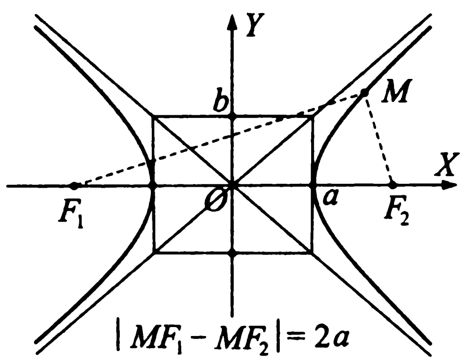
Վ.Ա. ՓԻԼԻՊՈՍՅԱՆ, Հ.Հ. ՕՀՆԻԿՅԱՆ

ՎԵՐԼՈՒԾԱԿԱՆ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴՐԱԳԻՐՔ

ԱՌԱՋԻՆ ՄԱՍ



ԵՐԵՎԱՆ – 2012

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Վ. Ա. ՓԻԼԻՊՈՍՅԱՆ, Հ. Հ. ՕՀՆԻԿՅԱՆ

ՎԵՐԼՈՒԾԱԿԱՆ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴՐԱԳԻՐՔ

ԱՌԱՋԻՆ ՄԱՍ

Երաշխավորված է ՀՀ ԳԿ նախարարության կողմից որպես բուհերի ուսումնական ձեռնարկ

ԵՐԵՎԱՆ
ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
2012

ՀՏԴ 514.12 (076.1)
ԳՄԴ 22.151.5 ց7
Փ 553

Հրատարակության է երաշխավորել
ԵՊՀ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի
ֆակուլտետի խորհուրդը

ՓԻԼԻՊՈՍՅԱՆ Վ.Ա., ՕՀՆԻԿՅԱՆ Հ.Հ.

Փ 553 Վերլուծական երկրաչափության խնդրագիրք / Վ. Փիլիպոսյան, Հ. Օհնիկյան. – Եր.: ԵՊՀ հրատ., 2012. – 132 էջ:

Խնդրագիրքը կազմվել է Երևանի պետական համալսարանի մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի հանրահաշվի և երկրաչափության ամբիոնում «Վերլուծական երկրաչափություն» առարկայի դասավանդման գործող ծրագրին համապատասխան և նախատեսված է ՀՀ բուհերի բնագիտական ֆակուլտետներում սովորող ուսանողների համար:

ՀՏԴ 514.12 (076.1)
ԳՄԴ 22.151.5 ց7

ISBN 978-5-8084-1556-0

ՆԱԽԱԲԱՆ

Սույն «Վերլուծական երկրաչափության խնդրագիրք»-ը կազմվել է Երևանի պետական համալսարանի մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի հանրահաշվի և երկրաչափության ամբիոնում «Վերլուծական երկրաչափություն» առարկայի դասավանդման գործող ծրագրին համապատասխան և նախատեսված է առաջին կուրսի ուսանողների համար:

Վերլուծական երկրաչափության և ծրագրային նյութը, և նրա համար կազմված ներկա խնդրագիրքն ունեն ավանդական դասական բնույթ, իսկ դիտարկվող երկրաչափական պատկերները դուրս չեն գալիս տեսողաբար ընկալվող տարածության շրջանակներից:

Խնդրագիրքը կազմված է երկու մասից: Առաջին մասում զետեղված են վեկտորները և նրանց հետ կատարվող հիմնական գործողությունները, ուղիղը հարթության մեջ, երկրորդ կարգի կորերի տեսություն թեմաները, իսկ երկրորդ մասում՝ ուղիղը և հարթությունը տարածության մեջ, երկրորդ կարգի մակերևույթների ընդհանուր տեսություն, հարթության աֆինական ձևափոխությունները թեմաները:

Խնդրագիրքը կազմելիս հիմնականում օգտվել ենք Պ.Ս. Մոդենովի և Ա.Ս.Պարխոմենկոյի «Անալիտիկ երկրաչափության խնդիրների ժողովածու»-ից, տեսականորեն ընտրված խնդիրները: Մեր կողմից ավելացվել են տեսական բնույթի հարցեր ու խնդիրներ: Կազմվել են նաև նոր խնդիրներ:

Հեղինակները ձգտել են հնարավորինս հեշտացնել ուսանողների հոգսը խնդիրներ լուծելիս: Այդ նպատակով յուրաքանչյուր ենթաբաժին համալրվել է անհրաժեշտ տեսական նյութի հակիրճ շարադրանքով և տվյալ բաժնի տիպային խնդիրների լուծումներով:

Խնդրագիրքը կարելի է օգտագործել ՀՀ բուհերի բոլոր այն ֆակուլտետներում, որտեղ դասավանդվում է վերլուծական երկրաչափություն առարկան:

ԳԼՈՒԽ ԱՌԱՋԻՆ

ՎԵԿՏՈՐԱԿԱՆ ՀԱՇԻՎ

Վեկտորական հաշվի հիմքում ընկած են վեկտորները և նրանց հետ կատարվող գործողությունները: Հիմնական գործողությունները չորսն են՝ վեկտորների գումարումը, բազմապատկումը թվով, սկալյար և վեկտորական արտադրյալները:

§1. Վեկտորներ, ազատ վեկտորներ, նրանց գումարումը և բազմապատկումը թվով

Վեկտոր կոչվում է ուղղորդված հատվածը, կամ կետերի կարգավորված զույգը: Վեկտորների համար գործածվում են $\overrightarrow{AB}$ կամ $\overline{AB}$ նշանակումները, որտեղ A-ն կոչվում է վեկտորի ***սկզբնակետ*** կամ ***ելակետ***, B-ն՝ ***վերջնակետ***: ***Վեկտորի երկարություն*** կոչվում է AB հատվածի երկարությունը և նշանակվում է $|\overrightarrow{AB}|$-ով, կամ $|\overline{AB}|$-ով: Եթե վեկտորի սկզբնակետն ու վերջնակետը նույնն են, ապա վեկտորը կոչվում է ***զրոյական վեկտոր***, իսկ նրա երկարությունը համարվում է 0:

Վեկտորների հետ որոշակի հատկություններով գործողություններ սահմանելու նպատակով, ներմուծվում է ազատ վեկտորի հասկացությունը: Ազատ վեկտորի սահմանման համար կա երկու մոտեցում:

Առաջին եղանակի դեպքում, ինչպես դպրոցական գործող դասագրքերում է, երկու վեկտորներ համարվում են հավասար, եթե համապատասխանաբար նրանց սկզբնակետերն ու վերջնակետերը միացնելիս ստացվում է զուգահեռագիծ, և կամ էլ նրանք գտնվում են մի ուղղի վրա, ունեն հավասար երկարություններ և ուղղված են նույն կողմը: Այն ինչ ստացվում է այս նույնացումների արդյունքում կոչվում է ***ազատ վեկտոր***:

Երկրորդ, ավելի նախընտրելի, եղանակի հիմքում ընկած է վեկտորների համարժեքության հասկացությունը: Եթե երկու վեկտորներ այնպիսին են, ինչպես նշված է վերը, ապա դրանք համարվում են ***համարժեք*** (հավասար համարվում են միայն միմյանց հետ համընկած վեկտորները) : Այս դեպքում ազատ վեկտորը սահմանվում է որպես միմյանց համարժեք բոլոր հնարավոր վեկտորների համախմբություն: Իրենք՝ սովորական վեկտորները, կոչվում են տվյալ ազատ վեկտորի ներկայացուցիչներ: Ազատ վեկտորներն արդեն չունեն սկզբնակետ և վերջնակետ: Նրանց համար գործածվում են մի տառանոց նշանակումներ՝ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{0}$ և այլն:

Նշենք, որ ազատ վեկտորը կարելի է սահմանել նաև որպես զուգահեռ տեղափոխության ձևափոխություն:

Հաճախ հանդիպող «*տրված է* $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ *վեկտորը*» արտահայտությունը պետք է կարդալ «*տրված է* $\vec{a}$ *ազատ վեկտորն իր* $\overrightarrow{AB}$ *ներկայացուցչով*»: Այնուհետև՝ «*կիրառենք* $\vec{a}$ *վեկտորն* A *կետից*» արտահայտությունը նշանակում է՝ «*դիտարկենք* $\vec{a}$ *ազատ վեկտորի այն ներկայացուցիչը, որի սկզբնակետը* A *-ն է*»: Ի նկատի ունենալով ասվածը, այսուհետև ազատ վեկտորին կանվանենք պարզապես վեկտոր:

Մի քանի վեկտորներ կոչվում են ***համագիծ*** (***համախարք***), եթե մի կետից կիրառելիս նրանք գտնվում են մի ուղղի (հարթության) վրա:

Եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են, ապա գրում ենք $\vec{a}\parallel\vec{b}$:

Համագիծ վեկտորները կոչվում են ***համուղղված*** ($\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$), եթե ունեն նույն ուղղությունը, և ***հակուղղված*** ($\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$), հակառակ դեպքում:

Որևէ $\vec{a}\neq\vec{0}$ ***վեկտորի և*** $k\neq 0$ ***թվի արտադրյալ,*** որը նշանակվում է $k\vec{a}$ -ով, կոչվում է $\vec{a}$ -ին համագիծ այն վեկտորը, որ

ա) $|k\vec{a}|=|k|\cdot|\vec{a}|$,

բ) $(k\vec{a})\uparrow\uparrow\vec{a}$, երբ $k>0$, և $(k\vec{a})\uparrow\downarrow\vec{a}$, երբ $k<0$,

գ) եթե $\vec{a}=\vec{0}$ կամ $k=0$, ապա սահմանվում է $k\vec{a}=\vec{0}$:

Երկու $\vec{a}$ և $\vec{b}$ ***վեկտորների գումարը,*** որը նշանակվում է $\vec{a}+\vec{b}$ -ով, սահմանվում է զուգահեռագծի կամ եռանկյան կանոնով՝ եթե $\vec{a}=\overrightarrow{LM}$, $\vec{b}=\overrightarrow{MN}$, ապա $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{LN}$:

Զրոյական ազատ վեկտորը և $\vec{a}=\overrightarrow{LM}$ վեկտորի ***հակադիր վեկտորը***՝ $-\vec{a}$ -ն սահմանվում են համապատասխանաբար $\vec{0}=\overrightarrow{AA}$ և $-\vec{a}=\overrightarrow{ML}$ հավասարություններով, որտեղ A -ն կամայական կետ է:

Վեկտորների գումարման և թվով բազմապատկման գործողությունները օժտված են հետևյալ հատկություններով՝

1). $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$,

2). $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$,

3). $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$,

4). $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$,

5). $k_1(k_2\vec{a})=(k_1k_2)\vec{a}$,

6). $(k_1+k_2)\vec{a}=k_1\vec{a}+k_2\vec{a}$,

7). $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$,

8). $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$,

կամայական $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ վեկտորների և կամայական k_1, k_2 իրական թվերի համար:

Եթե $\vec{a} = k_1\vec{b} + k_2\vec{c}$, ապա ասում ենք, որ $\vec{a}$ *վեկտորը ներկայացված է* $\vec{b}$ և $\vec{c}$ *վեկտորներով*:

Խնդիր 1. Ապացուցել, որ $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{CD}$ վեկտորները հավասար են (համարժեք են) այն և միայն այն դեպքում, երբ համընկնում են AD և BC հատվածների միջնակետերը:

Ապացուցում: Դիցուք $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ և O-ն AD-ի միջնակետն է: Ցույց տանք, որ O-ն նաև BC-ի միջնակետն է:

Քանի որ $AO = OD$ և $O \in AD \Rightarrow \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OD}$:

Ունենք $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC}$:

Ստացանք $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OC}$: Այսինքն O-ն BC-ի միջնակետն է:

Այժմ՝ հակառակը: Դիցուք O-ն AD և BC հատվածների միջնակետն է: Ուստի $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OC}$ և $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OD}$: Ապացուցենք, որ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$:

Ունենք $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{CD}$, ինչ և պետք էր ապացուցել:

Խնդիր 2. Դիցուք $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ և $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ վեկտորները ներկայացվում են ABC եռանկյան կողմերով: Արտահայտել AD կիսորդով ներկայացվող վեկտորը $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների միջոցով:

Լուծում: Ունենք $CD : DB = AC : AB = |\vec{a}| : |\vec{b}|$, որտեղից

$CD = \dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}CB$: Քանի որ $\overrightarrow{CD}$ և $\overrightarrow{CB}$ վեկտորները համուղղված են,

ուստի $\overrightarrow{CD} = \dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\overrightarrow{CB} = \dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}(\vec{b} - \vec{a})$:

Հետևաբար

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \vec{a} + \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\vec{a} + \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\vec{b}$$

Պատ.՝ $\overrightarrow{AD} = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\vec{a} + \dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\vec{b}$:

*

* * *

1. Դիցուք ազատ վեկտորը սահմանված է որպես ուղղի, հարթության կամ տարածության զուգահեռ տեղափոխության ձևափոխություն: Երկու վեկտորների գումարման գործողությունը մեկնաբանել ձևափոխությունների միջոցով:

2. Հավասարաչափ և ուղղագիծ շարժվող երկու նավեր ժամանակի նույն պահին գտնվում են ծովի A և B կետերում: Նրանց արագությունները տրված են այդ կետերում կիրառված $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների ներկայացուցիչներով: Կառուցել շարժման ընթացքում նրանց միջև հնարավոր ամենակարճ հեռավորությունը:

3. Դիցուք $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$ և $\overrightarrow{BD}=\vec{b}$ վեկտորները ներկայացվում են $ABCD$ զուգահեռագծի անկյունագծերով: Արտահայտել $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ և $\overrightarrow{DA}$ վեկտորները $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների միջոցով:

4. Դիցուք K-ն և L-ը $ABCD$ զուգահեռագծի BC և CD կողմերի միջնակետերն են: Արտահայտել $\overrightarrow{BC}$ և $\overrightarrow{CD}$ վեկտորները $\overrightarrow{AK}$-ի և $\overrightarrow{AL}$-ի միջոցով և հակառակը:

5) Տրված են A, B, C և D կետերը, որտեղ D-ն AB-ի միջնակետն է: Ապացուցել, որ $\overrightarrow{CD}=\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)/2$:

6. Եռանկյուն ABC-ում $\overrightarrow{AD}$-ն, $\overrightarrow{BE}$-ն և $\overrightarrow{CF}$-ը միջնագծերով ներկայացվող վեկտորներն են: Ապացուցել, որ

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}:$$

7 Դիցուք $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$ և $\overrightarrow{BD}=\vec{b}$ վեկտորները ներկայացվում են $ABCD$ սեղանի անկյունագծերով, որի AD և BC հիմքերի հարաբերությունը հավասար է λ-ի: Արտահայտել $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ և $\overrightarrow{DA}$ վեկտորները $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների միջոցով:

8) Սեղան $ABCD$-ի սրունքներով ներկայացվող վեկտորներն են՝ $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{b}$: Հիմքերի միջնակետերը միացնող վեկտորն արտահայտել այդ վեկտորներով:

9. Ապացուցել, որ $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{CD}$ վեկտորները հավասար են այն և միայն այն դեպքում, երբ համընկնում են AD և BC հատվածների միջնակետերը: Որպես հետևանք արտածել զուգահեռագծի անկյունագծերի հատկությունը:

10. Դիցուք K-ն և L-ը $ABCD$ (հարթ կամ տարածական) քառան-

կյան AB և CD կողմերի միջնակետերն են: Ապացուցել, որ $\overrightarrow{KL} = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})/2$: Որպես հետևանք արտածել սեղանի միջին գծի հատկությունը:

11. Դիցուք K-ն և L-ը $ABCD$ (հարթ կամ տարածական) քառանկյան AC և BD անկյունագծերի միջնակետերն են: Գտնել $\overrightarrow{KL}$-ը, եթե

ա) $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$, բ) $\overrightarrow{AD} = \vec{m}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{n}$:

12. Զուգահեռագիծ $ABCD$-ում AD կողմի և AC անկյունագծի վրա վերցված են համապատասխանաբար K և L կետերն այնպես, որ $AK = AD/5$ և $AL = AC/6$: Ապացուցել, որ K, L և B կետերն ընկած են մի ուղղի վրա:

13. Քառանկյուն $ABCD$-ում K, L, M, N կետերը համապատասխանաբար AB, BC, CD, DA կողմերը բաժանում են միևնույն λ հարաբերությամբ: Ապացուցել, որ ա) եթե $ABCD$-ն զուգահեռագիծ է, ապա $KLMN$-ը ևս զուգահեռագիծ է,

բ) եթե $KLMN$-ը զուգահեռագիծ է և $\lambda \neq 1$, ապա $ABCD$-ն ևս զուգահեռագիծ է:

14. Ապացուցել, որ ABC եռանկյան հարթության մեջ գոյություն ունի միակ M կետ, որ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$:

15. Նախորդ խնդրից, որպես հետևանք, արտածել եռանկյան միջնագծերի հատկությունը:

16. Եռանկյուն ABC-ում M-ը միջնագծերի հատման կետն է: Ապացուցել, որ կամայական D կետի համար

$$\overrightarrow{DM} = (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})/3:$$

17. Ապացուցել, որ կամայական A, B, C, D կետերի համար, գոյություն ունի միակ M կետ, որ

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0} :$$

18. Ապացուցել, որ քառանիստի հանդիպակաց կողերի միջնակետերը միացնող բոլոր հատվածները (քառանիստի միջին գծերը) հատվում են մի կետում և այդ կետով կիսվում են:

19. Ապացուցել, որ քառանիստի յուրաքանչյուր գագաթը դիմացի նիստի միջնագծերի հատման կետին միացնող հատվածները (քառանիստի միջնագծերը) հատվում են մի կետում և այդ կետով բաժանվում են 3:1 հարաբերությամբ, հաշված գագաթներից:

20. Փորձեք ընդհանրացնել № 18 և № 19 խնդիրներում սահմանված միջին գծի և միջնագծի հասկացությունները կամայական քանակով կետերի համար: Ապացուցեք, որ բոլոր այդ հատվածները հատվում են մի կետում և գտեք հատման կետով նշված հատվածների տրոհման հարաբերությունը:
21. Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցել, որ ինչպիսին էլ լինեն $A_1, A_2, \ldots, A_n$ կետերը, գոյություն ունի միակ M կետ, որ $\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\ldots+\overrightarrow{MA_n}=\vec{0}$:
22. Կիցուք φ_0^α-ն հարթության պտույտ է O կետի շուրջը α անկյունով (ժամսլաքի ուղղությամբ, եթե $\alpha<0$ և ժամսլաքի հակառակ ուղղությամբ, եթե $\alpha>0$): Ապացուցել, որ

ա) $\varphi_0^\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\varphi_0^\alpha(\vec{a})+\varphi_0^\alpha(\vec{b})$, բ) $\varphi_0^\alpha(\lambda\cdot\vec{a})=\lambda\cdot\varphi_0^\alpha(\vec{a})$:

23. Ապացուցել, որ կանոնավոր բազմանկյան կենտրոնից դեպի գագաթները գնացող վեկտորների գումարը զրոյական վեկտոր է:
24. Ապացուցել, որ կամայական կետից դեպի կանոնավոր բազմանկյան կենտրոն գնացող վեկտորը այդ նույն կետից դեպի գագաթները գնացող վեկտորների միջին թվաբանականն է:

§2. Վեկտորների համակարգի գծային կախվածությունն ու անկախությունը

Եթե $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}$ որևէ վեկտորներ են, իսկ $k_1, k_2, \ldots, k_n$-ը որևէ թվեր, ապա $k_1\vec{a_1}+k_2\vec{a_2}+\ldots+k_n\vec{a_n}$ վեկտորը կոչվում է $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}$ վեկտորների ***գծային զուգակցություն*** $k_1, k_2, \ldots, k_n$ գործակիցներով:

Վեկտորների համակարգը կոչվում է ***գծորեն կախյալ համակարգ***, եթե այդ վեկտորներից գոնե մեկը ներկայացվում է որպես մյուսների գծային զուգակցություն:

Հակառակ դեպքում վեկտորների համակարգը կոչվում է ***գծորեն անկախ համակարգ***:

Մի վեկտորից բաղկացած համակարգը համարվում է կախյալ համակարգ, եթե այդ վեկտորը զրոյական է, և անկախ համակարգ, եթե այդ վեկտորը զրոյական չէ:

Վեկտորների որևէ համախմբությունը կոչվում է ***վեկտորական*** կամ ***գծային բազմաձևություն***, եթե այն իր կամայական երկու $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների հետ մեկտեղ պարունակում է նաև նրանց բոլոր հնարավոր $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ գծային զուգակցությունները:

Վեկտորական բազմաձևության *բազիս* կոչվում է նրա վեկտորների ամեն մի առավելագույն թվով գծորեն անկախ կարգավորված համախմբություն: Տվյալ վեկտորական բազմաձևության բոլոր բազիսները պարունակում են միևնույն թվով վեկտորներ:

Այդ թիվը կոչվում է վեկտորական բազմաձևության *չափողականություն*: Այն կարող է ընդունել $0,1,2,3$ արժեքներ (տես № 39 խնդիրը):

Նշենք, որ վեկտորական բազաձևությունները գծային հանրահաշվում դիտարկվող գծային տարածության օրինակներ են:

Եթե $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n}$-ը վեկտորական բազմաձևության բազիս է, ապա նրա ամեն մի $\vec{a}$ վեկտոր ներկայացվում է, ընդ որում միակ ձևով, որպես $k_1\vec{e_1}+k_2\vec{e_2}+\ldots+k_n\vec{e_n}$ գծային զուգակցություն: Այդ զուգակցության k_1, $k_2, \cdots, k_n$ գործակիցները կոչվում են $\vec{a}$ վեկտորի *կոորդինատներ տվյալ բազիսի նկատմամբ*: Այս փաստը գրառվում է այսպես՝ $\vec{a}=\{k_1;\ k_2;\ \ldots;\ k_n\}$:

Վեկտորների կոորդինատների հատկությունները:

Կամայական $\vec{a}=\{a_1;\ a_2;\ldots;\ a_n\}$, $\vec{b}=\{b_1;\ b_2;\ldots;\ b_n\}$ վեկտորների և $\forall k \in R$ թվի համար:

1). $k\vec{a}=\{ka_1;\ ka_2;\ldots;\ ka_n\}$, $\forall k \in R$,

2). $\vec{a}+\vec{b}=\{a_1+b_1;\ a_2+b_2;\ldots;\ a_n+b_n\}$:

Եթե $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ բազիսի նկատմամբ $\vec{a}=\{a_1;\ a_2;\ a_3\}$, $\vec{b}=\{b_1;\ b_2;\ b_3\}$, $\vec{c}=\{c_1;\ c_2;\ c_3\}$, ապա

ա) երկու $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներ համագիծ են այն և միայն այն դեպքում, երբ $a_1:b_1=a_2:b_2=a_3:b_3$,

բ) երեք $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորներ համահարթ են այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2=0:$$

Խնդիր 3. Տարածության ինչ-որ բազիսում տրված են $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ վեկտորները: Պարզել, այդ վեկտորները գծորեն կախյա՞լ են,.թե՝ ոչ և, եթե հնարավոր է, $\vec{c}$ վեկտորն արտահայտել $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների գծային զուգակցությամբ.

ա) $\vec{a} = \{-2; 2; 1\}$, $\vec{b} = \{1; -3; 2\}$, $\vec{c} = \{1; 1; 1\}$,

բ) $\vec{a} = \{2; 1; 1\}$, $\vec{b} = \{-1; 1; -2\}$, $\vec{c} = \{7; -1; 8\}$,

գ) $\vec{a} = \{6; -9; 12\}$, $\vec{b} = \{-4; 6; -8\}$, $\vec{c} = \{2; 3; -2\}$:

Լուծում: Որպեսզի պարզենք $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ վեկտորները գծորեն կախյա՞լ են, թե՝ ոչ, դիտարկենք նրանց բոլոր $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ գծային զուգակցությունները: Եթե պարզվի, որ $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $\alpha = \beta = \gamma = 0$, ապա այդ վեկտորները կլինեն գծորեն անկախ:

Հակառակ դեպքում նրանք կլինեն գծորեն կախյալ: Ընդ որում, եթե $\gamma \neq 0$, ապա $\vec{c} = -\dfrac{\alpha}{\gamma}\vec{a} - \dfrac{\beta}{\gamma}\vec{b}$, իսկ եթե $\gamma = 0$, ապա, չնայած այդ վեկտորները գծորեն կախյալ են, սակայն $\vec{c}$ վեկտորը հնարավոր չէ արտահայտել $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների գծային զուգակցությամբ:

ա) Դիցուք $\vec{a} = \{-2; 2; 1\}$, $\vec{b} = \{1; -3; 2\}$, $\vec{c} = \{1; 1; 1\}$: Գրելով $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$ հավասարությունը կոորդինատաբար, ստանում ենք՝

$$\begin{cases} -2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha - 3\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \end{cases}, \text{ որտեղից } \begin{cases} \gamma = \beta \\ 2\alpha - 3\beta + \gamma = 0 \\ \alpha = 5\beta \end{cases}, \text{ այսինքն } \begin{cases} \gamma = \beta \\ \beta = 0 \\ \alpha = 5\beta \end{cases}$$

Այստեղից էլ $\alpha = \beta = \gamma = 0$: Հետևաբար $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ վեկտորները գծորեն անկախ են և բնականաբար $\vec{c}$ վեկտորը հնարավոր չէ արտահայտել $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների գծային զուգակցությամբ:

բ) Դիցուք $\vec{a} = \{2; 1; 1\}$, $\vec{b} = \{-1; 1; -2\}$, $\vec{c} = \{7; -1; 8\}$:

Նախորդի նման՝ $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2\alpha-\beta+7\gamma=0 \\ \alpha+\beta-\gamma=0 \\ \alpha-2\beta+8\gamma=0 \end{cases}$

Այստեղից $\alpha=2,\ \beta=-3,\ \gamma=1$: Այնպես, որ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ վեկտորները գծորեն կախյալ են և $\vec{c}=-2\vec{a}+3\vec{b}$:

գ) Դիցուք $\vec{a}=\{6;-9;12\}$, $\vec{b}=\{-4;6;-8\}$, $\vec{c}=\{2;3;-2\}$:

Այս դեպքում ունենք $\begin{cases} 6\alpha-4\beta+2\gamma=0 \\ -9\alpha+6\beta+3\gamma=0 \\ 12\alpha-8\beta-2\gamma=0 \end{cases}$: Որտեղից էլ ստանում ենք

$\alpha=2,\ \beta=3,\ \gamma=0$: Այսինքն՝ չնայած այդ վեկտորները գծորեն կախյալ են, սակայն $\vec{c}$ վեկտորը հնարավոր չէ արտահայտել $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների գծային զուգակցությամբ: Երկրաչափորեն դա նշանակում է, որ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են, իսկ $\vec{c}$ վեկտորը համագիծ չէ նրանց:

*

* * *

25. Տրված են կամայական $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ վեկտորներ և α, β, γ թվեր: Կազմել $\alpha\vec{a}-\beta\vec{b},\ \gamma\vec{b}-\alpha\vec{c},\ \beta\vec{c}-\gamma\vec{a}$ վեկտորների և γ, β, α թվերի գծային զուգակցությունը: Ի՞նչ վեկտոր է արդյունքը:

26. Եռանկյուն ABC-ում $\overrightarrow{CA}=\vec{a}, \overrightarrow{CB}=\vec{b}$: Ապացուցել, որ $|\vec{a}|\vec{b}+|\vec{b}|\vec{a}$ վեկտորը համագիծ է C անկյան կիսորդին:

27. Ապացուցել, որ զրոյական վեկտոր պարունակող վեկտորների ամեն մի համակարգ գծորեն կախյալ է:

28. Ապացուցել, որ եթե վեկտորների համակարգը պարունակում է կախյալ ենթահամակարգ, ապա այն ևս կախյալ համակարգ է:

29. Ապացուցել, որ վեկտորների անկախ համակարգի ցանկացած ենթահամակարգ ևս անկախ համակարգ է:

30. Ապացուցել, որ $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ վեկտորների համակարգը

ա) գծորեն կախյալ համակարգ է այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունեն $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ թվեր, որոնցից գոնե մեկը զրո չէ և

$$\alpha_1\overline{a_1}+\alpha_2\overline{a_2}+...+\alpha_n\overline{a_n}=\vec{0};$$

բ) գծորեն կախյալ համակարգ է այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ վեկտորներից գոնե մեկն արտահայտվում է իրեն նախորդող վեկտորների գծային զուգակցության միջոցով ($n>1$):

գ) գծորեն անկախ համակարգ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\alpha_1\overline{a_1}+$ $+\alpha_2\overline{a_2}+...+\alpha_n\overline{a_n}=\vec{0}$ պայմանից հետևում է, որ $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$:

31. Դիցուք $\vec{a}_1, \vec{a}_2,..., \vec{a}_n$ վեկտորների համակարգը գծորեն անկախ է, իսկ $\vec{a}_1, \vec{a}_2,..., \vec{a}_n, \vec{b}$ վեկտորների համակարգը՝ գծորեն կախյալ: Ապացուցել, որ $\vec{b}$ վեկտորը ներկայացվում է $\vec{a}_1, \vec{a}_2,..., \vec{a}_n$ վեկտորների գծային զուգակցությամբ, ընդ որում միակ ձևով:

32. Բերել վեկտորների կախյալ համակարգի օրինակ, որի վեկտորներից մեկը չի ներկայացվում մյուս վեկտորների գծային զուգակցությամբ:

33. Դիցուք $\vec{a}_1, \vec{a}_2,..., \vec{a}_n, \vec{a}_{n+1}$ վեկտորների համակարգը կախյալ է, ընդ որում $\vec{a}_1, \vec{a}_2,..., \vec{a}_n$ վեկտորներից ոչ մեկը չի ներկայացվում այդ համակարգի մյուս վեկտորների գծային զուգակցությամբ: Ապացուցել, որ $\vec{a}_{n+1}=\vec{0}$:

34. Ապացուցել, որ ցանկացած երկու վեկտորից կազմված համակարգ գծորեն կախյալ է այն և միայն այն դեպքում, երբ նրանք համագիծ են:

35. Ապացուցել, որ ցանկացած երեք վեկտորից կազմված համակարգ գծորեն կախյալ է այն և միայն այն դեպքում, երբ նրանք համահարթ են:

36. Դիցուք V-ն տարածության բոլոր ազատ վեկտորների բազմությունն է, իսկ V_0 բազմությունը պարունակում է միայն զրոյական վեկտորը: Ապացուցել, որ V-ն և V_0-ն վեկտորական բազմաձևություններ են: (V-ն կոչվում է տարածությանը կից գծային բազմաձևություն):

37. Դիցուք V_l-ը տարածության l ուղղին համագիծ բոլոր վեկտորների համախմբությունն է: Ապացուցել, որ

ա) V_l-ը վեկտորական բազմաձևություն է, (այն կոչվում է l ուղղին կից գծային բազմաձևություն):

բ) V_l-ի վեկտորների ամեն մի առավելագույն գծորեն անկախ համակարգ կազմված է ճիշտ մեկ ոչ զրոյական վեկտորից:

38. Դիցուք V_p-ն տարածության P հարթությանը համահարթ բոլոր վեկտորների համախմբությունն է: Ապացուցել, որ

ա) V_p-ն վեկտորական բազմաձևություն է, (այն կոչվում է P հարթության կից գծային բազմաձևություն):

բ) V_p-ի վեկտորների ամեն մի առավելագույն գծորեն անկախ համակարգ կազմված է ճիշտ երկու ոչ համագիծ վեկտորից:

39. Ապացուցել, որ V_0, V_l, V_p և V բազմաձևություններով սպառվում են բոլոր վեկտորական բազմաձևությունները:

40. Ապացուցել, որ տրված բազիսում վեկտորի կոորդինատները միարժեքորեն են որոշվում:

41. Դիցուք $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n}$-ը վեկտորական բազմաձևության բազիս է, որի նկատմամբ $\vec{a} = \{a_1;\ a_2; \ldots;\ a_n\}$ և $\vec{b} = \{b_1;\ b_2; \ldots;\ b_n\}$: Ապացուցել, որ

ա) $\vec{a} + \vec{b} = \{a_1 + b_1;\ a_2 + b_2; \ldots;\ a_n + b_n\}$,

բ) $k\vec{a} = \{ka_1;\ ka_2; \ldots;\ ka_n\}$:

42. Դիցուք E-ն և F-ը $ABCD$ քառանիստի համապատասխանաբար DA և BC կողերի միջնակետերն են: Գտնել $\overrightarrow{EF}$ վեկտորի կոորդինատները $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}$ բազիսի նկատմամբ:

43. Քառանիստ $ABCD$-ում E-ն DA կողի միջնակետն է, իսկ M-ը՝ ABC եռանկյան միջնագծերի հատման կետը: Գտնել $\overrightarrow{EM}$ վեկտորի կոորդինատները $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}$ բազիսի նկատմամբ:

44. Քառանիստ $ABCD$-ում E կետը DA կողը բաժանում է 1:3 հարաբերությամբ հաշված D գագաթից, իսկ M-ը՝ ABC եռանկյան միջնագծերի հատման կետն է: Գտնել $\overrightarrow{EM}$ վեկտորի կոորդինատները $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}$ բազիսի նկատմամբ:

45. Որպես հարթության կից գծային բազմաձևության բազիս ընտրված է $ABCDEF$ կանոնավոր վեցանկյան $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{AC}$ վեկտորների համակարգը: Գտնել $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$ և $\overrightarrow{FA}$ վեկտորների կոորդինատները նշված բազիսում:

46.) Որպես հարթության (սրունք) բազիս ընտրված է $ABCD$ սեղանի $\overrightarrow{AD}$ հիմքով և $\overrightarrow{AB}$ կողմնային կողմով ներկայացվող վեկտորների համակարգը: Գտնել $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ վեկտորների կոորդինատները նշված բազիսում, եթե սեղանի BC և AD հիմքերի հարաբերությունը λ է:

47) Որպես տարածության կից գծային բազմաձևության բազիս ընտրված է $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստի $\overrightarrow{AB}=\vec{e}_1$, $\overrightarrow{AD}=\vec{e}_2$, $\overrightarrow{AA_1}=\vec{e}_3$ վեկտորների համակարգը: Նշված բազիսում գտնել զուգահեռանիստի A_1 գագաթից ելնող կողերով, անկյունագծերով, նիստերի անկյունագծերով ներկայացվող վեկտորների կոորդինատները :

48) Տարածությանը կից գծային բազմաձևության ինչ-որ բազիսում տրված են $a=\{1;5;3\}$, $\vec{b}=\{6;-4;-2\}$, $\vec{c}=\{0;-5;7\}$, $\vec{d}=\{-20;27;-35\}$ վեկտորները: Ընտրել α,β,γ թվերն այնպես, որ $\alpha\vec{a}$, $\beta\vec{b}$, $\gamma\vec{c}$ և $\vec{d}$ վեկտորները հաջորդաբար կիրառելիս ստացվի փակ բեկյալ գիծ:

49) Տարածությանը կից գծային բազմաձևության ինչ-որ բազիսում տրված են $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ վեկտորները: Պարզել, այդ վեկտորները գծորեն կախյա՞լ են, թե՝ ոչ և, եթե հնարավոր է, $\vec{c}$ վեկտորն արտահայտել $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների գծային զուգակցությամբ.

+ ա) $\vec{a}=\{5;2;1\}$, $\vec{b}=\{-1;-4;2\}$, $\vec{c}=\{-1;-1;6\}$,

− բ) $\vec{a}=\{6;4;2\}$, $\vec{b}=\{-9;6;3\}$, $\vec{c}=\{-3;6;3\}$,

− գ) $\vec{a}=\{6;-18;12\}$, $\vec{b}=\{-8;24;-16\}$, $\vec{c}=\{8;7;3\}$:

50. Ապացուցել, որ ինչպիսին էլ լինեն $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ վեկտորները և α, β, γ թվերը, հետևյալ՝ $\alpha\vec{a}-\beta\vec{b}$, $\gamma\vec{b}-\alpha\vec{c}$, $\beta\vec{c}-\gamma\vec{a}$ վեկտորները համահարթ են:

51. Դիցուք $\text{Պր}_{(\vec{b},l)}$ և $\text{Պր}_{(\vec{b},P)}$ տարածության կից գծային բազմաձևության պրոյեկտման ձևափոխությունները են $\vec{b}$ վեկտորի ուղղությամբ համապատասխանաբար V_l և V_P բազմաձևությունների վրա: Ապացուցել, որ

ա) $\text{Պր}_{(\vec{b},l)}(\lambda\vec{a}+\mu\vec{c}) = \lambda\cdot\text{Պր}_{(\vec{b},l)}\vec{a}+\mu\cdot\text{Պր}_{(\vec{b},l)}\vec{c}$, բ) $\text{Պր}_{(\vec{b},P)}(\lambda\vec{a}+\mu\vec{c}) = \lambda\cdot\text{Պր}_{(\vec{b},P)}\vec{a} + \mu\cdot\text{Պր}_{(\vec{b},P)}\vec{c}$:

52) Տրված են $\vec{a}=\{2;\ 5;\ 14\}$, $\vec{b}=\{14;\ 5;\ 2\}$ վեկտորները: Գտնել $\vec{a}$ վեկտորի պրոյեկցիան OXY հարթության վրա $\vec{b}$ վեկտորին զուգահեռ ուղղությամբ պրոյեկտելիս:

53) Տրված են՝ $\vec{d}=\{16;\ 10;\ 18\}$, $\vec{a}=\{1;\ 2;\ 3\}$, $\vec{b}=\{2;-2;\ 1\}$, $\vec{c}=\{4;\ 0;\ 3\}$, վեկտորները: Գտնել $\vec{d}$ վեկտորի պրոյեկցիան $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներին զուգահեռ որևէ հարթության վրա, $\vec{c}$ վեկտորին զուգահեռ ուղղությամբ պրոյեկտելիս:

§3. Վեկտորների սկալյար արտադրյալը

Երկու ոչ զրոյական $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ և $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ ***վեկտորների կազմած անկյուն*** $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$, կոչվում է $\angle AOB$-ն: Եթե $\vec{a}$-ն կամ $\vec{b}$-ն զրոյական վեկտոր է, ապա նրանցով կազմված անկյուն չի սահմանվում:

Վեկտորների սկալյար արտադրյալը գործողություն է, որը տվյալ գծային բազմաձևության վեկտորների կամայական $(\vec{a};\vec{b})$ կարգավորված զույգին համապատասխանեցնում է թիվ (սկալյար), որը նշանակվում է $(\vec{a},\vec{b})$-ով կամ $\vec{a}\cdot\vec{b}$-ով, կամ էլ $\vec{a}\vec{b}$-ով:

Եթե $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, ապա ըստ սահմանման $(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$:

Իսկ եթե $\vec{a}=\vec{0}$ կամ $\vec{b}=\vec{0}$, ապա համարվում է $(\vec{a},\vec{b})=0$:

Հատկությունները:

1). $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$, 2). $(\vec{a},\vec{a})=|\vec{a}|^2$,

3). $(k\vec{a},\vec{b})=k\cdot(\vec{a},\vec{b})$, 4). $(\vec{a}+\vec{b},\vec{c})=(\vec{a},\vec{c})+(\vec{b},\vec{c})$,

5). $(\varphi(\vec{a}),\varphi(\vec{b}))=(\vec{a},\vec{b})$, ցանկացած φ առաջին սեռի իզոմետրիկ ձևափոխության համար:

Ուղղի, հարթության կամ տարածության առաջին սեռի իզոմետրիկ ձևափոխությունը ձևափոխություն է, որը պահպանում է ցանկացած երկու կետերի միջև հեռավորությունը (ավելի մանրամասն տես §26-ում, մաս II):

Այս հատկությունները կոչվում են հիմնական, քանի որ նրանք լիովին որոշում են սկալյար արտադրյալը (տես № 68 խնդիրը):

Տարածության $(\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3})$ բազիսը կոչվում է *օրթոնորմավորված բազիս*, եթե $|\vec{e_1}|=|\vec{e_2}|=|\vec{e_3}|=1$, $\vec{e_1}\perp\vec{e_2}$, $\vec{e_1}\perp\vec{e_3}$, $\vec{e_2}\perp\vec{e_3}$, կամ որ նույնն է՝ $(\vec{e_i},\vec{e_j})=\delta_j^i$, որտեղ δ_j^i-ն Կրոնեկերի սիմվոլն է՝ $\delta_j^i=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$:

Եթե տարածության օրթոնորմավորված բազիսում $\vec{a}=\{a_1;\ a_2;\ a_3\}$, $\vec{b}=\{b_1;\ b_2;\ b_3\}$, ապա՝

ա) $(\vec{a},\vec{b})=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3$,

բ) $|\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$,

գ) $\cos(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}})=\dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$,

դ) $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3=0$:

Խնդիր 4. Դիցուք $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$ և $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ վեկտորները ներկայացնում են ABC եռանկյան կողմերը: Արտահայտել AD կիսորդի երկարությունը $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների միջոցով:

Լուծում: Ունենք $\overrightarrow{AD}=\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\vec{a}+\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\vec{b}$ (տես *խնդիր 2*-ը):

Այստեղից՝ $$|\overrightarrow{AD}|^2=(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AD})=\frac{2|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2+2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot(\vec{a},\vec{b})}{(|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2}:$$

Այսինքն՝ $$|\overrightarrow{AD}|=\frac{\sqrt{2|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2+2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot(\vec{a},\vec{b})}}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}:$$

Պատ.՝ $$|\overrightarrow{AD}|=\frac{\sqrt{2|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2+2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot(\vec{a},\vec{b})}}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}:$$

Խնդիր 5. Ապացուցել, որ (տարածության կամ հարթության) կամայական A, B, C, D կետերի համար

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4PQ^2,$$

որտեղ P-ն և Q-ն համապատասխանաբար AC և BD հատվածների միջնակետերն են:

Լուծում: Դիցուք $\overrightarrow{OA}=\overline{r_1}, \overrightarrow{OB}=\overline{r_2}, \overrightarrow{OC}=\overline{r_3}$ և $\overrightarrow{OD}=\overline{r_4}$ վեկտորները համապատասխանաբար A, B, C և D կետերի շառավիղ վեկտորներն են:

Ունենք $\overrightarrow{AB}=\overline{r_2}-\overline{r_1}$, $\overrightarrow{BC}=\overline{r_3}-\overline{r_2}$, $\overrightarrow{CD}=\overline{r_4}-\overline{r_3}$, $\overrightarrow{DA}=\overline{r_1}-\overline{r_4}$,

$\overrightarrow{AC}=\overline{r_3}-\overline{r_1}$, $\overrightarrow{BD}=\overline{r_4}-\overline{r_2}$, $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overline{r_1}+\overline{r_3})$, $\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}(\overline{r_2}+\overline{r_4})$,

$\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}(\overline{r_2}+\overline{r_4}-\overline{r_3}-\overline{r_1})$: Այստեղից

$$AB^2=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB})=(\overline{r_2}-\overline{r_1},\overline{r_2}-\overline{r_1})=(\overline{r_2},\overline{r_2})-2(\overline{r_1},\overline{r_2})+(\overline{r_1},\overline{r_1})=$$

$$=|\overrightarrow{r_1}|^2+|\overrightarrow{r_2}|^2-2(\overrightarrow{r_1},\overrightarrow{r_2}):$$

Նույն կերպ՝

$$BC^2=(\overline{r_3}-\overline{r_2},\overline{r_3}-\overline{r_2})=|\overrightarrow{r_2}|^2+|\overrightarrow{r_3}|^2-2(\overrightarrow{r_2},\overrightarrow{r_3}), CD^2=(\overline{r_4}-\overline{r_3},\overline{r_4}-\overline{r_3})=$$

$$|\overrightarrow{r_3}|^2+|\overrightarrow{r_4}|^2-2(\overrightarrow{r_3},\overrightarrow{r_4}), DA^2=(\overline{r_1}-\overline{r_4},\overline{r_1}-\overline{r_4})=|\overrightarrow{r_1}|^2+|\overrightarrow{r_4}|^2-2(\overrightarrow{r_1},\overrightarrow{r_4}),$$

$$AC^2=(\overline{r_3}-\overline{r_1},\overline{r_3}-\overline{r_1})=|\overrightarrow{r_1}|^2+|\overrightarrow{r_3}|^2-2(\overrightarrow{r_1},\overrightarrow{r_3}), BD^2=(\overline{r_4}-\overline{r_2},\overline{r_4}-\overline{r_2})=$$

$$|\overrightarrow{r_2}|^2+|\overrightarrow{r_4}|^2-2(\overrightarrow{r_2},\overrightarrow{r_4}),$$

$$4PQ^2=(\overline{r_2}+\overline{r_4}-\overline{r_3}-\overline{r_1},\overline{r_2}+\overline{r_4}-\overline{r_3}-\overline{r_1})=|\overrightarrow{r_1}|^2+|\overrightarrow{r_2}|^2+|\overrightarrow{r_3}|^2+$$

$$+|\overrightarrow{r_4}|^2+2(\overrightarrow{r_1},\overrightarrow{r_3})-2(\overrightarrow{r_1},\overrightarrow{r_2})-2(\overrightarrow{r_1},\overrightarrow{r_4})-2(\overrightarrow{r_2},\overrightarrow{r_3})-2(\overrightarrow{r_3},\overrightarrow{r_4})+2(\overrightarrow{r_2},\overrightarrow{r_4})$$

Այնպես, որ

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=2(|\overrightarrow{r_1}|^2+|\overrightarrow{r_2}|^2+|\overrightarrow{r_3}|^2+|\overrightarrow{r_4}|^2-(\overrightarrow{r_1},\overrightarrow{r_2})-$$

$$-(\overrightarrow{r_2},\overrightarrow{r_3})-(\overrightarrow{r_3},\overrightarrow{r_4})-(\overrightarrow{r_1},\overrightarrow{r_4}))=AC^2+BD^2+4PQ^2:$$

Ապացուցված է:

*

* * *

54. Գտնել $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը, եթե

ա) $|\vec{a}|=8, |\vec{b}|=5, (\widehat{\vec{a},\vec{b}})=60^0$; բ) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1, (\widehat{\vec{a},\vec{b}})=135^0$;

գ) $\vec{a}\perp\vec{b}$; դ) $\vec{a}=\vec{0}$, $\vec{b}$-ն կամայական է;

ե) $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=6, \vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$; զ) $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=1, \vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$:

55. Գտնել $\vec{a}$ և $\vec{b}$ միավոր վեկտորների կազմած անկյունը, եթե $\vec{p}=\vec{a}+2\vec{b}$ և $\vec{q}=5\vec{a}-4\vec{b}$ վեկտորների կազմած անկյունը 90^0 է:

56. Խորանարդ $ABCDA_1B_1C_1D_1$-ի կողը a է: Գտնել հետևյալ վեկտորների սկալյար արտադրյալը. ա) $\overrightarrow{AA_1}$ և $\overrightarrow{C_1C}$; բ) $\overrightarrow{AB_1}$ և $\overrightarrow{C_1D}$; գ) $\overrightarrow{AB_1}$ և $\overrightarrow{B_1C}$; դ) $\overrightarrow{AC_1}$ և $\overrightarrow{BD}$; ե) $\overrightarrow{AB_1}$ և $\overrightarrow{CB_1}$; զ) $\overrightarrow{DC_1}$ և $\overrightarrow{BB_1}$:

57. Խորանարդ $ABCDA_1B_1C_1D_1$-ում գտնել հետևյալ վեկտորների կազմած անկյունը. ա) $\overrightarrow{AA_1}$ և $\overrightarrow{A_1D}$; բ) $\overrightarrow{AB_1}$ և $\overrightarrow{D_1C}$; գ) $\overrightarrow{AB_1}$ և $\overrightarrow{B_1C}$; դ) $\overrightarrow{AC_1}$ և $\overrightarrow{BD}$; ե) $\overrightarrow{AB_1}$ և $\overrightarrow{CB_1}$; զ) $\overrightarrow{AD_1}$ և $\overrightarrow{BB_1}$:

58. Ուղղանկյունանիստ $ABCDA_1B_1C_1D_1$-ում $AB=2$, $AD=1$, $AA_1=3$: Գտնել հետևյալ վեկտորների սկալյար արտադրյալը. ա) $\overrightarrow{AA_1}$ և $\overrightarrow{C_1C}$; բ) $\overrightarrow{AB_1}$ և $\overrightarrow{C_1D}$; գ) $\overrightarrow{AB_1}$ և $\overrightarrow{B_1C}$; դ) $\overrightarrow{AC_1}$ և $\overrightarrow{BD}$; ե) $\overrightarrow{AB_1}$ և $\overrightarrow{DA_1}$; զ) $\overrightarrow{DC_1}$ և $\overrightarrow{BB_1}$:

59. Կանոնավոր ABC եռանկյան կողմի երկարությունը 1 է: Հաշվել $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA})+(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB})$ արտահայտության արժեքը:

60. Եռանկյուն ABC-ում $AB=7$, $BC=5$, $CA=6$: Գտնել $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{BC}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը:

61. Եռանկյուն ABC-ում տարված են AD, BE և CF միջնագծերը: Հաշվել $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AD})+(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BE})+(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CF})$ արտահայտության արժեքը:

62. Տրված է $ABCD$ ուղղանկյունը: Ապացուցել, որ տարածության կամայական M կետի համար

ա) $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC})=(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MD})$, բ) $MA^2+MC^2=MB^2+MD^2$:

63. Եռանկյուն ABC-ում D կետը AB կողմը բաժանում է λ հարաբերությամբ: Հաշվել $\overrightarrow{CD}$ վեկտորի երկարությունը, եթե $AB=c, BC=a$, $AC=b$:
64. Կանոնավոր բազմանկյանն արտագծած շրջանագծի շառավիղը R է: Գտնել այդ բազմանկյան
ա) մի գագաթից ելնող բոլոր կողմերի և անկյունագծերի երկարությունների քառակուսիների գումարը,
բ) բոլոր կողմերի և անկյունագծերի երկարությունների քառակուսիների գումարը:
65. Ապացուցել, որ (տարածության կամ հարթության) կամայական A, B, C, D կետերի համար

ա) $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$,

բ) եթե BC և AD, CA և BD, AB և CD զույգերից որևէ երկուսը փոխուղղահայաց ուղիղների զույգեր են, ապա երրորդը ևս փոխուղղահայաց ուղիղների զույգ է:
66. Օգտվելով նախորդ խնդրից ապացուցել, որ եռանկյան բարձրությունները հատվում են մի կետում:
67. Տրված են $\vec{a}$ և $\vec{b}$ երկու ոչ զրոյական վեկտորներ, ընդ որում $\vec{b} = \vec{x} + \vec{y}$, որտեղ $\vec{x}$-ը համագիծ է $\vec{a}$-ին, իսկ $\vec{y}$-ը օրթոգոնալ է $\vec{a}$-ին: Ներկայացնել $\vec{x}$-ը և $\vec{y}$-ը որպես $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների գծային զուգակցություն:
68. Ենթադրենք ինչ-որ մի եղանակով տվյալ վեկտորական բազմաձևության վեկտորների ցանկացած $(\vec{a};\vec{b})$ կարգավորված զույգին համապատասխանեցված է մի թիվ, որը նշանակված է $\vec{a} * \vec{b}$-ով, ընդ որում տեղի ունեն հետևյալ հատկությունները՝

1). $\vec{a} * \vec{b} = \vec{b} * \vec{a}$,

2). $\vec{b} * (\vec{a}+\vec{c}) = (\vec{b} * \vec{a}) + (\vec{b} * \vec{c})$,

3). $(k \cdot \vec{a}) * \vec{b} = k \cdot (\vec{a} * \vec{b})$, $\forall k \in R$,

4). $\vec{a} * \vec{a} = |\vec{a}|^2$,

5). $\varphi(\vec{a}) * \varphi(\vec{b}) = \vec{a} * \vec{b}$, ցանկացած φ առաջին սեռի իզոմետրիկ ձևափոխության համար (ձևափոխություն, որը պահպանում է ցանկացած երկու կետերի միջև հեռավորությունը):

Այս նշված համապատասխանությունը համընկնում է սկալյար արտադրյալի հետ՝ $\vec{a}*\vec{b}=\begin{cases}0, \text{ երբ } \vec{a}=\vec{0} \text{ կամ } \vec{b}=\vec{0}\\ |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}), \text{ երբ } \vec{a}\neq\vec{0} \text{ և } \vec{b}\neq\vec{0}\end{cases}$

(***թեորեմ սկալյար արտադրյալի միակության մասին***):

69. Տրված են $\vec{a}$ և $\vec{b}$ երկու ոչ համագիծ վեկտորներ: Գտնել նրանց համահարթ $\vec{x}$ վեկտոր, որը բավարարի հավասարումների $(\vec{a},\vec{x})=1$, $(\vec{b},\vec{x})=0$ համակարգին:

70. Տրված են $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ երեք ոչ համահարթ վեկտորներ: Գտնել $\vec{x}$ վեկտոր, որը բավարարում է հավասարումների $(\vec{a},\vec{x})=1$, $(\vec{b},\vec{x})=0$, $(\vec{c},\vec{x})=0$ համակարգին:

71. Տրված են $\vec{a}\neq\vec{0}$ և $\vec{b}$ վեկտորներ: Գտնել $\vec{b}$ վեկտորի օրթոգոնալ պրոյեկցիան $\vec{a}$ վեկտորին համագիծ ուղղի վրա:

72. Տրված են $\vec{a}$ և $\vec{n}\neq\vec{0}$ վեկտորները: Գտնել $\vec{a}$ վեկտորի օրթոգոնալ պրոյեկցիան $\vec{n}$ վեկտորին ուղղահայաց որևէ հարթության վրա:

73. Հաշվել այն վեկտորների գումարը, որոնք տրված $\vec{a}$ վեկտորի օրթոգոնալ պրոյեկցիաներն են կանոնավոր եռանկյան կողմերի վրա:

74. Զուգահեռանիստի $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$ կողերը միմյանց հետ կազմում են $\angle BOC=\alpha$, $\angle COA=\beta$, $\angle AOB=\gamma$ անկյուններ: Գտնել զուգահեռանիստի OD անկյունագծի երկարությունն ու կողերի հետ նրա կազմած անկյունների կոսինուսները:

75. Ապացուցել, որ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ խորանարդի AC_1 անկյունագիծն ուղղահայաց է BDA_1 հարթությանը:

76. Գտնել հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյան էջերին տարված միջնագծերով կազմված անկյունը:

77. Հավասարասրուն եռանկյուն ABC-ում $(AB=BC)$ սրունքը հարաբերում է հիմքին ինչպես $3:4$, իսկ E և F կետերը համապատասխանաբար BA և BC սրունքները բաժանում են λ հարաբերությամբ հաշված B գագաթից: Գտնել λ-ն, եթե $\overline{AF}$ և $\overline{CE}$ վեկտորներն ուղղահայաց են միմյանց:

Ստորև 78-87 խնդիրներում վեկտորների կոորդինատները դիտարկված են օրթոնորմավորված բազիսում:

78. Տրված են $\vec{a}=\{5;-6;1\}$, $\vec{b}=\{-4;3;0\}$, $\vec{c}=\{5;-8;10\}$ վեկտորները: Հաշվել արտահայտության արժեքը. ա) $3\vec{a}^2-4\vec{a}\vec{b}+2\vec{c}^2$; բ) $2\vec{a}^2+4\vec{b}^2-5\vec{c}^2$; գ) $3\vec{a}\vec{b}-4\vec{b}\vec{c}+2\vec{a}\vec{c}$:

79. Պարզել, թե ինչպիսի (սու՞ր, բու՞թ, թե՞ ուղիղ) անկյուն են կազմում $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները. ա) $\vec{a}=\{1;4;-2\sqrt{3}\}$, $\vec{b}=\{3;0;1\}$;

բ) $\vec{a}=\{\sqrt{5}-1;3;-1\}$, $\vec{b}=\{3\sqrt{5}+3;\sqrt{3};12\}$;

գ) $\vec{a}=\{\cos\varphi;-1;-\sin\varphi\}$, $\vec{b}=\{\cos\varphi;\cos2\varphi;\sin\varphi\}$:

80. Գտնել $\{1;8;4\}$ վեկտորին համուղղված միավոր վեկտորը:

81. Գտնել $\{4;-1;8\}$ վեկտորին հակուղղված միավոր վեկտորը:

82. Նկարագրել $\{8;1;4\}$ վեկտորին ուղղահայաց բոլոր $\{x;y;z\}$ վեկտորների բազմությունը:

83. Ապացուցել, որ $\vec{a}=\{1/\sqrt{3};-1/\sqrt{3};1/\sqrt{3}\}$, $\vec{b}=\{1/\sqrt{2};0;-1/\sqrt{2}\}$, $\vec{c}=\{1/\sqrt{6};2/\sqrt{6};1/\sqrt{6}\}$ վեկտորները կազմում են օրթոնորմավորված բազիս, և այդ բազիսում գտնել $\vec{d}=\{\sqrt{6};\sqrt{6};\sqrt{6}\}$ վեկտորի կոորդինատները:

84. Գտնել $\{-14;2;5\}$ վեկտորի օրթոգոնալ պրոյեկցիան $\{2;-2;1\}$ վեկտորին համագիծ որևէ ուղղի վրա:

85. Գտնել $\{8;4;1\}$ վեկտորի օրթոգոնալ պրոյեկցիան $\{2;-2;1\}$ վեկտորին ուղղահայաց որևէ հարթության վրա:

86. Տրված են $\vec{a}=\{8;4;1\}$, $\vec{b}=\{2;-2;1\}$, $\vec{c}=\{1;1;9\}$ վեկտորները: Գտնել $\vec{c}$ վեկտորի օրթոգոնալ պրոյեկցիան $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներին զուգահեռ որևէ հարթության վրա:

87) Տրված են $\vec{a}=\{8;\ 4;\ 1\}$, $\vec{b}=\{2;-2;\ 1\}$ վեկտորները: Գտնել $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների հետ համահարթ $\vec{c}$ վեկտոր, որն ուղղահայաց է $\vec{a}$-ին, երկարությամբ հավասար է նրան և $\vec{b}$-ի հետ կազմում է բութ անկյուն:

Սորրև խնդիրներում կոորդինատային համակարգը համարվում է ուղղանկյուն: Ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգի մասին տես §5-ում:

88. Գտնել ABC եռանկյան ներքին անկյունները, եթե $A=(1;\ 2;\ 3)$, $B=(3;\ 0;\ 4)$, $C=(2;\ 1;\ 3)$:

89. Հայտնի են $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստի չորս գագաթները՝ $A=(1;\ 2;\ 3)$, $B=(9;\ 6;\ 4)$, $D=(3;\ 0;\ 4)$, $A_1=(5;\ 2;\ 6)$: Գտնել AC_1 անկյունագծի երկարությունն ու նրա կազմած անկյունը AB կողի հետ:

90. Քառանիստի գագաթներն են $A=(3;-1;\ 0)$, $B=(0;-7;\ 3)$, $C=(-2;\ 1;-1)$, $D=(3;\ 2;\ 6)$ կետերը: Գտնել նրա զույգ առ զույգ հանդիպակաց կողերով կազմված անկյունները:

§4. Վեկտորների վեկտորական և խառը արտադրյալները

Վեկտորների վեկտորական արտադրյալը գործողություն է, որը V տարածության վեկտորների կամայական $(\vec{a};\vec{b})$ կարգավորված զույգին համապատասխանեցնում է վեկտոր, որը նշանակում են $[\vec{a},\vec{b}]$-ով կամ $\vec{a}\times\vec{b}$-ով:

Ըստ սահմանման, եթե $\vec{a}\parallel\vec{b}$, ապա համարվում է $[\vec{a},\vec{b}]=\vec{0}$: Եթե $\vec{a}\nparallel\vec{b}$, ապա $[\vec{a},\vec{b}]$-ն մի վեկտոր է, որն ուղղահայաց է և $\vec{a}$-ին, և $\vec{b}$-ին, նրա երկարությունը թվապես հավասար է նրանց վրա կառուցված զուգահեռագծի մակերեսին՝ $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$, և ուղղված է այնպես, որ վեկտորների $(\vec{a};\ \vec{b};\ [\vec{a},\vec{b}])$ կարգավորված եռյակը կազմում է ***աջ եռյակ*** (աջ եռյակի մասին տես № 86 խնդիրը):

Հատկությունները:

1). $[\vec{a},\vec{b}]=-[\vec{b},\vec{a}]$, 2). $[k\vec{a},\vec{b}]=[\vec{a},k\vec{b}]=k\,[\vec{a},\vec{b}]$, 3). $[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}]=[\vec{a},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c}]$, 4). $|[\vec{a},\vec{b}]|^2=(\vec{a},\vec{a})(\vec{b},\vec{b})-(\vec{a},\vec{b})^2$:

Եթե տարածության օրթոնորմավորված բազիսում $\vec{a}=\{a_1;\, a_2;\, a_3\}$, $\vec{b}=\{b_1;\, b_2;\, b_3\}$, ապա

$$[\vec{a},\vec{b}]=\left\{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right\}:$$

Վեկտորների խառը արտադրյալը գործողություն է, որը վեկտորների կամայական $(\vec{a};\vec{b};\vec{c})$ կարգավորված եռյակին համապատասխանեցնում է $([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})$ թիվը: Այն նշանակում են $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$-ով կամ $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$-ով:

Եթե $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ վեկտորները համահարթ են, ապա $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0$, իսկ եթե համահարթ չեն, ապա նրանց $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ խառը արտադրյալը թվապես հավասար է այդ վեկտորներով կառուցված զուգահեռանիստի ծավալին վերցված «+» նշանով, երբ $(\vec{a};\ \vec{b};\ \vec{c})$ կարգավորված եռյակը աջ եռյակ է, և «−» նշանով, երբ $(\vec{a};\ \vec{b};\ \vec{c})$ կարգավորված եռյակը ձախ եռյակ է:

Եթե տարածության օրթոնորմավորված բազիսում $\vec{a}=\{a_1;\, a_2;\, a_3\}$, $\vec{b}=\{b_1;\, b_2;\, b_3\}$, $\vec{c}=\{c_1;\, c_2;\, c_3\}$, ապա

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}:$$

Խառն արտադրյալի հատկությունները՝

1). $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{b},\vec{c},\vec{a})=(\vec{c},\vec{a},\vec{b})=-(\vec{b},\vec{a},\vec{c})=-(\vec{a},\vec{c},\vec{b})=-(\vec{c},\vec{b},\vec{a})$,

2). $(k\vec{a},\vec{c},\vec{b})=(\vec{a},k\vec{b},\vec{c})=(\vec{a},\vec{b},\overrightarrow{kc})=k\cdot(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$,

3). $(\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2},\vec{b},\vec{c})=(\overrightarrow{a_1},\vec{b},\vec{c})+(\overrightarrow{a_2},\vec{b},\vec{c})$:

Խնդիր 6. Ապացուցել, որ կամայական $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ վեկտորների համար

$$\begin{vmatrix} (\vec{a},\vec{a}) & (\vec{a},\vec{b}) & (\vec{a},\vec{c}) \\ (\vec{b},\vec{a}) & (\vec{b},\vec{b}) & (\vec{b},\vec{c}) \\ (\vec{c},\vec{a}) & (\vec{c},\vec{b}) & (\vec{c},\vec{c}) \end{vmatrix}$$

որոշիչը (***Գրամի որոշիչ***) հավասար է զրոի այն և միայն այն դեպքում, երբ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ վեկտորները համահարթ են:

Լուծում: Նշված որոշիչը կարելի է մեկնաբանել որպես $\left\{(\vec{a},\vec{a}); (\vec{a},\vec{b}); (\vec{a},\vec{c})\right\}$, $\left\{(\vec{b},\vec{a}); (\vec{b},\vec{b}); (\vec{b},\vec{c})\right\}$, $\left\{(\vec{c},\vec{a}); (\vec{c},\vec{b}); (\vec{c},\vec{c})\right\}$ ***տող-վեկտորների*** խառը արտադրյալ:

Եթե $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ վեկտորները համահարթ են, ապա նրանք գծորեն կախյալ են, հետևաբար նրանցից մեկն արտահայտվում է մյուս վեկտորների գծային զուգակցությամբ: Դիցուք $\vec{a} = \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}$: Այստեղից՝

$$(\vec{a},\vec{a}) = \lambda(\vec{b},\vec{a}) + \mu(\vec{c},\vec{a}),$$

$$(\vec{a},\vec{b}) = \lambda(\vec{b},\vec{b}) + \mu(\vec{c},\vec{b}),$$

$$(\vec{a},\vec{c}) = \lambda(\vec{b},\vec{c}) + \mu(\vec{c},\vec{c}):$$

Այսինքն Գրամի որոշիչի առաջին տող-վեկտորն արտահայտվում է երկրորդ և երրորդ տող-վեկտորների գծային զուգակցությամբ: Այնպես, որ նշված որոշիչը հավասար է զրոի:

Այժմ ենթադրենք Գրամի որոշիչն է հավասար զրոի: Այդ դեպքում նրա տող-վեկտորները գծորեն կախյալ վեկտորներ են, այսինքն գոյություն ունեն α, β, γ թվեր, որոնցից գոնե մեկը զրո չէ և

$$\alpha\left\{(\vec{a},\vec{a}); (\vec{a},\vec{b}); (\vec{a},\vec{c})\right\} + \beta\left\{(\vec{b},\vec{a}); (\vec{b},\vec{b}); (\vec{b},\vec{c})\right\} +$$

$$+\gamma\left\{(\vec{c},\vec{a}); (\vec{c},\vec{b}); (\vec{c},\vec{c})\right\} = \vec{0}:$$

Այսինքն՝ $\alpha(\vec{a},\vec{a}) + \beta(\vec{b},\vec{a}) + \gamma(\vec{c},\vec{a}) = 0$,

$\alpha(\vec{a},\vec{b}) + \beta(\vec{b},\vec{b}) + \gamma(\vec{c},\vec{b}) = 0$, $\alpha(\vec{a},\vec{c}) + \beta(\vec{b},\vec{c}) + \gamma(\vec{c},\vec{c}) = 0$: Կամ

$(\vec{a},\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}) = 0$, $(\vec{b},\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}) = 0$, $(\vec{c},\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}) = 0$:

Որտեղից. եթե $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$, ապա $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ վեկտորները գծորեն կախյալ են, այսինքն համահարթ են: Հակառակ դեպքում և $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

վեկտորները լինելով ուղղահայաց $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}\neq\vec{0}$ վեկտորին, կլինեն համահարթ:

Խնդիր *7.* Ապացուցել, որ կամայական $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ վեկտորների համար $[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]]=\vec{b}(\vec{a},\vec{c})-\vec{c}(\vec{a},\vec{b})$ (***բաց միճու ցաբ բանաձև***):

Այսուհետև $[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]]$ տեսքի արտահայտությունը կանվանենք $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ***վեկտորների կրկնակի վեկտորական արտադրյալ***:

Ապացույցը հարմար է կատարել կոորդինատային մեթոդով:

Դիցուք $\vec{a}=\{a_x;\,a_y;\,a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x;\,b_y;\,b_z\}$, $\vec{c}=\{c_x;\,c_y;\,c_z\}$ որևէ օրթոնորմավորված բազիսում: Ցույց տանք, որ հավասարության աջ և ձախ մասերի վեկտորների համապատասխան կոորդինատները հավասար են միմյանց: Ունենք՝ $[\vec{b},\vec{c}]=\left\{\begin{vmatrix} b_y & b_z\\ c_y & c_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix} b_z & b_x\\ c_z & c_x\end{vmatrix},\begin{vmatrix} b_x & b_y\\ c_x & c_y\end{vmatrix}\right\}$, այսինքն

$[\vec{b},\vec{c}]_x=\begin{vmatrix} b_y & b_z\\ c_y & c_z\end{vmatrix}$, $[\vec{b},\vec{c}]_y=\begin{vmatrix} b_z & b_x\\ c_z & c_x\end{vmatrix}$, $[\vec{b},\vec{c}]_z=\begin{vmatrix} b_x & b_y\\ c_x & c_y\end{vmatrix}$: Հետևաբար՝

$$[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]]_x=\begin{vmatrix} a_y & a_z\\ [\vec{b},\vec{c}]_y & [\vec{b},\vec{c}]_z\end{vmatrix}=a_y[\vec{b},\vec{c}]_z-a_z[\vec{b},\vec{c}]_y=$$

$$=a_y\begin{vmatrix} b_x & b_y\\ c_x & c_y\end{vmatrix}-a_z\begin{vmatrix} b_z & b_x\\ c_z & c_x\end{vmatrix}=a_y(b_xc_y-b_yc_x)-a_z(b_zc_x-b_xc_z)=$$

$$=a_yb_xc_y-a_yb_yc_x-a_zb_zc_x+a_zb_xc_z=b_xa_yc_y+b_xa_zc_z-c_xa_yb_y-c_xa_zb_z:$$

Մյուս կողմից $\left(\vec{b}(\vec{a},\vec{c})-\vec{c}(\vec{a},\vec{b})\right)_x=\vec{b}_x(\vec{a},\vec{c})-\vec{c}_x(\vec{a},\vec{b})=$

$$=\vec{b}_x(\vec{a}_x\vec{c}_x+\vec{a}_y\vec{c}_y+\vec{a}_z\vec{c}_z)-\vec{c}_x(\vec{a}_x\vec{b}_x+\vec{a}_y\vec{b}_y+\vec{a}_z\vec{b}_z)=$$

$$=\vec{b}_x\vec{a}_x\vec{c}_x+\vec{b}_x\vec{a}_y\vec{c}_y+\vec{b}_x\vec{a}_z\vec{c}_z-\vec{c}_x\vec{a}_x\vec{b}_x-\vec{c}_x\vec{a}_y\vec{b}_y-\vec{c}_x\vec{a}_z\vec{b}_z=$$

$$=b_xa_yc_y+b_xa_zc_z-c_xa_yb_y-c_xa_zb_z:$$

Ստացվեց՝ $[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]]_x=\left(\vec{b}(\vec{a},\vec{c})-\vec{c}(\vec{a},\vec{b})\right)_x$: Նույն կերպ ապացուցվում է մյուս կոորդինատների հավասարությունը:

Խնդիր 8: Ապացուցել, որ կամայական $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ վեկտորների համար

$$([\vec{a},\vec{b}],[\vec{b},\vec{c}],[\vec{c},\vec{a}]) = (\vec{a},\vec{b},\vec{c})^2 :$$

Ապացուցում: Ըստ խառը արտադրյալի սահմանման՝

$$([\vec{a},\vec{b}], [\vec{b},\vec{c}], [\vec{c},\vec{a}]) = \left([\vec{a},\vec{b}], [[\vec{b},\vec{c}], [\vec{c},\vec{a}]]\right) :$$

Դիտարկելով $[[\vec{b},\vec{c}], [\vec{c},\vec{a}]]$ վեկտորը որպես $[\vec{b},\vec{c}]$, $\vec{c}$, $\vec{a}$ վեկտորների կրկնակի վեկտորական արտադրյալ և կիրառելով «բաց-ցաբ բանաձև»-ը կստանանք՝

$$([\vec{a},\vec{b}], [\vec{b},\vec{c}], [\vec{c},\vec{a}]) = \left([\vec{a},\vec{b}], [[\vec{b},\vec{c}], [\vec{c},\vec{a}]]\right) =$$

$$= \left([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}\left([\vec{b},\vec{c}],\vec{a}\right) - \vec{a}\left([\vec{b},\vec{c}],\vec{c}\right)\right) = \left([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}(\vec{b},\vec{c},\vec{a}) - \vec{a}(\vec{b},\vec{c},\vec{c})\right) =$$

$$= \left([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}(\vec{b},\vec{c},\vec{a})\right) = (\vec{b},\vec{c},\vec{a})\left([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}\right) = (\vec{b},\vec{c},\vec{a})(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a},\vec{b},\vec{c})^2 :$$

Խնդիր 9. Դիցուք $[\vec{a},\vec{r}] = \vec{b}$, $(\vec{c},\vec{r}) = \lambda$: Բացահայտորեն արտահայտել $\vec{r}$ վեկտորը $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ վեկտորներով և նրանց հետ կատարվող գործողություններով, եթե $\vec{a}$ վեկտորն ուղղահայաց չէ $\vec{c}$ վեկտորին:

Լուծում: Ունենք $[\vec{a},\vec{r}] = \vec{b}$, $(\vec{c},\vec{r}) = \lambda$ և $(\vec{a},\vec{c}) \neq 0$: Եթե $[\vec{a},\vec{r}] = \vec{b}$ հավասարման երկու մասը վեկտորապես բազմապատկենք $\vec{c}$ վեկտորով, կստանանք՝ $[[\vec{a},\vec{r}],\vec{c}] = [\vec{b},\vec{c}]$ կամ, որ նույնն է $-\vec{a}(\vec{r},\vec{c}) + \vec{r}(\vec{a},\vec{c}) = [\vec{b},\vec{c}]$ (տես *խնդիր 7*-ը):

Այստեղից $\vec{r}(\vec{a},\vec{c}) = [\vec{b},\vec{c}] + \lambda\vec{a}$:

Այսինքն՝ $\vec{r} = \dfrac{\lambda}{(\vec{a},\vec{c})}\vec{a} + \dfrac{1}{(\vec{a},\vec{c})}[\vec{b},\vec{c}]$: Պատ.՝ $\vec{r} = \dfrac{\lambda}{(\vec{a},\vec{c})}\vec{a} + \dfrac{1}{(\vec{a},\vec{c})}[\vec{b},\vec{c}]$:

Խնդիր 10. Դիցուք $(\vec{a},\vec{r}) = \alpha$, $(\vec{b},\vec{r}) = \beta$, $(\vec{c},\vec{r}) = \gamma$: Բացահայտորեն արտահայտել $\vec{r}$ վեկտորը $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ վեկտորներով և նրանց հետ կատարվող գործողություններով, եթե $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ վեկտորները համահարթ չեն:

Լուծում 1. Ունենք $(\vec{a},\vec{r}) = \alpha$, $(\vec{b},\vec{r}) = \beta$, որտեղից $\vec{b}(\vec{a},\vec{r}) - \vec{a}(\vec{b},\vec{r}) = \alpha\vec{b} - \beta\vec{a}$, կամ, որ նույնն է $[[\vec{a},\vec{b}],\vec{r}] = \alpha\vec{b} - \beta\vec{a}$ (տես *խնդիր 7*-ը) :

Այսպիսով $[[\vec{a},\vec{b}],\vec{r}] = \alpha\vec{b} - \beta\vec{a}$ և $(\vec{c},\vec{r}) = \gamma$: Ըստ նախորդ խնդրի՝

$$\vec{r}=\frac{\gamma}{([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})}[\vec{a},\vec{b}]+\frac{1}{([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})}[\alpha\vec{b}\text{-}\beta\vec{a},\vec{c}]$$ կամ որ նույնն է

$$\vec{r}=\frac{\alpha}{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}[\vec{b},\vec{c}]+\frac{\beta}{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}[\vec{c},\vec{a}]+\frac{\gamma}{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}[\vec{a},\vec{b}]:$$

Պատ.՝ $\vec{r}=\frac{\alpha}{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}[\vec{b},\vec{c}]+\frac{\beta}{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}[\vec{c},\vec{a}]+\frac{\gamma}{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}[\vec{a},\vec{b}]$:

Լուծում 2. Քանի որ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ վեկտորները համահարթ չեն, ապա $\vec{r}$-ը կարող ենք արտահայտել նրանց գծային զուգակցությամբ: Դիցուք $\vec{r}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$: Այս հավասարության երկու մասերը հաջորդաբար $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ վեկտորներներով սկալյարապես բազմապատկելով, կստանանք

$$\begin{cases}(\vec{a},\vec{r})=x(\vec{a},\vec{a})+y(\vec{a},\vec{b})+z(\vec{a},\vec{c})\\(\vec{b},\vec{r})=x(\vec{b},\vec{a})+y(\vec{b},\vec{b})+z(\vec{b},\vec{c})\\(\vec{c},\vec{r})=x(\vec{c},\vec{a})+y(\vec{c},\vec{b})+z(\vec{c},\vec{c})\end{cases}:$$

Այսինքն

$$\begin{cases}(\vec{a},\vec{a})x+(\vec{a},\vec{b})y+(\vec{a},\vec{c})z=\alpha\\(\vec{b},\vec{a})x+(\vec{b},\vec{b})y+(\vec{b},\vec{c})z=\beta\\(\vec{c},\vec{a})x+(\vec{c},\vec{b})y+(\vec{c},\vec{c})z=\gamma\end{cases}:$$

Քանի որ $\begin{vmatrix}(\vec{a},\vec{a}) & (\vec{a},\vec{b}) & (\vec{a},\vec{c})\\(\vec{b},\vec{a}) & (\vec{b},\vec{b}) & (\vec{b},\vec{c})\\(\vec{c},\vec{a}) & (\vec{c},\vec{b}) & (\vec{c},\vec{c})\end{vmatrix}\neq 0$ (տես ***խնդիր 6.-ը***), ապա այս համակարգից ունենք՝ $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}$, $z=\frac{\Delta_z}{\Delta}$, որտեղ

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}\alpha & (\vec a,\vec b) & (\vec a,\vec c)\\ \beta & (\vec b,\vec b) & (\vec b,\vec c)\\ \gamma & (\vec c,\vec b) & (\vec c,\vec c)\end{vmatrix},\qquad \Delta_y=\begin{vmatrix}(\vec a,\vec a) & \alpha & (\vec a,\vec c)\\ (\vec b,\vec a) & \beta & (\vec b,\vec c)\\ (\vec c,\vec a) & \gamma & (\vec c,\vec c)\end{vmatrix},$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}(\vec a,\vec a) & (\vec a,\vec b) & \alpha\\ (\vec b,\vec a) & (\vec b,\vec b) & \beta\\ (\vec c,\vec a) & (\vec c,\vec b) & \gamma\end{vmatrix},\qquad \Delta=\begin{vmatrix}(\vec a,\vec a) & (\vec a,\vec b) & (\vec a,\vec c)\\ (\vec b,\vec a) & (\vec b,\vec b) & (\vec b,\vec c)\\ (\vec c,\vec a) & (\vec c,\vec b) & (\vec c,\vec c)\end{vmatrix}:$$

Հետևաբար $\vec r=\frac{\Delta_x}{\Delta}\vec a+\frac{\Delta_y}{\Delta}\vec b+\frac{\Delta_z}{\Delta}\vec c$:

Պատ.՝ $\vec r=\frac{\Delta_x}{\Delta}\vec a+\frac{\Delta_y}{\Delta}\vec b+\frac{\Delta_z}{\Delta}\vec c$:

Խնդիր *11.* Տրված են $\vec a=\{8;\ 4;\ 1\}$, $\vec b=\{2;\ 2;\ 1\}$ և $\vec c=\{1;\ 1;\ 1\}$ երեք վեկտորները: Գտնել $\vec d$ միավոր վեկտոր, որը $\vec a$ և $\vec b$ վեկտորների հետ կազմում է հավասար անկյուններ, ուղղահայաց է $\vec c$ վեկտորին և ուղղված է այնպես, որ կարգավորված վեկտորների $(\vec a,\vec b,\vec c)$ ու $(\vec a,\vec b,\vec d)$ եռյակները ունեն նույն կողմնորոշումը:

Լուծում: Դիցուք $\vec d=\{x;\ y;\ z\}$: Ունենք $|\vec d|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=1$,

$\cos(\widehat{\vec a,\vec d})=\cos(\widehat{\vec b,\vec d})$, $(\vec d,\vec c)=0$: Ընդ որում

$|\vec a|=\sqrt{8^2+4^2+1^2}=9$, $\quad |\vec b|=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$, $\quad |\vec c|=\sqrt{3}$,

$\cos(\widehat{\vec a,\vec d})=\frac{(\vec a,\vec d)}{|\vec a|\cdot|\vec d|}=\frac{8x+4y+z}{9}$, $\cos(\widehat{\vec b,\vec d})=\frac{(\vec b,\vec d)}{|\vec a|\cdot|\vec d|}=\frac{2x+2y+z}{3}$,

$(\vec d,\vec c)=x+y+z$: Քանի որ $(\vec a,\vec b,\vec c)$ ու $(\vec a,\vec b,\vec d)$ եռյակները ունեն նույն կողմնորոշումը, ուստի $(\vec a,\vec b,\vec c)\cdot(\vec a,\vec b,\vec d)>0$: Այնպես, որ

$$\begin{cases} 8x+4y+z=6x+6y+3z \\ x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \quad \text{և} \quad \begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} > 0:$$

Կամ, որ նույնն է

$$\begin{cases} x-y-z=0 \\ x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \quad \text{և} \quad 4(2x-6y+8z)>0:$$

Հավասարումների համակարգի լուծումներն են $(0;-\sqrt{2}/2;\sqrt{2}/2)$ ու $(0;\dfrac{\sqrt{2}}{2};-\dfrac{\sqrt{2}}{2})$ եռյակները, որոնցից առաջին եռյակն է բավարարում $4(2x-6y+8z)>0$ պայմանին: Պատ.՝ $\vec{d}=\left\{0;-\sqrt{2}/2;\sqrt{2}/2\right\}$:

*

* * *

91. Ի՞նչ է ուղղի կողմնորոշումը: Ուղղի քանի՞ կողմնորոշում է հնարավոր:
92. Հարթության վրա տրված են երկու օրթոնորմալ բազիսներ: Հնարավո՞ր է միշտ դրանցից մեկը համընկեցնել մյուսի հետ՝ հարթության պտույտի և զուգահեռ տեղափոխության ձևափոխությունների միջոցով:
93. Հարթության երկու բազիս համարենք համարժեք, եթե մի բազիսից մյուսին անցման մատրիցի որոշիչը դրական է: Ապացուցել, որ այդ հարաբերությունը համարժեքության հարաբերություն է:
94. Հարթության վրա տրված է $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ բազիս, ընդ որում $\vec{e}_1$-ը և $\vec{e}_2$-ը կիրառված են սևեռված O կետից: Այդ բազիսով որոշված հարթության վրա *պտույտի ուղղություն* կոչվում է O կետի շուրջ 360^0 անկյան տակ երկու հնարավոր պտույտներից այն, որի ընթացքում $\vec{e}_1$ վեկտորը դառնում է համուղղված $\vec{e}_2$-ին 180^0-ից փոքր անկյան տակ պտտելիս:

Ապացուցել, որ $\vec{e'}_1, \vec{e'}_2$ բազիսը ևս որոշում է հարթության վրա պտույտի նույն ուղղությունը այն և միայն այն դեպքում, երբ նշված բազիսներից մեկից մյուսին անցման մատրիցի որոշիչը դրական է:
95. Ի՞նչ է հարթության կողմնորոշումը: Ի՞նչ երկրաչափական իմաստ ունի այն: Հարթության քանի՞ կողմնորոշում է հնարավոր:

96. Տարածության երկու բազիս համարենք համարժեք, եթե մի բազիսից մյուսին անցման մատրիցի որոշիչը դրական է: Ապացուցել, որ այդ հարաբերությունը համարժեքության հարաբերություն է:

97. Տարածության մեջ տրված է $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ բազիսը: Կասենք, որ այն տարածության ***աջ*** (***ձախ***) ***բազիս*** է, եթե $\vec{e}_3$-ի ծայրակետից նայելիս $\vec{e}_1$-ից $\vec{e}_2$ կարճագույն պտույտը դիտորդին երևում է ժամսլաքի պտույտի հակառակ ուղղությամբ: Ցույց տալ, որ $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ բազիսը ևս տարածության աջ (ձախ) բազիս է, այն և միայն այն դեպքում, երբ նշված բազիսներից մեկից մյուսին անցման մատրիցի որոշիչը դրական է:

98. Ի՞նչ է տարածության կողմնորոշումը: Ի՞նչ եռկրաչափական իմաստ ունի այն: Տարածության քանի՞ կողմնորոշում է հնարավոր:

99. Ցույց տալ, որ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ոչ համահարթ վեկտորներից կազմված $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$, $(\vec{b}; \vec{c}; \vec{a})$, $(\vec{c}; \vec{a}; \vec{b})$ կարգավորված եռյակները որոշում են տարածության երկու հնարավոր կողմնորոշումներից մեկը, իսկ $(\vec{b}; \vec{a}; \vec{c})$, $(\vec{a}; \vec{c}; \vec{b})$, $(\vec{c}; \vec{b}; \vec{a})$ կարգավորված եռյակները՝ մյուսը:

100. Ցույց տալ, որ վեկտորական արտադրյալը
ա) չի բավարարում զուգորդական և տեղափոխական օրենքներին (տես նաև № 110 խնդիրը): բ) օժտված չէ թվերի բազմապատկմանը բնորոշ կրճատման հատկությամբ ($[\vec{a},\vec{b}] = [\vec{c},\vec{b}] \not\Rightarrow \vec{a} = \vec{c}$):

101. Ապացուցել, որ ա) $(\vec{a},\vec{b})^2 + [\vec{a},\vec{b}]^2 = \vec{a}^{\,2}\, \vec{b}^{\,2}$,

բ) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})^{2} = [\vec{a},\vec{b}]^{2}\, \vec{c}^{\,2} - [[\vec{a},\vec{b}],\vec{c}]^2$:

102. Դիցուք $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ վեկտորները այնպիսին են, որ $\vec{a} = [\vec{b},\vec{c}]$, $\vec{b} = [\vec{c},\vec{a}]$, $\vec{c} = [\vec{a},\vec{b}]$: Գտնել այդ վեկտորների երկարությունները և միմյանց հետ կազմած անկյունները:

103. Ապացուցել, որ եթե $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ վեկտորները համագիծ չեն, ապա $[\vec{a},\vec{b}] = [\vec{b},\vec{c}] = [\vec{c},\vec{a}]$ հավասարություններից հետևում է $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, և հակառակը:

104. Ապացուցել, որ եթե $[\vec{a},\vec{b}] + [\vec{b},\vec{c}] + [\vec{c},\vec{a}] = \vec{0}$, ապա $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ վեկտորները համահարթ են:

105. Ապացուցել, որ եթե $[\vec{a},\vec{b}]$, $[\vec{b},\vec{c}]$, $[\vec{c},\vec{a}]$ վեկտորները համահարթ են, ապա նրանք համագիծ են:

106. Մի կետից կիրառված են $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ոչ համահարթ վեկտորներ: Ապացուցել, որ նրանց ծայրակետերով անցնող հարթությունն ուղղահայաց է $[\vec{a},\vec{b}]+[\vec{b},\vec{c}]+[\vec{c},\vec{a}]$ վեկտորին:

107. Տրված են $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ երեք ոչ համահարթ վեկտորներ: Գտնել մի վեկտոր, որն այդ վեկտորների հետ կազմում է հավասար սուր անկյուններ:

108. Ապացուցել, որ քառանիստի ամեն մի նիստին ուղղահայաց, թվապես այդ նիստի մակերեսին հավասար երկարությամբ և այդ նիստից դեպի հանդիպակած գագաթն ուղղված վեկտորների գումարը զրոյական վեկտոր է:

109. Ապացուցել, որ կամայական ուռուցիկ բազմանիստի ամեն մի նիստին ուղղահայաց, թվապես այդ նիստի մակերեսին հավասար երկարությամբ և այդ նիստից դեպի ներս ուղղված վեկտորների գումարը զրոյական վեկտոր է:

110. Ապացուցել, որ ա) $[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]]=\vec{b}(\vec{a},\vec{c})-\vec{c}(\vec{a},\vec{b})$,

բ) $[[\vec{a},\vec{b}],\vec{c}]=-\vec{a}(\vec{b},\vec{c})+\vec{b}(\vec{a},\vec{c})$:

111. Ապացուցել հետևյալ նույնությունները

ա) $([\vec{a},\vec{b}],[\vec{c},\vec{d}]) = \begin{vmatrix} (\vec{a},\vec{c}) & (\vec{a},\vec{d}) \\ (\vec{b},\vec{c}) & (\vec{b},\vec{d}) \end{vmatrix}$,

բ) $[[\vec{a},\vec{b}],[\vec{c},\vec{d}]] = \vec{c}\,(\vec{a},\vec{b},\vec{d})-\vec{d}\,(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$,

գ) $([\vec{a},\vec{b}],[\vec{b},\vec{c}],[\vec{c},\vec{a}]) = (\vec{a},\vec{b},\vec{c})^2$

դ) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\,\vec{d} = (\vec{d},\vec{b},\vec{c})\,\vec{a}+(\vec{d},\vec{c},\vec{a})\,\vec{b}+(\vec{d},\vec{a},\vec{b})\,\vec{c}$,

ե) $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})\,(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} (\vec{x},\vec{a}) & (\vec{x},\vec{b}) & (\vec{x},\vec{c}) \\ (\vec{y},\vec{a}) & (\vec{y},\vec{b}) & (\vec{y},\vec{c}) \\ (\vec{z},\vec{a}) & (\vec{z},\vec{b}) & (\vec{z},\vec{c}) \end{vmatrix}$,

զ) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})^2 = \begin{vmatrix} (\vec{a},\vec{a}) & (\vec{a},\vec{b}) & (\vec{a},\vec{c}) \\ (\vec{b},\vec{a}) & (\vec{b},\vec{b}) & (\vec{b},\vec{c}) \\ (\vec{c},\vec{a}) & (\vec{c},\vec{b}) & (\vec{c},\vec{c}) \end{vmatrix}$:

112. Ապացուցել, որ

ա) $[\vec{a},[\vec{b},[\vec{c},\vec{d}]]] = [\vec{a},\vec{c}]\,(\vec{b},\vec{d}) - [\vec{a},\vec{d}]\,(\vec{b},\vec{c})$,

բ) $[\vec{a},[\vec{b},[\vec{c},\vec{d}]]] = (\vec{a},\vec{c},\vec{d})\,\vec{b} - (\vec{a},\vec{b})\,[\vec{c},\vec{d}]$,

գ) $[\vec{a},\vec{b}]^2\,[\vec{a},\vec{c}]^2 - ([\vec{a},\vec{b}],[\vec{a},\vec{c}])^2 = \vec{a}^{\,2}\,(\vec{a},\vec{b},\vec{c})^2$,

դ) $[[\vec{a},\vec{b}],[\vec{b},\vec{c}]] \cdot [[\vec{b},\vec{c}],[\vec{c},\vec{a}]] \cdot [[\vec{c},\vec{a}],[\vec{a},\vec{b}]] = (\vec{a},\vec{b},\vec{c})^4$,

ե) $(\vec{a},\vec{b})\,[\vec{c},\vec{d}] + (\vec{a},\vec{c})\,[\vec{b},\vec{d}] + (\vec{a},\vec{d})\,[\vec{b},\vec{c}] = \vec{a}\,(\vec{b},\vec{c},\vec{d})$,

զ) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\,(\vec{a},\vec{d},\vec{e}) = \begin{vmatrix} (\vec{a},\vec{b},\vec{d}) & (\vec{a},\vec{b},\vec{e}) \\ (\vec{a},\vec{c},\vec{d}) & (\vec{a},\vec{c},\vec{e}) \end{vmatrix}$:

113. Ապացուցել, որ կամայական $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ վեկտորների համար $(\vec{b},\vec{c},\vec{d})\,\vec{a} + (\vec{c},\vec{a},\vec{d})\,\vec{b} + (\vec{d},\vec{a},\vec{b})\,\vec{c} + (\vec{a},\vec{c},\vec{b})\,\vec{d} = \vec{0}$:

114. Հիմնվելով նախորդ խնդրի վրա ապացուցել, որ տարածության կամայական $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ վեկտորների համակարգ գծորեն կախյալ է:

115. Գտնել անհրաժեշտ և բավարար պայման, որի դեպքում $[[\vec{a},\vec{b}],\vec{c}] = [\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]]$:

116. Տրված են $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ոչ համահարթ վեկտորներ: Գտնել $\vec{x}$ վեկտոր, որը բավարարի հետևյալ համակարգին՝
$(\vec{a},\vec{x}) = \alpha$, $(\vec{b},\vec{x}) = \beta$, $(\vec{c},\vec{x}) = \gamma$:

117. Տրված են $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ երեք ոչ համահարթ վեկտորներ: Գտնել $\overrightarrow{OH}$ վեկտորը, որտեղ H-ը O կետի օրթոգոնալ պրոյեկցիան է ABC հարթության վրա:

118. Ապացուցել, որ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների վրա կառուցված զուգահեռագծի մակերեսը որոշվում է

$$S = \sqrt{\begin{vmatrix} (\vec{a},\vec{a}) & (\vec{a},\vec{b}) \\ (\vec{b},\vec{a}) & (\vec{b},\vec{b}) \end{vmatrix}}$$ բանաձևով:

119. Ապացուցել, որ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ վեկտորների վրա կառուցված զուգահեռանիստի ծավալը որոշվում է

$$V = \sqrt{\begin{vmatrix} (\vec{a},\vec{a}) & (\vec{a},\vec{b}) & (\vec{a},\vec{c}) \\ (\vec{b},\vec{a}) & (\vec{b},\vec{b}) & (\vec{b},\vec{c}) \\ (\vec{c},\vec{a}) & (\vec{c},\vec{b}) & (\vec{c},\vec{c}) \end{vmatrix}}$$ բանաձևով:

120) Հաշվել $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստի ծավալը, եթե $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$, իսկ $\angle BAD = \alpha$, $\angle BAA_1 = \beta$, $\angle DAA_1 = \gamma$:

Ստորև 121-128 խնդիրներում վեկտորների կոորդինատները դիտարկված են օրթոնորմավորված բազիսում:

121) Հաշվելով $[\vec{a},\vec{b}]$ վեկտորական արտադրյալը, պարզել՝ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները գծորեն կախյալ են թե անկախ, եթե.

ա) $\vec{a} = \{1; -7; 4\}$, $\vec{b} = \{2; -14; 8\}$;

բ) $\vec{a} = \{3; \sqrt{2}/2; 1\}$, $\vec{b} = \{9\sqrt{2}; 3; 3\sqrt{2}\}$:

122) Հաշվելով $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ վեկտորների խառը արտադրյալը, պարզել՝ համահա՞րթ են նրանք, եթե.

ա) $\vec{a} = \{2; -1; 3\}$, $\vec{b} = \{1; 4; 2\}$, $\vec{c} = \{3; 1; -1\}$;

բ) $\vec{a} = \{1; 6; 5\}$, $\vec{b} = \{3; -2; 4\}$, $\vec{c} = \{7; -18; 2\}$:

123) Տրված են $\vec{a} = \{0; 1; 1\}$ և $\vec{b} = \{1; 1; 0\}$ երկու վեկտորները: Գտնել $\vec{c}$ միավոր վեկտոր, որն ուղղահայաց է $\vec{a}$ վեկտորին, $\vec{b}$ վեկտորի հետ կազմում է $\pi/4$ անկյուն և ուղղված է այնպես, որ կարգավորված վեկտորների $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ եռյակն ունի դրական կողմնորոշում:

124) Տրված են $\vec{a} = \{1; 1; 1\}$ և $\vec{b} = \{1; 0; 0\}$ երկու վեկտորները: Գտնել $\vec{c}$ միավոր վեկտոր, որն ուղղահայաց է $\vec{a}$ վեկտորին, $\vec{b}$ վեկտորի հետ կազմում է $\pi/3$ անկյուն և ուղղված է այնպես, որ կարգավորված վեկտորների $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ եռյակն ունի դրական կողմնորոշում:

125. Տրված են $\vec{a}=\{11;\,10;\,2\}$ և $\vec{b}=\{4;\,0;\,3\}$ երկու վեկտորները։ Գտնել $\vec{c}$ միավոր վեկտոր, որն ուղղահայաց է $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներին և ուղղված է այնպես, որ կարգավորված վեկտորների $(\vec{a};\,\vec{b};\,\vec{c})$ եռյակն ունի դրական կողմնորոշում։

126. Տրված են $\vec{a}=\{8;\,4;\,1\}$, $\vec{b}=\{2;\,2;\,1\}$ և $\vec{c}=\{1;\,1;\,1\}$ երեք վեկտորները։ Գտնել $\vec{d}$ միավոր վեկտոր, որը $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների հետ կազմում է հավասար անկյուններ, ուղղահայաց է $\vec{c}$ վեկտորին և ուղղված է այնպես, որ կարգավորված վեկտորների $(\vec{a};\,\vec{b};\,\vec{c})$ ու $(\vec{a};\,\vec{b};\,\vec{d})$ եռյակներն ունեն նույն կողմնորոշումը։

127. Տրված են $\vec{a}=\{8;\,4;\,1\}$, $\vec{b}=\{2;-2;\,1\}$ և $\vec{c}=\{1;\,1;\,1\}$ երեք վեկտորները։ Գտնել $\vec{d}$ միավոր վեկտոր, որը համահարթ է $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներին, ուղղահայաց է $\vec{c}$ վեկտորին և ուղղված է այնպես, որ կարգավորված վեկտորների $(\vec{a};\,\vec{b};\,\vec{c})$ ու $(\vec{a};\,\vec{d};\,\vec{c})$ եռյակներն ունեն տարբեր կողմնորոշումը։

128. Տրված են $\vec{a}=\{8;\,4;\,1\}$, $\vec{b}=\{2;-2;\,1\}$ և $\vec{c}=\{4;\,0;\,3\}$ երեք վեկտորները։ Գտնել $\vec{d}$ միավոր վեկտոր, որն ուղղահայաց է $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներին և ուղղված է այնպես, որ կարգավորված վեկտորների $(\vec{a};\,\vec{b};\,\vec{c})$ ու $(\vec{a};\,\vec{b};\,\vec{d})$ եռյակներն ունեն նույն կողմնորոշումը։

Ստորև խնդիրներում կոորդինատային համակարգը համարվում է ուղղանկյուն։ Ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգի մասին տես §5-ում։

129. Հաշվել ABC եռանկյան մակերեսը, եթե $A=(-1;\,0)$, $B=(5;-3)$, $C=(4;\,3)$։

130. Հաշվել ABC եռանկյան մակերեսը, եթե $A=(1;\,0;\,2)$, $B=(3;\,3;\,2)$, $C=(1;-3;\,1)$։

131. Հաշվել $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստի ծավալը, եթե $A=(1;\,0;\,2)$, $B=(3;\,3;\,2)$, $C=(1;-3;\,1)$, $A_1=(1;\,0;\,8)$։

132. Հաշվել $DABC$ քառանիստի ծավալը, եթե $D=(8;\ 0;\ 1)$, $A=(2;\ 0;\ 1)$, $B=(2;\ 3;\ 3)$, $C=(1;-3;\ 1)$:

133. Տրված են A, B, C կետեր: Ապացուցել, որ A կետի հեռավորությունը BC ուղղից որոշվում է

$$h(A)=\frac{|[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}]|}{|\overrightarrow{BC}|}$$ բանաձևով:

134. Տրված են $A=(2;\ 2;\ 1)$, $B=(0;\ 2;-1)$, $C=(-2;\ 1;\ 1)$ կետերը: Գտնել A կետի հեռավորությունը BC ուղղից:

135. Գտնել ABC եռանկյան բարձրությունները, եթե $A=(-1;\ 0;-1)$, $B=(0;\ 2;-3)$, $C=(4;\ 4;\ 1)$:

136. Տրված են A, B, C, D կետեր: Ապացուցել, որ A կետի հեռավորությունը BCD հարթությունից որոշվում է

$$h(A)=\frac{|(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA})|}{|[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}]|}$$ բանաձևով:

137. Տրված են $A=(3;\ 2;\ 1)$, $B=(-1;\ 2;\ 0)$, $C=(1;\ 1;-2)$, $D=(3;\ 2;\ 4)$ կետերը: Գտնել A կետի հեռավորությունը BCD հարթությունից:

138. Հաշվել $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստի $ABCD$ նիստին տարված բարձրությունը, եթե $A=(1;\ 2;\ 3)$, $B=(9;\ 6;\ 4)$, $D=(3;\ 0;\ 4)$, $A_1=(5;\ 2;\ 6)$:

139. Հաշվել $DABC$ քառանիստի ABC նիստին տարված բարձրությունը, եթե $D=(2;\ 5;-3)$, $A=(2;-1;-3)$, $B=(4;-3;-2)$, $C=(4;\ 0;-5)$:

140. Հաշվել $DABC$ քառանիստի հանդիպակաց կողերի միջև հեռավորությունները, եթե
$D=(-4;\ 2;-3)$, $A=(-3;\ 0;-1)$, $B=(1;\ 4;\ 1)$, $C=(-7;\ 2;\ 3)$:

141. Հաշվել $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստի AC_1 անկյունագծի և $ABCD$ նիստի BD անկյունագծի միջև հեռավորությունը, եթե
$A=(-1;\ 2;-3)$, $B=(1;\ 4;\ 1)$, $D=(3;\ 2;-7)$, $A_1=(-7;\ 0;\ 0)$:

§5. Աֆինական և ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգեր հարթության վրա և տարածության մեջ: Բևեռային կոորդինատային համակարգը հարթության վրա:

Հարթության $(O;\ \vec{e_1},\ \vec{e_2})$ ***աֆինական կոորդինատային համակարգը*** կազմված է O կետից (***սկզբնակետից***) և այդ կետից կիրառված երկու ոչ համագիծ $\vec{e_1},\ \vec{e_2}$ վեկտորների կարգավորված զույգից (***բազիսից***) :

Սկզբնակետով և համապատասխանաբար $\vec{e_1}$ և $\vec{e_2}$ վեկտորներով անցնող ուղիղները կոչվում են OX և OY ***առանցքներ***: Կամայական M կետի $\overrightarrow{OM}$ շառավիղ վեկտորի կոորդինատները, այսինքն $\overrightarrow{OM} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$ վերլուծության x և y գործակիցները, կոչվում են M ***կետի կոորդինատներ*** (համապատասխանաբար ***աբսցիս*** և ***օրդինատ***) տվյալ կոորդինատային համակարգի նկատմամբ: Կետի կոորդինատները նշանակում են՝ $M(x;\ y)$ կամ $M = (x;\ y)$: Օրինակ, O սկզբնակետի համար $\overrightarrow{OO} = 0\cdot\vec{e_1} + 0\cdot\vec{e_2}$, այսինքն $O = (0;\ 0)$: Իսկ $\vec{e_1} + \vec{e_2}$ շառավիղ վեկտորի ծայրակետի կոորդինատներն են $(1;\ 1)$: Այդ կետը ընդունված է անվանել տվյալ կոորդինատային համակարգի ***միավոր կետ***:

Հարթության կետերի կոորդինատները և վեկտորի կոորդինատները միմյանց հետ կապված են հետևյալ բանաձևով՝ եթե $M_1 = (x_1;\ y_1)$ և $M_2 = (x_2;\ y_2)$, ապա

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1\}:$$

Եթե $(O;\ \vec{e_1},\ \vec{e_2})$-ը և $(O';\ \vec{e_1'},\ \vec{e_2'})$-ը հարթության երկու աֆինական կոորդինատային համակարգեր են, ընդ որում հայտնի է դրանցից երկրորդի դիրքը առաջինի նկատմամբ՝ $O' = (c_1;\ c_2)$, $\vec{e_1'} = \{c_{11};\ c_{21}\}$, $\vec{e_2'} = \{c_{12};\ c_{22}\}$, ապա հարթության կամայական M կետի $(x;\ y)$ և $(x';\ y')$ կոորդինատներն այդ համակարգերի նկատմամբ միմյանց հետ կապված են

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_1 \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_2 \end{cases}$$

բանաձևերով (***կոորդինատների ձևափոխության բանաձևեր***)։

Եթե $(O;\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2})$ համակարգն այնպիսին է, որ $|\overrightarrow{e_1}| = |\overrightarrow{e_2}| = 1$ և $\overrightarrow{e_1} \perp \overrightarrow{e_2}$, ապա այն կոչվում է ***ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգ*** կամ ***դեկարտյան կոորդինատային համակարգ***։ Ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում $M_1 = (x_1;\ y_1)$ և $M_2 = (x_2;\ y_2)$ կետերի միջև հեռավորությունը որոշվում է

$$M_1M_2 = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{բանաձևով։}$$

Ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգերի ձևափոխության բանաձևերում c_{ij} գործակիցները կարող են արտահայտվել (տես № 146, 147 խնդիրները) մեկ պարամետրով՝

$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi + c_1 \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi + c_2 \end{cases}$, երբ $(\overrightarrow{e_1};\ \overrightarrow{e_2})$ և $(\overrightarrow{e_1'};\ \overrightarrow{e_2'})$ բազիսներն ունեն նույն կողմնորոշումը և $\begin{cases} x = x'\cos\varphi + y'\sin\varphi + c_1 \\ y = x'\sin\varphi - y'\cos\varphi + c_2 \end{cases}$, երբ $(\overrightarrow{e_1};\ \overrightarrow{e_2})$ և $(\overrightarrow{e_1'};\ \overrightarrow{e_2'})$ բազիսներն ունեն տարբեր կողմնորոշում։

Տարածության $(O;\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_3})$ ***աֆինական կոորդինատային համակարգը*** կազմված է O կետից (***սկզբնակետից***) և այդ կետից կիրառված երեք ոչ համահարթ $\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_3}$ վեկտորների կարգավորված եռյակից (բազիսից)։ Սկզբնակետով և համապատասխանաբար $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ և $\overrightarrow{e_3}$ վեկտորներով անցնող ուղիղները կոչվում են OX, OY և OZ ***կոորդինատային առանցքներ***, իսկ OX և OY, OY և OZ, OX և OZ առանցքներով անցնող հարթությունները՝ համապատասխանաբար OXY, OYZ, OXZ ***կոորդինատային հարթություններ***։ Ինչպես և հարթության դեպքում, կամայական M կետի $\overrightarrow{OM}$ շառավիղ վեկտորի կոորդինատները, այսինքն $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}$ վերլուծության x, y և z գործակիցները, կոչվում են M կետի կոորդինատներ (համապատասխանաբար *աբսցիս*, *օրդինատ* և *ապլիկատ*) տվյալ կոորդինատային համակարգի նկատմամբ:

Տարածության կետերի կոորդինատները և վեկտորի կոորդինատները միմյանց հետ կապված են հետևյալ բանաձևով՝ եթե $M_1=(x_1;\ y_1;\ z_1)$ և $M_2=(x_2;\ y_2;\ z_2)$, ապա

$$\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1\}:$$

Եթե $(O;\ \overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3})$-ը և $(O';\ \overline{e_1'},\overline{e_2'},\overline{e_3'})$-ը տարածության երկու աֆինական կոորդինատային համակարգեր են, որտեղ $O'=(c_1;\ c_2;\ c_3)$, $\overline{e_1'}=\{c_{11};\ c_{21};\ c_{31}\}$, $\overline{e_2'}=\{c_{12};\ c_{22};\ c_{32}\}$, $\overline{e_3'}=\{c_{13};\ c_{23};\ c_{33}\}$, հին՝ $(O;\ \overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3})$ համակարգի նկատմամբ, ապա տարածության կամայական M կետի $(x;\ y;\ z)$ և $(x';\ y';\ z')$ կոորդինատներն այդ համակարգերի նկատմամբ արտահայտվում են մեկը մյուսով

$$\begin{cases} x=c_{11}x'+c_{12}y'+c_{13}z'+c_1\\ y=c_{21}x'+c_{22}y'+c_{23}z'+c_2\\ z=c_{31}x'+c_{32}y'+c_{33}z'+c_3 \end{cases}$$

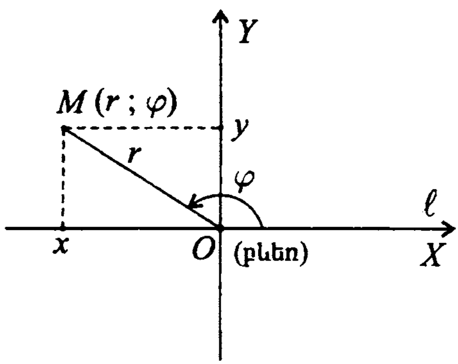
բանաձևերով, որոնց անվանում են ***տարածության*** $(O;\ \overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3})$ և $(O';\ \overline{e_1'},\overline{e_2'},\overline{e_3'})$ ***աֆինական կոորդինատային համակարգերի ձևափոխության բանաձևեր:***

Տարածության ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում $(\overline{e_1}\perp\overline{e_2},\ \overline{e_1}\perp\overline{e_3},\ \overline{e_2}\perp\overline{e_3},\ |\overline{e_1}|=|\overline{e_2}|=|\overline{e_3}|=1)$ երկու $M_1=(x_1;\ y_1;\ z_1)$ և $M_2=(x_2;\ y_2;\ z_2)$ կետերի միջև հեռավորությունը որոշվում է

$M_1M_2=|\overline{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ բանաձևով:

Հարթության ***բևեռային կոորդինատային*** $(O;\ \ell)$ ***համակարգը*** կազմված է O սկզբնակետից, որը կոչվում է ***բևեռ***, և այդ կետից կիրառված ℓ ճառագայթից, որը կոչվում է ***բևեռային առանցք***: Բևեռից տարբեր ցանկացած M կետի բևեռային կոորդինատները սահմանվում են որպես $(r;\ \varphi)$ կարգավորված թվազույգ, որտեղ r-ը OM հատվածի երկարությունն է, իսկ φ-ն այն անկյունն է $(0 \le \varphi < 2\pi)$, որով պետք է պտտել ℓ-ը O կետի շուրջը ժամսլաքի պտույտի հակառակ ուղղությամբ, մինչև որ այն համընկնի OM ճառագայթի հետ: Բևեռի, այսինքն O կետի համար սահմանվում է միայն մի բևեռային կոորդինատ՝ $r = 0$, իսկ երկրորդ՝ անկյունային կոորդինատ չի սահմանվում:

Տվյալ $(O; \ell)$ բևեռային կոորդինատային համակարգի համար սահմանվում է նրան ***կից OXY ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգը***, որի OX առանցքն անցնում է ℓ ճառագայթով և ուղղված է նույն կողմը, ինչ և ℓ-ը, իսկ նրան ուղղահայաց OY առանցքն ընտրվում է OX առանցքի պտտումով O-ի շուրջ 90^0 անկյան տակ ժամսլաքի պտույտի հակառակ ուղղությամբ: Կամայական $M \ne O$ կետի $(r; \varphi)$ բևեռային կոորդինատները $(x; y)$ ուղղանկյուն կոորդինատների հետ կապված են $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ բանաձևերով:



Խնդիր 12. Գրել հարթության կոորդինատային համակարգերի ձևափոխության բանաձևերը, եթե նոր համակարգի $O'X'$ և $O'Y'$ առանցքների հավասարումներն են համապատասխանաբար $3x - 2y - 4 = 0$ և $2x - y - 3 = 0$, իսկ նոր համակարգի միավոր կետն է $E = (7; 9)$:

Լուծում: Կոորդինատային համակարգերի ձևափոխության բանաձևերն են $x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_1$, $y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_2$, իսկ նոր կոորդինատային համակարգի բազիսային վեկտորներն ու սկզբնակետը համապատասխանաբար $\overrightarrow{e_1'} = \{c_{11}; c_{21}\}$, $\overrightarrow{e_2'} = \{c_{12}; c_{22}\}$ ու $O' = (c_1; c_2)$:

Նախ հավասարումների $3x-2y-4=0$, $2x-y-3=0$ համակարգից գտնում ենք $O'=(2;\ 1)$ կետը, որտեղից $c_1=2$, $c_2=1$: Ըստ պայմանի $\overrightarrow{O'E}=\vec{e_1'}+\vec{e_2'}=\{c_{11}+c_{12};\ c_{21}+c_{22}\}$, $\overrightarrow{O'E}=\{5;\ 8\}$, հետևաբար $c_{11}+c_{12}==5$, $c_{21}+c_{22}=8$:

Ունենք $O'X'$ առանցքի հավասարումը OXY համակարգում $3x-2y-4=0$-ն է: Մյուս կողմից նրա հավասարումը $O'X'Y'$ համակարգում $y'=0$-ն է: Տեղադրելով վերջինս կոորդինատային համակարգերի ձևափոխության բանաձևերի մեջ, ստանում ենք $x=c_{11}x'+2$, $y=c_{21}x'+1$, և հետևաբար $3(c_{11}x'+2)-2(c_{21}x'+1)-4=0$ այսինքն $3c_{11}-2c_{21}=0$: Նման ձևով, օգտվելով $O'Y'$ առանցքի նոր և հին համակարգերում հավասարումներից՝ $x'=0, 2x-y-3=0$, ստանում ենք $x=c_{12}y'+2$, $y=c_{22}x'+1$, $2(c_{12}y'+2)-(c_{22}x'+1)-3=0$, որտեղից $c_{12}-c_{22}=0$: Վերջապես, լուծելով հավասարումների $3c_{11}-2c_{21}=0$, $2c_{12}-c_{22}=0$, $c_{11}+c_{12}=5$, $c_{21}+c_{22}=8$ համակարգը, գտնում ենք $c_{11}=4$, $c_{12}=1$, $c_{21}=6$, $c_{22}=2$:

Պատ.՝ $x=4x'-y'+2$, $y=6x'+2y'+1$:

*

* * *

142. Տրված է $ABCDEF$ կանոնավոր վեցանկյունը: Գտնել նրա գագաթների և O կենտրոնի կոորդինատները՝ ա) $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE})$ կոորդինատային համակարգում, բ) $(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ կոորդինատային համակարգում:

143. Զուգահեռագիծ $ABCD$-ում O-ն անկյունագծերի հատման կետն է: Դիցուք $(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ կոորդինատային համակարգում՝ $M=(x;\ y)$: Գտնել M կետի կոորդինատները ա) $(O;\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC})$, բ) $(O;\ \overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OD})$, գ) $(O;\ \overrightarrow{OD},\ \overrightarrow{OA})$ համակարգերում:

144. Ապացուցել, որ ցանկացած աֆինական կոորդինատային համակարգում $(0;\ 0)$, $(x_1;\ y_1)$, $(x_2;\ y_2)$, $(x_1+x_2;\ y_1+y_2)$, կետերը զուգահեռագծի գագաթներ են:

145. Տրված է $ABCD$ զուգահեռագիծը: Արտահայտել $(A;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD})$ կոորդինատային համակարգի նկատմամբ կամայական M կետի x և y կոորդինատները $(C; \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$ կոորդինատային համակարգի նկատմամբ այդ նույն կետի x' և y' կոորդինատներով:

146. Զուգահեռագիծ $ABCD$-ում O-ն անկյունագծերի հատման կետն է: Գրել կոորդինատային $(A;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD})$ համակարգից կոորդինատային $(O;\ \overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OD})$ համակարգին անցման բանաձևերը:

147. Տրված են OXY և $O'X'Y'$ երկու կոորդինատային համակարգեր, ընդ որում $O'X'$ առանցքը հատվում է OX առանցքի հետ $A=(2;\ 0)$ կետում, $O'Y'$-ը հատվում է OY-ի հետ $B=(0;\ 8)$ կետում, և $O'=$ $=(-4;\ 2)$ առաջին կոորդինատային համակարգի նկատմամբ: Գրել կոորդինատային OXY համակարգից կոորդինատային $(O'; \overrightarrow{O'A}, \overrightarrow{O'B})$ համակարգին անցման բանաձևերը:

148. Կամայական կետի x և y կոորդինատները՝ կոորդինատային մի համակարգի նկատմամբ, արտահայտվում են կոորդինատային մյուս համակարգի նկատմամբ նրա x' և y' կոորդինատներով

$$\begin{cases} x = 2x' - 5y' + 3 \\ y = -x' + 2y' - 2 \end{cases}$$ բանաձևերով:

Գտնել երկրորդ համակարգի սկզբնակետի և բազիսային վեկտորների կոորդինատները առաջին համակարգի նկատմամբ:

149. Տրված է $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$ բազիսից $(\vec{e}_1{}',\ \vec{e}_2{}')$ բազիսին անցման $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ մատրիցը: Գրել կոորդինատային $(O;\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$ համակարգից կոորդինատային $(O;\ \vec{e}_1{}',\ \vec{e}_2{}')$ համակարգին անցման բանաձևերը,

ա) եթե այդ համակարգերի սկզբնակետերը նույնն են,

բ) եթե $(O;\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$ համակարգի նկատմամբ $O'=(3;\ 4)$:

150. Եռանկյուն OAB-ի AD և BE միջնագծերը հատվում են O' կետում:

Կամայական կետի x և y կոորդինատները՝ կոորդինատային $(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ համակարգի նկատմամբ, արտահայտել կոորդինատային $(O';\overrightarrow{O'A},\overrightarrow{O'B})$ համակարգի նկատմամբ նրա x' և y' կոորդինատներով:

151. Գտնել $ABCDA_1B_1C_1D_1$ զուգահեռանիստի զագաթների և անկյունագծերի հատման կետի կոորդինատները $(A;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AA_1})$ կոորդինատային համակարգում:

152. Գտնել $DABC$ քառանիստի նիստերի միջնագծերի հատման կետերի կոորդինատները $(D;\ \overrightarrow{DA},\ \overrightarrow{DB},\ \overrightarrow{DC})$ կոորդինատային համակարգում:

153. Տրված են $OXYZ$ և $O'X'Y'Z'$ երկու կոորդինատային համակարգեր, ընդ որում $O'=(2;\ 1;\ 3)$, $\overrightarrow{e_1'}=\{2;\ 4;\ 1\}$, $\overrightarrow{e_2'}=\{0;\ 4;\ 4\}$, $\overrightarrow{e_3'}=\{1;\ 1;\ 0\}$ առաջին կոորդինատային համակարգի նկատմամբ: Գրել մի կոորդինատային համակարգից մյուս կոորդինատային համակարգին անցման կոորդինատների ձևափոխության բանաձևերը : Պարզել՝ նու՞յնն են արդյոք $(\vec{e}_1;\ \vec{e}_2;\ \vec{e}_3)$ և $(\overrightarrow{e_1'};\ \overrightarrow{e_2'};\ \overrightarrow{e_3'})$ բազիսների կողմնորոշումները:

154. Կամայական կետի x, y, z կոորդինատները $OXYZ$ կոորդինատային համակարգի նկատմամբ, արտահայտվում են $O'X'Y'Z'$ կոորդինատային համակարգի նկատմամբ նրա x', y', z' կոորդինատներով հետևյալ բանաձևերով՝

ա) $\begin{cases} x = x'-y'+z'-1 \\ y = x'+y'-z'+1, \\ z = -2x'+y'+z' \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x = 3x'-y'-2z'+1 \\ y = x'+3y'+4z'-2 \\ z = x'-y'-z'+3 \end{cases}$,

գ) $\begin{cases} x = 2x'-y'+2z'-3 \\ y = 2x'-y'+4z'+1 \\ z = 3x'-3y'+7z'-2 \end{cases}$ բանաձևերով:

Գտնել կետ, որի կոորդինատների եռյակները $OXYZ$ և $O'X'Y'Z'$ համակարգերում թվապես համընկնում են:

155. Աֆինական կոորդինատային համակարգի նկատմամբ տրված են $A_1x+B_1y+C_1=0$ և $A_2x+B_2y+C_2=0$ երկու հատվող ուղիղներ և

նրանց չպատկանող $(x_0;\ y_0)$ կետ: Այդ ուղիղները ընդունելով որպես նոր կոորդինատային համակարգի համապատասխանաբար օրդինատների և աբսցիսների առանցքներ, իսկ $(x_0;\ y_0)$-ն որպես համակարգի միավոր կետ, կամայական կետի x' և y' նոր կոորդինատները արտահայտել նրա x և y հին կոորդինատներով:

156. Գրել կոորդինատային համակարգերի ձևափոխության բանաձևերը, ընդունելով որպես նոր՝ $O'X'$ և $O'Y'$ առանցքներ համապատասխանաբար $2x+y-4=0$ և $x-y+2=0$ ուղիղները, իսկ որպես համակարգի միավոր կետ՝ (3; 7) կետը:

157. Գրել $x-y-5=0$ ուղղի հավասարումը $O'X'Y'$ կոորդինատային համակարգում, որի համար $2x-y+7=0$ և $x+y-4=0$ ուղիղները համապատասխանաբար $O'X'$ և $O'Y'$ առանցքներն են, իսկ (0; 0) կետը այդ համակարգի միավոր կետն է:

158. Ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգի նկատմամբ տրված են երկու փոխուղղահայաց ուղիղներ՝ $3x+4y-2=0$, $4x-3y-11=0$ և $M_0=(1;\ 1)$ կետը: Այդ ուղիղները ընդունելով որպես նոր ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգի համապատասխանաբար օրդինատների և աբսցիսների առանցքներ, կամայական կետի x', y' նոր կոորդինատները արտահայտել նրա x, y հին կոորդինատներով, եթե M_0-ն ընկած է նոր կոորդինատային համակարգի առաջին քառորդում:

159. Տրված են $(\vec{e}_1;\ \vec{e}_2)$ և $(\vec{e}'_1;\ \vec{e}'_2)$ նույն կողմնորոշումն ունեցող երկու օրթոնորմավորված բազիսներ: Դիցուք $\vec{e}_1$-ը φ անկյունով (դրական կամ բացասական) պտտելիս համընկնում է $\vec{e}'_1$-ի հետ: Ապացուցել, որ

$$\begin{pmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{pmatrix}:$$

160. Տրված են $(\vec{e}_1;\ \vec{e}_2)$ և $(\vec{e}'_1;\ \vec{e}'_2)$ տարբեր կողմնորոշումներ ունեցող երկու օրթոնորմավորված բազիսներ: Դիցուք $\vec{e}_1$-ը φ անկյունով (դրական կամ բացասական) պտտելիս համընկնում է $\vec{e}'_1$-ի հետ: Ապացուցել, որ

$$\begin{pmatrix}\vec{e'_1}\\ \vec{e'_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ \sin\varphi & -\cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{e_1}\\ \vec{e_2}\end{pmatrix}:$$

161. Գրել $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$ և $(O';\vec{e'_1},\vec{e'_2})$ նույն կողմնորոշումն ունեցող ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգերի ձևափոխության բանաձևերը, եթե $O'=(-4;2)$, իսկ $\vec{e_1}$-ը համընկնում է $\vec{e'_1}$-ի հետ $2\pi/3$ անկյունով պտտելիս:

162. Գրել $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$ և $(O';\vec{e'_1},\vec{e'_2})$ տարբեր կողմնորոշումներ ունեցող ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգերի ձևափոխության բանաձևերը, եթե $O'=(-3;-2)$, իսկ $\vec{e_1}$-ը համընկնում է $\vec{e'_1}$-ի հետ $-\arccos(-4/5)$ անկյունով պտտելիս:

163. Տրված է $(6;-2)$ կետը OXY ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում: Գտնել նրա կոորդինատները $O'X'Y'$ կոորդինատային համակարգում, որն ստացվել է նախ OXY համակարգը $\varphi=-\arccos 12/13$ անկյունով O կետի շուրջը պտույտի և ապա սկզբնակետը $O'=(3;-4)$ կետ զուգահեռ տեղափոխման արդյունքում:

164. Դիցուք $(O;\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ և $(O';\vec{e'_1},\vec{e'_2},\vec{e'_3})$ ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգերն այնպիսին են, որ $O'\equiv O$, $\vec{e'_3}=\vec{e_3}$, իսկ $\vec{e'_1}$, $\vec{e'_2}$ վեկտորներն ստացվում են $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ վեկտորները OXY հարթության մեջ O կետի շուրջ φ անկյունով միևնույն ուղղությամբ պտտելով: Գրել կոորդինատների ձևափոխության բանաձևերը:

165. Տրված է $ABCDEF$ կանոնավոր վեցանկյունը, որի կողմը 1 է: Ընդունելով A գագաթը որպես բևեռ, $\overrightarrow{AB}$ վեկտորի ուղղությունը՝ բևեռային առանցքի դրական ուղղություն, իսկ $\overrightarrow{AB}$ վեկտորից դեպի $\overrightarrow{AC}$ վեկտոր կարճագույն պտույտի ուղղությունը որպես անկյան հաշվարկի ուղղություն, այդ համակարգում գտնել վեցանկյան գագաթների բևեռային կոորդինատները:

166. Բևեռային կոորդինատային համակարգի նկատմամբ տրված են $A=(2;\ \pi/3)$, $B=(\sqrt{2};\ 3\pi/4)$, $C=(5;\ \pi/2)$, $D=(3;-\pi/6)$ կետերը: Գտնել այդ կետերի կոորդինատները կից ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգի նկատմամբ:

167. Հաշվել հետևյալ երկու կետերի միջև հեռավորությունը՝

ա) $A=(2;\ \pi/12)$ և $B=(1;\ 5\pi/12)$,

բ) $C=(4;\ \pi/5)$ և $D=(6;\ 6\pi/5)$,

գ) $E=(3;\ 11\pi/18)$ և $F=(4;\ \pi/9)$,

եթե դրանք տրված են բևեռային կոորդինատային համակարգում:

168. Տրված են $A=(8;-2\pi/3)$ և $B=(6;\ \pi/3)$ կետերը: Գտնել AB հատվածի միջնակետի բևեռային կոորդինատները:

169. Բևեռային կոորդինատային համակարգի նկատմամբ տրված է $A=(5;\ 2\pi/3)$ կետը : Գտնել այդ կետի համաչափ կետի բևեռային կոորդինատները բևեռի, ինչպես նաև բևեռային առանցքի նկատմամբ:

170. Բևեռային կոորդինատային համակարգի նկատմամբ տրված են $A=(2;\ \pi/6)$, $B=(3;\ 4\pi/3)$, $C=(1;\ 3\pi/2)$, $D=(5;\ \pi)$, $E=(5;\ 0)$ կետերը: Ի՞նչ կոորդինատներ կունենան այդ կետերը, եթե բևեռային առանցքը բևեռի շուրջ դրական ուղղությամբ պտտենք $3\pi/4$ անկյունով:

171. Հաշվել եռանկյան մակերեսը, որի գագաթներից մեկը գտնվում է բևեռում, իսկ մյուս երկուսն ունեն հետևյալ բևեռային կոորդինատները՝ $(4;\ \pi/9)$ և $(1;\ 5\pi/18)$:

172. Ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգի նկատմամբ տրված են $A=(-1;\ 1)$, $B=(0;\ 2)$, $C=(5;\ 0)$, $D=(-8;-6)$ կետերը: Գտնել այդ կետերի բևեռային կոորդինատները կից բևեռային կոորդինատային համակարգի նկատմամբ:

173. Կետի բևեռային՝ $r=10$, $\varphi=\pi/6$ կոորդինատներով գտնել նրա ուղղանկյուն կոորդինատները ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում, եթե բևեռը գտնվում է $(2;\ 3)$ կետում, իսկ բևեռային առանցքը համուղղված է աբսցիսների առանցքին:

174. Բևեռային կոորդինատային համակարգի սկզբնակետը գտնվում է $(3;\ 5)$ կետում, իսկ բևեռային առանցքի ուղղությունը համընկնում է օրդինատների առանցքի դրական ուղղության հետ: Գտնել այդ համակարգում $A=(9;-1)$ և $B=(5;\ 5-2\sqrt{3})$ կետերի բևեռային կոորդինատները:

175. Բևեռային կոորդինատային համակարգի սկզբնակետը գտնվում է $(2;\ 3)$ կետում, իսկ բևեռային առանցքի ուղղությունը աբսցիսների առանցքի դրական ուղղության հետ կազմում է $\pi/6$ անկյուն: Գտնել այդ համակարգում $A=(3;\ 3+\sqrt{3})$ և $B=(3;\ 4)$ կետերի բևեռային կոորդինատները:

Ասում են, որ C կետը AB հատվածը բաժանում է $\lambda \neq -1$ հարաբերությամբ, եթե $\overline{AC} = \lambda\overline{CB}$:

Եթե հարթության աֆինական կոորդինատային համակարգի նկատմամբ

$$A=(x_1;\, y_1),\quad B=(x_2;\, y_2),\quad \text{ապա}\quad C=\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\, \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right):$$

Եթե տարածության կոորդինատների աֆինական համակարգի նկատմամբ, $A=(x_1;\, y_1;\, z_1)$, $B=(x_2;\, y_2;\, z_2)$, ապա

$$C=\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\, \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda};\, \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right):$$

Մասնավորապես AB հատվածի միջնակետի կոորդինատներն են

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2};\, \frac{y_1+y_2}{2};\, \frac{z_1+z_2}{2}\right):$$

Դիցուք L-ը հարթության վրա ինչ-որ ***երկրաչափական պատկեր*** է (օրինակ, ***գիծ*** է) իսկ $F(x,y)=0$ որևէ հավասարում: Այն կոչվում է L պատկերի (գծի) հավասարում հարթության տվյալ կոորդինատային համակարգի նկատմամբ, եթե այդ հավասարմանը բավարարում են միայն և միայն L պատկերի (գծի) կետերի $(x;\, y)$ կոորդինատները:

Օրինակ, $x=0$ և $y=0$ հավասարումները համապատասխանաբար OY և OX առանցքների հավասարումներն են:

Խնդիր 13. Գտնել այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնցից յուրաքանչյուրի հեռավորությունների քառակուսիների գումարը տրված եռանկյան գագաթներից հաստատուն է:

Լուծում: Արտածենք երկրաչափական տեղի հավասարումը: Դիցուք M-ը որոնելի երկրաչափական տեղին պատկանող որևէ կետ է: Այսինքն $MA_1^2+MA_2^2+MA_3^2=c$, որտեղ A_1-ը, A_2-ը և A_3-ը տրված եռանկյան գագաթներն են, իսկ c-ն հաստատուն է:

Դիտարկենք որևէ ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգ: Դիցուք $A_1=(x_1;\, y_1)$, $A_2=(x_2;\, y_2)$, $A_3=(x_3;\, y_3)$, $M=(x;\, y)$ այդ համակարգի նկատմամբ: Օգտվելով երկու կետերի միջև հեռավորության բանաձևից, կարող ենք գրել

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(x-x_3)^2+(y-y_3)^2=c,$$

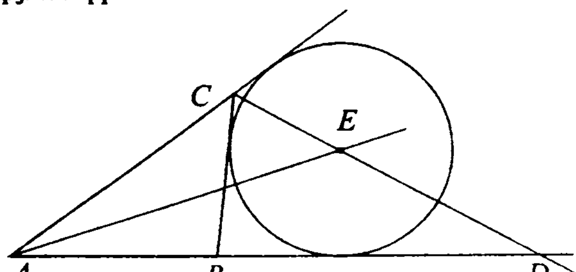
որտեղից՝

$$3x^2-2x(x_1+x_2+x_3)+3y^2-2x(y_1+y_2+y_3)=c-(x_1^2+y_1^2+$$
$+x_2^2+y_2^2+x_3^2+y_3^2)$: Երկու կողմերը բաժանելով 3-ի վրա և անջատելով լրիվ քառակուսիներ ըստ x-ի և y-ի, կստանանք

$$\left(x-\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2+\left(y-\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2=\frac{1}{3}c-\frac{1}{3}(x_1^2+y_1^2+x_2^2+$$
$$+y_2^2+x_3^2+y_3^2)+\frac{1}{9}(x_1+x_2+x_3)^2+\frac{1}{9}(y_1+y_2+y_3)^2$$: Կամ
$$\left(x-\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2+\left(y-\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2=\frac{1}{3}c-\frac{1}{9}\Big((x_1-x_2)^2+$$
$$+(y_1-y_2)^2+(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2\Big)=$$
$$=\Big(3c-(A_1A_2)^2-(A_2A_3)^2-(A_3A_1)^2\Big)/9:$$

Այսպիսով, եթե $c>\Big((A_1A_2)^2+(A_2A_3)^2+(A_3A_1)^2\Big)/3$, ապա կետերի որոնելի երկրաչափական տեղը շրջանագիծ է, որի կենտրոնը տրված եռանկյան միջնագծերի հատման $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3};\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ կետն է, իսկ շառավիղը հավասար է $\sqrt{3c-(A_1A_2)^2-(A_2A_3)^2-(A_3A_1)^2}\,/3$:

Խնդիր 14. Տրված են ABC եռանկյան $A=(4;\,4)$, $B=(-6;\,-1)$ $C=(-2;\,-4)$ գագաթները: Որոշել այն շրջանագծի կենտրոնի կոորդինատները, որը շոշափում է BC կողմին և AC ու AB կողմերի շարունակություններին:



Լուծում: Որոնելի E կետը եռանկյան A ներքին և C արտաքին անկյունների կիսորդների հատման կետն է:

Նախ երկու կետերի միջև հեռավորության բանաձևով գտնում ենք եռանկյան կողմերը՝ $AB=5\sqrt{5},\ BC=5,\ AC=10$:

Ըստ ABC եռանկյան C արտաքին անկյան CD կիսորդի հատկության ունենք $\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{AC}{BC}=2$, հետևաբար $\overline{AD}=-2\overline{DB}$: Այսինքն AB հատվածը D կետով բաժանվում է $\lambda=-2$ հարաբերությամբ, ուստի

$$x_D=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda}=\frac{4+(-2)\cdot(-6)}{1-2}=-16,$$

$$y_D=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}=\frac{4+(-2)\cdot(-1)}{1-2}=-6,\quad D=(-16;-6):$$ Այնպես, որ $AD=10\sqrt{5}$: Ըստ ACD եռանկյան A ներքին անկյան AE կիսորդի հատկության $\dfrac{DE}{CE}=\dfrac{AD}{AC}=\sqrt{5}$, հետևաբար $\overline{DE}=\sqrt{5}\cdot\overline{EC}$: Դարձյալ կիրառելով հատվածը տրված հարաբերությամբ բաժանելու բանաձևը, գտնում ենք $x_E=\dfrac{x_D+\lambda x_C}{1+\lambda}=\dfrac{-16+\sqrt{5}\cdot(-2)}{1+\sqrt{5}}=\dfrac{1}{2}(3-7\sqrt{5})$,

$$y_E=\frac{y_D+\lambda y_C}{1+\lambda}=\frac{-6+\sqrt{5}\cdot(-4)}{1+\sqrt{5}}=-\frac{1}{2}(7+\sqrt{5}):$$

Պատ.՝ $\left((3-7\sqrt{5})/2;\ -(7+\sqrt{5})/2\right)$:

*

* * *

176. Ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում $M=(x;\ y;\ z)$: Գտնել M կետին համաչափ կետի կոորդինատները՝
ա) կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ,
բ) կոորդինատային առանցքների նկատմամբ,
գ) կոորդինատային հարթությունների նկատմամբ:

177. Սեղան $ABCD$-ում AD հիմքը 3 անգամ մեծ է BC հիմքից: Գտնել նրա գագաթների, անկյունագծերի հատման O կետի և սրունքների հատման M կետի կոորդինատները $(A; \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$ կոորդինատային համակարգում:

178. Զուգահեռագիծ $ABCD$-ում $A=(-1; 3)$, $B=(2; 1)$: Գտնել մյուս երկու գագաթների և անկյունագծերի հատման M կետի կոորդինատները, եթե նրա AC և BD անկյունագծերը զուգահեռ են համապատասխանաբար OX և OY առանցքներին:

179. Զուգահեռագծի երեք հաջորդական գագաթներն են $A=(-2; 1)$, $B=(1; 3)$, $C=(4; 1)$: Գտնել չորրորդ գագաթի կոորդինատները:

180. Հավասարասրուն սեղան $ABCD$-ում AD հիմքը 8 է, բարձրությունը՝ 3, իսկ այդ հիմքին առընթեր անկյունը՝ $\pi/4$: Որպես աբսցիսների առանցք ընտրելով AD ուղիղը՝ ուղղված A կետից դեպի D կետը, իսկ որպես օրդինատների առանցք՝ սեղանի համաչափության առանցքը՝ ուղղված մեծ հիմքից դեպի փոքր հիմքը, գտնել նրա գագաթների, անկյունագծերի հատման կետի և սրունքների հատման կետի կոորդինատները:

181. Դիցուք M կետը AB հատվածը բաժանում է λ հարաբերությամբ, իսկ M' կետը M-ի համաչափ կետն է AB-ի միջնակետի նկատմամբ: Ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանում AB հատվածը M' կետը:

182. Դիցուք P, Q, R կետերը AB հատվածը բաժանում են համապատասխանաբար λ, μ, ν $(\mu \neq \nu)$ հարաբերությամբ: Ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանում R կետը PQ հատվածը:

183. Տրված են $C=(-5; 4)$ և $D=(6; -5)$ կետերը: Գտնել A և B կետեր այնպես, որ C և D կետերն AB հատվածը բաժանեն համապատասխանաբար $3/4$ և $2/3$ հարաբերությամբ:

184. Գտնել $A=(9;2)$, $B=(0;20)$, $C=(-15;-10)$ գագաթներով եռանկյանը ներգծված շրջանագծի M կենտրոնն ու r շառավիղը: Կոորդինատային համակարգն ուղղանկյուն է:

185. Գտնել $C_1=(2; 5)$ և $C_2=(22/3; 31/3)$ կենտրոններով, համապատասխանաբար 3 և 7 շառավիղներով երկու շրջանագծերի ընդհանուր շոշափողների հատման կետը: Կոորդինատային համակարգն ուղղանկյուն է:

186. Տրված են $ABCD$ սեղանի երեք հաջորդական գագաթները՝ $A=(-1; -2)$, $B=(1; 3)$, $C=(9; 9)$: Գտնել D գագաթի, ինչպես նաև

անկյունագծերի հատման M կետի և սրունքների հատման S կետի կոորդինատները, եթե AD հիմքը 15 է: Կորդինատային համակարգն ուղղանկյուն է:

187. Տրված են եռանկյան $A=(-4;-1;2)$ և $B=(3;5;-16)$ գագաթները: Գտնել C գագաթը, եթե հայտնի է, որ AC կողմի միջնակետը գտնվում է OY առանցքի վրա, իսկ BC կողմի միջնակետը՝ OXZ հարթության վրա:

188. Ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանվում AB հատվածը OYZ հարթությամբ, եթե $A=(2;-1;7)$, $B=(4;5;-2)$:

189. Տրված են $A=(1;2;3)$, $B=(7;2;5)$ կետերը: Գտնել AB ուղղին պատկանող M կետի կոորդինատները, եթե այն ընկած է A կետի նկատմամբ նույն կողմում՝ որ կողմում B կետն է, և $AM=2AB$:

190. Տրված են $A=(-3;1)$, $B=(2;-3)$ կետերը: Գտնել AB ուղղին պատկանող M կետի կոորդինատները, եթե այն ընկած է A կետի նկատմամբ նույն կողմում՝ որ կողմում B կետն է, և $AM=3AB$:

191. Գտնել հարթության այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց հեռավորությունների քառակուսիների գումարը՝ տրված երկու կետերից, հաստատուն է:

192. Գտնել հարթության այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց հեռավորությունների քառակուսիների տարբերությունը՝ տրված երկու կետերից, հաստատուն է:

193. Գտնել հարթության այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց հեռավորությունը $A=(4;0)$ կետից երկու անգամ մեծ է $B=(1;0)$ կետից ունեցած հեռավորությունից: Կորդինատային համակարգն ուղղանկյուն է:

194. Ուղղանկյուն եռանկյունը, որի էջերն են a և b, հարթության վրա տեղափոխվում է այնպես, որ նրա սուր անկյունների գագաթները սահում են երկու ուղղահայաց ուղիղների վրայով: Գտնել ուղղանկյան եռանկյան ուղիղ անկյան գագաթի դիրքերի երկրաչափական տեղը:

195. Գտնել հարթության այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց $(r;\varphi)$ կոորդինատները $(O;\ell)$ բևեռային կոորդինատային համակարգում բավարարում են հետևյալ պայմանին՝

ա) $r=4$, բ) $\varphi=\pi/4$, գ) $0<\varphi<\pi/2$, դ) $2<r<3$:

§ 7. Ուղիղը հարթության վրա

Աֆինական կոորդինատային համակարգի նկատմամբ հետևյալ՝ $F(x,y)=\sum_{i,j} a_{ij}x^i y^j=0$ տեսքի հավասարումով տրվող կորը կոչվում է ***հանրահաշվական կոր.***

Կորի հանրահաշվական լինելը կախված չէ դիտարկվող կոորդինատային համակարգից:

Հանրահաշվական ***կորի կարգ*** կոչվում է $a_{ij}x^i y^j$, $(a_{ij}\neq 0)$ միանդամների աստիճաններից ($i+j$ գումարներից) ամենամեծը: Կոորդինատային մի համակարգից մյուսին անցնելիս կորի կարգը չի փոխվում:

Մեկ (կամ առաջին) կարգի հանրահաշվական կորերը հարթության վրա ***ուղիղներն*** են: Հարթության ամեն մի ուղիղ հարթության կամայական աֆինական կոորդինատային համակարգի նկատմամբ տրվում է $Ax+By+C=0$, ($A\neq 0$ կամ $B\neq 0$) տեսքի հավասարումով (որն անվանում են ***ուղղի ընդհանուր հավասարում***), և հակառակը՝ ամեն մի այդպիսի հավասարում հարթության ինչ-որ ուղղի հավասարում է:

Ուղղի ***ուղղորդ վեկտոր*** կոչվում է նրան համագիծ ամեն մի ոչ զրոյական վեկտոր: Օրինակ $Ax+By+C=0$ ուղղի համար $\vec{a}=\{B;-A\}$ վեկտորն ուղղորդ վեկտոր է:

Ուղիղը կարող է տրվել իր որևէ M_0 կետով և իր որևէ $\vec{a}$ ուղղորդ վեկտորով՝ $(M_0;\vec{a})$: Եթե հարթության աֆինական կոորդինատային համակարգի նկատմամբ $M_0=(x_0;y_0)$, $\vec{a}=\{p;q\}$, ապա $(M_0;\vec{a})$ ***ուղղի պարամետրական հավասարումներն*** են՝ $x=x_0+pt$, $y=y_0+qt$, որտեղ $t\in R$ կոչվում է պարամետր:

Պարամետրի արտաքսումով ստացվում է ***ուղղի կանոնական հավասարումը***՝ $\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}$: Օրինակ, $\frac{x+1}{0}=\frac{y}{3}$ հավասարումը $M_0=(-1;0)$ կետով անցնող և OY առանցքին զուգահեռ ուղղի կանոնական հավասարում է:

Երկու՝ $M_1=(x_1;y_1)$ և $M_2=(x_2;y_2)$ կետերով անցնող ուղղի հավասարումն է $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ կամ պարամետրական տեսքով՝

$x = x_1 + t(x_2 - x_1)$, $y = y_1 + t(y_2 - y_1)$: Երբ $t \in [0; 1]$, ապա այդ հավասարումներով պատկերվում է M_1M_2 հատվածը:

Երկու՝ $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ և $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ հավասարումներով տրված ուղիղների համար հնարավոր են փոխադարձ դասավորության երեք դեպք

ա) ***հատվում են*** $\Leftrightarrow$ $A_1 : A_2 \neq B_1 : B_2$,

բ) ***զուգահեռ են*** $\Leftrightarrow$ $A_1 : A_2 = B_1 : B_2 \neq C_1 : C_2$,

գ) ***համընկնում են*** $\Leftrightarrow$ $A_1 : A_2 = B_1 : B_2 = C_1 : C_2$:

Եթե ուղիղը տրված է $Ax + By + C = 0$ հավասարումով, ապա $Ax + By + C > 0$ և $Ax + By + C < 0$ անհավասարումներից յուրաքանչյուրի բոլոր $(x; y)$ լուծումների բազմությունը կոչվում է համապատասխանաբար ***դրական*** և ***բացասական կիսահարթություն*** տրված ուղղի նկատմամբ: Այսպիսով ամեն մի ուղիղ հարթությունը բաժանում է երկու կիսահարթությունների:

Միևնույն կիսահարթությանը պատկանող ցանկացած երկու կետերը միացնող հատվածը չի հատում ուղիղը, այսինքն ամբողջությամբ գտնվում է այդ կիսահարթության մեջ, իսկ տարբեր կիսահարթություններին պատկանող ցանկացած երկու կետերը միացնող հատվածի վրա գոյություն ունի միակ կետ, որը պատկանում է ուղղին:

Հարթության միևնույն կետով անցնող բոլոր ուղիղների բազմությունը կոչվում է ***ուղիղների փունջ***, իսկ այդ կետը՝ ***փնջի կենտրոն***: Եթե փունջը տրված է իր որևէ երկու ուղիղներով՝ $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, ապա $\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0$ հավասարումը, որտեղ α-ն և β-ն կամայական թվեր են և միաժամանակ զրո չեն, փնջի որևէ ուղղի հավասարում է, և հակառակը՝ փնջի ամեն մի ուղղի հավասարում կարող է ներկայացվել այդ տեսքով:

Եթե ուղղի $Ax + By + C = 0$ հավասարման մեջ $B = 0$, ապա նրա հավասարումը կարող է ներկայացվել $x = -C/A$ կամ $x = a$ տեսքով: Այդպիսի ուղիղը զուգահեռ է OY առանցքին: Իսկ եթե $B \neq 0$, ապա այն կարող է ներկայացվել $y = kx + b$ տեսքով, որտեղ k-ն կոչվում է ***ուղղի անկյունային գործակից***, այն բնութագրում է ուղղի թեքվածությունը OX առանցքի նկատմամբ: Իսկ b-ն OY առանցքից անջատած հատվածն է:

Տրված $M_0 = (x_0;\ y_0)$ կետով անցնող և k անկյունային գործակից ունեցող ուղղի հավասարումն է՝ $y - y_0 = k(x - x_0)$:

196. Ցույց տալ, որ ուղղի տրման եղանակները՝ ա) երկու կետով, բ) կետով և ուղղորդ վեկտորով, համարժեք են միմյանց:

197. Ապացուցել, որ $Ax + By + C = 0$ ուղղի համար

ա) $\{B;\ -A\}$ վեկտորն ուղղորդ վեկտոր է

բ) բոլոր ուղղորդ վեկտորներն ունեն $\{kB;\ -kA\}$, $k \neq 0$ տեսք:

198. Ապացուցել, որ եթե ուղիղը OX և OY առանցքներից անջատում է համապատասխանաբար a և b հատվածներ, ապա նրա հավասարումը կարելի է ներկայացնել $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ տեսքով:

199. Ապացուցել, որ ուղղի հավասարումը կարելի է ներկայացնել անկյունային գործակցով, այն և միայն այն դեպքում, երբ ուղիղը զուգահեռ չէ OY առանցքին:

200. Կազմել $OABC$ զուգահեռագծի անկյունագծերն ընդգրկող ուղիղների հավասարումները $(O;\overline{OA},\overline{OC})$ կոորդինատային համակարգում:

201. Գրել ուղղի հավասարումը, եթե այն

ա) օրդինատների առանցքից անջատում է 4 հատված, իսկ անկյունային գործակիցը 3 է:

բ) անցնում է (2; 3) կետով և ունի -5 անկյունային գործակից,

գ) անցնում է $(3;-2)$ կետով և զուգահեռ է OY առանցքին,

դ) անցնում է $(3;-5)$ կետով և զուգահեռ է $\{-4;\ 2\}$ վեկտորին,

ե) անցնում է (2; 3) և $(-4;-6)$ կետերով,

զ) կոորդինատային OX և OY առանցքներից անջատում է համապատասխանաբար 3 և -5 հատվածներ:

202. Տրված են $A = (2;-5)$ և $B = (-3;\ 1)$ կետերը: Կազմել

ա) AB ուղղի պարամետրական, կանոնական և ընդհանուր հավասարումները:

բ) AB հատվածի պարամետրական հավասարումը:

203. Ուղիղն անցնում է $(3;-2)$ կետով և զուգահեռ է $\{-2;\ 3\}$ վեկտորին: Կազմել նրա պարամետրական, կանոնական և ընդհանուր հավասարումները:

204. Գտնել $x+2y+1=0$ ուղղի անկյունային գործակիցն ու OX և OY առանցքներից նրա անջատած հատվածները:

205. Գրել ABC եռանկյան A գագաթով տարված միջնագծի հավասարումը, եթե $A=(-2;\,3)$, $B=(4;\,1)$, $C=(6;-5)$:

206. Ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում տրված են՝ $A=(4;\,4)$, $B=(-6;-1)$, $C=(-2;-4)$ կետերը: Գրել ABC եռանկյան C ներքին անկյան կիսորդի հավասարումը:

207. Գրել $(2;-1)$ կետով անցնող ուղղի հավասարումը, եթե կոորդինատների առանցքների հետ նրա հատումից առաջացած հատվածն այդ կետով կիսվում է:

208. Ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում գրել $2x+5y=0$ ուղղին զուգահեռ այն ուղղի հավասարումը, որն առանցքների հետ միասին կազմում է 5 մակերեսով եռանկյուն:

209. Ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում գրել $M=(4;-3)$ կետով անցնող այն ուղղի հավասարումը, որն առանցքների հետ միասին կազմում է 3 մակերեսով եռանկյուն:

210. Գտնել տրված քառանկյանը ներգծված բոլոր զուգահեռագծերի անկյունագծերի հատման կետերի երկրաչափական տեղը, եթե նրանց հանդիպակած կողմերի մի զույգը զուգահեռ է քառանկյան անկյունագծերից մեկին:

211. Տրված են եռանկյան երկու կողմերի $2x-y=0$, $5x-y=0$ և միջնագծերից մեկի $3x-y=0$ հավասարումները: Կազմել երրորդ կողմի հավասարումը, եթե այն անցնում է $(3;\,9)$ կետով:

212. Տրված են եռանկյան երկու կողմերի $3x-2y+1=0$, $x-y+1=0$ հավասարումները և առաջին կողմին տարված միջնագծի $2x-y-1=0$ հավասարումը: Կազմել երրորդ կողմի հավասարումը:

213. Տրված են եռանկյան մի կողմի $x-2y+7=0$, և մյուս երկու կողմերին տարված միջնագծերի $x+y-5=0$, $2x+y-11=0$ հավասարումները: Կազմել մյուս երկու կողմերի հավասարումները:

214. Ուղիղներից մեկն անցնում է M_1 կետով և զուգահեռ է $\vec{a}$ վեկտորին, իսկ մյուսն անցնում է M_2 կետով և զուգահեռ է $\vec{b}$ վեկտորին: Ապացուցել, որ այդ ուղիղները

ա) հատվում են $\Leftrightarrow$, երբ $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, բ) զուգահեռ են $\Leftrightarrow$, երբ $\vec{a} \parallel \vec{b} \nparallel \overrightarrow{M_1M_2}$,

գ) համընկնում են $\Leftrightarrow$, երբ $\vec{a} \parallel \vec{b} \parallel \overrightarrow{M_1M_2}$

215. Տրված են $x = x_1 + a_1 t,\quad y = y_1 + a_2 t$ և $x = x_2 + b_1 t$, $y = y_2 + b_2 t$ ուղիղները: Գտնել անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որոնց դեպքում այդ ուղիղները

ա) հատվում են, բ) զուգահեռ են, գ) համընկնում են:

216. Տրված են $Ax + By + C = 0$ և $x = x_0 + a_1 t,\ y = y_0 + a_2 t$ ուղիղները: Ապացուցել, որ այդ ուղիղները

ա) հատվում են $\Leftrightarrow$, երբ $Aa_1 + Ba_2 \neq 0$,

բ) զուգահեռ են $\Leftrightarrow$, երբ $\begin{cases} Aa_1 + Ba_2 = 0 \\ Ax_0 + By_0 + C \neq 0 \end{cases}$,

գ) համընկնում են $\Leftrightarrow$, երբ $\begin{cases} Aa_1 + Ba_2 = 0 \\ Ax_0 + By_0 + C = 0 \end{cases}$:

217. Պարզել հետևյալ ուղիղների փոխադարձ դիրքը՝

ա) $2x + 3y - 1 = 0$ և $4x + 6y - 7 = 0$;

բ) $x = 5 + 4t,\ y = -2 - 2t$ և $x = 1 - 2t,\ y = 7 + t$;

գ) $3x + 9y + 5 = 0$ և $x = 2 + 3t,\ y = -t$;

դ) $3x - 4y + 1 = 0$ և $2x + 3y - 1 = 0$;

ե) $x = 2 - 3t,\ y = 1 + 2t$ և $x = t,\ y = -1 - t$;

զ) $4x - 3y + 5 = 0$ և $x = 2 + 4t,\ y = 1 - 3t$;

է) $x - y + 2 = 0$ և $2y - 2x - 4 = 0$;

ը) $x = 1 + t,\ y = 3 - 2t$ և $x = 2 + 2t,\ y = 1 - 4t$;

թ) $2x - y - 1 = 0$ և $x = 1 + t,\ y = 1 + 2t$:

218. Զուգահեռագծի երկու կողմերի հավասարումներն են $x - 3y = 0$ և $2x + 5y + 6 = 0$, իսկ գագաթներից մեկը $(4; -1)$ կետն է: Կազմել մյուս երկու կողմերի հավասարումները:

219. Եռանկյան գագաթներն են՝ $A = (-1; 2)$, $B = (3; -1)$, $C = (0; 4)$: Կազմել այն ուղղի հավասարումը, որը զուգահեռ է BC կողմին և անցնում է՝ ա) A գագաթով, բ) միջնագծերի հատման կետով:

220. Գրել $M=(2;5)$ կետով անցնող այն ուղիղների հավասարումները որոնցից հավասարահեռ են $P=(-1;\ 2)$ և $Q=(5;\ 4)$ կետերը:

221. Եռանկյան կողմերի միջնակետերն են՝ $M_1=(2;\ 3)$, $M_2=(-1;\ 2)$, $M_3=(4;\ 5)$: Կազմել նրա կողմերի հավասարումները:

222. Կազմել ուղղի հավասարումը, որի կետերը հավասարահեռ են $x+y-1=0$ և $x+y-13=0$ զուգահեռ ուղիղներից:

223. Կազմել այն ուղիղների հավասարումները որոնցից հավասարահեռ են $(1;\ 2)$, $(3;\ 0)$, $(-4;\ -5)$ կետերը:

224. Զուգահեռագծի երկու կողմերի հավասարումներն են $x-y-1=0$ և $x-2y-10=0$, իսկ $O=(3;\ -1)$ նրա անկյունագծերի հատման կետն է: Կազմել մյուս երկու կողմերի հավասարումները:

225. Կազմել $ABCD$ զուգահեռագծի կողմերի հավասարումները, եթե նրա անկյունագծերը հատվում են $M=(1;6)$ կետում, իսկ AB, BC, CD և DA ուղիղներն անցնում են համապատասխանաբար $P=(3;\ 0)$, $Q=(6;\ 6)$, $R=(5;\ 9)$ և $S=(-5;\ 4)$ կետերով:

226. Զուգահեռագիծ $ABCD$-ում AB և AD կողմերի հավասարումներն են համապատասխանաբար $3x+4y-12=0$ և $5x-12y-6=0$, իսկ $E=(-2;\ 13/6)$ կետը BC կողմի միջնակետն է: Կազմել մյուս երկու կողմերի հավասարումները:

227. Զուգահեռագիծ $ABCD$-ում AB կողմի և AC անկյունագծի հավասարումներն են համապատասխանաբար $3x+4y-12=0$ և $x+12y-12=0$: Իսկ $E=(-2;\ 13/6)$ կետը BC կողմի միջնակետն է: Կազմել BC, CD և DA կողմերի հավասարումները:

228. Ապացուցել, որ

$$A_1x+B_1y+C_1=0,\ A_2x+B_2y+C_2=0,\ A_3x+B_3y+C_3=0$$

ուղիղներն ունեն գոնե մեկ ընդհանուր կետ այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}=0:$$

229. Գտնել անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, երբ

$$A_1x+B_1y+C_1=0,\ A_2x+B_2y+C_2=0,\ A_3x+B_3y+C_3=0$$

ուղիղները կազմում են եռանկյուն:

230. Գտնել անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, երբ

$$A_1x+B_1y+C_1=0,\ A_2x+B_2y+C_2=0,\ A_3x+B_3y+C_3=0$$

ուղիղներն ունեն մեկ հատ ընդհանուր կետ:

231. Հարթության վրա տրված է երեք ուղիղ: Նրանց ինչպիսի՞ փոխադարձ դիրքեր են հնարավոր:

232. Ստորև յուրաքանչյուր դեպքում, պարզել հետևյալ ուղիղների փոխադարձ դիրքը՝

ա) $x+2y+3=0,\quad 2x+3y+5=0,\quad x-y+7=0;$

բ) $2x+5y-4=0,\quad 7x+y-20=0,\quad 3x+2y-8=0;$

գ) $x-y-2=0,\quad 3x+5y+4=0,\quad 6x-6y+1=0;$

դ) $2x+3y-1=0,\quad 4x+6y+5=0,\quad 10x+15y-7=0;$

ե) $2x-y+1=0,\quad 4x-2y+2=0,\quad x-y+7=0;$

զ) $x+2y+3=0,\quad 2x+4y+6=0,\quad x+2y+7=0;$

է) $4x-2y-6=0,\quad 2x-y-3=0,\quad 6x-3y-9=0$

233. Եռանկյան կողմերի հավասարումներն են՝

$$A_1x+B_1y+C_1=0,\ A_2x+B_2y+C_2=0,\ A_3x+B_3y+C_3=0$$

Ապացուցել, որ

$$(A_1x+B_1y+C_1)\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} = (A_2x+B_2y+C_{21})\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}$$

հավասարումը երրորդ կողմին տարված միջնագծի հավասարումն է:

234. Տրված են M կետում հատվող $2x+3y-5=0$ (AC), $x-y-1=0$ (BD) երկու ուղիղներ և $P=(3;1)$, $Q=(2;2)$, $R=(-2;1)$, $S=(1;-1)$, $T=(4;0)$ հինգ կետեր: Այդ կետերից P-ն ընկած է AMB անկյան ներսում, իսկ CMD-ն այդ անկյան հակադիր անկյունն է: Ո՞ր անկյուններում են գտնվում մյուս չորս կետերը:

234. Երկու զուգահեռ $2x-5y+6=0$ և $2x-5y-7=0$ ուղիղներ հարթությունը տրոհում են երեք տիրույթների: Տրված $A=(2;1)$, $B=(3;2)$, $C=(1;1)$, $D=(2;8)$, $E=(7;1)$, $F=(-4;6)$ կետերը խմբավորել ըստ միևնույն տիրույթին պատկանելիության:

236. Գտնել անհրաժեշտ և բավարար պայման, որի դեպքում $M_0=(x_0;y_0)$ կետը գտնվում է $Ax+By+C=0$ և $Ax+By+D=0$ երկու զուգահեռ ուղիղների միջև:

237. Տրված են ABC եռանկյան կողմերի հավասարումները $2x-y+$ $+2=0$ (AB), $x+y-4=0$ (BC) և $2x+y=0$ (CA): Որոշել $M=(3;\ 1)$, $N=(7;\ -6)$, $P=(3;\ 2)$ կետերից յուրաքանչյուրի դիրքը եռանկյան նկատմամբ:

238. Ապացուցել, որ $A_1=(x_1;\ y_1)$, $A_2=(x_2;\ y_2)$ և $A_3=(x_3;\ y_3)$ կետերն ընկած են մի ուղղի վրա այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0:$$

239. Եռանկյան գագաթներն են՝ $A=(x_1;\ y_1)$, $B=(x_2;\ y_2)$ և $C=(x_3;\ y_3)$ կետերը: Ապացուցել, որ $S_{ABC}=|\det M|/2$, որտեղ

$$M=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}:$$

240. Ապացուցել, որ $\vec{n}=\{A;\ B\}$ վեկտորը $Ax+By+C=0$ ուղղի որևէ կետից կիրառելիս նրա ծայրակետը կգտնվի նշված հավասարումով որոշվող դրական կիսահարթության մեջ:

§ 8. Մի ուղղից մինչև մյուս ուղիղն ընկած անկյունը, երկու ուղիղների կազմած անկյունները:

Մի ուղղից մինչև մյուս ուղիղն ընկած անկյուն (նշանակվում է $(\widehat{\mathrm{I},\mathrm{II}})$) կոչվում է այն ամենափոքր անկյունը, որով պետք է պտտել առաջին ուղիղը նրանց հատման կետի շուրջը ժամսլաքի պտույտի հակառակ ուղղությամբ, որպեսզի այն համընկնի երկրորդ ուղղի հետ:

Եթե ուղիղները զուգահեռ են կամ համընկած, ապա մի ուղղից մինչև մյուս ուղիղն ընկած անկյունը սահմանվում է հավասար զրոի:

Ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում ուղղի անկյունային գործակիցը հավասար է OX առանցքից մինչև այդ ուղիղն ընկած անկյան տանգենսին:

Եթե ուղիղները տրված են $y = k_1x + b_1$ (I), $y = k_2x + b_2$ (II) հավասարումներով և (I)$\measuredangle$(II), ապա

$$tg(\widehat{\mathrm{I},\mathrm{II}}) = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}:$$

Իսկ, եթե ուղիղները տրված են համապատասխանաբար $A_1x + B_1y + C_1 = 0$(I) և $A_2x + B_2y + C_2 = 0$(II) հավասարումներով և ուղղահայաց չեն միմյանց, ապա

$$tg(\widehat{\mathrm{I},\mathrm{II}}) = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}:$$

Երկու ուղիղներով կազմված անկյուն կոչվում է նրանց որևէ ուղղորդ վեկտորներով կազմված անկյունը: Այնպես, որ երկու ուղիղներ կազմում են երկու անկյուն՝ φ_1 և φ_2, որոնք միմյանց լրացնում են մինչև 180^0:

Եթե ուղիղները տրված են համապատասխանաբար $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ և $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ հավասարումներով, ապա նրանց կազմած անկյունները որոշվում են

$$\cos\varphi_{1,2} = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

բանաձևով: Նշված ուղիղները փոխուղղահայաց են այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0:$$

Իսկ եթե ուղիղները տրված են $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$ հավասարումներով, ապա նրանք փոխուղղահայաց են այն և միայն այն դեպքում, երբ $k_1k_2 = -1$: Եթե այդ ուղիղները փոխուղղահայաց չեն, ապա

$$tg\varphi_{1,2} = \pm\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}:$$

*

* * *

Այս ենթաբաժնի բոլոր խնդիրներում դիտարկվում են ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգեր:

241. Ապացուցել, որ $\vec{n} = \{A;\ B\}$ վեկտորն ուղղահայաց է $Ax + By + C = 0$ ուղղին:

242. Ապացուցել, որ $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ և $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ ուղիղներն ուղղահայաց են միմյանց այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0:$$

243. Ուղղի հավասարումը տրված է $y = kx + b$ տեսքով: Ի՞նչ երկրաչափական իմաստ ունեն k-ն և b-ն:

244. Ապացուցել, որ ուղղի անկյունային գործակիցը՝ OX առանցքից մինչև այդ ուղիղն ընկած անկյան տանգենսն է:

245. Կազմել ուղղի հավասարումը, որն անցնում է $(-5;\ 3)$ կետով, եթե OX առանցքից մինչև այդ ուղիղն ընկած անկյունը 135^0 է:

246. Գտնել OX առանցքից մինչև այն ուղիղն ընկած անկյունը, որն անցնում է $(2;-5)$ և $(0;-3)$ կետերով:

247. Գտնել OX առանցքից մինչև այն ուղիղն ընկած անկյունը, որն անցնում է $(1;\ 4)$ և $(3;\ 5)$ կետերով:

248. Տրված է եռանկյուն կազմող երեք ուղիղ: Ապացուցել, որ առաջին ուղղից մինչև երկրորդ ուղիղ, երկրորդ ուղղից մինչև երրորդ և երրորդից մինչև առաջին ուղիղ ընկած անկյունները կամ եռանկյան ներքին անկյուններն են կամ՝ արտաքին:

249. Գտնել եռանկյան ներքին անկյունները, եթե նրա կողմերի հավասարումներն են $3x - y + 6 = 0$, $x - y + 4 = 0$ և $x + 2y = 0$:

250. Հավասարասրուն եռանկյան հիմքն ընկած է $2x + 3y = 0$ ուղղի վրա, գագաթը գտնվում է $(2;\ 6)$ կետում, իսկ հիմքին առընթեր անկյան տանգենսը $3/2$ է: Կազմել սրունքների հավասարումները:

251. Հավասարասրուն եռանկյան գագաթը գտնվում է $(-7;\ 15)$ կետում, իսկ $(1;\ 3)$ կետը հիմքի միջնակետն է: Կազմել նրա կողմերի հավասարումները, եթե հիմքին առընթեր անկյան տանգենսը 4 է:

252. Հավասարասրուն եռանկյան հիմքը և սրունքներից մեկն ընկած են համապատասխանաբար $2x - 5y + 1 = 0$ և $12x - y - 23 = 0$ ուղիղների վրա: Կազմել մյուս սրունքի հավասարումը, եթե այն անցնում է $(3;\ 1)$ կետով:

253. Հավասարասրուն եռանկյան հիմքը և սրունքներից մեկն ընկած են

համապատասխանաբար $2x+3y=0$ և $5x-12y=0$ ուղիղների վրա: Կազմել մյուս սրունքի հավասարումը, եթե այն անցնում է $(2; 6)$ կետով:

254. Հայտնի են ABC եռանկյան կողմերի հավասարումները $2x+3y-6=0$ (AB) և $x+2y-5=0$ (AC): Կազմել BC կողմին տարված բարձրության հավասարումը, եթե $\angle B=\pi/4$:

255. Հավասարասրուն եռանկյան հիմքի գագաթներն են $A=(-3; 4)$, $B=(6;-2)$, իսկ հիմքին առընթեր անկյան տանգենսը $3/2$ է: Գտնել C գագաթը, եթե C-ն և կոորդինատների սկզբնակետն ընկած են AB ուղղի տարբեր կողմերում:

256. Տրված են $x+3y=0$ և $x-y+8=0$ երկու ուղիղներ: Գտնել երրորդ ուղիղն այնպես, որ տրված ուղիղներից երկրորդը լինի առաջինով և որոնելի ուղղով կազմած անկյան կիսորդը:

257. Տրված են ABC եռանկյան $A=(1; 2)$, $B=(3; 4)$ գագաթները և այդ գագաթներին կից ներքին անկյունների տանգենսները՝ $tgA=-1/2$, $tgB=1/3$: Գտնել այդ եռանկյան C գագաթը, եթե այն և կոորդինատների սկզբնակետն ընկած են AB ուղղի միևնույն կողմում:

258. Տրված են ABC եռանկյան $C=(-3; 2)$ գագաթը, ներքին անկյունների տանգենսները՝ $tgA=1/2$, $tgB=4/3$, ինչպես նաև՝ AB կողմի $2x-y-2=0$ հավասարումը: Կազմել մյուս երկու կողմերի հավասարումները:

259. Տրված են $A=(3; 3)$ և $B=(0; 2)$ կետերը: Գտնել $x+y-4=0$ ուղղի վրա M կետ այնպես, որ այդ կետից AB հատվածը երևա $\pi/4$ անկյան տակ:

260. Կազմել ուղղի հավասարումը, եթե $M=(-1; 3)$ կետը կոորդինատների սկզբնակետից այդ ուղղին իջեցված ուղղահայացի հիմքն է:

261. Կազմել $A=(4; 6)$ կետով անցնող այն ուղղի հավասարումը, որն ուղղահայաց է ա) $x=2-3t$, $y=-3-2t$ ուղղին,

բ) $B=(-4; 0)$ և $C=(-1;-4)$ կետերով անցնող ուղղին:

262. Եռանկյան կողմերի հավասարումներն են՝

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \quad A_2x+B_2y+C_2=0, \quad A_3x+B_3y+C_3=0$$

Ապացուցել, որ

$$(A_1x + B_1y + C_1)(A_2A_3 + B_2B_3) = (A_2x + B_2y + C_2)(A_1A_3 + B_1B_3)$$

հավասարումը այդ եռանկյան երրորդ կողմին տարված բարձրության հավասարում է:

263. Տրված են եռանկյան $A = (-6;\ 2)$, $B = (2; -2)$ երկու գագաթները և բարձրությունների հատման $H = (1;\ 2)$ կետը: Գտնել եռանկյան C գագաթի կոորդինատները:

264. Տրված են եռանկյան երկու կողմերի $x + 3y - 1 = 0$, $3x + 5y - 6 = 0$ հավասարումները և բարձրությունների հատման $(0;\ 0)$ կետը: Գտնել երրորդ կողմի հավասարումը:

265. Տրված են եռանկյան $A = (3; -4)$ գագաթը և երկու բարձրությունների $7x - 2y - 1 = 0$, $2x - 7y - 6 = 0$ հավասարումները: Կազմել BC կողմի հավասարումը:

266. Հայտնի են ABC եռանկյան $4x + y - 12 = 0$ (AB) կողմի և $5x - 4y - 15 = 0$ (BH), $2x + 2y - 9 = 0$ (AH) բարձրությունների հավասարումները: Գտնել եռանկյան C գագաթի կոորդինատները:

267. Ընդհանուր գագաթով AMB և CMD երկու հավասարասրուն եռանկյունների հիմքերի գագաթներն են $A = (0;\ 0)$, $B = (0;\ 1)$, $C = (-2;\ 1)$, $D = (1; 1)$ կետերը: Գտնել M կետի կոորդինատները:

268. Ուղղանկյան անկյունագծերը հատվում են $(5;\ 7)$ կետում, իսկ նրա կողմերից մեկի հավասարումն է $2x + 3y - 6 = 0$: Կազմել մյուս կողմերի հավասարումները, եթե նրանցից մեկն անցնում է $(-2;\ 1)$ կետով:

269. Գտնել $(-5;\ 6)$ կետի պրոյեկցիան $7x - 13y - 105 = 0$ ուղղի վրա:

270. Գտնել $M = (-2;\ 9)$ կետի համաչափ կետը $2x - 3y + 18 = 0$ ուղղի նկատմամբ:

271. Կազմել եռանկյան կողմերի հավասարումները, եթե նրա գագաթներից մեկը $(1;\ 7)$ կետն է, իսկ այդ գագաթով անցնող կողմերի միջնուղղահայացների հավասարումներն են $x - 2y + 3 = 0$ և $2x + 3y - 10 = 0$:

272. Կազմել այն ուղիղների հավասարումները, որոնք անցնում են համապատասխանաբար $(15;\ 10)$ և $(10;\ 5)$ կետերով, իմանալով, որ $x + 2y = 0$ ուղիղը կիսում է որոնցից ուղիղներով կազմած անկյունը:

273. Եռանկյան մի գագաթը $(-2;\ 9)$ կետն է, իսկ $2x - 3y + 18 = 0$ և $y + 2 = 0$ ուղիղները նրա երկու անկյունների կիսորդներ են:

կազմել կողմերի հավասարումները:

274. Կազմել հավասարասրուն սեղանի կողմերի հավասարումները, եթե (1; 1) և (2; 8) կետերը հիմքերի միջնակետերն են, իսկ (4; −3) և (−15; 14) կետերը գտնվում են սրունքների վրա:

275. Շեղանկյան մի կողմի և մի անկյունագծի հավասարումներն են համապատասխանաբար $x+3y-8=0$ և $2x+y+4=0$: Կազմել մյուս կողմերի հավասարումները, եթե (−9; −1) կետը գտնվում է տրված կողմին զուգահեռ կողմի վրա:

276. Եռանկյան կողմերից մեկն ընկած է $x+7y-6=0$ ուղղի վրա, իսկ նրան կից անկյունների կիսորդները $x+y-2=0$ և $x-3y-6=0$ ուղիղներն են: Գտնել տրված կողմի դիմացի գագաթի կոորդինատները:

277. Եռանկյան երկու կողմերի հավասարումներն են՝ $3x+y-3=0$ և $3x+4y=0$, իսկ նրա ներքին անկյուններից մեկի կիսորդի հավասարումն է՝ $x-y+5=0$: Կազմել երրորդ կողմի հավասարումը:

278. Տրված են $A_1x+B_1y+C_1=0$ և $A_2x+B_2y+C_2=0$ երկու հատվող, միմյանց ոչ ուղղահայաց ուղիղներ: Ապացուցել, որ $\vec{n}_1=\{A_1;\ B_1\}$ և $\vec{n}_2=\{A_2;\ B_2\}$ վեկտորների կազմած անկյունը հավասար է այդ ուղիղներով կազմած այն անկյանը, որի ներքին կետերը պատկանում են նշված ուղիղներով որոշվող տարանուն կիսահարթություններին:

279. Գտնել $x+5y=0$ և $10x+2y+1=0$ ուղիղներով կազմված այն անկյան կոսինուսը, որի ներսում գտնվում է (1; 1) կետը:

§ 9. Ուղղի նորմավորված հավասարումը, կետի հեռավորությունն ուղղից:

Ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում $\vec{n}=\{A;\ B\}$ վեկտորն ուղղահայաց է $Ax+By+C=0$ ուղղին և կոչվում է այդ ուղղի ***նորմալ վեկտոր***:

Եթե $\vec{n}$-ը միավոր վեկտոր է՝ $|\vec{n}|=1$, ապա $Ax+By+C=0$ հավասարումը կոչվում է ուղղի ***նորմավորված հավասարում***: Ուղղի ցանկացած հավասարում կարելի է նորմավորել՝

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

կամ

$$-\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x-\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y-\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0:$$

Երբեմն ուղղի նորմավորված հավասարումը ներկայացվում է միայն՝

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$$

հավասարումով, որտեղ p-ն կոորդինատային սկզբնակետի հեռավորությունն է ուղղից, իսկ $\cos\alpha$-ն և $\sin\alpha$-ն ուղղի միավոր նորմալ վեկտորի կոորդինատներն են, որոշված ուղղի այն հավասարումով, որի նկատմամբ կոորդինատային սկզբնակետը գտնվում է բացասական կիսահարթության մեջ:

Հարթության ցանկացած $M_0=(x_0;\ y_0)$ կետի հեռավորությունը

$$Ax+By+C=0$$

ուղղից որոշվում է $h(M_0)=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ բանաձևով:

Խնդիր 15. Գրել $A_1x+B_1y+C_1=0$ և $A_2x+B_2y+C_2=0$ հատվող ուղիղներով կազմված անկյունների կիսորդների հավասարումները:

Լուծում: Տրված ուղիղները հատվելով առաջացնում են երկու զույգ հակադիր անկյուններ: Այդ անկյունների կիսորդներին պատկանող բոլոր $(x_0;\ y_0)$ կետերը հավասարահեռ են տրված ուղիղներից և հակառակը:

Հետևաբար $\dfrac{|A_1x_0+B_1y_0+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\dfrac{|A_2x_0+B_2y_0+C_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$: Ուստի

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\pm\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}:$$

որոնելի կիսորդների հավասարումներն են:

Նկատենք, որ աջ մասում դրված $\pm$ նշանները ունեն որոշակի երկրաչափական իմաստ: Տրված ուղիղներից յուրաքանչյուրը հարթությունը բաժանում է երկու կիսահարթությունների՝ դրական և բացասական: Վերը գրված կիսորդներից առաջինն անցնում է նույնանուն, իսկ երկրորդը՝ տարանուն կիսահարթություններին պատկանող կետերով:

Խնդիր 16. Գրել $11x-2y+4=0$ և $2x+y-9=0$ ուղիղներով կազմված այն անկյան կիսորդի հավասարումը, որի ներսում գտնվում է $(1;\ 5)$ կետը:

Լուծում: Քանի որ $11:2 \neq (-2):1$, ուստի տրված ուղիղները հատվում են: Ըստ նախորդ խնդրի, այդ ուղիղներով կազմված անկյունների կիսորդների հավասարումներն են $\dfrac{11x-2y+4}{\sqrt{125}} = \pm\dfrac{2x+y-9}{\sqrt{5}}$:

Քանի որ $(1;\ 5)$ կետը առաջին ուղղի նկատմամբ գտնվում է դրական, իսկ երկրորդի նկատմամբ՝ բացասական կիսահարթություններում, ուստի որոնելի կիսորդի հավասարումն է

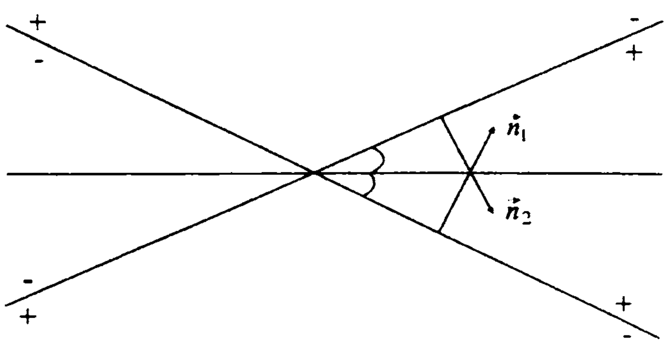
$11x-2y+4=-5(2x+y-9)$, որտեղից $21x+3y-41=0$:

Պատ.՝ $21x+3y-41=0$:

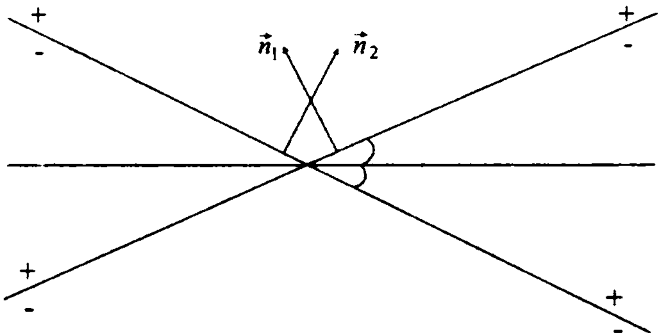
Խնդիր 17. Գրել $7x-y+1=0$ և $x+y-2=0$ ուղիղներով կազմված բութ անկյան կիսորդի հավասարումը:

Լուծում: Ինչպես հայտնի է (տես № 227 խնդիրը), $Ax+By+C=0$ ուղղի ցանկացած կետից $\vec{n}=\{A;\ B\}$ նորմալ վեկտորը կիրառելիս նրա ծայրակետը կգտնվի դրական կիսահարթության մեջ: Հետևաբար, եթե այդ ուղիղների նորմալ վեկտորները կազմեն բութ անկյուն, ապա այդ ուղիղներով կազմված սուր անկյան կիսորդը կանցնի նույնանուն կիսահարթությունների կետերով, մյուս դեպքում՝ տարանուն կիսահարթությունների կետերով: Դրանում կարելի է համոզվել հետևյալ գծագրի օգնությամբ.

ա) երբ $(\widehat{\vec{n}_1,\vec{n}_2}) > 90^0$



բ) երբ $(\widehat{\vec{n_1},\vec{n_2}}) < 90^0$



Տվյալ խնդրում $\vec{n}_1 = \{7;-1\}$, $\vec{n}_2 = \{1;1\}$ և $(\vec{n}_1,\vec{n}_2) = 6 > 0$:
Այսինքն նորմալների կազմած անկյունը սուր է, ուստի որոնելի կիսորդն անցնում է տարանուն կիսահարթություններով: Հետևաբար, ունենք
$(7x-y+1)/\sqrt{50} = -(x+y-2)/\sqrt{2}$, որտեղից $12x+4y-9=0$:

Պատ.՝ $12x+4y-9=0$:

*

* * *

280. Կազմել $5x+12y-1=0$ ուղղին զուգահեռ այն ուղիղների հավասարումները, որոնց հեռավորությունն այդ ուղղից 5 է:

281. Գտնել $12x-16y-48=0$ և $3x-4y+43=0$ զուգահեռ ուղիղների միջև հեռավորությունը:

282. Կազմել $x+2y=0$ և $2x-11y+30=0$ ուղիղներով կազմված անկյունների կիսորդների հավասարումները:

283. Կազմել $(1;1)$ կենտրոնով և 3 շառավիղով շրջանագծի այն շոշափողների հավասարումները, որոնք զուգահեռ են $5x-12y=0$ ուղղին:

284. Կազմել $(1;1)$ կենտրոնով և 2 շառավիղով շրջանագծին $(7;-1)$ կետով տարված շոշափողների հավասարումները:

285. Կազմել $(1;1)$ և $(2;3)$ կենտրոններով, համապատասխանաբար 2 և 4 շառավիղներով շրջանագծերի ընդհանուր շոշափողների հավասարումները:

286. Գրել այն քառակուսու կողմերի հավասարումները, որն արտագծված

է $(1;\ 9)$ կենտրոնով և 5 շառավղով շրջանագծին, իմանալով, որ նրա անկյունագծերից մեկը զուգահեռ է $x-7y=0$ ուղղին:

287. Հավասարասրուն եռանկյան հիմքն ընկած է $x+2y+6=0$, իսկ մի սրունքը՝ $2x+y=0$ ուղղի վրա: Գրել մյուս սրունքի հավասարումը, իմանալով, որ այդ կողմերի հատման կետի հեռավորությունը որոնելի սրունքից $\sqrt{5}$ է:

288. Կազմել $x+7y=0$ և $x-y-4=0$ ուղիղներով կազմված այն անկյան կիսորդի հավասարումը, որի ներսում ընկած է $(1;\ 1)$ կետը:

289. Տրված են $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ երկու հատվող ուղիղներ և նրանցից ոչ մեկին չպատկանող $(x_0;\ y_0)$ կետը: Ապացուցել, որ

$$\frac{\operatorname{sgn}(A_1x_0+B_1y_0+C_1)}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}(A_1x+B_1y+C_1) =$$

$$=\frac{\operatorname{sgn}(A_2x_0+B_2y_0+C_2)}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}(A_2x+B_2y+C_2)$$

հավասարումը այդ ուղիղներով կազմված այն անկյան կիսորդի հավասարումն է, որի ներսում ընկած է $(x_0;\ y_0)$ կետը:

290. Գրել ուղղանկյան կողմերի հավասարումները, եթե նրա անկյունագծերի հավասարումներն են՝ $x+y-2=0$ և $7x-y+4=0$, իսկ $(3;\ 5)$ կետն ընկած է կողմերից մեկի վրա:

291. Տրված են $3x+4y-2=0$, $5x-12y-4=0$ երկու ուղիղներ և $(1;\ 1)$ կետը: Այդ ուղիղներով կազմված այն անկյան ներսում, որտեղ ընկած է տրված կետը, գտնել կետ, որի հեռավորությունները տրված ուղիղներից լինեն համապատասխանաբար 3 և 1:

292. Եռանկյան կողմերի հավասարումներն են՝

$$A_1x+B_1y+C_1=0,\ A_2x+B_2y+C_2=0,\ A_3x+B_3y+C_3=0:$$

Գրել եռանկյան այն ներքին անկյան կիսորդի հավասարումը, որը կազմված է առաջին և երկրորդ ուղիղներով:

293. Եռանկյան AB, BC և CA կողմերի հավասարումներն են համապատասխանաբար $2x+y-22=0$, $2x-y+18=0$ և $x-2y-6=0$: Նրա ներսում գտնել կետ, որի հեռավորությունները AB, BC և CA կողմերից լինեն համեմատական 20, 12 և 15 թվերին:

294. Եռանկյան կողմերի հավասարումներն են՝ $7x+y-2=0$, $5x+5y-4=0$, $2x-2y+5=0$: Ապացուցել, որ նրա ներսում գոյություն ունի կետ, որը հավասարահեռ է առաջին երկու ուղիղներից, իսկ երրորդից գտնվում է $3\sqrt{2}/4$ հեռավորության վրա: Գտնել այդ կետի կոորդինատները:

295. Գտնել $(-1; 3)$ կետով անցնող և $7x+y=0$, $x-y+8=0$ ուղիղներին շոշափող շրջանագծի կենտրոնն ու շառավիղը:

296. Գտնել $3x-4y-2=0$, $4x-3y-5=0$ և $5x+12y+27=0$ կողմերով եռանկյանը ներգծված շրջանագծի կենտրոնն ու շառավիղը:

297. Գտնել $x+y+12=0$, $7x+y=0$ և $7x-y+28=0$ կողմերով եռանկյանը ներգծված շրջանագծի կենտրոնն ու շառավիղը:

298. Կազմել եռանկյան ներքին անկյունների կիսորդների հավասարումները, եթե կողմերի հավասարումներն են՝ $3x-4y=0$, $4x-3y=0$ և $5x+12y-10=0$:

299. Կազմել եռանկյան ամենամեծ ներքին անկյան կիսորդի հավասարումը, եթե կողմերի հավասարումներն են՝

$$3x-4y-2=0,\quad 4x-3y-5=0 \quad \text{և} \quad 5x+12y+27=0:$$

300. Գրել $x-3y=0$ և $3x-y+5=0$ ուղիղներով կազմված սուր անկյան կիսորդի հավասարումը:

301. Տրված են երկու ոչ ուղղահայաց, հատվող ուղիղներ: Ապացուցել, որ

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=-\operatorname{sgn}(A_1A_2+B_1B_2)\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

հավասարումն այդ ուղիղներով կազմված սուր անկյան կիսորդի հավասարումն է:

302. Գրել շեղանկյան կողմերի հավասարումները, եթե նրա անկյունագծերը հատվում են $M=(1; 6)$ կետում, իսկ $P=(3; 0)$, $Q=(6; 6)$ և $R=(5; 9)$ կետերն ընկած են համապատասխանաբար AB, BC և CD կողմերի վրա:

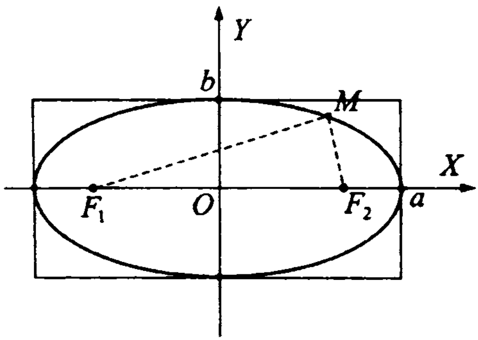
303. Գրել քառակուսու կողմերի հավասարումները, եթե նրա անկյունագծերը հատվում են $(1; 6)$ կետում, իսկ $(4; 9)$ և $(-5; 4)$ կետերն ընկած են ոչ զուգահեռ կողմերի վրա:

304. Գրել $ABCD$ քառակուսու կողմերի հավասարումները, եթե տրված են մեկական կետ՝ $(2; 1)$, $(0; 1)$, $(3; 5)$ և $(-3; -1)$, համապատասխանաբար AB, BC, CD և DA կողմերից յուրաքանչյուրի վրա:

§10. Էլիպս, հիպերբոլ, պարաբոլ: Նրանց հավասարումները:

Էլիպսը հարթության այն M կետերի երկրաչափական տեղն է, որոնց հեռավորությունների գումարը սևեռած F_1 և F_2 երկու կետերից (որոնք կոչվում են էլիպսի ***կիզակետեր***) հաստատուն է՝ $MF_1+MF_2=2a$ և մեծ է F_1F_2 հատվածի երկարությունից: Այստեղ MF_1-ը և MF_2-ը կոչվում են M կետի ***կիզակետային շառավիղներ:***

Եթե ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգի OX առանցքն անցնում է էլիպսի F_1 և F_2 կիզակետերով, իսկ OY-ը՝ $F_1F_2=2c$ հատվածի միջնակետով, ապա այդպիսի կոորդինատային համակարգում, որին անվանում են ***կանոնական կոորդինատային համակարգ***, էլիպսի հավասարումն ունի

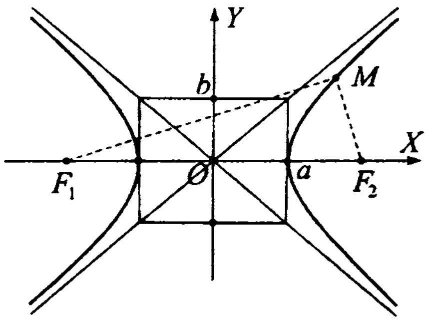


$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ տեսքը, որտեղ $b^2=a^2-c^2$: Այստեղ $2a$-ն և $2b$-ն կոչվում են էլիպսի համապատասխանաբար ***մեծ*** և ***փոքր առանցքների երկարություններ***, կոորդինատների սկզբնակետը կոչվում է էլիպսի ***կենտրոն***, իսկ $(\pm a;\ 0)$, $(0;\ \pm b)$ կետերը՝ էլիպսի ***գագաթներ***. Նշենք, որ էլիպսի կիզակետերը՝ $F_1=(-c;\ 0)$ և $F_2=(c;\ 0)$ գտնվում են առանցքներից մեծի վրա:

Մասնավոր դեպքում, երբ $a=b$, էլիպսը շրջանագիծ է (կիզակետերը համընկնում են կենտրոնի հետ):

Հիպերբոլը հարթության այն M կետերի երկրաչափական տեղն է, որոնց հեռավորությունների տարբերության բացարձակ արժեքը սևեռած F_1 և F_2 երկու կետերից (որոնք կոչվում են հիպերբոլի ***կիզակետեր***) հաստատուն է՝ $|MF_1-MF_2|=2a,\ a>0$: Եթե $F_1F_2=2c$, ապա կանոնական կոորդինատային համակարգում (սահմանվում է ինչպես էլիպսի դեպքում) հիպերբոլի հավասարումն է՝ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, որտեղ $b^2=c^2-a^2$:

Կանոնական կոորդինատային համակարգի OX առանցքը կոչվում է հիպերբոլի ***իրական առանցք***, OY-ը՝ ***կեղծ առանցք***, O-ն՝ հիպերբոլի ***կենտրոն***: Իրական առանցքի հետ հիպերբոլի հատման $(\pm a;\,0)$ կետերը կոչվում են նրա ***գագաթներ***: Համապատասխանաբար $2a$-ն և $2b$-ն կոչվում են հիպերբոլի իրական և կեղծ ***առանցքների երկարություններ***.



Հիպերբոլի կիզակետերը՝ $F_1=(-c;\,0)$ և $F_2=(c;\,0)$, գտնվում են իրական առանցքի վրա: Հիպերբոլի համար $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=0$ ուղիղները կոչվում են նրա ***ասիմպտոտներ***:

Հիպերբոլը կոչվում է ***հավասարակողմ***, եթե $a=b$: Այդպիսի հիպերբոլի ասիմպտոտները փոխուղղահայաց են:

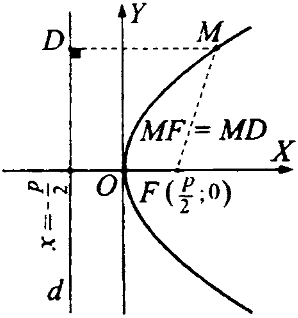
Եթե կոորդինատային առանցքները համընկնում են հիպերբոլի ասիմպտոտների հետ, ապա հիպերբոլի հավասարումն ունի $xy=k$ տեսքը:

Էլիպսի և հիպերբոլի համար $\varepsilon=c/a$ հարաբերությունը կոչվում է ***էքսցենտրիսիտետ***: Էլիպսի համար $0<\varepsilon<1$, իսկ հիպերբոլի համար $\varepsilon>1$: Միևնույն էքսցենտրիսիտետն ունեցող էլիպսները (հիպերբոլները) նման են միմյանց: Այսինքն, գոյություն ունի հարթության նմանության ձևափոխություն, որն այդ կորերից մեկն արտապատկերում է մյուսին (նմանության ձևափոխության մասին տես էջ 186-ում):

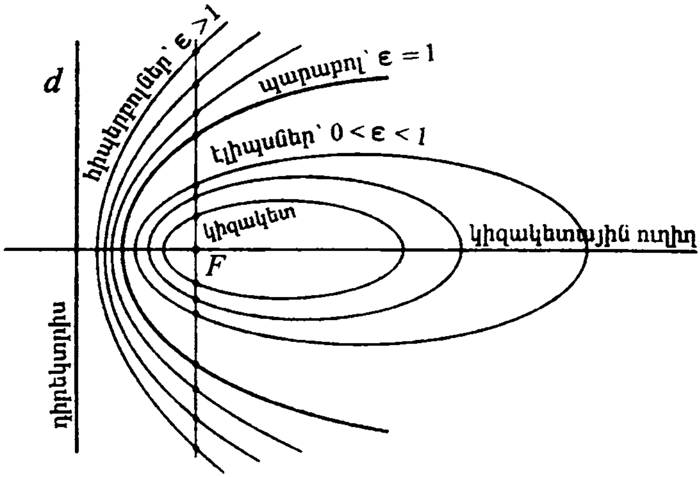
Էլիպսի և հիպերբոլի համար $d_1: x=-a/\varepsilon$; $d_2: x=a/\varepsilon$ ուղիղները կոչվում են նրանց ***դիրեկտրիսներ***, ընդ որում ասում են դրանցից d_1-ը համապատասխանում է F_1 կիզակետին, իսկ d_2-ը՝ F_2 կիզակետին:

Պարաբոլը հարթության այն կետերի երկրաչափական տեղն է, որոնցից յուրաքանչյուրը հավասարահեռ է որևէ սևեռած F կետից (պարաբոլի ***կիզակետ***) և այդ կետով չանցնող որևէ սևեռած d ուղղից (պարաբոլի ***դիրեկտրիս***):

Եթե ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում $F=(p/2;\ 0)$ կետը պարաբոլի կիզակետն է, իսկ $d: x=-p/2$ ուղիղը նրա դիրեկտրիսը, ապա այդպիսի (*կանոնական*) կոորդինատային համակարգում պարաբոլի հավասարումն ունի $y^2=2px$ տեսքը: Այստեղ կոորդինատների սկզբնակետը կոչվում է պարաբոլի ***գագաթ***, իսկ OX առանցքը՝ ***պարաբոլի առանցք***: Պարաբոլի համար էքսցենտրիսիտետը համարվում է 1:



Էլիպսը, հիպերբոլը և պարաբոլը կարող են սահմանվել մեկ ընդհանուր մոտեցումով: Ընտրելով F կետ, նրանով չանցնող d ուղիղ և $\varepsilon>0$ թիվ, դիտարկվում են հարթության այն բոլոր կետերը որոնցից յուրաքանչյուրի համար նրա F կետից ունեցած հեռավորության հարաբերությունը d ուղղից ունեցած հեռավորությանը հաստատուն է և հավասար ε-ի: Ընդ որում, երբ $0<\varepsilon<1$, ապա նշված կետերի երկրաչափական տեղը էլիպս է, երբ $\varepsilon>1$՝ հիպերբոլ, երբ $\varepsilon=1$՝ պարաբոլ: Այս դեպքում F-ը կոչվում է կորի կիզակետ, d-ն դիրեկտրիս, ε-ը էքսցենտրիսիտետ, իսկ F կետով անցնող և d ուղղին ուղղահայաց ուղիղը՝ ***կիզակետային ուղիղ***:



Էլիպս, հիպերբոլ և պարաբոլ կորերից յուրաքանչյուրի համար կիզակետով անցնող և կիզակետային ուղղին ուղղահայաց լարի երկարության կեսը կոչվում է կորի *կիզակետային պարամետր*: Նշանակում են p-ով և՝ $p = b^2/a$:

Եթե բևեռային կոորդինատային համակարգի բևեռը համընկնում է կորի կիզակետի հետ, իսկ բևեռային առանցքն ընկած է կիզակետային ուղղի վրա և չի հատում դիրեկտրիսին, ապա նշված կորերի հավասարումները բևեռային կոորդինատային համակարգում ունեն $r = \dfrac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$ տեսքը, որտեղ p-ն կորի կիզակետային պարամետրն է, ε-ը՝ էքսցենտրիսիտետը: Ընդ որում էլիպսի դեպքում $0 \le \varphi < 2\pi$, հիպերբոլի դեպքում $\theta < \varphi < 2\pi - \theta$, $\theta = arctg\, b/a$, իսկ պարաբոլի դեպքում $0 < \varphi < 2\pi$:

*

* * *

305. Կազմել էլիպսի հավասարումը, եթե նրա միևնույն առանցքին պատկանող $(a;0)$ և $(-a;0)$ գագաթները համընկնում են էլիպսին ներգծված կանոնավոր եռանկյան երկու գագաթների հետ:

306. Կազմել հիպերբոլի հավասարումը, որն անցնում է $(1;2)$ կետով և որի ասիմպտոտներն են $y = \pm x/2$ ուղիղները:

307. Գրել էլիպսի հավասարումը, որը OX առանցքը հատում է $(1;0)$ և $(9;0)$ կետերում, OY առանցքին շոշափում է $(0;3)$ կետում, եթե նրա առանցքները զուգահեռ են կոորդինատային առանցքներին:

308. Էլիպսը, որի առանցքները զուգահեռ են կոորդինատային առանցքներին, շոշափում է OX և OY առանցքներին համապատասխանաբար $(5;0)$ և $(0;3)$ կետերում: Գրել նրա հավասարումը:

309. Գրել հիպերբոլի հավասարումը, որն անցնում է $(1;0)$ կետով և որի ասիմպտոտներն են $x=0$ և $y=1$ ուղիղները:

310. Գրել հավասարակողմ հիպերբոլի հավասարումը, որի համար OX առանցքն ասիմպտոտ է, իսկ $(1;1)$ կետը՝ գագաթ:

311. Գրել $(0;6)$ և $(0;-2)$ գագաթներով էլիպսի հավասարումը, եթե այն OX առանցքից անջատում է 6 երկարությամբ լար:

312. Գրել պարաբոլի հավասարումը, որի գագաթը գտնվում է $(2;6)$ կետում, առանցքը զուգահեռ է OY առանցքին, եթե այն OX առանցքից անջատում է 6 երկարությամբ լար:
313. Գրել հավասարակողմ հիպերբոլի հավասարումը, որի մի գագաթը $(2;2)$ կետն է, իրական առանցքը զուգահեռ է OY առանցքին, եթե այն OX առանցքից անջատում է 8 երկարությամբ լար:
314. Գրել էլիպսի հավասարումը, որի համար $x+y-1=0$ և $x-y+1=0$ համապատասխանաբար մեծ և փոքր առանցքների հավասարումներն են, իսկ կիսաառանցքների երկարությունները են 2 և 1:
315. Կազմել պարաբոլի հավասարումը, որն անցնում է $(0;0)$ և $(0;1)$ կետերով, իսկ առանցքը՝ $x+y+1=0$ ուղիղն է:
316. Կազմել հիպերբոլի հավասարումը, որն անցնում է $(1;1)$ կետով, իսկ առանցքի և մի ասիմպտոտի հավասարումներն են համապատասխանաբար $2x-y+2=0$ և $y=0$:
317. Գտնել հետևյալ կորերի կիզակետերը (ֆոկուսները) և դրանց համապատասխանող դիրեկտրիսները՝

ա) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{20}=1$, բ) $\dfrac{x^2}{4}-2y^2+8=0$, գ) $y=\dfrac{3}{4}x^2$, դ) $xy=k$:

318. Գտնել $3x^2+12x+16y-12=0$ պարաբոլի կիզակետը և դիրեկտրիսը:
319. Գրել $(7;0)$ և $(-7;0)$ ընդհանուր կիզակետերով այն էլիպսի և հիպերբոլի հավասարումները, որոնք անցնում են $(-2;12)$ կետով:
320. Որոշել էլիպսի էքսցենտրիսիտետը, եթե նրա կիզակետերի միջև հեռավորությունը հավասար է առանցքների երկարությունների միջին թվաբանականին:
321. Որոշել այն էլիպսի էքսցենտրիսիտետը, որին ներգծված քառակուսու կողմերն անցնում են նրա կիզակետերով:
322. Գրել երկրորդ կարգի կորի հավասարումը, եթե կիզակետերից մեկը $(2;0)$ կետն է, դրան համապատասխան դիրեկտրիսը՝ $x=8$ ուղիղն է, իսկ էքսցենտրիսիտետը $1/2$ է: Գտնել երկրորդ կիզակետը և երկրորդ դիրեկտրիսը:
323. Գրել երկրորդ կարգի կորի հավասարումը, որի կիզակետերից մեկը

$(2; 0)$ կետն է, դրան համապատասխան դիրեկտրիսը $x = 5$ ուղիղն է, եթե կորն անցնում է $(10; 6)$ կետով: Գտնել երկրորդ կիզակետը և երկրորդ դիրեկտրիսը:

324. Գրել երկրորդ կարգի կորի հավասարումը, որի կիզակետերից մեկը $(2; 0)$ կետն է, դրան համապատասխան դիրեկտրիսը $x = 6$ ուղիղն է, եթե կորն անցնում է $(-4; 8)$ կետով:

325. Գրել $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ էլիպսի հետ ընդհանուր կիզակետային լարեր ունեցող հիպերբոլի հավասարումը:

326. Գրել $x^2 - y^2 = a^2$ հավասարակողմ հիպերբոլի հետ ընդհանուր կիզակետային լարեր ունեցող էլիպսի հավասարումը:

327. Գրել $y = \frac{3}{4}x^2$ պարաբոլի հետ ընդհանուր կիզակետային լար ունեցող մեկ այլ պարաբոլի հավասարումը:

328. Գրել հիպերբոլի հավասարումը, եթե հայտնի են նրա դիրեկտրիսների հետ ասիմպտոտների հատման չորս $(\pm 4; \pm 2)$ կետերը:

329. Գրել $(1; 0)$ կենտրոնով երկրորդ կարգի կորի հավասարումը, եթե այն անցնում է $(5; 6)$ կետով, իսկ դիրեկտրիսներից մեկը $x = 2$ ուղիղն է:

330. Գրել հավասարակողմ հիպերբոլի հավասարումը, որի մի կիզակետը $(1; 1)$ կետն է, իսկ մի ասիմպտոտի հավասարումն է $x + y = 0$:

331. Գրել հավասարակողմ հիպերբոլի հավասարումը, որի մի կիզակետը $(2; 0)$ կետն է, իսկ մի ասիմպտոտի հավասարումն է $x = 1$:

332. Կազմել էլիպսի հավասարումը, որի կիզակետերը $(1; 0)$ և $(0; 1)$ կետերն են, իսկ մեծ առանցքի երկարությունը 2 է:

333. Կազմել հիպերբոլի հավասարումը, որի կիզակետերը $(1; 0)$ և $(0; 1)$ կետերն են, իսկ ասիմպտոտները զուգահեռ են կոորդինատային առանցքներին:

334. Հիպերբոլի՝ $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$ կանոնական հավասարումով կազմել նրա հավասարումը բևեռային կոորդինատներով:

335. Կազմել հիպերբոլի կանոնական հավասարումը, եթե տրված է նրա՝ $r = \frac{9}{4 - 5\cos\varphi}$ հավասարումը բևեռային կոորդինատներով:

336. Կազմել պարաբոլի կանոնական հավասարումը, եթե տրված է նրա՝ $r = \dfrac{6}{1-\cos\varphi}$ հավասարումը բևեռային կոորդինատներով:

337. Կազմել $y^2 = 8x$ պարաբոլի հավասարումը բևեռային կոորդինատներով:

338. Ապացուցել, որ հիպերբոլի կամայական կետի ասիմպտոտներից ունեցած հեռավորությունների արտադրյալը հաստատուն է:

339. Գտնել այն շրջանագծերի կենտրոնների երկրաչափական տեղը, որոնք OX և OY առանցքներից անջատում են համապատասխանաբար $2a$ և $2b$ հատվածներ:

340. Շարժման ընթացքում ի՞նչ գիծ է գծում հատվածը λ հարաբերությամբ բաժանող կետը, երբ այդ հատվածի ծայրակետերը սահում են կոորդինատային առանցքներով:

341. Գտնել այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնցից յուրաքանչյուրի հեռավորությունների արտադրյալը ուղղանկյան երկու հանդիպակած կողմերից հավասար է այդ կետերից մինչև մյուս երկու հանդիպակած կողմերն ունեցած հեռավորությունների արտադրյալին:

342. Գտնել այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնցից յուրաքանչյուրի հեռավորությունների արտադրյալը երկու հատվող ուղիղներից հաստատուն է:

343. Կոնի առանցքը ծնիչի հետ կազմում է α անկյուն, իսկ գագաթով չանցնող հարթության հետ՝ β անկյուն: Ապացուցել, որ այդ հարթության և կոնի հատույթը

ա) էլիպս է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\alpha < \beta$,

բ) հիպերբոլ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\alpha > \beta$,

գ) պարաբոլ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\alpha = \beta$,

դ) նշված հատույթների էքսցենտրիսիտետները հավասար են $\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$:

344. Ապացուցել, որ հարթության և գլանի հատույթը էլիպս է, եթե հարթությունը զուգահեռ չէ գլանի առանցքին:

345. Գտնել էլիպսի կենտրոնից նրա բոլոր փոխուղղահայաց տրամագծերի ծայրակետերը միացնող լարերին տարված ուղղահայացների հիմքերի երկրաչափական տեղը:

346. Գտնել այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնցից յուրաքանչյուրի հեռավորությունների գումարը տրված ուղղից և տրված կետից հաստատուն է:

347. Գտնել տրված շրջանագիծը և նրան չհատող ուղիղը շոշափող բոլոր

շրջանագծերի կենտրոնների երկրաչափական տեղը:
348. Գտնել այն շրջանագծերի կենտրոնների երկրաչափական տեղը, որոնցից յուրաքանչյուրը շոշափում է $x^2+y^2+2x-3=0$ և x^2+y^2- $-10x-39=0$ շրջանագծերին:
349. Գտնել այն շրջանագծերի կենտրոնների երկրաչափական տեղը, որոնք անցնում են $(4;\,0)$ կետով և շոշափում են $x^2+y^2+8x-84=0$ շրջանագծին:

§11. *Երկրորդ կարգի կորերի շոշափողները, կենտրոնները ու ասիմպտոտները*

Երկրորդ կարգի կորերի հավասարումն ունի $F(x,y)=a_{11}x^2+$ $+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0$ տեսքը, որտեղ a_{11}, a_{12} և a_{22} գործակիցներից գոնե մեկը տարբեր է զրոից: Այդ հավասարումը գրառվում է $\varphi(x,y)+2\ell(x,y)+a_0=0$ տեսքով, որտեղ $\varphi(x,y)=a_{11}x^2+a_{12}xy+$ $+a_{21}yx+a_{22}y^2$, $a_{12}=a_{21}$ քառակուսային, իսկ $\ell(x,y)=a_1x+a_2y$ գծային ձև է: Օգտագործվում են նաև $F_1(x,y)=a_{11}x+a_{12}y+a_1$ և $F_2(x,y)=a_{21}x+a_{22}y+a_2$ նշանակումները:

Պարամետրական տեսքով տրված $x=x_0+\alpha t$, $y=y_0+\beta t$ ուղղի հատումը երկրորդ կարգի կորի հետ որոշվում է $At^2+2Bt+C=0$ հավասարման լուծումներով, որտեղ

$$A=\varphi(\alpha,\beta)=a_{11}\alpha^2+2a_{12}\alpha\beta+a_{22}\beta^2,$$

$$B=F_1(x_0,y_0)\alpha+F_2(x_0,y_0)\beta=$$

$$=(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_1)\alpha+(a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_2)\beta,$$

$$C=F(x_0,y_0)=a_{11}{x_0}^2+2a_{12}x_0y_0+a_{22}{y_0}^2+2a_1x_0+2a_2y_0+a_0:$$

Ընդ որում այդ լուծումները կախված են կորի նկատմամբ ուղղի դիրքից, մասնավորապես ուղղի ուղղությունից:

Ուղղություն կոչվում է միմյանց համագիծ բոլոր ոչ զրոյական վեկտորների ամեն մի բազմություն:

Հարթության վրա ուղղությունը կարելի է տալ իր որևէ ներկայացուցիչով:

Ուղղի ուղղություն կոչվում է նրա որևէ ուղղորդ վեկտորով որոշվող ուղղությունը:

Ուղղի $\{\alpha; \beta\}$ ուղղությունը կոչվում է տվյալ կորի համար *ասիմպտոտական ուղղություն*, եթե $A=0$, և *ոչ ասիմպտոտական ուղղություն*, եթե $A \neq 0$: Ասիմպտոտական ուղղության ուղիղը կամ հատում է կորը մի կետում, կամ չի հատում կորը (այս դեպքում այդ ուղիղը կոչվում է *կորի ասիմպտոտ*), կամ էլ ամբողջովին մտնում է կորի կազմի մեջ:

Ոչ ասիմպտոտական ուղղության ուղիղը հատում է կորը երկու կետում՝ իրական կամ կեղծ, իրարից տարբեր կամ համընկած: Այս վերջին դեպքում ուղիղը կոչվում է *երկրորդ կարգի կորի շոշափող* տվյալ կետում:

Եթե $M_0=(x_0; y_0)$ կետը վերցված է կորի վրա, ապա այդ կետով տարված շոշափողի հավասարումն է՝

$$(x-x_0)F_1(x_0,y_0)+(y-y_0)F_2(x_0,y_0)=0 \quad (*)$$

կամ

$$(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_1)x+(a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_2)y+a_1x_0+a_2y_0+a_0=0:$$

Օրինակ, կանոնական կոորդինատային համակարգում էլիպսի, հիպերբոլի և պարաբոլի՝ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ և $y^2=2px$, շոշափողների հավասարումները, տարված կորին պատկանող $M_0=(x_0; y_0)$ կետով, ունեն համապատասխանաբար

$$\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y-1=0,\ \frac{x_0}{a^2}x-\frac{y_0}{b^2}y-1=0 \text{ և } yy_0-p(x+x_0)=0$$

տեսքերը:

Եթե $F_1(x_0,y_0)$ և $F_2(x_0,y_0)$ թվերից գոնե մեկը զրո չէ, ապա վերը գրված $(*)$ հավասարումը, որպես ուղղի հավասարում, իմաստ ունի անկախ այն բանից ասիմպտոտական է թե ոչ նրա ուղղությունը տվյալ կորի նկատմամբ: Այդ իսկ պատճառով, լայն իմաստով երկրորդ կարգի կորին շոշափող ուղիղ կորին պատկանող $M_0(x_0; y_0)$ կետում կոչվում է $(*)$ հավասարումով պատկերվող ուղիղը:

Դիտարկենք մի օրինակ: Դիցուք M_0 կետը պատկանում է $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ հատվող ուղիղների զույգին: Եթե M_0-ն չի համընկնում նրանց հատման կետի հետ, ապա այդ կետով կորին տարված շոշափողի հավասարումը, որն ստացվում է $(*)$-ից, համընկնում է $\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0$ ուղիղների հավասարումներից նրա հետ, որին պատկանում է M_0-ն: Իսկ եթե M_0-ն նշված ուղիղների զույգի հատման կետն է, այսինքն՝ $M_0=(0;\,0)$, ապա (*) հավասարումը իմաստազրկվում է, քանի որ $F_1(0,0)=\frac{1}{a^2}\cdot 0=$ $=0$, $F_2(0,0)=\frac{1}{b^2}\cdot 0=0$: Այսինքն կորի այդպիսի կետով նրան տարված շոշափող գոյություն չունի:

Չտրոհվող երկրորդ կարգի կորերի դեպքում, որոնց համար $F_1(x_0,y_0)$-ն և $F_2(x_0,y_0)$-ն միաժամանակ զրո չեն դառնում, (*) հավասարումով որոշվող շոշափողը համընկնում է մաթեմատիկական անալիզի դասընթացում տրվող $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին նրա x_0 աբսցիս ունեցող կետում տարված $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ շոշափողի հետ: Իրոք՝ $F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0$ երկրորդ կարգի կորի համար քանի որ $F_1(x,y)=\frac{1}{2}\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$, $F_2(x,y)=$ $=\frac{1}{2}\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$, ապա $\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$-ն և $\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$-ն միաժամանակ զրո չեն: Հետևաբար, ըստ անբացահայտ ֆունկցիայի մասին թեորեմի, $M_0(x_0;\,y_0)$ կետի բավականաչափ փոքր շրջակայքում կորը թույլ է տալիս $y=f(x)$ բացահայտ տրում: Այնպես որ M_0 կետի նշված շրջակայքում $F(x,f(x))\equiv 0$: Որտեղից, հաշվելով դիֆերենցիալը, ստանում ենք, որ $\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot f'(x)=0$: Այսինքն՝ $f'(x)=-\frac{\partial F}{\partial x}:\frac{\partial F}{\partial y}$ որտեղից էլ $f'(x_0)=-\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}:\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=-F_1(x_0,y_0):F_2(x_0,y_0)$: Տեղադրելով $f'(x_0)$-ի այս արժեքը $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ հավասարման մեջ, ստանում ենք $y=\frac{-F_1(x_0,y_0)}{F_2(x_0,y_0)}(x-x_0)+y_0$, կամ որ նույնն է՝

$$(x-x_0)F_1(x_0,y_0)+(y-y_0)F_2(x_0,y_0)=0:$$

Կետը կոչվում է ***երկրորդ կարգի կորի կենտրոն***, եթե այն կիսում է այդ կետով անցնող բոլոր ոչ ասիմպտոտական ուղղության լարերը: Կորի ամեն մի կենտրոն որոշվում է որպես $\begin{cases} a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_1=0 \\ a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_2=0 \end{cases}$ համակարգի լուծում:

Եթե $\delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$, ապա կորն ունի մեկ կենտրոն: Այդպիսի կորերը կոչվում են ***միակենտրոն կորեր***: Մնացած կորերը, որոնց համար $\delta=0$, կոչվում են ***պարաբոլական կորեր***.

Եթե $\{\alpha;\ \beta\}$-ն կորի համար ոչ ասիմպտոտական ուղղություն է, ապա այդ ուղղությանը զուգահեռ բոլոր լարերի միջնակետերի երկրաչափական տեղը կոչվում է ***կորի տվյալ ուղղությանը համալուծ տրամագիծ***: Կորի տրամագիծն ուղիղ է, որի հավասարումն է

$$(a_{11}\alpha+a_{12}\beta)x+(a_{21}\alpha+a_{22}\beta)y+a_1\alpha+a_2\beta=0:$$

Կորի համար $\{\alpha;\ \beta\}$ և $\{\alpha';\ \beta'\}$ ուղղությունները կոչվում են ***փոխադարձաբար համալուծ ուղղություններ***, եթե

$$a_{11}\alpha\alpha'+a_{12}(\alpha\beta'+\alpha'\beta)+a_{22}\beta\beta'=0:$$

Երկրորդ կարգի չտրոհվող կորի ցանկացած կետով տարված շոշափողի ուղղությունը համալուծ է այդ կետով անցնող տրամագծի ուղղությանը:

Միակենտրոն կորի երկու տրամագծեր կոչվում են ***փոխադարձաբար համալուծ տրամագծեր***, եթե նրանց ուղղությունները փոխադարձաբար համալուծ են: Այդպիսի տրամագծերից յուրաքանչյուրը կիսում է մյուսին զուգահեռ լարերը:

Եթե կոորդինատային սկզբնակետը միակենտրոն կորի կենտրոնն է, իսկ առանցքները մի զույգ փոխադարձաբար համալուծ տրամագծեր են, ապա այդպիսի կոորդինատային համակարգում կորի հավասարումն ունի $a'_{11}x^2+a'_{22}y^2+a'_0=0$ տեսքը, որտեղ a'_{11}-ը, a'_{22}-ը և a'_0-ը փոփոխվում են կախված տրամագծերից:

Եթե կոորդինատների O սկզբնակետը գտնվում է պարաբոլի վրա, OX առանցքը տրամագիծ է, իսկ OY առանցքը շոշափում է պարաբոլը, ապա պարաբոլի հավասարումն ունի $y^2=2p'x$ տեսքը, որտեղ p'-ը փոփոխվում է կախված O կետից:

Կորի համար ուղղությունը կոչվում է *գլխավոր*, եթե այն ուղղահայաց է իրեն համալուծ ուղղությանը: Եթե կորը շրջանագիծ չէ, ապա այն ունի ճիշտ երկու գլխավոր ուղղություն, որոնք որոշվում են որպես $\begin{cases}(a_{11}-\lambda_i)\alpha+a_{12}\beta=0\\ a_{21}\alpha+(a_{22}-\lambda_i)\beta=0\end{cases}$, $i=1,2$ համակարգերի $\{\alpha;\beta\}$ լուծում, որտեղ λ_1, λ_2-ը կորի $\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)=0$ ***բնութագրիչ հավասարման*** արմատներն են:

Կորի տրամագիծը կոչվում է գլխավոր, եթե այն համալուծ է որևէ գլխավոր ուղղությանը:

Եթե կենտրոնավոր կորը շրջանագիծ չէ, ապա այն ունի ճիշտ երկու գլխավոր տրամագծեր, որոնց հավասարումներն են՝

$a_{12}(a_{11}x+a_{12}y+a_1)-(a_{11}-\lambda_i)(a_{21}x+a_{22}y+a_2)=0$, կամ

$(a_{22}-\lambda_i)(a_{11}x+a_{12}y+a_1)-a_{21}(a_{21}x+a_{22}y+a_2)=0,\ i=1,2$:

Պարաբոլական կորերն ունեն մեկ գլխավոր տրամագիծ:

Պարաբոլի առանցքի հավասարումն է՝

$$a_{21}(a_{11}x+a_{12}y+a_1)+a_{22}(a_{21}x+a_{22}y+a_2)=0$$

կամ

$$a_{11}(a_{11}x+a_{12}y+a_1)+a_{12}(a_{21}x+a_{22}y+a_2)=0:$$

Խնդիր 18. Ապացուցել, որ $Ax+By+C=0$ ուղիղը շոշափում է $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ էլիպսին այն և միայն այն դեպքում, երբ $A^2a^2+B^2b^2=C^2$:

Ապացուցում: Դիցուք $Ax+By+C=0$ ուղիղը շոշափում է էլիպսին նրա $M_0=(x_0;\,y_0)$ կետում: Ինչպես գիտենք, այդ կետով անցնող շոշափողի հավասարման տեսքն է $\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y-1=0$, ընդ որում $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$ (*): Քանի որ տվյալ կետով անցնող շոշափողը միակն է, ուստի երկու ուղիղների համընկնելիության $A:\frac{x_0}{a^2}=B:\frac{y_0}{b^2}=C:(-1)$

պայմանից գտնում ենք $x_0=-\dfrac{a^2A}{C}$, $y_0=-\dfrac{b^2B}{C}$: Տեղադրելով այն $(*)$-ի մեջ, ստանում ենք $A^2a^2+B^2b^2=C^2$:

Պայմանի բավարարությունն ապացուցելու համար դիտարկենք $M_0=\left(-\dfrac{a^2A}{C};\ -\dfrac{b^2B}{C}\right)$ կետը: Տեղադրելով M_0-ի կոորդինատները էլիպսի հավասարման մեջ և օգտվելով $A^2a^2+B^2b^2=C^2$ պայմանից, համոզվում ենք, որ M_0-ն գտնվում է էլիպսի վրա: Այնուհետև, կազմելով այդ կետով տարված էլիպսի շոշափողի հավասարումը, ստանում ենք

$$\frac{-\dfrac{a^2A}{C}}{a^2}x+\frac{-\dfrac{b^2B}{C}}{b^2}-1=0 \quad \text{կամ} \quad Ax+By+C=0:$$

Խնդիր 19. Կազմել $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{1}=1$ և $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ էլիպսների ընդհանուր շոշափողների հավասարումները:

Լուծում: Նախ նկատենք, որ OY առանցքին զուգահեռ ուղիղը չի կարող միաժամանակ շոշափել այս երկու էլիպսներին: Հետևաբար նրանց ընդհանուր շոշափողի հավասարումները կարող ենք որոնել $y=kx+m$, կամ $kx-y+m=0$ տեսքով: Օգտվելով նախորդ խնդրից, գրենք այդ ուղղի համար էլիպսներին շոշափելու պայմանները՝ $6k^2+1=m^2$, $4k^2+9=m^2$: Այստեղից գտնում ենք՝ $k=\pm 2$, $m=\pm 5$:

Պատ.՝ Չորս ընդհանուր շոշափող՝ $y=\pm 2x+5$, $y=\pm 2x-5$:

Խնդիր 20. Կազմել $(-4;\ 5)$ կետով անցնող պարաբոլի հավասարումը, եթե $2x-3y-1=0$ ուղիղը նրա տրամագիծ է, իսկ $x+2y-4=0$ ուղիղը՝ այդ տրամագծի և պարաբոլի հատման կետով տարված շոշափող:

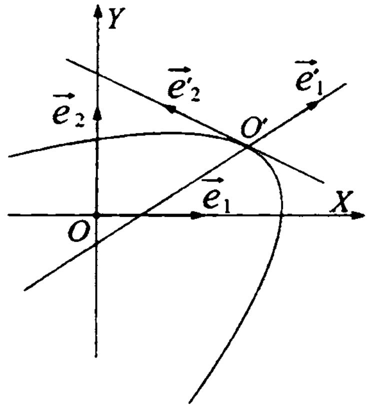
Լուծում: Ինչպես գիտենք, եթե աֆինական կոորդինատային համակարգի O' սկզբնակետը գտնվում է պարաբոլի վրա, իսկ $O'X'$ և $O'Y'$ առանցքները համապատասխանաբար այդ կետով անցնող տրամագիծը և շոշափողն են, ապա պարաբոլի հավասարումն ունի $y'^2=2p'x'$ $(*)$ տեսք: Որպես նոր՝ $(O';\ \vec{e_1'},\vec{e_2'})$ կոորդինատային համակարգի սկզբնակետ վերցնենք տրամագծի և շոշափողի հատման $O'=(2;\ 1)$ կետը, իսկ որպես բազիսային վեկտորներ՝ այդ ուղիղների $\overrightarrow{e_1'}=\{3;\,2\}$, $\overrightarrow{e_2'}=\{-2;\,1\}$ ուղղորդ վեկտորները: Գրենք կոորդինատային ձևափոխության բանաձևերը՝

$x=3x'-2y'+2$, $\quad y=2x'+y'+1$,

որտեղից $\quad x'=\dfrac{x+2y-4}{7}\quad$ և

$y'=\dfrac{-2x+3y+1}{7}$ արժեքները տեղադրելով $(*)$-ի մեջ կստանանք՝

$$\left(\frac{-2x+3y+1}{7}\right)^2=2p'\cdot\frac{x+2y-4}{7}:$$



Այնուհետև, քանի որ պարաբոլն անցնում է $(-4;\,5)$ կետով, ապա տեղադրելով այս հավասարման մեջ $x=-4$, $y=5$ կստանանք $p'=-1/7$: Հետևաբար պարաբոլի հավասարումն է՝

$(-2x+3y+1)^2+2(x+2y-4)=0$ կամ $4x^2-12xy+9y^2-2x+$ $+10y-7=0$: Այս խնդրի լուծման մեկ այլ եղանակ տալիս է **№ 843** խնդիրը:

Պատ.՝ $4x^2-12xy+9y^2-2x+10y-7=0$:

Խնդիր 21. Դիցուք ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում $A_1x+B_1y+C_1=0$ և $A_2x+B_2y+C_2=0$ հավասարումները պատկերում են հատվող ուղիղների զույգ: Ապացուցել, որ ցանկացած $C\neq 0$ թվի համար $\left(A_1x+B_1y+C_1\right)\left(A_2x+B_2y+C_2\right)-C=0$ **(1)** հավասարումը պատկերում է հիպերբոլ, որի համար տրված ուղիղները ասիմպտոտներ են:

Լուծում: Խնդրի պայմանից հետևում է, որ

$$\left(A_1x+B_1y+C_1\right)\left(A_2x+B_2y+C_2\right)=0,\quad A_1B_2-A_2B_1\neq 0\quad \textbf{(2)}$$

հավասարումը պատկերում է հատվող ուղիղների զույգ:

Դիցուք δ և Δ ինվարիանտների արժեքները (1) և (2) կորերի համար հավասար են համապատասխանաբար δ_1, Δ_1 և δ_2, Δ_2: Ըստ կորի տեսակի դասակարգման աղյուսակի, հատվող ուղիղների զույգը բնութագրվում է $\delta_2 < 0$, $\Delta_2 = 0$ պայմաններով: Քանի որ (1) և (2) հավասարումների ձախ մասերում բազմանդամների գործակիցները տարբերվում են միայն $C_1C_2 - C$ և C_1C_2 ազատ անդամներով, ուստի $\delta_1 = \delta_2$, և ուրեմն $\delta_1 < 0$: Ցույց տանք, որ $\Delta_1 \neq 0$: Դրա համար նկատենք, որ

$$\Delta_1 - \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}(a_0 - a') = -\delta_2 C:$$

Այստեղից , հաշվի առնելով, որ $\Delta_2 = 0$ կստանանք

$$\Delta_1 = -C\delta_2 = C(A_1B_2 - A_2B_1) \neq 0:$$

Այնպես որ $\delta_1 < 0$, $\Delta_1 \neq 0$, ուստի (1) կորը հիպերբոլ է:

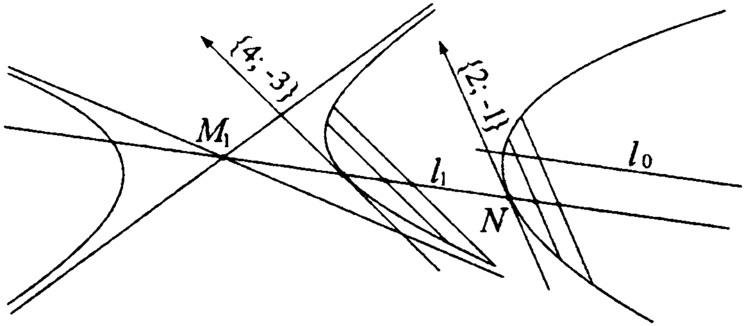
Քանի որ (1) և (2) կորերը ակնհայտորեն չեն հատվում և ունեն միևնույն ասիմպտոտական ուղղությունները, ուստի $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ և $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ ուղիղները (1) հիպերբոլի ասիմպտոտներն են:

Այս խնդրի մեկ այլ լուծում կարելի է ստանալ աֆինական ձևափոխությունների միջոցով (տես №840 խնդիրը):

Խնդիր 22. Տրված են $12xy + 5y^2 - 12x - 22y - 19 = 0$ և $4x^2 - 4xy + {}$ $+y^2 - 3x + 4y - 7 = 0$ երկրորդ կարգի կորերը: Գտնել նրանց ընդհանուր տրամագիծը և այդ կորերի այն լարերի ուղղությունները, որոնց համալուծ են այդ տրամագծերը:

Լուծում: Նախ որոշենք տրված կորերի կենտրոնները: Այդ նպատակով յուրաքանչյուր կորի համար կազմենք և լուծենք հավասարումների $a_{11}x + a_{12}y + a_1 = 0$, $a_{21}x + a_{22}y + a_2 = 0$ համակարգը:

Առաջին կորի համար $0 \cdot x + 6y - 6 = 0$, $6x + 5y - 11 = 0$ համակարգից ստանում ենք միակ՝ $(1;\, 1)$ լուծումը: Այսինքն կորը միակենտրոն կոր է: Երկրորդ կորի համար $4x - 2y - 1{,}5 = 0$, $-2x + y + 2 = 0$ համակարգը լուծում չունի: Նշանակում է կորը պարաբոլ է (պարաբոլները միակ երկրորդ կարգի կորերն են, որ կենտրոն չունեն): Հետևաբար որոնելի ընդհանուր l_1 տրամագիծը պետք է անցնի $M_1 = (1;\, 1)$ կետով և լինի զուգահեռ պարաբոլի համաչափության l_0 առանցքին, քանի որ պարաբոլի բոլոր տրամագծերը զուգահեռ են միմյանց, որոնցից մեկը l_0-ն է (տես գծագիրը):



Պարաբոլի համաչափության առանցքի ուղղությունը նրա հատուկ ուղղությունն է, որը որոշվում է $a_{11}\alpha + a_{12}\beta = 0$, $a_{21}\alpha + a_{22}\beta = 0$ համակարգից: Այստեղից գտնում ենք՝ $\beta = 2\alpha$ և ստանում $\{1;\ 2\}$ ուղղությունը: Ուստի կորերի ընդհանուր տրամագծի հավասարումն է $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2}$ կամ $2x - y - 1 = 0$:

Այժմ գտնենք կորերի այն լարերի ուղղությունները, որոնց համալուծ է այդ տրամագիծը: Օգտվելով ուղղությունների համալուծության $a_{11}\alpha\alpha' + a_{12}(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + a_{22}\beta\beta' = 0$ (*) պայմանից, առաջին՝ միակենտրոն կորի համար, որոնելի $\{\alpha';\ \beta'\}$ ուղղությունը գտնում ենք միարժեքորեն, որպես $\{\alpha;\ \beta\} = \{1;\ 2\}$ ուղղությանը համալուծ ուղղություն: Ունենք $0 \cdot 1 \cdot \alpha' + 6(1 \cdot \beta' + 2 \cdot \alpha') + 5 \cdot 2 \cdot \beta' = 0$, որտեղից ստանում ենք $\{\alpha';\ \beta'\} = \{4;\ -3\}$ ուղղությունը:

Երկրորդ կորի՝ պարաբոլի համար, $\{1;\ 2\}$ ուղղության համալուծ ուղղությունը (*) պայմանից միարժեքորեն չի որոշվում: Այս դեպքում լարերի ուղղությունը գտնելու համար, նախ գտնենք պարաբոլի և ընդհանուր տրամագծի հատման N կետը: Լուծելով $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ 4x^2 - 4xy + y^2 - 3x + 4y - 7 = 0 \end{cases}$ համակարգը գտնում ենք՝ $N = (2;\ 3)$:

Ինչպես գիտենք կորին պատկանող կետով անցնող տրամագծի ուղղությունը համալուծ է այդ կետով կորին տարված շոշափողի ուղղությանը:

Ուստի պարաբոլի հենց N կետով տարված շոշափողի ուղղությունն էլ կլինի նրա լարերի որոնելի ուղղությունը:

Տեղադրելով կորի $M_0(x_0; y_0)$ կետով նրան տարված շոշափողի ուղղորդ վեկտորի $\{-F_2(x_0; y_0); F_1(x_0; y_0)\} = \{-(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_2); (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)\}$ արտահայտության մեջ $x_0 = 2$, $y_0 = 3$, ստանում ենք որոնելի ուղղությունը՝ $\{\alpha''; \beta''\} = \{2; -1\}$:

Պատ.՝ Կորերի ընդհանուր տրամագիծն է՝ $2x - y - 1 = 0$ ուղիղը, նրան համալուծ լարերի ուղղություններն են՝ $\{\alpha'; \beta'\} = \{4; -3\}$ առաջին կորի համար, և $\{\alpha''; \beta''\} = \{2; -1\}$ երկրորդ կորի համար:

*

* * *

350. Գրել $x^2 - 2y^2 - 5x + 4y + 6 = 0$ կորին աբցիսների առանցքի հետ նրա հատման կետով տարված շոշափողի հավասարումը:

351. Կազմել $x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0$ կորի այն շոշափողների հավասարումները, որոնք զուգահեռ են $3x + 3y - 5 = 0$ ուղղին:

352. Կազմել $4x^2 + 4xy + y^2 - 6x + 4y + 2 = 0$ կորի այն շոշափողների հավասարումները, որոնք զուգահեռ են OY առանցքին:

353. Գրել $2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0$ կորի այն շոշափողների հավասարումները, որոնք անցնում են $(3; 4)$ կետով:

354. Ապացուցել, որ էլիպսի կամայական կետով տարված շոշափողը կիսում է այդ կետի կիզակետային շառավիղներով կազմված անկյան կից անկյունը:

355. Ապացուցել, որ հիպերբոլի կամայական կետով տարված շոշափողը կիսում է այդ կետի կիզակետային շառավիղներով կազմված անկյունը:

356. Ապացուցել, որ պարաբոլի կամայական կետով տարված շոշափողը կիսում է այդ կետի կիզակետային շառավիղներով և այդ կետով տարված պարաբոլի առանցքին հակուղղված ճառագայթով կազմված անկյունը:

357. Ապացուցել, որ հիպերբոլին տարված շոշափողի հատվածը, որն ընկած է նրա ասիմպտոտների միջև, շոշափման կետով կիսվում է:

358. Ապացուցել, որ հիպերբոլի ասիմպտոտներով և կամայական շոշափողով սահմանափակված եռանկյունները հավասարամեծ են:

359. Կազմել $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{18}=1$ էլիպսին $(12;-3)$ կետով տարված շոշափողների հավասարումները:

360. Կազմել $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ հիպերբոլին $(1;\ 4)$ կետով տարված շոշափողների հավասարումները:

361. Կազմել $y^2=4x$ պարաբոլին $(-1;\ 8/3)$ կետով տարված շոշափողների հավասարումները:

362. Գտնել անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որոնց դեպքում $Ax+By+C=0$ ուղիղը շոշափում է

ա) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ էլիպսին, բ) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ հիպերբոլին,

գ) $y^2=2px$ պարաբոլին, դ) $xy=k$ պարաբոլին:

363. Գտնել անհրաժեշտ և բավարար պայման, որի դեպքում $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ հիպերբոլին կարելի է տանել $y=kx$ ուղղին զուգահեռ շոշափողներ:

364. Գտնել անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որոնց դեպքում $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ հիպերբոլին $(x_0;\ y_0)$ կետով ա) կարելի է տանել երկու շոշափող, բ) կարելի է տանել մեկ շոշափող, գ) հնարավոր չէ տանել շոշափող:

365. Որոշել $y^2=64x$ պարաբոլի կարճագույն հեռավորությունը $4x+3y+46=0$ ուղղից:

366. Կազմել $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ էլիպսի այն շոշափողների հավասարումները, որոնք զուգահեռ են $x+y-1=0$ ուղղին:

367. Գրել $3x^2+8y^2=45$ էլիպսի շոշափողների հավասարումները, եթե էլիպսի կենտրոնի հեռավորությունն այդ շոշափողներից հավասար է 3:

368. Կազմել այն հիպերբոլի հավասարումը, որը շոշափում է $x-y-2=0$ ուղղին $(4;\ 2)$ կետում, եթե նրա առանցքները համընկնում են կոորդինատային առանցքների հետ:

369. Տրված է $y^2=2px$ պարաբոլի շոշափողի $x-3y+9=0$ հավասարումը: Կազմել պարաբոլի հավասարումը:

370. Կազմել հիպերբոլի հավասարումը, որի ասիմպտոտները $y=\pm\frac{x}{2}$ ուղիղներն են, իսկ $5x-6y-8=0$ ուղիղը նրան շոշափողներից մեկն է:

371. Էլիպսը, որի կիզակետերն են $(-3;\ 0)$ և $(3;\ 0)$ կետերը, շոշափում է $x+y-5=0$ ուղիղը: Կազմել նրա հավասարումը:

372. Գրել $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ և $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$ էլիպսների ընդհանուր շոշափողների հավասարումները:

373. Գրել $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ էլիպսի և $y^2=4x$ պարաբոլի ընդհանուր շոշափողների հավասարումները:

374. Գտնել այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնցից կարելի է տանել փոխուղղահայաց շոշափողներ

ա) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ էլիպսին, բ) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ հիպերբոլին,

գ) $y^2=2px$ պարաբոլին, դ) $xy=k$ պարաբոլին:

375. Էլիպսը հարթության վրա շարժման ընթացքում շոշափում է երկու փոխուղղահայաց ուղիղները: Ի՞նչ գիծ է գծում այդ ընթացքում նրա կենտրոնը:

376. Ապացուցել, որ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a\neq b$ էլիպսին արտագծված շեղանկյան գագաթները ընկած են կոորդինատային առանցքների վրա:

377. Կազմել $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ էլիպսին արտագծված քառակուսու կողմերի հավասարումները:

378. Կազմել $x-1=0$ և $2x-y+1=0$ ասիմպտոտներով այն հիպերբոլի հավասարումը, որը շոշափում է $4x+y+5=0$ ուղղին:

379. Գտնել հետևյալ կորերի ասիմպտոտական ուղղությունները՝

ա) $x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0$,

բ) $4x^2-12xy+9y^2-2x+3y-2=0$,

գ) $2x^2+4xy+5y^2-6x-8y-1=0$:

380. Օգտվելով երկրորդ կարգի կորի ասիմպտոտի ընդհանուր սահմանումից ցույց տալ, որ $\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0$ ուղիղները $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ հիպերբոլի ասիմպտոտներն են:

381. Գտնել ա) $y^2=9$, բ) $x^2=0$ կորերի ասիմպտոտները:

382. Գտնել հետևյալ հիպերբոլների ասիմպտոտները՝

ա) $3x^2+7xy+4y^2+5x+2y-6=0$,

բ) $2x^2+6xy-12x-18y+5=0$:

383. Դիցուք ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում A_1x+B_1y+ $+C_1=0$ և $A_2x+B_2y+C_2=0$ հավասարումները պատկերում են հատվող ուղիղների զույգ: Ապացուցել, որ այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնցից յուրաքանչյուրի մինչև այդ ուղիղներն ունեցած հեռավորությունների արտադրյալը զրոից տարբեր հաստատուն է, մի զույգ հիպերբոլներ են, որոնց համար տրված ուղիղները ասիմպտոտներ են:

384. Գտնել առնչություն հետևյալ կորի համալուծ տրամագծերի k_1 և k_2 անկյունային գործակիցների միջև

ա) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, բ) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, գ) $xy=k$:

385. Կազմել $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ էլիպսի այն լարի հավասարումը, որը կիսվում է (2; 1) կետով:

386. Գրել $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ էլիպսի այն տրամագծի հավասարումը, որն անցնում է $3x+2y-6=0$ ուղղի և էլիպսի հատումից առաջացված լարի միջնակետով:

387. Գրել $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{12}=1$ հիպերբոլի երկու համալուծ տրամագծերի հավասարումները, որոնցից մեկն անցնում է (2; 1) կետով:

388. Գտնել $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ էլիպսի այն շոշափողների կազմած անկյունը OX առանցքի հետ, որոնք տարված են $\{1;1\}$ ուղղությանը համալուծ տրամագծի ծայրակետերով

389. Գրել $5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0$ կորի այն համալուծ տրամագծերի հավասարումները, որոնցից մեկը զուգահեռ է օրդինատների առանցքին:

390. Տրված են $3x^2+6xy-y^2-18x-10y=0$ և $9x^2+6xy+$ $+y^2-18x-10y=0$ երկրորդ կարգի կորերը: Գտնել նրանց ընդհանուր տրամագիծը և այդ կորերի այն լարերի ուղղությունները, որոնց համալուծ է այդ տրամագիծը:

391. Գտնել $x^2+2xy-y^2=1$ և $x^2-10xy+4y^2=1$ կորերի նկատմամբ միաժամանակ համալուծ տրամագծերը:

392. Գտնել $x^2+4y^2=25$ էլիպսին ներգծված զուգահեռագծի մյուս կողմերի հավասարումները, եթե մի կողմի հավասարումն է՝ $x+2y-7=0$:

393. Գրել $C=(2;1)$ կենտրոնով էլիպսի հավասարումը, եթե $A=(5;1)$, $B=(0;3)$ կետերը նրա երկու համալուծ տրամագծերի ծայրակետեր են:

394. Գրել $(0;1)$ կետով անցնող պարաբոլի հավասարումը, եթե $x-2y=0$ ուղիղը տրամագիծ է, իսկ $x+y=0$ ուղիղը՝ այդ տրամագծի և պարաբոլի հատման կետով տարված շոշափող:

395. Գրել $C=(2;1)$ կենտրոնով էլիպսի հավասարումը, եթե $y-2=0$ և $x-y=0$ ուղիղները նրա երկու համալուծ տրամագծերի ծայրակետերով տարված շոշափողներ են:

396. Քառանկյան կողմերը տրված էլիպսին շոշափում են նրա համալուծ տրամագծերի ծայրակետերում: Ապացուցել, որ այդ քառանկյունը զուգահեռագիծ է:

397. Ապացուցել, որ էլիպսի ցանկացած երկու փոխադարձաբար համալուծ տրամագծերի երկարությունների քառակուսիների գումարը հաստատուն է (Ապոլոնի I թեորեմ):

398. Ապացուցել, որ էլիպսին արտագծված բոլոր զուգահեռագծերը, որոնց կից կողմերի ուղղությունները փոխադարձաբար համալուծ են, հավասարամեծ են (Ապոլոնի II թեորեմ):

399. Գտնել հետևյալ կորի կենտրոնները ու գլխավոր ուղղությունները

ա) $15x^2+16xy-48y^2+2x+16y-1=0$,

բ) $4x^2-20xy+25y^2+4x-10y-15=0$,

գ) $13x^2+18xy+37y^2-8x+56y+1=0$,

դ) $x^2+y^2-8x+6y-25=0$,

ե) $9x^2+12xy+4y^2-8x+12y-5=0$,

զ) $4x^2-15xy+4y^2-x+22y+1=0$ ։

400. Ապացուցել, որ երկրորդ կարգի կորի համար ցանկացած ուղղություն կլինի գլխավոր այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ կորը շրջանագիծ է։

§12. Երկրորդ կարգի կորի տեսակի որոշումը։ Նրա դիրքը սկզբնական կոորդինատային համակարգի նկատմամբ։

Երկրորդ կարգի կորերի համար, կապված այս կամ այն կոորդինատային համակարգերում նրանց ունեցած հավասարումներից, դիտարկվում է երկու հիմնական խնդիր։

I. Դիցուք կորը որևէ կոորդինատային համակարգի նկատմամբ տրված է երկու հավասարումներով։ Ինչպե՞ս են այդ հավասարումները կապված միմյանց հետ։ Այլ կերպ հարցը կարելի է ձևակերպել նաև այսպես. ե՞րբ են երկու հավասարումներ նույն կոորդինատային համակարգում որոշում միևնույն կորը։ Հարցի պատասխանը տալիս է երկրորդ կարգի կորերի միակության մասին հետևյալ թեորեմը։

ԹԵՈՐԵՄ։ Տված OXY կոորդինատային համակարգում երկու՝

$$F_1(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0$$

և

$$F_2(x,y)=b_{11}x^2+2b_{12}xy+b_{22}y^2+2b_1x+2b_2y+b_0=0$$

հավասարումներ որոշում են նույն կորը այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$F_1(x,y)=k\cdot F_2(x,y),\ k\neq 0 ։$$

Այսինքն

$$a_{11}=k\cdot b_{11},\ a_{12}=k\cdot b_{12},\ a_{22}=k\cdot b_{22},\ a_1=k\cdot b_1,\ a_2=k\cdot b_2,\ a_0=k\cdot b_0 ։$$

II. Մյուս խնդրի նպատակն է, ելնելով տվյալ կոորդինատային համակարգի նկատմամբ երկրորդ կարգի կորի տրված հավասարումից, որոշել կորի տեսակը և գտնել կորի կանոնական կոորդինատային համակարգի դիրքը սկզբնական կոորդինատային համակարգի նկատմամբ։

Դիցուք OXY ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգի նկատմամբ երկրորդ կարգի կորի ընդհանուր հավասարումն է

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0\ ,$$

որտեղ a_{11}, a_{12}, a_{22} գործակիցներից գոնե մեկը հավասար չէ 0-ի:

Կատարելով կոորդինատային համակարգի պտույտ O կետի շուրջ φ անկյունով՝ $x=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi,\ y=x'\sin\varphi+y'\cos\varphi$, որտեղ φ-ն որոշվում է $a_{12}tg^2\varphi+(a_{11}-a_{22})tg\varphi-a_{12}=0$ հավասարումից, ստացվում է նոր՝ $OX'Y'$ ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգ, որի նկատմամբ կորի հավասարումը ընդունում է

$$a'_{11}x'^2+a'_{22}y'^2+2a'_1x'+2a'_2y'+a_0=0 \quad (*)$$

տեսք:

Հավասարման հետագա պարզեցումները կատարվում են կոորդինատային համակարգի զուգահեռ տեղափոխմամբ:

ա) Երբ $a'_{11}\neq 0$ և $a'_{22}\neq 0$, ապա $(*)$ հավասարումը բերվում է $a'_{11}x''^2+a'_{22}y''^2+a'_0=0$ տեսքի, որտեղից ստացվում են հինգ կանոնական հավասարումներ՝

1. $\dfrac{x''^2}{a^2}+\dfrac{y''^2}{b^2}=1$ (*էլիպս*),

2. $\dfrac{x''^2}{a^2}+\dfrac{y''^2}{b^2}=-1$ (*կեղծ էլիպս*),

3. $\dfrac{x''^2}{a^2}-\dfrac{y''^2}{b^2}=1$ (*հիպերբոլ*),

4. $\dfrac{x''^2}{a^2}+\dfrac{y''^2}{b^2}=0$ (*հատվող կեղծ ուղիղների զույգ*),

5. $\dfrac{x''^2}{a^2}-\dfrac{y''^2}{b^2}=0$ (*հատվող իրական ուղիղների զույգ*):

բ) Երբ $a'_{11}=0$ և $a'_{22}\neq 0$, ապա $a'_1\neq 0$ դեպքում $(*)$ հավասարումը բերվում է $a'_{22}y''^2+2a'_1x''=0$ տեսքի, որտեղից ստացվում է հետևյալ կանոնական հավասարումը.

6. $y''^2=2px''$ (*պարաբոլ*):

Իսկ եթե $a'_{11}=0$, $a'_{22}\neq 0$, $a'_1=0$, ապա $(*)$-ը բերվում է $a'_{22}y''^2+a'_0=0$ տեսքի, որտեղից ստացվում են ևս երեք կանոնական հավասարումներ.

7. $y''^2-a^2=0,\ a\neq 0$ (*զուգահեռ իրական ուղիղների զույգ*),

8. $y''^2+a^2=0,\ a\neq 0$ (*զուգահեռ կեղծ ուղիղների զույգ*),

9. $y''^2=0$ (*համընկած ուղիղների զույգ*):

Այսպիսով հարթության ամեն մի երկրորդ կարգի կոր վերը նշված 1.–9. տեսկի կորերից մեկն ու մեկն է:

Խնդիր 23. Որոշել $5x^2+6xy+5y^2-16x-16y-16=0$ կորի տեսակը, կանոնական հավասարումը և գտնել կանոնական կոորդինատային համակարգ, կիրառելով կոորդինատային համակարգի ձևափոխություն: Կատարել գծագիր:

Լուծում: Նախ ազատվենք $6xy$ միանդամից կատարելով կոորդինատային համակարգի պտույտ O սկզբնակետի շուրջը: Այդ նպատակով հավասարման մեջ տեղադրենք

$x=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi$, $y=x'\sin\varphi+y'\cos\varphi$

և պարզեցնենք այն. $5(x'\cos\varphi-y'\sin\varphi)^2+6(x'\cos\varphi-y'\sin\varphi)\cdot$
$\cdot(x'\sin\varphi+y'\cos\varphi)+5(x'\sin\varphi+y'\cos\varphi)^2-16(x'\cos\varphi-y'\sin\varphi)-$
$-16(x'\sin\varphi+y'\cos\varphi)-16=0;$ կամ

$$(5\cos^2\varphi+6\cos\varphi\sin\varphi+5\sin^2\varphi)x'^2+(6\cos^2\varphi-6\sin^2\varphi)x'y'+$$
$$(5\sin^2\varphi-6\sin\varphi\cos\varphi+5\cos^2\varphi)y'^2+(-16\cos\varphi-16\sin\varphi)x'+$$
$$+(16\sin\varphi-16\cos\varphi)y'-16=0:$$

Որոշենք պտույտի φ անկյունը

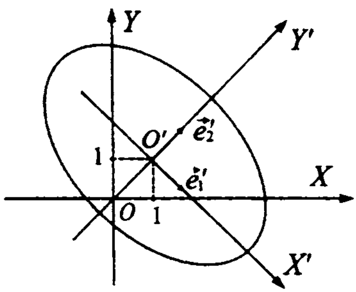
$6\cos^2\varphi-6\sin^2\varphi=0$ հավասարումից ունենք $tg\varphi=1$ կամ $tg\varphi=-1$ որտեղից ընդունելով օրինակ $\varphi=-\pi/4$, կունենանք $\cos\varphi=\sqrt{2}/2$, $\sin\varphi=-\sqrt{2}/2$: Տեղադրելով հավասարման մեջ կստանանք $2x'^2+8y'^2-16\sqrt{2}y'-16=0$, կամ անջատելով լրիվ քառակուսիներ՝ $2x'^2+8(y'-\sqrt{2})^2-32=0$: Այժմ կատարելով $OX'Y'$ կոորդինատային համակարգի զուգահեռ տեղափոխություն $x'=x''$, $y'=y''-\sqrt{2}$

բանաձևերով, կստանանք նոր` $O'X''Y''$ ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգ, որի նկատմամբ կորի հավասարումն է` $x''^2+4y''^2=16$ կամ $\dfrac{x''^2}{16}+\dfrac{y''^2}{4}=1$: Այնպես, որ կորը էլիպս է, որի կիսաառանցքներն են համապատասխանաբար 4 և 2:

Կոորդինատների ձևափոխության բանաձևերից գտնում ենք $O'=(1;1)$, իսկ բազիսային վեկտորներն են`

$$\vec{e_1'}=\left\{1/\sqrt{2};-1/\sqrt{2}\right\},\ \vec{e_2'}=\left\{1/\sqrt{2};1/\sqrt{2}\right\}:$$

Կորի դիրքը սկզբնական կոորդինատային համակարգի նկատմամբ



հետևյալն է`

Խնդիր 24. Որոշել $6xy-8y^2+12x-26y-29=0$ կորի տեսակը, կանոնական հավասարումը և գտնել կանոնական կոորդինատային համակարգ, կիրառելով կոորդինատային համակարգի ձևափոխություն: Կատարել գծագիր:

Լուծում: Նախորդ խնդրի լուծման նմանությամբ, նախ ազատվենք $6xy$ միանդամից կատարելով կոորդինատների համակարգի պտույտ O սկզբնակետի շուրջը: Այդ նպատակով հավասարման մեջ տեղադրենք $x=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi$, $y=x'\sin\varphi+y'\cos\varphi$ և պարզեցնենք այն.

$$6(x'\cos\varphi-y'\sin\varphi)(x'\sin\varphi+y'\cos\varphi)-8(x'\sin\varphi+y'\cos\varphi)^2+$$
$$+12(x'\cos\varphi-y'\sin\varphi)-26(x'\sin\varphi++y'\cos\varphi)-29=0;$$

կամ

$$(6\cos\varphi\sin\varphi-8\sin^2\varphi)x'^2+(6\cos^2\varphi-16\cos\varphi\sin\varphi-6\sin^2\varphi)x'y'$$

$-(6\sin\varphi\cos\varphi+8\cos^2\varphi)y'^2+(12\cos\varphi-26\sin\varphi)x'-(12\cos\varphi+$
$+26\cos\varphi)y'-29=0$:

Որոշենք պտույտի φ անկյունը.

$6\cos^2\varphi-16\cos\varphi\sin\varphi-6\sin^2\varphi=0$ հավասարումից ունենք $3tg^2\varphi+8tg\varphi-3=0$, որտեղից $tg\varphi=1/3$ կամ $tg\varphi=-3$:

Ընտրելով $tg\varphi=\dfrac{1}{3}$, $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$, կստանանք $\cos\varphi=3/\sqrt{10}$, $\sin\varphi=1/\sqrt{10}$: Գտնելով նոր հավասարման գործակիցները՝

$$(6\cos\varphi\sin\varphi-8\sin^2\varphi)=6\cdot\frac{3}{10}-8\cdot\frac{1}{10}=1,$$

$$(-6\sin\varphi\cos\varphi-8\cos^2\varphi)=-6\cdot\frac{3}{10}-8\cdot\frac{9}{10}=-9,$$

$$(12\cos\varphi-26\sin\varphi)=\frac{36}{\sqrt{10}}-\frac{26}{\sqrt{10}}=\sqrt{10},$$

$$(-12\cos\varphi-26\cos\varphi)=-\frac{12}{\sqrt{10}}-\frac{78}{\sqrt{10}}=-\frac{90}{\sqrt{10}}=-9\sqrt{10}$$

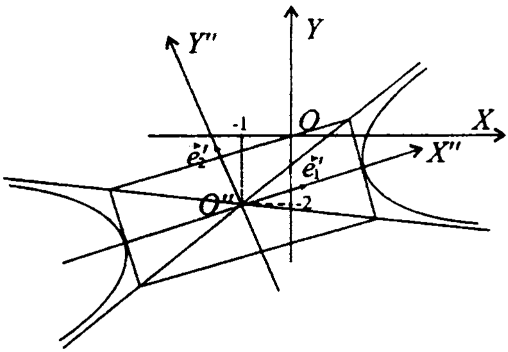
կստանանք $x'^2-9y'^2+\sqrt{10}x'-9\sqrt{10}y'-29=0$, կամ $\left(x'+\sqrt{10}/2\right)^2-9\left(y'+\sqrt{10}/2\right)^2=9$: Այժմ կատարելով կոորդինատային $OX'Y'$ համակարգի զուգահեռ տեղափոխություն $x'=x''-\sqrt{10}/2$, $y'=y''-\sqrt{10}/2$ բանաձևերով կստանանք նոր՝ $O'X''Y''$ ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգ, որի նկատմամբ կորի հավասարումն է՝ $x''^2-9y''^2=9$, կամ $\dfrac{x''^2}{9}-y''^2=1$:

Այսպիսով կորը հիպերբոլ է, որի իրական և կեղծ կիսաառանցքներն են համապատասխանաբար 3 և 1:

Կոորդինատների ձևափոխության բանաձևերից գտնում ենք $O'=(-1;\,-2)$, իսկ բազիսային վեկտորներն են՝

$$\vec{e_1'}=\left\{3/\sqrt{10}\,;\,1/\sqrt{10}\right\},\ \vec{e_2'}=\left\{-1/\sqrt{10}\,;\,3/\sqrt{10}\right\}:$$

Կորի դիրքը սկզբնական կոորդինատային համակարգի նկատմամբ հետևյալն է՝



Երկրորդ կարգի կորի տեսակը և կանոնական հավասարումը կարող է որոշվել նաև օրթոգոնալ ինվարիանտների միջոցով:

Դիցուք կորը OXY ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգի նկատմամբ տրված է

$$F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0$$

հավասարումով:

Մեկ այլ՝ $O'X'Y'$ ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգի նկատմամբ այդ կորի հավասարում կարելի է ստանալ նախկին հավասարումից, նրա մեջ կատարելով տեղադրում կոորդինատների համակարգի

ձևափոխության $\begin{cases} x=c_{11}x'+c_{12}y'+c_1 \\ y=c_{21}x'+c_{22}y'+c_2 \end{cases}$ բանաձևերով՝

$$F'(x',y')=F(c_{11}x'+c_{12}y'+c_1,c_{21}x'+c_{22}y'+c_2)=$$

$$=a'_{11}x'^2+2a'_{12}x'y'+a'_{22}y'^2+2a'_1x'+2a'_2y'+a'_0=0:$$

Կորի հավասարման վեց գործակիցներից կախված

$I=I(a_{11},a_{12},a_{22},a_1,a_2,a_0)$ ֆունկցիան կոչվում է երկրորդ կարգի կորի ***օրթոգոնալ ինվարիանտ ֆունկցիա*** (կամ պարզապես ***օրթոգոնալ ինվարիանտ***), եթե այն ամեն մի երկրորդ կարգի կորի համար չի փոխում իր արժեքը մի ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգից ցանկացած այլ ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգի անցնելիս՝

$I(a_{11},a_{12},a_{22},a_1,a_2,a_0)=I(a'_{11},a'_{12},a'_{22},a'_1,a'_2,a'_0):$

Հետևյալ երեք ֆունկցիաները՝

$$S = a_{11} + a_{22}, \qquad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$$

երկրորդ կարգի կորի օրթոգոնալ ինվարիանտներ են:

Եթե երկրորդ կարգի կորն այնպիսին է, որ նրա համար $\delta = \Delta = 0$, ապա հետևյալ՝ $K = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix}$ ֆունկցիան նույնպես չի փոխում իր արժեքը մի ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգից ցանկացած այլ ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգի անցնելիս: Այդ ֆունկցիան կոչվում է ***կիսաինվարիանտ ֆունկցիա***.

Երկրորդ կարգի կորի տեսակը և կանոնական հավասարումը լիովին որոշվում են S, δ, Δ ինվարիանտների և K կիսաինվարիանտի միջոցով:

Հետևյալ՝ $\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0$ հավասարումը կոչվում է կորի ***բնութագրիչ հավասարում***:

Ստորև աղյուսակում բերվում է բոլոր կորերի կանոնական հավասարումների գործակիցների որոշումը ինվարիանտների և կիսաինվարիանտի միջոցով:

Բոլոր խմբերում λ_1-ը և λ_2-ը $\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0$ բնութագրիչ հավասարման արմատներն են			
	միակենտրոն կորեր	պարաբոլական կորեր	
	$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + a_0' = 0$	$\lambda_2 y''^2 + 2a_1' x'' = 0$	$\lambda_2 y''^2 + a_0' = 0$
δ	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$	0	0
Δ	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot a_0'$	$-\lambda_2 \cdot a_1'^2 \neq 0$	0
K	պետք չի գալիս	պետք չի գալիս	$\lambda_2 \cdot a_0'$
	$a_0' = \Delta/\delta$	$a_1' = \pm\sqrt{-\Delta/S}$	$a_0' = K/S$

Կորի տեսակը որոշվում է հետևյալ աղյուսակով

№	Տեսակը	Հայտանիշը
1.	Էլիպս	$\delta > 0, S\cdot\Delta < 0$
2.	Կեղծ էլիպս	$\delta > 0, S\cdot\Delta > 0$
3.	Հատվող կեղծ ուղիղների զույգ	$\delta > 0, \Delta = 0$
4.	Հիպերբոլ	$\delta < 0, \Delta \neq 0$
5.	Հատվող իրական ուղիղների զույգ	$\delta < 0, \ \Delta = 0$
6.	Պարաբոլ	$\delta = 0, \Delta \neq 0$
7.	Զուգահեռ իրական ուղիղների զույգ	$\delta = \Delta = 0, K < 0$
8.	Զուգահեռ կեղծ ուղիղների զույգ	$\delta = \Delta = 0, K > 0$
9.	Համընկած ուղիղների զույգ	$\delta = \Delta = K = 0$

Խնդիր 25. Օրթոգոնալ ինվարիանտների միջոցով պարզել

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$$

հավասարումով տրված կորի տեսակը, կանոնական հավասարումը, գտնել կորի դիրքը սկզբնական կոորդինատային համակարգի նկատմամբ և կատարել գծագիր:

Լուծում: Հաշվելով կորի S, δ, Δ ինվարիանտները, կստանանք՝

$$S = 5 + 8 = 13, \quad \delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 36, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -16 \\ 2 & 8 & -28 \\ -16 & -28 & 80 \end{vmatrix} = -1296:$$

Քանի որ $\delta \neq 0$, ուստի կորը միակենտրոն կոր է և ունի

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + a_0' = 0$$

տեսքի հավասարում կանոնական կոորդինատային համակարգում: Մյուս կողմից՝ $\delta > 0, S\cdot\Delta < 0$, ուստի կորը էլիպս է: Կորի բնութագրիչ հավասարումից՝ $\lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0$, ստանում ենք $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 9$, իսկ $a_0' = \Delta/\delta = -36$: Հետևաբար կորի կանոնական հավասարումն է՝

$\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}=1$, որտեղից՝ $a=3, b=2$: Կանոնական կոորդինատային $(O'; \vec{e_1'}, \vec{e_2'})$ համակարգի O' սկզբնակետը էլիպսի կենտրոնն է, որի կոորդինատները գտնում ենք

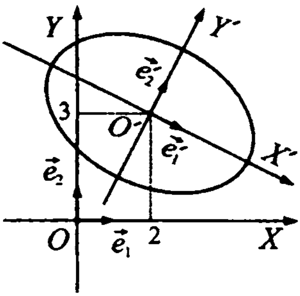
$$\begin{cases} 5x+2y-16=0 \\ 2x+8y-28=0 \end{cases}$$ համակարգից՝ $O'=(2;\ 3)$:

Կորի $O'X'$ և $O'Y'$ առանցքների ուղղությունները գտնում ենք որպես կորի գլխավոր ուղղություններ՝ $\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\alpha+a_{12}\beta=0 \\ a_{21}\alpha+(a_{22}-\lambda)\beta=0 \end{cases}$ համակարգից:

Վերցնելով $\lambda=4$ արժեքը $\begin{cases} -\alpha+2\beta=0 \\ 2\alpha+4\beta=0 \end{cases}$ համակարգից ստանում ենք $\alpha:\beta=2:-1$: Նորմավորելով $\{2;-1\}$ վեկտորը, ստանում ենք՝

$\vec{e_1'}=\left\{\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$: Նման ձևով, վերցնելով $\lambda=9$ արժեքը $\begin{cases} -4\alpha+2\beta=0 \\ 2\alpha-\beta=0 \end{cases}$ համակարգից ստանում ենք $\alpha:\beta=1:2$: Նորմավորելով $\{1;2\}$ վեկտորը, ստանում ենք՝

$\vec{e_2'}=\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right\}$:



Կորի դիրքը սկզբնական կոորդինատային համակարգի նկատմամբ պատկերված է նկարում:

Խնդիր 26. Օրթոգոնալ ինվարիանտների միջոցով պարզել $4x^2-4xy+y^2-2x-14y+7=0$ կորի տեսակը, կանոնական հավասարումը, գտնել կանոնական կոորդինատային համակարգի դիրքը սկզբնական կոորդինատային համակարգի նկատմամբ և կատարել գծագիրը:

Լուծում: Հաշվելով կորի S, δ, Δ ինվարիանտները, ստանում ենք՝

$$S=4+1=5,\ \delta=\begin{vmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=0, \qquad \Delta=\begin{vmatrix}4 & -2 & -1\\ -2 & 1 & -7\\ -1 & -7 & 7\end{vmatrix}=-225:$$

Քանի որ $\delta=0$ և $\Delta\neq 0$, ուստի կորը պարաբոլ է: Գտնենք նրա կիզակետային պարամետրը և գրենք կանոնական հավասարումը.

$p=\sqrt{-\Delta/S^3}=\sqrt{225/125}=3/\sqrt{5}$ և հետևաբար՝ $y'^2=6x'/\sqrt{5}$:

Կազմենք պարաբոլի առանցքի հավասարումը: Դրա համար նախ գտնենք նրա գլխավոր ուղղությունները:

Բնութագրիչ հավասարման՝ $\lambda^2-5\lambda=0$ արմատներն են $\lambda_1=0,\ \lambda_2=5$:

Հաջորդաբար տեղադրելով $\begin{cases}(4-\lambda)\alpha-2\beta=0\\ -2\alpha+(1-\lambda)\beta=0\end{cases}$ համակարգի մեջ

$\lambda_1=0$ և $\lambda_2=5$ կստանանք գլխավոր ուղղությունները ներկայացնող երկու վեկտոր՝ $\{1;\ 2\}$ և $\{-2;\ 1\}$: Դրանցից առաջինը ասիմպտոտական ուղղության վեկտոր է: Հետևաբար պարաբոլի առանցքը երկրորդ գլխավոր ուղղությանը համալուծ տրամագիծն է: Ուստի նրա հավասարումն է՝

$-2(4x-2y-1)+(-2x+y-7)=0$ կամ $2x-y+1=0$:

Գտնենք պարաբոլի O' գագաթի կոորդինատները որպես $\begin{cases}2x-y+1=0\\ 4x^2-4xy+y^2-2x-14y+7=0\end{cases}$ համակարգի լուծում: Կստանանք՝

$O'=\left(-1/5;\ 3/5\right)$:

Պարաբոլի $O'X'$ առանցքի ուղղությունը համուղղված է $\{1;\ 2\}$ կամ $\{-1;\ -2\}$ վեկտորներից մեկին: Պարզելու համար գտնենք պարաբոլի հատման կետերը OY և OX առանցքների հետ: Քանի որ

$$\begin{cases}x=0\\ 4x^2-4xy+y^2-2x-14y+7=0\end{cases}$$

համակարգն ունի երկու լուծում, իսկ

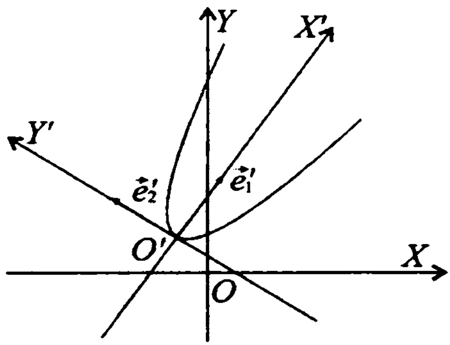
$$\begin{cases}y=0\\ 4x^2-4xy+y^2-2x-14y+7=0\end{cases}$$

համակարգը լուծում չունի, հետևաբար $O'X'$ առանցքը համուղղված է $\{1;\ 2\}$ վեկտորին:

Կորդինատային $O'X'Y'$ համակարգի $\vec{e_1'}$ և $\vec{e_2'}$ բազիսային վեկտորները գտնելու համար, նորմավորելով գլխավոր ուղղությունները ներկայացնող վեկտորները կունենանք՝

$$\vec{e_1'}=\left\{1/\sqrt{5}\,;\,2/\sqrt{5}\right\} \quad \text{և} \quad \vec{e_2'}=\left\{-2/\sqrt{5}\,;\,1/\sqrt{5}\right\}:$$

Այս ամենի հիման վրա կարող ենք կատարել գծագիր.



Խնդիր 27. Ապացուցել, որ $3x^2-14xy+8y^2-x-6y-2=0$ կորը հատվող ուղիղների զույգ է: Գրել այդ ուղիղների հավասարումները:

Լուծում: Հաշվելով կորի S, δ, Δ ինվարիանտները, ստանում ենք՝ $S=11$, $\delta=-25$, $\Delta=0$: Քանի որ $\delta<0$ և $\Delta=0$, ուստի կորը հատվող իրական ուղիղների զույգ է:

Դիտարկելով $3x^2-14xy+8y^2=0$ օժանդակ կորը, նրա համար նույնպես ստանում ենք $S=11$, $\delta=-25$, $\Delta=0$, ուստի այդ կորը ևս հատվող իրական ուղիղների զույգ է:

Բացի այդ, այս երկու կորերն ունեն նույն ասիմպտոտական $\{\alpha;\ \beta\}$ ուղղությունները, որոնք որոշվում են միևնույն՝ $3\alpha^2-14\alpha\beta+8\beta^2=0$ հավասարումից: Նկատենք, որ հատվող ուղիղների զույգի դեպքում կորի ասիմպտոտական ուղղությունները համընկնում են այդ կորի կազմի մեջ մտնող ուղիղների ուղղորդ վեկտորների ուղղությունների հետ:

Հետևաբար այս կորերից մեկի կազմի մեջ մտնող ուղիղները համագիծ են մյուս կորի կազմի մեջ մտնող ուղիղներին: Վերլուծելով $3x^2-14xy+8y^2$ եռանդամը գծային արտադրիչների արտադրյալի՝ $3x^2-14xy+8y^2=(3x-2y)(x-4y)$, գտնում ենք երկրորդ կորի կազմի մեջ մտնող ուղիղների հավասարումները՝ $3x-2y=0,\ x-4y=0$: Այժմ սկզբնական կորի կազմի մեջ մտնող ուղիղների հավասարումները կարող ենք որոնել $3x-2y+C_1=0$, $x-4y+C_2=0$ տեսքով:

Երկրորդ կարգի կորերի միակության թեորեմից հետևում է, որ

$$(3x-2y+C_1)(x-4y+C_2)=k(3x^2-14xy+8y^2-x-6y-2), k\neq 0:$$

Այս հավասարությունից, Լագրանժի անորոշ գործակիցների եղանակով, ստանում ենք $k=1$, $3C_2+C_1=-1$, $-2C_2-4C_1=-6$, $C_1C_2=-2$, որտեղից էլ՝ $C_1=2,\ C_2=-1$:

Պատ.՝ $3x-2y+2=0$, $x-4y-1=0$:

*

* * *

Այս ենթաբաժնի բոլոր խնդիրներում դիտարկվում են ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգեր:

401. Երկրորդ կարգի կորը OXY կոորդինատային համակարգի նկատմամբ տրված է

$$F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0$$

ընդհանուր հավասարումով: Ապացուցել, որ կոորդինատային համակարգի $x=x'+x_0$, $y=y'+y_0$ զուգահեռ տեղափոխման արդյունքում

$S=a_{11}+a_{22}$ և $\delta=a_{11}a_{22}-a_{12}^2$ ֆունկցիաները չեն փոխում իրենց արժեքը: Այսինքն՝ $a'_{11}+a'_{22}=a_{11}+a_{22}$, $a'_{11}a'_{22}-a'^2_{12}=a_{11}a_{22}-a_{12}^2$, որտեղ a'_{ij} գործակիցները վերցված են նոր՝ $O'X'Y'$ կոորդինատային համակարգի նկատմամբ կորի

$$F'(x',y')=F(x'+x_0,y'+y_0)=$$

$$=a'_{11}x^2+2a'_{12}xy+a'_{22}y^2+2a'_1x+2a'_2y+a'_0=0$$

հավասարումից:

402. Երկրորդ կարգի կորը OXY կոորդինատային համակարգի նկատմամբ տրված է

$$F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0$$

ընդհանուր հավասարումով: Ապացուցել, որ կոորդինատային համակարգի

$$x=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi,\ y=y'\sin\varphi+y'\cos\varphi$$

կամ

$$x=x'\cos\varphi+y'\sin\varphi,\ y=y'\sin\varphi-y'\cos\varphi$$

ձևափոխությունների արդյունքում

$S=a_{11}+a_{22}$ և $\delta=a_{11}a_{22}-a_{12}^2$ ֆունկցիաները չեն փոխում իրենց արժեքը: Այսինքն՝ $a'_{11}+a'_{22}=a_{11}+a_{22}$, $a'_{11}a'_{22}-a'^2_{12}=a_{11}a_{22}-a_{12}^2$, որտեղ a'_{ij} գործակիցները վերցված են նոր՝ $OX'Y'$ կոորդինատային համակարգի նկատմամբ կորի

$$F'(x',y')=F(x'\cos\varphi-y'\sin\varphi,\ y'\sin\varphi+y'\cos\varphi)=$$
$$=a'_{11}x^2+2a'_{12}xy+a'_{22}y^2+2a'_1x+2a'_2y+a'_0=0$$

կամ համապատասխանաբար

$$F'(x',y')=F(x'\cos\varphi+y'\sin\varphi,\ y'\sin\varphi-y'\cos\varphi)=$$
$$=a'_{11}x^2+2a'_{12}xy+a'_{22}y^2+2a'_1x+2a'_2y+a'_0=0$$

հավասարումից:

403. Կատարելով կոորդինատային համակարգի զուգահեռ տեղափոխություն, պարզել հետևյալ հավասարումով տրված կորի տեսակը և դիրքը սկզբնական կոորդինատային համակարգի նկատմամբ՝

+ ա) $25x^2+9y^2-100x+54y-44=0$, բ) $3x^2+12x+16y-12=0$,

+ գ) $9x^2+16y^2-54x+64y+1=0$, + դ) $4x^2-y^2-16x-6y+3=0$,

ե) $9x^2-4y^2+36x-16y+20=0$, զ) $3y^2-12x-6y+11=0$,

+ է) $4x^2-y^2-16x+6y+23=0$, ը) $x^2+x-6=0$,

թ) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{2x}{a}+\dfrac{2y}{b}=1$, ժ) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{2x}{a}+\dfrac{2y}{b}=0$,

ի) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y}{b}=1$:

404. Կատարելով կոորդինատային համակարգի զուգահեռ տեղափոխություն և պտույտ, պարզել հետևյալ հավասարումով տրված կորի տեսակը, դիրքը սկզբնական կոորդինատային համակարգի նկատմամբ և կատարել գծագիրը:

ա) $5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0$,

բ) $5x^2+12xy-22x-12y-19=0$,

գ) $x^2-4xy+4y^2+4x-3y-7=0$,

դ) $9x^2-4xy+6y^2+16x-8y-2=0$,

ե) $8x^2+6xy-26x-12y+11=0$,

զ) $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$:

405. Կորի օրթոգոնալ ինվարիանտների միջոցով պարզել հետևյալ կորի տեսակը, գտնել նրա կանոնական հավասարումը, ~~ընտրել կանոնական կոորդինատային համակարգը և կառուցել գծագիրը~~՝

ա) $2x^2+4xy+5y^2-6x-8y-1=0$,

բ) $x^2-12xy-4y^2+12x+8y+5=0$,

գ) $9x^2+24xy+16y^2-230x+110y-475=0$,

դ) $3x^2+xy-2y^2-5x+5y-2=0$,

ե) $4x^2-12xy+9y^2-20x+30y+16=0$,

զ) $5x^2+6xy+5y^2-6x-10y-3=0$,

է) $12xy+5y^2-12x-22y-19=0$,

ը) $4x^2-4xy+y^2-3x+4y-7=0$,

թ) $4x^2+16xy+15y^2-8x-22y-5=0$,

ժ) $4x^2+4xy+y^2+16x+8y+15=0$:

406. Ապացուցել, որ $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0$ երկրորդ աստիճանի բազմանդամը ներկայացվում է որպես իրական գործակիցներով գծային բազմանդամի լրիվ քառակուսի այն և միայն այն դեպքում, երբ $\delta=\Delta=K=0$:

407. Ապացուցել, որ $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0$ երկրորդ աստիճանի բազմանդամը ներկայացվում է որպես իրական գործակիցներով գծային բազմանդամների արտադրյալ այն և միայն այն դեպքում, երբ $\delta<0,\ \Delta=0$ կամ $\delta=\Delta=0,\ K\le 0$:

408. Ապացուցել, որ $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0$ կորը հատվող իրական ուղիղների զույգ է այն և միայն այն դեպքում, երբ հատվող իրական ուղիղների զույգ է $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=0$ կորը, ընդ որում այդ կորերի կազմի մեջ մտնող ուղիղները զույգ առ զույգ համագիծ են միմյանց (զուգահեռ են կամ համընկած):

409. Ապացուցել, որ $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0$ կորը համագիծ (զուգահեռ կամ համընկած) ուղիղների զույգ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=0$ կորը համընկած ուղիղների զույգ է, ընդ որում այդ կորերի կազմի մեջ մտնող ուղիղները համագիծ են միմյանց:

410. Ցույց տալ, որ հետևյալ կորերը իրական ուղիղների զույգեր են, և ապա օգտվելով նախորդ երկու խնդիրներից, Լագրանժի անորոշ գործակիցների եղանակով գտնել այդ կորերի կազմի մեջ մտնող ուղիղների հավասարումները.

ա) $4x^2-16xy+15y^2-8x+22y-5=0$,

բ) $4x^2-4xy+y^2+16x-8y+15=0$,

գ) $x^2-4xy+4y^2+2x-4y+1=0$:

411. Ցույց տալ, որ հետևյալ կորերը իրական հատվող ուղիղների զույգեր են: Գտնելով դրանցից յուրաքանչյուրի կենտրոնն ու ասիմպտոտական ուղղությունները , գրել այդ կորերի կազմի մեջ մտնող ուղիղների հավասարումները.

ա) $x^2+5xy+4y^2+x-2y-2=0$,

բ) $2x^2+5xy-12y^2+x+26y-10=0$,

գ) $3x^2-xy-2y^2-5x-5y-2=0$

412. Ցույց տալ, որ հետևյալ կորերը համընկած ուղիղների զույգեր են: Գտնելով դրանցից յուրաքանչյուրի կենտրոնները, գրել այդ կորերի կազմի մեջ մտնող ուղիղների հավասարումները.

ա) $4x^2+12xy+9y^2-8x-12y+4=0$,

բ) $9x^2-6xy+y^2+12x-4y+4=0$,

գ) $x^2-6xy+9y^2+8x-24y+16=0$:

413. Ապացուցել, որ $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0$ հավասարումը պատկերում է շրջանագիծ այն և միայն այն դեպքում, երբ $a_{11}=a_{22}\neq 0,\ a_{12}=0$:

414. Ապացուցել, որ երկրորդ կարգի կորը շրջանագիծ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $S^2=4\delta,\ S\cdot\Delta<0$:

415. Ապացուցել, որ եթե երկրորդ կարգի կորի համար $S=0$, ապա $\delta<0$:

416. Երկրորդ կարգի կորի S, δ և Δ ինվարիանտների միջոցով գտնել անհրաժեշտ և բավարար պայման, որի դեպքում կորը հավասարակողմ հիպերբոլ է: Գրել նրա կանոնական հավասարումը:

417. Երկրորդ կարգի կորի S, δ և Δ ինվարիանտների միջոցով գտնել անհրաժեշտ և բավարար պայման, որի դեպքում կորը փոխուղղահայաց ուղիղների զույգ է:

418. Երկրորդ կարգի կորի S, δ և Δ ինվարիանտների միջոցով գտնել անհրաժեշտ և բավարար պայման, որի դեպքում երկրորդ կարգի կորը զուգահեռ իրական ուղիղների զույգ է: Արտահայտել նրանց միջև հեռավորությունը ինվարիանտների միջոցով:

419. Երկրորդ կարգի կորի S, δ և Δ ինվարիանտների միջոցով գտնել անհրաժեշտ և բավարար պայման, որի դեպքում երկրորդ կարգի կորը հատվող իրական ուղիղների զույգ է: Արտահայտել նրանց կազմած անկյունը ինվարիանտների միջոցով:

420. Երկրորդ կարգի կորի S, δ և Δ ինվարիանտների միջոցով գտնել անհրաժեշտ և բավարար պայման, որի դեպքում երկրորդ կարգի կորը էլիպս է: Էլիպսի մակերեսն արտահայտել ինվարիանտների միջոցով:

1. Եթե $\varphi_{\vec{a}}$-ն $\vec{a}$ ազատ վեկտորով որոշվող զուգահեռ տեղափոխությունն է, ապա $\varphi_{\vec{a}+\vec{b}} = \varphi_{\vec{a}} \circ \varphi_{\vec{b}}$, որտեղ $\circ$-ը նշանակում է ձևափոխությունների համադրույթը:

2. Ցուցում: Համարելով A կետն անշարժ, դիտարկել B կետի շարժումը նրա նկատմամբ, $\vec{b}-\vec{a}$ արագությամբ:

3. $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{DA} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$:

4. $\overrightarrow{BC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AL} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{CD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AL} - \frac{4}{3}\overrightarrow{AK}$:

7. $\overrightarrow{AB} = \frac{\lambda}{1+\lambda}\vec{a} - \frac{1}{1+\lambda}\vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{1+\lambda}\vec{a} + \frac{1}{1+\lambda}\vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{1+\lambda}\vec{a} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\vec{b}$, $\overrightarrow{DA} = -\frac{\lambda}{1+\lambda}\vec{a} - \frac{\lambda}{1+\lambda}\vec{b}$:

8. $\pm\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$:

11. ա) $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\vec{d} + \frac{1}{2}\vec{b}$, բ) $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\vec{m} + \frac{1}{2}\vec{n}$:

14. Ներկայացնել $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ հավասարությունը $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ տեսքով և օգտվել №5 խնդրից:

17. Ներկայացնել $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$ հավասարությունը $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = \vec{0}$ տեսքով և օգտվել №5 խնդրից:

19. Դիցուք A, B, C, D կետերը քառանիստի գագաթներն են, իսկ M-ը այն կետն է, որ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$ (տես №17 խնդիրը): Ներկայացնել $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$ հավասարությունը $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$ տեսքով և օգտվել №16 խնդրից:

20. Օգտվելով №14 և №17 խնդիրներից, կիրառել ինդուկցիա ըստ n-ի:

23. Բազմանկյունը պտտել իր կենտրոնի շուրջը $\alpha = 2\pi/n$ անկյունով և օգտվել №22 խնդրից:

24. Օգտվել նախորդ խնդրից:

25. Զրոյական վեկտոր:

32. Օրինակ $\vec{a} = \vec{0}$ և $\vec{b} \neq \vec{0}$ վեկտորների համակարգը գծորեն կախյալ է, բայց $\vec{b} \neq k\vec{a}$, ոչ մի k-ի համար:

42. $\overrightarrow{EF} = \{-1/2;\ 1/2;\ 1/2\}$:

43. $\overrightarrow{EM} = \{-1/6;\ 1/3;\ 1/3\}$:

44. $\overrightarrow{EM} = \{1/12;\ 1/3;\ 1/3\}$:

45. $\overrightarrow{AB} = \{1;\ 0\}$, $\overrightarrow{BC} = \{-1;\ 1\}$, $\overrightarrow{CD} = \{-2;\ 1\}$, $\overrightarrow{DE} = \{-1;\ 0\}$, $\overrightarrow{EF} = \{1;\ -1\}$, $\overrightarrow{FA} = \{2; -1\}$:

46. $\overrightarrow{AB} = \{0;\ 1\}$, $\overrightarrow{BC} = \{\lambda;\ 0\}$, $\overrightarrow{CD} = \{1-\lambda; -1\}$, $\overrightarrow{DA} = \{-1;\ 0\}$, $\overrightarrow{AC} = \{\lambda;\ 1\}$, $\overrightarrow{BD} = \{1; -1\}$:

47. $\overrightarrow{A_1B_1} = \{1;\ 0;\ 0\}$, $\overrightarrow{A_1D_1} = \{0;\ 1;\ 0\}$, $\overrightarrow{A_1A} = \{0;\ 0; -1\}$, $\overrightarrow{A_1C} = \{1;\ 1; -1\}$, $\overrightarrow{A_1B} = \{1;\ 0; -1\}$, $\overrightarrow{A_1D} = \{0;\ 1; -1\}$, $\overrightarrow{A_1C_1} = \{1;\ 1;\ 0\}$:

48. $\alpha = 2;\ \beta = 3;\ \gamma = 5$:

49. ա) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ վեկտորները գծորեն անկախ են: բ) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ վեկտորները գծորեն կախյալ են, $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$: գ) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ վեկտորները գծորեն կախյալ են, սակայն $\vec{c}$-ն հնարավոր չէ ներկայացնել $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների գծային զուգակցությամբ:

52. $\{-96; -30;\ 0\}$:

53. $\{-4;\ 10;\ 3\}$:

54. ա) 20; բ) $-\sqrt{2}/2$; գ) 0; դ) 0; ե) 18; զ) -3:

55. $\pi/3$:

56. ա) $-a^2$; բ) $-2a^2$; գ) $-a^2$; դ) 0; ե) a^2; զ) $-a^2$:

57. ա) $3\pi/4$; բ) $\pi/2$; գ) $2\pi/3$; դ) $\pi/2$; ե) $\pi/3$; զ) $\pi/4$:

58. ա) -9; բ) -13; գ) -9; դ) -3; ե) 9; զ) 9:

59. $-3/2$:

60. -19:

61. 0:

63. $|\overline{CD}|=\sqrt{\frac{\lambda}{1+\lambda}a^2+\frac{1}{1+\lambda}b^2-\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}c^2}$:

64. ա) $2nR^2$, բ) n^2R^2:

62. $\vec{x}=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{(\vec{a},\vec{a})}\vec{a}$, $\vec{y}=\vec{b}-\frac{(\vec{a},\vec{b})}{(\vec{a},\vec{a})}\vec{a}$:

68. Ապացույցը կատարենք երեք փուլով:

ա) Ցույց տանք, որ եթե $\vec{a}=\vec{0}$ կամ $\vec{b}=\vec{0}$, ապա $\vec{a}*\vec{b}=0$: Իրոք, եթե $\vec{a}=\vec{0}$, իսկ $\vec{b}$-ն կամայական վեկտոր է, ապա օգտվելով հատկություն 2.-ից, կստանանք՝ $\vec{0}*\vec{b}=(\vec{0}+\vec{0})*\vec{b}=(\vec{0}*\vec{b})+(\vec{0}*\vec{b})=2(\vec{0}*\vec{b})$, որտեղից $\vec{0}*\vec{b}=0$: Իսկ, եթե $\vec{b}=\vec{0}$, $\vec{a}$-ն կամայական է, ապա ըստ հատկություն 1.-ի և նախորդ կետի՝ $\vec{a}*\vec{0}=\vec{0}*\vec{a}=0$:

բ) Ենթադրենք $\vec{a}\perp\vec{b}$, ցույց տանք, որ $\vec{a}*\vec{b}=0$:

Դիցուք $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$: Նշանակենք φ-ով (AOB) հարթության համաչափության ձևափոխությունը OB ուղղի նկատմամբ, երբ դիտարկվում է այդ հարթությանը կից վեկտորական բազմաձևությունը: Այդ նույն φ-ով նշանակենք նաև տարածության համաչափության ձևափոխությունը OB ուղղով անցնող և OA-ին ուղղահայաց հարթության նկատմամբ, երբ դիտարկվում է տարածությանը կից վեկտորական բազմաձևությունը: Երկու դեպքում էլ $\varphi(\vec{a})=-\vec{a}$, $\varphi(\vec{b})=\vec{b}$ և հետևաբար, հաջորդաբար օգտվելով հատկություն 5.-ից այնուհետև հատկություն 3.-ից, կստանանք՝

$$\vec{a}*\vec{b}=\varphi(\vec{a})*\varphi(\vec{b})=(-\vec{a})*\vec{b}=((-1)\vec{a})*\vec{b}=-(\vec{a}*\vec{b}),$$

որտեղից էլ $\vec{a}*\vec{b}=0$:

գ) Այժմ ենթադրենք $\vec{a}\neq\vec{0}$ և $\vec{b}\neq\vec{0}$ երկու կամայական ոչ փոխուղղահայաց վեկտորներ են: Ներկայացնենք $\vec{a}$ վեկտորը $\vec{a}=\vec{a'}+\vec{a''}$

տեսքով, որտեղ $\vec{a'} \parallel \vec{b}$, $\vec{a''} \perp \vec{b}$: Քանի, որ $\vec{a'} \parallel \vec{b}$, ապա $\vec{a'}$ վեկտորը կարող ենք ներկայացնել $\vec{a'} = k \cdot \vec{b^0}$ տեսքով, որտեղ $k = |\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$, իսկ $\vec{b^0}$-ն $\vec{b}$ վեկտորի օրթն է՝ $\vec{b^0} = \frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}$, $|\vec{b^0}| = 1$: Հետևաբար, հաջորդաբար օգտվելով 2.,1.,3.,4. հատկություններից, կարող ենք գրել

$$\vec{a} * \vec{b} = (\vec{a'} + \vec{a''}) * \vec{b} = (\vec{a'} * \vec{b}) + (\vec{a''} * \vec{b}) = \vec{a'} * \vec{b} =$$

$$= (k \cdot \vec{b^0}) * (|\vec{b}| \cdot \vec{b^0}) = k \cdot |\vec{b}| \cdot (\vec{b^0} * \vec{b^0}) =$$

$$= (|\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})) \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{b^0}|^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}),$$

թեորեմն ապացուցված է:

Այն դեպքը, երբ դիտարկվում է ուղղին կից վեկտորական բազմաձևությունը, թողեցինք որպես խնդիր ինքնուրույն ապացուցելու համար:

69. $\vec{x} = \frac{(\vec{b},\vec{b})}{(\vec{a},\vec{a})(\vec{b},\vec{b}) - (\vec{a},\vec{b})^2}\vec{a} - \frac{(\vec{a},\vec{b})}{(\vec{a},\vec{a})(\vec{b},\vec{b}) - (\vec{a},\vec{b})^2}\vec{b}$:

70. $\vec{x} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{a} & (\vec{a},\vec{b}) & (\vec{a},\vec{c}) \\ \vec{b} & (\vec{b},\vec{b}) & (\vec{b},\vec{c}) \\ \vec{c} & (\vec{c},\vec{b}) & (\vec{c},\vec{c}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\vec{a},\vec{a}) & (\vec{a},\vec{b}) & (\vec{a},\vec{c}) \\ (\vec{b},\vec{a}) & (\vec{b},\vec{b}) & (\vec{b},\vec{c}) \\ (\vec{c},\vec{a}) & (\vec{c},\vec{b}) & (\vec{c},\vec{c}) \end{vmatrix}}$:

71. $\frac{(\vec{a},\vec{b})}{(\vec{a},\vec{a})}\vec{a}$:

72. $\vec{a} - \frac{(\vec{a},\vec{n})}{(\vec{n},\vec{n})}\vec{n}$:

73. $3\vec{a}/2$:

74. $OD = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha + 2ac\cos\beta + 2ab\cos\gamma}$:

$$\cos\angle DOA = (a + b\cos\gamma + c\cos\beta)\Big/\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,,$$
$$\cos\angle DOB = (a\cos\gamma + b + c\cos\alpha)\Big/\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,,$$
$$\cos\angle DOC = (a\cos\beta + b\cos\alpha + c)\Big/\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,:$$

76. $\arccos(4/5)$, $\pi - \arccos(4/5)$:

77. $(\sqrt{5}-2)/4$:

78. ա) 716; բ) -721; գ) -353:

79. ա) բութ անկյուն; բ) սուր անկյուն; գ) ուղիղ անկյուն:

80. $\{1/9;\ 8/9;\ 4/9\}$:

81. $\{4/9;\ -1/9;\ 8/9\}$:

82. x-ը, y-ը, z-ը միաժամանակ զրո չեն և բավարարում են $8x+y+4z=0$ պայմանին:

83. $\{\sqrt{2};\ 0;\ 4\}$:

84. $\{-6;\ 6;\ -3\}$:

85. $\{6;\ 6;\ 0\}$:

86. $\{3;\ -1;\ 1\}$:

87. $\{-5/\sqrt{2};\ 11/\sqrt{2};\ -4/\sqrt{2}\}$:

88. $A = \arccos(2\sqrt{2}/3)$, $B = \arccos(5/3\sqrt{3})$, $C = \arccos(-2/\sqrt{6})$:

89. $AC_1 = 15$, $\angle BAC_1 = \arccos 25/27$:

90. $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \pi/2$:

95. Հարթության կողմնորոշումը նրա բոլոր բազիսների համարժեքության դաս է (տես №95 խնդիրը), իսկ երկրաչափական իմաստը՝ հարթության վրա պտույտի ուղղության ընտրություն (տես №96 խնդիրը): Այսպիսով հնարավոր է հարթության ճիշտ երկու կողմնորոշում:

97. Տարածության կողմնորոշումը նրա բոլոր բազիսների համարժեքության դաս է (տես № 98 խնդիրը), իսկ երկրաչափական իմաստը՝ տարածության մեջ նրա աջ կամ ձախ բազիսի ընտրություն (տես №99 խնդիրը): Այսպիսով հնարավոր է տարածության ճիշտ երկու կողմնորոշում:

102. $\vec{a}=\vec{b}=\vec{c}=\vec{0}$ կամ $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$, $\vec{a}\perp\vec{b}$, $\vec{a}\perp\vec{c}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$:

107. $\vec{d}=|\vec{a}|[\vec{b},\vec{c}]+|\vec{b}|[\vec{c},\vec{a}]+|\vec{c}|[\vec{a},\vec{b}]$, երբ $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})>0$;

$\vec{d}=-|\vec{a}|[\vec{b},\vec{c}]-|\vec{b}|[\vec{c},\vec{a}]-|\vec{c}|[\vec{a},\vec{b}]$, երբ $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})<0$:

115. Հավասարությունը ճիշտ է այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունի հետևյալ պայմաններից առնվազն մեկը՝ 1) $\vec{b}\perp\vec{a}$ և $\vec{b}\perp\vec{c}$; 2) $\vec{a}\parallel\vec{c}$:

116. $\vec{x}=\dfrac{\alpha}{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}[\vec{b},\vec{c}]+\dfrac{\beta}{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}[\vec{c},\vec{a}]+\dfrac{\gamma}{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}[\vec{a},\vec{b}]$: Ցուցում՝ $\vec{x}$ վեկտորը վերլուծել ըստ $[\vec{b},\vec{c}],[\vec{c},\vec{a}],[\vec{a},\vec{b}]$ բազիսի:

117. $\overrightarrow{OH}=\dfrac{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}{([\vec{b},\vec{c}]+[\vec{c},\vec{a}]+[\vec{a},\vec{b}])^2}([\vec{b},\vec{c}]+[\vec{c},\vec{a}]+[\vec{a},\vec{b}])$: Ցուցում: Ընտրել օրթոնորմավորված բազիս:

120. $abc\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma}$:

121. ա) գծորեն կախյալ են; բ) գծորեն անկախ են:

122. ա) համահարթ չեն; բ) համահարթ են:

123. $\vec{c}=\{1/3;\ 2/3;-2/3\}$:

124. $\vec{c}=\left\{1/2;\ (-1+\sqrt{5})/4;\ (-1-\sqrt{5})/4\right\}$:

125. $\vec{c}=\left\{6/5\sqrt{5};\ -1/\sqrt{5};\ -8/5\sqrt{5}\right\}$:

126. $\vec{d}=\left\{0;\ -1/\sqrt{2};\ 1/\sqrt{2}\right\}$:

127. $\vec{d}=\left\{-3/\sqrt{38};\ 5/\sqrt{38};-2/\sqrt{38}\right\}$:

128. $\vec{d}=\left\{-1/3\sqrt{2};\ 1/3\sqrt{2};4/3\sqrt{2}\right\}$:

129. $33/2$:

130. $7/2$:

131. 36:

132. 6:

134. $2\sqrt{2}$:

135. $6\sqrt{5}/5$; 6; 3:

137. $\sqrt{2}/2$:

138. $4\sqrt{2}/3$:

138. 4:

140. $3\sqrt{2}$, $6\sqrt{5}/5$, $6\sqrt{5}/5$:

141. $2\sqrt{2}$:

142. ա) $A=(0;\ 0)$, $B=(1;\ 0)$, $C=(3/2;\ 1/2)$, $D=(1;\ 1)$, $E=(0;\ 1)$, $F=(-1/2;\ 1/2)$, $O=(1/2;\ 1/2)$; բ) $A=(1;\ 0)$, $B=(0;\ 1)$, $C=(-1;\ 1)$, $D=(-1;\ 0)$, $E=(0;\ -1)$, $F=(1;\ -1)$, $O=(0;\ 0)$:

143. ա) $(y;\ -x)$; բ) $(-x;\ -y)$; գ) $(-y;\ x)$:

145. $x=-y'+1$, $y=-x'+1$:

146. $x=\frac{1}{2}x'-\frac{1}{2}y'+\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}x'+\frac{1}{2}y'+\frac{1}{2}$:

147. $x=6x'+4y'-4$, $y=-2x'+6y'+2$:

148. $O'=(3;\ -2)$, $\vec{e_1'}=\{2;\ -1\}$, $\vec{e_2'}=\{-5;\ 2\}$:

149. ա) $x=-2x'+5y'$, $y=3x'-y'$; բ) $x=-2x'+5y'+3$, $y=3x'-y'+4$:

150. $x=\frac{2}{3}x'-\frac{1}{3}y'+\frac{1}{3}$, $y=-\frac{1}{3}x'+\frac{2}{3}y'+\frac{1}{3}$:

151. $A=(0;\ 0;\ 0)$, $B=(1;\ 0;\ 0)$, $C=(1;\ 1;\ 0)$, $D=(0;\ 1;\ 0)$, $A'=(0;\ 0;\ 1)$, $B'=(1;\ 0;\ 1)$, $C'=(1;\ 1;\ 1)$, $D'=(0;\ 1;\ 1)$, $O=(1/2;\ 1/2;\ 1/2)$:

152. $(1/3;\ 1/3;\ 0)$՝ ADB-ում, $(0;\ 1/3;\ 1/3)$՝ BDC-ում, $(1/3;\ 0;\ 1/3)$՝ CDA-ում, $(1/3;\ 1/3;\ 1/3)$՝ ABC-ում:

153. $x=2x'+z'+2$, $y=4x'+4y'+z'+1$, $z=x'+4y'+3$:
Ունեն նույն կողմնորոշումը:

154. ա) $(0;\ 0;\ 1)$; բ) այդպիսի կետ չկա;

գ) $\begin{cases} x-y+2z-3=0 \\ 2x-2y+4z+1=0 \end{cases}$ ուղղի բոլոր կետերը:

155. $x'=\dfrac{A_1x+B_1y+C_1}{A_1x_0+B_1y_0+C_1},\ y'=\dfrac{A_2x+B_2y+C_2}{A_2x_0+B_2y_0+C_2}$:

156. $x'=\dfrac{-x+y-2}{2},\ y'=\dfrac{2x+y-4}{9}$:

157. $14x'+4y'-3=0$:

158. $x'=\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y-\dfrac{2}{5},\ y'=-\dfrac{4}{5}x+\dfrac{3}{5}y+\dfrac{11}{5}$

161. $x=-\dfrac{1}{2}x'-\dfrac{\sqrt{3}}{2}y'-4,\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x'-\dfrac{1}{2}y'+2$:

162. $x=-\dfrac{4}{5}x'-\dfrac{3}{5}y'-3\ ,\ y=-\dfrac{3}{5}x'+\dfrac{4}{5}y'-2$:

163. $(2;\ 3)$:

164. $x=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi,\ y=x'\sin\varphi+y'\cos\varphi,\ z=z'$:

165. $A=(0;\ -),\ B=(1;\ 0),\ C=(\sqrt{3};\ \pi/6),\ D=(2;\ \pi/3),$
$E=(\sqrt{3};\ \pi/2),\ F=(1;\ 2\pi/3)$:

166. $A=(1;\ \sqrt{3}),\ B=(-1;\ 1),\ C=(0;\ 5),\ D=\left(3\sqrt{3}/2;\ -3/2\right)$:

167. ա) $AB=\sqrt{3}$, բ) $CD=10$, գ) $EF=5$:

168. $\left(1;\ -2\pi/3\right)$:

169. $\left(5;\ 5\pi/3\right),\ \left(5;\ 4\pi/3\right)$:

170. $A=\left(2;\ 17\pi/12\right),\ B=\left(3;\ 7\pi/12\right),\ C=\left(1;\ 3\pi/4\right),$
$D=\left(5;\ \pi/4\right),\ E=\left(5;\ 5\pi/4\right)$:

171. 1:

172. $A=\left(\sqrt{2};\ 3\pi/4\right),\ B=\left(2;\ \pi/2\right),\ C=(5;\ 0),$
$D=\left(10;\ -\arccos\left(-4/5\right)\right)$:

173. $(2+5\sqrt{3};\ 8)$:

174. $A=\left(6\sqrt{2};\,5\pi/4\right)$ և $B=\left(4;\,7\pi/6\right)$:

175. $A=\left(2;\,\pi/6\right)$ և $B=\left(\sqrt{2};\,\pi/12\right)$:

176. ա) $M_1=(-x;\,-y;\,-z)$;

բ) OX -ի նկատմամբ համաչափ կետը՝ $M_2=(x;\,-y;\,-z)$,

OY -ի նկատմամբ համաչափ կետը՝ $M_3=(-x;\,y;\,-z)$,

OZ -ի նկատմամբ համաչափ կետը՝ $M_4=(-x;\,-y;\,z)$;

գ) OXY -ի նկատմամբ համաչափ կետը՝ $M_5=(x;\,y;\,-z)$,

OXZ -ի նկատմամբ համաչափ կետը՝ $M_6=(x;\,-y;\,z)$,

OYZ -ի նկատմամբ համաչափ կետը՝ $M_7=(-x;\,y;\,z)$:

177. $A=(0;\,0)$, $B=(0;\,1)$, $C=(1/3;\,1)$, $D=(1;\,0)$,
$O=(1/4;\,3/4)$, $M=(0;\,3/2)$

178. $C=(5;\,3)$, $D=(2;\,5)$ $M=(2;\,3)$:

179. $D=(1;-1)$:

180. $A=(-4;\,0)$, $D=(4;\,0)$, $C=(1;\,3)$, $B=(-1;\,3)$, $M=\left(0;\,12/5\right)$,
$S=(0;\,4)$:

181. $1/\lambda$:

182. $\dfrac{(1+\mu)(\nu-\lambda)}{(1+\lambda)(\mu-\nu)}$: Ցուցում: A կետն ընդունել որպես կոորդինատների համակարգի սկզբնակետ, իսկ B -ն՝ որպես միավոր կետ:

183. $A=(160;\,-131)$, $B=(-225;\,184)$:

184. $M=(0;\,5)$, $r=3\sqrt{5}$:

185. $M=(-2;\,1)$:

186. $D=(11;\,7)$, $M\left(5;\,23/5\right)$, $S=(5;\,13)$:

187. $C=(4;\,-5;\,-2)$:

188. $-1/2$:

189. $M=(13;\,2;\,7)$:

190. $M=(12;\,-11)$:

191. Շրջանագիծ, եթե $C > AB\sqrt{2}/2$: AB -ի միջնակետն է, եթե $C = AB\sqrt{2}/2$: Գոյություն չունի, եթե $C < AB\sqrt{2}/2$:

192. Ուղիղ:

193. Շրջանագիծ՝ $x^2 + y^2 = 4$:

194. Տրված ուղիղների հատման կետով անցնող երկու ուղիղների հատվածներ:

195. ա) շրջանագիծ, բ) ճառագայթ, գ) հարթության I քառորդը, դ) համակենտրոն շրջանագծերով սահմանափակված օղակ:

200. $x - y = 0$ (OB), $x + y - 1 = 0$ (AC):

201. ա) $3x - y + 4 = 0$, բ) $5x + y - 13 = 0$, գ) $x - 3 = 0$, դ) $x + 2y + 7 = 0$, ե) $3x - 2y = 0$, զ) $5x - 3y - 15 = 0$:

202. ա) $\begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = -5 + 6t \end{cases}$, $\dfrac{x-2}{-5} = \dfrac{y+5}{6}$, $6x + 5y + 13 = 0$;

բ) $\begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = -5 + 6t \end{cases}$, $0 \le t \le 1$:

203. $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$, $\dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y+2}{3}$, $3x + 2y - 5 = 0$:

204. $k = -1/2$; $a = -1$, $b = -1/2$:

205. $5x + 7y - 11 = 0$:

206. $7x + y + 18 = 0$:

207. $x - 2y - 4 = 0$:

208. $2x + 5y \pm 10 = 0$:

209. $3x + 2y - 6 = 0$, $3x + 8y + 12 = 0$:

210. Անկյունագծերի միջնակետերը միացնող հատվածը: Ցուցում: Քառանկյան անկյունագծերը ընդունել որպես կոորդինատների առանցքներ:

211. $x + y - 12 = 0$:

212. $5x - 3y - 1 = 0$:

213. $16x + 13y - 68 = 0$, $17x + 11y - 106 = 0$:

215. ա) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$; բ) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & a_1 \\ y_2 - y_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$;

գ) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & a_1 \\ y_2 - y_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$:

217. ա), բ), գ) ուղիղները զուգահեռ են; դ), ե), զ) ուղիղները հատվում են; է), ը), թ) ուղիղները համընկնում են:

218. $x - 3y - 7 = 0$, $2x + 5y - 3 = 0$:

219. ա) $5x + 3y - 1 = 0$, բ) $15x + 9y - 25 = 0$:

220. $x - 2 = 0$, $x - 3y + 13 = 0$:

221. $3x - 5y + 9 = 0$, $x - y + 3 = 0$, $x - 3y + 11 = 0$:

222. $x + y - 7 = 0$:

223. $5x - 7y - 3 = 0$, $x + y + 3 = 0$, $7x - 5y - 9 = 0$:

224. $x - y - 7 = 0$, $x - 2y = 0$:

225. $x + 2y - 3 = 0$, $2x - y - 6 = 0$, $x + 2y - 23 = 0$, $2x - y + 14 = 0$: Ցուցում: Գտնել P և Q կետերի համաչափ կետերը M կետի նկատմամբ:

226. $5x - 12y + 36 = 0$ (BC), $9x + 12y + 20 = 0$ (CD):

227. $5x - 12y - 6 = 0$ (AD), $5x - 12y + 36 = 0$ (BC), $9x + 12y + 20 = 0$ (CD):

229. $\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \neq 0$, $\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} \neq 0$, $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$, $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0$:

230. $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$, իսկ $\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ թվերից գոնե մեկը տարբեր է զրոից:

232. ա) Ուղիղները կազմում են եռանկյուն, բ) ուղիղները ունեն մեկ ընդհանուր կետ, գ) առաջին և երրորդ ուղիղները զուգահեռ են, երկրորդը հատում է նրանց, դ) ուղիղները զույգ առ զույգ զուգահեռ են, ե) առաջին և երկրորդ ուղիղները համընկնում են, երրորդը հատում է նրանց, զ) առաջին և երկրորդ ուղիղները համընկնում են, երրորդը

զուգահեռ է նրանց, է) բոլոր ուղիղները համընկնում են:

234. $Q \in \angle BMC$, $R \in \angle CMD$, $S \in \angle DMA$, $T \in \angle BMA$:

235. A, B և C կետերն ընկած են շերտի ներսում, D և F կետերը պատկանում են արտաքին տիրույթներից մեկին, E կետը՝ մյուսին:

236. $Ax_0 + By_0 + C$ և $Ax_0 + By_0 + D$ թվերն ունեն տարբեր նշաններ:

237. M կետն ընկած է BC կողմի շարունակության վրա B գագաթից հետո: N կետն ընկած է CA և CB կողմերի շարունակությունների և AB կողմով սահմանափակված տիրույթի ներսում: P կետն ընկած է AB և CB կողմերի շարունակություններով սահմանափակված ABC անկյան հակադիր անկյան տիրույթի ներսում:

245. $x + y + 2 = 0$:

246. 135^0:

247. $arctg\, 1/2$:

249. $arctg\, 1/2$, $arctg 3$, $arctg 7$:

250. $5x - 12y + 62 = 0$, $x - 2 = 0$:

251. Հիմքը՝ $2x - 3y + 7 = 0$,

սրունքները՝ $14x + 5y + 23 = 0$, $10x + 11y - 95 = 0$:

252. $8x + 9y - 33 = 0$:

253. $x - 2 = 0$:

254. $x - 5y + 23 = 0$ կամ $5x + y + 11 = 0$:

255. $C = \left(6;\ 31/4\right)$:

256. $3x + y + 16 = 0$:

257. $C = (-1;\ -4)$:

258. $x + 3 = 0\,(CA)$, $2x - 11y + 28 = 0\,(CB)$ կամ

$3x - 4y + 17 = 0\,(CA)$, $2x + y + 4 = 0\,(CB)$:

259. $M_1 = (4;\ 0)$, $M_2 = (-1;\ 5)$:

260. $x - 3y + 10 = 0$:

261. ա) $3x + 2y - 24 = 0$, բ) $3x - 4y + 12 = 0$:

263. $C = (2;\ 4)$:

264. $39x - 9y - 4 = 0$:

265. $x - y + 2 = 0$:

266. $C=(35/9;\ 8/9)$:

267. $M=(-1/2;\ 1/2)$:

268. $3x-2y+8=0$, $2x+3y-56=0$, $3x-2y-10=0$:

269. $(2;\ -7)$:

270. $M'=(2;\ 3)$:

271. $3x-2y+11=0$, $2x+y-9=0$, $x+4y-1=0$:

272. $21x-13y-185=0$, $23x-9y-185=0$:

273. $4x-y-5=0$, $4x+y-1=0$, $8x+53y-461=0$:

274. Հիմքերն են $x+7y-8=0$, $x+7y-58=0$, իսկ սրունքները՝ $3x-4y-24=0$, $4x+3y+18=0$:

275. $x+3y+12=0$, $3x-y-4=0$, $3x-y+16=0$:

276. $(2;\ -4)$:

277. $x+3y-13=0$:

279. $-5/13$:

280. $5x+12y+64=0$, $5x+12y-66=0$:

281. 11:

282. $x+7y-10=0$, $7x-y+30=0$:

283. $5x-12y+46=0$, $5x-12y-32=0$:

284. $y+1=0$, $3x+4y-17=0$:

285. $4x+3y+3=0$, $y+1=0$:

286. $3x+4y-64=0$, $3x+4y-14=0$, $4x-3y-2=0$, $4x-3y+48=0$:

287. Ունի երկու լուծում՝ $2x-11y-23=0$ և $2x-11y-73=0$:

288. $3x+y-10=0$:

290. $3x+y-14=0$, $x-3y+32=0$, $3x+y+11=0$, $x-3y-18=0$:

291. $(3;\ 2)$:

292. Երե $\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & A_3 \end{vmatrix}$ և $\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & A_1 \end{vmatrix}$ թվերն ունեն նույն նշանը, ապա որոնելի

կիսորդի հավասարումն է՝ $\dfrac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\dfrac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$, իսկ

եթե $\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & A_3 \end{vmatrix}$ և $\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & A_1 \end{vmatrix}$ թվերն ունեն տարբեր նշաններ, ապա որո-

նելի կիսորդի հավասարումն է՝ $\dfrac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\dfrac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$:

293. $(-1;\,4)$:

294. $(0;\,1)$:

295. $C_1=(-2;\,4),\ r_1=\sqrt{2}\,;\ C_2=(-3;\,1),\ r_2=2\sqrt{2}$:

296. $C=\left(-1/2;\,-3/2\right),\ r=\dfrac{1}{2}$:

297. $C=(-2;\,-6),\ r=2\sqrt{2}$:

298. $x-y=0,\quad 7x-56y+25=0,\quad 77x+21y-50=0$:

299. $11x+3y+10=0$:

300. $4x-4y+5=0$:

302. Ունի երկու լուծում՝ $x+2y-3=0\ (AB),\ x+2y-23=0\ (CD)$,
$2x-y-6=0\ (BC),\quad 2x-y+14=0\ (AD)$
և $x+2y-3=0\ (AB),\ x+2y-23=0\ (CD)$,
$2x+y-18=0\ (BC),\ \ 2x+y+2=0\ (AD)$:

303. Ունի երկու լուծում՝ $3x+5y-57=0\ (A_1B_1)$,
$5x-3y+37=0\ (B_1C_1),\ 3x+5y-9=0\ \ (C_1D_1)$,
$5x-3y-11=0\ (D_1A_1)$
և $9x-y-27=0\ (A_2B_2),\ x+9y-31=0\ (B_2C_2)$,
$9x-y+21=0\ (C_2D_2),\ \ x+9y-79=0\ \ (D_2A_2)$:

304. Ունի երկու լուծում՝ $7x+y-15=0\ (A_1B_1),\ x-7y+7=0\ (B_1C_1)$,
$7x+y-26=0\ \ (C_1D_1),\ x-7y-4=0\ (D_1A_1)$
և $x-3y+1=0\ \ (A_2B_2),\ \ 3x+y-1=0\ \ (B_2C_2)$,

$x-3y+12=0\ (C_2D_2),\quad 3x+y+10=0\ (D_2A_2)$:

305. $x^2+\frac{1}{3}y^2=a^2$:

306. $x^2-4y^2+15=0$:

307. Շրջանագիծ է՝ $(x-5)^2+(y-3)^2=25$:

308. $\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$:

309. $xy-x+1=0$:

310. Ունի երկու լուծում՝ $xy=1$ և $xy-2y+1=0$:

311. $\frac{x^2}{12}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$:

312. $2x^2-8x+3y-10=0$:

313. $x^2-y^2-4x+10y-12=0$:

314. $5x^2+6xy+5y^2-6x-10y-3=0$: Ցուցում: Էլիպսի առանցքները ընդունել որպես նոր ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգի առանցքներ:

315. $x^2+2xy+y^2+5x-y=0$:

316. $4xy+3y^2+4y-11=0$:

317. ա) $F_1=(0;-4),\quad y=-5\ (d_1);\ F_2=(0;4),\quad y=5\ (d_2)$;

բ) $F_1=(0;-6),\ \ y=-2/3\ \ (d_1);\ F_2=(0;6),\ \ y=2/3\ \ (d_2)$;

գ) $F=(0;1/3),\quad y=-1/3\ \ (d)$;

դ) $F_1=(-\sqrt{2k};\ -\sqrt{2k}),\quad x+y-\sqrt{2k}=0\ (d_1)$;

$F_2=(\sqrt{2k};\ \sqrt{2k}),\qquad x+y+\sqrt{2k}=0\ (d_2)$:

318. $F=(-2;1/6),\quad y=17/6$:

319. $\frac{x^2}{196}+\frac{y^2}{147}=1,\ \ \frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{48}=1$:

320. $\varepsilon=4/5$:

321. $\varepsilon=(\sqrt{5}-1)/2$:

322. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$։ Երկրորդ կիզակետն է $(-2;\ 0)$ կետը, երկրորդ դիրեկտրիսը՝ $x=-8$ ուղիղը։

323. $3x^2-y^2-36x+96=0$։ Երկրորդ կիզակետն է $(10;\ 0)$ կետը, երկրորդ դիրեկտրիսը՝ $x=7$ ուղիղը։

324. $y^2+8x-32=0$։

325. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$։

326. $\frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{2a^2}=1$։

327. $y=-\frac{3}{4}x^2+\frac{2}{3}$։

328. Ունի երկու լուծում՝ $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$, $\frac{y^2}{20}-\frac{x^2}{80}=1$։

329. Ունի երկու լուծում՝ $\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$, $\frac{(x-1)^2}{13}-\frac{y^2}{156}=1$։

330. Ունի երկու լուծում՝ $(x+1)^2-(y-1)^2=2$, $(y+1)^2-(x-1)^2=2$։

331. Ունի երկու լուծում՝ $(x-1)(y+1)=\frac{1}{2}$, $(x-1)(y-1)=-\frac{1}{2}$։

332. $3x^2+2xy+3y^2-4x-4y=0$։

333. $8xy-4x-4y+3=0$։

334. $r=\frac{25}{12-13\cos\varphi}$։

335. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$։

336. $y^2=12x$։

337. $r=\frac{4}{1-\cos\varphi}$։

339. Հավասարակողմ հիպերբոլ՝ $x^2-y^2=a^2-b^2$, երբ $a\neq b$։ Ուղիղների

զույգ՝ $y=\pm x$, երբ $a=b$:

340. Էլիպս է, երբ $\lambda \neq 0$: Երկու փոխուղղահայաց հատվածների միավորում, երբ $\lambda = 0$:

341. Ուղղանկյանն արտագծված շրջանագծի և հավասարակողմ հիպերբոլի միավորում, երբ ուղղանկյան կողմերը հավասար չեն միմյանց: Հատվող ուղիղների զույգ, երբ ուղղանկյան կողմերը հավասար են: Ցուցում: Ուղղանկյան ուղղահայաց կողմերն ընդունել որպես կոորդինատային առանցքներ:

342. Հիպերբոլ, երբ հաստատունը դրական թիվ է: Տրված ուղիղների զույգը, երբ հաստատունը հավասար է զրոի:

345. Շրջանագիծ:

346. Պարաբոլ:

348. Էլիպս $\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ և OX առանցքի բոլոր կետերը:: Ցուցում: Օգտվել երկրորդ կարգի կորի կիզակետային հատկությունից:

349. Էլիպս $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$:

350. $x-4y-2=0, x+4y-3=0$:

351. $x+y-1=0$, $3x+3y+13=0$:

352. $7x+1=0$:

353. $x-3=0,\ 7x-2y-13=0$:

357. Ցուցում: Հիպերբոլի ասիմպտոտները ընտրել որպես կոորդինատային առանցքներ:

358. $S=ab$:

359. $3x+4y-24=0,\ 3x-28y-120=0$:

360. $x=1$, $5x-2y+3=0$:

361. $x-3y+9=0, 9x+3y+1=0$:

362. ա) $a^2A^2+b^2B^2=C^2$, բ) $a^2A^2-b^2B^2=C^2$, գ) $pB^2=2AC$, դ) $4ABk=C^2$:

363. $|k|>\dfrac{b}{a}$:

364. ա) $0\neq\dfrac{x_0^{\ 2}}{a^2}-\dfrac{y_0^{\ 2}}{b^2}<1$, բ) եթե տեղի ունի հետևյալ երկու պայմանից

որևէ մեկը 1) $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=0,\ x_0y_0\neq 0$, 2) $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$

գ) եթե տեղի ունի հետևյալ երկու պայմանից որևէ մեկը

1) $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}>1$, 2) $x_0=y_0=0$:

364. 2:

366. $x+y\pm5=0$:

367. $3x\pm4y\pm15=0$:

368. $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$:

369. $y^2=4x$:

370. $\frac{x^2}{4}-y^2=1$:

371. $\frac{x^2}{17}+\frac{y^2}{8}=1$:

372. $x\pm y\pm3=0$:

373. $x\pm2y+4=0$:

374. ա) $x^2+y^2=a^2+b^2$ շրջանագիծ է: բ) երբ $a>b$, $x^2+y^2=a^2-b^2$ շրջանագիծն է, բացառությամբ ասիմպտոտների հետ նրա հատման չորս կետերը, երբ $a=b$ դատարկ բազմություն է, երբ $a<b$,կեղծ շրջանագիծ է: գ) Ուղիղ է՝ պարաբոլի $x=-\frac{p}{2}$ դիրեկտրիսը:

375. $x^2+y^2=a^2+b^2$:

376. Լուծման մեկ այլ եղանակ տես ***Խնդիր 54-ը*** II մասում:

377. $x\pm y\pm3=0$:

378. $2x^2-xy-x+y+5=0$:

379. ա) $\{4;1\},\{1;1\}$; բ) $\{3;2\}$; գ) ասիմպտոտական ուղղություն չունի:

381. ա) $y=c,\ \ c\neq\pm3$; բ) $x=c,\ \ c\neq0$:

382. ա) $3x+4y+14=0,\ x+y-3=0$ բ) $x=3,\ y=-\dfrac{1}{3}x+1$;

384. ա) $k_1k_2=-\dfrac{b^2}{a^2}$; բ) $k_1k_2=\dfrac{b^2}{a^2}$; գ) $k_1+k_2=0$:

385. $32x+25y-89=0$:

386. $x-2y=0$:

387. $x-2y=0,\ 3x-2y=0$:

388. 45^0:

389. $x=2,\ x+4y-14=0$:

390. Ընդհանուր տրամագիծը $3x+y-7=0$ ուղիղն է, որին համալուծ լարերի ուղղություններն են՝ $\{1;\ 1\},\ \{1;-6\}$:

391. $y=3x,\ \ y=2x$:

392. $x+2y+7=0,\ x-2y\pm1$:

393. $4x^2+8xy+13y^2-24x-42y+9=0$: Ցուցում: Գրել էլիպսի հավասարումը կոորդինատային համակարգում, որի սկզբնակետը C-ն է, իսկ բազիսային վեկտորներն են՝ $\overrightarrow{CA}$-ն և $\overrightarrow{CB}$-ն:

394. $x^2-4xy+4y^2-4x-4y=0$:

395. $x^2-2xy+2y^2-2x+1=0$:

399. ա) Կենտրոնը $(-1/7;\ 1/7)$ կետն է, գլխավոր ուղղություններն են $\{8;\ 1\}$ և $\{-1;\ 8\}$,

բ) ունի անթիվ բազմությամբ կենտրոններ, գլխավոր ուղղությունները են $\{5;\ 2\}$ և $\{2;\ -5\}$,

գ) կենտրոնը $(1;-1)$ կետն է, գլխավոր ուղղությունները՝ $\{1;\ 3\}$ և $\{3;\ -1\}$,

դ) կենտրոնը $(4;-3)$ կետն է, բոլոր ուղղությունները գլխավոր են:

ե) կենտրոն չունի, գլխավոր ուղղություններն են $\{3;\ 2\}$ և $\{2;\ -3\}$,

զ) կենտրոնը $(2;\ 1)$ կետն է, գլխավոր ուղղություններն են $\{1;\ 1\}$ և $\{1;\ -1\}$:

403. ա) Էլիպս է, որի մեծ կիսաառանցքը 5 է, փոքր կիսաառանցքը՝ 3, կենտրոնն է $(2;\ -3)$-ը, մեծ կիսաառանցքի ուղղորդ վեկտորն է $\{0;\ 1\}$-ը,

բ) պարաբոլ է, որի կիզակետային պարամետրը $8/3$ է, գագաթը՝ $(-2;\ 3/2)$, կիզակետային առանցքի ուղղորդ վեկտորն է $\{0;\ -1\}$-ը,

գ) էլիպս է, որի մեծ կիսաառանցքը 4 է, փոքր կիսաառանցքը՝ 3, կենտրոնն է $(3;\ -2)$-ը, մեծ կիսաառանցքի ուղղորդ վեկտորն է $\{1;\ 0\}$-ը,

դ) հիպերբոլ է, որի իրական կիսաառանցքը 1 է, կեղծ կիսաառանցքը՝ 2, կենտրոնն է՝ $(2;\ -3)$, իրական առանցքի ուղղորդ վեկտորը՝ $\{1;\ 0\}$,

ե) $3x+2y+10=0$ և $3x-2y+2=0$ հատվող ուղիղների զույգն է:

զ) պարաբոլ է, որի կիզակետային պարամետրը 2 է, գագաթը $(2/3;\ 1)$-ն է, կիզակետային առանցքի ուղղորդ վեկտորն է $\{1;\ 0\}$-ն,

է) հիպերբոլ է, որի իրական կիսաառանցքը 4 է, կեղծ կիսաառանցքը՝ 2, կենտրոնն է $(2;\ 3)$-ը, իրական առանցքի ուղղորդ վեկտորն է $\{0;\ 1\}$-ը,

ը) $x=2$ և $x=-3$ զուգահեռ ուղիղների զույգն է,

թ) հիպերբոլ է, որի իրական կիսաառանցքը a է, կեղծ կիսաառանցքը՝ $2b$, կենտրոնն է $(a;\ b)$-ն, իրական առանցքի ուղղորդ վեկտորն է $\{1;\ 0\}$-ն,

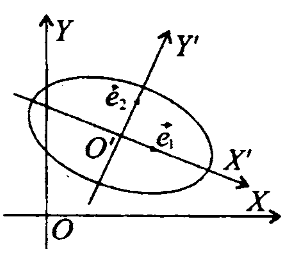
ժ) էլիպս է, որի մեծ կիսաառանցքը $a\sqrt{2}$ է, փոքր կիսաառանցքը՝ $b\sqrt{2}$, կենտրոնն է $(-a;\ -b)$-ն, առանցքները զուգահեռ են կոորդինատային առանցքներին,

ի) պարաբոլ է, որի կիզակետային պարամետրը $a^2/2b$ է, գագաթը $(0;\ b)$-ն է, կիզակետային առանցքի ուղղորդ վեկտորն է $\{0;\ -1\}$-ը:

404.

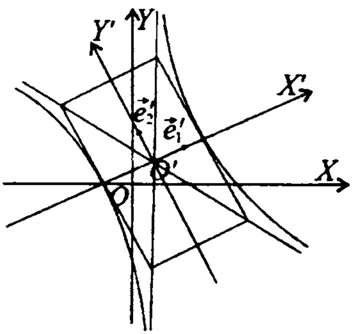
ա) $\dfrac{x'^2}{9}+\dfrac{y'^2}{4}=1$ էլիպսն է,

$O'=(2;\ 3)$, իսկ կանոնական կոորդինատային համակարգի առանցքներիմիավոր վեկտորներ են օրինակ՝



$\vec{e_1'} = \left\{2/\sqrt{5};\ -1/\sqrt{5}\right\}, \vec{e_2'} = \left\{1/\sqrt{5};\ 2/\sqrt{5}\right\}$ վեկտորները;

բ) $\dfrac{x'^2}{4} - \dfrac{y'^2}{9} = 1$ հիպերբոլն է,



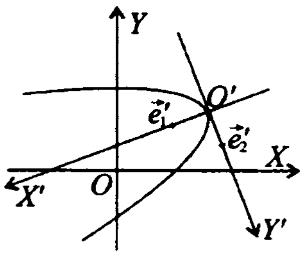
$O' = (1;\ 1)$, իսկ կանոնական կոորդինատային համակարգի առանցքների միավոր վեկտորներ են օրինակ՝

$\vec{e_1'} = \left\{3/\sqrt{13};\ 2/\sqrt{13}\right\}$,

$\vec{e_2'} = \left\{-2/\sqrt{13};\ 3/\sqrt{13}\right\}$

վեկտորները;

գ) $y'^2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}} x'$ պարաբոլն է,



$O' = (3;\ 2)$, իսկ կանոնական կոորդինատային համակարգի առանցքների միավոր վեկտորներ են օրինակ՝

$\vec{e_1'} = \left\{-2/\sqrt{5};\ -1/\sqrt{5}\right\}$,

$\vec{e_2'} = \left\{1/\sqrt{5};\ -2/\sqrt{5}\right\}$ վեկտորները;

դ) $\dfrac{x'^2}{2} + \dfrac{y'^2}{1} = 1$ էլիպսն է, $O' = (-4/5;\ 2/5)$, իսկ կանոնական կոորդինատային համակարգի առանցքների միավոր վեկտորներ են օրինակ՝

$\vec{e_1'} = \left\{1/\sqrt{5};\ 2/\sqrt{5}\right\}, \quad \vec{e_2'} = \left\{-2/\sqrt{5};\ 1/\sqrt{5}\right\}$ վեկտորները;

ե) $\dfrac{x'^2}{1} - \dfrac{y'^2}{9} = 1$ հիպերբոլն է, $O' = (2;\ -1)$, իսկ կանոնական կոորդինատային համակարգի առանցքների միավոր վեկտորներ են օրինակ՝

$\vec{e_1'} = \left\{3/\sqrt{10};\ 1/\sqrt{10}\right\}$, $\vec{e_2'} = \left\{-1/\sqrt{10};\ 3/\sqrt{10}\right\}$ վեկտորները;

գ) $y'^2 = 4\sqrt{2}x'$ պարաբոլն է, $O' = (2;\ 1)$, իսկ կանոնական կոորդինատային համակարգի առանցքների միավոր վեկտորներ են օրինակ՝

$\vec{e_1'} = \left\{1/\sqrt{2};\ 1/\sqrt{2}\right\}$, $\vec{e_2'} = \left\{-1/\sqrt{2};\ 1/\sqrt{2}\right\}$ վեկտորները:

405. ա) $\dfrac{x'^2}{35/6} + \dfrac{y'^2}{35/36} = 1$ էլիպսն է, $O' = (7/6;\ 1/3)$, իսկ կանոնական կոորդինատային համակարգի առանցքների միավոր վեկտորներ են օրինակ՝

$\vec{e_1'} = \left\{2/\sqrt{5};\ -1/\sqrt{5}\right\}$, $\vec{e_2'} = \left\{1/\sqrt{5};\ 2/\sqrt{5}\right\}$ վեկտորները;

բ) $\dfrac{x'^2}{9/8} - \dfrac{y'^2}{9/5} = 1$ հիպերբոլն է, $O' = (0;\ 1)$, իսկ կանոնական կոորդինատային համակարգի առանցքների միավոր վեկտորներ են օրինակ՝

$\vec{e_1'} = \left\{2/\sqrt{13};\ 3/\sqrt{13}\right\}$, $\vec{e_2'} = \left\{-3/\sqrt{13};\ 2/\sqrt{13}\right\}$ վեկտորները;

գ) $y'^2 = 10x'$ պարաբոլն է, $O' = (-1;\ 2)$, իսկ կանոնական կոորդինատային համակարգի առանցքների միավոր վեկտորներ են օրինակ՝

$\vec{e_1'} = \{4/5;\ -3/5\}$, $\vec{e_2'} = \{3/5;\ 4/5\}$ վեկտորները;

դ) $x + y - 2 = 0$ և $3x - 2y + 1 = 0$ հատվող ուղիղների զույգն է,

ե) $2x - 3y - 2 = 0$ և $2x - 3y - 8 = 0$ զուգահեռ ուղիղների զույգն է,

զ) $\dfrac{x'^2}{4} + \dfrac{y'^2}{1} = 1$ էլիպսն է, $O' = (0;\ 1)$, իսկ կանոնական կոորդինատային համակարգի առանցքների միավոր վեկտորներ են օրինակ՝ $\vec{e_1'} = \left\{1/\sqrt{2}; -1/\sqrt{2}\right\}$, $\vec{e_2'} = \left\{1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}\right\}$ վեկտորները;

է) $\dfrac{x'^2}{4} - \dfrac{y'^2}{9} = 1$ հիպերբոլն է, $O' = (1;\ 1)$, իսկ կանոնական կոորդինատային համակարգի առանցքների միավոր վեկտորներ են օրինակ՝

$\vec{e_1'} = \{2/\sqrt{13};\ 3/\sqrt{13}\}$, $\vec{e_2'} = \{-3/\sqrt{13};\ 2/\sqrt{13}\}$ վեկտորները;

ը) $y'^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}x'$ պարաբոլն է, $O' = (2;\ 3)$, իսկ կանոնական կոորդինատային համակարգի առանցքների միավոր վեկտորներ են օրինակ՝

$\vec{e_1'} = \{-1/\sqrt{5};\ -2/\sqrt{5}\}$, $\vec{e_2'} = \{2/\sqrt{5};\ -1/\sqrt{5}\}$ վեկտորները;

թ) $2x+5y+1=0$ և $2x+3y-5=0$ հատվող ուղիղների զույգն է,

ժ) $2x+y+3=0$ և $2x+y+5=0$

զուգահեռ ուղիղների զույգն է:

410. ա) Հատվող ուղիղների զույգ՝ $2x-5y+1=0$ և $2x-3y-5=0$,

բ) զուգահեռ ուղիղների զույգ՝ $2x-y+3=0$ և $2x-y+5=0$,

գ) համընկած ուղիղների զույգ՝ $x-2y+1=0$ և $x-2y+1=0$:

411. ա) $x+y-1=0$ և $x+4y+2=0$,

բ) $2x-3y+5=0$ և $x+4y-2=0$,

գ) $x-y-2=0$ և $3x+2y+1=0$:

412. ա) $2x+3y-2=0$ և $2x+3y-2=0$,

բ) $3x-y+2=0$ և $3x-y+2=0$,

գ) $x-3y+4=0$ և $x-3y+4=0$:

416. $S=0,\ \Delta\neq 0;\ x^2-y^2=|\Delta||\delta|^{-3/2}$:

417. $S=0,\ \Delta=0$:

418. $\delta=\Delta=0,\ \ K<0:\ d^2=-4K/S^2$:

419. $\delta<0,\ \Delta=0:\ \cos\varphi=\pm S/\sqrt{S^2-4\delta}$:

420. $\delta>0,\ \ S\cdot\Delta<0$: Մակերեսը՝ $s=\pi\,|\,\Delta\,|\cdot\delta^{-3/2}$:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1. Александров П. С., Лекции по аналитической геометрии, Москва, 1968г.
2. Постников М. М., Аналитическая геометрия, Москва, 1973г.
3. Моденов П. С., Пархоменко А. С., Сборник задач по аналитической геометрии, Москва, 1976г.
4. Бахвалов С.В., Моденов П.С., Пархоменко А. С., Сборник задач по аналитической геометрии, Москва, 1964г.
5. Клетеник Д. В., Сборник задач по аналитической геометрии, Профессия, 2002г.
6. Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А., Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре, Москва, 1987г.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Նախաբան 3

ԳԼՈՒԽ ԱՌԱՋԻՆ

§1. Վեկտորներ, ազատ վեկտորներ, նրանց գումարումը
և բազմապատկումը թվով 4
§2. Վեկտորների համակարգի գծային կախվածությունն
ու անկախությունը 9
§3. Վեկտորների սկալյար արտադրյալը 16
§4. Վեկտորների վեկտորական և խառն արտադրյալները 23

ԳԼՈՒԽ ԵՐԿՐՈՐԴ

§5. Աֆինական և ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգեր հարթության վրա և տարածության մեջ: Բևեռային կոորդինատային համակարգը հարթության վրա 37
§6. Հատվածի բաժանումը տրված հարաբերությամբ:
Գծի հավասարումը 47
§7. Ուղիղը հարթության վրա 52
§8. Երկու ուղիղների կազմած անկյունները: Մի ուղղից մյուս ուղիղն ընկած անկյունը: Երկու ուղիղների ուղղահայացության պայմանը .. 59
§9. *Ուղղի նորմավորված հավասարումը,*
կետի հեռավորությունն ուղղից 64

ԳԼՈՒԽ ԵՐՐՈՐԴ

§10. Էլիպս, հիպերբոլ, պարաբոլ: Նրանց հավասարումները 70
§11. Երկրորդ կարգի կորի շոշափողները, կենտրոնն ու ասիմպտոտները . 77
§12. Երկրորդ կարգի կորի տեսակի և դիրքի որոշումը 91
Պատասխաններ և ցուցումներ 107
Գրականություն 130

Վ. Ա. ՓԻԼԻՊՈՍՅԱՆ, Հ. Հ. ՕՀՆԻԿՅԱՆ

ՎԵՐԼՈՒԾԱԿԱՆ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴՐԱԳԻՐՔ

ԱՌԱՋԻՆ ՄԱՍ

Ստորագրված է տպագրության 08.02.2012 թ.:
Չափսը՝ $60x84^1/_{16}$: Թուղթը՝ օֆսեթ: Հրատ. 6.4 մամուլ,
տպագր. 8.25 մամուլ= 7.7 պայմ. մամուլի:
Տպաքանակ՝ 150: Պատվեր՝ 20:

ԵՊՀ հրատարակչություն, Երևան, Ալ. Մանուկյան 1:

Երևանի պետական համալսարանի
օպերատիվ պոլիգրաֆիայի ստորաբաժանում
Երևան, Ալ. Մանուկյան 1: