

## **ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՍՏԱՄԱՐՄ**

**Գ. Գ. Գևորգյան Լ. Հ. Գալստյան Ա. Կ. Թամարյան  
Գ. Վ. Սիքայելյան Կ. Ա. Նավասարդյան**

## **ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶԻ ԽՆԴՐԱԳԻՐՔ**

**Երկրորդ մաս**

**Չորրորդ լրամշակված  
հրատարակություն**

**Երևան  
ԵՊՀ հրատարակչություն  
2014**

Երաշխավորված է ՀՀ ԿԳ նախարարության կողմից  
որպես բուհերի ուսումնական ձեռնարկ

ՀՏԴ 517(076.1)

ԴՄԴ 22.161 ց7

Մ 151

Մ 151 Մարենստիկական անսլիզի խնդրագիրը/Գ. Գ. Գևորգյան, Լ. Հ.  
Գևասյան, Ա. Վ. Թուսլովյան, Գ. Վ. Միքայելյան, Կ. Ա. Նա-  
վասարյան.- 4-րդ լրամշ. հրատ. -Եր.: ԵՊՀ հրատ., 2014.  
Մոս 2.- 265 էջ:

Ուսումնական ձեռնարկը նախադասված է բուհերի  
ֆիզիկամաթեմանիկական և քնագիտական  
ֆակուլտետների համար:

ՀՏԴ 517(076.1)  
ԴՄԴ 22.161 ց7

ISBN 978-5-8084-1834-9

ԵՊՀ հրատ., 2014

Հայաստանի Հանրապետության ուրիշ., 2014

# Գլուխ 10

## Թվային շարքեր և անվերջ արտադրյալներ

Տրված  $a_n$  ( $n \in N$ ) թվային հաջորդականության համար  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  սիմվոլ կոչվում է

թվային շարք:  $A_n = a_1 + \dots + a_n$ ,  $n \in N$ , գումարը կոչվում է շարքի  $n$ -րդ մասմակի գումար: Եթե  $A_n$  հաջորդականությունը գուգամեալ է, ապա շարքը անվանում են զուգամեալ,  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ -ը

շարքի գումար և գլուխ:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ : Հակառակ դեպքում շարքը անվանում են տարամեալ:

Ըստ բարձր գուգամ իւսության անհաջող արժեքը կազմում է: Եթե  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը

զուգամեալ է, ապա  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ :

Կոչեալ իւսության անհաջությունը: Որպեսզի  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը լինի զուգա-

մեալ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ ցանկացած  $\varepsilon > 0$  թվի համար գոյություն ունենալ  $n_0$  թիվ, այնպիսին, որ ցանկացած  $n \geq n_0$  և  $p$  թիվան թվերի համար տեղի ունենալ  $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$  անհավասարությունը:

Եթե  $a_n \geq 0$ , ապա շարքը կոչվում է ոյրական: Եթե ոյրական շարքը զուգամեալ է (ասրա-  
մեալ է), ապա գլուխ են  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$  ( $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ ):

Դրական շարքի զուգամիտության համար անհրաժեշտ է և բավարար նրա մասմակի գումարների հաջորդականության անհմանափակությունը:

Քանի ու ի ա մ ա ն հ ա յ ա ա ն ի շ ե ր : 1) Եթե  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ( $A$ ) և  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  ( $B$ ) ոյրական շարքերի համար ի վերջո տեղի ունի  $a_n \leq b_n$  անհավասարությունը, ապա ( $B$ ) շարքի զուգամի-  
տությունից բխում է ( $A$ ) շարքի զուգամիտությունը:

2) Եթե  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ ,  $0 < c < \infty$ , ապա ( $A$ ) և ( $B$ ) շարքերը մրաժամանակ զուգամեալ են

կամ մրաժամանակ տարամեալ:

3) Եթե ի վերջո  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ , ապա ( $B$ ) շարքի զուգամիտությունից բխում է ( $A$ ) շարքի զուգամիտությունը:

Դ. Ա լ ա մ բ ե ր ի հ ա յ տ ա ն ի շ ը : Եթե  $a_n > 0$  և  $D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$ , եթե  $n \geq n_0$ ,

ապա  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը զուգամես է, իսկ եթե  $D_n \geq 1$ , եթե  $n \geq n_0$ , ապա շարքը տարամետ է:

Կ ո չ ի ի հ ա յ ա ն ի շ ը : Եթե  $a_n \geq 0$  և  $C_n = \sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ , եթե  $n \geq n_0$ , ապա  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը զուգամես է, իսկ եթե  $C_n \geq 1$ , եթե  $n \geq n_0$ , ապա շարքը տարամետ է:

Կ ո չ ի ի ի ն ա ե զ բ ա լ ա յ ի ն հ ա յ տ ա ն ի շ ը : Եթե  $f$ -ը  $[1, +\infty)$ -ի վրա ոչ բացառա-  
ման և շաճող ֆունկցիա է, ապա  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  շարքը և  $\int_1^{\infty} f(x)dx$  ինտեգրալը միաժամանակ զուգամետ  
են կամ միաժամանակ տարամետ:

Ը ա ր ց ի բ ա ց ա ր ծ ա կ և ա յ ա յ մ ա ն ա կ ա ն զ ո ւ զ ա մ ի ա ո ւ թ յ ո ւ ն ը :  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

շարքը կոչվում է բացարձակ զուգամետ, եթե զուգամետ է  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  շարքը: Եթե  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ -ը զուգամետ  
է, բայց բացարձակ զուգամետ չէ, ապա այն կոչվում է պայմանական զուգամետ:

$X$  բազմության փոխմարդեք արտապատկերում  $X$ -ի վրա կոչվում է  $X$  բազմության  
տեղափոխություն: Տրված է  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը: Թեև ան թվերի բազմության ցանկացած  $\sigma: N \rightarrow N$

տեղափոխության համար  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ -ը կոչվում է  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ -ի անկառմախված շարքը:

Դ ի թ ի ի լ ե ի թ ե ր ե մ ը : Բացարձակ զուգամետ շարքի ցանկացած տեղափոխված  
շարք զուգամետ է և ամեն նոյն գումարը:

Ո ի մ ա ն ի թ ե ր ե մ ը : Պայմանական զուգամետ շարքի անդամները կարենի է տեղա-  
փոխել այնպես, որ ստացված շարքի գումարը վեցի հավասար հայտապես տրված կամայական թվի  
(կամ  $\pm\infty$ -ի):

Լ ա յ թ ի ց ի հ ա յ տ ա ն ի շ ը : Եթե  $b_n \geq 0$  հաջորդականությունն ի վերջո չանող է  
և  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ , ապա  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$  նշանավոխ շարքը զուգամետ է:

Ա բ ե լ ի հ ա յ տ ա ն ի շ ը : Եթե  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը զուգամետ է, իսկ  $b_n$  հաջորդականությունն  
ի վերջո մոնտառ է և սահմանափակ, ապա  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  շարքը զուգամետ է:

Դ ի թ ի ի լ ե ի հ ա յ տ ա ն ի շ ը : Եթե  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքի  $A_n$  մասնակի գումարների հաջոր-  
դականությունը սահմանափակ է, իսկ  $b_n$  հաջորդականությունն ի վերջո մոնտառ է և  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ ,

ապա  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  շարքը գուգամեն է:

$$\text{Թվաբառ առաջին ական գործությունը : Եթե } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ և } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ շարքերը գուգամեն}$$

են, ապա ցանկացած  $\lambda, \mu$  թվերի համար գուգամեն է  $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$  շարքը, ընդունակ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n :$$

$$\text{Տրված } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ և } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ շարքերի սրտառվայրը (ըստ Կոշիի) ասհմանվում է որպես } \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

շարք, որտեղ  $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1$  ( $n \in N$ ),

**Թեսում:** Եթե  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  շարքերը, ինչպես նաև  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  սրտառվայրը շարքը, գուգամեն

են, ապա  $\left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=1}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ :

**Մերակն սիրենը:** Եթե  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$  գուգամեն շարքերից առնվազն

մեկը բացարձակ գուգամեն է, ապա գուգամեն է նաև  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  սրտառվայրը շարքը, ընդունակ:

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=1}^{\infty} b_n \right)$ :

**Անվերջաբար արտադրության սրբածության համար**  $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$  ( $p_n \neq 0, n \in N$ ) թվային հաջորդականության սրբածությամբ կոչվում է անվերջ արտադրությալ: Այն կոչվում է գուգամեն, եթե գայություն

ունի  $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n p_k$  վերջավոր, գրայից տարրեր սահմանը: Հակառակ դեպքում անվերջ արտադրությալը

համարվում է տարածեած: Եթե  $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n p_k = 0$  ( $\pm\infty$ ), ապա ասում են, որ անվերջ արտադրությալը

տարածմատում է զրոյի ( $\pm\infty$ -ի) և զրում՝  $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = 0$  ( $\pm\infty$ ):

Եթե  $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$  դժվարացնելու համար ապա՝  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1$ :

$\prod_{k=1}^{\infty} p_k$ ,  $p_k > 0$  անվերջ արտադրությալի գուգամիանությունը համարժեք է  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$  շարքի գուգամիանությանը:

$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  անվերջ արտասույցալը կոչվում է *բացարձակ* զուգամետ, եթե զուգամետ է

$\prod_{n=1}^{\infty} |1 + a_n|$  անվերջ արտասույցալը:

## Ա

Հաշվել շարքի զումարը (2414-2418).

$$2414. \sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad (|q| < 1); \quad 2415. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}; \quad 2416. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right);$$

$$2417. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}; \quad 2418. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)};$$

2419. Ապացուցել, որ եթե  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքի անդամները ներկայացված են  $a_n = b_{n+1} - b_n$  աւելքով և գոյուրյուն ունի  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$  վերջավոր սահմանը, ապա շարքը զուգամետ է, ընդ որում՝  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b - b_1$ :

Հաշվել շարքի զումարը (2420-2425).

$$2420. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \right); \quad 2421. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)};$$

$$2422. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{2^n} \cos \frac{3}{2^n}; \quad 2423. \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right);$$

$$2424. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - \sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{n(n+1)}}; \quad 2425. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)};$$

Ստուգել, որ հետևյալ շարքերում բացակայում է զուգամիասուրյան անհրաժեշտ պայմանը (2426-2429).

$$2426. \text{ա) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n; \quad \text{բ) } \sum_{n=1}^{\infty} n^{(-1)^n};$$

$$2427. \text{ա) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{\sqrt[3]{n^3 + 2n + 4}}; \quad \text{բ) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 1}{n+3} \sin \frac{1}{n^2 + 2};$$

$$2428. \text{ա) } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{0,01}; \quad \text{բ) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{3};$$

2429. ա)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^n$ ; բ)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{n+1}{n}}}{\left( n + \frac{1}{n} \right)^n}$ :

2430. Սատուգել, որ շարքի ընդհանուր անդամը ճգնաւում է զրոյի, բայց շարքը տարամեա է.

ա)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ ; բ)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)\sqrt[n]{n}}$ ; զ)  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$ :

Եղնելով Կոչիի զուգամիխուության սկզբանքից՝ հետազոտել շարքի զուգամիխուությունը (2431-2438).

2431. ա)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$  ( $|a_n| \leq 10$ ); բ)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}$ :

2432. ա)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ; բ)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ :

2433. ա)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ; բ)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x^n}{n(n+1)}$ :

2434. ա)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$ ; բ)  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ :

2435. Զուգամեա է արդյոք  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը, եթե ցանկացած  $p \in N$  թվի համար  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}) = 0$ :

2436. Ապացուցել, որ

ա) եթե  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը զուգամեա է, ապա զուգամեա է նաև նրա ցանկացած  $k$ -րդ մնացորդը՝  $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$  ( $k \in N$ );

բ) եթե շարքի որևէ մնացորդը զուգամեա է, ապա զուգամեա է նաև շարքը:

2437. Ապացուցել, որ եթե շարքը զուգամեա է, ապա նրա  $k$ -րդ մնացորդը ճգնաւում է զրոյի, եթե  $k \rightarrow \infty$ :

2438. Ապացուցել, որ եթե  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  և  $S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} a_k$  հաջորդականությունը զուգամեա է, ապա զուգամեա է  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը:

զուգամեա է, ապա զուգամեա է  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը:

Կիրառելով բաղդասաման հայտանիշները՝ հետազոտել շարքի զուգամի-  
տուրյունը (2439-2456).

2439.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ :

Ցուցում: Օգտվել  $\frac{1}{n^{\alpha}} < \frac{1}{\alpha-1} \left( \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right)$  ( $\alpha > 1, n > 1$ ) անհավասարությունից:

2440.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10n+1}$ :

2441.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ :

2442.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$ :

2443.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^4 2n}{(n+1)(n+2)}$ :

2444.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n!}{n\sqrt{n}}$ :

2445.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{4n}}{\sqrt[3]{2n^5-1}}$ :

2446.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \cos \frac{2\pi}{n} \right)$ :

2447.  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \right)$ :

2448.  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2n+1}{n^3+5n+3}$ :

2449.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p + a_1 n^{p-1} + \dots + a_p}{n^q + b_1 n^{q-1} + \dots + b_q}, \quad (n^q + b_1 n^{q-1} + \dots + b_q > 0, n \in N)$ :

2450.  $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{n+2}{n^2+3}$ :

2451.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2}}$ :

2452.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( 3^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \sin \frac{\pi}{n}$ :

2453.  $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n-1}$ :

2454.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ :

2455.  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}$ :

2456. ա)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ ;

բ)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$ :

2457. Դիցուք  $a_n \geq 0, b_n > 0$  ( $n \in N$ ): Ապացուցել, որ

ա) եթե  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  շարքը զուգամես է և  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} < +\infty$ , ապա  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը

զուգամես է;

բ) Եթե  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  շարքը ստուգմեալ է և  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$ , ապա  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը ստուգմեալ է:

**2458.** Ապացուցել, որ եթե գոյություն ունի  $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = a \neq 0$  սահմանը, ապա  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը ստուգմեալ է:

**2459.** Ապացուցել, որ եթե  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  և  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$  շարքերը զուգամեալ են, ապա զուգամեալ են նաև  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$  շարքերը:

**2460.** Ապացուցել, որ եթե  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^3$  և  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^3$  դրական շարքերը զուգամեալ են, ապա զուգամեալ է նաև  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n c_n$  շարքը:

**2461.** Ապացուցել Դ'Ալմբերի հայտանիշի սահմանային ստորբերակը. դիցուք՝  $a_n > 0$  ( $n \in N$ ) և  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ : Եթե

ա)  $q < 1$ , ապա  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը զուգամեալ է;

բ)  $q > 1$ , ապա  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը ստուգմեալ է:

Բերել օրինակներ, այնպիսիք, որ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$  և  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը ա) զուգամեալ է, բ) ստուգմեալ է:

**2462.** Ապացուցել Կոչիի հայտանիշի սահմանային ստորբերակը. դիցուք՝  $a_n \geq 0$  ( $n \in N$ ) և  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ : Եթե

ա)  $q < 1$ , ապա  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը զուգամեալ է;

բ)  $q > 1$ , ապա  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը ստուգմեալ է:

Բերել շարքերի օրինակներ, այնպիսիք, որ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$  և  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը

ա) զուգամես է, բ) տարամես է:

Օգսվելով՝ Դ'Ալամբերի կամ Կոչիի հայտանիշներից՝ հետազոտել շարքի զուգամիտությունը (2463-2474).

$$2463. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{(n+1)!} :$$

$$2465. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n} :$$

$$2467. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} :$$

$$2469. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{3^n n!} :$$

$$2471. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n-1}{2n+1} \right)^{n(n-1)} :$$

$$2473. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^{\sqrt{n^4+3n+1}} :$$

$$2475. \text{ա) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad (\alpha \in R); \quad \text{բ) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} :$$

$$2476. \text{ա) } \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}; \quad \text{բ) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 3n + 5} :$$

$$2477. \text{ա) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\alpha} n}; \quad \text{բ) } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln \ln n} :$$

$$2478. \text{ա) } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^{\alpha}}; \quad \text{բ) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{\ln n}{n^2} :$$

$$2464. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} :$$

$$2466. \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n^2} :$$

$$2468. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{1 \cdot 4 \cdots (3n+1)} :$$

$$2470. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3} \right)^{\frac{3}{n^2}}$$

$$2472. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3 4^{3n}} :$$

$$2474. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n} :$$

Կիրառելով Կոչիի ինստգրալային հայտանիշը՝ հետազոտել շարքի զուգամիտությունը (2475-2478).

$$2475. \text{ա) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad (\alpha \in R); \quad \text{բ) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} :$$

$$\text{բ) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 3n + 5} :$$

$$\text{բ) } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln \ln n} :$$

$$\text{բ) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{\ln n}{n^2} :$$

\*\*\*

Ապացուցել շարքի բացարձակ գուգամիատթյունը (2479-2482).

2479.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)}{n^3\sqrt{n+2}}:$

2480.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^2 n}{2^n}:$

2481.  $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-\sqrt{n}} \sin n!:$

2482.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{(2n)!}:$

Լայքնիցի հայտանիշի օգնությամբ ապացուցել շարքի գուգամիատթյունը (2483-2486).

2483.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}:$

2484.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n}}:$

2485.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\sqrt[4]{n+1}(n+2)}:$

2486.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{\pi}{\sqrt{n}}\right):$

2487. Ապացուցել, որ բացարձակ գուգամնես շարքը գուգամնես է: Կառուցել

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  գուգամնես շարք, այնպիսին, որ  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  շարքը լինի տարամնես:

2488. Կառուցել  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  գուգամնես շարք, այնպիսին, որ  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  շարքը լինի տարամնես:

2489. Դիցուք  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ( $a_n \geq 0$ ) շարքը գուգամնես է: Ցույց տալ, որ ցանկացած

$r > 1$  թվի համար  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^r$  շարքը նույնպես գուգամնես է: Ծշմարի՞ւ և արդյոք

հակադարձ պնդումը: Բնորել համապատասխան օրինակ:

Հետազոտել շարքի բացարձակ և պայմանական գուգամիատթյունը (2490-2493).

2490.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}:$

2491.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 e^n}{3^n + 1}:$

2492.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+10}:$

2493.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^{\alpha}}$  ( $\alpha \in R$ ):

2494. Ի՞նչ կարելի է ասել  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  շարքի գուգամիատթյան մասին, եթե

ա)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  և  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  շարքերը գուգամնես են;

թ)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը զուգամետ է,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  շարքը՝ սարամետ;

զ)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  և  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  շարքերը սարամետ են:

Բնդել համապատասխան օրինակներ:

**2494.1.** Հետազոտել շարքի զուգամիաությունը.

$$\text{ա) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n^{\alpha}};$$

$$\text{բ) } \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2 + 3}{n^2 + 4};$$

$$\text{զ) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2n}{\sqrt{n^5 + 3}};$$

$$\text{դ) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( e^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \sin \frac{1}{\sqrt{n+1}};$$

$$\text{ե) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin n;$$

$$\text{զ) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^{n^2 + 4n + 5};$$

$$\text{ե) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n+1)!}{(3n)!};$$

$$\text{լ) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(3n^2 + 2n + 1)^{\frac{n+3}{2}}};$$

$$\text{թ) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln^2 n}{n};$$

$$\text{ծ) } \sum_{n=1}^{\infty} \cos \left( \frac{\pi}{4} + \pi n \right) \sin \frac{1}{n};$$

$$\text{ժա) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[n^2+1]{n^2+1}};$$

$$\text{ժթ) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{2^n + n^2}{3^n + n^3};$$

\*\*\*

**2495.** Ապացուցել, որ եթե  $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$  արտադրյալը զուգամետ է, ապա  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1$ :

**2496.** Ապացուցել, որ եթե  $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$  արտադրյալը զուգամետ է և  $Q_n = \prod_{m=n+1}^{\infty} p_m$ , ապա  $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = 1$ :

**2497.** Ապացուցել, որ  $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$  ( $p_n > 0$ ) անվերջ արտադրյալի զուգամիաության համար անհրաժեշտ է և բավարար  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$  շարքի զուգամիաությունը: Ցույց

համար անհրաժեշտ է և բավարար  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$  շարքի զուգամիաությունը: Ցույց

սաւլ նաև, որ  $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n\right)$ :

2498. Ապացուցել, որ  $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = 0$  ( $p_n > 0$ ) այն և միայն այն դեպքում, եթե

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n = -\infty :$$

2499. Ապացուցել, որ եթե  $p_n = 1 + \alpha_n$  և  $\alpha_n$ -երը միևնույն նշանի են, ապա  $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ -ի զուգամիառության համար անհրաժեշտ է և բավարար  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  շարքի զուգամիառությունը:

2500. Ապացուցել, որ եթե  $-1 < \alpha_n < 0$  և  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  շարքը տարամեալ է, ապա

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \alpha_n) = 0 :$$

2501. Սաւուցել, որ

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \dots$$

շարքը տարամեալ է, սակայն

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \dots$$

անվերջ արաւաղրյալը զուգամեալ է:

Ապացուցել հավասարությունը (2502-2509).

$$2502. \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2} :$$

$$2503. \prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \frac{2}{3} :$$

$$2504. \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{1}{3} :$$

$$2505. \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right) = 2 :$$

$$2506. \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + x^{2^n}\right) = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1) :$$

$$2507. \prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{2}{\pi} :$$

$$2508. \prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x} :$$

$$2509. \prod_{n=1}^{\infty} ch \frac{x}{2^n} = \frac{sh x}{x} :$$

Հետազոտել անվերջ արտադրյալի գուգամիսությունը (2510-2519).

$$2510. \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} :$$

$$2511. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) :$$

$$2512. \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) :$$

$$2513. \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} :$$

$$2514. \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n+1]{n+2} :$$

$$2515. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^p}\right) :$$

$$2516. \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} :$$

$$2517. \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}} :$$

$$2518. \prod_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p :$$

$$2519. \prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n) :$$

## Բ

Հաշվել շարքի գումարը (2520-2523).

$$2520. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} :$$

$$2521. \sum_{n=1}^{\infty} nq^n \quad (|q| < 1) :$$

$$2522. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+k)} \quad (k \in N) :$$

$$2523. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2\pi n}{3}}{2^n} :$$

2524. Դիցուք  $b_n$ -ը զրոյից տարբեր անդամներով և  $d \neq 0$  տարբերությամբ թվաբանական պրոգրեսիա է: Ապացուցել, որ ցանկացած  $m \in N$  թվի համար

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n b_{n+1} \cdots b_{n+m}} = \frac{1}{m d b_1 b_2 \cdots b_m} :$$

2525. Ապացուցել, որ եթե  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  դրական, նվազող անդամներով շարքը գուգամնեալ է, ապա  $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$ :

2526. Դիցուք  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$  ( $a_n \geq 0$ ) շարքը գուգամնեալ է, ընդ ոլում՝  $a_n$ -ը նվազող է:

Ապացուցել, որ  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  շարքը գուգամնեալ է:

2527. Ապացուցել, որ եթե  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ( $a_n \geq 0$ ) և  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  ( $b_n \geq 0$ ) շարքները զուգամես են, ապա զուգամես են նաև  $\sum_{n=1}^{\infty} \min\{a_n, b_n\}$  և  $\sum_{n=1}^{\infty} \max\{a_n, b_n\}$  շարքերը:

2528. Դիցուք  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ( $a_n \geq 0$ ) և  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  ( $b_n \geq 0$ ) շարքերը սարամես են: Ի՞նչ կարելի է ասել ա)  $\sum_{n=1}^{\infty} \min\{a_n, b_n\}$ ; բ)  $\sum_{n=1}^{\infty} \max\{a_n, b_n\}$  շարքերի զուգամիտության մասին:

2529. Դիցուք՝  $a_n \leq c_n \leq b_n$  ( $n \in N$ ): Ի՞նչ կարելի է ասել  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  շարքի զուգամիտության մասին, եթե  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  և  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  շարքերը ա) զուգամես են; բ) սարամես են:

2530. Ապացուցել, որ եթե  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ( $a_n \geq 0$ ) շարքի համար  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ , ապա շարքը զուգամես է, իսկ եթե  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ , ապա շարքը սարամես է: (Դ'Ալամբերի հայտանիշ):

Կառուցել  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  լրական զուգամես շարք, այնպիսին, որ  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$ :

2531. Դիցուք  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ( $a_n \geq 0$ ) շարքի համար  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = p$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = q$ :

Ապացուցել, որ եթե  $pq < 1$ , ապա շարքը զուգամես է:

2532. Դիցուք՝  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$  ( $a_n \geq 0$ ): Ապացուցել, որ

ա) եթե  $q < 1$ , ապա  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը զուգամես է;

բ) եթե  $q > 1$ , ապա շարքը սարամես է

(Կոշիի հայտանիշ):

Հետազոտել շարքի զուգամիասությունը (2533-2534).

$$2533. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 \sqrt[3]{2 + (-1)^n}}{3^n} :$$

$$2534. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 + \cos n}{2 + \cos n} \right)^{2n - \ln n} :$$

2535. Ապացուցել, որ Կոշիի հայտանիշն ավելի ուժեղ է քան Դ'Ալամբերի հայտանիշը. ցանկացած  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ( $a_n > 0$ ) շարքի համար

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} :$$

Կառուցել շարք, այնպիսին, որ  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ , բայց  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$ :

2536. Դիցուք  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$  ( $a_n > 0$ ) շարքը տարամեալ է: Ապացուցել Կոսմերի հայտանիշը. Եթե  $b_n > 0$  ( $n \in N$ ) և

ա)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( a_n \frac{b_n}{b_{n+1}} - a_{n+1} \right) > 0$ , ապա  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  շարքը զուգամեալ է;

բ)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( a_n \frac{b_n}{b_{n+1}} - a_{n+1} \right) < 0$ , ապա  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  շարքը տարամեալ է:

2537. Ապացուցել

ա) Ռաաբեի հայտանիշը. Եթե  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ( $a_n > 0$ ) շարքի համար

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = p, \text{ ապա } p > 1 \text{ դեպքում շարքը զուգամեալ է, իսկ } p < 1 \text{ դեպքում տարամեալ:}$$

բ) Բերարանի հայտանիշը. Եթե  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ( $a_n > 0$ ) շարքի համար

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) \ln n = q, \text{ ապա } q > 1 \text{ դեպքում շարքը զուգամեալ է, իսկ } q < 1 \text{ դեպքում տարամեալ:}$$

2538. Համեմատել Դ'Ալամբերի, Ռաաբեի և Բերարանի հայտանիշները: Բերել շարքերի օրինակներ, որոնց զուգամիասությունը

ա) հնարավոր է հետազոտել Ռաաբեի հայտանիշի միջոցով և հնարավոր չէ՝ Դ'Ալամբերի հայտանիշի միջոցով;

բ) հնարավոր է հետազոտել թերտրանի հայտանիշի միջոցով և հնարավոր չէ՝ Ռաարեկի հայտանիշի միջոցով:

2539. Ապացուցել, որ եթե  $a_n$  ( $a_n > 0$ ) հաջորդականության համար

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \rightarrow \infty),$$

ապա ցանկացած  $\varepsilon > 0$  թվի համար  $a_n = o\left(\frac{1}{n^{p-\varepsilon}}\right)$  ( $n \rightarrow \infty$ ): Ընդ որում, եթե

$p > 0$ , ապա  $a_n$ -ն ի վերջո մոնուան է և  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ :

2540. Դիցուք  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  շարքը բացարձակ գուգամեաւ է և  $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + b_n$

( $n \in N$ ): Ապացուցել, որ գոյություն ունի  $c \neq 0$  թիվ, այնպիսին, որ  $a_n \sim \frac{c}{n^p}$ ,

եթե  $n \rightarrow \infty$ :

2541. Դիցուք  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ( $a_n > 0$ ) շարքի անդամների համար ճշմարիւ է

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + b_n, \quad n \in N,$$

ներկայացումը, ընդ որում  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  շարքը բացարձակ գուգամեաւ է: Ապացուցել

Դառնախանիշը.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը

ա) գուգամեաւ է, եթե  $\lambda > 1$  կամ  $\lambda = 1$  և  $\mu > 1$ ;

բ) տարամեաւ է, եթե  $\lambda < 1$  կամ  $\lambda = 1$  և  $\mu \leq 1$ :

Օգտվելով Ռաարեկի կամ Դառնախանիշներից՝ հետազոտել շարքի գուգամիսությունը (2542-2549).

2542.  $\sum_{n=1}^{\infty} (2 - \sqrt[n]{a})(2 - \sqrt[3]{a}) \dots (2 - \sqrt[n]{a})$  ( $a > 0$ ):

2543.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^{n+p}}$ :

2544.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^p \frac{1}{n^q}$ :

2545.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! n^{-p}}{q(q+1)\dots(q+n)}$  ( $q > 0$ ): 2546.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{n!} \frac{1}{n^q}$ :

$$2547. \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{q(q+1)\cdots(q+n-1)} \right]^{\alpha} \quad (p > 0, q > 0):$$

$$2548. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n})}:$$

$$2549. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} \quad (\alpha, \beta, \gamma > 0)$$

(հիպերերկրաչափական շարք):

$$2550. \text{Տրված } t \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ դրական անդամներով շարքը: Ապացուցել, որ եթե}$$

գոյուրյուն ունեն  $\varepsilon > 0$  և  $n_0 \in N$  թվեր, այնպիսիք, որ

$$\text{ա) } \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geq 1 + \varepsilon, \quad n \geq n_0, \text{ ապա } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ շարքը զուգամես է:}$$

$$\text{բ) } \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \leq 1 \quad n \geq n_0, \text{ ապա շարքը տարամես է:}$$

Հետազոտել շարքի զուգամիտուրյունը (2551-2552).

$$2551. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}}:$$

$$2552. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}:$$

2553. Դիցուք  $a_n$ -ը ոչ բացասական անդամներով ի վերջո նվազող հաջորդականություն է: Ապացուցել, որ  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  և  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$  շարքերը միաժամանակ զուգամես են կամ միաժամանակ տարամեա (Կոշիի թեորեմ):

$$2554. \text{Դիցուք } a_n \downarrow 0 \quad \text{և} \quad p_m = \max \{n : a_n > 2^{-m}\}: \text{ Ապացուցել, որ } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{և}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n 2^{-n} \text{ շարքերը միաժամանակ զուգամես են կամ միաժամանակ տարամես (Լորաչևսկու հայտանիշ):}$$

$$2555. \text{Դիցուք } f : [1; +\infty) \rightarrow (0; +\infty) \text{ ֆունկցիան շաճող է, իսկ } \int_1^{+\infty} f(x) dx \text{ ինսեգրալը՝ զուգամես: Ապացուցել, որ } \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ շարքի } R_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} f(n) \text{ մնացորդի համար ճշմարիս են հետևյալ գնահատականները.}$$

$$\int_{m+1}^{\infty} f(x)dx \leq R_m \leq f(m+1) + \int_{m+1}^{\infty} f(x)dx :$$

2556. Ապացուցել անհավասարությունը.

$$\text{ա) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}; \quad \text{բ) } \frac{\pi}{2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < \frac{\pi+1}{2}:$$

2557. Դիցուք  $f : [1; +\infty) \rightarrow R$  ֆունկցիան մոնուտոն է և սահմանավակ: Ապացուցել, որ  $a_n = \int_1^n f(x)dx - \sum_{k=1}^n f(k)$  հաջորդականությունը զուգամես է:

Ապացուցել ասխմատուիկ բանաձևը (2558-2561).

$$2558. 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \varepsilon_n,$$

որտեղ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ , իսկ  $C$ -ն էլլերի հաստատումն է:

$$2559. 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} \quad (0 < \alpha < 1):$$

$$2560. \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \quad (\alpha > 1):$$

$$2561. e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n} \quad (0 < \theta_n < 1):$$

2562. Դիցուք  $f : [1; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$  և  $\varphi : [1; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$  ֆունկցիաներից առաջինը նվազող է, իսկ երկրորդը՝ աճող: Դիցուք նաև  $\varphi$ -ն անընդհաա դիմերենցելի է,  $\varphi(x) > x$  և գոյություն ունի

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(\varphi(x))\varphi'(x)}{f(x)} = \lambda$$

Վերջապոր սահմանը: Ապացուցել, որ եթե  $\lambda < 1$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  շարքը զուգամես է, իսկ եթե  $\lambda > 1$ ՝ տարամես:

2563. Նախորդ խնդրում ծևակերպված հայտանիշից ստանալ Դ'Ալամբերի հայտանիշը:

2564. Ապացուցել, որ մոնուտոն և դրական անդամներով  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը զուգամես է, եթե  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{a_n} < \frac{1}{2}$  և տարամես է, եթե  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{a_n} > \frac{1}{2}$ :

**2565.** Յանկացած  $a_n$  և  $b_n$  հաջորդականությունների համար ապացուցել Հյուների և Մինկովսկու անհավասարությունները.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

որտեղ  $1 < p < +\infty$  և  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ :

Ցույց տալ, որ եթե անհավասարության ձախ կողմում շարքը տարամեալ է, ապա աջ կողմում զրկած շարքերից առնվազն մեկը նույնպես տարամեալ է:

Հետազոտել շարքի զուգամիաությունը (2566-2584).

$$2566. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt{n+a} - \sqrt[4]{n^2+n+b} \right) :$$

$$2567. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln \frac{n+1}{n}} \right) :$$

$$2568. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n!}{n^{\alpha}} :$$

$$2569. \sum_{n=1}^{\infty} \left( n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1 \right) :$$

$$2570. \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{a \ln n + b}{c \ln n + d}} :$$

$$2571. \sum_{n=1}^{\infty} a^{-(b \ln n + c \ln^2 n)} \quad (a > 0) :$$

$$2572. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 \left( \sin \frac{1}{n} \right)} :$$

$$2573. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \cos \frac{a}{n} \right)^{n^2} :$$

$$2574. \sum_{n=3}^{\infty} \ln \left( \frac{ch \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \right) :$$

$$2575. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{\sqrt{n}}} :$$

$$2576. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n} :$$

$$2577. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt[n]{a} - \frac{\sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{2} \right) \quad (a, b, c > 0) :$$

$$2578. \sum_{n=1}^{\infty} \left( n^{\alpha} - 1 \right) :$$

$$2579. \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \ln \frac{1}{n^{\alpha}} - \ln \left( \sin \frac{1}{n^{\alpha}} \right) \right] \quad (\alpha > 0) :$$

2580.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}$  ( $a, b > 0$ ):

2581.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n+1)!]^n}{2!4!\cdots(2n)!}$ :

2583.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ :

Հետազոտել սրբած  $a_n$  ընդհանուր անդամն ունեցող շարքի գուգամի-  
առությունը (2585-2590).

2585.  $a_n = \int_n^{n+2} e^{-\sqrt{x}} dx$ :

2587.  $a_n = \int_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{|\sin x|}{x} dx$ :

2589.  $a_n = \frac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+2)!}$ :

2591. Ապացուցել, որ եթե  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը գուգամես է, ապա  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  խմբավոր-  
ված շարքը,  $\alpha_n = \sum_{k=p_n}^{p_{n+1}-1} a_k$  ( $1 = p_1 < p_2 < \dots$ ), նույնպես գուգամես է և ունի  
նույն գումարը: Հակադարձ պնդումը ճշմարիս չէ: Բերել օրինակ:

2592. Ապացուցել, որ եթե  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը դրական է և  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  խմբավորած շարքը  
գուգամես է, ապա  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը նույնպես գուգամես է:

2593. Ապացուցել, որ եթե

1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ,

2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  խմբավորած շարքը,  $\alpha_n = \sum_{k=p_n}^{p_{n+1}-1} a_k$  ( $1 = p_1 < p_2 < \dots$ ), գու-  
գամես է,

2582.  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p (\ln \ln n)^q}$ :

2584.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$ :

2586.  $a_n = \int_0^n \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+x^4}} dx$ :

2588.  $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{1+x} dx$ :

2590.  $a_n = \frac{\sum_{k=1}^n \ln^2 k}{n^a}$ :

$$3) \sup_n (p_{n+1} - p_n) < +\infty,$$

ապա  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը զուգամես է:

2594. Դիցուք շարքը խմբավորված է այնպես, որ յուրաքանչյուր խմբում ընդգրկված անդամները միևնույն նշանի են: Ապացուցել, որ խմբավորված շարքի զուգամիտությունը հետևում է եղակետային շարքի զուգամիտությունը:

2595. Ապացուցել, որ պայմանական զուգամես շարքը կարելի է խմբավորել այնպես, որ սահացված շարքը լինի բացարձակ զուգամես:

2596. Դիցուք բնական թվերի բազմության  $\sigma(n)$  անդավորխությունն այնպիսին է, որ  $\sup_n |n - \sigma(n)| < \infty$ : Ապացուցել, որ  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը զուգամես է այն և միայն

այն դեպքում, եթե զուգամես է  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$  շարքը: Ընդհամին՝  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ :

2597. Դիցուք՝  $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ , իսկ  $\sigma$ -ն բնական թվերի բազմության հետևյալ սեղափոխությունն է.  $\sigma(2^n) = 2^{n+1}$  ( $n \in N$ ) և  $\sigma$ -ն  $N \setminus \{2^p : p \in N\}$  բազմության վրա մոնուառն է: Սաւուգել, որ  $\sup_n |n - \sigma(n)| = +\infty$ , սակայն  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$  շարքը զուգամես է:

2598. Դիցուք  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը զուգամես է և  $\sigma: N \rightarrow N$  սեղափոխությունը բավարարում է  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( |n - \sigma(n)| \sup_{k \geq n} |a_{\sigma(k)}| \right) = 0$  պայմանին: Ապացուցել, որ  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$  շարքը զուգամես է և  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ :

Գտնել շարքի գումարը (2599-2601).

$$2599. 1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \dots;$$

$$2600. 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots;$$

$$2601. 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots;$$

Ցուցում: Օգտվել Եյլերի բանաձևից (աես խնդիր 2558):

$$2602. \zeta(2) = \ln 2: \text{Գտնել տեղափոխված շարքի գումարը.}$$

$$\text{ա) } 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots; \quad \text{բ) } 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots;$$

2603. Սաւուգել, որ  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$  զուգամես շարքի անդամների աեղավոխությունից ստացված  $1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$  շարքը տարամես է:

Հետազոտել շարքի զուգամիտությունը (2604-2607).

$$2604. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{10} n}{n} \sin \frac{\pi n}{4};$$

$$2605. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left( \pi \sqrt{n^2 + k^2} \right);$$

$$2606. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n};$$

$$2607. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n};$$

2608. Դիցուք  $b_n > 0$  և  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ : Ծշմարի՞ս է արդյոք, որ  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$  շարքը զուգամես է:

2609. Դիցուք  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը զուգամես է և  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ : Կարելի՞ է արդյոք

պնդել, որ  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  շարքը զուգամես է:

2610. Դիրիխլեի հայտանիշից ստանալ Արելի հայտանիշը:

2611. Ապացուցել, որ եթե  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$  ( $a_n > 0$ ) շարքի համար

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \rightarrow \infty),$$

որաեղ  $p > 0$ , ապա շարքը զուգամես է:

2612. Ապացուցել, որ  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n)$  շարքը բացարձակ զուգամես է այն և միայն

այն դեպքում, եթե բացարձակ զուգամես է  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը:

Հետազոտել շարքի բացարձակ և պայմանական գուգամիտոթյունը (2613-2624).

$$2613. \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left[ 1 + \frac{(-1)^n}{n^p} \right] :$$

$$2614. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n \sin^{2n} x}{n} :$$

$$2615. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\left[ n + (-1)^n \right]^p} :$$

$$2616. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\left[ \sqrt{n} + (-1)^{n-1} \right]^p} :$$

$$2617. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{4}}{n^p + \sin \frac{\pi n}{4}} :$$

$$2618. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n^{10}}{2^n} :$$

$$2619. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{\alpha}} \quad (0 < x < \pi) :$$

$$2620. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin 2n) \ln^2 n}{n^{\alpha}} :$$

$$2621. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^p :$$

$$2622. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\sqrt{n}}}{n^p} :$$

$$2623. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \ln n \rfloor}}{n} :$$

$$2624. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} :$$

$$2625. \text{Դիցուք } R(x) = \frac{a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \cdots + a_p}{b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \cdots + b_q}, \text{ որտեղ } a_0 \neq 0, \ b_0 \neq 0 \text{ և}$$

$$b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \cdots + b_q \neq 0, \text{ եթե } x \geq 1 : \text{Հետազոտել } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n R(n) \text{ շարքի բացարձակ և պայմանական գուգամիտոթյունը:}$$

Հետազոտել շարքի բացարձակ և պայմանական գուգամիտոթյունը (2626-2629).

$$2626. \frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^q} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^q} + \frac{1}{5^p} - \frac{1}{6^q} + \cdots :$$

$$2627. \frac{1}{1^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{1}{4^p} + \cdots :$$

$$2628. \frac{1}{1^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{1^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{1}{3^p} + \frac{1}{9^p} + \frac{1}{11^p} - \frac{1}{5^p} + \cdots :$$

$$2629. \frac{1}{1^p} - \frac{2}{2^q} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} - \frac{2}{5^q} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{2}{8^q} + \frac{1}{9^p} + \cdots :$$

2630. Դիցուք՝  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$ : Ապացուցել, որ գոյություն ունի  $q_n \uparrow +\infty$  հաջորդականությունը, այնպիսին, որ  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n q_n < +\infty$ :

2631. Դիցուք՝  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ : Ապացուցել, որ գոյություն ունի  $q_n \downarrow 0$  հաջորդականությունը, որի համար  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n q_n = +\infty$ :

Սատուգել հավասարությունը (2632-2634).

$$2632. \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \right) = 1 : \quad 2633. \left( \sum_{n=0}^{\infty} q^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n \quad (|q| < 1) :$$

$$2634. \text{ա)} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^n}{n!} \right) = 1 : \quad \text{բ)} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2a)^n}{n!} :$$

2635. Օրինակով համոզվել, որ Մերսեննայի թեորեմում շարքերից մեկի բացարձակ գուգամիսությունն էական է:

Ցուցում: Դիտարկել  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$  գուգամեան շարքի բառակրասին:

2636. Սատուգել, որ

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3}{2} \right)^n \text{ և } 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3}{2} \right)^{n-1} \left( 2^n + \frac{1}{2^{n+1}} \right)$$

տարամեան շարքերի արտադրյալը գուգամեան շարք է:

2637. Ապացուցել, որ եթե դրական անդամներով երկու շարքերից մեկը գուգամեան է, իսկ մյուսը՝ տարամեան, ապա դրանց արտադրյալը տարամեան է:

2638. Դիցուք  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքի համար գոյություն ունեն  $t_n$  գուգամեան հաջորդականություն ( $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = T$ ) և  $k \in N$  թիվ, այնպիսիք, որ  $a_n = t_n - t_{n+k}$ : Ապացուցել, որ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = t_1 + t_2 + \dots + t_k - kT :$$

2639. Դիցուք  $c_1, c_2, \dots, c_k \in R$ ,  $c_1 + c_2 + \dots + c_k = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = T$  և

$a_n = c_1 t_n + \dots + c_k t_{n+k-1}$  ( $n \in N$ ): Ապացուցել, որ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = c_1 t_1 + (c_1 + c_2) t_2 + \cdots + (c_1 + \cdots + c_{k-1}) t_{k-1} + (c_2 + 2c_3 + \cdots + (k-1)c_k) T :$$

Դանել շարքի գումարը (2640-2642).

$$2640. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{3}{\sqrt{n+1}} - \frac{4}{\sqrt{n+2}} \right) : \quad 2641. \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{\ln n} - \frac{2}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} \right) :$$

$$2642. \sum_{n=1}^{\infty} \left( n \sin \frac{\pi}{n} - 2(n+1) \sin \frac{\pi}{n+1} + (n+2) \sin \frac{\pi}{n+2} \right) :$$

$$2643. \text{Դիցուք ցանկացած } x \in [0;1) \text{ թվի համար } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ շարքը գուգամես է:}$$

Եթե գոյություն ունի

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S$$

Վերջավոր սահմանը, ապա այն անվանում են  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  շարքի գումար Արելի

$$\text{իմաստով և զրում՝ } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \stackrel{(A)}{=} S :$$

Ապացուցել, որ եթե  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$ , ապա  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \stackrel{(A)}{=} S$  (Արելի թեորեմ):

Կառուցել տարամեա շարք, որն Արելի իմաստով ունի վերջավոր գումար:

$$2644. \text{Տրված է } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ շարքը և } S_n = \sum_{k=0}^n a_k, \sigma_n = \frac{S_0 + S_1 + \cdots + S_n}{n+1} \quad (n \in N):$$

Եթե գոյություն ունի  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma$  վերջավոր սահմանը, ապա այն անվանում են

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ շարքի գումար Շեղարդյի իմաստով և զրում՝ } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \stackrel{(C)}{=} \sigma : \text{Ապացուցել, որ}$$

$$\text{եթե } \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sigma, \text{ ապա } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \stackrel{(C)}{=} \sigma :$$

Կառուցել տարամեա շարք, որը Շեղարդյի իմաստով ունի վերջավոր գումար:

\*\*\*

Ապացուցել հավասարությունը (2645-2646).

$$2645. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right) = \frac{\pi}{4} : \quad 2646. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{2}{\pi} :$$

Ցուցում: Օգտվել Վալիսի բանաձևից (առև. խնդիր 2156):

2647. Ծշմարի՞ւ է արդյոք, որ եթե  $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$  և  $\prod_{n=1}^{\infty} q_n$  անվերջ արտադրյալները գուգամնեա են, ապա զուգամնեա է նաև հետևյալ անվերջ արտադրյալը.

$$\text{ա) } \prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n + q_n}{2}; \quad \text{բ) } \prod_{n=1}^{\infty} p_n^2; \quad \text{գ) } \prod_{n=1}^{\infty} p_n q_n; \quad \text{դ) } \prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{q_n};$$

Հետազոտել անվերջ արտադրյալի զուգամիառթյունը (2648-2651).

$$2648. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} : \quad 2649. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^n}{2^n}\right) :$$

$$2650. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^n}{n^p}\right) \cos \frac{x^n}{n^q}, |x| \leq 1: \quad 2651. \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} \right)^p :$$

2652. Ապացուցել, որ եթե  $a_n \neq -1$  և  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  շարքերը գուգամնեա են, ապա զուգամնեա է նաև  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  անվերջ արտադրյալը:

2653. Դիցուր՝

$$a_n = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{k}}, & n = 2k-1, \\ \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k\sqrt{k}}, & n = 2k : \end{cases}$$

Ստուգել, որ  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  շարքերը տարամնեա են, սակայն  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  անվերջ արտադրյալը զուգամնեա է:

2654. Ապացուցել, որ եթե  $a_n \neq -1$  և  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը զուգամնեա է, իսկ  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  շարքը՝ տարամնեա, ապա  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) = 0$ :

2655. Ապացուցել, որ

$$\text{ա) } \prod_{n=1}^{\infty} p_n \quad (p_n > 0) \text{ անվերջ արտադրյալը բացարձակ գուգամնեա է այն և}$$

միայն այն դեպքում, եթե բացարձակ գուգամնեա է  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$  շարքը:

բ) բացարձակ գուգամնեա արտադրյալը գուգամնեա է:

Բերել անվերջ արտադրյալի օրինակ, որը գուգամնեա է, բայց ոչ բացարձակ (պայմանական գուգամնեա է):

Հետազոտել անվերջ արտադրյալի բացարձակ և պայմանական գուգամիառյունը (2656-2659).

$$2656. \prod_{n=1}^{\infty} \left[ 1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right]:$$

$$2657. \prod_{n=1}^{\infty} \left[ 1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} \right]:$$

$$2658. \prod_{n=2}^{\infty} \left[ 1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\ln n} \right]:$$

$$2659. \prod_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + (-1)^n}:$$

2660. ‘Իիցուք’  $0 < x_n < \frac{\pi}{2}$ : Ապացուցել, որ  $\prod_{n=1}^{\infty} \cos x_n$  և  $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x_n}{x_n}$  անվերջ

արտադրյալները գուգամնեա են այն և միայն այն դեպքում, եթե գուգամնեա է  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$  շարքը:

2661. Ապացուցել, որ եթե  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left( |\alpha_n| < \frac{\pi}{4} \right)$  շարքը բացարձակ գուգամնեա է,

ապա  $\prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \alpha_n \right)$  անվերջ արտադրյալը գուգամնեա է:

2662. Ապացուցել Եյլերի բանաձևը.

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n) = \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1})} \quad (|q| < 1):$$

2663. Ցույց ստալ, որ  $x_n := \frac{n! e^n}{n^{\frac{n+1}{2}}}$  հաջորդականությունն ունի  $a \neq 0$  սահման և

այդսեղից ստանալ Ստիրլինգի բանաձևը.

$$n! = \sqrt{2\pi} n^{\frac{n+1}{2}} e^{-n} (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty :$$

Ցուցում:  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_1 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ :  $a$ -ն զանելու համար օգտվել Վալիսի բանաձևից:

2664. Հաշվել սահմանը՝

$$\text{ա) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}; \quad \text{բ) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{(2n-1)!!}}; \quad \text{զ) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n!}{\ln n^n}:$$

Q.

Հետազոտել շարքի զուգամիառությունը (2665-2668).

$$2665. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(n)}{n^2}, \nu(n)-ը n թվի թվանշանների քանակն է:$$

$$2666. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2}, \lambda_n - երկ տգx = x \text{ հավասարման հաջորդական դրական արմատներն են:}$$

Այսպիսով՝

$$2667. \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\alpha}, a_1 = \sin x, a_{n+1} = \sin a_n \quad (n \in N, \sin x > 0):$$

$$2668. \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\alpha}, a_1 = \operatorname{arctg} x, a_{n+1} = \operatorname{arctg} a_n \quad (n \in N, x > 0):$$

$$2669. \text{Դիցուք } a_n \text{ հաջորդականությունը նվազող է, } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ և } b_n = a_n -$$

$$-2a_{n+1} + a_{n+2} \geq 0: \text{Ապացուցել, որ } \sum_{n=1}^{\infty} n b_n = a_1:$$

2670. Ապացուցել Աբելի և Դիրիխլեի հայտանիշների հետևյալ ընդհանրացումները.

$$\text{ա) եթե } \sum_{n=1}^{\infty} |b_n - b_{n+1}| \text{ և } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ շարքերը զուգամես են, ապա } a_n \text{ է}$$

նաև  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  շարքը;

$$\text{բ) եթե } \sum_{n=1}^{\infty} |b_n - b_{n+1}| \text{ շարքը զուգամետ է, } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \text{ և } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ շարքի}$$

մասնակի գումարների հաջորդականությունը սահմանափակ է, ապա } \sum\_{n=1}^{\infty} a\_n b\_n

շարքը զուգամետ է:

2671-2675 խնդիրներամբ  $a_n$ -ը պահած, նվազագույն հաջորդականություն է, իսկ  $\phi : N \rightarrow N$  ֆունկցիան աճող է և  $\phi(n) > n$ :

**2671. Ապացուցել անհավասարությունները.**

$$\text{ա) } \sum_{k=1}^{\phi(n)-1} a_k < \sum_{k=1}^{\phi(1)-1} a_k + \sum_{k=1}^{n-1} a_{\phi(k)} [\phi(k+1) - \phi(k)];$$

$$\text{բ) } \sum_{k=\phi(1)+1}^{\phi(n)} a_k > \sum_{k=2}^n a_{\phi(k)} [\phi(k) - \phi(k-1)];$$

**2672. Ապացուցել, որ եթե կամայական  $n \in N$  թվի համար**

$$\frac{a_{\phi(n)} [\phi(n+1) - \phi(n)]}{a_n} \leq q < 1,$$

ապա  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը գուգամնաւ է, իսկ եթե

$$\frac{a_{\phi(n)} [\phi(n) - \phi(n-1)]}{a_n} \geq 1, \quad n > 1,$$

ապա շարքը սարամնաւ է:

**2673. Նախորդ խնդրում բերված հայտանիշը ձևակերպել սահմանային տարրերակով: Ցույց տալ, որ շարքի գումարի համար ճշմարիա է**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \frac{1}{1-q} \sum_{n=1}^{\phi(1)-1} a_n$$

գնահատականը:

**2674. Տեղադրելով  $\phi(n) = n+1$ , նախորդ խնդրի հայտանիշից ստանալ Դ'Ալամբերի հայտանիշը: Տեղադրելով  $\phi(n) = n+2$ ,  $\phi(n) = 2n$ ,  $\phi(n) = n^2$ ,  $\phi(n) = 2^n$ ,  $\phi(n) = n!$ ,  $\phi(n) = 2^{2^n}$ , ստանալ գուգամիառության նոր հայտանիշներ:**

**2675. Օգսվելով 2671 խնդրում բերված անհավասարություններից՝ ապացուցել, որ  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը գուգամնաւ կամ տարամնաւ է,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} na_{n^2}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_{n^3}$ ,**

$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} p^n a_{p^n}$  ( $p \in N, p > 1$ ) շարքերի հետ միաժամանակ:

**2676. Դիցուք՝  $f \in C^1(R_+)$  և  $\int_0^{\infty} |f'(x)| dx < +\infty$ : Ապացուցել, որ  $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$  շարքը**

գուգամնաւ է այն և միայն այն դեպքում, եթե գուգամնաւ է  $\int_0^{\infty} f(x) dx$  ինտեղուալը:

2677. Դիցուք  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ( $a_n \geq 0$ ) շարքը ստարամեաւ է: Հետևողում է արդյոք այդանե-

դից, որ  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  շարքը զուգամեաւ է, եթե

$$\text{ա) } b_n = \frac{a_n}{1+na_n}; \quad \text{բ) } b_n = \frac{a_n}{1+n^2a_n}; \quad \text{շ) } b_n = \frac{a_n}{1+a_n^2}; \quad \text{դ) } b_n = \frac{a_n}{1+a_n};$$

2678. Դիցուք  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ( $a_n > 0$ ) շարքը ստարամեաւ է և  $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ : Ապացուցել,

որ  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{A_n^\alpha}$  շարքը զուգամեաւ է, եթե  $\alpha > 1$ , ստարամեաւ է, եթե  $\alpha \leq 1$ :

2679. Դիցուք  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ( $a_n > 0$ ) շարքը զուգամեաւ է և  $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ : Ապացուցել,

որ  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{R_{n-1}^\alpha}$  շարքը  $0 < \alpha < 1$  դեպքում զուգամեաւ է, իսկ  $\alpha \geq 1$  դեպքում

ստարամեաւ: Օրինակով համոզվել, որ  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{R_n^\alpha}$  շարքի համար նույնատիպ պնդումը ճշմարիս չէ:

2680. Դիցուք  $a_n$ -ը դրական և աճող հաջորդականություն է: Ապացուցել, որ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{a_n}{a_{n+1}} \right)$$

շարքը զուգամեաւ է այն և միայն այն դեպքում, եթե  $a_n$ -ը սահմանափակ է:

2681. Դիցուք  $a_n$  դրական հաջորդականությունը չնվազող է,  $a_n \leq n$  և

$A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ : Ապացուցել, որ կամայական  $\alpha > 1$  բվի համար  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{A_n} \right)^\alpha$  շարքը

զուգամեաւ է:

2682. Ապացուցել, որ եթե  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  դրական և նվազող անդամներով շարքը

զուգամեաւ է, ապա զուգամեաւ է նաև  $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$  շարքը:

2683. Դիցուք՝  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  և  $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n - a_{n-1}| < +\infty$ : Ապացուցել, որ  $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$ :

2684. Ապացուցել, որ եթէ  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ( $a_n > 0$ ) շարքը զուգամես է և  $na_n \downarrow 0$ , ապա

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n \ln n = 0 :$$

2685. Դիցուք  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  դրական, չաճող անդամներով շարքը տարամես է, իսկ

$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$  շարքը, որտեղ  $\varepsilon_n = \pm 1$ , զուգամես: Ապացուցել, որ

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n}{n} \leq 0 \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n}{n} :$$

2686. Տրված է՝  $a_n$ -ը դրական, չաճող հաջորդականություն է և  $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$  շարքը,

որտեղ  $\varepsilon_n = \pm 1$ , զուգամես է: Ապացուցել, որ  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n) a_n = 0$ :

2687. Դիցուք  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը պայմանական զուգամես է: Ապացուցել, որ ցանկացած  $x$  թվի համար  $\varepsilon_n = \pm 1$  հաջորդականությունը կարելի է ընտրել այնպես, որ  $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$  շարքը լինի զուգամես և ունենա  $x$  գումար:

2688. Տրված է՝  $a_n$  և  $b_n$  հաջորդականությունները մոնուառն են,  $a_n \geq 0$ ,  $b_n \geq 0$

և  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  շարքերը տարամես են:

Կարելի՞ է արևոր պնդել, որ  $\sum_{n=1}^{\infty} \min\{a_n, b_n\}$  շարքը տարամես է: Բերել համապատասխան օրինակ:

Ցույց տալ, որ խնդրի պայմաններում ցանկացած  $a_n$  հաջորդականության համար  $\sum_{n=1}^{\infty} \min\left\{a_n, \frac{1}{n}\right\}$  շարքը տարամես է:

2689. Դիցուք՝  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$ : Ապացուցել, որ գոյություն ունի

$q_n \uparrow +\infty$  հաջորդականություն, այնպիսին, որ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n q_n < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{q_n} = +\infty :$$

2690. Կատուցել  $a_n$  հաջորդականություն, այնպիսին, որ  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը լինի

զուգամետ, իսկ  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$  շարքը՝ ստարամետ:

2691. Դիցուք՝  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$  և  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{A_n} = 0$ , որտեղ  $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$  : Ապացուցել, որ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 A_1^{-1} + a_2 A_2^{-1} + \cdots + a_n A_n^{-1}}{\ln A_n} = 1 :$$

2692. Ապացուցել, որ եթե  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$ , ապա  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = 0$ :

2693. Ապացուցել Կառլեմանի անհավասարությունը.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq e \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n > 0) :$$

2694. Ապացուցել, որ ցանկացած  $a_n$  դրական հաջորդականության համար ճշմարիտ է անհավասարությունը.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{a_n^2 + a_{n+1}^2 + \cdots}{n}} :$$

2695. Ապացուցել, որ եթե  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} < +\infty$ , ապա հետևյալ շարքերից

յուրաքանչյուրը զուգամետ է:

ա)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}$  ;      բ)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}}$  ;

գ)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 a_n}{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}$  :

2696. Դիցուք  $a_n$ -ը դրական, աճող հաջորդականություն է և  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{n+1} - a_n} < +\infty$ :

Ապացուցել, որ  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_n} < +\infty$  :

2697. Կասենք, որ  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքն ունի ( $L$ ) հասկությունը, եթե  $\sum_{k=n}^{\infty} a_k = O(a_n)$ :

$$\text{ա) Ապացուցել, որ եթե } \frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1, \text{ ապա } \sum a_n \text{ ունի (L)}$$

հաստկությունը: Օրինակով համոզվել, որ հակադարձ պնդումը ճշմարիս չէ:

բ) Ապացուցել, որ (L) հաստկություն ունեցող ցանկացած շարքի և ցանկացած  $q \in (0;1)$  թվի համար գոյություն ունեն  $m_0$  և  $n_0$  բնական թվեր, այնպիսիք, որ

$$\frac{a_{n+m_0}}{a_n} < q, \text{ ելիք } n \geq n_0:$$

զ) Ապացուցել, որ եթե  $a_n \neq 0$  ( $n \in N$ ),  $a_n$ -ը մոնուալ ձգաւում է զրոյի և

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ շարքն ունի (L) հաստկությունը, ապա } \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = O\left(\frac{1}{a_n}\right):$$

2698. Դիցուք՝  $a_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}^2$  ( $n \in Z_+$ ): Ապացուցել, որ եթե  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  շարքը զուգամես է, ապա  $a_n = 0$  ( $n \in Z_+$ ):

2699. Ապացուցել, որ եթե  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  հարմոնիկ շարքից հեռացվեն այն անդամները,

որոնց հայստարանների ստանորդական ներկայացման մեջ պարունակվում է 9 թվանշանը, ապա ստացված շարքը կլինի զուգամես:

2700. Ապացուցել, որ եթե  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  շարքի անդամները աւեղափոխվեն այնպես, որ  $p$  հաջորդական դրական անդամների խմբին հաջորդի  $q$  հաջորդական բացասական անդամների խումբ, ապա ստացված շարքի գումարը կլինի  $\ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}$ :

2701. Ապացուցել, որ եթե  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  հարմոնիկ շարքի անդամների նշանները

փոխվեն այնպես, որ  $p$  դրական անդամներին հաջորդի  $q$  բացասական անդամ, ապա ստացված շարքը կլինի զուգամես միայն  $p = q$  դեպքում:

2702. Ապացուցել, որ կամայական  $\alpha > 0$  թվի համար

$$\frac{1}{2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}} < 1:$$

2703. Ապացուցել, որ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}} \quad (\alpha > 0) \quad \text{և} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}} \quad (\beta > 0)$$

զուգամեա շարքերի արտադրյալը զուգամեա է, այն և միայն այն դեպքում, եթե  
 $\alpha + \beta > 1$ :

2704. Դիցուք  $a_n$ -ը դրական, չնվազող հաջորդականություն է և  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ :

$$\tau = \inf \left\{ p > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^p} < +\infty \right\}$$

թիվը կոչվում է  $a_n$  հաջորդականության զուգամիաության ցուցիչ: Եթե կամա-  
 յական  $p > 0$  թվի համար  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^p}$  շարքը ստարամեա է, ապա ընդունում  
 են  $\tau = +\infty$ : Ապացուցել, որ  $\tau = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln a_n}$ :

2705. Եթե  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  շարքի համար գոյություն ունի  $A$  թիվ, այնպիսին, որ  
 $A - (a_0 + a_1 + \dots + a_n) = \theta_n a_{n+1} \quad (0 < \theta_n < 1, n \in N)$ ,

ապա կասենք, որ շարքը փաթաթում է  $A$ -ն: Ապացուցել, որ եթե  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  շարքը  
 նշանափոխ է և գոյություն ունի  $A$  թիվ, այնպիսին, որ ցանկացած  $n$ -ի համար  
 $A - (a_0 + a_1 + \dots + a_n)$  ստարբերաւթյունն ունի  $a_{n+1}$  անդամի նշանը, ապա  
 շարքը փաթաթում է  $A$ -ն:

2705.1. Դիցուք  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  շարքի համար գոյություն ունի  $A$  թիվ, այնպիսին, որ  
 $|A - (a_0 + a_1 + \dots + a_n)| < |a_{n+1}|$ : Ապացուցել, որ եթե  $|a_n|$  հաջորդականությունը  
 նվազող է, ապա  $a_n$ -ը նշանափոխ է և  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  շարքը փաթաթում է  $A$ -ն:

Տրված է հետևյալ անվերջ սաղսասակը՝

$$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, \dots$$

$$a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, \dots$$

.....

$$a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}, \dots$$

..... :

Նշանակենք  $A_{mn} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}$ : Կասենք, որ  $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$  կրկնակի շարքը զուգամետ է (լուս Պրինցիպի) և ունի  $A$  գումար, եթե  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in N (m, n \geq n_0 \Rightarrow |A_{mn} - A| < \varepsilon)$ :

**2706.** Ապացուցել, որ եթե  $a_{mn} \geq 0$ , ապա  $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$  կրկնակի շարքի զուգամիտության համար անհրաժեշտ է և բավարար  $\{A_{mn} : m, n \in N\}$  բազմության սահմանավակությունը:

**2707.** Կառուցել  $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$  զուգամետ կրկնակի շարք, որի համար  $\{a_{mn} : m, n \in N\}$  բազմությունը սահմանավակ չէ:

**2708.** Դիցուք  $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} = A$ : Ապացուցել, որ եթե

$$\text{ա) } \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = S_m \text{ և } \sum_{m=1}^{\infty} S_m = S, \text{ ապա } A = S;$$

$$\text{բ) } \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} = S'_n \text{ և } \sum_{n=1}^{\infty} S'_n = S', \text{ ապա } A = S':$$

**2709.** Դիցուք  $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$  կրկնակի շարքի համար  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = S_m$ ,  $\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} = S'_n$  և

$\sum_{m=1}^{\infty} S_m = S$ : Ապացուցել, որ

$$\text{ա) } \sum_{m=1}^{\infty} r_m^{(k)} = R_k \text{ շարքը, որտեղ } r_m^{(k)} = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_{mn}, \text{ զուգամետ է;}$$

$$\text{բ) } \sum_{n=1}^{\infty} S'_n = S'' \text{ շարքը զուգամետ է այն և միայն այն դեպքում, եթե գոյություն ունի } \lim_{k \rightarrow \infty} R_k = R \text{ վերջավոր սահմանը;}$$

գ)  $S'' = S$  հավասարությունը ճշմարիտ է այն և միայն այն դեպքում, եթե  $R = 0$ :

**2710.** Տրված է  $a_n$  հաջորդականությունը: Նշանակենք՝

$$\Delta^0 a_n = a_n,$$

$$\Delta^1 a_n = a_n - a_{n+1},$$

.....,

$$\Delta^{k+1}a_n = \Delta(\Delta^k a_n) = \Delta^k a_n - \Delta^k a_{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

Ապացուցել հավասարությունը.

$$\Delta^k a_n = a_n - C_k^1 a_{n+1} + C_k^2 a_{n+2} - \dots + (-1)^k a_{n+k};$$

$$2711. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k a_0}{2^{k+1}} \text{ շարքը կոչվում է } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ շարքի Էյլերի ծևափոխություն:}$$

Ապացուցել, որ եթե Էյլերի ծևափոխությունը գուգամես է, ապա

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Delta^k a_n}{2^k} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

$$2712. \text{Ապացուցել, որ եթե } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ շարքը գուգամես է, ապա գուգամես է}$$

նաև նրա Էյլերի ծևափոխությունը (աես նախորդ խնդիրը), ընդ որում՝

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k a_0}{2^{k+1}};$$

Ապացուցել հավասարությունը (2713-2714).

$$2713. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}(k+1)}; \quad 2714. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!!};$$

$$2715. \text{Ապացուցել, որ եթե } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \stackrel{(A)}{=} A \text{ (աես խնդիր 2643) և } a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$(n \rightarrow \infty), \text{ապա } \sum_{n=0}^{\infty} a_n = A \text{ (Տառիքերի թեորեմ):}$$

$$2716. \text{Ապացուցել, որ եթե } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \stackrel{(A)}{=} A \text{ և}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{n} = 0,$$

$$\text{ապա } \sum_{n=0}^{\infty} a_n = A:$$

$$2717. \text{Ապացուցել, որ եթե } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \stackrel{(C)}{=} \sigma \text{ (աես խնդիր 2644), ապա}$$

$$\text{ա) } a_n = o(n) \quad (n \rightarrow \infty); \quad \text{բ) } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \stackrel{(A)}{=} \sigma:$$

$$2718. \text{Բերել Արելի իմաստով գուգամես շարքի օրինակ, որը Չեզարոյի իմաստով գուգամես չէ:}$$

2719. Ուխմանի ճետա-ֆունկցիայի՝  $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ -ի, համար ստանալ

$$\zeta(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1}$$

ներկայացումը, որտեղ  $p_n$  -ը պարզ թվերի հաջորդականությունն է:

2720. Ապացուցել, որ  $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}$  անվերջ արատադրյալը և  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$  շարքը

ստարամես են, որտեղ  $p_n$  - ը պարզ թվերի հաջորդականությունն է:

2721. Դիցուք  $a_n$  հաջորդականությունը բավարարում է  $0 < a_n < a_{n+1} + a_n^2$

$(n \in N)$  պայմանին: Ապացուցել, որ  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը ստարամես է:

## Ֆունկցիոնալ հաջորդականություններ և շարքեր

Սա և մ ա ն մ մ :  $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$  -ը կոչվում է **ֆունկցիոնալ հաջորդականություն**, եթե նրա բաղադրիչը միևնույն  $X \subset R$  բազմության վրա տրված **ֆունկցիաներ** են:  $X$  բազմության այն կետերի ենթաբազմությունը, որոնցից յուրաքանչյուրի համար  $f_n(x)$  թվային հաջորդականությունը գուգամետա է, կոչվում է  $f_n$  **ֆունկցիոնալ հաջորդականության գուգամիասության ափրոյք:**  
Եթե  $E \subset X$  բազմության ցանկացած կետում գոյություն ունի մերժավոր ասհման  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ , ապա այն կոչվում է  $f_n$  **հաջորդականության ասհման  $E$ -ի վրա:** Ասում են նաև, որ  $f_n$  **ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը** իր գուգամիասության ափրոյքում ձգտում է  $f$  ֆունկցիսային **կեսարին:** Կամ **կես առ կետ և զրում**  $f_n \rightarrow f$ :

Համանմանորեն, արված  $u_n : X \rightarrow R$  ( $n \in N$ ) **ֆունկցիոնալ հաջորդականության համար**  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  ( $x \in X$ ) շարքն անվանում են **ֆունկցիանալ շարք**,  $U_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$  մասնակի գուգամիասության հաջորդականության գուգամիասության ափրոյքը՝ **ֆունկցիոնալ շարքի գուգամիասության ափրոյք**, իսկ այդ ախրույթում  $U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  բանաձևով որոշված **ֆունկցիան**՝ **ֆունկցիոնալ շարքի գուգամիալ:**

Հ ա վ ա ս ա ր ա շ ա փ զ ո ւ զ ա մ ի տ ո ւ թ յ ո ւ ն : Կասենք, որ  $f_n$  **ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը**  $A$  բազմության վրա գուգամիասում է  $f$  **ֆունկցիային** հավասարաշատի և կզբնի՝  $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$  ( $x \in A$ ), եթե

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in N \forall n \in N \forall x \in A (n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon):$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ շարքը կանխանենք } A \text{ բազմության վրա հավասարաշատի գուգամետա, եթե } A \text{-ի}$$

վրա հավասարաշատի գուգամետա է նրա մասնակի գուգամիերի հաջորդականությունը:

Հ ա վ ա ս ա ր ա շ ա փ զ ո ւ զ ա մ ի տ ո ւ թ յ ո ւ ն : Կոչին սկզբունքը:

(U)  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  **ֆունկցիոնալ շարքը**  $A$  բազմության վրա հավասարաշատի գուգամետա է այն և միայն այն դեպքում, եթե

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in N \forall m, n \in N \forall x \in A \left( m > n \geq n_0 \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^m u_k(x) \right| < \varepsilon \right):$$

Վայերշտրասի հայտանիշը: Եթի գոյություն ունի  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  զուգամետ շարք, այնպիսին, որ

$$|u_n(x)| \leq c_n \quad (n \in N, x \in A),$$

ապա  $(U)$ -ն  $A$  բազմության վրա բացարձակ և հավասարաչափ զուգամետ է: Այս պայմաններում  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  շարքն անվանում են  $(U)$  շարքի զուգամետ մաժիքամատ:

Արելի և Դիրիխլեի հայտանիշները:  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$  ֆունկցիոնալ շարքը  $A$  բազմության վրա հավասարաչափ զուգամետ է, եթե

Ա)  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  շարքը  $A$ -ի վրա հավասարաչափ զուգամետ է, իսկ  $v_n(x)$  հաջորդականությունը  $x \in A$  կեսում մննում է և  $A$ -ի վրա՝ հավասարաչափ սահմանափակ  $(\exists M \in R \forall n \in N \forall x \in A (|v_n(x)| \leq M))$ ;

Ե)  $U_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$  հաջորդականությունը  $A$  բազմության վրա հավասարաչափ սահմանափակ է, իսկ  $v_n(x)$ -ը յուրաքանչյուր  $x \in A$  կեսում մննում է և  $A$ -ի վրա հավասարաչափ զուգամետում է զրայի:

Ըստ պարզ գործությունների և գործությունների կամաց անընդհանուր հաստիքությունը: Դիցուք  $(U)$  ֆունկցիոնալ շարքի անընդհանուր կեսում անընդհանուր է: Եթե  $x_0$  շարքը  $A$  բազմության վրա հավասարաչափ զուգամետ է, ապա նրա գործարը  $x_0$  կեսում անընդհանուր է:

Դինիի թեորեմը: Դիցուք  $(U)$  շարքի անընդհանուր  $[a; b]$  հաստիքություն անընդհանուր է և ոչ բացասական: Եթե շարքի գործարը  $[a; b]$ -ում նույնպես անընդհանուր է, ապա շարքը  $[a; b]$ -ի վրա հավասարաչափ զուգամետ է:

Թեորեմ անդամ առ անդամ սահմանային անցման վերաբերյալ: Դիցուք  $(U)$  շարքը  $A$  բազմության վրա հավասարաչափ զուգամետ է և  $a$  -ն  $A$ -ի կոստակման կետ է: Եթեն ցանկացած  $n$  բնական թիվ համար գոյություն ունի  $c_n = \lim_{x \rightarrow a} u_n(x)$  վերջավոր սահմանը, ապա

ա)  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  շարքը զուգամետ է;

բ)  $a$  կեսում գոյություն ունի  $(U)$  շարքի գործարի վերջավոր սահման, ընդ որում

$$\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow a} u_n(x):$$

Թեորեմ անդամ առ անդամ ինտեղըման վերաբերյալ: Եթի  $(U)$  շարքի անդամներն  $[a; b]$  հաստիքություն սիմետրի իմաստով ինտեղըմի են և շարքը  $[a; b]$ -ի վրա հավասարաչափ զուգամետ է, ապա շարքի գործարը այդ հաստիքություն նույնպես ինտեղըմի է, ընդ որում՝

$$\int_a^b \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx :$$

Թեորեմ անդամ առ անդամ դիֆերենցման վերաբերյալ: Դիցուք  $(U)$  շարքի անդամներն  $[a; b]$  հաստվածում դիֆերենցելի են: Եթե շարքը որևէ կետում գուգամնեալ է, խոլ  $(U')$   $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$

ֆունկցիոնալ շարքը  $[a; b]$  հաստվածի վրա հավասարաշափ գուգամնեալ է, ապա  $(U)$  շարքը նույն պես հավասարաշափ գուգամնեալ է, շարքի գումարը  $[a; b]$ -ում դիֆերենցելի է, ըստ որում:

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) :$$

Ասս ի ճ ա ն ա յ ի ն շ ա լ ր պ ե լ :  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots$  տեսքի ֆունկցիոնալ շարքը, որտեղ  $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$  բվիրը հաստատուն գործակիցներ են, խոլ  $x_0$ -ի արված թիվ է, կրչվում է սաստիճանային շարք:

Աստիճանային շարքի գուգամիսապյան աիրույքը  $x_0 - R$  և  $x_0 + R$  ծայրակետերավ քաց. փակ, կիսաբաց, վերջավիր կամ անվերջ ( $R = +\infty$ ) միջակայք է, որտեղ  $R$ -ը, որն անվանում են շարքի գուգամիսապյան շաստվով, կարելի է հաշվել Կոշի-Աղամարի քանածեալ:

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, \text{ եթե } 0 < \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < +\infty, \\ +\infty, \text{ եթե } \rho = 0, \\ 0, \text{ եթե } \rho = +\infty, \end{cases} .$$

Լամ:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

Քանածեալ, եթե աչ կրղմում սահմանը գոյություն ունի:

Դիցուք  $R \neq 0$ :

Թեորեմ: Ցանկացած  $0 < r < R$  թվի համար աստիճանային շարքը  $[x_0 - r; x_0 + r]$  հաստվածի վրա բացարձակ և հավասարաշափ գուգամնեալ է:

Հետևանք: Աստիճանային շարքի գումարը  $(x_0 - R; x_0 + R)$  միջակայքում (գուգամիսապյան միջակայքում) անընդհանուր ֆունկցիա է:

Թեորեմ: Եթե աստիճանային շարքը գուգամիսապյան միջակայքի  $x_0 + R$  ծայրակետում գուգամնեալ է, ապա  $[x_0; x_0 + R]$  հաստվածի վրա այն հավասարաշափ գուգամնեալ է:

Հետևանք (Արևի թեորեմ): Եթե ստորիճանային շարքը գուգամնեալ է գուգամիսապյան միջակայքի ծայրակետում, ապա նրա գումարը այդ ծայրակետում անընդհանուր է:

Թեորեմ: Աստիճանային շարքի գումարը իր գուգամիսապյան միջակայքի բոլոր կետերում անվերջ դիֆերենցելի է, խոլ միջակայքում ընկած ցանկացած հաստվածի վրա՝ ինտեղելիք: Ընդունին, թէ դիֆերենցում և թէ ինտեղարտմ կարելի է կատարել անդամ առ անդամ:

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1},$$

$$\int\limits_{x_0}^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-x_0)^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1}.$$

Ավելացնենք, որ այդ կորուս գրամած աստիճանային շարքի գուգամիսության շառավախները համընկանում են եղակատային շարքի գուգամիսության շառավախներ:

Թեյլոռի շարք: Դիցուք  $f: X \rightarrow R$  ֆունկցիան  $X$  բազմության  $x_0$  ներքին կետում անվերջ պիֆերենցիալի է:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \dots$$

աստիճանային շարքն անվանում են  $x_0$  կետում  $f$  ֆունկցիայի Թեյլոռի շարք: Ըստքի  $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

գործակիցներն անվանում են Թեյլոռի գործակիցներ:

Սահմանում:  $f: (a; b) \rightarrow R$  ֆունկցիան  $x_0 \in (a; b)$  կետում կոչվում է ամապիտիկ, եթե գոյացքան ունի  $x_0$ -ի  $U_{x_0} \subset (a; b)$  շրջակայթ, որում  $f$ -ը վերլուծիում է գուգամեա ստախճանային շարքի:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad (x \in U_{x_0}):$$

Որպեսզի  $f$ -ը  $x_0$ -ում լինի անապիտիկ, անիրածելու և բավարար, որ  $f$ -ը  $x_0$ -ում լինի անվերջ պիֆերենցիալի և, բացի այդ, գոյացքան ունինա  $x_0$ -ի  $U_{x_0}$  շրջակայթ, այնապիսին, որ  $x_0$  կետում  $f$  ֆունկցիայի համար գրամած թեյլոռի շարքը գուգամիսի  $f(x)$ -ին:

Թեյլոռիմ: Եթե  $f$  ֆունկցիան  $x_0$  կետում անապիտիկ է, ապա նրա վերլուծման արայունքում տուացվող ստախճանային շարքը ոչ այլ լին է, եթե ոչ  $x_0$  կետում այդ ֆունկցիայի Թեյլոռի շարքը:

Ֆունկցիան  $f$  անապիտիկ լինելը՝  $f \in \mathfrak{R}_p[a; b]$  ( $p = 1, 2$ ), եթե  $f^p$  և  $|f|^p$  ֆունկցիաներն  $[a; b]$ -ում նշմանի կամ անհսկական իմաստով ինտեգրելի են:

Սահմանում:  $f, g \in \mathfrak{R}_2[a; b]$  ֆունկցիաները կոչվում են օրթոգոնալ, եթե

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = 0 :$$

Ֆունկցիաների  $\varphi_n \in \mathfrak{R}_2[a; b]$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ) հաջորդականությունը կոչվում է օրթոնորմա վորումած համակարգ, եթե

$$\int\limits_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx = \delta_{m,n} = \begin{cases} 0, m \neq n, \\ 1, m = n \quad (m, n \in \mathbb{Z}_+) \end{cases}$$

Տրվում  $f \in \mathfrak{R}_1[a; b]$  ֆունկցիայի համար

$$c_n = \int\limits_a^b f(x)\varphi_n(x)dx \quad (n \in \mathbb{Z}_+)$$

բվերը կոչվում են Ֆուրիեի գործակիցները: Այդ գործակիցներով զրկած  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$  ֆունկցիտնալ

շարքն անվանում են  $f$  ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարք ևսու առ առ օքտոնորմագրված համակարգի և զրում:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x):$$

Ա ե ս ի լ ի ա ն ի ա լ ա ս ա ս պ ո ւ թ յ ո ւ ն ը : Ֆանկացած  $f \in \mathfrak{F}_2[a; b]$  ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցների համար ճշմարիս է

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

անհավասարությունը:

Ե ս ա ն կ յ ո ւ ն ա չ ա փ ա կ ա ն շ ա ր բ ե ր : Եռանկյունաչափական համակարգը՝

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

$[-\pi; \pi]$  հասլածում օքտոնորմագրված համակարգի դասական օբյեկտ է:

Ֆանկացած  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots; \beta_1, \beta_2, \dots$  գործակիցներով զրկած

$$\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$$

շարքը կոչված է հունականաչափական շարք:

Տրված  $f \in \mathfrak{F}_1[-\pi; \pi]$  ֆունկցիայի համար

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx \quad (n \in \mathbb{Z}_+, m \in \mathbb{N})$$

բվերը, շնայած ընթանուր սահմանումից անհշան շեղմանը, նույնպես անվանում են  $f$  ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցները: Այս դեպքում  $f$ -ի Ֆուրիեի շարքն ընդունում է

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

սեպը: Նշանակենք

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad \sigma_n(x) = \frac{s_0(x) + \dots + s_n(x)}{n+1} \quad (n \in \mathbb{Z}_+):$$

ճշմարիս են հետևյալ ներկայացումները.

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt, \quad \sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \Phi_n(x-t) dt,$$

որտեղ

$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ku = \frac{1}{2} \frac{\sin \left( n + \frac{1}{2} \right) u}{\sin \frac{1}{2} u} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

$$\Phi_n(u) = \frac{D_0(u) + \dots + D_n(u)}{n+1} = \frac{1}{2n} \left[ \frac{\sin \frac{n+1}{2}u}{\sin \frac{1}{2}u} \right]^2 \quad (n \in N)$$

Փունկցիաները կոչվում են համապատասխանարար Դիքլիսէի և Ֆեյերի կորիզներ: Այս ներկայացումները հենարափառքայուն են տակի հետազոտելու Ֆուրիեի շարքի վարքը և, զագամիառության դեպքում, հաշվելու շարքի գանձարը:

Ո՞ր ի՞ւ ա՞ն ի լ ի զ ա յ ի ս կ զ ը ու ն ի ը : Ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքի վարքը տրված  $x_0$  կետում բացառապես կախված է  $x_0$ -ի շրջակայքում ֆունկցիայի արժեքներից: Այլ կերպ՝ եթե  $f$  և  $g$  ֆունկցիաները  $x_0$  կետի շրջակայքում համբեկնում են, ապա  $f$ -ի և  $g$ -ի Ֆուրիեի շարքերը այդ կետում կամ միաժամանակ տարածեն են, կամ անեն միևնույն գումարը:

Տու թ ի ե ի շ ա թ թ ի զ ա մ ի տ ո թ յ ա ն ի շ ա թ յ ա ն ի թ ի շ ե թ ը :  $f: R \rightarrow R$   $2\pi$ -պարբերական ֆունկցիան կանվանենք կառոր առ կառ պիֆերենցիլի, եթե գոյացրյան անընդունակությունը առ առ կառ պիֆերենցիլի է, այսպիսին, որ արտիմանի  $\Delta_i$  հատվածներից յուրաքանչյուրի ներսում  $f$ -ը պիֆերենցիլի է, արտիման կետերում ունի վերջավոր միակողմանի սահմաններ և, բացի այդ, գոյացրյան անընդունակությունը առ առ կառ պիֆերենցիլի է:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow \pm 0} \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i \pm 0)}{\Delta x} \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

Վերջավոր սահմանները:

$f: R \rightarrow R$   $2\pi$ -պարբերական ֆունկցիան կանվանենք կառոր առ կառ մոնաստն, եթե գոյացրյան անընդունակությունը  $[-\pi; \pi]$  հատվածի արդիում, այնպիսին, որ արտիման հատվածներից յուրաքանչյուրի ներսում  $f$ -ը մոնուան է, իսկ արտիման կետերում ունի վերջավոր միակողմանի սահմաններ:

Լիպշիցի հայտանիշը: Կառոր առ կառ պիֆերենցիլի  $f$  ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը ցանկացած  $x_0$  կետում զագամեան է և ունի  $\frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}$  գումար: Մստավորապես, եթե

$$f - ը x_0 կետում անընդիւատ է, ապա շարքը զագամիառում է  $f(x_0)$ -ին:$$

Դիքլիսի հայտանիշը: Կառոր առ կառ մոնուան  $f$  ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը ցանկացած  $x_0$  կետում զագամեան է և ունի  $\frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}$  գումար:

Ֆեյերի քեորեմը: Այցուք  $f \in C[-\pi, \pi]$  և  $f(-\pi) = f(\pi)$ :  $f$  ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունը Շեկարտյի իմսուում  $[-\pi; \pi]$  հատվածի վրա հավասարչափ զագամիառում է  $f(x)$ -ին.  $\sigma_n(x) \rightrightarrows f(x)$  ( $x \in [-\pi; \pi]$ ):

Տրված  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$  և  $\beta_1, \dots, \beta_m$  ( $\alpha_m^2 + \beta_m^2 \neq 0$ ) զարժակացներով գրված  $T(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^m (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$  տեսքի ֆունկցիան անվանում են  $m$ -րդ կարգի հռամաշունչափական բառերանշունչին:

Վայերշտրասի առաջին թեորեմը: Ցանկացած  $f \in C[a; b]$  ֆունկցիայի համար գոյություն ունի հանրամաշվական բազմանդամների հաջորդականություն, որն  $[a; b]$  հատվածի վրա հավասարչափ զագամիառում է  $f$ -ին:

Վայերշտասի երկրորդ թեորեմը: Ցանկացած  $f \in C[-\pi; \pi]$ ,  $f(-\pi) = f(\pi)$ , ֆունկցիայի համար գոյություն ունի Եռանկյունաչափական բազմանկաների հաջորդականություն, որը  $[-\pi; \pi]$  հասլածի վրա հասլաւաչափ գուգամիանմ է  $f$ -ին:

Եթե  $a$  և  $b$  կանոնավոր են և  $a < b$ , ապա  $f$  կանոնավոր է այս համարը՝ եթե  $f$  գոյություն ունի չունի չափական նույնաքար գույնից տարբեր ֆունկցիա, որի օրբողությունը է  $\phi_n$  համակարգի բոլոր ֆունկցիաներին:

Սահմանում:  $[\alpha; \beta]$  հասլածի վրա արված ֆունկցիաների  $\phi_n$  օրբողունակ համակարգը  $M \subset \mathfrak{R}_2[\alpha, \beta]$  դասում կոչվում է լրիվ, եթե գոյություն չունի այդ դասին պատկանող նույնաքար գույնից տարբեր ֆունկցիա, որի օրբողությունը է  $\phi_n$  համակարգի բոլոր ֆունկցիաներին:

Սահմանում:  $\phi_n$  օրբողունակիրիւսծ համակարգը  $\mathfrak{R}_2[\alpha; \beta]$  դասի որևէ ենթարարվության վրա կոչվում է փակ, եթե այդ ենթարարվությանը պատկանող ցանկացած  $f$  ֆունկցիայի համար թեսնի անհավասարությունը վերածվում է հավասարական:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = \int_a^b f^2(x) dx \quad (\text{Պայունայի հավասարություն}):$$

Թեորեմ: Եռանկյունաչափական համակարգը  $C[-\pi; \pi]$  դասում լրիվ է, իսկ  $\mathfrak{R}_2[-\pi; \pi]$ -ում փակ:

Վերջին փաստի կապակցությամբ առան են նաև, որ  $\mathfrak{R}_2[-\pi; \pi]$  դասին պատկանող ցանկացած  $f$  ֆունկցիայի համար ճշմարիտ է Պայունայի հավասարությունը.

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2):$$

## Ա

Գտնել ֆունկցիոնակ հաջորդականության գուգամիանության սիրույթը և հաշվել սահմանը (2722-2730).

$$2722. \text{ ա) } f_n(x) = x^n; \quad \text{բ) } f_n(x) = \sin^n x; \quad \text{զ) } f_n(x) = \left( \frac{2x}{1+x^2} \right)^n;$$

$$2723. \text{ ա) } f_n(x) = \frac{nx^2}{n+1}; \quad \text{բ) } f_n(x) = \frac{2n^2 x^4}{n^2 + 3n \sin^2 nx};$$

$$2724. \text{ ա) } f_n(x) = (x+1) \operatorname{arctg} x^n; \quad \text{բ) } f_n(x) = n \operatorname{arctg}(nx^2);$$

$$2725. \text{ ա) } f_n(x) = \left( 1 - \frac{x^2}{n} \right)^n; \quad \text{բ) } f_n(x) = (-1)^n e^{-n \sin x};$$

$$2727. \text{ ա) } f_n(x) = \frac{[nx]}{n}; \quad \text{բ) } f_n(x) = \frac{[nx]}{nx};$$

$$2728. \text{ ա) } f_n(x) = \frac{\ln(nx)}{[nx^2] + 1}; \quad \text{բ) } f_n(x) = \frac{\sin(n\sqrt{x})}{\ln(n+1)}.$$

2729. ա)  $f_n(x) = \sqrt[n]{x^{2n} + n^{2x}}$ ;

բ)  $f_n(x) = \sqrt[n]{e^{-nx} + n^{10}}$ :

2730. ա)  $f_n(x) = n \left( x^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$ ;

բ)  $f_n(x) = n \left( x^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{2n}} \right)$ :

Դստել ֆունկցիոնալ շարքի զուգամիտության ամրույթը: Պարզել, այդ սիլրույթի որ կետելում է շարքը բացարձակ զուգամեաւ (2731-2740).

2731. ա)  $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ ;

բ)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$ ;

զ)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{x^n}$ :

2732. ա)  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$ ;

բ)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x^2)^n}{n}$ ;

զ)  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{nx}$ :

2733. ա)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$ ;

բ)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ :

2734. ա)  $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$ ;

բ)  $\sum_{n=1}^{\infty} n x e^{-nx}$ :

2735. ա)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x}{2^n}$ ;

բ)  $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$ :

2736. ա)  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \sin nx$ ;

բ)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} e^{-n^2 \sin x}$ :

2737. ա)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi x}{n}$ ;

բ)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n x}{n \ln^2(n+1)}$ :

2738. ա)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \ln^n (x^2 + 2)$ ;

բ)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 4} \left( \frac{x+2}{2x+1} \right)^n$ :

2739. ա)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 + \sqrt{n}}$ ;

բ)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{\sqrt[3]{n}}$ :

2740. ա)  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left( \frac{2x-3}{4} \right)^n$ ;

բ)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \frac{2x}{x^2 + 1} \right)^n$ :

Սարութել, որ նշված բազմության վրա ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը հավասարաշափ զուգամեաւ (2741-2748).

2741.  $f_n(x) = \frac{1}{x+n}$ ,  $0 \leq x < +\infty$ ;

2742.  $f_n(x) = \sin^n x$ ,  $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{5}$ :

2743.  $f_n(x) = \frac{\sin(n!x^3)}{\sqrt[n]{n!}}$ ,  $-\infty < x < +\infty$ :

$$2744. f_n(x) = e^{-n(x^2+1)}, \quad -\infty < x < +\infty :$$

$$2745. f_n(x) = \frac{nx^2}{x+n}, \quad 1 \leq x \leq 100; \quad 2746. f_n(x) = n^{\frac{3}{4}} x e^{-\sqrt{nx}}, \quad 0 \leq x < +\infty :$$

$$2747. f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}, \quad -\infty < x < +\infty :$$

$$2748. f_n(x) = \frac{nx}{1+n^3x^2}, \quad -\infty < x < +\infty :$$

2749. Ապացուցել, որ  $f_n(x)$  ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը  $X$  բազմության վրա հավասարաշափ գուգամիսում է  $f(x)$  ֆունկցիային այն և միայն այն դեպքում, եթե

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0 :$$

2750. Ապացուցել, որ եթե  $f_n(x)$  ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը  $X$  բազմության վրա գուգամիսում է  $f(x)$  ֆունկցիային կեսորեն, բայց ոչ հավասարաշափ, ապա գոյություն ունեն՝  $\varepsilon_0 > 0$  թիվ,  $X$  բազմության կետերի  $x_k$  հաջորդականության և  $f_n$  հաջորդականության  $f_{n_k}$  ենթահաջորդականություն, այնպիսիք, որ  $|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon_0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ :

Հետազուտել նշված բազմության վրա ֆունկցիոնալ հաջորդականության հավասարաշափ գուգամիսությունը (2751-2756).

$$2751. f_n(x) = x^n, \text{ ա) } 0 \leq x \leq 0,9; \text{ բ) } 0 \leq x < 1:$$

$$2752. f_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{n}}, \quad 0 \leq x \leq 1:$$

$$2753. f_n(x) = \frac{x}{x+n}, \text{ ա) } 0 \leq x \leq 100; \text{ բ) } 0 \leq x < +\infty:$$

$$2754. f_n(x) = \operatorname{arctg} \frac{n}{x}, \text{ ա) } 0 < x \leq 100; \text{ բ) } 0 < x < +\infty:$$

$$2755. f_n(x) = \cos \frac{\pi x^n}{2}, \text{ ա) } 0 \leq x \leq 0,9; \text{ բ) } 0 \leq x \leq 1:$$

$$2756. f_n(x) = \operatorname{arctg} \left( e^{\frac{x}{n}} \right), \text{ ա) } 0 \leq x \leq a < +\infty; \text{ բ) } 0 \leq x < +\infty:$$

2757. Տրված է  $f : X \rightarrow R$  ֆունկցիան: Սստուգել, որ  $f_n(x) = \frac{[nf(x)]}{n}$  ( $n \in N$ ,  $[a]$ -ն  $a$ -ի ամբողջ մասն է) հաջորդականությունը  $X$  բազմության վրա հավասարաչափ զուգամիտում է  $f(x)$  ֆունկցիային:

2758. Տրված ֆունկցիոնալ շարքի համար կառուցել զուգամեա մաժորանս և համոզվել, որ շարքը նշված բազմության վրա հավասարաչափ զուգամեա է.

$$\text{ա) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}, \quad -\infty < x < +\infty; \quad \text{բ) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x}{1 + n^4 x^2}, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$\text{զ) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1 + n^5 x^2}, \quad -\infty < x < +\infty; \quad \text{դ) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{nx}{1 + n^2 x^2} \right)^n, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$\text{ե) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x^2)^{\frac{n}{2}}}{n \ln^2(n+1)}, \quad -1 \leq x \leq 1; \quad \text{զ) } \sum_{n=1}^{\infty} n^5 \sin^{2n} x, \quad -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4};$$

$$\text{հ) } \sum_{n=1}^{\infty} n^{10} e^{-nx^2}, \quad |x| \geq \delta > 0;$$

2759. Ապացուցել, որ եթե  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$  շարքը  $X$  բազմության վրա հավասարաչափ զուգամեա է, ապա  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  շարքն այդ բազմության վրա նույնպես հավասարաչափ զուգամեա է: Սստուգել, որ  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1-x)x^n$  շարքը  $[0;1]$  հասածի վրա թե՛ բացարձակ և թե՛ հավասարաչափ զուգամեա է, սակայն  $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n$  շարքը նույն այդ հաստվածի վրա հավասարաչափ զուգամեա չէ:

2760. Ապացուցել, որ եթե զուգամեա ֆունկցիոնալ շարքի ընդհանուր անդամը  $n$  հավասարաչափ է ծախում զրոյի, ապա շարքի զուգամիտությունը հավասարաչափ չէ:

Հետազոտել նշված բազմության վրա շարքի հավասարաչափ զուգամիտությունը (2761-2768).

$$2761. \text{ա) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right), \quad |x| \leq 1; \quad \text{բ) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}, \quad 0 \leq x < +\infty;$$

$$2762. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \text{ա) } 0 \leq x \leq a < +\infty; \quad \text{բ) } 0 \leq x < +\infty;$$

$$2763. \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}, \text{ w) } |x| \leq a < +\infty; \text{ p) } -\infty < x < +\infty;$$

$$2764. \sum_{n=1}^{\infty} n! \ln \left( 1 + \frac{x^2}{n^n} \right), \text{ w) } |x| \leq a < +\infty; \text{ p) } -\infty < x < +\infty;$$

$$2765. \sum_{n=1}^{\infty} e^{-ntgx}, \text{ w) } 0 < \varepsilon \leq x < \frac{\pi}{2}; \text{ p) } 0 < x < \frac{\pi}{2};$$

$$2766. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^2} e^{-\frac{n^2}{x}}, \text{ 0} < x < +\infty; \quad 2767. \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin \frac{1}{2^n}, \text{ -2} < x < 2;$$

$$2768. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x-1}{x^n}, \text{ 1} \leq x < +\infty;$$

\*\*\*

Հետազոտել արված միջակայքում շարքի գումարի անընդհատությունը (2769-2772).

$$2769. \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n, \text{ } |x| < 1:$$

$$2770. \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n, \text{ w) } 0 \leq x < 1; \text{ p) } 0 \leq x \leq 1:$$

$$2771. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}, \text{ -}\infty < x < +\infty; \quad 2772. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2}, \text{ } x \geq 0:$$

2773. Ցույց տալ, որ  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$  ֆունկցիան թվային առանցքի վրա անընդհատ դիֆերենցելի է:

$$2774. \text{ Ստուգել, որ } \Omega\text{-իմանի } \delta\text{-հետա-ֆունկցիան՝ } \zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \text{-ը, } (1; +\infty)$$

միջակայքում անընդհատ է: Համոզվել նաև, որ այդ միջակայքում  $\zeta(x)$ -ն անվերջ դիֆերենցելի է:

2775. Ստուգել, որ թվային առանցքի վրա ամենորեք խզվող ֆունկցիաների  $f_n(x) = \frac{1}{n} \chi(x) \quad (n \in N)$  հաջորդականությունը, որտեղ  $\chi(x)$ -ը Դիրիխլեի ֆունկցիան է, առանցքի վրա հավասարաշափ գուգամեալ է և ունի ամենորեք անընդհատ սահման:

Դասնել սահմանը (2776-2778).

$$2776. \lim_{x \rightarrow 1+0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{1+x^n} :$$

$$2778. \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x} :$$

Դասնել շարքի գումարի սահմանը՝ նախապես նկատելով, որ անդամ առ անդամ սահմանային անցումն անբույլասրելի է (2779-2780).

$$2779. \lim_{x \rightarrow 1+0} \sum_{n=0}^{\infty} x^n :$$

$$2780. \lim_{x \rightarrow 1+0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^n} :$$

2781. Ֆունկցիոնալ շարքերի անդամ առ անդամ ինտեգրման և դիֆերենցման վերաբերյալ թեորեմները ծևակերպել ֆունկցիոնալ հաջորդականությունների համար:

2782. Սսուցել, որ  $f_n(x) = nx e^{-nx^2}$  ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը  $[0;1]$  հատվածում գուգամիառն է ինսեգրելի ֆունկցիայի, սակայն

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx :$$

2783. Համոզվել, որ  $f_n(x) = nx(1-x)^n$  հաջորդականությունը  $[0;1]$  հատվածում ոչ հավասարաչափ է, գուգամիառն, բայց, այնուամենայնիվ, ինսեգրալի նշանի տակ սահմանային անցումը բույլասրելի է.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx :$$

2784. Թույլասրելի՞ է արևոր ինսեգրալի նշանի տակ սահմանային անցումը ինսեկյալ օրինակներում.

$$\text{ա) } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2 x^4} dx ;$$

$$\text{բ) } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 e^{-nx} dx :$$

Դասնել սահմանը (2785-2788).

$$2785. \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos nx}{\sqrt{n^2 + x^2}} dx :$$

$$2787. \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^2 \frac{nx + \ln(n^2 + x^2)}{n+x} dx :$$

$$2786. \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 e^{-n(1+x^2)} dx :$$

$$2788. \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} e^{-n \sin x} dx :$$

Հաշվել ինտեգրալ՝ նախապես համոզվելով, որ շարքի անդամ առ անդամ ինտեգրումը քույլատրելի է (2789-2790).

$$2789. \int_1^2 \left( \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nx} \right) dx :$$

$$2790. \int_0^1 \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{2^n} \right) dx :$$

2791. Սուուզել, որ  $f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{arctg} x^n$  հաջորդականությունը բվային առանցքի վրա հավասարաչափ գուգամես է, սակայն՝

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)'_{x=1} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(1) :$$

Պարզել թե անդամ առ անդամ դիֆերենցման մասին թեորեմի որ պայմանն է այսուել բացակայում:

2792. Օրինակով համոզվել, որ ֆունկցիոնալ շարքի անդամ առ անդամ դիֆերենցման վերաբերյալ թեորենում ելակետային շարքի առնվազն մեկ կետում գուգամիտելու պայմանը էական է. կառուցել  $\sum u_n(x)$  շարք, այնպիսին, որ  $\sum u'_n(x)$  շարքը հավասարաչափ գուգամես է, իսկ  $\sum u_n(x)$ -ը ոչ մի կետում գուգամես չէ:

2793. Գտնել շարքի գուգամիտության աիրույքը և կասարելով անդամ առ անդամ դիֆերենցում կամ ինտեգրում հաշվել շարքի գումարը.

$$\text{ա) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}; \quad \text{բ) } \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}; \quad \text{գ) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)}; \quad \text{դ) } \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}:$$

**\*\*\***

Հաշվել աստիճանային շարքի գուգամիտության շառավիղը և, հետազոտելով շարքի վարքը գուգամիտության միջակայքի ծայրակետում, գտնել շարքի գուգամիտության աիրույքը (2794-2800).

$$2794. \text{ա) } \sum_{n=1}^{\infty} x^n; \quad \text{բ) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}; \quad \text{գ) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}; \quad \text{դ) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}:$$

$$2795. \text{ա) } \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n; \quad \text{բ) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}:$$

$$2796. \text{ա) } \sum_{n=1}^{\infty} n! x^n; \quad \text{բ) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}:$$

$$2797. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n:$$

$$2798. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n + 2^n} (x-3)^n:$$

$$2799. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n} \quad (a > b > 0):$$

$$2800. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n} \right) x^n \quad (a > b > 0):$$

Գանել ընդհանրացված սասահճանային շարքի գուգամիտության սիլույրը (2801-2804).

$$2801. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^n :$$

$$2802. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \sin \frac{\pi}{2^n} :$$

$$2803. \sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{-n^2} e^{-nx} :$$

$$2804. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{3n} (n!)^3}{(3n)!} \operatorname{tg}^n x :$$

2805. Հիմնական տարրական ֆունկցիաների համար ստանալ Թեյլորի հետևյալ վերլուծությունները.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \quad (|x| < +\infty);$$

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (|x| < +\infty);$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots \quad (|x| < +\infty);$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \dots \quad (-1 < x \leq 1);$$

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots \quad (|x| < 1),$$

$$\text{որսունդ } \binom{\alpha}{0} = 1, \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \quad (n \in N):$$

Վերլուծել ֆունկցիան  $x_0 = 0$  կետում Թեյլորի շարքի և նշել գուգամիտության ափրոյը (2806-2821).

$$2806. shx :$$

$$2807. chx :$$

$$2808. \sin^2 x :$$

$$2809. \cos^2 x :$$

$$2810. x \sin x - \cos x :$$

$$2811. e^{-x^2} :$$

$$2812. x^2 e^x :$$

$$2813. \frac{x^{10}}{1-x} :$$

$$2814. \frac{1}{(1-x)^2} :$$

$$2815. \frac{x}{\sqrt{1-2x}} :$$

$$2816. \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}} :$$

$$2817. \sqrt[3]{8-x^3} :$$

$$2818. \ln(10+x) :$$

$$2819. \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} :$$

$$2820. \frac{x}{1+x-2x^2} :$$

$$2821. \frac{x}{(1-x)(1-x^2)} :$$

Ցուցում: Վերջին երկուսում սացխուսալ ֆունկցիան նախապես վերլուծել պարզ կրաքրակիների:

Նախնական ֆունկցիան ներկայացնել ասսիճանային շարքի գումարի աւելքով և նշել զուգամիտության աիրույքը (2822-2827).

$$2822. \int_0^x t^4 e^{-t^2} dt :$$

$$2823. \int_0^x \frac{e^t - 1}{t} dt :$$

$$2824. \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt :$$

$$2825. \int_0^x \sqrt{1+t^6} dt :$$

$$2826. \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} :$$

$$2827. \int_0^x \frac{dt}{1-t^9} :$$

Վերլուծել ընդհնանօքալ ֆունկցիան ասալիճանային շարքի և գունել ինստրումենտավոր արժեքը՝ վերցնելով վերլուծության միայն երեք անդամ: Դնահատել սխալանքը (2828-2831).

$$2828. \int_0^1 \frac{1-\cos x}{x} dx :$$

$$2829. \int_0^{\frac{1}{4}} x e^{x^3} dx :$$

$$2830. \int_{0.1}^1 \frac{\sin x}{x} dx :$$

$$2831. \int_0^1 x^{10} \sin x dx :$$

\*\*\*

2832. Վերլուծել  $f(x) = \sin^4 x$  ֆունկցիան ֆուրիեի եռանկյունաչափական շարքի:

2833. Ո՞րն է  $T_m(x) = \sum_{n=0}^m (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$  եռանկյունաչափական բազմանդամի ֆուրիեի շարքը:

2834. Վերլուծել  $f(x) = \operatorname{sgn} x$  ( $-\pi \leq x \leq \pi$ ) ֆունկցիան ֆուրիեի եռանկյունաչափական շարքի և ստուգելով շարքի զուգամիտությունը՝ հաշվել Լայբնիցի շարքի գումարը.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ :

Վերլուծել  $f(x)$  ( $-\pi \leq x \leq \pi$ ) ֆունկցիան Ֆուրիեի եռանկյունաչափական շարքի և հետազոտնական շարքի գուգամիալությունը (2835-2844).

$$2835. f(x) = x :$$

$$2836. f(x) = |x| :$$

$$2837. f(x) = \pi^2 - x^2 :$$

$$2838. f(x) = x^3 :$$

$$2839. f(x) = \sin px, p \notin \mathbb{Z} :$$

$$2840. f(x) = \sin px :$$

$$2841. f(x) = x \sin x :$$

$$2842. f(x) = x \cos x :$$

$$2843. f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x) :$$

$$2844. f(x) = |\sin x| :$$

2845. Սսուցել, որ

ա) եռանկյունաչափական համակարգը ցանկացած  $[a; a + 2\pi]$  հաս-  
վածում օրբողունալ է;

բ)  $[-l; l]$  հասվածում

$$1, \cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{\pi x}{l}, \cos \frac{2\pi x}{l}, \sin \frac{2\pi x}{l}, \dots, \cos \frac{n\pi x}{l}, \sin \frac{n\pi x}{l}, \dots$$

համակարգն օրբողունալ է:

$$f \in \Re_1[-l; l] \text{ ֆունկցիայի համար } \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \alpha_n \cos \frac{n\pi x}{l} + \beta_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \text{ շարքը, որտեղ}$$

$$\alpha_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n \in \mathbb{Z}_+), \quad \beta_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

Կարևում է Ֆուրիեի բնդիանրացված եռանկյունաչափական շարք:

Վերլուծել ֆունկցիան Ֆուրիեի բնդիանրացված եռանկյունաչափական շարքի (2846-2849).

$$2846. f(x) = x \cos x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right); \quad 2847. f(x) = x + 2a, \quad x \in (-a; a);$$

$$2848. f(x) = e^x, \quad x \in (-1; 1); \quad 2849. f(x) = |\cos x| :$$

Բ

Գտնել ֆունկիոնալ շարքի գուգամիալության և բացարձակ գուգամի-  
ալության աիրույքները (2850-2860).

$$2850. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^n :$$

$$2851. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left( \frac{2x}{1+x^2} \right)^n :$$

$$2852. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} :$$

$$2853. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+x^{n+1}} :$$

$$2854. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x(n+x)}{n} \right)^n :$$

$$2855. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}} :$$

$$2856. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)} :$$

$$2857. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+x)^p}, \quad x > -1 :$$

$$2858. \sum_{n=1}^{\infty} (2-x)(2-\sqrt{x})\cdots(2-\sqrt[n]{x}):$$

$$2859. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^{2n}}{2^n} [x(1-x)]^n :$$

$$2860. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot \sin^n x}{n^2} :$$

Հետազոտել նշված բազմության վրա ֆունկցիոնալ հաջորդականության հավասարաշափ գուգամիառությունը (2861-2872).

$$2861. f_n(x) = x^n - x^{2n}, \quad 0 \leq x \leq 1:$$

$$2862. f_n(x) = n \left( \sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right), \quad 0 < x < +\infty:$$

$$2863. \text{ա) } f_n(x) = \arctg nx; \quad \text{բ) } f_n(x) = x \cdot \arctg nx, \quad 0 < x < +\infty:$$

$$2864. f_n(x) = e^{-(x-n)^2}, \quad \text{ա) } x \leq 10; \quad \text{բ) } -\infty < x < +\infty:$$

$$2865. f_n(x) = \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n}, \quad 0 < x < 1:$$

$$2866. f_n(x) = \left( 1 + \frac{x}{n} \right)^n, \quad \text{ա) } a \leq x \leq b; \quad \text{բ) } -\infty < x < +\infty:$$

$$2867. f_n(x) = \ln \left( 1 + \frac{\cos nx}{\sqrt{n^2 + x^2}} \right), \quad -\infty < x < +\infty:$$

$$2868. f_n(x) = \sin \left( e^{-nx} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right), \quad \text{ա) } 0 < \varepsilon \leq x < +\infty; \quad \text{բ) } 0 \leq x < +\infty:$$

$$2869. f_n(x) = \ln \left( x^2 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right), \quad \text{ա) } |x| \geq \varepsilon > 0; \quad \text{բ) } |x| > 0:$$

$$2870. f_n(x) = \frac{n^2 x^2}{1+n^2 x^4} \cdot \sin \frac{x^2}{\sqrt{n}}, \quad -\infty < x < +\infty:$$

$$2871. f_n(x) = \sqrt{n} \cdot \sin \frac{x}{\sqrt{n}}, \quad \text{ա) } 0 \leq x \leq \pi; \quad \text{բ) } \pi \leq x < +\infty:$$

$$2872. f_n(x) = \arcsin \frac{x^n}{1+x^n}, \text{ w) } 0 \leq x \leq a < 1; \text{ p) } 0 \leq x < 1:$$

$$2873. \text{ Դիցուք՝ } f \in C^1[a; b] \text{ և } f_n(x) = n \left[ f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right], n \in N: \text{Ապացուցել,}$$

որ ցանկացած  $[\alpha; \beta]$  հասվածի վրա, որտեղ  $a < \alpha < \beta < b$ ,  $f_n(x) \rightrightarrows f'(x)$ :

$$2874. \text{ Դիցուք՝ } f \in C(R) \text{ և } f_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(x + \frac{i}{n}\right): \text{Ապացուցել, որ ցանկացած}$$

$X$  սահմանափակ բազմության վրա  $f_n(x)$  հաջորդականությունը հավասարաշափ գուգամես է: Դանել նրա սահմանը:

Կիրառելով Վայերշարասի հայտանիշը՝ ապացուցել տրված բազմության վրա շարքի բացարձակ և հավասարաշափ գուգամիտությունը (2875-2879).

$$2875. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}} \left( x^n + x^{-n} \right), \quad \frac{1}{2} \leq |x| \leq 2:$$

$$2876. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{x}{n \ln^2(n+1)} \right), \quad 0 \leq x \leq a < +\infty:$$

$$2877. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2 + n^3}, \quad |x| < +\infty:$$

$$2878. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi nx \sin \frac{x}{n}}{(x^2 + 1) \sqrt{x^2 + n^2}}, \quad |x| < +\infty:$$

$$2879. \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^4 x^2} \sin nx, \quad |x| < +\infty:$$

2880. Դիցուք՝

$$u_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 2^{-(n+1)}, \\ \frac{1}{n} \sin^2 \left( 2^{n+1} \pi x \right), & 2^{-(n+1)} < x < 2^{-n}, \\ 0, & 2^{-n} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

Ստուգել, որ  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  շարքը  $[0; 1]$  հասվածի վրա բացարձակ և հավասարաշափ գուգամես է, սակայն չունի գուգամես մաժորանու:

2881. Ապացուցել, որ եթե  $u_n(x)$  ( $n \in N$ ) ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը  $[a; b]$  հասվածի վրա մոնուան է,  $\sum |u_n(a)|$  և  $\sum |u_n(b)|$  շարքերը գուգամես են,

ապա  $\sum u_n(x)$  շարքը  $[a; b]$  հաստիքածի վրա բացարձակ և հավասարաչափ գուգամենա է:

Օգսուվելով Աբելի կամ Դիրիխլեի հայտանիշից՝ ապացուցել շարքի հավասարաչափ գուգամիտությունը (2882-2887).

$$2882. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad 0 < \varepsilon \leq x \leq 2\pi - \varepsilon :$$

$$2883. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p} \quad (p > 0), \quad 2\pi + \delta \leq x \leq 4\pi - \delta \quad (0 < \delta < \pi) :$$

$$2884. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{2^n} x \cdot \sin nx}{\sqrt[3]{n}}, \quad \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4} :$$

$$2885. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2\pi n}{3}}{\sqrt{n^2 + x^2}}, \quad -\infty < x < +\infty :$$

$$2886. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ln(1+nx^2)}{n^2 x^2}, \quad x \neq 0 :$$

$$2887. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-\frac{x}{n}}}{\sqrt{n}}, \quad x \geq -100 :$$

Հետազոտել շարքի հավասարաչափ գուգամիտությունը (2888-2895).

$$2888. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-x}, \quad 0 < x < +\infty :$$

$$2889. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}, \quad 0 < x < +\infty :$$

$$2890. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sin x}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi :$$

$$2891. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[3]{n^2 + e^x}} :$$

$$2892. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{\sqrt{n(n+x)}}, \quad 0 \leq x < +\infty :$$

$$2893. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{4^n} \ln \left( 1 + \frac{x^2}{n^2} \right), \quad |x| \leq 4 :$$

$$2894. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}, \quad \text{ա) } 0 \leq x < \varepsilon; \quad \text{բ) } \varepsilon \leq x < +\infty :$$

$$2895. \sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{arctg} \frac{x}{n!}, \quad \text{ա) } |x| \leq a < +\infty; \quad \text{բ) } |x| < +\infty :$$

2896. Ցույց ստալ, որ  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(1+x^n)^n}$  շարքը թվային առանցքի վրա հավասարաշափություն է գուգամնեաւ, իսկ բացարձակ արժեքներից կազմված՝  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x^n)^n}$

շարքը՝ ոչ հավասարաշափություն:

2897. Ստուգել, որ  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n} + n}{n^2}$  շարքը ցանկացած սահմանավուակ բազմության վրա հավասարաշափություն է, սակայն ոչ մի կեսուում բացարձակ գուգամնեաւ չէ:

2898. Ապացուցել, որ եթե  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  թվային շարքը գուգամնեաւ է, ապա  $\Gamma$ -ի համապատասխան շարքը՝  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ ,  $[0; +\infty)$ -ի վրա հավասարաշափություն է:

2899. Դիցուք  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  թվային շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունը սահմանավուակ է: Ապացուցել, որ ցանկացած  $\varepsilon > 0$  թվի համար  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$  շարքը  $(\varepsilon; +\infty)$  միջակայքի վրա հավասարաշափություն է:

2900. Ապացուցել, որ եթե  $a_n$  ( $n \in N$ ) թվային հաջորդականությունը մոնուաուն ծավուում է զրոյի, ապա  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$  և  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$  ֆունկցիոնալ շարքերը  $2\pi k$  ( $k \in Z$ ) տեսքի թվերը չպարունակող ցանկացած կոմպակտի (փակ և սահմանավուակ բազմության) վրա հավասարաշափություն են:

2901. Դիցուք  $a_n \rightarrow \infty$  թվային հաջորդականությունն այնպիսին է, որ  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$

շարքը բացարձակ գուգամնեաւ է: Ցույց ստալ, որ  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x - a_n}$  ֆունկցիոնալ շարքը  $a_n$  ( $n \in N$ ) կետերը չպարունակող ցանկացած կոմպակտի վրա հավասարաշափություն է:

Հետազոտել գուգամիսության ախրույթում շարքի գումարի անընդհատությունը (2902-2905).

$$2902. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{|x| + \sqrt{n}} :$$

$$2903. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ln(1+nx) :$$

$$2904. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-e^{-x})^n}{\sqrt{n}} :$$

$$2905. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\ln(n+1)} :$$

2906. Օգսվելով շարքի գումարի անընդհատության վերաբերյալ թեորեմից՝ համոզվել, որ  $\sum_{n=1}^{\infty} (x^{2n} - x^{2n+2})$  շարքը  $[-1;1]$  հասկածի վրա ոչ հավասարաշափ է գուգամեա:

2907. Դիցուք  $u_n : (0;1) \rightarrow R$  ( $n \in N$ ) ֆունկցիաները անընդհատ են և ոչ բացասական: Ծշմարի՞ւ է արդյոք, որ եթե  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  շարքը  $(0;1)$  միջակայքում գուգամեա է և ունի անընդհատ գումար, ապա շարքը  $(0;1)$ -ի վրա հավասարաշափ գուգամեա է:

Բերել համապատասխան օրինակ և պարզել, թե Դիմիի թեորեմի որ պայմանն է այստեղ բացակայում:

2908. Սսուցել, որ խնդիր 2906-ում բերված շարքի անդամները  $[-1;1]$  հասկածում անընդհատ են և ոչ բացասական և նկատելով շարքի ոչ հավասարաշափ գուգամիսությունը, համոզվել, որ Դիմիի թեորեմում շարքի գումարի անընդհատության պայմանն էական է:

2909. Կառուցել  $[0;+\infty)$  միջակայքում անընդհատ և ոչ բացասական անդամներով շարք, որի գումարը  $[0;+\infty)$ -ում նոյնական անընդհատ է, սակայն շարքը հավասարաշափ գուգամեա չէ:

2910. Ապացուցել Դիմիի թեորեմի հետևյալ ընդհանրացումը. դիցուք  $K$ -ն կոմպակտ է, իսկ  $u_n : K \rightarrow R$  ( $n \in N$ ) ֆունկցիաներն անընդհատ են և ոչ բացասական: Եթե  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  շարքը  $K$ -ի վրա գուգամեա է և ունի անընդհատ գումար, ապա այն  $K$ -ի վրա հավասարաշափ գուգամեա է:

2911. Զնակերպել Դիմիի թեորեմը ֆունկցիոնալ հաջորդականությունների համար:

2912. Դիցուք  $f_n : [a;b] \rightarrow R$  ( $n \in N$ ) ֆունկցիոնալ հաջորդականության անդամներից յուրաքանչյուրը  $[a;b]$  հասկածի վրա մոնուան է (բայց ոչ

անպայման անընդհատ): Ապացուցել, որ եթե  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  ( $x \in [a; b]$ )

ֆունկցիան անընդհատ է, ապա  $f_n \xrightarrow{f}$ :

**2913.** Դիցուք  $u_n \in C[a; b]$  ( $n \in N$ ) և ցանկացած  $[\alpha; \beta] \subset (a; b)$  հասվածի

վրա  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  շարքը հավասարաչափ զուգամես է: Կարելի՞ է արդյոք պնդել,

որ եթե  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)$  և  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(b)$  շարքերը զուգամետ են, ապա  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ -ը  $[a; b]$

հասվածում հավասարաչափ զուգամես է: Բերել համապատասխան օրինակ:

**2914.** Ապացուցել, որ եթե  $f_n \in \mathfrak{R}[a; b]$  ( $n \in N$ ) ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը  $[a; b]$ -ի վրա հավասարաչափ զուգամես է, ապա

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt \quad (a \leq x \leq b)$$

հաջորդականությունը  $[a; b]$ -ի վրա նույնպես հավասարաչափ զուգամես է:

**2915.** Կառուցել  $f_n \in \mathfrak{R}[0; 1]$  ( $n \in N$ ) ֆունկցիոնալ հաջորդականություն, այն-

պիսին, որ  $\forall x \in [0; 1]$  ( $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = +\infty$ ), սակայն  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = -\infty$ :

**2916.** Սատուգել, որ հետևյալ հաջորդականություններից յուրաքանչյուրը կազմված է  $[\alpha; b]$  հասվածում ինտեգրելի ֆունկցիաներից, սակայն դրանց սահմանը  $[a; b]$ -ում ինտեգրելի չէ.

$$\text{ա) } f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } x \in Q_n, \\ 0, & \text{եթե } x \in R \setminus Q_n, \end{cases}$$

$$\text{որտեղ } Q_n = \left\{ \frac{p}{q} : p \in Z, q \in N, q \leq n \right\};$$

$$\text{բ) } f_n(x) = \sqrt[n]{R(x)},$$

որտեղ  $R(x)$ -ը Ո-իմանի ֆունկցիան է;

$$\text{գ) } f_n(x) = R(n!x);$$

**2917.** Տրված է  $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$  ( $n \in N, \alpha \in R$ ) ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը: Ընսրել  $\alpha$  պարամետրի արժեքներն այնպես, որ ճշմարիտ լինի

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

հավասարությունը:

2918. Կարելի՞ է արդյոք հետևյալ շարքը  $[0;1]$  հատվածում անդամ առ անդամ ինակղզել.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}} \right);$$

2919. Կարելի՞ է արդյոք  $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}$  շարքն անդամ առ անդամ դիֆերենցել:

2920. Դիցուք  $f$ -ը բվային առանցքի վրա անվերջ դիֆերենցելի է և ամենուրեք  $|f^{(n)}(x) - f^{(n-1)}(x)| < \frac{1}{n^2}$  ( $n \in N, f^{(0)} = f$ ): Ապացուցել, որ  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(x) = c \cdot e^x$ ,

որտեղ  $c = \text{const}$ :

2921. Ապացուցել նախորդ խնդրում ձևակերպված պնդման հետևյալ ուժեղացումը. Եթե  $f$ -ը բվային առանցքի վրա անվերջ դիֆերենցելի է և  $f^{(n)}(x)$  հաջորդականությունը գուգամիսում է  $\varphi(x)$  ֆունկցիային՝ ցանկացած  $(a; b)$  վերջավոր միջակայքի վրա հավասարաչափ, ապա  $\varphi(x) = c \cdot e^x$ , որտեղ  $c = \text{const}$ :

2922. Դիցուք  $u_n \in C[a; b]$ ,  $|u_n(x)| \leq c_n$ , ( $n \in N, x \in [a; b]$ ) և  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < +\infty$ :

Ապացուցել, որ

$$\text{ա) } f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n(x)) \text{ ֆունկցիան անընդհատ է } [a; b] \text{ հատվածում;}$$

$$\text{բ) եթե } u_n \in C^1[a; b] \text{ } (n \in N) \text{ և } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u'_n(x)}{1 + u_n(x)} \text{ շարքը } [a; b] \text{ հատվածի վրա հավասարաչափ գուգամեալ է, ապա } f \text{ ֆունկցիան դիֆերենցելի է և}$$

$$f'(x) = f(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u'_n(x)}{1 + u_n(x)} :$$

\*\*\*

2923. Ապացուցել հավասարությունը.

$$\text{ա) } \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{x^n}{1+x^n} = \frac{1}{2} \ln 2;$$

$$\text{բ) } \lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{1-x^{2n}} = \frac{1}{2} \ln 2 :$$

2924. Վերլուծել  $\frac{1}{1+x}$ ,  $\frac{1}{1+x^2}$  և  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  ֆունկցիաները թեյլորի շարքի և ան-

դամ առ անդամ ինստեղելով՝ ստանալ համապատասխանաբար  $\ln(1+x)$ ,  $\arctg x$  և  $\arcsin x$  ֆունկցիաների վերլուծությունները։ Հետազոտել ստացված շարքերը գուգամիառության միջակայքի ծայրակետերում և Արելի թեորեմի կիրառմամբ ապացուցել հետևյալ հավասարությունները.

ա)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ ; բ)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$ ;

գ)  $\frac{\pi}{2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}$ :

Դանել ասաիճանային շարքի գուգամիառության աիդույքը (2925-2934).

2925.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$ :

2926.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} x^n$ :

2927.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$ :

2928.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^n$ :

2929.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^n$ :

2930.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 x^n$ :

2931.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(1 + 2 \cos \frac{\pi n}{4}\right)^n}{\ln n} x^n$ :

2932.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n (x-1)^n$ :

2933.  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot x^{n^2}$ :

2934.  $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^{n!}$ :

2935. Դիցուք  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  և  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  ասաիճանային շարքերի գուգամիառության շառավիղները  $R_a$  և  $R_b$  դրական թվերն են և  $R = \min\{R_a; R_b\}$ : Ապացուցել, որ  $(-R; R)$  միջակայքում ճշմարիտ են

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

և

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

հավասարությունները, որտեղ  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ :

2936. Անմիջականորեն ապացուցել, որ  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  ֆունկցիան բավարարում է  $f(x)f(y) = f(x+y)$  ֆունկցիոնալ հավասարմանը:

Վերլուծել  $f$  ֆունկցիան  $x_0 = 0$  կետի շրջակայրում աստիճանային շարքի (2937-2942).

2937.  $f(x) = (1+x)e^{-x}$ :

2938.  $f(x) = (1-x)^2 ch\sqrt{x}$ :

2939.  $f(x) = (1+x^2) \arctg x$ :

2940.  $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ :

2941.  $f(x) = \ln^2(1-x)$ :

2942.  $f(x) = \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2$ :

2943. Դիցուք  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$  և  $L = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ : Ապացուցել, որ  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  աստիճանային շարքի զուգամիտության  $R$  շառավղի համար ճշմարիա են  $l \leq R \leq L$  անհավասարությունները: Կառուցել շարքի օրինակ, որի համար սստացված անհավասարությունները խիստ են:

2944.  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^n$  սիմվոլ կոչվում է Լորանի շարք: Այն համարվում է զուգամեամիայն այն դեպքում, եթե  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x^{-n}$  և  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  շարքերը միաժամանակ զուգամեաւ են: Ապացուցել, որ եթե Լորանի շարքը, զուգամեաւ է  $x = x_1$  և  $x = x_2$  ( $|x_1| < |x_2|$ ) կետերում, ապա այն զուգամեաւ է.  $|x_1| < |x| < |x_2|$  անհավասարություններով որոշվող սիրույթի բոլոր կետերում:

2945. Դանել  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{2^{|n|}} x^n$  Լորանի շարքի զուգամիտության սիրույթը և հաշվել նրա գումարը:

2946. Ապացուցել, որ  $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$  ֆունկցիան  $R \setminus Z$  բազմության վրա անընդհատ է և 1-պարբերական:

\*\*\*

Վերլուծել ֆունկցիան Ֆուրիեի եռանկյունաչափական շարքի (2947-2952).

$$2947. f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0; \pi], \\ \sin x, & x \in (\pi; 2\pi]: \end{cases}$$

$$2948. f(x) = \begin{cases} a, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \\ b, & x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]: \end{cases}$$

$$2949. f(x) = \frac{\pi - x}{2}, \quad x \in [0; 2\pi]:$$

$$2950. f(x) = x - [x]:$$

$$2951. f(x) = \arcsin(\sin x):$$

$$2952. f(x) = \arcsin(\cos x):$$

2953.  $f(x) = \cos px$  ( $p \notin Z$ ) ֆունկցիան  $[-\pi; \pi]$  հաստատում վերլուծել Ֆուրիեի եռանկյունաչափական շարքի: Օգտվելով ստացված վերլուծությունից՝ ապացուցել, որ

$$\text{ա) } \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{x - \pi n} + \frac{1}{x + \pi n} \right);$$

$$\text{բ) } \operatorname{ctgx} x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{x - \pi n} + \frac{1}{x + \pi n} \right);$$

2954. Տրված է՝  $f \in \mathfrak{R}_1[-\pi; \pi]$  ֆունկցիան զույգ է: Ապացուցել, որ  $f$ -ի Ֆուրիեի շարքը կազմված է միայն կոսինուսներից.  $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ , ընդ

$$\text{որում } a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx dx \quad (n \in Z_+):$$

Զևակերպել և ապացուցել նույնասիաց պնդում կենս ֆունկցիայի համար:

2955. Կառուցել  $f(x) = x$  ( $x \in [0; \pi]$ ) ֆունկցիայի շարունակությունը  $[-\pi; \pi]$  հաստատում և վերլուծել այն Ֆուրիեի շարքի ըստ կոսինուսների:

2956.  $f(x) = x \sin x$  ( $x \in [0; \pi]$ ) ֆունկցիան վերլուծել Ֆուրիեի շարքի ըստ սինուսների:

2957.  $f(x) = x^2$  ֆունկցիան վերլուծել Ֆուրիեի շարքի

ա) ըստ կոսինուսների  $[-\pi; \pi]$  հաստատում;

բ) ըստ սինուսների  $[0; \pi]$  հաստատում;

գ)  $[0; 2\pi]$  հաստատում:

Օգտվելով այդ վերլուծություններից՝ հաշվել հետևյալ շարքերի գումարները.

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}; \quad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}; \quad S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2};$$

2958. Հաշվել շարքի գումարը.

$$\text{ա) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}; \quad \text{բ) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2};$$

2959. Դիցուք՝  $f \in \mathfrak{R}_1[-\pi; \pi]$ : Ապացուցել, որ եթե ցանկացած  $x \in [-\pi; 0]$  կետում

$$\text{ա) } f(x+\pi) = f(x), \text{ ապա } a_{2n-1} = b_{2n-1} = 0 \quad (n \in N);$$

$$\text{բ) } f(x+\pi) = -f(x), \text{ ապա } a_{2n} = b_{2n} = 0 \quad (n \in N);$$

2960. Դիցուք՝  $f \in \mathfrak{R}_1[0; \pi]$  և ամենուրեք  $f(\pi-x) = f(x)$ : Ապացուցել, որ  $f$  ֆունկցիայի

$$\text{ա) ըստ կոսինուսների վերլուծության մեջ } a_{2n-1} = 0 \quad (n \in N);$$

$$\text{բ) ըստ սինուսների վերլուծության մեջ } b_{2n} = 0 \quad (n \in N);$$

2961. Տրված է՝  $f \in \mathfrak{R}_1\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ : Ինչպես պես է. շարունակել ֆունկցիան  $[-\pi; \pi]$  միջակայքում, որպեսզի նրա Ֆուրիեի շարքն ունենա հետևյալ անսըլը.

$$\text{ա) } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(2n-1)x; \quad \text{բ) } \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin(2n-1)x;$$

2962. Դիցուք՝  $f(x) = x\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ,  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ : Ստանալ  $f$  ֆունկցիայի վերլուծությունն

$$\text{ա) ըստ } \{\cos(2n-1)x\}_{n \in N} \text{ համակարգի};$$

$$\text{բ) ըստ } \{\sin(2n-1)x\}_{n \in N} \text{ համակարգի};$$

2963. Դիցուք՝

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad g \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx);$$

Ինչպիսի՞ կապ կա  $a_n$ ,  $b_n$  և  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$  գործակիցների միջև, եթե

$$\text{ա) } f(-x) = g(x); \quad \text{բ) } f(-x) = -g(x);$$

2964. Ապացուցել, որ եթե  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  եռանկյունաշափական շարքը  $[-\pi; \pi]$  հատվածում հավասարաշափ գուգամնաւ է և ունի  $f(x)$  գումար, ապա այն  $f(x)$ -ի Ֆուրիեի շարքն է:

2965. Ապացուցել, որ եթե եռանկյունաչափական շարքն ունի մասնակի գումարների  $s_{n_k}(x)$  ենթահաջորդականություն, որը  $[-\pi; \pi]$  հասվածում հավասարաչափ գուգամիսում է  $f$  ֆունկցիային, ապա այն  $f$ -ի Ֆուրիեի շարքն է:
2966. Դիցուք  $f \in \mathfrak{R}_1[-\pi; \pi]$ : Ապացուցել, որ եթե որևէ  $\delta > 0$  և  $S$  թվերի համար

$$\int_0^\delta \frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2S|}{t} dt \quad (x \in [-\pi; \pi])$$

ինստեգրալը գուգամես է, ապա  $f$ -ի Ֆուրիեի եռանկյունաչափական շարքը  $x$  կեսում գուգամիսում է  $S$ -ին ( $\Omega$ -ինի հայտանիշ):

2967. Ասում են, որ  $f$  ֆունկցիան  $U$  բազմության վրա բավարարում է  $\alpha$  ցուցիչով Լիպշչիցի պայմանին և զյում՝  $f \in Lip^\alpha(U)$ , եթե գոյություն ունի  $M > 0$  թիվ, այնպիսին, որ ցանկացած  $x_1, x_2 \in U$  կետերի համար ճշմարիս է  $|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|^\alpha$  անհավասարությունը:

Դիցուք՝  $f \in \mathfrak{R}_1[-\pi; \pi]$ ,  $U$ -ն  $x_0 \in [-\pi; \pi]$  կետի որևէ շրջակայք է և  $f \in Lip^\alpha(U)$ : Ապացուցել, որ  $f$ -ի Ֆուրիեի եռանկյունաչափական շարքը  $x_0$  կեսում գուգամիսում է  $f(x_0)$ -ին:

2968. Դիցուք՝  $f \in \mathfrak{R}_1[-\pi; \pi]$  և  $x_0 \in (-\pi; \pi)$  կետի շրջակայքում  $f$ -ն ունի սահմանափակ ածանցյալ: Ապացուցել, որ  $f$ -ի Ֆուրիեի եռանկյունաչափական շարքը  $x_0$  կեսում գուգամիսում է  $f(x_0)$ -ին:

2969. Ապացուցել, որ զրոյի շրջակայքից դուրս Ֆեյերի կորիգըների  $\Phi_n(t)$  հաջորդականությունը հավասարաչափ գուգամիսում է զրոյի. ցանկացած  $\delta > 0$  թվի համար

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{-\delta \leq t \leq \pi} \Phi_n(t) = 0:$$

2970. Դիցուք՝  $f \in \mathfrak{R}_1[-\pi; \pi]$  և  $x \in (-\pi; \pi)$  կեսում գոյություն ունեն  $f(x \pm 0)$  վերջավոր միակողմանի սահմանները: Ապացուցել, որ  $f$ -ի  $\sigma_n(x)$  Ֆեյերի գումարները ձգուում են  $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$  թվին:

2971. Դիցուք՝  $f \in C^1[-\pi; \pi]$ ,  $f(-\pi) = f(\pi)$  և

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx):$$

Ապացուցել, որ

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin nx + nb_n \cos nx):$$

*f* ֆունկցիայի համար գրել Պարսևալի հավասարությունը և հաշվել արված  $c_n$  ( $n \in N$ ) անդամներով շարքի գումարը (2972-2973).

$$2972. f(x) = \frac{\pi - x}{2}, \quad c_n = \frac{1}{n^2}:$$

$$2973. f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \beta, \\ 0, & \beta \leq |x| \leq \pi; \end{cases} \quad \text{ա) } c_n = \frac{\sin^2 n\beta}{n^2}; \quad \text{բ) } c_n = \frac{\cos^2 n\beta}{n^2}:$$

2974. Տրված  $f, g \in \mathfrak{R}_2[a; b]$  ֆունկցիաների համար

$$\Delta = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx} - \underline{0}$$

կոչվում է այդ ֆունկցիաների միջին քառակուսային շեղում:

Դիցուք  $\varphi_n \in \mathfrak{R}_2[a; b]$  ( $n \in Z_+$ ) համակարգն  $[a; b]$ -ի վրա օրբոնորմա-վորված է: Դիտարկենք  $\Gamma_n = \{\gamma_0 \varphi_0 + \dots + \gamma_n \varphi_n : \gamma_i \in R, i = 0, \dots, n\}$  քազման-դամների քազմությունը: Ապացուցել Ֆուրիեի շարքի մասնակի գումարների հետևյալ էքսարենալ հասկությունը. արված  $f \in \mathfrak{R}_2[a; b]$  ֆունկցիայի և  $\Gamma_n$  քազմության ցանկացած քազմանդամի միջին քառակուսային շեղումը կինհ նվազագույն այն և միայն այն դեպքում, եթե  $\gamma_0, \dots, \gamma_n$  գործակիցները  $f$ -ի Ֆուրիեի գործակիցներն են ըստ  $\varphi_n$  ( $n \in Z_+$ ) համակարգի:

Եռանկյունաչափական համակարգի դեպքում ցանկացած  $f \in \mathfrak{R}_2[-\pi; \pi]$  ֆունկցիայի համար ստանալ Բեսելի նույնությունը.

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - s_n(x)]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \left[ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right],$$

որաւել

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx):$$

$$2975. \quad \text{Դիցուք } f, g \in \mathfrak{R}_2[-\pi; \pi], \quad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad \text{և}$$

$$g(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx): \quad \text{Ապացուցել Պարսևալի ընդհանրաց-}$$

ված հավասարությունը.

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = \frac{a_0 A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n A_n + b_n B_n):$$

գ.

Դանել ֆունկցիոնալ շարքի զուգամիաության ավլույթը (2976-2977).

$$2976. \sum_{n=1}^{\infty} \sin(2^n x):$$

$$2977. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x}{\sin n} \right)^n :$$

2978. Դիցուք  $f : R_+ \rightarrow R$  ֆունկցիան մոնուատն է, իսկ  $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ -ը՝ զուգամես: Ապացուցել, որ

$$\lim_{h \rightarrow +0} h \sum_{n=1}^{\infty} f(nh) = \int_0^{+\infty} f(x)dx :$$

Օգսվելով սաւաված հավասարությունից՝ հաշվել սահմանը.

$$\lim_{t \rightarrow 1-0} (1-t) \left( \frac{t}{1+t} + \frac{t^2}{1+t^2} + \cdots + \frac{t^n}{1+t^n} + \cdots \right) :$$

Դանել սահմանը (2979-2980).

$$2979. \lim_{x \rightarrow +0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} :$$

$$2980. \lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x)^{p+1} \sum_{n=1}^{\infty} n^p x^n \quad (p \in Z_+):$$

Ապացուցել հավասարությունը (2981-2982).

$$2981. \text{ա) } \int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n};$$

$$\text{բ) } \int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n} :$$

$$2982. \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin x dx = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!} :$$

2983. Դիցուք  $\varphi_1 \in C[0; A]$  ֆունկցիան դրական է և

$$\varphi_{n+1}(x) = 2 \int_0^x \sqrt{\varphi_n(t)} dt \quad (n \in N):$$

Ապացուցել, որ  $\varphi_n$  հաջորդականությունը  $[0; A]$  հատվածի վրա հավասարաչափ զուգամիաում է:  $\varphi(x) = x^2$  ֆունկցիային:

2984. Դիցուք  $f_n : X \rightarrow R$  ( $n \in N$ ) ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը  $X$  բազմության վրա կեսորեն զուգամիաում է  $f(x)$  ֆունկցիային: Ապացուցել սահմանի անընդիհասուության վելարերյալ քեռեմի հետևյալ ընդհանրացումը. Ներեն  $f_n$  ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրն անընդիաս է:  $x_0 \in X$  կեսում և, բացի

այդ, ցանկացած  $\varepsilon > 0$  և  $m \in N$  թվերի համար գոյություն ունի  $n > m$  բնական թիվ, այնպիսին, որ  $X$  բազմության վրա ամենուրեք  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ , ապա  $f$ -ը  $x_0$  կետում անընդհատ է:

$$\text{Ստուգել, որ } f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \quad (n \in N) \text{ հաջորդականությունը } [0;1]$$

հաստիքածի վրա գուգամիտում է անընդհատ ֆունկցիայի, սակայն խնդրում նշված գուգամիտության պայմանին այն չի բավարարում:

**2985.** Ասում են, որ  $f_n : [a; b] \rightarrow R$  ( $n \in N$ ) ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը  $[a; b]$  հաստիքածի վրա բվագիհավասարաշափ գուգամիտում է  $f$  ֆունկցիային, եթե ցանկացած  $\varepsilon > 0$  և  $m \in N$  թվերի համար գոյություն ունեն  $[a; b]$  հաստիքածը ծածկող  $(a_1; b_1), \dots, (a_k; b_k)$  միջակայքերի վերջավոր բնաւանիք և այդ միջակայքերին համապատասխան  $m$ -ը գերազանցող  $n_1, \dots, n_k$  բնական թվեր, այնպիսիք, որ

$$|f(x) - f_{n_i}(x)| < \varepsilon \quad (x \in [a; b] \cap (a_i; b_i), i = 1, \dots, k):$$

Ապացուցել Արցելայի հետևյալ թեորեմը. որպեսզի  $[a; b]$  հաստիքածի վրա անընդհատ ֆունկցիաների հաջորդականության սահմանն այլ հաստիքածի վրա լինի անընդհատ, անիրածեցն է և բավարար, որ հաջորդականությունը գուգամիտ բվագիհավասարաշափ:

**2986.** Դիցուք  $f_n \in \mathfrak{R}[a; b]$  ( $n \in N$ ) հաջորդականությունը  $[a; b]$ -ի վրա հավասարաշափ սահմանափակ է.

$$\exists M > 0 \quad \forall x \in [a; b] \quad \forall n \in N \quad (|f_n(x)| \leq M):$$

Ապացուցել, որ

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt \quad (n \in N)$$

ֆունկցիոնալ հաջորդականությունից կարելի է ընսրել  $[a; b]$ -ի վրա հավասարաշափ գուգամեաւ ենթահաջորդականություն:

**2987.**  $f_n : [a; b] \rightarrow R$  հաջորդականությունը կոչվում է  $[a; b]$ -ի վրա հավասարասուիճան անընդհատ, եթե

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall n \in N \quad \forall x_1, x_2 \in [a; b] \quad (|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f_n(x_1) - f_n(x_2)| < \varepsilon):$$

Ապացուցել, որ եթե  $f_n \in C[a; b]$  ( $n \in N$ ) ֆունկցիաների հաջորդականությունը  $[a; b]$ -ի վրա հավասարաշափ գուգամեաւ է, ապա այն նաև հավասարաշափ սահմանափակ է. և հավասարասուիճան անընդհատ:

**2988.** Ապացուցել Արցելայի հետևյալ թեորեմը. եթե  $f_n : [a; b] \rightarrow R$  ( $n \in N$ ) ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը  $[a; b]$ -ի վրա հավասարաշափ սահմանափակ է և հավասարասահճան անընդիաս, ապա այն ունի  $[a; b]$ -ի վրա հավասարաշափ գուգամնես և նճրահաջորդականություն:

**2989.** Դիցուք  $\varphi$  -ն 1-պարբերական ֆունկցիա է, ընդ որում՝  $\varphi(x) = |x|$ , եթե  $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ : Ապացուցել, որ  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(4^n x)}{4^n}$  շարքի գումարը թվային առանցքի վրա ամենուրեք անընդիաս է, սակայն ոչ մի կետում դիֆերենցելի չէ (Վան դեր Վարդեն):

**2990.** Ստուգել, որ  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^{n^2} x)}{a^{n^2}}$  շարքի գումարը թվային առանցքի վրա  
ա) անընդիաս է, եթե  $a > 1$ ;  
բ) դիֆերենցելի է, եթե  $a > 2$ ;  
գ) ոչ մի կետում դիֆերենցելի չէ, եթե  $a \in (1; 2)$ :

**2991.** Կառուցել  $R$ -ի վրա անընդիաս ֆունկցիա, որը ոչ մի կետում Ըփարցի ածանցյալ չունի (աւել խնդիր 1573):

**2992.** Տրված է՝  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  շարքն  $(a; b)$  վերջավոր միջակայքում գուգամնես է, ընդ որում՝ շարքի անդամներն այդ միջակայքում դիֆերենցելի են: Ապացուցել, որ եթե զոյություն ունի  $C$  թիվ, այնպիսին, որ ցանկացած  $m \in N$  թիվի համար  $\left| \sum_{n=1}^m u'_n(x) \right| \leq C$ , ապա  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  շարքն  $(a; b)$ -ում հավասարաշափ գուգամնես է:

**2993.** Ապացուցել, որ եթե  $f : R_+ \rightarrow R$  ֆունկցիան ցանկացած  $x \in R_+$  թիվի համար բավարարում է  $\sum_{n=1}^{\infty} |f(nx)| < +\infty$  և  $\sum_{n=1}^{\infty} f(nx) = 0$  պայմաններին, ապա  $f(x) \equiv 0$ :

**2994.** Դիցուք  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  շարքի գործակիցները որոշ համարից սկսած պարբերաբար կրկնվում են.  $a_{n+p} = a_n$ ,  $n \geq n_0$ : Ապացուցել, որ շարքի գումարը բացի ունկնալ ֆունկցիա է: Ծշմարի՞ւ և է արոյոք հակադարձ պնդումը:

2995. Ապացուցել, որ  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  շարքի գումարը ռացիոնալ ֆունկցիա է այն և

միայն այն դեպքում, եթե գոյություն ունեն  $n_0 \in N$  և  $c_1, c_2, \dots, c_p$  թվեր, այն-պիսիք, որ ցանկացած  $n \geq n_0$  թվի համար  $c_1 a_{n+1} + c_2 a_{n+2} + \dots + c_p a_{n+p} = 0$ :

2996. Դիցուք՝  $a_n \geq 0$  ( $n \in Z_+$ ) և  $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ : Ապացուցել, որ եթե  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \infty$

և  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{A_n} = 0$ , ապա  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  շարքի զուգամիտության շառավիղը հավասար 1:

Լի:

2997.  $f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n x)$  ( $|q| < 1$ ) ֆունկցիան  $x = 0$  կետի շրջակայքում վերլուծել աստիճանային շարքի:

Ցուցում: Օգտվել  $f(x) = (1 + qx)f(qx)$  նույնությունից:

2998. Դիցուք  $f \in C^\infty(a; b)$  և գոյություն ունի  $M$  թիվ այնպիսին, որ  $|f^{(n)}(x)| \leq M^n$  ( $x \in (a; b), n \in N$ ): Ապացուցել, որ  $(a; b)$  միջակայքի բոլոր կետերում  $f$ -ն անալիալիկ է:

2999. Տրված է  $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$  թվային հաջորդականությունը: Ապացուցել, որ եթե գոյություն ունի  $M$  թիվ, այնպիսին, որ  $|a_n| \leq \frac{M^n}{n!}$  ( $n \in N$ ), ապա

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  ֆունկցիան ողջ թվային առանցքի վրա անալիալիկ է:

3000. Դիցուք՝  $f \in C^\infty[-1; 1]$  և  $f^{(n)}(x) \geq 0$  ( $-1 \leq x \leq 1, n \in Z_+$ ): Ապացուցել, որ  $(-1; 1)$  միջակայքում  $f$ -ն անալիալիկ է:

3001. Ապացուցել, որ եթե ոչ ավելի քան  $m$ -րդ կարգի հանրահաշվական բազմանդամների հաջորդականությունն  $(a; b)$  միջակայքի վրա հավասարաշափ զուգամիտում է  $f$  ֆունկցիային, ապա  $f$ -ը նույնպես ոչ ավելի քան  $m$ -րդ կարգի հանրահաշվական բազմանդամ է:

3002. Ապացուցել Արելի թեորեմի հետևյալ շրջումը. եթե  $a_n \geq 0$  ( $n \in Z_+$ ) և գոյություն ունի  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s$  վերջավոր սահմանը, ապա  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ : Օրինակով համոզվել, որ  $a_n \geq 0$  պայմանն այսաւել էական է:

3003. Ապացուցել, որ եթե  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  շարքի զուգամիաւության շառավիղը 1 է և

$$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n \rightarrow +\infty \quad (-\infty), \text{ ապա } \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = +\infty \quad (-\infty):$$

3004. Դիցուք  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  և  $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  աստիճանային շարքերը,

որոնցում  $a_n \geq 0$ ,  $b_n \geq 0$  ( $n \in Z_+$ ),  $[0;1)$  միջակայքում զուգամեալ են, իսկ  $x=1$  կետում՝ տարամեանալ: Ապացուցել, որ եթե  $a_n \sim b_n$  ( $n \rightarrow \infty$ ), ապա  $f(x) \sim g(x)$  ( $x \rightarrow 1-0$ ):

3005. Ստանալ նախորդ խնդրի հետևյալ ընդհանրացումը. դիցուք  $f(x)$  և  $g(x)$  շարքերը  $[0;1)$  միջակայքում զուգամեալ են,  $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n \geq 0$ ,

$t_n = b_0 + b_1 + \dots + b_n \geq 0$  ( $n \in Z_+$ ), ընդունում՝  $\sum_{n=0}^{\infty} s_n = \sum_{n=0}^{\infty} t_n = +\infty$ : Այդ դեպքում, եթե  $s_n \sim t_n$  ( $n \rightarrow \infty$ ), ապա  $f(x) \sim g(x)$  ( $x \rightarrow 1-0$ ):

3006. Ապացուցել Հարու-Լիբլիուլի հետևյալ բնորնմը. դիցուք  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  շարքի գործակիցները ոչ բացասական են, ընդունում՝ շարքը  $[0;1)$  միջակայքում զուգամեալ: Եթե  $f(x) \sim \frac{1}{1-x}$  ( $x \rightarrow 1-0$ ), ապա  $a_0 + a_1 + \dots + a_n \sim n$  ( $n \rightarrow \infty$ ):

3007.  $K_n \in \mathfrak{R}[-a; a]$  ( $n \in N$ ) ֆունկցիաների հաջորդականությունը կանվանենք մոտարկման միավոր, եթե այն բավարարում է հետևյալ երեք պայմանների:

$$1) \quad K_n(t) \geq 0, \quad t \in [-a; a], \quad n \in N;$$

$$2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-a}^a K_n(t) dt = 1;$$

$$3) \quad \text{ցանկացած } 0 < \delta < a \text{ թվի համար } \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{-\delta < |t| \leq a} K_n(t) = 0:$$

Դիցուք  $f \in C(R)$ : Ապացուցել, որ

$$f_n(x) = \int_{-a}^a f(x+t) K_n(t) dt \quad (n \in N)$$

ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը ցանկացած կոմպակտի վրա հավասարչափ գուգամիալում է  $f(x)$  ֆունկցիային:

**3008.** Սաւուգել, որ  $K_n(t) = \frac{1}{\pi} \Phi_n(t)$  հաջորդականությունը, որտեղ  $\Phi_n(t)$ -ն

Ֆեյերի կորիզն է, մոստարկման միավոր է  $[-\pi; \pi]$ -ում և այդանուց ստանալ Վայերշտրասի երկրորդ թեորեմի ապացույցը:

**3009.** Դիցուք  $f \in \mathcal{R}_1[-\pi; \pi]$  ֆունկցիան  $2\pi$ -պարբերական է և

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx):$$

$$\text{ա) } f(r; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (0 < r < 1) \quad \text{ֆունկցիայի}$$

համար ստանալ

$$f(r; x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(t-x) + r^2} dt$$

ներկայացումը:

$$\text{բ) } \text{Սաւուգել, որ } K_r(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos t + r^2} \quad \text{ֆունկցիան՝ Պուասոնի կորիզը, } [-\pi; \pi] \text{ միջակայքում հանդիսանում է մոստարկման միավոր և ապացուցել, որ ցանկացած } f \in C(R) \text{ } 2\pi\text{-պարբերական ֆունկցիայի համար } f(r; x) \rightrightarrows f(x), \text{ եթե } r \rightarrow 1-0.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists r_0 \in (0; 1) \forall x \in [-\pi; \pi] (r_0 < r < 1 \Rightarrow |f(r; x) - f(x)| < \varepsilon):$$

**3010.** Տրված է՝  $\varphi \in C[0; 1]$ ,  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ : Ընսրել  $c_n$  ( $n \in N$ ) գործակից-ներն այնպես, որ  $K_n(t) = c_n (1-t^2)^n$  հաջորդականությունը  $[-1; 1]$  հասկածում լինի մոստարկման միավոր և համոզվել, որ հաճրահաշվական բազմանդամների  $P_n(x) = \int_0^1 \varphi(t) K_n(x-t) dt$  հաջորդականությունը  $[0; 1]$  հասկածի վրա հավասարաչափ գուգամիալում է  $\varphi(x)$  ֆունկցիային: Այդանուց ստանալ Վայերշտրասի առաջին թեորեմի ապացույցը:

$$\text{Ցուցում: Հիմարկել } f(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in [0; 1] \\ 0, & x \in R \setminus [0; 1] \end{cases} \quad \text{ֆունկցիան և օգտվել 3007 խնդրից:}$$

**3011.** Դիցուք՝  $f \in C[0; 1]$ : Ապացուցել, որ Բեռնշտեյնի բազմանդամների հաջորդականությունը՝

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \quad (n \in Z_+),$$

[0;1] հասկածի վրա հավասարաշափ զուգամիտում է  $f(x)$  ֆունկցիային (Վայերշտրասի առաջին թեորեմի մեջ այլ ապացույց):

Ցուցում: Օգտելով  $\sum_{k=0}^n (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x)$  նույնությունից և ցույց տալ, որ

$$1 = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \text{ նույնության մեջ աջ կադում այն գումարելիների գումարը, որոնց համար-}$$

ները բավարարություն է: }  $|k-nx| > n^{3/4}$  անհավասարությանը, փոքր է  $\frac{1}{4}n^{-\frac{1}{2}}$ -ից:

3012. Դիցուք  $f \in C[a; b]$  ֆունկցիայի բոլոր մոմենտները զրո են.

$$\int_a^b x^n f(x) dx = 0 \quad (n \in Z_+):$$

Ապացուցել, որ  $f = 0$ :

3013. Ապացուցել, որ եթե  $f \in \mathfrak{R}[a; b]$  ֆունկիայի բոլոր մոմենտները զրո են և  $f$ -ն անընդհանուր է:  $\xi \in [a; b]$  կետում, ապա  $f(\xi) = 0$ :

3014. Ապացուցել, որ եթե  $f \in C[0; 2\pi]$  ֆունկչիայի բոլոր եռանկյունաչափական մոմենտները զրո են՝

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx = 0 \quad (n \in Z_+).$$

Ապա  $f = 0$  (եռանկյունաչափական համակարգի լրիվություն):

3015. Դիցուք՝  $f \in C(R_+)$  և  $k_n$ -ը ( $n \in Z_+$ ) դրական սարքերությամբ թվարանական պրոցեսիա է: Ապացուցել, որ եթե

$$I(n) = \int_0^\infty e^{-k_n x} f(x) dx$$

իմաստությամբ  $n = 0$  արժեքի դեպքում զուգամետ է և ցանկացած  $n \in N$  թվի համար  $I(n) = 0$ , ապա  $f = 0$ :

3016. Դիցուք՝  $f \in C[-1; 1]$ : Ապացուցել, որ եթե ցանկացած  $k \in Z_+$  թվի համար

$$\text{ա) } \int_{-1}^1 x^{2k} f(x) dx = 0, \text{ ապա } f -\text{ը կենսության մեջ գունդադիր է:}$$

p)  $\int_{-1}^1 x^{2k+1} f(x) dx = 0$ , ապա  $f$ -ը զույգ ֆունկցիա է:

Զեակերպել և ապացուել նույնային պնդում ֆունկցիայի եռանկյունաշափական մոմենտների վերաբերյալ:

3017.  $f(x) = \ln\left(2 \cos \frac{x}{2}\right)$  ֆունկցիան  $(-\pi; \pi)$  միջակայքում վերլուծել Ֆուրիեի եթե եռանկյունաշափական շարքի: Այստեղից անմիջականորեն ստանալ նաև  $g(x) = -\ln\left(2 \sin \frac{x}{2}\right)$  ֆունկցիայի վերլուծությունը  $(0; 2\pi)$  միջակայքում:

3018. Տրված են  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$  և  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$  եռանկյունաշափական շարքերը, որոնցում  $a_n \downarrow 0$ ,  $b_n \downarrow 0$ : Սատուգել, որ ցանկացած  $K \subset R \setminus \{2\pi k : k \in Z\}$  կոմպակտի վրա շարքերից յուրաքանչյուրը հավասարաշափ գուգամեալ է:

Ապացուցել, որ եթե  $h(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$  ( $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ ) ֆունկցիան  $[-\pi; \pi]$  միջակայքում բացարձակ ինսեգրելի է (Ուիմանի կամ անխական իմաստով), ապա գրված շարքը ներկայացնում է այդ ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարք:

3019. Ապացուցել, որ եթե նախորդ խնդրի պայմաններում  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$  շարքը ( $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$  շարքը) գուգամեալ է, ապա  $h$ -ը ( $g$ -ն) բացարձակ ինսեգրելի է և հետևաբար գրված եռանկյունաշափական շարքը ներկայացնում է իր իսկ գումարի Ֆուրիեի շարք:

3020. Ցույց տալ, որ  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$  շարքը չի հանդիսանում որևէ  $f \in \mathfrak{R}_2[-\pi; \pi]$  ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարք:

3021. Տրված է  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$  եռանկյունաշափական շարքը, որում  $b_n \downarrow 0$ :

Ապացուցել, որ շարքը ցանկացած հասկածի վրա կլինի հավասարաշափ գուգամեալ այն և միայն այն դեպքում, եթե  $n \cdot b_n \rightarrow 0$ :

## Գլուխ 12

### Վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիաներ, Ստիլտեսի ինտեգրալ

Վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիաներ : Տրված  $f: [a; b] \rightarrow R$  ֆունկցիայի և  $[a; b]$  հատվածի ցանկացած  $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  տրման համար (առև զայտ 8) կազմենք  $\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) - f(x_k)$  գումարը: Բայց արտևամենքին համապատասխանող այդպիսի գումարների ճշգրիտ վերին եզրը (վերջավոր կամ անվերջ) կոչվում է  $[a; b]$  հատվածում  $f$  ֆունկցիայի լրիվ վարիացիա: Եթե  $\frac{b}{a}(f) < +\infty$ , ապա  $f$ -ն անվանում են վերջավոր (սահմանափակ) վարիացիայի ֆունկցիա:

$f: [a; \omega] \rightarrow R$  ( $\omega \leq +\infty$ ) ֆունկցիայի լրիվ վարիացիան սահմանվում է  $\frac{\omega}{a}(f) = \lim_{b \rightarrow \omega} \frac{b}{a}(f)$  բանաձևով: Համարնանորեն սահմանվում են  $f$  ֆունկցիայի լրիվ վարիացիաները  $(\omega, b]$  և  $(\omega_1; \omega_2)$  միջակայքերում:

$X$  միջակայքում վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիաների դասը նշանակվում է  $BV(X)$ :

$BV[a; b]$  դասը կամ առ առ ց կ ա ծ ք ը : Ցանկացած  $f, g \in BV[a; b]$  ֆունկցիաների համար՝

$$\text{ա) } \alpha f + \beta g \in BV[a; b] \quad (\alpha, \beta \in R), \text{ ընդ որում } \frac{b}{a}(\alpha f + \beta g) \leq |\alpha| \frac{b}{a}(f) + |\beta| \frac{b}{a}(g);$$

$$\text{բ) } |f| \in BV[a; b], \text{ ընդ որում } \frac{b}{a}(|f|) \leq \frac{b}{a}(f);$$

$$\text{գ) } fg \in BV[a; b], \text{ ընդ որում } \frac{b}{a}(fg) \leq \sup_{a \leq x \leq b} |g(x)| \frac{b}{a}(f) + \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)| \frac{b}{a}(g);$$

$$\text{դ) } \text{եթե } \text{ամենորեք } |g(x)| \geq \delta > 0, \text{ ապա } \frac{1}{g} \in BV[a; b], \text{ ընդ որում } \frac{b}{a}\left(\frac{1}{g}\right) \leq \frac{1}{\delta^2} \frac{b}{a}(g);$$

Եթե  $f \in BV[a; b]$  և  $a < c < b$ , ապա  $[a; c]$  և  $[c; b]$  միջակայքերից յուրաքանչյուրում  $f$ -ը վերջավոր վարիացիայի է, ընդ որում  $\frac{c}{a}(f) + \frac{b}{c}(f) = \frac{b}{a}(f)$ :

**Թեորեմ:** Եթե  $f: [a; b] \rightarrow R$  ֆունկցիան մասնաւոն է, ապա այն վերջավոր վարիացիայի է,

$$\text{ընդ որում } \frac{b}{a}(f) = |f(b) - f(a)|:$$

**Թեորեմ:** Որպեսզի ֆունկցիան արված միջակայքում լինի վերջավոր վարիացիայի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն ներկայացվի որպես երկու անող (չնվազալ) և սահմանափակ

Ֆունկցիաների տարրերություն:

ՈՒ ղ ղ լ ի կ ո ր ե թ թ : Դիցուք  $L$  կորը արված է  $x = \phi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  ( $\alpha \leq t \leq \beta$ ) սպառամեռաբական հավասարություններով:  $L$ -ը կոչվում է ամպլիդաս կրո. Եթե  $\phi$  և  $\psi$  ֆունկցիաներն անընդհատ են:  $[\alpha; \beta]$  հատվածի ցանկացած  $(t_0, t_1, \dots, t_n)$  տրինան համար  $(\phi(t_k), \psi(t_k))$  ( $k = 0, \dots, n$ ) զագարները հաջորդաբար մրացնող բեկալը կոչվում է  $L$  կորին ներգծած բեկալ: Եթե բոլոր այդպիսի բեկալների երկարավույթների ճշգրիտ վերին եզրը վերջավոր թիվ է, ապա այն ընդունում են որպես  $L$  կորի երկարավույն, խոկ կորն անվանում են ուղելի:

Ժորյանի թեորեմը: Որպեսզի  $L$  անընդհատ կորը լինի ուղղելի, անհրաժեշտ է և բավար, որ  $\phi$  և  $\psi$  ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը  $[\alpha; \beta]$  հատվածում անենաւ վերջավոր վարիացիա:

Սա ի լ ա ն ս ի ն ա ն գ ր ա լ : Տրիած են  $f: [\alpha; b] \rightarrow R$  և  $\sigma: [\alpha; b] \rightarrow R$  ֆունկցիաները:  $[\alpha; b]$  հատվածի ցանկացած  $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  սրունան (անս զայիս 8) և ցանկացած  $\xi_i \in \Delta_i = [x_i; x_{i+1}]$  ( $i = 0, 1, \dots, n - 1$ ) կտաների համար կազմենք

$$S_\sigma(f; P, \xi) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta \sigma(x_i)$$

գումարը, որտեղ  $\Delta \sigma(x_i) = \sigma(x_{i+1}) - \sigma(x_i)$ :

Եթե զոյուրյուն ունի  $\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} S_\sigma(f; P, \xi)$  վերջավոր սահմանը ( $\lambda(P)$ -ն  $P$  սրունան արամազիծն է), ապա այն անվանում են  $[a; b]$  հատվածում  $f$  ֆունկցիայի Սախանսի (Ռիմսի-Սոլիսկուսի) ինտեգրալ լառ  $\sigma$ -ի և հշանակում

$$\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} S_\sigma(f; P, \xi) = \int_a^b f(x) d\sigma(x):$$

Այս դեպքում  $f$ -ն անվանում են լառ  $\sigma$ -ի ինտեգրելի:

Հասու  $\sigma$ -ի  $[\alpha; b]$  հատվածում ինտեգրելի ֆունկցիաների դասը հշանակվում է  $\mathfrak{R}_\sigma[a; b]$ :

Թերևած: Եթե  $f \in C[\alpha; b]$  և  $\sigma \in BV[\alpha; b]$ , ապա  $f \in \mathfrak{R}_\sigma[a; b]$ :

Սակայն ինտեգրում: Եթե  $f$  և  $g$  ֆունկցիաներից մեկն  $[\alpha; b]$  հատվածում ինտեգրելի է լառ մյուսի, ապա ճշմարիտ է ինտեգրալ բանաձեռ.

$$\int_a^b f(x) dg(x) = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) df(x):$$

Սախանսի և Ռիմսանի ինտեգրալների կապը: Դիցուք  $f \in \mathfrak{R}[a; b]$ ,  $\varphi \in \mathfrak{R}_1[a; b]$  և

$$\sigma(x) = C + \int_a^x \varphi(t) dt \quad (C \in R, a \leq x \leq b):$$

Այս պայմաններում  $f$ -ն ինտեգրելի է լառ  $\sigma$ -ի և

$$\int_a^b f(x) d\sigma(x) = \int_a^b f(x) \varphi(x) dx:$$

Միջին արժեքի թեորեմը: Դիցուք  $f \in \mathfrak{R}_\sigma[a; b]$  և ամենալրէ  $m \leq f(x) \leq M$ : Եթե  $\sigma$ -ն  $[a; b]$ -ում չնվազագույն է, ապա գոյություն ունի  $\mu \in [m; M]$  թիվ, այնպիսին, որ

$$\int_a^b f(x) d\sigma(x) = \mu[\sigma(b) - \sigma(a)]:$$

Թեորեմ Սակրատսի խնաեղբարպամ սահմանային անցման վերաբերյալ: 1. Դիցուք  $f_n \in C[a; b]$  ( $n \in N$ ) և  $f_n \rightrightarrows f : \text{Ցունկացած } \sigma \in BV[a; b]$  ֆունկցիայի համար

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) d\sigma(x) = \int_a^b f(x) d\sigma(x):$$

2. Դիցուք  $f \in C[a; b]$ , իսկ  $\sigma_n \in BV[a; b]$  ( $n \in N$ ) ֆունկցիաների վարիացիաները սահմանափակված են միևնույն թվով և  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = \sigma(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ): Այս պայմաններում  $\sigma \in BV[a; b]$ , լուր որում՝

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) d\sigma_n(x) = \int_a^b f(x) d\sigma(x):$$

## Ա

**3022.** Ապացուցել, որ եթե  $f$  ֆունկցիան  $[a; b]$  հասվածի վրա մոնուուն է, ապա այն վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիա է և  $\int_a^b (f) = |f(b) - f(a)|$ :

**3023.** Ապացուցել, որ եթե  $f$  ֆունկցիան  $[a; b]$  հասվածի վրա բավարպամ է, Լիշշիցի պայմանին (գոյություն ունի  $K$  հաստատուն, այնպիսին, որ կամայական  $x, y \in [a; b]$  թվերի համար  $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ ), ապա այն վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիա է:

**3024.** Ապացուցել, որ եթե  $f : [a; b] \rightarrow R$  ֆունկցիան ունի սահմանավակածանցյալ, ապա  $f \in BV[a; b]$ :

**3025.** Ապացուցել, որ վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիան սահմանավակ է:

**3026.** Ապացուցել, որ

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{2x}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

անընդհատ և սահմանավակ ֆունկցիան վերջավոր վարիացիայի չէ:

Ցուցում: Դիտարկել  $[0; 1]$  հասվածի 0 <  $\frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1} < \dots < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$  տրոհումների հաջորդականությունը:

**3027.** Դիցուք  $f, g \in BV[a; b]$ : Ապացուցել, որ  $f + g, \alpha f \in BV[a; b]$  ( $\alpha \in R$ ) և

$$\frac{b}{a}V(f+g) \leq \frac{b}{a}V(f) + \frac{b}{a}V(g), \quad \frac{b}{a}(af) = |\alpha| \frac{b}{a}V(f):$$

Ցույց տալու դրեն  $g$ -ն հասաւասուն է, ապա  $\frac{b}{a}V(f+g) = \frac{b}{a}V(f)$ :

**3028.** Դիցուք՝  $f, g \in BV[a; b]$ : Ապացուցել, որ  $f \cdot g \in BV[a; b]$  և

$$\frac{b}{a}V(f \cdot g) \leq \sup_{x \in [a; b]} |f(x)| \frac{b}{a}V(g) + \sup_{x \in [a; b]} |g(x)| \frac{b}{a}V(f):$$

**3029.** Ապացուցել, որ եթե  $g$ -ն  $[a; b]$  հասվածի վրա վերջավոր վարիացիայի

ֆունկցիա է և ամենուրեք  $g(x) \geq \delta > 0$ , ապա  $\frac{1}{g}$ -ն  $[a; b]$ -ի վրա նույնպես

վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիա է, ընդ որում  $\frac{b}{a}V\left(\frac{1}{g}\right) \leq \frac{1}{\delta^2} \frac{b}{a}V(g)$ :

**3030.** Ապացուցել, որ եթե  $f \in BV[a; b]$ , ապա  $|f| \in BV[a; b]$  և  $\frac{b}{a}V(|f|) \leq \frac{b}{a}V(f)$ :

Ծշմարի՞ս է արդյոք հակադարձ պնդումը: Բերել համապատասխան օրինակ: Կասուցել  $f \in BV[a; b]$  ֆունկցիա, որի համար զբար անհավասարությունը խիստ է:

**3031.** Դանել

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1 - x, & 0 < x < 1, \\ 5, & x = 1 \end{cases}$$

Ֆունկցիայի լրիվ վարիացիան  $[0; 1]$  հասվածի վրա:

**3032.** Դանել

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 1, \\ 10, & x = 1, \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$$

Ֆունկցիայի լրիվ վարիացիան  $[0; 2]$  հասվածի վրա:

**3033.** Դանել

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1, \\ 5, & x = 1, \\ x + 3, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Ֆունկցիայի լրիվ վարիացիան  $[0;1]$ ,  $[1;2]$  և  $[0;2]$  հատվածների վրա: Համոզվել, որ

$$\int_0^2 f = \int_0^1 f + \int_1^2 f:$$

3034. Դիցուք  $f$  ֆունկցիան  $[a;b]$  հաստվածի վրա վերջավոր վարիացիայի է և  $a < c < b$ : Ապացուցել, որ

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f:$$

3035. Դիցուք  $f: [a;b] \rightarrow R$  ֆունկցիան  $[a;c]$  և  $[c;b]$  հատվածներից յուրաքանչյուրի վրա ունի վերջավոր լրիվ վարիացիա: Ապացուցել, որ  $f \in BV[a;b]$  և որ

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f:$$

3036. Ապացուցել, որ եթե  $[a;b]$  հաստվածը կարելի է բաժանել վերջավոր թվով հատվածների, որոնցից յուրաքանչյուրի վրա  $f$  ֆունկցիան մոնուտն է, ապա  $f$ -ն  $[a;b]$ -ի վրա վերջավոր վարիացիայի է:

3037. Ապացուցել, որ եթե  $f \in BV[a;\omega)$ , ապա  $g(x) = \int_a^x f$ -ն  $[a;\omega)$ -ի վրա չնվազող և սահմանավակ ֆունկցիա է:

3038. Ապացուցել, որ  $f \in BV[a;b]$  այն և միայն այն դեպքում, եթե գոյություն ունի  $[a;b]$ -ի վրա աճող (չնվազող)  $F$  ֆունկցիա, այնպիսին, որ կամայական  $a \leq x_1 < x_2 \leq b$  բերի համար  $\delta$ -մարիս է

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq F(x_2) - F(x_1)$$

անհավասարությունը:

3039. Ապացուցել, որ  $f \in BV[a;b]$  այն և միայն այն դեպքում, եթե  $f$ -ը ներկայացվում է  $[a;b]$ -ի վրա չնվազող ֆունկցիաների աարբերության տեսքով:

3040. Օգտվելով նախորդ խնդրից՝ ապացուցել, որ վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիաների գումարը, տարբերությունը և արտադրյալը վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիաներ են:

3041. Ապացուցել, որ եթե  $f \in BV[a;+\infty)$ , ապա

$$\int_a^{+\infty} f = \int_a^b f + \int_b^{+\infty} f \quad (a < b):$$

3042. Ապացուցել, որ եթե  $f$  ֆունկցիան  $R$ -ի վրա վերջավոր վարիացիայի է, ապա

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \overset{a}{V}(f) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \overset{a}{V}(f) = 0:$$

3043. Ապացուցել, որ

$$y = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

կորն ուղղելի է:

3044. Ապացուցել, որ

$$y = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

կորն ուղղելի չէ:

\*\*\*

3045. Սալուգել, որ ցանկացած  $c$  հաստատունի համար

$$\int_a^b c d\sigma(x) = c(\sigma(b) - \sigma(a)):$$

3046. Ապացուցել, որ եթե  $f, g \in \mathfrak{R}_\sigma[a; b]$ , ապա  $f \pm g \in \mathfrak{R}_\sigma[a; b]$  և

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] d\sigma(x) = \int_a^b f(x) d\sigma(x) \pm \int_a^b g(x) d\sigma(x):$$

3047. Ապացուցել, որ եթե  $f \in \mathfrak{R}_\sigma[a; b]$ , ապա կամայական  $\alpha, \beta$  թվերի համար  $\alpha f \in \mathfrak{R}_{\beta\sigma}[a; b]$  և

$$\int_a^b \alpha f(x) d[\beta\sigma(x)] = \alpha\beta \int_a^b f(x) d\sigma(x):$$

3048. Ապացուցել, որ եթե  $f \in \mathfrak{R}_\sigma[a; b]$  և  $f \in \mathfrak{R}_\tau[a; b]$ , ապա  $f \in \mathfrak{R}_{\sigma+\tau}[a; b]$  և

$$\int_a^b f(x) d[\sigma(x) + \tau(x)] = \int_a^b f(x) d\sigma(x) + \int_a^b f(x) d\tau(x):$$

3049. Դիցուք՝  $\sigma \in BV[a; b]$  և  $f \in \mathfrak{R}_\sigma[a; b]$  ֆունկցիան սահմանափակ է:  
Ապացուցել, որ

$$\left| \int_a^b f(x) d\sigma(x) \right| \leq M \cdot \overset{b}{V}(\sigma),$$

$$\text{որտեղ } M = \sup_{x \in [a; b]} |f(x)|:$$

3050. Ապացուցել, որ եթե գոյություն ունի  $\int_a^b f d\sigma$  ինտեգրալը, ապա ցանկացած  $c \in (a; b)$  թվի համար գոյություն ունեն  $\int_a^c f d\sigma$  և  $\int_c^b f d\sigma$  ինտեգրալները, ընդ որում՝

$$\int_a^b f(x) d\sigma(x) = \int_a^c f(x) d\sigma(x) + \int_c^b f(x) d\sigma(x):$$

3051. Սաւուզել, որ եթե

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0, \\ 1, & 0 < x \leq 1 \end{cases} \quad \text{և} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

ապա

$$\int_{-1}^0 f(x) dg(x) = \int_0^1 f(x) dg(x) = 0,$$

իսկ  $\int_{-1}^1 f(x) dg(x)$ -ը գոյություն չունի:

3052. Ապացուցել, որ եթե  $f \in \mathfrak{R}_g[a; b]$ , ապա  $g \in \mathfrak{R}_f[a; b]$ , ընդ որում ճշմարիտ է մասնակի ինտեգրման հետևյալ բանաձևը.

$$\int_a^b g(x) df(x) = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) dg(x):$$

3053. Ապացուցել, որ եթե  $f \in C[a; b]$ , իսկ  $\sigma(x)$ -ն  $[a; b]$ -ի վրա ունի Ոփմանի ինաստով ինտեգրելի ածանցյալ, ապա  $f \in \mathfrak{R}_\sigma[a; b]$ , ընդ որում

$$\int_a^b f(x) d\sigma(x) = \int_a^b f(x) \sigma'(x) dx :$$

3054. ճշմարի՞ւ է արդյոք, որ  $\mathfrak{R}_\sigma[a; b]$  դասի ցանկացած ֆունկցիա սահմանավորակ է: Բերել համապատասխան օրինակ:

3055. Դիցուք  $\sigma$ -ն աճող է  $[a; b]$  հասկածի վրա: ճշմարի՞ւ է արդյոք, որ  $\mathfrak{R}_\sigma[a; b]$  դասի ցանկացած ֆունկցիա սահմանավորակ է:

3056. Դիցուք՝  $\sigma \in C^1[a; b]$  և  $\sigma'(x) \neq 0$  ( $x \in [a; b]$ ): Ապացուցել, որ  $\mathfrak{R}_\sigma[a; b]$  դասի ցանկացած ֆունկցիա սահմանավորակ է:

3057. Դիցուք  $f : [a; b] \rightarrow R$  ֆունկցիան  $x = c \in [a; b]$  կետում անբնդիալ է և

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0: \end{cases}$$

Ապացուցել, որ

$$\int_a^b f(x) d\sigma(x-c) = f(c):$$

3058. Դիցուք՝  $f \in C[a; b]$ , իսկ  $g$ -ն  $(a; c_1), (c_1; c_2), \dots, (c_n; b)$  միջակայքերից յուրաքանչյուրի վրա, որտեղ  $a < c_1 < c_2 < \dots < c_n < b$ , հաստատուն է:

Ապացուցել, որ

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dg(x) &= f(a)[g(a+0) - g(a)] + \\ &+ \sum_{k=1}^n f(c_k)[g(c_k+0) - g(c_k-0)] + f(b)[g(b) - g(b-0)]: \end{aligned}$$

Հաշվել ինտեգրալ (3059-3062).

$$3059. \int_{-1}^1 x^2 d \operatorname{sgn} x :$$

$$3060. \int_0^2 x d[x] :$$

$$3061. \int_{-1}^3 x dg(x), \text{ որտեղ } g(x) = \begin{cases} 0, x = -1, \\ 1, -1 < x < 2, \\ -1, 2 \leq x \leq 3 : \end{cases}$$

$$3062. \int_0^2 x^2 dg(x), \text{ որտեղ } g(x) = \begin{cases} -1, 0 \leq x < 0,5, \\ 0, 0,5 \leq x \leq 1,5, \\ -2, 1,5 < x \leq 2 : \end{cases}$$

## Բ

Ե բազմությունը կոչվում է հաշվելի, եթե գոյություն ունի վախճառքեր ֆունկիա, որը  $E$ -ի արտապատկերում է բնական թվերի  $N$  բազմության վրա:

3063. Ապացուցել, որ  $Z_+$  և  $Z_-$  բազմություններից յուրաքանչյուրը հաշվելի է:

3064. Ցույց տալ, որ բնական զույգ թվերի և կենսա թվերի բազմությունները հաշվելի են:

3065. Ապացուցել, որ

ա) հաշվելի բազմության ցանկացած ենթաբազմություն վերջավոր է կամ հաշվելի;

բ) վերջավոր և հաշվելի բազմությունների միավորումը հաշվելի է;

գ) երկու հաշվելի բազմությունների միավորումը հաշվելի է;

դ) ամբողջ թվերի  $Z$  բազմությունը հաշվելի է:

3066. Ապացուցել, որ ցանկացած անվերջ բազմություն պարունակում է հաշվելի նմբարագմություն:

3067. Ստուգել, որ  $J(p, q) = \frac{(p+q)(p+q+1)}{2} + p$ ,  $p, q \in \mathbb{Z}_+$ , ֆունկցիան

$Z_+ \times Z_+$  բազմությունը վոլյումիարժեք արտապատճերում է  $Z_+$ -ի վրա:

3068. Ապացուցել, որ ցանկացած երկու հաշվելի բազմությունների դեկարտյան արտադրյալը հաշվելի է:

3069. Ապացուցել, որ վերջավոր կամ հաշվելի բազմություններից կազմված հաշվելի ընտանիքի միավորումը վերջավոր է կամ հաշվելի:

3070. Ցույց տալ, որ սացիոնալ բվերի բազմությունը հաշվելի է:

3071. Ապացուցել, որ բվային առանցքի վրա զույգ առ զույգ չհասվող բաց միջակայքերի ցանկացած ընտանիք վերջավոր է կամ հաշվելի:

3072. Ապացուցնել, որ  $[0; 1]$  հասվածը հաշվելի չէ:

3073. Դիցուք  $f$  ֆունկցիան  $[a; b]$  հասվածի վրա չնվազող է և  $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a; b)$ : Ապացուցել

$$[f(a+0) - f(a)] + \sum_{k=1}^n [f(x_k+0) - f(x_k-0)] + [f(b) - f(b-0)] \leq f(b) - f(a)$$

անհավասարությունը:

3074. Ապացուցել, որ  $[a; b]$  հասվածի վրա չնվազող  $f$  ֆունկցիայի խզման կետերի բազմությունը վերջավոր է կամ հաշվելի: Ցույց տալ, որ եթե  $x_1, x_2, \dots \in (a; b)$  կետերը  $f$ -ի խզման կետերն են, ապա

$$[f(a+0) - f(a)] + \sum_k [f(x_k+0) - f(x_k-0)] + [f(b) - f(b-0)] \leq f(b) - f(a)$$

3075. Դիցուք  $f$  ֆունկցիան  $[a; b]$  հասվածի վրա աճող է:

$$s(x) = [f(a+0) - f(a)] + \sum_{x_k < x} [f(x_k+0) - f(x_k-0)] + \\ + [f(x) - f(x-0)], \text{ եթե } a < x \leq b \text{ և } s(a) = 0$$

ֆունկցիան կոչվում է  $f$ -ի բոլիչքների ֆունկցիա:

Ապացուցել, որ  $f(x) - s(x)$  ֆունկցիան  $[a; b]$ -ի վրա չնվազող է և անընդհատ:

3076. Ապացուցել, որ վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիայի խզման կետերի բազմությունը վերջավոր է կամ հաշվելի:

3077. Դիցուք  $f \in BV[a; b]$ : Ապացուցել, որ եթե  $f$ -ն անընդհատ է  $x_0$  կետում, ապա այդ կետում անընդհատ է նաև  $\overset{x}{\underset{a}{V}}(f)$  ֆունկցիան:

3078. Ապացուցել, որ վերջավոր վարիացիայի անընդհատ ֆունկցիան կարելի ներկայացնել երկու ֆունկցիաների սարքերության տեսքով, որոնցից յուրաքանչյուրն անընդհատ է և չնվազող:

3079. Դիցուք՝  $f \in C[a; b] \cap BV[a; b]$ :  $[a; b]$  հատվածի  $P = (x_0, \dots, x_n)$  տրաման համար նշանակենք

$$V(f; P) = \sum_{k=1}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|, \quad \Omega(f; P) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k,$$

որտեղ  $\omega_k$ -ն  $f$ -ի սահանումն է  $[x_k; x_{k+1}]$ -ի վրա: Ապացուցել, որ

$$\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} V(f; P) = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \Omega(f; P) = \overset{b}{\underset{a}{V}}(f),$$

որտեղ  $\lambda(P)$ -ն  $P$  սրուման տրամագիծն է:

3080. Դիցուք  $f$ -ն  $[a; b]$ -ում դիֆերենցելի ֆունկցիա է և  $f' \in \mathfrak{R}_1[a; b]$ : Ապացուցել, որ  $f \in BV[a; b]$ , ընդ որում՝

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \int_a^b |f'(x)| dx :$$

3080.1. Դիցուք  $\varphi \in \mathfrak{R}_1[a; b]$  և  $f(x) = \int_a^x \varphi(t) dt$ : Ապացուցել, որ  $f \in BV[a; b]$  և

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \int_a^b |\varphi(t)| dt :$$

3081. Դիցուք՝  $f \in C^1[0; 1]$ : Ապացուցել անհավասարությունը.

$$\int_0^1 |f(x)| dx \leq \max \left\{ \left| \int_0^1 f(x) dx \right|, \int_0^1 |f'(x)| dx \right\} :$$

3082. Դիցուք  $F$ -ն  $[a; b]$  հատվածի վրա որոշված ֆունկցիաների անվերջ ընտանիք է: Ապացուցել, որ եթե ընտանիքի բոլոր ֆունկցիաները սահմանափակված են միևնույն բառով ( $F$  ընտանիքը հավասարաշափ սահմանափակ է), ապա ցանկացած  $E \subset [a; b]$  հաշվեի բազմության համար  $F$  ընտանիքից կարելի է ընտրել ֆունկցիաների  $f_n$  հաջորդականություն, որը  $E$ -ի յուրաքանչյուր կետում գուգամեալ է:

3083. Ապացուցել, որ եթե  $[a; b]$  հատվածի վրա չնվազող ֆունկցիաների  $F = \{f\}$  անվերջ ընտանիքը հավասարաշափ սահմանափակ է, ապա նրանից կարելի է ընտրել ֆունկցիաների  $f_n$  հաջորդականություն, որն  $[a; b]$ -ի վրա գուգամիառ է չնվազող ֆունկցիայի:

**3084.** Դիցուք  $F$ -ն  $[a; b]$  հասկածի վրա որոշված ֆունկցիաների անվերջ ընտանիք է: Եթե ընտանիքի բոլոր ֆունկցիաները և նրանց լրիվ վարիացիաները սահմանափակված են միևնույն թվով՝

$$|f(x)| \leq K, \quad \frac{b}{a} V(f) \leq K \quad (f \in F),$$

ապա  $F$  ընտանիքից կարելի է ընտրել ֆունկցիաների  $f_n$  հաջորդականություն, որն  $[a; b]$ -ի վրա գուգամիառում և վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիայի ( $\mathcal{L}_b$ ի ընարքության սկզբունք):

**3085.** Ապացուցել, որ  $f \in BV(R)$  այն և միայն այն դեպքում, եթե այն ներկայացվում և երկու չնվազող և սահմանափակ ֆունկցիաների սարքերությամբ:

**3086.** Ապացուցել, որ եթե  $f \in BV(R)$ , ապա զոյություն ունեն  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  և  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  վերջավոր սահմանները:

**3087.** Դիցուք  $F$ -ի  $R$ -ի վրա որոշված ֆունկցիաների անվերջ ընտանիք է: Եթե ընտանիքի բոլոր ֆունկցիաները և նրանց լրիվ վարիացիաները սահմանափակված են միևնույն թվով՝

$$|f(x)| \leq K, \quad \frac{+\infty}{-\infty} V(f) \leq K \quad (f \in F),$$

ապա  $F$  ընտանիքից կարելի է ընտրել ֆունկցիաների  $f_n$  հաջորդականություն, որը  $R$ -ի վրա գուգամիառում է վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիայի:

**3088.** Ապացուցել, որ եթե  $f \in BV[0; 1]$ , ապա  $F(x) = f(ax + b)$  ( $a > 0$ ) ֆունկցիան  $\left[-\frac{b}{a}; \frac{1-b}{a}\right]$  հասկածի վրա վերջավոր վարիացիայի և  $\frac{+\infty}{-\infty} V(F) = V(f)$ :

**3089.** Դիցուք՝  $f \in BV[a; b]$  և  $\frac{b}{a} V(f) = f(b) - f(a)$ : Ապացուցել, որ  $f$ -ը չնվազող ֆունկցիա է:

Ֆունկցիան ներկայացնել երկու չնվազող ֆունկցիաների սարքերության սեպով (3090-3092).

**3090.**  $\cos^2 x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ :

**3091.**  $\sin x$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$ :

**3092.**  $f(x) = \begin{cases} -x^2, & 0 \leq x < 1; \\ 0, & x = 1; \\ 1, & 1 < x \leq 2: \end{cases}$

\*\*\*

3093. Դիցուք  $f : [a; b] \rightarrow R$  ֆունկցիան սահմանավակ է, իսկ  $\sigma : [a; b] \rightarrow R$ -ը՝ չնվազուլ:  $[a; b]$  հասկածի  $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  արտիման համար

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} m_k (\sigma(x_{k+1}) - \sigma(x_k)), \quad S = \sum_{k=0}^{n-1} M_k (\sigma(x_{k+1}) - \sigma(x_k))$$

գումարները, որտեղ  $m_k = \inf_{x \in [x_k; x_{k+1}]} f(x)$ ,  $M_k = \sup_{x \in [x_k; x_{k+1}]} f(x)$ , կոչվում են

Դարրու-Ստիլտեսի համապատասխանարար ստորին և վերին գումարներ:

Ապացուցել, որ  $f \in \mathfrak{R}_\sigma[a; b]$  այն և միայն այն դեպքում, եթե

$$\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} (S - s) = 0,$$

որտեղ  $\lambda(P)$ -ն  $P$  արտիման սրամազիծն է:

3094. Ապացուցել, որ եթե  $f \in \mathfrak{R}[a; b]$ ,  $\varphi \in \mathfrak{R}_1[a; b]$  և  $g(x) = \int_a^x \varphi(t) dt$  ( $a \leq x \leq b$ ), ապա  $f \in \mathfrak{R}_g[a; b]$  և

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^b f(x) \varphi(x) dx:$$

3095. Դիցուք  $u, v \in \mathfrak{R}_1[a; b]$  և

$$U(x) = U(a) + \int_a^x u(t) dt, \quad V(x) = V(a) + \int_a^x v(t) dt \quad (a \leq x \leq b):$$

Ապացուցել մասերով ինտեղման բանաձևի հետևյալ ընդհանրացումը՝

$$\int_a^b U(x) v(x) dx = U(x) V(x) \Big|_a^b - \int_a^b V(x) u(x) dx:$$

3096. Դիցուք  $f \in C[a; b]$  և  $g$ -ն  $[a; b]$ -ի վրա ամենուրեք, բացի զույն վերջավոր թվով կետերից, ունի վերջավոր  $g'(x)$  ածանցյալ, որն  $[a; b]$ -ի վրա ինտեգրելի է:

Ապացուցել, որ եթե  $c_1, c_2, \dots, c_n$  կետերը  $(a; b)$ -ում  $g$ -ի լսզման կետերն են, ապա  $f \in \mathfrak{R}_g[a; b]$  և

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^b f(x) g'(x) dx + f(a)[g(a+0) - g(a)] +$$

$$+ \sum_{k=1}^n [f(c_k)[g(c_k+0) - g(c_k-0)] + f(b)[g(b) - g(b-0)]]:$$

Հաշվել ինստեղուալը (3097-3101).

$$3097. \text{a)} \int_{-2}^2 x d\sigma(x); \quad \text{b)} \int_{-2}^2 x^2 d\sigma(x); \quad \text{c)} \int_{-2}^2 (x^3 + 1) d\sigma(x).$$

$$\sigma(x) = \begin{cases} x + 2, & -2 \leq x \leq -1; \\ 2, & -1 < x < 0; \\ x^2 + 3, & 0 \leq x \leq 2; \end{cases}$$

$$3098. \int_0^\pi \sin x d\sigma(x), \quad \sigma(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}; \\ 2, & x = \pi, x = \frac{\pi}{2}; \\ x - \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2} < x < \pi; \end{cases}$$

$$3099. \int_{-\pi}^{\pi} (x+2) d(e^x \operatorname{sgn} \sin x); \quad 3100. \int_0^{\pi} (x-1) d[(\cos x) \operatorname{sgn} x];$$

$$3101. \int_0^3 x d([x] - x);$$

3102. Ապացուցել, որ եթե  $f : [a; b] \rightarrow R$  ֆունկցիան սահմանափակ է, իսկ  $\sigma$  ֆունկցիան՝  $c$  կետում ( $a < c < b$ ) անընդհատ, ապա  $\int_a^c f(x) d\sigma(x)$  և  $\int_c^b f(x) d\sigma(x)$  ինստեղուալների գոյությունից հետևում է  $\int_a^b f(x) d\sigma(x)$  ինստեղուալի գոյությունը, ընդ որում

$$\int_a^b f(x) d\sigma(x) = \int_a^c f(x) d\sigma(x) + \int_c^b f(x) d\sigma(x);$$

3103. Ապացուցել, որ եթե  $f : [a; b] \rightarrow R$  և  $\sigma : [a; b] \rightarrow R$  ֆունկցիաները  $c$  ( $a < c < b$ ) կետում խզվում են, ապա  $f$ -ն ըստ  $\sigma$ -ի ինստեղերի չէ: \*

3104. Ապացուցել, որ եթե  $\sigma$ -ն  $[a; b]$  հատվածի վրա չնվազող ֆունկցիա է և  $f, g \in \mathfrak{R}_\sigma[a; b]$ , ապա

$$\left( \int_a^b f(x) g(x) d\sigma(x) \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) d\sigma(x) \cdot \int_a^b g^2(x) d\sigma(x);$$

3105. Ապացուցել, որ եթե  $\sigma \in BV[a; b]$ ,  $f, g \in \mathfrak{R}_\sigma[a; b]$  և գոյություն ունի  $c > 0$  թիվ այնպիսին, որ  $|g(x)| \geq c$  ( $a \leq x \leq b$ ), ապա  $\frac{f}{g} \in \mathfrak{R}_\sigma[a; b]$ :

3106. Ապացուցել միջին արժեքի առաջին թեորեմը. եթե  $f$ -ն  $[a; b]$  հատվածի վրա անընդհատ է, իսկ  $\sigma$ -ն՝ աճող, ապա գոյություն ունի  $\xi \in [a; b]$  կետ, այնպիսին, որ

$$\int_a^b f(x) d\sigma(x) = f(\xi)[\sigma(b) - \sigma(a)]:$$

3107. Ապացուցել միջին արժեքի երկրորդ թեորեմը. եթե  $f, \sigma \in C[a; b]$ ,  $f$ -ը մոնուատ է, իսկ  $\sigma$ -ն՝ վերջավոր վարիացիայի, ապա գոյություն ունի  $\xi \in [a; b]$  կետ, այնպիսին, որ

$$\int_a^b f(x) d\sigma(x) = f(a)[\sigma(\xi) - \sigma(a)] + f(b)[\sigma(b) - \sigma(\xi)]:$$

3108. Դիցուք՝  $f, \varphi \in C[a; b]$  և  $[a; b]$  հատվածի վրա  $\varphi$ -ն աճող է: Ապացուցել, որ

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi^{-1}(y)) dy:$$

3109. Դիցուք՝  $\sigma \in BV[a; b]$  և  $f_n \in C[a; b]$  ( $n \in N$ ) հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամիտում է  $f$  ֆունկցիային: Ապացուցել, որ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) d\sigma(x) = \int_a^b f(x) d\sigma(x):$$

3110. Դիցուք՝  $f \in C[a; b]$ ,  $\sigma_n(x) \rightarrow \sigma(x)$  ( $x \in [a; b]$ ) և  $\sup_n V_a^b(\sigma_n) < +\infty$ :

Ապացուցել, որ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) d\sigma_n(x) = \int_a^b f(x) d\sigma(x) \quad (\text{Հելիի թեորեմ}):$$

3111. Դիցուք  $f_n \in C[a; b]$ ,  $\sigma_n \in BV[a; b]$  ( $n \in N$ ): Ապացուցել, որ եթե  $f_n \rightarrow f$ ,  $\sigma_n(x) \rightarrow \sigma(x)$  ( $x \in [a; b]$ ) և  $\sup_n V_a^b(\sigma_n) < +\infty$ , ապա

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) d\sigma_n(x) = \int_a^b f(x) d\sigma(x):$$

3112. Դիցուք  $R_+$ -ի վրա սորված ֆունկցիաների  $\sigma_n$  հաջորդականությունը բավարարում է

$$\sup_{n \rightarrow \infty} V(\sigma_n) < +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = \sigma(x) \quad (x \in R_+)$$

պայմաններին: Ապացուցել, որ եթե  $f$ -ն  $R_+$ -ի վրա անընդհատ և սահմանափակ ֆունկցիա է և  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , ապա

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f(x) d\sigma_n(x) = \int_0^{+\infty} f(x) d\sigma(x):$$

Օրինակով համոզվել, որ  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  պայմանն էական է:

3113. Ապացուցել, որ եթե  $\varphi$  և  $\psi$  ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրն  $[\alpha; \beta]$  հասվածի վրա ունի սահմանափակ ածանցյալ, ապա  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  ( $\alpha \leq t \leq \beta$ ) կորն ուղղելի է:

3114. Սառուցել, որ ա)  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ ; բ)  $x = \cos 2t$ ,

$$y = \sin 2t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi; \quad \text{գ) } x = \cos\left(2\pi t \sin \frac{1}{t}\right), \quad y = \sin\left(2\pi t \sin \frac{1}{t}\right), \quad 0 < t \leq 2\pi,$$

$x(0) = 1$ ,  $y(0) = 0$  կորերից յուրաքանչյուրը ղեկարայան հարթության վրա ներկայացնում է. Կետերի միևնույն  $\{(x(t), y(t)): 0 \leq t \leq 2\pi\}$  բազմությունը, սակայն դրանցից առաջին երկուսն ուղղելի են և ունեն համապատասխանաբար  $2\pi$  և  $4\pi$  երկարություն, իսկ երրորդն ուղղելի չեն:

## Q

3115. Դիցուք  $(a; b)$  միջակայքի վրա սորված  $f$  ֆունկցիայի համար այդ միջակայքի յուրաքանչյուր կես լոկալ մինիմումի կետ է: Ապացուցել, որ  $f$ -ի արժեքների բազմությունը վերջավոր է կամ հաշվելի:

3116. Դիցուք  $f : [a; b] \rightarrow R$  ֆունկցիան  $(a; b)$  միջակայքի յուրաքանչյուր կեսում ունի միակողմանի սահմաններ: Ապացուցել, որ  $f$ -ի խզման կետերի բազմությունը վերջավոր է կամ հաշվելի:

3117. Կամայական  $E \subset R$  հաշվելի բազմության համար կառուցել աճող ֆունկցիա, որի խզման կետերի բազմությունը համընկնում է  $E$ -ին:

3118. Դիցուք՝  $f \in BV[0;1]$ ,  $\varphi \in C[\alpha; \beta]$  ֆունկցիան աճող է, ընդ որում՝  $\varphi(\alpha) = 0$ ,  $\varphi(\beta) = 1$ : Ապացուցել, որ  $F(x) = f(\varphi(x))$  ֆունկցիան  $[\alpha; \beta]$ -ի վրա վերջավոր վարիացիայի է և  $\int_{\alpha}^{\beta} F(t) dt = \int_0^1 f(t) dt$ :

3119. Ծշմարիս է՝ արդյոք, որ

ա) Վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիաների հավասարաչափ զուգամետ հաջորդականության սահմանը Վերջավոր վարիացիայի է;

բ) Եթե Վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիաների հավասարաչափ զուգամետ  $g_n$  հաջորդականության  $g$  սահմանը Վերջավոր վարիացիայի է, ապա  $\lim_{n \rightarrow \infty} V(g_n) = V(g)$ :

Բերել համապատասխան օրինակներ:

3120. Ապացուցել, որ եթե  $f \in C[a; b]$  և  $|f| \in BV[a; b]$ , ապա  $f \in BV[a; b]$  և  $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b |f(t)| dt$  (այս խնդիր 3030):

3121. Դիցուք՝  $f \in BV[a; b]$ : Հավասարումների  $f(x) - f(a) = p_0(x) - q_0(x)$  և  $\int_a^x f(t) dt = p_0(x) + q_0(x)$  համակարգի որոշվող  $p_0$  և  $q_0$  ֆունկցիաները կոչվում են  $f$  ֆունկցիայի համապատասխանաբար դրական և բացասական վարիացիայի ֆունկցիաներ: Սաստիգ, որ  $p_0$ -ն և  $q_0$ -ն չնվազող ֆունկցիաներ են, ընդ որում  $p_0(a) = q_0(a) = 0$ : Ապացուցել այդ ֆունկցիաների հետևյալ կրստնմալ հասկությունը. Եթե  $p$ -ն և  $q$ -ն  $[a; b]$ -ում չնվազող ֆունկցիաներ են և  $f = p - q$ , ապա

$$\int_a^b p(t) dt \geq \int_a^b p_0(t) dt, \quad \int_a^b q(t) dt \geq \int_a^b q_0(t) dt:$$

3122. Դիցուք՝  $g \in \mathfrak{R}[a; b]$ ,  $g^+(t) = \max\{g(t), 0\}$ ,  $g^-(t) = -\min\{g(t), 0\}$  և  $f(x) = \int_a^x g(t) dt$ : Ապացուցել, որ  $f \in BV[a; b]$  և որ հետևյալ ֆունկցիաները  $f$  ֆունկցիայի համապատասխանաբար լրիվ, դրական և բացասական վարիացիայի ֆունկցիաներն են.

$$\int_a^x f(t) dt = \int_a^x |g(t)| dt, \quad p_0(x) = \int_a^x g^+(t) dt, \quad q_0(x) = \int_a^x g^-(t) dt:$$

3123. Ապացուցել, որ  $E \subset [a; b]$  բազմության

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E; \\ 0, & x \in [a; b] \setminus E \end{cases}$$

բնութագրիչ ֆունկցիան վերջավոր վարիացիայի է այն և միայն այն դեպքում, եթե  $E$ -ն ունի վերջավոր թվով եզրային կետեր:

3124. Կառուցել անընդհատ և վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիա, որը ոչ մի  $\alpha > 0$  թվի համար չի բավարարում Լիպշչիցի  $\alpha$  պայմանին (այս խնդիր 2967):

3125. Կառուցել  $Lip_\alpha[a; b]$  ( $0 < \alpha < 1$ ) դասին պատկանող ֆունկցիա, որի լրիվ վարիացիան վերջավոր չէ (այս խնդիր 2967):

3126.  $\alpha$ -ի և  $\beta$ -ի համար արժեքների դեպքում  $f(x) = x^\alpha \sin \frac{1}{x^\beta}$  ֆունկցիան  $(0; 1]$  միջակայրում կունենա վերջավոր վարիացիա:

3127. Դիցուք՝  $f \in BV[a; b]$  և  $x_0 \in (a; b)$ : Գտնել անհրաժեշտ և բավարար պայման, որի դեպքում  $x_0$  կետում  $f$ -ի արժեքը վտխելով հնարավոր լինի  $f$ -ի վարիացիան վտքրացնել:

3128. Դիցուք՝  $f_n \in BV[a; b]$  և ցանկացած  $\varepsilon > 0$  թվի համար գոյություն ունի  $n_0$  բնական թիվ, այնպիսին, որ  $\lim_{n \rightarrow \infty} V(f_n - f_m) < \varepsilon$ , եթե  $m, n \geq n_0$ :

ա) Ապացուցել, որ գոյություն ունի  $f \in BV[a; b]$  ֆունկցիա, այնպիսին, որ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(f_n - f) = 0 :$$

բ) Համոզվել, որ  $f$ -ը միակը չէ:

գ) Ապացուցել, որ ցանկացած այդպիսի երկու ֆունկցիա իրարից տարբերվում են հաստատուն գումարելիով:

դ) Ապացուցել, որ եթե  $f_n$  հաջորդականությունն  $[a; b]$  հաստվածի առնընդական մեկ կետում զուգամետ է, ապա  $f_n$ -ը  $[a; b]$ -ի վրա հավասարաշավի զուգամետ է:

3129. Դիցուք  $R_+$ -ի վրա որոշված ֆունկցիաների  $\sigma_n$  հաջորդականությունը բավարարում է

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_n V(\sigma_n) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = \sigma(x) \quad (x \in R_+)$$

պայմաններին: Ապացուցել, որ եթե  $f$ -ն  $R_+$ -ի վրա անընդհատ և սահմանափակ ֆունկցիա է, ապա

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f(x) d\sigma_n(x) = \int_0^{\infty} f(x) d\sigma(x):$$

3130. Դիցուք՝  $\sigma \in BV[a; b]$  և  $f \in C[a; b]$ : Ապացուցել, որ  $\int_a^x f(t) d\sigma(t)$  ֆունկցիան վերջավոր վարիացիայի  $[a; b]$ -ում և  $\sigma$ -ի անընդհատության կետերում՝ անընդհատ:

3131. Դիցուք՝  $f, g \in C[a; b]$ ,  $\sigma \in BV[a; b]$  և  $\tau(x) = \int_a^x f(x) d\sigma(x)$ :

Ապացուցել, որ

$$\int_a^b g(x) d\tau(x) = \int_a^b f(x) g(x) d\sigma(x):$$

3132. Դիցուք  $\sigma \in BV[a; b]$  և  $v(x) = \int_a^x (\sigma)$ : Ապացուցել, որ ցանկացած սահմանավակ ֆունկցիայի համար հետևյալ երեք պնդումները համարժեք են.

1.  $f \in \mathcal{R}_\sigma[a; b]$ ;

2.  $\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega_i(f) [\sigma(x_i) - \sigma(x_{i-1})] = 0$ ;

3.  $\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega_i(f) (v(x_i) - v(x_{i-1})) = 0$ ;

որտեղ  $\lambda(P)$ -ն  $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  արողման արամագիծն է, իսկ  $\omega_i(f)$ -ն  $f$ -ի տասանումն է  $[x_{i-1}; x_i]$  հասկածի վրա:

3133. Դիցուք՝  $\sigma \in BV[a; b]$  և  $v(x) = \int_a^x (\sigma)$ : Ապացուցել, որ  $\mathcal{R}_\sigma[a; b] = \mathcal{R}_v[a; b]$ :

3134. Դիցուք  $\sigma \in BV[a; b]$  և  $f, g \in \mathcal{R}_\sigma[a; b]$ : Ապացուցել, որ  $|f|, f \cdot g, \max\{f, g\} \in \mathcal{R}_\sigma[a; b]$ :

3135. Դիցուք՝

$$\tau(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

$x_n$ -ը  $(a; b)$  միջակայքի իրարից տարբեր կետերի հաջորդականություն է,

$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < +\infty$  և  $\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \tau(x - x_n)$  ( $a \leq x \leq b$ ): Ապացուցել, որ

ա)  $\sigma$ -ն  $x_n$ -երից տարբեր ցանկացած կետում անընդհատ է;

բ)  $\sigma \in BV[a; b]$ ;

գ) ցանկացած  $f \in C[a; b]$  ֆունկցիայի համար

$$\int_a^b f(x) d\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f(x_n):$$

3136. Դիցուք՝  $f \in C[a; b] \cap \mathfrak{R}_{\sigma}[a; b]$ : Ապացուցել, որ եթե  $\sigma$ -ի արժեքը վորխվի  $(a; b)$ -ի որևէ կետում, ապա  $\int_a^b f(x) d\sigma(x)$  ինստրումենտի արժեքը չի վորխվի: Կվորխվի՝ արդյոք ինստրումենտը, եթե  $\sigma$ -ի արժեքը վորխվի  $[a; b]$ -ի ծայրակետերում:

3137. Ապացուցել, որ եթե  $f \in BV[0; 2\pi]$ , ապա

$$\left| \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \right| \leq \frac{1}{n} V(f) \quad (n \in N):$$

3138. Ապացուցել, որ եթե  $f \in BV[0; 2\pi]$ , ապա

$$\left| \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \right| \leq \frac{2}{n} V(f) \quad (n \in N).$$

իսկ եթե նաև  $f(0) = f(2\pi)$ , ապա

$$\left| \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \right| \leq \frac{1}{n} V(f) \quad (n \in N):$$

3139. Ապացուցել, որ եթե  $0 < h < \pi$  և  $f \in BV[0; h]$ , ապա

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^h f(x) \frac{\sin px}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2} f(+0):$$

3140. Դիցուք՝  $f \in BV[-\pi; \pi]$ : Ապացուցել, որ  $f$ -ի Ֆուրիեի եռանկյունաշափական շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունը հավասարաչափ սահմանափակ է:

3141. Ապացուցել, որ եթե  $f \in BV[-\pi; \pi]$ , ապա  $f$ -ի Ֆուրիեի շարքն  $x$  կետում գուգամիառն է  $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$  թվին (Ժորդանի հայտանիշ):

3142. Դիցուք՝  $f \in \mathfrak{R}_1[-\pi; \pi]$  և  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ -ը  $f$ -ի Ֆուրիեի եռանկյունաշափական շարքն է:

$$\text{ա) Սսուցել, որ } F(x) = \int_0^x \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt \text{ ֆունկցիան } [-\pi; \pi] \text{ հաս-}$$

վածում անընդհատ և վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիա է, ընդ որում՝  $F(-\pi) = F(\pi)$ :

բ) Ապացուցել, որ  $F$ -ը  $[-\pi; \pi]$ -ում վերլուծվում է հավասարաշափ գու-  
զամես Ֆուրիեի շարքի.  $F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$ :

գ)  $F$  և  $f$  ֆունկցիաների Ֆուրիեի գործակիցների միջև ստանալ

$$\frac{A_0}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}, \quad A_n = -\frac{b_n}{n}, \quad B_n = \frac{a_n}{n} \quad (n \in N) \text{ կապը:}$$

դ) Համոզվել, որ անկախ  $f$ -ի Ֆուրիեի շարքի գուգամիայթունից,  
ճշմարիս է անդամ առ անդամ ինսեղոման հետևյալ բանաձևը.

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{a_0}{2} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (a_n \cos nt + b_n \sin nt) dt :$$

ե) Բերել թվային առանցքի վրա գուգամես եռանկյունաչափական  
շարքի օրինակ, որը  $\Re_1 [-\pi; \pi]$  դասի ոչ մի ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը չէ:

**3143. Դիցուք՝  $\sigma \in BV[0;1]$  և  $f \in C[0;2]$ : Ապացուցել, որ**

$$F(x) = \int_0^1 f(x+t) d\sigma(t)$$

ֆունկցիան  $[0;1]$ -ի վրա անընդհատ է:

**3144. Կմնա՞ արդյոք նախորդ խնդրի պնդումը ճշմարիս, եթե անընդհասու-  
թյան վոխարեն պահանջենք, որ  $f$ -ը լինի սահմանափակ  $[0;2]$ -ի վրա և**

$$\int_0^1 f(x+t) d\sigma(t)$$

ինաւեգրալը գոյություն ունենա յուրաքանչյուր  $x \in [0;1]$  թվի համար:

## Ծառ փոփոխականի ֆունկցիաներ Ֆունկցիայի անընդհատությունը

$R^m$  ուստի պատճեն է առաջանակ և գումար : Եթական քերից կազմված բաղադրիչների գումարը կազմությունը՝  $R^m$ -ը,  $m$ -չափանի վեկտորական տարածություն է, որում գծային առնչությունները սահմանվում են ենակյալ կերպ:

$$(x^1, \dots, x^m) + (y^1, \dots, y^m) = (x^1 + y^1, \dots, x^m + y^m),$$

$$\alpha(x^1, \dots, x^m) = (\alpha x^1, \dots, \alpha x^m) \quad (\alpha \in R):$$

Տրված  $x = (x^1, x^2, \dots, x^m)$  վեկտորի համար  $x^i$ -ն ( $1 \leq i \leq m$ ) կոչվում է  $i$ -րդ կոորդինատ:

Վեկտորի նորմը  $R^m$ -ում սահմանվում է  $|x| = \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^m)^2}$  բանաձևով: Ցանկացած  $x, y \in R^m$  վեկտորների համար  $|x - y| = |x - y|_m = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + \dots + (x^m - y^m)^2}$  -ն կոչվում է այդ վեկտորների հեռավորությունը:

Տրված  $a \in R^m$  վեկտորի (կետի) և  $\varepsilon > 0$  թվի համար

$$B(a; \varepsilon) = \{x \in R^m : |x - a| < \varepsilon\}$$

Բազմությունը կոչվում է  $a$  կենտրոնով և  $\varepsilon$  շառավղով բաց գունդ ( $m$ -չափանի), որն անվանում են  $a$  կետի  $\varepsilon$ -շրջակայք: Օգտագործելով շրջակայքի գաղափարը՝  $R^m$ -ում նշումն են բաց, փակ բազմությունների, բազմության արտաքին, եզրային, կոտակածան և մեկուսացված կետերի հանկացությունները, որոնց սահմանումներն այստեղ ոչնչով չեն տարրերվում զայի և-ում թվային բազմությունների համար արևած նայեանուն հանկացությունների սահմանումներից: Մասնաւորապես, բաց բազմությունների  $\Sigma$  համակարգը (լինարիչը) կոչվում է  $K \subset R^m$  բազմության բաց ծածկույթ, եթե  $\cup\Sigma \supset K$ :  $K$ -ի կոչվում է կոմպակտ, եթե  $K$ -ի ցանկացած բաց ծածկույթից կարելի է անհատել վերջավար ենթածածկույթ:

$R^m$ -ում բաց բազմությունների պարզագույն օրինակներ են բաց գունդը և  $m$ -չափանի բաց գուգահենականը:

$$I_{(a; b)} = \left\{ (x^1, \dots, x^m) : a^i < x^i < b^i, i = 1, \dots, m \right\} \quad (-\infty < a^i < b^i < +\infty, i = 1, \dots, m).$$

Փակ, ինչպես նաև, կոմպակտ բազմությունների օրինակներ են փակ գունդը:

$$\overline{B}(a; r) = \{x \in R^m : |x - a| \leq r\},$$

սֆերան:

$$S(a; r) = \{x \in R^m : |x - a| = r\}$$

և փակ գուգահենականը:

$$I_{[a; b]} = \left\{ (x^1, \dots, x^m) : a^i \leq x^i \leq b^i, i = 1, \dots, m \right\}.$$

**Տանկացած բաց բազմություն**, որը պարունակում է  $x_0$ -ն, կանվաճենք  $x_0$ -ի շրջակայք: Եթենու  $x_0$ -ն որպես ներքին կետ պարունակուի փակ բազմությունը կանվաճենք  $x_0$ -ի փակ շրջակայք:

**Տրված  $X \subset R^m$  բազմության համար  $diam(X) = \sup_{x_1, x_2 \in X} |x_1 - x_2|$ -ը կաշվում է արագա-  
ղիծ: Բազմությունը կոչվում է սահմանափակ, եթե նրա արագազիծը վերջավոր է:**

Ֆունկցիան կանվաճենք շատ փոփոխականի ( $m$  փոփոխականի) ֆունկցիա և հաճախ կորենք՝  $y = F(\mathbf{x}) = F(x^1, \dots, x^m)$ ,  $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^m) \in X$ : Այս դեպքում, եթե  $Y \subset R$  ( $n=1$ ),  $F$ -ը կանափաճենք  $m$  փոփոխականի իրականարժեք ֆունկցիա: Եթենու  $\mathbf{x}$  արգումենտի  $i$ -րդ կոորդինատը կանվաճենք ֆունկցիայի  $i$ -րդ կամ  $x^i$  փոփոխական:

**Տրված  $F: X \rightarrow Y$  ( $X \subset R^m, Y \subset R^n$ ) և  $G: Y \rightarrow Z$  ( $Z \subset R^p$ ) ֆունկցիաների համա-  
պատը (կոմպոզիցիան)  $G \circ F: X \rightarrow Z$  բարդ ֆունկցիան, սահմանվում է  $z = G(F(\mathbf{x}))$ ,  $\mathbf{x} \in X$ , բանաձևություն:**

$\pi^i: R^n \rightarrow R$  ֆունկցիան (պյոյելսուղ սրտապատկերացք) սահմանվում է  $\pi^i(y) = y^i$ ,  $y = (y^1, \dots, y^n) \in R^n$ , բանաձևություն: Տրված  $F: X \rightarrow R^n$  ֆունկցիայի համար  $f_i = \pi^i \circ F$  ֆունկ-  
ցիան կոչվում է  $i$ -րդ կոորդինատային ֆունկցիա:

**Դիցուք  $X \subset R^m$  և  $a$ -ն  $X$  բազմություն կուտակման կետ է:**

**Սահմանում:**  $b \in R^n$  վեկտորը կոչվում է  $F: X \rightarrow Y$  ֆունկցիայի սահման  $a$  կետում և նշանակվում՝  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow a} F(\mathbf{x})$ , եթե

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \mathbf{x} \in X \left( 0 < |\mathbf{x} - a|_m < \delta \Rightarrow |F(\mathbf{x}) - b|_n < \varepsilon \right):$$

**Տանկացած  $\overline{B}(0; r)$  (0-ն զբյական վեկտորն է՝  $0 = (0, \dots, 0)$ ) փակ գնդի լրացումը ըն-  
դունվում է որպես  $\cdot$ -ի շրջակայք: Ուղղակիությունը կուտակման կետ, եթե նրա ցանկացած շրջակայք պարանակում է կետեր  $X$ -ից: Այս պայմաններում  $b \in R^n$  վեկտորը  
կոչվում է  $F: X \rightarrow R^n$  ֆունկցիայի սահման անվերջություն և նշանակվում՝  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \infty} F(\mathbf{x})$ , եթե**

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta > 0 \forall \mathbf{x} \in X \left( |\mathbf{x}| > \Delta \Rightarrow |F(\mathbf{x}) - b| < \varepsilon \right):$$

**Համանմանորեն սահմանվում են ֆունկցիայի անվերջ սահմանը  $a \in R^m$  կետում՝  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow a} F(\mathbf{x}) = \infty$  և անվերջում՝  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \infty} F(\mathbf{x}) = \infty$ : Ընդունի՛մ անվերջ սահման անհետ ֆունկցիան**

կոչվում է անվերջ մեծ, իսկ 0 (զրո) սահման ունեցող ֆունկցիան՝ անվերջ փոքր: Եթե տրված

$F: X \rightarrow R^n$  և  $G: X \rightarrow R^p$  ֆունկցիաների համար  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow a} \frac{|F(\mathbf{x})|}{|G(\mathbf{x})|} = 0$ , ապա զրում են՝

$F(\mathbf{x}) = o(G(\mathbf{x}))$  կամ  $F(\mathbf{x}) = o(|G(\mathbf{x})|)$ ,  $\mathbf{x} \rightarrow a$ :

**Սահմանում:** Տրված  $f: X \rightarrow R$  ( $X \subset R^2$ ) ֆունկցիայի և  $a = (a^1, a^2)$  կետի համար

$$\lim_{x^1 \rightarrow a^1} \lim_{x^2 \rightarrow a^2} f(x^1, x^2) \text{ և } \lim_{x^2 \rightarrow a^2} \lim_{x^1 \rightarrow a^1} f(x^1, x^2)$$

սահմանենքը կոչվում էն հաջորդական սահմանենքը: Հաջորդական սահմանի գալափարը նեշտությունը ընթացակարգություն է ցանկացած  $F: X \rightarrow R^n$  ( $X \subset R^m$ ) ֆունկցիայի համար: Նկատենք, որ տվյալ կետում ֆունկցիայի վերջավոր սահմանի գոյությունը չի պատճենվում այդ կետում հաջորդական սահմանենքի գոյությունը:

**Թեորեմ:** Եթե  $f: X \rightarrow R$  ( $X \subset R^2$ ) ֆունկցիան  $\mathbf{a} = (a^1, a^2)$  կետում ունի սահման և, բացի այդ, ցանկացած  $x^2$ -ի,  $x^2 \neq a^2$ , համար գոյություն ունի  $\lim_{x^1 \rightarrow a^1} f(x^1, x^2)$  վերջավոր սահմանը, ապա գոյություն ունի նաև  $\lim_{x^2 \rightarrow a^2} \lim_{x^1 \rightarrow a^1} f(x^1, x^2)$  հաջորդական սահմանը, ընդ որում

$$\lim_{x^2 \rightarrow a^2} \lim_{x^1 \rightarrow a^1} f(x^1, x^2) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}):$$

Դիցուք  $\mathbf{x}_n$ -ը  $R^m$  տարածության վեկտորների հաջորդականություն է:

**Սահմանում:**  $\mathbf{a} \in R^m$  վեկտորը կոչվում է  $\mathbf{x}_n$  հաջորդականության սահման (վերջավոր սահման) և նշանակվում՝  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n$ , եթե  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathbf{x}_n - \mathbf{a}| = 0$ : Այն ոճայրում, եթե  $|\mathbf{x}_n| \rightarrow +\infty$ ,  $\mathbf{x}_n$ -ը անվանում էն անվերջ մեծ և գրում՝  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = \infty$ :

Կոչիի գուգամիանության սկզբունքը  $R^m$ -ում: Որպեսզի  $\mathbf{x}_n \in R^m$  ( $n \in N$ ) հաջորդականությունը լինի գուգամեա (ունենա վերջավոր սահման), աներաժշտ է և բախարար, որ  $\mathbf{x}_n$ -ը լինի ֆունկտիվնալ:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \quad \forall k, n \in N \quad (k > n \geq n_0 \Rightarrow |\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_n| < \varepsilon):$$

Ֆունկտիվ կոչվում է անընդհատ, ապա այն կետում լրջվությունը է անընդհատ, եթե  $\mathbf{x}_0 \in X$  կետում լրջվությունը է անընդհատ, եթե

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in X \quad (|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta \Rightarrow |F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon):$$

Եթե  $F$ -ն  $\mathbf{x}_0$ -ում անընդհատ չէ, ապա այն կետում անվանում էն խզվող, իսկ  $\mathbf{x}_0$ -ն կանվանենք խզման կետ:

Անընդհատ ֆունկցիայի լույս հասուլությունները: Եթե  $F: X \rightarrow R^n$  ֆունկցիան անընդհատ է  $\mathbf{x}_0$  կետում, ապա այն այդ կետում սահմանափակ է, գոյություն ունի  $\mathbf{x}_0$ -ի շրջակայք, որտեղ  $F$ -ի ընդունած արժեքների բազմությունը սահմանափակ է:

Եթե  $f: X \rightarrow R$  ֆունկցիան  $\mathbf{x}_0$  կետում անընդհատ է և  $f(\mathbf{x}_0) > 0$ , ապա գոյություն ունի  $\mathbf{x}_0$ -ի շրջակայք, որտեղ  $f$ -ի ընդունած արժեքները դրական են:

Եթե  $F: X \rightarrow R^n$  և  $G: X \rightarrow R^m$  ֆունկցիաներն անընդհատ են  $\mathbf{x}_0$  կետում, ապա  $\alpha F + \beta G$  ( $\alpha, \beta \in R$ ) ֆունկցիան նույնական անընդհատ է  $\mathbf{x}_0$ -ում: Եթե  $F$  և  $G$  ֆունկցիաներն իրականարժեք են և  $\mathbf{x}_0$ -ում անընդհատ, ապա նրանց բերարարյալը, բերանորդը, եթե վերջինիս հայտարարը զարդարում չի դառնաւմ, անընդհատ են  $\mathbf{x}_0$ -ում:

Եթե  $F: X \rightarrow Y$   $(X \subset R^m, Y \subset R^n)$  ֆունկցիան անընդհատ է  $\mathbf{x}_0$  կետամ, խոչ  $G: Y \rightarrow R^p$  ֆունկցիան՝  $y_0 = F(\mathbf{x}_0)$  կետամ, ապա  $G \circ F: X \rightarrow R^p$  բարդ ֆունկցիան անընդհատ է  $\mathbf{x}_0$ -ում:

Ֆունկցիան, որն անընդհատ է իր որոշման տիրույթի յուրաքանչյուր կետամ, կանվանենք անընդհատ ֆունկցիա:  $F: X \rightarrow Y$  անընդհատ ֆունկցիաների լասպ կեշանակենք  $C(X, Y)$ : Այն դեպքում, եթե  $Y \subset R$ ,  $C(X, Y)$ -ի վախարեն հավասարապես կօգտագործենք նաև  $C(X)$  հաւաքումը:

Հավասարաշափ անընդհատություն:  $F: X \rightarrow R^n$   $(X \subset R^m)$  ֆունկցիան կրչվում է  $X$  բազմությունիվ վեր հավասարաշափ անընդհատ, եթե

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X (|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| < \delta \Rightarrow |F(\mathbf{x}_1) - F(\mathbf{x}_2)| < \varepsilon):$$

$E \subset R^m$  բազմությունը կրչվում է կավակցված, եթե գոյություն չունեն  $B_1, B_2$  բաց բազմություններ, այնպիսիք, որ  $B_i \cap E \neq \emptyset$ ,  $i = 1, 2$ ,  $E \subset B_1 \cup B_2$  և  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ : Բաց և կավակցված բազմությունը կանվանենք աղյույթ:

Դիցուք  $X$ -ն  $R$  տարածության վերջավար կամ անվերջ միջակայք է:  $\Gamma \in C(X; R^m)$

Ֆունկցիան  $X$  միջակայքի անընդհատ արտապատճենումը  $R^m$ -ի մեջ, կոչվում է անընդհատ կոր կամ ճանապարհ  $R^m$ -ում: Եթե  $X = [\alpha; \beta]$ , ապա կառենք, որ  $\Gamma$  ճանապարհը միացնում է  $R^m$  տարածության  $A = \Gamma(\alpha)$  և  $B = \Gamma(\beta)$  կետերը: Այն դեպքում, եթե  $\Gamma$ -ի բոլոր արժեքները պատկանում են  $E \subset R^m$  բազմությանը, պայմանավորվենք ստեղ, որ  $\Gamma$  ճանապարհը ընկած է  $E$ -ում:

$E \subset R^m$  բազմությունը կրչվում է զծորեն կավակցված, եթե ցանկացած  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in E$  կետերի համար գոյություն ունի  $E$ -ում ընկած և այդ կետերը միացնող ճանապարհ:

Անընդհատ ֆունկցիաների զբաղությունները: Դիցուք  $K \subset R^m$  բազմությունը կոմպակտ է: Եթե  $F \in C(K; R^n)$ , ապա

ա)  $F$ -ը հավասարաշափ անընդհատ է;

բ)  $F(K)$ -ն կոմպակտ է  $R^n$ -ում:

Եթե  $F \in C(E; R^n)$  և  $E \subset R^m$  բազմությունը կավակցված է, ապա  $F(E)$ -ն  $R^n$ -ում նույն պիս կոմպակտ է:

## Ա

3145. Ապացուել  $R^m$ -ում վեկտորի նորմի հետևյալ հասկությունները.

ա)  $|\mathbf{x}| \geq 0$ ,  $|\mathbf{x}| = 0$  այն և միայն այն դեպքում, եթե  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ;

բ)  $|\alpha\mathbf{x}| = |\alpha| \cdot |\mathbf{x}|$ ,  $\alpha \in R$ ;

գ)  $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$  (նորմելայն անհավասարություն), զնդ որում հավասարություն կարող է լինել այն և միայն այն դեպքում, եթե  $\mathbf{x}$  և  $\mathbf{y}$  վեկտորները համուլյալ են՝  $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y}$  ( $\lambda \in R_+$ ):

**3146.** Ցույց տալ, որ գումարը և զուգահեռանիսար  $R^m$ -ում սահմանավակ բաղմություններ են:

**3147.** Ապացուցել, որ  $X \subset R^m$  բազմությունը սահմանավակ է այն և միայն այն դեպքում, եթե գոյություն ունի

ա)  $X$ -ը պարունակող  $m$ -չափանի գումար;

բ)  $X$ -ը պարունակող  $m$ -չափանի զուգահեռանիսար;

գ)  $M > 0$  թիվ, այնպիսին, որ ցանկացած  $\mathbf{x} \in X$  վեկտորի համար

$$|\mathbf{x}| \leq M :$$

**3148.** Տրված  $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^m)$ ,  $\mathbf{y} = (y^1, \dots, y^m)$  վեկտորների սկալյար կամ սերպին արագադրյալը սահմանվում է

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^m x^i \cdot y^i$$

բանաձևով: Ապացուցել սկալյար արագադրյալի հետևյալ հատկությունները.

ա)  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$  (համաչափություն);

բ)  $\langle \alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y} \rangle + \beta \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle$

$\langle \mathbf{x}, \alpha \mathbf{y}_1 + \beta \mathbf{y}_2 \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_1 \rangle + \beta \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2 \rangle$  (երկգծայնություն);

գ)  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ , ընդ որում  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$  այն և միայն այն դեպքում, եթե  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  (դրական որոշալություն);

դ)  $|\mathbf{x}|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ ;

ե)  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \frac{|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{4}$  (բևեռացման նույնություն);

զ)  $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|$  (Ըստացի անհավասարություն):

**3149.**  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^m$  վեկտորները կոչվում են օրրոգոնալ (ուղղահայաց), եթե  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ : Ապացուցել, որ եթե  $\mathbf{x}$  և  $\mathbf{y}$  վեկտորներն ուղղահայաց են, ապա  $|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2$ : Շշմարի՞ւ է արդյոք հակադարձ պնդումը: Խնդրում գրված հավասարությունը մեկնաբանել երկրաչափորեն:

**3150.** Դիցուք  $\mathbf{e}_i \in R^m$  վեկտորի բոլոր կոորդինատները 0 են, բացառությամբ  $i$ -րդի, որը հավասար է 1-ի: Սաուգել, որ  $\{\mathbf{e}_i : i = 1, \dots, m\}$  համակարգը կազմված է զույգ առ զույգ օրթոգոնալ վեկտորներից:

**3151.** Ապացուցել, որ  $\mathbf{a} \in R^m$  վեկտորն օրթոգոնալ է  $R^m$  տարածության բոլոր վեկտորներին այն և միայն այն դեպքում, եթե  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ :

3152. Սաւուգել, որ ցանկացած  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^m$  վեկտորների համար

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = 2(|\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2):$$

Մեկնաբանել գրված նույնությունը երկրաչափութեան:

3153. Ցանկացած  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^m$  վեկտորների համար ապացուցել անհավասարությունը.

ա)  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|;$

բ)  $||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|;$

զ)  $\max_{1 \leq i \leq m} |x_i| \leq |\mathbf{x}| \leq \sqrt{m} \max_{1 \leq i \leq m} |x_i|;$

3154. Ապացուցել, որ վեկտորների  $\mathbf{x}_n = (x_n^1, \dots, x_n^m)$  ( $n \in N$ ) հաջորդականությունը զուգամիառ է  $\mathbf{a} = (a^1, \dots, a^m)$  վեկտորին այն և միայն այն դեպքում, եթե այն զուգամիառ է ըստ բոլոր կոորդինատների.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^i = a^i$ ,  $i = 1, \dots, m$ :

Դշմարի՞ւ է արմյոք, որ եթե  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = \infty$ , ապա ցանկացած  $i = 1, \dots, m$  ինդեքսի համար  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^i = \infty$ :

3155. Ապացուցել, որ եթե  $\mathbf{x}_n$  ( $n \in N$ ) հաջորդականությունը զուգամես է, ապա այն սահմանավակ է.  $\exists M > 0 \ \forall n \in N (|\mathbf{x}_n| \leq M)$ :

3156. Ապացուցել, որ  $R^m$ -ում ցանկացած սահմանավակ հաջորդականություն ունի զուգամես ենթահաջորդականություն:

3157. Դիցուք  $\mathbf{x}_n$ -ը և  $\mathbf{y}_n$ -ը  $R^m$ -ում զուգամես հաջորդականություններ են:

Ապացուցել, որ ցանկացած  $\alpha, \beta \in R$  թվերի համար  $\alpha \mathbf{x}_n + \beta \mathbf{y}_n$  և  $\langle \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n \rangle$  հաջորդականությունները զուգամես են, ընդ որում՝

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha \mathbf{x}_n + \beta \mathbf{y}_n) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{y}_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n \rangle = \left\langle \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n, \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{y}_n \right\rangle :$$

\*\*\*

3158. Դանել ֆունկցիայի որոշման սիրույթը.

ա)  $u = x + \sqrt{y};$

բ)  $u = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1};$

զ)  $u = \sqrt{1-x^2-y^2};$

դ)  $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}};$

ե)  $u = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$ ;

զ)  $u = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}$ ;

է)  $u = \ln(-x - y)$ ;

ը)  $u = \arcsin \frac{y}{x}$ ;

թ)  $u = \ln(xyz)$ ;

ժ)  $u = \ln(-1 - x^2 - y^2 + z^2)$ :

$z(x, y) = c$  հավասարությունի որոշված կորերը կոչվում են  $z = z(x, y)$  ֆունկցիայի մակարդակի զանգվածեր:

3159. Նկարագրել ֆունկցիայի մակարդակի զանգվածերը:

ա)  $z = x + y$

բ)  $z = x^2 + y^2$ ;

զ)  $z = x^2 - y^2$ ;

դ)  $z = (x + y)^2$ ;

ե)  $z = \frac{x}{y}$ ;

զ)  $z = \frac{1}{x^2 + 2y^2}$ ;

տ)  $z = \sqrt{xy}$ ;

ը)  $z = \frac{y - x^2}{x^2}$ :

$u(x, y, z) = c$  հավասարությունի որոշված մակերևույթները կոչվում են  $u = u(x, y, z)$  ֆունկցիայի մակարդակի մակերևույթներ:

3160. Նկարագրել ֆունկցիայի մակարդակի մակերևույթները.

ա)  $u = x + y + z$ ;

բ)  $u = x^2 + y^2 + z^2$ ;

զ)  $u = x^2 + y^2 - z^2$ ;

դ)  $u = \frac{x + y + z}{x - y + z}$  :

3161. Տրված է  $F : X \rightarrow R^n$  ( $X \subset R^m$ ) ֆունկցիան: Ապացուել, որ  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} F(\mathbf{x}) = \mathbf{b} = (b^1, \dots, b^n)$  այն և միայն այն դեպքում, եթե  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f^i(\mathbf{x}) = b^i$ ,

$i = 1, \dots, n$ , որտեղ  $f^i = \pi^i \circ F$ -ն  $F$ -ի  $i$ -րդ կոորդինատային ֆունկցիան է:

Դանել տրված  $f(x, y)$  երկու փոփոխականի իրականարժեք ֆունկցիայի սահմանը նշված  $(a; b)$  կետում (3162-3164).

3162. ա)  $f(x, y) = \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ,  $(a; b) = (1; 0)$ :

բ)  $f(x, y) = \frac{\sin xy}{x}$ ,  $x \neq 0$ ,  $(a; b) = (0; 1)$ :

$$3163. \text{ u) } f(x, y) = (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}; (a; b) = (0; 0);$$

$$\text{ p) } f(x, y) = (x^2 + y^2)^{|x|}; (a; b) = (0; 0);$$

$$3164. \text{ u) } f(x, y) = \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2}, (a; b) = \infty;$$

$$\text{ p) } f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}; (a; b) = \infty;$$

$$\text{ q) } f(x, y) = (x^2 + y^2) e^{-(x+y)}, x, y > 0; (a; b) = \infty;$$

$$\text{ n) } f(x, y) = (x+y) e^{-(x^2+y^2)}; (a; b) = \infty;$$

$$\text{ li) } f(x, y) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}, |y| \leq 1; (a; b) = \infty;$$

Գանել  $(a; b)$  կետում  $f(x, y)$  ֆունկցիայի հաջորդական սահմանները (3165-3169).

$$3165. \text{ u) } f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4}; a = \infty, b = \infty;$$

$$\text{ p) } f(x, y) = \sin \frac{\pi x}{2x + y}; a = \infty, b = \infty;$$

$$3166. \text{ u) } f(x, y) = \frac{\sin(x+y)}{2x+3y}; (a; b) = (0; 0);$$

$$\text{ p) } f(x, y) = \frac{\cos x - \cos y}{x^2 + y^2}; (a; b) = (0; 0);$$

$$3167. \text{ u) } f(x, y) = \frac{\sin|x| - \sin|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}; (a; b) = (0; 0);$$

$$\text{ p) } f(x, y) = \frac{\sin 3x - \operatorname{tg} 2y}{6x + 3y}; (a; b) = (0; 0);$$

$$3168. \text{ u) } f(x, y) = \frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1+xy}; a = 0, b = +\infty;$$

$$\text{ p) } f(x, y) = \frac{y^x}{1+y^x}, x > 0; a = 0, b = +\infty;$$

3169.  $f(x, y) = \log_x(x + y)$ ,  $(a; b) = (1; 0)$ :

3170. Սատուգել, որ  $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$  ֆունկցիայի հաջորդական սահմանները  $(0; 0)$  կետում գոյություն ունեն՝

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 1, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = -1,$$

սակայն  $f(x, y)$ -ը  $(0; 0)$  կետում սահման չունի:

3171. Սատուգել, որ  $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$  ֆունկցիայի հաջորդական սահմանները  $(0; 0)$  կետում գոյություն ունեն և իրար հավասար են, սակայն  $f$ -ն այդ կետում սահման չունի:

3172. Ցույց տալ, որ  $f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$  ֆունկցիայի հաջորդական սահմանները  $(0; 0)$  կետում գոյություն չունեն, սակայն  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$ :

3173. Տրված է  $f(x, y) = x^2 e^{y-x^2}$  ֆունկցիան: Ցանկացած  $\alpha$  անկյան համար գտնել ֆունկցիայի սահմանը, եթե  $(x, y)$  կետը ձգուում է անվերջի  $x = t \cos \alpha$ ,  $y = t \sin \alpha$  ( $t \geq 0$ ) ճառագայթով.  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t \cos \alpha, t \sin \alpha)$ :

Կարելի՞ է արդյոք  $\infty$ -ում ֆունկցիան համարել անվերջ վորք:

3174. Տրված է  $f(x, y, z) = \frac{x^2 y - y^2 z}{x^4 + y^2 + z^2}$  ֆունկցիան: Սատուգել, որ  $(x, y, z)$  կետը ցանկացած  $x = at$ ,  $y = bt$ ,  $z = ct$  ( $t > 0, a^2 + b^2 + c^2 > 0$ ) ճառագայթով  $(0; 0; 0)$  կետին ձգուելիս ֆունկցիան ձգուում է զրոյի: Կարելի՞ է արդյոք  $f$ -ը  $(0; 0; 0)$  կետում համարել անվերջ վորք:

3175. Դիցուք  $\mathbf{x}_0$  կետում  $F: X \rightarrow R^n$  ֆունկցիան սահմանավակ է, իսկ  $G: X \rightarrow R^n$ -ը՝ անվերջ վորք: Ապացուցել, որ  $\langle F, G \rangle$  սկայար արտադրյալը  $\mathbf{x}_0$  կետում անվերջ վորք է:

\*\*\*

3176. Ապացուցել, որ ցանկացած  $i = 1, \dots, m$  ինդեքսի համար  $\pi^i: R^n \rightarrow R$  պրոյեկտող արտապատկերումն ամենուրեք անընդհատ է:

3177. Ցույց տալ, որ  $F : X \rightarrow R^n$  ֆունկցիան  $x_0 \in X$  կետում անընդհատ է այն և միայն այն դեպքում, եթե այդ կետում նրա կոորդինատային ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրն անընդհատ է:

3178. Դիցուք  $\varphi : R \rightarrow R$  ֆունկցիան  $x_0 \in R$  կետում անընդհատ է: Ապացուցել, որ  $f : R^2 \rightarrow R$  ֆունկցիան, որը որոշվում է  $f(x, y) = \varphi(x)$ ,  $(x; y) \in R^2$ , բանաձևով, ցանկացած  $y$ -ի համար  $(x_0; y)$  կետում անընդհատ է:

Ցույցամբ: Նկատել, որ  $f = \varphi \circ \pi^1$ :

3179. Դիցուք  $f : X \rightarrow R$  և  $g : Y \rightarrow R$  ֆունկցիաները համապատասխանաբար  $x_0 \in X$  և  $y_0 \in Y$  կետերում անընդհատ են: Ապացուցել, որ  $X \times Y$  բազմության վրա որոշված  $f(x) + g(y)$  և  $f(x)g(y)$  ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը, իսկ եթե  $g(y) \neq 0$ , ապա նաև  $\frac{f(x)}{g(y)}$  ֆունկցիան,  $(x_0; y_0)$  կետում անընդհատ է:

3180. Սաւուցել, որ

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

ֆունկցիան  $y$  փոփոխականի ցանկացած ֆիքսած արժեքի դեպքում որպես միայն  $x$  փոփոխականի ֆունկցիա անընդհատ է,  $x$ -ի ցանկացած ֆիքսած արժեքի դեպքում ըստ  $y$ -ի նույնական անընդհատ է, սակայն որպես երկու փոփոխականի ֆունկցիա այն  $(0; 0)$  կետում անընդհատ չէ:

3181. Ապացուցել, որ եթե  $f : R^2 \rightarrow R$  ֆունկցիան  $(x_0; y_0)$  կետում անընդհատ է, ապա  $h(x) = f(x, y_0)$  և  $g(y) = f(x_0, y)$  մեկ փոփոխականի ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը համապատասխանաբար  $x_0$ -ում և  $y_0$ -ում անընդհատ է:

Հետազոտել  $f(x, y)$  ֆունկցիայի անընդհատությունը, անընդհատությունն ըստ  $x$ -ի և ըստ  $y$ -ի (3182-3191).

$$3182. f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, \quad f(0, 0) = 0 : \quad 3183. f(x, y) = \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2}, \quad f(0, 0) = 0 :$$

$$3184. f(x, y) = \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad f(0, 0) = 0 :$$

$$3185. f(x, y) = x \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, \quad f(0, 0) = 0 :$$

$$3186. f(x, y) = x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}, f(0, y) = f(x, 0) = 0:$$

$$3187. f(x, y) = \frac{\ln(1+|xy|)}{\sqrt{2x^2+y^2}}, f(0, 0) = 0:$$

$$3188. f(x, y) = \operatorname{sgn}(xy):$$

$$3190. \text{ա) } f(x, y) = [x] + [y];$$

$$3189. f(x, y) = \operatorname{sgn}(x^2 - y^2):$$

$$\text{բ) } f(x, y) = [x + y]:$$

$$3191. f(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in Q^2, \\ 0, & (x, y) \in R^2 \setminus Q^2 \end{cases}$$

3192. Սսուցել, որ  $u = ax + by + c$  գծային ֆունկցիան  $R^2$ -ի վրա հավասարաչափ անընդհատ է:

3193. Ապացուցել, որ  $R''$  սուրածության յուրաքանչյուր վեկտորին այդ վեկտորի նորմը համապատասխանեցնող ֆունկցիան՝  $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|$ -ը,  $R''$ -ի վրա հավասարաչափ անընդհատ է:

3194. Սսուցել, որ  $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^2$  ֆունկցիան  $R''$ -ի վրա հավասարաչափ անընդհատ չէ:

3195. Դիցուք՝  $f(x, y) = xy$ ,  $(x, y) \in R^2$ : Համոզվել, որ ցանկացած  $y_0 \in R$  ( $x_0 \in R$ ) բվի համար  $h(x) = f(x, y_0)$  ( $g(y) = f(x_0, y)$ ) ֆունկցիան  $R$ -ի վրա հավասարաչափ անընդհատ է, սակայն  $f(x, y)$ -ը  $R^2$ -ի վրա հավասարաչափ անընդհատ չէ:

## Բ

3196. Ցույց տալ, որ  $R''$ -ում բաց գունդը և բաց գուգահենանիստը բաց բազմություններ են, իսկ փակ գունդը և փակ գուգահենանիստը՝ փակ բազմություններ:

3197. Ապացուցել, որ  $R''$ -ում բաց բազմությունների ցանկացած ընտանիքի միավորումը բաց բազմություն է, իսկ փակ բազմությունների ցանկացած ընտանիքի հասումը՝ փակ:

3198. Ապացուցել, որ  $R''$ -ում բաց բազմությունների ցանկացած վերջավոր ընտանիքի հասումը բաց բազմություն է, իսկ փակ բազմությունների վերջավոր ընտանիքի միավորումը՝ փակ:

Կառուցել  $R''$ -ում բաց (փակ) բազմությունների ընտանիք, որի հասումը (միավորումը) բաց (փակ) բազմություն չէ:

3199. Դիցուք՝  $X \subset R''$ : Ապացուցել, որ  $X$  բազմության

- ա) ներքին կեսերի բազմությունը՝  $\text{int } X$ -ը, բաց բազմություն է;  
 բ) եզրային կեսերի բազմությունը՝  $\partial X$ -ը, փակ բազմություն է;  
 գ) կուտակման կեսերի բազմությունը՝  $X'$ -ը, փակ բազմություն է:

3200. Դիցուք՝  $X \subset R^n$  և  $\Phi$ -ն  $X$ -ը պարունակող փակ բազմությունների ընտանիքն է: Ապացուցել, որ  $\overline{X} = \bigcap \Phi$ , որտեղ  $\overline{X} = X \cup X'$ -ը  $X$  բազմության փակումն է:

3201. Ապացուցել, որ եթե  $G \subset R^n$  բազմությունը բաց է, իսկ  $F \subset R^n$  -ը՝ փակ, ապա  $G \setminus F$  -ը բաց բազմություն է, իսկ  $F \setminus G$ -ն՝ փակ:

3202. Ապացուցել, որ եթե  $A \subset R^n$  բազմությունը թե՛ բաց է, թե՛ փակ, ապա  $A = R^n$  կամ  $A = \emptyset$ : Այսուեղից ստանալ, որ  $R^n$ -ը կապակցված է:

3203. Սառացել, որ ցանկացած  $B(\mathbf{a}, r)$   $m$  չափանի գնդի համար  $\partial B(\mathbf{a}, r) = \partial \overline{B}(\mathbf{a}, r) = S(\mathbf{a}, r)$ :

3204. Ապացուցել, որ  $R^n$ -ում

ա) ցանկացած փակ զուգահեռանիստ կոմպակտ է;

բ) կոմպակտ բազմության ցանկացած փակ ենթարազմություն կոմպակտ է;

գ) կոմպակտ բազմությունը փակ է և սահմանափակ;

դ) բազմությունը կոմպակտ է այն և միայն այն դեպքում, եթե այն փակ է և սահմանափակ:

3205. Ապացուցել, որ եթե  $A \subset R^n$  բազմությունը ա) սահմանափակ է, բ) բաց է, գ) կոմպակտ է, ապա  $\pi^i(A)$  ( $i = 1, \dots, m$ ) պրոյեկցիաներից յուրաքանչյուրը համապատասխանաբար ա) սահմանափակ է, բ) բաց է, գ) կոմպակտ է:

Օրինակով համոզվել, որ նույնական պնդումը փակ բազմության համար ճշմարիտ չէ:

3206. Ապացուցել, որ եթե  $A \subset R^n$  բազմության  $\pi^i(A)$  ( $i = 1, \dots, m$ ) պրոյեկցիաները  $R$ -ում սահմանափակ են, ապա  $A$ -ն սահմանափակ է:

Ճշմարիս է արդյոք նույնական պնդումը ա) բաց, բ) փակ, գ) կոմպակտ բազմությունների համար: Բերել համապատասխան օրինակներ:

3207. Տրված  $A$  և  $B$  բազմությունների  $A \times B$  դեկարտյան արտադրյալը սահմանվում է որպես բոլոր  $(a; b)$  կարգավորված զույգերի բազմություն, որոնցում  $a \in A$ ,  $b \in B$ :

$R^n \times R^n$  դեկարտյան արտադրյալում գծային առնչությունները սահմանվում են

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) + (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2),$$

$$\alpha(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = (\alpha\mathbf{x}; \alpha\mathbf{y})$$

բանաձևերով, իսկ նորմը՝

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| = \sqrt{|x|_m^2 + |y|_n^2}$$

բանաձևով ( $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in R^m$ ,  $\mathbf{y}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in R^n$ ,  $\alpha \in R$ ):

ա) Սսուցել որ  $R^m \times R^n$ -ը  $m+n$ -չափանի գծային նորմավորված տարածություն է, որում նորմը բավարարում է խնդիր 3145-ում ծևակերպված երեք պայմաններին:

բ) Ելնելով նորմի սահմանումից՝  $R^m \times R^n$ -ում ներմուծել կետի շրջակայքի գաղափարը և, այնուհետև, սահմանել առավողջական բոլոր հիմնական հասկացությունները (բաց, փակ, կոմպակտ, կապակցված բազմություններ, եզրային, կուսակման կետեր և այլն):

3208. Տրված  $D \subset R^m \times R^n$  բազմության պրոյեկցիաները համապատասխանաբար  $R^m$ -ի և  $R^n$ -ի վրա սահմանվում են հետևյալ կերպ.

$$D_{R^m} = \left\{ \mathbf{x} \in R^m : \exists \mathbf{y} \in R^n [(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \in D] \right\},$$

$$D_{R^n} = \left\{ \mathbf{y} \in R^n : \exists \mathbf{x} \in R^m [(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \in D] \right\}.$$

Ապացուցել, որ եթե  $D$ -ն  $R^m \times R^n$ -ում ա) սահմանափակ է, բ) բաց է, գ) կոմպակտ է, դ) կապակցված է, ապա  $D_{R^m}$  և  $D_{R^n}$  պրոյեկցիաներից յուրաքանչյուրը համապատասխանաբար  $R^m$ -ում և  $R^n$ -ում ա) սահմանափակ է, բ) բաց է, գ) կոմպակտ է, դ) կապակցված է:

Կառուցել  $R^2$ -ում ոչ կապակցված բազմություն, որի պրոյեկցիաները  $Ox$  և  $Oy$  առանցքների վրա կապակցված են:

3209. Դիցուք՝  $A \subset R^m$ ,  $B \subset R^n$ , լնդ որում՝  $A \neq \emptyset$ ,  $B \neq \emptyset$ : Ապացուցել, որ  $A \times B$  բազմությունը  $R^m \times R^n$ -ում ա) բաց է, բ) փակ է, գ) կոմպակտ է, դ) կապակցված է. այն և միայն այն դեպքում, եթե  $A$  և  $B$  բազմություններից յուրաքանչյուրը համապատասխանաբար  $R^m$ -ում և  $R^n$ -ում ա) բաց է, բ) փակ է, գ) կոմպակտ է, դ) կապակցված է:

3210. Ապացուցել, որ գծորեն կապակցված բազմությունը կապակցված է:

3211. Դիցուք՝  $E = \{0\} \times [-1; 1]$ ,  $F = \left\{ (x; y) : y = \sin \frac{1}{x} \right\}$ : Սսուցել, որ  $E \cup F$  բազմությունը կապակցված է, բայց գծորեն կապակցված չէ:

3212. Սսուցել, որ գունդը և զուգահեռանիստը  $R^m$ -ում կապակցված բազմություններ են:

3213. Ցույց տալ, որ  $S(\mathbf{a}, r)$  սֆերան  $R^m$ -ում կապակցված է, իսկ  $R^m \setminus S(\mathbf{a}, r)$  բազմությունը՝ ոչ:

3214. Ապացուցել, որ եթե  $A$  և  $B$  բազմությունները  $R''$ -ում կապակցված են և  $A \cap B \neq \emptyset$ , ապա  $A \cup B$ -ն նույնապես կապակցված է:

3215. Դիցուք  $\mathbf{x}_0$ -ն  $X \subset R''$  բազմության ներքին կետ է, իսկ  $\mathbf{x}_1$ -ը՝ արտաքին: Ապացուցել, որ  $R''$ -ում  $\mathbf{x}_0$  և  $\mathbf{x}_1$  կետերը միացնող ցանկացած ճանապարհ անցնում է  $X$  բազմության եզրային կետով:

3216. Դիցուք  $\overline{B}(\mathbf{a}_n, r_n)$ -ը ( $n \in N$ )  $R''$ -ում ներդրված վիակ գնդերի հաջորդականություն է.

$$\overline{B}(\mathbf{a}_1, r_1) \supset \overline{B}(\mathbf{a}_2, r_2) \supset \dots \supset \overline{B}(\mathbf{a}_n, r_n) \supset \dots :$$

Ապացուցել, որ

ա)  $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}(\mathbf{a}_n, r_n) \neq \emptyset$ ;

բ) եթե  $r_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ), ապա  $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}(\mathbf{a}_n, r_n)$ -ը կազմված է միայն մեկ

կետից:

3217. Դիցուք  $R''$ -ում կոմպակտ բազմություններից կազմված  $K_n$  ( $n \in N$ ) հաջորդականությունն այնպիսին է, որ ցանկացած  $n \in N$  թվի համար

$$\bigcap_{i=1}^n K_i \neq \emptyset:$$

Ապացուցել, որ

ա)  $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i \neq \emptyset$ ;

բ) եթե  $diam\left(\bigcap_{i=1}^n K_i\right) \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ), ապա  $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$ -ն կազմված է միայն մեկ կետից:

3218. Տրված  $A \subset R''$  ( $A \neq \emptyset$ ) բազմության և  $\mathbf{x} \in R''$  կետի համար

$$\rho_A(\mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{a} \in A} |\mathbf{x} - \mathbf{a}|$$

թիվը կոչվում է  $\mathbf{x}$  կետի հեռավորություն  $A$ -ից:

Ապացուցել, որ  $\rho_A(\mathbf{x}) = 0$  այն և միայն այն դեպքում, եթե  $\mathbf{x} \in \overline{A}$ :

3219. Տրված  $A, B \subset R''$  ոչ դաշտակ բազմությունների համար

$$\rho(A, B) = \inf \{|\mathbf{a} - \mathbf{b}| : \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B\}$$

թիվը կոչվում է  $A$  և  $B$  բազմությունների հեռավորություն:

Ապացուցել, որ եթե  $A$ -ն կոմպակտ է, իսկ  $B$ -ն՝ վիակ, ապա  $\rho(A, B) = 0$  այն և միայն այն դեպքում, եթե  $A \cap B = \emptyset$ :

Կառուցել  $A$  և  $B$  վիակ բազմություններ, այնպիսիք, որ  $A \cap B = \emptyset$ ,  $\rho(A, B) = 0$ :

3220. Ապացուցել, որ ցանկացած  $A \subset R^m$  ոչ դասարկ բազմության և  $\alpha > 0$  թվի համար  $F = \{x \in R^m : \rho_A(x) \leq \alpha\}$  բազմությունն  $A$ -ն պարունակող վիակ բազմություն է, իսկ  $G = \{x \in R^m : \rho_A(x) < \alpha\}$  բազմությունը՝ բաց:

3221. Դիցուք  $U \subset R^m$  բազմությունը բաց է, իսկ  $C \subset U$  բազմությունը՝ կոմպակտ: Ապացուցել, որ գոյություն ունի  $D \subset U$  կոմպակտ բազմություն, որի համար  $C$  բազմության բոլոր կետերը ներքին կետեր են:

\*\*\*

Տրված  $F: X \rightarrow R^n$  ( $X \subset R^m$ ) ֆունկցիայի և  $A \subset X$  բազմության համար  $b \in R^n$  վեկտորը կոչվում է  $a \in A'$  կետում  $F$  ֆունկցիայի մասնակի սահման լսա  $A$  բազմության և նշանակվում՝  $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} F(x)$ , եթե

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |F(x) - b| < \varepsilon)$ :

Դանել  $(0; 0)$  կետում  $f(x, y)$  ֆունկցիայի մասնակի սահմանն լսա նշված  $A$  բազմության (3222-3223).

3222.  $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ ,      ա)  $A = \{(x; x) : x \in R\}$ ;

բ)  $A = \{(x; -x) : x \in R\}$ :

3223.  $f(x, y) = e^{\frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}$ ,      ա)  $A = \{(x; x) : x > 0\}$ ;      բ)  $A = \{(x; 3x^2) : x < 0\}$ :

3224. Դիցուք  $f(x, y)$  ֆունկցիան  $(0; 0)$  կետի շրջակայքում ամենուրեք, բացի  $(0; 0)$  կետից, անընդհատ է: Ապացուցել, որ եթե արված  $k_1 \neq k_2$  թվերի համար գոյություն ունեն  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, k_1 x) = b_1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, k_2 x) = b_2$  սահմանները և  $b_1 < b_2$ , ապա ցանկացած  $b_1 < b < b_2$  թվի համար գոյություն ունի  $(x_n; y_n)$  անվերջ փոքր հաջորդականություն, այնպիսին, որ  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = b$ :

3225. Տրված է  $F: G \rightarrow R^p$  ( $G \subset R^m \times R^n$ ) ֆունկցիան: Կասենք, որ  $F$ -ը  $G$ -ում անընդհատ է լսա  $x$ -ի՝  $y$ -ի նկատմամբ հավասարաշափ, եթե  $\forall x_0 \in G_{R^m} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (x; y) \in G (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |F(x, y) - F(x_0, y)| < \varepsilon)$ :

Ապացուել, որ եթե  $F$ -ը  $G$  սիրույթում անընդհատ է ըստ  $\mathbf{x}$ -ի՝  $y$ -ի նկատմամբ հավասարաշափ և յուրաքանչյուր  $\mathbf{x}$ -ի համար անընդհատ է ըստ  $y$ -ի, ապա այն  $G$ -ում անընդհատ է:

3226. Ապացուել, որ եթե  $F: G \rightarrow R^p$  ( $G \subset R^m \times R^n$ ) ֆունկցիան յուրաքանչյուր  $y$ -ի համար անընդհատ է ըստ  $\mathbf{x}$ -ի, իսկ ըստ  $y$ -ի բավարարում է Լիպշիցի պայմանին՝

$$|F(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) - F(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2)|_p \leq L \cdot |\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2|_n \quad (L = const),$$

ապա  $F \in C(G; R^p)$ :

3227. Ապացուել Յունգի թեորեմը. եթե  $f: G \rightarrow R$  ( $G$ -ն  $R^2$ -ում ախրույթ է) ֆունկցիան անընդհատ է թե՛ ըստ  $x$ -ի, թե՛ ըստ  $y$ -ի և, բացի այդ, յուրաքանչյուր  $y$ -ի համար ըստ  $x$ -ի մոնուոն է, ապա  $f \in C(G)$ :

3228. Դիցուք՝  $f \in C([a; b] \times [c; d])$ : Ապացուել, որ եթե  $\varphi_n: [a; b] \rightarrow [c; d]$  ( $n \in N$ ) ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը հավասարաշափ զուգամեա է, ապա  $\Phi_n(x) = f(x, \varphi_n(x))$  ( $x \in [a; b]$ ) ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը նույնական հավասարաշափ զուգամեա է, ընդ որում՝

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x, \varphi_n(x)) = f(x, \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x)) \quad (x \in [a; b]):$$

3229. Տրված  $F: G \rightarrow R^p$  ( $G \subset R^m \times R^n$ ) ֆունկցիայի համար

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{b}} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \text{ և } \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{b}} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

սահմանները կոչվում են  $F$  ֆունկցիայի հաջորդական (ընդհանրացված հաջորդական) սահմաններ  $(\mathbf{a}; \mathbf{b}) \in R^m \times R^n$  կեսում:

Ապացուել, որ եթե  $F$ -ն  $(\mathbf{a}; \mathbf{b})$ -ում ունի սահման և ցանկացած  $\mathbf{x}$ -ի համար գոյություն ունի  $\lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{b}} F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  վերջավոր սահմանը, ապա գոյություն ունի

նաև  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{b}} F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  հաջորդական սահմանը, ընդ որում՝

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{b}} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lim_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{b})} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}):$$

3230. Ապացուել, որ  $R^m$ -ում վեկտորների գումարման և վեկտորը բվով բազմապասիկման զործողություններն անընդհատ են: Հետազոտել դրանց հավասարաշափ անընդհանրությունը:

Ցուցում: Դիտարկել այդ զործարությունները որպես համապատասխանաբար  $S: R^m \times R^m \rightarrow R^m$  և  $P: R \times R^m \rightarrow R^m$  ֆունկցիաներ:

3231. Սատուգել, որ սկալյար արտադրյալ կազմելու գործողությունը՝  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  ( $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in R^m \times R^m$ ), ցանկացած կոմպակտի վրա հավասարաշափ անընդհատ է, բայց  $R^m \times R^m$ -ի վրա հավասարաշափ անընդհատ չէ:  
Ցույց տալ նաև, որ յուրաքանչյուր  $\mathbf{x}$ -ի ( $\mathbf{y}$ -ի) համար այն ըստ  $\mathbf{y}$ -ի ( $\mathbf{x}$ -ի)

$R^m$ -ի վրա հավասարաշափ անընդհատ է:

3232. Ապացուցել, որ ցանկացած  $E \subset R^m$  բազմության համար  $\rho_E(\mathbf{x})$  ( $\mathbf{x} \in R^m$ ) ֆունկցիան (սես խնդիր 3218)  $R^m$ -ի վրա հավասարաշափ անընդհատ է:

3233. Դիցուք  $A$ -ն և  $B$ -ն  $R^m$  տարածության ոչ դաստարկ, չհաստվող, վակ բազմություններ են: Սատուգել, որ

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\rho_A(\mathbf{x})}{\rho_A(\mathbf{x}) + \rho_B(\mathbf{x})} \quad (\mathbf{x} \in R^m)$$

ֆունկցիան ամենուրեք անընդհատ է: Համոզվել նաև, որ

ա)  $f(R^m) = [0; 1];$

բ)  $f(A) = \{0\}, \quad f(B) = \{1\};$

գ)  $E = f^{-1}([0; \frac{1}{2}])$  և  $G = f^{-1}([\frac{1}{2}; 1])$  բազմությունները բաց են, չհաստվող,

և որ  $A \subset E, B \subset G$ :

3234. Դիցուք  $F, G \in C(X, R^n)$  ( $X \subset R^m$ ) և  $E$ -ն  $X$ -ում ամենուրեք խիս բազմություն է.  $E \subset X \subset \overline{E}$ : Ապացուցել, որ եթե  $F(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x})$  ( $\mathbf{x} \in E$ ), ապա  $F = G$ : Այլ կերպ՝ անընդհատ ֆունկցիան միարժեքորեն վերականգնվում է ամենուրեք խիս բազմության վրա իր ընդունած արժեքներով:

3235. Ապացուցել, որ  $F : X \rightarrow R^n$  ( $X \subset R^m$ ) ֆունկցիայի վրա դրված հետևյալ պայմանը համարժեք է  $X$ -ի վրա  $F$ -ի հավասարաշափ անընդհատությանը.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall E \subset X (diam E < \delta \Rightarrow diam F(E) < \varepsilon):$$

3236. Դիցուք  $E$ -ն  $R^m$ -ում ամենուրեք խիս բազմություն է և  $f : E \rightarrow R$  ֆունկցիան  $E$ -ի վրա հավասարաշափ անընդհատ է: Ապացուցել, որ զոյտթյուն ունի  $f$ -ի անընդհատ շարունակություն ամբողջ  $R^m$ -ի վրա, այն էլ միայն մեկը:

3237. Տրված  $F : X \rightarrow R^n$  ( $X \subset R^m$ ) ֆունկցիայի տարածումն  $\mathbf{x}_0 \in X$  կետում սահմանվում է

$$\Omega_F(\mathbf{x}_0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} diam \{F(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X \cap B(\mathbf{x}_0, \delta)\}$$

բանաձևեվ: Ապացուցել, որ  $F$ -ն  $x_0$ -ում անընդհատ է այն և միայն այն դեպքում, եթե  $\Omega_F(x_0) = 0$  (անընդհատություն ըստ Բեռի):

**3238.** Ապացուցել, որ  $F : X \rightarrow R^n$  ( $X \subset R^m$ ) ֆունկցիան  $x_0 \in X$  կետում անընդհատ է այն և միայն այն դեպքում, եթե  $X$  բազմության կետերից կազմված ցանկացած  $x_n \rightarrow x_0$  հաջորդականության համար  $F(x_n) \rightarrow F(x_0)$  (անընդհատություն ըստ Հայմեի):

**3239.** Ապացուցել, որ  $F : X \rightarrow R^n$  ( $X \subset R^m$ ) ֆունկցիան  $x_0 \in X$  կետում անընդհատ է այն և միայն այն դեպքում, եթե  $F(x_0)$  կետի ցանկացած  $V$  շրջակայթի համար գոյություն ունի  $x_0$  կետի  $U$  շրջակայթ, այնպիսին, որ  $F(U \cap X) \subset V$ :

**3240.** Ապացուցել, որ  $F \in C(X; R^n)$  այն և միայն այն դեպքում, եթե ցանկացած  $G \subset R^n$  բաց բազմության համար գոյություն ունի  $E \subset R^m$  բաց բազմություն, այնպիսին, որ  $F^{-1}(G) = E \cap X$ :

**3241.** Ապացուցել, որ  $f : R^m \rightarrow R$  ֆունկցիան անընդհատ է այն և միայն այն դեպքում, եթե ցանկացած  $a$  թվի համար

- ա)  $\{x \in R^m : f(x) < a\}$  և  $\{x \in R^m : f(x) > a\}$  բազմությունները բաց են;
- բ)  $\{x \in R^m : f(x) \leq a\}$  և  $\{x \in R^m : f(x) \geq a\}$  բազմությունները փակ են:

**3242.** Ապացուցել, որ եթե  $X \subset R^m$  բազմությունը կոմպակտ է և  $f \in C(X)$ , ապա  $f$ -ն ունի մեծագույն և վտրագույն արժեքներ:

**3243.** Դիցուք  $X \subset R^m$  բազմությունը գծորեն կապակցված է և  $f \in C(X, R^n)$ : Ապացուցել, որ  $f(X)$ -ը գծորեն կապակցված է:

**3244.** Ապացուցել, որ եթե  $X \subset R^m$  բազմությունը կապակցված է,  $f \in C(X)$  և  $a, b \in X$  կետերի համար  $f(a)f(b) < 0$ , ապա գոյություն ունի այնպիսի  $c \in X$  կետ, որ  $f(c) = 0$ :

**3245.** Դիցուք  $X \subset R^m$  բազմությունն այնպիսին է, որ ցանկացած  $F \in C(X; R^n)$  ֆունկցիա  $X$ -ի վրա հավասարաչափ անընդհատ է: Ապացուցել, որ  $X$ -ը կոմպակտ է, եթե այն

- ա) սահմանավակ է;
- բ) զուրկ է մեկուսացված կետերից:

3246. Ապացուցել, որ ցանկացած  $G \subset R''$  բաց բազմություն կարելի է ներկայացնել որպես զնդերից (զուգահեռանիստերից) կազմված հաշվելի ընտանիքի միավորում:

3247. Ապացուցել, որ  $R''$  տարածության մեջ ցանկացած բաց բազմություն կարելի է ներկայացնել որպես կոմպակտ բազմություններից կազմված հաշվելի ընտանիքի միավորում:

3248. “Պայմանակիրվենք զրել  $\mathbf{a} \in Q'''$ , եթե  $\mathbf{a} \in R''$  վեկտորի բոլոր կոորդինատները ուսղիղությամբ թվեր են:

Ապացուցել, որ  $R''$ -ում զնդերի  $\{B(\mathbf{a}, r) : \mathbf{a} \in Q''' , r \in Q\}$  և զուգահեռանիստերի  $\{f_{(\mathbf{a}, \mathbf{b})} : \mathbf{a}, \mathbf{b} \in Q'''\}$  ընտանիքներից յուրաքանչյուրը հաշվելի է:

3249. Ապացուցել, որ  $R''$  տարածությունը սեպարաբել է.  $R''$ -ում գոյություն ունի հաշվելի ամենուրեք խիստ բազմություն:

3250. Ապացուցել, որ  $A \subset R''$  բազմության ցանկացած անվերջ բաց ծածկույթից կարելի է անշատել հաշվելի ենթածածկույթ:

3251. Ապացուցել, որ եթե  $A \subset R''$  բազմությունը ծածկող բաց բազմությունների ցանկացած հաշվելի ընտանիք պարունակում է  $A$ -ն ծածկող վերջավոր ենթալուսանիք, ապա  $A$ -ն կոմպակտ է:

3252. Ապացուցել, որ  $K \subset R''$  բազմությունը կոմպակտ է այն և միայն այն դեպքում, եթե նրա ցանկացած  $\Sigma$  անվերջ բաց ծածկույթից կարելի է անջատել խսկական ( $\Sigma$ -ից ստարելու) ենթածածկույթ:

3253. Ապացուցել, որ  $K \subset R''$  բազմությունը կոմպակտ է այն և միայն այն դեպքում, եթե վեկտորների ցանկացած  $\{\mathbf{x}_n : n \in N\} \subset K$  հաջորդականություն ունի  $K$ -ին պատճենող մասնակի սահման:

3254. Դիցուք  $K \subset R''$  բազմությունը կոմպակտ է և բաց բազմությունների  $\Sigma = \{\sigma\}$  ընտանիքը ծածկում է  $K$ -ն: Ապացուցել, որ

$$\exists r > 0 \quad \forall \mathbf{a} \in K \quad \exists \sigma \in \Sigma \quad (B(\mathbf{a}; r) \subset \sigma):$$

3255. Դիցուք  $K \subset R''$  բազմությունը կոմպակտ է և  $E \subset R''$ : Ապացուցել, որ եթե  $G$ -ն  $R'' \times R''$ -ում  $K \times E$  բազմությունը պարունակող բաց բազմություն է, ապա գոյություն ունեն  $G_1 \supset K$  բաց բազմություն  $R''$ -ում և  $G_2 \supset E$  բաց բազմություն  $R''$ -ում, այնպիսիք, որ  $G_1 \times G_2 \subset G$ :

3256. Դիցուք  $K$ -ն  $R''$ -ում կոմպակտ է և  $E \subset R''$ : Ցույց տալ, որ ցանկացած  $A \subset K \times E$  փակ բազմության պրոյեկցիան  $R''$ -ի վրա փակ է:

3257. Ապացուցել, որ եթե  $K \subset R^m$  բազմությունը այնպիսին է, որ ցանկացած  $A \subset K \times R^n$  փակ բազմության պրոյեկցիան  $R^n$ -ի վրա փակ է, ապա  $K$ -ն  $R^m$ -ում կոմպակտ է:

3258. Ապացուցել, որ կապակցված բազմության փակումը կապակցված է:

3259. Դիցուք  $A \subset R^m$  բազմությունը կապակցված է: Սակայն, որ եթե  $A \subset \subset B \subset A$ , ապա  $B$ -ն կապակցված է:

3260. Ցույց տալ, որ եթե  $A, B \subset R^m$  բազմությունները կապակցված են և  $\bar{A} \cap B \neq \emptyset$ , ապա  $A \cup B$ -ն կապակցված է:

3261. Ապացուցել, որ եթե կապակցված բազմություններից կազմված ընտանիքը ունի ոչ դատարկ հաստում, ապա այդ ընտանիքի միավորումը կապակցված է:

3262. Ապացուցել, որ  $G \subset R^m$  բաց բազմությունը կապակցված է այն և միայն այն դեպքում, եթե այն գծորեն կապակցված է:

3263. Ապացուցել, որ  $R^m$ -ում ( $m \geq 2$ ) ցանկացած  $M$  հաշվելի բազմության լրացումը՝  $R^m \setminus M$ -ը, գծորեն կապակցված է:

3264. Տրված  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^m$  կետերի համար  $\{t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b} : 0 \leq t \leq 1\}$  բազմությունը կոչվում է  $\mathbf{a}$  և  $\mathbf{b}$  ծայրակետերով հատված: Ցանկացած  $\mathbf{a} = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k = \mathbf{b}$  վեկտորների համար  $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}$  ( $i = 0, 1, \dots, k-1$ ) ծայրակետերով հատվածների միավորումը կոչվում է  $\mathbf{a}$  և  $\mathbf{b}$  կետերը միացնող բեկյալ:

Ապացուցել, որ եթե  $G \subset R^m$  բազմությունը կապակցված է և բաց (այլույթ է), ապա ցանկացած  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in G$  կետերի համար գոյություն ունի ամբողջապես  $G$ -ում ընկած,  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  ծայրակետերը միացնող բեկյալ:

3265. Դիցուք՝  $A, B \subset R^m$ :  $A$  և  $B$  բազմությունների հանրահաշվական գումարը՝  $A + B$ -ն, սահմանվում է հետևյալ կերպ:

$$A + B = \{\mathbf{a} + \mathbf{b} : \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B\}:$$

Ապացուցել, որ

ա) եթե  $A$  և  $B$  բազմություններից մեկը բաց է, ապա  $A + B$ -ն բաց է;

բ) եթե  $A$ -ն փակ է, իսկ  $B$ -ն՝ կոմպակտ, ապա  $A + B$ -ն փակ է:

Դիցուք  $X$ -ը իրական թվերի դաշտի վրա արկած գծային տարրածություն է:  $p: X \rightarrow R$  ֆունկցիան կոչվում է  $X$ -ում սահմանված նորմ, եթե ցանկացած  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$  վեկտորների և  $\alpha \in R$  թվի համար կատարվում են հետևյալ երեք պայմանները.

$$1. \quad p(\mathbf{x}) \geq 0, \quad p(\mathbf{x}) = 0 \text{ այն և միայն այն դեպքում, եթե } \mathbf{x} = \mathbf{0};$$

$$2. \quad p(\alpha \mathbf{x}) = |\alpha| p(\mathbf{x});$$

$$3. \quad p(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq p(\mathbf{x}) + p(\mathbf{y}):$$

$X$  տարրածությունը նրանում սահմանված  $p$  նորմով կոչվում է նորմավորված տարրածություն և նշանակվում՝  $(X, p)$ : Եթե խոսք է լինում  $R^m$  նորմավորված տարրածության մասին և  $R^m$ -ի կողքին հաստուկ նշված չէ  $p$  նորմը, ապա ենթադրվում է, որ  $p(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|_m$  ( $\mathbf{x} \in R^m$ ):

Հաճախ այդ նորմն անվանում են  $R^m$ -ում սահմանված կամ էվկլիմյան նորմ, իսկ  $R^m$ -ն այդ նորմով՝ էվկլիմյան տարրածություն:

3266. Ապացուցել, որ  $R^m$ -ում սահմանված ցանկացած  $p$  նորմի համար գոյություն ունեն  $\alpha$  և  $\beta$  դրական հաստատուններ, այնպիսիք, որ

$$\alpha|\mathbf{x}|_m \leq p(\mathbf{x}) \leq \beta|\mathbf{x}|_m \quad (\mathbf{x} \in R_m):$$

3267. Դիցուք  $p$ -ն  $R^m$ -ում նորմ է (սահմանված նորմից տարբեր):  $\mathbf{a} \in (R^m, p)$  կեսի  $\varepsilon$ -շրջակայքը սահմանենք

$$B^*(\mathbf{a}, \varepsilon) = \left\{ \mathbf{x} \in R^m : p(\mathbf{x} - \mathbf{a}) < \varepsilon \right\}$$

բանաձևով: Տրված  $A \subset R^m$  բազմության  $\mathbf{a}$  կեսան անվանենք այդ բազմության \*-ներքին կես, եթե գոյություն ունի  $\varepsilon > 0$  թիվ, այնպիսին, որ  $B^*(\mathbf{a}, \varepsilon) \subset A$ : Այնուհետև,  $A$  բազմությունն անվանենք \*-բաց բազմություն, եթե այդ բազմության բոլոր կեսերը \*-ներքին կեսեր են:

Ապացուցել, որ  $p$ -ն համարժեք է  $R^m$ -ում սահմանված նորմին՝ հետևյալ առումով:

$A \subset R^m$  բազմությունն \*-բաց է այն և միայն այն դեպքում, եթե այն  $R^m$ -ում բաց է:

3268. Դիցուք  $[0;1] \times [0;1]$  քառակուսու վրա որոշված  $f(x, y)$  իրականարժեք ֆունկցիան թե՛ ըստ  $x$ -ի, թե՛ ըստ  $y$ -ի անընդիհաս է: Ապացուցել, որ ցանկացած  $x$ -ի համար գոյություն ունի  $y$ , այնպիսին, որ  $f$ -ն  $(x; y)$  կետում անընդիհաս է:

3269.  $f : R^m \rightarrow R^m$  ֆունկցիան կոչվում է սեղմող արտապատկերում, եթե գոյություն ունի  $\alpha \in (0;1)$  թիվ, այնպիսին, որ ցանկացած  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^m$  վեկտորների համար

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq \alpha |\mathbf{x} - \mathbf{y}|:$$

Ապացուցել, որ եթե  $f$ -ը սեղմող արտապատկերում է, ապա այն ունի անշարժ կես ( $f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ ), այն էլ միայն մեկը:

Օրինակով համոզվել, որ եթե գրված անհավասարությունը վիտսարի-նենք  $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  անհավասարությունով, ապա անշարժ կես կարող է գոյություն չունենալ:

3270. Դիցուք  $K \subset R^n$  բազմությունը կոմպակտ է: Ապացուցել, որ եթե  $f: K \rightarrow K$  ֆունկցիան ցանկացած  $x, y \in K$  ( $x \neq y$ ) կետերի համար բավարարում է  $|f(x) - f(y)| < |x - y|$  անհավասարությանը, ապա  $f$ -ն ունի անշարժ կետ և այն էլ միայն մեկը:

3271. Դիցուք  $K$ -ն  $R^n$ -ում կոմպակտ է,  $f \in C(K, K)$  և ցանկացած  $x, y \in K$  ( $x \neq y$ ) կետերի համար

$$|f(x) - f(y)| < \max\{|f(x) - x|, |f(y) - y|\}:$$

Ապացուցել, որ  $f$ -ն ունի անշարժ կետ:

3272.  $f: X \rightarrow X$  ( $X \subset R^n$ ) ֆունկցիան կոչվում է իզոմետրիա, եթե ցանկացած  $x, y \in R^n$  վեկտորների համար  $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ :

Ապացուցել, որ եթե  $K \subset R^n$  բազմությունը կոմպակտ է և  $f: K \rightarrow K$  ֆունկցիան ցանկացած  $x, y \in K$  վեկտորների համար բավարարում է  $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$  անհավասարությանը, ապա  $f$ -ն իզոմետրիա է:

Օրինակով համոզվել, որ խնդրի պայմաններում  $K$  բազմության կոմպակտությունն էական է:

3273. Դիցուք՝  $f \in C(R^n, R^n)$ : Ապացուցել, որ  $R^n$ -ում ամենուրեք խիստ ցանկացած բազմության պասկերը  $f(R^n)$ -ում ամենուրեք խիստ է:

3274. Ծշմարի՞ս է արդյոք, որ եթե  $f: R^n \rightarrow R^n$  ֆունկցիան  $R^n$ -ում ամենուրեք խիստ ցանկացած բազմություն արտապատճերում է  $R^n$ -ում ամենուրեք խիստ բազմության վրա, ապա  $f$ -ն անընդհատ է:

$E \subset R^n$  բազմությանը կոչվում է  $F_\sigma$  ախալ բազմություն, եթե այն կարելի է ներկայացնել որպես փակ բազմություններից կազմված հաշվելի ընտանիքի միավորում:  $F_\sigma$  ախալ բազմության լրացումը  $R^n$ -ում կոչվում է  $G_\delta$  ախալ բազմություն:

3275. Ապացուցել, որ

ա) ցանկացած փակ բազմություն  $F_\sigma$  տիպի բազմություն է;

բ) ցանկացած բաց բազմություն  $F_\sigma$  տիպի բազմություն է;

գ) ցանկացած հաշվելի բազմություն  $F_\sigma$  տիպի բազմություն է;

դ)  $F_\sigma$  տիպի բազմություններից կազմված ցանկացած հաշվելի ընտանիքի միավորումը  $F_\sigma$  ախալ բազմություն է:

3276. Ապացուցել, որ ցանկացած  $G_\delta$  ախալ բազմություն կարելի է ներկայացնել որպես բաց բազմություններից կազմված հաշվելի ընտանիքի հասում:

3277. Ցույց տալ, որ ցանկացած  $F: R^m \rightarrow R^n$  ֆունկցիայի խզման կետերի բազմությունը  $F_\sigma$  սիմպլ բազմություն է (հետևաբար անընդհատության կետերի բազմությունը  $G_\delta$  սիմպլ է):

3278. Ապացուցել, որ  $F_\sigma$  սիմպլ ցանկացած  $E \subset R^m$  բազմության համար գոյություն ունի  $f: R^m \rightarrow R$  ֆունկցիա, որի խզման կետերի բազմությունը  $E$ -ն է:

3279. Դիցուք  $U$ -ն  $R^m$ -ում բաց գունդ է,  $f_n \in C(\overline{U})$  ( $n \in N$ ) և ցանկացած  $\mathbf{x} \in \overline{U}$  վեկտորի համար  $f_n(\mathbf{x}) \rightarrow f(\mathbf{x})$  ( $n \rightarrow \infty$ ): Ապացուցել, որ ցանկացած  $F \subset U$  փակ բազմության համար գոյություն ունի  $\mathbf{x}_0 \in F$ , այնպիսին, որ

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in F} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0):$$

3280. Ապացուցել, որ եթե  $K \subset R^m$  բազմությունը կոմպակտ է և  $f \in C(K, R^n)$  ֆունկցիան փոխմիարժեք է, ապա  $f^{-1}$  ֆունկցիան  $f(K) \subset R^n$  բազմության վրա անընդհատ է:

Օրինակով համոզվել, որ  $K$ -ի կոմպակտությունն այսաեղ էական է:

3281. Ցույց տալ, որ  $C(R^m, R)$  ( $m \geq 2$ ) դասի ոչ մի ֆունկցիա փոխմիարժեք չէ:

## Գլուխ 14

### Ծատ փոփոխականի ֆունկցիաների դիֆերենցումը Անքացահայտ ֆունկցիաներ

Տուն կ ց ի ա յ ի ա ս ա ն ց յ ա լ ը : Մասնակի ածանցյալներ: Տրված  $f: X \rightarrow R$  ( $X \subset R^m$ ) ֆունկցիայի և  $\mathbf{x}_0 = (x_0^1, \dots, x_0^m) \in \text{int } X$  կետի ( $X$  բազմության ներքին կետի) համար

$$\lim_{h' \rightarrow 0} \frac{f(x_0^1, \dots, x_0^{i-1}, x_0^i + h^i, x_0^{i+1}, \dots, x_0^m) - f(x_0^1, \dots, x_0^i, \dots, x_0^m)}{h^i}$$

սահմանը կոչվում է  $(x_0^1, \dots, x_0^m)$  կետում  $f$  ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալ լրտ  $x^i$ -ի և նշանակվում՝  $\frac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{x}_0)$ ,  $\partial_i f(\mathbf{x}_0)$ ,  $f'_{x^i}(\mathbf{x}_0)$  կամ  $f'_i(\mathbf{x}_0)$ :

Բարձր կարգի մասնակի ածանցյալներ: Եթե  $f: X \rightarrow R$  ( $X \subset R^m$ ) ֆունկցիան  $\mathbf{x}_0 \in \text{int } X$  կետի շրջակայրում ունի  $\frac{\partial f}{\partial x^i}$  մասնակի ածանցյալ, ապա վերջին իրենից ներկայացնում է  $\mathbf{x}$  փոփոխականի ֆունկցիա: Այդ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալն լրտ  $x^j$ -ի կոչվում է  $f$  ֆունկցիայի երկրարդ կարգի մասնակի ածանցյալ լրտ  $x^i, x^j$  փոփոխականների և նշանակվում

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \left( \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} = \partial_{ji} f = f''_{x_j x_i} = f''_{ji} :$$

Եթե  $j \neq i$ ,  $\partial_{ji} f$ -ն անվանում են  $f$  ֆունկցիայի երկրարդ կարգի խառն ածանցյալ: Համամատնորեն սահմանվում են  $f$  ֆունկցիայի ավելի քարձի կարգի մասնակի ածանցյալներ:

Թերեմ խառն ածանցյալների հավասարության վերաբերյալ: Եթե  $f: X \rightarrow R$  ( $X \subset R^m$ ) ֆունկցիայի  $\partial_{ij} f$  և  $\partial_{ji} f$  ( $i \neq j$ ) խառն ածանցյալները  $\mathbf{x}_0 \in \text{int } X$  կետի որևէ շրջակայրում գոյություն ունեն և  $\mathbf{x}_0$ -ում անընդհատ են, ապա  $\partial_{ij} f(\mathbf{x}_0) = \partial_{ji} f(\mathbf{x}_0)$ :

$X \subset R^m$  բաց բազմության վրա սրոշված իրականարժեք ֆունկցիաների դասը, որոնց ընդունակ մինչև  $p$ -րդ կարգի մասնակի ածանցյալներն  $X$ -ի վրա ամենալեռ գրայքյուն ունեն և անընդհատ են, նշանակվում է  $C^p(X)$ : Ընդհանուր դեպքում  $C^p(X, R^n)$ -ով նշանակվում է այն  $F: X \rightarrow R^n$  ֆունկցիաների դասը, որոնց կոորդինատային ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը պատկանում է  $C^p(X)$  դասին:

Դիցուք՝  $f \in C^p(G)$  ( $G \subset R^m$ ) և  $\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{h}$  ծայրակետներով հատվածն ամբողջապես լինկած է  $G$  տիպությունը: Այս պայմաններում  $\varphi(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{h})$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) ֆունկցիան  $p$  անգամ լինքերենցիկ է, ըստ որտես ցանկացած  $k \leq p$  բնական թիվի համար:

$$\varphi^{(k)}(t) = \sum_{i_1, \dots, i_k} \partial_{i_1 \dots i_k} f(\mathbf{x} + t\mathbf{h}) h^{i_1} \dots h^{i_k},$$

որտեղ զումարը տարածվում է  $1, \dots, m$  թվերից կազմված բոլոր  $(i_1, \dots, i_k)$  կարգավորված խմբերի վրա: Այս հավասարությունը սխմիլիկ զրահ են հետևյալ կերպ:

$$\varphi^{(k)}(t) = (\mathbf{h}^1 \partial_1 + \dots + \mathbf{h}^m \partial_m)^k f(\mathbf{x} + t\mathbf{h}):$$

Թեյլորի բանումները: Եթե  $X$ -ն  $R^m$ -ում տիպույթ է,  $\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{h}$  ծայրակետներով հատված լինկած է  $X$ -ում և  $f \in C^p(X)$ , ապա ճշմարիտ է Թեյլորի լոկալ բանաձևի հետևյալ ընդհանրացումը.

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} (\mathbf{h}^1 \partial_1 + \dots + \mathbf{h}^m \partial_m)^k f(\mathbf{x}) + o(|\mathbf{h}|^p), \text{ եթե } \mathbf{h} \rightarrow 0:$$

Ածանցյալ տրված սարդությամբ: Դիցուք՝  $X \subset R^m$ ,  $\mathbf{x}_0 \in \text{int } X$ : Տրված  $f: X \rightarrow R$

ֆունկցիայի և  $\mathbf{v} \in R^m$  վեկտորի համար

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{v}} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{t}$$

սահմանը կոչվում է  $\mathbf{x}_0$  կետում  $f$  ֆունկցիայի ածանցյալ լառ  $\mathbf{v}$  վեկտորի: Եթե  $\mathbf{v}$ -ն միավոր վեկտոր է՝  $|\mathbf{v}|=1$ , ածանցյալն լառ  $\mathbf{v}$ -ի հաճախ անվանում են ածանցյալ  $\mathbf{v}$  վեկտորի սղությամբ:

Եթե  $f$ -ի մասնակի ածանցյալներն  $\mathbf{x}_0$ -ի շրջակայքում գոյություն ունեն և  $\mathbf{x}_0$ -ում անընդհատ են, ապա

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^1} v^1 + \dots + \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^m} v^m, \quad \mathbf{v} = (v^1, \dots, v^m):$$

Գծային արտապատկերմաններ : Դիցուք  $E$ -ն և  $F$ -ը գծային արտածություններ են:  $L: E \rightarrow F$  ֆունկցիան կոչվում է գծային արտապատկերում, եթե ցանկացած  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in E$  վեկտորների և  $\alpha_1, \alpha_2 \in R$  թվերի համար

$$L(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2) = \alpha_1 L(\mathbf{x}_1) + \alpha_2 L(\mathbf{x}_2):$$

$L: E \rightarrow F$  գծային արտապատկերմանը բազմությունը նշանակվում է  $L(E, F)$ -ով: Այն գծային արտապատկերմանը  $L_1, L_2 \in L(E, F)$  արտապատկերմանների և  $\alpha_1, \alpha_2 \in R$  թվերի համար  $\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 \in L(E, F)$ :

Եթե  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m\}$ -ը և  $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n\}$ -ը համապատասխանաբար  $E$ -ում և  $F$ -ում բազմություններ են, ապա  $L \in L(E, F)$  արտապատկերմանը համապատասխանեցվում է  $n \times m$  կարգի  $[L] = [a_{ij}]$  ( $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ ) մատրից, որի տարրերը սրբաշխ են հետևյալ ներկայացումներից.

$$L(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \mathbf{y}_j, \quad i = 1, \dots, m:$$

Վեկտորների  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p\} \subset R^P$  համակարգը, որում յորպաշտնչուր  $\mathbf{e}_i$ , վեկտորի բոլոր

կուլումնաւաները 0 են, քացառությամբ  $i$ -րդի, որը 1 է, կոչվում է  $R^P$ -ում սահմանված բազի:

Պայմանագրիներ  $L \in L(R^m, R^n)$  արտապատկերմանը վերը սահմանված կանոնավորությունը համապատասխանեցնելիս ենթադրվում է, որ  $L$  առաջարկությունը  $n \times m$  կարգի մատրիցների բազմության միջև կատաղծվությունը համապատասխանությունն է: Այս համապատասխանությունը կատարվում է այս առողմական որ ցանկացած  $L_1, L_2 \in L(R^m, R^n)$  արտապատկերմաների և  $\alpha_1, \alpha_2 \in R$  թվերի համար  $[\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2] = \alpha_1 [L_1] + \alpha_2 [L_2]$ : Ավելացնենք նաև, որ եթե  $L \in L(R^m, R^n)$ ,  $K \in L(R^n, R^p)$ , ապա  $K \circ L \in L(R^m, R^p)$ , ըստ որում  $[K \circ L] = [K] \cdot [L]$ :

Տաճարացած  $L: R^m \rightarrow R^n$  գծային արտապատկերում անվերտաւ է.  $L(R^m, R^n) \subset C(R^m, R^n)$ : Ավելին,  $|L| = \sup_{\|\mathbf{x}\|_m=1} \frac{|L(\mathbf{x})|_n}{\|\mathbf{x}\|_m}$  -ը վերջավոր է, ընդ որում ցանկացած  $\mathbf{x} \in R^m$  վեկտորի համար  $|L(\mathbf{x})| \leq |L| \cdot \|\mathbf{x}\|$ :  $|L|$ -ը կոչվում է  $L$  գծային արտապատկերման օպերատորային նորմ:

Այս նորմով  $L(R^m, R^n)$  գծային արտապատկերմանը նորմավորված տարածություն է:

Սահմանում:  $F: X \rightarrow R^n$  ( $X \subset R^m$ ) ֆունկցիան  $\mathbf{x}_0 \in X \cap X'$  կետում կոչվում է դիֆերենցելի, եթե գոյություն ունի  $L: R^m \rightarrow R^n$  գծային արտապատկերում, այնպիսին, որ

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{|F(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - F(\mathbf{x}_0) - L(\mathbf{h})|_n}{\|\mathbf{h}\|_m} = 0 :$$

$L$ -ը կոչվում է  $\mathbf{x}_0$  կետում  $F$  ֆունկցիայի ածանցյալ, դիֆերենցիալ կամ շոշափալ արտապատկերման նշանակիչում  $F'(\mathbf{x}_0)$  կամ  $dF(\mathbf{x}_0)$ :

Որպեսզի  $F$ -ն  $\mathbf{x}_0$  կետում լինի դիֆերենցելի, անկատեշտ է և բավարար, որ  $f^i = \pi^i \circ F$  ( $i = 1, \dots, n$ ) կուրսչինատային ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը  $\mathbf{x}_0$ -ում լինի դիֆերենցելի:

Եթե  $F$ -ն  $\mathbf{x}_0$  կետում դիֆերենցելի է, ապա այն կետում անվերտաւ է:

Դիֆերենցելիության անհրաժեշտ պայմանը: Եթե  $f: X \rightarrow R$  ( $X \subset R^m$ ) ֆունկցիան  $\mathbf{x}_0 \in \text{int } X$  կետում դիֆերենցելի է, ապա այն այդ կետում լուս  $x^1, \dots, x^m$  վավերացնելու համար կուրսչինական ուղղությունը ունի մասնակի ածանցյալ, ըստ որում ցանկացած  $\mathbf{h} = (h^1, \dots, h^m)$  վեկտորի համար

$$df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(\mathbf{x}_0)h^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^m}(\mathbf{x}_0)h^m :$$

Ընդհանուր դեպքում, եթե գործ ունենք  $F: X \rightarrow R^n$  ( $X \subset R^m$ ) դիֆերենցելի ֆունկցիայի հետ, նկատի ունենալով  $L: R^m \rightarrow R^n$  գծային արտապատկերմանը  $n \times m$  կարգի մատրիցի հետ նույնացնելու մեջ պայմանակիրքածությունը, կարագ ենք գրել:

$$(dF)(\mathbf{h}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^n}{\partial x^m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (df^1)(\mathbf{h}) \\ \vdots \\ (df^n)(\mathbf{h}) \end{bmatrix},$$

որտեղ  $f^i$ -ն ( $i=1,\dots,n$ )  $F$ -ի  $i$ -րդ կոորդինատային ֆունկցիան է ( $F=(f^1,\dots,f^n)$ ):

Տրված  $F:X \times Y \rightarrow R^p$  ( $X \subset R^m, Y \subset R^n$ ) ոլիքերենցելի ֆունկցիայի համար ընդունված է նաև հետևյալ ճշանակամեջը.

$$dF = (F'_x, F'_y), \text{ որտեղ}$$

$$F'_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^p}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^p}{\partial x^m} \end{bmatrix}, \quad F'_y = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial y^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^p}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial f^p}{\partial y^n} \end{bmatrix};$$

Դիֆերենցելության բավարար պայմանը: Եթե  $f:X \rightarrow R$  ( $X \subset R^m$ ) ֆունկցիայի առաջին կարգի բոլոր մասնակի ածանցյալները գոյաբարուն ունեն  $\mathbf{x}_0 \in \text{int } X$  կետի շրջակայքում և  $\mathbf{x}_0$ -ում անընդհատ են, ապա  $f$ -ն  $\mathbf{x}_0$ -ում ոլիքերենցելի է:

Դիֆերենցման կանոնները: Եթե  $F:X \rightarrow R^n$  և  $G:X \rightarrow R^n$  ( $X \subset R^m$ ) ֆունկցիաները  $\mathbf{x}_0 \in X$  կետում դիֆերենցելի են, ապա ցանկացած  $\alpha, \beta \in R$  թիվի համար  $\alpha F + \beta G$  ֆունկցիան  $\mathbf{x}_0$ -ում նույնպես դիֆերենցելի է, ընդ որում՝

$$(\alpha F + \beta G)'(\mathbf{x}_0) = \alpha F'(\mathbf{x}_0) + \beta G'(\mathbf{x}_0);$$

Եթե  $f:X \rightarrow R$  և  $g:X \rightarrow R$  ( $X \subset R^m$ ) ֆունկցիաները  $\mathbf{x}_0 \in X$  կետում դիֆերենցելի են, ապա  $f \cdot g$ -ն, իսկ եթե  $g(\mathbf{x}) \neq 0$  ( $\mathbf{x} \in X$ ), ապա նաև  $\frac{f}{g}$ -ն,  $\mathbf{x}_0$ -ում դիֆերենցելի է, ընդ որում՝

$$(f \cdot g)'(\mathbf{x}_0) = g(\mathbf{x}_0)f'(\mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x}_0)g'(\mathbf{x}_0).$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\mathbf{x}_0) = \frac{g(\mathbf{x}_0)f'(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_0)g'(\mathbf{x}_0)}{g^2(\mathbf{x}_0)}.$$

Եթե  $F:X \rightarrow Y$  ( $X \subset R^m, Y \subset R^n$ ) ֆունկցիան դիֆերենցելի է  $\mathbf{x}_0 \in X$  կետում, իսկ  $G:Y \rightarrow R^p$  ֆունկցիան՝  $y_0 = F(\mathbf{x}_0)$  կետում, ապա  $G \circ F$  կոմպոզիցիան  $\mathbf{x}_0$ -ում դիֆերենցելի է, ընդ որում՝

$$(G \circ F)'(\mathbf{x}_0) = G'(y_0) \circ F'(\mathbf{x}_0).$$

Կսան, մատրիցային տեսքով,

$$[(G \circ F)'(\mathbf{x}_0)] = [G'(y_0)] \cdot [F'(\mathbf{x}_0)].$$

Այս վերջին կանոնը հնարավորապես է տալիս ստանալու բարդ հրականարժեք ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալները հաշվելու բանաձևերը: Օրինակ, եթե  $w = f(x, y, z)$  և  $x = \xi(u, v)$ ,  $y = \eta(u, v)$ ,  $z = \zeta(u, v)$ , ապա

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial u},$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial v}:$$

Եթե կ գ ծ ա յ ի ն և ք ա զ մ ա զ ծ ա յ ի ն Փ ո ն կ ց ի ա ն ե ր : Նշանակենք  $(R^m)^k = R^m \times R^m \times \dots \times R^m$ ,  $(R^m)^k = R^m \times (R^m)^{k-1}$ ,  $k = 3, 4, \dots$ :  $(R^m)^k$ -ն, փաստորեն,  $R^m$  տարածության  $k$  վեկտորներից կազմված  $(v^1, \dots, v^k)$  կարգավորված շարվածքների բազմությունն է:

$T: (R^m)^k \rightarrow R^n$  ֆունկցիան կոչվում է բազմազգային ( $k$ -զծային,  $k = 2$  դեպքում՝ երկզծային) ֆունկցիա, եթե ցանկացած  $i$  ինդեքսի,  $v_1^i, v_2^i \in R^m$  վեկտորների և  $\alpha_1, \alpha_2 \in R$  բվերի համար

$$T(\dots, \alpha_1 v_1^i + \alpha_2 v_2^i, \dots) = \alpha_1 T(\dots, v_1^i, \dots) + \alpha_2 T(\dots, v_2^i, \dots):$$

Որպեսզի  $T: (R^m)^k \rightarrow R^n$  ֆունկցիան լինի բազմազգային, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա կորողինատասային ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը լինի բազմազգային:

Դիցուք վեկտորների  $\{e_1, \dots, e_m\}$  համակարգն  $R^m$ -ի սահմանար բազմուն է և արևած է  $t: (R^m)^2 \rightarrow R$  երկզծային ֆունկցիան: Նշանակելով  $a_{ij} = t(e_i, e_j)$  ( $i, j = 1, \dots, m$ ), երկզծային ֆունկցիայի համար ստանում ենք հերկայացումը.

$$t(v, w) = \sum_{i,j=1}^m a_{ij} v^i w^j, \quad v = (v^1, \dots, v^m), \quad w = (w^1, \dots, w^m):$$

Ցուրաքանչյուր  $t(v, w)$  երկզծային ֆունկցիայի համապատասխանեցվում է  $t(v) = t(v, v)$  ( $v \in R^m$ ) ֆունկցիան, որը կոչվում է բառակրառություն և ճշգրիտ է պական պրոցյալ, եթե ցանկացած  $v \neq 0$  վեկտորի համար  $t(v) > 0$ : Համաձայն Սյուլվեստրի թուրնմի, որպեսզի

$$t(v) = \sum_{i,j=1}^m a_{ij} v^i v^j$$

բառակրառություն ճշգրիտ լինի պական որոշյալ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ  $[a_{ij}]_{i,j=1}^m$  մատրիցի բարու գլխավոր մինորները լինեն պական.  $\det[a_{ij}]_{i,j=1}^p > 0$ ,  $p = 1, \dots, m$ :

Բարձր կարգի ածանցյալներ: Դիցուք  $F: X \rightarrow R^n$  ( $X \subset R^m$ ) ֆունկցիան  $x_0 \in \text{int } X$  կետի  $U$  շրջակայրած դիֆերենցիլի է:

$F': U \rightarrow L(R^m, R^n)$  ֆունկցիայի ածանցյալն  $x_0$  կետում, եթե այն զոյտքյուն ունի, կոչվում է  $F$  ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալ կամ երկրար դիֆերենցիալ և նշանակվում  $F''(x_0)$ ,  $d^2 F(x_0)$ : Նկատենք, որ  $F''(x_0)$ -ը  $R^m \rightarrow L(R^m, R^n)$  գծային արտապատկերում է.

$F''(\mathbf{x}_0) \in L(R^m, L(R^m, R^n))$ : Ցանկացած  $\mathbf{v} \in R^m$  վեկտորի համար  $F''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}) \in L(R^m, R^n)$ :

Եթե  $\mathbf{w} \in R^m$ , ապա  $[F''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v})](\mathbf{w}) \in R^n$ : Հայտի առնելով  $[F''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v})](\mathbf{w})$  արագահայտության զգայնությունը թե՛ լսու  $\mathbf{v}$ -ի և թե՛ լսու  $\mathbf{w}$ -ի,  $F''(\mathbf{x}_0)$ -ն կարող ենք նոյնացնել  $F''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  երկգծային ֆունկցիայի հետա, որի արժեքներն ընկած են  $R^n$ -ում:

Եթե  $F: X \rightarrow R^n$  ( $X \subset R^m$ ) ֆունկցիան  $\mathbf{x}_0 \in \text{int } X$  կետում երկու անգամ դիմերենցելի է, ապա նրա երկրորդ կարգի բոլոր մասնակի ածանցյալները գայություն ունեն, ընդ որում ցանկացած  $\mathbf{v} = (v^1, \dots, v^m)$  և  $\mathbf{w} = (w^1, \dots, w^m)$  վեկտորների համար՝

$$(\pi^s \circ F''(\mathbf{x}_0))(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f^s(\mathbf{x}_0)}{\partial x^i \partial x^j} v^i w^j, \quad s = 1, \dots, m,$$

որտեղ  $\pi^s$ -ը  $R^n$ -ում  $s$ -րդ պրոյեկտող արտապատճենությունն է:

$F: X \rightarrow R^n$  ( $X \subset R^m$ ) ֆունկցիայի երրորդ և ավելի բարձր կարգի ածանցյալներն  $\mathbf{x}_0 \in \text{int } X$  կետում սահմանվում են  $F^{(k)}(\mathbf{x}_0) = (F^{(k-1)})'(\mathbf{x}_0)$  ( $k = 3, 4, \dots$ ) ինըուշակի սիմետրիական նկատեմ մնայն, որ  $\mathbf{x}_0$  կետում  $k$ -րդ կարգի ածանցյալը՝  $F^{(k)}(\mathbf{x}_0)$ -ն, նոյնացվում է որոշակի  $k$ -զգային ֆունկցիայի հետա, որը  $(R^m)^k$ -ն արտապատճենում է  $R^n$ -ի մեջ: Եթե  $F$ -ն  $\mathbf{x}_0$  կետում  $k$  անգամ դիմերենցելի է, ապա զոյություն ունեն  $F$ -ի ընդհան մինչև  $k$ -րդ կարգի բոլոր մասնակի ածանցյալները (կոռապիճատային ֆունկցիաների մասնակի ածանցյալները), ընդ որում՝

$$d^k f^s(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \sum_{i_1, \dots, i_k} \frac{\partial^k f^s(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_k}} v_1^{i_1} \cdots v_k^{i_k},$$

որտեղ գումարը տարածվում է  $1, \dots, m$  թվերից կազմված բոլոր  $(i_1, \dots, i_k)$  կարգավորված խմբերի վրա,  $\mathbf{v}_p = (v_p^1, \dots, v_p^m)$ ,  $p = 1, \dots, k$ :

Նկատենք, որ եթե  $\mathbf{v}_1 = \cdots = \mathbf{v}_p = (v^1, \dots, v^m)$ , ապա  $d^k f^s(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}, \dots, \mathbf{v})$ -ն, որը կոչվում է  $k$ -ճև, կարելի է սիմետրիկ երկայացնել հետևյալ տեսքով.

$$d^k f^s(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}, \dots, \mathbf{v}) = (v^1 \partial_1 + \cdots + v^m \partial_m)^k f^s(\mathbf{x}_0):$$

Անը աւագ առաջարկ կատար է  $F: G \rightarrow R^n$  ( $G \subset R^m \times R^n$ ) ֆունկցիան: Կատարենք, որ  $A \subset G$  բազմության վրա որպահած  $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$  ֆունկցիան բավարարում է  $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$  հավասարմանը, եթե  $A$ -ի վրա ամենուրեք  $F(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$ : Եթե տվյալ դասունի պատկանող և նշված հավասարմանը բավարարու  $f$  ֆունկցիան միակն է, ապա այն անվանում են այդ հավասարմանց որոշված ամրացման ֆունկցիա:

Թեորեմ ամրացման ֆունկցիայի վերաբերյալ: Եթե  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in R^m \times R^n$  կետի  $U$  շրջակայրում որոշված  $F: U \rightarrow R^n$  ֆունկցիայի համար տեղի ունեն հետևյալ երեք պայմանները՝

1.  $F \in C^p(U, R^n)$ ,  $p \geq 1$ ;
2.  $F(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$ ;

3.  $\det F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ .

ապա գոյություն ունեն  $x_0$  և  $y_0$  կետերի համապատասխանաբար  $U_{x_0}$  և  $U_{y_0}$  շրջակայքեր և  $f \in C^p(U_{x_0}, U_{y_0})$  ֆունկցիա, այնպիսիք, որ ցանկացած  $(x, y) \in U_{x_0} \times U_{y_0}$  կետի համար  $F(x, y) = 0$  այն և միայն այս դեպքում, եթե  $y = f(x)$ : Ընդունին,  $f$  ֆունկցիայի ածանցյալը հաշվված է հետևյալ բանաձևով.

$$[f'(x)] = -[F'_y(x, f(x))]^{-1} \cdot [F'_x(x, f(x))]:$$

$F: R^n \rightarrow R^n$  ֆունկցիայի  $F'(x_0)$  ածանցյալի մասարիցը, ստանդարտ բազիսում, կոչվում է Յակոբիի մասարից, իսկ եթե  $m = n$  այդ մասարիցի որոշչը՝  $\det F'(x_0)$ -ն, կոչվում է  $F$  արտապատկերման յակոբիան: Եթենքն  $F = (f_1, \dots, f_n)$  արտապատկերման յակոբիանը նշանակած են  $\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x^1, \dots, x^n)}$ :

Թե ո՞ր են հակառակ արգումենտները արտապատկերման  $V$ -ի վրա:  $f: U \rightarrow V$  արտապատկերմանը, որտեղ  $U$ -ն և  $V$ -ն  $R^n$ -ում բաց բազմություններ են, կոչվում է  $C^p$ -ով պատկերման, եթե

1.  $f$ -ն  $U$ -ն վիճակարժեք արտապատկերման  $V$ -ի վրա;

2.  $f \in C^p(U, V)$ ,  $f^{-1} \in C^p(V, U)$ :

Եթե  $p = 0$  ( $f$ -ն ու  $f^{-1}$ -ն անընդհատ են),  $f$ -ը կոչվում է հոմոտոմիզմ, իսկ  $p = 1$  դեպքում՝ պատկերման պատկերման:

Թերեմ: Դիցուք  $G$ -ն  $R^n$ -ում բաց բազմություն է,  $f \in C^p(G, R^n)$  ( $p \geq 1$ ) և  $x_0 \in G$ : Եթե  $x_0$  կետում  $f$  արտապատկերման յակոբիանը՝  $\det f'(x_0)$ -ն, զրո չէ, ապա գոյություն ունեն  $x_0$  կետի  $U_{x_0} \subset G$  և  $y_0 = f(x_0)$  կետի  $V_{y_0} \subset f(G)$  շրջակայքեր, այնպիսիք, որ  $f: U_{x_0} \rightarrow V_{y_0}$  արտապատկերման  $C^p$ -ով պատկերման է: Ըստ որում, եթե  $x \in U_{x_0}$  և  $y = f(x)$ , ապա

$$(f^{-1})'(y) = [f'(x)]^{-1}:$$

Ածանցյալի կիրառություն ներկայացնենք: Կորի շոշափակ:  $\Gamma: [\alpha; \beta] \rightarrow R^3$  կորը կոչվում է պարկ, եթե  $\Gamma \in C^1([\alpha; \beta], R^3)$  և ամենուրեք  $\Gamma'(t) \neq 0$ : Դիցուք  $x_0 = (x_0^1, x_0^2, x_0^3) = \Gamma(t_0)$ ,  $t_0 \in [\alpha; \beta]$ : Եթե  $\Gamma'(t_0) \neq 0$ , ապա  $x_0$  կետում կորի շոշափակը որոշվում է

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\Gamma'(t_0) \quad (-\infty < t < +\infty)$$

հավասարությունվ: Նշանակելով  $\Gamma'(t_0) = (m, n, p)$  և բերված հավասարություն արտարկերով  $\tau$  պարամետրը՝ շոշափողի հավասարությ կարելի է բերել կանոնական աեւը:

$$\frac{x^1 - x_0^1}{m} = \frac{x^2 - x_0^2}{n} = \frac{x^3 - x_0^3}{p}:$$

Մակերեւայքի շոշափուղ հարթություն և մակերեւայքի նորմալ: Դիցուք  $G$ -ն  $R^2$ -ում այլուր է և  $S \in C(G, R^3)$ :  $S$  արտապատկերման արժեքների բազմությունը  $R^3$ -ում կանվանենք

**մակերևույթ:** Եթե  $S \in C^1(G, R^3)$  և ամենուրեք  $\text{rang}[S'(u, v)] = 2$ , ապա մակերևույթը կանվանենք պարզի: Եռաչափի էվլիպսան տարածության կետերը ներկայացնելով  $(x; y; z)$  կոորդինատներով՝ մակերևույթի համար ստանում ենք  $x = \xi(u, v)$ ,  $y = \eta(u, v)$ ,  $z = \zeta(u, v)$ ,  $(u, v) \in G$ , հավասարությունները, որոնք կոչվում են մակերևույթի տպաբանարարներ: Հավասարություններ:

Եթե  $S(G)$  մակերևույթը ուրիշ է և  $S$  արտապատկերման ածանցյալը արված  $(u_0, v_0) \in G$  կետում ունի մարդիմավ ուսուցիչը  $\text{rang}[S'(u_0, v_0)] = 2$ , ապա  $(x_0, y_0, z_0) = S(u_0, v_0)$  կետում մակերևույթի շոշափող հարթությունը արված է:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

հավասարությունվ, որում՝

$$A = \det \begin{bmatrix} \eta'_u & \eta'_v \\ \zeta'_u & \zeta'_v \end{bmatrix}, \quad B = \det \begin{bmatrix} \zeta'_u & \zeta'_v \\ \xi'_u & \xi'_v \end{bmatrix}, \quad C = \det \begin{bmatrix} \xi'_u & \xi'_v \\ \eta'_u & \eta'_v \end{bmatrix}:$$

Շոշափող հարթությանը ուղղահայաց  $\mathbf{n} = (A; B; C)$  վեկտորը կոչվում է տրված  $(x_0, y_0, z_0)$  կետում  $S(G)$  մակերևույթի նորմավ: Նորմավին համոդրված միավոր երկարությամբ վեխտորի կոորդինատները կոչվում են նորմավի ուղղագիր կոորդինատներ:

$$(\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma) = \pm \left( \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right).$$

որտեղ  $\alpha, \beta, \gamma$ -ն նորմավի համապատասխանարար  $Ox, Oy, Oz$  առանցքների հետ կազմած անկյուններն են:

Եթե մակերևույթը արված է  $F(x, y, z) = 0$  հավասարաւորություն և այլ մակերևույթին պատկանող  $(x_0, y_0, z_0)$  կետում գոյություն ունեն  $F'_x, F'_y, F'_z$  մասնակի ածանցյալները, որոնք միաժամանակ զրո չեն, ապա  $(x_0, y_0, z_0)$  կետում շոշափող հարթության հավասարությունը հետևյալն է.

$$F'_x(x - x_0) + F'_y(y - y_0) + F'_z(z - z_0) = 0:$$

Եքսարենությունը: Տրված  $f: X \rightarrow R$  ( $X \subset R^m$ ) ֆունկցիայի համար  $\mathbf{x}_0 \in \text{int } X$  կետը կոչվում է լիկալ մինիմումի (մաքսիմումի) կետ, եթե գոյություն ունի  $\mathbf{x}_0$ -ի  $U_{\mathbf{x}_0} \subset X$  շրջակայր, որում  $f$  անենուրեք  $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$  ( $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$ ): Մինիմումի և մաքսիմումի կետերը միասին կոչվում են էքստրեմումի կետեր:

Եքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը: Եթե  $f: X \rightarrow R$  ( $X \subset R^m$ ) ֆունկցիայի համար  $\mathbf{x}_0 \in \text{int } X$  կետը լիկալ էքստրեմումի կետ և  $\mathbf{x}_0$ -ում  $f$ -ն լցու բոլոր փոփոխականների անի մասնակի ածանցյալներ, ապա

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(\mathbf{x}_0) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x^m}(\mathbf{x}_0) = 0:$$

Եթե  $\mathbf{x}_0 \in X$  կետում  $f$  ֆունկցիայի բոլոր մասնակի ածանցյալները զրո են, ապա  $\mathbf{x}_0$ -ն կոչվում է կրիտիկական կետ:

Եքստրեմումի բավարար պայմանը: Դիցուք  $f \in C^2(X)$ , և  $\mathbf{x}_0 \in \text{int } X$  կետը  $f$ -ի համար լիդիական կետ է: Եթե

$$\tau(\mathbf{h}) = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^i \partial x^j} h^i h^j$$

բառակարգային ձևը դրական որաշյալ է, ապա  $x_0$ -ն լոկալ մինիմումի կետ է, իսկ եթե դրական որաշյալ է  $-\tau(\mathbf{h})$  ձևը, ապա  $x_0$ -ն լոկալ մաքսիմումի կետ է: Եթե  $\tau(\mathbf{h})$ -ը տարրեր կ-երի համար ընդունում է սարքեր հշանի արժեքներ, ապա  $x_0$ -ն էքստրեմումի կետ չէ:

**Պայմանական (հարաբերական) էքստրեմումներ:** Տրված են  $f: X \rightarrow R$  ( $X \subset R^{m+n}$ ) ֆունկցիան և հավասարությունների (կապի հավասարությունների) հետևյալ համակարգը.

$$\Phi_i(x^1, \dots, x^m, x^{m+1}, \dots, x^{m+n}) = 0, \quad i = 1, \dots, n:$$

Ասում են, որ կապի հավասարություններին բավարարող  $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^{m+n}) \in \text{int } X$  կետն է  $f$  ֆունկցիայի հարաբերական մինիմումի (մաքսիմումի) կետ է, եթե  $x_0$  կետի որևէ շրջակայի բոլոր այն  $\mathbf{x}$  կետերի համար, որոնք բավարարում են կապի հավասարություններին, ճշմարիտ է  $f(\mathbf{x}) \geq f(x_0)$  ( $f(\mathbf{x}) \leq f(x_0)$ ) անհավասարությունը:

$$\text{Կիցուք: } \Phi_i \in C^1(X), \quad i = 1, \dots, n: \quad \text{Եթե } \det \left[ \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^{m+j}} \right]_{i,j=1}^n \neq 0, \text{ ապա, համաձայն անբա-}$$

ցահայութ ֆունկցիայի մասին բերեմի,  $x_0$  կետի իճ-որ շրջակայրում կապի հավասարություններից  $x^{m+1}, \dots, x^{m+n}$  անհայտները որաշվում են որպես  $x^1, \dots, x^m$  անհայտներից կախված անբացահայտ ֆունկցիաներ.

$$x^{m+j} = \varphi^j(x^1, \dots, x^m), \quad j = 1, \dots, n:$$

Արդյունքում,  $x_0$  կետում  $f(x^1, \dots, x^m, x^{m+1}, \dots, x^{m+n})$  ֆունկցիայի հարաբերական էքստրեմումի հետազոտման համարկեցվում է  $(x_0^1, \dots, x_0^m)$  կետում

$$g(x^1, \dots, x^m) = f(x^1, \dots, x^m, \varphi^1(x^1, \dots, x^m), \dots, \varphi^n(x^1, \dots, x^m))$$

բարդ ֆունկցիայի բացարձակ էքստրեմումի հետազոտմանը:

Հաճախ, եթե  $\varphi^1, \dots, \varphi^n$  ֆունկցիաների բացահայտ տեսքը ստանան անհար է,  $f$  ֆունկցիայի հարաբերական էքստրեմումները զանեալ համար կիրավում է Լագրանժի անորոշ բազմականակիշների մեջը, որի եռյալուն ենալիքան է. ներմուծելով նախապես անհայտ  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  բազմականակիշներ՝ կազմում են Լագրանժի  $F = f + \lambda_1 \Phi_1 + \dots + \lambda_n \Phi_n$  օժանդակ ֆունկցիան: Եթե  $f, \Phi_1, \dots, \Phi_n \in C^1(X)$ , ապա լուծելով  $x^1, \dots, x^{m+n}, \lambda_1, \dots, \lambda_n$  անհայտներով  $m+2n$  հավասարությունների՝

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x^i} = 0, & i = 1, \dots, m+n, \\ \Phi_i = 0, & i = 1, \dots, n, \end{cases}$$

համակարգը, զանում են քեզ՝  $\lambda_1^0, \dots, \lambda_n^0$  բազմականակիշները, թէ՝  $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^{m+n})$  լոփակական կետը: Եթե այդ կետում  $F = f + \lambda_1^0 \Phi_1 + \dots + \lambda_n^0 \Phi_n$  օժանդակ ֆունկցիայի երկրորդ կարգի դիֆերենցիալի համապատասխանալ  $d^2 F(h, h)$  բառակարգային ձևը  $d\Phi_i(x_0)(\mathbf{h}) = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) հավասարություններին բավարարող  $\mathbf{h}$ -երի համար դրական (բացարձակ) որաշյալ է, ապա  $x_0$ -ն  $f$ -ի համար հարաբերական մինիմումի (մաքսիմումի) կետ է:

3282. Ցույց տալ, որ

$$f'_x(x, b) = \frac{d}{dx} [f(x, b)]:$$

3283. Հաշվել  $f_x'(x, y)$ -ը և  $f_y'(x, y)$ -ը նշված կետում.

ա)  $f(x, y) = (x-1)e^{xy-x-y+1} + (y^3 - 1)\sin \pi x, M(1; 1);$

բ)  $f(x, y) = 2(x^2 - 1)\arctg y + y^4, M(1; 1);$

գ)  $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}, M(0; 0);$

դ)  $f(x, y) = |x| + |y| - |x + y|, M(0; 0);$

Դասներ մասնակի ածանցյալները (3284-3288).

3284. ա)  $f(x, y) = x \sin(x + y); f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yy};$

բ)  $f(x, y) = xy + \frac{x}{y}; f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy};$

գ)  $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy};$

դ)  $f(x, y) = \operatorname{tg} \frac{x^2}{y}; f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy};$

3285. ա)  $f(x, y) = x^y; f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy};$

բ)  $f(x, y) = \arctg \frac{y}{x}; f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy};$

գ)  $f(x, y) = \arctg \frac{x+y}{1-xy}; f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy};$

դ)  $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy};$

3286. ա)  $f(x, y) = \sin \frac{x}{y}; f'''_{xxx}, f'''_{xyy};$

բ)  $f(x, y) = \frac{\cos x^2}{y}; f'''_{xxx}, f'''_{xyy};$

3287. ա)  $f(x, y) = \ln(1 + 2x + 3y)$ ;  $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}$ ;

բ)  $f(x, y) = \ln(x + y^2)$ ;  $\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}$ ;

գ)  $f(x, y, z) = e^{x^2 + y^2 + z^2}$ ;  $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$ ,  $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$ ;

դ)  $f(x, y, z) = x^{\frac{y}{z}}$ ;  $\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial z}$ :

3288. ա)  $f(x, y) = (x - a)^n (y - b)^m$ ,  $\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^n \partial y^m}$ ;

բ)  $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$ ,  $\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}$ ;

գ)  $f(x, y) = (x^2 + y^2) e^{x+y}$ ,  $\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}$ ;

դ)  $f(x, y) = xyz e^{x+y+z}$ ,  $\frac{\partial^{m+n+k} f}{\partial x^m \partial y^n \partial z^k}$ :

3289. ճշմարիկա է արդյոք  $f''_{xy}(0,0) = f''_{yx}(0,0)$  հավասարությունը, եթե

ա)  $f(x, y) = (x+2)^{v+1}$ ; բ)  $f(x, y) = \arcsin \frac{x^2+1}{y-3}$ ;

գ)  $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$  դ)  $f(x, y) = \begin{cases} xy, & |y| \leq |x|, \\ -xy, & |y| > |x|. \end{cases}$

3290. Գոյություն ունի՞ արդյոք  $f''_{xy}(0,0)$  մասնակի ածանցյալը, եթե

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$$

Գտնել և ֆունկցիայի առաջին և երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալները (3291-3292).

3291. ա)  $u = f(x^2 + y^2 + z^2)$ ; բ)  $u = f(x^2 - y^2)$ ;

$$q) u = xy + f(x - y);$$

$$\eta) u = f(xy)g(x - y);$$

3292. a)  $u = f\left(x, \frac{x}{y}\right);$

$$p) u = f(x + y, x - y);$$

$$q) u = f(\sin x, \cos y);$$

$$\eta) u = f(xy, x, y);$$

3293. Դիցուք՝  $f$ -ը երկու անգամ դիֆերենցելի ֆունկցիա է,  $u = f(r)$ ,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} : \text{Ապացուցել, որ}$$

$$\Delta u = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r),$$

որտեղ  $\Delta$ -ն Լապլասի օպերատորն է.  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ :

3294. Սառուցել, որ  $u = \ln \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$  ֆունկցիան բավարարում է Լապլասի հավասարմանը (հարմոնիկ է).  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ :

3295. Ապացուցել, որ եթե  $u = u(x, y)$  ֆունկցիան հարմոնիկ է, ապա  $v = u(x + y, x - y)$  ֆունկցիան նույնպես հարմոնիկ է:

Դիցուք՝  $f$ -ը և  $g$ -ն երկու անգամ դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են: Սառուցել, որ  $u$  ֆունկցիան բավարարում է նշված հավասարմանը (3296-3299).

3296.  $u = f(x - at) + g(x + at)$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ :

3297.  $u = xf(x + y) + yg(x + y)$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ :

3298.  $u = f\left(\frac{y}{x}\right) + xg\left(\frac{y}{x}\right)$ ,  $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ :

3299.  $u = f(x + g(y))$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ :

3300. Դիցուք  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}$ -ը  $R^m$ -ում սատանդարաւ բազիսն է: Ցույց տալ, որ եթե  $\mathbf{x}_0 \in \text{int } X$  ( $X \subset R^m$ ) կեսում գոյություն ունեն  $f : X \rightarrow R$  ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալները, ապա

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{e}_i} = \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^i}, \quad i = 1, \dots, m:$$

3301. Դիցուք  $f: X \rightarrow R$  ( $X \subset R^m$ ) ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալները  $x_0 \in \text{int } X$  կետում անընդհատ են: Սաւուգել, որ եթե  $\mathbf{v} \in R^m$  վեկտորը ստանդարտ բազիսի վեկտորների (կոորդինատների առանցքների) հետ կազմում է համապատասխանաբար  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  անկյուններ՝

$$\alpha_i = \arccos \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_i \rangle}{|\mathbf{v}|}, \quad i = 1, \dots, m,$$

ապա  $\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{v}_0} = \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^1} \cos \alpha_1 + \dots + \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^m} \cos \alpha_m$ , որտեղ  $\mathbf{v}_0$ -ն և  $\mathbf{v}$ -ին համապատասխանաբար

ուղղված միավոր վեկտորն է:

3302. Դանել  $M(1;1)$  կետում  $Ox$  առանցքի դրական ուղղության հետ 60° անկյուն կազմող վեկտորի ուղղությամբ  $z = x^2 - y^2$  ֆունկցիայի ածանցյալը:

3303. Դանել  $M(1;1)$  կետում  $Ox$  առանցքի դրական ուղղության հետ  $\alpha$  անկյուն կազմող վեկտորի ուղղությամբ  $z = x^2 - xy + y^2$  ֆունկցիայի ածանցյալը: Ո՞ր ուղղությամբ այդ ածանցյալը՝

- ա) կունենա ամենամեծ արժեք;
- բ) կունենա ամենափոքր արժեք;
- գ) կլինի հավասար 0 -ի:

3304. Դանել  $M(1;1;1)$  կետում կոորդինատների  $Ox, Oy$  և  $Oz$  առանցքների հետ համապատասխանաբար  $\alpha, \beta$  և  $\gamma$  անկյուններ կազմող վեկտորի ուղղությամբ  $u = xyz$  ֆունկցիայի ածանցյալը:

\*\*\*

3305. Ապացուցել, որ  $f: R^2 \rightarrow R$  ֆունկցիան  $(x_0, y_0)$  կետում դիֆերենցելի է այն և միայն այն դեպքում, եթե գոյություն ունեն  $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$  և  $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$  մասնակի ածանցյալները, ընդ որում՝

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0, y_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ &= \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y + o(\rho), \quad \rho \rightarrow 0, \end{aligned}$$

որտեղ  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ :

3306. Ապացուցել, որ եթե  $f: R^m \rightarrow R^n$  ֆունկցիան բավարարում է  $|f(\mathbf{x})| = o(|\mathbf{x}|)$  և  $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  պայմաններին, ապա  $f$ -ը  $\mathbf{0}$  կետում դիֆերենցելի է: Դանել  $f'(\mathbf{0})$ -ն:

3307. Ցույց տալ, որ հետևյալ ֆունկցիաները  $(0;0)$  կետում դիֆերենցելի չեն.

$$\text{ա) } f(x, y) = \sqrt[3]{xy}; \quad \text{բ) } f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} :$$

3308. Հետազոտել  $f: R^2 \rightarrow R$  ֆունկցիայի դիֆերենցելիությունը  $(0;0)$  կետում.

$$\text{ա) } f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}; \quad \text{բ) } f(x, y) = \sqrt[3]{x^4 + y^4} ;$$

$$\text{գ) } f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0; \end{cases} \quad \text{դ) } f(x, y) = \sqrt[3]{x} \sin y :$$

3309. Դանել դիֆերենցիալ և երկրորդ կարգի դիֆերենցիալին համապատասխանող քառակուսային ձևը.

$$\text{ա) } f(x, y) = x''y''; \quad \text{բ) } f(x, y) = e^{xy};$$

$$\text{գ) } f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \text{դ) } f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} ;$$

$$\text{է) } f(x, y, z) = xy + yz + zx; \quad \text{զ) } f(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y^2} :$$

3310. Դանել  $df(1;1;1)$ -ը և  $d^2 f(1;1;1)$ -ը, եթե  $f(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}$ :

3311. Ապացուցել, որ եթե  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , ապա  $d^2 f \geq 0$ :

3312. Ստուգել, որ

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{եթե } xy = 0, \\ 1, & \text{եթե } xy \neq 0 \end{cases}$$

ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալները  $(0;0)$  կետում գոյություն ունեն, բայց  $f$ -ն այդ կետում անընդհատ չէ:

3313. Ստուգել, որ  $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$  ֆունկցիան  $(0;0)$  կետում անընդհատ է, ունի  $f'_x(0,0)$  և  $f'_y(0,0)$  մասնակի ածանցյալներ, բայց  $(0;0)$  կետում դիֆերենցելի չէ:

3314. Սսուցել, որ

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

ֆունկցիան  $(0; 0)$  կետի շրջակայքում անընդհատ է, ունի  $f'_x(x, y)$ ,  $f'_y(x, y)$  սահմանափակ մասնակի ածանցյալներ, բայց  $(0; 0)$  կետում դիֆերենցելի չէ:

3315. Սսուցել, որ

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

ֆունկցիայի  $f'_x(x, y)$ ,  $f'_y(x, y)$  մասնակի ածանցյալները  $(0; 0)$  կետում խզվող են, անսահմանափակ, սակայն, այնուամենայնիվ,  $f$ -ն այդ կետում դիֆերենցելի է:

3316. Սսուցել, որ

$$f(x, y) = x + y + \sqrt{|xy|}$$

ֆունկցիան  $(0; 0)$  կետում ցանկացած ուղղությամբ ունի ածանցյալ, սակայն այդ կետում դիֆերենցելի չէ:

Դանել  $f : R^2 \rightarrow R$  ֆունկցիայի ածանցյալը (3317-3318).

3317.  $f(x, y) = x + y$ ;

3318.  $f(x, y) = xy$ :

Դանել ֆունկցիայի ածանցյալը մատրիցային տեսքով (3319-3322).

3319.  $f(x, y) = \sin(xy)$ :

3320.  $f(x, y, z) = (x + y)^z$ :

3321.  $F(x, y, z) = (x^y; z)$ :

3322.  $F(x, y) = (\cos(x \sin y), x)$ :

Ներկայացնել  $M$  կետում ֆունկցիայի առաջին և երկրորդ կարգի դիֆերենցիալները որպես  $\mathbf{h} \in R^m$  կամ  $(\mathbf{h}; \mathbf{l}) \in R^m \times R^m$  վովովականներից կախված համապատասխանաբար գծային կամ երկգծային ֆունկցիա (3323-3328).

3323.  $f(x, y) = x^2 y^2$ ;  $M(a; b)$ :

3324.  $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ ;  $M(a; b; c)$ :

3325.  $f(x, y) = \frac{x}{y}$ ;  $M(x_0; y_0)$ :

3326.  $f(x, y) = \cos(e^x y)$ ;  $M(x; y)$ :

3327.  $f(x, y) = e^{xy}$ ;  $M(x; y)$ :

$$3328. f(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y^2}; M(x_0; y_0; z_0):$$

Կազմել  $M$  կենում ֆունկցիայի երկրորդ կարգի դիֆերենցիալին համապատասխանող քառակուսային ձևը (3329-3330).

$$3329. f(x, y) = x \ln(xy); M(1;1): \quad 3330. f(x, y, z) = \frac{yz}{x}; M(1;2;3):$$

Դիցուք  $f$ -ը երկու անգամ դիֆերենցելի է: Կազմել  $u$  ֆունկցիայի երկրորդ կարգի դիֆերենցիալին համապատասխանող քառակուսային ձևը (3331-3340).

$$3331. u = f(t), t = x + y:$$

$$3332. u = f(t), t = \frac{y}{x}:$$

$$3333. u = f(t), t = xyz:$$

$$3334. u = f(\xi, \eta), \xi = ax, \eta = by:$$

$$3335. u = f(\xi, \eta), \xi = x + y, \eta = x - y:$$

$$3336. u = f(\xi, \eta), \xi = xy, \eta = \frac{x}{y}:$$

$$3337. u = f(\xi, \eta, \zeta), \xi = xy, \eta = x - y, \zeta = x + y:$$

$$3338. u = f(\xi, \eta, \zeta), \xi = x^2, \eta = y^2, \zeta = z^2:$$

$$3339. u = f(2x, 3y, 4z):$$

$$3340. u = f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2):$$

Անցնելով թերուային կոորդինատների՝  $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$  ( $\rho = \rho(\varphi)$ ), ձևափոխել դիֆերենցիալ հավասարումը  $\Phi(\varphi, \rho, \rho'(\varphi)) = 0$  սեպի (3341-3342).

$$3341. y' = \frac{x+y}{x-y}:$$

$$3342. (xy' - y)^2 = 2xy(1 + y'^2):$$

Անցնելով  $u, v$  նոր անկախ վովուխականների՝ ձևափոխել դիֆերենցիալ հավասարումը  $\Phi(u, v, z, z'_u, z'_v) = 0$  սեպի (3343-3344).

$$3343. \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} = 0; u = x + y, v = x - y:$$

$$3344. x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z; u = x, v = \frac{y}{x}:$$

Ներմուծելով  $u, v, w = w(u, v)$  նոր վովուխականներ, ձևափոխել դիֆերենցիալ հավասարումը (3345-3348).

$$3345. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} = z; x = u + v, y = u - v, z = we^{v-u}:$$

$$3346. y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = (y-x)z; u = x^2 + y^2, v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, w = \ln z - x - y:$$

$$3347. y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{x}; yu = x, vu = x, w = xz - y:$$

$$3348. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0; u = x + y, v = x - y, w = xy - z:$$

Տրված  $M$  կետի շրջակայրում ֆունկցիան ներկայացնել Թեյլորի բանաձևով (3349-3351).

$$3349. f(x, y) = (x-1)^2 + (x+y)^2, M(0;0):$$

$$3350. f(x, y) = x - 2y + x^2 - 3xy + 4y^2, M(1;2):$$

$$3351. f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz, M(1;1;1):$$

\*\*\*

Դասնել ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումի կետերը (3352-3367).

$$3352. \text{ա)} z = x^2 + (y-1)^2; \quad \text{բ)} z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y:$$

$$3353. \text{ա)} z = x^2 - (y-1)^2; \quad \text{բ)} z = (x-y+1)^2:$$

$$3354. \text{ա)} z = x^3 + y^3 - 3xy; \quad \text{բ)} z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2:$$

$$3355. \text{ա)} z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2; \quad \text{բ)} z = x^2 y^3 (6-x-y):$$

$$3356. \text{ա)} z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y} \quad (x > 0, y > 0);$$

$$\text{բ)} z = xy \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (a > 0, b > 0):$$

$$3357. \text{ա)} z = (5x + 7y - 25)e^{-(x^2+xy+y^2)},$$

$$\text{բ)} z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}:$$

$$3358. z = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y:$$

$$3359. z = \sin x + \cos y + \cos(x-y), \left( 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right):$$

$$3360. z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}: \quad 3361. z = xy \ln(x^2 + y^2):$$

$$3362. u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z: \quad 3363. u = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z:$$

$$3364. u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} \quad (x > 0, y > 0, z > 0):$$

$$3365. u = xyz(4a - x - y - z):$$

$$3366. \text{Սաւուգել, որ } z = (1 + e^y) \cos x - ye^y \text{ ֆունկցիան ունի անվերջ թվով մաքսիմումներ և չունի մինիմում:}$$

$$3367. \text{Սաւուգել, որ } z = (y - x^2)(y - 2x^2) \text{ ֆունկցիան } (0;0) \text{ կետում ցանկացած } x = t \sin \alpha, y = t \cos \alpha \text{ ուղղով ունի մինիմում, սակայն այդ կետը էքստրեմումի կետ չէ:}$$

3368. Կազմել արված  $M$  կետում կորի շոշափողի հավասարումը.

$$\text{ա) } x = a \sin^2 t, y = b \sin t \cos t, z = c \cos^2 t; M\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; \frac{c}{2}\right);$$

$$\text{բ) } y = x, z = x^2; M(1;1;1):$$

Կազմել մակերևույթի շոշափող հարթության հավասարումը և գումել նորմալ ուղղորդ կոսինուսները (3369-3372).

$$3369. z = xy, M(2;1;2):$$

$$3370. z = x^2 + y^2, M(1;1;2):$$

$$3371. z = \sin \frac{x}{y}, M(\pi;1;0):$$

$$3372. x^2 + y^2 + z^2 = 1, M(x_0; y_0; z_0):$$

Բ

3373. Դիցուք՝  $L \in L(R^m, R^n)$ : Ապացուցել, որ գոյություն ունի  $M$  թիվ, այնպիսին, որ ցանկացած  $\mathbf{x} \in R^m$  վեկտորի համար  $|L(\mathbf{x})| \leq M|\mathbf{x}|$ :

Այսաւելից հետևեցնել, որ ցանկացած  $L \in L(R^m, R^n)$  գծային արտապատկերում  $R^m$ -ի վրա հավասարաչափ անընդհատ է:

3374. Ապացուցել, որ ցանկացած  $L : R^m \rightarrow R^n$  գծային արտապատկերում դիֆերենցիլ է, ըստ որում ամենուրեք՝  $L'(\mathbf{x}) = L$ :

Մասնավորապես,  $\pi^i : R^m \rightarrow R$  ( $i = 1, \dots, m$ ) պրոյեկտող արտապատկերման համար  $d\pi^i = \pi^i$ :

3375. Դիցուք  $f : X \rightarrow R$  ( $X \subset R^m$ ) ֆունկցիան  $\mathbf{x}_0 \in \text{int } X$  կեսում դիֆերենցիլի է: Ցույց տայ, որ

$$df(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^1} dx^1 + \cdots + \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^m} dx^m = \langle f'(\mathbf{x}_0), d\mathbf{x} \rangle,$$

որտեղ նշանակված է՝  $dx^i = d\pi^i$  ( $i = 1, \dots, m$ ),  $d\mathbf{x} = (dx^1, \dots, dx^m)$ :

3376. Սատուգել, որ  $f : X \rightarrow R$  ( $X \subset R^m$ ) ֆունկցիայի դիֆերենցիալի անարը կմնա անվտանգ, եթե  $\mathbf{x}$ -ը դառնա մեկ այլ,  $t$  վտանգականի ֆունկցիա.  $\mathbf{x} = \Phi(t) = (\varphi^1(t), \dots, \varphi^m(t))$ ,  $\varphi^i(t) \in C^1(R^p)$ ,  $i = 1, \dots, m$ : Այլ կերպ՝ ցույց տայ, որ

$$d(f \circ \Phi) = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^m} dx^m.$$

Որտեղ  $dx^i = \frac{\partial \varphi^i}{\partial t^1} dt^1 + \cdots + \frac{\partial \varphi^i}{\partial t^p} dt^p$ ,  $i = 1, \dots, m$ :

3377. Ապացուցել, որ  $F : X \rightarrow R^n$  ( $X \subset R^m$ ) ֆունկցիան  $\mathbf{x}_0 \in \text{int } X$  կեսում դիֆերենցելի է այն և միայն այն դեպքում, եթե զոյություն ունի  $L \in \mathcal{L}(R^m, R^n)$  գծային արտապատկերում, այնպիսին, որ

$$F(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = F(\mathbf{x}_0) + L(\mathbf{h}) + o(\mathbf{h}), \quad \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}:$$

3378. Ապացուցել, որ արված կեսում դիֆերենցելի ֆունկցիան այդ կեսում անընդհատ է:

3379. Ցույց տայ, որ դիֆերենցելի ֆունկցիայի ածանցյալը միակն է:

3380. Ապացուցել, որ եթե  $F : X \rightarrow R$  ( $X \subset R^m$ ) ֆունկցիան  $\mathbf{x}_0 \in \text{int } X$  կեսում դիֆերենցելի է, ապա ցանկացած  $\mathbf{v} \in R^m$  վեկտորի համար

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{v}} = f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}):$$

3381. Դիցուք  $f : X \rightarrow R$  ֆունկցիան  $X \subset R^m$  բաց բազմության վրա բավարրում է Լիպշչիցի պայմանին և  $\mathbf{x}_0 \in X$ : Ապացուցել, որ եթե զոյություն ունի  $L \in \mathcal{L}(R^m, R)$  գծային արտապատկերում այնպիսին, որ ցանկացած  $\mathbf{v} \in R^m$  վեկտորի համար

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{v}} = L(\mathbf{v}),$$

ապա  $f$ -ն  $\mathbf{x}_0$ -ում դիֆերենցելի է, ընդ որում՝  $f'(\mathbf{x}_0) = L$ :

3382. Դիցուք  $R^m$ -ում  $p_1(\mathbf{x})$ ,  $p_2(\mathbf{x})$ ,  $p_3(\mathbf{x})$  ֆունկցիաները հետևյալ կերպ սահմանված նորմերն են.

$$p_1(\mathbf{x}) = \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^m)^2},$$

$$p_2(\mathbf{x}) = |x^1| + \dots + |x^m|,$$

$$p_3(\mathbf{x}) = \max_{1 \leq i \leq m} |x^i|:$$

Դրանցից յուրաքանչյուրի համար գտնել այն կետերի բազմությունը, որտեղում համապատասխան նորմը դիֆերենցելի է:

3383. Դիցուք  $f(x, y)$  ֆունկցիան  $(x_0; y_0)$  կետի շրջակայքում ունի  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  և

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  մասնակի ածանցյալներ: Ապացուցել խառն ածանցյալների հավասարաթյան վերաբերյալ թեորեմի հետևյալ ուժեղացումը. Եթե  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ -ը  $(x_0; y_0)$

կետում անընդիհաւ է, ապա այդ կետում գոյություն ունի նաև  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  մասնակի ածանցյալը, ընդ որում՝

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}:$$

3384. Դիցուք  $G$ -ն  $R^m$ -ում ափույթ է և  $f \in C^p(G)$ : Ապացուցել խառն ածանցյալների հավասարության վերաբերյալ թեորեմի հետևյալ ընդհանրացումը.  $\partial_{i_1 \dots i_p} f(\mathbf{x})$  խառն ածանցյալի արժեքը  $i_1, \dots, i_p$  ինդեքսների ցանկացած սեղափոխության արդյունքում մնում է անվտվուխ:

3385.  $t : (R^m)^k \rightarrow R$  բազմագծային ֆունկցիան կոչվում է սիմեորիկ, եթե վեկտորների ցանկացած  $(\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k) \in (R^m)^k$  շարվածքի և ցանկացած  $i, j$  ինդեքսների համար

$$t(\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^i, \dots, \mathbf{v}^j, \dots, \mathbf{v}^k) = t(\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^j, \dots, \mathbf{v}^i, \dots, \mathbf{v}^k):$$

Ապացուցել, որ եթե  $f \in C^k(X)$  ( $X \subset R^m, k \geq 2$ ), ապա ցանկացած  $\mathbf{x}_0 \in X$  կետում  $(d^k f(\mathbf{x}_0))(\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k)$  բազմագծային ֆունկցիան սիմեորիկ է:

3386. Դիցուք  $X$ -ը  $R^m$ -ում բաց բազմություն է: Ապացուցել, որ  $f \in C^1(X)$  այն և միայն այն դեպքում, եթե  $f$ -ը  $X$ -ի վրա անընդիհաւ դիֆերենցելի է:

3387. Ապացուցել, որ գծային արտապակերման երկրորդ ածանցյալը զրտ է:

3388. Դիցուք  $T : R^m \times R^m \rightarrow R^n$  ֆունկցիան երկգծային է: Ապացուցել, որ

$$\text{ա) } \lim_{(\mathbf{h}, \mathbf{k}) \rightarrow 0} \frac{|T(\mathbf{h}, \mathbf{k})|}{|(\mathbf{h}, \mathbf{k})|} = 0;$$

$$\text{բ) } T'(\mathbf{a}, \mathbf{b})(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = T(\mathbf{a}, \mathbf{y}) + T(\mathbf{x}, \mathbf{b});$$

$$\text{գ) } \text{եթե } p(x, y) = xy, \text{ ապա } p'(a, b)(x, y) = bx + ay:$$

3389. Դիցուք  $D$ -ն  $R^m$ -ում սիրույթ է:  $f : D \rightarrow R$  ֆունկցիան կոչվում է  $n$ -րդ աստիճանի համասեռ, եթե

$$\forall \mathbf{x} \in D \quad \forall \lambda \in R \quad (\lambda \mathbf{x} \in D \Rightarrow f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^n f(\mathbf{x})): \quad$$

Սաուգել, որ հետևյալ ֆունկցիաները համասեռ են և զանել դրանց համասեռության աստիճանը.

$$\text{ա) } f(x, y, z) = xy + yz + xz; \quad \text{բ) } f(x, y, z, t) = \frac{xy + zt}{xyz + yzt};$$

3390. Ապացուցել, որ  $f \in C^1(D)$  ֆունկցիան  $n$ -րդ աստիճանի համասեռ է այն և միայն այն դեպքում, եթե բավարարում է  $\sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^k}(x^1, \dots, x^n)$ :

$$x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1}(x^1, \dots, x^n) + \dots + x^n \frac{\partial f}{\partial x^n}(x^1, \dots, x^n) = n f(x^1, \dots, x^n);$$

3391. Ապացուցել, որ եթե  $f \in C^1(D)$  ֆունկցիան  $n$ -րդ աստիճանի համասեռ է, ապա նրա առաջին կարգի մասնակի ածանցյալները  $n-1$ -րդ աստիճանի համասեռ ֆունկցիաներ են:

3392. Ապացուցել, որ եթե  $f \in C^p(R^m)$  ֆունկցիան  $n$ -րդ աստիճանի համասեռ է, ապա  $R^m$ -ի վրա ամենուրեք

$$\left( x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + x^n \frac{\partial}{\partial x^n} \right)^p f(x^1, \dots, x^n) = p! C_n^p f(x^1, \dots, x^n);$$

3393. Դիցուք  $G$ -ն  $R^m$ -ում սիրույթ է, իսկ  $f$  -ը՝  $G$ -ի վրա որոշված իրականաթեք ֆունկցիա: Ապացուցել միջին արժեքի հետևյալ թեորեմը. եթե  $\mathbf{x}$  և  $\mathbf{x} + \mathbf{h}$  ծայրակետներով հասկածն ընկած է  $G$ -ում,  $f$  -ն այդ հասկածի կետերում անընդհատ է, իսկ հասկածի ներսում՝  $\{(1-t)\mathbf{x} + t(\mathbf{x} + \mathbf{h}): 0 < t < 1\}$  բազմության վրա, դիֆերենցելի, ապա գոյություն ունի այդ հասկածին պատկանող  $\xi$  կետ, այնպիսին, որ

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = f'(\xi)(\mathbf{h}):$$

3394. Ապացուցել, որ եթե  $F: G \rightarrow R''$  ֆունկցիան  $G \subset R'''$  սիրույթում դիֆերենցելի է և ամենուրեք  $F'(x) = 0$ , որաեղ 0-ն  $R'''$ -ից  $R''$  նույնաբար զրացածապատճերումն է, ապա  $F$ -ը  $G$ -ի վրա հաստատուն է: Ցույց տալ նաև հակառակը. եթե  $F: G \rightarrow R''$  ֆունկցիան հաստատուն է, ապա  $G$ -ի վրա ամենուրեք  $F'(x) = 0$ :

\*\*\*

3395. Համոզվել, որ  $y = y(x)$  ( $x \in R$ ) ֆունկցիան բավարարում է  $y^2 - y = 0$  հավասարմանը այն և միայն այն դեպքում, եթե  $y(x)$ -ը որևէ  $M \subset R$  բազմության բնութագրից ֆունկցիան է:

3396. Տրված է  $x^2 + y^2 = 1$  հավասարումը:

ա) Համոզվել, որ գոյություն ունեն այդ հավասարմանը բավարարող անվերջ թվով  $y = y(x)$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ) ֆունկցիաներ:

բ) Պարզել, թե այդ ֆունկցիաներից որո՞նք են անընդհատ:

գ) Ցույց տալ, որ գոյություն ունի միայն մեկ  $y = y(x)$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ) անընդհատ ֆունկցիա, որը նաև բավարարում է  $y(0) = -1$  պայմանին:

դ) Ցույց տալ, որ  $y(1) = 0$  պայմանին բավարարող անընդհատ ֆունկցիաները երկուսն են:

3397. Տրված է  $x^4 = y^2$  հավասարումը: Համոզվել, որ գոյություն ունեն այդ հավասարմանը բավարարող անվերջ թվով  $y = y(x)$  ( $x \in R$ ) ֆունկցիաներ: Պարզել, թե այդ ֆունկցիաների դասում

ա) քանի՞ն են դիֆերենցելի;

բ)  $y(0) = 0$  պայմանին բավարարող քանի՞ դիֆերենցելի ֆունկցիա կա;

գ)  $y(1) = 1$  պայմանին բավարարող քանի՞ դիֆերենցելի ֆունկցիա կա:

դ) Համոզվել, որ  $(1; 1)$  կետի բավականաշափ վորք շրջակայրում տրված հավասարմանը բավարարող դիֆերենցելի ֆունկցիան միակն է:

Դանել արված հավասարմանը բավարարող  $y = y(x)$  դիֆերենցելի ֆունկցիայի  $y'$  և  $y''$  ածանցյալները (3398-3401).

$$3398. x^2 + 2xy - y^2 = a^2 :$$

$$3399. \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} :$$

$$3400. y - \varepsilon \sin y = x \quad (0 < \varepsilon < 1) :$$

$$3401. x^y = y^x \quad (x \neq y) :$$

$$3402. \text{Դանել } y'(1)-ը, \text{ եթե } (x^2 + y^2)^2 = 3x^2y + y^3 \text{ և } y(1) = 1 :$$

$$3403. \text{Դանել } y'(0)-ը, y''(0)-ը, y'''(0)-ը, \text{ եթե } y \sin x + x^2 + y^3 = 1 :$$

Գտնել  $z = z(x, y)$  անբացահայտ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալ-ները (3404-3407).

$$3404. x^2 + y^2 + z^2 = a^2; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}:$$

$$3405. \operatorname{arctg} \frac{z}{x} = x + y + z; \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}:$$

$$3406. x + y + z = \ln(xyz) \quad (x > 0, y > 0, z > 0); \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}:$$

$$3407. x^y + y^z = 3; \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}:$$

3408. Մեկնաբանել և հիմնավորել հետևյալ պնդումը.

$$\text{Եթե } f(x, y, z) = 0, \text{ ապա } \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} = -1:$$

$$3409. \text{Գտնել } \frac{\partial z}{\partial x} \text{-ը և } \frac{\partial z}{\partial y} \text{-ը, եթե } F(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0:$$

$$3410. \text{Գտնել } \frac{\partial z}{\partial x} \text{-ը և } \frac{\partial z}{\partial y} \text{-ը, եթե } F(xz, yz) = 0:$$

3411. Գտնել տրված հավասարումից որոշվող  $z = z(x, y)$  ֆունկցիայի երկրորդ դիֆերենցիալին համապատասխանող քառակուսային ձևը.

$$\text{ա) } F(x + z, y + z) = 0; \quad \text{բ) } F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0:$$

3412. Գիշութ  $z = z(x, y)$ -ը  $z^3 - xz + y = 0$  հավասարումից որոշվող անբացահայտ ֆունկցիան է, որը բավարարում է  $z(3, -2) = 2$  պայմանին: Գտնել  $d^2 z(3, -2)$ -ին համապատասխանող քառակուսային ձևը:

Գտնել  $z(1, -2) = 1$  պայմանին բավարարող  $z = z(x, y)$  ֆունկցիայի երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալները  $(1, -2)$  կետում (3413-3414).

$$3413. x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z = 9; \quad 3414. 3xyz + x^2z^2 = 5(x + y):$$

Գտնել տրված հավասարումների համակարգի որոշվող  $x(z)$  և  $y(z)$  ֆունկցիաների առաջին և երկրորդ կարգի ածանցյալները (3415-3416).

$$3415. \begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1: \end{cases}$$

$$3416. \begin{cases} x^2 + y^2 - 2z = 1, \\ x + xy + y + z = 1: \end{cases}$$

**3417. Սալուգել, որ**

$$\begin{cases} xe^{u+v} + 2uv = 1, \\ ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x \end{cases}$$

հավասարումների համակարգից որոշվում են  $u = u(x, y)$  և  $v = v(x, y)$  դիֆերենցիալ ֆունկցիաներ, այնպիսիք, որ  $u(1, 2) = 0$  և  $v(1, 2) = 0$ : Գտնել  $du(1, 2)$ -ը և  $dv(1, 2)$ -ը:

**3418. Գտնել  $du$ -ն և  $dv$ -ն, եթե**

$$\begin{cases} u + v = x + y, \\ \frac{\sin u}{\sin v} = \frac{x}{y}; \end{cases}$$

**3419. Դիցուք  $F = (f^1, f^2) \in C^1(R^2, R^2)$  արտապատկերումը բավարարում է Կոշի-Ռիմանի պայմաններին.**

$$\frac{\partial f^1}{\partial x} = \frac{\partial f^2}{\partial y}, \quad \frac{\partial f^1}{\partial y} = -\frac{\partial f^2}{\partial x};$$

Սալուգել, որ  $F$  արտապատկերման յակորիանը  $x_0$  կետում զրո է այն և միայն այն դեպքում, եթե  $F'(x_0) = \theta$ :

Ցույց առաջ, որ եթե  $F'(x_0) \neq \theta$ , ապա  $x_0$ -ի շրջակայքում  $F$ -ը հակադարձելի է, ըստ որում՝  $F^{-1}$  ֆունկցիան նույնպես բավարարում է Կոշի-Ռիմանի պայմաններին:

**3420. Դիցուք  $z = z(x, y)$  ֆունկցիան որոշված է  $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \chi(u, v)$  հավասարումների համակարգից: Գտնել  $\frac{\partial z}{\partial x}$ -ը և  $\frac{\partial z}{\partial y}$ -ը:**

**3421. Դիցուք մակերևույթը տրված է  $x = u + v, y = u^2 + v^2, z = u^3 + v^3$  պարամետրական հավասարումներով: Գտնել այն կետերի բազմությունը, որոնցից յուրաքանչյուրի շրջակայքում մակերևույթը կարելի է ներկայացնել որպես  $z = f(x, y)$  ֆունկցիայի գլոբիկ:**

**3422. Տրված է  $(x; y) = (X(u, v); Y(u, v))$  արտապատկերումը: Գտնել  $(u; v) = (U(x, y); V(x, y))$  հակադարձ արտապատկերման յակորիանը:**

**3423. Դիցուք  $u = f(z)$ , որտեղ  $z = z(x, y)$ -ը  $z = x + y\varphi(z)$  հավասարումից որոշվող անբացահայտ ֆունկցիան է: Ապացուցել Լագրանժի բանաձևը՝**

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \left\{ [\varphi(z)]^n \frac{\partial u}{\partial x} \right\} :$$

3424. Տեղադրելով  $x = r \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = r \cos \theta$ , ձևավորինել

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad \Delta_1 u = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2$$

արտահայտությունները:

3425. Դիցուք  $y = y(x)$  ( $x \in R$ ) ֆունկցիան որոշված է  $x = ky + \varphi(y)$  հավասարումից, որտեղ  $k \neq 0$ , իսկ  $\varphi$ -ն  $\omega$ -պարբերական, դիֆերենցիալ ֆունկցիա է, այնպիսին, որ  $|\varphi'(x)| < |k|$ : Ապացուցել, որ  $y = \frac{x}{k} + \psi(x)$ , որտեղ  $\psi$ -ն  $|k|\omega$ -պարբերական ֆունկցիա է:

(0;0) կետի շրջակայքում ֆունկցիան ներկայացնել Թեյլորի բանաձևով (3426-3433).

$$3426. f(x, y) = \frac{1}{1-x-y+xy} :$$

$$3427. f(x, y) = \ln(1+x+y) :$$

$$3428. f(x, y) = e^x \sin y :$$

$$3429. f(x, y) = e^x \cos y :$$

$$3430. f(x, y) = \sin xshy :$$

$$3431. f(x, y) = \cos xchy :$$

$$3432. f(x, y) = \sin(x^2 + y^2) :$$

$$3433. f(x, y) = \ln(1+x)\ln(1+y) :$$

3434. Դրել  $f(x, y) = e^{x+y}$  ֆունկցիայի Թեյլորի բանաձևը  $(1;-1)$  կետի շրջակայքում:

$$3435. \text{Դրել } f(x, y) = \frac{x}{y} \text{ ֆունկցիայի Թեյլորի բանաձևը } (1;1) \text{ կետի շրջակայքում:}$$

3436. Դիցուք  $z = z(x, y)$ -ը  $z^3 - 2xz + y = 0$  հավասարումից որոշված անբացահայտ ֆունկցիան է, որը բավարարում է  $z(1,1) = 1$  պայմանին: Դրել  $z$  ֆունկցիայի  $(1;1)$  կետի շրջակայքում Թեյլորի երկրորդ կարգի բազմանդամը:

Հետազոտել ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումի կետերը (3437-3439).

$$3437. z = x + y + 4 \sin x \sin y :$$

$$3438. u = xy^2 z^3 (a - x - 2y - 3z) \quad (a > 0) :$$

$$3439. u = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z) \quad (x, y, z \in [0; \pi]) :$$

Դասնել սրված հավասարումից որոշվող  $z = z(x, y)$  անբացահայտ ֆունկցիայի էքսարենմալ արժեքները (3440-3442).

$$3440. 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8yz - z + 8 = 0:$$

$$3441. 5z^2 + 4zy + y^2 - 2y + 3x^2 - 6x + 4 = 0:$$

$$3442. x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0:$$

Դասնել ֆունկցիայի պայմանական էքսարենմումի կեսերը (3443-3455).

$$3443. z = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, \quad x^2 + y^2 = 1: \quad 3444. z = x^2 + y^2, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1:$$

$$3445. z = x^2 + 12xy + 2y^2, \quad 4x^2 + y^2 = 25:$$

$$3446. z = \cos^2 x + \cos^2 y, \quad x - y = \frac{\pi}{4}:$$

$$3447. u = 2x + y - z + 1, \quad x^2 + y^2 + 2z^2 = 22:$$

$$3448. u = x^m y^n z^p, \quad x + y + z = a \quad (m > 0, n > 0, p > 0, a > 0):$$

$$3449. u = x^2 + y^2 + z^2, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > b > c > 0):$$

$$3450. u = xyz, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x + y + z = 0:$$

$$3451. u = xy + yz, \quad x^2 + y^2 = 2, \quad y + z = 2 \quad (x > 0, y > 0, z > 0):$$

$$3452. u = \sin x \sin y \sin z, \quad x + y + z = \frac{\pi}{2} \quad (x > 0, y > 0, z > 0):$$

$$3453. u = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2, \quad \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \dots + \frac{x_n}{a_n} = 1 \quad (a_k > 0, k = 1, \dots, n):$$

$$3454. u = x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p \quad (p > 1), \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n = a \quad (a > 0):$$

$$3455. u = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}, \quad x_k > 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n = a \quad (a > 0, \alpha_k > 1, k = 1, \dots, n):$$

Դասնել ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները (3456-3459).

$$3456. z = x - 2y - 3; \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x:$$

$$3457. z = x^2 + y^2 - 12x + 16y; \quad x^2 + y^2 \leq 25:$$

$$3458. z = x^2 - xy + y^2; \quad |x| + |y| \leq 1:$$

$$3459. u = x^2 + 2y^2 + 3z^2; \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 100:$$

**3460.** Ապացուցել, որ եթե  $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = 1$ , որտեղ  $x_k > 0$ ,  $k = 1, \dots, n$ , ապա  $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n$ : Որպես հետևանք ստանալ թվաբանական և երկրաչափական միջինների վերաբերյալ անհավասարությունը:

**3461.** Ապացուցել անհավասարությունը՝

$$\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left( \frac{x+y}{2} \right)^n \quad (n \geq 1, x \geq 0, y \geq 0):$$

**3462.** Ապացուցել Հյուրերի անհավասարությունը՝

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n x_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (a_i \geq 0, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n; p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1):$$

**3463.** Տրված  $a$  դրական թիվը վերլուծել  $n$  գումարելիների այնպես, որ նրանց քառակուսիների գումարը լինի վորքագույնը:

**3464.** Տրված  $a$  դրական թիվը վերլուծել  $n$  դրական արտադրիչների այնպես, որպեսզի նրանց խորանարդների գումարը լինի վորքագույնը:

**3465.**  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  սֆերայի վրա գտնել կետ, որի հեռավորությունների քառակուսիների գումարը սարված  $M_i(x_i, y_i, z_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) կետերից լինի վորքագույնը:

**3466.** Գտնել տրված  $2p$  պարագծով ուղղանկյուն, որն իր կողմերից մեկի շուրջը պատելիս առաջացնում է մեծագույն ծավալի զլան:

**3467.** Գտնել  $y = x^2$  պարաբոլի և  $x - y - 2 = 0$  ուղղի հեռավորությունը:

**3468.** Գտնել  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  կետի հեռավորությունը  $Ax + By + Cz + D = 0$  հարթությունից:

**3469.** Գտնել  $\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$  և  $\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$  ուղիղների հեռավորությունը:

## Q

$G \subset R^n$  բազմությանը կոչվում է ուսուցիկ, եթե ցանկացած  $\mathbf{x}_1 \in G, \mathbf{x}_2 \in G$  կետերի համար  $\mathbf{x}_1$  և  $\mathbf{x}_2$  ծայրակետերով հատվածը  $[\mathbf{x}_1; \mathbf{x}_2] = \{(1-\lambda)\mathbf{x}_1 + \lambda\mathbf{x}_2 : 0 \leq \lambda \leq 1\}$ -ը, անբազապիս ընկած է  $G$ -ում:

Կիցը  $G \subset R^n$  բազմությունն ուսուցիկ է:  $f: G \rightarrow R$  ֆունկցիան կոչվում է ուսուցիկ ֆունկցիա, եթե ցանկացած  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in G$  կետերի և  $\lambda \in (0; 1)$  թվի համար

$$f((1-\lambda)\mathbf{x}_1 + \lambda\mathbf{x}_2) \leq (1-\lambda)f(\mathbf{x}_1) + \lambda f(\mathbf{x}_2):$$

Եթե բոլոր  $x_1 \neq x_2$  կետերի համար գրված անհավասարությունը խիստ է, ապա  $f$ -ն անվանում են իշխառ ուսուցիչ:

$P: R^m \rightarrow R$  ֆունկցիան կաշվում է  $k$ -րդ կարգի համաստաքազմական, եթե գոյություն ունի  $T: (R^m)^k \rightarrow R$  բազմագծային ֆունկցիա, այնպիսին, որ  $P(x) = T(x, \dots, x)$ :

3470. Դիցուք՝  $f \in C^1(G)$ , որտեղ  $G$ -ն  $R^n$ -ում ուսուցիկ ախրույթ է: Ապացուցել, որ եթե  $f'_x(x) = 0$ , ապա  $f$ -ն  $x^i$ -ից կախված չէ:

Հետևյալ օրինակով համոզվել, որ  $G$  ախրույթի ուսուցիչկությունն այսաւել էական է.

$$G = R^2 \setminus \{(x; 0) : x \geq 0\},$$

$$f(x, y) = \begin{cases} x^3, & (x; y) \in (R^c)^2, \\ 0, & (x; y) \in G \setminus (R^c)^2: \end{cases}$$

3471. Տրված է  $f: G \rightarrow R$  ֆունկցիան, որտեղ  $G$ -ն  $R^2$ -ում ախրույթ է: Ապացուցել, որ եթե ցանկացած  $y$ -ի համար  $f(x, y)$ -ն անընդհատ է ըստ  $x$ -ի և ամենուրեք գոյություն ունի  $f'_y(x, y)$  սահմանափակ ածանցյալ, ապա  $f$ -ը  $G$ -ում անընդհատ է:

3472. Դիցուք  $G$ -ն  $R^m$ -ում ուսուցիկ ախրույթ է և  $f \in C^1(G)$ : Ապացուցել, որ եթե  $f'_{x_i}(x)$  ( $i=1, \dots, m$ ) մասնակի ածանցյալները  $G$ -ում սահմանափակ են, ապա  $f$ -ը  $G$ -ի վրա հավասարաշափ անընդհատ է:

3473. Ծշմարի՞ն է արդյոք, որ եթե  $F: X \rightarrow R^n$  ( $X \subset R^n, n \geq 2$ ) ֆունկցիան դիֆերենցելի է և ամենուրեք  $\det F'(x) \neq 0$ , ապա  $F$ -ը վոխսմիարժեք է: Բերենա համապատասխան օրինակ:

3474. Կարենի՞ն է արդյոք պնդել, որ եթե  $F: X \rightarrow R^n$  ( $X \subset R^n$ ) ֆունկցիան դիֆերենցելի է, վոխսմիարժեք և  $F^{-1}$ -ն անընդհատ է, ապա  $F^{-1}$ -ը դիֆերենցելի է: Բերենա համապատասխան օրինակ:

3475. Դիցուք  $X$ -ն  $R^n$ -ում բաց բազմություն է, իսկ  $F: X \rightarrow R^n$  ֆունկցիան վոխսմիարժեք է և դիֆերենցելի: Ապացուցել, որ եթե  $\det F'(x) \neq 0$  ( $x \in X$ ), ապա  $F: X \rightarrow F(X)$  արտապատկերումը դիֆեռոմորֆիզմ է:

3476. Դիցուք  $G$ -ն և  $D$ -ն համապատասխանաբար  $R^m$ -ում և  $R^n$ -ում ոչ դաստիք, բաց բազմություններ են: Ապացուցել, որ եթե  $F: G \rightarrow D$  ֆունկցիան դիֆեռոմորֆիզմ է, ապա  $m = n$ :

3477. Դիցուք  $G$ -ն  $R''$ -ում ուսուցիկ ախրույթ է: Ապացուցել միջին արժեքի թեորեմի հետևյալ սարքերակը. եթե  $F:G \rightarrow R''$  ֆունկցիան դիֆերենցելի է, ապա ցանկացած  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in G$  կետերի համար

$$|F(\mathbf{a}) - F(\mathbf{b})| \leq |\mathbf{a} - \mathbf{b}| \sup_{\mathbf{x} \in G} |F'(\mathbf{x})|:$$

Այսաւելից հետևցնել, որ եթե  $F$ -ն ունի սահմանավակ ածանցյալ, ապա այն բավարարում է Լիպշչիցի պայմանին.

$$\exists k \in R \quad \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in G \quad (|F(\mathbf{x}_1) - F(\mathbf{x}_2)| \leq k|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|):$$

3478. Տրված  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_k \in R''$  կետերը միացնող  $I = [\mathbf{x}_0; \mathbf{x}_1] \cup \dots \cup [\mathbf{x}_{k-1}; \mathbf{x}_k]$  թեկյալի երկարությունը սահմանվում է որպես  $|I| = \sum_{i=0}^{k-1} |\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i|$  գումար:

Դիցուք  $G$ -ն  $R''$ -ում ախրույթ է,  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in G$ , իսկ  $\Lambda_G(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ -ն  $G$ -ում ընկած և  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  կետերը միացնող բռնորդ բեկյալների բազմությունն է: Նշանակենք

$$d_G(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \inf \{|I| : I \in \Lambda_G(\mathbf{a}, \mathbf{b})\}:$$

Ապացուցել միջին արժեքի թեորեմի հետևյալ ընդհանրացումը. եթե  $F:G \rightarrow R''$  ֆունկցիան դիֆերենցելի է, ապա ցանկացած  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in G$  կետերի համար

$$|F(\mathbf{a}) - F(\mathbf{b})| \leq d_G(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \sup_{\mathbf{x} \in G} |F'(\mathbf{x})|:$$

3479. Դիցուք  $\overline{B}(\mathbf{v}, r)$ -ը  $R''$ -ում փակ գունդ է: Ապացուցել Ռոլի թեորեմի հետևյալ ընդհանրացումը. եթե  $F \in C(\overline{B}(\mathbf{v}, r), R)$  ֆունկցիան գնդի եզրի վրա ամենուրեք զրո է, իսկ ներսում՝ դիֆերենցելի, ապա գոյություն ունի  $\xi \in B(\mathbf{v}, r)$  կետ, այնպիսին, որ  $F'(\xi) = \theta$ : Ծշմարիտ է արդյունքը խնդրի պնդումը, եթե  $F \in C(\overline{B}(\mathbf{v}, r), R')$ ,  $n > 1$ : Բերել համապատասխան օրինակ:

3480. Դիցուք  $G$ -ն  $R''$ -ում սիլիույթ է, իսկ  $F:G \rightarrow R''$ -ը՝ դիֆերենցելի ֆունկցիա: Ապացուցել, որ եթե  $F':G \rightarrow L(R'', R')$  արտապատկերումը հաստատում է, ապա  $F$ -ը հաստատում ֆունկցիայի և գծային արտապատկերման գումար է:

3481. Դիցուք  $I$ -ն  $R''$ -ում բաց զուգահեռանիսաւ է և  $f \in C^1(I)$ ,  $f(\mathbf{0}) = 0$ : Ապացուցել Ալգամարի լեմման. գոյություն ունեն  $g_1, \dots, g_m \in C(I)$  ֆունկցիաներ, այնպիսիք, որ

$$f(x^1, \dots, x^n) = \sum_{i=1}^m x^i g_i(x^1, \dots, x^n),$$

ընդ որում՝

$$g_i(\mathbf{0}) = \frac{\partial f(\mathbf{0})}{\partial x^i}, \quad i = 1, \dots, m:$$

3482. Տրված է  $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$  մատրիցը: Ապացուցել Աղամարի անհավասարությունը.

$$(\det A)^2 \leq \prod_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right):$$

3483. Դանել  $S(\mathbf{0}, 1) \subset R^n$  միավոր սֆերայի վրա  $\tau(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x^i x^j$  ( $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ) սիմետրիկ քառակուսային ծևի էքսպրեմալ արժեքները:

3484. (Հյուգենսի խնդիր) Տրված  $a$  և  $b$  դրական թվերի միջև  $x_1, \dots, x_n$  թվերը դասավորել այնպես, որ

$$\frac{x_1 \cdot x_2 \cdots \cdot x_n}{(a + x_1)(x_1 + x_2) \cdots (x_n + b)}$$

արտահայտության արժեքը լինի մեծագույնը:

3485. Դիցուք  $X$ -ը  $R^m$ -ում ուսուցիկ բազմություն է: Ապացուցել, որ  $f \in C^1(X)$  ֆունկցիան ուսուցիկ է այն և միայն այն դեպքում, եթե ցանկացած  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in X$  կետերի համար

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0) + f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0):$$

3486. Տրված է՝  $f \in C^2(R^m)$  և

$$\tau_{\mathbf{x}}(\mathbf{h}) = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x^i \partial x^j} h^i h^j, \quad \mathbf{x} \in R^m, \quad \mathbf{h} = (h^1, \dots, h^m) \in R^m:$$

Ապացուցել, որ  $X \subset R^m$  ուսուցիկ բազմության վրա  $f$ -ը կլինի խիստ ուսուցիկ այն և միայն այն դեպքում, եթե ցանկացած  $\mathbf{x} \in X$  կետում  $\tau_{\mathbf{x}}(\mathbf{h})$  քառակուսային ծևը դրական որոշյալ է:

3487. Դիցուք  $X$ -ը  $R^m$ -ում բաց, ուսուցիկ բազմություն է, իսկ  $f: X \rightarrow R$  ֆունկցիան ուսուցիկ է և դիֆերենցելի: Ապացուցել, որ եթե  $\mathbf{x}_0 \in X$  կետը  $f$ -ի համար կրիալիկական կետ է, ապա  $f$ -ն այդ կետում ընդունում է իր փոքրագույն արժեքը:

3488. Ապացուցել, որ ցանկացած  $k$ -րդ կարգի համասեռ բազմանդամ  $k$ -րդ ասախճանի համասեռ ֆունկցիա է.  $P(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^k P(\mathbf{x})$ :

**3489.** Ցանկացած  $P: R^m \rightarrow R$   $k$ -րդ կարգի համասեռ բազմանդամի համար կառուցել  $S: (R^m)^k \rightarrow R$  սիմետրիկ բազմագծային ֆունկցիա (սես խնդիր 3385), այնպիսին, որ  $P(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x})$ :

**3490.** Ապացուցել, որ եթե  $P$ -ն  $k$ -րդ կարգի համասեռ բազմանդամ է, ապա նրա աճը՝  $\Delta_{\mathbf{h}} P(\mathbf{x}) = P(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - P(\mathbf{x})$ -ը, ըստ  $\mathbf{x}$ -ի  $k-1$ -րդ կարգի համասեռ բազմանդամ է: Ցույց տալ նաև, որ արգումենտի ցանկացած  $\mathbf{h}^1, \dots, \mathbf{h}^k \in R^m$  աճերի համար

$$\Delta_{\mathbf{h}^1} (\Delta_{\mathbf{h}^2} (\dots (\Delta_{\mathbf{h}^k} P(\mathbf{x})) \dots)) = k! S(\mathbf{h}^1, \dots, \mathbf{h}^k)$$

(սես նախորդ խնդիրը) և այդաւեղից ստանալ, որ նախորդ խնդրում  $P$  բազմանդամին համապատասխանող  $S$  բազմագծային ֆունկցիան միակն է:

գլուխ 15

# Պարամետրից կախված ինտեգրալներ

Դիցոք  $f : (a; b) \times Y \rightarrow R$  ֆունկցիան յ վոլֆախականի (սպառմետրի) յուրաքանչյուր արժեքի համար  $(a; b)$  վերջանող կամ անվերջ միջակայթում ըստ  $x$  -ի ինտեգրելի է: Այլ դեպքում

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx, \quad y \in Y,$$

**Ֆռութային կրչվում է պարտմեարից կախված ինտեգրայ:**

Պայմանավորմբն ը փ ( $x$ -ի) ցանկացած ֆիւսած արժեքի համար միայն  $x$ -ից ( $y$ -ից) կախված  $f(x, y)$  ֆունկցիան նշանակել  $f(\bullet, y)$  ( $f(x, \bullet)$ ):

Եթե պարամետրի ցանկացած  $y \in Y$  արժեքի համար  $f(\bullet, y) \in \mathfrak{X}[a; b]$ , ապա  $I(y)$ -ը կոչվում է պարամետրից կախված Ռիմանի ինտեգրալ: Խոչ եթե պարամետրի որոշ արժեքների դեպքում  $f(\bullet, y)$ -ը ինտեգրելի է միայն անհսկական իմաստով, ապա  $I(y)$ -ը կոչվում է պարամետրից կախված անհսկական ինտեգրալ:

Գիշաբ  $X, Y \subset R$  և  $y_0$ -ի  $Y$  բազմության կոտակիման կետ է: Կասեիր, որ  $f: X \times Y \rightarrow R$  ֆունկցիան  $y$ -ը  $y_0$ -ի գոտելիս  $A \subset X$  բազմության վրա հավասարաշափ ծզառէ ի  $\varphi: A \rightarrow R$  ֆունկցիային և կորեիր՝  $f(x, y) \xrightarrow{y=y_0} \varphi(x)$ ,  $y \rightarrow y_0$ ,  $x \in A$ , եթե

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A (0 < |y - y_0| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon)$$

Համարմատորեն սահմանվում է հավասարաշափ զուգամիտոքտեր՝ յ -ը անվերջի ծգութիւն:

Պարագաների առաջնային անհատական հետակայական կառուցածքը կազմված է պարագաների առաջնային անհատական հետակայական կառուցածքների սահմանությամբ:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx = \int_a^b \phi(x) dx :$$

Անընդհատություն: Դիցուք  $P$ -ն  $[a;b] \times [c;d]$  սկզբանելյունն է: Եթե  $f \in C(P)$ , ապա  $I(y)$ -ը  $[c;d]$  հասկածի վրա անընդհատ է:

Դիֆերենցում: Եթե  $f \in C(P)$  և գոյություն ունի  $P$ -ի վրա անընդհատ  $f'_y$  մասնակի ածանցյալ, ապա  $I'(y)$ -ը  $[c, d]$ -ի վրա անընդհատ դիֆերենցելի է, ընդ որում  $I'(y)$ -ը կարելի է հաշվել Հայրենից կամ այլով:

$$I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx :$$

Ընդհանուր դեպքում, եթե ինտեգրման սահմանները  $y$ -ից կախված դիֆերենցիալ ֆունկցիաներ են՝  $\alpha(y)$ ,  $\beta(y)$ , ըստ որում  $a \leq \alpha(y), \beta(y) \leq b$ , կիրառվում է ածանցման հետևյալ կանոնը.

$$\frac{d}{dy} \int_a^{\beta(y)} f(x, y) dx = f(\beta(y), y) \beta'(y) - f(\alpha(y), y) \alpha'(y) + \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y) dx :$$

Ինտեգրում: Եթե  $f \in C(P)$ , ապա  $I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$  հատվածի վրա ինտեգրելի է, ըստ որում

$$\int_c^d I(y) dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx :$$

$$Ընդհանուր է նշանակել՝ \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy :$$

Պարագաների գումարացած  $y \in Y$  արժեքի դեպքում

$$I(y) = \int_a^{\omega} f(x, y) dx$$

Ինտեգրալ գուգանեսն է:

Սահմանում: Պարագաներից կախված  $I(y)$  անիսկական ինտեգրալը կոչվում է  $Y$  բազմության վրա հավասարաշափ գուգանեսն, եթե

$$\forall \varepsilon > 0 \exists b_0 \in [a; \omega) \forall b \in [b_0; \omega) \forall y \in Y \left( \left| \int_a^b f(x, y) dx - \int_a^{\omega} f(x, y) dx \right| < \varepsilon \right) :$$

Նկատենք, որ այս սահմանումը, ինչպես նաև սարք չարտադրված բոլոր վաստերն ու պնդումները, աննշան փոփոխություններով կարող են ձևակերպվել մեկից ամենի հականություններ տեղող անհսկական ինտեգրալների համար:

Հավասարաշափ գուգաներության հայտանիշներ: Կոչիի սկզբունքը: Որպեսզի  $I(y)$  անիսկական ինտեգրալը  $Y$  բազմության վրա լինի հավասարաշափ գուգանես, անհրաժեշտ է և բավարար հետևյալ պայմանը.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists b \in [a; \omega) \forall b_1, b_2 \in [b; \omega) \forall y \in Y \left( \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dx \right| < \varepsilon \right) :$$

Վայերշտրասի հայտանիշը: Կիցուր ցանկացած  $b \in [a; \omega)$  թվի և պարամետրի ցանկացած  $y \in Y$  արժեքի համար  $f : [a; \omega) \times Y \rightarrow R$  ֆունկցիան  $[a; b]$  հատվածում ըստ  $x$ -ի ինտեգրելի է: Եթե  $g : [a; \omega) \rightarrow R$  ֆունկցիան այսպիսին է, որ  $[a; \omega) \times Y$  բազմության վրա անհորեք  $|f(x, y)| \leq g(x)$  և  $\int_a^{\omega} g(x) dx \leq \varepsilon$  գուգանեսն է, ապա  $I(y) = \int_a^{\omega} f(x, y) dx$  -ը  $Y$ -ի վրա բացարձակ և հավասարաշափ գուգանես է: Այս պայմաններում  $g$ -ն անվանում են  $f(x, y)$ -ի ինտեգրելի մաժորան:

Արենք և Դիրիխլեի հայտանիշները: Կիցուր  $f(x, y)$  և  $g(x, y)$  ֆունկցիաները պարամետրի յուրաքանչյուր  $y \in Y$  արժեքի դեպքում ցանկացած  $[a; b] \subset [a; \omega)$  հատվածում ըստ  $x$ -ի ին-

անգրեմ են: Պայմանների հետևյալ  $(A_1, A_2)$  և  $(D_1, D_2)$  գոյգերից յուրաքանչյուրը բավարար է, որպեսզի  $\int_a^b f(x, y)g(x, y)dx \leq Y$ -ի վրա լինի հավասարաշատի գուգամնաւ.

$$A_1) \quad \int_a^{\omega} f(x, y)dx \leq Y \text{ -ի վրա հավասարաշատի գուգամնաւ է,}$$

$A_2)$  պարամետրի ցանկացած  $y \in Y$  արժեքի դեպքում  $g(\bullet, y) \in [a; \omega]$ -ի վրա մոնուան է և զոյտքյուն ունի  $M \in R$  թիվ, այնպիսին, որ ամենուրեք  $|g(x, y)| \leq M$ ;

$D_1)$  գոյգյուն ունի  $M \in R$  հաստատուն, այնպիսին, որ ցանկացած  $b \in [a; \omega)$  թիվ և պարամետրի բոլոր արժեքների համար

$$\left| \int_a^b f(x, y)dx \right| \leq M .$$

$D_2)$  պարամետրի ցանկացած  $y \in Y$  արժեքի դեպքում  $g(\bullet, y) \in [a; \omega)$ -ի վրա մոնուան է և, բացի այդ,  $g(x, y) \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow \omega$ ,  $y \in Y$ :

Պարագաների ցանկացած  $y \in Y$  արժեքի դեպքում  $g(\bullet, y) \in [a; \omega)$ -ի վրա մոնուան է և այսինքն այս պարագաների յուրաքանչյուրը  $y \in Y$  արժեքի համար  $[a; \omega)$  միջակայքում ըստ  $x$ -ի ինտեգրելի է, խև  $y_0$ -ն  $Y$  բազմության կոտակիման կետ է:

Եթե ցանկացած  $b \in [a; \omega)$  թիվ համար  $f(x, y) \rightarrow \varphi(x)$ ,  $y \rightarrow y_0$ ,  $x \in [a; b]$  և  $\int_a^{\omega} f(x, y)dx \leq Y$ -ի վրա հավասարաշատի գուգամնաւ է, ապա  $\varphi(x) \in [a; \omega)$ -ի վրա ինտեգրելի է, ընդունում:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{\omega} f(x, y)dx = \int_a^{\omega} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)dx = \int_a^{\omega} \varphi(x)dx :$$

Անընդհատություն: Եթե  $f(x, y)$  ֆունկցիան  $[a; \omega) \times [c; d]$  բազմության վրա անընդհատ է ըստ  $y$ -ի, խև  $\int_a^{\omega} f(x, y)dx \in [c; d]$ -ի վրա հավասարաշատի գուգամնաւ է, ապա  $I(y) = \int_a^{\omega} f(x, y)dx$  ֆունկցիան  $[c; d]$  հատվածի վրա անընդհատ է:

Դիֆերենցավորություն: Դիցուք  $f(x, y)$  ֆունկցիան անընդհատ է  $[a; \omega) \times [c; d]$  բազմության վրա և գոյգյուն ունի այդ բազմության վրա անընդհատ  $f'_y(x, y)$  մասնակի ածանցյալ: Եթե  $\int_a^{\omega} f'_y(x, y)dx \in [c; d]$  հատվածի վրա հավասարաշատի գուգամնաւ է, խև  $\int_a^{\omega} f(x, y)dx$ -ը գուգամնաւ է յ պարամետրի ամենիւզն մեկ արժեքի համար, ապա վերջին  $[c; d]$ -ի վրա հավասարաշատի գուգամնաւ է, ըստ պարամետրի՝ դիֆերենցելի, ընդունում ճշմարիտ է ինտեգրալի ածանցյան Լայբնիցի կանոնը.

$$\frac{d}{dy} \int_a^{\omega} f(x, y)dx = \int_a^{\omega} \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)dx :$$

Ինտեգրում: 1) Եթե  $f(x, y)$  ֆունկցիան  $[a; \omega) \times [c; d]$  բազմության վրա անընդհատ է, խև  $I(y) = \int_a^{\omega} f(x, y)dx \in [c; d]$ -ի վրա հավասարաշատի գուգամնաւ, ապա  $I(y) \in [c; d]$ -ի վրա ին-

սնազրելի է, ընդ որում՝

$$\int\limits_a^c dy \int\limits_a^y f(x,y)dx = \int\limits_a^c dx \int\limits_c^y f(x,y)dy :$$

2) Եթե  $f(x,y)$ -ը  $[a;\omega_1] \times [c;\omega_2]$  բազմության վրա անընդհատ է,  $\int_a^{\omega_1} f(x,y)dx$ ,

$\int_c^{\omega_2} f(x,y)dy$  ինսեգրաներից առաջինը ցանկացած  $[a;b] \subset [a;\omega_1]$ , իսկ երկրորդը՝ ցանկացած  $[c;d] \subset [c;\omega_2]$  հասլածի վրա հավասարաշատի գուգամետ է և, բացի այդ, գոյություն ունի

$$\int\limits_a^{\omega_1} dx \int\limits_c^{\omega_2} f(x,y)dy, \quad \int\limits_c^{\omega_2} dy \int\limits_a^{\omega_1} f(x,y)dx$$

ինսեգրալներից սպասարկ մնայ, այս ճշմարիտ է ըստ պարամետրի ինսեգրման հետևյալ բանաձևը.

$$\int\limits_c^{\omega_2} dy \int\limits_a^{\omega_1} f(x,y)dx = \int\limits_a^{\omega_1} dx \int\limits_c^{\omega_2} f(x,y)dy :$$

Ա

Ստուգել, որ սահմանային անցումն ինսեգրալի նշանի տակ բույլարի է և հաշվել սահմանը (3491-3494).

$$3491. \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int\limits_0^1 \sqrt{1 + \alpha^2 x^2} dx :$$

$$3492. \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int\limits_{-1}^1 \sqrt{x^2 + \alpha^2} dx :$$

$$3493. \lim_{\alpha \rightarrow 1} \int\limits_0^1 x e^{\alpha x} dx :$$

$$3494. \lim_{n \rightarrow \infty} \int\limits_0^1 \frac{dx}{1 + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} :$$

Ապացուցել պարամետրից կախված ինսեգրալի անընդհատությունն  $R$ -ում (3495-3496).

$$3495. I(y) = \int\limits_0^1 \sin^2 x^2 y dx :$$

$$3496. I(y) = \int\limits_{-1}^{10} \frac{x^2}{1 + x^2 + y^2 x^4} dx :$$

Համոզվել, որ ինսեգրալն ըստ պարամետրի անընդհատ է և հաշվել սահմանը (3497-3498).

$$3497. \lim_{\alpha \rightarrow 1} \int\limits_0^{\pi} x \cos \alpha x dx :$$

$$3498. \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int\limits_a^{\alpha+1} \frac{dx}{1 + x^2 + \alpha^2} :$$

3499. Սարուցել, որ  $f(x) = \int_0^1 \operatorname{sgn}(x-y) dy$  ֆունկցիան անընդհատ է  $R$ -ում:

3500. Դիցուք  $f \in C[0;1]$  ֆունկցիան լրական է: Ապացուցել, որ

$$I(y) = \int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2 + y^2} dx$$

Ֆունկցիան  $y=0$  կետում խզվող է:

3501. Ծշմարի՞ւն է արդյոք

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 f(x, y) dx = \int_0^1 \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) dx$$

հավասարությունը, եթիւ

$$w) f(x, y) = \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}} :$$

$$p) f(x, y) = \frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} :$$

3502. Հավասար են արդյոք

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx \quad \text{և} \quad \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy$$

ինտեգրալները, եթիւ

$$w) f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} ;$$

$$p) f(x, y) = \frac{x - y}{(x + y)^3} ;$$

Դանել պարամետրից կախված ինտեգրալի ածանցյալը (3503-3508).

$$3503. I(y) = \int_0^1 \sin xy dx :$$

$$3504. I(y) = \int_1^2 \frac{e^{yx^2}}{x} dx :$$

$$3505. I(y) = \int_0^y \frac{\ln(1 + yx)}{x} dx :$$

$$3506. I(y) = \int_y^{2y} \frac{\sin yx}{x} dx :$$

$$3507. I(y) = \int_{a+y}^{b+y} \frac{\sin xy}{x} dx :$$

$$3508. I(y) = \int_{e^{-y}}^{e^y} \ln(1 + y^2 x^2) \frac{dx}{x} :$$

3509. 'Դիցոր'  $I(y) = \int_0^1 \ln(x^2 + y^2) dx$ : Կարելի՞ է արդյոք  $I'(0)$ -ն հաշվել Լայբնիցի կանոնով:

\*\*\*

3510. Տրված է  $f : [a; \omega] \times Y \rightarrow R$  ֆունկցիան: Ապացուցել, որ եթե  $\int_a^\omega |f(x, y)| dx$  ինտեգրալը  $Y$  բազմության վրա հավասարաչափ գուգամեաւ է, ապա  $\int_a^\omega f(x, y) dx$ -ը  $Y$ -ի վրա նույնապես հավասարաչափ գուգամեաւ է:

Օգտվելով Կոշիի սկզբունքից՝ ապացուցել նշված բազմության վրա պարամետրից կախված ինտեգրալի հավասարաշափ զուգամիտությունը (3511-3513).

$$3511. \text{ ա) } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \alpha \in [1 + \varepsilon; +\infty), \varepsilon > 0; \text{ բ) } \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \alpha \in (-\infty; 1 - \varepsilon], \varepsilon > 0:$$

$$3512. \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x dx, \alpha \in [1; +\infty):$$

$$3513. \int_0^{0.5} \frac{dx}{x |\ln x|^\alpha}, \alpha \in [1 + \varepsilon; +\infty), \varepsilon > 0:$$

3514. Դիցուք  $f : [a; \omega] \times Y \rightarrow R$  ֆունկցիան այնպիսին է, որ  $I(y) = \int_a^\omega f(x, y) dx$  ինտեգրալը  $Y$  բազմության վրա զուգամեալ է, բայց ոչ հավասարաշափ: Ապացուցել, որ գոյություն ունեն  $\varepsilon_0 > 0$  թիվ և  $c_k, d_k, y_k$  հաջորդականություններ, այնպիսիք, որ  $c_k \rightarrow \omega, d_k \rightarrow \omega, y_k \in Y$  և  $\left| \int_{c_k}^{d_k} f(x, y_k) dx \right| > \varepsilon_0$ :

Ապացուցել, որ պարամետրից կախված ինտեգրալը նշված բազմության վրա ոչ հավասարաշափ է զուգամեալ (3515-3519).

$$3515. \text{ ա) } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \alpha \in (-\infty; 1); \quad \text{բ) } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \alpha \in (1; +\infty):$$

$$3516. \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx, \alpha \in (0; +\infty): \quad 3517. \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx, \alpha \in [0; 1]:$$

$$3518. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{4 + (x - \alpha)^6}, \alpha \in R_+: \quad 3519. \int_1^{+\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^2} dx, \alpha \in [1; +\infty):$$

Օգտվելով Վայերշտրասի հայտանիշից՝ ապացուցել պարամետրից կախված ինտեգրալի նշված բազմության վրա հավասարաշափ զուգամիտությունը (3520-3525).

$$3520. \int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-2x} dx, \alpha \in [0; 1]; \quad 3521. \int_2^{+\infty} \frac{\ln^2 x \sin x}{(x-1)^\alpha} dx, \alpha \in [2; +\infty):$$

$$3522. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1 + x^2} dx, \alpha \in R; \quad 3523. \int_0^1 \frac{x^\alpha}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} dx, \alpha \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]:$$

$$3524. \int_0^1 \frac{x^\alpha \sin x}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad \alpha \in [-1,5;0]: \quad 3525. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (x^2+1)}, \quad \alpha \in \left[0; \frac{1}{2}\right]:$$

Ապացուցել պարամետրից կախված ինտեգրալի անընդհատությունը (3526-3528).

$$3526. f(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x) \operatorname{arctgy} x}{x^2} dx, \quad y \in [-1;1]:$$

$$3527. f(y) = \int_0^1 \frac{x^y \cos xy}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad y \in R_+:$$

$$3528. f(y) = \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{2+x^y}, \quad y \in (2; +\infty):$$

$$3529. \text{Ցույց տալ, որ } f(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+(x+y)^2} dx \quad (y \in R) \quad \text{ֆունկցիան}$$

դիֆերենցելի է:

\*\*\*

Եյլերյան ինտեգրալներ: Պարամետրից կախված հետևյալ ինտեգրալները կոչվում են Եյլերյան ինտեգրալներ (Փունկցիաներ).

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad x, y > 0 \quad (\text{բետա-ֆունկցիա});$$

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0 \quad (\text{զամբա-ֆունկցիա}):$$

Ծշմարիք են հետևյալ բանաձևերը.

$$1. \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x);$$

$$2. \quad \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \quad 0 < x < 1 \quad (\text{լուսնան բանաձև});$$

$$3. \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}:$$

**3530.** Սատուգել, որ ցանկացած  $m, n$  բնական և  $p, q$  դրական թվերի համար ճշմարիտ է հավասարությունը.

$$\text{ա) } B(p, q) = B(q, p); \quad \text{բ) } \Gamma(n+1) = n!; \quad \text{զ) } B(m, n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!};$$

$$\eta) \Gamma(p+n) = (p+n-1)(p+n-2)\cdots(p+1)p\Gamma(p);$$

$$\tau) \Gamma(1/2; 1/2) = \pi; \quad \text{զ) } \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi};$$

$$\text{t) } B(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p, q-1) \quad (q > 1):$$

$$3531. \text{ Ապացուցել } \Gamma(x) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \rightarrow 0) \text{ ասիմպատիկ բանաձևը:}$$

3532. Ապացուցել, որ  $\Gamma$  ֆունկցիան  $(0; +\infty)$ -ում անվերջ դիֆերենցելի է և հաշվել  $\Gamma^{(n)}(x)$ -ը ( $n \in N$ ): Համոզվել, որ  $\Gamma$ -ն  $(0; +\infty)$ -ում ուսուցիկ է:

3533. Կատարելով փոփոխականի փոփարինում՝  $B$  ֆունկցիայի համար ստանալ հետևյալ ներկայացումները.

$$\text{ա) } B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} dx; \quad \text{բ) } B(p, q) = \int_0^1 \frac{x^{p-1} + x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}} dx;$$

$$\text{գ) } B(p, q) = \int_1^{+\infty} \frac{x^{p-1} + x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}} dx;$$

Արտահայտել արված ինտեգրալները էյլերյան ֆունկցիաներով (3534-3537).

$$3534. \int_0^{\pi/2} \sin^p x \cos^q x dx \quad (\min\{p, q\} > -1):$$

$$3535. \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^\alpha x dx \quad (|\alpha| < 1):$$

$$3536. \int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx \quad (n > 0):$$

$$3537. \int_0^{\infty} x^m e^{-x^n} dx \quad \left(\frac{m+1}{n} > 0\right):$$

Հաշվել ինտեգրալը (3538-3544).

$$3538. \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0):$$

$$3539. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(2-x)}}:$$

$$3540. \int_1^2 \sqrt[3]{(2-x)^2(x-1)} dx:$$

$$3541. \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx:$$

$$3542. \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}:$$

$$3543. \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx:$$

3544.  $\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx \quad (n \in N):$

Պ

3545. Հաշվել սահմանը.  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \varphi} d\varphi :$

3546. Դիցուք՝  $f \in C[a; b]$  և  $a < c < d < b$ : Ապացուցել, որ

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \int_c^d (f(t+y) - f(t)) dt = f(d) - f(c):$$

3547. Տրված է  $f : [a; b] \times Y \rightarrow R$  ֆունկցիան,  $g \in \mathfrak{R}_1(a; b)$  և  $f(x, y) \rightrightarrows \varphi(x)$ ,  $y \rightarrow y_0$ ,  $x \in [a; b]$ : Ապացուցել, որ եթե ցանկացած  $y$ -ի համար  $f(\bullet, y) \in \mathfrak{R}[a; b]$ , ապա

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) g(x) dx = \int_a^b \varphi(x) g(x) dx:$$

3548. Տրված է՝  $I = [a; b] \times [c; d]$ ,  $f \in C(I)$ ,  $g \in \mathfrak{R}_1(a; b)$ ,  $F(y) = \int_a^b f(x, y) g(x) dx$ : Ապացուցել, որ

ա)  $F \in C[c; d]$ ;

բ) եթե  $f'_y \in C(I)$ , ապա  $F \in C^1[c; d]$  և  $F'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) g(x) dx$ ;

գ)  $\int_c^d F(y) dy = \int_a^b g(x) dx \int_c^d f(x, y) dy$ :

3549. Օգտվելով  $\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2 y^2}$  բանաձևից՝ հաշվել հետևյալ ինտե-

գրալով.  $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x \sqrt{1-x^2}} dx$ :

3550. Ընդհնաւեցրած ֆունկցիան ներկայացնելով որպես պարամետրից կախված ինտեգրալ և կատարելով ինտեգրալի նշանի տակ ինտեգրում՝ հաշվել ինտեգրալը ( $0 < a < b$ ).

ա)  $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$ ; բ)  $\int_0^1 \left( \sin \ln \frac{1}{x} \right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$ ; զ)  $\int_0^1 \left( \cos \ln \frac{1}{x} \right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$ :

3551. Տրված է՝  $f \in C(R)$  և  $F(x) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(x+t)dt$  ( $a > 0$ ): Ապացուցել, որ  $F \in C^1(R)$ : Գտնել  $F'(x)$ -ը:

3552. Դիցուք  $f: R \rightarrow R$  ֆունկցիան ոլորենցելի է և  $F(y) = \int_0^y (x+y)f(x)dx$ : Գտնել  $F''(y)$ -ը:

3553. Տրված է՝  $f \in C[a; b]$  և  $F(y) = \int_a^b f(x)|x-y|dx$ : Գտնել  $F''(y)$ -ը:

3554. Դիցուք՝  $f \in C(R)$  և  $F(t) = \frac{1}{h^2} \int_0^h dy \int_0^h f(x+y+t)dx$  ( $h > 0$ ): Գտնել  $F''(t)$ -ը:

3555. Դիցուք՝  $f \in C[a; b]$  և  $F(x) = \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt$  ( $n \in N$ ): Գտնել  $F^{(n)}(x)$ -ը:

3556. Տրված է՝  $\varphi \in C^1[0; a]$  և  $I(t) = \int_0^t \frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{t-x}}$ : Ապացուցել, որ

$$I'(t) = \frac{\varphi(0)}{\sqrt{t}} + \int_0^t \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{t-x}} dx, \quad t \in (0; a):$$

Ցուցում: Տեղայրել  $x=ty$ :

3557. Դիցուք՝  $f \in C[0; a]$ ,  $\xi \in [0; a]$  և  $(x-\xi)^2 + y^2 + z^2 \neq 0$ : Ապացուցել, որ

$$u(x, y, z) = \int_0^a \frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2 + z^2}}$$

ֆունկցիան հարմոնիկ է.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0:$$

3558. Տրված են

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \quad F(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad k \in (0; 1),$$

համապատասխանաբար առաջին և երկրորդ սեփական կիսունգրալները:  
Ապացուցել, որ

$$\text{ա) } E'(k) = \frac{E(k) - F(k)}{k}; \quad \text{բ) } F'(k) = \frac{E(k)}{k(1-k^2)} - \frac{F(k)}{k};$$

զ)  $E''(k) + \frac{1}{k}E'(k) + \frac{E(k)}{1-k^2} = 0$ ; դ)  $\int_0^t tF(t)dt = E(k) - (1-k^2)F(k)$ ;

ե)  $\int_0^t tE(t)dt = \frac{1}{3}((1+k^2)E(k) - (1-k^2)F(k))$ :

3559. Ապացուցել, որ  $n \in Z_+$  ինդեքսով Բեսելի ֆունկցիան՝

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi - x \sin \varphi) d\varphi - 0,$$

բավարարում է  $x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0$  հավասարմանը:

3560. Ստուգել, որ  $0 \leq 1$  ինդեքսով Բեսելի ֆունկցիաները (տես նախորդ խնդիրը) բավարարում են  $\int_0^x x J_0(x) dx = x J_1(x)$  հավասարմանը:

3561. Ապացուցել, որ

ա)  $\frac{d^n}{dx^n} \left( \frac{\sin x}{x} \right) = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x y^n \cos \left( y + \frac{\pi n}{2} \right) dy \quad (n \in N);$

բ)  $\left| \frac{d^n}{dx^n} \left( \frac{\sin x}{x} \right) \right| \leq \frac{1}{n+1};$

Օգսվելով ըստ պարամետրի դիֆերենցման Լայբնիցի կանոնից՝ հաշվել ինստրումենտային հարաբեկությունը (3562-3565).

3562.  $\int_0^{\pi/2} \ln(y^2 - \sin^2 x) dx \quad (y > 1); \quad 3563. \int_0^{\pi} \ln(1 - 2y \cos x + y^2) dx \quad (|y| < 1);$

3564.  $\int_0^{\pi} \frac{1}{\cos y} \ln \frac{1+x \cos y}{1-x \cos y} dy \quad (|x| < 1); \quad 3565. \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(xtgy)}{tg y} dy :$

\*\*\*

3566. Ապացուցել, որ  $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx$  ինստրումենտային

ա) ցանկացած  $[\varepsilon; b]$  ( $\varepsilon > 0$ ) հասլածի վրա հավասարաշափ գուգամեալ է;

բ)  $[0; b]$  հասլածում հավասարաշափ գուգամեալ չէ:

3567. Ստուգել, որ  $\int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{r^2}(x-\frac{1}{r})^2} dx$  ինստրումենտային ( $0; 1$ ) միջակայքում հավասարաշափ գուգամեալ է, սակայն չունի ինստրումենտի մաժորանու:

Օգսվելով Արելի կամ Դիրիխլեի հայտանիշից՝ ապացուցել ինստեղալի հավասարաշափ զուգամիտությունը (3568-3571).

$$3568. \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx, \quad \alpha \in [\varepsilon; +\infty) \quad (\varepsilon > 0):$$

$$3569. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} dx, \quad \alpha \in R_+: \quad 3570. \int_0^{+\infty} \cos(\alpha x^2) dx, \quad \alpha \in [1; +\infty):$$

$$3571. \int_0^{+\infty} \sin 2x \sin \frac{\alpha}{x} dx, \quad \alpha \in \left[0; \frac{1}{2}\right]:$$

$$3572. \text{Դիցուք } \int_0^{+\infty} f(x) dx \text{ ինստեղալը զուգամետ է: Ապացուցել, որ}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx \text{ և } \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} f(x) dx$$

ինստեղալները  $R_+$ -ում հավասարաշափ զուգամետ են:

3573. Դիցուք ցանկացած  $b$  դրական թվի համար  $f \in \mathfrak{R}[0; b]$  և գոյություն ունի  $\alpha_0$  թիվ, այնպիսին, որ

$$F(b) = \int_0^b e^{-\alpha_0 x} f(x) dx$$

ֆունկցիան  $[0; +\infty)$ -ում սահմանավուակ է: Ապացուցել, որ  $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx$  ինստեղալը ցանկացած  $\delta > 0$  թվի համար  $(\alpha_0 + \delta; +\infty)$  միջակայքում հավասարաշափ զուգամետ է:

3574. Դիցուք ցանկացած  $b$  դրական թվի համար  $f \in \mathfrak{R}[0; b]$  և  $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha_0 x} f(x) dx$  ինստեղալը զուգամետ է: Ապացուցել, որ  $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx$  ինստեղալը  $[\alpha_0; +\infty)$ -ում հավասարաշափ զուգամետ է:

3575. Տրված է՝  $f \in C(R_+)$  և  $\int_0^{\infty} t^{\lambda} f(t) dt$  ինստեղալը պարամետրի  $\lambda = \alpha$  և  $\lambda = \beta$  ( $\alpha < \beta$ ) արժեքների համար զուգամետ է: Ապացուցել, որ այն  $[\alpha; \beta]$ -ի վրա հավասարաշափ զուգամետ է:

Հետազոտել նշված բազմության վրա պարամետրից կախված ինստեղալի հավասարաշափ զուգամիտությունը (3576-3581).

$$3576. \int_0^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx, \quad \alpha \in R_+: \quad 3577. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^p} dx, \quad p \in R_+:$$

3578.  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx$    ա)  $\alpha \in [A; B]$ ;   բ)  $\alpha \in R$ :

3579.  $\int_0^1 x^{p-1} \ln^2 \frac{1}{x} dx$    ա)  $p \in (1; +\infty)$ ;   բ)  $p \in (0; +\infty)$ :

3580.  $\int_0^1 \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^\alpha} dx$ ,  $\alpha \in (0; 2)$ :

3581.  $\int_0^1 \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}} dx$ ,  $\alpha \in [0; 1]$ :

3582. Բերել  $f : [a; \omega] \times Y \rightarrow R$  ֆունկցիայի օրինակ, այնպիսին որ  $\int_a^\omega f(x, y) dx$ -ը  $Y$ -ի վրա հավասարաշափ է զուգամիտում, իսկ  $\int_a^\omega |f(x, y)| dx$ -ը՝ ոչ հավասարաշափ:

3583. Դիցուք  $f : R_+ \rightarrow R$  ֆունկցիան անընդհատ է և սահմանավակ: Ապացուցել, որ

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{|\alpha| f(x)}{x^2 + \alpha^2} dx = f(0):$$

3584. Դիցուք  $F \in \mathfrak{R}_1[a; \omega]$  և  $f : [a; \omega] \times Y \rightarrow R$  ֆունկցիան ցանկացած  $y$ -ի համար բավարարում է  $|f(x, y)| \leq F(x)$  անհավասարությանը: Ապացուցել, որ եթե ցանկացած  $[a; b] \subset [a; \omega]$  հատվածի համար  $f(\bullet, y) \in \mathfrak{R}[a; b]$  և  $f(x, y) \rightrightarrows \varphi(x)$ , եթե  $y \rightarrow y_0$ ,  $x \in [a; b]$ , ապա

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^\omega f(x, y) dx = \int_a^\omega \varphi(x) dx:$$

3585. Օգտվելով  $e^{-x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}$  հավասարությունից՝ հաշվել Եյլեր-

Պուասոնի ինտեգրալը.  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ :

3586. Հաշվել  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + 1}$  սահմանը:

3587. Դիցուք  $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx$ : Ապացուցել, որ  $F$ -ն անընդհատ է:

3588. Ցույց տալ, որ  $F(\alpha) = \int_0^1 \frac{\sin \frac{\alpha}{x}}{x^\alpha} dx$  ֆունկցիան  $(0; 1)$  միջակայքում անընդհատ է:

3589. Գտնել  $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(1-\alpha^2)x}{x} dx$  ֆունկցիայի խզման կետերը:

Հետազոտել պարամետրից կախված ինտեգրալի անընդհատությունը (3590-3591).

3590.  $F(\alpha) = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha (\pi-x)^\alpha} dx, \alpha \in (0;2)$ :

3591.  $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{|\sin x|^\alpha} dx, \alpha \in (0;1)$ :

3592. Տրված է  $f : X \times Y \rightarrow R$  ֆունկցիան: Ապացուել, որ  $f(x, y) \rightrightarrows \varphi(x)$ ,  $y \rightarrow y_0$ ,  $x \in X$  այն և միայն այն դեպքում, եթե ցանկացած  $y_n \in Y \setminus \{y_0\}$ ,  $y_n \rightarrow y_0$ , հաջորդականության համար  $g_n(x) = f(x, y_n)$  ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը  $X$  բազմության վրա հավասարաշափ գուգամիառ է  $\varphi(x)$ -ին:

3593. Դիցուք  $f : [a; b] \times [c, \omega) \rightarrow R$  ֆունկցիան այնպիսին է, որ ցանկացած  $y$ -ի համար  $f(\bullet, y) \in C[a; b]$ : Ապացուել, որ եթե ցանկացած  $x$ -ի համար  $f(x, \bullet)$ -ը մոնուան ձգուում է  $\varphi(x)$  անընդհատ ֆունկցիային, եթե  $y \rightarrow \omega$ , ապա  $f(x, y) \rightrightarrows \varphi(x)$ ,  $y \rightarrow \omega$ ,  $x \in [a; b]$  (Դինիի թեորեմ):

3594. Տրված է  $f : [a; \omega_1] \times [c; \omega_2] \rightarrow R_+$  ֆունկցիան: Դիցուք ցանկացած  $y$ -ի համար  $f(\bullet, y) \in C[a; \omega_1]$  և յուրաքանչյուր ֆիքսած  $x \in [a; \omega_1]$ -ի համար  $f(x, \bullet)$ -ն աճելով ձգուում է  $\varphi(x)$  անընդհատ ֆունկցիային, եթե  $y \rightarrow \omega_2$ : Ապացուել, որ եթե  $\int_a^{\omega_1} \varphi(x) dx$  ինստեգրալը գուգամես է, ապա գուգամես է նաև  $\int_a^{\omega_1} f(x, y) dx$  ինստեգրալը և

$$\lim_{y \rightarrow \omega_2} \int_a^{\omega_1} f(x, y) dx = \int_a^{\omega_1} \varphi(x) dx :$$

3595. Դիցուք  $f \in C([a; \omega) \times [c; d], R_+)$ : Ապացուել, որ եթե

$$I(y) = \int_a^{\omega} f(x, y) dx$$

ինստեգրալն անընդհատ է, ապա  
ա) այն հավասարաշափ է գուգամես;

$$\text{p)} \int\limits_c^d I(y) dy = \int\limits_c^d dx \int\limits_c^d f(x, y) dy :$$

3596. Դիցուք  $f \in C([a; \omega_1] \times [b; \omega_2], R_+)$  ֆունկցիայի համար

$$I(y) = \int\limits_a^{\omega_1} f(x, y) dx \quad \text{և} \quad J(x) = \int\limits_b^{\omega_2} f(x, y) dy$$

ինտեգրալներն անընդհատ են համապատասխանաբար  $[b; \omega_2]$ -ում և  $[a; \omega_1]$ -ում: Ապացուցել, որ եթե գոյություն ունի  $\int_a^{\omega_1} dx \int_b^{\omega_2} f(x, y) dy$  ինտեգրալը, ապա

$$\int\limits_b^{\omega_2} dy \int\limits_a^{\omega_1} f(x, y) dx = \int\limits_a^{\omega_1} dx \int\limits_b^{\omega_2} f(x, y) dy :$$

3597. Օգտվելով  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}} \quad (a > 0)$  հավասարությունից և կիրառելով ըստ պարամետրի ղիֆերենցման Լայբնիցի կանոնը՝ հաշվել ինտեգրալը:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a)^{n+1}} \quad (n \in N) :$$

3598. Օգտվելով  $\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-xy} dy$  հավասարությունից՝ հաշվել ինտեգրալը.

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx \quad (a, b > 0) :$$

3599. Դիցուք՝  $f \in C(R_+)$  և ցանկացած  $A > 0$  թվի համար  $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$

ինտեգրալը գուգամեա է: Ապացուցել Ֆրուլանիի բանաձևը.

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a} \quad (a, b > 0) :$$

3600. Հաշվել ինտեգրալը.

$$\text{ա)} \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx \quad (a, b > 0) ;$$

$$\text{բ)} \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax - \sin bx}{x} dx \quad (a, b > 0) ;$$

$$q) \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x} dx \quad (a, b > 0):$$

Կիրառելով ըստ պարամետրի դիֆերենցման Լայբնիցի կանոնը՝ հաշվել ինստեգրալը ( $\alpha, \beta > 0$ ) (3601-3605).

$$3601. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx:$$

$$3602. \int_0^{+\infty} \left( \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \right)^2 dx:$$

$$3603. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \cos \lambda x dx:$$

$$3604. \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + \alpha^2 x^2)}{x^2(x^2 + \beta^2)} dx:$$

$$3605. w) \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x(1+x^2)} dx;$$

$$p) \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{tg} x} dx:$$

3606. Ապացուցել, որ Դիրիխլեի ինստեգրալը՝

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx - \text{ը},$$

$R \setminus \{0\}$ -ում դիֆերենցելի է, սակայն  $I'(\alpha)$ -ն չի կարելի հաշվել Լայբնիցի կանոնով:

3607. Կատարելով ըստ պարամետրի դիֆերենցում՝ հաշվել ինստեգրալը.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} e^{-\beta x} dx \quad (\beta > 0):$$

3608. Սաուզել, որ նախորդ խնդրում ինստեգրալի նշանի սուսակ սահմանային անցումը քույլասրելի է և Դիրիխլեի ինստեգրալի համար սուսանալ հետևյալ բանաձևը.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha :$$

Հաշվել ինստեգրալը (3609-3614).

$$3609. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x} dx:$$

$$3610. \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \alpha x}{x} dx:$$

$$3611. \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \alpha x}{x^2} dx:$$

$$3612. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} dx:$$

$$3613. \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cos \beta x}{x} dx:$$

$$3614. \int_0^{+\infty} \left( \frac{\sin \alpha x}{x} \right)^3 dx:$$

**3615. Օգտվելով**

$$\left( \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{+\infty} xe^{-x^2 y^2} dy$$

հավասարությունից և ինմանավորելով ինստեգրալի նշանի տակ ըստ պարամետրի ինստեգրման հնարավորությունը՝ հաշվել էլեքտրուստանի ինտեգրալը (տես խնդիր 3584):

Հաշվել ինստեգրալը (3616-3621).

$$3616. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2 + 2bx + c)} dx \quad (a > 0):$$

$$3617. \int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} dx:$$

$$3618. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx \quad (\alpha, \beta > 0):$$

$$3619. \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx \quad (a > 0):$$

$$3620. \int_0^{+\infty} xe^{-ax^2} \sin bx dx \quad (a > 0):$$

$$3621. \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} \cos 2bx dx \quad (n \in N):$$

3622. Հաշվել Լապլասի ինստեգրալը.

$$L(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx:$$

Ցուցում: Օգտվելի  $L'(\alpha) = \left( L'(\alpha) + \frac{\pi}{2} \right)'$  նույնաբարյունից և 3608 խնդրից:

Հաշվել ինստեգրալը (3623-3626).

$$3623. \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} dx:$$

$$3624. \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2} dx:$$

$$3625. \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{(1+x^2)^2} dx:$$

$$3626. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos px}{ax^2 + 2bx + c} dx \quad (a > 0, ac - b^2 > 0):$$

$$3627. \text{Օգտվելով } \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-xy^2} dy \text{ հավասարությունից՝ հաշվել Ֆրենելի ինստեգրալները.}$$

$$\text{ա) } \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx:$$

$$\text{բ) } \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx:$$

Հաշվել ինստրումենտալը (3628-3629).

$$3628. \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(ax^2 + bx + c) dx \quad (a \neq 0); \quad 3629. \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 \cos 2ax dx :$$

3630. Տրված  $f : R_+ \rightarrow R$  ֆունկցիայի համար

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (p > 0)$$

ֆունկցիան կոչվում է Լապլասի ձևափոխություն:

Գտնել  $f$ -ի Լապլասի ձևափոխությունը, եթե

ա)  $f(t) = t^n \quad (n \in N);$

բ)  $f(t) = \sqrt{t};$

գ)  $f(t) = \cos t;$

դ)  $f(t) = \frac{1-e^{-t}}{t};$

3631. Դիցուք  $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \left( e^{-x^2} \right)^{(n)}$ ,  $n \in N$  (Հերմիաի բազմանդամներն են): Ապացուցել, որ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = \begin{cases} 0, \text{ եթե } m \neq n; \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, \text{ եթե } m = n; \end{cases}$$

3632. Դիցուք  $f \in \mathfrak{R}_1(R)$  և անընդհատ է: Ապացուցել, որ

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi, \quad x \in R, \quad t > 0$$

ֆունկցիան բավարարում է  $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  զերմահաղորդականության հավասարմանը և  $u(x, +0) = f(x)$  սկզբնական պայմանին:

\*\*\*

3633. Ապացուցել, որ  $\Gamma(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)} + \int_1^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (x > 0)$ :

Արտահայտել էյլերյան ինստրումենտը (3634-3643).

3634.  $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x^q} dx \quad (0 < p < q)$ :

$$3635. \int_0^{\pi} \frac{\sin^{n-1} x}{(1+k \cos x)^n} dx \quad (0 < |k| < 1, n > 0):$$

$$3636. \int_0^{+\infty} \frac{x^m}{(a+bx^n)^p} dx \quad (a,b,n > 0):$$

$$3637. \int_a^b \frac{(x-a)^m (b-x)^n}{(x+c)^{m+n+2}} dx \quad (0 < a < b, c > 0):$$

$$3638. \int_0^1 \frac{dx}{(1-x^p)^{1/q}} \quad (p > 0):$$

$$3639. \int_0^1 \left( \ln \frac{1}{x} \right)^p dx :$$

$$3640. \int_0^{+\infty} x^p e^{-ax} \ln x dx \quad (a > 0):$$

$$3641. \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} \ln x}{1+x} dx \quad (0 < p < 1):$$

$$3642. \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} \ln^2 x}{1+x} dx \quad (0 < p < 1):$$

$$3643. \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{1+x^3} dx :$$

Ապացուցել հավասարությունը (3644-3646).

$$3644. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{4\sqrt{2\pi}} :$$

$$3645. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4} :$$

$$3646. \int_0^{+\infty} e^{-x^4} dx \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^4} dx = \frac{\pi}{8\sqrt{2}} :$$

Օգսվելով  $\frac{1}{x^p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-xt} dt \quad (x > 0)$  հավասարությունից՝ հաշվել

ինտեգրալը (3647-3648).

$$3647. \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^p} dx \quad (0 < p < 1):$$

$$3648. \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x^p} dx \quad (0 < p < 2):$$

Հաշվել ինտեգրալը (3649-3653).

$$3649. \int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x} dx \quad (0 < p < 1):$$

Ցուցում: Ինտեգրալը ներկայացնելու որպես  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (B(p, \lambda) - B(1-p, \lambda))$  սահման:

$$3650. \int_0^1 \ln \Gamma(x) dx :$$

$$3652. \int_0^1 \ln \Gamma(x) \sin \pi x dx :$$

3654. Դիցուք՝  $\lambda > 0$ ,  $x > 0$  և  $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$ : Ապացուցել Եյլերի բանաձևերը.

$$\text{ա) } \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\lambda t \cos \alpha} \cos(\lambda t \sin \alpha) dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x} \cos \alpha x;$$

$$\text{բ) } \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\lambda t \cos \alpha} \sin(\lambda t \sin \alpha) dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x} \sin \alpha x:$$

գ

$$3655. \text{Հաշվել սահմանը. } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 nx} dx:$$

3656. Գտնել բոլոր այն  $f \in C^\infty(R)$  ֆունկցիաները, որոնք բավարարում են

$$f(x) + \int_0^x (x-y) f(y) dy = 1$$

ինտեգրալ հավասարմանը:

3657. Դիցուք  $f_n \in \mathfrak{R}[a; b]$  ( $n \in N$ ) ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը հավասարաչափ սահմանափակ է: Ապացուցել, որ եթե  $[a; b]$  հատվածի բոլոր կետերում  $f_n(x) \rightarrow \varphi(x)$  և  $\varphi \in \mathfrak{R}[a; b]$ , ապա

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \varphi(x) dx:$$

3658. Դիցուք  $f_n, F \in \mathfrak{R}_1(a; b)$  և  $|f_n| \leq |F|$  ( $n \in N$ ): Ապացուցել, որ եթե  $(a; b)$ -ի վրա կետորեն  $f_n(x) \rightarrow \varphi(x)$  և  $\varphi \in \mathfrak{R}_1(a; b)$ , ապա

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \varphi(x) dx:$$

3659. Տրված է  $f : (a; b) \times Y \rightarrow R$  ֆունկցիան և ցանկացած  $y$ -ի համար  $f(\bullet, y) \in \mathfrak{R}_1(a; b)$ : Դիցուք՝  $F \in \mathfrak{R}_1(a; b)$  և  $|f(x, y)| \leq |F(x)|$ ,  $(x, y) \in (a; b) \times Y$ : Ապացուցել, որ եթե  $(a; b)$ -ի բոլոր կետերում  $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x)$  և  $\varphi \in \mathfrak{R}_1(a; b)$ , ապա

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \varphi(x) dx:$$

3660. Դիցուք՝  $F \in \mathfrak{R}_1(a; b)$  և  $f : (a; b) \times Y \rightarrow R$  ֆունկցիայի համար  $|f(x, y)| \leq |F(x)|$ ,  $(x, y) \in (a; b) \times Y$ : Ապացուցել, որ եթե  $(a; b)$ -ի վրա ամենուրեք գոյություն ունի  $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$  վերջավոր սահմանը և ցանկացած  $y$ -ի համար  $f(\bullet, y) \in \mathfrak{R}_1(a; b)$ , ապա գոյություն ունի նաև  $\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx$  վերջավոր սահմանը:

3661. Դիցուք  $f : (a; b) \times (c; d) \rightarrow R$  ֆունկցիան այնպիսին է, որ ցանկացած  $y$ -ի համար  $f(\bullet, y), f'_y(\bullet, y) \in \mathfrak{R}_1(a; b)$ : Ապացուցել, որ եթե  $F \in \mathfrak{R}_1(a; b)$  և  $|f'_y(x, y)| \leq F(x)$ ,  $(x, y) \in (a; b) \times (c; d)$ , ապա  $I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$  ֆունկցիան դիֆերենցելի է, ըստ որում՝

$$I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx:$$

3662. Տրված է  $f : [a; b] \times [c; d] \rightarrow R$  ֆունկցիան: Դիցուք ցանկացած  $x$ -ի համար  $f(x, \bullet) \in \mathfrak{R}[c; d]$  և ցանկացած  $y$ -ի համար  $f(\bullet, y) \in \mathfrak{R}[a; b]$ : Ապացուցել, որ եթե  $f$  -ը սահմանավուակ է, ապա

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy:$$

3663. Դիցուք՝  $f \in \mathfrak{R}_1(R)$ : Ապացուցել, որ ցանկացած  $A > 0$  թվի համար

$$\int_0^A dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos x u du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \frac{\sin A u}{u} du:$$

3664. Դիցուք՝  $f \in \mathfrak{R}_1(a; +\infty)$ : Ապացուցել, որ

$$\text{ա) } \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_a^{+\infty} f(t) \sin p t dt = 0; \quad \text{բ) } \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_a^{+\infty} f(t) \cos p t dt = 0:$$

3665. Դիցուք՝  $f \in \mathfrak{R}_1(R)$  և  $x_0, S \in R$ : Ապացուցել, որ եթե որևէ  $h > 0$  բվի համար  $\int_0^h \frac{|f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2S|}{t} dt$  ինստեգրալը զուգամետ է, ապա

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos((u-x_0)x) du = S$$

(Դիմի հայտանիշ):

3666. Դիցուք  $f \in \mathfrak{R}_1(R)$  ֆունկցիան  $x_0 \in R$  կետում ունի վերջավոր ածանցյալ: Ապացուցել, որ  $f$ -ն  $x_0$  կետում ներկայացվում է Ֆուրիեի ինստեգրալով՝

$$f(x_0) = \int_0^{+\infty} (a(\lambda) \cos \lambda x_0 + b(\lambda) \sin \lambda x_0) d\lambda,$$

որտեղ  $a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos \lambda u du$ ,  $b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin \lambda u du$ :

3667. Ապացուցել Լեժարդի բանաձևը.

$$\Gamma(a) \Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}} \Gamma(2a), \quad a > 0:$$

3668. Դիցուք՝  $\Phi \in C^1(0; +\infty)$ , ցանկացած  $a \in (0; +\infty)$  բվի համար  $\Phi(a) \neq 0$ ,

$\Phi(a+1) = a\Phi(a)$  և  $\Phi(a)\Phi\left(a + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Phi(2a)$ : Ապացուցել, որ

$\Phi(a) \equiv \Gamma(a)$ :

3669. Ապացուցել, որ ցանկացած դրական  $a$ -ի համար

$$\Gamma(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{a-1} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{a+k}:$$

3670. Ցույց տալ, որ  $\ln \Gamma(x)$  ֆունկցիան  $(0; +\infty)$ -ում ուսուցիկ է:

3671. Դիցուք  $\Phi : (0; +\infty) \rightarrow R$  ֆունկցիայի համար  $\Phi(a+1) = a\Phi(a)$ ,  $\Phi(1) = 1$  և  $\ln \Phi$ -ն ուսուցիկ է: Ապացուցել, որ  $\Phi(a) \equiv \Gamma(a)$ :

3672. Ապացուցել, որ ցանկացած դրական  $x$ -ի համար  $\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} > \ln x$ :

3673. Ապացուցել, որ

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{e^x - 1} dx = \Gamma(\alpha) \zeta(\alpha) \quad (\alpha > 1), \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{e^x + 1} dx = \Gamma(\alpha) \zeta^*(\alpha) \quad (\alpha > 0),$$

որաեղ գ(α)-ն Ոիմանի ծետա-ֆունկցիան է՝  $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ ,

$$\zeta^*(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}} :$$

$$\text{Այստեղից ստանալ, որ } \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}} = \frac{1}{2} :$$

**3674.** Ապացուցել, որ ցանկացած  $a$ -ի համար  $\delta_m a_r$  է

$$\Gamma(x+a) = x^a \Gamma(x) (1 + o(1)), \quad x \rightarrow +\infty$$

ասիմպոտիկ բանաձևը:

**3675.** Օգտվելով ճախորդ խնդրից և  $n!-ի$  համար Ստիրլինգի հայտնի բանաձևից (առևս խնդիր 2663)՝ ապացուցել Ստիրլինգի բանաձևը զամնա ֆունկցիայի համար.

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} (1 + o(1)), \quad x \rightarrow +\infty :$$

## Ծառ փոփոխականի ֆունկցիաների ինտեգրումը

Չուզական պահանջման համար ծառայության մեջ տրված  $\mathbf{a} = (a^1, \dots, a^n)$  և  $\mathbf{b} = (b^1, \dots, b^n)$  ( $a^i < b^i, i = 1, \dots, n$ ) վեկտորների համար

$$I = I_{[\mathbf{a}; \mathbf{b}]} = \left\{ (x^1, \dots, x^n) : a^i \leq x^i \leq b^i, i = 1, \dots, n \right\} = [a^1; b^1] \times \cdots \times [a^n; b^n]$$

$n$ -չափանի փակ զուգահեռանիւստի, ինչպես նաև  $I_{[\mathbf{a}; \mathbf{b}]} = \text{int } I_{[\mathbf{a}; \mathbf{b}]}$  բաց զուգահեռանիւստի, ժամանակակից է

$$v(I) = v(I_{[\mathbf{a}; \mathbf{b}]}) = v(I_{(\mathbf{a}; \mathbf{b})}) = \prod_{i=1}^n (b^i - a^i)$$

Քանածելով: Եթեմն զուգահեռանիւստի ծավալի փոխարեն օգտագործում են չոփաքանություն, ընդ որում, եթե  $n = 1$  կամ  $n = 2$   $v(I)$ -ն անվանում են համապատասխանարար  $I = [a^1; b^1]$  միջակայքի երկարություն կամ  $I = [a^1; b^1] \times [a^2; b^2]$  ուղղանկյան մակերես:

$$\text{Եթե } I, I_1, \dots, I_s \text{ զուգահեռանիւստերն այնպիսին են, որ } I = \bigcup_{k=1}^s I_k, \text{ ապա } v(I) \leq \sum_{k=1}^s v(I_k):$$

Իսկ եթե նաև  $I_1, \dots, I_s$  զուգահեռանիւստերը զույգ առ զույգ չունեն ներքին կետեր, ապա

$$v(I) = \sum_{k=1}^s v(I_k) \quad (\text{ծավալի սովորություն}):$$

Ցանկացած  $t \geq 0$  բիլի համար

$$v(I_{[\mathbf{a}; \mathbf{b}]}) = t^n v(I_{[\mathbf{a}; \mathbf{b}]}) \quad (\text{ծավալի համաստեռություն}):$$

Չուզական պահանջման համար իւրաքանչյուր մեջին կարող է տրամադրել առանձին պահանջման համար առանձին պահանջման համար:

$$I_{[\mathbf{a}; \mathbf{b}]} = [a^1; b^1] \times \cdots \times [a^n; b^n]$$

Զուգահեռանիւստը: Դիցուք  $P_i = (x_0^i, \dots, x_{m_i}^i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) ( $[a^i; b^i]$  հաստիքի տրամադրություն): (առև զույգ 8):  $P_1, \dots, P_n$  տրամադրություն ծննդած է  $I_1, I_2, \dots, I_s$  ( $s = m_1 \cdots m_n$ ) զույգ առ զույգ բնրիանուր ներքին կետեր չունեցած «մակր» զուգահեռանիւստերի լինանիք, պատճեցից յուրաքանչյուրը ներկայացնելու է արքհման միջակայքերի

$$[x_{k_1}^1; x_{k_1+1}^1] \times \cdots \times [x_{k_n}^n; x_{k_n+1}^n], \quad 0 \leq k_i \leq m_i - 1 \quad (i = 1, \dots, n)$$

Դեկադրամայակ արտապայման:

Տրված  $P_1, \dots, P_n$  տրամադրություն ծննդած  $I_1, I_2, \dots, I_s$  զուգահեռանիւստերի (արքհման զուգահեռանիւստերի) լինանիքը, իսկ եթեմն նաև  $P = (P_1, \dots, P_n)$  շարվածքը, անվանում են  $I_{[\mathbf{a}; \mathbf{b}]}$  զուգահեռանիւստի տրամադրություն:  $\lambda(P) = \max_{1 \leq k \leq s} \text{diam}(I_k)$ -ն կրչվում է  $P$  տրամադրությունից:

Ենա եզրակացին գումարը է բարձր : Այս առաջակած է ի հարաբերական գումարը՝  $I_{[a;b]} \subset R^n$  զուգահեռանիշտափառ վրա որոշված  $f$  իրականարժեք ֆունկցիան: Դիցուք  $P$ -ն  $I_{[a;b]}$ -ի տրում է: Տրուման  $I_1, \dots, I_s$  զուգահեռանիշտերից յուրաքանչյուրում լնարեկող մեկական  $\xi_1, \dots, \xi_s$  կետ՝ կազմում են

$$\sigma_f(P, \xi) = \sum_{k=1}^s f(\xi_k) v(I_k)$$

գումարը, որն տրուման են  $f$  ֆունկցիայի համար  $I_{[a;b]}$ -ի  $P$  տրումանը և  $\xi_1, \dots, \xi_s$  կետերին համապատասխանող ինտեգրալային գումարը:

Սահմանում: Եթել կրչփում է  $f: I_{[a;b]} \rightarrow R$  ֆունկցիայի ինտեգրալ (Ռիմանի ինտեգրալ), եթե ցանկացած  $\varepsilon > 0$  թվի համար գոյություն ունի  $\delta > 0$  թվի, այնպիսին, որ  $I_{[a;b]}$ -ի ցանկացած  $P$  արուման և դրան համապատասխան  $\xi$ , կետերի ցանկացած ընտրության դեպքում

$$\lambda(P) < \delta \Rightarrow |\sigma_f(P, \xi) - \mathcal{I}| < \varepsilon :$$

Եթե սահմանան մեջ հիշատակված Եթել գոյություն ունի,  $f$ -ն անվանում են Ռիմանի ինտեգրալ ինտեգրելի և գրում՝

$$\mathcal{I} = \int_I f = \int_{I_{[a;b]}} f(x) dx :$$

Հաճախ, եթե  $n \geq 2$ , բնորդելու համար, որ ինտեգրալը սահմանված է բազմաչափ արբայրում, Յ-ն անվանում են բազմաչափ (լրկնակի, եռակի և այլն) ինտեգրալ և օգտագործում հետևյալ ծավալուն նշանակումը.

$$\mathcal{I} = \overbrace{\int \cdots \int}^{n} f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \cdots dx^n :$$

Դա բարձր կամ ան է ան է բարձր ինտեգրալու անհամար պայմանը: Եթե  $f: I_{[a;b]} \rightarrow R$  ֆունկցիան ինտեգրելի է, ապա այն սահմանված է: Դիցուք  $P$ -ն  $I_{[a;b]}$  զուգահեռանիշտափառ տրում է: Նշանակենք

$$m_k = \inf_{x \in I_k} f(x), \quad M_k = \sup_{x \in I_k} f(x), \quad \Omega_k = M_k - m_k, \quad k = 1, \dots, s,$$

որտեղ  $\{I_1, \dots, I_s\}$ -ը արուման գուգահեռանիշտերի լնարենքն է:

Հետևյալ գումարները կրչփում են Դարբուի համապատասխանարար սասրին և վերին գումարները.

$$L_f(P) = \sum_{k=1}^s m_k v(I_k), \quad U_f(P) = \sum_{k=1}^s M_k v(I_k) :$$

Թեորիմ:  $f: I_{[a;b]} \rightarrow R$  սահմանափակ ֆունկցիան Ռիմանի ինտեգրելի է այն և միայն այն դեպքում, եթե ցանկացած  $\varepsilon > 0$  թվի համար գոյություն ունի այնպիսի  $P$  արում, որի համար

$$\sum_{k=1}^s \Omega_k v(I_k) = U_f(P) - L_f(P) < \varepsilon :$$

Եթե  $f$ -ը սահմանափակ է, ապա գոյություն ունին

$$\sup_P L_f(P) = L \int f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \text{ и } \inf_{I_{[\mathbf{a}; \mathbf{b}]}} U_f(P) = U \int f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Վերջավոր ճշգրիտ եզրերը, որմն կոչվում են  $\int$  ֆունկցիայի համապատասխանքար ստարիմ և վերիմ ինտեգրալներ: Դրանց հավասարությունն անհրաժեշտ և բավարար է, որպեսզի  $f$ -ն  $I_{[\mathbf{a}; \mathbf{b}]}$ -ի վրա լինի ինտեգրելի:

Զ բ ո չ ա փ ի և զ բ ո ծ ա լ ի թ ա զ մ ո թ յ ո ն ն ե թ :  $A \subset R^n$  բազմությանը կոչվում է զարդարված բազմություն, եթե ցանկացած  $\varepsilon > 0$  թվի համար գոյացյան ունի  $n$ -չափանի գուգահեռանիստերի վերջավոր ընտանիք՝  $I_1, \dots, I_m$ , այնպիսին, որ

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \text{ և } \sum_{k=1}^{\infty} v(I_k) < \varepsilon :$$

$A \subset R^n$  բազմությունը կոչված է զարդարված բազմություն, եթե ցանկացած  $\varepsilon > 0$  թվի համար գոյացյան ունի  $n$ -չափանի գուգահեռանիստերի վերջավոր ընտանիք՝  $I_1, \dots, I_m$ , այնպիսին, որ

$$A \subset \bigcup_{k=1}^m I_k \text{ և } \sum_{k=1}^m v(I_k) < \varepsilon :$$

Եթե  $A$ -ն զարդարված է, ապա կզրկելի  $\mu(A) = 0$ , իսկ եթե զարդարված՝  $v(A) = 0$ : Ցանկացած զարդարված բազմություն նաև զարդարված է:

Եթե  $f: X \rightarrow R$  ( $X \subset R^n$ ) ֆունկցիան  $X \setminus X_0$  ( $X_0 \subset X$ ) բազմության յուրաքանչյուր կետում բավարարություն է որոշակի պայմանի և  $\mu(X_0) = 0$ , ապա ասում են, որ  $f$ -ը նշանակած պայմանի բավարարություն է  $X$  բազմության վրա համարյա ամենալուրեց:

Լ ե թ ե զ ի հ ա յ տ ա ն ի շ ը : Որպեսզի  $f: I \rightarrow R$  ֆունկցիան ներմանի իմաստով լինի ինտեգրելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ  $f$ -ը  $I$ -ի վրա լինի սահմանակալ և համարյա ամենալուրեց:

Ի ն տ ե զ ր ա լ ց ա ն կ ա ց ա ծ թ ա զ մ ո թ յ ա մ թ : Գիցուք  $I$ -ն  $R^n$ -ում գուգահեռանիստ է,  $D \subset I$  և  $f$ -ը  $D$ -ի վրա որոշված իրականարժեք ֆունկցիա է: Կասուցենք  $f^*: I \rightarrow R$  ֆունկցիան հետևյալ բառամականությունում:

$$f^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in D, \\ 0, & \mathbf{x} \in I \setminus D. \end{cases}$$

Սահմանում:  $f^*$  ֆունկցիայի իմաստեղավոր, եթե այն գոյացյան ունի, կոչվում է  $f$  ֆունկցիայի ինտեգրալ  $D$  բազմությամբ ( $D$ -ով ասպածված) և նշանակվում

$$\int_D f^* = \int_D f = \int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} :$$

Այս պայմաններում  $f$ -ը կոչվում է  $D$  բազմության վրա ինտեգրելի: Նկատենք, որ  $f$  ֆունկցիայի ինտեգրալ որժեքը կախված չէ  $D$ -ն պարանակող  $I$  գուգահեռանիստի ընտրությունից:

$D$  բազմության վրա ինտեգրելի իրականարժեք ֆունկցիաների դասը նշանակվում է  $\mathcal{R}(D)$ -ով:

Ըստ բարդացման կազմության պարզաբանությունը կազմակերպվում է ժամանակակից կազմության վերաբերյալ (ուղարկությունը կազմակերպվում է առաջնային և եղանակային կազմության վերաբերյալ)։ Եթե  $\mu(\partial D) = 0$ ՝  $D$  բազմության ժամանակակից կազմության վերաբերյալ առաջնայինը է հետագա բանաձևը։

$$v(D) = \int_D \chi_D(x) dx,$$

որտեղ  $I$ -ն  $D$ -ն պարբռական գուգահեռամիան է, իսկ  $\chi_D$ -ն՝  $D$  բազմության բնութագրի ֆունկցիան։

$$\chi_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in D, \\ 0, & x \in R^n \setminus D. \end{cases}$$

Նկատենք, որ  $\chi_D$ -ի ինտեգրելիությունը բիում է  $\mu(\partial D) = 0$  պայմանից։

$\Re(D)$  դասի կատալոգում գուգահեռամիանը բազմությունը ժամանակակից է։ Տաճակացնեն  $f, g \in \Re(D)$  ֆունկցիաների համար

ա)  $\alpha f + \beta g \in \Re(D)$  ( $\alpha, \beta \in R$ ), ընդունում՝

$$\int_D (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_D f dx + \beta \int_D g dx;$$

բ)  $f \cdot g \in \Re(D)$ ;

$$\text{զ) } |f| \in \Re(D), \text{ ընդունում՝ } \left| \int_D f \right| \leq \int_D |f| dx.$$

Ինտեգրալի աղիախիլությունը եթե  $D_1$  և  $D_2$  բազմությունները  $R^n$ -ում ժողոված իմաստով չափելի են, ապա  $D_1 \cup D_2$  և  $D_1 \cap D_2$  բազմությունները նույնպես չափելի են։ Եթե  $f \in \Re(D_1 \cup D_2)$ , ապա  $D_1$ ,  $D_2$  և  $D_1 \cap D_2$  բազմություններից յուրաքանչյուրի վրա  $f$ -ը ՈՒմանի իմաստով ինտեգրելի է։ Եթե հայտնի է նաև, որ  $\mu(D_1 \cap D_2) = 0$ , ապա

$$\int_{D_1 \cup D_2} f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f.$$

Ինտեգրալի մասնաւությունը եթե  $f, g \in \Re(D)$  և  $f \geq g$ , ապա  $\int_D f \geq \int_D g$ ։

Միջին արժեքի բնարկությունը եթե  $f \in \Re(D)$ ,  $m = \inf_{x \in D} f(x)$ ,  $M = \sup_{x \in D} f(x)$ , ապա գոյություն ունի ունի  $\mu \in [m; M]$  թիվ, այնպիսին, որ

$$\int_D f = \mu \cdot v(D).$$

Եթե նաև  $D$  չափելի բազմությունը զծորեն կապակցված է և  $f \in C(D)$ , ապա գոյություն ունի  $\xi \in D$  կետ, այնպիսին, որ

$$\int_D f(x) dx = f(\xi) \cdot v(D).$$

Ի ն ա ն զ բ ա լ ի ք ե բ ո մ ը հ ա ջ ո բ դ ա կ ա ն ի ն ա ն զ բ ա լ ն ի ք ի : Դիցուք  $I_m$ -ը և  $I_n$ -ը համապատասխանաբար  $R^m$ -ում և  $R^n$ -ում գուգահեռամիաններ են և  $f(x, y)$ -ը  $I_m \times I_n \subset$

$\subset R^{m+n}$  զոգահեռանիստի վրա որոշված իրականարժեք ֆունկցիա է: Այս դեպքում ընթառնած է  $f$  ֆունկցիայի ինտեգրալը նշանակել  $\int f(x, y) dx dy$ :

Տուրինիի քերեմը: Եթե  $f \in \mathcal{R}(I_m \times I_n)$  և ցանկացած  $x$ -ի համար գոյություն ունի  
 $\mathfrak{J}(x) = \int_{I_n} f(x, y) dy$

ինտեգրալը, ապա այն ըստ  $x$  վավիխաւկանի  $I_m$ -ի վրա ինտեգրելի է, ընդ որում

$$\int_{I_m \times I_n} f(x, y) dx dy = \int_{I_m} \mathfrak{J}(x) dx = \int_{I_m} \left\{ \int_{I_n} f(x, y) dy \right\} dx :$$

Ազ կողմում գրվածը կրչվում է Խաչորյական ինտեգրալ և նշանակվում՝  $\int_{I_m} dx \int_{I_n} f(x, y) dy$ :

Հետևանք 1: Դիցուք  $I = [a^1; b^1] \times \cdots \times [a^n; b^n]$  և  $f \in \mathcal{R}(I)$ : Այդ դեպքում

$$\int_I f = \int_{a^n}^{b^n} dx^n \int_{a^{n-1}}^{b^{n-1}} \cdots \int_{a^1}^{b^1} f(x^1, \dots, x^n) dx^1,$$

եթե այդ կամում գրված հաջորդական ինտեգրալը գոյություն ունի:

Հետևանք 2: Դիցուք  $G$ -ն  $R^{n-1}$ -ում չափելի բազմություն է,  $\varphi_1, \varphi_2 \in C(\overline{G})$ ,  $\varphi_1 \leq \varphi_2$  և

$D = \{(x, y) \in R^n : x \in G, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ : Այդ դեպքում  $D$ -ն  $R^n$ -ում չափելի բազմություն է և եթե  $f \in \mathcal{R}(D)$ , ապա

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_G dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy :$$

Փռ փռ ին ա կ ա ն ի փռ ին ա ր ի ն ո մ ը ք ա զ ն ա կ ի ի ն ո ն գ ր ա լ ո մ : Դիցուք  $D_t$ -ն և  $D_x$ -ը  $R^n$ -ում բաց, սահմանափակ բազմություններ են,  $\varphi$ -ն  $D_t$ -ն  $D_x$ -ի վրա արտապատկերող լինելու ֆիզիկ է,  $E_t$ -ն և  $E_x$ -ը համապատասխանաբար  $D_t$ -ի և  $D_x$ -ի ենթաբազմություններ են, այնախիք, որ  $\overline{E_t} \subset D_t$ ,  $\overline{E_x} \subset D_x$  և  $E_x = \varphi(E_t)$ : Այս պայմաններում, եթե  $f \in \mathcal{R}(E_x)$ , ապա  $(f \circ \varphi)| \det \varphi' | \in \mathcal{R}(E_t)$ , ընդ որում

$$\int_{E_x} f(x) dx = \int_{E_t} (f \circ \varphi)(t) |\det \varphi'(t)| dt :$$

Ի ն ո ն ե զ ր ա ւ լ ի կ ի ր ա ւ ո ո ք յ ո ն ն ե բ ը : Գլանակերպի ծավալը: Դիցուք  $D$ -ն  $R^2$ -ում սահմանափակ բազմություն է,  $\varphi(x, y)$ -ը և  $\psi(x, y)$ -ը  $D$ -ի վրա որոշված իրականարժեք ֆունկցիաներ են, ընդ որում  $\varphi \leq \psi$ : Եթե  $D$ -ն  $R^2$ -ում բառակրտի է և  $\varphi, \psi \in \mathcal{R}(D)$ , ապա

$$G = \{(x, y, z) \in R^3 : (x, y) \in D, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$$

գլանակերպ  $R^3$ -ում խորանարդի է, ընդ որում

$$v(G) = \iiint_G dx dy dz = \iint_D [\psi(x, y) - \varphi(x, y)] dx dy :$$

Մակերևույթի մակերեսը: Դիցուք  $G$ -ն  $R^2$ -ում բաց, սահմանափակ բազմություն է և  $f \in C^1(G)$ : Եթե  $D$ -ն բատակածվի է և  $\overline{D} \subset G$ , ապա  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$ , մակերևույթի մակերեսը որոշվում է

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} dx dy$$

բանաձևում:

Եթե մակերևույթը տրված է  $x = \xi(u, v)$ ,  $y = \eta(u, v)$ ,  $z = \zeta(u, v)$   $(u, v) \in D$  պարտավորական հավասարադաշտություն, որտեղ  $D$ -ն  $R^2$ -ում բատակածվի ավելացվություն է և  $\xi, \eta, \zeta \in C^1(D)$ , ապա մակերևույթի մակերեսը արտահայտվում է

$$S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv$$

բանաձևով, որում  $E = \xi_u'^2 + \eta_u'^2 + \zeta_u'^2$ ,  $G = \xi_v'^2 + \eta_v'^2 + \zeta_v'^2$ ,  $F = \xi_u' \xi_v' + \eta_u' \eta_v' + \zeta_u' \zeta_v'$ :

Ա

### 3676. Դիցուք

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{եթե } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{եթե } \frac{1}{2} \leq x \leq 1: \end{cases}$$

Համոզվելոր ՝  $f$  -ն ինտեգրելի է  $[0;1] \times [0;1]$  քառակուսու վրա և որ

$$\iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} f(x, y) dx dy = \frac{1}{2}:$$

3677. Դիցուք  $I$  -ն  $R^n$  -ում զուգահեռանիսաւ է,  $f$  -ը՝  $I$  -ի վրա որոշված իրականարժեք ֆունկցիա, իսկ  $P$  -ը՝  $I$  -ի արողիում: Ապացուցել, որ  $f$  -ն  $I$  -ի վրա ինտեգրելի է այն և միայն այն դեպքում, եթե այն ինտեգրելի է  $P$  արողիմանը պատկանող յուրաքանչյուր  $I_k$  ( $k = 1, \dots, s$ ) զուգահեռանիսաւի վրա, ընդ որում՝

$$\int_I f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{k=1}^s \int_{I_k} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}:$$

3678. Դիցուք՝  $f(x, y) = \chi(x) \cdot R(y)$ , որտեղ  $\chi$  -ն Դիրիխլեի ֆունկցիան է, իսկ  $R$  -ը՝ Ռիմանի: Ցույց տալ, որ  $f$  -ն ինտեգրելի է  $I = [0;1] \times [0;1]$  քառակուսու վրա և որ

$$\iint_I f(x, y) dx dy = 0:$$

3679. Հարմար ձևով կազմելով ինտեգրալային գումարները, հաշվել

$$\iint_D xy \, dx \, dy - \underline{0},$$

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

դիտարկելով այն որպես այդ գումարների սահման:

3680.  $D = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3\}$  աիրույքը  $x = 1 + \frac{i}{n}$ ,  $y = 1 + \frac{2j}{n}$

$(i, j = 1, \dots, n)$  ուղղղությունութեան կազմել  $f(x, y) = x^2 + y^2$  ֆունկցիայի Դարբուի գումարները: Հաշվել գումարների սահմանը, եթե  $n \rightarrow \infty$ :

3681. Դիցուք  $f, g : A \rightarrow R$  ( $A \subset R^n$ ) ֆունկցիաներն ինտեգրելի են և  $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$  ( $\mathbf{x} \in A$ ): Ապացուցել, որ  $\int_A f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \int_A g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ :

3682. Ապացուցել, որ եթե  $f : A \rightarrow R$  ( $A \subset R^n$ ) ֆունկցիան ինտեգրելի է, ապա  $|f|$ -ը նույնպես ինտեգրելի է և  $\left| \int_A f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \leq \int_A |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x}$ :

3683. Ապացուցել հավասարությունը.

$$\iint_D X(x)Y(y) dx dy = \int_a^A X(x) dx \cdot \int_b^B Y(y) dy,$$

որտեղ  $D = [a; A] \times [b; B]$ ,  $X \in \mathfrak{R}[a; A]$ ,  $Y \in \mathfrak{R}[b; B]$ :

Տրված  $D$  բազմությամբ  $\iint_D f(x, y) dx dy$  կրկնակի ինտեգրալը բերել հաջորդական ինտեգրալի (3684-3688).

3684.  $D$ -ն  $O(0,0)$ ,  $A(1,0)$ ,  $B(1,1)$  գազարներով եռանկյունն է:

3685.  $D$ -ն  $O(0,0)$ ,  $A(1,0)$ ,  $B(1,2)$ ,  $C(0,1)$  գազարներով սեղանն է:

3686.  $D$ -ն  $y = x^2$ ,  $y = 1$  եզրերով դարարուական սեղմենտն է:

3687.  $D$ -ն  $x^2 + y^2 \leq 1$  շրջանն է:

3688.  $D$ -ն  $y = x^2$ ,  $y = 2x^2$ ,  $y = 1$ ,  $x > 0$  գծերով սահմանավակված պատկերն է:

Հաշվել ինտեգրալը (3689-3694).

3689.  $\iint_D x \sin(x+y) dx dy$ ,  $D = [0; \pi] \times [0; \pi/2]$ :

3690.  $\iint_D x^2 y e^{xy} dx dy$ ,  $D = [0;1] \times [0;2]$ :

3691.  $\iint_D (x+y) dx dy$ ,  $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$ :

3692.  $\iint_D xy^2 dx dy$ ,  $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, x^3 \leq y \leq x^2\}$ :

3693.  $\iint_D (x^2 + yx) dx dy$ ,  $D = \{(x,y) : y^2 \leq x \leq y\}$ :

3694.  $\iint_D r^2 \sin^2 \varphi dr d\varphi$ ,  $D = \{(r,\varphi) : 0 \leq r \leq a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ :

3695. Հաշվել

$$I = \int_a^A dx \int_b^B f(x,y) dy$$

ինտեգրալը, եթե  $f(x,y) = F''_{xy}(x,y)$ :

3696. Ապացուցել Դիրիխլի բանաձևը.

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x,y) dy = \int_0^a dy \int_0^y f(x,y) dx, \quad a > 0 :$$

Փոխել ինտեգրման կարգը (3697-3705).

3697.  $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x,y) dy$ :

3698.  $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y) dx$ :

3699.  $\int_0^2 dx \int_{2x}^{6-x} f(x,y) dy$ :

3700.  $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y) dy$ :

3701.  $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x,y) dy$ :

3702.  $\int_0^{48} dy \int_{y/12}^{\sqrt{y/3}} f(x,y) dx$ :

3703.  $\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y) dy$ :

3704.  $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y) dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} f(x,y) dy$ :

$$3705. \int_0^1 dx \int_0^{x^{\frac{2}{3}}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{1-\sqrt{4x-x^2}-3} f(x, y) dy :$$

Հաշվել ինտեգրալը (3706-3709).

$$3706. \iint_D xy^2 dx dy, D\text{-ն } y^2 = 2px, x = \frac{p}{2} \quad (p > 0) \text{ կորերով սահմանափակ-}$$

ված տիրույթն է:

$$3707. \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, D\text{-ն } y = x, y = x + a, y = a, y = 3a \quad (a > 0) \text{ ուղղ-}$$

ներով սահմանափակված զուգահեռագիծն է:

$$3708. \iint_D \frac{x^2}{y^2 + 1} dx dy, D\text{-ն } y = x, y = 0, xy = 1, x = 2 \text{ գծերով սահմանա-}$$

փակված տիրույթն է:

$$3709. \iint_D (x^2 + 2y^2 - xy) dx dy, D = \{(x, y) : |x| + |y| \leq a\}:$$

Տրված  $D$  քազմությամբ  $\iint_D f(x, y) dx dy$  կրկնակի ինտեգրալում անցնել

$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$  թևնային կոորդինատների և բերել այն հաջորդական ինտեգրալի (3710-3713).

$$3710. D\text{-ն } x^2 + y^2 \leq a^2 \text{ շրջանն է:}$$

$$3711. D\text{-ն } x^2 + y^2 \leq ax \quad (a > 0) \text{ շրջանն է:}$$

$$3712. D\text{-ն } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x \text{ եռանկյունն է:}$$

$$3713. D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4x, y \geq x\} \text{ շրջանային սեղմենտն է:}$$

Անցնելով  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$  թևնային կոորդինատների՝ հաշվել ինտեգրալը (3714-3716).

$$3714. \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy :$$

$$3715. \iint_{\pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2} \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy :$$

$$3716. \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy, D\text{-ն սահմանափակված է } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ էլիպսով:}$$

Գտնել արված կորերով սահմանափակված պասկերի մակերեսը (3717-3724).

$$3717. x = 0, y = 0, x + y = 1:$$

$$3718. y = x, y = 5x, x = 1:$$

$$3719. xy = a^2, x + y = \frac{5}{2}a:$$

$$3720. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1:$$

$$3721. 2y = x^2, x = y:$$

$$3722. y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}, x = 4:$$

$$3723. (x - y)^2 + x^2 = a^2, a > 0:$$

$$3724. 4y = x^2 - 4x, x - y - 3 = 0:$$

Անցնելով քևոային կոորդինատների՝ գտնել տրված կորերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը (3725-3728).

$$3725. (x^2 + y^2)^2 = 2ax^3:$$

$$3726. (x^2 + y^2)^3 = x^4 + y^4:$$

$$3727. (x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2):$$

$$3728. (x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy:$$

Կատարելով վովտիսականի վոխարինում՝ գտնել տրված կորերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը (3729-3732).

$$3729. x + y = a, x + y = b, y = \alpha x, y = \beta x \quad (0 < a < b, 0 < \alpha < \beta):$$

$$3730. xy = a^2, xy = 2a^2, y = x, y = 2x \quad (x > 0, y > 0):$$

$$3731. y^2 = 2px, y^2 = 2qx, x^2 = 2ry, x^2 = 2sy \quad (0 < p < q, 0 < r < s):$$

$$3732. (a_1x + b_1y + c_1)^2 + (a_2x + b_2y + c_2)^2 = 1, d = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0:$$

Դանել տրված մակերևույթներով սահմանափակված մարմնի ծավալը (3733-3737).

$$3733. x - y + z = 6, x + y = 2, x = y, y = 0, z = 0:$$

$$3734. \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, x = 0, y = 0, z = 0:$$

$$3735. z = a + x, z = -a - x, x^2 + y^2 = a^2:$$

$$3736. z = x^2 + y^2, y = x^2, y = 1, z = 0:$$

$$3737. x^2 + y^2 = R^2, x^2 + z^2 = R^2:$$

Անցնելով քևոային կոորդինատների՝ գտնել տրված մակերևույթներով սահմանափակված մարմնի ծավալը (3738-3741).

$$3738. z^2 = xy, x^2 + y^2 = a^2:$$

$$3739. z = x + y, (x^2 + y^2)^2 = 2xy, z = 0 \quad (x > 0, y > 0):$$

$$3740. z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = x, x^2 + y^2 = 2x, z = 0:$$

$$3741. x^2 + y^2 - az = 0, (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), z = 0 \quad (a > 0):$$

Կատարելով վովտիսականի վոխարինում՝ գտնել տրված մակերևույթներով սահմանափակված մարմնի ծավալը (3742-3745).

$$3742. z^2 = xy, x + y = a, x + y = b \quad (0 < a < b):$$

$$3743. z = x^2 + y^2, xy = a^2, xy = 2a^2, y = \frac{x}{2}, y = 2x, z = 0:$$

$$3744. z = xy, x^2 = y, x^2 = 2y, y^2 = x, y^2 = 2x, z = 0:$$

$$3745. z^2 = xy, xy = 1, xy = 4, y^2 = x, y^2 = 3x, z = 0:$$

\*\*\*

Հաշվել հաջորդական ինստեղալը (3746-3747).

$$3746. \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^a dz :$$

$$3747. \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz : (x^2 + y^2) dz :$$

Հաշվել եռակի ինստեղալը (3748-3751).

$$3748. \iiint_V xy^2 z^3 dx dy dz, V - ն սահմանափակված է z = xy, y = x, x = 1,$$

$z = 0$  մակերևույթներով:

$$3749. \iiint_V xyz dx dy dz, V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}:$$

$$3750. \iiint_V z dx dy dz, V - ն \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ էլիպսախով սահմանափակված}$$

մարմնի վերին կեսն է.  $z \geq 0$ :

$$3751. \iiint_V x dx dy dz, V - ն x = 0, y = 0, z = 0, y = h, x + z = a \text{ հարթություն-ներով սահմանափակված պլիզման է:}$$

$\varphi, r, h$  զանային կոորդինատները արվում են  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = h$  արտապատկերմամբ, որի յակորհանը հետևյալն է.  $\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \psi)} = r$ :

Ընդհանրացված  $\varphi, \psi, r$  սֆերիկ կոորդինատները արվում են  $x = a \cos^\alpha \varphi \cos^\beta \psi, y = b r \sin^\alpha \varphi \cos^\beta \psi, z = c r \sin^\beta \psi$  արտապատկերմամբ ( $a$  - ն,  $b$  - ն,  $c$  - ն,  $\alpha$  - ն և  $\beta$  - ն հաստատվենք են)  $r \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$ , որի յակորհանը հետևյալն է.

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \psi)} = \alpha \beta a b c r^2 \cos^{\alpha-1} \varphi \sin^{\alpha-1} \varphi \cos^{2\beta-1} \psi \sin^{\beta-1} \psi :$$

Անցնելով սֆերիկ կոորդինատների՝ հաշվել ինակարալը (3752-3754).

$$3752. \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz, V - ն x^2 + y^2 + z^2 = z \text{ մակերևույթով սահմանափակված մարմինն է:}$$

$$3753. \iiint_V \frac{xyz}{x^2 + y^2} dx dy dz, V\text{-ն սահմանավակված է } (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 xy$$

մակերևույթով և  $z = 0$  հարթությամբ:

$$3754. \iiint_V \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} dx dy dz, V\text{-ն } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \text{ էլիպտիդն է:}$$

Եռակի ինսեղրակի միջոցով գտնել տրված մակերևույթներով սահմանավակված մարմնի ծավալը (3755-3758).

$$3755. z = x^2 + y^2, z = 2x^2 + 2y^2, y = x, y = x^2 :$$

$$3756. z = x + y, z = xy, x + y = 1, x = 0, y = 0 :$$

$$3757. z = x^2 + y^2, z^2 = xy :$$

$$3758. z = 6 - x^2 - y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2} :$$

Անցնելով սֆերիկ կամ զլանային կոորդինատների՝ գտնել տրված մակերևույթներով սահմանավակված մարմնի ծավալը (3759-3762).

$$3759. x^2 + y^2 + z^2 = 2az, x^2 + y^2 \leq z^2 : \quad 3760. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 :$$

$$3761. (x^2 + y^2 + z^2)^2 = axyz \quad (a > 0) :$$

$$3762. x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 + z^2 = b^2, x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0 \quad (0 < a < b) :$$

Կատարելով վոլովչականի վոլովարքնում գտնել տրված մակերևույթներով սահմանավակված մարմնի ծավալը (3763-3766).

$$3763. (a_1x + b_1y + c_1z)^2 + (a_2x + b_2y + c_2z)^2 + (a_3x + b_3y + c_3z)^2 = R^2, \text{ եթե}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 :$$

$$3764. x + y + z = a, x + y + z = 2a, x + y = z, x + y = 2z, y = x, y = 3x :$$

$$3765. x^2 + z^2 = a^2, x^2 + z^2 = b^2, x^2 - y^2 - z^2 = 0 \quad (x > 0), 0 < a < b :$$

$$3766. (x^2 + y^2 + z^2)^3 = \frac{a^6 z^2}{x^2 + y^2} :$$

3767. Ապացուցել, որ եթե  $a_i < b_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , ապա  $[a_1; b_1] \times \cdots \times [a_m; b_m]$  բազմությունը գրութափակի չէ:

3768. Ապացուցել, որ եթե բազմությունն ունի ներքին կետ, ապա այն գրութափակի չէ:

3769. Ապացուցել, որ եթե  $A \subset R^m$  բազմությունը ժողովանի իմաստով չափելի է և  $\text{int } A = \emptyset$ , ապա  $\nu(A) = 0$ :

3770. Ապացուցել, որ եթե  $A_i \subset R^m$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , բազմություններից յուրաքանչյուրն ունի գրութափ, ապա  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ -ն նույնպես ունի գրութափ:

3771. Ապացուցել, որ եթե  $A \subset R^m$  կոմպակտ բազմությունն ունի գրութափ, ապա այն ունի գրութափակ:

3772. ա) Ապացուցել, որ անսահմանափակ բազմությունը չի կարող ունենալ գրութափակ:

բ) Բերել գրութափի փակ բազմության օրինակ, որը չունի գրութափակ:

3773. ա) Ցույց տալ, որ եթե  $\nu(A) = 0$ , ապա  $\nu(\partial A) = 0$ ;

բ) Բերել գրութափի բազմության օրինակ, որի եզրային կետերի բազմությունը գրութափի չէ:

3774. Կառուցել բաց և սահմանափակ բազմություն, որը ժողովանի իմաստով չափելի չէ:

Ցույց: Դիտարկել  $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i; b_i)$  բազմությունը, որտեղ  $(a_i; b_i)$ -երն ընտրված են այնպես, որ  $A$ -ն սարտունակում է  $(0; 1)$ -ին պատկանող բոլոր ռացիոնալ թվերը և  $\sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) < 1$ :

3775. Դիցուք  $C$ -ն սահմանափակ, գրութափի բազմություն է, իսկ  $\chi_C$ -ն՝  $C$ -ի բնութագրիչ ֆունկցիան: Ապացուցել, որ եթե  $A \subset R^n$  բազմության համար  $\int_A \chi_C(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ -ը գոյություն ունի, ապա այն հավասար է զրոյի:

3776. Դիցուք  $f \in \mathfrak{R}[a; b]$  ֆունկցիան ոչ բացասական է: Ապացուցել, որ  $A_f = \{(x; y) : 0 \leq y \leq f(x)\}$  սեղանակերպը բառակուսնի է, ընդ որում նրա մակերեսը հավասար է  $\int_a^b f(x) dx$ -ի:

3777. Ապացուցել, որ եթե  $f : A \rightarrow R$  ( $A \subset R^m$ ) իմանգրելի ֆունկցիան ոչ բացասական է և  $\int_A f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$ , ապա  $\{\mathbf{x} \in A : f(\mathbf{x}) \neq 0\}$  բազմությունն ունի գրութափ:

3778. Դիցուք  $D \subset R^n$  բազմությունը ժորդանի իմաստով չափելի է և  $f, g \in \mathfrak{R}(D)$ : Ապացուել, որ եթե  $f$  և  $g$  ֆունկցիաները  $D$ -ի վրա համարյա ամենուրեք հավասար են, ապա  $\int_D f = \int_D g$ :

3779. Ծշմարի՞ւ է արդյոք, որ եթե  $f \in \mathfrak{R}(D)$  և  $g : D \rightarrow R$  ֆունկցիան  $D$ -ի վրա համարյա ամենուրեք հավասար է  $f$  -ին, ապա  $g \in \mathfrak{R}(D)$ : Բերել համապատասխան օրինակ:

3780. Ապացուել, որ եթե  $f \in \mathfrak{R}(D)$  և  $g : D \rightarrow R$  սահմանավակ ֆունկցիան  $f$  -ից տարբերվում է միայն զրո ծավալի բազմության վրա, ապա  $g \in \mathfrak{R}(D)$ :

3781. Ապացուել, որ  $A$  վակ զուգահեռանիստի մեջ ընկած  $C$  բազմությունը չափելի է ըստ ժորդանի այն և միայն այն դեպքում, եթե ցանկացած  $\varepsilon > 0$  թվի համար գոյություն ունի  $A$  զուգահեռանիստի այնպիսի  $P$  արտիում, որ

$$\sum_{S \in P^1} v(S) - \sum_{S \in P^2} v(S) < \varepsilon,$$

որտեղ  $P^1$ -ը բաղկացած է  $P$ -ին պատկանող և  $C$ -ի հետ հաստիք զուգահեռանիստերից, իսկ  $P^2$ -ը՝  $C$ -ի մեջ պարունակվողներից:

3782. Ցույց ատա, որ եթե  $A$ -ն չափելի է ըստ ժորդանի, ապա ցանկացած  $\varepsilon > 0$  թվի համար գոյություն ունի  $C \subset A$  կոնպակալ բազմություն, այնպիսին որ  $\int_A \chi_{A \setminus C}(x) dx < \varepsilon$ :

3783. Դիցուք  $f, g \in C[a, b]$ : Ապացուել անհավասարությունը.

$$\left[ \int_a^b f(x)g(x) dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx :$$

$$Ցույց: \int_a^b dx \int_a^b (f(x)g(y) - f(y)g(x))^2 dy \geq 0 :$$

3784. Պարզել ինսեգրալի նշանը.

$$\text{ա) } \iint_{x^2 + y^2 \leq 4} \sqrt[3]{1 - x^2 - y^2} dx dy ; \quad \text{բ) } \iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1-x}} \arcsin(x+y) dx dy :$$

3785. Դիցուք

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2}, & \text{եթե } 0 < x < y < 1, \\ -\frac{1}{x^2}, & \text{եթե } 0 < y < x < 1, \\ 0, [0; 1]^2 - \text{ու մնացած կեսերում:} \end{cases}$$

Ապացուցել, որ

ա) գոյություն ունեն  $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy$  և  $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx$  հաջորդական իմաստավալները, բայց իրար հավասար չեն;

բ)  $f - \eta [0; 1]^2$ -ու վրա իմաստավելի չեն:

Հաջորդական իմաստավալներում վիշտել իմաստավման կարգը (3786-3789).

$$3786. \int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y) dy, \quad a > 0 : \quad 3787. \int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy :$$

$$3788. \int_0^a dx \int_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dy :$$

$$3789. \int_0^2 dx \int_{5-\sqrt{25-x^2}}^x f(x, y) dy + \int_2^4 dx \int_{5-\sqrt{25-x^2}}^2 f(x, y) dy :$$

Կատարել  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  վորվուխականի վոխարինում և վոխել իմաստավման կարգը (3790-3793).

$$3790. \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy :$$

$$3791. \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy :$$

$$3792. \int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2+y^2}) dy :$$

$$3793. \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy :$$

Անցնելով բևեռային կոորդինատներ՝ կրկնակի իմաստավը բերել մեկ վորվուխականի ֆունկցիայի իմաստավի (3794-3797).

$$3794. \iint_D f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dx dy, D = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq |x|\} :$$

$$3795. \iint_D f\left(\frac{y}{x}\right) dx dy, D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq x\} :$$

$$3796. \iint_D f\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) dx dy, D = \{(x, y) : \sqrt{|x|} \leq y \leq 1\} :$$

$$3797. \iint_D f(x^2+y^2) dx dy, D = \left\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq \sqrt{3}x\right\} :$$

Անցնելով բևեռային կոորդինատների՝ հաշվել ինստեգրալը (3798-3801).

$$3798. \iint_D |xy| dx dy, \quad D = \{(x, y) : a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4a^2\}:$$

$$3799. \iint_D (ax + by) dx dy, \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2, x - y \leq 0\}:$$

$$3800. \iint_D \operatorname{sgn} y dx dy, \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y - kx > 0\}:$$

$$3801. \iint_D \frac{y}{x^2 + y^2} dx dy, \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq ax, a > 0\}:$$

$$3802. S = \{(x, y) : a \leq x \leq a+h, b \leq y \leq b+h\} \quad (a, b > 0) \quad \text{քառակուսին } u = \frac{y^2}{x},$$

$v = \sqrt{xy}$  ֆունկցիաներով ձևափոխվում է  $S'$  պատկերի: Գտնել

ա)  $S'$  և  $S$  պատկերների մակերեսների հարաբերությունը;

բ)  $S'$  և  $S$  պատկերների մակերեսների հարաբերության սահմանը, եթե  $h \rightarrow 0$ :

Կատարելով վորովիչականի նշված վորարինումը՝ կրկնակի ինտեգրալը բերել հաջորդական ինստեգրալի (3803-3805).

$$3803. \iint_D f(x, y) dx dy, \quad D - ն սահմանափակված է  $x = 2y, y = 2x, x + 2y = 2$ ,$$

$$2x + y = 4 \quad \text{գծերով}; \quad u = \frac{y}{x}, \quad v = \frac{y}{2-x}:$$

$$3804. \iint_D f(x, y) dx dy, \quad D = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}; \quad x = ar \cos \varphi, \quad y = br \sin \varphi:$$

$$3805. \iint_D f(x, y) dx dy, \quad D - ն \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a} \quad (a > 0), \quad x = 0, \quad y = 0 \quad \text{գծերով}$$

սահմանափակված սիրույթն է;  $x = u \cos^4 v, \quad y = u \sin^4 v$ :

Կատարելով վորովիչականի վորարինում՝ կրկնակի ինստեգրալը բերել մեկ վորովիչականի ֆունկցիայի ինստեգրալի (3806-3808).

$$3806. \iint_D f(x - y) dx dy, \quad D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a - x\}:$$

$$3807. \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} f(ax + by + c) dx dy \quad (a^2 + b^2 \neq 0):$$

3808.  $\iint_D f(xy) dx dy$ ,  $D$ -ն սահմանափակված է  $xy=1$ ,  $xy=2$ ,  $y=x$ ,  
 $y=4x$  ( $x > 0, y > 0$ ) գծերով:

Հաշվել խնտեզրալը (3809-3814).

3809.  $\iint_{\substack{0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq \pi}} |\cos(x+y)| dx dy$ :

3810.  $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left| \frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 \right| dx dy$ :

3811.  $\iint_{\substack{|x| \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2}} \sqrt{|y-x^2|} dx dy$ :

3812.  $\iint_{\substack{x^2+y^2 \leq 1 \\ x>0, y>0}} |x^2 + y^2 - 4xy| dx dy$ :

3813.  $\iint_D |xy| dx dy$ ,  $D = \{(x,y) : (x^2 + y^2)^2 \leq x^2 - y^2, x \geq 0\}$ :

3814.  $\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$ ,  $D = \{(x,y) : \frac{3}{2}ay \leq x^2 \leq a^2 - y^2\}$ ,  $a > 0$ :

Հաշվել խզվող ֆունկցիայի խնտեզրալը (3815-3816).

3815.  $\iint_{x^2+y^2 \leq 4} \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2) dx dy$ :

3816.  $\iint_{x^2 \leq y \leq 4} \sqrt{|y-x^2|} dx dy$ :

3817. Ապացուցել, որ եթե  $m, n \in N$  թվերից առնվազն մեկը կենաւ է, ապա

$$\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} x^m y^n dx dy = 0 :$$

Ընդհանրացված  $(\varphi, r)$  թվերուային կոորդինատները արդիւմ են  $x = ar \cos^\alpha \varphi$ ,  $y = br \sin^\alpha \varphi$  ( $r \geq 0$ ) արտապատկերմանը ( $a$ -ն,  $b$ -ն,  $\alpha$ -ն հաստատուներ են), որի յուրքի համը հետևյալն է.  $\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = abr \cos^{\alpha-1} \varphi \sin^{\alpha-1} \varphi$ :

Հաշվել արված գծերով սահմանափակված պաստերի մակերեսը (3818-3831).

3818.  $y^2 = 2px + p^2$ ,  $y^2 = -2qx + q^2$  ( $p > 0, q > 0$ ):

3819.  $2x^2 + 2y^2 = 2x + 1$ ,  $x^2 + y^2 \geq 1$ :

3820.  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ ,  $x + y = a$ :

3821.  $y^2 = a^2 - 2ax$ ,  $y^2 = b^2 - 2bx$ ,  $y^2 = m^2 + 2mx$ ,  $y^2 = n^2 + 2nx$ ,  
 $0 < a < b$ ,  $0 < m < n$ :

3822.  $(x^3 + y^3)^2 = x^2 + y^2$  ( $x \geq 0, y \geq 0$ ): 3823.  $x^4 + y^4 = 2a^2 xy$ :

$$3824. x^3 + y^3 = axy :$$

$$3825. (x^2 + y^2)^2 = a(x^3 + y^3) :$$

$$3826. (x^2 + y^2)^3 = a^2(x^4 + y^4) :$$

$$3827. \left( \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \right)^{12} = \frac{xy}{c^2} :$$

$$3828. \left( \sqrt[3]{\left(\frac{x}{a}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{y}{b}\right)^2} \right)^6 = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2} :$$

$$3829. (x^2 + y^2 - ax)^2 \geq a^2(x^2 + y^2), x^2 + y^2 \leq \sqrt{3}ay :$$

$$3830. \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1, \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 2, \frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \frac{4x}{a} = \frac{y}{b} (a > 0, b > 0) :$$

$$3831. \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 4, \frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \frac{8x}{a} = \frac{y}{b} (x > 0, y > 0) :$$

Դասներ արված մակերևույթներով սահմանափակված մարմնի ծավալը (3832-3842).

$$3832. z = xy, x + y + z = 1, z = 0 :$$

$$3833. x^2 + y^2 = az^2, x^2 + y^2 = ax, z > 0 :$$

$$3834. x^2 + y^2 = cz, x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2), z = 0 :$$

$$3835. x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 > a|x| :$$

$$3836. x^2 + y^2 + z^2 = a^2, (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) :$$

$$3837. x^2z^2 + a^2y^2 = c^2x^2, 0 < x < a :$$

$$3838. z(x+y) = ax+by, z=0, 1 < x^2 + y^2 < 4, x > 0, y > 0, z > 0 :$$

$$3839. z^2 = 2xy, \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 = \frac{2xy}{c^2}, x > 0, y > 0, z > 0 :$$

$$3840. \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1, \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 = \frac{x}{a}, y > 0, z > 0 :$$

$$3841. z = x^2y, y^2 = a^2 - 2ax, y^2 = m^2 + 2mx, y = 0, z = 0 :$$

$$3842. \left( \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \right)^4 + \frac{z^2}{c^2} = 1, x > 0, y > 0, z > 0 :$$

Հաշվել մակերեսը (3843-3852).

3843.  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  սֆերայի այն կտորների, որոնք ընկած են  $x^2 + y^2 = \pm ax$  գլաններից դուրս:

3844.  $x^2 + y^2 = \pm ax$  գլանային մակերևույթների այն կտորների, որոնք ընկած են  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  սֆերայի ներսում:

3845.  $az = xy$  պարաբոլիդի այն կտորի, որն ընկած է  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$  գլանում:

3846.  $x^2 + y^2 = z^2$  կոնի այն մասի, որն ընկած է  $(x^2 + y^2)^2 = 2xy, z \geq 0$ , գլանում:

3847.  $z(x^2 + y^2) = x + y$  մակերևույթի այն կտորի, որի կետերը բավարարում են  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x > 0, y > 0$  անհավասարումներին:

$$3848. \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z \text{ մակերևույթի այն կտորի, որն ընկած է } \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \text{ գլանի մեջ:}$$

3849.  $(x^2 + y^2)^{3/2} + z = 1$  մակերևույթի այն կտորը, որը կարգած է  $z = 0$  հարթությունով:

3850.  $\left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 + \frac{2z}{c} = 1 \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$  մակերևույթի:

3851.  $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2z$  մակերևույթի այն կտորի, որն ընկած  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (z \geq 0)$  գլանում:

3852.  $(x + y)^2 + 2z^2 = 2a^2$  մակերևույթի այն կտորի, որի կետերը բավարարում են  $x > 0, y > 0, z > 0$  անհավասարումներին:

\*\*\*

Հաշվել ինտեգրալը (3853-3856).

3853.  $\iiint_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}, V$ -ն սահմանափակված է  $x+y+z=1, x=0, y=0, z=0$  հարթություններով:

3854.  $\iiint_V \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz$ ,  $V$ -ն սահմանափակված է  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  ելիպտիդով:

3855.  $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ ,  $V$ -ն սահմանափակված է  $x^2 + y^2 = z^2$ ,  $z = 1$

մակերևույթներով:

3856.  $\iiint_V xyz dx dy dz$ ,  $V$ -ն ընկած է  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $z > 0$  օկտանտում և սահմանափակված է  $z = \frac{x^2 + y^2}{m}$ ,  $z = \frac{x^2 + y^2}{n}$ ,  $xy = a^2$ ,  $xy = b^2$ ,  $y = \alpha x$ ,  $y = \beta x$  ( $0 < a < b$ ,  $0 < \alpha < \beta$ ,  $0 < m < n$ ) մակերևույթներով:

Հաշվել  $F'(t)$ -ն (3857-3858)

3857.  $F(t) = \iint_{(x-t)^2 + (y-t)^2 \leq 1} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ :

3858. ա)  $F(t) = \iiint_{x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2} f(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ ,  $f \in C(R)$ ;

բ)  $F(t) = \iiint_{V_t} f(xyz) dx dy dz$ ,  $V_t = [0; t]^3$ ,  $f \in C^1(R)$ :

3859. Հաշվել իմասնգրալը

$$\iiint_{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1} x^m y^n z^p dx dy dz, m, n, p \in \mathbb{Z}_+$$

3860. Տեղապեսով  $x + y + z = \xi$ ,  $y + z = \xi\eta$  և  $z = \xi\eta\zeta$ ՝ հաշվել Դիրիխլեի ինստեգրալը.

$$\iiint_V x^p y^q z^r (1 - x - y - z)^s dx dy dz, p > 0, q > 0, r > 0, s > 0,$$

$V$ -ն սահմանափակված է  $x + y + z = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  հարթություններով:

Տարբեր հաջորդականությամբ փոխել ինստեգրման կարգը (3861-3863).

3861.  $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz$ :

$$3862. \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^1 f(x, y, z) dz :$$

$$3863. \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz :$$

Հաջորդական ինսեգրալը վոլխարինել մեկ վոլվոլխականի ֆունկցիայի ինսեգրալով (3864-3865).

$$3864. \int_0^x d\xi \int_0^\xi d\eta \int_0^\eta f(\zeta) d\zeta :$$

$$3865. \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x+y} f(z) dz :$$

$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$  ինսեգրալում անցնել սֆերիկ կոորդինատների և

ներկայացնել հաջորդական ինսեգրալներով (3866-3868).

$$3866. V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2, y \geq 0\}:$$

$$3867. V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq az, x^2 + y^2 \leq z^2\}:$$

$$3868. V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az, x^2 + y^2 \geq z^2\}:$$

3869. Դիցուք  $V \subset [a; b] \times R^2$  մարմինը խորանարդելի է, իսկ յուրաքանչյուր  $x \in [a; b]$  թվի համար նրա  $V_x = \{(y; z) : (x; y; z) \in V\}$  հասույթը՝ քառակուսելի:

Ապացուել, որ  $V$ -ի ծավալը հավասար է  $\int_a^b S(x) dx$ -ի, որտեղ  $S(x)$ -ը  $V_x$ -ի մակերեսն է:

3870. (Կավալերիի սկզբունքը) Դիցուք  $A$  և  $B$  մարմիններն  $R^3$ -ում խորանարդելի են, իսկ յուրաքանչյուր  $x$ -ի համար  $A_x = \{(y; z) : (x; y; z) \in A\}$ ,  $B_x = \{(y; z) : (x; y; z) \in B\}$  հասույթներն  $R^2$ -ում՝ քառակուսելի: Ապացուել, որ եթե ցանկացած  $x$ -ի համար  $A_x$  և  $B_x$  հասույթներն ունեն միևնույն մակերեսը, ապա  $A$  և  $B$  մարմինների ծավալները հավասար են:

Հաշվել արված մակերեսույթով սահմանավակված մարմնի ծավալը (3871-3883).

$$3871. (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2); \quad 3872. (x^2 + y^2 + z^2)^2 = az(x^2 + y^2);$$

$$3873. (x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^2 y^2 z^2; \quad 3874. (x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^3 xyz;$$

$$3875. (x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^3(x^3 + y^3 + z^3), x > 0, y > 0, z > 0:$$

$$3876. (x^2 + y^2 + z^2)^2 = \frac{a^6}{x^2 + y^2} : \quad 3877. (x^2 + y^2)^2 + z^4 = a^3(x - y) :$$

$$3878. \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 + \frac{z^4}{c^4} = 1 :$$

$$3879. \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^4 = \frac{xyz}{abc}, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0 :$$

$$3880. \sqrt[3]{\frac{x}{a}} + \sqrt[3]{\frac{y}{b}} + \sqrt[3]{\frac{z}{c}} = 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0 :$$

$$3881. \left( \frac{x}{a} \right)^{\frac{2}{3}} + \left( \frac{y}{b} \right)^{\frac{2}{3}} + \left( \frac{z}{c} \right)^{\frac{2}{3}} = 1 :$$

$$3882. \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = \frac{x}{p} - \frac{y}{q}, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0, \quad p > 0, \quad q > 0 :$$

$$3883. \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{z}{p}, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0, \quad p > 0 :$$

\*\*\*

Ծանրության կենտրոնի կոորդինատները:  $D$  հարթ պատկերի ծանրության կենտրոնի  $x_0, y_0$  կոորդինատները հաշվում են

$$x_0 = \frac{1}{M} \iint_D \rho x dxdy, \quad y_0 = \frac{1}{M} \iint_D \rho y dxdy$$

բանաձևերով, որտեղ  $\rho = \rho(x, y)$ -ը  $D$  պատկերի խառնությունն է  $(x; y)$  կետում, իսկ  $M = \iint_D \rho dxdy$ -ը՝ զանգվածը:

$V$  մարմնի  $x_0, y_0, z_0$  ծանրության կենտրոնի կոորդինատները հաշվում են

$$x_0 = \frac{1}{M} \iiint_V \rho x dxdydz, \quad y_0 = \frac{1}{M} \iiint_V \rho y dxdydz, \quad z_0 = \frac{1}{M} \iiint_V \rho z dxdydz$$

բանաձևերով, որտեղ  $\rho = \rho(x, y, z)$ -ը  $V$  մարմնի խառնությունն է  $(x; y; z)$  կետում, իսկ  $M = \iiint_V \rho dxdydz$ -ը՝ զանգվածը:

Իներցիայի մոմենտներ:  $D$  հարթ պատկերի իներցիայի մոմենտները կոորդինատների առանցքների նկատմամբ հաշվում են

$$I_x = \iint_D \rho y^2 dxdy, \quad I_y = \iint_D \rho x^2 dxdy$$

բանաձևերով:

V մարմնի իներցիայի մոմենտները կատրվինաւուկան հարթությունների նկատմամբ հաշվառման ժամանակ:

$$I_{xy} = \iiint_V \rho x^2 dx dy dz, \quad I_{yz} = \iiint_V \rho x^2 dx dy dz, \quad I_{zx} = \iiint_V \rho y^2 dx dy dz$$

բանաձևերով:

$Ox, Oy, Oz$  առանցքների նկատմամբ իներցիայի մոմենտները հաշվում են

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}, \quad I_y = I_{yx} + I_{yz}, \quad I_z = I_{zx} + I_{zy}$$

բանաձևերով:

3884-3903 խնդիրներում ընդունել  $\rho = 1$ :

Հաշվել սրված կորերով սահմանափակված համասնու հարթակի ծանրության կենսարունի կոորդինատները (3884-3889).

$$3884. ay = x^2, \quad x + y = 2a \quad (a > 0); \quad 3885. \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, \quad x = 0, \quad y = 0;$$

$$3886. x^4 + y^4 = x^2 y:$$

$$3887. \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^4 = \frac{xy}{ab};$$

$$3888. x^3 + y^3 = 3axy:$$

$$3889. (x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy \quad (x > 0, y > 0):$$

3890. Հաշվել 2φ կենսարունական աճեցունով և  $a$  շառավղով սեզմենտի իներցիայի մոմենտը համաչափության առանցքի նկատմամբ:

$$3891. \text{Հաշվել } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ էլիպսի իներցիայի մոմենտները կոորդինատների}$$

առանցքների նկատմամբ:

$$3892. \text{Հաշվել } a_1 x + b_1 y = \pm h_1, \quad a_2 x + b_2 y = \pm h_2 \text{ գուգահեռագծի իներցիայի մոմենտը } Ox \text{ առանցքի նկատմամբ:}$$

$$3893. \text{Հաշվել } x^4 + y^4 = x^2 + y^2 \text{ կորով սահմանափակված պատկերի իներցիայի մոմենտը } Ox \text{ առանցքի նկատմամբ և այն համեմատել } |x+y| + |x-y| = 2 \text{ գծով սահմանափակված պատկերի } Ox \text{ առանցքի նկատմամբ իներցիայի մոմենտի հետ:}$$

Հաշվել սրված մակերևույթներով սահմանափակված համասնու մարմնի ծանրության կենսարունի կոորդինատները (3894-3898).

$$3894. h^2(x^2 + y^2) = a^2 z^2, \quad 0 < z < h:$$

$$3895. (x^2 + y^2 + z^2)^2 = axyz, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0:$$

$$3896. \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{xyz}{abc}, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0 \quad (a > 0, b > 0, c > 0):$$

$$3897. \frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^n}{c^n} = 1, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0 \quad (n > 0, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0):$$

$$3898. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \pm 1, \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \pm 1, \quad z=0:$$

Հաշվել արյած մակերևույթներով սահմանավակված համասն մարմնի իներցիայի մոմենտները (3899-3903).

$$3899. \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}, \quad \text{կոորդինատական հարթությունների}$$

նկատմամբ:

$$3900. \left( \frac{x}{a} \right)^n + \left( \frac{y}{b} \right)^n + \left( \frac{z}{c} \right)^n = 1, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0 \quad (n > 0, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$$

կոորդինատական հարթությունների նկատմամբ:

$$3901. x^2 + y^2 + z^2 = 2, \quad x^2 + y^2 = z^2 \quad (z > 0) \quad Oz \text{ առանցքի նկատմամբ:}$$

$$3902. (x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^5 z, \quad Oz \text{ առանցքի նկատմամբ:}$$

$$3903. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{h^2}, \quad z=h, \quad Ox \text{ առանցքի նկատմամբ:}$$

## Q.

3904. Ապացուցել, որ եթե  $f \in C(R^2)$ , ապա

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^x d\xi \int_{\xi-x+y}^{x+y-\xi} f(\xi, \eta) d\eta$$

$$\text{ֆունկցիան բավարարում է } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \text{ հավասարմանը:}$$

3905. Դիցուք  $z=f(x, y)$  ֆունկցիայի մակարդակի գծերը՝  $f(x, y)=const$  հավասարումով որոշվուղ կորերը, պարզ, փակ կորեր են, իսկ  $G(a, b)$  սիրույթը սահմանավակված է  $f(x, y)=a$  և  $f(x, y)=b$  կորերով: Ապացուցել, որ

$$\iint_{G(a,b)} f(x, y) dx dy = \int_a^b t S'(t) dt,$$

որտեղ  $S(t)$ -ն  $f(x, y)=a$  և  $f(x, y)=t$  կորերով սահմանավակված պատկերի մակերեսն է:

$$3906. \text{Հաշվել } \frac{x^2}{ch^2 u_i} + \frac{y^2}{sh^2 u_i} = c^2 \text{ էլիպսներով և } \frac{x^2}{\cos^2 v_i} - \frac{y^2}{\sin^2 v_i} = c^2 \quad (i=1,2)$$

հիպերբոլներով սահմանափակված պատկերի մակերեսը  $(0 < u_1 < u_2, 0 < v_1 < v_2, x > 0, y > 0)$ :

$$3907. \text{Հաշվել } \frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - c^2} = 1 \quad \left( \lambda = \frac{c^2}{3}, \frac{2c^2}{3}, \frac{4c^2}{3}, \frac{5c^2}{3}, x > 0, y > 0 \right) \text{ կորերով}$$

սահմանափակված պատկերի մակերեսը:

$$3908. \text{Հաշվել } x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz \leq a^2 \quad \text{մարմնը } x + y + z = 0 \text{ հարթությունով հասելիս առաջացած հատույքի մակերեսը:}$$

$$3909. \text{Դիցուք } D_p = [-p; p]^2, \text{ իսկ } K_p \text{-ն և } C_p \text{-ն՝ } D_p \text{-ին համապատասխանաբար ներգծած և արտագծած շրջանները:}$$

$$\iint_{K_p} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_{D_p} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_{C_p} e^{-(x^2+y^2)} dx dy,$$

անհավասարություններում անցնելով սահմանի, եթե  $p \rightarrow +\infty$ , ստանալ Էյլեր-Պուասոնի ինսեգրալի արժեքը (սես խնդիր 3585):

$$3910. \text{Հաշվել } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \text{ մակերևույթը } z = 1 - 2(x + y) \text{ հարթությունով հասելիս ստացվող սահմանափակ կստրի մակերեսը:}$$

$$3911. \text{Հաշվել } x = (b + a \cos \psi) \cos \varphi, \quad y = (b + a \cos \psi) \sin \varphi, \quad z = a \sin \psi \quad (0 < a \leq b) \text{ սորի այն կոտրի մակերեսը, որը սահմանափակված է } \varphi = \varphi_1, \varphi = \varphi_2 \text{ միջօրեականով և } \psi = \psi_1, \psi = \psi_2 \text{ զուգահետակամներով: Դանել սորի մակերեսը:}$$

Անիսկական ինտեգրալ: Դիցուք  $G \subset R^n$  անսահմանափակ բազմությունն այնպիսին է, որ ցանկացած  $B_r = B(\mathbf{0}, r)$  զնի համար  $G \cap B_r$  բազմությունը չափելի է: Տրված  $f: G \rightarrow R$  ֆունկցիան կանունական  $G$  բազմության վրա անիսկական իմաստով ինտեգրելի, եթե ցանկացած  $r$ -ի համար  $\int f \, d(G \cap B_r)$  և

$$\sup_{0 < r < +\infty} \int |f| \, d(G \cap B_r) < +\infty:$$

Այս պայմաններում

$$\int f \, dG = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int f \, d(G \cap B_r)$$

սահմանը կոչվում է  $\int f \, dG$  ֆունկցիայի անիսկական ինտեգրալ  $G$  բազմությամբ:

Համանմանողեն սահմանվում է  $\int f \, dG$  ֆունկցիայի անիսկական ինտեգրալն այն դեպքում, եթե  $f$ -ը  $\overline{G}$  բազմության որևէ կետի շրջակայրում անսահմանափակ է:

3912. Ապացուցել, որ եթե  $f$ -ն անիսկական իմաստով ինտեգրելի է՝  $G \subset R^n$  անսահմանավակ բազմության վրա, ապա

$$\text{ա) } \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{G \cap B_r} f = \int_G f$$

սահմանը գոյություն ունի;

բ) չափելի բազմություններից կազմված ցանկացած  $D_k \supset B_k$  հաջորդականության համար գոյություն ունի  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{G \cap D_k} f$  սահմանը և այն հավասար է  $f$ -ի ինսեգրալին  $G$  բազմությամբ:

Հետազոտել անիսկական ինտեգրալի գուգամիայությունը (3913-3915).

$$3913. \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dxdy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}:$$

$$3914. \iint_{|x|+|y|\geq 1} \frac{dxdy}{|x|^p + |y|^q} \quad (p > 0, q > 0):$$

$$3915. \iint_{0 \leq y \leq 1} \frac{\varphi(x, y)}{(1+x^2+y^2)^m} dxdy, \quad 0 < m \leq |\varphi(x, y)| \leq M, \quad \varphi \in C(R):$$

3916. Ցույց տալ, որ

$$\iint_{x \geq 1, y \geq 1} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dxdy$$

ինտեգրալը տարամետ է, չնայած

$$\int_1^{\infty} dx \int_1^{\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \quad \text{և} \quad \int_1^{\infty} dy \int_1^{\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx$$

հաջորդական ինտեգրալները գուգամետ են:

Հետազոտել անսահմանավակ ֆունկցիայի անիսկական ինտեգրալի գուգամիայությունը (3917-3919).

$$3917. \iint_D \frac{dxdy}{x^2 + y^2}, \quad D = \{(x, y) : |y| \leq x^2, x^2 + y^2 \leq 1\}:$$

$$3918. \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \frac{\varphi(x, y)}{(x^2 + xy + y^2)^m} dxdy \quad 0 < m \leq |\varphi(x, y)| \leq M, \quad \varphi \in C(R^2):$$

$$3919. \iint_D \frac{dxdy}{|x|^p + |y|^q}, \quad D = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\} \quad (p > 0, q > 0):$$

Հետազոտել եռակի ինտեգրալի գուգամիայությունը (3920-3922).

3920.  $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \geq 1} \frac{\varphi(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^p} dx dy dz, \quad 0 < m \leq |\varphi(x, y)| \leq M, \quad \varphi \in C(R^3)$ :

3921.  $\iiint_{|x|+|y|+|z| \geq 1} \frac{dxdydz}{|x|^p + |y|^q + |z|^r} \quad (p > 0, q > 0, r > 0)$ :

3922.  $\iiint_V \frac{dxdydz}{|x+y-z|^p}, \quad V = \{(x; y; z) : |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\}$ :

3923. Դիցուք  $u \in C(R)$ , առարգել է նույնաբար զրոյից և  $\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)| dx < +\infty$ :

Ապացուցել, որ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2} u(x) u(y) dx dy > 0:$$

3924. Դիցուք  $K \in C([a; b] \times [a; b])$  և

$$K_n(x, y) = \int_a^b \cdots \int_a^b K(x, t_1) K(t_1, t_2) \cdots K(t_n, y) dt_1 \cdots dt_n:$$

Ապացուցել, որ

$$K_{n+m+1}(x, y) = \int_a^b K_n(x, t) K_m(t, y) dt:$$

3925. Դիցուք  $f = f(x_1, \dots, x_n)$  ֆունկցիան անընդհատ է  $0 \leq x_i \leq x$  ( $i = 1, \dots, n$ ) ախրույթում: Ապացուցել, որ

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f dx_n = \int_0^x dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \cdots \int_{x_2}^x f dx_1 \quad (n \geq 2):$$

3926. Դիցուք  $f$ -ն անընդհատ է: Ապացուցել, որ

$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(t_1) f(t_2) \cdots f(t_n) dt_n = \frac{1}{n!} \left( \int_0^t f(\tau) d\tau \right)^n:$$

3927. Հաշվել  $a_{11}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = \pm h_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) հիպերհարթություններով սահմանավակված  $n$ -չափանի զուգահեռանիստի ծավալը, եթե

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0:$$

3928. Ապացուցել, որ  $R^n$ -ում ցանկացած գումարի չափելի է: Գտնել  $r$  շառավղով  $n$ -չափանի գնդի ծավալը:

3929. Հաշվել

$$\frac{x_1}{a_1} + \dots + \frac{x_n}{a_n} = 1 \quad (a_i > 0), \quad x_i = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

հիպերհարքություններով սահմանափակված  $n$ -չափանի բուրգի ծավալը:

3930. Հաշվել

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} = \frac{x_n^2}{a_n^2}, \quad x_n = a_n$$

մակերևույթներով սահմանափակված  $n$ -չափանի կոնի ծավալը:

3931. Հաշվել  $\frac{|x|^m}{a^m} + \frac{|y|^n}{b^n} + \frac{|z|^p}{c^p} = 1 \quad (m, n, p, a, b, c > 0)$  մակերևույթով սահմանափակված մարմնի ծավալը:

Հաշվել ինսեգրալը (3932-3935).

3932.  $\int\limits_{D_n} dx, \quad D_n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 + \dots + x_n \leq a, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}:$

3933.  $\int\limits_{D_n} \cdots \int \sqrt{x_1 + \dots + x_n} dx_1 \cdots dx_n,$

$D_n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 + \dots + x_n \leq 1, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}:$

3934.  $\int\limits_{x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2} \cdots \int \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} dx_1 \cdots dx_n:$

3935.  $\int\limits_{x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1} \cdots \int \frac{dx_1 \cdots dx_n}{\sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2}}:$

Ապացուցել հավասարությունը (3936-3939).

3936.  $\int\limits_0^{x_1} dx_1 \int\limits_0^{x_2} dx_2 \cdots \int\limits_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n = \int\limits_0^x f(u) \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!} du, \quad f \in C[0; x]:$

3937.  $\int\limits_0^{x_1} x_1 dx_1 \int\limits_0^{x_2} x_2 dx_2 \cdots \int\limits_0^{x_n} f(x_{n+1}) dx_{n+1} = \frac{1}{2^n n!} \int\limits_0^x (x^2 - u^2)^{n-1} f(u) du, \quad f \in C[0; x]:$

3938.  $\int\limits_{x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i \leq 1} \cdots \int x_1^{p_1-1} \cdots x_n^{p_n-1} dx_1 \cdots dx_n = \frac{\Gamma(p_1) \cdots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + \cdots + p_n + 1)}, \quad p_i > 0, \quad i = 1, \dots, n$

(Դիրիխլեի բանաձև):

$$3939. \int \cdots \int f(x_1 + \cdots + x_n) x_1^{p_1-1} \cdots x_n^{p_n-1} dx_1 \cdots dx_n =$$

$x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i \leq 1$

$$= \frac{\Gamma(p_1) \cdots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + \cdots + p_n)} \int_0^1 f(u) u^{p_1 + \cdots + p_n - 1} du, \quad p_i > 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad f \in C[0;1]$$

(Լիուվիլի բանաձև):

Ցացում: Կիրառել նախեմասիկական ինտույշիայի սկզբունքը:

$$3940. \text{Ապացուցել } \text{հավասարությունը.} \quad \int_0^1 \int_0^1 (xy)^{xy} dx dy = \int_0^1 x^x dx :$$

$$3941. \text{Դիցուք } I_n = [0;1]^n : \text{Հաշվել } \text{ինսեգրալը.}$$

$$\int\limits_{I_n} \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \pi^i(\mathbf{x}) \right\} d\mathbf{x} - \text{ը,}$$

$\pi^i$ -ն  $R^n$ -ում  $i$ -րդ պրոյեկտող արտապատկերումն է:

3942. Հաշվել սահմանը.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int\limits_I \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \pi^i(\mathbf{x}) \right\} d\mathbf{x}, \quad I_n = [0;1]^n :$$

3943. Տրված է  $f \in C([0;1])$  և  $I_n = [0;1]^n$ : Ապացուցել հավասարությունը.

$$\text{ա) } \lim_{n \rightarrow \infty} \int\limits_{I_n} f\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \pi^i(\mathbf{x}) \right) d\mathbf{x} = f\left( \frac{1}{2} \right);$$

$$\text{բ) } \lim_{n \rightarrow \infty} \int\limits_{I_n} f\left[ \left( \prod_{i=1}^n \pi^i(\mathbf{x}) \right)^{\frac{1}{n}} \right] d\mathbf{x} = f\left( \frac{1}{e} \right);$$

3944. Դիցուք  $f \in C(R, R_+)$ ,  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$  և

$$\mathfrak{I}_n(r) = \int \cdots \int f(x_1) \cdots f(x_n) dx_1 \cdots dx_n :$$

$\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq r^2$

Հաշվել  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{I}_n(r)$ -ը:

3945. Դիցուք  $A \subset R^n$  բազմությունը Ժորդանի իմաստով չափելի է և  $f \in \mathcal{R}(A)$ ,  $f \geq 0$ : Ապացուցել, որ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\int_D f^n(\mathbf{x}) d\mathbf{x}} = \inf_{\substack{E \subset A \\ v(E)=0}} \sup_{\mathbf{x} \in A \setminus E} f(\mathbf{x}):$$

3946. Ապացուցել Սարդի հետևյալ թեորեմը. եթե  $G$ -ն  $R^3$ -ում տիրույթ է,  $\varphi \in C^1(G, R^3)$  և  $B = \{t \in G : \det \varphi'(t) = 0\}$ , ապա  $\varphi(B)$ -ն  $R^3$ -ում զրո չափի բազմություն է: Այսանդից հետևեցնել, որ եռակի ինտեգրալում վուկուխականի փոխարինման վերաբերյալ թեորեմում  $\det \varphi'(t) \neq 0$  ( $\varphi$ -ն դիֆեոմորֆիզմ էր) պայմանն էական չէ:

## Կորագիծ և մակերևութային ինտեգրալներ Վեկտորական անալիզի տարրերը

Առաջ ի ն ա ի ս ի պ ի կ ո ր ա զ ի ծ ի ն ա հ զ ր ա լ :  $\Gamma: [\alpha; \beta] \rightarrow R^n$  անընդհատ կորը (ճամապարհը) կոչվում է պայող կոր, եթե  $\Gamma$  արագապատկերումը փախմխարժեք է: Հաճախ  $\Gamma$  արագապատկերման արժեքների բազմությունն անվանում են  $\Gamma$  կորի կողմէ: Եթե  $[\alpha; \beta]$  հաստիածիքոր  $P = (t_0, \dots, t_p)$  սրբաւտմներին համապատասխանող

$$\ell(\Gamma; P) = \sum_{i=1}^{p-1} |\Gamma(t_{i+1}) - \Gamma(t_i)|_n$$

գումարների բազմությունը սահմանափակ է, ապա  $\Gamma$ -ն կոչվում է սպիտակ կոր, իսկ  $\ell(\Gamma) = \sup_P \ell(\Gamma; P)$ -ն՝  $\Gamma$  կորի երկարություն:

Եթե  $\Gamma$ -ն սպիտակ կոր է, ապա ցանկացած  $[\alpha_1; \beta_1] \subset [\alpha; \beta]$  միջակայքի համար  $\Gamma: [\alpha_1; \beta_1] \rightarrow R^n$  կորը՝  $\Gamma$  կորի աղեղը, նույնպես սպիտակ է:

Դիցուք  $\Gamma: [\alpha; \beta] \rightarrow R^n$ -ը պարզ, սպիտակ կոր է,  $X$ -ը՝  $\Gamma$ -ի կրկին է, իսկ  $f$ -ը՝  $X$ -ի վրա ( $\Gamma$  կորի երկայնքով) սրբաւտ իրականարժեք ֆունկցիա: Կատարելով  $[\alpha; \beta]$  հաստիածիք  $P = (t_0, \dots, t_p)$  արակում և արակեամ  $[t_i; t_{i+1}]$  միջակայքերից յուրաքանչյուրում ընտրելով մեկան  $\tau_i$  կետ՝ կազմում են

$$\sigma_f(\Gamma; P, \tau) = \sum_{i=0}^{p-1} f(\Gamma(\tau_i)) \Delta s_i$$

ինտեգրալային գումարը, որում  $\Delta s_i$ -ն՝  $\Gamma: [t_i; t_{i+1}] \rightarrow R^n$  աղեղի երկարությունն է:

Դիցուք  $\lambda(P)$ -ն՝  $P$  սրբաւտն տրամադիծն է:

Սահմանում: Եթե գոյարքուն ունի

$$I = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sigma_f(\Gamma; P, \tau)$$

վերջանիք սահմանը, ապա այն կոչվում է  $\Gamma$  կորով  $f$  ֆունկցիայի կորագիծ ինտեգրալ (առաջին տիպի) և նշանակվում՝

$$I = \int \int f ds = \int \int f(x) ds = \int \int f(x^1, \dots, x^n) ds :$$

Առաջին տիպի կորագիծ ինտեգրալ բերումը նիմանի ինտեգրալի: Եթե  $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in C^1([\alpha; \beta], R^n)$  և  $\Gamma'(t) \neq \mathbf{0}$  ( $\Gamma$  կորը ողոքի է), իսկ  $f$ -ը  $\Gamma$ -ի երկայնքով սրբաւտ անընդհատ իրականարժեք ֆունկցիա է, ապա  $\Gamma$  կորով  $f$  ֆունկցիայի կորագիծ ինտեգրալը գոյություն ունի, ընդ որում՝

$$\int\limits_{\Gamma} f(\mathbf{x}) ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \sqrt{\gamma_1'^2(t) + \dots + \gamma_n'^2(t)} dt :$$

Նկատենք, որ եթե  $\Gamma_1 : [\alpha_1; \beta_1] \rightarrow R^n$  և  $\Gamma_2 : [\alpha_2; \beta_2] \rightarrow R^n$  պարզ ողորկ կորերն ունեն միևնույն լրիշը, ապա

$$\int\limits_{\Gamma_1} f(\mathbf{x}) ds = \int\limits_{\Gamma_2} f(\mathbf{x}) ds :$$

Եթե  $\Gamma : [0; \ell] \rightarrow R^n$  ուղղելի կորն այնալիսին է, որ պարամետրի ցանկացած  $0 \leq s \leq \ell$  արժեքի համար  $\Gamma : [0; s] \rightarrow R^n$  աղղողի երկարությունը հավասար է  $s$ -ի, ապա  $s$ -ն անվանում են կորի բնական պարամետր: Այս դեպքում՝

$$\int\limits_{\Gamma} f(\mathbf{x}) ds = \int\limits_0^{\ell} f(\Gamma(s)) ds :$$

Եթե  $\Gamma : [0; \ell] \rightarrow R^n$  այլ կորն այնալիսին է: Տրված են  $\Gamma : [\alpha; \beta] \rightarrow R^n$  կորը և այդ կորի երկայնքով որոշված  $\int \text{իրականարժեք } \Phi_{\text{ունկցիան}} : [\alpha; \beta] \text{ հասպածի } P = \{t_0, \dots, t_p\}$  տրամադրությունը համապատասխան ընտրելով  $\tau_i \in [t_i; t_{i+1}]$  կետեր՝ կազմում են

$$S_f^k(\Gamma; P, \tau) = \sum_{i=0}^{p-1} f(\Gamma(\tau_i)) \Delta x_i^k$$

ինտեղալային գումարը, որում  $\Delta x_i^k = (\pi^k \circ \Gamma)(t_{i+1}) - (\pi^k \circ \Gamma)(t_i)$ ,  $\pi^k$ -ն  $R^n$ -ում  $k$ -րդ պարունակությունն է:

Սահմանում: Եթե զոյություն ունի

$$I^k = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} S_f^k(\Gamma; P, \tau)$$

վերջանիր սահմանը, ապա այն անվանում են  $\Gamma$  կորով  $\int \Phi_{\text{ունկցիայի}} \text{կորացիծ ինտեղալ}$  (երկրորդ այլափի) և նշանակում՝

$$I^k = \int\limits_{\Gamma} f d\mathbf{x}^k = \int\limits_{\Gamma} f(\mathbf{x}) dx^k = \int\limits_{\Gamma} f(x^1, \dots, x^n) dx^k :$$

Եթե  $\Gamma$  կորի երկայնքով արված են  $n$   $\Phi_{\text{ունկցիաներ}}$ , ապա  $\Phi_{\text{զիկական}} \text{ խնդիրներում}$  հաճախ հանդիպում

$$I^1 + \dots + I^n = \int\limits_{\Gamma} f_1(\mathbf{x}) dx^1 + \dots + \int\limits_{\Gamma} f_n(\mathbf{x}) dx^n$$

գումարը նշանակում են

$$\int\limits_{\Gamma} f_1(\mathbf{x}) dx^1 + \dots + f_n(\mathbf{x}) dx^n :$$

Եթելորդ այլափի կորացիծ ինտեղալի բերումը նկատի ինտեղալի: Եթե  $\gamma_i = \pi^i \circ \Gamma \in C^1[\alpha; \beta]$ ,  $L$ -ը  $\Gamma$  կորի լրիցն է և  $f \in C(L)$ , ապա  $\int_{\Gamma} f(\mathbf{x}) dx^i$ -ն զոյություն ունի, ըստ որում՝

$$\int\limits_{\Gamma} f(\mathbf{x}) dx^i = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\Gamma(t)) \gamma'_i(t) dt :$$

Ըստիամուր տեսքով, եթե  $\Gamma \in C^1([\alpha; \beta], R^n)$ ,  $f_i \in C(L)$  ( $i = 1, \dots, n$ ), առան

$$\int \sum_{i=1}^n f_i(x^1, \dots, x^n) dx^i = \sum_{i=1}^n \int f_i(y_1(t), \dots, y_n(t)) y'_i(t) dt.$$

Դիցուք  $\Gamma_1 : [\alpha_1; \beta_1] \rightarrow R^n$  և  $\Gamma_2 : [\alpha_2; \beta_2] \rightarrow R^n$  պարզ սպառկ կորեկտ ունեն միևնույն  $L$  կոփշը և  $f \in C(L) : \text{Եթե}$

սր 1)  $\Gamma_1(\alpha_1) = \Gamma_2(\alpha_2)$  և  $\Gamma_1(\beta_1) = \Gamma_2(\beta_2)$ , ապա  $\int_{\Gamma_1} f(x) dx^i = \int_{\Gamma_2} f(x) dx^i$  ;

բ)  $\Gamma_1(\alpha_1) = \Gamma_2(\beta_2)$  և  $\Gamma_1(\beta_1) = \Gamma_2(\alpha_2)$ , ասպա  $\int_{\Gamma_1} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}^i = - \int_{\Gamma_2} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}^i$  :

Այս հավասարաթյունները, ինչպես նաև նույնախիլ հավասարաթյուններ առաջին տիպի կարգի ինսեղքայի համար, հիմք են տալիս համարելու, որ պարզ կորդեկի դեպքում կրուգիծ ինսեղքայինքը սահմանված էն ոչ այնքան  $\Gamma$  կորուկ, որքան  $\Gamma$ -ի կիրիչը: Միայն բն, նկատի ունենալով ը կետայ զբաժանական հավասարաթյուններ, առան են, որ երկրորդ ախայի կրուգիծ ինսեղքայի, ի տարբերության առաջին ախայի կրուգիծ ինսեղքայի, փախում է իր նշանը, եթե կորդի կիրիչի վրա ընտցնական ուղղությունը փոխվում է հավասարի ուղղությամբ:

Սուազիները կը սպառի անդամակի ծին տեղ գրալ լի երի կ այլ ։ Տրված  
Դուռը կարի և նրա երկայնքան պրոցեսական ժամանակաշրջանը անընդհատ ֆունցիաների համար

$$\int f_1 dx^1 + \cdots + f_n dx^n = \int (f_1 \cos \alpha_1 + \cdots + f_n \cos \alpha_n) ds,$$

որտեղ  $\cos \alpha_1 = \dots = \cos \alpha_n$  -ը յաբարանշյուր կեսում կարի աղեղի երկարության աճման ոպղությամբ տարված շոշակողի սղողուր կամինաներն են:

**Պայմանավորվենք այսպիսեակ ՝  $R^2$  և  $R^3$  տարածությունները համարել այդ կազմությունը:**

Եթիւ  $\Gamma$  կորի կրիչն ընկած է  $R^2$ -ում, ապա  $\Gamma$ -ն անվանում են հարք կոր, իսկ եթիւ  $R^3$ -ում տարրածական կոր:

$\Gamma : [\alpha; \beta] \rightarrow R''$  անընդհատ կորը կոչվում է փակ կոր, եթե  $\Gamma(\alpha) = \Gamma(\beta)$ :  $\Gamma$  փակ կորը կոչվում է պարզ կոր, եթե  $\Gamma : [\alpha; \beta] \rightarrow R''$  արտապատկերություն փախմիացներ է:

**Ժողովանի թեմաները:** Տանկացած Ռ հարք, պարզ, փակ կորու դեկարայան հարքությունը բաժանված է երկու շատավոր տիբուլյոների, որոնցից յարաքանչյարի եզր Գ-ի կրիչն է: Ըստամբն, տիբուլյոներից մեկն անսահմանափակ է և կոչվում է արտաքին ախրույթ, իսկ մյուսը կոչվում է Գ կորու կամ Ռ կորի կիրիկով սահմանափակված ախրույթ:

Դիցուք  $G$ -ն  $R^2$ -ում  $\Gamma$  կրուզ սահմանափակված տիրույթ է: Եթե ափրայիք եզրով ( $\Gamma$ -ի կրիչով) որդշակի ուղղությամբ շարժենախ շարժման յուրաքանչյուր պահին դիտարքը բավականաչափ փոքր շրջակայրում տիրույթի կենտրոն գտնվում են նրանից ճախ, սապա շարժման այդ ուղղությունը համարում են լրական ուղղություն: Ռասացիկ տիրույթի համար եզրով շարժման դրական ուղղությունը ուղղակի համեմետամ է ժամացուցի վարի շարժմանը հակասակ ուղղությունը:

Եթե  $\Gamma$  հարթ, պարզ, ողորկ կրիչը  $L$ -ն է և  $f \in C(L)$ , ապա հաճախ  $\int_{\Gamma} f(\mathbf{x}) ds$

գրելու վախարեն գրամ են  $\int_L f(\mathbf{x}) ds$ : Ինչ վերաբերում է նոյն կրուզի  $f$  ֆունկցիայի երկրորդ ախալի կրուազիծ ինտեգրալին, սապա նրա արժեքը, ինչպես նշվեց, կարող է փոխել իր նշանը՝ կախված կրիչի վիճակից առդրույթունից: Եթե  $\Gamma : [\alpha; \beta] \rightarrow R^2$  պարզ, ողորկ կրոք վիճ է և  $t \in [\alpha; \beta]$  պարամետրի աճմանը գրավեքաց  $\Gamma(t)$  կեազ կրիչի վրայով շարժվում է դրական ուղղությամբ, սապա այդ դեպքում գրամ են:

$$\int_{\Gamma} f(\mathbf{x}) dx' = \int_L f(\mathbf{x}) dx' :$$

Կորագիծ ինտեգրալի անկանությունը ին ու թագավորությունը նշանակած արդիությունը: Դիցուք  $G$ -ն  $R^2$ -ում ախարտյա է,  $P(x, y)$ -ը և  $Q(x, y)$ -ը  $G$ -ում որոշված անընդհատ ֆունկցիաներ:

**Թեորեմ:** Որպեսզի կամայականորեն արված  $A, B \in G$  կետերի համար  $A$ -ն  $B$ -ին միացնող ( $A$ -ից  $B$  ուղղված) և  $G$ -ում ընկած ցանկացած  $L$  ճանապարհով

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

ինտեգրալն ունենաւ միևնույն արժեքը, կախված միայն  $A$ -ից և  $B$ -ից, անհրաժեշտ է և բավարար, որ գոյություն ունենան  $G$ -ում դիֆերենցիալ  $\Phi(x, y)$  ֆունկցիա, այնպիսին, որ ամենուրեք

$$d\Phi(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy :$$

Այս պայմաններում ասսամ են, որ ընդհանունգրալ արտահայտությունը ներկայացնում է յիշի պիֆերենցիալ, որի նախնականը  $\Phi$ -ն է:  $G$  ափրույթում ընկած ցանկացած փուկ կրոռու այդ արտահայտության ինտեգրալը հավասար է զրոյի: Եթե  $A, B \in G$  և  $L$ -ը  $A$ -ն  $B$ -ին միացնող և  $G$ -ում ընկած ճանապարհ է, սապա գրամ են

$$\int_L P dx + Q dy = \int_{AB} P dx + Q dy = \int_A^B P dx + Q dy :$$

Նկատենք, որ

$$\int_A^B P dx + Q dy = - \int_B^A P dx + Q dy :$$

Եթե  $\Phi$ -ն  $P dx + Q dy$  արտահայտության նախնականն է, սապա ցանկացած  $A, B \in G$  կետերի համար

$$\int_A^B P dx + Q dy = \Phi(B) - \Phi(A) = \Phi(x, y)|_A^B :$$

Համանանորեն, եթե  $G$ -ն  $R^3$ -ում ափրույթ է,  $P, Q, R \in C(G)$ ,  $A$ -ն և  $B$ -ն  $G$  ափրույթի կամայական կետեր են, սապա  $A$ -ն  $B$ -ին միացնող և  $G$ -ում ընկած ցանկացած ճանապարհով

$$\int Pdx + Qdy + Rdz$$

իմաստաբար կունենա միևնույն արժեքը (լայնված միայն  $A$ -ից և  $B$ -ից) այն և միայն այն դեպքում, եթե գոյություն ունի  $\Phi(x, y, z)$  պիտի հանցիա, այնպիսին, որ  $G$ -ում ամենուրեք

$$d\Phi(x, y, z) = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz :$$

Այս դեպքում էլ, ցանկացած  $A, B \in G$  կետերի համար

$$\int \limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \Phi(B) - \Phi(A) :$$

Գ թիվ 6 ի բառ առ ձեւը :  $\Gamma : [\alpha; \beta] \rightarrow R^2$  անընդհատ կորը կանվանենք կոտր առ կոտր սղորդի կոր, եթե գոյություն ունի  $[\alpha; \beta]$  հաստիվածի տրուհում, որի յուրաքանչյուր միջակայքին համապատասխանող կորի աղեղող ողորդի :

Դիցուք  $G$ -ն  $R^2$ -ում  $\Gamma$  կոտր առ կոտր սղորդի կորով սահմանափակված տիրույթ է,  $L$ -ը  $\Gamma$ -ի կորին է և  $P, Q \in C^1(\overline{G})$ :

Ծշմարիտ է Գրինի հետևյալ բանաձևը.

$$\int \limits_L Pdx + Qdy = \iint \limits_G \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy :$$

$G \subset R^2$  տիրույթը կոչվում է միակապ, եթե  $G$ -ում ընկած ցանկացած փակ կորով սահմանափակված տիրույթն ամբողջապես պարունակվում է  $G$ -ում:

Հետևանք: Որպեսզի  $G$  միակապ տիրույթում  $Pdx + Qdy$  արագահայտությունը լինի լրիվ պիտի հանդիսացիալ, անհրաժեշտ է և բավարար հետևյալ պայմանը.  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, (x, y) \in G$ :

Գրինի բանաձևամբ հաջորդաբար աեղացնելով  $P(x, y) = 0$  և  $Q(x, y) = x$ ,  $P(x, y) = -y$  և  $Q(x, y) = 0$ ,  $P(x, y) = -\frac{y}{2}$  և  $Q(x, y) = \frac{x}{2}$ ,  $G$  տիրույթի  $S$  մակերեսի համար ստանում ենք հետևյալ բանաձևերը.

$$S = \int \limits_L xdy = - \int \limits_L ydx = \frac{1}{2} \int \limits_L -ydx + xdy :$$

Սա կ ե թ ե մ թ ա յ ի ն ի ն ա թ ե զ թ ա լ ն ե թ ը : Ա ռ ա զ ի ն ա թ պ ի մ ա կ ե թ ե մ թ ա յ ի ն ի ն ա թ ե զ թ ա լ : Դիցուք  $R^3$ -ում  $S$  պարզ, ողորդ մակերևույթը արված է

$$x = \xi(u, v), \quad y = \eta(u, v), \quad z = \zeta(u, v), \quad (u, v) \in \overline{D},$$

պարամետրական հավասարումներով, որտեղ  $D$ -ն  $R^2$ -ում քառակուսեի տիրույթ է,  $\xi, \eta, \zeta$  ֆունկցիաները  $\overline{D}$ -ում անընդհատ դիֆերենցելի են և ամենուրեք՝

$$rang \begin{bmatrix} \xi'_u & \eta'_u & \zeta'_u \\ \xi'_v & \eta'_v & \zeta'_v \end{bmatrix} = 2 :$$

Տրված է  $f : S \rightarrow R$  լրականարժեք ֆունկցիան:

Տրոհելով  $D$ -ն  $D_1, D_2, \dots, D_n$  զայց առ զայց ընդհանուր ներքին կետերի շունչող քառակուսեի տիրույթների և կանաչականորեն ընտրելով  $(u_i, v_i) \in D_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) կետերը՝ կազման են

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi(u_i, v_i), \eta(u_i, v_i), \zeta(u_i, v_i)) \Delta S_i$$

ինտեգրալային գումարը, որում  $\Delta S_i$ -ն տրոհման  $D_i$  պատասխան ինտեգրալավախանող  $S$  մակերևույթի կառու մակերեսն է:

$$\text{Դիցուք } \lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \text{diam} D_i :$$

Սահմանում: Եթե գոյացյուն տեղի  $\sigma$  ինտեգրալային գումարի սահմանը, եթե  $\lambda \rightarrow 0$ , սապա այն անվանում են  $S$  մակերևույթով  $f$  ֆունկցիայի մակերևութային ինտեգրալ (առաջին տիպի) և նշանակում

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \iint_S f(x, y, z) dS :$$

Առաջին տիպի մակերևութային ինտեգրալի բերումը նիմանի կրկնակի ինտեգրալի: Եթե  $f \in C(S)$ , ապա  $S$  մակերևույթով  $f$  ֆունկցիայի առաջին տիպի մակերևութային ինտեգրալը գոյություն ունի, ընդ որում՝

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(\xi(u, v), \eta(u, v), \zeta(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Որտեղ

$$E = \xi_u'^2 + \eta_u'^2 + \zeta_u'^2, \quad G = \xi_v'^2 + \eta_v'^2 + \zeta_v'^2, \quad F = \xi_u \xi_v + \eta_u \eta_v + \zeta_u \zeta_v :$$

Սահմանավարագեն, եթե  $S$  մակերևույթը  $z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$ , ֆունկցիայի գրաֆիկն է, սապա

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy :$$

Եթե կը որդի տիպի մակերևույթը այն է ինքը և ուրաքանչիւնը կազմությունը: Մակերևույթի կազմությունը մակերևույթի արգագիծ կամ մակերևույթը եղբայրի տականավարող կամ մակերևույթը տականավարող կամ-սպառ:

Եթե մակերևույթի յուրաքանչյուր կետում միավոր նորմալը ուղղորդ կոսինուսների համար գլուխ 14-ում թերզած բանաձևում վերցված է պյուս հշանից, այսու սպառ են, որ ընարկված է մակերևույթի որոշակի երես: Մակերևույթի հակառակ երեսը որոշված է այլ բանաձևում միանու հշանից ընտրությամբ: Մակերևույթը կոչվում է երկերես, եթե նրա վրա ընկած և եղագիծը չնաևող ցանկացած փակ կրուղ միավոր նորմալը անընդհատ տեղաշարժենա այն սեմեն անգամ վերադարձում է իր երակետայիշ լիքրիճ (նորմալ ուղղորդ կոսինուսները հշանի չեն փոխում):

$R^3$  տարածության աջ կազմության պայմաններում  $S$  մակերևույթի պիտուկված երեսը համարվում է  $M \in S$  կետում աջ կոսինությամբ, եթե  $M$  կետի բավականաչափ փոքր շրջակայրած մակերևույթի կառքի վրա ընկած փակ կրուղ պիտուկված երեսին համապատասխանող  $\pi(M)$  նորմալի շորջը ժամացույցի պարի պատճեն ուղղորդյանը ընդունիւմ է որպես լրական ուղղորդյուն: Մակերևույթը համարվում է աջ կոսինությամբ, եթե այն իր յուրաքանչյուր կետում աջ կոլմոնորոշչած է:

$S \in C(G, R^3)$  մակերևույթը կոչվում է կառու առ կառու պարզի, եթե  $G \subset R^2$  տիրույթը կարելի է կառու առ կառու պարզի կորենով պարսել վերջավոր քիվով գոյց առ գոյց մինիանուր ներքին կետեր չունեցան պատճենների, որոնցից յուրաքանչյուրին համապատասխանող մակերևույթի կառու ուղղությունը է: Եթե այն կառուներից յուրաքանչյուրը կոլմոնորոշչած է, ապա այն կոլմոնորոշչումը համարվում է համաձայնեցված, եթե ցանկացած երեսու կից կառուներից մեկի վրա նրանց ընթա-

նոր եղուկ դրական ուղղությամբ շարժումը հակադիր է մյուսի վրա նոյն այդ եղուկ դրական ուղղությամբ շարժմանը: Այս դեպքում ստրոջ  $S$  մակերևույթը համարվում է կողմնարությամբ:

Եթե մակերևույթը ներկայացնում է  $z = z(x, y)$  անընդհատ դիֆերենցիալ ֆունկցիայի գրաֆիկ, ապան բնական է խոսել մակերևույթի վերին և ստորին երեսների մասին: Յուրաքանչյուր կետում վերին երեսին համապատասխանող մակերևույթի նորմալը  $Oz$  ստանցքի հետ կազմում է սուր սանրսում, իսկ ստորին երեսին՝ բռն սանրսում: Նոյնքան բնական է  $V \subset R^3$  տիբույքը (մարմինը) սահմանափակող վակ ողոքի մակերևույթի երեսներն անվանել ներքին և արտաքին երեսներ: Այդ երեսներին տարգան նորմաները կանվանենք համապատասխանաբար ներքին և արտաքին նորմաներ:

Դիցուք  $S$ -ը երկերես, կողմնարուշված, կտոր առ կտոր ողոքի մակերևույթ է, իսկ  $f$ -ը՝  $S$ -ի կետերամբ որաշված իրականատեր ֆունկցիա:

Ընտրենույթ մակերևույթի որաշակի երեսը՝ մակերևույթը կտոր առ կտոր ողոքի կողմանուն տրուելով գոյց առ զույգ այդ կարերի կետերից զատ այլ ընդհանուր կետեր չունեցող  $S_1, \dots, S_n$  կտորների և դրանցից յուրաքանչյուրի վրա կամայականութեն վերցնելով մեկական  $(x_i, y_i, z_i)$  կետ՝ կազմում են

$$\sigma_z = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta P_i$$

ինականարարային գումարը, որում  $\Delta P_i$ -ն  $S_i$  կտօրի  $xOy$  հարթության վրա  $P_i$  պյանեցիայի մակերևուն է պյուս նշանով, եթե  $S_i$ -ի վրա վակ կրուգ դրական ուղղությամբ շարժվում է  $P_i$ -ի վրա դրական ուղղությամբ և մինուս նշանով, եթե պյոյնեցիան շարժվում է հակադիր ուղղությամբ: Եթե  $f$ -ը սահմանափակ ֆունկցիա է, ապա մակերևույթի ողոքիությունը ինականարարային է տալիս ինականարարային գումարները կազմենու գործնականում արհանարինել արդեման այն  $S_i$  կտորները, որոնց դիրքը տարածության մեջ ( $S_i$ -ն  $P_i$ -ի վրա փոխմիարժեք չի պյոյնելու վեց) բույլ չի տալիս  $\Delta P_i$ -ի նշանի հարցում վերը նշված կանոնով կողմնարուշվել:

Դիցուք  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \text{diam} S_i$ :

Սահմանում: Եթե գոյություն ունի  $\sigma_z$ -ի սահմանը, եթե  $\lambda \rightarrow 0$ , ապա այն անվանում են  $S$  մակերևույթի ընտրված երեսով  $f$  ֆունկցիայի մակերևույթային ինականարար (երկրորդ տիպի) և նշանակում:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma_z = \iint_S f(x, y, z) dx dy :$$

Եթե մակերևույթի արդեման պատճեները պյոյնեկտվում են  $yOz$  ( $zOx$ ) հարթության վրա, ապա նոյն սկզբաներով կազմված  $\sigma_x$  ( $\sigma_y$ ) ինականարարային գումարների սահմանը, եթե այն գոյության մեջ, նոյնական անվանում են երկրորդ տիպի մակերևույթային ինտեգրալ և նշանակում նոյն ձևով, միայն թե  $dxdy$ -ի վախճանեն զում են  $dydz$  ( $dzdx$ ): Եթե արված են  $S$  մակերևույթի կետերամբ որաշված  $P, Q, R$  իրականարժեք ֆունկցիաներ, ապա դրանցից յուրաքանչյուրի համապատասխանաբար ըստ  $dydz$ -ի, ըստ  $dzdx$ -ի և ըստ  $dxdy$ -ի ինտեգրալների գումարը, եթե երեք ել տարածված են  $S$  մակերևույթի միևնույն երեսով, նշանակում են՝

$$\iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy :$$

Երկրաբ տիպի մակերևութային ինտեգրալի թերումը Ռիմանի կրկնակի ինստեգրալի: Դիցուք  $G$ -ն  $R^2$ -ում քառակուսիի տիրույթ է: Եթե կտոր առ կտոր ողորկ է  $S$  երկրես մակերևույթը արված է

$$x = \xi(u, v), \quad y = \eta(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in G,$$

պարամետրական հավասարութեավ և  $P, Q, R \in C(S)$ , ապա

$$\iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_G (PA + QB + RC) du dv,$$

որտեղ  $A, B, C$  գործակիցները որպես են զույթի 14-ում թերված բանաձևերով: Եթե  $G$  տիրույթում ընկած փակ կորով դրական ուղղությամբ շարժվելիս  $S$  մակերևույթի ընարված երեսի վրա համապատասխան կետը շարժվում է դրական ուղղությամբ, ապա աջ կորդում պես է վեցը են պյուս նշանը: Հակառակ դեպքում վեցը պատճեն է մինչու նշանը:

Առաջին և երկրորդ տիպի մակերևութային ինտեգրալների կապը: Եթե  $\cos \alpha = 1, \cos \beta = 0$  և  $\cos \gamma = 0$   $S$  մակերևույթի ընտրված երեսի հորման ուղղորդ կոսինուսներն են, ապա

$$\iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_G (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS :$$

Ս ա ռ ը ս ի ք ա ն ա ծ և ը : Դիցուք  $S$ -ն  $L$  կտոր առ կտոր ողորկ կոնսարով տահմանափակված կտոր առ կտոր ողորկ մակերևույթ է, ընդ որում  $L$ -ի վրա դրական ուղղությունը համապատասխանում է  $S$  մակերևույթի վրա ընտրված երեսի կոդմուրոշմանը: Եթե  $P, Q, R$  ֆունկցիաները  $S$  մակերևույթի կետերը պարամետրական տիրույթում անընդհատ դիֆերենցելի են, ապա ճշմարիտ է Սոսարի հետևյալ բանաձեռ:

$$\int_L P dx + Q dy + R dz = \iint_S \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy :$$

Հետևանք: Դիցուք  $I$ -ն  $R^3$ -ում զագահեռամիսն է և  $P, Q, R \in C(I)$ : Որպեսի  $P dx + Q dy + R dz$  արտահայտությունը լինի լիկ դիֆերենցիալ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ  $I$ -ում ամենուրեք ճշմարիտ լինեն

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

հավասարությունները:

Գ ա ռ ս ս - Օ ս ս թ թ ռ գ ք ա ն ս կ ո ւ ք ա ն ա ծ և ը : Դիցուք  $V \subset R^3$  մարմինը սահմանափակված է  $S$  կտոր առ կտոր ողորկ մակերևույթով և  $P, Q, R$  ֆունկցիաները  $\frac{\partial P}{\partial x}$ ,

$\frac{\partial Q}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial R}{\partial z}$  ֆունկցիաների հետ միասին  $\overline{V}$  բազմության վրա անընդհատ են: Այս պայմաններում ճշմարիտ Գաուս-Օտարողրաբուկու հետևյալ բանաձեռը.

$$\iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy,$$

ընդ որում աջ կորդի ինտեգրալը տարածված է  $S$  փակ մակերևույթի արտաքին երեսով:

Վ ե կ ս ո ր ս կ ա ն ա ն ա լ ի զ ի ս տ ա ր բ ե ր ը : Սկսայս և վեկտորական դաշտեր: Մաքեմատիկական ֆիզիկայի և մահանիկայի բազմաթիվ խնդիրներում  $G \subset R^3$  տիրույթում որոշված ֆունկցիաները տիրույթի յուրաքանչյուր կտորին համապատասխանեցնում են կամ որոշակի

սկսյար մեծություն (ժավալ, զանգված, ջերմաստիճան և այլն), կամ վեկտորական մեծություն (ուժ, արագություն, արագուցում և այլն): Այդ կապակցությամբ  $G$  ախրույրում որոշվուծ  $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}(x, y, z)$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , իրականարժեք ֆունկցիան անվանում են սկսյար դաշտ, իսկ  $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$  ֆունկցիան՝ վեկտորական դաշտ: Ենթադրվում է, որ  $\mathbf{u}$  և  $\mathbf{a}$  ֆունկցիաները  $G$ -ում ամենուրեք անընդհատ դիֆերենցիել են:

Եթե  $\mathbf{u}(x, y, z)$  սկսյար դաշտի սահագին կարգի մասնակի ածանցյալները ոչ մի կետում միաժամանակ զոտ չեն, առաջ  $\mathbf{u}(x, y, z) = c$  հավասարությունը որոշվող մակերևույթն անվանում են դաշտի մակարդակի մակերևույթ:

Գրադիւնս:  $\mathbf{u}$  սկսյար դաշտի համար

$$\text{grad } \mathbf{u} = \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right)$$

Վեկտորը կոչվում է գրադիւնս: Հետևելով Համիլտոնին՝ մոցնում են  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  սիմվոլիկ վեկտորը (անվանում են նարզա), որի միջոցով  $\mathbf{u}$  դաշտի գրադիւնսը ներկայացվում է

$$\text{grad } \mathbf{u} = \nabla \mathbf{u}$$

անորոշ: Ցանկացած  $\mathbf{n} = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$  միավոր վեկտորի համար՝

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \cos \gamma = \langle \text{grad } \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle:$$

Այսաեղից հետևում է, որ արված կետում  $\mathbf{u}$  ֆունկցիայի ածանցյալը  $\mathbf{n}$ -ի ուղղությամբ կլինի մաքսիմալ, եթե  $\mathbf{n}$ -ը համարդիկած է այդ կետում դաշտի գրադիւնսին, ընդ որում՝

$$\max_{\mathbf{n}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = |\text{grad } \mathbf{u}| = \sqrt{\left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right)^2}:$$

Նկատենք նաև, որ արված կետում  $\mathbf{u}$  դաշտի գրադիւնսը համագիծ է այդ կետում անցնող  $u(x, y, z) = c$  մակարդակի մակերևույթի նորմալին:

Վեկտորական դաշտի վեկտորական և տոտորը: Պայմանավորվենք  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  վեկտորների վեկտորական արագությալը համարկել  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ : Տրված  $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$  վեկտորական դաշտի ցանկացած կետում

$$\text{div } \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

սկսյար մեծությունը կոչվում է  $\mathbf{a}$  դաշտի պիվերգելցիա, իսկ

$$\text{rot } \mathbf{a} = [\nabla, \mathbf{a}] = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

վեկտորական մեծությունը՝ դաշտի տոտոր:

Վեկտորի հասք մակերևույթով: Դիցուք  $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$   $G \subset \mathbb{R}^3$  տիրույթամբ արված վեկտորական դաշտ է և  $S$  ողորկ երկերս մակերևույթը ընկած է  $G$ -ում:  $S$  մակերևույթը նորա սորշակի երեսին համապատասխանող  $\mathbf{n} = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$  միավոր նորմալի ուղղությամբ  $\mathbf{a}$  վեկտորի հասքը սահմանվում է

$$\iint_S \langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle dS = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS$$

բանաձևավ: Օգտագործելով նաև դիվերգենցիայի սահմանումը՝ Գառւս-Օստրազրադաշկու բանաձևին կարելի է ապա հետևյալ վեկտորական տեսքը:

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{a} dx dy dz = \iint_S \langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle dS,$$

որտեղ  $S$ -ը  $V$  մարմինը սահմանափակութ փակ, ուղղու մակերևայք է, իսկ  $\mathbf{n}$  -ը՝  $S$ -ի արտաքին նորմալը:

Վեկտորի շրջապատույթը:  $G \subset \mathbb{R}^3$  տիրույթում տրված  $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$  վեկտորական դաշտի համար  $L \subset G$  կրողվ

$$\oint_L \mathbf{a} d\mathbf{r} = \int_L P dx + Q dy + R dz$$

ինտեգրալը (դաշտի աշխատանքը) կոչվում է  $\mathbf{a}$  վեկտորի գծային ինտեգրալ: Եթե  $L$ -ը փակ կոնսուր է, ապա գծային ինտեգրալն անվանում են  $\mathbf{a}$  վեկտորի  $L$  կոնսուրով շրջապատույթ:

Ստորև բանաձևել վեկտորական տեսքով հետևյալն է.

$$\oint_L \mathbf{a} d\mathbf{r} = \iint_S \langle \operatorname{rot} \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle dS,$$

որտեղ  $L$ -ը  $S \subset G$  մակերևայք նօրագիծն է, իսկ  $\mathbf{n}$  -ը՝  $S$ -ի այն երեսի միավոր նորմալը, որի կազմությամբ  $L$  կոնսուրով ինտեգրում կատարված է դրական ուղղությամբ:

Պոտենցիալ դաշտ:  $\mathbf{a}(\mathbf{r})$  վեկտորական դաշտը կոչվում է պոտենցիալ դաշտ, եթե գոյություն ունի  $\mathbf{a}(\mathbf{r})$  սկալյար դաշտ, այնպիսին, որ ամենուրեք

$\operatorname{grad} u = \mathbf{a}$ :

Այս դեպքում  $u$  -ն անվանում են  $\mathbf{a}$  դաշտի պոտենցիալ: Պոտենցիալ դաշտամ  $\mathbf{a}$  վեկտորի շրջապատույթը ցանկացած փակ կոնսուրով հասկանար է գոյությունի:

Զուգահեռանիստական վրա արված  $\mathbf{a}$  վեկտորական դաշտը կլինի պոտենցիալ դաշտ այն և միայն այն դեպքում, եթե ամենուրեք  $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$ :

Սույնովայսին դաշտ:  $\mathbf{a}$  վեկտորական դաշտը կոչվում է սույնովայսին, եթե գոյություն ունի մեկ այլ,  $\mathbf{b}$  վեկտորական դաշտ, որի ստորը  $\mathbf{a} = \operatorname{rot} \mathbf{b}$ : Որպեսզի  $\mathbf{a}$  -ն լինի սույնովայսին դաշտ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ տիրույթում սմենուրեք տեսի ուժենա  $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$  պայմանը:

## Ա

Հաշվել առաջին աիպի կորագիծ ինտեգրալը (3947-3958).

3947.  $\int_{\Gamma} x ds$ ,  $\Gamma$  -ն  $(0;0)$  և  $(1;1)$  կետերը միացնող հատվածն է:

3948.  $\int_{\Gamma} \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$ ,  $\Gamma$  -ն  $(0;0)$  և  $(1;2)$  կետերը միացնող հատվածն է:

3949.  $\int_{\Gamma} (x+y) ds$ ,  $\Gamma$  -ն  $(0;0)$ ,  $(1;0)$  և  $(0;1)$  զագարներով եռանկյան եզրն է:

3950.  $\int_{\Gamma} xy ds$ ,  $\Gamma$ -ն  $|x|+|y|=1$  քառակուսին է:

3951.  $\int_{\Gamma} xy ds$ ,  $\Gamma$ -ն էլիպսի աղեղն է.  $x=a \cos t$ ,  $y=b \sin t$ ,  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ :

3952.  $\int_{\Gamma} x^2 ds$ ,  $\Gamma$ -ն  $x^2+y^2=a^2$ , ( $y \geq 0$ ) կիսաշրջանագիծն է:

3953.  $\int_{\Gamma} y^2 ds$ ,  $\Gamma$ -ն  $x=a(t-\sin t)$ ,  $y=a(1-\cos t)$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) կորն է:

3954.  $\int_{\Gamma} (x^2+y^2) ds$ ,  $\Gamma$ -ն  $x=a(\cos t+t \sin t)$ ,  $y=a(\sin t-t \cos t)$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) կորն է:

կորն է:

3955.  $\int_{\Gamma} (x+z) ds$ ,  $\Gamma$ -ն  $x=t$ ,  $y=\sqrt{\frac{3}{2}}t^2$ ,  $z=t^3$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) կորն է:

3956.  $\int_{\Gamma} (x^2+y^2+z^2) ds$ ,  $\Gamma$ -ն  $x=a \cos t$ ,  $y=a \sin t$ ,  $z=bt$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) կորն է:

կորն է:

3957.  $\int_{\Gamma} z ds$ ,  $\Gamma$ -ն  $x=t \cos t$ ,  $y=t \sin t$ ,  $z=t$  ( $0 \leq t \leq t_0$ ) կորն է:

3958.  $\int_{\Gamma} (x+y) ds$ ,  $\Gamma$ -ն հետևյալ շրջանագծի աղեղն է.  $x=t$ ,  $y=t$ ,

$$z=\sqrt{1-2t^2}, \left(0 \leq t \leq \frac{1}{2}\right):$$

Գանել կորի երկարությունը (3959-3962).

3959.  $y^2=x^3$ ,  $0 \leq x \leq 5$ : 3960.  $y=1-\ln \cos x$ ,  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ :

3961.  $x=t \cos t$ ,  $y=t \sin t$ ,  $z=t$ ,  $0 \leq t \leq \sqrt{2}$ :

3962.  $x=e^{-t} \cos t$ ,  $y=e^{-t} \sin t$ ,  $z=e^{-t}$ ,  $0 < t < +\infty$ :

Հաշվել երկարությունը (3963-3974).

3963.  $\int_{\Gamma} xy dx$ ,  $\Gamma$ -ն սիմուսինի աղեղն է.  $y=\sin x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ :

3964.  $\int_{\Gamma} \left(x - \frac{1}{y}\right) dy$ ,  $\Gamma$ -ն պարաբոլի աղեղն է.  $y=x^2$ ,  $1 \leq x \leq 2$ :

3965.  $\int_{\Gamma} xdy - ydx$ ,  $\Gamma$ -ն  $y = x^3$ ,  $0 \leq x \leq 2$ , կորն է:

3966.  $\int_{\Gamma} (xy - y^2)dx + xdy$ ,  $\Gamma$ -ն  $y = 2\sqrt{x}$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , կորն է:

3967.  $\int_{\Gamma} (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$ ,  $\Gamma$ -ն  $y = 1 - |x - 1|$ ,  $0 \leq x \leq 2$ , կորն է:

3968.  $\int_{\Gamma} ydx - xdy$ ,  $\Gamma$ -ն  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , էլիպսն է:

3969.  $\int_{\Gamma} (2a - y)dx + xdy$ ,  $\Gamma$ -ն  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ ,

ցիկլոիդի կամարն է:

3970.  $\int_{\Gamma} (y^2 - z^2)dx + 2yzdy - x^2dz$ ,  $\Gamma$ -ն  $x = t$ ,  $y = t^2$ ,  $z = t^3$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , կորն

է:

3971.  $\int_{\Gamma} ydx + zdy + xdz$ ,  $\Gamma$ -ն  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $z = bt$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , կորն

է:

3972.  $\int_L \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$ ,  $L$ -ը  $x^2 + y^2 = a^2$  շրջանագիծն է:

3973.  $\int_L \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$ ,  $L$ -ը  $A(1;0)$ ,  $B(0;1)$ ,  $C(-1;0)$ ,  $D(0;-1)$  գագաթներով քառա-

կուսու եզրն է:

3974.  $\int_L xdx + ydy + (x + y - 1)dz$ ,  $L$ -ը  $A(1;1;1)$  կետը  $B(2;3;4)$  կետին միացնող

հատվածն է:

Համոզվել, որ ընդհանակրակ արտահայտությունը ներկայացնում է լրիվ դիֆերենցիալ և հաշվել կորագիծ ինանգրալը (3975-3985).

$$(2;3) \quad (3;-4)$$

3975.  $\int_{(-1;2)}^{(2;3)} xdy + ydx$ :

3976.  $\int_{(0;1)}^{(3;1)} xdx + ydy$ :

3977.  $\int_{(0;1)}^{(2;3)} (x+y)dx + (x-y)dy$ :

3978.  $\int_{(1;-1)}^{(3;1)} (x-y)(dx - dy)$ :

$$3979. \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \varphi(x) dx + \psi(y) dy, \quad \varphi \text{ -ն } \text{և } \psi \text{ -ն } \text{անընդհատ } \Phi \text{ունեցիաներ } \text{են:}$$

( $x_1, y_1$ )

( $3;0$ )

( $-2;-1$ )

( $1;2$ )

( $2;1$ )

( $6;8$ )

( $1;0$ )

( $0;-1$ )

( $2;3;-4$ )

( $1;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

( $2;1;1$ )

( $6;1;1$ )

( $1;2;3$ )

( $0;-1$ )

3994.  $\int_L (x+y)dx - (x-y)dy$ ,  $L$ -ը  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  էլիպսն է:

3995.  $\int_L e^x [(1-\cos y)dx - (y-\sin y)dy]$ ,  $L$ -ը  $0 < x < \pi$ ,  $0 < y < \sin x$

սիրույթի եզրն է:

3996.  $\int_L e^{y^2-x^2} (\cos 2xy dx + \sin 2xy dy)$ ,  $L$ -ը  $x^2 + y^2 = R^2$  շրջանագիծն է:

Կորագիծ ինստեղրակի միջոցով հաշվել արված կորերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը (3997-4003).

3997.  $y^2 = 1-x$ ,  $x=1$ ,  $y=1$ : 3998.  $y=2x^2$ ,  $x-y+1=0$ :

3999.  $x=t^2$ ,  $y=t^3$ ,  $x=1$ :

4000.  $x=a\cos t$ ,  $y=b\sin t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ):

4001.  $x=a\cos^3 t$ ,  $y=b\sin^3 t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ):

4002.  $(x+y)^2 = ax$ ,  $y=0$ :

4003.  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $x^2 = 2-y$  (պատկերը պարունակում է  $(0;0)$  կետը):

\*\*\*

Հաշվել առաջին սիպի մակերևութային ինստեղրալը (4004-4009).

4004.  $\iint_P (x+y+z) dS$ ,  $P$ -ը

ա)  $x+2y+4z=4$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$  մակերևույթն է;

բ)  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $z \geq 0$  մակերևույթն է:

4005.  $\iint_P (x^2 + y^2) dS$ ,  $P$ -ը

ա)  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  սֆերան է:

բ)  $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$  կոնի լլիվ մակերևույթն է:

4006.  $\iint_P \frac{dS}{(1+x+y)^2}$ ,  $P$ -ը  $x+y+z \leq 1$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$  քառանիսափ մակերևույթն է:

4007.  $\iint_P |xy| z dS$ ,  $P$ -ը  $z = x^2 + y^2$  պարաբոլիդի այն կտորն է, որի կետերը բավարարում են  $z \leq 1$  անհավասարությանը:

4008.  $\iint_P \frac{dS}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ ,  $P$ -ն  $x = a \cos u$ ,  $y = a \sin u$ ,  $z = v$ ;  $0 \leq u \leq 2\pi$ ,  $0 \leq v \leq H$  մակերևույթն է:
4009.  $\iint_P z^2 dS$ ,  $P$ -ն  $x = r \cos \varphi \sin \alpha$ ,  $y = r \sin \varphi \sin \alpha$ ,  $z = r \cos \alpha$ ;  $0 \leq r \leq a$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  մակերևույթն է ( $\alpha \in (0; \pi/2)$ ,  $\alpha = const$ ):

Բ

4010. Դիցուք  $L$ -ը քևեռային կոորդինատների համակարգում  $r = r(\varphi)$ ,  $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$  հավասարումով արված ողորկ կոր է: Ապացուել, որ եթե  $f(x, y)$  ֆունկցիան անընդհան է  $L$ -ի վրա, ապա

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r(\varphi) \cos \varphi, r(\varphi) \sin \varphi) \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi :$$

Հաշվել առաջին ափակ կորագիծ ինտեգրալը (4011-4013).

4011.  $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} ds$ ,  $L$ -ը  $x^2 + y^2 = ax$  շրջանագիծն է:

4012.  $\int_L |y| ds$ ,  $L$ -ը  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$  լեմնիսկաան է:

4013.  $\int_L x^2 ds$ ,  $L$ -ը  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $x + y + z = 0$  շրջանագիծն է:

Հաշվել երկրորդ ափակ կորագիծ ինտեգրալը (4014-4015).

4014.  $\int_L (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz$ ,  $L$ -ը  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,

- $y \cos \alpha = x \sin \alpha$  ( $0 < \alpha < \pi$ ) շրջանագիծն է, որի ուղղությունը  $(1; 0; 0)$  կետից նայելիս, համընկնում է ժամացույցի սլաքի պատման հակառակ ուղղությանը:

4015.  $\int_L y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$ ,  $L$ -ը Վիվիանիի կորն է.  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,

- $x^2 + y^2 = ax$  ( $z \geq 0, a > 0$ ), որի ուղղությունը  $(2a; 0; 0)$  կետից նայելիս, հակադիր է ժամացույցի սլաքի շարժման ուղղությանը:

4016. Ապացուել, որ եթե  $f$ -ն անընդհան ֆունկցիա է, իսկ  $L$ -ը՝ կատը առ կատը ողորկ, վակ կոր, ապա

$$\int_L f(x^2 + y^2) (xdx + ydy) = 0:$$

4017. Ապացուցել

$$\left| \int_L Pdx + Qdy \right| \leq LM$$

անհավասարությունը, որտեղ  $L$ -ը  $L$ -ի երկարությունն է, իսկ  $M$ -ը՝  $L$  կորի վրա  $\sqrt{P^2 + Q^2}$  ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը:

4018. Ապացուցել, որ

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{x^2+y^2=R^2} \frac{ydx - xdy}{(x^2+xy+y^2)^2} = 0:$$

4019. Դիցուր՝

$$I_1 = \int_{AB} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy, \quad I_2 = \int_{ApB} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy,$$

որտեղ  $AB$ -ն  $A(1;1)$  կետը  $B(2;6)$  կետին միացնող հասկածն է, իսկ  $ApB$ -ն՝  $A$ -ն  $B$ -ին միացնող  $(0;0)$  կետով անցնող, ուղղաձիգ առանցքով պարաբոլի աղեղը: Դանել  $(I_1 - I_2)$ -ը:

4020. Հաշվել

$$\int_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

կորազիծ իմաստօքալը, որտեղ  $L$ -ը պարզ, փակ,  $(0;0)$  կետով չանցնող կոր է:

Հաշվել արված կորերով սահմանավուակված պասկերի մակնիքը (4021-4029).

4021.  $x^3 + y^3 = 3axy$  ( $a > 0$ ) (Դեկարտի տերև):

Ցուցում: Տեղապուրել  $y = tx$ :

4022.  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$  (լեմնիսկատ):

Ցուցում: Տեղապուրել  $y = xtg\varphi$ :

4023.  $x^3 + y^3 = x^2 + y^2$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ :

4024.  $(x+y)^{n+m+1} = ax^n y^m$  ( $x > 0, y > 0, a > 0, n > 0, m > 0$ ):

4025.  $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$  ( $a > 0, b > 0, n > 0$ ):

Ցուցում: Տեղապուրել  $x = ar \cos^n \varphi$ ,  $y = br \sin^n \varphi$ :

$$4026. \left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = \left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1}, \quad x=0, y=0 \quad (a>0, b>0, n>1):$$

$$4027. \left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1} = c \left(\frac{x}{a}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^n \quad (a>0, b>0, c>0, n>0) \quad \text{կորի հանգույցով:}$$

$$4028. x = r \left( (n+1) \cos \frac{t}{n} - \cos \frac{n+1}{n} t \right), \quad y = r \left( (n+1) \sin \frac{t}{n} - \sin \frac{n+1}{n} t \right), \quad n \in N, \\ t \in [0; 2\pi] \quad (\text{եպիհիկոփ}):$$

$$4029. x = r \left( (n-1) \cos \frac{t}{n} + \cos \frac{n-1}{n} t \right), \quad y = r \left( (1-n) \sin \frac{t}{n} + \sin \frac{n-1}{n} t \right), \quad n \geq 2, \\ n \in N, \quad t \in [0; 2\pi] \quad (\text{հիպոցիկոփ}):$$

$$4030. \text{Դանել } x^2 + y^2 = ax \quad \text{զլանային մակերևույթի այն մասի մակերեսը, որը կտրված է } x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \text{ սֆերայով:}$$

4031. Ապացուցել, որ վերին կխահարթությունում գտնվող  $L$  պարզ, փակ կորը  $Ox$  առանցքի շուրջը պատելիս առաջացած մարմնի ծավալը հաշվվում է

$$V = -\pi \int_L y^2 dx$$

բանաձևով:

\*\*\*

4032. Դիցուք՝

$$I_k = \iint_{P_k} (x^2 + y^2 + z^2) dS, \quad k = 1, 2,$$

որտեղ  $P_1$ -ը  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  սֆերան է, իսկ  $P_2$ -ը՝ այդ սֆերային ներգծած  $|x| + |y| + |z| = a$  ուրանիսակի մակերևույթը: Դանել  $(I_1 - I_2)$ -ը:

4033. Հաշվել  $\iint_P zdS$  ինտեգրալը, որտեղ  $P$ -ն  $x^2 + z^2 = 2az$  ( $a > 0$ ) զլանային մակերևույթի այն մասն է, որը կտրված է  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  կոնական մակերևույթով:

4034. Հաշվել  $\iint_P (xy + yz + zx) dS$  ինտեգրալը, որտեղ  $P$ -ն  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  մակերևույթի այն մասն է, որը կտրված է  $x^2 + y^2 = 2ax$  զլանային մակերևույթով:

4035. Ապացուցել Պուասոնի բանաձևը.

$$\iint_P f(ax+by+cz)dS = 2\pi \int_{-1}^1 f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})du ,$$

$P$ -ი  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  უშერმან է:

Հաշվել երկրորդ սիմպի մակերևութային ինտեգրալը (4036-4040).

4036.  $\iint_P z dx dy$ ,  $P$ -ի  $z^2 = x^2 + y^2$ ,  $0 < z \leq H$  մակերևույթի ստորին երեսն է:

$$4037. \text{ u) } \iint_{(P)} z^2 dx dy; \quad \text{ p) } \iint_{(P)} z dx dy,$$

$P$ -ն  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ,  $y \geq 0$  կիսասֆերայի արաւաքին երեսն է:

4038.  $\iint_P (xdydz + ydzdx + zdxdy)$ ,  $P$ -ը  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , սֆերայի արաւաքին

tɒnɪs t:

4039.  $\iint_P (f(x)dydz + g(y)dzdx + h(z)dxdy)$ ,  $f = 0$ ,  $g = 0$  և  $h = 0$  անընդհանա

Գունկցիաներ են,  $P$ -ը  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ ,  $0 \leq z \leq c$  զուգահեռանիստի մակերևույթի արտաքին երեսն է:

$$4040. \iint_P (x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dx dy), \quad P: (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

## Աֆերայի արտաքին երեսն է:

**4041.** Դիցուք  $V \subset R^3$  գլանակերպը սահմանավակված է  $z = \Phi(x, y)$ ,  $z = \varphi(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$ , ֆունկցիաների գրաֆիկներով, ընդ որում ամենուրեք  $\varphi(x, y) \leq \Phi(x, y)$ : Ապացուցել գլանակերպի ծավալի համար հետևյալ բանաձևը:

$$V = \iint_{(S)} z dx dy,$$

որաւեղ  $S$ -ի գլանակերպը սահմանավուակող մակերևույթի արաւաքին երեսն է:

\* \* \*

Սատրսի բանաձեկի միջոցով հաշվել ինսեգրալը (4042-4047).

4042.  $\int_L ydx + zdy + xdz$ ,  $L$ -ը  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $x + y + z = 0$  շրջանագիծներում.

որի ուղղությունը, (1;0;0) կեսից նայելիս, հակառիր է ժամացույցի ալաքի շարժման ուղղությանը:

$$4043. \int_L (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz, \quad L \text{-ը} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3,$$

$x + y + z = 2$  կորն է, որով իմաստում կատարվում է,  $(0;0;0)$  կետից նայելիս, ժամացույցի ալաքի շարժմանը հակառակ ուղղությամբ:

$$4044. \int_L (x^2 - yz) dx + (y^2 - xz) dy + (z^2 - xy) dz, \quad L \text{-ը} \quad A(a;0;0) \text{ կետը } B(a;0;h)$$

Կետին միացնող  $x = a \cos \varphi$ ,  $y = a \sin \varphi$ ,  $z = \frac{h}{2\pi} \varphi$  պատուակագիծն է:

Ցուցում: Կորը լրացնել  $BA$  ևսավածով:

$$4045. \int_L (y+z) dx + (z+x) dy + (x+y) dz, \quad L \text{-ը} \quad x = a \sin^2 t, \quad y = 2a \sin t \cos t, \\ z = a \cos^2 t \quad (0 \leq t \leq \pi) \text{ էլիպսն է:}$$

$$4046. \int_L (y-z) dx + (z-x) dy + (x-y) dz, \quad L \text{-ը} \quad x^2 + y^2 = a^2, \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$$

$(a > 0, h > 0)$  էլիպսն է, որի ուղղությունը,  $(0;0;0)$  կետից նայելիս, համընկնում է ժամացույցի ալաքի շարժմանը հակառակ ուղղությամբ:

$$4047. \int_L (y^2 + z^2) dx + (x^2 + z^2) dy + (x^2 + y^2) dz, \quad \text{որսուղ} \quad L \text{-ը} \quad x^2 + y^2 + z^2 = \\ = 2Rx, \quad x^2 + y^2 \leq 2rx, \quad z > 0 \quad (0 < r < R) \text{ մակերևույթի վերին երեսի եզրն է,} \\ \text{շրջանցման դրական ուղղությամբ:}$$

\*\*\*

Օսարողադսկու բանաձևի միջոցով հաշվել մակերևույթային իմաստ-գրալը (4048-4050).

$$4048. \iint_P x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy, \quad P \text{-ը} \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq a, \quad 0 \leq z \leq a \text{ խո-} \\ \text{րանարդի եզրի արաւաքին երեսն է:}$$

$$4049. \iint_P x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy, \quad P \text{-ը}$$

ա)  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  սֆերայի արաւաքին երեսն է;

բ)  $x^2 + y^2 \leq z^2$ ,  $0 \leq z \leq 1$  կոնի կողմնային մակերևույթի արաւաքին երեսն է:

$$4050. \iint_{(P)} (x-y+z)dydz + (y-z+x)dzdx + (z-x+y)dxdy, P\text{-ը } |x-y+z|+$$

$$+|y-z+x|+|z-x+y|=1 \text{ մակերևույթի արտաքին երեսն է:}$$

4051.  $P$  ողորկ մակերևույթով սահմանավակված մարմնի  $V$  ծավալի համար ապացուցել հենևալ բանաձևը.

$$V = \frac{1}{3} \iint_{(P)} x dy dz + y dz dx + z dx dy = \frac{1}{3} \iint_P (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS,$$

որտեղ  $\cos \alpha$ -ն,  $\cos \beta$ -ն և  $\cos \gamma$ -ն  $P$ -ի արտաքին նորմալի ուղղող կոսինուսներն են, ընդ որում ճախ կողմում ինտեգրումը կատարվում է  $P$  մակերևույթի արտաքին երեսով:

4052. Ապացուցել, որ  $z^2 = x^2 + y^2$  կոնական մակերևույթով և  $Ax + By + Cz + D = 0$  հարթությունով սահմանավակված կոնի ծավալը հավասար է  $\frac{SH}{3}$ -ի, որտեղ  $S$ -ը կոնի հիմքի մակերեսն է, իսկ  $H$ -ը՝ բարձրությունը:

Հաշվել տրված մակերևույթներով սահմանավակված մարմնի ծավալը (4053-4055).

$$4053. z = \pm c \text{ և } \begin{cases} x = a \cos u \cos v + b \sin u \sin v, \\ y = a \cos u \sin v - b \sin u \cos v, \\ z = c \sin u : \end{cases}$$

$$4054. x = 0, z = 0, \begin{cases} x = u \cos v, \\ y = u \sin v, \quad u \geq 0 \ (a > 0): \\ z = -u + a \cos v, \end{cases}$$

$$4055. \begin{cases} x = (b + a \cos \psi) \cos \varphi, \\ y = (b + a \cos \psi) \sin \varphi, \quad (0 < a \leq b): \\ z = a \sin \psi, \end{cases}$$

\*\*\*

4056. Գտնել  $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$  դաշտի զրադինատը. ա)  $O(0;0;0)$  կետում; բ)  $A(2;0;1)$  կետում:  $\Omega^3$  կետում է զրադինատը հավասար գրոյի:

4057.  $R^3$  տարածության ո՞ր կետում և  $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$  դաշտի զրադինատը՝

ա) ուղղահայաց  $Oz$  առանցքին;

բ) զուգահեռ  $Oz$  առանցքին;

զ) հավասար զրոյի:

4058. Տրված է  $u = \ln \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$  ( $a, b, c \in R$ ) սկայարդաշտությունը:

Դաշտությունը:  $\Omega^0$  կեսաներում է ճշմարիխ  $|\operatorname{grad} u| = 1$  հավասարությունը:

4059. Դաշտությունը  $A(1;2;2)$  և  $B(-3;1;0)$  կեսաներում  $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$  դաշտությունը գրաղիքաների կազմած անկյունը:

4060. Դիցուք  $f : R^2 \rightarrow R$  ֆունկցիան դիֆերենցելի է: Ապացուցել, որ ցանկացած  $u$  և  $v$  սկայարդաշտությունների համար

$$\operatorname{grad} f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u} \operatorname{grad} u + \frac{\partial f}{\partial v} \operatorname{grad} v:$$

4061. Դիցուք  $u$ -ն սկայարդաշտությունների մեջց ստալ, որ

ա)  $\operatorname{grad} u(M)$ -ը զուգահեռ է  $M \in R^3$  կետով անցնող  $u(x, y, z) = u(M)$  մակարդակի մակերևույթի նորմալին;

բ)  $e = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$  վեկտորի ուղղությամբ  $u$  դաշտությալ հավասար է  $\langle \operatorname{grad} u, e \rangle$ -ի:

գ)  $e$ -ի ուղղությամբ  $u$  դաշտությալ կիմի մեծագույնը այն և միայն այն դեպքում, եթե  $e$ -ն համուղղված է  $\operatorname{grad} u$ -ին:

4062. Դաշտություն  $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$  ( $a, b, c \in R$ ) սկայարդաշտությալ ածանցյալը  $M(x, y, z)$  կետում,  $r = OM$  շառավիղ-վեկտորի ուղղությամբ: Ի՞նչ պայմանի դեպքում այդ ածանցյալը հավասար կիմի գրադիենտի մեծությամբ:

4063. Դիցուք  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  և  $u = \frac{1}{r}$ : Դաշտությունը  $u$  դաշտությալ  $I = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$  միավոր վեկտորի ուղղությամբ:

4064. Դիցուք  $u = u(x, y, z)$ -ը և  $v = v(x, y, z)$ -ը սկայարդաշտություններ են: Դաշտությունը  $u$  դաշտությունը  $v$  ածանցյալը  $\operatorname{grad} v$ -ի ուղղությամբ:

4065. Դիցուք  $f : R \rightarrow R$  ֆունկցիան դիֆերենցելի է,  $r$ -ը  $(x, y, z) \in R^3$  կետի շառավիղ-վեկտորն է և  $r = |\mathbf{r}|$ : Ապացուցել, որ  $\nabla f(r) = f'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$ :

**4066.** Դիցուք  $f: R \rightarrow R^3$  և  $g: R \rightarrow R^3$  ֆունկցիաները դիֆերենցելի են,  $\mathbf{r}$ -ը  $(x; y; z) \in R^3$  կետի շառավիղ-վեկտորն է,  $r = |\mathbf{r}|$ : Ապացուցել, որ

$$\text{ա) } \nabla \langle f(r), \mathbf{r} \rangle = f(r) + \langle f'(r), \mathbf{r} \rangle \frac{\mathbf{r}}{r};$$

$$\text{բ) } \nabla \langle f(r), g(r) \rangle = (\langle f'(r), g(r) \rangle + \langle f(r), g'(r) \rangle) \frac{\mathbf{r}}{r};$$

**4067.** Դիցուք  $D$ -ն  $R^3$ -ում ուսուցիկ ախրույթ է, իսկ  $u$ -ն՝  $D$ -ի վրա սկալյար դաշտ: Ապացուցել, որ եթե  $|\operatorname{grad} u| \leq M$ , ապա ցանկացած  $A, B \in D$  կետերի համար

$$|u(A) - u(B)| \leq M|A - B|:$$

**4068.** Դիցուք  $\mathbf{a}$ -ն և  $\mathbf{b}$ -ն վեկտորական դաշտեր են,  $u$ -ն սկալյար դաշտ է,  $\mathbf{c} \in R^3$  և  $\lambda, \mu \in R$ : Ապացուցել, որ

$$\text{ա) } \operatorname{div}(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) = \lambda \operatorname{div} \mathbf{a} + \mu \operatorname{div} \mathbf{b};$$

$$\text{բ) } \operatorname{div}(u \mathbf{c}) = \langle \mathbf{c}, \operatorname{grad} u \rangle;$$

$$\text{գ) } \operatorname{div}(u \mathbf{a}) = u \operatorname{div} \mathbf{a} + \langle \mathbf{a}, \operatorname{grad} u \rangle;$$

$$\text{դ) } \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \Delta u \quad (\Delta -ն Լապլասի օպերատորն է):$$

**4069.** Գտնել արված  $A$  կետում  $\mathbf{a}$  վեկտորական դաշտի դիվերզիան.

$$\text{ա) } \mathbf{a} = x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}, \quad A(1;0;3);$$

$$\text{բ) } \mathbf{a} = \frac{-x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad A(3;4;5);$$

**4070.** Դիցուք  $\mathbf{a}$ -ն  $\Omega \subset R^3$  ախրույթում վեկտորական դաշտ է և  $M \in \Omega$ : Ապացուցել, որ

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{1}{v(D)} \iint_{\partial D} \langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle dS,$$

որտեղ  $D$ -ն  $\Omega$ -ում ախրույթ է և  $\overline{D} \subset \Omega$ ,  $M \in D$ ,  $\partial D$ -ն՝  $D$ -ի եզրը, վակ ողորկ մակերևույթ է,  $d = \operatorname{diam} D$ ,  $v(D)$ -ն  $D$ -ի ծավալն է,  $\mathbf{n}$ -ը՝  $\partial D$ -ի արտաքին միավոր նորմալը:

**4071.** Ապացուցել, որ վեկտորական դաշտի դիվերզիան կախված չէ դեկարտյան կոորդինատական համակարգի ընտրությունից:

**4072.** Դիցուք  $\mathbf{a}$ -ն և  $\mathbf{b}$ -ն վեկտորական դաշտեր են,  $u$ -ն՝ սկալյար դաշտ,  $\mathbf{c} \in R^3$  և  $\mu, \lambda \in R$ : Ապացուցել, որ

$$\text{w) } \operatorname{rot}(\mu \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}) = \mu \operatorname{rot} \mathbf{a} + \lambda \operatorname{rot} \mathbf{b};$$

$$\text{p) } \operatorname{rot}(u \mathbf{c}) = [\operatorname{grad} u, \mathbf{c}];$$

$$\text{q) } \operatorname{rot}(u \mathbf{a}) = u \operatorname{rot} \mathbf{a} + [\operatorname{grad} u, \mathbf{a}];$$

$$\text{r) } \operatorname{rot}[\mathbf{c}, \mathbf{a}] = \mathbf{c} \operatorname{div} \mathbf{a} - \langle \mathbf{c}, \nabla \rangle \mathbf{a}, \text{ որություն } \langle \mathbf{c}, \nabla \rangle \mathbf{a} = c^1 \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} + c^2 \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} + c^3 \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z};$$

$$\text{s) } \operatorname{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} - \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a} + \langle \mathbf{b}, \nabla \rangle \mathbf{a} - \langle \mathbf{a}, \nabla \rangle \mathbf{b};$$

$$\text{t) } \operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \langle \mathbf{b}, \operatorname{rot} \mathbf{a} \rangle - \langle \mathbf{a}, \operatorname{rot} \mathbf{b} \rangle:$$

4073. Հաշվել  $\operatorname{rot} \mathbf{a}(M_0)$ -ն, եթե

$$\text{w) } \mathbf{a} = xy\mathbf{i} + (2x + 3y - z)\mathbf{j} + (x^2 + z^2)\mathbf{k}, M_0(1;3;2);$$

$$\text{p) } \mathbf{a} = \frac{y}{z}\mathbf{i} + \frac{z}{x}\mathbf{j} + \frac{x}{y}\mathbf{k}, M_0(1;2;-2);$$

4074. Դիցուք  $\mathbf{a} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (y^2 + z^2)\mathbf{j} + (z^2 + x^2)\mathbf{k}$ : Հաշվել  $\operatorname{rot} \mathbf{a}(1;2;3)$  և  $\operatorname{rot} \mathbf{b}(1;1;-1)$  վեկտորների կազմած անկյունը:

4075. Դիցուք  $u$  -ն և  $v$  -ն սկալյար դաշտեր են: Ապացուցել, որ

$$\text{w) } \operatorname{div}[\nabla u, \nabla v] = 0;$$

$$\text{p) } \mathbf{a} = u \operatorname{grad} v \text{ և } \operatorname{rot} \mathbf{a} \text{ վեկտորները } \text{փոխուղղահայաց են:}$$

4076. Դիցուք  $u$  -ն սկալյար դաշտ է, իսկ  $\mathbf{a}$  -ն՝ վեկտորական: Սառուցել, որ

$$\text{w) } \operatorname{rot} \operatorname{grad} u = \mathbf{0}; \quad \text{p) } \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} = 0:$$

Հաշվել  $\mathbf{a}$  վեկտորական դաշտի հոսքը  $S$  մակերևույթով՝ արտաքին նորմալի ուղղությամբ (4077-4079).

$$4077. \mathbf{a} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}, S -ը  $x^2 + y^2 \leq p^2, 0 \leq z \leq q$  գլանի$$

$$\text{ա) կողմնային մակերևույթն է; բ) լրիվ մակերևույթն է:}$$

$$4078. \mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}, S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}:$$

4079.  $\mathbf{a} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}, S$  -ը  $x^2 + y^2 + z^2 = x$  հավասարումով արված սֆերան է:

4080. Դիցուք  $\mathbf{a}$  -ն վեկտորական դաշտ է  $\Omega$  ակրույքում,  $G$  -ն  $\Omega$ -ում ակրույք է, որի եզրը՝  $\partial G$  -ն, ողորկ մակերևույթ է և  $\partial G \subset \Omega$ : Ապացուցել, որ  $\operatorname{rot} \mathbf{a}$  -ի հոսքը  $\partial G$  մակերևույթով արտաքին նորմալի ուղղությամբ հավասար է զրոյի:

Գտնել  $L$  կորուկ  $\mathbf{a}$  վեկտորական դաշտի աշխատանքը ( $\mathbf{a}$  -ի գծային ինտեգրալը) (4081-4083).

$$4081. \mathbf{a} = \frac{1}{y}\mathbf{i} + \frac{1}{z}\mathbf{j} + \frac{1}{x}\mathbf{k}, L$$
 -ը  $M(1;1;1)$  կետը  $N(2;4;8)$  կետին միացնող հաստվածն է:

4082.  $\mathbf{a} = e^{y-z}\mathbf{i} + e^{z-x}\mathbf{j} + e^{x-y}\mathbf{k}$ ,  $L$ -ը  $O(0;0;0)$  կետը  $M(1;3;5)$  կեաին միացնող հասկածն է:

4083.  $\mathbf{a} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ ,  $L$ -ը  $A(\alpha;0;0)$  կետը  $B(\alpha;0;2\pi\beta)$  կեաին միացնող.

ա)  $x = \alpha \cos t$ ,  $y = \alpha \sin t$ ,  $z = \beta t$  կորն է;

բ) հասկածն է:

Հանդիսանո՞ւմ է արդյոք  $\mathbf{a}$ -ն պոտենցիալ դաշտ:

Դանել արված  $L$  կորով  $\mathbf{a}$  վեկտորական դաշտի շրջապատճեռը (պատճեռը,  $(0;0;0)$ ) կեաից նայելիս, կատարվում է ժամացույցի սլաքի շարժմանը հակառակ ուղղությամբ) (4084-4085).

4084.  $\mathbf{a} = z^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$ ,  $L = \{(x; y; z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 1\}$ :

4085.  $\mathbf{a} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ,  $L = \{(x; y; z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0\}$ :

4086. Դանել  $\mathbf{a} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$  վեկտորական դաշտի շրջապատճեռը  $z = 0$  հարթության մեջ զանգող կատը առ կատը ողորկ, պարզ, փակ  $L$  կորով, որով սահմանափակված սիլույթի մակերեսը  $S$  է:

Համոզվել, որ  $\mathbf{a}$ -ն պոտենցիալ դաշտ է և զանել նրա պոտենցիալը (4087-4088).

4087.  $\mathbf{a} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}$ :

4088.  $\mathbf{a} = (y+z)\mathbf{i} + (z+x)\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$ :

Ստուգել սոլենիդայի հաշտություն է արդյոք  $\mathbf{a}$  դաշտը (4089-4091).

4089.  $\mathbf{a} = x^2yz\mathbf{i} + xy^2z\mathbf{j} - xyz^2\mathbf{k}$ :

4090.  $\mathbf{a} = xy\mathbf{k}$ :

4091.  $\mathbf{a} = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2 + y^2} + xy\mathbf{k}$ :

4092. Դիցուր  $G \subset R^3$  միակապ սիլույթում  $\mathbf{a}$  վեկտորական դաշտը բավարարում է  $\text{rot } \mathbf{a} = \mathbf{0}$  և  $\text{div } \mathbf{a} = 0$  պայմաններին: Ապացուցել, որ  $\mathbf{a}$ -ն պոտենցիալ դաշտ է և որ նրա պոտենցիալը  $G$ -ում հարմոնիկ ֆունկցիա է:

$$\mathbf{a} = -\frac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{j}, \quad 0 < x^2 + y^2 < 1 \quad \text{դաշտի օրինակով համոզվել, որ աիրույթի միակապությունն այսաւել էական է:}$$

Q

4093. Դիցուր՝  $\varphi \in C^1(R)$  և  $AmB$ -ն  $A(x_1; y_1)$ ,  $B(x_2; y_2)$  կետերը միացնող ողորկ կոր է, որը չի հասկում  $AB$  հասկածի հետ: Հաշվել

$$\int_{AmB} [\varphi(y)e^x - my] dx + [\varphi'(y)e^x - m] dy$$

կորագիծ ինսեգրալը, եթե  $Amb$  կորով և  $AB$  հատվածով սահմանափակված աիրույքի մակերեսը  $S$  է:

**4094. Հաշվել**

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2}$$

ինսեգրալը, եթե  $X = ax + by$ ,  $Y = cx + dy$  ( $ad - bc \neq 0$ ) և  $L$  պարզ, փակ կորով սահմանափակված աիրույքը պարունակում է  $(0;0)$  կետը:

**4095. Հաշվել** նախորդ խնդրում առաջադրված  $L$  կորով  $I$  ինսեգրալը, եթե  $X = \varphi(x, y)$ ,  $Y = \psi(x, y)$ , ընդ որում  $\varphi(x, y) = 0$  և  $\psi(x, y) = 0$  կորերը  $L$ -ի ներսում ունեն հատման  $(x_i; y_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) պարզ կետեր:

**4096. Ապացուցել**, որ եթե  $L$ -ը փակ կոր է, իսկ  $\mathbf{v} - \mathbf{n}$  ցանկացած վեկտոր, ապա

$$\int_L \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle ds = 0,$$

որտեղ  $\mathbf{n}$ -ը  $L$ -ի արտաքին միավոր նորմալն է:

**4097. Դիցուք**  $L$  պարզ, փակ կորով սահմանափակված աիրույքի մակերեսը  $P$  է: Հաշվել

$$\int_L [x \langle \mathbf{n}, \mathbf{i} \rangle + y \langle \mathbf{n}, \mathbf{j} \rangle] ds - \underline{\underline{0}},$$

որտեղ  $\mathbf{n}$ -ը  $L$ -ի արտաքին միավոր նորմալն է:

**4098. Հաշվել**

$$U(x, y) = \int_L \ln \frac{1}{r} ds \quad \left( r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} \right) \quad \text{ինսեգրալը, եթե } L \text{-ը}$$

$\xi^2 + \eta^2 = R^2$  շրջանագիծն է:

**4099. Հաշվել** Դառնայի կորագիծ ինսեգրալ՝

$$u(x, y) = \int_L \frac{\langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle}{|\mathbf{r}|^2} ds - \underline{\underline{0}},$$

որտեղ  $\mathbf{r}$ -ը  $A(x, y)$  կետը  $L$  պարզ, փակ, ողորկ կորի  $(\xi; \eta)$  վովովսական կետին միացնող վեկտորն է, իսկ  $\mathbf{n}$ -ը՝  $(\xi; \eta)$  կետում  $L$ -ի արտաքին միավոր նորմալը:

**4100. Ապացուցել**, որ  $u$ -ն  $D \subset R^2$  աիրույքում հալմոնիկ է այն և միայն այն դեպքում, եթե  $D$ -ում ընկած ցանկացած  $L$  ողորկ, փակ կորի համար

$$\int_L \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds = 0,$$

որստեղ  $\mathbf{n}$ -ը  $L$ -ի յուրաքանչյուր կեսուում արտաքին միավոր նորմալն է:

**4101.** Դիցուք  $D$ -ն  $R^2$ -ում  $L$  ողորկ կորով սահմանափակված տիրույթ է,  $G$  ախրույթը պարունակում է  $\overline{D}$ -ն և  $u \in C^2(G)$ : Ապացուցել

$$\iint_D \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = - \iint_D u \Delta u dx dy + \int_L u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds$$

բանաձևը, որստեղ  $\Delta$ -ն Լապլասի օպերատորն է, իսկ  $\mathbf{n}$ -ը՝  $L$ -ի արտաքին միավոր նորմալը:

**4102.** Դիցուք  $D$ -ն  $R^2$ -ում  $L$  ողորկ կորով սահմանափակված տիրույթ է: Ապացուցել, որ  $G \supset \overline{D}$  ախրույթում հարմոնիկ ֆունկցիան  $D$ -ում միարժեքորեն վերականգնվում է  $L$ -ի վրա ընդունած իր արժեքներով:

**4103.** Ապացուցել Դրինի երկրորդ բանաձևը.

$$\iint_D \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dx dy = \int_L \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} & \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \\ u & v \end{vmatrix} ds,$$

որստեղ  $D$ -ն  $R^2$ -ում  $L$  ողորկ կորով սահմանափակված տիրույթ է,  $u$ -ն և  $v$ -ն  $\overline{D}$ -ում պարունակող ախրույթում երկու անգամ անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են, իսկ  $\mathbf{n}$ -ը  $L$  կորի արտաքին միավոր նորմալն է:

**4104.** Դիցուք  $D$ -ն  $R^2$ -ում  $L$  կորով սահմանափակված տիրույթ է, իսկ  $u$ -ն՝  $G \supset \overline{D}$  ախրույթում հարմոնիկ ֆունկցիա: Դրինի երկրորդ բանաձևի միջոցով և ֆունկցիայի համար սաւանալ

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_L \left( u \frac{\partial \ln r}{\partial \mathbf{n}} - \ln r \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) ds$$

ներկայացումը, որստեղ  $\mathbf{n}$ -ը  $L$ -ի արտաքին միավոր նորմալն է, իսկ  $r$ -ը՝  $(x, y)$  կետի և  $L$  կորի  $(\xi, \eta)$  վովովական կետի հեռավորությունը:

**4105.** Դիցուք  $u(x, y)$ -ը  $G$  ախրույթում հարմոնիկ ֆունկցիա է: Ապացուցել միջին արժեքի հետևյալ թերեմը. ցանկացած  $B((x_0, y_0), R) \subset G$  շրջանի համար

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B} u(x, y) ds :$$

**4106.** Դիցուք  $D$ -ն  $R^2$ -ում սահմանափակ ախրույթ է: Ապացուցել, որ  $G \supset \overline{D}$  ախրույթի վրա հարմոնիկ և նույնարար հաստատունից աարեք ֆունկցիան  $D$ -ի կեսերում չի կարող ընդունել մեծագույն կամ վորուագույն արժեքներ:

**4107. Հաշվել**

$$F(t) = \iint_{x+y+z=t} f(x, y, z) ds$$

մակերևույթային ինստեգրալը, որտեղ

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2 - z^2, & \text{եթե } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \\ 0, & \text{եթե } x^2 + y^2 + z^2 > 1: \end{cases}$$

**4108. Հաշվել**

$$F(t) = \iint_{x+y+z=t^2} f(x, y, z) ds$$

մակերևույթային ինստեգրալը, որտեղ

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{եթե } z \geq \sqrt{x^2 + y^2}, \\ 0, & \text{եթե } z < \sqrt{x^2 + y^2}: \end{cases}$$

**4109. Հաշվել**

$$F(x, y, z, t) = \iint_P f(\xi, \eta, \zeta) ds$$

մակերևույթային ինստեգրալը, որտեղ  $P$ -ն  $(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = t^2$  սֆերան է,

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 < a^2, \\ 0, & \text{եթե } \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \geq a^2, \end{cases}$$

և  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > a > 0:$

**4110.** Ապացուցել, որ եթե  $P$ -ն պարզ, փակ մակերևույթ է, և -ը՝ ցանկացած հաստատուն վեկտոր, իսկ  $\mathbf{n}$  -ը  $P$ -ի արտաքին միավոր նորմալը, ապա

$$\iint_P \langle \mathbf{n}, \mathbf{e} \rangle dS = 0,$$

որտեղ  $\mathbf{n}$  -ը արտաքին նորմալի միավոր վեկտորն է:

**4111.** Ապացուցել բանաձևը.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x, y, z, t) dx dy dz \right\} = \\ = \iint_{x^2+y^2+z^2 = t^2} f(x, y, z, t) dS + \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} \frac{\partial f}{\partial t} dx dy dz \quad (t > 0): \end{aligned}$$

4112. Դիցուք  $P$ -ն  $V$  մարմինը սահմանափակող փակ, ողորկ մակերևոյթ է,  $\mathbf{n}$ -ը՝  $(\xi; \eta; \zeta)$  կետում  $P$ -ի արտաքին միավոր նորմալը,  $\mathbf{r}$ -ը՝  $(x; y; z)$  կետը  $(\xi; \eta; \zeta)$  կետին միացնող վեկտորը: Ապացուցել բանաձեռ.

$$\iiint_V \frac{1}{r} d\xi d\eta d\zeta = \frac{1}{2} \iint_P \frac{\langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle}{|\mathbf{r}|} dS$$

4113. Հաշվել Դառնի մակերևութային ինսեզրալը.

$$\iint_P \frac{\langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle}{|\mathbf{r}|^3} dS$$

որտեղ  $P$ -ն պարզ, փակ, ողորկ մակերևոյթ է,  $\mathbf{n}$ -ը՝  $(\xi; \eta; \zeta)$  կետում  $P$ -ի արտաքին միավոր նորմալը,  $\mathbf{r}$ -ը՝  $(x; y; z)$  կետը  $(\xi; \eta; \zeta)$  կետին միացնող վեկտորը: Դիտարկել երկու դեպք.  $P$ -ով սահմանափակված տիրույթը

ա) պարունակում է  $(x; y; z)$  կետը;

բ) չի պարունակում  $(x; y; z)$  կետը:

4114. Դիցուք  $P$  ողորկ մակերևոյթը  $V$  սահմանափակ մարմնի եզրն է,  $G$  աիրույթը պարունակում է  $\bar{V}$ -ն և  $u \in C^2(G)$ : Ապացուցել, որ

$$\text{ա) } \iint_P \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS = \iiint_V \Delta u dx dy dz;$$

$$\text{բ) } \iint_P u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS = \iiint_V \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz + \iiint_V u \Delta u dx dy dz$$

բանաձեռը, որտեղ  $\Delta$ -ն Լապլասի օպերատորն է,  $\mathbf{n}$ -ը՝  $P$ -ի արտաքին միավոր նորմալը:

4115. Ապացուցել Դրինի երկրորդ բանաձեռ.

$$\iiint_V \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dx dy dz = \iint_P \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} & \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \\ u & v \end{vmatrix} dS,$$

որտեղ  $P$ -ն  $V \subset R^3$  աիրույթի ողորկ եզրն է,  $\mathbf{n}$ -ը՝  $P$ -ի արտաքին միավոր նորմալը, իսկ  $u$ -ն և  $v$ -ն  $G \supset \bar{V}$  աիրույթում երկու անգամ անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են:

4116. Դիցուք  $V$ -ն ողորկ սահմանափակված աիրույթ է: Ապացուցել, որ եթե  $u$ -ն  $G \supset \bar{V}$  աիրույթում հարմոնիկ է, ապա ճշմարիս են հետևյալ բանաձեռը.

$$\text{ա) } \iint_{\partial V} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS = 0;$$

$$\text{բ) } \iiint_V \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz = \iint_{\partial V} u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS,$$

որսեղ  $\mathbf{n}$ -ը  $\partial V$ -ի արտաքին միավոր նորմալն է:

Օգտվելով բ) բանաձևից, ապացուցել, որ հարմոնիկ ֆունկցիան միարժեք վերականգնվում է ափրոյթի եզրի վրա ընդունած իր արժեքներով:

4117. Դիցուք  $V$ -ն  $R^3$ -ում վակ, ողորկ մակերևույթով սահմանավակված ափրոյթ է: Ապացուցել, որ եթե  $u$ -ն  $G \supset \bar{V}$  ափրոյթում հարմոնիկ է, ապա

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial V} u \frac{\langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle}{|\mathbf{r}|^3} + \frac{1}{|\mathbf{r}|} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS,$$

որսեղ  $\mathbf{r}$ -ը  $V$ -ի  $(x, y, z)$  կետը  $P$ -ի  $(\xi, \eta, \zeta)$  վովոխական կետին միացնող վեկտորն է,  $\mathbf{n}$ -ը՝  $(\xi, \eta, \zeta)$  կետում  $\partial V$ -ի արտաքին նորմալը:

4118. Դիցուք  $u$ -ն  $G \subset R^3$  ափրոյթում հարմոնիկ ֆունկցիա է և  $\overline{B}(\mathbf{a}_0, r) \subset G$ : Ապացուցել միջին արժեքի հետևյալ թերենմը.

$$u(\mathbf{a}_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\partial B} u(x, y, z) dS,$$

4119. Դիցուք  $V$ -ն  $R^3$ -ում սիրոյթ է: Ապացուցել, որ  $V$ -ում հարմոնիկ և հաստատունից տարբեր ֆունկցիան  $V$ -ի կետերում չի կարող ունենել մեծագույն կամ վորրագույն արժեք (մաքսիմումի սկզբունք):

# Պատասխաններ

## Գլուխ 10

2414.  $\frac{1}{1-q} : 2415. -\frac{1}{3} : 2416. \frac{3}{2} : 2417. 1 : 2418. \frac{1}{3} : 2420. 1-\sqrt{2} : 2421. \frac{1}{4}$

2422.  $\frac{\sin 2}{2} : 2423. \ln \frac{1}{2} : 2424. 1 : 2425. 1 : 2431.$  ա) Չուզամնաւ է; բ) զուզամնաւ է:

2432. ա) Տարամնաւ է; բ) տարամնաւ է: 2433. ա) Չուզամնաւ է; բ) զուզամնաւ է: 2434. ա) Տարամնաւ է; բ) տարամնաւ է: 2435.  $\Omega_2 : 2439.$  Չուզամնաւ է, եթի  $\alpha > 1$ ; տարամնաւ է, եթի  $\alpha \leq 1$ : 2440. Տարամնաւ է: 2441. Չուզամնաւ է: 2442. Տարամնաւ է: 2443. Չուզամնաւ է: 2444. Չուզամնաւ է: 2445. Տարամնաւ է: 2446. Չուզամնաւ է: 2447. Չուզամնաւ է: 2448. Չուզամնաւ է: 2449. Չուզամնաւ է, եթի  $q > p+1$ ; տարամնաւ է, եթի  $q \leq p+1$ : 2450. Տարամնաւ է: 2451. Տարամնաւ է: 2452. Չուզամնաւ է: 2453. Տարամնաւ է: 2454. Տարամնաւ է: 2455. Չուզամնաւ է: 2456. ա) Չուզամնաւ է; բ) զուզամնաւ է: 2463. Չուզամնաւ է: 2464. Չուզամնաւ է: 2465. Չուզամնաւ է: 2466. Չուզամնաւ է: 2467. Չուզամնաւ է: 2468. Չուզամնաւ է: 2469. Չուզամնաւ է: 2470. Չուզամնաւ է: 2471. Չուզամնաւ է: 2472. Չուզամնաւ է: 2473. Չուզամնաւ է: 2474. Չուզամնաւ է: 2475. ա) Չուզամնաւ է, եթի  $\alpha > 1$ ; տարամնաւ է, եթի  $\alpha \leq 1$ ; բ) տարամնաւ է: 2476. ա) Չուզամնաւ է; բ) զուզամնաւ է: 2477. ա) Չուզամնաւ է, եթի  $\alpha > 1$ ; տարամնաւ է, եթի  $\alpha \leq 1$ ; բ) տարամնաւ է: 2478. ա) Չուզամնաւ է, եթի  $\alpha > 1$ ; տարամնաւ է, եթի  $\alpha \leq 1$ ; բ) զուզամնաւ է: 2489.  $\Omega_2 : 2490.$  Բացարձակ զուզամնաւ է, եթի  $p > 1$ ; պայմանական զուզամնաւ է, եթի  $0 < p \leq 1$ : 2491. Բացարձակ զուզամնաւ է: 2492.

Պայմանական զուզամնաւ է: 2493. Բացարձակ զուզամնաւ է, եթի  $\alpha > 1$ ; պայմանական զուզամնաւ է, եթի  $\alpha \leq 1$ : 2494. ա) Չուզամնաւ է; բ) տարամնաւ է; գ) կարող է լինել և զուզամնաւ, և՝ տարամնաւ: 2494.1. ա) Չուզամնաւ է, եթի  $\alpha > 0,5$ ; տարամնաւ է, եթի  $\alpha \leq 0,5$ ; բ) զուզամնաւ է; գ) զուզամնաւ է; դ) զուզամնաւ է; ե) տարամնաւ է; գ) զուզամնաւ է; է) զուզամնաւ է; ը) զուզամնաւ է; թ) զուզամնաւ է; ժ) զուզամնաւ է; ժա) տարամնաւ է; ժթ) զուզամնաւ է: 2510. Տարամիւում է զրոյի: 2511. Տարամնաւ է: 2512. Տարամիւում է զրոյի: 2513. Չուզամնաւ է: 2514. Տարամիւում է զրոյի: 2515. Չուզամնաւ է, եթի  $p > 1$ : 2516. Չուզամնաւ է: 2517. Չուզամնաւ է: 2518. Չուզամնաւ է: 2519. Չուզամնաւ է, եթի  $|x| < 1$ : 2520.  $3 : 2521. \frac{q}{(1-q)^2} : 2522. \frac{1}{k} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} \right) : 2523. -\frac{2}{7} : 2528.$  ա)

Կարող է և զուզամիւել, և՝ տարամիւել; բ) տարամնաւ է: 2529. ա) Չուզամնաւ է; բ) կարող է լինել ինչպես զուզամնաւ, այնպես էլ տարամնաւ: 2533. Չուզամնաւ

- է: 2534. Զուգամես է: 2542. Զուգամես է, եթիւ  $a > e$ : 2543. Զուգամես է, եթիւ  $p > 1,5$ : 2544. Զուգամես է, եթիւ  $\frac{p}{2} + q > 1$ : 2545. Զուգամես է, եթիւ  $p + q > 1$ : 2546. Զուգամես է, եթիւ  $q > p$ : 2547. Զուգամես է, եթիւ  $\alpha(q - p) > 1$ : 2548. Զուգամես է: 2549. Զուգամես է, եթիւ  $\gamma > \alpha + \beta$ : 2551. Զուգամես է: 2552. Տարամես է: 2566. Զուգամես է, եթիւ  $a = \frac{1}{2}$ : 2567. Զուգամես է: 2568. Զուգամես է, եթիւ  $\alpha > 2$ : 2569. Զուգամես է: 2570. Զուգամես է, եթիւ  $c = 0, \frac{a}{d} < -1$ : 2571. Զուգամես է, եթիւ  $a^b > e$  և  $c = 0$  կամ  $a^c > 1$ : 2572. Տարամես է: 2573. Տարամես է: 2574. Զուգամես է: 2575. Տարամես է: 2576. Զուգամես է: 2577. Զուգամես է, եթիւ  $a = \sqrt{bc}$ : 2578. Զուգամես է, եթիւ  $\alpha < -1$ : 2579. Զուգամես է, եթիւ  $\alpha > \frac{1}{2}$ : 2580. Զուգամես է, եթիւ  $a + b > 1$ : 2581. Զուգամես է: 2582. Զուգամես է, եթիւ  $p > 1$  կամ  $p = 1, q > 1$ : 2583. Զուգամես է: 2584. Տարամես է: 2585. Զուգամես է: 2586. Զուգամես է: 2587. Տարամես է: 2588. Զուգամես է: 2589. Զուգամես է: 2590. Զուգամես է, եթիւ  $\alpha > 2$ : 2599.  $\frac{2}{9}$ : 2600.  $\frac{10}{7}$ : 2601.  $\ln 2$ : 2602. ա)  $\frac{3}{2} \ln 2$ ; բ)  $\frac{1}{2} \ln 2$ : 2604. Զուգամես է: 2605. Զուգամես է: 2606. Զուգամես է: 2607. Զուգամես է: 2608. Ոչ: 2609. Ոչ: 2613. Բացարձակ զուգամես է, եթիւ  $p > 1$ ; պայմանական զուգամես է, եթիւ  $\frac{1}{2} < p \leq 1$ : 2614. Բացարձակ զուգամես է, եթիւ  $|x - \pi k| < \frac{\pi}{4}$  ( $k \in Z$ ); պայմանական զուգամես է, եթիւ  $x = \pi k \pm \frac{\pi}{4}$ : 2615. Բացարձակ զուգամես է, եթիւ  $p > 1$ ; պայմանական զուգամես է, եթիւ  $0 < p \leq 1$ : 2616. Բացարձակ զուգամես է, եթիւ  $p > 2$ ; պայմանական զուգամես է, եթիւ  $1 < p \leq 2$ : 2617. Բացարձակ զուգամես է, եթիւ  $p > 1$ ; պայմանական զուգամես է, եթիւ  $\frac{1}{2} < p \leq 1$ : 2618. Բացարձակ զուգամես է: 2619. Բացարձակ զուգամես է, եթիւ  $\alpha > 1$ ; պայմանական զուգամես է, եթիւ  $0 < \alpha \leq 1$ : 2620. Բացարձակ զուգամես է, եթիւ  $\alpha > 1$ ; պայմանական զուգամես է, եթիւ  $0 < \alpha \leq 1$ : 2621. Բացարձակ զուգամես է, եթիւ  $p > 2$ ; պայմանական զուգամես է, եթիւ  $0 < p \leq 2$ : 2622. Բացարձակ զուգամես է, եթիւ  $p > 1$ ; պայմանական զուգա-

մեա է, եթիվ  $\frac{1}{2} < p \leq 1$ : 2623. Տարամեա է: 2624. Բացարձակ զուգամեա է, եթիվ  $\alpha \geq 0$ , պայմանական զուգամեա է, եթիվ  $-1 < \alpha < 0$ : 2625. Բացարձակ զուգամեա է, եթիվ  $q > p + 1$ ; պայմանական զուգամեա է, եթիվ  $p < q \leq p + 1$ : 2626. Բացարձակ զուգամեա է, եթիվ  $p > 1$ ,  $q > 1$ , պայմանական զուգամեա է, եթիվ  $0 < p = q \leq 1$ : 2627. Բացարձակ զուգամեա է, եթիվ  $p > 1$ ; պայմանական զուգամեա է, եթիվ  $p = 1$ : 2628. Բացարձակ զուգամեա է, եթիվ  $p > 1$ ; պայմանական զուգամեա է, եթիվ  $p = 1$ : 2629. Բացարձակ զուգամեա է, եթիվ  $p > 1$ ,  $q > 1$ , պայմանական զուգամեա է, եթիվ  $0 < p = q \leq 1$ : 2640.  $1 + 2\sqrt{2}$ : 2641.

$\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3}$ : 2642.  $-2$ : 2647. ա)  $\Omega_\Sigma$ ; բ) այլ; գ) այլ; դ) այլ: 2648. Զուգամեա է:

2649. Զուգամեա է, եթիվ  $|x| < 2$ : 2650. Զուգամեա է, եթիվ  $|x| < 1$ ; եթիվ  $x = 1$ ,

զուգամեա է, եթիվ  $p > 1$ ,  $q > \frac{1}{2}$ ; եթիվ  $x = -1$ , զուգամեա է, եթիվ  $p > \frac{1}{2}$ ,  $q > \frac{1}{2}$ :

2651. Զուգամեա է, եթիվ  $x \neq \pi k$ ,  $k \in Z$ : 2656. Պայմանական զուգամեա է:

2657. Բացարձակ զուգամեա է, եթիվ  $p > 1$ ; պայմանական զուգամեա է,

եթիվ  $\frac{1}{2} < p \leq 1$ : 2658. Տարամեա է: 2659. Տարամեա է: 2664. ա) 1; բ)  $e/2$ ; գ) 1:

2665. Զուգամեա է: 2666. Զուգամեա է: 2667. Զուգամեա է, եթիվ  $\alpha > 2$ : 2668.

Զուգամեա է, եթիվ  $\alpha > 2$ : 2677. ա)  $\Omega_\Sigma$ ; բ) այլ; գ)  $\Omega_\Sigma$ ; դ)  $\Omega_\Sigma$ : 2688.  $\Omega_\Sigma$ :

## Գլուխ 11

2722. ա)  $f(x) = 0$ ,  $x \in (-1; 1)$ ,  $f(1) = 1$ ; բ)  $f(x) = 0$ ,  $x \in R \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k : k \in Z \right\}$ ,

$f\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = 1$ ,  $k \in Z$ ; գ)  $f(x) = 0$ ,  $x \in R \setminus \{\pm 1\}$ ,  $f(1) = 1$ : 2723. ա)

$f(x) = x^2$ ; բ)  $f(x) = 2x^4$ : 2724. ա)  $f(x) = 0$ ,  $x \in [-1; 1]$ ,  $f(x) = \frac{\pi}{2}(x+1)$ ,

$x \in (1, +\infty)$ ,  $f(1) = \frac{\pi}{2}$ ; բ)  $f(0) = 0$ : 2725.  $f(x) = e^{-x^2}$ : 2726.  $f(x) = 0$ ,  $x \in$

$\in (2\pi k; \pi + 2\pi k)$ ,  $k \in Z$ : 2727. ա)  $f(x) = x$ ; բ)  $f(x) = 1$ ,  $x \neq 0$ : 2728. ա)

$f(x) = 0$ ,  $x \in (0; +\infty)$ ; բ)  $f(x) = 0$ ,  $x \in R_+$ : 2729. ա)  $f(x) = 1$ ,  $x \in [-1; 1]$ ,

$f(x) = x^2$ ,  $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ ; p)  $f(x) = 1$ ,  $x \in R_+$ ,  $f(x) = e^{-x}$ ,  $x \in (-\infty; 0)$ :

2730.ш)  $f(x) = \ln x$ ; p)  $f(x) = \frac{\ln x}{2}$ ,  $x > 0$ ,  $f(0) = 0$ : 2731.ш) Բացարձակ զուգամես է  $(-1; 1)$ -ում; p) բացարձակ զուգամես է  $R \setminus [-1; 1]$ -ում; q) բացարձակ զուգամես է  $R \setminus [-1; 1]$ -ում: 2732.

ա) Բացարձակ զուգամես է  $\left(\frac{1}{e}; e\right)$ -ում; p)

զուգամես է  $[-\sqrt{2}; 0) \cup (0; \sqrt{2}]$ -ում, բացարձակ զուգամես է  $(-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \setminus \{0\}$ -ում; q) բացարձակ զուգամես է  $(-\infty; 0)$ -ում: 2733.

ա) Բացարձակ զուգամես է, եթե  $|x| > 1$ ; p) բացարձակ զուգամես է  $R \setminus \{\pm 1\}$ -ում: 2734.

ա) Բացարձակ զուգամես է  $(0; +\infty)$ -ում; p) բացարձակ զուգամես է  $R_+$ -ում: 2735.

ա) Բացարձակ զուգամես է  $R$ -ում; p) բացարձակ զուգամես է  $(-2; 2)$ -ում: 2736.

ա) Բացարձակ զուգամես է  $R_+ \cup \{\pi k : k \in Z_+\}$ ; p) զուգամես է  $\bigcup_{k \in Z} [2\pi k, \pi + 2\pi k]$ -ում,

բացարձակ զուգամես է  $\bigcup_{k \in Z} (2\pi k, \pi + 2\pi k)$ -ում: 2737.

ա) Բացարձակ զուգամես է  $R$ -ում; p) բացարձակ զուգամես է  $R$ -ում: 2738.

ա) Բացարձակ զուգամես է  $(-\sqrt{e-2}; \sqrt{e-2})$ -ում; p) զուգամես է  $(-\infty; -1] \cup (1; +\infty)$ -ում, բացարձակ զուգամես է  $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ -ում: 2739.

ա) Պայմանական զուգամես է  $R$ -ում; p) պայմանական զուգամես է  $R \setminus \{\pi k\}$ -ում,  $k \in Z$ : 2740.

ա) Բացարձակ զուգամես է  $(-0,5; 3,5)$ -ում; p) զուգամես է  $R \setminus \{1\}$ -ում, բացարձակ զուգամես է  $R \setminus \{\pm 1\}$ -ում: 2751.

ա) Հավասարաշափ զուգամես է; p) հավասարաշափ զուգամետ չէ: 2752. Հավասարաշափ զուգամետ չէ: 2753.

ա) Հավասարաշափ զուգամետ է; p) հավասարաշափ զուգամետ չէ: 2754. ա) Հավասարաշափ զուգամետ է; p) հավասարաշափ զուգամետ չէ: 2755. ա) Հավասարաշափ զուգամետ է; p) հավասարաշափ զուգամետ չէ: 2756. ա) Հավասարաշափ զուգամետ է; p) հավասարաշափ զուգամետ չէ: 2761. ա) Հավասարաշափ զուգամետ է; p) Հավասարաշափ զուգամետ չէ: 2762. ա) Հավասարաշափ զուգամետ է; p) հավասարաշափ զուգամետ չէ: 2763. ա) Հավասարաշափ զուգամետ է; p) հավասարաշափ զուգամետ չէ: 2764. ա) Հավասարաշափ զուգամետ է; p) հավասարաշափ զուգամետ չէ: 2765. ա) Հավասարաշափ զուգամետ է; p) հավասարաշափ զուգամետ չէ: 2766. Հավասարաշափ զուգամետ է: 2767. Հավասարաշափ զուգամետ չէ: 2768. Հավասարաշափ զուգամետ չէ: 2769. Անընդիհատ է: 2770. ա) Անընդիհատ է; p) խզվող է  $x = 1$  կետում: 2771.

Խզվող է  $x = 0$  կետում: 2772. Անընդիհատ է: 2776.  $\ln \sqrt{2}$ : 2777. 1: 2778. 1: 2779. 0,5: 2780. 0,5: 2784. ա)  $\Omega_2$ ; p)  $\omega_{\text{js}}$ : 2785. 0: 2786. 0: 2787. 2: 2788. 0:

2789.  $\frac{e}{e^2 - 1}$ : 2790. 1: 2793. w)  $-\ln(1-x)$ ,  $x \in [-1;1]$ ; p)  $(x-1)^{-2}$ ,  $x \in (-1;1)$ ;  
 q)  $2x \operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2)$ ,  $x \in [-1;1]$ ; n)  $2(1-x)^{-3}$ ,  $x \in (-1;1)$ : 2794. w)  $R=1$ ,  
 $(-1;1)$ ; p)  $R=1$ ,  $[-1;1]$ ; q)  $R=1$ ,  $(-1;1]$ ; n)  $R=1$ ,  $[-1;1]$ : 2795. w)  $R=\frac{1}{2}$ ,  
 $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ ; p)  $R=3$ ; (-3;3): 2796. w)  $R=0$ ,  $\{0\}$ ; p)  $R=\infty$ ,  $(-\infty; +\infty)$ : 2797.  
 $R=\frac{1}{3}$ ,  $\left[-\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ : 2798.  $R=3$ ,  $(0;6)$ : 2799.  $R=a$ ,  $(-a;a)$ : 2800.  $R=\frac{1}{a}$ ,  
 $\left[-\frac{1}{a}; \frac{1}{a}\right)$ : 2801.  $[0; +\infty)$ : 2802.  $(-\infty; -0,5) \cup (0,5; +\infty)$ : 2803.  $(-1; +\infty)$ : 2804.  
 $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k\right)$ ,  $k \in Z$ : 2806.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ ,  $x \in R$ : 2807.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ ,  $x \in R$ :  
 2808.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}$ ,  $x \in R$ : 2809.  $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}$ ,  $x \in R$ : 2810.  
 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{(2n)!} x^{2n}$ ,  $x \in R$ : 2811.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$ ,  $x \in R$ : 2812.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n-2)!}$ ,  
 $x \in R$ : 2813.  $\sum_{n=10}^{\infty} x^n$ ,  $x \in (-1;1)$ : 2814.  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$ ,  $x \in (-1;1)$ : 2815.  
 $x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(n-1)!} x^n$ ,  $x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ : 2816.  $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} x^{3n}$ ,  $x \in (-1;1)$ :  
 2817.  $2 - \frac{x^3}{12} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdots (3n-4)}{n! \cdot 3^n \cdot 2^{3n-1}} x^{3n}$ ,  $x \in (-2;2)$ : 2818.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n \cdot 10^n} +$   
 $+ \ln 10$ ,  $x \in (-10;10]$ : 2819.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ ,  $x \in (-1;1)$ : 2820.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - (-2)^n}{3} x^n$ ,  
 $x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ : 2821.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1 - (-1)^n}{4} x^n$ ,  $x \in (-1;1)$ : 2822.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+5}}{(2n+5)n!}$ ,  
 $x \in R$ : 2823.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot n!}$ ,  $x \in R$ : 2824.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}$ ,  $x \in R$ : 2825.

- $x + \frac{x^7}{14} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{n! 2^n (6n+1)} x^{6n+1}, \quad x \in [-1;1]: 2826. \quad x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(4n+1)2^n n!} x^{4n+1},$   
 $x \in [-1;1]: 2827. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{9n+1}}{9n+1}, \quad x \in (-1;1): 2828. \quad 0,2398, \quad 10^{-4} - \text{ի ճշտությամբ}: 2829. \quad 0,0314462, \quad 10^{-7} - \text{ի ճշտությամբ}: 2830. \quad 0,957, \quad 10^{-3} - \text{ի ճշտությամբ}: 2831. \quad 0,079, \quad 10^{-3} - \text{ի ճշտությամբ}: 2832. \quad \frac{3}{8} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 4x}{8}: 2833. \quad T_m(x):$   
 $2834. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)} \sin(2n-1)x; \quad \frac{\pi}{4}: 2835. \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2 \sin nx}{n}: 2836. \quad \frac{\pi}{2} -$   
 $- \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}: 2837. \quad \frac{2\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx: 2838. \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \times$   
 $\times \left( \frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n} \right) \sin nx: 2839. \quad \frac{2 \sin \pi p}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n \sin nx}{n^2 - p^2}: 2840. \quad \frac{2 \sin \pi p}{\pi} \times$   
 $\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2 + p^2} \sin nx: 2841. \quad 1 - \frac{1}{2} \cos x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - 1} \cos nx: 2842. \quad -\frac{\sin x}{2} +$   
 $+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^n n}{n^2 - 1} \sin nx: 2843. \quad \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}: 2844. \quad \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2 - 1}: 2846. \quad \frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{(4n^2 - 1)^2} \sin 2nx: 2847. \quad 2a + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2a}{\pi n} \sin \frac{\pi nx}{a}: 2848.$   
 $2sh1 \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos \pi nx - \pi n \sin \pi nx}{(\pi n)^2 + 1} \right): 2849. \quad \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} \cos 2nx: 2850.$   

Զուգամես է  $R_+$ -ում; բացարձակ զուգամես է  $(0;+\infty)$ -ում: 2851. Զուգամես է  $R \setminus \{1\}$ -ում; բացարձակ զուգամես է  $R \setminus \{\pm 1\}$ -ում: 2852. Բացարձակ զուգամես է  $(-1;1)$ -ում: 2853. Զուգամես է  $[-1;1]$ -ում, բացարձակ զուգամես է  $(-1;1)$ -ում: 2854. Բացարձակ զուգամես է  $(-1;1)$ -ում: 2855. Բացարձակ զուգամես է  $(1;+\infty)$ -ում: 2856. Բացարձակ զուգամես է  $R \setminus \{-1\}$ -ում: 2857.  $p > 1$  դեպքում բացարձակ զուգամես է, իսկ  $0 < p \leq 1$  դեպքում պայմանական զուգամես է: 2858. Բացարձակ զուգամես է  $\{2\} \cup (e;+\infty)$ -ում: 2859. Բացար-

$$\text{ճակ զուգամես} \ L \left( \frac{3-\sqrt{17}}{6}; \frac{1}{3} \right) \cup \left( \frac{2}{3}; \frac{\sqrt{17}+3}{6} \right) -\text{ում: } 2860. \ \text{Բացարձակ զուգա-}$$

$$\text{մես} \ L \ \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[ -\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{\pi}{6} + \pi k \right] -\text{ում: } 2861. \ \zeta \text{ավասարաշափ զուգամես} \ \xi: 2862.$$

$$\zeta \text{ավասարաշափ զուգամես} \ \xi: 2863. \text{ a) } \zeta \text{ավասարաշափ զուգամես} \ \xi; \text{ p) } \zeta \text{հա-} \\ \text{վասարաշափ զուգամես} \ \xi: 2864. \text{ a) } \zeta \text{ավասարաշափ զուգամես} \ \xi; \text{ p) } \zeta \text{հավա-} \\ \text{սարաշափ զուգամես} \ \xi: 2865. \zeta \text{ավասարաշափ զուգամես} \ \xi: 2866. \text{ a) } \zeta \text{ավա-} \\ \text{սարաշափ զուգամես} \ \xi; \text{ p) } \zeta \text{հավասարաշափ զուգամես} \ \xi: 2867. \zeta \text{ավասա-} \\ \text{րաշափ զուգամես} \ \xi: 2868. \text{ a) } \zeta \text{ավասարաշափ զուգամես} \ \xi; \text{ p) } \zeta \text{հավասա-} \\ \text{րաշափ զուգամես} \ \xi: 2869. \text{ a) } \zeta \text{ավասարաշափ զուգամես} \ \xi; \text{ p) } \zeta \text{հավասա-} \\ \text{րաշափ զուգամես} \ \xi: 2870. \zeta \text{ավասարաշափ զուգամես} \ \xi: 2871. \text{ a) } \zeta \text{ավասա-} \\ \text{րաշափ զուգամես} \ \xi; \text{ p) } \zeta \text{հավասարաշափ զուգամես} \ \xi: 2872. \text{ a) } \zeta \text{ավասարա-}$$

$$\text{շափառաշափ զուգամես} \ \xi: 2873. \text{ a) } \zeta \text{ավասարաշափ զուգամես} \ \xi; \text{ p) } \zeta \text{հա-} \\ \text{վասարաշափ զուգամես} \ \xi: 2874. \int_x^{x+1} f(t) dt: 2888.$$

$$\zeta \text{ավասարաշափ զուգամես} \ \xi: 2889. \zeta \text{ավասարաշափ զուգամես} \ \xi: 2890. \zeta \text{ա-} \\ \text{վասարաշափ զուգամես} \ \xi: 2891. \zeta \text{ավասարաշափ զուգամես} \ \xi: 2892. \zeta \text{ավա-} \\ \text{սարաշափ զուգամես} \ \xi: 2893. \zeta \text{ավասարաշափ զուգամես} \ \xi: 2894. \text{ a) } \zeta \text{ավա-} \\ \text{սարաշափ զուգամես} \ \xi; \text{ p) } \zeta \text{հավասարաշափ զուգամես} \ \xi: 2895. \text{ a) } \zeta \text{ավասա-} \\ \text{րաշափ զուգամես} \ \xi; \text{ p) } \zeta \text{հավասարաշափ զուգամես} \ \xi: 2902. \text{Անընդիհաս} \ \xi: \\ 2903. \text{Անընդիհաս} \ \xi: 2904. \text{Անընդիհաս} \ \xi: 2905. \text{Անընդիհաս} \ \xi: 2907. \Omega_\xi: 2913. \Omega_\xi:$$

$$2917. \alpha < 2: 2918. \text{Այս: } 2919. \text{Այս: } 2924. \ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}; \ arctgx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}; \ arcsinx = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}: 2925. (-4;4): 2926.$$

$$(-2;2]: 2927. \left( -\frac{1}{e}; \frac{1}{e} \right): 2928. (-1;1): 2929. [-1;1]: 2930. [-1;1]: 2931.$$

$$\left( -\frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right): 2932. (0;2]: 2933. (-1;1): 2934. (-1;1): 2937. 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{n!} x^n :$$

$$2938. 1 - \frac{3}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{(2n)!} - \frac{2}{(2n-2)!} + \frac{1}{(2n-4)!} \right) x^n : 2939. x +$$

$$+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} x^{2n+1}: 2940. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) x^n : 2941.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \frac{2}{n+1} x^{n+1}: 2942. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)!} x^{2n}: 2945. \left( -2; -\frac{1}{2} \right) \cup$$

$$\cup \left( \frac{1}{2}; 2 \right); \quad \frac{2x}{(2-x)^2} - \frac{2x}{(2x-1)^2} : \quad 2947. \quad -\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2 - 1} \cos 2nx :$$

$$2948. \quad \frac{a+b}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(a-b) \sin \frac{\pi n}{2}}{\pi n} \cos nx : \quad 2949. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} : \quad 2950.$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi nx}{n} : \quad 2951. \quad \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin(2n+1)x : \quad 2952.$$

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} : \quad 2953. \quad \left( \frac{1}{2p} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{p \cos nx}{n^2 - p^2} \right) \frac{2 \sin \pi p}{\pi} : \quad 2955.$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} : \quad 2956. \quad \frac{\pi}{2} \sin x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16n}{\pi(4n^2 - 1)^2} \sin 2nx : \quad 2957. \text{ w)$$

$$\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cos nx; \quad \text{p)} \quad 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx - \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}; \quad \text{q)}$$

$$\frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} : S_1 = \frac{\pi^2}{6}, \quad S_2 = \frac{\pi^2}{12}; \quad S_3 = \frac{\pi^2}{8} : 2958. \text{ w) 1; p)}$$

$$\frac{\pi^2}{3} - 3 : \quad 2961. \text{ w)} \quad f(-x) = f(x), \quad f(\pi - x) = -f(x); \quad \text{p)} \quad f(-x) = -f(x),$$

$$f(\pi - x) = f(x): \quad 2962. \text{ w)} \quad - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2}{(2n-1)^2} + \frac{8}{\pi} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3} \right) \cos(2n-1)x; \quad \text{p)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2(-1)^n}{(2n-1)^2} + \frac{8}{\pi} \frac{1}{(2n-1)^3} \right) \sin(2n-1)x : \quad 2963. \text{ w)} \quad a_n = \alpha_n, \quad b_n = -\beta_n; \quad \text{p)}$$

$$a_n = -\alpha_n, \quad b_n = \beta_n : \quad 2972. \quad \frac{\pi^2}{6} : \quad 2973. \text{ w)} \quad \frac{\beta(\pi - \beta)}{2}; \quad \text{p)} \quad \frac{\pi^2 - 3\pi\beta + 3\beta^2}{6} : \quad 2976.$$

$$\left\{ \frac{\pi k}{2^m} : m \in \mathbb{Z}_+, k \in \mathbb{Z} \right\} : \quad 2977. \quad \{0\} : \quad 2978. \quad \ln 2 : \quad 2979. \quad 0,5 : \quad 2980. \quad p! : \quad 2994. \quad \Omega_\Sigma :$$

$$2997. \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{\frac{n(n+1)}{2}} x^n}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} : \quad 3017. \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos nx}{n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} :$$

## Գլուխ 12

3030.  $\Omega_x$ : 3031. 7 : 3032. 23 : 3033. 5;2;7 : 3049.  $\Omega_x$ : 3050.  $\Omega_x$ : 3059. 0 : 3060. 3 : 3061.  $-5 : 3062. -17/4 : 3090.$  Օրինակ.  $\cos^2 x = p(x) - q(x)$ , որտեղ  $p(x) = \sin^2 x$ , եթե  $0 \leq x \leq \pi/2$ ,  $1 + \cos^2 x$ , եթե  $\pi/2 < x \leq \pi$ ;  $q(x) = -\cos 2x$ , եթե  $0 \leq x \leq \pi/2$ , 1, եթե  $\pi/2 < x \leq \pi$ : 3091. Օրինակ.  $\sin x = p(x) - q(x)$ , որտեղ  $p(x) = \sin x$ , եթե  $0 \leq x \leq \pi/2$ ,  $2 - \sin x$ , եթե  $\pi/2 < x \leq 3\pi/2$ ,  $4 + \sin x$ , եթե  $3\pi/2 < x \leq 2\pi$ ;  $q(x) = 0$ , եթե  $0 \leq x \leq \pi/2$ ,  $2 - 2 \sin x$ , եթե  $\pi/2 < x \leq 3\pi/2$ , 4, եթե  $3\pi/2 < x \leq 2\pi$ : 3092. Օրինակ.  $f(x) = p(x) - q(x)$ , որտեղ  $p(x) = x^2$ , եթե  $0 \leq x < 1$ , 2, եթե  $x = 1$ , 3, եթե  $1 < x \leq 2$ ;  $q(x) = 2x^2$ , եթե  $0 \leq x < 1$ , 2, եթե  $1 \leq x \leq 2$ : 3097. ա) 17/6; բ) 34/3; զ) 301/20: 3098.  $2 - \pi/2 : 3099. 2 - e^\pi - e^{-\pi} : 3100. 1 - \pi : 3101. 3/2 : 3119.$  ա)  $\Omega_x$ ; բ)  $\Omega_y$ : 3126.  $\alpha > \beta$  կամ  $\alpha = \beta \leq 0$ : 3127.  $f(x_0)$ -ն պետք է չզանվի  $f(x_0 - 0)$  և  $f(x_0 + 0)$  թվերի միջև: 3136.  $\sigma(a)$ -ն և  $\sigma(b)$ -ն համապատասխանաբար  $A$ -ով և  $B$ -ով փոխարինելիս ինստեգրալի արժեքը կվոխվի  $f(b)[B - \sigma(b)] - f(a)[A - \sigma(a)]$ -ով: 3144.  $\Omega_x$ :

## Գլուխ 13

3149. Այս: 3154.  $\Omega_x$ : 3158. ա)  $y \geq 0$  կիսահարթությունը; բ)  $|x| \leq 1$ ;  $|y| \geq 1$ ; գ)  $x^2 + y^2 \leq 1$  շրջանը; դ)  $x^2 + y^2 \leq 1$  շրջանի արտաքին մասը; ե)  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$  օղակը; զ)  $x \leq x^2 + y^2 < 2x$  լուսնյակը; է)  $x + y < 0$  կիսահարթությունը; ը)  $|y| \leq |x|$  ( $x \neq 0$ ) անկյունները; թ) սարածության չորս օկտանտները; ժ)  $x^2 + y^2 - z^2 = -1$  երկխոռոչ հիպերբոլիդի ներքին մասը: 3159. ա) Զուգահեռ ուղիղներ; բ) միակենարուն շրջանագծեր; զ) եթե  $z = 0$ ,  $y = \pm x$  ուղիղները, եթե  $z \neq 0$  հիպերբոլների ընտանիք; դ) զուգահեռ ուղիղներ; է)  $(0;0)$  գագարով ուղիղների փունջ, առանց  $Ox$  առանցքի; զ) էլիպսների ընտանիք; լ) առաջին և երրորդ քառորդներում ընկած հիպերբոլների ընտանիք; ը) Եթե  $z \neq -1$ , պարաբոլների ընտանիք; եթե  $z = -1$ ,  $Ox$  առանցքն առանց սկզբնակեսի: 3160. ա) Զուգահեռ հարթությունների ընտանիք; բ) միակենարուն գնդային մակերևույթների ընտանիք; զ) երկխոռոչ հիպերբոլիդների ընտանիք, եթե  $u < 0$ ; միախոռոչ հիպերբոլիդների ընտանիք, եթե  $u > 0$ ; կոն, եթե  $u = 0$ ;

դ) հարթությունների ընտանիք, առանց  $x - y + z = 0$  հարթության կետերի:

3162. ա)  $\ln 2; p) 1 : 3163.$  ա) 1;  $p) 1 : 3164.$  ա) 0;  $p) 0; q) 0; \eta) 0; t) e : 3165.$   
 ա) 1; 0;  $p) 1; 0 : 3166.$  ա)  $1/3; 1/2; p) 1/2; -1/2 : 3167.$  ա)  $-1; 1; p) -2/3;$   
 $1/2 : 3168.$  ա) 1; 0;  $p) 1/2; 1 : 3169.$   $\infty; 1 : 3173.$  0:  $\Omega_x: 3174.$   $\Omega_z: 3182.$   
 Անընդհատ է: 3183.  $(0;0)$  կետում ըստ  $x - h$  անընդհատ է, ըստ  $y - h$ ՝ խզվող:  
 3184. Անընդհատ է: 3185. Անընդհատ է: 3186. Խզվող է  $(R \setminus \{0\}) \times \{0\}$  և  
 $\{0\} \times (R \setminus \{0\})$  բազմությունների վրա:  $(R \setminus \{0\}) \times \{0\}$  բազմության կետերում ըստ  
 $x - h$  անընդհատ է, ըստ  $y - h$ ՝ խզվող;  $\{0\} \times (R \setminus \{0\})$  բազմության կետերում ըստ  
 $y - h$  անընդհատ է, ըստ  $x - h$ ՝ խզվող: 3187. Անընդհատ է: 3188. Խզվող է  $R \times \{0\}$  և  
 $\{0\} \times R$  բազմությունների վրա:  $(R \setminus \{0\}) \times \{0\} - h$  ( $\{0\} \times (R \setminus \{0\}) - h$ ) կետերում  
 ըստ  $x - h$  ( $y - h$ ) անընդհատ է, ըստ  $y - h$  ( $x - h$ )՝ խզվող;  $(0;0)$  կետում և ըստ  
 $x - h$  և ըստ  $y - h$  անընդհատ է: 3189.  $y = \pm x$  գծերի կետերում և ըստ  $x - h$  և ըստ  
 $y - h$ ՝ խզվող է: 3190. ա) Խզվող է  $(R \times Z) \cup (Z \times R)$  բազմության վրա:  
 $(R \setminus Z) \times Z$  ( $Z \times (R \setminus Z)$ ) բազմության կետերում ըստ  $x - h$  ( $y - h$ ) անընդհատ է,  
 ըստ  $y - h$  ( $x - h$ )՝ խզվող:  $Z \times Z - h$  կետերում և ըստ  $x - h$  և ըստ  $y - h$ ՝ խզվող է:  $p)$   
 Խզվող է և ըստ  $x - h$  և ըստ  $y - h$   $\{(x; y) : x + y \in Z\}$  բազմության կետերում:  
 3191. Ամենուրեք խզվող է:  $R \times I$  ( $I \times R$ ) բազմության կետերում ըստ  $x - h$   
 $(y - h)$  անընդհատ է: 3206. ա),  $p), q) \Omega_z: 3222.$  ա) 1;  $p) -1 : 3223.$  ա) 1;  $p) e^{-1} :$   
 3230. Հավասարաչափ անընդհատ են: 3274.  $\Omega_z:$

## Գլուխ 14

3283. ա)  $f'_x(1,1) = 1, f'_y(1,1) = 0; p) f'_x(1,1) = \pi, f'_y(1,1) = 4; q) f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0; \eta) f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$  3284. ա)  $f'_x = \sin(x+y) + x \cos(x+y),$   
 $f'_y = x \cos(x+y), f''_{xy} = \cos(x+y) - x \sin(x+y), f''_{xx} = 2 \cos(x+y) -$   
 $- x \sin(x+y); p) f'_x = y + \frac{1}{y}, f'_y = x - \frac{x}{y^2}, f''_{xx} = 0, f''_{xy} = 1 - \frac{1}{y^2}, f''_{yy} = \frac{2x}{y^3};$   
 զ)  $f'_x = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, f'_y = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, f''_{xx} = -\frac{3xy^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}}, f''_{xy} =$

$$f'' = \frac{y(2x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^{5/2}}, f_{yy}'' = -\frac{x(x^2 - 2y^2)}{(x^2 + y^2)^{5/2}}; \text{ p) } f'_x = \frac{2x}{y} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x^2}{y}}, f'_y = -\frac{x^2}{y^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x^2}{y}}$$

$$f''_{xx} = \frac{2}{y} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x^2}{y}} + \frac{8x^2}{y^2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{x^2}{y}}{\cos^2 \frac{x^2}{y}}, \quad f''_{xy} = -\frac{2x}{y^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x^2}{y}} - \frac{4x^2}{y^3} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{x^2}{y}}{\cos^2 \frac{x^2}{y}}$$

$$f''_{yy} = \frac{2x^2}{y^3} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x^2}{y}} + \frac{2x^4}{y^4} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{x^2}{y}}{\cos^2 \frac{x^2}{y}}; \quad 3285. \text{ w) } f''_{xx} = y(y-1)x^{y-2}, \quad f''_{xy} =$$

$$= (1 + y \ln x)x^{y-1}, f''_{yy} = x^y \ln^2 x; \quad \text{p) } f''_{xx} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f''_{xy} = -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$f''_{yy} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \text{q) } f''_{xx} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad f''_{xy} = 0, \quad f''_{yy} = -\frac{2y}{(1+y^2)^2} \quad (xy \neq 1); \quad \text{p) }$$

$$f''_{xx} = -\frac{2x|y|}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f''_{xy} = \frac{(x^2 - y^2)\operatorname{sgn} y}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f''_{yy} = \frac{2x|y|}{(x^2 + y^2)^2} \quad (y \neq 0); \quad 3286. \text{ w) }$$

$$f'''_{xxx} = -\frac{1}{y^3} \cos \frac{x}{y}, \quad f'''_{xyy} = -\frac{x^2}{y^5} \cos \frac{x}{y} - \frac{4x}{y^4} \sin \frac{x}{y} + \frac{2}{y^3} \cos \frac{x}{y}; \quad \text{p) }$$

$$f'''_{xxx} = -\frac{4x}{y} (3 \cos x^2 - 2x^2 \sin x^2), \quad f'''_{xyy} = \frac{2 \sin x^2 + 4x^2 \cos x^2}{y^2}; \quad 3287. \text{ w) }$$

$$-\frac{216}{(1+2x+3y)^4}; \quad \text{p) } \quad \frac{24y(x-y^2)}{(x+y^2)^4}; \quad \text{q) } \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = 8xyz e^{x^2+y^2+z^2},$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = (4y + 8x^2 y) e^{x^2+y^2+z^2}; \quad \text{q) } \quad -\frac{x^2}{z^4} \ln^2 x (y \ln x + 2z); \quad 3288. \text{ w) } m!n!; \quad \text{p) }$$

$$\frac{2(-1)^m(m+n-1)!(nx+my)}{(x-y)^{m+n+1}}; \quad e^{x+y} [x^2 + y^2 + 2(mx+ny) + m(m-1) + n(n-1)];$$

$$\text{p) } (x+m)(y+n)(z+k) e^{x+y+z}; \quad 3289. \text{ w) } \text{Ujnj; p) wjnj; q) nj; q) nj; 3290. \Omega; 3291.}$$

w)  $u'_x = 2xf'(x^2 + y^2 + z^2)$ ,  $u'_y = 2yf'(x^2 + y^2 + z^2)$ ,  $u'_z = 2zf'(x^2 + y^2 + z^2)$ ,  
 $u''_{xx} = 2f'(x^2 + y^2 + z^2) + 4x^2 f''(x^2 + y^2 + z^2)$ ,  $u''_{xy} = 4xyf''(x^2 + y^2 + z^2)$ ,  
 $u''_{yy} = 2f'(x^2 + y^2 + z^2) + 4y^2 f''(x^2 + y^2 + z^2)$ ,  $u''_{xz} = 2f'(x^2 + y^2 + z^2) +$   
 $+ 4z^2 f''(x^2 + y^2 + z^2)$ ,  $u''_{xx} = 4xzf''(x^2 + y^2 + z^2)$ ,  $u''_{yz} = 4yzf''(x^2 + y^2 + z^2)$ ;  
p)  $u'_x = 2xf'(x^2 - y^2)$ ,  $u'_y = -2yf'(x^2 - y^2)$ ,  $u''_{xx} = 2f'(x^2 - y^2) +$   
 $+ 4x^2 f''(x^2 - y^2)$ ,  $u''_{xy} = -4xyf''(x^2 - y^2)$ ,  $u''_{yy} = -2f'(x^2 - y^2) +$   
 $+ 4y^2 f''(x^2 - y^2)$ ; q)  $u'_x = y + f'(x - y)$ ,  $u'_y = x - f'(x - y)$ ,  
 $u''_{xx} = f''(x - y)$ ,  $u''_{xy} = 1 - f''(x - y)$ ,  $u''_{yy} = f''(x - y)$ ; n)  $u'_x = yf'(xy)g(x - y) +$   
 $+ f(xy)g'(x - y)$ ,  $u'_y = xf'(xy)g(x - y) - f(xy)g'(x - y)$ ,  $u''_{xx} =$   
 $= y^2 f''(xy)g(x - y) + 2yf'(xy)g'(x - y) + f(xy)g''(x - y)$ ,  $u''_{xy} =$   
 $= f'(xy)g(x - y) + xyf''(xy)g(x - y) + (x - y)f'(xy)g'(x - y) - f(xy)g''(x - y)$   
 $u''_{yy} = x^2 f''(xy)g(x - y) - 2xf'(xy)g'(x - y) + f(xy)g''(x - y)$ : 3292. w)

$$u'_x = f_1\left(x, \frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y} f'_2\left(x, \frac{x}{y}\right), \quad u'_y = -\frac{x}{y^2} f'_2\left(x, \frac{x}{y}\right), \quad u''_{xx} = f''_{11}\left(x, \frac{x}{y}\right) +$$

$$+ \frac{2}{y} f''_{12}\left(x, \frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y^2} f_{22}\left(x, \frac{x}{y}\right), \quad u''_{xy} = -\frac{x}{y^2} f''_{12}\left(x, \frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y^3} f''_{22}\left(x, \frac{x}{y}\right) -$$

$$- \frac{1}{y^2} f'_2\left(x, \frac{x}{y}\right), \quad u''_{yy} = \frac{x^2}{y^4} f''_{22}\left(x, \frac{x}{y}\right) + \frac{2x}{y^3} f'_2\left(x, \frac{x}{y}\right); \text{ p) } u'_x = f'_1(x + y, x - y) +$$

$$+ f'_2(x + y, x - y), \quad u'_y = f'_1(x + y, x - y) - f'_2(x + y, x - y), \quad u''_{xx} =$$

$$= f''_{11}(x + y, x - y) + 2f''_{12}(x + y, x - y) + f''_{22}(x + y, x - y), \quad u''_{xy} =$$

$$= f''_{11}(x + y, x - y) - f''_{22}(x + y, x - y), \quad u''_{yy} = f''_{11}(x + y, x - y) -$$

$$- 2f''_{12}(x + y, x - y) + f''_{22}(x + y, x - y); \text{ q) } u'_x = \cos x f'_1(\sin x, \cos y), \quad u'_y =$$

$$= -\sin y f'_2(\sin x, \cos y), \quad u''_{xx} = -\sin x f'_1(\sin x, \cos y) + \cos^2 x f''_{11}(\sin x, \cos y),$$

$$u''_{xy} = -\cos x \sin y f''_{12}(\sin x, \cos y), \quad u''_{yy} = -\cos y f'_2(\sin x, \cos y) +$$

$$+ \sin^2 y f''_{22}(\sin x, \cos y); \text{ n) } u'_x = yf'_1(xy, x, y) + f'_2(xy, x, y), \quad u'_y = xf'_1(xy, x, y) +$$

$$+ f'_3(xy, x, y), \quad u''_{xx} = y^2 f''_{11}(xy, x, y) + 2yf''_{12}(xy, x, y) + f''_{22}(xy, x, y).$$

$$u''_{xy} = f'_1(xy, x, y) + y(xf''_{11}(xy, x, y) + f''_{13}(xy, x, y)) + xf''_{21}(xy, x, y) + f''_{23}(xy, x, y),$$

$$u''_{yy} = x^2 f''_{11}(xy, x, y) + 2xf''_{13}(xy, x, y) + f''_{33}(xy, x, y): \quad 3302. \quad 1 - \sqrt{3}: \quad 3303.$$

$$\cos \alpha + \sin \alpha; \text{ w) } \alpha = \pi/4; \text{ p) } \alpha = 5\pi/4; \text{ q) } \alpha = 3\pi/4 \text{ и } \alpha = 7\pi/4: \quad 3304.$$

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma: \quad 3306. \quad f'(\mathbf{0})-\text{ü} \quad n \times m \quad \text{կարգի} \quad \text{զուական} \quad \text{մասրից} \quad \text{t:} \quad 3308.$$

$$\text{w) } \text{Դիֆերենցիլի} \quad \text{չt; p) } \text{դիֆերենցիլի} \quad \text{t; q) } \text{դիֆերենցիլի} \quad \text{t; n) } \text{դիֆերենցիլի} \quad \text{t:} \quad 3309.$$

$$\text{w) } df = x^{m-1}y^{n-1}(mydx + nx dy), \quad d^2f = x^{m-2}y^{n-2}[m(m-1)y^2dx^2 + 2mnxydxdy + n(n-1)x^2dy^2]; \quad \text{p) } df = e^{xy}(ydx + xdy), \quad d^2f =$$

$$= e^{xy}(y^2dx^2 + 2(1+xy)dxdy + x^2dy^2); \quad \text{q) } df = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad d^2f = \frac{(ydx - xdy)^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}};$$

$$\text{n) } df = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}, \quad d^2f = \frac{(y^2 - x^2)(dx^2 - dy^2) - 4xydxdy}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \text{t)}$$

$$df = (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz, \quad d^2f = 2(dx dy + dy dz + dz dx); \quad \text{q)}$$

$$df = \frac{(x^2 + y^2)dz - 2z(xdx + ydy)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad d^2f = \frac{2z(3x^2 - y^2)dx^2}{(x^2 + y^2)^3} +$$

$$+ \frac{2z(8xydxdy + (3y^2 - x^2)dy^2) - 4(x^2 + y^2)(xdx + ydy)dz}{(x^2 + y^2)^3}; \quad 3310.$$

$$df(1;1;1) = dx - dy, \quad d^2f(1;1;1) = -2(dx - dy)(dy + dz): \quad 3317. \quad f'(a,b) = f:$$

$$3318. \quad f'(a,b)(x,y) = bx + ay: \quad 3319. [y \cos xy, x \cos xy]: \quad 3320.$$

$$[z(x+y)^{x-1}, z(x+y)^{x-1}, (x+y)^x \ln(x+y)]: \quad 3321. \quad \begin{bmatrix} yx^{y-1} & x^y \ln x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}: \quad 3322.$$

$$\begin{bmatrix} -\sin y \sin(x \sin y) & -x \cos y \sin(x \sin y) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}: \quad 3323. \quad df(a,b)(\mathbf{h}) = 2ab^2h_1 +$$

$$+ 2a^2bh_2, \quad d^2f(a,b)(\mathbf{h}, \mathbf{l}) = 2b^2h_1l_1 + 4abh_1l_2 + 4abh_2l_1 + 2a^2h_2l_2: \quad 3324.$$

$$df(a,b,c)(\mathbf{h}) = (b+c)h_1 + (a+c)h_2 + (a+b)h_3, \quad d^2f(a,b,c)(\mathbf{h}, \mathbf{l}) = h_1l_2 + h_1l_3 +$$

$$+ h_2l_1 + h_2l_3 + h_3l_1 + h_3l_2: \quad 3325. \quad df(x_0, y_0)(\mathbf{h}) = \frac{1}{y_0}h_1 - \frac{x_0}{y_0^2}h_2,$$

$$d^2f(x_0, y_0)(\mathbf{h}, \mathbf{l}) = -\frac{1}{y_0^2}h_1l_2 - \frac{1}{y_0^2}h_2l_1 + \frac{2x_0}{y_0^3}h_2l_2: \quad 3326. \quad df(x, y)(\mathbf{h}) =$$

$$= -ye^x \sin(e^x y)h_1 - e^x \sin(e^x y)h_2,$$

$$\begin{aligned} d^2 f(x, y)(\mathbf{h}, \mathbf{l}) &= -[\cos(e^x y)e^{2x}y^2 + \sin(e^x y)e^x y]h_1 l_1 \\ &- [\cos(e^x y)e^{2x}y + \sin(e^x y)e^x](h_1 l_2 + h_2 l_1) - \cos(e^x y)e^{2x}h_2 l_2 : \end{aligned} \quad 3327.$$

$$df(x, y)(\mathbf{h}) = ye^{xy}h_1 + xe^{xy}h_2; \quad d^2 f(x, y)(\mathbf{h}, \mathbf{l}) = y^2e^{xy}h_1 l_1 + x^2e^{xy}h_2 l_2 +$$

$$+ (e^{xy} + xye^{xy})(h_1 l_2 + h_2 l_1) : \quad 3328. \quad df(x_0, y_0, z_0)(\mathbf{h}) = \frac{-2x_0 z_0}{(x_0^2 + y_0^2)^2}h_1 -$$

$$-\frac{2y_0 z_0}{(x_0^2 + y_0^2)^2}h_2 + \frac{1}{x_0^2 + y_0^2}h_3, \quad d^2 f(x_0, y_0 z_0)(\mathbf{h}, \mathbf{l}) =$$

$$=\frac{2z_0 \left[ (3x_0^2 - y_0)^2 h_1 l_1 + 4x_0 y_0 h_1 l_2 + 4x_0 y_0 h_2 l_1 + (3y_0^2 - x_0^2) h_2 l_2 \right]}{(x_0^2 + y_0^2)^3}$$

$$-2 \frac{x_0 h_1 l_3 + x_0 h_3 l_1 + y_0 h_2 l_3 + y_0 h_3 l_2}{(x_0^2 + y_0^2)^2} : \quad 3329. \quad d^2 f(\mathbf{l}, \mathbf{l})(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = h_1^2 + 2h_1 h_2 - h_2^2 :$$

$$3330. \quad d^2 f(\mathbf{l}, \mathbf{2}, \mathbf{3})(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = 12h_1^2 - 6h_1 h_2 - 4h_1 h_3 + 2h_2 h_3 : \quad 3331. \quad d^2 u(x, y)(\mathbf{h}, \mathbf{h}) =$$

$$= f''(x+y)(h_1 + h_2)^2 : \quad 3332. \quad d^2 u(x, y)(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = f''(t) \frac{(xh_2 - yh_1)^2}{x^4} - 2f'(t) \cdot$$

$$\cdot \frac{h_1(xh_2 - yh_1)}{x^3} : \quad 3333. \quad d^2 u(x, y, z)(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = f''(t)[y^2 z^2 h_1^2 + x^2 z^2 h_2^2 + x^2 y^2 h_3^2] +$$

$$+ 2(f'(t) + f''(t)xyz)(zh_1 h_2 + yh_1 h_3 + xh_2 h_3) : \quad 3334. \quad d^2 u(x, y)(\mathbf{h}, \mathbf{h}) =$$

$$= a^2 f_{11}'' h_1^2 + 2ab f_{12}'' h_1 h_2 + b^2 f_{22}'' h_2^2 : \quad 3335. \quad d^2 u(x, y)(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = f_{11}''(h_1 + h_2)^2 +$$

$$+ 2f_{12}''(h_1^2 - h_2^2) + f_{22}''(h_1 - h_2)^2 : \quad 3336. \quad d^2 u(x, y)(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = f_{11}''(yh_1 + xh_2)^2 +$$

$$+ 2f_{12}'' \frac{y^2 h_1^2 - x^2 h_2^2}{y^2} + f_{22}'' \frac{(yh_1 - xh_2)^2}{y^4} + 2f_1'' h_1 h_2 - 2f_2'' \frac{(yh_1 - xh_2)h_2}{y^3} : \quad 3337.$$

$$d^2 u(x, y, z)(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = (f_{11}'' y^2 + 2f_{12}'' y + 2f_{13}'' y + f_{22}'' + 2f_{23}'' + f_{33}'' )h_1^2 + 2(f_{11}'' xy +$$

$$+ (x-y)f_{12}'' + (x+y)f_{13}'' - f_{22}'' + f_1' + f_{33}'' )h_1 h_2 + (f_{11}'' x^2 + 2f_{13}'' x - 2f_{12}'' x + f_{22}'' -$$

$$- 2f_{23}'' + f_{33}'' )h_2^2 : \quad 3338. \quad d^2 u(x, y, z)(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = (2f_1' + 4f_{11}'' x^2)h_1^2 + (2f_2' + 4f_{22}'' y^2) \times$$

$$\times h_2^2 + (2f_3' + 4f_{33}'' z^2)h_3^2 + 8f_{12}'' xyh_1 h_2 + 8f_{13}'' xz h_1 h_3 + 8f_{23}'' yz h_2 h_3 : \quad 3339.$$

$$d^2 u(x, y, z)(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = 4f_{11}'' h_1^2 + 9f_{22}'' h_2^2 + 16f_{33}'' h_3^2 + 12f_{12}'' h_1 h_2 + 16f_{13}'' h_1 h_3 +$$

$+ 24f''_{23}h_2h_3$ : 3340.  $d^2u(x,y,z)(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = f''_{11}(h_1 + h_2 + h_3)^2 + 4f''_{12}(h_1 + h_2 + h_3) \cdot$   
 $\cdot (xh_1 + yh_2 + zh_3) + 4f''_{22}(xh_1 + yh_2 + zh_3)^2 + 2f'_2(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)$ : 3341.  $\rho'(\varphi) =$   
 $= \rho$ : 3342.  $[\rho'(\varphi)]^2 = \frac{1 - \sin 2\varphi}{\sin 2\varphi} \rho^2$ : 3343.  $z'_v = 0$ : 3344.  $uz''_v = z$ : 3345.  $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} +$   
 $+ \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 2w$ : 3346.  $\frac{\partial w}{\partial v} = 0$ : 3347.  $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = 0$ : 3348.  $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{1}{2}$ : 3349.  $1 - 2x +$   
 $+ 2x^2 + 2xy + y^2$ : 3350.  $8 - 3(x-1) + 11(y-2) + (x-1)^2 - 3(x-1)(y-2) +$   
 $+ 4(y-2)^2$ : 3351.  $3[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - (x-1)(y-1) - (y-1)(z-1) -$   
 $- (z-1)(x-1)] + (x-1)^3 + (y-1)^3 + (z-1)^3 - 3(x-1)(y-1)(z-1)$ : 3352.  $\omega$ )  
 $(0;1)$ -ը մինիմումի կետ է;  $\rho$ )  $(1;0)$ -ն մինիմումի կետ է: 3353.  $\omega$ ) Եքսարեմումի  
 $\text{կետ } \xi \text{ունի}; \rho$ )  $x - y + 1 = 0$  ուղղի կետերը մինիմումի կետեր են: 3354.  $\omega$ )  $(1;1)$ -ը  
 $\text{մինիմումի կետ է}; \rho$ )  $(1;1)$ -ը և  $(-1;-1)$ -ը մինիմումի կետեր են: 3355.  $\omega$ )  $(0;0)$ -ն  
 $\text{մաքսիմումի կետ է}, (1/2; \pm 1)$ -ը և  $(-1/2; \pm 1)$ -ը մինիմումի կետեր են;  $\rho$ )  $(2;3)$ -ը  
 $\text{մաքսիմումի կետ է}, \{(0; y) : y \in (0; 6)\}$ -ի կետերը մինիմումի կետեր են,  
 $\{(0; y) : y \in (-\infty; 0) \cup (6; +\infty)\}$ -ի կետերը մաքսիմումի կետեր են: 3356.  $\omega$ )  $(5;2)$ -  
 $\text{-ը մինիմումի կետ է}; \rho$ )  $\left( \pm \frac{a}{\sqrt{3}}, \mp \frac{b}{\sqrt{3}} \right)$ -ը մինիմումի կետ է,  $\left( \pm \frac{a}{\sqrt{3}}, \pm \frac{b}{\sqrt{3}} \right)$ -ը  
 $\text{մաքսիմումի կետ է}: 3357. \omega) \left( -\frac{1}{26}, -\frac{3}{26} \right)$ -ը մինիմումի կետ է,  $(1;3)$ -ը  
 $\text{մաքսիմումի կետ է}; \rho$ )  $(0;0)$ -ն մինիմումի կետ է,  $x^2 + y^2 = 1$  շրջանագծի  
 $\text{կետերը մաքսիմումի կետեր են}: 3358. (1;2)-ը մինիմումի կետ է: 3359.  $\left( \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6} \right)$ -  
 $\text{-ը մաքսիմումի կետ է}: 3360. (0;0)-ն մաքսիմումի կետ է: 3361.  $\left( \pm \frac{1}{\sqrt{2e}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2e}} \right)$ -  
 $\text{-ն մինիմումի կետ է}, \left( \pm \frac{1}{\sqrt{2e}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2e}} \right)$ -ն մաքսիմումի կետ է: 3362.  $(-1; -2; 3)$ -ը  
 $\text{մինիմումի կետ է}: 3363. (24; -144; 1)-ը մինիմումի կետ է: 3364.  $(1/2; 1; 1)$ -ը  
 $\text{մինիմումի կետ է}: 3365. (a; a; a)$ -ն մաքսիմումի կետ է: 3368.  $\omega) \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1$ ,$$$

$$y = \frac{b}{2}; \quad \text{p) } \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}: \quad 3369. \quad z = x + 2y - 2; \quad \left( -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right).$$

$$3370. \quad z = 2x + 2y - 2; \quad \left( -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right); \quad 3371. \quad z = -x + \pi y;$$

$$\left( \frac{1}{\sqrt{\pi^2 + 2}}, \frac{-\pi}{\sqrt{\pi^2 + 2}}, \frac{1}{\sqrt{\pi^2 + 2}} \right); \quad 3372. \quad xx_0 + yy_0 + zz_0 = 1; \quad \left( \frac{x_0}{c}, \frac{y_0}{c}, \frac{z_0}{c} \right).$$

որպես  $c = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$ :  $3382. \quad R^m \setminus \{\mathbf{0}\}, \quad \{(x^1, \dots, x^m) : x^i \neq 0\},$

$$\{(x^1, \dots, x^m) : |x^i| \neq |x^j|, i \neq j\}; \quad 3389. \quad \text{ա) } 2; \quad \text{բ) } -1; \quad 3396. \quad \text{բ) } y = \sqrt{1-x^2},$$

$$y = -\sqrt{1-x^2}: \quad 3397. \quad \text{ա) } \text{չորս}; \quad \text{բ) } \text{չորս}; \quad \text{զ) } \text{երկու}: \quad 3398. \quad y' = -\frac{x+y}{x-y},$$

$$y'' = \frac{2a^2}{(x-y)^3}: \quad 3399. \quad y' = \frac{x+y}{x-y}, \quad y'' = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}; \quad 3400. \quad y' = \frac{1}{1-\varepsilon \cos y},$$

$$y'' = -\frac{\varepsilon \sin y}{(1-\varepsilon \cos y)^3}; \quad 3401. \quad y' = \frac{y^2(1-\ln x)}{x^2(1-\ln y)}, \quad y'' = y^2 [y(1-\ln x)^2 - 2(x-y) \cdot (1-\ln x)(1-\ln y) - x(1-\ln y)^2] \left[ x^4(1-\ln y) \right]^{-3}; \quad 3402. \quad -1; \quad 3403. \quad y'(0) = -1/3,$$

$$y''(0) = -2/3, \quad y'''(0) = -7/27; \quad 3404. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{x^2+z^2}{z^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{xy}{z^3}; \quad 3405.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^2+z^2+z}{x-x^2-z^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{x^2-z^2-z+2xz+\frac{\partial z}{\partial x}(x-x^2+z^2+2zx)}{(x-x^2-z^2)^2}; \quad 3406.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x} \cdot \frac{x-1}{1-z}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{z((z-1)^2+(y-1)^2)}{y^2(1-z)^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{z}{xy} \cdot \frac{(x-1)(y-1)}{(1-z)^3}; \quad 3407.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yx^{y-1}}{y^z \ln y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^y \ln x + zy^{z-1}}{y^z \ln y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x^{y-1} (1 - \ln y - x^y y^{1-z} \ln x \cdot \ln y - y \ln x \ln y) y^{-z} \ln^{-2} y; \quad 3409. \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_1 + 2xF'_2}{F'_1 + 2zF'_2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_1 + 2yF'_2}{F'_1 + 2zF'_2}; \quad 3410.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-zF'_1}{xF'_1 + yF'_2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-zF'_2}{xF'_1 + yF'_2}; \quad 3411. \quad \text{ա) } d^2 z(x, y)(\mathbf{h}, \mathbf{h}) =$$

$$-\frac{(F'_2)^2 F''_{11} - 2F'_1 F'_2 F''_{12} + (F'_1)^2 F''_{22}}{(F'_1 + F'_2)^3} (h_1 - h_2)^2; \text{ p) } d^2 z(x, y)(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = (yh_1 - xh_2)^2.$$

$$\cdot \frac{(F'_2)^2 F''_{11} - 2F'_1 F'_2 F''_{12} + (F'_1)^2 F''_{22}}{(xF'_1 + yF'_2)^3}: 3412. \quad d^2 z(3, -2)(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = -\frac{2}{243}(2h_1^2 - 5h_1 h_2 +$$

$$+ 2h_2^2): 3413. \quad z''_{xx} = -0,4; \quad z''_{xy} = -0,2; \quad z''_{yy} = -3,152: 3414. \quad z''_{xx} = \frac{169}{32};$$

$$z''_{xy} = -\frac{1}{8}; \quad z''_{yy} = -\frac{5}{8}: 3415. \quad x' = \frac{y-z}{x-y}, \quad y' = \frac{z-x}{x-y}, \quad y'' = -x'' = (x-y)^{-3}.$$

$$\cdot ((y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2): 3416. \quad y' = -x' = (y-x)^{-1}, \quad y'' = -x'' = 2(x-y)^{-3}:$$

$$3417. \quad du(1,2) = -\frac{1}{3}dy, \quad dv(1,2) = -dx + \frac{1}{3}dy: 3418. \quad du(x,y) =$$

$$= \frac{(\sin v + x \cos v)dx - (\sin u - x \cos v)dy}{x \cos v + y \cos u},$$

$$dv(x,y) = \frac{-(\sin v - y \cos u)dx + (\sin u + y \cos u)dy}{x \cos v + y \cos u}: 3420. \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\chi'_1 \psi'_2 - \chi'_2 \psi'_1}{\varphi'_1 \psi'_2 - \varphi'_2 \psi'_1};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\chi'_2 \varphi'_1 - \chi'_1 \varphi'_2}{\varphi'_1 \psi'_2 - \varphi'_2 \psi'_1}: 3421. \quad \{(u,v): u \neq v\}: 3422. \quad \left( \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial Y}{\partial u} \right)^{-1}: 3424.$$

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right], \quad \Delta_1 u = \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2: 3426. \quad \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^k x^n y^{k-n} + o\left((x^2 + y^2)^{\frac{m}{2}}\right): 3427.$$

$$\sum_{n=1}^m \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x+y)^n + o\left((x^2 + y^2)^{\frac{m}{2}}\right): 3428. \quad \sum_{k=1}^m \sum_{n=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} (-1)^n \frac{x^{k-2n} y^{2n}}{(2n+1)!(k-2n-1)!} +$$

$$+ o\left((x^2 + y^2)^{\frac{m}{2}}\right): 3429. \quad \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^{\left[k/2\right]} (-1)^n \frac{x^{k-2n} y^{2n}}{(2n)!(k-2n)!} + o\left((x^2 + y^2)^{\frac{m}{2}}\right): 3430.$$

$$\sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^k (-1)^n \frac{x^{2n+1} y^{2k-2n+1}}{(2n+1)!(2k-2n+1)!} + o\left((x^2 + y^2)^{m+1}\right): 3431. \quad \sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^k (-1)^n \cdot$$

$$\frac{x^{2n}y^{2k-2n}}{(2n)!(2k-2n)!} + o\left(\left(x^2+y^2\right)^m\right): \quad 3432. \quad \sum_{n=0}^m (-1)^n \frac{\left(x^2+y^2\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} +$$

$$+ o\left(\left(x^2+y^2\right)^{2m+2}\right): \quad 3433. \quad \sum_{k=2}^m \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^k \frac{x^n y^{k-n}}{n(k-n)!} + o\left(\left(x^2+y^2\right)^{\frac{m}{2}}\right): \quad 3434.$$

$$\sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^k \frac{(x-1)^n(y+1)^{k-n}}{n!(k-n)!} + o\left(\left((x-1)^2+(y+1)^2\right)^{\frac{m}{2}}\right): \quad 3435. \quad 1 + \sum_{n=1}^m (-1)^n \cdot$$

$$\cdot \left((y-1)^n - (y-1)^{n-1}(x-1)\right) + o\left(\left((x-1)^2+(y-1)^2\right)^{\frac{m}{2}}\right): \quad 3436. \quad z = 1 + (2(x-1) -$$

$$-(y-1)) - (8(x-1)^2 - 10(x-1)(y-1) + 3(y-1)^2): \quad 3437. \quad A_{mn} \left( (-1)^{m+1} \frac{\pi}{12} + \right.$$

$$\left. (m+n) \frac{\pi}{2}; (-1)^{m+1} \frac{\pi}{12} + (m-n) \frac{\pi}{2} \right) \quad (m, n \in Z) \quad \text{կեսերը կրիտիկական կետեր}$$

են; երբ  $m+n$ -ը զույգ է  $A_{mn}$ -ը եքստրեմումի կետ չէ, երբ  $m$ -ը զույգ է,  $n$ -ը՝ կենա  $A_{mn}$ -ը մինիմումի կետ է; երբ  $n$ -ը զույգ է և  $m$ -ը կենա  $A_{mn}$ -ը մաքսիմումի կետ է:

$$3438. \quad \left(\frac{a}{7}; \frac{a}{7}; \frac{a}{7}\right)-ը մաքսիմումի կետ է; \quad \{(x; 0; z): xz(a-x-3z) > 0\}$$

բազմության կետերը մինիմումի կետեր են,  $\{(x; 0; z): xz(a-x-3z) < 0\}$

$$3439. \quad \left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)-ը մաքսիմումի կետ է; \quad (0; 0; 0) \text{ և } (\pi; \pi; \pi)-ն մինիմումի կետեր են:$$

$$3440. \quad z_{\min}^1 = 1, \quad (0; -2)$$

կետում;  $z_{\max}^2 = -8/7$ ,  $(0; 16/7)$  կետում: 3441.  $z_{\max}^1 = 0$ ,  $(1; 1)$  կետում;

$$z_{\min}^2 = -4, \quad (1; 9) \quad \text{կետում}: 3442. \quad (1; -1) \quad \text{կետում} \quad z_{\min}^1 = -2, \quad z_{\max}^2 = 6: 3443.$$

$$\left( \frac{-b \operatorname{sgn}(ab)}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{-a \operatorname{sgn}(ab)}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)-ն մինիմումի կետ է; \quad \left( \frac{b \operatorname{sgn}(ab)}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a \operatorname{sgn}(ab)}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)-ն$$

$$3444. \quad \left( \frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2} \right)-ն մինիմումի կետ է: 3445.$$

$(2; -3)$ -ը և  $(-2; 3)$ -ը մինիմումի կետեր են;  $(3/2; 4)$ -ը և  $(-3/2; -4)$ -ը մաքսի-

- մումի կետեր են: 3446.  $\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}; -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}\right)$ -ը ( $k \in Z$ ) մաքսիմումի կետ է, եթե  
 $k$ -ն զույգ է, մինիմումի կետ է, եթե  $k$ -ն կենա է: 3447.  $(-4; -2; 1)$ -ը մինիմումի  
 կետ է;  $(4; 2; -1)$ -ը մաքսիմումի կետ է: 3448.  $(x_0; y_0; z_0)$ -ն մաքսիմումի կետ է,  
 որտեղ  $\frac{x_0}{m} = \frac{y_0}{n} = \frac{z_0}{p} = \frac{a}{m+n+p}$ : 3449.  $(\pm a; 0; 0)$ -ն մաքսիմումի կետ է;  
 $(0; 0; \pm c)$ -ն մինիմումի կետ է: 3450.  $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ -ը,  $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ -ը և  
 $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ -ը մինիմումի կետեր են,  $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ -ը,  $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ -ը և  $\left(\frac{2}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ -ը մաքսիմումի կետեր են: 3451.  
 $(1; 1; 1)$ -ը մաքսիմումի կետ է: 3452.  $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right)$ -ը մաքսիմումի կետ է: 3453.  
 $(x_1^0; \dots; x_n^0)$ -ն մինիմումի կետ է, որտեղ  $x_i^0 = \frac{1}{a_i} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k^2} \right)^{-1}$ : 3454.  
 $\left(\frac{a}{n}; \dots; \frac{a}{n}\right) \in R^n$  կետը մինիմումի կետ է: 3455.  $(x_1^0; \dots; x_n^0)$ -ն մաքսիմումի կետ է,  
 որտեղ  $\frac{x_1^0}{a_1} = \dots = \frac{x_n^0}{a_n} = \frac{a}{a_1 + \dots + a_n}$ : 3456.  $z_{\max} = -2$ ;  $z_{\min} = -5$ : 3457.  
 $z_{\max} = 125$ ;  $z_{\min} = -75$ : 3458.  $z_{\max} = 1$ ;  $z_{\min} = 0$ : 3459.  $u_{\min} = 0$ ;  $u_{\max} = 300$ :  
 3463. Գումարելիները հավասար են  $\frac{a}{n}$ -ի: 3464. Արաւարիչները հավասար են  
 $a^{\frac{1}{n}}$ -ի: 3465.  $x = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^n x_k$ ,  $y = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^n y_k$ ,  $z = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^n z_k$ , որտեղ  $N = \left( \left( \sum_{k=1}^n x_k \right)^2 + \right.$   
 $\left. + \left( \sum_{k=1}^n y_k \right)^2 + \left( \sum_{k=1}^n z_k \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ : 3466. Ուղղանկյան կողմերն են  $\frac{p}{3}$  և  $\frac{2p}{3}$ : 3467.

$$\frac{7\sqrt{2}}{8} : 3468. \quad \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} : 3469. \quad d = \pm \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix},$$

որսուն  $\Delta = \sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix}^2}$  : 3473.  $\Omega$ : 3474.  $\Omega_\Sigma$ : 3479.  $\Omega_\Sigma$ :

3483.  $\tau_{\max} = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$ ,  $\tau_{\min} = \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$ , որսուն  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  թվերը

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

հավասարման արմատներն են: 3484.  $a, x_1, \dots, x_n, b$  թվերը պեսը է կազմեն երկրաչափական պրոզբեսիա  $q = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$  հայստարարով:

## Գլուխ 15

3491. 1: 3492. 1: 3493. 1: 3494.  $\ln \frac{2e}{e+1} : 3497.$  - 2: 3498.  $\frac{\pi}{4} : 3501.$  ա)  $\Omega_\Sigma$ ; բ)

$\Omega_\Sigma$ : 3502. ա)  $\Omega_\Sigma$ ; բ)  $\Omega_\Sigma$ : 3503.  $\frac{y \sin y + \cos y - 1}{y^2} : 3504. \frac{e^{4y} - e^y}{2y} : 3505.$

$$\frac{2 \ln(1+y^2)}{y} : 3506. \quad \frac{2 \sin 2y^2 - 2 \sin y^2}{y} : 3507. \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{b+y} \right) \sin(b+y)y - \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{a+y} \right) \sin(a+y)y : 3508. \left( 1 + \frac{1}{y} \right) \ln(1+y^2 e^{2y}) + \left( 1 - \frac{1}{y} \right) \ln(1+y^2 e^{-2y}) : 3509.$$

$\Omega_\Sigma$ : 3510.  $\Omega_\Sigma$ : 3532.  $\int_0^{+\infty} t^{x-1} (\ln t)^n e^{-t} dt : 3534. \frac{1}{2} B\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2}\right) : 3535.$

$$\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) = \frac{\pi}{2 \cos \frac{\pi \alpha}{2}} : 3536. \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) : 3537. \frac{1}{|n|} \Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right) : 3538.$$

$$\frac{\pi a^4}{16} : 3539. \quad \frac{2\pi}{\sqrt{3}} : 3540. \quad \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} : 3541. \quad \frac{\sqrt{2}\pi}{4} : 3542. \quad \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} : 3543. \quad \frac{\sqrt{\pi}}{2} : 3544.$$

$$\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} \sqrt{\pi} : 3545. \quad 0 : 3549. \quad \frac{\pi}{2} \ln(1+\sqrt{2}) : 3550. \quad \text{u)} \quad \ln \frac{b+1}{a+1}; \quad \text{p)}$$

$$arctg(b+1) - arctg(a+1); \quad \text{q)} \quad \frac{1}{2} \ln \frac{b^2 + 2b + 2}{a^2 + 2b + 2} : 3551. \quad \frac{1}{2a} (f(x+a) - f(x-a)) :$$

$$3552: 3f(y) + 2yf'(y) : 3553. \quad 2f(y), \text{ tpp } y \in (a; b); \quad 0, \text{ tpp } y \notin [a; b] : 3554.$$

$$\frac{f(t+2h) - 2f(t+h) + f(t)}{h^2} : 3555. \quad (n-1)! f(x) : 3562. \quad \pi \ln \frac{y + \sqrt{y^2 - 1}}{2} : 3563.$$

$$0 : 3564. \quad 2\pi \arcsin x : 3565. \quad \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x \ln(1 + |x|) : 3576. \quad \text{Հավասարաշափ} \quad \text{զու-}$$

զամես չէ: 3577. Հավասարաշափ զուգամես է: 3578. ա) Հավասարաշափ զու-  
զամես է; թ) հավասարաշափ զուգամես չէ: 3579. ա) Հավասարաշափ զուգա-  
մես է; թ) հավասարաշափ զուգամես չէ: 3580. Հավասարաշափ զուգամես չէ:

$$3581. \quad \text{Հավասարաշափ զուգամես է:} 3585. \quad \frac{\sqrt{\pi}}{2} : 3586. \quad 1 : 3589. \quad \alpha = \pm 1 : 3590.$$

$$\text{Անընդհատ է:} 3591. \quad \text{Անընդհատ է:} 3597. \quad \frac{\pi}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} a^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)} : 3598. \quad \ln \frac{b}{a} : 3600.$$

$$\text{ա)} \quad \ln \frac{b}{a}; \quad \text{թ)} \quad 0; \quad \text{զ)} \quad \frac{\pi}{2} \ln \frac{a}{b} : 3601. \quad \frac{1}{2} \ln \frac{\beta}{\alpha} : 3602. \quad 2 \ln \frac{(2\alpha)^\alpha (2\beta)^\beta}{(\alpha + \beta)^{\alpha + \beta}} : 3603.$$

$$\frac{1}{2} \ln \frac{\beta^2 + \lambda^2}{\alpha^2 + \lambda^2} : 3604. \quad \frac{\pi}{\beta^3} (\alpha\beta - \ln(1 + \alpha\beta)) : 3605. \quad \text{ա)} \quad \frac{\pi}{2} \ln(1 + \alpha); \quad \text{թ)} \quad \frac{\pi}{2} \ln 2 :$$

$$3602. \quad arctg \frac{\alpha}{\beta} : 3609. \quad \frac{\pi}{4} : 3610. \quad \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \alpha : 3611. \quad \frac{\pi}{2} |\alpha| : 3612. \quad \frac{\pi}{4} : 3613.$$

$$\frac{\pi}{4} (\operatorname{sgn}(\alpha + \beta) + \operatorname{sgn}(\alpha - \beta)) : 3614. \quad \frac{3\pi}{8} \alpha^2 \operatorname{sgn} \alpha : 3615. \quad \frac{\sqrt{\pi}}{2} : 3616.$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2 - ac}{a}} : 3617. \quad \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2|\alpha|} : 3618. \quad \sqrt{\pi} (\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}) : 3619. \quad \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}} : 3620.$$

$$\frac{b\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}} : 3621. (-1)^n \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}} (e^{-b^2})^{2n} : 3622. \quad \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|} : 3623. \quad \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha e^{-|\alpha|} : 3624.$$

$$\frac{\pi}{4} \left(1 - e^{-2}\right) : 3625. \quad \frac{\pi}{4} (1 + |\alpha|) e^{-|\alpha|} : 3626. \quad \frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}} \cos \frac{bp}{a} e^{-\frac{|p|}{a} \sqrt{ac-b^2}} : 3627. \text{ w,p}$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} : 3628. \quad \sqrt{\frac{\pi}{|a|}} \sin \left( \frac{ac-b^2}{a} + \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} a \right) : 3629. \quad \sqrt{\pi} \sin \left( \frac{\pi}{4} - a^2 \right) : 3630. \text{ w)$$

$$\frac{n!}{p^{n+1}}; \quad \text{p)} \quad \frac{1}{2p} \sqrt{\frac{\pi}{p}}; \quad \text{q)} \quad \frac{p}{p^2+1}; \quad \text{q)} \quad \ln \left( 1 + \frac{1}{p} \right) : 3634. \quad \frac{\pi}{q \sin \frac{\pi p}{q}} : 3635.$$

$$\frac{2^{n-1}}{(1-k^2)^{\frac{n}{2}}} B\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right) : 3636. \quad \frac{1}{n} a^{\frac{m+1}{n}-p} b^{-\frac{m+1}{n}} B\left(\frac{m+1}{n}, p - \frac{m+1}{n}\right) : 3637.$$

$$B(m+1, n+1) \frac{(b-a)^{m+n+1}}{(a+c)^{n+1}(b+c)^{m+1}} : 3638. \quad \frac{1}{p} B\left(\frac{1}{p}, 1 - \frac{1}{q}\right) : 3639. \Gamma(p+1) : 3640.$$

$$\frac{d}{dp} \left( \frac{\Gamma(p+1)}{a^{p+1}} \right) : 3641. \quad -\frac{\pi^2 \cos \pi p}{\sin^2 \pi p} : 3642. \quad \pi^3 \frac{1 + \cos^2 \pi p}{\sin^3 \pi p} : 3643. \quad \frac{2\pi^2}{27} : 3647.$$

$$\frac{\pi |a|^{p-1}}{2\Gamma(p)\cos \frac{\pi p}{2}} \quad (a \neq 0) : 3648. \quad \frac{\pi a^{p-1}}{2\Gamma(p)\sin \frac{\pi p}{2}}, \quad \text{bpp} \quad a \neq 0; \quad 0, \quad \text{bpp} \quad a = 0 : 3649.$$

$$\pi c t g \pi p : 3650. \quad \ln \sqrt{2\pi} : 3651. \quad \ln \sqrt{2\pi} + a(\ln a - 1) : 3652. \quad \frac{1}{\pi} \left( 1 + \ln \frac{\pi}{2} \right) : 3653.$$

$$\frac{1}{4n} : 3655. \quad \sqrt{2} : 3656. \quad \cos x :$$

## Գլուխ 16

$$3679. \quad \frac{1}{4} : 3680. \quad \frac{40}{3} + \frac{11}{n} + \frac{5}{3n^2}; \quad \frac{40}{3} - \frac{11}{n} + \frac{5}{3n^2}; \quad 13\frac{1}{3} : 3684. \quad \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy =$$

$$= \int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx : 3685. \quad \int_0^1 dx \int_0^{x+1} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{y-1}^1 f(x, y) dx :$$

$$3686. \quad \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx : 3687. \quad \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy =$$

$$= \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx : 3688.$$

$$= \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y/2}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx : 3689. \pi - 2 : 3690. 2 : 3691. \frac{7}{20} : 3692. \frac{1}{88} : 3693. \frac{13}{168} :$$

$$3694. \frac{\pi a^3}{3} : 3695. F(A, B) - F(A, b) - F(a, B) + F(a, b) : 3697. \int_0^2 dy \int_{y/2}^y f(x, y) dx +$$

$$+ \int_2^4 dy \int_{y/2}^2 f(x, y) dx : 3698. \int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x, y) dy : 3699. \int_0^4 dy \int_0^{y/2} f(x, y) dx +$$

$$+ \int_4^6 dy \int_0^{6-y} f(x, y) dx : 3700. \int_0^1 dy \int_{e^{-y}}^e f(x, y) dx : 3701. \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx : 3702.$$

$$\int_0^4 dx \int_{3x^2}^{12x} f(x, y) dy : 3703. \int_0^1 dy \int_y^{2-y} f(x, y) dx : 3704. \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y) dx : 3705.$$

$$\int_0^1 dy \int_{y^{\frac{3}{2}}}^{2-\sqrt{2y-y^2}} f(x, y) dx : 3706. \frac{p^5}{21} : 3707. 14a^4 : 3708. \frac{8}{3} \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \ln \frac{4}{5} : 3709.$$

$$a^4 : 3710. \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a rf(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr : 3711. \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} rf(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr :$$

$$3712. \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 rf(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr : 3713. \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{4 \cos \varphi} rf(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr :$$

$$3714. \frac{2\pi a^3}{3} : 3715. -6\pi^2 : 3716. \frac{2}{3}\pi ab : 3717. \frac{1}{2} : 3718. 2 : 3719.$$

$$\left(\frac{15}{8} - 2 \ln 2\right) a^2 : 3720. \pi ab : 3721. \frac{2}{3} : 3722. \frac{16}{3} : 3723. \pi a^2 : 3724. \frac{8}{3} : 3725.$$

$$\frac{5}{8} \pi a^2 : 3726. \frac{3}{4} \pi : 3727. 2a^2 : 3728. a^2 : 3729. \frac{(\beta - \alpha)(b^2 - a^2)}{2(\alpha + 1)(\beta + 1)} : 3730. \frac{a^2}{2} \ln 2 :$$

3731.  $\frac{4}{3}(q-p)(s-r)$ : 3732.  $\frac{\pi}{|d|}$ : 3733.  $\frac{16}{3}$ : 3734.  $\frac{abc}{6}$ : 3735.  $2\pi a^3$ : 3736.  
 $\frac{88}{105}$ : 3737.  $\frac{16}{3}R^3$ : 3738.  $\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)a^3$ : 3739.  $\frac{\pi}{8}$ : 3740.  $\frac{45}{32}\pi$ : 3741.  $\frac{\pi a^3}{8}$ :  
 3742.  $\frac{\pi(b^3-a^3)}{12}$ : 3743.  $\frac{9}{2}a^4$ : 3744.  $\frac{3}{4}$ : 3745.  $\frac{14}{9}\ln 3$ : 3746.  $\frac{\pi a}{2}$ : 3747.  
 $\frac{4}{15}\pi R^5$ : 3748.  $\frac{1}{364}$ : 3749.  $\frac{1}{48}$ : 3750.  $\frac{\pi abc^2}{4}$ : 3751.  $\frac{a^3 h}{6}$ : 3752.  $\frac{\pi}{10}$ : 3753.  
 $\frac{a^4}{144}$ : 3754.  $\frac{\pi^2 abc}{4}$ : 3755.  $\frac{3}{35}$ : 3756.  $\frac{7}{24}$ : 3757.  $\frac{\pi}{96}$ : 3758.  $\frac{32}{3}\pi$ : 3759.  $\pi a^3$ :  
 3760.  $\frac{4}{3}\pi abc$ : 3761.  $\frac{a^3}{360}$ : 3762.  $\frac{\pi}{3}(2-\sqrt{2})(b^3-a^3)$ : 3763.  $\frac{4\pi R^3}{3|\Delta|}$ : 3764.  
 $\frac{49}{864}a^3$ : 3765.  $\frac{1}{3}(b^3-a^3)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)$ : 3766.  $\frac{4}{3}\pi a^3$ : 3784. ա) Բացասական; բ)  
 դրական: 3786.  $\int_0^a dy \left\{ \int_{y^2/2a}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y) dx + \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y) dx \right\} + \int_a^{2a} dy \int_{y^2/2a}^{2a} f(x,y) dx :$   
 3787.  $\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x,y) dx - \int_{-1}^0 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{2\pi + \arcsin y} f(x,y) dx$ : 3788.  $\int_0^{a/2} dy \int_{\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y) dx +$   
 $+ \int_{a/2}^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y) dx$ : 3789.  $\int_0^2 dy \int_y^{\sqrt{10y-y^2}} f(x,y) dx$ : 3790.  
 $\int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{1/\cos\varphi} rf(r \cos\varphi, r \sin\varphi) dr + \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{1/\sin\varphi} rf(r \cos\varphi, r \sin\varphi) dr =$   
 $= \int_0^1 rdr \int_0^{\pi/2} f(r \cos\varphi, r \sin\varphi) d\varphi + \int_1^{\sqrt{2}} rdr \int_{\arccos\frac{1}{r}}^{\arcsin\frac{1}{r}} f(r \cos\varphi, r \sin\varphi) d\varphi$ : 3791.

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 rf(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr = \int_{1/\sqrt{2}}^{\frac{\pi}{4} + \arccos \frac{1}{\sqrt{2}r}} rdr \int_{\frac{\pi}{4} - \arccos \frac{1}{\sqrt{2}r}}^{\frac{\pi}{4}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi : \quad 3792.$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int_0^{2/\cos \varphi} rf(r) dr = \frac{\pi}{12} \int_0^{2\sqrt{2}} rf(r) dr + \int_{2\sqrt{2}}^4 \left( \frac{\pi}{3} - \arccos \frac{2}{r} \right) rf(r) dr : \quad 3793.$$

$$\int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos \varphi}} rf(r \cos \varphi, r \sin \varphi) dr = \int_0^1 rdr \int_0^{\arcsin \frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi +$$

$$+ \int_1^{\sqrt{2}} rdr \int_{\arccos \frac{1}{r}}^{\arcsin \frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi : \quad 3794. \quad \int_1^{\sqrt{2}} \left( \pi - 4 \arccos \frac{1}{r} \right) rf(r) dr +$$

$$+ \pi \int_0^1 rf(r) dr : \quad 3795. \quad \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(i g \varphi) \cos^2 \varphi d\varphi : \quad 3796. \quad -\frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\cos 2\varphi}{\sin^4 \varphi} f\left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\right) d\varphi :$$

$$3797. \quad \frac{\pi}{6} \int_0^{2/\sqrt{3}} rf(r^2) dr + \int_{2/\sqrt{3}}^2 \left( \frac{\pi}{3} - \arccos \frac{1}{r} \right) rf(r^2) dr : \quad 3798. \quad \frac{15}{2} a^4 : \quad 3799.$$

$$\frac{\sqrt{2}}{3} (b-a) R^3 : \quad 3800. \quad \operatorname{arcctg}|k| : \quad 3801. \quad \frac{\pi a^2}{16} : \quad 3802. \quad w)$$

$$\frac{6}{5} \cdot \frac{b^2 + b(b+h) + (b+h)^2 + (2b+h)\sqrt{b(b+h)}}{\sqrt{a(a+h)}(\sqrt{a} + \sqrt{a+h})(\sqrt{b} + \sqrt{b+h})}, \quad p) \quad \frac{3}{2} \left( \frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{2}} : \quad 3803.$$

$$4 \int_{1/2}^2 u du \int_{1/2}^2 f\left(\frac{2v}{u+v}, \frac{2uv}{u+v}\right) \frac{v}{(u+v)^3} dv : \quad 3804. \quad ab \int_0^1 rdr \int_0^{2\pi} f(\arccos \varphi, br \sin \varphi) d\varphi :$$

$$3805. \quad 4 \int_0^{\pi/2} \sin^3 v \cos^3 v dv \int_0^a uf(u \cos^4 v, u \sin^4 v) du : \quad 3806. \quad \frac{1}{2} \int_{-a}^a (a - |u|) f(u) du :$$

$$3807. \quad 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2} f(\sqrt{a^2+b^2}u+c) du : \quad 3808. \quad \ln 2 \int_1^2 f(u) du : \quad 3809. \quad 2\pi : \quad 3810.$$

$$\frac{9\pi}{16} : 3811. \quad \frac{\pi}{4} + \frac{5}{3} : 3812. \quad \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\pi}{24} : 3813. \quad \frac{1}{24} : 3814. \quad \frac{(2\sqrt{3}-9)a^2}{6} : 3815.$$

$$\frac{4}{3}\pi + 8\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} : 3816. \quad \frac{4}{3}(4-3\sqrt{2}+4\sqrt{3}) : 3818. \quad \frac{2}{3}(p+q)\sqrt{pq} : 3819.$$

$$\frac{\pi+6\sqrt{3}}{24} : 3820. \quad \frac{a^2}{3} : 3821. \quad \frac{1}{3}(\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{n}-\sqrt{m})(a+b+m+n+\sqrt{ab}+\sqrt{mn}) : 3822.$$

$$\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{2}}{3}\ln(1+\sqrt{2}) : 3823. \quad \frac{\pi a^2}{2} : 3824. \quad \frac{a^2}{6} : 3825. \quad \frac{5\pi}{16}a^2 : 3826. \quad \frac{3}{4}\pi a^2 : 3827.$$

$$\frac{ab\sqrt{ab}}{30c} : 3828. \quad \frac{21\pi}{256}ab\left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right) : 3829. \quad \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 : 3830. \quad \frac{65}{108}ab : 3831.$$

$$\frac{189}{16}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \frac{12}{25}\right)ab : 3832. \quad \frac{17}{12} - 2\ln 2 : 3833. \quad \frac{4}{9}\frac{a^3}{\sqrt[9]{\alpha}} : 3834. \quad \frac{3\pi a^4}{2\sqrt{2}c} : 3835.$$

$$\frac{16}{9}a^3 : 3836. \quad \left(\frac{2}{3}\pi + \frac{40}{9} - \frac{32}{9}\sqrt{3}\right)a^3 : 3837. \quad \frac{\pi ac^2}{2} : 3838. \quad \frac{3}{4}\pi(a+b) : 3839.$$

$$\frac{\pi}{12}\left(\frac{ab}{c}\right)^3 : 3840. \quad \left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}\right)abc : 3841. \quad \frac{am}{192}(a+m)(3a^2 - 5am + 3m^2) : 3842.$$

$$\frac{abc}{9} : 3843. \quad 8a^2 : 3844. \quad 8a^2 : 3845. \quad \frac{a^2}{9}(20 - 3\pi) : 3846. \quad 2\sqrt{2} : 3847.$$

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left[3 - \sqrt{\frac{3}{2}} + \ln\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + 1\right)\right] : 3848. \quad \frac{ab}{9}(20 - 3\pi) : 3849.$$

$$\frac{\pi}{6}(3\sqrt{10} + \ln(3 + \sqrt{10})) : 3850. \quad \frac{1}{3}abc\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\left[\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{c^3}\right] : 3851.$$

$$\frac{4}{3}(2\sqrt{2}-1)ab\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{b}} : 3852. \quad 2a^2 : 3853. \quad \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16} : 3854. \quad \frac{4}{5}\pi abc : 3855. \quad \frac{\pi}{6} : 3856.$$

$$\frac{1}{32}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)(b^8 - a^8)\left[\left(\beta^2 - \alpha^2\right)\left(1 + \frac{1}{\alpha^2\beta^2}\right) + 4\ln\frac{\beta}{\alpha}\right] : 3857.$$

$$F'(t) = 2 \iint_{(x-t)^2 + (y-t)^2 \leq 1} \frac{x+y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy \quad 3858. \quad \text{u)} \quad F'(t) = 4\pi a^2 f(t^2); \quad \text{p)} \quad F'(t) =$$

$$= \frac{3}{t} \left[ F(t) + \iiint_V xyz f'(xyz) dx dy dz \right] : 3859. \text{ Եթե } m, n \text{ և } p \text{ բվերից որևէ մեկը կենա}$$

$$\text{է: } \frac{(m-1)!!(n-1)!!(p-1)!!}{(m+n+p+1)!!} \cdot \frac{4\pi}{m+n+p+3}, \text{ եթե } m, n \text{ և } p \text{ բվերը զույգ են:}$$

$$3860. \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(r+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)} \cdot \Gamma(s+1):$$

$$3861. \int_0^1 dx \left\{ \int_0^x \int_0^{1-x} f(x, y, z) dy + \int_x^1 \int_{z-x}^{1-x} f(x, y, z) dy \right\} =$$

$$= \int_0^1 dz \left\{ \int_0^z \int_{z-y}^{1-y} f(x, y, z) dx + \int_z^1 \int_0^{1-y} f(x, y, z) dx \right\} :$$

$$3862. \int_{-1}^1 dx \int_{|x|}^1 dz \int_{-\sqrt{z^2 - x^2}}^{\sqrt{z^2 - x^2}} f(x, y, z) dy = \int_0^1 dz \int_{-z}^z dy \int_{-\sqrt{z^2 - y^2}}^{\sqrt{z^2 - y^2}} f(x, y, z) dx : 3863.$$

$$\int_0^1 dx \left\{ \int_0^{x^2} dz \int_0^1 f(x, y, z) dy + \int_{x^2}^{x^2+1} dz \int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x, y, z) dy \right\} = \int_0^1 dz \left\{ \int_0^{\sqrt{z}} dy \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x, y, z) dx + \right.$$

$$\left. + \int_{\sqrt{z}}^1 dy \int_0^1 f(x, y, z) dx \right\} + \int_1^2 dz \int_{\sqrt{z-1}}^1 dy \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x, y, z) dx : 3864. \frac{1}{2} \int_0^x (x-\xi)^2 f(\xi) d\xi :$$

$$3865. \frac{1}{2} \int_0^1 (2-z^2) f(z) dz + \frac{1}{2} \int_1^2 (2-z)^2 f(z) dz :$$

$$3866. \int_a^{2a} r^2 dr \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \int_0^{\pi/2} f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) d\theta :$$

$$3867. \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \sin \theta d\theta \int_0^{a \cos \theta} f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 dr :$$

$$3868. \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_0^{a \cos \theta} f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 dr : 3871. \frac{\pi^2 a^3}{4} :$$

$$3872. \frac{\pi a^3}{60} : 3873. \frac{32}{315} a^3 : 3874. \frac{a^3}{6} : 3875. \frac{\pi a^3}{8} : 3876. \frac{2}{3} \pi^2 a^3 : 3877. \frac{2}{3} \pi a^3 :$$

$$3878. \frac{abc}{3} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right) : 3879. \frac{abc}{554400} : 3880. \frac{abc}{1680} : 3881. \frac{4\pi}{35} abc : 3882.$$

$$\frac{abc}{60} \cdot \frac{pq}{aq+bp} \left(\frac{a}{p}\right)^4 : 3883. \frac{abc}{60} \cdot \frac{p(5c+4p)}{(c+p)^2} : 3884. x_0 = -\frac{a}{2}, y_0 = \frac{8a}{5} : 3885.$$

$$x_0 = y_0 = \frac{a}{5} : 3886. x_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi}, y_0 = \frac{1}{4} : 3887. x_0 = \frac{3\pi a}{64}, y_0 = \frac{3\pi b}{64} : 3888.$$

$$x_0 = y_0 = \frac{4\pi a}{9\sqrt{3}} : 3889. x_0 = y_0 = \frac{\pi a}{8} : 3890. \frac{1}{8} a^4 (2\varphi - \sin 2\varphi) -$$

$$-\frac{1}{6} a^4 \cos \varphi \sin^3 \varphi : 3891. I_x = \frac{\pi a b^3}{4}, I_y = \frac{\pi a^3 b}{4} : 3892. \frac{4 h_1 h_2 (a_1^2 h_2^2 + a_2^2 h_1^2)}{|a_1 b_2 - a_2 b_1|^3} :$$

$$3893. \frac{3\pi}{4\sqrt{2}} : \frac{4}{3} : 3894. x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = \frac{3}{4} h : 3895. x_0 = y_0 = z_0 = \frac{9\pi a}{448} :$$

$$3896. \frac{x_0}{a} = \frac{y_0}{b} = \frac{z_0}{c} = \frac{9\pi}{448} : 3897. \frac{x_0}{a} = \frac{y_0}{b} = \frac{z_0}{c} = \frac{3}{4} \frac{\Gamma(2/n)\Gamma(3/n)}{\Gamma(1/n)\Gamma(4/n)} : 3898.$$

$$x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = \frac{7}{30} c : 3899. \frac{I_{yz}}{a^3 bc} = \frac{I_{zx}}{ab^3 c} = \frac{I_{xy}}{abc^3} = \frac{15\pi^2}{256\sqrt{2}} : 3900.$$

$$\frac{I_{yz}}{a^3 bc} = \frac{I_{zx}}{ab^3 c} = \frac{I_{xy}}{abc^3} = \frac{1}{5n^2} \frac{\Gamma^2(1/n)\Gamma(3/n)}{\Gamma(5/n)} : 3901. I_z = \frac{4\pi}{15} (4\sqrt{2} - 5) :$$

$$3902. I_z = \frac{\pi a^5}{5} : 3903. I_x = \frac{\pi a b h}{20} (b^2 + 4h^2) : 3906. \frac{c^2}{4} [(v_1 - v_2)(sh 2u_2 - sh 2u_1) -$$

$$-(u_2 - u_1)(\sin 2v_2 - \sin 2v_1)] : 3907. \frac{c^2}{6} (\sqrt{10} - 2) \arcsin \frac{1}{3} : 3908. \frac{2}{3} \pi a^2 : 3910.$$

$$\frac{6\pi}{7\sqrt{7}} : 3911. a(\varphi_2 - \varphi_1)[b(\psi_2 - \psi_1) + a(\sin \psi_2 - \sin \psi_1)] : 4\pi^2 ab : 3913.$$

$$\text{Գույքամես է, եթիվ } p > 1 \text{ և } q > 1 : 3914. \text{ Գույքամես է, եթիվ } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1 : 3915.$$

Զուգամես է, եթիւ  $p > \frac{1}{2}$ : 3917. Զուգամես է: 3918. Զուգամես է, եթիւ  $p < 1$ :

3919. Զուգամես է, եթիւ  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$ : 3920. Զուգամես է, եթիւ  $p > \frac{3}{2}$ : 3921.

Զուգամես է, եթիւ  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$ : 3922. Զուգամես է, եթիւ  $p < 1$ : 3927.

$\frac{2^n h_1 \cdots h_n}{|\Delta|}$ : 3928.  $\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(1+n/2)} r^n$ : 3929.  $\frac{a_1 \cdots a_n}{n!}$ : 3930.  $\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} a_1 \cdots a_n}{n! \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ : 3931.

$\frac{8abc}{mn + mp + np} \cdot \frac{\Gamma(1/m)\Gamma(1/n)\Gamma(1/p)}{\Gamma(1/m + 1/n + 1/p)}$ : 3932.  $\frac{a^n}{n!}$ : 3933.  $\frac{2}{(n-1)!(2n+1)}$ : 3934.

$2^n \frac{R^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{2^{\frac{n-1}{2}}}{(n-2)!!} \pi^{\frac{n-1}{2}}$ , եթիւ  $n$ -ը կենա է,  $2^n \frac{R^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{2^{\frac{n-2}{2}}}{(n-2)!!} \pi^{\frac{n}{2}}$ , եթիւ  $n$ -ը զոյլ

է: 3935.  $\frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ : 3941.  $\frac{1}{n+1}$ : 3942. 1: 3944. 0:

## Գլուխ 17

3947.  $\sqrt{2}/2$ : 3948.  $\ln \frac{\sqrt{5}+3}{2}$ : 3949.  $1+\sqrt{2}$ : 3950. 0: 3951.  $\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$ :

3952.  $\frac{\pi a^3}{2}$ : 3953.  $\frac{256}{15}a^3$ : 3954.  $2\pi^2 a^3 (1+2\pi^2)$ : 3955. 2: 3956.

$\frac{2\pi}{3}(3a^2 + 4\pi^2 b^2) \sqrt{a^2 + b^2}$ : 3957.  $\frac{1}{3} \left[ \left(2+t_0^2\right)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}} \right]$ : 3958.  $\sqrt{2}-1$ : 3959.

$\frac{670}{27}$ : 3960.  $\ln(\sqrt{2}+1)$ : 3961.  $\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})$ : 3962.  $\sqrt{3}$ : 3963.  $\pi$ : 3964.

$\frac{14}{3} - \ln 4$ : 3965. 8: 3966.  $-\frac{8}{15}$ : 3967.  $\frac{4}{3}$ : 3968.  $-2\pi ab$ : 3969.  $-2\pi a^2$ : 3970.

$$\frac{1}{35} : 3971. - \pi a^2 : 3972. - 2\pi : 3973. 0 : 3974. 13 : 3975. 8 : 3976. 12 : 3977. 4 :$$

$$3978. - 2 : 3979. \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) dx + \int_{y_1}^{y_2} \psi(y) dy : 3980. 62 : 3981. - 1,5 : 3982. 9 :$$

$$3983. 1 : 3984. - 53 \frac{7}{12} : 3985. 0 : 3986. x^3/3 + xy^2 + C : 3987.$$

$$u = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{3x-y}{2y\sqrt{2}} + C : 3988. u = -\frac{2y^2}{(x+y)^2} + \ln|x+y| + C : 3989.$$

$$e^{x+y}(x-y+1) + ye^x + C : 3990. \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - 2xyz + C : 3991. x - \frac{x}{y} +$$

$$+ \frac{xy}{z} + C : 3992. - 44 : 3993. \frac{\pi a^4}{2} : 3994. - 2\pi ab : 3995. - \frac{1}{5}(e^\pi - 1) : 3996. 0 :$$

$$3997. 1/3 : 3998. 1,125 : 3999. 0,8 : 4000. \pi ab : 4001. 0,375\pi ab : 4002. a^2/6 :$$

$$4003. 3\sqrt{3} + 4\pi/3 : 4004. \text{w) } \frac{7\sqrt{21}}{3}; \text{ p) } \pi : 4005. \text{w) } \frac{8}{3}\pi R^4; \text{ p) } \frac{\pi}{2}(1 + \sqrt{2}) :$$

$$4006. \frac{3 - \sqrt{3}}{2} + (\sqrt{3} - 1)\ln 2 : 4007. \frac{125\sqrt{5} - 1}{420} : 4008. 2\pi a \ln \frac{H + \sqrt{a^2 + H^2}}{a} :$$

$$4009. \frac{\pi a^4}{2} \sin \alpha \cos^2 \alpha : 4011. 2a^2 : 4012. 2a^2(2 - \sqrt{2}) : 4013. \frac{2}{3}\pi a^3 : 4014.$$

$$2\pi\sqrt{2}a^2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) : 4015. - \frac{\pi a^3}{4} : 4019. 2 : 4020. 2\pi, \text{երք } (0;0)-ն պատկա-$$

$$\text{նում է } L\text{-ով սահմանափակված սիրույթին և } 0, \text{ երք } (0;0)\text{-ն չի պատկանում}$$

$$\text{այդ սիրույթին: } 4021. 1,5a^2 : 4022. a^2 : 4023. \frac{1}{3} + \frac{4\pi\sqrt{3}}{27} : 4024.$$

$$\frac{a^2}{2} B(2m+1, 2n+1), \text{ որտեղ } B\text{-ն էյլերի բեստա ֆունկցիան է: } 4025.$$

$$\frac{ab\Gamma^2(1/n)}{2n\Gamma(2/n)}, \text{ որտեղ } \Gamma\text{-ն էյլերի գամմա ֆունկցիան է: } 4026. \frac{ab}{n} \left[ 1 + \frac{(n-1)\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}} \right] :$$

$$4027. \frac{abc^2}{2(2n+1)} : 4028. \pi r^2(n+1)(n+2) : 4029. \pi r^2(n-1)(n-2) : 4030. 4a^2 :$$

$$4032. (4\pi - 2\sqrt{3})a^4 : 4033. \frac{7\pi\sqrt{2}a^3}{2} : 4034. \frac{64}{15}\sqrt{2}a^4 : 4036. -\frac{2}{3}\pi H^3 : 4037. \text{ա)$$

$$0; \quad \text{p)} \quad \frac{2\pi}{3}R^3 : 4038. \quad 4\pi R^3 : 4039. \quad abc \left[ \frac{f(a)-f(0)}{a} + \frac{g(b)-g(0)}{b} + \frac{h(c)-h(0)}{c} \right] : 4040. \quad \frac{8\pi}{3}(a+b+c)R^3 : 4042. \quad -\pi a^2 \sqrt{3} : 4043. \quad \frac{40\sqrt{3}}{9}\pi : 4044.$$

$$\frac{h^3}{3} : 4045. \quad 0 : 4046. \quad 2\pi(a+h) : 4047. \quad 2\pi Rr^2 : 4048. \quad 3a^4 : 4049. \quad \text{ա)} 2,4\pi a^5; \quad \text{p)}$$

$$-\pi/10 : 4050. \quad 1 : 4053. \quad \frac{4\pi}{3} \left( a^2 + \frac{b^2}{2} \right) |c| : 4054. \quad \frac{2}{9}a^3 : 4055. \quad 2\pi^2 a^2 b : 4056. \quad \text{ա)}$$

$$(3;-2;-6); \quad \text{p)} \quad (7;0;0); \quad \text{grad } u = \mathbf{0} \quad (-2;1;1) \quad \text{կետում}: 4057. \quad \text{ա)} \quad z^2 = xy; \quad \text{p)}$$

$$x=y=0 \quad \text{և} \quad x=y=z; \quad \text{q)} \quad x=y=z : 4058. \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 1:$$

$$4059. \arccos\left(-\frac{8}{9}\right) : 4062. \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{2u}{r}, \quad \text{որություն} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial r} = |\text{grad } u|,$$

$$\text{եթք} \quad a=b=c : 4063. \quad \frac{\partial u}{\partial l} = -\frac{\cos \varphi}{r^2}, \quad \text{որություն} \quad \varphi - 0 \quad \text{l-ի} \quad \text{և} \quad (x; y; z) \quad \text{կետի} \quad \text{շառավիղ}$$

$$\text{վեկտորի} \quad \text{կազմած} \quad \text{անկյունն} \quad \text{է}: 4064. \quad \frac{\langle \text{grad } u, \text{grad } v \rangle}{|\text{grad } v|} : 4069. \quad \text{ա)} \quad 28; \quad \text{p)} \quad 18/125 :$$

$$4073. \quad \text{ա)} \quad \mathbf{i} + \mathbf{j}; \quad \text{p)} \quad -1,25\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2,5\mathbf{k} : 4074. \quad \pi/2 : 4077. \quad \text{ա)} \quad 0; \quad \text{p)} \quad 0 : 4078. \quad 3\pi/8 :$$

$$4079. \quad \pi/5 : 4081. \quad 188/21 : 4082. \quad 0,75(3 + e^4 - 12e^{-2}) : 4083. \quad \text{ա)} \quad -\pi\alpha^2; \quad \text{p)}$$

$$2\pi\alpha\beta; \quad \text{ոչ} : 4084. \quad -\frac{4\pi\sqrt{3}}{9} : 4085. \quad 4\pi : 4086. \quad 2S : 4087. \quad xy + e^z + C : 4088.$$

$$xy + yz + xz + C : 4089. \quad \Omega_{\Sigma} : 4090. \quad \text{Այն:} \quad 4091. \quad \text{Այն:} \quad 4093. \quad \pm mS + e^{x_2}\varphi(y_2) - e^{x_1}\varphi(y_1) - m(y_2 - y_1) - \frac{m}{2}(x_2 - x_1)(y_2 + y_1) : 4094. \quad \text{sgn}(ad - bc) : 4095.$$

$$I = \sum_{i=1}^n \text{sgn} \frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} \Big|_{(x_i, y_i)} : 4097. \quad 2P : 4098. \quad U = -2\pi R \ln R, \quad \text{եթք}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \leq R; \quad U = -2\pi R \ln \rho, \quad \text{եթք} \quad \rho > R : 4099. \quad u = 2\pi, \quad \text{եթք} \quad A \text{-ի} \quad L \text{-ի} \\ \text{ներսում} \quad \text{է}; \quad u = \pi, \quad \text{եթք} \quad A \text{-ի} \quad L \text{-ի} \quad \text{վրա} \quad \text{է}; \quad u = 0, \quad \text{եթք} \quad A \text{-ի} \quad L \text{-ից} \quad \text{դուրս} \quad \text{է}: 4107.$$

$$F(t) = \frac{\pi}{18} (3 - t^2)^2, \quad \text{if } |t| \leq \sqrt{3}; \quad F(t) = 0, \quad \text{if } |t| > \sqrt{3}.$$

4108.  $F(t) =$

$$= \frac{\pi(8 - 5\sqrt{2})}{6} t^4: 4109. \quad 0, \quad \text{if } t \leq r - a; \quad \frac{\pi t}{r} [a^2 - (r - t)^2], \quad \text{if } r - a < t < r + a; \quad 0, \quad \text{if } t > r + a \quad (t \geq 0); 4113. \text{ u) } 4\pi; \text{ p) } 0;$$

## Գրականություն

1. Б.П. Демидович // Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Москва “Наука”, 1977.
2. Н.М. Гюнтер, Р.О. Кузьмин // Сборник задач по высшей математике. Москва “Гостехиздат”, 1957, т.т. 1-3.
3. Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин // Сборник задач по математическому анализу. Москва “Наука”, 1984, т.т. 1-3.
4. И.В. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий // Задачи и упражнения по математическому анализу. Москва, Изд. МГУ, 1988.
5. Г. Полиа, Г. Сеге // Задачи и теоремы из анализа. Москва “Наука”, 1978, т.т. 1-2.
6. Б. Гелбаум, Дж. Олмстед // Контрпримеры в анализе. Москва “Мир”, 1967.
7. В.А. Садовничий, А.С. Подколзин // Задачи студенческих олимпиад по математике. Москва “Наука”, 1978.
8. М. Спивак // Математический анализ на многообразиях. Москва “Мир”, 1968.
9. А.Е. Аветисян, Г.А. Тоноян // Числовые ряды и последовательности. Ереван, Изд. ЕГУ, 1978.
10. А.Е. Аветисян, С.А. Акопян, Г.А. Тоноян // Функция, непрерывность, производная. Ереван, Изд. ЕГУ, 1981.
11. А.Е. Аветисян, С.А. Акопян, Г.А. Тоноян // Интеграл. Ереван, Изд. ЕГУ, 1984.
12. Ո. Ռուդիկն // Մաթեմատիկական անալիզի հիմունքները. Երևան “Լույս”, 1975.
13. Գ.Ա. Տոնոյան // Ուսանողական մաթեմատիկական մրցույթներ. Երևան, ԵՊՀ, 1978.
14. Լ.Հ. Գալսայան // Տասներկու խնդիր մաթեմատիկական անալիզից. Երևան, ԵՊՀ, 1990.

## Բ ո վ ա ն դ ա կ ու թ յ ու ն

Գլուխ 10. Թվային շարքեր և անվերջ արատադրյալներ . . . . .	3
Գլուխ 11. Ֆունկցիոնալ հաջորդականություններ և շարքեր . . . . .	39
Գլուխ 12. Վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիաներ, Սահմանափակություններ . . . . .	76
Գլուխ 13. Ծառ վորպիշտականի ֆունկցիաներ, ֆունկցիայի անընդհատությունը. . . . .	96
Գլուխ 14. Ծառ վորպիշտականի ֆունկցիաների դիֆերենցումը, անբացահայտ ֆունկցիաներ . . . . .	119
Գլուխ 15. Պարամետրից կախված ինսեգրալներ . . . . .	150
Գլուխ 16. Ծառ վորպիշտականի ֆունկցիաների ինսեգրումը. . . . .	173
Գլուխ 17. Կորազիծ և մակերևութային ինսեգրալներ, վեկտորական անալիզի տարրերը . . . . .	203
Պատասխաններ . . . . .	232
Դրականություն. . . . .	264