $\lim\limits_{h\to 0}\Phi(h)=0$: Կիրառելով Լագրանժի թեորեմը, կստանանք $\Phi(h)=\int_a^{+\infty}\left[\frac{1}{h}\left[f(x,y_0+h)-f(x,y_0)\right]-\right.$ $\left.-f'_y(x,y_0)\right]dx=\int_a^{+\infty}\left[f'_y(x,y_0+\theta\cdot h)-f'_y(x,y_0)\right]dx$ $(0<\theta<1)$: Քանի որ $\int_a^{+\infty} f'_y(x,y)dy$ ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է $[c;d]$-ում, ապա՝ $\forall\varepsilon>0\ \exists A_0(\varepsilon)>a,\ \forall A\geq A_0, \forall y\in[c;d]\ :\ \left|\int_A^{+\infty} f'(x,y)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}$:

Ունենք՝

$$|\Phi(h)|=\left|\int_a^{A_0}\left[f'_y(x,y_0+\theta\cdot h)-f'_y(x,y_0)\right]dx+\int_{A_0}^{+\infty} f'_y(x,y_0+\theta\cdot h)dx-\int_{A_0}^{+\infty} f'_y(x,y_0)dx\right|\leq$$

$$\leq\left|\int_a^{A_0}\left[f'_y(x,y_0+\theta\cdot h)-f'_y(x,y_0)\right]dx\right|+\left|\int_{A_0}^{+\infty} f'_y(x,y_0+\theta\cdot h)dx\right|+\left|\int_{A_0}^{+\infty} f'_y(x,y_0)dx\right|\leq$$

$\leq\left|\int_a^{A_0}\left[f'_y(x,y_0+\theta\cdot h)-f'_y(x,y_0)\right]dx\right|+\frac{2\varepsilon}{3}$: Քանի որ $f'_y(x,y)$-ը հավասարաչափ անընդհատ է $[a;A_0]\times[c;d]$-ում, ապա $\exists\,\delta(\varepsilon)>0$, $\forall h$, $|h|<\delta$: $\left|\int_a^{A_0}\left[f'_y(x,y_0+\theta\cdot h)-f'_y(x,y_0)\right]dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}$ (տես թեորեմ 3-ի ապացույցը): Այստեղից ստանում ենք, որ $|\Phi(h)|<\varepsilon$ $(|h|<\delta)\Rightarrow$ $\exists\frac{d}{dy}\int_a^{+\infty}f(x,y_0)dx=\int_a^{+\infty}f'_y(x,y_0)dx\Rightarrow(1)$: Քանի որ (1) – ի աջ մասը անընդհատ է, ապա անընդհատ է նաև ձախ մասը, այսինքն՝ $F'\in C[c;d]$ $\Rightarrow$ $F\in C^1[c;d]$: ■

Թեորեմ 11 (ինտեգրման կարգը փոխելու մասին): Եթե $f\in C(D_\infty)$, $F(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)dy$ ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է $[c;d]$-ում, ապա՝

$$\int_c^d F(y)dy=\int_c^d dy\int_a^{+\infty}f(x,y)\,dx=\int_a^{+\infty}dx\int_c^d f(x,y)\,dy:$$

Թեորեմի ապացույցը հենվում է նախորդ թեորեմի վրա (տես նաև թեորեմ 5-ի ապացույցը):

Բերենք առանց ապացույցի ևս երկու, գործնականում կարևոր, հայտանիշ անիսկական ինտեգրալներում կարգը փոխելու մասին:

Թեորեմ 12: Դիցուք՝ $f\in C[a;+\infty)\times[b;+\infty)$, $\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$ և $\int_b^{+\infty}f(x,y)dy$ ինտեգրալները հավասարաչափ զուգամետ են համապատասխանաբար $[b;+\infty)$ ում և $[a;+\infty)$ ում : Այդ դեպքում, եթե զուգամետ է $\int_a^{+\infty}dx\int_b^{+\infty}|f(x,y)|\,dy$, $\int_b^{+\infty}dy\int_a^{+\infty}|f(x,y)|\,dx$ հաջորդական ինտեգրալներից որևէ մեկը, ապա զուգամետ են $\int_b^{+\infty}dy\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$, $\int_a^{+\infty}dx\int_b^{+\infty}f(x,y)dy$

ինտեգրալները և՝ $\int\limits_b^{+\infty} dy \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\, dx = \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_b^{+\infty} f(x,y)\, dy$:

Թեորեմ 13: Դիցուք՝ $f \in C[a;+\infty)\times[b;+\infty)$, $f(x,y)\geq 0$, $F \in C[b;+\infty)$, $G \in C[a;+\infty)$, որտեղ՝ $F(y)=\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$, $G(x)=\int\limits_b^{+\infty} f(x,y)dy$:

Եթե զուգամետ է $\int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_b^{+\infty} f(x,y)dy$, $\int\limits_b^{+\infty} dy \int\limits_a^{+\infty} f(x,b)dx$ հաջորդական ինտեգրալներից որևէ մեկը, ապա զուգամետ է նաև մյուսը, և նրանք հավասար են՝ $\int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_b^{+\infty} f(x,b)dy = \int\limits_b^{+\infty} dy \int\limits_a^{+\infty} f(x,b)dx$:

Վերը շարադրված տեսությունը կիրառենք $D=\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ Դիրիխլեի ինտեգրալը հաշվելու համար (այն զուգամետ է ըստ Դիրիխլեի հայտանիշի, ընդ որում եզակի կետը միայն $+\infty$-ն է): Անցնենք նոր, $x=\alpha t$ փոփոխականի, որտեղ α-ն դրական պարամետր է: Կստանանք $D=D(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha t)}{t}dt$: Եթե փորձենք ածանցել ըստ α-ի ինտեգրալի նշանի տակ, ապա կստանանք $\int\limits_0^{+\infty} \cos(\alpha t)dt$ տարամետ ինտեգրալը:

Ներմուծենք նոր $(k\geq 0)$ պարամետր և դիտարկենք $F(\alpha,k)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-kt}\cdot\frac{\sin(\alpha t)}{t}dt$ ինտեգրալը: Կիրառելով հավասարաչափ զուգամիտության Աբելի հայտանիշը ($\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha t)}{t}dt$ հավասարաչափ զուգամետ է ըստ k-ի, քանի որ կախված չէ k-ից, e^{-kt}-ն ճնճուռոն նվազող է ըստ t-ի և հավասարաչափ սահմանափակ է՝ $0<e^{-kt}<1$), կստանանք (տես թեորեմ 13) $\lim\limits_{k\to+0} F(\alpha,k)=\int\limits_0^{+\infty}\lim\limits_{k\to+0} e^{-kt}\dfrac{\sin(\alpha t)}{t}dt=D$:

Ածանցենք $F(\alpha,k)$ $(k>0)$ ֆունկցիան ըստ α-ի: $\dfrac{\partial}{\partial\alpha}F(\alpha,k)=$
$=\int\limits_0^{+\infty} e^{-kt}\cdot\cos(\alpha t)\,dt$ (կարելի է ածանցել ինտեգրալի նշանի տակ, քանի որ $\left|e^{-kt}\cdot\cos(\alpha t)\right|\le e^{-kt}$ և, ուրեմն ըստ Վայերշտրասի հայտանիշի $\int\limits_0^{+\infty} e^{-kt}\cdot\cos(\alpha t)dt$ ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է): Երկու անգամ մասերով ինտեգրելով կստանանք՝ $\dfrac{\partial}{\partial\alpha}F(\alpha,k)=-\dfrac{1}{k}\int\limits_0^{+\infty}\cos(\alpha t)\,de^{-kt}=$

$$=-\frac{1}{k}e^{-kt}\cos(\alpha t)\Big|_0^{+\infty}-\frac{\alpha}{k}\int\limits_0^{+\infty}e^{-k\cdot t}\cdot\sin(\alpha t)\,dt=\ \frac{1}{k}+\frac{\alpha}{k^2}\int\limits_0^{+\infty}\sin(\alpha t)\,de^{-kt}=$$

$$=\frac{1}{k}+\frac{\alpha}{k^2}e^{-kt}\sin(\alpha t)\Big|_0^{+\infty}-\frac{\alpha^2}{k^2}\int\limits_0^{+\infty}e^{-kt}\cos(\alpha t)\,dt=\frac{1}{k}-\frac{\alpha^2}{k^2}\frac{\partial}{\partial\alpha}F(\alpha,k)$$

$\Rightarrow\dfrac{\partial}{\partial\alpha}F(\alpha,k)=\dfrac{k}{\alpha^2+k^2}$: Ուրեմն՝ $F(\alpha,k)=\int\dfrac{k}{\alpha^2+k^2}d\alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{\alpha}{k}+C(k)$:

Քանի որ $F(+0,k)=0$, ապա $C(k)=0$: Ուրեմն՝ $F(\alpha;k)=\operatorname{arctg}\dfrac{\alpha}{k}$: Որտեղից՝ $D=\lim\limits_{k\to+0}\operatorname{arctg}\dfrac{\alpha}{k}=\dfrac{\pi}{2}$: Այսպիսով՝

$$\boxed{\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}}:$$

Գործողություններ կատարելու ընթացքում հաշվի ենք առել, որ $\lim\limits_{t\to+\infty}\cos(\alpha\cdot t)e^{-kt}=\lim\limits_{t\to+\infty}\sin(\alpha\cdot t)e^{-kt}=0$ ($e^{-kt}\underset{t\to+\infty}{\to}0$, $\left|\cos(\alpha\cdot t)\right|\le 1$, $\left|\sin(\alpha\cdot t)\right|\le 1$) : Հաշվի ենք առել նաև, որ կարելի է անցնել սահմանի ինտեգրալի նշանի տակ՝ $\lim\limits_{\alpha\to+0} F(\alpha,k)=\int\limits_0^{+\infty}\lim\limits_{\alpha\to+0} e^{-kt}\cdot\frac{\sin(\alpha t)}{t}dt=0$,

քանի որ $\int\limits_0^{+\infty} e^{-kt}\cdot\frac{\sin(\alpha t)}{t}dt$ ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է

ըստ Վայերշտրասի հայտանիշի ($\frac{e^{-kt}}{t}\cdot|\sin(\alpha t)|\le\alpha\cdot e^{-kt}$ և $\int\limits_1^{+\infty} e^{-kt}dt$

ինտեգրալը զուգամետ է):

Որպես պարամետրից կախված ինտեգրալների տեսության կարևոր կիրառություն դիտարկենք հետևյալ ինտեգրալները:

3. ԷՅԼԵՐՅԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

Էյլերյան ինտեգրալներն են գամմա (Γ) և բետա (B) ֆունկցիաները:

Սահմանում 1: Գամմա ֆունկցիա կոչվում է հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\boxed{\Gamma(a)=\int\limits_0^{+\infty} x^{a-1}\cdot e^{-x}\,dx}: \qquad (1)$$

Այստեղ առկա է երկու եզակի կետ 0 -ն և $+\infty$-ը: Ուստի ինտեգրալը ձևափոխենք $\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$ տեսքի, որտեղ $\Gamma_1=\int\limits_0^1 x^{a-1}\cdot e^{-x}\,dx$,

իսկ $\Gamma_2=\int\limits_0^1 x^{a-1}\cdot e^{-x}\,dx$: Նախ պարզենք առաջին (Γ_1) ինտեգրալի

զուգամիտությունը: Ունենք՝ $x^{a-1}\cdot e^{-x}\underset{x\to0}{\sim}\frac{1}{x^{1-a}}$, ուրեմն Γ_1-ը զուգամետ

է, եթե $1-a<1\Rightarrow a>0$: Երկրորդ ինտեգրալը զուգամետ է անկախ a-

ից: Իրոք՝ $\left(x^{a-1}\cdot e^{-x}\right):\left(\frac{1}{x^2}\right)=x^{a+1}\cdot e^{-x}\underset{x\to+\infty}{\to}0$ և $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ ինտեգրալը

զուգամետ է, որտեղից ստանում ենք Γ_2-ի զուգամիտությունը: Այսպիսով, գամմա ֆունկցիան որոշված է, երբ $a>0$:

Գամմա ֆունկցիան օժտված է հետևյալ հատկություններով:

1. $\boxed{\Gamma \in C^{\infty}(0;+\infty)}$: Ապացուցելու համար վերցնենք կամայական $a_0>0$: Պարզ է, որ $\exists \alpha,\beta : 0<\alpha \le a_0 \le \beta$: Մնում է ապացուցել, որ՝ $\Gamma(a) \in C^{\infty}[\alpha;\beta]$:

Նորից օգտվենք $\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$ վերլուծությունից: $\Gamma_1(a)=\int_0^1 x^{a-1}\cdot e^{-x}dx$ ինտեգրալի համար ունենք՝ $x^{a-1}\cdot e^{-x} \le x^{\alpha-1}\cdot e^{-x}$: Քանի որ $\alpha>0$, ապա $\int_0^1 x^{\alpha-1}\cdot e^{-x}\,dx$ ինտեգրալը զուգամետ է և, ուրեմն հավասարաչափ զուգամետ է $\int_0^1 x^{a-1}\cdot e^{-x}\,dx$ ինտեգրալը $[\alpha;\beta]$-ում: Այսպիսով $\Gamma_1 \in C[\alpha;\beta]$: Նույնը կարելի է պնդել $\Gamma_2(a)$-ի մասին, քանի որ, այս դեպքում՝ $x^{a-1}\cdot e^{-x} \le x^{\beta-1}\cdot e^{-x}$: Այսպիսով $\Gamma \in C[\alpha;\beta] \Rightarrow \Gamma$-ն անընդհատ է $a_0 \in [\alpha;\beta]$ կետում և, ուրեմն $\Gamma \in C(0;+\infty)$:

Գամմա ֆունկցիան ածանցելի է, և ածանցյալը հաշվելիս կարելի է ածանցել ինտեգրալի նշանի տակ՝ $\Gamma'(a)=\int_0^{+\infty} x^{a-1}\cdot e^{-x}\cdot \ln x\,dx$: Այս ինտեգրալի հավասարաչափ զուգամիտությունը կամայական $[\alpha;\beta]$-ում ($\alpha>0$) և, ուրեմն ինտեգրալի նշանի տակ ածանցման հնարավորությունը կամայական $a>0$ կետում ապացուցվում է նախորդի պես, քանի որ, երբ կան աստիճանային և ցուցչային ֆունկցիաներ լոգարիթմական ֆունկցիայի առկայությունը զուգամիտության հարցում կարևոր չէ (այն կարելի է փոխարինել նույնաքար 1 – ով): Նմանապես, ինդուկցիայի մեթոդով, ապացուցվում է, որ՝

$$\boxed{\Gamma^{(k)}(a)=\int_0^{+\infty} x^{a-1}\cdot e^{-x}\cdot(\ln x)^k\,dx \quad (k \in N)},$$

Այստեղից հետևում է, որ $\Gamma \in C^{\infty}(0;+\infty)$:

2. $\boxed{\Gamma(a+1)=a\cdot\Gamma(a)\ (a>0)}$: (2)

Իրոք, մասերով ինտեգրման բանաձևի միջոցով, ստանում ենք՝

$$\Gamma(a+1)=\int_0^{+\infty}x^a\cdot e^{-x}\,dx=-\int_0^{+\infty}x^a\cdot de^{-x}=-x^a e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x}\cdot dx^a=$$

$$=a\int_0^{+\infty}x^{a-1}\cdot e^{-x}\,dx=a\cdot\Gamma(a):$$

Նկատենք, որ՝ $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=1$: Ուրեմն՝ $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=$

$$=n(n-1)\Gamma(n-1)=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot\Gamma(1)=n!\Rightarrow\boxed{\Gamma(n+1)=n!\ ,\ n\in N}$$

Եթե $a>1$, ապա մի քանի անգամ օգտվելով (2) – ից ($[a]$ անգամ, եթե a-ն կոտորակ է և $a-1$ անգամ, եթե $a\in N$), $\Gamma(a)$-ի նոր a' արգումենտը կընկնենք $(0;1]$ միջակայքի կետի, ուրեմն կարևոր է իմանալ գամմա ֆունկցիայի հատկությունները $(0;1]$ միջակայքում (այն բավականաչափ լավ, գրաֆիկով հանդերձ, ուսումնասիրված է):

Սահմանում 2: Բետտա ֆունկցիա կոչվում է հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\boxed{B(a;b)=\int_0^1 x^{a-1}\cdot(1-x)^{b-1}dx}: \qquad (3)$$

Քանի որ 0-ն և 1-ը եզակի կետեր են, ապա նպատակահարմար է բետտա ֆունկցիան ձևափոխել հետևյալ կերպ՝ $B=B_1+B_2$, որտեղ $B_1=\int_0^{0,5}x^{a-1}\cdot(1-x)^{b-1}dx$, իսկ $B_2=\int_{0,5}^1 x^{a-1}\cdot(1-x)^{b-1}dx$: Քանի որ $x^{a-1}(1-x)^{b-1}\underset{x\to0}{\sim}\frac{1}{x^{1-a}}$, իսկ՝ $x^{a-1}(1-x)^{b-1}\underset{x\to1}{\sim}\frac{1}{(1-x)^{1-b}}$, ապա B_1 ինտեգրալը զուգամետ է, երբ $a>0$ $(1-a<1)$, իսկ B_2-ը զուգամետ է, երբ $b>0$: Այսպիսով, բետտա ֆունկցիան զուգամետ է, երբ $a>0, b>0$: Ակնհայտ է, որ՝

$$\boxed{B(a,b)=B(b;a)}: \qquad (4)$$

Հիմնավորելու համար, բավական է (3) – ում x - ը փոխարինենք $1-x$ - ով:

Հաճախ օգտակար է լինում բետտա ֆունկցիայի այլ տեսքը, որը ստացվում է, երբ անցնում ենք նոր փոփոխականի՝ $x=\dfrac{y}{1+y}$, $dx=\dfrac{dy}{(1+y)^2}$, $y=\dfrac{x}{1-x}$ $1-x=\dfrac{1}{1+y}$, $y(0)=0$, $y(1-0)=+\infty$: Այսպիսով՝

$$\boxed{B(a,b)=\int_0^{+\infty}\frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}dy}: \tag{5}$$

Մասերով ինտեգրման բանաձևի միջոցով ապացուցվում է (տես (2)-ը) բետտա ֆունկցիայի հետևյալ հատկությունը

$$\boxed{B(a+1,b)=\frac{a}{a+b}\cdot B(a,b)} \quad (a>0,b>0) \tag{6}$$

Բետտա ֆունկցիան բերվում է գամմա ֆունկցիայի հետևյալ կերպ: (1)-ի մեջ անցնելով նոր փոփոխականի՝ $x=t\cdot y$ $(t>0)$, կստանանք՝

$$\frac{\Gamma(a)}{t^a}=\int_0^{+\infty}y^{a-1}\cdot e^{-ty}\,dy: \tag{7}$$

(7)-ում a-ն փոխարինենք $a+b$-ով ($b>0$), իսկ t-ն՝ $t+1$-ով, կստանանք՝ $\dfrac{\Gamma(a+b)}{(1+t)^{a+b}}=\int_0^{+\infty}y^{a+b-1}\cdot e^{-(1+t)y}\,dy$: Ստացվածի երկու կողմը բազմապատկենք t^{a-1}-ով և ինտեգրենք ըստ t-ի 0-ից $+\infty$ սահմաններում, կստանանք՝

$$\Gamma(a+b)\cdot B(a,b)=\int_0^{+\infty}t^{a-1}dt\int_0^{+\infty}y^{a+b-1}\cdot e^{-(1+t)y}dy: \tag{8}$$

(8)-ի աջ մասում փոխելով ինտեգրման կարգը (հիմնավորումը ստորև) և հաշվի առնելով (7)-ը, կստանանք՝

$$\Gamma(a+b)\cdot B(a,b)=\int_0^{+\infty} y^{a+b-1}\cdot e^{-y}dy\int_0^{+\infty} t^{a-1}\cdot e^{-ty}dt=$$

$$=\int_0^{+\infty} y^{a+b-1}\cdot e^{-y}\cdot\frac{\Gamma(a)}{y^a}dy=\Gamma(a)\int_0^{+\infty} y^{b-1}\cdot e^{-y}dy=\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)$$

$$\Rightarrow \boxed{B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}}: \qquad (9)$$

Այժմ հիմնավորենք ինտեգրման կարգի փոփոխման հնարավորությունը, համարելով, որ նախ՝ $a>1, b>1$: Օգտվենք 9., թեորեմ 13-ից: Տվյալ դեպքում՝ $t^{a-1}\cdot y^{a+b-1}\cdot e^{-(1+t)y}=f(t,y)$, $f\in C([0;+\infty)\times[0;+\infty))$,

$f(t,y)\geq 0$, $\quad t^{a-1}\int_0^{+\infty} y^{a+b-1}\cdot e^{-(1+t)y}dy=\Gamma(a+b)\cdot\frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}=g(t)$,

$g\in C[0;+\infty)(a>1)$, $y^{a+b-1}\cdot e^{-y}\int_0^{+\infty} t^{a-1}\cdot e^{-ty}dt=\Gamma(a)y^{b-1}\cdot e^{-y}=h(y)$,

$h\in C[0;+\infty)\quad(b>1)$: Ընդհանուր դեպքում $(a>0,b>0)$ ունենք՝ $B(a+1,b+1)=\frac{\Gamma(a+1)\cdot\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)}$: Օգտվելով (2)-ից, (4)-ից և (6)-ից, նորից կգանք (9)-ին:

Էյլերյան ինտեգրալների համար ճիշտ են հետևյալ (լրացման) բանաձևերը:

$$\boxed{\Gamma(a)\cdot\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin(\pi a)}\ (0<a<1)},\ \boxed{B(a,1-a)=\frac{\pi}{\sin(\pi a)}(0<a<1)}\ (10)$$

(9)-ից հետևում է, որ (10)-ի երկու բանաձևը իրար համարժեք են, քանի որ՝ $\Gamma(1)=1$: Լրացման բանաձևերի դուրս բերումը պահանջում է լրացուցիչ գիտելիքներ, ուստի այստեղ այն չենք բերի:

Էյլերյան ինտեգրալների տեսությունը կիրառվում է ինտեգրալներ հաշվելիս, ընդ որում անգամ բերումը էյլերյան ինտեգրալի արդեն համարվում է դրական արդյունք:

Օրինակ 2: Որպես լրացման բանաձևի կիրառություն հաշվենք Էյլեր-Պուասոնի $I=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ ինտեգրալը: Անցնենք նոր $x=\sqrt{t}$ $\left(dx=\frac{1}{2}t^{1-\frac{1}{2}}dt\right)$ փոփոխականի: Կստանանք $I=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$:

Տեղադրելով (9)-ի մեջ $a=0{,}5$, կունենանք՝ $\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}}=\pi\Rightarrow$

$\Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$: Ուրեմն $I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$:

Օրինակ 3: Հաշվենք $I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^n}$ $(n>0)$ ինտեգրալը: Անցնելով նոր

$t=x^n$ $\left(x=t^{\frac{1}{n}}, dx=\frac{1}{n}\cdot t^{\frac{1}{n}-1}dt\right)$ փոփոխականի, կստանանք (տես

(5), (10))՝ $I=\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{1}{n}-1}dt}{1+t}=\frac{1}{n}B\left(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right)=\frac{\pi}{n\cdot\sin\frac{\pi}{n}}$: Այսպիսով՝

$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^n}=\frac{\pi}{n\cdot\sin\frac{\pi}{n}}\ (n>0)}$: Մասնավորապես՝ $\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}}$,

$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}$:

VI. ԱՆԲԱՑԱՀԱՅՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Դիտարկենք

$$F(x,y)=0 \qquad (1)$$

ֆունկցիոնալ հավասարումը, որտեղ $F(x,y)$-ը որոշված է հարթության ինչ–որ տիրույթում: Եթե ինչ-որ X միջակայքի յուրաքանչյուր x կետի համար գոյություն ունի միակ կամ մի քանի y, որոնք x-ի հետ մեկտեղ բավարարում են (1) հավասարմանը, ապա այդպիսով որոշվում է միարժեք, կամ բազմարժեք ֆունկցիա $y=f(x)$, որը դարձնում է (1)-ը նույնություն X միջակայքում:

Դիտարկենք մասնավոր դեպք՝ $F(x,y)=x^2-y^2$ և փորձենք այս դեպքում (1) - ը լուծել y փոփոխականի նկատմամբ: (1) – ից հետևում է՝ $y=\pm x$: Դա նշանակում է, որ (1) հավասարումից որոշվում են $y=x$, $y=-x$, $y=|x|$, $y=-|x|$ անընդհատ ֆունկցիաներ: Բայց (1) - ից որոշվում են նաև խզվող, անթիվ բազմությամբ ֆունկցիաներ, օրինակ՝ $y(x)=x$, երբ x-ը ռացիոնալ է և $y(x)=-x$, երբ x-ը իռացիոնալ է: Դիֆերենցելի ֆունկցիաների դասում (1)-ը ունի միայն $y=x$, $y=-x$ լուծումներ: Այս դեպքում, (1)-ը հաջողվեց y-ի նկատմամբ բացահայտորեն (բանաձևի միջոցով) լուծել: Բայց հաճախ դա այդպես չէ: Օրինակ $x^y-y^x=0$ հավասարումը բացահայտորեն լուծել y-ի, կամ X-ի նկատմամբ չի հաջողվում, բայց ինչ-որ X միջակայքում (1)-ից այնուամենայնիվ որոշվում է $y=f(x)$ ֆունկցիա, որը անվանում են անբացահայտ: Այսպիսով, (1) հավասարումից կարող են որոշվել բացահայտ (բանաձևով տրվող) և անբացահայտ ֆունկցիաներ: Հիշելով ֆունկցիայի ընդհանուր սահմանումը [1], հասկանալի է դառնում ֆունկցիաների այդ տարաբաժանման պայմանական լինելը:

Սահմանում 1: Կասենք, որ (1) հավասարումից որոշվում է $y=f(x)$ անբացահայտ ֆունկցիա X միջակայքում, եթե այն տեղադրելով (1) -մեջ ստանում ենք նույնություն X-ում $(F(x,f(x))\equiv 0,\ x\in X)$:

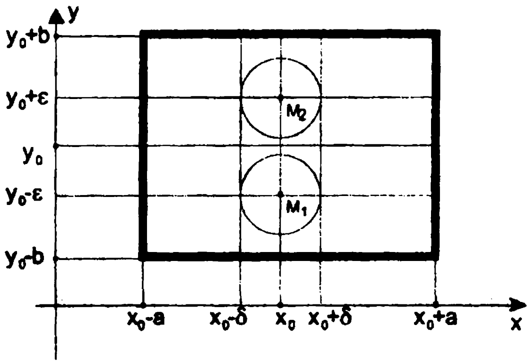
Հարց է առաջանում՝ ե՞րբ է (1) ֆունկցիոնալ հավասարումից որոշվում, և այն էլ միարժեքորեն անբացահայտ ֆունկցիա:

Դիցուք $D=[x_0-a;x_0+a]\times[y_0-b;y_0+b]$ ուղղանկյուն է, իսկ $M_0(x_0,y_0)$- ն՝ այդ ուղղանկյան անկյունագծերի հատման կետը (տես նկ. 15):

Թեորեմ1: Դիցուք՝ $F,F'_y\in C(D)$, $F(M_0)=0$, $F'_y(M_0)\neq 0$: Այդ դեպքում (1) հավասարումից x_0- ի ինչ-որ $U_\delta(x_0)=(x_0\text{-}\delta;x_0+\delta)$ շրջակայքում որոշվում է միակ $y=f(x)$ անբացահայտ անընդհատ ֆունկցիա և այն բավարարում է $f(x_0)=y_0$ պայմանին: Եթե լրացուցիչ ենթադրենք, որ $F'_x\in C(D)$, ապա՝ $f\in C^1(U_\delta(x_0))$ և՝

$$f'(x)=-\frac{F'_x(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))}\quad (x\in U_\delta(M_0)): \tag{2}$$

Ապացուցում: Ենթադրենք, որոշակիության համար $F'_y(M_0)>0$: Քանի որ F'_y ֆունկցիան անընդհատ է M_0 կետում , ապա $F'_y(M)>0$ M_0-ի ինչ-որ շրջակայքում: Այդ դեպքում կգտնվի ավելի փոքր չափսերի ուղղանկյուն D_1, որի անկյունագծերի հատման կետը M_0– ն է և, այնպիսին է, որ $\forall M\in D_1$: $F'_y(M)>0$: Նշանակումները չփոխելու նպատակով, համարենք, որ D–ն՝ D_1-ն է: Այսպիսով, ըստ պայմանավորվածության՝ $\forall M\in D: F'_y(M)>0$, ուրեմն $F(x_0,y)$ $(y\in(y_0-b;y_0+b))$ մեկ փոփոխականի ֆունկցիան կլինի մոնոտոն աճող:



Նկ.15

Կամայական $\forall\varepsilon \in (0;b)$ թվի համար $F(x_0,y)$ մեկ (y) փոփոխականի ֆունկցիան մոնոտոն աճող է նաև $[y_0-\varepsilon;y_0+\varepsilon]$ միջակայքում: Քանի որ $F(x_0,y_0)=0$, ուրեմն՝ $F(M_1)<0$, $F(M_2)>0$ $(M_1(x_0,y_0-\varepsilon)$, $M_2(x_0,y_0+\varepsilon))$: Հաշվի առնելով $F(x,y)$ ֆունկցիայի անընդհատությունը M_1, M_2 կետերում, կստանանք՝ $\exists\,\delta>0, U_\delta(M_k)\subset D$ $(k=1,2)$, այնպես որ՝ $\forall M\in U_\delta(M_1): F(M)<0, \forall M\in U_\delta(M_2):$ $F(M)>0$: Այժմ վերցնենք $\forall x_1\in(x_0-\delta;x_0+\delta)$ և դիտարկենք $F(x_1,y)$ անընդհատ ֆունկցիան $[y_0-\varepsilon;y_0+\varepsilon]$ միջակայքում: Քանի որ $(x_1;y_0-\varepsilon)\in U_\delta(M_1)$, $(x_1;y_0+\varepsilon)\in U_\delta(M_2)$, ուրեմն՝ $F(x_1,y_0-\varepsilon)<0$, $F(x_1,y_0+\varepsilon)>0$: Այստեղից, հաշվի առնելով այն, որ $F(x_1,y)$ ֆունկցիան մոնոտոն աճող է ստանում ենք, որ գոյություն ունի միակ $y_1\in(y_0-\varepsilon;y_0+\varepsilon)$ այնպիսին, որ $F(x_1,y_1)=0$ [1]: Այսպիսով, «ծնվեց» ֆունկցիա $y=f(x)$, որոշված $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ միջակայքում, այնպիսին, որ $F(x,f(x))\equiv 0$ $(x\in U_\delta(x_0))$: Ըստ սահմանման, $y=f(x)$-ը $(x\in U_\delta(x_0))$ անբացահայտ ֆունկցիա է, որոշված (1) հավասարումից: $F(x_0,y_0)=0$ պայմանից հետևում է, որ՝ $f(x_0)=y_0$: Քանի որ $\forall\varepsilon>0$ $\exists\,\delta>0, \forall x\in U_\delta(x_0):$ $y=f(x)\in(y_0-\varepsilon;y_0+\varepsilon)$, ապա $y=f(x)$ ֆունկցիան կլինի անընդհատ x_0 կետում: Այժմ վերցնենք $\forall x_1 \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$: Այդ կետում $y_1=f(x_1)$ արժեքը այնպիսին է, որ $F(x_1,y_1)=0$: Դիտարկենք ուղղանկյուն D' $(D'\subset D)$ այնպիսին, որ նրա անկյունագծերի հատման կետը համընկնում է (x_1,y_1) կետի հետ: Քանի որ $D'-$ ում տեղի ունեն թեորեմի բոլոր պայմանները, ապա կստանանք, որ $y=f(x)$ - ը անընդհատ է նաև x_1 կետում: Այսպիսով՝ $f\in C(U_\delta(x_0))$:

Այժմ ենթադրենք, որ $D-$ ում անընդհատ է նաև F'_x ֆունկցիան: Այդ դեպքում $F(x,y)$ ֆունկցիան կլինի դիֆերենցելի $D-$ ում, մասնավորապես՝ $M_0(x_0,y_0)$ կետում: Այսինքն՝

$$\Delta F(M_0)=F'_x(M_0)\cdot\Delta x+F'_y(M_0)\cdot\Delta y+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y \quad (2)$$

որտեղ $\alpha-$ ն և β- ն անվերջ փոքր են, երբ Δx և Δy աճերը ձգտում են զրոյի:

$y=f(x)$ ֆունկցիան կստանա $\Delta y=f(x)-f(x_0)$ աճ, երբ x_0- ին տալիս ենք $\Delta x=x-x_0$ $(0<|\Delta x|<\delta)$ աճ: Շնորհիվ $y=f(x)$ ֆունկցիայի x_0 կետում անընդհատության ունենք՝ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ և, ուրեմն՝ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\beta=0$: Քանի որ $F(x,f(x))=0$, $F(x_0,f(x_0))=0$, ապա F ֆունկցիայի համապատասխան աճը՝ $\Delta F(M_0)=$ $=F(x,f(x))-F(x_0,f(x_0))=0$: Ուրեմն, ըստ (1) – ի կունենանք՝ $0=F'_x(M_0)\cdot\Delta x+F'_y(M_0)\cdot\Delta y+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y$, որտեղից՝

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{F'_x(M_0)+\alpha}{F'_y(M_0)+\beta}: \quad (3)$$

Քանի որ $F'_y(M_0)\neq 0$, ապա (3) –ի աջ մասը ունի սահման, երբ Δx - ը ձգտում է զրոյի , հետևաբար և ձախ մասը ունի սահման: Այսիքն՝ $\exists\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)=-\dfrac{F'_x(x_0,f(x_0))}{F'_y(x_0,f(x_0))}$: Նույն կերպ (տես աընդհատու-թյան ապացույցը x_0-ից տարբեր կետերում) ապացուցվում է այս փաստը $U_\delta(x_0)$ միջակայքի կամայական կետում: Այսինքն՝ $f'(x)=-\frac{F'_x(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))}$: ■

Դիտողություն 1: Թեորեմ1–ի ձևակերպման մեջ D ուղղանկյունը կարելի է փոխարինել M_0 կետի ինչ-որ շրջակայքով:

Դիտողություն 2: Եթե $y=f(x)$ ֆունկցիայի դիֆերենցելիությունը արդեն հայտնի լիներ, ապա ածանցյալը կկարողանայինք հաշվել բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնի միջոցով: Իրոք, ածանցենք $F(x,f(x))\equiv 0$ $(x\in U_\delta(x_0))$ նույնությունը ըստ $x-$ ի, կստանանք՝ $F'_x(x,f(x))+F'_y(x,f(x))\cdot f'(x)\equiv 0 \Rightarrow (2)$:

Սահմանում 2: Դիցուք տրված է

$$F(x_1,\ldots x_n,y)=0 \qquad (4)$$

հավասարումը $N_0=(M_0,y_0)\in \mathbf{R}^{n+1}$ $\left(M_0\left(x_1^{(0)},\ldots x_n^{(0)}\right)\right)$ կետի ինչ-որ $U_\delta(N_0)$ շրջակայքում: Կասենք, որ (4) – ից որոշվում է n փոփոխականի անբացահայտ $y=f(x_1,\ldots,x_n)$ ֆունկցիա M_0- ի ինչ-որ շրջակայքում, եթե այդ շրջակայքում ճիշտ է $F(x_1,\ldots,x_n,f(x_1,\ldots x_n))\equiv 0$ նույնությունը:

Թեորեմ 2: Դիցուք $F(N)$ ֆունկցիան որոշված է $U_\delta(N_0)$ շրջակայքում, որտեղ անընդհատ է իր բոլոր առաջին կարգի ածանցյալների հետ ($F\in C^1(U_\delta(N_0))$, $F(N_0)=0$, $F'_y(N_0)\neq 0$: Այդ դեպքում (4) հավասարումից M_0- ի ինչ-որ շրջակայքում միարժեքորեն որոշվում է $y=f(x_1,\ldots,x_n)$ անբացահայտ ֆունկցիա, որը անընդհատ է այդտեղ, $f(M_0)=y_0$, և այդ շրջակայքում ունի $\frac{\partial}{\partial x_k}f(M)(k=1,\ldots,n)$ ածանցյալներ, որոնք կարելի է հաշվել ածանցելով $F(x_1,\ldots,x_n,f(x_1,\ldots x_n))\equiv 0$ նույնությունը ըստ x_k փոփոխականի՝ $\frac{\partial}{\partial x_k}F(x_1,\ldots,x_n,f(x_1,\ldots x_n))+$

$$+\frac{\partial}{\partial y}F(x_1,\ldots,x_n,f(x_1,\ldots x_n))\cdot\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1,\ldots,x_n)\equiv 0,$$ որտեղից՝

$$f'_{x_k}(x_1,\ldots,x_n)=-\frac{F'_{x_k}(x_1,\ldots,x_n,f(x_1,\ldots,x_n))}{F'_y(x_1,\ldots,x_n,f(x_1,\ldots,x_n))},\ k=1,\ldots,n: \quad (5)$$

Թեորեմի ապացույցը չենք բերի, քանի որ այն էապես չի տարբերվում նախորդ թեորեմի ապացույցից:

Սահմանում 3: Դիցուք տրված է

$$\begin{cases} F_1(x_1,,,x_n,y_1,\ldots,y_m)=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m(x_1,,,x_n,y_1,\ldots,y_m)=0 \end{cases} \quad (6)$$

հավասարումների համակարգը, որոշված $P_0(M_0,N_0)$ կետի $U_\delta(P_0)$ շրջակայքում ($M_0\left(x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}\right)$, $N_0\left(y_1^{(0)},\ldots,y_m^{(0)}\right)$): Կասենք, որ (6)-ից որոշվում է $y_k=f_k(x_1,\ldots,x_n)$ $(k=1,\ldots,m)$ անբացահայտ ֆունկցիաների համակարգ, եթե M_0 կետի ինչ-որ շրջակայքում ճիշտ են հետևյալ նույնությունները:

$$\begin{cases} F_1(x_1,,,x_n,f_1(x_1,,,x_n),\ldots,f_m(x_1,,,x_n))\equiv 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m(x_1,,,x_n,f_1(x_1,,,x_n),\ldots,f_m(x_1,,,x_n))\equiv 0 \end{cases}, \quad (7)$$

Այս հարցում էական դեր ունի հետևյալ որոշիչը,

$$\frac{\partial(F_1,\ldots,F_m)}{\partial(y_1,\ldots,y_m)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\ldots\frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}\ldots\frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

որն անվանում են Յակոբիի[1] որոշիչ կամ Յակոբիան

[1] Յակոբի Կարլ Գուստավ (1804 – 1851) - գերմանացի մաթեմատիկոս:

Թեորեմ 3: Դիցուք՝ $F_k \in C^1(U_\delta(P_0))$, $F_k(P_0)=0$ $(k=1,...,n)$ և Յակոբիանը

$$\left.\frac{\partial(F_1,...,F_m)}{\partial(y_1,...,y_m)}\right|_{P_0} \neq 0 :$$

Այդ դեպքում (7) համակարգից M_0 կետի ինչ-որ $U_\gamma(M_0)$ շրջակայքում միարժեքորեն որոշվում է $y_k = f_k(x_1,...,x_n)$ $(k=1,...,m)$ անբացահայտ ֆունկցիաների համակարգ, $f_k \in C^1(U_\gamma(M_0))$, $f_k(M_0) = y_k^{(0)}$ $(k=1,...,m)$ և $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$ ածանցյալները որոշվում են այն համակարգից, որը ստացվում է (7) – ը ածանցելու միջոցով՝

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_j} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_j} + ... + \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\cdot\frac{\partial f_m}{\partial x_j} \equiv 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots : \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_j} + \frac{\partial F_m}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_j} + ... + \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\cdot\frac{\partial f_m}{\partial x_j} \equiv 0 \end{cases} \qquad (8)$$

Այստեղից միարժեքորեն որոշվում են $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$ $(k=1,...,n)$ ածանցյալները, քանի որ համակարգի գլխավոր որոշիչը (Δ) Յակոբիանն է՝

$$\Delta = \left.\frac{\partial(F_1,...,F_m)}{\partial(y_1,...,y_m)}\right|_{P_0} \neq 0 :$$

Այս թեորեմի ապացույցը նույնպես չենք բերի:

Օրինակ 1: Դիցուք $y = y(x)$ - ը անբացահայտ ֆունկցիա է, որը որոշվում է $x^y = y^x$ $(x>0, y>0)$ հավասարումից: Այն համարժեք է

$$y\cdot \ln x = x\cdot \ln y \quad (x>0, y>0) \qquad (9)$$

հավասարմանը: Պարզենք այս ֆունկցիայի և նրա ածանցյալի գոյության պայմանները և, հաշվենք ածանցյալը: Համարելով, որ նշված պայմանները առկա են, հաշվենք ածանցյալը: Ըստ թեորեմ 1 – ի այդ ածանցյալի գործակիցը չպետք է լինի զրո: Ունենք՝ $y(x)\cdot \ln x \equiv x\cdot \ln(y(x))$, որտեղից՝

$$\frac{y(x)}{x}+y'(x)\cdot \ln x \equiv \ln(y(x))+\frac{x}{y(x)}\cdot y'(x),$$

$$(\ln x-\frac{x}{y(x)})\cdot y'(x)\equiv \ln(y(x))-\frac{y(x)}{x},$$

$$\frac{x}{y(x)}(\ln(y(x))-1)\cdot y'(x)\equiv \frac{y(x)}{x}(\ln x-1) \Rightarrow$$

$$y'(x)=\left(\frac{y(x)}{x}\right)^2\frac{\ln\left(\frac{x}{e}\right)}{\ln\left(\frac{y(x)}{e}\right)} \quad (x>0, y>0, y\neq e): \qquad (10)$$

Օրինակ 2: Դիցուք $z=z(x,y)$-ը անբացահայտ ֆունկցիան որոշվում է

$$x+y+z=e^{-(x+y+z)} \qquad (11)$$

հավասարումից: Պարզենք այս ֆունկցիայի և նրա առաջին կարգի մասնական ածանցյալների գոյության և միակության պայմանները և, հաշվենք այդ ածանցյալները: Համարելով,որ նշված պայմանները առկա են, կհաշվենք այդ մասնական ածանցյալները: Համաձայն թեորեմ 2-ի, այդ ածանցյալների գործակիցները չպետք է լինեն զրո: Այսպիսով, ունենք՝ $x+y+z(x,y)\equiv e^{-(x+y+z(x,y))}$: Որտեղից՝

$$1+z'_x(x,y)\equiv -e^{-(x+y+z(x,y))}\cdot(1+z'_x(x,y)):$$

Կամ՝ $1+z'_x(x,y)\equiv -(x+y+z(x,y))\cdot(1+z'_x(x,y))$,

$$-z'_x\cdot(1+x+y+z(x,y))\equiv 1+x+y+z(x,y):$$

Այստեղից՝ $z'_x(x,y)\equiv -1$: Իսկ նշված պայմանն է՝ $1+x+y+z\neq 0$: Նույն կերպ (նույն պայմանի առկայությամբ) ստացվում է՝ $z'_y(x,y)\equiv -1$:

Օրինակ 3: Դիցուք $u(x,y), v(x,y)$ անբացահայտ ֆունկցիաները որոշվում են հետևյալ համակարգից՝ $\begin{cases} u+v-x=0 \\ u^2+v^2-y=0 \end{cases}$: Պահանջվում է հաշվել $z=u^3+v^3$ ֆունկցիայի z'_x, z'_y մասնական ածանցյալները՝ Ունենք՝ $z'_x=3u^2\cdot u'_x+3v^2\cdot v'_x$, $z'_y=3u^2\cdot u'_y+3v^2\cdot v'_y$: Մնում է հաշվել u'_x, v'_y ածանցյալները: Վարվենք ինչպես նախորդ օրինակներում: Ունենք՝ $\begin{cases} u(x,y)+v(x,y)\equiv x \\ u^2(x,y)+v^2(x,y)\equiv y \end{cases}$:

Որտեղից՝ $\begin{cases} u'_x(x,y)+v'_x(x,y)\equiv 1 \\ 2u(x,y)\cdot u'_x(x,y)+2v(x,y)\cdot v'_x(x,y)\equiv 0 \end{cases}$:

Այս համակարգի գլխավոր որոշիչը (Յակոբիանը) կլինի՝ $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2u(x,y) & 2v(x,y) \end{vmatrix}=2(v(x,y)-u(x,y))$: Եթե $\Delta\neq 0$, ապա ստացված համակարգը ունի միակ լուծում՝ $u'_x(x,y)=\dfrac{v(x,y)}{v(x,y)-u(x,y)}$, $v'_x(x,y)=-\dfrac{u(x,y)}{v(x,y)-u(x,y)}$ $(u\neq v)$: Ուրեմն՝ $z'_x(x,y)=\dfrac{3}{v(x,y)-u(x,y)}\times$ $\times\left[u^2(x,y)\cdot v(x,y)-v^2(x,y)\cdot u(x,y)\right]=-3u(x,y)\cdot v(x,y)$: Նույն կերպ ստացվում է՝ $z'_y(x,y)=\dfrac{3}{2}(u(x,y)+v(x,y))$:

Հեղինակները հայտնում են իրենց խորին շնորհակալությունը պրոֆեսորներ Ա.Հ. Հովհաննիսյանին և Ա. Ա.Կիտբալյանին օգտակար դիտողությունների և խորհուրդների համար:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Ա. Գ. Ղալումյան, Մաթեմատիկական անալիզ. Մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դիֆերենցիալ հաշիվ, ԵՊՀ, 2002.
2. Г. М. **Фихтенгольц**, Курс дифференциального и интегрального исчисления., М., Физ-мат. лит., Т.1, 2000, Т.2 2003, Т.3, 2005.
3. Л. Д. **Кудрявцев**, Математический анализ, М., Наука, 1968.
4. **В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл.Х. Сендов**, Математический анализ, Изд. Моск. Университета,1987.
5. С. М. **Никольский**, Курс математического анализа, т.1,2, М., Наука, 1983.
6. А. Н. **Колмогоров**, С. В. **Фомин**, Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 1976.
7. Ու. Ռուդին, Մաթեմատիկական անալիզի հիմունքները, Լույս, Ե. 1975.
8. Зорич, Мат. анализ.,Ч. 1,2, М.,Наука, 1984.
9. Б. П. **Демидович**, Сборник задач и упражнений по мат. анализу, Изд. Моск., Университета, М., 1997.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Ա. Գ. ՂԱԼՈՒՄՅԱՆ, Ա. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶ

(դասախոսություններ)

ԵՐԿՐՈՐԴ ՄԱՍ

ԻՆՏԵԳՐԱԼ ԵՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՇԻՎ

Համ. շարվածք՝ Ա. Գ. Ղալումյան
Համ. ձևավորում՝ Ա. Խ. Աղուզումցյան

Ստորագրված է տպագրության՝ 05.02.2008 թ.:
Չափս՝ 60x84 1/16: Թուղթ՝ օֆսեթ:
Տպագր. 8.5 մամուլ:
Տպաքանակ՝ 200: Պատվեր՝ 5:

ԵՊՀ հրատարակչություն, Երևան, Ալ. Մանուկյան 1

ԵՊՀ տպագրատուն, Երևան, Աբովյան 52