В. Босс

ЛЕКЦИИ по МАТЕМАТИКЕ

Оптимизация

Издание второе, стереотипное

МОСКВА

URSS

ББК 22.18я73

Босс В.

Лекции по математике. Т. 7: **Оптимизация:** Учебное пособие. Изд. 2-е, стереотипное. — М.: КомКнига, 2007. — 216 с.

Книга охватывает классические разделы теории экстремальных задач: условная и безусловная оптимизация, выпуклые задачи, вариационное исчисление, принцип максимума, динамическое программирование. Рассматриваются также нетрадиционные для оптимизации области: бифуркации, катастрофы, теория игр. Отдельного упоминания заслуживают методы асимптотического агрегирования для задач большой размерности.

Изложение отличается краткостью и прозрачностью.

Для студентов, преподавателей, инженеров и научных работников.

Издательство «КомКнига». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печ. л. 13,5.
Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, д. 11А, стр. 11.

13-значный ISBN, вводимый с 2007 г.:
ISBN 978-5-484-00873-5
Соотв. 10-значный ISBN, применяемый до 2007 г.:
ISBN 5-484-00873-5

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА
E-mail: URSS@URSS.ru
Каталог изданий в Интернете:
http://URSS.ru
Тел./факс: 7 (495) 135–42–16
URSS Тел./факс: 7 (495) 135–42–46

435107 ID 41731
9785484008735

Оглавление

Предисловие к «Лекциям»

Если человек не понимает проблемы, он пишет много формул.

Нильс Бор

Для нормального изучения любого математического предмета необходимы, по крайней мере, 4 ингредиента:

1) *живой учитель*;
2) *обыкновенный подробный учебник*;
3) *рядовой задачник*;
4) *учебник, освобожденный от рутины, но дающий общую картину, мотивы, связи, «что зачем»*.

До четвертого пункта у системы образования руки не доходили. Конечно, подобная задача иногда ставилась и решалась, но в большинстве случаев — при параллельном исполнении функций обыкновенного учебника. Акценты из-за перегрузки менялись, и намерения со второй-третьей главы начинали дрейфовать, не достигая результата. В виртуальном пространстве так бывает. Аналог объединения гантели с теннисной ракеткой перестает решать обе задачи, хотя это не сразу бросается в глаза.

«Лекции» ставят 4-й пункт своей главной целью. Сопутствующая идея — экономия слов и средств. Правда, на фоне деклараций о краткости и ясности изложения предполагаемое издание около 20 томов может показаться тяжеловесным, но это связано с обширностью математики, а не с перегрузкой деталями.

Необходимо сказать, на кого рассчитано. Ответ «на всех» выглядит наивно, но он в какой-то мере отражает суть дела. Обозримый вид, обнаженные конструкции доказательств, — такого сорта книги удобно иметь под рукой. Не секрет, что специалисты самой высокой категории тратят массу сил и времени на освоение математических секторов, лежащих за рамками собственной специализации. Здесь же ко многим проблемам предлагается короткая дорога, позволяющая быстро освоить новые области и освежить старые. Для начинающих «короткие дороги» тем более полезны, поскольку облегчают движение любыми другими путями.

В вопросе «на кого рассчитано», — есть и другой аспект. На сильных или слабых? На средний вуз или физтех? Опять-таки выходит «на всех». Звучит странно, но речь не идет о регламентации кругозора. Простым языком, коротко и прозрачно описывается предмет. Из этого каждый извлечет свое и двинется дальше.

Наконец, последнее. В условиях информационного наводнения инструменты вчерашнего дня перестают работать. Не потому, что изучаемые дисциплины чересчур разрослись, а потому, что новых секторов жизни стало слишком много. И в этих условиях мало кто готов уделять много времени чему-то одному. Поэтому учить всему — надо как-то иначе. «Лекции» дают пример. Плохой ли, хороший — покажет время. Но в любом случае, это продукт нового поколения. Те же «колеса», тот же «руль», та же математическая суть, — но по-другому.

Предисловие к седьмому то́му

Жизнь под предлогом оптимизации компенсирует непонимание сути.

Поле непрерывных экстремальных задач на данный момент хорошо перепахано. «Самородки» с поверхности более-менее подобраны, но притягательный потенциал области все же сохраняется, поскольку оптимизация часто оказывается единственным способом придать задаче осмысленный вид.

Что касается литературы, ситуация ухудшается обычным образом. Чем более высоких стандартов достигает теория, тем непонятнее становятся книги. А для написания простых учебников недостает энтузиазма и вдохновения, присущих этапу рождения идеологии и снятия пенок. Данный курс имеет целью восполнить дефицит по части простого и ясного изложения предмета.

Глава 1

Критические точки и градиентные поля

Философски выражаясь, экстремальные задачи нужны не для того, чтобы их решать. Они существуют, дабы служить *позицией* и направлять мысль. Однако рассказывать приходится — как будто все наоборот. Иногда и жить так приходится.

1.1. Безусловный экстремум

Оптимизация — та область, где мотивы ясны, а оправдания излишни. В багаже каждого есть примеры из фольклора и личного опыта. Поэтому изложение можно начинать с более-менее формализованной постановки задачи.

Пока речь будет идти о конечномерной теории и о точках x^*, обеспечивающих максимальное (или минимальное) значение непрерывной функции

$$\varphi(x), \quad x = \{x_1, \dots, x_n\} \in \mathbb{R}^n.$$

При этом задачу описывают как $\boxed{\varphi(x) \to \max\,(\min)}$.

Функцию $\varphi(x)$ часто называют ***функционалом*** по аналогии с бесконечномерным случаем. Употребление термина «***функционал***» в конечномерном варианте подчеркивает, что речь идет о скалярной функции $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Если x^* обеспечивает максимум $\varphi(x)$ по сравнению с близлежащими точками x, говорят о *локальном максимуме*; если — по сравнению с любыми $x \neq x^*$, говорят о *глобальном максимуме.*

В главе функция $\varphi(x)$ предполагается *гладкой* [1]. Для образного виденья ситуации — это наиболее удобный вариант. Ключом к анализу служит понятие *градиента.*

---

[1] В пределах данного тома под гладкостью подразумевается непрерывная дифференцируемость, каковая далеко не излишня в данном контексте. Функция $\varphi(x) = 2x^2 + x^2 \sin(1/x^2)$ имеет в нуле строгий минимум и равную нулю производную, но (!) ***в сколь угодно малой окрестности нуля принимает, как положительные, так и отрицательные значения.***

Рассмотрим случай $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ как наиболее наглядный. *Производная* u'_s функции $u = \varphi(x, y)$ *по направлению* единичного вектора $s = \{s_x, s_y\}$ равна производной функции $\widehat{u}(\theta) = \varphi(x + \theta s_x, y + \theta s_y)$ в нуле[2],

$$u'_s = \frac{d}{d\theta}\varphi(x + \theta s_x, y + \theta s_y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}s_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}s_y. \tag{1.1}$$

Вектор

$$\boxed{\operatorname{grad}\varphi = \left\{\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right\}}$$

называют *градиентом* функции φ. Для градиента используют также обозначение $\nabla\varphi$ (читается «набла фи»). Из (1.1) следует, что производную по направлению s можно записать как скалярное произведение

$$u'_s = s \cdot \operatorname{grad}\varphi. \tag{1.2}$$

Максимум (1.2), в силу $s \cdot \operatorname{grad}\varphi = \cos\alpha \cdot \|\operatorname{grad}\varphi\|$, достигается, когда $\alpha = 0$, т. е. единичный вектор s совпадает по направлению с градиентом, и равен, соответственно, $\|\nabla\varphi\|$. Таким образом, градиент $\nabla\varphi$ — это *вектор скорости максимального роста функции* φ. Следовательно, в каждой точке *поверхности постоянного уровня*,

$$\varphi(x, y) = \mathrm{const},$$

градиент $\nabla\varphi$ перпендикулярен этой поверхности (направлен по нормали). Таким образом, касательная плоскость — проходящая через точку $\{x_0, y_0\}$ — к линиям постоянного уровня функции $u = \varphi(x, y)$, описывается уравнением (на рис. 1.1 это пунктирная прямая)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y - y_0) = 0.$$

Если интерес представляет касательная плоскость к поверхности графика функции

$$u = \varphi(x, y),$$

то это сводится к предыдущему случаю рассмотрением функции $v = u - \varphi(x, y)$ трех переменных. Ее градиент

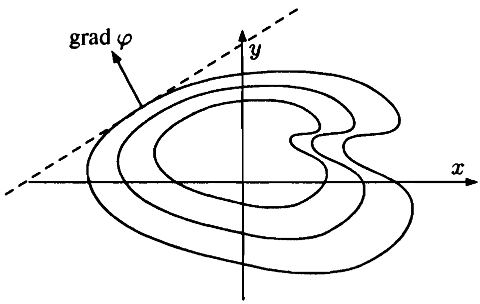

Рис. 1.1

$$\nabla v = \left\{1, -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, -\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right\}.$$

[2] Для удобства чтения вместо ссылок на предыдущие тома некоторые фрагменты из [5, 6] здесь воспроизводятся с подходящими контексту видоизменениями.

Поэтому касательная плоскость к поверхности $u = \varphi(x, y)$ в точке $\{u_0, x_0, y_0\}$ определяется уравнением

$$u - u_0 = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(y - y_0).$$

Отталкиваясь от двумерного случая, легко записать общее уравнение касательной плоскости в $\mathbb{R}^n$ к поверхности постоянного уровня в точке x_0:

$$\boxed{\nabla\varphi(x) \cdot (x - x_0) = 0,}$$

где $\nabla\varphi = \left\{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right\}$.

Уравнение касательной в $\mathbb{R}^{n+1}$ к поверхности графика $u = \varphi(x)$ в точке $\{u_0, x_0\}$, $u_0 = \varphi(x_0)$:

$$\boxed{u - u_0 = \nabla\varphi(x) \cdot (x - x_0).}$$

Теорема о среднем. Применяя *теорему Лагранжа* к функции скалярного аргумента

$$\xi(\tau) = \varphi[x + \tau(y - x)],$$

получаем

$$\xi(1) - \xi(0) = \xi'(\theta) = \sum_i \frac{\partial\varphi(z)}{\partial x_i}(y_i - x_i) = \nabla\varphi(z) \cdot (y - x),$$

где $z = x + \theta(y - x)$ при некотором $\theta \in (0, 1)$. Таким образом,

$$\boxed{\varphi(y) - \varphi(x) = \nabla\varphi(z) \cdot (y - x).}$$

Отсюда следует *формула конечного приращения*:

$$\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = \nabla\varphi(x) \cdot \Delta x + o(\|\Delta x\|).$$

1.1.1. Теорема. *Если $\varphi(x)$ в точке x^* дифференцируема и принимает локально экстремальное (максимальное или минимальное) значение*[3]*, то $\nabla\varphi(x^*) = 0$.*

◄ В двумерном случае линии постоянного уровня функции $u = \varphi(x_1, x_2)$ в районе локального максимума выглядят примерно как на рис. 1.2. Замкнутые

[3] О локальном максимуме $u = \varphi(x)$ в точке x^* говорят, когда $\varphi(x) < \varphi(x^*)$ для $x \neq x^*$ из некоторой окрестности точки x^*. При замене неравенства на $\varphi(x) \leqslant \varphi(x^*)$ говорят о *нестрогом* или *неизолированном* максимуме.

контуры стягиваются к центру, в котором градиент «вынужден» быть направлен сразу во все стороны, что возможно лишь при его обнулении. Еще один аргумент: *при ненулевом градиенте всегда можно сдвинуться вдоль градиента, увеличивая значение функции*[4]. ►

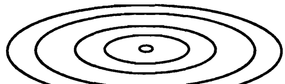

Рис. 1.2

Точки, в которых градиент обращается в нуль, называют *критическими*, или *стационарными*. Их многообразие, разумеется, не исчерпывается экстремумами, — и в поле зрения, как побочный эффект, появляются разные *перегибы*, *седловые точки* и прочие «неприятности». Но любые второстепенные явления при перемене позиции становятся главными. Такая же метаморфоза происходит с ассортиментом критических точек на «другой территории» (бифуркации, катастрофы, — глава 6).

(!) *Теорема* 1.1.1 *дает лишь необходимые условия оптимума, но фактически их, как правило, достаточно для решения задачи. Причина заключается в том, что условие* $\nabla\varphi(x^*) = 0$ *для экстремальной точки — обязательно. Поэтому искомое критическое значение* x^* *неизбежно попадает в число решений системы уравнений* $\nabla\varphi(x) = 0$. *Последняя в «ситуациях общего положения» имеет либо одно, либо несколько решений. В любом случае «круг подозреваемых» достаточно узок, чтобы оставшуюся часть задачи — при наличии оптимизма и везения — считать чисто технической.*

1.2. Достаточные условия

Как и в одномерном случае, где оптимум оценивается по знаку второй производной, в общей ситуации тоже можно судить о характере критической точки по квадратичной части в разложении Тэйлора,

$$\varphi(x^* + \Delta x) = \varphi(x^*) + \nabla\varphi(x^*)\cdot\Delta x + \sum_{i,j} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}\Delta x_i \Delta x_j + o\big(\|\Delta x\|^2\big).$$

[4] На этой идее основаны градиентные методы поиска экстремальных точек. Движение по градиенту или под острым углом к градиенту увеличивает значение целевой функции.

Если второй дифференциал, называемый *гессианом*, положительно определен, т. е.

$$\sum_{i,j} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j > 0 \quad \text{при} \quad \Delta x \neq 0,$$

то в критической точке x^* — минимум[5], ибо в малой окрестности x^* будет $\varphi(x^* + \Delta x) > \varphi(x^*)$, потому что $\nabla\varphi(x^*) = 0$.

Если *матрица Гессе*[6] $\left[\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}\right]$ вырождена, ситуация принципиально усложняется. В скалярном случае о характере критической точки можно судить по первому ненулевому члену ряда Тэйлора. Для функций n переменных дело обстоит совершенно иным образом. Вопрос решается в *теории катастроф* (глава 6).

Предвидеть трудности (но не их масштаб) довольно легко. Понятно, что в отсутствие знакоопределенности дифференциалов порядка выше второго — поверхности их вырождения могут накладываться друг на друга весьма разнообразно, в результате чего аномалии становятся нормой.

Островок порядка характеризуется *невырожденными критическими точками*, в которых невырожденны соответствующие матрицы Гессе. Классическая *лемма Морса*[7] гарантирует существование в некоторой окрестности V критической точки — локальной системы координат $x_1, \ldots, x_n$, такой что[8]

$$\varphi = x_1^2 + \ldots + x_l^2 - x_{l+1}^2 - \ldots - x_n^2, \quad x \in V. \tag{1.3}$$

Функция вида (1.3) называется *морсовским l-седлом*. В случае $l = 0$ имеем максимум, при $l = n$ — минимум.

---

[5] В случае отрицательной определенности — максимум.

[6] *Матрица Гессе* — это *матрица Якоби* отображения $\nabla\varphi(x)$.

[7] См. предметный указатель, где указаны страницы, на которых даны определения и характеристики выделенных курсивом терминов.

[8] Обратим внимание, что здесь речь идет о приведении к диагональному виду путем выбора подходящей локальной системы координат не квадратичной формы, а произвольной гладкой функции.

Лемма Морса дает по существу полную классификацию невырожденных критических точек. Для вырожденных критических точек такой классификации нет. Простой пример вырожденной критической точки — *обезьянье седло* (рис. 1.3), которое описывается функцией

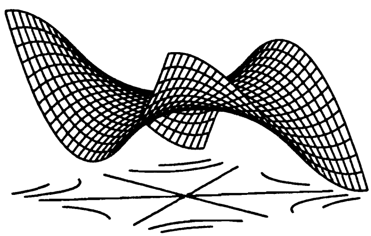

Рис. 1.3

$$\varphi(x, y) = x^3 - 3xy^2.$$

1.3. Градиентные поля

Успех детективного расследования часто зависит от широты взгляда, при котором в поле зрения попадают «не относящиеся к делу» обстоятельства. Такая же ситуация возникает при поиске критических точек. Интересуясь решениями $\nabla\varphi(x) = 0$, полезно, как оказывается, интересоваться *градиентным полем* $\nabla\varphi(x)$ целиком, а также его ролью в совсем других (вроде бы) задачах. Например, топологические свойства поля $\nabla\varphi(x)$ позволяют судить о существовании критических точек и об их числе. Движение вдоль градиентного поля[9]

$$\dot{x} = -\nabla\varphi(x) \tag{1.4}$$

может рассматриваться как численный алгоритм определения минимумов $\varphi(x)$ либо как основа для иных процедур вычислительного толка. Существенно, что асимптотически устойчивые равновесия (1.4) являются точками локальных минимумов потенциала $\varphi(x)$, — и это позволяет использовать идеологию теории устойчивости.

На рис. 1.4 *а* изображен график некой функции $z = \varphi(x, y)$ двух переменных — линии постоянного уровня $\varphi(x, y)$ даны в проекции на плоскость $\{x, y\}$.

Соответствующий фазовый портрет динамической системы (1.4) в плоскости (x, y) — на фоне контуров постоянного уровня — показан на рис. 1.4 *б*.

[9] Стандарт (1.4) *движения против градиента* вместо $\dot{x} = \nabla\varphi(x)$ — дань традиции, уходящей корнями в привычку смотреть на функцию Ляпунова как на потенциал, *убывающий* на траекториях, а не возрастающий.

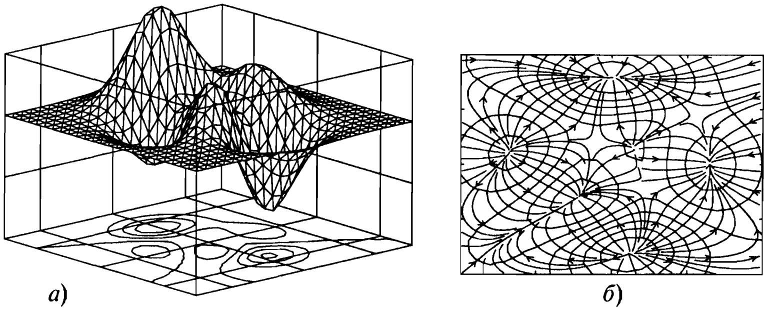

Рис. 1.4

В связи со сказанным выше ясно, что в контексте изучения критических точек довольно важную роль играют вопросы устойчивости движения. Напомним определения [6, т. 2].

1.3.1. *Положение равновесия системы*

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.5}$$

называется устойчивым по Ляпунову, если по любой его окрестности V можно указать такую окрестность W, что любое движение, начинающееся в W, не выходит за пределы V.

1.3.2. *Положение равновесия x^* системы* (1.5) *называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и любое решение $x(t)$, начинающееся в достаточно малой окрестности x^*, стремится к x^* при $t \to \infty$. При этом множество точек $x(0)$, из которых траектории $x(t)$ сходятся к x^*, называется областью притяжения x^*.*

Присутствие в определении 1.3.2 требования устойчивости по Ляпунову не избыточно. Траектории $x(t)$ могут сходится к x^* при неустойчивом движении [6, т. 2]. Но если речь идет о градиентном движении, то сходимость $x(t) \to x^*$ всех траекторий, начинающихся в достаточно малой окрестности x^*, влечет за собой устойчивость.

Изучение (1.5) наряду с (1.4) представляет интерес в том случае, когда оба движения происходят под острым углом друг к другу[10], в результате чего оба — асимптотически устойчивы или неустойчивы одновременно.

В обычной теории устойчивости мысль работает в направлении от (1.5) к (1.4): для неградиентного движения (1.5) ищется потен-

[10] Т. е. скалярное произведение $f(x) \cdot \nabla\varphi(x) > 0$ при $x \neq x^*$.

циал $\varphi(x)$, называемый *функцией Ляпунова* и позволяющий судить об асимптотической устойчивости.

Обратное направление (1.4) $\Rightarrow$ (1.5) представляется малоперспективным, но это не совсем так. Во-первых, с точки зрения проблем существования критических точек, изучение поля $f(x)$ может оказаться удобнее $\nabla\varphi(x)$. Во-вторых, $f(x)$ может быть градиентом другого потенциала, легче анализируемого.

Выделим несколько опорных результатов.

1.3.3. Теорема. *Критическая точка x^* является положением минимума функции $\varphi(x)$ в томм*[11] *случае, когда равновесие x^* системы* (1.4) *асимптотически устойчиво.*

1.3.4. Лемма. *Пусть $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(x) > 0$ для $x \neq 0$, $\|x\| \leqslant 1$. Тогда при*

$$0 < c < \inf\{\varphi(x) : \|x\| = 1\}$$

нуль окружен замкнутыми поверхностями уровня $\varphi(x) = c$.

◄ Нуль окружают замкнутые поверхности $\varphi(x) = c$, которые являются границами связных компонент лебеговых множеств $\varphi(x) \leqslant c$, содержащих $x = 0$.

Вообще говоря, «связные компоненты» могут быть не единственны, но тогда помимо нуля у $\varphi(x)$ будут и другие критические точки. ►

1.3.5. Теорема. *Если потенциал $\varphi(x)$ имеет в $\mathbb{R}^n$ единственную критическую точку x^*, в которой достигается локальный минимум $\varphi(x)$, то область Ω притяжения x^* при движении* (1.4) *неограниченна*[12].

◄ Пусть шар $B_r = \{x : \|x\| < r\}$ целиком лежит в Ω, а $\overline{B}_R$ — шар сколь угодно большого радиуса R. Допустим $\Omega \subset \overline{B}_R$. Возьмем любую граничную точку $x_0 \in \overline{B}_R$ области Ω. Поскольку $x_0 \notin \Omega$, решение $x(t)$ системы (1.4) с началом $x(0) = x_0$ не может попасть в B_r, и не может все время оставаться в $\overline{B}_R$, поскольку значение $\varphi[x(t)]$ в кольце

$$B_{rR} = \{x : r \leqslant \|x\| \leqslant R\}$$

---

[11] В английской математической литературе употребляется iff вместо грамматически правильного if (если) для обозначения громоздкого оборота «если и только если». Трюк удобен. В русском — ему могло бы соответствовать «в томм случае» = «в том и только том случае», «тогдаа» = «тогда и только тогда» и т. п.

[12] Т. е. никакой шар ее полностью не накрывает.

обязано убывать со скоростью не менее

$$\min\{\|\nabla\varphi(x)\|^2 : x \in B_{rR}\}.$$

Но если $x(t)$ выходит из $\overline{B}_R$, то, в силу непрерывной зависимости решения от начального положения, найдется траектория (1.4), начинающаяся в Ω вблизи $x_0 \notin \Omega$ и целиком лежащая в Ω, которая также выходит из $\overline{B}_R$, что противоречит предположению $\Omega \subset \overline{B}_R$. ►

1.4. Минуя бифуркации

Бифуркации рассматриваются в главе 6, но о них несколько слов необходимо сказать заранее, чтобы меры предосторожности не казались чрезмерными.

Невырожденный минимум функции

$$\varphi(x) = x^2$$

при малом возмущении $2\varepsilon x$ незначительно смещается,

$$x^2 + 2\varepsilon x = (x+\varepsilon)^2 - \varepsilon^2,$$

но критическая точка остается единственной и сохраняет свой тип. Совершенно иная ситуация возникает при рассмотрении вырожденных точек. Например, x^4 в результате возмущения $x^4 + \varepsilon x^2$ при сколь угодно малом по модулю $\varepsilon < 0$ дает в окрестности $x = 0$ вместо одного — два минимума и один максимум[13].

Из-за аномалий подобного сорта с вырожденными критическими точками обращаются осторожно, ибо они могут менять свой тип под действием возмущений. Но малые деформации никогда не разрушают минимума. Точнее говоря, справедливо следующее утверждение.

1.4.1. Теорема. *Если гладкая функция $\varphi(x, \lambda)$ имеет при λ_0 изолированный минимум по x в точке $x^*(\lambda_0)$, то при достаточно малом возмущении $\Delta\lambda$ минимум сохраняется, смещаясь в близлежащую точку $x^*(\lambda_0 + \Delta\lambda)$.*

---

[13] Такого рода «неприятности» называют *бифуркациями*.

(!) При «топологическом настрое мысли» теорема 1.4.1 выглядит неожиданно. Дело в том, что малое возмущение градиента $\nabla\varphi(x)$ не может ликвидировать критическую точку[14], но сколь угодно малое изменение потенциала $\varphi(x)$ — типа $\varepsilon \sin(x/\varepsilon)$ — может сколь угодно сильно менять градиент. При этом естественно ожидать «чего угодно». Однако не всегда. Минимумы и максимумы образуют особую статью, демонстрируя *устойчивость* по отношению к малым возмущениям функционала.

◄ Пусть, например, $\varphi(x)$ имеет в нуле строгий локальный минимум и

$$\nu(\varepsilon) = \min\{\varphi(x) : \|x\| = \varepsilon\}.$$

Разумеется, $\nu(\varepsilon) > 0$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$. Если возмущение функционала $\delta\varphi(x)$ по модулю меньше $\nu(\varepsilon)/2$ при любом x из шара $\|x\| \leqslant \varepsilon$, то $\varphi(x) + \delta\varphi(x)$ имеет в шаре $\|x\| \leqslant \varepsilon$ хотя бы один минимум. ►

Таким образом, *малое возмущение функционала не может уничтожить изолированный минимум*. Возможна бифуркация, порождающая из минимума ансамбль критических точек. Но в этом ансамбле обязательно найдется минимум. О седловых точках этого не скажешь[15]. Например, сколь угодно малое возмущение функционала $\varphi(x) = x_1 \cdot x_2$ — способно ликвидировать критическую точку вообще. (?)

1.5. Глобальный оптимум

В скалярном случае, если некоторая функция $\varphi(x)$ имеет в x^* локальный минимум[16] и не имеет других критических точек, то минимум в x^* является глобальным. Еще точнее: чтобы локальный минимум не был глобальным — должен быть еще локальный максимум.

Вся эта простота рушится в многомерном случае. Из-за свойственных человеку недостатков пространственного воображения здесь многое кажется «неожиданным», и до «простых» вещей, оказывается, трудно додуматься.

---

[14] Имеющую *ненулевой индекс*, см. [6, т. 1].

[15] Не считая, конечно, невырожденных случаев.

[16] Мы говорим то о минимуме, то о максимуме, поскольку это суть одно и то же, ибо переходит одно в другое при замене $\varphi(x)$ на $-\varphi(x)$.

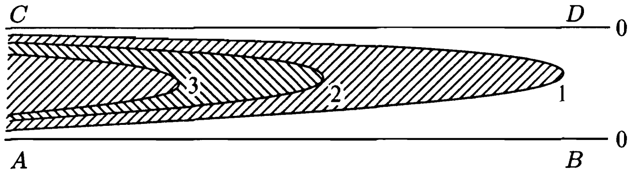

Рис. 1.5

Функция $\varphi(x) = x_1^2 - \cos x_2$ имеет бесконечно много минимумов в точках $\{0, 2k\pi\}$ и ни одного максимума. Правда, у $\varphi(x)$ есть *седловые* критические точки $\{0, (2k+1)\pi\}$.

Принципиально более важен другой вопрос. Пусть $\varphi(x)$ имеет в точке x^* локальный минимум и не имеет других экстремальных точек, т. е. $\nabla\varphi(x) \neq 0$ при $x \neq x^*$. Нельзя ли тогда провести параллель с одномерным случаем? Нельзя. Уже на плоскости минимум в x^* не обязан быть глобальным. Соответствующие примеры легко строятся на базе следующей конструкции.

Представим, что на полосе (рис. 1.5), ограниченной параллельными прямыми AB и CD, задана функция $y = \varphi(x_1, x_2)$, график которой (ось y перпендикулярна плоскости чертежа) представляет собой горный хребет, уходящий «тем выше — чем левее». Уровень $\varphi(x)$ на прямых AB и CD — нулевой, а срезы $\varphi(x) = c > 0$ — тем левее, чем больше $c > 0$. Наконец, градиент $\nabla\varphi(x)$ везде отличен от нуля.

Таким образом, полоса делит плоскость на две части (верхнюю и нижнюю), и $\varphi(x)$ убывает по мере приближения к AB и CD. Точнее говоря, градиент $\varphi(x)$ в близких к AB и CD точках направлен внутрь полосы, что позволяет продолжать $\varphi(x)$ на всю плоскость «нисходящим образом». При этом ниже AB можно устроить локальный минимум (продавив воронку), а выше CD образовать склон $\varphi(x)$, уходящий, скажем, в минус бесконечность. Получится график функции, имеющей единственную критическую точку, которая является локальным, но не глобальным минимумом[17].

[17] Вот два «формульных» примера таких функций из [2]:

$$z = x^3 + e^{3y} - 3xe^y; \quad z = (3x^2 - 2x^3)e^y + \int_0^y \frac{te^t}{1+t^2}\,dt.$$

В другом варианте, продавив по обе стороны от полосы по одной воронке, получаем два локальных минимума без дополнительных критических точек.

Следовательно, горный перевал при наличии двух вершин — необязателен. Его можно утащить в бесконечность. Однако на замкнутой поверхности «перевал» девать некуда. Поэтому, скажем, на сфере невозможно задать функцию, у которой было бы два локальных максимума (или минимума) и не было других критических точек.

«Организуя», по аналогии с предыдущим, систему горных хребтов, которая делит равнинную часть на N компонент связности, и продавливая в каждой «компоненте» воронку, получаем функцию, все N критических точек которой являются точками локального минимума.

Подобных «неприятностей» можно избежать в дополнительных предположениях.

1.5.1. Теорема. *Пусть x^* — единственная критическая точка функции $\varphi(x)$, удовлетворяющей условию неограниченного роста*

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \varphi(x) = \infty. \tag{1.6}$$

Тогда в x^* достигается глобальный минимум функции $\varphi(x)$.

◄ При любом достаточно большом R множество

$$L_R = \{x : \varphi(x) \leqslant R\}$$

является компактом, в силу (1.6). Функция $\varphi(x)$ обязана достигать минимального значения на L_R в некоторой критической точке, т. е. в x^*. ►

1.5.2. Лемма. *Пусть* 0 *— единственная критическая точка функции $\varphi(x)$, и $\|\nabla\varphi(x)\| \geqslant \varepsilon_0 > 0$ при $\|x\| \geqslant r_0 > 0$. Тогда потенциал $\varphi(x)$ удовлетворяет условию* (1.6). **(?)**

Условие (1.6) само по себе достаточно для существования у функционала $\varphi(x)$ глобального минимума — без какого бы там ни было упоминания о существовании критической точки и даже без предположения гладкости. Для обоснования надо в доказательстве теоремы 1.5.1 изменить акценты. Из (1.6) вытекает компактность множества

$$L_R = \{x : \varphi(x) \leqslant R\},$$

на котором непрерывный функционал обязан иметь минимум по классической *теореме Вейерштрасса*.

Теорема Вейерштрасса — «непрерывная функция на компакте достигает минимума» — остается справедливой при ослаблении требования непрерывности до полунепрерывности снизу.

Функционал $\varphi(x)$ *полунепрерывен снизу* (*сверху*) в точке x, если из $x_k \to x$ вытекает

$$\varphi(x) \leqslant \liminf_{k\to\infty} \varphi(x_k) \quad \bigl(\varphi(x) \geqslant \limsup_{k\to\infty} \varphi(x_k)\bigr).$$

1.6. Деформации градиентных систем

Пусть Φ обозначает класс *гладких функционалов*[18] $\varphi(x)$ с единственной в шаре $\|x\| \leqslant 1$ нулевой критической точкой.

Функционалы $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ назовем *гомотопными* в Φ, если существует гладкая *деформация* (еще говорят: *гомотопия*, *гомотопический мост*)

$$\varphi(x, \lambda) \in \Phi, \quad \lambda \in [0, 1],$$

такая что

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \varphi(x, 1) = \varphi_1(x).$$

1.6.1. Теорема Бобылева. *Если $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ гомотопны в Φ и нуль — точка локального минимума $\varphi_0(x)$, то нуль — точка локального минимума $\varphi_1(x)$.*

Иными словами, невырожденная деформация, $\nabla_x \varphi(x, \lambda) \neq 0$ для $x \neq 0$, минимум переводит в минимум. При бесхитростном подходе к задаче утверждение выглядит естественным, но до публикации результата[19] мало кто готов был поверить в его справедливость.

---

[18] В теории экстремальных задач функции $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ принято называть также функционалами.

[19] *Бобылев Н. А.* Об одном приеме исследования устойчивости градиентных систем // АиТ. 1980. № 8. С. 33–35. Подробная библиография и дополнительная информация есть в [12].

Причины «неожиданности» здесь связаны с двумя обстоятельствами. С «бифуркационными опасениями» и с некоторой инерцией мышления стандартного топологического толка. Дело в том, что если следить за деформацией только на границе области, то единственным инвариантом невырожденной деформации является *вращение векторного поля* [6, т. 1], а экстремумы — это из другой оперы. В четномерном пространстве, например, минимум деформируется в максимум (см. раздел 1.7). Однако предположение о единственности критической точки в процессе деформации позволяет избежать таких неприятностей.

◄ Множество Λ тех $\lambda \in [0, 1]$, при которых нуль является точкой минимума $\varphi(x, \lambda)$, открыто в $[0, 1]$ (теорема 1.4.1). Поэтому, если установить замкнутость Λ, — это повлечет за собой $\Lambda = [0, 1]$.

Пусть $\varphi(x, \lambda_0)$ имеет в нуле минимум и Ω_0 обозначает область притяжения нуля при движении $\dot{x} = -\nabla\varphi(x, \lambda_0)$, а B_r — открытый шар[20] максимального радиуса, который содержится в Ω_0.

Мы покажем, что r допускает оценку снизу, $r \geqslant \varepsilon > 0$, не зависящую от λ_0. Тем самым теорема будет доказана, поскольку на шаре B_ε любой локальный минимум будет глобальным, и тогда из $\lambda_k \to \lambda^*$ (все $\lambda_k \in \Lambda$) будет следовать $\lambda^* \in \Lambda$.

Положим

$$\alpha = \min\left\{\|\nabla\varphi(x, \lambda)\| : \frac{1}{2} \leqslant \|x\| \leqslant 1,\ \lambda \in [0, 1]\right\},$$

$$\beta = \max\{\|\nabla\varphi(x, \lambda)\| : \|x\| \leqslant 1,\ \lambda \in [0, 1]\}$$

и рассмотрим траекторию $x_0(t)$ уравнения

$$\dot{x} = -\nabla\varphi(x, \lambda_0), \tag{1.7}$$

начинающуюся в точке[21] $x_0(0) = x_0 \in \Omega_0$, $\|x_0\| = 1$.

Поскольку $\|x_0(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$, то при некотором t_0 в первый раз будет достигнуто равенство $\|x_0(t_0)\| = 1/2$. Очевидно,

$$\boxed{t_0 \geqslant \frac{1}{2\beta}.}$$

Рассмотрим теперь функцию $\mu(t) = \varphi[x_0(t), \lambda_0]$, которая в силу (1.7) убывает со скоростью

$$\mu' = \frac{d\mu}{dt} = -(\nabla\varphi[x_0(t), \lambda_0])^2 \leqslant -\alpha^2.$$

---

[20] С центром в нуле.

[21] Из доказательства теоремы 1.3.5 ясно, что Ω_0 не укладывается внутри единичного шара, поэтому x_0 с указанными свойствами найдется.

Поэтому

$$\varphi[x_0, \lambda_0] = \varphi[x_0(t_0), \lambda_0] - \int\limits_0^{t_0} \mu'(s)\, ds \geqslant \alpha^2 t_0 \geqslant \frac{\alpha^2}{2\beta}.$$

С другой стороны, $\varphi[x_0, \lambda_0] \leqslant r\beta$. В результате получается требуемая оценка

$$\boxed{r \geqslant \frac{\alpha^2}{2\beta^2},}$$

не зависящая от λ_0.

Остается пояснить, откуда берется неравенство $\varphi[x_0, \lambda_0] \leqslant r\beta$. Пусть x^δ обозначает граничную точку шара B_r, которая не принадлежит Ω_0. Траектория (1.7), начинающаяся в этой точке, вынуждена уйти из единичного шара B_1 (см. доказательство теоремы 1.3.5). Но тогда, в силу непрерывной зависимости решения от начального положения, найдутся сколь угодно близкие к x^δ точки $\tilde{x}^\delta$ в Ω_0, исходя из которых траектории (1.7) сначала попадают на границу B_1, а потом уже сходятся к нулю.

Поэтому на границе B_1 есть точки $x_0 \in \Omega_0$, которые «возникли» при движении (1.7) из точек $\tilde{x}^\delta$, расположенных на границе B_r. Для этих точек, а именно их и надо рассматривать,

$$\varphi[x_0, \lambda_0] \leqslant \varphi[\tilde{x}^\delta, \lambda_0] \leqslant r\beta. \quad \blacktriangleright$$

Теорема 1.6.1 совсем просто обобщается на случай более гибких требований.

Пусть $\Phi(\Omega)$ — класс гладких функционалов $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ с единственной *на замыкании* области Ω критической точкой $x^*(\varphi)$, причем *в случае $x^*(\varphi) \in \breve{\Omega}$ критическая точка должна быть невырожденной.*

Функционалы $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ назовем *подвижно гомотопными* в $\Phi(\Omega)$, если существует гладкая *деформация* $\varphi(x, \lambda) \in \Phi(\Omega)$, $\lambda \in [0, 1]$, такая что $\varphi(x, 0) = \varphi_0(x)$, $\varphi(x, 1) = \varphi_1(x)$. Таким образом, ситуация обобщается в следующих направлениях:

(i) Шар заменяется произвольной областью.

(ii) При деформации критическая точка может двигаться, но, как и прежде, обязана быть единственной.

(iii) Критическая точка при деформации может выходить на границу области, но при этом обязана становиться невырожденной.

1.6.2. Теорема. *Если $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ подвижно гомотопны в $\Phi(\Omega)$ и нуль — точка локального минимума $\varphi_0(x)$, то нуль — точка локального минимума $\varphi_1(x)$.*

Продемонстрируем возможности теоремы 1.6.2 на классическом примере.

◄ Для доказательства известного неравенства

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$$

перепишем его в виде

$$\varphi(x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2 - n(x_1 \ldots x_n)^{2/n} \geqslant 0,$$

где $a_i = x_i^2$. Зафиксируем $x_n^2 > 0$ и рассмотрим деформацию

$$\varphi(x, \lambda) = x_1^2 + \ldots + x_n^2 - \lambda n(x_1 \ldots x_n)^{2/n} \geqslant 0,$$

на неотрицательном ортанте $\mathbb{R}_+^{n-1}$.

Легко проверить, что система уравнений

$$\frac{\partial \varphi(x, \lambda)}{\partial x_i} = 2\left[x_i - \lambda \frac{(x_1 \ldots x_n)^{2/n}}{x_i}\right] = 0, \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

имеет на $\mathbb{R}_+^{n-1}$ при любом $\lambda \in [0, 1]$ единственное решение $x_i = \lambda^{n/2} x_n$, которое лишь при $\lambda = 0$ лежит на границе $\mathbb{R}_+^{n-1}$. При этом $\varphi(x, 0)$ имеет невырожденный минимум. Поэтому $\varphi(x, 1)$ также имеет минимум (в точке, в которой все $x_i = x_n$). ►

1.7. Топология градиентного поля

Данный раздел для содержания в целом принципиального значения не имеет, но проливает дополнительный свет в некоторых направлениях.

Градиентное поле $\nabla\varphi(x)$ является частным случаем — *непрерывного*

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

Иногда имеет смысл подняться на эту ступеньку и посмотреть, как выглядит предмет изучения в иной среде.

Вращение векторного поля. Пусть Ω — некоторая область в $\mathbb{R}^n$, $\check{\Omega}$ — ее граница, а $f(\check{\Omega})$ — образ границы при непрерывном отображении $f(x)$. Поле $f(x)$ предполагается *невырожденным* на $\check{\Omega}$, т. е. $f(x) \neq 0$ при $x \in \check{\Omega}$.

Выпустим из нуля произвольный луч l и посчитаем, сколько раз l протыкает $f(\breve{\Omega})$ *изнутри наружу* — допустим, $\gamma_\oplus$ раз, и сколько — *снаружи внутрь* — допустим, $\gamma_\ominus$ раз. Величина

$$\gamma(F, \breve{\Omega}) = \gamma_\oplus - \gamma_\ominus \tag{1.8}$$

называется *вращением векторного поля F на $\breve{\Omega}$*. Значение (1.8), как оказывается, не зависит от луча l. Определение, конечно, нестрого, но оно прозрачно и позволяет дать простые доказательства всех основных результатов. Подробности — в [6, т. 1, глава 9]. Здесь лишь бегло остановимся на фактах, с точки зрения которых интересно посмотреть на градиентные поля[22].

Центральную роль в теории вращения играет понятие *деформации*, или *гомотопии*.

1.7.1. Определение. *Отображения f_0 и f_1 называются гомотопными на $\breve{\Omega}$, если существует такая непрерывная деформация (гомотопия) $H(x, \tau)$, определенная для $x \in \breve{\Omega}$ и $\tau \in [0, 1]$, что*

$$H(x, 0) \equiv f_0(x), \quad H(x, 1) \equiv f_1(x),$$

причем $H(x, \tau) \neq 0$ при любых $x \in \breve{\Omega}$ и $\tau \in [0, 1]$, что называют невырожденностью деформации.

Операции гомотопического перехода от f_0 к f_1 с помощью $H(x, \tau)$ визуально соответствует непрерывное деформирование поверхности $f_0(\breve{\Omega})$ в поверхность $f_1(\breve{\Omega})$. Требование невырожденности, $H(x, \tau) \neq 0$, означает, что деформируемая поверхность не имеет права пересекать точку 0.

1.7.2. Теорема. *Гомотопные векторные поля имеют одинаковые вращения.*

Для установления гомотопности полей часто используется **линейная гомотопия**:

$$H(x, \tau) = (1 - \tau) f_0(x) + \tau f_1(x),$$

связывающая отображения f_0 и f_1. Невырожденность линейной гомотопии равнозначна *непротивоположной направленности* векторов $f_0(x)$ и $f_1(x)$ при любом $x \in \breve{\Omega}$.

1.7.3. Теорема. *Пусть векторное поле $f(x)$ определено и невырождено на границах областей $\Omega, \Omega_1, \ldots, \Omega_m$, причем области Ω_j $(j = 1, \ldots, m)$ попарно не пересекаются*

[22] Теорию вращения векторных полей (степени отображения) с приложениями к нелинейному анализу планируется изложить в одном из последующих томов. Для первого знакомства, однако, «нестрогий вариант» из первого тома, вообще говоря, предпочтительнее из-за наглядности.

и либо $\overline{\Omega} = \bigcup \overline{\Omega_j}$, *либо поле невырожденно на* $\overline{\Omega} \setminus \bigcup \overline{\Omega_j}$. *Тогда*

$$\gamma(f, \breve{\Omega}) = \sum_{j=1}^{m} \gamma(f, \breve{\Omega}_j). \tag{1.9}$$

Нуль $x_0 \in \Omega$ поля $f(x)$ называют *изолированным*, если в достаточно малой окрестности x_0 нет других нулей. Вращение поля f на сферах достаточно малого радиуса с центром в x_0 называют *индексом* x_0 и обозначают $\mathrm{ind}(f, x_0)$.

1.7.4. Теорема об алгебраическом числе нулей. *Пусть векторное поле* $f(x)$ *невырождено на* $\breve{\Omega}$ *и имеет в* Ω *лишь изолированные нули. Тогда*

$$\gamma(f, \breve{\Omega}) = \sum \mathrm{ind}(f, x_j), \tag{1.10}$$

где суммирование идет по всем нулям $x_j \in \Omega$ *поля* f.

Рассматриваемая теория ориентирована в основном на изучение уравнений $f(x) = 0$ с акцентом на вопросах существования решений и выяснения их свойств. В частном случае градиентных полей — это как раз проблематика критических точек.

1.7.5. Теорема. *Если* $\gamma(f, \breve{\Omega}) \neq 0$, *то уравнение* $f(x) = 0$ *разрешимо в* Ω, *т. е. существует точка* $x^* \in \Omega$, *в которой* $f(x^*) = 0$.

С точки зрения «разрешимости» — это центральный результат, из которого ясно, что все упирается в умение вычислять вращение[23]. Используемые рецепты исходят из простых соображений. Вычисляются вращения нескольких стандартных полей, после чего задействуется техника гомотопических переходов. Основная масса приложений охватывается деформациями к линейному полю $f(x) = Ax$, вращение которого при условии $0 \in \Omega$ и невырожденности матрицы A равно:

$$\gamma(A, \breve{\Omega}) = \det A.$$

В частности, тождественное отображение $Ix \equiv x$ имеет вращение 1, а

$$\gamma(-I, \breve{\Omega}) = (-1)^n.$$

Разумеется, речь идет о ситуации $0 \in \Omega$, поскольку $\gamma(f, \breve{\Omega}) = 0$ в случае $f(x) \neq 0$ на $\overline{\Omega}$.

Посмотрим теперь, как это работает. Допустим,

$$\langle \nabla\varphi(x), x \rangle > 0$$

при любом x, лежащем на границе некоторого шара B_R. Тогда векторы $\nabla\varphi(x)$ и x не могут быть противоположно направлены.

---

[23] Хотя бы с точностью до его неравенства нулю.

Поэтому линейная гомотопия невырожденна, в результате чего:

$$\gamma(\nabla\varphi, \check{B}_R) = \gamma(I, \check{B}_R) = 1,$$

и по теореме 1.7.5 потенциал $\varphi(x)$ имеет в шаре B_R критическую точку. Причем критическая точка либо одна, либо несколько — но тогда они разных типов.

К сожалению «типизация» критических точек на основе вращения очень груба. Все невырожденные экстремумы разбиваются всего на два класса[24], соответствующие двум возможностям: детерминант матрицы Гессе больше нуля, и — меньше. Соответственно, индексы

$$\operatorname{ind}(\nabla\varphi, x^*) = \pm 1.$$

При этом в четномерном пространстве максимумы и минимумы оказываются в одном классе, т. е. принадлежат одному топологическому типу (с точки зрения вращения). Правда, любой недостаток при должном развороте обращается в достоинство, обеспечивая основу для тех или иных выводов. Так и здесь. В случае $\langle\nabla\varphi(x), x\rangle > 0$ на границе B_R, и четного n, — критическая точка либо одна, либо это не могут быть только минимумы и максимумы. При нечетной размерности пространства ситуация меняется, минимумы и максимумы имеют разные индексы, и с точки зрения (1.10) это порождает новые возможности.

Перечислим некоторые факты, возникающие в рамках описанного типа рассуждений. Их можно рассматривать также как упражнения при использовании в качестве руководства к действию главы 9 первого тома.

Везде предполагается $0 \in \Omega$ и речь идет об условиях, выполняемых на границе: $\forall\, x \in \check{\Omega}$.

• Пусть

$$\|\nabla\varphi(x) - x\| < \|\nabla\varphi(x)\| + \|x\|.$$

Тогда $\varphi(x)$ в Ω имеет критическую точку.

• Если в нечетномерном пространстве $\langle\nabla\varphi(x), x\rangle < 0$ и критическая точка в Ω единственна, то это максимум. Если критических точек две, то по крайней мере одна — вырожденная.

• Если $\langle\nabla\varphi(x), x\rangle > 2x^2$, то функция $x^2 - \varphi(x)$ имеет в Ω критическую точку.

[24] Вырожденные экстремумы разбиваются на бесконечное число классов.

1.8. Комментарии и дополнения

• Доказательство теоремы 1.1.1 обычно сводят к одномерному случаю. Если x^* положение минимума $\varphi(x)$, то скалярная функция

$$\xi(\tau) = \varphi(x^* + \tau s),$$

где s произвольный фиксированный вектор, принимает минимальное значение при $\tau = 0$. Поэтому

$$\xi'(0) = \langle \nabla\varphi(x^*), s\rangle = 0,$$

откуда, в силу произвольности s, следует $\nabla\varphi(x^*) = 0$.

Исходя из такого рассуждения легко сделать ошибочный вывод о возможности изучения не только необходимых, но и достаточных условий минимума — на основе рассмотрения производных по направлению. Вот стандартный контрпример на эту тему.

Рассечем график функции двух переменных $z = \varphi(x, y)$ вертикальной плоскостью, проходящей через нуль. Допустим, в любом сечении получается кривая, имеющая минимум в нулевой точке. Обязана ли в этом случае функция $\varphi(x, y)$ тоже иметь минимум в нуле?

Интуиция, воспитанная на простых примерах, дает положительный ответ, но это неправильно. Пусть

$$z = \varphi(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2).$$

На любой прямой $y = \alpha x$ $(\alpha \neq 0)$ функция

$$\phi(x) = \varphi(x, \alpha x) = \alpha^2 x^2 - 3\alpha x^3 + 2x^4$$

принимает в нуле минимальное значение, поскольку $\phi''(0) = 2\alpha^2 > 0$. На прямых $x = 0$, $y = 0$ — тоже минимум. Тем не менее в сколь угодно малой окрестности нуля $\varphi(x, y)$ принимает не только положительные, но и отрицательные значения (для $y = \beta x^2$, $1 < \beta < 2$).

• Склон $\varphi(x)$ выше CD на рис. 1.5 можно не опускать ниже уровня $\varphi(x^*)$, — и тогда автономная система

$$\dot{x} = -\nabla\varphi(x)$$

будет иметь положительно определенную функцию Ляпунова $\varphi(x) - \varphi(x^*)$, везде (кроме $x \neq x^*$) строго убывающую, но траектории $x(t)$, начинающиеся выше CD, будут уходить в минус бесконечность.

Уход траекторий $x(t)$ в бесконечность возможен, когда единственный локальный минимум функции Ляпунова $V(x)$ является глобальным, но не все области $V(x) \leqslant c$ ограничены (см. [6, т. 2]).

Глава 2

Условная минимизация

2.1. Условный экстремум

Оптимизация, как и течение жизни, проходит обычно при соблюдении некоторых условий.

Рассмотрим сначала ситуацию $f(x) \to \min$, в которой ограничение задается одним уравнением

$$g(x) = 0, \quad x = \{x_1, \dots, x_n\}. \tag{2.1}$$

Если точка x находится на поверхности $g(x) = 0$, то в направлении плюс-минус градиента $\nabla g(x)$ двигаться нельзя — иначе точка x сразу сойдет с поверхности $g(x) = 0$, и условие нарушится (рис. 2.1 *а*). Можно смещаться в касательной плоскости (на бесконечно малую Δx), т. е. перпендикулярно $\nabla g(x)$. Если градиент $\nabla f(x)$ не коллинеарен $\nabla g(x)$, т. е. не совпадает по направлению с $\pm\nabla g(x)$, то у $\nabla f(x)$ есть составляющая в касательной плоскости к $g(x) = 0$, вдоль которой *можно сдвинуться и увеличить тем самым значение* $f(x)$.

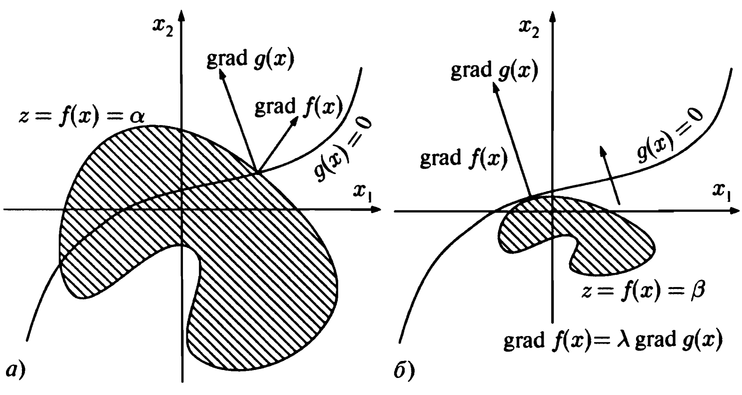

Рис. 2.1

Этой последней возможности «сдвинуться и увеличить значение $f(x)$» нет: либо в *вырожденном случае*[1], либо когда *градиенты коллинеарны*,

$$\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) \quad \textit{при некотором} \quad \lambda \neq 0. \tag{2.2}$$

Тогда в точке x происходит касание поверхностей $g(x) = 0$ и $f(x) = \beta$ (рис. 2.1 *б*). При этом достигается (возможно) *условный минимум*. Условие (2.2), таким образом, является *необходимым*, — но только в невырожденной ситуации.

Особые случаи — стандартная головная боль. Соломинка обходится дороже стога сена, и средств на другие надобности перестает хватать. Поэтому обычно не жалеют сил на достижение единообразия, позволяющего обходиться без «реверансов».

В данном случае, например, избежать упоминания вырожденной ситуации можно так. Если x^* — точка условного максимума, то найдутся такие числа λ_0, λ_1, не равные нулю одновременно, что

$$\lambda_0 f(x^*) + \lambda_1 g(x^*) = 0.$$

Но это имеет свои минусы. Во-первых, смешивая воедино разнородные явления, формулировка теряет лицо. Во-вторых, рассуждения все равно требуют разграничения возможностей.

Задачи, в которых можно положить $\lambda_0 = 1$, характеризуют как *регулярные*. *Регулярными* называют и соответствующие точки минимума.

Итак, правило поиска условного минимума заключается в решении системы (2.2)[2] совместно с уравнением (2.1). На практике это оформляется немного иначе. Задача

$$f(x) \to \min, \quad g(x) = 0, \tag{2.3}$$

[1] *Вырожденный случай* охватывает «малоинтересные» ситуации: либо $\nabla g(x) = 0$, либо в точке x на поверхности $g(x) = 0$ достигается безусловный минимум $f(x)$, и направление градиента $\nabla g(x)$ не играет роли.

[2] Это n скалярных уравнений, поскольку градиент — вектор.

заменяется поиском экстремальной точки x *лагранжиана*[3]

$$L(x, \lambda) = f(x) - \lambda g(x)$$

при надлежащем выборе λ. Знак перед λ принципиального значения не имеет (пока).

В итоге все сводится к решению системы $n+1$ уравнений:

$$g(x) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} - \lambda \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

относительно $n+1$ неизвестных $x_1, \ldots, x_n, \lambda$. Коэффициент λ называют *множителем Лагранжа*.

> *Приведенные условия всего лишь необходимы, но это инструмент, который обычно работает и дает результаты. Решение соответствующей системы уравнений, как правило, одно, а существование минимума ясно из «физических соображений». Последние часто спасают и в тех случаях, когда решений — несколько.*

Примеры

• Критическими точками задачи

$$\langle Ax, x\rangle \to \min, \quad \|x\| = 1,$$

с симметричной матрицей A, являются собственные векторы x_j^*. Пары (x_j^*, λ_j^*) — суть критические точки лагранжиана $L(x, \lambda) = \langle Ax, x\rangle - \lambda\langle x, x\rangle$. Разумеется, λ_j^* собственные значения матрицы A.

Если $\lambda_1^* \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n^*$, то λ_1^* равно глобально минимальному значению $\langle Ax, x\rangle$ на сфере $\langle x, x\rangle = 1$.

• Забегая несколько вперед[4], решим задачу

$$\sum_{i=1}^{n} r_i\sqrt{x_i} \to \max, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = X, \tag{2.4}$$

которую можно интерпретировать как оптимальное распределение ресурса X по n ячейкам с эффективностью $r_i\sqrt{x_i}$ от использования ресурса в количестве x_i.

[3] См. обоснование «лагранжевой» идеологии с помощью *штрафных функций* (раздел 2.9).

[4] «Забегание вперед» связано с присутствием ограничений $x_i \geqslant 0$.

Действуя по регламенту, получаем:

$$L(x,\lambda)=\sum_{i=1}^{n} r_i\sqrt{x_i}-\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - X\right),$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}=\frac{r_i}{2\sqrt{x_i}}-\lambda=0,\quad \sum_{i=1}^{n} x_i = X,\quad i=1,\ldots,n.$$

Решение последней системы уравнений дает оптимальное распределение ресурса:

$$x_i^*=X\frac{r_i^2}{\sum\limits_j r_j^2},$$

а также значение множителя Лагранжа

$$\lambda^*=\frac{1}{2}\sqrt{\sum_j\frac{r_j^2}{X}},$$

с которым пока не ясно, что делать (см. раздел 2.6).

Итоговая формула получается в результате бесхитростного решения вышестоящей системы уравнений — и нуждается по этой причине в обосновании того, что найден действительно максимум. В первую очередь требует проверки возможность более эффективного решения на границе неотрицательного ортанта. Такая возможность исключена, так как производная в нуле любой функции $r_i\sqrt{x_i}$ бесконечна и, следовательно, у каждой ячейки в нуле бесконечна скорость роста эффективности. Поэтому какое-то количество ресурса всем надо давать — иначе заведомо можно получить выигрыш, передав малую часть ресурса той ячейке, которая ничего не получила.

Таким образом, решение должно лежать внутри рассматриваемой области и обязано улавливаться методом множителей Лагранжа. Поскольку «метод» других стационарных решений не обнаружил — на этом можно ставить точку.

Рассмотрим теперь ситуацию двух ограничений

$$g_1(x)=0 \quad \text{и} \quad g_2(x)=0.$$

Как уже отмечалось в начале раздела, чтобы оставаться на поверхности $g(x)=0$, можно двигаться только перпендикулярно градиенту $\nabla g(x)$. В данном случае надо оставаться на обеих поверхностях одновременно, чего можно достичь, смещаясь перпендикулярно как $\nabla g_1(x)$, так и $\nabla g_2(x)$. Другими словами, двигаться можно лишь перпендикулярно плоскости, проходящей через оба градиента. Если градиент целевой функции $\nabla f(x)$ лежит вне этой плоскости, то у него есть составляющая в разрешенном направлении, и значение $f(x)$ можно улучшать. В противном случае,

$$\nabla f(x) = \lambda_1 \nabla g_1(x) + \lambda_2 \nabla g_2(x) \quad \textit{при некоторых} \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0,$$

разрешенных направлений нет, и соответствующая точка x — кандидат на решение.

Разумеется, как и выше, нужны оговорки насчет вырожденных случаев, к каковым теперь добавляется возможность касания в точке x поверхностей $g_1(x) = 0$ и $g_2(x) = 0$, при которой градиенты $\nabla g_1(x)$ и $\nabla g_2(x)$ оказываются линейно зависимы.

2.2. Общий случай

Аналогично предыдущему общая задача

$$f(x) \to \min, \quad g_1(x) = 0, \quad \ldots, \quad g_m(x) = 0, \tag{2.5}$$

заменяется оптимизацией *лагранжиана*

$$L(x, \lambda) = f(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x) \tag{2.6}$$

по x при надлежащем выборе $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

В результате поиск *условного экстремума* (2.5) сводится к решению системы уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_k}, \quad g_1(x) = 0, \quad \ldots, \quad g_m(x) = 0, \quad k = 1, \ldots, m,$$

но это, конечно, лишь стержень методики.

Картину портят *вырожденные случаи*, на рассмотрение которых уходит много энергии, но с очень низким к. п. д. Низкая эффективность такой работы определяется двумя обстоятельствами. Во-первых, многие исключения тривиальны и скучны. Во-вторых, *вырожденные случаи* на фоне *ситуаций общего положения*[5] — всего лишь «точка в континууме».

---

[5] *Ситуациями общего положения* принято называть обстоятельства, в которых исключены редкие совпадения. Прямые не параллельны, точки не совпадают и т. п. Конкретное понимание термина определяется контекстом.

Последнее обстоятельство создает впечатление, что уйти от рассмотрения исключительных вариантов совсем просто. Достаточно «слегка пошевелить» условия. Подобный трюк действительно экономит усилия, но иногда анализ вырожденных случаев неизбежен. Например, при изучении зависимости поведения системы от параметра. На том стоит вся *теория бифуркаций*. Меняющийся параметр натыкается на аномалию, которую «не обойдешь», — и это определяет характер возникающей метаморфозы. Кроме того, вырожденные случаи бывают нетривиальны[6], что возбуждает «писателей» и расстраивает читателей.

2.2.1. Теорема. *Если точка x^* есть решение задачи* (2.5), *то*[7] *найдутся такие числа $\lambda_0^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*$, не все равные нулю, что*

$$\lambda_0^* \nabla f(x^*) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*). \tag{2.7}$$

Условие (2.7) вместе с $g_1(x^*) = 0, \ldots, g_m(x^*) = 0$ образуют систему $n + m$ уравнений относительно $n + m + 1$ неизвестных

$$x_1, \ldots, x_n; \quad \lambda_0^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*.$$

Однородность по λ (произвольное ненулевое λ_k можно положить равным единице) позволяет систему считать замкнутой (число неизвестных и уравнений совпадает).

Таким образом, замена лагранжиана (2.6) функцией

$$L_0(x, \lambda) = \lambda_0 f(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x)$$

позволяет в формулировке теоремы 2.2.1 обойтись без оговорок. На практике обычно полагают $\lambda_0 = 1$, и если в процессе решения что-то настораживает, начинают разбираться в чем дело.

Любые предположения, позволяющие исключить в (2.7) случай $\lambda_0 = 0$, — например, линейная независимость градиентов $\nabla g_1(x^*), \ldots, \nabla g_m(x^*)$, — называют *условиями регулярности*.

[6] Достаточно вспомнить жордановы формы матриц [6, т. 3].

[7] Гладкость рассматриваемых функций в данном разделе везде подразумевается.

2.3. Нелинейное программирование

Задача *нелинейного программирования*,

$$
\begin{aligned}
&f(x) \to \min, \\
&g_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \\
&h_j(x) \leqslant 0, \quad j = 1, \dots, r,
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

отличается от (2.5) наличием дополнительных ограничений в виде неравенств. Кстати, ограничения в (2.8) удобно записывать в векторном виде: $g(x) = 0$, $h(x) \leqslant 0$. Элементы x, удовлетворяющие ограничениям задачи, называются *допустимыми решениями*.

Присутствие в ограничениях неравенств, особенно типа $x \geqslant 0$, — вещь характерная. Более того, с помощью дополнительных переменных задача (2.8) приводится к виду

$$
f(x) \to \min, \quad g(x) = 0, \quad h(x) + z = 0, \quad z \geqslant 0, \tag{2.9}
$$

где из неравенств фигурирует только неотрицательность координат.

Если решение x^* задачи (2.8), равносильно (2.9), удовлетворяет неравенству $h_j(x^*) < 0$, то ограничение $h_j(x^*) \leqslant 0$ роли не играет, и его можно не принимать в расчет. Такого сорта *ограничения* называют *пассивными*, в отличие от — *активных*, характеризуемых выходом решения на границу: $h_j(x^*) = 0$.

2.3.1. Теорема Каруша–Джона. *Если точка x^* есть решение задачи (2.8), то найдутся такие числа $\lambda_0^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*$ и $\mu_1^*, \dots, \mu_r^*$, не все равные нулю, что*[8)]

$$
\lambda_0^* \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{r} \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0, \tag{2.10}
$$

[8)] За кадром имеется в виду лагранжиан

$$
L_0(x, \lambda, \mu) = \lambda_0 f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x) + \sum_{j=1}^{r} \mu_j h_j(x).
$$

Обратите внимание на знаки.

причем $\lambda_0^* \geqslant 0$, *все* $\mu_j^* \geqslant 0$ *и*

$$\mu_j^* h_j(x^*) = 0, \quad j = 1, \ldots, r. \tag{2.11}$$

Равенства (2.11) называются *условиями дополняющей нежесткости* и проистекают из отмеченного выше соображения о несущественности пассивных ограничений. Если $h_j(x^*) \neq 0$, то соответствующий множитель Лагранжа $\mu_j^* = 0$, в силу (2.11), — что равносильно исключению неравенства $h_j(x) \leqslant 0$ из списка ограничений. Гарантия положительности коэффициентов μ_j^* у активных ограничений очевидна в связи со знаком неравенств $h_j(x) \leqslant 0$.

Уравнения (2.10), (2.11) вместе с m ограничениями $g_i(x) = 0$ и учетом однородности по множителям Лагранжа — приводят в соответствие число уравнений и неизвестных[9]. Поскольку теорема 2.3.1 дает лишь необходимые условия, которым обязано удовлетворять решение задачи (2.8), ни о чем больше можно не упоминать. В большинстве случаев эти условия позволяют получить желаемое.

Но возможны также осложнения, связанные с обстоятельствами, которые принято характеризовать как вырожденные. Например:

- Функция $f(x)$ имеет безусловный минимум на границе.
- Градиенты функций, определяющих ограничения, оказываются линейно зависимы.
- Нет допустимых решений, т. е. отсутствуют точки x, удовлетворяющие ограничениям.

В последнем случае система уравнений (2.10), (2.11) плюс $g(x) = 0$ — может иметь решение, но оно не удовлетворяет ограничениям, и задача (2.8) оказывается неразрешимой. Теорема 2.3.1 формально справедлива, поскольку исходное предположение просто не выполняется.

В первых двух случаях теорема также остается справедливой, но эффективность ее падает, потому что соответствующая система уравнений несет на себе следы не вполне нормальной ситуации.

---

[9] Вместо упоминания об однородности — можно добавить уравнение

$$|\lambda_0^*| + \ldots + |\lambda_m^*| + |\mu_1^*| + \ldots, |\mu_r^*| = 1.$$

Решений оказывается слишком много, и без понимания того, что происходит за кадром, выбрать нужное — не так просто, особенно, если речь идет о «слепом» машинном поиске.

Многие руководства, пытаясь помочь неопытным пользователям, раскладывают возникающие варианты по полочкам в форме многочисленных теорем. Эффект получается, вообще говоря, отрицательный. С одной стороны, возникает иллюзия наличия рецептов на все случаи жизни. С другой — этими рецептами при недопонимании предмета обязательно пользуются невпопад. Сказывается и «слепое чтение» теорем, при котором из поля зрения ускользают многие предположения из-за непонимания их роли, не говоря об общей потере ориентации, когда все мешается воедино. Поэтому при столкновении с нетипичными ситуациями необходимо понимание «подводных течений». Готовые инструкции часто дают сбой.

(!) *Обратим внимание, что множители Лагранжа* λ_j^*, *как и* μ_i^*, *можно считать неотрицательными. Для этого надо лишь к лагранжиану прибавлять* $\lambda_j g_j(x)$ *с «правильным» знаком. Дело в том, что каждое ограничение* $g_j(x) = 0$ *равносильно двум ограничениям* $g_j(x) \geqslant 0$, $g_j(x) \leqslant 0$, *одно из которых в экстремальной точке активно, другое — пассивно. Изменением знака перед* g_j *активные ограничения всегда можно привести к виду «меньше или равно нулю», и тогда из активных — остаются только ограничения вида* $h_i(x) \leqslant 0$.

2.4. Вопросы существования

Проблема разрешимости конечномерных задач оптимизации нередко объявляется элементарной. Отчасти это эмоции на фоне несравнимо более сложных вариационных задач в функциональных пространствах. Отчасти — факт, если экстремум ищется на компактном множестве.

В общем случае решение существовать не обязано. Понятно, например, что задача

$$f(x) = x_1 \to \max, \qquad x_1 - \operatorname{arctg} x_2 = 0$$

не имеет решения.

2.4.1. Теорема. *Пусть в задаче*[10] *на условный* ***минимум*** *существуют допустимые решения, и функционал $f(x)$ неограниченно растет на бесконечности,*

$$f(x) \to \infty \quad \textit{при} \quad \|x\| \to \infty.$$

Тогда условный минимум существует, в том числе — глобальный.

Результат простой (см. теорему 1.5.1), но часто полезный, — гарантирует, например, существование глобального минимума в задаче

$$\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle \to \min, \quad Bx = c,$$

если матрица A положительно определена.

В общем случае можно пользоваться топологическими результатами о разрешимости параметрических уравнений

$$L(x, \lambda) = 0.$$

Идея заключается в рассмотрении топологических свойств поля $\nabla L(x, \lambda)$ при различных значениях λ. Если, например, ***вращения векторных полей*** [6, т. 1] $\nabla L(x, \lambda_1)$ и $\nabla L(x, \lambda_2)$ на границе некоторой области Ω не совпадают, то на любой параметрической кривой $\lambda(t)$, соединяющей точки λ_1 и λ_2, существует решение $\nabla L[x^*, \lambda(t^*)] = 0$ на $\check{\Omega}$.

2.5. Достаточные условия

При безусловной минимизации к необходимому условию минимума, $\nabla f(x) = 0$, можно добавить неотрицательную определенность матрицы $\nabla^2 f(x)$. Условие $\langle\nabla^2 f(x)y, y\rangle > 0$ при $y \neq 0$, в совокупности с $\nabla f(x) = 0$, обеспечивает *достаточность*. Нечто подобное имеет место и в задаче условной минимизации.

Например, в задаче (2.5) возникает приблизительно та же ситуация после замены $f(x)$ лагранжианом $L(x, \lambda)$. Остановимся пока на необходимом условии.

[10] Неважно какой, (2.5) или (2.8).

2.5.1. Теорема. *Если все функции в регулярной задаче* (2.5) *дважды непрерывно дифференцируемы,* x^* *— точка минимума, а* $\lambda^* \geqslant 0$ *— соответствующий (векторный) множитель Лагранжа, то квадратичная форма* $\langle \nabla_x^2 L(x^*, \lambda^*)y, y\rangle$ *неотрицательна для* y*, лежащих в подпространстве*[11] $\nabla g(x^*)y = 0$.

◄ Пусть произвольная гладкая параметрическая кривая $x(\tau)$ лежит в множестве $g(x) = 0$ и при $\tau = 0$ проходит через x^*, т.е. $x^* = x(0)$. Дифференцируя первую производную

$$\frac{df[x(0)]}{d\tau} = \sum_i \frac{\partial f[x(0)]}{\partial x_i} x_i'(0) = \langle \nabla f[x(0)], x'(0)\rangle$$

еще раз, получаем

$$\frac{d^2 f[x(0)]}{d\tau^2} = \langle \nabla^2 f[x(0)]x'(0), x'(0)\rangle + \langle \nabla f[x(0)], x''(0)\rangle. \tag{2.12}$$

Аналогично

$$\frac{d^2\{\lambda^* g[x(0)]\}}{d\tau^2} = \langle \nabla^2\{\lambda^* g[x(0)]\}x'(0), x'(0)\rangle + \langle \nabla\{\lambda^* g[x(0)]\}, x''(0)\rangle. \tag{2.13}$$

Складывая теперь (2.12) и (2.13) и учитывая, что x^*, λ^* — критическая точка лагранжиана, получаем $\langle \nabla^2 L(x^*, \lambda^*)x'(0), x'(0)\rangle \geqslant 0$. ►

Разумеется, если $\langle \nabla_x^2 L(x^*, \lambda^*)y, y\rangle \geqslant 0$ *при любом* y, то условия теоремы 2.5.1 выполнены тем более.

Перейдем к *достаточным условиям.*

2.5.2. Теорема. *Пусть все функции в регулярной задаче* (2.5) *дважды непрерывно дифференцируемы,* x^* *— критическая точка,* $\lambda^* \geqslant 0$ *— соответствующий (векторный) множитель Лагранжа, и*

$$\langle \nabla_x^2 L(x^*, \lambda^*)y, y\rangle > 0 \tag{2.14}$$

для любого $y \neq 0$*, удовлетворяющего условию* $\nabla g(x^*)y = 0$*. Тогда* x^* *— точка изолированного минимума в задаче* (2.5).

◄ Допустим противное. Тогда найдется последовательность $x^k \to x^*$, удовлетворяющая ограничениям $g(x^k) = 0$, на которой

$$f(x^k) \leqslant f(x^*).$$

[11] Имеется в виду $\langle \nabla g_j(x^*), y\rangle = 0$, $j = 1, \ldots, m$.

Деля каждое равенство

$$0 = g_i(x^k) - g_i(x^*) = \langle \nabla g_i(x^*),\ x^k - x^* \rangle + o(\|x^k - x^*\|)$$

на $\|x^k - x^*\|$ и переходя к пределу, получаем $\nabla g(x^*)y = 0$, где

$$\frac{(x^k - x^*)}{\|x^k - x^*\|} \to y.$$

Далее,

$$0 \geqslant f(x^k) - f(x^*) = L(x^k, \lambda^*) - L(x^*, \lambda^*) =$$
$$= \langle \nabla_x^2 L(x^*, \lambda^*)(x^k - x^*),\ (x^k - x^*) \rangle + o(\|x^k - x^*\|^2),$$

что после деления на $\|x^k - x^*\|^2$ и перехода к пределу ($k \to \infty$) приводит к неравенству

$$\langle \nabla_x^2 L(x^*, \lambda^*)y,\ y \rangle \leqslant 0,$$

противоречащему (2.14). ▶

Задача нелинейного программирования (2.8) охватывается теоремами 2.5.1 и 2.5.2 после включения в список ограничений вида $g_j(x) = 0$ активных неравенств $h_i(x) \leqslant 0$.

Ясность приведенным результатам придает рассмотрение случая выпуклых функций (глава 4), в котором *теорема Куна—Таккера* гарантирует, что критическая точка лагражиана является седловой (минимум по x, максимум по λ, — см. теорему 4.1.3).

Эквивалентом требования положительной определенности матрицы $\nabla^2 L$ на элементах y, удовлетворяющих условию $Gy = 0$, $G = \nabla g$, — является положительная определенность матрицы

$$\nabla^2 L + \gamma G^T G$$

при достаточно больших γ. (?)

2.6. Интерпретация множителей Лагранжа

Прозрачность идеологии множителей Лагранжа создает опасность пройти мимо важных обстоятельств. (!)

Имеется естественный повод задуматься. В результате решения экстремальных задач определяются ненужные (вроде бы) коэффициенты $\lambda_0^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*$ и $\mu_1^*, \ldots, \mu_r^*$. Но они, понятно, говорят о чем-то, что может представлять дополнительный интерес, а то и первоочередной [12].

Частично секрет уже раскрыт *условиями дополняющей нежесткости*: если $\mu_j^* = 0$, то соответствующее ограничение $h_j(x) \leqslant 0$ пассивно.

С целью дальнейшего «расследования» возьмем задачу с одним ограничением

$$f(x) \to \min, \quad g(x) = b, \tag{2.15}$$

отличающуюся от (2.3) наличием числового параметра b.

Пусть $\{x^*(b), \lambda^*(b)\}$ обозначает экстремальную точку соответствующего (2.15) лагранжиана

$$L(x, \lambda) = f(x) - \lambda[g(x) - b].$$

Дифференцируя

$$L(b) = L[x^*(b), \lambda^*(b)],$$

получаем

$$\frac{dL}{db} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{dx_i^*}{db} - \frac{d\lambda^*}{db}[g(x^*(b)) - b] - \lambda^*(b)\left[\sum_i \frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{dx_i^*}{db} - 1\right]. \tag{2.16}$$

В (2.16) оба выражения в квадратных скобках равны нулю по причине $g(x^*(b)) \equiv b$. Поэтому

$$\boxed{\frac{dL}{db} = \frac{df}{db},}$$

где

$$\frac{df}{db} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{dx_i^*}{db}.$$

С другой стороны, группируя в (2.16) слагаемые иначе:

$$\frac{dL}{db} = \sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda^*(b)\frac{\partial g}{\partial x_i}\right]\frac{dx_i^*}{db} + \lambda^*(b),$$

получаем $dL/db = \lambda^*(b)$. В итоге:

$$\boxed{\frac{df}{db} = \lambda^*(b).} \tag{2.17}$$

---

[12] Как ни странно звучит, потребитель обычно не знает, чего хочет. Точно так же, любая задача — лишь ступень к пониманию того, какую задачу на самом деле надо решать.

Таким образом, $\lambda^*(b)$ показывает скорость роста оптимального значения целевой функции f по параметру b. Иными словами, представляет собой *цену ограничения*. Еще говорят о *чувствительности* оптимума по отношению к ограничению.

В задаче распределения ресурса (2.4), например,

$$\lambda^* = \frac{1}{2}\sqrt{\sum_j \frac{r_j^2}{X}}$$

дает зависимость суммарного эффекта от использования ресурса[13] X системой в целом. Это значение λ^* при использовании в качестве реальной цены на ресурс имеет то преимущество, что индивидуальная прибыль

$$r_i\sqrt{x_i} - \lambda^* x_i$$

каждого элемента достигает максимума при тех значениях ресурса x_i^*, которые оптимальны по суммарному критерию, т. е. для всего «коллектива».

В случае m ограничений $g_j(x) - b_j = 0$ чуть более громоздкие выкладки приводят к обобщению (2.17):

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial b_j} = \lambda_j^*.} \qquad (2.18)$$

Аккуратная формулировка здесь нуждается в определенных оговорках насчет существования зависимостей $x^*(b)$, $\lambda^*(b)$, но детали целесообразно оставить за пределами рассмотрения, ничего особенно не теряя. Если все складывается, как в приведенной выше задаче распределения ресурса, — оговоркам цена ноль. Если же возникают осложнения, то в задачу проще вникать конкретно, ибо многословные универсальные рецепты могут сослужить даже плохую службу из-за перегрузки деталями, не относящимися к делу.

2.7. «Двойственные» задачи

Вернемся к задаче (2.15) с одним ограничением. На рис. 2.2 изображены линии постоянного уровня функций $f(x)$ и $g(x)$. Поскольку, как уже отмечалось, градиенты в экстремальной точке должны быть

[13] При условии его оптимального распределения внутри системы.

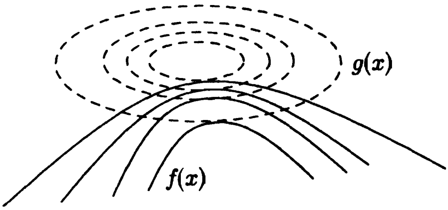

Рис. 2.2

коллинеарны, решение задачи x^* будет точкой касания линий постоянного уровня

$$f(x) = c \quad \text{и} \quad g(x) = b.$$

При таком угле зрения понятно, что нет разницы, идет ли речь о задаче «$f(x) \to \min$, $g(x) = b$» или о *двойственной задаче* «$g(x) \to \max$, $f(x) = c$».

Смена минимума на максимум при переходе к двойственной задаче на данном этапе рассмотрения проблемы в определенной степени условна. Проще говорить об экстремуме в той и другой задаче. Есть две функции, f и g, и получается, что нет разницы, какую из них оптимизировать при поддержании значения второй — на заданном уровне. Уточнение сорта оптимизации (минимум или максимум) возникает при некотором углублении в задачу, когда в поле зрения попадает «правильное» построение лагранжиана (за счет «правильного» выбора знака, см. замечание к теореме 2.3.1).

В случае более общей задачи

$$f(x) \to \min, \quad g_1(x) = 0, \quad \ldots, \quad g_m(x) = 0$$

возникает аналогичная ситуация. С точки зрения поиска стационарных точек нет особой разницы, какая функция в наборе

$$\{f(x),\, g_1(x),\, \ldots,\, g_m(x)\}$$

оптимизируется, а какие — описывают ограничения.

2.8. Принцип Ле Шателье—Самуэльсона

Рассмотрим задачу на условный экстремум весьма общего вида:

$$\varphi(x, \lambda) \to \min, \quad x \in X_\lambda, \tag{2.19}$$

где векторный параметр λ принимает значения из некоторого множества Λ.

Допустим, при любом $\lambda \in \Lambda$ множество X_λ не пусто и задача (2.19) имеет решения, совокупность которых обозначим через $\Omega(\lambda)$. Для любых $x_1 \in \Omega(\lambda_1)$, $x_2 \in \Omega(\lambda_2)$, очевидно,

$$\varphi(x_1, \lambda_1) \leqslant \varphi(x_2, \lambda_1), \qquad \varphi(x_2, \lambda_2) \leqslant \varphi(x_1, \lambda_2),$$

откуда

$$\varphi(x_1, \lambda_1) - \varphi(x_1, \lambda_2) \leqslant \varphi(x_2, \lambda_1) - \varphi(x_2, \lambda_2). \tag{2.20}$$

В частном случае $\Lambda = \mathbb{R}^n$, $X_\lambda = \mathbb{R}^n$,

$$\varphi(x, \lambda) = \psi(x) + \langle \lambda, x \rangle,$$

неравенство (2.20) приводит к

$$\langle \lambda_1 - \lambda_2, x_1 - x_2 \rangle \leqslant 0, \tag{2.21}$$

что принято называть ***принципом Ле Шателье—Самуэльсона*** для экстремальной задачи.

В задаче распределения ресурсов это означает рост закупок при уменьшении отдельной цены. Вывод кажется малоценным. Но то же самое можно сказать о ***физическом законе Ле Шателье***[14]. Уменьшение объема повышает давление — очевидно. Однако тривиальность — всего лишь впечатление, базирующееся на жизненном опыте.

Векторный вариант (2.21) интуицией уже не охватывается, и приводит к некоторым полезным следствиям. Имеется в виду следующее. В достаточно свободных предположениях неравенство (2.21) будет строгим (разумеется, при $\lambda_1 \neq \lambda_2$), и тогда зависимость $x(\lambda)$, «цены — закупки», оказывается ***P-отображением*** с массой полезных следствий (невырожденность матрицы Якоби, глобальная обратимость отображения — см. [6, т. 3]).

2.9. Штрафные функции

Вернемся к задаче (2.5) и перепишем ее в виде

$$f(x) \to \min, \quad g(x) = 0, \quad g = \{g_1, \ldots, g_m\}. \tag{2.22}$$

[14] Внешнее воздействие, выводящее систему из равновесия, вызывает в ней процессы, стремящиеся ослабить результаты этого воздействия.

Легко видеть, если к $f(x)$ добавить *штраф* $\mu g^2(x)$ за нарушение ограничений [15], — *безусловная* минимизация функционала

$$f_\mu(x) = f(x) + \mu g^2(x) \tag{2.23}$$

при достаточно больших μ будет давать сколь угодно точное решение x_μ задачи (2.22).

Сказанное нуждается в уточнении. Пусть x^* — изолированная точка локального минимума в задаче (2.22), а U — ее достаточно малая компактная окрестность. Тогда глобальный минимум x_μ функционала (2.23) на U будет сходиться к x^* при $\mu \to \infty$.

В случае непрерывной дифференцируемости градиент $f_\mu(x)$ в точке x_μ равен нулю,

$$\nabla f(x_\mu) + 2\mu \sum_j g_j(x_\mu)\nabla g_j(x_\mu) = 0, \tag{2.24}$$

а поскольку $x_\mu \to x^*$ при $\mu \to \infty$, то

$$2\mu g_j(x_\mu) \to \lambda_j^* \quad (\mu \to \infty),$$

что дает новую схему обоснования *метода множителей Лагранжа.*

Можно также разделить (2.24) предварительно на

$$\sqrt{1 + \mu^2 \sum_j g_j^2(x_\mu)},$$

получая в пределе необходимое условие оптимума (2.22) в форме

$$\lambda_0^* \nabla f(x^*) + \sum_j \lambda_j^* \nabla g_j(x^*) = 0, \qquad \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2 \sum_j g_j^2(x_\mu)}} \to \lambda_0^*,$$

не требующей оговорок насчет *регулярности* задачи.

Метод штрафных функций прост идеологически и достаточно эффективен с вычислительной точки зрения. Понятно, что он

[15] Под $g^2(x)$ подразумевается $\langle g(x), g(x)\rangle$.

легко модифицируется под различные задачи условной оптимизации далеко за пределами постановки (2.22). При этом идея может использоваться не только как алгоритмическая основа, но и как удобная схема для получения теоретических выводов. Например, для обоснования необходимых и достаточных условий оптимума.

2.10. Механика и обобщенные координаты

На условную минимизацию,

$$f(x) \to \min, \quad g_1(x) = 0, \quad \dots, \quad g_m(x) = 0, \tag{2.25}$$

можно смотреть как на чисто механическую задачу, что дает новые полезные интерпретации.

Допустим, система состоит из N *точечных масс* m_ν, имеющих координаты $r_\nu = \{x_\nu, y_\nu, z_\nu\}$ и движущихся под действием *активных потенциальных сил* F_ν по закону Ньютона

$$m_\nu w_\nu = F_\nu,$$

где $w_\nu = \ddot{r}_\nu$ обозначает ускорение. При этом естественно говорить о движении изображающей точки в пространстве $3N = n$ измерений.

Выстраивая все переменные в один ряд $x = \{x_1, \dots, x_n\}$, можно говорить о движении $m_i\ddot{x}_i = F_i$ или более общем

$$m_i\ddot{x}_i + \beta_i\dot{x}_i = F_i(x),$$

где $F_i(x) = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$, а β_i — коэффициенты трения.

Если бы речь шла о безусловной минимизации потенциала $f(x)$, задача сводилась бы к поиску равновесия сил

$$F_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

При наличии связей, чтобы система оставалась на пересечении поверхностей $g_1(x) = 0, \dots, g_m(x) = 0$, необходимо действие дополнительных сил *реакции связей*. Обычно рассматривают только *идеальные связи*, порождающие силы реакции R_j, ортогональные поверхностям $g_j(x) = 0$, — другими словами, коллинеарные градиенту[16] $\nabla g_j(x)$, т. е. $R_j = \lambda_j \nabla g_j(x)$.

Результирующая сила реакции равна

$$R = \sum_j \lambda_j \nabla g_j(x),$$

где λ_j — неизвестные параметры (множители Лагранжа). Равновесие динамического процесса[17]

$$m_i \ddot{x}_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_j \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \tag{2.26}$$

в точности определяется уравнениями, совпадающими с обычными необходимыми условиями минимума для задачи (2.25).

Обобщенные координаты и силы. Хорошо известно, что уравнения (2.26) используются довольно редко. Механика идет другим путем, который заслуживает внимания и с точки зрения оптимизации.

При наличии m уравнений связи $g_1(x) = 0, \ \ldots, \ g_m(x) = 0$ любые $r = n - m$ из n переменных $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ могут быть выбраны независимо друг от друга, остальные m координат будут определяться решением системы уравнений $g(x) = 0$. На роль независимых переменных можно взять также какие-нибудь более удобные параметры $q_1, \ldots, q_r$, с помощью которых однозначно выражаются координаты, т. е.

$$x_i = x_i(q_1, \ldots, q_r) \quad i = 1, \ldots, n.$$

Переменные $q_1, \ldots, q_r$ называют *обобщенными координатами*, они хороши тем, что «развязывают» задачу. Уравнения связи упраздняются, переменные становятся независимыми, все перемещения

[16] Связь является идеальной, если работа ее сил реакции R_j на возможных перемещениях δx равна нулю, т. е. $\langle R, \delta x \rangle = 0$, но это и есть перпендикулярность R_j любому виртуальному перемещению δx, лежащему в касательной плоскости к $g_j(x) = 0$.

[17] Уравнения (2.26) в аналитической механике называются *уравнениями Лагранжа первого рода*.

δq — возможными. Виртуальные перемещения $\delta x = \{\delta x_1, \dots, \delta x_n\}$ определяются теперь из соотношений

$$\delta x_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

В результате связанному ограничениями движению исходной системы теперь отвечает *свободное* движение точки в координатном пространстве $\{q_1, \dots, q_n\}$. Каждая переменная q_i характеризует i-ю *степень свободы.*

Работа активных сил на допустимых перемещениях может быть записана как

$$\delta A = \sum_i F_i \delta x_i = \sum_j \left(\sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j,$$

где

$$Q_j = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$$

называют *обобщенной силой*, соответствующей координате q_i.

По пути манипуляций с обобщенными переменными механика уходит довольно далеко [6, т. 2], и этим можно в той или иной степени интересоваться, в зависимости от решаемых задач. Но о чем полезно помнить вообще, — так это о том, что оптимизационные задачи имеют механическую интерпретацию, и физический фундамент способен питать идеями голые схемы.

Что касается описанной выше трансформации задач, то это не что иное как тривиальная (вроде бы) замена переменных. Однако искусство, с которым механика умеет выделять обобщенные координаты и силы, дает пример того, насколько изящно и эффективно подобного сорта задачи могут решаться.

2.11. Примеры

Изложенное выше представляет собой общую идеологию оптимизации. Как всякая общая идеология, — она производит сильное

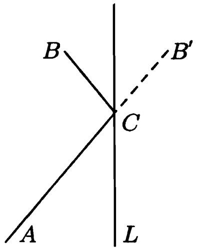

Рис. 2.3

впечатление поначалу, но потом тускнеет от частого употребления. При этом вычеркивается из памяти многое, что остается за бортом.

• Точка C на прямой L (рис. 2.3), обеспечивающая минимальную длину ломаной ACB, — определяется пересечением отрезка AB' с L, где точка B' симметрична B относительно L.

Это известная *задача Герона*, сохраняющая свежесть несмотря на возраст (порядка 2000 лет). Решение в рамках лагранжевой методики, конечно, не может конкурировать с изящным геометрическим трюком.

Пример лишний раз напоминает, что за пределами стандартной технологии остается много специфических приемов, способных решать отдельные задачи более эффективно.

• Вот другая задача,

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \ldots + \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \to \min,$$

$$(x_1 + \ldots + x_k)^2 + (y_1 + \ldots + y_k)^2 = R_k^2, \quad k = 1, \ldots, n-1,$$

все $x_j, y_j \geqslant 0$, суммы $\sum_j^n x_j$, $\sum_j^n y_j$ фиксированы.

Здесь можно дифференцировать лагранжиан, но проще заметить, что прямая короче ломаной (рис. 2.4) — и задача решена.

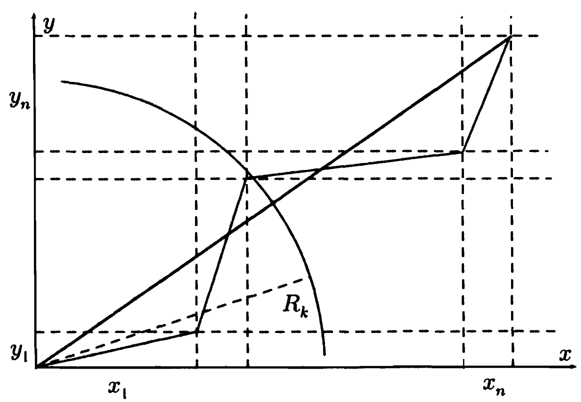

Рис. 2.4

• *Задача Шварца.* В остроугольный треугольник надо вписать треугольник *минимального периметра* с вершинами, лежащими на сторонах исходного.

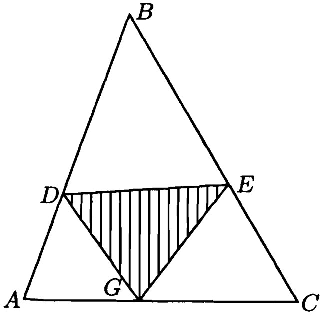

Рис. 2.5

Сделаем проволочную модель треугольника ABC (рис. 2.5). На AB, BC, AC оденем свободно скользящие кольца D, E, G, и соединим их резинками. Натяжение резинок пусть равно f и не зависит от величины растяжения. Потенциальная энергия в этом случае равна

$$U = f(DE + EG + GD). \qquad (2.27)$$

Модель, предоставленная сама себе, решает задачу автоматически. В равновесии достигается минимум (2.27), т. е. минимум периметра ΔDEG, а из условий равновесия очевидно, что равнодействующая сил растяжения в каждой точке D, E, G должна быть ортогональна соответствующей стороне ΔABC. Это уже другая задача, и ее решение известно: такой треугольник ΔDEG получается соединением оснований высот ΔABC.

По литературе рассеяно довольно много подобных задач, где ключ к решению дают физические или геометрические соображения, — что помогает противиться инерции единообразия. Но рецептура Лагранжа также достаточно сильна, — в том числе, в области геометрии и физики.

• Простой пример (*задача Евклида*). В треугольник вписать параллелограмм наибольшей площади (рис. 2.6).

Площадь параллелограмма, вписанного в треугольник со сторонами a, b, c (рис. 2.6), равна $xy \sin\alpha$. В итоге (после анализа подобных треугольников) вопрос сводится к задаче на условный максимум,

$$xy \to \max, \qquad bx + cy = bc,$$

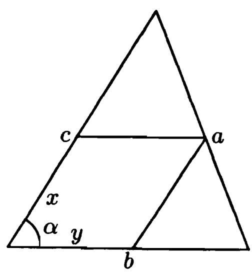

Рис. 2.6

которая легко решается с помощью лагранжева формализма. (**?**) Получается $x = c/2$, $y = b/2$, — вершины параллелограмма обязаны делить стороны исходного треугольника пополам.

Глава 3

Выпуклый анализ

Выпуклые задачи важны не потому, что распространены, а потому, что хорошо решаются. И хотя это похоже на «поиск под фонарем — ибо там хорошо видно», математика, как и Вселенная, именно так развивается. При этом знания, добытые в «выпуклой области», освещают многое за пределами.

3.1. Векторы и матрицы

Векторная и матричная техника [6, т. 3] подразумевается далее известной. Во избежание недоразумений кое-что напомним.

• *Скалярное произведение* определяется как $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$. Эквивалентные обозначения: $x \cdot y$, xy.

• *Базисом* называют линейно независимое множество $\{e_1, \ldots, e_n\}$ при условии, что любой вектор $x \in \mathbb{R}^n$ представи́м в виде линейной комбинации $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$. Величины $x_1, \ldots, x_n$ — есть координаты точки $x \in \mathbb{R}^n$. Число n векторов, составляющих базис, — определяет *размерность* пространства.

• Векторы x, y *ортогональны*, если $\langle x, y\rangle = 0$. *Плоскость* (*линейное подпространство*) определяется как множество элементов x, ортогональных некоторому вектору a, т. е. $\langle a, x\rangle = 0$.

• *Линейная функция* $y = \langle a, x\rangle = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ принимает постоянные значения $\langle a, x\rangle = \beta$ на *гиперплоскостях*, параллельных плоскости $\langle a, x\rangle = 0$.

• Таблицу коэффициентов $A = [a_{ij}]$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix},$$

называют *матрицей*, которая определяет *линейный оператор* $y = Ax$, сопоставляющий вектору x вектор y по правилу

$$y_i = \sum_j a_{ij}x_j, \quad i = 1, \ldots, n,$$

что задает тем самым умножение матрицы на вектор.

• Через $a_{i:}$ обозначается i-я строка матрицы A, через $a_{\cdot j}$ — j-й столбец, т. е.

$$a_{i:} = [a_{i1}, \dots, a_{im}], \quad a_{\cdot j} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}.$$

• По определению:

$$\gamma A = [\gamma a_{ij}], \quad A + B = [a_{ij} + b_{ij}].$$

Умножение A и B дает матрицу $C = AB$ с элементами

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}.$$

Иными словами, c_{ij} равно скалярному произведению i-й вектор-строки на j-й вектор-столбец, т. е. $c_{ij} = \langle a_{i:}, b_{:j} \rangle$.

• Матрица A^* (равносильно A^T) с элементами $a^*_{ij} = a_{ji}$ называется *транспонированной*.

• *Обратной* к A называют матрицу A^{-1}, такую что

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I,$$

где *единичная матрица* I определяет тождественный оператор $Ix \equiv x$.

• Векторное неравенство $x \leqslant y$ (равносильно $y \geqslant x$) означает совокупность покоординатных неравенств $x_i \leqslant y_i$, $i = 1, \dots, n$.

3.2. Выпуклые множества и конусы

Инструментарий выпуклого анализа [20] едва ли не шире ассортимента грузинской кухни, но обойтись в том и другом случае можно небольшим минимумом.

Множество X называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя точками $x, y \in X$ оно содержит отрезок, их соединяющий [1],

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in X, \quad \lambda \in [0, 1].$$

[1] В X, таким образом, должны быть определены линейные операции. Пока имеется в виду ситуация $X \subset \mathbb{R}^n$.

Линейную комбинацию $\sum_{j=1}^{N} \lambda_j \mathbf{f}_j$ точек $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_N\}$, при условии

$$\lambda_j \geqslant 0, \quad \sum_{j=1}^{N} \lambda_j = 1,$$

называют *выпуклой.*

Объединение всех выпуклых комбинаций *конечных* наборов точек из $X \subset \mathbb{R}^n$ называется *выпуклой оболочкой* множества X и обозначается $\operatorname{co} X$.

3.2.1. Теорема Каратеодори[2]**.** *Выпуклая оболочка всегда совпадает с объединением всевозможных выпуклых комбинаций конечных подмножеств $X \subset \mathbb{R}^n$, содержащих не более $n+1$ точек.*

Выпуклая оболочка X равносильно определяется как минимальное (по включению) выпуклое множество, содержащее X.

Аффинные множества. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется *аффинным*, если вместе с любыми двумя различными точками оно содержит проходящую через них прямую. В случае $0 \subset A$ множество A является линейным пространством. Всякое аффинное множество — есть пересечение *гиперплоскостей*, описываемых уравнениями вида $ax = \beta$. Совокупность решений системы линейных уравнений $Ax = b$ — есть аффинное множество.

Отображение S из R^m в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющее условию

$$S(\alpha x + \beta y) = \alpha Sx + \beta Sy, \quad \alpha + \beta = 1,$$

называется *аффинным*. Аффинное отображение — это всегда преобразование вида $S(x) = Ax + b$, где A — линейное отображение.

Отделимость. Выпуклые множества $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ называются *отделимыми* (*строго отделимыми*), если существует *разделяющая гиперплоскость* $H \subset \mathbb{R}^n$ $(ax = \beta)$, относительно которой множества располагаются в разных замкнутых (открытых) полупространствах H^+, H^-:

$$x \in X \Rightarrow ax \leqslant \beta \ (< \beta), \qquad x \in Y \Rightarrow ax \geqslant \beta \ (> \beta).$$

[2] Теорема Каратеодори тесно связана с *теоремой Хелли*, одна из другой легко выводится, см. [10].

3.2.2. Теорема отделимости. *Непересекающиеся замкнутые выпуклые множества X, Y всегда отделимы, и — строго отделимы, если хотя бы одно их этих множеств ограничено*[3].

Опорной гиперплоскостью к X называют гиперплоскость H, которая имеет хотя бы одну общую точку с X, и либо $X \subset H^+$, либо $X \subset H^-$.

• *У выпуклого множества всегда существует опорная гиперплоскость, проходящая через любую наперед заданную граничную точку.* Такое свойство, кстати, равносильно определению выпуклости.

• *Любое замкнутое выпуклое множество совпадает с пересечением всех содержащих его замкнутых полупространств.* Это еще одно характеристическое свойство.

Конусы. Замкнутое выпуклое множество $K \subset \mathbb{R}^n$, содержащее вместе с любой точкой $x \in K$ луч λx, проходящий через эту точку, называется *конусом*. Конус, не содержащий противоположных точек,

$$x \in K, \quad x \neq 0 \Rightarrow -x \notin K,$$

называют *острым*, или *заостренным*.

Множество K^*, состоящее из точек y, для которых скалярное произведение $yx \leqslant 0$ при любом $x \in K$, называется *двойственным конусом* по отношению к K. На рис. 3.1 изображен пример на плоскости.

При изучении линейных неравенств важную роль играют следующие легко проверяемые свойства[4]:

- $(K^*)^* = K$.
- $K + K^* = \mathbb{R}^n$.
- $K_1 \subset K_2 \Rightarrow K_1^* \supset K_2^*$.
- $(K_1 \cap K_2)^* = K_1^* + K_2^*$.
- $(K_1 + K_2)^* = K_1^* \cap K_2^*$.

---

[3] При варьировании предположений теоремы отделимости быстро «размножаются».

[4] Под суммой $X + Y$ подразумевается множество точек $z = x + y$, где $x \in X$, $y \in Y$.

Многогранники. Выпуклую оболочку конечного множества точек называют *многогранником.*

Пересечение F многогранника P с любой своей опорной гиперплоскостью называют *гранью многогранника*; k*-гранью*, если $\dim F = k$; 0-грани — *вершины*, 1-грани — *ребра.*

Каждая грань многогранника, в свою очередь, является многогранником. (?) *Всякий многогранник совпадает с выпуклой оболочкой своих вершин.* (?)

Пересечение конечного числа замкнутых полупространств называют *полиэдром.* Ограниченный полиэдр — многогранник.

Конусная техника. Докажем, для иллюстрации, следующее утверждение. *Для любой матрицы A либо существует ненулевой вектор $x \geqslant 0$ — такой, что $Ax \leqslant 0$, либо $yA > 0$ при некотором $y \geqslant 0$.*

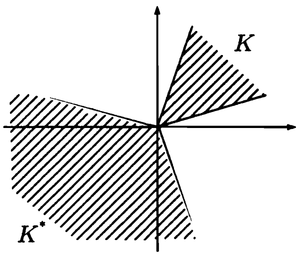

Рис. 3.1

◀ Множество решений системы $Ax \leqslant 0$ — есть конус $K = \{x : Ax \leqslant 0\}$, двойственный к которому:

$$K^* = \{x : x = yA,\ y \geqslant 0\}.$$

Совокупность положительных решений $Ax \leqslant 0$ является пересечением K с неотрицательным ортантом $\mathbb{R}^n_+$. Если ненулевых положительных решений нет, то $K \cap \mathbb{R}^n_+ = 0$, что влечет за собой $(K \cap \mathbb{R}^n_+)^* = \mathbb{R}^n$. Остается заметить,

$$(K \cap \mathbb{R}^n_+)^* = K^* + (\mathbb{R}^n_+)^* = \mathbb{R}^n,$$

где, очевидно, $(\mathbb{R}^n_+)^*$ представляет собой отрицательный ортант $\mathbb{R}^n_-$. Если теперь взять $u < 0$ ($u \in \mathbb{R}^n_-$), то условие $K^* + \mathbb{R}^n_- = \mathbb{R}^n$ влечет за собой (в силу $0 \in \mathbb{R}^n$)

$$yA = -u > 0, \quad y \geqslant 0. \ ▶$$

Теория линейных неравенств интересна и обширна, но линейность иногда маскирует более фундаментальные причины. Вот один из общих нелинейных результатов [20], влекущий за собой целую серию теорем о линейных альтернативах.

3.2.3. Теорема. *Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — выпуклые функции на выпуклом множестве X. Возможна одна и только одна из двух альтернатив:*

(i) *существует такой вектор $x \in X$, что*

$$\varphi_1(x) < 0, \quad \ldots, \quad \varphi_n(x) < 0;$$

(ii) *существует ненулевой вектор* $y = \{y_1, \dots, y_n\} \geqslant 0$, *такой, что*

$$y_1\varphi_1(x) + \ldots + y_n\varphi_n(x) \geqslant 0 \quad \text{при любом} \quad x \in X.$$

◄ Невозможность второй альтернативы при выполнении первой — очевидна. Остается показать: если (i) не имеет места, то выполняется (ii).

Пусть Z обозначает множество таких $z = \{z_1, \dots, z_n\}$, что все n неравенств $\varphi_j(x) < z_j$ разрешимы по $x \in X$.

Поскольку (i) не выполняется (по предположению), Z не пересекается с неположительным ортантом,

$$\mathbb{R}^n_- = \{x : x \leqslant 0\},$$

и потому Z и $\mathbb{R}^n_-$ могут быть отделены гиперплоскостью, что, собственно, и означает (в итоге несложного рассуждения) справедливость (ii). ►

Линейные следствия можно получать, выбирая

$$\varphi_j(x) = \sum_k a_{jk}x_k + b_j$$

и различные выпуклые множества в качестве X. Например, в случае $X = \mathbb{R}^n_+$ можно утверждать: либо $Ax < 0$ положительно разрешимо, либо $yAx \geqslant 0$ при некотором ненулевом $y \geqslant 0$ и любом $x \geqslant 0$. Последнее означает существование такого ненулевого $y \geqslant 0$, что $yA \geqslant 0$.

На этом пути в качестве X могут фигурировать различные конусы,

$$K = \{x : Bx \geqslant 0\} \quad \text{либо} \quad K = \{x : x = By,\ Dy \geqslant 0\},$$

или — многогранники, $M = \{x : Bx \leqslant b\}$, — что дает обозримо трактуемые результаты в отдельных случаях.

В бесконечномерных пространствах многие из перечисленных результатов сохраняют силу, но кое-что принципиально меняется. Не останавливаясь на рассмотрении общей ситуации (см. [13]), отметим, что определенный интерес может представлять новое для выпуклого анализа понятие *идеальной выпуклости* [6, т. 5, гл. 6].

Множество X в банаховом пространстве E называется *идеально выпуклым*, если

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots \in X$$

для любой последовательности $\{x_n\} \subset X$ и любой числовой последовательности $\{\alpha_n\}$, при условии $\alpha_n \geqslant 0$ и $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots = 1$.

В $\mathbb{R}^n$ идеальная выпуклость совпадает с обычной, однако линейное подпространство непрерывных функций в L_p выпукло — но не идеально. Не обязано быть идеально выпуклым ядро линейного функционала $f : E \to \mathbb{R}$ и другие выпуклые множества $X \subset E$.

Многие классические результаты функционального анализа на базе идеальной выпуклости доказываются очень просто [6, т. 5]. Это свидетельствует об определенной удаче — понятие улавливает специфику перехода к бесконечной размерности и отражает именно тот срез идеи выпуклости, которым имеет смысл ограничиться в функциональных пространствах[5]. Что же касается $\mathbb{R}^n$, то сужение обычной выпуклости до идеальной здесь вообще незаметно. Это касается многих математических понятий, для которых $\mathbb{R}^n$ — слишком грубый пробный камень. В связи с подобными ситуациями часто имеет смысл задуматься о целесообразных изменениях определений. О таких изменениях, на которые конечномерный анализ «не реагирует», а бесконечномерный — «откликается с благодарностью».

3.3. Выпуклые функции

Скалярная функция φ векторного аргумента считается *выпуклой*, если

$$\varphi[\lambda x + (1-\lambda)y] \leqslant \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y) \tag{3.1}$$

при любом $\lambda \in [0, 1]$. Неравенство (3.1) называют *неравенством Иенсена*. Другими словами, выпуклая функция $\varphi(x)$ имеет выпуклый *надграфик* — множество пар (z, x), таких что $z \geqslant \varphi(x)$. Надграфик обозначают как $\operatorname{epi}\varphi$.

Функция φ называется *вогнутой*, если «минус φ» выпукла.

К сказанному лучше ничего не добавлять, если не планируется использование *двойственности*. Если же рассчитывать на манипуляции *сопряженными функциями* (см. далее), то к выпуклым лучше сразу относить функции, имеющие право принимать бесконечные значения, при естественных правилах сложения и умножения с участием бесконечностей.

При этом любую выпуклую функцию, принимающую конечные значения на обычной области определения $\operatorname{dom}\varphi$, можно доопределить на всем пространстве $\mathbb{R}^n$, полагая $\varphi(x) = \infty$ вне $\operatorname{dom}\varphi$. Так доопределенные выпуклые функции, заданные на непустой области $\operatorname{dom}\varphi$, называют *собственными*. Иногда собственными называют функции, принимающие только конечные значения. Пример

[5] На аналогичные выгоды можно рассчитывать в задачах бесконечномерной оптимизации.

выпуклой несобственной функции:

$$\varphi(x)=\begin{cases}-\infty, & \text{для} \quad |x|<1,\\ 7, & \text{для} \quad |x|=1,\\ \infty, & \text{для} \quad |x|>1.\end{cases}$$

Детали и уточнения имеются в [20].

Правая производная

$$\varphi'_{+}(x)=\lim_{\Delta x\downarrow 0}\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}$$

выпуклой функции скалярного аргумента всегда существует и монотонно возрастает.

◀ Существование предела следует из монотонности убывания

$$\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}$$

при убывании Δx, что легко выводится из неравенства Иенсена. ▶

3.3.1. Теорема. *Для выпуклости дважды непрерывно дифференцируемой функции $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ достаточна неотрицательная определенность ее гессиана.*

◀ Результат широко известен. Доказательство имеет технический характер и легко строится на основе следующего результата. ▶

3.3.2. Теорема. *Для выпуклости непрерывно дифференцируемой функции $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ необходима и достаточна ее монотонность*[6]:

$$\forall\, x,y:\langle\nabla\varphi(x)-\nabla\varphi(y),\ x-y\rangle\geqslant 0. \tag{3.2}$$

◀ *Достаточность.* Если $\varphi(x)$ выпукла, то и

$$\xi(t)=\varphi[x-t(x-y)]$$

выпукла на $[0,1]$, откуда $\xi'(1)-\xi'(0)\geqslant 0$, что и есть (3.2), поскольку

$$\xi'(t)=-\langle\nabla\varphi[x-t(x-y)],\ x-y\rangle.$$

[6] Монотонность вида (3.2) и *монотонность по конусу* [6, т. 5] — разные понятия, для обозначения которых используется один и тот же термин.

Необходимость. По формуле конечных приращений:

$$(1-\lambda)\varphi(x)+\lambda\varphi(y)-\varphi[(1-\lambda)x+\lambda\varphi(y)]=$$
$$=(1-\lambda)\{\varphi(x)-\varphi[(1-\lambda)x+\lambda\varphi(y)]\}+\lambda\{\varphi(y)-\varphi[(1-\lambda)x+\lambda y]\}=$$
$$=\lambda(1-\lambda)\langle\nabla\varphi(u)-\nabla\varphi(v),x-y\rangle,$$

где $u-v=\alpha(x-y)$ при некотором $\alpha>0$. В итоге

$$(1-\lambda)\varphi(x)+\lambda\varphi(y)\geqslant\varphi\big[(1-\lambda)x+\lambda\varphi(y)\big].\quad\blacktriangleright$$

Принципиальную роль играет обязательная непрерывность выпуклой функции.

3.3.3. Теорема. *Любая выпуклая на $\mathbb{R}^n$ функция — непрерывна.*

◀ Без ограничения общности положим, что речь идет о непрерывности функции φ в точке $x=0$, причем $\varphi(0)=0$, чего всегда можно добиться изменением точки отсчета.

Пусть $\|x\|=\max\limits_i|x_i|$. В вершинах $\widehat{x}_j$ куба $C_r=\{x:\|x\|\leqslant r\}$ функция φ принимает значения $\varphi(\widehat{x}_j)$, максимальное среди которых обозначим μ.

Любая точка $x\in C_r$ представима в виде

$$x=\sum_j\lambda_j\widehat{x}_j,\quad\sum_j\lambda_j=1,$$

где все λ_j неотрицательны. Поэтому на C_r

$$\varphi(x)=\varphi\Big(\sum_j\lambda_j\widehat{x}_j\Big)\leqslant\sum_j\lambda_j\varphi(\widehat{x}_j)\leqslant\Big(\sum_j\lambda_j\Big)\mu\leqslant\mu.$$

Пусть теперь $0<\varepsilon\leqslant\mu$. Для $\|x\|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{\mu}r$ имеем, в силу выпуклости φ,

$$\varphi(x)\leqslant\frac{\varepsilon}{\mu}\varphi\Big(\frac{\mu}{\varepsilon}x\Big)+\Big(1-\frac{\varepsilon}{\mu}\Big)\varphi(0)\leqslant\varepsilon,$$

потому что $\dfrac{\mu}{\varepsilon}x\in C_r$.

Остается показать, что $\varphi(x)\geqslant-\varepsilon$ для x из той же окрестности $\|x\|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{\mu}r$. Это опять-таки следует из выпуклости φ,

$$0=\varphi(0)=\varphi\left[\frac{1}{1+\varepsilon/\mu}x+\frac{\varepsilon/\mu}{1+\varepsilon/\mu}\Big(-\frac{\mu}{\varepsilon}x\Big)\right]\leqslant\frac{1}{1+\varepsilon/\mu}\varphi(x)+\frac{\varepsilon/\mu}{1+\varepsilon/\mu}\varphi\Big(-\frac{\mu}{\varepsilon}x\Big),$$

поскольку $-\dfrac{\mu}{\varepsilon}x\in C_r$. Отсюда $\varphi(x)\geqslant-\varepsilon$.

Таким образом, $|\varphi(x) - \varphi(0)| \leqslant \varepsilon$, если $\|x\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{\mu} r$, что и доказывает непрерывность $\varphi(x)$. ►

Из теоремы 3.3.3 вытекает выпуклость и замкнутость[7] *лебеговых множеств* $L_\mu = \{x : \varphi(x) \leqslant \mu\}$, в том числе

$$L^* = \operatorname{Arg}\,\min \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

3.3.4. Лемма. *Производная $\varphi'_s(x)$ выпуклой функции φ в любой точке x по любому направлению s всегда существует. При этом производные $\varphi'_s(x)$ равномерно ограничены по s.*

◄ $$\varphi'_s(x) = \lim_{\tau \to +0} \frac{\varphi(x + \tau s) - \varphi(x)}{\tau} \leqslant \varphi(x+s) - \varphi(x) \leqslant$$
$$\leqslant \max_{\|s\|=1} [\varphi(x+s) - \varphi(x)].$$ ►

3.4. Субградиент и субдифференциал

При изучении негладких функций аппарату дифференцирования находится замена.

Вектор x^* называется *субградиентом* выпуклой функции φ в точке x, если

$$\boxed{\varphi(x + h) \geqslant \varphi(x) + \langle x^*, h \rangle} \qquad (3.3)$$

для любого h.

Множество *субградиентов* φ в x называется *субдифференциалом*[8] функции φ в точке x и обозначается $\partial\varphi(x)$.

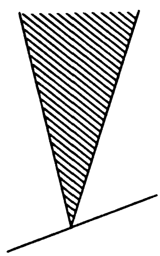

Рис. 3.2

• Если $\varphi(x)$ дифференцируема в точке x, субдифференциал совпадает с градиентом,

$$\partial\varphi(x) = \nabla\varphi(x). \quad (?)$$

• Субдифференциал модуля, $\varphi(x) = |x|$, равен $\operatorname{sign} x$ при $x \neq 0$ и сегменту $[-1, 1]$ при $x = 0$. (?)

---

[7] Но не ограниченность, — как показывает пример $\varphi(x) = e^x$.

[8] Терминология здесь слегка «плавает». Субдифференциал иногда называют также субградиентом.

- Касательная гиперплоскость (см. рис. 3.2)

$$\xi - \xi_0 = \langle v, x - x_0 \rangle,$$

где $\xi_0 = \varphi(x_0)$, $v \in \partial\varphi(x_0)$, — является опорной гиперплоскостью к надграфику выпуклой функции $\varphi(x)$ в точке $\{\xi_0, x_0\}$. (?)

3.4.1. Теорема. *Необходимым и достаточным условием глобального минимума выпуклой функции в точке x^* является:*

$$0 \in \partial\varphi(x^*).$$

◄ Речь идет о задаче $\varphi(x) \to \min$, $x \in \mathbb{R}^n$. *Необходимость.* Если x^* точка минимума φ, то $\varphi(x^* + \Delta x) \geqslant \varphi(x^*) + \langle 0, \Delta x \rangle$, что влечет за собой $0 \in \partial\varphi(x^*)$, в силу определения (3.3). *Достаточность.* Если 0 субградиент φ в точке x^*, то, в силу (3.3), $\varphi(x^* + \Delta x) \geqslant \varphi(x^*)$ для любого Δx. ►

Таким образом, выпуклость значительно упрощает ситуацию. Кроме минимумов, «*других экстремумов не бывает*». *Всякий локальный минимум автоматически является глобальным. Строгий минимум обязательно единствен.* Условие $0 \in \partial\varphi(x^*)$ не только необходимо, но и *достаточно.*

Останавливаться подробно на изучении субдифференциалов нет смысла. Это инструмент, аналогичный дифференцированию, требующий либо освоения, либо поверхностного взгляда. Середина нелогична, потому что не доводит дело до конца, но отбивает желание. Плюс к тому, проблема освоения — не в подробностях (их можно компактно изложить), а в фокусе внимания и практике. Надо отложить в сторону другие дела и какую-то часть жизни посвятить субградиентам[9], если на то есть основания. В противном статистически подавляющем случае необходимо сознательно ограничиться поверхностным взглядом.

Подобная рекомендация, конечно, идет вразрез с традицией. Математику, дескать, нельзя изучать поверхностно. А почему, собственно? Разумеется, где речь идет о подготовке трех выдающихся специалистов по экстремальным задачам, — там иной разговор, субградиенты им на роду написаны. Но никто не обязан с одинаковым усердием изучать все предметы. При этом «иметь представление» иногда требуется, и тогда приходится заглядывать в соседние области, не сжигая за собой мостов.

[9] Уединившись с одним из стандартных курсов, например, [11].

Сказанное пришлось к слову, и больше относится к ситуации *вообще*. Применительно к субградиентам оно не так уж актуально, поскольку основу субдифференцирования составляют несколько достаточно простых результатов [11], но проблема, как это часто бывает, заключается в понимании не умом, а нутром. Путь к такому пониманию обычный — решение задач и самостоятельное доказательство опорных фактов. Вот стандартный «теорминимум»:

(i) *Множество $\partial\varphi(x_0)$ в любой точке x_0 непусто, выпукло, замкнуто и ограничено.*

(ii) *Производная выпуклой функции φ в точке x_0 по любому направлению s всегда существует и определяется равенством*

$$\frac{\partial\varphi(x_0)}{\partial s} = \max_{z\in\partial\varphi(x_0)} \langle z, s\rangle.$$

(iii) Теорема Моро—Рокафеллара. *Если функции φ_1, φ_2 выпуклы, то*

$$\partial(\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \partial\varphi_1(x) + \partial\varphi_2(x).$$

(iv) Теорема Дубовицкого—Милютина. *Если функции φ_1, φ_2 выпуклы и $\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0)$, то*

$$\partial \max\{\varphi_1, \varphi_2\}(x_0) = \mathrm{co}\{\partial\varphi_1(x_0) \cup \partial\varphi_2(x_0)\}.$$

(v) *Если $\omega(x) = \varphi(Ax)$, где A прямоугольная матрица, то*

$$\partial\omega(x) = A^T\partial\varphi(Ax).$$

Под $\partial\varphi(Ax)$ здесь подразумевается субдифференциал φ по отношению к аргументу в точке Ax.

(vi) *В отсутствие дифференцируемости работает аналог теоремы* 3.3.2. *Выпуклая функция всегда монотонна*:

$$\forall\, x, y : \langle \partial\varphi(x) - \partial\varphi(y),\ x - y\rangle \geqslant 0.$$

(vii) *Если функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ выпуклы на открытом выпуклом множестве и*

$$\partial\varphi_1(x) \equiv \partial\varphi_2(x),$$

то разность $\varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ есть константа.

Сильная сторона субградиента, как инструмента, проявляется в унификации. В сведéнии рассуждений к цепочкам формул, не требующих оговорок. Такое свойство методики очень важно при использовании. Поэтому отработка деталей дает мастеру удобную технологию, но сильно раздражает пользователей, имеющих дело с готовыми результатами. Аналогичный комментарий можно дать к выпуклому анализу в целом. Там есть масса нюансов, которые мы обходим стороной, ограничиваясь рассмотрением *собственных функций*[10] $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Многие читатели испытывают раздражение по поводу функций, принимающих бесконечные значения. Им нет дела до потребностей сделать *функции-индикаторы*

$$\chi(\Omega) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega; \\ \infty, & x \notin \Omega \end{cases}$$

выпуклых множеств Ω — тоже выпуклыми.

3.5. Сопряженные функции

Графики выпуклых функций можно рассматривать двояко: как точечные множества и как огибающие опорных гиперплоскостей[11]. Подобная двойственность служит основой для извлечения выгод из перепасовывания результатов, которые трансформируются в новые факты при смене точки зрения.

Основой манипулирования служит, в частности, *представление выпуклой функции как максимума — линейных*[12]:

$$\varphi(x) = \max_z\bigl\{\varphi(z) + \langle s, x - z\rangle\bigr\}, \quad s \in \partial\varphi(z). \tag{3.4}$$

Последнее равносильно

$$\forall\, x : \langle s, z\rangle - \varphi(z) \geqslant \langle s, x\rangle - \varphi(x), \quad s \in \partial\varphi(z). \tag{3.5}$$

---

[10] Напомним, функцию называют *собственной*, если ее надграфик не пуст и не содержит вертикальных прямых, т. е. везде $\varphi(x) > -\infty$, но исключено $\varphi(x) \equiv +\infty$.

[11] А на замкнутые выпуклые множества (надграфики) можно смотреть как на пересечение содержащих их замкнутых полупространств, не считая альтернативного точечного описания.

[12] Точнее говоря, *аффинных*.

Произвол выбора субградиента s из $\partial\varphi(z)$ не влияет на результат, как будет видно из доказательства (3.4). Если $\varphi(x)$ дифференцируема в обычном смысле, то (3.4) переходит в

$$\varphi(x) = \max_z \big\{\varphi(z) + \langle \varphi'(z), x - z\rangle\big\}, \tag{3.6}$$

что *Беллман* называл *квазилинеаризацией.*

◀ Обоснование (3.4) совсем просто. В силу (3.3)

$$\varphi(x) \geqslant \varphi(z) + \langle s, x - z\rangle$$

для любого $s \in \partial\varphi(z)$, откуда

$$\varphi(x) \geqslant \sup_z \big\{\varphi(z) + \langle s, x - z\rangle\big\}, \tag{3.7}$$

но при $z = x$ в (3.7) достигается равенство, что влечет за собой (3.4). ▶

Выпуклой функции $\varphi(x)$ часто удобно сопоставлять — *сопряженную*

$$\varphi^*(y) = \sup_x \{\langle x, y\rangle - \varphi(x)\}, \tag{3.8}$$

базирующуюся на свойстве субградиента (3.5). Переход (3.8) называют *преобразованием Юнга—Фенхеля*, а также *преобразованием Лежандра*, что не совсем точно.

Если функция $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (не обязательно выпуклая) имеет невырожденный гессиан, *преобразование Лежандра* определяется как

$$\varphi^*(y) = \langle x, y\rangle - \varphi(x), \quad \text{где} \quad \nabla\varphi(x) = y.$$

Если при этом $\varphi(x)$ гладкая, строго выпуклая и растет на бесконечности быстрее линейной функции, то

$$\varphi^*(y) = \max_x \{\langle x, y\rangle - \varphi(x)\}. \tag{3.9}$$

Поэтому преобразование (3.8) является обобщением (3.9), связанным с заменой максимума на супремум и отказом от ряда требований. С другой стороны, преобразование Лежандра, в отличие от (3.8), определяется не обязательно для выпуклых функций.

Сопряженная функция всегда выпукла, но тут есть червоточинка. Легко убедиться, что сопряженная для $\varphi(x) = e^x$ есть функция, принимающая бесконечные значения: $\varphi^*(y) = y \ln (y/e)$ при $y \geqslant 0$, и $\varphi^*(y) = \infty$ при $y < 0$. Поэтому, если ограничиваться только функциями, принимающими конечные значения, то игровое поле оказывается слишком тесным.

Основу для извлечения инструментальных выгод из двойственности дают следующие результаты.

3.5.1. Теорема Моро—Фенхеля. *Если функция $\varphi(x)$ выпукла и замкнута*[13], *то $\varphi^{**}(x) = \varphi(x)$.*

3.5.2. Теорема. *Для выпуклой замкнутой функции $\varphi(x)$ и любых фиксированных $x, y \in \mathbb{R}^n$ — следующие условия эквивалентны:*

(i) $y \in \partial\varphi(x)$,

(ii) $x \in \partial\varphi^*(y)$,

(iii) $\langle x, y\rangle = \varphi(x) + \varphi^*(y)$.

◄ Из $y \in \partial\varphi(x)$ и определения субдифференциала следует

$$\forall u : \langle x, y\rangle - \varphi(x) \geqslant \langle u, y\rangle - \varphi(u),$$

откуда

$$\varphi^*(y) = \sup_u \{\langle u, y\rangle - \varphi(u)\} = \langle x, y\rangle - \varphi(x),$$

т. е. $(i) \Rightarrow (iii)$. Эта же цепочка легко проходится в обратном направлении, что в итоге обеспечивает эквивалентность (i) и (iii).

Аналогичное рассуждение, начатое с $x \in \partial\varphi^*(y)$, приводит к равенству

$$\varphi^{**}(x) = \langle x, y\rangle - \varphi^*(y),$$

что с учетом $\varphi^{**} = \varphi$ приводит к эквивалентности (ii) и (iii). ►

3.5.3. Неравенство Юнга[14]**.**

$$\varphi(x) + \varphi^*(y) \geqslant \langle x, y\rangle.$$

Для однородных выпуклых функций, $\varphi(\tau x) = \tau\varphi(x)$, $\tau \geqslant 0$, удовлетворяющих требованию $\varphi(x \neq 0) > 0$, — широко используется *полярная функция*

$$\varphi^d(y) = \max_{\varphi(x)=1} \langle x, y\rangle.$$

[13] Замкнутой называют функцию, имеющую замкнутый график.

[14] Сразу вытекающее из (3.8).

В указанных предположениях $\varphi(x)$ является нормой, а ***полярная функция двойственной нормой***,

$$\|y\|^d = \max_{\|x\|=1} \langle x, y \rangle.$$

Двойственная норма к двойственной — опять исходная, т. е. $\|x\|^{dd} = \|x\|$. Евклидова норма двойственна сама себе. Двойственная к *октаэдрической* норме,

$$\|x\|_l = \sum_i |x_i|,$$

— ***кубическая***,

$$\|x\|_m = \max_i |x_i|,$$

и наоборот[15].

3.6. Теорема Хелли

Как некто удачно заметил, ***чтобы развалить небольшое государство, достаточно подарить ему крейсер***. У выпуклого анализа для читателя есть довольно много подарков такого сорта. И хотя «мы должны думать не о том, что может пригодиться, а о том, без чего нельзя обойтись»[16], — аудитория впитывает то, что привлекательно. К изящным фактам подобного рода относится *теорема Хелли*.

3.6.1. Теорема. *Пусть* $\mathbb{S}$ *— конечное семейство из не менее чем* $n+1$ *выпуклых множеств*[17] *в* R^n. *Тогда, если каждые* $n+1$ *множеств из* $\mathbb{S}$ ***имеют непустое пересечение***, *то* ***пересечение всех множеств*** *из* $\mathbb{S}$ *не пусто.*

◄ Для $\mathbb{R}^0$ утверждение очевидно. Далее по индукции. Допустим, результат справедлив в R^n, покажем, что он остается в силе в R^{n+1}. Пусть любые $n+2$ множеств из $\mathbb{S}$ пересекаются, но (в предположении противного) пересечение $\bigcap \mathbb{S}$

---

[15] Детали и приложения см. в [6, т. 3].

[16] *Джером Клапка Джером.*

[17] Семейство $\mathbb{S}$ может быть и бесконечным в предположении, что каждое множество из $\mathbb{S}$ компактно.

пусто. Тогда найдется подсемейство $\mathbb{S}$, пусть это будет само $\mathbb{S}$, и множество S, такие что

$$\bigcap \mathbb{S} = \varnothing, \quad \textit{но} \quad \mathbb{P} = \bigcap \{\mathbb{S} \backslash S\} \neq \varnothing.$$

В этом случае существует такая разделяющая гиперплоскость H, что $\mathbb{P}$ лежит в одном из открытых полупространств.

Любые $n+1$ множеств из $\mathbb{S} \backslash S$ вместе с S образуют $n+2$ множеств, обязанных иметь непустое пересечение. Поэтому любые $n+1$ множеств из $\mathbb{S} \backslash S$ в n-мерном сечении гиперплоскостью H пересекаются. Но тогда (по индуктивному предположению) все множества семейства $\mathbb{S} \backslash S$ пересекаются в сечении H. Противоречие. ►

Спектр приложений *теоремы Хелли* довольно широк [10]. В контексте оптимизации она может использоваться в задачах о разрешимости неравенств. Если любая система из $n+1$ неравенств[18)]

$$f_j(x_1, \dots, x_n) \geqslant 0, \quad j = 1, \dots, N, \tag{3.10}$$

разрешима, то и вся система (3.10) разрешима.

[18)] Разумеется, f_j выпуклые функции.

Глава 4

Выпуклое программирование

4.1. Теорема Куна—Таккера

Нелинейная задача

$$
\begin{gathered}
f(x) \to \min, \\
h_j(x) \leqslant 0, \quad j = 1, \ldots, r, \\
x \in Q
\end{gathered}
\tag{4.1}
$$

с выпуклыми функциями $f(x)$, $h_j(x)$ и некоторой выпуклой областью[1] Q — называется *задачей выпуклого программирования*. В (4.1) предполагается выполненным на Q *условие Слейтера*: существует такое $\widetilde{x}$, что

$$
h_j(\widetilde{x}) < 0, \quad j = 1, \ldots, r.
$$

Иными словами, область, выделяемая неравенствами $h_j(x) \leqslant 0$, имеет внутренность.

Чисто внешне роль условия Слейтера сводится к требованию наличия внутренних допустимых точек, но опосредованно исключаются ограничения в виде равенств. Такие ограничения формально отсутствуют в (4.1). Однако $h_j(x) = 0$ всегда можно заменить двумя противоположными неравенствами. Условия Слейтера не позволяют этого сделать. Но остается возможность включить такие условия в описание Q.

4.1.1. Теорема Куна—Таккера. *Точка $x^* \in Q$ является точкой глобального минимума в задаче* (4.1) *в томм случае, когда найдутся неотрицательные множители Лагранжа, $y^* = \{y_1^*, \ldots, y_r^*\}$, при которых выполнены условия дополняющей нежесткости, $y_j^* h_j(x^*) = 0$, и лагранжиан*

$$
L(x, y) = f(x) + \langle y, h(x) \rangle
$$

---

[1] Обратим внимание, что ограничения $h_j(x) \leqslant 0$ можно переносить в описание области Q, и наоборот. Подобная «степень свободы» используется, например, при переходе к *двойственным задачам*.

принимает минимальное по x значение, т. е.

$$L(x, y^*) \geqslant L(x^*, y^*), \quad \forall x \in Q, \tag{4.2}$$

либо в субградиентной форме: $0 \in \partial_x L(x^*, y^*)$.

◀ *Достаточность.* В случае (4.2), причем *условие Слейтера* необязательно,

$$f(x) \geqslant f(x) + \langle y^*, h(x)\rangle = L(x, y^*) \geqslant L(x^*, y^*) = f(x^*) + \langle y^*, h(x^*)\rangle = f(x^*).$$

Необходимость. Ограничимся для простоты ситуацией $Q = \mathbb{R}^n$ и гладких функций $f(x)$ и $h(x) = \{h_1(x), \dots, h_r(x)\}$. Если x^* точка глобального минимума в задаче (4.1), то по теореме 2.3.1 существуют $y_1^*, \dots, y_r^*$, для которых выполняются условия дополняющей нежесткости, и[2)]

$$\nabla f(x^*) = \sum_{j=1}^{r} y_j^* \nabla h_j(x^*). \tag{4.3}$$

Последнее равенство гарантирует (теорема 3.4.1), что в точке $\{x^*, y^*\}$ достигается глобальный минимум лагранжиана $L(x, y^*)$ по x, что и дает необходимое (4.2). ▶

В недифференцируемом случае соотношение (4.3) надо заменить необходимым условием минимума:

$$\partial f(x^*) = \sum_{j=1}^{r} y_j^* \partial h_j(x^*).$$

4.1.2. Определение. *Пара $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ называется седловой точкой функции $\psi(x, y)$, если*

$$\psi(x^*, y) \leqslant \psi(x^*, y^*) \leqslant \psi(x, y^*)$$

при любых допустимых x, y. Другими словами, x^* — точка минимума $\psi(x, y^*)$ по x, а y^* — точка максимума $\psi(x^*, y)$ по y.

Существование седловой точки гарантирует *равенство минимакса максимину*:

$$\min_x \max_y \psi(x, y) = \max_y \min_x \psi(x, y) = \psi(x^*, y^*),$$

что, вообще говоря, требует обоснования (см. раздел 4.3).

Теорема Куна—Таккера может быть переформулирована в «седловом варианте».

[2)] Равенство $\lambda_0^* = 1$ — см. (2.10) — обеспечивается *условием Слейтера*.

4.1.3. Теорема. *Точка* $x^* \in Q$ *является точкой глобального минимума в задаче* (4.1) *в томм случае, когда найдутся неотрицательные множители Лагранжа,* $y^* = \{y_1^*, \dots, y_r^*\}$, *при которых* (x^*, y^*) — *седловая точка лагранжиана,*

$$L(x^*, y) \leqslant L(x^*, y^*) \leqslant L(x, y^*), \quad \forall\, x \in Q, \quad y \geqslant 0. \tag{4.4}$$

Конечно, теорема 4.1.3 формально нуждается в доказательстве, которое занимает несколько строчек и легко восстанавливается при осмысленном чтении. Если же чтение слишком поверхностно, то и доказательство не требуется. Однако в литературе длина объяснения нередко обратно пропорциональна сложности подоплеки. Получается как у Паркинсона. «На маркетинговые исследования предлагается выделить десять миллионов долларов. Кто за?» Принимается в две минуты. Потому что охватить «десять миллионов» умом — не получается. «На закупку туалетной бумаги — триста рублей. Какие есть мнения?» Обсуждение длится два часа.

4.2. Двойственность

Симметрия лагранжиана относительно прямых и двойственных переменных (x и y) свидетельствует о существовании за кадром диалектической пары задач, которые легко обнаруживаются. Неравенства (4.4) оказываются равносильны существованию не только условного минимума в задаче (4.1), но и условного максимума некоторой *двойственной задачи* (см. далее).

Введем функционал

$$S(x) = \sup\{L(x, y) : \ y \geqslant 0\},$$

полагая $S(x) = \infty$ при тех значениях x, при которых значения $L(x, y)$ неограничены.

С помощью $S(x)$ задача (4.1) может быть записана в виде

$$S(x) \to \min, \quad x \in Q. \tag{4.5}$$

Если же ввести функционал

$$R(y) = \inf\{L(x, y) : \ x \in Q\},$$

то с его помощью выписывается *двойственная задача* к (4.5):

$$R(y) \to \max, \quad y \geqslant 0. \tag{4.6}$$

Двойственная природа задач (4.5) и (4.6) состоит в том, что одна и та же седловая точка (x^*, y^*) «одного и того же лагранжиана» служит решением и той и другой задачи[3]. Поэтому возможность перехода от одной задачи к другой служит обычно источником выгод, как вычислительных, так и общетеоретических. Все это хорошо видно на примере *линейного программирования* (или квадратичного). В более общих ситуациях эффект зависит от того, «расшифровывается» ли функция $R(y)$ в каком-либо приемлемом виде. Скажем, двойственная к задаче линейного программирования — снова линейная задача, и тогда манипулирование идет на одном языке, давая полезный результат. Но кое-что можно констатировать и на самом общем уровне.

4.2.1. Теорема. *Для любых допустимых значений x и y справедливо неравенство*[4]

$$f(x) \geqslant R(y),$$

переходящее в равенство $\boxed{f(x^*) = R(y^*)}$ *в томм случае, когда (x^*, y^*) — седловая точка лагранжиана, а значит, x^* — решение прямой задачи, y^* — двойственной.*

◄ Доказывать, вообще говоря, нечего, поскольку утверждение представляет собой переформулировку *теоремы Куна—Таккера*. ►

4.3. Теорема о минимаксе

Вопросы, возникающие вокруг *минимакса*, часто ставят в тупик из-за недостатка «пространственного воображения». Сначала не ясно «что тут доказывать»[5], потом не ясно «как». Основа здесь, тем не менее, достаточно проста.

4.3.1. Теорема. *Минимакс всегда больше максимина,*

$$\min_x \max_y \psi(x, y) \geqslant \max_y \min_x \psi(x, y). \tag{4.7}$$

[3] Разумеется, при условии существования седловой точки. Заметим также, что *двойственная к двойственной — снова исходная задача.*

[4] Поэтому любое значение $R(y)$ дает оценку снизу условного минимума в прямой задаче (4.1).

[5] Это, кстати, наиболее сложная для понимания часть математики.

Равенство в (4.7) *достигается в томм случае, когда* $\psi(x, y)$ *имеет седловую точку* (x^*, y^*), *при этом*

$$\min_x \max_y \psi(x, y) = \max_y \min_x \psi(x, y) = \psi(x^*, y^*). \tag{4.8}$$

◄ Минимизация обеих частей очевидного неравенства

$$\max_y \psi(x, y) \geqslant \psi(x, y)$$

приводит к

$$\min_x \max_y \psi(x, y) \geqslant \min_x \psi(x, y),$$

откуда следует (4.7).

Пусть теперь существует седловая точка (x^*, y^*). Из определения 4.1.2 имеем $\psi(x, y^*) \geqslant \psi(x^*, y^*)$, откуда

$$\max_y \min_x \psi(x, y) \geqslant \min_x \psi(x, y^*) \geqslant \psi(x^*, y^*).$$

Аналогично из $\psi(x^*, y) \leqslant \psi(x^*, y^*)$ следует

$$\min_x \max_y \psi(x, y) \leqslant \psi(x^*, y^*).$$

В результате

$$\min_x \max_y \psi(x, y) \leqslant \psi(x^*, y^*) \leqslant \max_y \min_x \psi(x, y),$$

что в сопоставлении с (4.7) дает (4.8). Это устанавливает *достаточность*.

Пусть теперь, наоборот, справедливо (4.8). Выбирая точки x^*, y^* из условий

$$\min_x \psi(x, y^*) = \max_y \min_x \psi(x, y),$$

$$\max_y \psi(x^*, y) = \min_x \max_y \psi(x, y),$$

убеждаемся, в силу (4.8) и определения 4.1.2, что (x^*, y^*) — седловая точка. Это доказывает *необходимость*. ►

Минимизация и максимизация в (4.7) и (4.8) может вестись по любым областям, $x \in X$, $y \in Y$. Надо лишь иметь гарантию, что минимумы и максимумы существуют. Для этого достаточна компактность X, Y, — но не только.

Теорема 4.3.1 устанавливает эквивалентность двух условий, но ничего не говорит о том, когда же седловая точка существует. Стандартный путь доказательства (4.8) состоит в следующем. Вводятся два отображения

$$U(y) = \operatorname{Arg} \min_x \psi(x, y) \quad \text{и} \quad V(x) = \operatorname{Arg} \max_y \psi(x, y).$$

Из существования неподвижной точки у многозначного отображения $U(x) \times V(y)$ следует (4.8). Действительно,

$$(x^*, y^*) \in U(y^*) \times V(x^*)$$

означает

$$\min_x \psi(x, y^*) = \psi(x^*, y^*) = \max_y \psi(x^*, y),$$

откуда $\psi(x, y^*) \geqslant \psi(x^*, y^*) \geqslant \psi(x^*, y)$, т. е. (x^*, y^*) — седловая точка, и по теореме 4.3.1 справедливо (4.8).

Таким образом, проблема сводится к существованию неподвижной точки у многозначного отображения $T = U \times V$.

Приведем несколько принципов неподвижной точки, — относительно простые доказательства есть в [17]. Ниже считается, что рассматриваемые многозначные отображения имеют выпуклые образы и предполагаются замкнутыми[6].

4.3.2. Теорема Какутани. *Пусть многозначное отображение T переводит в себя замкнутый шар B, т. е. $T(B) \subset B$. Тогда T имеет неподвижную точку $x^* \in B$,*

$$x^* \in T(x^*).$$

4.3.3. Теорема. *Пусть $0 \in \Omega$ и $\langle x, y \rangle \geqslant 0$ для любой пары векторов $x \in \check{\Omega}$, $y \in T(x)$. Тогда включение $0 \in T(x)$ разрешимо в $\overline{\Omega}$.*

4.3.4. Теорема. *Пусть $0 \in \Omega$ и $\langle x, y \rangle \leqslant \langle x, x \rangle$ для любой пары векторов $x \in \check{\Omega}$, $y \in T(x)$. Тогда отображение T имеет неподвижную точку $x^* \in \overline{\Omega}$.*

Из подобного сорта фактов следуют различные утверждения о существовании седловой точки. Ограничимся одним примером.

4.3.5. Теорема. *Пусть функция $\psi(x, y)$ определена на произведении $X \times Y$ компактов X и Y, выпукла по $x \in X$ и вогнута по $y \in Y$. Тогда $\psi(x, y)$ имеет седловую точку.*

◄ В перечисленных предположениях отображение $T = U \times V$ удовлетворяет условиям теоремы Какутани (с некоторыми оговорками). ►

[6] Многозначное отображение $T : X \to 2^Y$ называется *замкнутым* (*полунепрерывным сверху*), если график этого отображения замкнут в $X \times Y$.

4.4. Разрешимость неравенств

Разрешимость неравенств, описывающих области *допустимых решений*, — весьма принципиальный вопрос для задач на условный экстремум. При этом *системы линейных неравенств* — эталон, который раскрывает природу более сложных задач и, в то же время, охватывает существенную часть приложений.

Линейные неравенства вида $Ax \geqslant 0$ или $Ax > 0$ с прямоугольной матрицей A удобно анализировать визуально геометрически. Примерно так.

Разрешимость неравенства $Ax > 0$ означает существование такого вектора x, скалярное произведение которого на любую вектор-строку $a_{i:}$ положительно,

$$\langle a_{i:}, x\rangle = \sum_j a_{ij}x_j > 0.$$

Геометрически ясно, что подходящий элемент x существует, если все векторы $a_{i:}$ расположены строго по одну сторону некоторой $(n-1)$-мерной плоскости.

Для этого, в свою очередь, требуется, чтобы множество $K(A)$ векторов

$$w = \sum_j y_j a_{j:}$$

при всевозможных наборах положительных коэффициентов

$$y = \{y_1, \dots, y_m\} \geqslant 0$$

было заостренным конусом, не содержащим противоположно направленных векторов. Если же

$$u = \sum_j y_j a_{j:}, \quad v = \sum_j z_j a_{j:}$$

и $u = -v$, то

$$u + v = \sum_j (y_j + z_j) a_{j:} = 0,$$

что указывает на справедливость следующего результата.

4.4.1. Теорема. *Либо неравенство $Ax > 0$ разрешимо, либо $yA = 0$ имеет ненулевое положительное решение.*

Результаты типа теоремы 4.4.1 принято называть *теоремами об альтернативах.*

Если требуется строго положительное решение $x > 0$ неравенства $Ax > 0$, то это сводится к предыдущей задаче о разрешимости

$Bz > 0$ с матрицей

$$B = \begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix}.$$

Задача о разрешимости неравенства $Ax > b$ тоже сводится к предыдущей — с матрицей

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & -b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & -b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & -b_m \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot x > 0.$$

◄ Если последнее неравенство имеет решение $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$, то решением является и

$$\left\{\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}}, 1\right\}. \quad ►$$

4.4.2. Теорема. *Либо неравенство* $Ax \geqslant 0$ *разрешимо* $(x \neq 0)$, *либо* $yA = 0$ *имеет строго положительное решение* $y > 0$.

◄ Для доказательства достаточно заметить, что $Ax \geqslant 0$ разрешимо, если конус $K(A)$ помещается в некотором полупространстве. В противном случае $K(A)$ совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^n$, и тогда для любого

$$u = \sum_j y_j a_{j:},$$

где все $y_j > 0$, существует противоположный вектор

$$v = \sum_j z_j a_{j:},$$

причем $y + z > 0$ и $(y + z)A = 0$. ►

По существу теоремы 4.4.1, 4.4.2 в совокупности со стандартными приемами перехода к новым матрицам (неравенствам) охватывают многие результаты в области линейных неравенств альтернативного характера «либо-либо». Разнообразие вариантов в этой области, тем не менее, достаточно велико и формулировки результатов выглядят весьма непохожими друг на друга [15]. Вот небольшая серия фактов.

- Система линейных уравнений и неравенств,

$$Ax = 0, \quad x \geqslant 0, \quad yA \geqslant 0$$

всегда имеет такое решение $\{x, y\}$, что $yA + x > 0$.

- Либо $Ax = b$ имеет решение $x \geqslant 0$, либо $yA \geqslant 0$ влечет за собой $yb \geqslant 0$ (*лемма Минковского—Фаркаша*)[7].

- Либо $Ax = b$ имеет решение $x \geqslant 0$, либо разрешима система неравенств $yA \geqslant 0$, $yb < 0$ (*переформулировка предыдущего утверждения*).

- Либо $Ax \leqslant b$ имеет решение $x \geqslant 0$, либо система неравенств $yA \geqslant 0$, $yb < 0$ имеет решение $y \geqslant 0$.

- Либо $Ax \geqslant b$ разрешимо, либо система $yA = 0$, $yb = 1$ имеет решение $y \geqslant 0$.

- Система неравенств

$$Ax \leqslant 0, \quad x \geqslant 0, \quad yA \geqslant 0, \quad y \geqslant 0$$

всегда имеет такое решение, что

$$x + yA > 0, \quad y - Ax > 0.$$

4.5. Линейное программирование

Задача линейного программирования[8]

$$\langle c, x\rangle \to \max, \quad Ax \leqslant b, \quad x \geqslant 0, \tag{4.9}$$

характеризуется линейностью *целевой функции* $\langle c, x\rangle$ и ограничений

$$\sum_j a_{ij}x_j \leqslant b_i.$$

Матрица A имеет размер $m \times n$ (m ограничений, n переменных). Разумеется, это частный случай задачи выпуклого программирования (4.1).

[7] Дополнительную информацию о линейных неравенствах можно найти в сборнике [15].

[8] Условие неотрицательности переменных необязательно. Стандартная разновидность задачи:

$$\langle c, x\rangle \to \max, \quad Ax \leqslant b.$$

Варианты с минимизацией $\langle c, x\rangle$ ничего нового в постановку не привносят, ибо сводятся к максимизации после замены $\langle c, x\rangle$ на $\langle -c, x\rangle$.

Каноническая модификация

$$\langle c, u\rangle \to \max, \quad Bu = b, \quad u \geqslant 0 \tag{4.10}$$

получается из (4.9) добавлением фиктивных параметров $z_i \geqslant 0$, таких что

$$\sum_j a_{ij}x_j + z_i = b_i.$$

В переменных

$$u = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

исходная задача (4.9) принимает вид (4.10).

Использование фиктивных переменных позволяет менять форму задачи до неузнаваемости. Например, вместо $\langle c, x\rangle$ можно максимизировать единственный скалярный параметр $x_{n+1} \to \max$, добавляя к ограничениям условие

$$\langle c, x\rangle - x_{n+1} = 0.$$

Аналогично нелинейная минимаксная задача

$$\max\{\langle c^1, x\rangle, \ldots, \langle c^k, x\rangle\} \to \min, \quad Ax \leqslant b, \quad x \geqslant 0$$

сводится к линейной:

$$x_{n+1} \to \min; \quad \text{все} \quad \langle c^j, x\rangle \leqslant x_{n+1}, \quad Ax \leqslant b, \quad x \geqslant 0.$$

В качестве «заземления» удобно держать в голове несколько содержательных примеров, из которых предпочтительны — классические.

Линейная модель производства. На вход производства подается набор ресурсов $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$, на выходе образуется набор различных видов продукции $y = \{y_1, \ldots, y_m\}$. Внутреннее состояние производства характеризуется вектором $z = \{z_1, \ldots, z_k\}$, компоненты которого принято называть интенсивностями технологических процессов, но терминология условна. В частности, z_i может обозначать количество рабочих, занятых в том или ином технологическом процессе; время работы некоторого агрегата; количество основного вида изготавливаемой продукции и т. д.

Как правило, имеются нормативы, определяющие взаимосвязи $x = Az$, $y = Bz$, а также ограничения по ресурсам $x \leqslant b$ и ассортименту продукции $y \geqslant d$. Возможные программы работы предприятия, в свою очередь, подвержены ограничениям. Агрегаты не могут работать больше чем 24 часа в сутки, рабочих нельзя задействовать в большем количестве, чем есть в наличии, и т. п. Все это записывается в виде некоторой совокупности неравенств $Cz \leqslant e$. Сведение ограничений воедино дает $Gz \leqslant h$, $z \geqslant 0$.

Если цель производства заключается в максимизации объема реализации, $\langle c, y\rangle \to \max$, где c_i — цена i-го вида продукции, то после подстановки

$$\langle c, y\rangle = \langle c, Bz\rangle = \langle B^* c, z\rangle = \langle g, z\rangle \to \max$$

возникает задача линейного программирования, приведенная к внутренним переменным z. При этом $g = B^* c$ интерпретируется как вектор «внешних» цен (g_i показывает, сколько в ценовом измерении продукции дает i-й технологический процесс, работающий с единичной интенсивностью).

Задача о диете. Речь, конечно, идет не о приложении, а об эталонной условности. Имеется n продуктов $G_1, \dots, G_n$, каждый из которых содержит m питательных веществ (белки, витамины и прочее). Пусть x_i обозначает количество i-го продукта, c_i — цену G_i, a_{ij} — количество i-го питательного вещества в пищевом рационе. Задача минимизации стоимости пищевого рациона при ограничениях на содержание питательных веществ выглядит следующим образом

$$\langle c, x\rangle \to \min, \quad Ax \geqslant b, \quad x \geqslant 0,$$

где нормативы b определяются диетологами[9].

Транспортная задача. Имеется m производителей и n потребителей некоторого товара, расположенных в узлах транспортной сети. Пусть x_{ij} обозначает количество продукта, перевозимого из i-го узла в — j-й, a_i — объем производства в i-м узле, b_j суммарная потребность — в j-м. Естественные ограничения на объемы перевозок[10]:

$$\sum_j x_{ij} \leqslant a_i, \quad \sum_i x_{ij} \geqslant b_j. \tag{4.11}$$

За критерий обычно принимается

$$\sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} \to \min, \tag{4.12}$$

где c_{ij} — стоимость перевозки единицы товара из i-го узла — в j-й.

Минимизация (4.12) при ограничениях (4.11) — задача линейного программирования, но только в нестандартной записи с помощью двухиндексной нумерации переменных.

---

[9] Либо традициями, либо (что чаще всего) «берутся с потолка».

[10] Вывезти нельзя более того, что производится; завезти требуется не менее потребности.

4.6. Геометрическая интерпретация

Каждое из ограничений

$$\sum_j a_{ij} x_j \leqslant b_i$$

задачи (4.9) определяет в $\mathbb{R}^n$ сдвинутое полупространство, пересечение которых дает выпуклый многогранник[11], ограниченный или неограниченный, возможно, пустой. Линейная целевая функция $\langle c, x\rangle$ растет при движении точки x вдоль c. Поверхностями постоянного уровня, на которых функция $\langle c, x\rangle$ принимает одно и то же значение, являются гиперповерхности $\langle c, x\rangle = \gamma$, ортогональные вектору c (рис. 4.1).

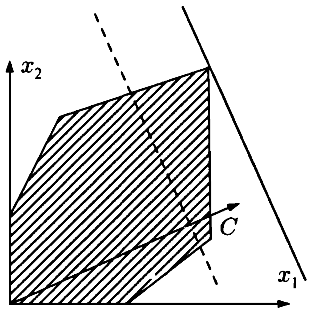

Рис. 4.1

Легко понять, что решение задачи линейного программирования, если существует, лежит в некоторой вершине допустимого многогранника. Так принято говорить, но это не совсем точно. Неограниченный многогранник может вообще не иметь вершин (клин). Поэтому утверждение о необходимости расположения решения в одной из вершин допустимого многогранника P справедливо в предположении, что P не содержит прямых (например, в случае ограниченности P).

Решение не обязательно единственно. Когда одна из «дальних» граней допустимого многогранника ортогональна вектору c, — все точки этой грани (в том числе вершины) будут решениями. Решения может не быть, когда либо допустимый многогранник пуст, либо неограничен в направлении c.

Ограниченный многогранник может быть описан двойственным образом, как выпуклая оболочка своих вершин, а неограниченный — как выпуклая оболочка конечного числа точек, лучей и прямых.

---

[11] Называемый *допустимым многогранником*, или *многогранником допустимых ре-*

Обратим внимание на определенную нечувствительность решения к данным задачи. Достаточно очевидно, что при малых изменениях вектора c оптимальное решение будет достигаться в той же самой вершине. Пределы нечувствительности решения к изменению критерия могут быть достаточно велики. Например, в ситуации, изображенной на рис. 4.1, *решение одно и то же при любом положительном векторе c.*

Выделим сказанное в отдельное утверждение.

4.6.1. Теорема. *Пусть решение задачи* (4.9) *единственно. Тогда при достаточно малых изменениях вектора c оптимальное решение не меняется (достигается в той же самой вершине).*

Идеологически задача линейного программирования вроде бы очень простая[12]. Для решения достаточно перебрать вершины допустимого многогранника и выбрать наилучшую. Однако число вершин в рядовых ситуациях настраивает на пессимистический лад. Например, при $n = 20$, $m = 40$ число вершин $\sim 10^{11}$.

4.7. Двойственность линейных задач

Вернемся к исходной задаче

$$\langle c, x\rangle \to \max, \qquad Ax \leqslant b, \qquad x \geqslant 0.$$

Двойственной к ней оказывается задача (см. раздел 4.2)

$$\langle b, y\rangle \to \min, \qquad A^T y \geqslant c, \qquad y \geqslant 0,$$

где A^T обозначает транспонированную матрицу. Вместо $A^T y \geqslant c$ часто пишут $yA \geqslant c$.

Напомним, что двойственная к двойственной — снова исходная задача. Двойственные задачи тесно связаны между собой, и эта связь плодотворна.

Упражнения

• Двойственной для канонической

$$\langle c, x\rangle \to \max, \qquad Ax = b, \qquad x \geqslant 0$$

[12] Если говорить с некоторой натяжкой, за разработку методов решения этой задачи *Канторовичу* и *Купмансу* была присуждена Нобелевская премия по экономике за 1975 г.

является задача

$$\langle b, y\rangle \to \min, \quad A^T y \geqslant c.$$

- Для смешанной задачи

$$\langle c, x\rangle \to \max,$$

$$\sum_j a_{ij} x_j \leqslant b_i, \quad i = 1, \dots, k,$$

$$\sum_j a_{ij} x_j = b_i, \quad i = k+1, \dots, m,$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, \dots, q,$$

двойственной является

$$\langle b, y\rangle \to \min,$$

$$\sum_j a_{ij} y_i \geqslant c_j, \quad j = 1, \dots, q,$$

$$\sum_j a_{ij} y_i = c_j, \quad i = q+1, \dots, n,$$

$$y_i \geqslant 0, \quad i = 1, \dots, k.$$

- Если допустимые множества взаимодвойственных задач не пусты, обе задачи имеют решение. Если же только у одной из задач допустимое множество не пусто, то ее решение бесконечно.

4.7.1. Теорема. *Пусть x — допустимый вектор задачи* (4.9), *а y — допустимый вектор двойственной задачи. Тогда*

$$\boxed{\langle c, x\rangle \leqslant \langle b, y\rangle.}$$

◄ Таким образом, максимизируемая целевая функция в прямой (исходной) задаче всегда не больше, чем минимизируемая целевая функция двойственной задачи, если только эти функции вычисляются в точках, удовлетворяющих ограничениям соответствующих задач. Обоснование совсем просто. Умножая $Ax \leqslant b$ скалярно на y, а неравенство $A^T y \geqslant c$ — скалярно на x, получаем

$$\langle Ax, y\rangle \leqslant \langle b, y\rangle, \quad \langle A^T y, x\rangle \geqslant \langle c, x\rangle.$$

Откуда, в силу $\langle Ax, y\rangle = \langle A^T y, x\rangle$,

$$\langle c, x\rangle \leqslant \langle Ax, y\rangle \leqslant \langle b, y\rangle. \quad ►$$

Из утверждения 4.7.1 легко выводится следующий критерий оптимальности.

4.7.2. *Пусть x^* и y^* — допустимые векторы прямой и двойственной задач, причем $\langle c, x^* \rangle = \langle b, y^* \rangle$ Тогда векторы x^*, y^* являются решениями соответствующих задач.*

Утверждение 4.7.1 дает также ключ к пониманию основной теоремы двойственности.

4.7.3. Теорема. *Если прямая и двойственная задача имеют допустимые векторы, то обе они имеют решения.*

◀ При наличии допустимых векторов задача (4.9) неразрешима, если на допустимом многограннике функцию $\langle c, x \rangle$ выбором x можно сделать сколь угодно большой. Но по условию функция на допустимом многограннике ограничена: $\langle c, x \rangle \leqslant \langle b, y \rangle$.

Такие же рассуждения — с учетом того, что ищется минимум, а не максимум — годятся для двойственной задачи. ▶

Активные и пассивные ограничения. Вернемся к рассмотрению пары двойственных задач:

$$\langle c, x \rangle \to \max, \quad Ax \leqslant b, \quad x \geqslant 0,$$

$$\langle b, y \rangle \to \min, \quad A^T y \geqslant c, \quad y \geqslant 0.$$

Пусть x^*, y^* — их оптимальные решения. Через $c(b)$ обозначим максимально возможное значение $\langle c, x \rangle$. В силу 4.7.2,

$$c(b) = \langle c, x^* \rangle = \langle b, y^* \rangle.$$

Приращение $\Delta c(b) = c(b + \Delta b) - c(b)$ при малом изменении вектора b, очевидно, равно

$$\Delta c(b) = \langle b + \Delta b, y^* + \Delta y \rangle - \langle b, y^* \rangle = \langle \Delta b, y^* \rangle + \langle b, \Delta y \rangle + \langle \Delta b, \Delta y \rangle,$$

где $y^* + \Delta y$ обозначает решение двойственной задачи с новой целевой функцией $\langle b + \Delta b, y \rangle$ при старых ограничениях $A^T y \geqslant c$.

Как уже отмечалось, при малых изменениях вектора b решение двойственной задачи не меняется (теорема 4.6.1), т. е. $\Delta y = 0$, что влечет за собой $\Delta c(b) = \langle \Delta b, y^* \rangle$. В частном случае $\Delta b = \{0, \dots, \Delta b_i, 0, \dots, 0\}$ имеем $\Delta c(b) = y_i^* \Delta b_i$, т. е.

$$\boxed{y_i^* = \frac{\Delta c(b)}{\Delta b_i}.} \tag{4.13}$$

Таким образом, i-я компонента решения двойственной задачи показывает во сколько раз приращение целевой функции больше, чем приращение Δb_i. Другим словами, y_i^* это цена i-го ограничения.

При этом ясно, что если ограничение

$$\sum_j a_{ij}x_j^* \leqslant b_i$$

не активно, т. е.

$$\sum_j a_{ij}x_j^* < b_i,$$

то малые изменения величины b_i никакого влияния на решение x^* не оказывают. Поэтому соответствующее $\Delta c(b) = 0$, а значит и $y_i^* = 0$, в силу (4.13). На этом пути в итоге получается следующий результат.

4.7.4. Теорема. *Для того чтобы допустимые векторы прямой и двойственной задач были решениями этих задач, необходимо и достаточно выполнение следующих условий дополняющей нежесткости:*

$$\begin{cases} y_i^* = 0, & \text{если} \quad \sum\limits_j a_{ij}x_j^* < b_i; \\ x_j^* = 0, & \text{если} \quad \sum\limits_i a_{ij}y_i^* > c_j, \end{cases}$$

равносильно

$$\begin{cases} y_i^* \left(\sum\limits_j a_{ij}x_j^* - b_i \right) = 0, \\ x_j^* \left(\sum\limits_i a_{ij}y_i^* - c_j \right) = 0. \end{cases}$$

Понятно, что в решении исходной задачи часть неравенств обращается в равенства — эти ограничения называют *насыщающими* или *активными*, в противоположность *ненасыщающим* или *пассивным*. Решение задачи (4.9) было бы предельно простым, если бы было известно, какие ограничения активные. В этом случае было бы достаточно неравенства, соответствующие активным ограничениям, заменить на равенства — и решить получившуюся систему линейных уравнений. Но решение двойственной задачи как раз однозначно указывает, какие ограничения активные. Поэтому, если известно двойственное решение, исходную задачу можно считать «решенной».

4.8. Экономическая интерпретация

Рассмотрим линейную модель производства (раздел 4.5),

$$\langle p, x\rangle \to \max, \quad Ax \leqslant h, \quad x \geqslant 0, \tag{4.14}$$

считая каждую компоненту x_j интенсивностью j-го технологического процесса, приведенной к производству j-го продукта[13]. В этом случае p_j — цена j-го продукта на *внешнем* рынке. Элементы a_{ij} матрицы A равны количеству i-го продукта, производимого (в случае $a_{ij} > 0$) или потребляемого ($g_{ij} < 0$) при производстве единицы j-го продукта. Соответственно, компонента h_i — есть ограничение на суммарное производство (или потребление) i-го продукта.

Двойственной задачей к (4.14) является

$$\langle h, y\rangle \to \min, \quad A^T y \geqslant p, \quad y \geqslant 0, \tag{4.15}$$

и она иногда помогает смысловой ориентации.

Математики часто уклоняются от экскурсов в прикладные области, поскольку «там нет ничего нового, кроме эмоций». С этим нет смысла спорить. Но дело ведь не только в «математической новизне». В любой области помимо профессиональной основы первостепенную роль играет хорошее настроение и резонанс с отдаленными сферами бытия. Экономика, конечно, настроение не улучшает, но «ассоциативно» все-таки резонирует.

Итак, пусть x^*, y^* — оптимальные решения задач (4.14) и (4.15). Ограничения двойственной задачи при $y = y^*$ имеют вид:

$$\sum_i g_{ij} y_i^* \geqslant p_j. \tag{4.16}$$

Положительные слагаемые в сумме (4.16) показывают затраты на покупку продуктов[14], необходимых для производства единицы j-го продукта; отрицательные слагаемые — доход от продажи «побочных» продуктов[15], полученных при производстве едини-

[13] Иными словами, каждому *продукту* отвечает «свое» *производство*, которое производит и потребляет и другие продукты, но свой продукт считается как бы главным.

[14] На внутреннем рынке по ценам $y^* = \{y_1^*, \ldots, y_n^*\}$.

[15] Опять-таки на внутреннем рынке.

цы j-го продукта. Таким образом, (4.16) есть ограничение по каждому продукту вида:

«внутренние затраты» — «внутренний доход» $\geqslant$ «внешняя прибыль».

Там, где такое неравенство строгое, производство убыточно, — и соответствующее $x_j^* = 0$. Поэтому, если внутренние цены установлены равными y_j^*, управляющему органу легко сразу исключить убыточные производства,

$$x_j^* = 0, \quad \text{если} \quad \sum_i a_{ij} y_i^* > p_j.$$

Представляет интерес и другое условие *дополняющей нежесткости*,

$$y_i^* = 0, \quad \text{если} \quad \sum_j a_{ij} x_j^* < h_i,$$

показывающее, что оптимальная (равновесная) внутренняя цена продукта, производство которого не выходит на ограничение, должна быть нулевой [16].

Здесь, конечно, не имеет смысла углубляться в линейные экономические модели. Более широкий спектр впечатлений можно получить по специальной литературе. Но сама идея двойственности в экономике заслуживает внимания. Если материальное производство описывается некоторой моделью, то двойственная задача показывает, как финансовая сторона дела должна быть согласована с сутью происходящего, чтобы содействовать правильному виденью и стимулированию.

4.9. Транспортная задача

Задача об оптимальных перевозках

$$\sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} \to \min, \quad \sum_j x_{ij} \leqslant a_i, \quad \sum_i x_{ij} \geqslant b_j,$$

[16] Если ресурс в избытке (воздух или вода в некоторых регионах), его целесообразная цена нулевая. Положительная цена лишь путает карты.

как уже отмечалось (раздел 4.5), является задачей линейного программирования. Переменные $\{x_{ij}\}$ могут быть выстроены в цепочку, заново перенумерованы, — и задача приобретет стандартный вид. Такой трюк, однако, разрушит структуру, которая дает надежду на легкое решение. Поэтому более разумны подходы, учитывающие особенности исходной постановки задачи.

Обратим внимание, что с самого начала проще рассматривать задачу

$$\sum_{i,j} c_{ij}x_{ij} \to \min, \quad \sum_j x_{ij} = a_i, \quad \sum_i x_{ij} = b_j. \tag{4.17}$$

Заменить неравенства равенствами можно, вводя фиктивного потребителя. Числа потребителей и поставщиков допустимо считать равными, объединяя всех в один список и полагая $b_j = 0$ для чистых производителей и $a_j = 0$ для чистых потребителей.

Выигрыш в изучении и решении транспортной задачи (4.17) по сравнению с общей задачей (4.9) довольно велик. Подробности имеются в любом учебнике по линейному программированию. Ограничимся несколькими замечаниями.

Если в общей ситуации (4.9) проблема существования допустимого решения достаточно серьезна, то в данном случае — она почти тривиальна. Допустимое решение существует в томм случае, когда

$$\sum_j b_j = \sum_i a_i. \tag{4.18}$$

Необходимость (4.18) очевидна. Достаточность вытекает из существования *допустимого решения* [17)]

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{n},$$

которое, как легко проверяется, удовлетворяет ограничениям (4.17) при условии (4.18).

[17)] См. раздел 11.5.

Задача

$$\langle a, u\rangle + \langle b, v\rangle \to \max, \quad u_i + v_j \leqslant c_{ij}$$

двойственна к (4.17). (?)

4.10. Максимальный поток в сети

Задача о максимальном потоке в сети с точки зрения общего образования заслуживает выделения места в закромах памяти. Традиционная постановка такова.

На графе выделены две вершины: p — *источник*, c — *сток*. Грузопоток из p в c, разветвляясь в вершинах, «течет» по ребрам (i, j), из i-й вершины в j-ю. Каждое ребро характеризуется *пропускной способностью* $\sigma_{ij} \geqslant 0$. Реальный поток по ребру $x_{ij} \geqslant 0$ обязан удовлетворять условию $\boxed{x_{ij} \leqslant \sigma_{ij}}$, причем в каждой вершине, за исключением p и c, предполагается выполненным «*закон Кирхгофа*»:

$$\sum_j x_{ij} = \sum_k x_{ki}, \quad i \neq p, c, \tag{4.19}$$

т. е. суммарный поток, входящий в вершину i, равен — выходящему. В силу (4.19) поток

$$\sum_j x_{pj},$$

выходящий из p, совпадает с потоком

$$\sum_i x_{ic},$$

входящим в c.

Задача о максимальном потоке, таким образом, имеет вид:

$$\sum_j x_{pj} \to \max,$$

$$\sum_j x_{ij} = \sum_k x_{ki} \quad (k \neq p,\ c),$$

$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant \sigma_{ij},$$

и достаточно проста, чтобы рассматриваться в качестве тренировочного упражнения. Отметим традиционные вехи на пути ее решения.

Сечением S в сети называется любое множество вершин, при условии $c \in S$, но $p \notin S$. *Разрезом* C_S, или *пропускной способностью сечения* S, назовем суммарную пропускную способность ребер, входящих в S.

4.10.1. *Величина любого допустимого потока не превышает минимального разреза* C_S. *Максимальный поток равен минимальному разрезу.*

4.10.2. *Алгоритм поиска максимального потока*:

(i) *Берется любой допустимый поток (скажем, нулевой).*

(ii) *Проверяется, существует ли путь из* p *в* c, *состоящий из ненасыщенных ребер*[18]. *Если «нет» — алгоритм останавливается, поток максимален. Если «да» — включается следующий пункт.*

(iii) *В пути из ненасыщенных ребер все потоки данного пути увеличиваются на величину* $\min\{\sigma_{ij} - x_{ij}\}$, *где минимум берется по ребрам избранного пути, после чего алгоритм переходит к пункту* (ii).

Задача о максимальном потоке при дополнительном ограничении целочисленности переменных решается точно так же. Это до некоторой степени удивительно, поскольку общая задача линейного программирования в целочисленном варианте является NP-*полной*[19] и сопряжена (на сегодняшний день) с необходимостью экспоненциального перебора.

4.11. Симплекс-метод и алгоритм Хачияна

Поскольку решение задачи линейного программирования (ЛП) достигается в вершине допустимого многогранника, перебор —

[18] Ребро (i, j) *ненасыщенно*, если $x_{ij} < \sigma_{ij}$. Простой рецепт целенаправленного поиска пути из ненасыщенных ребер проще переоткрыть самостоятельно, нежели разбираться в его описании. При иной точке зрения можно обратиться к любому учебнику.

[19] Труднорешаемые задачи и вообще дискретные задачи оптимизации планируется рассмотреть в отдельном томе.

в случае существования решения — гарантирует успех за конечное число шагов. Однако в рядовых задачах число вершин оказывается астрономическим.

При описании допустимого многогранника в $\mathbb{R}^n$ неравенствами

$$Ax \leqslant b, \quad x \geqslant 0,$$

где A матрица $m \times n$, — имеется $m+n$ скалярных ограничений. Вершина определяется пересечением n гиперплоскостей, т. е. из $m+n$ уравнений надо выбрать n линейно независимых. Поэтому

$$C_{m+n}^{n} = \frac{(m+n)!}{m!n!}$$

в типичных ситуациях приблизительно правильно (в процентном отношении) оценивает число вершин.

Классический *симплекс-метод* реализует идею целенаправленного поиска решения. Алгоритм «прыгает» по вершинам, монотонно увеличивая целевую функцию $\langle c, x\rangle$. На каждом шаге переход осуществляется в соседнюю вершину, в которой значение $\langle c, x\rangle$ лучше предыдущего.

Механизм вычислений разбирается в любом учебнике по линейному программированию, но это уже мало кого интересует, разве что как упражнение по линейной алгебре. Различные модификации алгоритма давно «реализованы в железе», и при наличии компьютерных программ решение соответствующих задач с помощью карандаша и бумаги теряет смысл.

За кадром долгое время оставался «философский вопрос». Были построены примеры задач, в которых *симплекс-метод* вынужден перебирать почти все вершины. Но переборный, по сути, алгоритм, как выяснилось, обычно работает довольно быстро, что производило загадочное впечатление.

Странность была фундаментального характера. Многочисленные попытки найти способ решения задачи ЛП, который бы заведомо избавлял от экспоненциального роста объема вычислений, не давали результата — и начинало казаться, что причина в принципиальном отсутствии *полиномиального* алгоритма[20]. А поскольку все

[20] Алгоритм решения целочисленной задачи называют *полиномиальным*, если время вычислений полиномиально зависит от длины описания исходных данных.

это «кипело» в окрестности знаменитой проблемы «$P \neq NP$?» [9], было сломано немало копий, но безрезультатно.

Вздох облегчения принесла работа Хачияна[21], в которой полиномиальный алгоритм был построен — не столько для вычислений, сколько для удовлетворения философского дискомфорта.

В первую очередь была видоизменена сама задача ЛП наложением условия ограниченности числа знаков в записи всех коэффициентов, фигурирующих в постановке[22]. Это позволило с помощью ***метода эллипсоидов*** дать эффективные оценки локализации решения, и в итоге обеспечить полиномиальный объем вычислений.

4.12. Квадратичное программирование

Задачей квадратичного программирования обычно называют задачу

$$\langle Dx, x\rangle + \langle c, x\rangle \to \min, \quad Ax \leqslant b, \tag{4.20}$$

где D — положительно определенная $n \times n$ матрица, A — матрица $m \times n$. Непосредственно из ***теоремы Куна–Таккера*** вытекает следующий результат.

4.12.1. Теорема. *Точка x^* является точкой глобального минимума в задаче* (4.20) ***в томм случае***, ***когда при некотором*** $y^* \geqslant 0$ ***выполняется*** *условие*:

$$Dx^* + c + A^Ty^* = 0, \quad \langle Ax^* - b, y^*\rangle = 0.$$

Для задачи (4.20) легко переформулируются и другие общие результаты.

[21] *Хачиян Л. Г.* Полиномиальный алгоритм в линейном программировании // Докл. АН СССР. 1979. Т. 244. С. 1093–1096.

[22] Что соответствует фиксации длины описания, принятой в дискретных задачах. При этом сама задача не стала «дискретной», поскольку вершины допустимого многогранника по-прежнему не обязаны находиться в узлах целочисленной решетки.

Глава 5

Теория игр

Самое трудное в любой дисциплине заключается в осознании роли простых понятий. Не теоремы, а исходные категории мышления — вот что необходимо для ориентации. Скажем, возможность назначения цены с помощью максимизации прибыли, равной площади заштрихованного прямоугольника на графике «цена — спрос» (рис. 5.1), — в некоторых кругах звучит откровением. И причина заключается в неосвоенности самой идеи оптимизации, а не каких-то теорем.

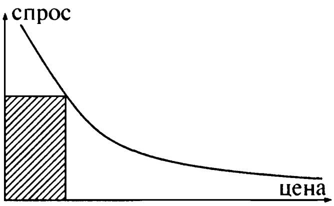

Рис. 5.1

Помимо экстремума есть несколько других понятий «оптимизационного характера», которые относительно малоизвестны, но не менее важны. Беда заключается в том, что, попав под крышу с обманчивым названием «теория игр», они стали в общественном мнении ассоциироваться с покером. Секрет же заключается в том, что *теория игр* вообще не изучает игры в приземленном понимании этого слова, а занимается «повсеместно распространенными» системами, в которых индивидуальные интересы не совпадают с коллективными.

Так или иначе, в главе рассматриваются теоретико-игровые понятия, которые заслуживают включения в арсенал общеобразовательных идей.

5.1. Смешанные стратегии

Математика приносит большую пользу *всем*, и никому — *в частности*. Так иногда думается, и не без оснований. Но вот примеры иного свойства.

Чем выгодны убыточные акции. Допустим, на рынке ценных бумаг имеется два типа акций, S_1 и S_2, прибыльность которых зависит от каких-то трудно прогнозируемых событий (принятие закона о таможенных пошлинах, война и т. п.). Акция S_1 даст либо 8 %, либо 2 % прибыли; S_2, соответственно, — либо *минус* 4 %, либо *плюс* 14 %. Компактно ситуацию удобно записать в виде матрицы

$$\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 2 & 14 \end{bmatrix}.$$

Покупатель выбирает столбец, т. е. какие акции покупать; строка определяется неизвестными заранее обстоятельствами.

Покупать акции S_2 рискованно (могут оказаться убыточными), а гарантированная прибыльность S_1 — всего 2 %. Тем не менее, из ситуации легко «выжимается» 5 % прибыли. (!) Действительно, если акции S_1, S_2 купить в количестве x_1, x_2 штук, то прибыль будет

$$\text{либо} \quad d_1 = \frac{1}{x_1 + x_2}(8x_1 - 4x_2)\,\%, \quad \text{либо} \quad d_2 = \frac{1}{x_1 + x_2}(2x_1 + 14x_2)\,\%.$$

Если ориентироваться на гарантированную прибыль $\min\{d_1, d_2\}$, то ее максимум гарантируется равенством $d_1 = d_2$, откуда следует $x_1 : x_2 = 3 : 1$. В этом случае

$$\min\{d_1, d_2\} = 5\,\%,$$

независимо от обстоятельств. ***Покупка потенциально убыточных акций поднимает гарантированную прибыль с двух до пяти процентов.***

«Русская рулетка». Предположим, некто вынужден сыграть в «русскую рулетку», выстрелив себе в висок из пистолета S_1 или S_2. Вероятности осечки (благоприятного исхода) определяются матрицей

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 2 & 12 \end{bmatrix} \cdot 10^{-2}.$$

Выбору пистолета соответствует выбор столбца, строка характеризует технические обстоятельства (качество патронов, соответствие марке оружия). ***Какой пистолет выбрать***?

Понятно, задача аналогична предыдущей, но здесь есть новые мотивы (вероятностные), и новые ощущения в связи с повышением «цены вопроса». Принципиальный момент — одноразовость.

Собственно, та же проблема возникала бы, если бы в предыдущей задаче денег хватало на покупку только одной акции.

> ***Решение задачи лежит за рамками бесхитростного ожидания, что какой-то пистолет надо выбрать после анализа матрицы. Максимум вероятности осечки в данном случае обеспечивает случайный выбор пистолета S_1 с вероятностью $2/3$, и S_2 — с вероятностью $1/3$.***

Иными словами, предварительно надо «бросить монету». Техника расчета не отличается от предыдущей задачи. Вероятности выбора p_1, p_2 определяются решением системы уравнений

$$8p_1 = 2p_1 + 12p_2, \quad p_1 + p_2 = 1.$$

Рассмотренные примеры заслуживают внимания, как никакие другие, потому что среднестатистическое мировоззрение обходит такие явления стороной. Все просто, широко распространено, но почему-то попадает в область слепого пятна. Задачи явно оптимизационного характера[1], однако их природа неожиданна, непривычна, плюс к тому, имеет тенденцию противиться обнажению. Именно поэтому простые и яркие примеры здесь эффективнее абстрактной теории, в которой общность нивелирует колорит.

Типичная «игровая ситуация» в экономике. *Фирма или физическое лицо — имеет n различных стратегий (покупки разных акций, выбора партнеров, направлений деятельности) в условиях неопределенности состояния экономической среды, характеризуемого m вариантами*[2]. *Каждой комбинации возможностей отвечает свой выигрыш a_{ij}, где второй индекс указывает номер стратегии фирмы, первый — состояния среды.*

В результате фирма в *матрице выигрышей*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

выбирает столбец, *фортуна* — строку.

---

[1] Речь идет все-таки о выборе наилучших вариантов.

[2] Варианты могут определяться: победой на выборах той или иной партии, климатическими катаклизмами, ценами на нефть, международными событиями.

Теория игр описывает ситуацию следующим образом. Имеется два игрока. Первый — выбирает строки матрицы A с вероятностями $\{p_1, \dots, p_n\}$, второй — выбирает столбцы с вероятностями $\{q_1, \dots, q_m\}$. Матожидание выигрыша первого тогда равно

$$W(p, q) = \sum_{i,j} a_{ij} p_i q_j,$$

и он его, так или иначе, пытается максимизировать.

Если игра *антагонистическая* (выигрыш одного есть проигрыш другого), появляется естественная логика решения. Первый так выбирает $\{p_1, \dots, p_n\}$, чтобы добиться максимума W при наихудшем для себя $\{q_1, \dots, q_m\}$, второй — наоборот. В результате решением игры оказываются наборы вероятностей

$$p^* = \{p_1^*, \dots, p_n^*\}, \quad q^* = \{q_1^*, \dots, q_m^*\},$$

обеспечивающие равенство

$$\max_p \min_q \sum_{i,j} a_{ij} p_i q_j = \min_q \max_p \sum_{i,j} a_{ij} p_i q_j. \tag{5.1}$$

Решением (5.1) является седловая точка $W(p, q)$, которая всегда существует, что является теоремой.

5.2. Равновесие по Нэшу

Пусть некая экономическая система состоит из n взаимосвязанных элементов A_i. Каждый элемент A_i распоряжается выбором переменной $x_i \in X_i$, и его «интерес» состоит в максимизации своей *функции выигрыша*

$$D_i(x) = D_i(x_1, \dots, x_n).$$

Переменную x_i, — которая может быть скаляром, вектором, функцией, множеством, — называют *стратегией игрока* A_i, что плохо укладывается в семантику слова «стратегия», но термин общепринят.

Описанная ситуация типична для экономики. Каждая ячейка системы имеет собственную степень свободы x_i (закупки сырья, ассортимент выпуска, внутренний график работ), но выбор x_i не определяет свой выигрыш D_i — многое зависит от действий других элементов системы.

Возникает вопрос: *какой выбор стратегий* $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ *будет равновесным*? В принципе ответов может быть много, но практика чаще всего показывает следующее. Если предприятие A_i знает, что изменением x_i может увеличить свой выигрыш, то не удерживается от соблазна. При этом равновесной может быть лишь такая точка x, в которой ни один из элементов не может добиться увеличения своего выигрыша изменением собственной переменной x_i. В теории игр такое *равновесие* x^* называется *решением игры по Нэшу*. Очевидно,

$$D_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i^*, x_{i+1}, \dots, x_n) = \max_{x_i \in X_i} D_i(x), \quad i = 1, \dots, n,$$

т. е. каждая функция $D_i(x)$ в точке x^* достигает оптимума по собственной переменной x_i.

В частном случае, когда все x_i являются скалярными величинами, а функции $D_i(x)$ — гладкие, равновесие по Нэшу обязано удовлетворять системе уравнений

$$\frac{\partial D_i(x^*)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{5.2}$$

Дилемма заключенного. Некоторые примеры в математике — *канторово множество*, *подкова Смейла*, *функция Аккермана*[3], — выкристаллизовались в самостоятельные понятия и вошли в своеобразный теоретический минимум. Таким примером является и *дилемма заключенного* — игра двух участников с матрицей выигрышей (в данном случае — проигрышей):

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{1}; 1) & (\mathbf{9}; 0) \\ (\mathbf{0}; 9) & (\mathbf{8}; 8) \end{bmatrix}.$$

Первый игрок (заключенный) выбирает строку, второй — столбец. На пересечении — годы тюрьмы. Первая цифра, выделенная жирным, обозначает, сколько сидеть первому заключенному, вторая — второму[4]. Решая, что делать, первый заключенный стоит перед дилеммой: получить **1** год или **9** лет тюрьмы, выбрав первую строку, либо **0** или **8**, выбрав вторую. Выбирая вторую строку, он в любом случае выигрывает. Но игра симметрична. Партнеру точно так же выгоднее

[3] Элементы списка, конечно, могут быть разного калибра.

[4] Все это обычно приукрашивается сказкой. Заключенные совершили тяжкое преступление. Но у прокурора нет доказательств, и он тогда «организует игру». Сознавшийся и представивший доказательства — выходит на свободу, упорствующий — получает 9 лет тюрьмы. Оба не сознаются — получают по году (к примеру, за незаконное ношение оружия). Оба сознаются — получают по 8 лет.

выбрать второй столбец. В результате оба сознаются в совершении преступления (см. сноску), и получают по 8 лет. Это и есть нэшевское решение.

Равновесие по Нэшу можно охарактеризовать как индивидуально разумное решение. В рассмотренном примере коллективно разумным решением представляется (1;1). Но парадокс не снимается даже возможностью предварительной договоренности. В конечном итоге каждый принимает решение самостоятельно, при этом оказывается выгодно нарушить коллективный договор.

Парадоксальность нэшевских решений — скорее правило, нежели исключение, и многие экономические системы находятся именно в таком равновесии. До некоторой степени удивительным представляется тот факт, что для эффективности экономики в целом это часто не имеет никакого значения (см. следующий раздел).

5.3. Метаигровой синтез

Вернемся к задаче

$$\sum_{i=1}^{n} r_i\sqrt{x_i} \to \max, \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = X, \tag{5.3}$$

рассмотренной в разделе 2.1, где она интерпретировалась как чисто оптимизационная задача распределения ресурса X по n ячейкам (элементам A_i), имеющим производственные функции $\varphi_i(x_i) = r_i\sqrt{x_i}$, которые измеряют продукцию на выходе A_i при использовании ресурса в количестве x_i.

Попытка провести параллели с реальной экономической жизнью показывает, что не все так просто. Во-первых, производственные функции $\varphi_i(x_i)$ отражают скорее не жесткую связь между входом и выходом производителей, а их предельные возможности. Поэтому элементы необходимо заинтересовать в результатах работы, например, оплачивая труд пропорционально прибыли

$$D_i = \varphi_i(x_i) - \lambda x_i,$$

где λ — цена ресурса. Во-вторых, производственные функции управляющему органу (УО), как правило, не известны или известны весьма приблизительно. В ситуации $\varphi_i(x_i) = r_i\sqrt{x_i}$ можно считать, что на «верхнем уровне» не известны коэффициенты r_i. Но тогда УО не имеет возможности решать оптимизационную задачу (5.3). Прямолинейная попытка запросить значения r_i не гарантирует успеха, потому что производители будут отвечать, думая о собственных интересах. В результате может оказаться, что им невыгодно сообщать достоверную информацию.

Возможна следующая организация работы системы. УО посылает запрос элементу A_i о значении коэффициента r_i, элемент отвечает: «s_i». Не имея другой информации, УО на основе полученных данных $s = \{s_1, \ldots, s_n\}$ делит ресурс $x_i(s)$ и назначает цену $\lambda(s)$. После подстановки закона распределения $x_i(s)$ и назначения цены $\lambda(s)$ в функцию прибыли D_i, получаем

$$D_i(s) = r_i\sqrt{x_i(s)} - \lambda(s)x_i(s),$$

т. е. функция выигрыша каждого элемента оказывается зависящей лишь от вектора s. Возникает типичная игровая ситуация, в которой s_i является стратегией A_i. В результате игрового взаимодействия в системе устанавливается некоторое равновесие s^*, но нет никакой гарантии, что $s^* = r$.

Понятно, что положение и характер равновесия определяются функциями $x_i(s)$, $\lambda(s)$. Поэтому задачей УО оказывается «оптимизация правил игры»: такой выбор функций $x_i(s)$, $\lambda(s)$, чтобы в равновесии получающейся игры было $s^* = r$ или хотя бы $s^* \approx r$, а равновесное распределение ресурса $\{x_i(s^*)\}$ было оптимально по критерию (5.3). Иными словами, задача УО есть синтез такой игры между производителями, в которой каждый, преследуя сугубо индивидуальные цели, обеспечивал бы тем самым оптимум функционирования системы в целом.

Может показаться, что задача утопична. Не имея информации о системе, мы хотим так организовать ее работу, чтобы каждый думал только о себе, но этого было бы достаточно для оптимального функционирования в целом. Тем не менее подобная задача в довольно свободных предположениях имеет решение[5].

[5] Задачи такого сорта широко изучаются в «теории активных систем» (*Бурков В. Н.*). Поведенческая сторона дела кратко рассматривается в [6, т. 2, гл. 11], более подробно в монографии: *Опойцев В. И.* Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. М.: Наука, 1977.

Заметим, что тактика поведения производителей с точки зрения интересов системы не играет принципиальной роли в следующем смысле. Если тактика «нэшевская», УО синтезирует такую игру, что ресурс распределяется оптимально в равновесии по Нэшу. Если тактика иная — УО, синтезируя игру, ориентируется на другое понятие равновесия, по-прежнему добиваясь оптимума распределения ресурса.

Осмысливая затронутую тематику, можно было бы возразить, что проблема отсутствия информации о производственных функциях не столь принципиальна, и метаигровой подход драматизирует ситуацию, из которой есть простой выход. Ведь можно не запрашивать информацию, а извлекать ее из наблюдений деятельности предприятий в прошлые периоды. Подобный подход широко применяется на практике, реализуя в разных вариантах принцип планирования от достигнутого уровня. Но это не всегда дает эффект, порождая второй круг неприятностей и инициируя сознательное скрытие резервов производства.

Рассмотренный фрагмент из области метаигрового синтеза наглядно показывает, что чисто оптимизационные экономические задачи при более внимательном изучении теряют свою первоначальную форму и приобретают новое качество. Экономическая действительность неизбежно сталкивается с наличием в системе различных интересов и проблемой их разумного согласования. Нельзя сказать, что игровое взаимодействие подсистем главное звено в экономике, но это достаточно важный фактор, без учета которого трудно рассчитывать на успех исследования.

5.4. Оптимум Парето

На практике широко распространены задачи, в которых одновременно имеется несколько целевых функций. Например, при поиске выгодного режима работы предприятия приходится думать об улучшении не одного, а многих показателей: прибыль, рентабельность, себестоимость, надежность и т. п. Выбирая конструкцию самолета для серийного производства, также приходится думать о многих показателях: грузоподъемность, потолок, максимальная дальность перелета, экономичность эксплуатации.

На формальном уровне это выглядит так: имеется m целевых функций

$$D_1(x), \dots, D_m(x),$$

и на множестве X надо выбрать альтернативу $x \in X$, обеспечивающую, по возможности, как можно бóльшие значения всех $D_i(x)$. Понятно, что одновременная максимизация нескольких функций в общем случае противоречива. Первая осмысленная задача, которая здесь возникает, заключается в выделении множества *неулучшаемых альтернатив.*

Альтернатива $x \in X$ называется *неулучшаемой*, если не существует другой альтернативы $y \in X$, для которой

$$D_i(y) \geqslant D_i(x), \quad i = 1, \dots, m,$$

причем хотя бы одно из этих неравенств строгое.

Неулучшаемые альтернативы называют *оптимальными по Парето.* В определенных условиях оптимальные по Парето альтернативы исчерпываются решениями параметрической задачи оптимизации

$$\sum_i \mu_i D_i(x) \to \max, \quad x \in X.$$

Варьирование параметров μ_i позволяет перебрать все паретовские решения исходной задачи.

Паретовские решения естественно возникают в игровых задачах. Если $D_i(x)$ — выигрыш, а x_i — стратегия i-го игрока, то ясно, что результат разумного коллективного договора целесообразно искать среди альтернатив, оптимальных по Парето. По этой причине множество паретовских решений называют иногда *переговорным множеством.*

Глава 6

Бифуркации и катастрофы

Говорят, как назовешь, так и поедешь. Теория катастроф — лишнее тому подтверждение. Сначала имя вознесло, потом сбросило. Ажиотаж сменился разочарованием. Баланс до сих пор не найден. Однако не дожидаясь, пока «все уляжется», здесь стоит обратить внимание на ряд аспектов. В первую очередь заслуживает упоминания классификация критических точек, особенно для семейств функционалов, а также понятие грубости, которое для параметрических семейств неожиданно становится нетривиальным.

Содержание главы ориентировано на тех, кому суждено искать трудности в другой области. За деталями можно обратиться к [1, 7, 19].

6.1. Скачкообразные изменения

Поведение изучаемых систем обычно зависит от тех или иных параметров, при изменении которых могут возникать неожиданные явления. Стандартный пример: устойчивость верхнего положения маятника при вибрации точки подвеса с частотой, превосходящей барьерное значение. Это из области сюрпризов. Но есть также масса вполне ожидаемых резких перестроек системы на фоне плавного изменения параметров, о чем свидетельствуют устоявшиеся понятия *критической нагрузки*, *критической температуры* и т. п.

На заднем плане в таких ситуациях, как правило, фигурирует динамический процесс

$$\dot{x} = \nabla\varphi(x, \varepsilon), \tag{6.1}$$

но источником скачкообразных изменений являются метаморфозы, происходящие с критическими точками *потенциала* φ, т. е. с решениями уравнения

$$\nabla\varphi(x, \varepsilon) = 0, \tag{6.2}$$

при изменении параметра ε.

Качественный скачок в поведении динамической системы

$$\dot{x} = f(x, \varepsilon)$$

при изменении параметра называют *бифуркацией*, а соответствующее критическое значение ε — *бифуркационным*. Это не совсем согласуется с исходным смыслом слова бифуркация[1], поскольку изменения могут определяться не только ветвлением решений уравнения $f(x, \varepsilon) = 0$, но и чисто динамическими перестройками фазового портрета без появления новых положений равновесия. Например, в *бифуркации Андронова—Хопфа* [6, т. 2] фокус теряет устойчивость, и при этом рождается асимптотически устойчивый цикл. Тем не менее, в градиентных системах (6.1) бифуркации в основном определяются критическими точками потенциала и их характеристиками, что позволяет сконцентрироваться на изучении статики. Однако при этом нельзя забывать, что различные решения (6.2) могут качественно отличаться друг от друга — минимумы, максимумы и т. п.

В случае

$$\nabla\varphi(x, \varepsilon) = \varepsilon x - x^3$$

критическим значением является $\varepsilon = 0$. При $\varepsilon \leqslant 0$ система имеет единственное нулевое равновесие, которое асимптотически устойчиво. При сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ это равновесие становится неустойчивым, а в его окрестности появляется два других, асимптотически устойчивых равновесия $x = \pm\sqrt{\varepsilon}$.

В терминах потенциалов речь идет о возмущении

$$\varphi(x) = \frac{1}{4}x^4$$

добавкой $-\dfrac{\varepsilon}{2}x^2$. Исходный нулевой минимум $\varphi(x)$ при $\varepsilon > 0$ превращается в локальный максимум и два локальных минимума.

Пример другого рода дает $\varphi(x) = x^2$. Малое возмущение здесь может лишь незначительно сместить критическую точку, но она остается единственной и сохраняет свой тип минимума[2].

[1] От лат. bifurcus — раздвоенный.

[2] См. далее о структурной устойчивости.

В случае большего числа параметров возникают ситуации иного типа. Скажем, минимум по x функции

$$\varphi_\lambda(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}\lambda_2 x^2 + \lambda_1 x \tag{6.3}$$

определяется условием

$$\frac{d\varphi_\lambda}{dx} = x^3 + \lambda_2 x + \lambda_1 = 0.$$

Это уравнение так называемой *катастрофы сборки*. При различных параметрах λ_1, λ_2 кубическое уравнение будет иметь или один действительный корень, или три. Получается поверхность, изображенная на рис. 6.1. Можно ли эту поверхность считать графиком некоторой многозначной функции $x(\lambda_1, \lambda_2)$? Вообще говоря, можно, но на самом деле здесь подразумевается нечто большее, если за кадром стоит динамика

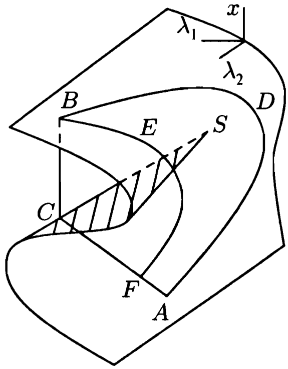

Рис. 6.1. Катастрофа сборки

$$\dot{x} = -\frac{d\varphi_\lambda(x)}{dx}.$$

В этом случае заштрихованная часть поверхности отвечает неустойчивым положениям равновесия $x(\lambda_1, \lambda_2)$, остальные $x(\lambda_1, \lambda_2)$ — устойчивы[3].

Если при этом система в начальный момент находится в точке A и параметр λ_2 плавно увеличивается, то состояние системы меняется вдоль ACB — в точке C происходит скачок. При возвращении λ_2 в исходное положение состояние системы будет меняться по другому пути — BEF (нечто вроде петли гистерезиса). В то же время при специальной регулировке параметров λ_1, λ_2 возможен плавный переход из A в B вдоль ADB. Наконец, заштрихованная часть поверхности соответствует нереализуемым (неустойчивым, метастабильным) состояниям системы.

Кубическое уравнение задает канонический вид катастрофы сборки, имеющей в точке S характерную особенность. К такому

[3] Там потенциал $\varphi_\lambda(x)$ принимает локально максимальные значения.

виду с помощью нелинейных замен координат сводятся различные другие уравнения. По первому впечатлению различных типов особенностей может быть довольно много. Однако оказывается, что в типичных, ***структурно устойчивых***, случаях при наличии двух параметров могут встречаться лишь два типа особенностей: ***катастрофа сборки*** и ***катастрофа складки***. При трех и более параметрах различных особенностей несколько больше, но и там дается их полная классификация.

6.2. Хвосты и струи

Далее используется обычный стенографический трюк

$$\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}, \quad D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

с помощью которого ряд Тэйлора для функции n переменных записывается в привычном на вещественной прямой виде:

$$f(x+z) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} z^\alpha, \quad \alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n, \quad 0! = 1.$$

Начальный отрезок ряда Тэйлора,

$$j^k \varphi(x) = \sum_{\alpha=0}^{k} \frac{D^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha,$$

называется ***k-струей*** функции φ в нуле[4]. Разность $\varphi(x) - j^k \varphi(x)$ называют ***хвостом***.

Напомним, что запись

$$\varphi(x) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{D^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha$$

не всегда корректна, поскольку ряд Тэйлора не обязан сходиться к $\varphi(x)$.

Стандартный пример дает функция $\varphi(x) = e^{-1/x^2}$, продолженная в нуле по непрерывности. Все $D^\alpha \varphi(0) = 0$, и ряд

$$0(x) = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \ldots$$

[4] Обычно k-струя определяется бескоординатно, что выглядит иначе.

сходится к тождественному нулю, но не к $\varphi(x)$. Тем не менее любой отрезок этого ряда хорошо приближает $\varphi(x)$ в окрестности нуля, но не улавливает, что $\varphi(x)$ в нуле имеет минимум.

Считается, что функция $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет в нуле *порядок* k, если первой ненулевой производной является $D^k\varphi(0)$.

6.3. Лемма Морса

В окрестности невырожденной критической точки любой функционал заменой переменных приводится к сумме «$\pm$ квадратов». Более точная формулировка и обоснование приводятся ниже, но предварительно удобно выделить вспомогательный результат.

6.3.1. Лемма. *Для любой гладкой функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, при условии $f(0) = 0$, — всегда можно указать такие $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, что*

$$f(x) = x_1 g_1(x) + \ldots + x_n g_n(x), \quad g_i(0) = \frac{\partial f(0)}{\partial x_i}.$$

◄ Результат устанавливается в одну строчку:

$$f(x) = \int\limits_0^1 f_t'(tx)\,dt = \int\limits_0^1 \sum_i \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i} x_i\,dt. \quad ►$$

6.3.2. Лемма Морса. *Пусть гладкая функция $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет в нуле невырожденную критическую точку и $\varphi(0) = 0$. Тогда в достаточно малой окрестности нуля существует локальная система координат $z_1, \ldots, z_n$, в которой*[5]

$$\varphi[x(z)] = z_1^2 + \ldots + z_k^2 - z_{k+1}^2 \ldots - z_n^2, \tag{6.4}$$

причем $x(z)$ является диффеоморфизмом[6], *а k — максимальной размерностью подпространства, на котором матрица Гессе $\nabla^2\varphi$ положительно определена*[7].

[5] Функция (6.4) называется *морсовским k-седлом*.

[6] *Диффеоморфизмом* называют такое взаимно однозначное отображение $f : X \to Y$, что f и f^{-1} непрерывно дифференцируемы.

[7] Разность $n - k$ называют *индексом* невырожденной критической точки, см. [16].

◄ По лемме 6.3.1

$$\varphi(x)=\sum_i x_i\psi_i(x),$$

причем все

$$\psi_i(0)=\frac{\partial\varphi(0)}{\partial x_i}=0,$$

что позволяет применить лемму 6.3.1 к функциям $\psi_i(x)$, получая в итоге

$$\varphi(x)=\sum_{i,j} x_i x_j\omega_{ij}(x).$$

Без ограничения общности можно считать[8] $\omega_{ij}=\omega_{ji}$, причем матрица $\omega_{ij}(0)$ невырожденна, поскольку невырожденна нулевая критическая точка и

$$\omega_{ij}(0)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi(0)}{\partial x_i\partial x_j}.$$

Если теперь в локальных координатах $u_1,\dots,u_n$

$$\varphi[x(u)]=\pm u_1^2\pm\ldots\pm u_{k-1}^2+\sum_{i,j\geqslant k} u_i u_j\omega_{ij}(u),$$

то в координатах $v_1,\dots,v_n$, где все $v_i=u_i$, кроме

$$v_k=\sqrt{|\omega_{kk}(u)|}\left[u_k+\sum_{i>k}\frac{u_i\omega_{ik}(u)}{\omega_{kk}(u)}\right],$$

получается

$$\varphi[x(v)]=\pm v_1^2\pm\ldots\pm v_k^2+\sum_{i,j\geqslant k+1} v_i v_j\widehat{\omega}_{ij}(v),$$

что обосновывает индукционный шаг и позволяет дойти до $k=n$, начиная с $k=0$.

Непрерывная дифференцируемость локальных замен требует внимания лишь в части использования $\sqrt{|\omega_{kk}(u)|}$, где спасает ссылка на теорему об обратной функции. ►

Лемма Морса, в некотором роде, является нелинейным обобщением хорошо известных в линейной алгебре результатов о каноническом представлении квадратичной формы [6, т. 3]. Конечно, если говорить с натяжкой. Потому что здесь появляются принципиально новые аспекты, позволяющие взглянуть на различные функции с точки зрения эквивалентности их особенностей.

---

[8] В противном случае от ω_{ij} можно перейти к $\widetilde{\omega}_{ij}=1/2(\omega_{ij}+\omega_{ji})$.

6.3.3. Определение. *Гладкие функции $\varphi, \psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ локально эквивалентны в нуле, если существует такой локальный диффеоморфизм $z(x)$, что*

$$\varphi(x) = \psi[z(x)] + \xi$$

в некоторой окрестности нуля при подходящей константе ξ.

Если $\nabla\varphi(0) = \nabla\psi(0) = 0$, то в предположениях определения 6.3.3 говорят об *эквивалентности критических точек*. Лемма 6.3.2 показывает, что невырожденные критические точки, которым отвечают *гессианы* одинакового ранга[9], — эквивалентны друг другу.

6.4. Эквивалентность особенностей

Данное выше определение эквивалентности критических точек — инструмент, толкающий на весьма зыбкую почву. За пределами действия *леммы Морса* возникают существенные трудности.

Есть, правда, еще одно исключение — одномерный случай. Если

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \ldots = \varphi^{(k-1)}(0) = 0,$$

и лишь $\varphi^{(k)}(0) > 0$, то $\varphi(x)$ локально эквивалентна в нуле функции x^k. Остальные производные роли не играют[10].

Таким образом, первая же ненулевая струя в одномерном случае определяет характер критической точки. Надежды на нечто подобное в размерностях $n > 1$ — не оправдываются.

Вопрос, стоящий на кону, выглядит примерно так. В каком случае и по каким признакам можно гарантировать эквивалентность в нуле функции $\varphi(x)$ и ее k-струи $j^k\varphi(x)$? Иначе говоря, какие свойства полинома $j^k\varphi(x)$ обеспечивают эквивалентность $j^k\varphi(x)$

[9] Напомним, что *рангом квадратичной формы* называется не ранг задающей матрицы, а число отрицательных слагаемых в каноническом представлении, каковое является топологическим инвариантом — сохраняется при невырожденных преобразованиях.

[10] О неэквивалентности внешне похожих функций x^3 и x^5 можно судить на основе того, что их малые возмущения приводят к появлению разного числа новых критических точек в окрестности нуля.

и $j^k\varphi(x) + q(x)$ при любой функции $q(x)$, разложение которой начинается со степени $m > k$? При положительном ответе на этот вопрос функцию $\varphi(x)$ называют *k-определенной* в нуле.

По первому впечатлению условия *k-определенности* не должны быть очень сложными, по крайней мере, идейно. На такую волну настраивает ситуация с невырожденным гессианом. Однако сложность проблемы оказывается несоизмерима с ожиданиями. Пробные попытки довольно быстро заводят в тупик.

Функция $x_1x_2^2$ не является *k-определенной* ни при каком конечном k. А функция

$$f(x_1, x_2) = x_1x_2^2 + x_1^{11} + g(x_1, x_2),$$

где разложение в ряд Тэйлора $g(x_1, x_2)$ начинается с членов порядка не менее 12-го, оказывается 11-*определенной*, и поэтому эквивалентна вблизи нуля многочлену $x_1x_2^2 + x_1^{11}$. О неэквивалентности $x_1x_2^2$ и $x_1x_2^2 + x_1^{11}$ можно судить по различию их графиков в части пересечения нулевого уровня: $x_1x_2^2 = 0$ удовлетворяют обе оси координат, а $x_1x_2^2 + x_1^{11} = 0$ — только $x_1 = 0$.

Более загадочна функция [19]

$$\varphi(x_1, x_2) = x_1^5 + x_2^5,$$

которая не является 5-*определенной*, но 6-*определена*(!), т. е. $x_1^5 + x_2^5$ и $x_1^5 + x_2^5 + \psi(x)$ гарантированно эквивалентны в нуле лишь в том случае, когда разложение $\psi(x)$ начинается со степени $m \geqslant 7$.

Функции

$$f(x, y) = 3x^2 + 2x^3 - 6xy^2,$$

$$g(x, y) = 3x^2 + 2x^3 - 6xy^2 + h(x, y),$$

где разложение $h(x, y)$ начинается с членов порядка не менее четвертого, в общем случае могут быть не эквивалентны. Однако если разложение $h(x, y)$ начинается лишь с членов пятого порядка, то f и g — эквивалентны. (!)

Оба многочлена

$$f_1(x, y) = x^2 - 2xy + y^2,$$

$$f_2(x, y) = x^2 - y^2$$

обращаются в нуль при $x = y$, второй — также при $x = -y$.

Между ними имеется принципиальная разница. Функция f_2 определяет седло, и седловой характер критической точки не может быть нарушен добавлением членов третьего порядка и выше. Ничего подобного нельзя сказать о первом многочлене f_1. Прибавление к нему членов более высокого порядка может менять характер критической точки, так или иначе.

6.4.1. Теорема. *Если функция $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является k-определенной, то любой однородный многочлен степени $k+1$ представим в виде*

$$j^{k+1}\left[p_1(x)j^{k-1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)\right] + \ldots + j^{k+1}\left[p_n(x)j^{k-1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)\right],$$

где $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ — полиномы, порядка не менее первого.

Теорема 6.4.1 приведена лишь для того, чтобы можно было составить представление, о какого сорта условиях здесь идет речь. Вариации предположений и выводов см. в [7, 19].

Книга [7] по теории катастроф, как нельзя кстати, начинается с китайской притчи. Некий Чжу, дескать, все отдал, чтобы научиться убивать драконов. Долго учился, достиг совершенства, но ни один дракон так ему и не встретился. «И тогда [тут авторы ссылаются на Ренэ Тома] он начал учить других искусству убивать драконов».

6.5. Грубость и трансверсальность

Понятно, что нет смысла изучать те свойства системы, которые исчезают при малейшем возмущении параметров. Вопрос, конечно, не так прост, как поначалу кажется. Тем не менее идея *грубости системы*, устойчивости к малым возмущениям, называемой также *структурной устойчивостью*, — после необходимых уточнений доводится, как правило, до четких постановок задач.

В данном случае речь идет о критических точках функционала, каковые под воздействием возмущений могут исчезать, расщепляться, а также менять свой тип. Это список «нежелательных» явлений. Структурно устойчивые ситуации исчерпывают невырожденные критические точки [11)], что не вполне ясно, как обосновать. Не совсем ясно даже, *что* надо обосновывать.

[11)] Характеризуемые невырожденностью *матрицы Гессе*

$$\nabla^2\varphi = \left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}\right].$$

Ситуация максимума или минимума прозрачна (раздел 1.2), но как быть в общем случае? Туман частично рассеивает *лемма Морса*, поскольку гессиан остается невырожденным под воздействием достаточно малого возмущения, но тогда в подходящей системе координат — это *k-седло.*

Заметим, невырожденность *матрицы Гессе* — есть невырожденность *матрицы Якоби* отображения

$$\nabla\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

что пускает мысль по направлению к *трансверсальности*, и эта точка зрения не только проливает новый свет, но и оказывается более перспективной при рассмотрении семейств функций.

Трансверсальность — довольно общее понятие, отвечающее *ситуации общего положения* при пересечении многообразий. Два подпространства X и Y в $\mathbb{R}^n$ *трансверсальны*, если любой вектор $z \in \mathbb{R}^n$ представи́м в виде[12)]

$$z = x + y, \quad x \in X, \quad y \in Y.$$

Гиперплоскости (сдвинутые подпространства) $L, M \subset \mathbb{R}^n$ *трансверсальны*, если их сумма порождает $\mathbb{R}^n$.

Наконец, *гладкие многообразия* в $\mathbb{R}^n$ пересекаются *трансверсально* в точке x_0, если их касательные гиперплоскости в x_0 трансверсальны. О *трансверсальности многообразий* «целиком» говорят в том случае, когда в любой точке пересечения они пересекаются трансверсально[13)].

Таким образом, трансверсальность пересечения многообразий, графиков — есть некий эквивалент *типичности*, отсутствия исключительности, который оказывается лакмусовой бумажкой при выяснении структурной устойчивости. Невырожденность нулевой

[12)] Прямая и плоскость $\mathbb{R}^2$ *трансверсальны* в $\mathbb{R}^3$, если прямая не лежит в плоскости. Но в $\mathbb{R}^4$ они уже не трансверсальны.

[13)] Разбросанные по литературе определения трансверсальности имеют определенный люфт, который обычно используется для извлечения тех или иных удобств.

критической точки $\varphi(x)$ равносильна трансверсальности пересечения в нуле графика градиента $\nabla\varphi(x)$ с графиком нулевой функции. Аналогичным образом можно характеризовать (как структурно устойчивые) *k-определенные* функции. При этом надо лишь оговорить, что в качестве возмущений допускаются функции, разложения которых начинаются с $(k+1)$-й степени. Это, кстати, обычная практика. Для определения структурной устойчивости надо оговаривать две вещи: что должно сохраняться и при каких возмущениях. Любую систему можно сделать «структурно устойчивой», подходящим образом меняя определение.

Разумеется, произвол выбора определения требует разумного подхода. Проблема, в той или иной степени, не математическая, но необходимость согласования различных аспектов теории часто сводит свободу выбора к единственному варианту.

Обычное требование грубости критической точки проистекает из естественных потребностей смежных областей. Характер критической точки не должен меняться при достаточно малых возмущениях[14)] — вот на что опираются многочисленные результаты. И все рассыплется как только определение структурной устойчивости радикально изменится.

6.6. Структурно устойчивые семейства

При рассмотрении семейств функций точка зрения естественным образом меняется.

6.6.1. Определение. *Семейства функций $\varphi(x,s)$, $\psi(x,s)$, т. е.*

$$\varphi, \psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R},$$

эквивалентны в нуле, если

$$\varphi(x,s) = \psi[z(x,s), t(s)] + \xi(s),$$

где $\xi(s)$ — гладкое отображение, $t(s)$ — диффеоморфизм, $z(x,s)$ — семейство диффеоморфизмов.

[14)] Без учета каких бы то ни было степеней разложения.

Понятно, что это следующий виток по отношению к определению 6.3.3. Если теперь $\varphi(x, s)$ эквивалентно в указанном смысле любому $\varphi(x,s) + \Delta\varphi(x,s)$, где $\Delta\varphi(x,s)$ — достаточно мало́, то $\varphi(x, s)$ считается ***структурно устойчивым семейством.***

В глаза бросается принципиальное отличие этого определения от структурной устойчивости критической точки. Но вопрос в том, откуда двигаться. Если начинать с семейств функций, то в случае независимости φ, ψ от s определение 6.6.1 переходит в определение 6.3.3. Аналогичная трансформация происходит со структурной устойчивостью.

Конечно, при намерении посвятить себя «искусству убивать драконов» данные выше определения желательно рассмотреть с разных точек зрения. Но если все же концентрироваться на более приземленных задачах, можно ограничиться малым. Главное, разобраться, в чем различие на качественном уровне. Почему функция x^4 структурно неустойчива, а семейство (6.3), т. е.

$$\varphi_\lambda(x) = \frac{1}{4}\,x^4 + \frac{1}{2}\,\lambda_2 x^2 + \lambda_1 x$$

структурно устойчиво?

Потому что критическая точка x^4 расщепляется под воздействием сколь угодно малого возмущения εx^2. Что касается $\varphi_\lambda(x)$, то здесь квадратичные и линейные члены «легализованы», а от кубических можно избавиться заменой переменных. Поэтому возмущения степени $\leqslant 4$ меняют лишь параметры функционала. Наконец, возмущения степени > 4 не играют роли, потому что имеет место аналог 4-*определенности для семейства*, но это и составляет основную трудность при строгом доказательстве, хотя может быть осознано с помощью визуальных усилий — на базе представлений о трансверсальных пересечениях.

Главное достижение *теории катастроф* заключается, конечно, не в том, что изучены некоторые катастрофы. Главное в другом. Установлено, что при двух параметрах есть всего два структурно устойчивых семейства, *катастрофа сборки* и *катастрофа складки* ($\varphi_\lambda(x) = x^3 + \lambda x$). При большем числе параметров количество структурно устойчивых эталонных семейств увеличивается. Первые *семь элементарных катастроф* были открыты *Томом*. *Арнольдом* классификация существенно расширена[15].

[15] *Арнольд В. И.* Критические точки гладких функций и их нормальные формы // УМН. 1975. №,30. Вып. 5. С. 3–65.

6.7. Спекуляции и приложения

Уравнение газа *Ван-дер-Ваальса*[16],

$$\left(P + \frac{\alpha}{V^2}\right)(V - \beta) = \gamma T,$$

где P, V, T — давление, объем, температура, α, β, γ — константы, заменой переменных (не суть важно какой) приводится к уравнению $x^3 + \lambda_2 x + \lambda_1 = 0$, которое описывает катастрофу сборки.

Под этим предлогом обычно теория фазовых переходов в рамках описания *Ван-дер-Ваальса* записывается в качестве приложения теории катастроф. Дескать, взаимосвязь термодинамических переменных P, V, T характеризуется «той самой» особенностью. Но это слабый аргумент, и даже «никакой». Параметрическое уравнение

$$x^3 + \lambda_2 x + \lambda_1 = 0$$

легко анализируется элементарными методами, и было изучено задолго до появления теории катастроф. Тем не менее, дух теории катастроф витает над уравнением

$$x^3 + \lambda_2 x + \lambda_1 = 0,$$

и было бы полезно разобраться, есть ли от этого какой-то эффект для термодинамики.

Влияние любой теории на приложения можно разделить на две категории: аппаратную поддержку и философскую опору. Аппаратная составляющая, заслоняющая обычно все остальное, в теории катастроф не так заметна. Технические подробности большей частью нужны для внутренних потребностей. Кое-что направлено вовне, например методика проверки k-определенности критической точки, но в целом аппаратная часть теории в значительной степени замкнута в себе. Поэтому прикладная востребованность близка к нулю, если говорить об упрощенном взгляде на предмет.

Философская составляющая, наоборот, существенна и нетривиальна. Наличие классификации структурно устойчивых катастроф

[16] Хороший пример, кстати, когда сомнительные предположения ведут к правильным выводам.

служит фильтром, позволяющим оценивать исходное качество моделирования. Если бы, например, уравнение состояния вещества приводило к зависимости между параметрами, не обладающей свойствами грубости, было бы ясно, что модель, возможно, неадекватна. Тот факт, что уравнение Ван-дер-Ваальса порождает структурно устойчивую зависимость, — служит аргументом в пользу удачной постановки задачи. На многие физические приложения, описанные в [19], ***полезно взглянуть как раз с подобной точки зрения.***

Теория катастроф имеет также массу «несерьезных» приложений в биологии, экономике, социологии. Большинство из них строится примерно по такой схеме.

Будем, например, шахматиста характеризовать тремя параметрами: x — достижения, λ_1 — увлеченность, λ_2 — техника игры. Первое, что приходит в голову, попытаться охарактеризовать зависимость $x(\lambda_1, \lambda_2)$. Поскольку x не обязан быть функцией «всего остального», можно попытаться подобрать подходящую поверхность в пространстве параметров $\{x, \lambda_1, \lambda_2\}$. Теория катастроф делает эту задачу предельно простой. Надо рассмотреть лишь две возможности: *сборку* и *складку* — и подобрать подходящее расположение поверхности в пространстве.

Поверхность на рис. 6.1 как раз улавливает некоторые содержательные свойства задачи. При низкой увлеченности рост техники дает непрерывный рост достижений. При большой увлеченности рост техники приводит к довольно медленному росту достижений, но затем достижения увеличиваются скачком. Наконец, рис. 6.1 объясняет тот удивительный факт, что есть шахматисты (в окрестности точек B и C), которые равны по технике и увлеченности, но существенно отличаются достижениями.

Далее можно ставить разные задачи. Например, по какой траектории целесообразно тренировать шахматиста, учитывая его индивидуальные особенности, начальное положение и потенциальные возможности. Допустим, если шахматист находится в районе точки A, а природные данные не позволяют ему в разумное время достичь техники уровня точек B и C, то для прогресса необходимо умерить увлеченность и двигаться в обход, вдоль ADB.

Аналогичным образом рассматриваются различные типы систем: «спрос — цена — реклама», «результаты труда — дисциплина — квалификация» и т. п.

Много подобного рода анализов рассеяно по литературе. Причем, несмотря на всю их «наивность», они часто звучат откровением для специалистов-прикладников. Возможно, что и в приведенном выше примере кое-кто из шахматных тренеров найдет удобное модельное подтверждение своих практических наблюдений.

Спрашивается, как расценивать подобного сорта «приложения»? Удобнее всего — просто игнорировать их, считая чисто спекулятивными. Опыт развития точных наук показывает, что модели должны позволять проводить вычисления и, главное, должны строиться на основе измеряемых параметров. Первый пункт (наличие цифровых результатов) постепенно стал необязательным — важность качественных результатов давно осознана во многих областях. Но вот по второму пункту (принципиальная измеряемость параметров) модели типа «достижения — увлеченность — техника» выглядят малоубедительными.

Тем не менее в этих моделях есть рациональное зерно, и было бы жалко его потерять, игнорируя все оптом. Главный рациональный момент состоит здесь в том, что они дают удобный язык для описания явлений, чуждых методам традиционной математики. А язык во многом определяет результаты. Ведь исследование часто идет не столько от потребностей содержательной задачи, сколько от имеющегося инструмента (языка).

Возьмем простой пример. При изучении рынка, не задумываясь, пишут: y — спрос, x — цена, функция $y = f(x)$ описывает их зависимость. Однако реальный спрос испытывает скачки, причем существо дела заключается не в разрывности функции $f(x)$. Психологическая инерция (привыкание) приводит к тому, что местоположение скачков зависит от направления изменения цены. Правдоподобно выглядит зависимость, изображенная на рис. 6.2, и эта зависимость не описывается никакой функциональной связью, даже многозначной. Получается петля гистерезиса, наличие нереализуемого в обычных условиях участка AB — дань предшествующему рассмотрению.

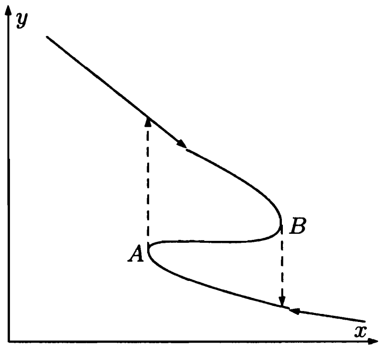

Рис. 6.2

Итогом сказанного может служить простой вывод. Содержательные мотивы, с одной стороны, и теория катастроф — с другой, дают повод для пополнения языка функциональных связей. Математические результаты теории при этом сами по себе могут оставаться за кадром. Главное, они дают идеологическую базу, на которой новый аппарат приобретает рациональные черты. Что здесь имеется в виду? Хотя бы понимание того, что такое типичные ситуации и их классификация. Это, в свою очередь, позволяет изучать не произвольные связи, а ограниченное число их типов.

6.8. Дополнение

• Бифуркационная тематика, конечно, шире тех постановок задач, которые рассматриваются в теории катастроф. Основная доля исследований по бифуркациям замыкается в рамках задач статики, сводящихся к анализу особых точек $x(y)$ уравнения $F(x, y) = 0$. Здесь много интересных проблем, и о динамике часто забывают. Между тем центр тяжести теории лежит, безусловно, в динамической области.

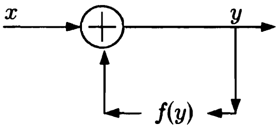

Рис. 6.3

Статического ракурса иногда не хватает даже в тех задачах, где изначально нет никакой динамики. Рассмотрим для примера блок-схему, изображенную на рис. 6.3. В цепи обратной связи здесь использован функциональный преобразователь $f(y) = \sqrt{y}$ при $y > 0$ и $f(y) = -\sqrt{-y}$ при $y < 0$.

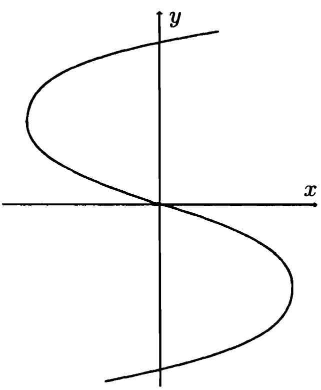

Рис. 6.4

Результирующая связь между входом x и выходом y системы определяется равенством

$$x + f(y) = y,$$

что приводит к зависимости, изображенной на рис. 6.4.

Возникает *сюрприз*. Выход y не определяется входом x, хотя все звенья системы детерминированы и взаимно однозначны. Беспечное заявление, что связь входа с выходом многозначна, не решает проблемы, так как безответным повисает вопрос: чему конкретно равно y? В реальной системе ведь значение y должно быть определено. Поэтому на практике приходится уточнять задачу: описывать динамику, учитывать «паразитные» емкости, индуктивности и пр.

• Не хватать может даже динамического ракурса. Представим, что в системе, изображенной на рис. 6.3, время дискретно, и f — динамический блок, дающий на выходе сигнал $y[k] - y[k-1]$ при входном сигнале $y[k]$. Тогда из балансового соотношения

$$x[k] + y[k] - y[k-1] = y[k]$$

вытекает $y[k] = x[k+1]$. (!) Ни много ни мало — блок-схема предсказывает будущее. Понятно, чтобы удержаться в рамках дозволенного, надо переходить на более тонкое описание динамики, опять учитывая влияние паразитных параметров, и самое главное — запуск процесса.

• В границах изучаемой модели не всегда ясно, как будет вести себя реальная система. При изменении параметров вдруг начинает мигать «сигнальная лампочка». Это может быть что угодно:

- *решения за конечное время уходят в бесконечность*,
- *модель начинает предсказывать будущее*,
- *решения ветвятся*,
- *уравнение перестает решаться*.

При этом реальная система выглядит загадкой, и приходится искать другие модели. Выходить за рамки исходной постановки, переосмысливать задачу. К слову, из модели, предсказывающей будущее, более-менее ясно, что временны́е задержки сигналов в цепи обратной связи могут приводить к большим недоразумениям. Если такие задержки фигурируют в качестве параметров, то в задаче о бифуркациях надо ожидать серьезных приключений.

Сами по себе неожиданности при бифуркациях почти всегда связаны с забывчивостью. Забываются явные и неявные допущения при выводе уравнений модели. Дифференциальное описание, как правило, предполагает, что «процесс уже пошел», в то время как этап «включения» бывает равносилен переходу в другой мир. К стационарному режиму иногда нет дороги.

Глава 7

Вариационное исчисление

7.1. Классические задачи

Некоторые математические дисциплины испытывают постоянные мучения в связи с поиском простых и красивых экспонатов для агитации. В данном случае задачи давно нашлись сами.

Отправным источником *вариационного исчисления* принято считать задачу о *брахистохроне*: о кривой быстрейшего спуска, по которой тяжелый шарик в отсутствие трения быстрее всего скатывается из точки A в точку B. Постановка принадлежит *Галилею*, а в 1696 г. *Иоганн Бернулли* выдвинул ее на конкурс в основанном им первом в мире математическом журнале «Acta Auditorum». Поступило три решения: от *Лопиталя*, *Якоба Бернулли*[1)] и анонимное, по поводу которого И. Бернулли заметил: «Льва узнают по когтям», — имея в виду *Ньютона*.

Задача о брахистохроне. Пусть точка A расположена в начале координат, $A = (0, 0)$, ось y направлена вниз и $B = (\alpha, \beta)$. Наилучшее решение (*брахистохрона*) ищется среди кривых $y(x)$.

Скорость движения $v = \sqrt{2gy}$ определяется из закона сохранения энергии

$$mgy = \frac{mv^2}{2}.$$

Дифференциал длины дуги

$$dl = \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx.$$

В итоге $dt = dl/v$, и минимизация времени движения (с точностью до константы $1/\sqrt{2g}$) сводится к задаче:

$$\int_0^\alpha \frac{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}{\sqrt{y(x)}}\, dx \to \min; \quad y(0) = 0, \quad y(\alpha) = \beta.$$

[1)] В «Лекциях» имена обычно опускаются, но для семьи *Бернулли* приходится делать исключение, слишком много ее членов оставили след в математике.

Задача о распространении луча света в неоднородной среде базируется на той же идеологической основе. Согласно *принципу Ферма*, свет «выбирает путь», минимизируя время, т. е.

$$\int_0^a \frac{\sqrt{1+[y'(x)]^2}}{v(x,y)}\,dx \to \min; \quad y(0)=0, \quad y(a)=\beta,$$

где $v(x,y)$ — скорость света в точке (x,y).

Начало вариационного исчисления можно связывать также с *изопериметрическими задачами*. Многие решения были известны за несколько веков до нашей эры: окружность, ограничивающая максимум площади при заданной длине; сфера, заключающая максимальный объем при фиксированной площади[2].

Задача Дидоны — базируется на античной легенде. Финикийская царица Дидона, бежав в Африку по семейным обстоятельствам, купила у царя берберов Ярба «клочок земли, который можно огородить бычьей шкурой». Ярбу потом мало не показалось. Покупательница разрезала шкуру на ремни, связала их и окружила приличную территорию, заложив Карфаген и положив начало решению изопериметрических задач.

Соответствующая максимизация площади при фиксации концов кривой длины L на прямой $y \equiv 0$ выглядит так:

$$\int_\alpha^\beta y(x)\,dx \to \max, \qquad \int_\alpha^\beta \sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx = l.$$

Легко выписать также вариант постановки для замкнутой кривой.

Если кривую $y(x)$ параметризовать: $x = x(t)$, $y = y(t)$, — задача приобретает вид:

$$\frac{1}{2}\int_0^T (x\dot{y} - \dot{x}y)\,dt \to \max, \qquad \int_0^T \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt = l.$$

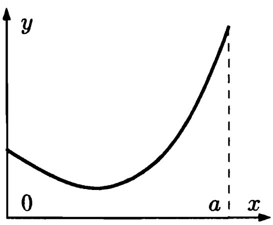

Рис. 7.1

Тяжелая нить. Форма тяжелой нити длины l, закрепленной в точках $\{0, y(0)\}$, $\{a, y(a)\}$ (рис. 7.1)

[2] Между прочим, это хороший пример того, что задача может быть решена задолго до появления адекватного инструмента. Да и не подозревали древние, что их способы рассуждения будут казаться нестрогими через пару тысяч лет.

определяется минимумом потенциальной энергии U (центр тяжести обязан занимать наиболее низкое положение), что приводит к вариационной задаче:

$$U \sim \int_0^a y\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx \to \min, \qquad \int_0^a \sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx = l.$$

В теории управления широко распространены задачи на условный экстремум вида

$$\begin{aligned} S &= \int_0^T F(x_1,\ldots,x_n;u_1,\ldots,u_r;t)\,dt \to \min, \\ \dot{x}_i &= f_i(x_1,\ldots,x_n;u_1,\ldots,u_r;t), \qquad i=1,\ldots,n, \end{aligned} \tag{7.1}$$

где искомым является *управление* $u(t) = \{u_1(t),\ldots,u_r(t)\}$, как функция времени, а ограничения имеют характер дифференциальных уравнений.

В большинстве практически интересных ситуаций на управление накладываются ограничения, приводящие к недифференцируемости $u(t)$, что выводит анализ за рамки классического ракурса (см. главу 8).

7.2. Уравнение Эйлера

Рассмотрим вариационную *задачу с закрепленными концами*, в которой ищется экстремаль функционала

$$W = \int_{t_0}^{t_1} L(q,\dot{q},t)\,dt \tag{7.2}$$

на множестве гладких функций $q(t)$, принимающих на концах заданного промежутка времени[3] $[t_0,t_1]$ фиксированные значения $q(t_0)$ и $q(t_1)$.

Задача (7.2) идеологически почти не отличается от конечномерного аналога, но технические подробности ее сильно преображают. В первую очередь надо договориться, о каком *функциональном*

[3] Разумеется, временна́я интерпретация параметра t необязательна.

пространстве идет речь, но решить этот вопрос раз и навсегда не удается. Пространство E приходится подбирать, чтобы задача решалась при разумных усилиях. Как правило, предполагается $E = C^2[t_0, t_1]$. Далее все развивается по обычному сценарию, в котором необходимое условие оптимума определяется равенством нулю градиента ∇W. Но градиент является вектором *сопряженного пространства*, что приводит к появлению «нового действующего лица» E^*. Правда, в случае *рефлексивных* пространств (например, *гильбертовых*), E с точностью до изоморфизма, совпадает с E^*, и это сближает картину с пейзажем в $\mathbb{R}^n$. Все это в достаточной мере описано в [6, т. 5]. Остановимся лишь на стержневых моментах.

Градиент функционала. Производная Фреше $\varphi'(x)$ функционала $\varphi : E \to \mathbb{R}$ — это такой вектор из E^*, что

$$\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = \langle \varphi'(x), \Delta x \rangle + o(\|\Delta x\|), \tag{7.3}$$

который называют *градиентом Фреше* функционала $\varphi(x)$ в точке x и обозначают как $\nabla\varphi(x)$. Но в общем случае (при несовпадении E с E^*) угловые скобки обозначают не скалярное произведение, а *линейный функционал*.

Линейная часть равенства (7.3), записанная в виде

$$\delta\varphi = \varphi(x + \delta x) - \varphi(x) = \langle \varphi'(x), \delta x \rangle,$$

напоминает соотношение дифференциалов, но $\delta\varphi$ и δx называют *вариациями*.

Функционал $\varphi : E \to \mathbb{R}$ называется *дифференцируемым по Гато* в точке x, если существует такой линейный ограниченный функционал $f \in E^*$, именуемый *градиентом Гато*, что для любого $h \in E$

$$\varphi(x + th) - \varphi(x) = t\langle f, h \rangle + o(t).$$

Понятно, что проблема в данном случае «перекликается»[4] с дифференцированием по любому направлению. Градиент Гато и градиент Фреше обозначаются одинаково: $\nabla\varphi(x)$ — различие возлагается на контекст. А если существуют оба градиента, то они совпадают, — и в этом случае говорят просто о градиенте. Для совпадения достаточно равномерной непрерывности градиента Гато, каковая далее предполагается.

7.2.1. Лемма. *Необходимым условием достижения функционалом $\varphi(x)$ в точке x_0 локального максимума или минимума является обращение в нуль градиента $\nabla\varphi(x_0)$, «равносильно» — вариации $\delta\varphi(x_0)$.*

[4] «Перекликается», но не совпадает, — потому что в производной по направлению фигурирует *односторонний* предел, который к тому же может оказаться нелинейным по h.

◄ Из $\varphi(x) = \varphi(x_0) + \langle\nabla\varphi(x), x - x_0\rangle + o(\|x - x_0\|)$ ясно, что при $\nabla\varphi(x_0) \neq 0$ в сколь угодно малой окрестности x_0 нашлись бы точки, в которых функционал принимал бы значения разных знаков. ►

Вернемся теперь к задаче (7.2). Пользуясь леммой 7.2.1 и варьируя вектор-функцию

$$q(t) = \{q_1(t), \dots, q_n(t)\}$$

с помощью вариации $\delta q(t)$, обращающейся в нуль на концах $[t_0, t_1]$, получаем, используя интегрирование по частям,

$$\delta W = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q}\right) dt =$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\Big|_{t_0}^{t_1} + \int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i\, dt =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i\, dt = 0,$$

откуда, в силу произвольности вариации $\delta q(t)$, вытекает, что функция L обязана удовлетворять *уравнениям Эйлера*,

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n,} \tag{7.4}$$

которые удобно записывать в виде одного векторного уравнения

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0,} \tag{7.5}$$

где подразумевается

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \left\{\frac{\partial L}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial L}{\partial q_n}\right\}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \left\{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}, \dots, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\right\}.$$

Если $q_1, \dots, q_n$ — обобщенные координаты некой механической системы, L — лагранжиан, то интеграл (7.2) называют *действием по Гамильтону*. Из приведенной выкладки следует, что механическая система движется по экстремалям действия, что называют ***принципом Гамильтона***, а уравнения Эйлера (7.4) оказываются ***механическими уравнениями Лагранжа*** [6, т. 2].

Если система автономна, L не зависит от t, то уравнение Эйлера имеет первый интеграл

$$\boxed{L - \left\langle \dot q, \frac{\partial L}{\partial \dot q} \right\rangle = \text{const.}} \tag{7.6}$$

◀ Действительно,

$$\frac{d}{dt}\left(L - \left\langle \dot q, \frac{\partial L}{\partial \dot q} \right\rangle\right) = \left\langle \frac{\partial L}{\partial q}, \dot q \right\rangle + \left\langle \frac{\partial L}{\partial \dot q}, \ddot q \right\rangle - \left\langle \ddot q, \frac{\partial L}{\partial \dot q} \right\rangle - \left\langle \dot q, \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} \right\rangle =$$

$$= \left\langle \dot q, \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} \right\rangle = 0,$$

в силу (7.5). ▶

Примеры

- В *задаче о брахистохроне*

$$\int_0^\alpha \frac{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}{\sqrt{y(x)}}\, dx \to \min; \quad y(0) = 0, \quad y(\alpha) = \beta,$$

в силу автономности, существует первый интеграл (7.6), что в данном случае приводит к дифференциальному уравнению[5]

$$\frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}} - \frac{(y')^2}{\sqrt{y[1 + (y')^2]}} = C,$$

переходящему после упрощений в уравнение $y[1 + (y')^2] = C_1$, решением которого оказывается семейство *циклоид*:

$$x = C_2(\theta - \sin\theta), \quad y = C_2(\theta - \cos\theta),$$

где x, y — координаты точки окружности радиуса C_2, катящейся по прямой, θ — угол поворота.

[5] Через C ниже обозначаются константы.

Таким образом, брахистохрона является циклоидой. Небезынтересно отметить, что циклоида обладает свойством *изохронности*: время спуска материальной точки по циклоиде под действием силы тяжести — зависит только от разности высот (и не зависит от начального положения).

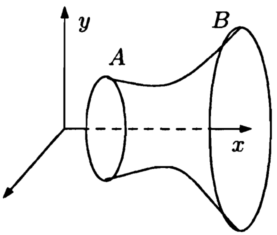

Рис. 7.2

• Площадь поверхности вращения кривой, проходящей через точки A, B (рис. 7.2), равна

$$S = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y(x)\sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx.$$

Минимизация этой поверхности, опять-таки в силу автономности функционала, приводит к уравнению (7.6), сводящемуся в данном случае к

$$\frac{y}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C,$$

что легко решается с помощью замены $y = C \operatorname{ch} t$, и в итоге дает семейство кривых

$$y = C \operatorname{ch} \frac{x - C_1}{C}.$$

Соответствующие поверхности называют *катеноидами* — такую форму принимает мыльная пленка, соединяющая две окружности[6], как показано на рис. 7.2. Поскольку энергия поверхностного натяжения пропорциональна площади, форма мыльной пленки может подсказывать решение и в более сложных случаях, когда задача «трудно пробиваема» аналитически.

• Варьирование функционала

$$\int_0^{\alpha} (x^2 - \dot{x}^2)\, dt$$

приводит к уравнению Эйлера $\ddot{x} + x = 0$, которому удовлетворяет семейство функций

$$x(t) = A \sin (t + \theta).$$

Если $\alpha = \pi$, а краевые условия $x(0) = x(\pi) = 0$, то экстремалей бесконечно много: $x(t) = A \sin t$. В случае $\alpha = \pi/2$ и краевых условий $x(0) = 0$, $x(\pi/2) = 1$ — экстремаль одна, $x(t) = \sin t$.

[6] Решение задачи не вполне очевидно даже качественно (до упоминания мыльной пленки). Интуитивно кажется, что минимум дает вращение отрезка прямой.

• В задаче

$$\int_0^T \left[\langle \dot{x}, \dot{x}\rangle + \langle x, Ax\rangle\right] dt \to \min, \quad x(0) = x_0,$$

с положительно определенной матрицей A, решение дают уравнения Эйлера $\ddot{x} - Ax = 0$ с краевыми условиями: $x(0) = x_0$, $\dot{x}(T) = 0$. Последнее является *условием трансверсальности* (раздел 7.6).

Дифференцирование по t приводит уравнение (7.5) к виду[7]

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}\ddot{q} + \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}}\dot{q} + \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0,$$

что при *усиленном условии Лежандра*

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} > 0$$

дает возможность разрешить уравнение Эйлера относительно второй производной:

$$\ddot{q} = F(q, \dot{q}, t).$$

Это свидетельствует о совпадении экстремалей с решениями интегрального уравнения

$$q(t) = \int_{t_0}^{t_1} G(t, s) F(q, \dot{q}, s)\, ds,$$

где $G(t, s)$ — *функция Грина* [6, т. 2] дифференциального оператора $\ddot{q}$ при соответствующих краевых условиях.

Оптимизация функционала (7.2), конечно, не исчерпывает задачи вариационного исчисления. Функционал может зависеть от производных более высокого порядка. Например,

$$W = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, \ddot{q}, t)\, dt.$$

[7] Под частными производными подразумеваются матрицы, по принципу:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial y_j}\right], \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \left[\frac{\partial F}{\partial x_i}\right].$$

В этом случае уравнение Эйлера:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot q} = 0. \quad (?)$$

7.3. Преимущества наивной теории

Обратим внимание, что вычисление вариации δW ни с каким дифференцированием в функциональном пространстве, вообще говоря, не связано, и сводится к вычислению обыкновенной производной скалярной функции $\xi(\tau) = W(q + \tau\delta q)$ в нуле[8],

$$\xi'(0) = \delta W(q).$$

При этом вывод *уравнения Эйлера*

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} = 0,$$

пока для простоты $n = 1$, опирается на очевидный факт: «*Если*

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} a(t)\delta q(t)\, dt = 0$$

для любой гладкой функции $\delta q(t)$ с закрепленными в нуле концами, то $a(t) \equiv 0$», — торжественно называемый *основной леммой вариационного исчисления*[9].

То же самое утверждение, где предположение берется на стадии «до взятия интеграла по частям», называют *леммой Дюбуа-Реймона*: «*Если*

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} [a(t)\dot s(t) + b(t)s(t)]\, dt = 0$$

[8] Где δq произвольная, но «каждый раз» фиксированная функция времени с закрепленными в нуле концами. Если бы речь шла о производной по направлению, а не о вариации, то надо было бы говорить о *правосторонней* производной $\xi'(0)$.

[9] В «Лекциях» мы стараемся говорить «очевидно», когда нечто действительно просто, и пояснения только засорили бы пейзаж. В данном случае доказательство могло бы сводиться к замечанию: если $a(\hat t) \neq 0$, то выбор функции $\delta q(t)$, отличной от нуля лишь в малой окрестности $\hat t$, — приводил бы к противоречию. Понятно, что любое короткое замечание можно растянуть на пару страниц.

для любой гладкой функции $s(t)$ с закрепленными в нуле концами, то $a'(t) \equiv b(t)$».

Подход в целом выглядит несколько доморощенным. Поиск минимума функционала (7.2) подменяется анализом скалярных функций $\xi(\tau) = W(q + \tau\delta q)$. В случае функции двух переменных $z = \varphi(x, y)$ этому соответствует изучение вертикальных сечений графика $z = \varphi(x, y)$, из чего, конечно, гарантий существования минимума $\varphi(x, y)$, равно как и $W(q)$, — извлечь нельзя (см. контрпример в разделе 1.8). Тем не менее, если иметь в виду *необходимые условия минимума*, — «наивная» методика становится, по крайней мере, законной. Более того, во многих случаях она легко и просто приводит к искомому решению, потому что решение уравнений Эйлера оказывается единственным, а наличие минимума вытекает из «физических» соображений.

Выгоды получаются двоякие. Во-первых, обходятся стороной технические проблемы, преодоление которых все равно приводило бы к тому же самому решению. Во-вторых, соблюдение «высоких стандартов» функционального анализа способно вообще заводить ситуацию в тупик. На первом же этапе пополнения функционального пространства выясняется, что это вопрос не столько математический, сколько «физический», поскольку «меру близости» необходимо согласовать с природой задачи, от чего зависит, в каком пространстве ЛПР[10] в результате оказывается. «Уклонение в среднем» заводит в удобные гильбертовы пространства, но обычно выясняется: «пришли не туда», — потому что высокие пиковые значения вариации не вяжутся со смыслом задачи. «Максимум уклонения — вяжется», но это ведет в какое-нибудь пространство гладких функций, которое из-за нерефлексивности превращает вопросы дифференцируемости в кошмар.

Поэтому «дедовские» методы выглядят привлекательнее, имея реальные преимущества. Слабое звено — проблема существования решения, на чем делается упор при попытках перетащить вариационное исчисление на поле функционального анализа.

[10] Лицо, принимающее решение.

О недостатках упрощенных точек зрения любой профессионал будет говорить с удовольствием, и будет выдвигать на передний план любые мало-мальски нетривиальные особенности, которые, хоть и встречаются раз в сто лет, повышают вес курируемой дисциплины. Причины вполне уважительные. Устройство Вселенной предполагает, что каждый занимается своими делами и не лезет — в Космические, не говоря о том, что никому не хочется потерять работу[11]. Плюс к тому, аномалии встречаются редко, но окольными путями укрепляют фундамент. Выбраковка «неприятностей» оставляет в поле зрения 99 % задач и 3 % понимания, что поначалу не сказывается, но постепенно заводит «мировую науку» в тупик. Это аргументы в пользу профессионалов.

Есть и другая сторона медали. Аудиторию в системе общего образования интересует не столько «мировая наука», сколько возможность понять, о чем идет речь. Особенно на первой ступени, где естественно избегать отвлекающего многообразия, важного «космически», но малополезного персонально.

В проекции на данный контекст весь этот разговор к тому, что позиция, которая устраивала *Ньютона*, *Эйлера и Лагранжа*, — не так плоха до сих пор.

Конечно, вариационное исчисление в последней трети XX в. сделало крупные успехи, будучи поставлено на рельсы функционального анализа. В результате появилась идеологическая четкость, и расплывчатые ранее вопросы существования решения — стали достаточно прозрачными, по крайней мере принципиально. Причем именно проблематика существования определила водораздел между «наивной теорией» и «современной».

7.4. Условия второго порядка

На формальном уровне анализ критических точек в бесконечномерных пространствах аналогичен ситуации в $\mathbb{R}^n$. Если функционал φ дважды непрерывно дифференцируем по Фреше в окрестности

[11] Внедрение анестезии в медицину вызывало резкие протесты хирургов. Они опасались, что тогда «любой дурак» сможет оперировать.

критической точки $x^* \in E$, то

$$\varphi(x^* + \Delta x) - \varphi(x^*) = \frac{1}{2}\langle \nabla^2\varphi(x^*)\Delta x, \Delta x\rangle + o(\|\Delta x\|^2),$$

откуда ясно, что $\langle \nabla^2\varphi(x^*)\Delta x, \Delta x\rangle \geqslant 0$ — необходимое условие минимума в точке x^*, а

$$\langle \nabla^2\varphi(x^*)\Delta x, \Delta x\rangle \geqslant \nu\|\Delta x\|^2, \quad \nu > 0, \tag{7.7}$$

— достаточное.

Неравенство (7.7) называют *условием сильной положительности*. В $\mathbb{R}^n$ оно равносильно обычному $\langle \nabla^2\varphi(x^*)\Delta x, \Delta x\rangle > 0$ при $\Delta x \neq 0$.

К сожалению, от (7.7) мало толку. Требование *сильной* положительности гессиана обычно не выполняется. В результате соблазн изучения экстремалей на основе скалярных функций

$$\xi(\tau) = W(q + \tau\delta q),$$

получает новый импульс, что ведет к различным условиям второго порядка (*Лежандра*, *Якоби*, *Вейерштрасса*), опирающимся в той или иной степени на требование $\xi''(0) \geqslant 0$. Но расчет на простоту — не оправдывается.

Природа трудностей раскрывается на дальних подступах к вариационному исчислению. Вернемся к рассмотрению примера скалярной функции двух переменных

$$z = \varphi(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2) = y^2 - 3yx^2 + 2x^4.$$

В разделе 1.8 было уже проверено, что в любом вертикальном сечении функция

$$\xi(\tau) = \varphi(\tau x, \tau y)$$

имеет минимум в нуле — соответственно, $\xi'(0) = 0$ и $\xi''(0) \geqslant 0$, — тем не менее нулевая критическая точка φ — не есть точка минимума.

Суть явления определяет следующая причина. Каждому вертикальному сечению отвечает максимальная ширина впадины графика с глобальным минимумом в нуле. Эта «ширина» в любом сечении $y = \alpha x$ строго больше нуля, но стремится к нулю при $\alpha \to 0$, а при $\alpha = 0$ становится бесконечной. Таким образом, никакие требования гладкости $\varphi(x, y)$ не могут предотвратить разрывный характер зависимости ширины впадины от α.

В функциональных пространствах ситуация не лучше. Поэтому получить достаточные условия оптимума с помощью второй вариации не так просто. Из

$$\delta^2 W(q) = \xi''(0) \geqslant 0,$$

и даже $\xi''(0) > 0$, выводятся условия второго порядка, но они остаются *необходимыми*: *условие Лежандра*

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \geqslant 0,$$

условие Вейерштрасса

$$E(q, \dot{q}, p, t) \geqslant 0, \tag{7.8}$$

где

$$E(q, \dot{q}, p, t) = L(q, \dot{q}, t) - L(q, p, t) - \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}}(\dot{q} - p),$$

а также *условия Вейерштрасса—Эрдмана*, требующие дополнительно непрерывности производных

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad \text{и} \quad L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}$$

в точках излома экстремалей.

Обособленное положение занимает *условие Якоби*, связанное с вопросом о *глобальном* (*сильном*) минимуме $W(q)$. Здесь есть определенная специфика. На сфере, например, локально кратчайшее расстояние между двумя точками дают две дуги большого круга, но только одна из них — обеспечивает глобальный оптимум. Анализ таких ситуаций производится обычно на основе изучения второй вариации:

$$\delta^2 W(q) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}\dot{x}^2(t) + \left[\frac{\partial^2 L}{\partial q^2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}}\right] x^2(t) \right\} dt, \tag{7.9}$$

где

$$\delta^2 W(q) = \xi''(0), \quad \xi(\tau) = W(q + \tau x), \quad x = \delta q.$$

Уравнение Эйлера для функционала (7.9),

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}\dot{x}\right] - \left[\frac{\partial^2 L}{\partial q^2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}}\right] x = 0,$$

называется *уравнением Якоби*, которое при *усиленном условии Лежандра* разрешимо относительно $\ddot{x}$, и соответствующая задача Коши при $x(t_0) = 0$, $\dot{x}(t_0) = 1$ имеет единственное решение $x(t)$. Нули $x(t)$, отличные от t_0, называются *сопряженными точками* (точке t_0). Отсутствие сопряженных точек на отрезке $[t_0, t_1]$ необходимо, чтобы отсеять неподходящие решения, типа «неудачных» дуг больших окружностей (см. выше).

7.5. Достаточные условия

Некоторые дополнительные усилия и предположения дожимают перечисленные выше условия до уровня достаточных. Но простой замены неравенств на строгие не хватает. Более того, возникает необходимость в привлечении дополнительных средств.

Фокус внимания при этом смещается от поиска конкретной экстремали задачи

$$W = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t)\, dt \to \min, \qquad q(t_0) = q_0, \qquad q(t_1) = q_1,$$

к рассмотрению всего *поля экстремалей*[12]. Идея напрашивается сама собой, поскольку уравнения Эйлера, определяющие экстремали, зависят лишь от $L(q, \dot{q}, t)$ и не меняются при изменении краевых условий.

Поле экстремалей в области Ω на плоскости (t, q) называется:

- *собственным*, если через каждую точку Ω проходит единственное решение уравнения Эйлера;
- *центральным*, если все экстремали выходят из одной точки (t_0, q_0) и однократно накрывают $\Omega \backslash (t_0, q_0)$.

[12] Что обычно называют *методом геодезических покрытий*. Экстремали отождествляются с решениями уравнений Эйлера.

Для оценки разности $W(q) - W(q^*)$, где $q^*(t)$ — экстремаль (кривая C^* в Ω), а $q(t)$ — некоторая другая кривая C, интеграл

$$\int_{t_0}^{t_1} L(q,\dot{q},t)\,dt$$

рассматривается как криволинейный и подыскивается такое его представление — такие $P(q,t)$ и $Q(q,t)$, — что

$$W(q^*) = \int_{t_0}^{t_1} L(q^*,\dot{q}^*,t)\,dt = \int_C P(q,t)\,dt + Q(q,t)\,dq$$

не зависит от пути интегрирования.

Задачу решает так называемый *инвариантный интеграл Гильберта*:

$$\int_C P(q,t)dt + Q(q,t)\,dq =$$

$$= \int_C \left\{ L[q,p(q,t),t] + [\dot{q} - p(q,t)]\frac{\partial L[q,p(q,t),t]}{\partial \dot{q}} \right\} dt, \tag{7.10}$$

где $p(q,t)$ обозначает *геодезический наклон* — производную той экстремали $q^*(t)$ в точке t, которая проходит через точку (q,t).

Обоснование независимости интеграла (7.10) от пути интегрирования C может иметь два направления: либо индуктивный поиск функции $S(q,t)$, такой что

$$Pdt + Qdq = dS,$$

либо, раз уж «секрет» раскрыт, проверка для[13)]

$$P = L(q,p,t) - p\frac{\partial L}{\partial p}, \quad Q = \frac{\partial L}{\partial p},$$

равенства перекрестных производных, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial q}\left[L(q,p,t) - p\frac{\partial L}{\partial p}\right] = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial p}. \tag{7.11}$$

Последнее легко проверяется, что гарантирует, собственно, существование подходящей функции $S(q,t)$, ра́вно как и независимость интеграла (7.10) от пути

[13)] Что вытекает из (7.10).

интегрирования. Однако вывод (7.11) существенно опирается на предположение, что поле экстремалей *однократно накрывает рассматриваемую область*[14]. Такое требование возникает как следствие необходимого в рассуждении равенства

$$\left.\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial p}\right|_{q=q(t)} = 0,$$

вытекающего из уравнения Эйлера, если через любую точку (q, t) проходит единственная экстремаль.

Если интеграл (7.10) берется вдоль экстремали, то

$$\dot{q} - p(q, t) \equiv 0,$$

откуда ясно, что (7.10) совпадает с $W(q^*)$. Это позволяет оценить разность $W(q) - W(q^*)$ как интеграл

$$\int_C \left\{ L(q, \dot{q}, t) - L(q, p, t) - \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}}(\dot{q} - p) \right\} dt, \tag{7.12}$$

взятый вдоль *произвольной* кривой C. При этом нет необходимости думать об экстремали (!) — все учитывается само собой. Поэтому «для минимума» достаточно, чтобы подынтегральное выражение в (7.12) было неотрицательно, что представляет собой *условие Вейерштрасса* (7.8).

Таким образом, необходимое *условие Вейерштрасса* превращается в *достаточное* при дополнительной оговорке, что экстремаль принадлежит собственному или центральному полю экстремалей.

(!) Из разложения

$$L(q, \dot{q}, t) = L(q, p, t) + \frac{\partial L(q, p, t)}{\partial \dot{q}}(\dot{q} - p) + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 L(q, \tilde{p}, t)}{\partial \dot{q}^2}(\dot{q} - p)^2,$$

где $\tilde{p}$ лежит на отрезке, соединяющем p и $\dot{q}$, — ясно, что условие Вейерштрасса выполняется, если

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \geqslant 0$$

в рассматриваемой области. *Усиленное условие Лежандра*

$$\boxed{\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} > 0} \tag{7.13}$$

[14] Т. е. является *собственным* или *центральным*.

дает больше, обеспечивая заодно центральность поля экстремалей, правда, локально[15].

В результате, условие (7.13) без дополнительных оговорок[16] гарантирует, что экстремаль обеспечивает локальный минимум $W(q)$.

7.6. Свободные концы и трансверсальность

При поиске экстремали функционала

$$W = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t)\, dt \tag{7.14}$$

фиксированные ранее граничные условия, одно или оба, могут быть освобождены. При этом множество допустимых траекторий $q(t)$ расширяется. Поэтому экстремаль — тем более обязана быть экстремалью задачи с закрепленными концами траектории. Соответственно, уравнение Эйлера будет выполняться, как и прежде. Дополнительные требования могут быть получены варьированием граничных условий.

Пусть, например, свободен один конец (t_1, q_1), $q_1 = q(t_1)$. При перемещении граничной точки из (t_1, q_1) в положение $(t_1 + \delta t_1, q_1 + \delta q_1)$ приращение функционала (7.14) *на экстремалях* оказывается равным

$$\Delta W = \int_{t_0}^{t_1+\delta t_1} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t)\, dt - \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t)\, dt.$$

С учетом того, что экстремали удовлетворяют уравнениям Эйлера, после несложных преобразований имеем:

$$\Delta W = \left(L - \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\bigg|_{t=t_1} \delta t_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\bigg|_{t=t_1} \delta q_1 + o(\delta t_1) + o(\delta q_1). \tag{7.15}$$

Приравнивая нулю линейную часть (7.15), получаем

$$\left(L - \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\bigg|_{t=t_1} \delta t_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\bigg|_{t=t_1} \delta q_1 = 0,$$

---

[15] В случае (7.13) уравнение Эйлера локально разрешимо относительно второй производной $\ddot{q}$, и решение соответствующей задачи Коши существует и единственно.

[16] Не считая предположений о достаточной гладкости.

что в случае независимых вариаций δt_1 и δq_1 приводит к *условиям трансверсальности*:

$$\left(L - \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\bigg|_{t=t_1} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\bigg|_{t=t_1} = 0.$$

Если граничная точка (t_1, q_1) обязана лежать на некоторой кривой

$$\boxed{q_1 = f(t_1),}$$

то

$$\delta q_1 = \dot{f}(t_1)\delta t_1 + o(\delta t_1),$$

и в силу (7.15) *условие трансверсальности* приобретает вид:

$$\boxed{\left(L + (\dot{f} - \dot{q})\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\bigg|_{t=t_1} = 0.}$$

7.7. Изопериметрические задачи

Изопериметрическими задачами называют задачи на условный экстремум[17)]

$$\int_{t_0}^{t_1} S(q, \dot{q}, t)\, dt \to \max, \qquad \int_{t_0}^{t_1} P(q, \dot{q}, t)\, dt = l, \tag{7.16}$$

где *изопериметрических условий* может быть несколько, и тогда

$$P = \{P_1, \ldots, P_m\}, \quad l = \{l_1, \ldots, l_m\}.$$

Технология решения — та же самая, что и в конечномерном случае. Переход от (7.16) к поиску стационарной точки *лагранжиана*

$$\mathrm{L}(q, \lambda) = \int_{t_0}^{t_1} S(q, \dot{q}, t)\, dt + \lambda\left\{\int_{t_0}^{t_1} P(q, \dot{q}, t)\, dt - l\right\}$$

[17)] Т. е. не обязательно задачи о геометрических фигурах максимальной площади при заданном периметре.

сводит задачу к решению уравнения Эйлера с функцией

$$L(q, \dot{q}, \lambda) = S(q, \dot{q}, t) + \lambda P(q, \dot{q}, t).$$

Обоснование формально не отличается от конечномерного, если оперировать градиентами функционалов и подходящими функциональными пространствами. Но все это хорошо на абстрактном уровне. В конкретных ситуациях проблема упирается в идеологически простые, но технически весьма сложные вопросы, о чем уже шла речь выше. Существует ли градиент, действует ли он в соответствующем пространстве, непрерывен ли?

Перечисленное может показаться тренировочным упражнением, но чаще это, скорее, тема для диссертационного исследования. Дело в том, что вариационное исчисление традиционно ориентировано на гладкие и кусочно гладкие функции, тогда как градиенты хорошо работают в гильбертовых пространствах. В «гладком случае» аппарат тоже работает, но там из-за нерефлексивности пространств возникают значительные неудобства [6, т. 5]: скалярного произведения нет, функции непрерывны в одном смысле, градиенты функционалов — в другом, и т. п. Кроме того, возникают небольшие смысловые нестыковки, на обсуждение которых уходит много сил.

Поэтому до сих пор, несмотря на то что дисциплина давно помещена в рамки функционального анализа, вариационные задачи часто рассматриваются по старинке, с помощью вариаций вместо градиентов. Одно с другим, как правило, совпадает, — тем не менее для гарантии кое-что еще требуется, но не всегда дается. В результате журавлю обычно предоставляют возможность летать в небе.

Примеры

- Вернемся к задаче о форме тяжелой нити[18],

$$\int_0^a y\sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx \to \min, \qquad \int_0^a \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx = l,$$

плюс закрепление в точках $y(0) = y_0$, $y(a) = y_a$.

[18] См. раздел 7.1.

Минимизация лагранжиана

$$\int_0^a (y+\lambda)\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx$$

приводит к уравнению Эйлера, имеющему, в силу автономности функционала, первый интеграл (7.6), сводящийся в данном случае к

$$\frac{(y+\lambda)}{\sqrt{1+(y')^2}} = C,$$

что в итоге порождает семейство кривых

$$y+\lambda = C\,\mathrm{ch}\,\frac{x-C_1}{C}.$$

Параметры определяются ограничениями.

Интересно, что тяжелая нить принимает форму кривой, дающей при вращении поверхность минимальной площади[19].

• Рассмотрим задачу об отыскании кривой $y(x)$ заданной длины, площадь под которой (рис. 7.3) минимальна или максимальна, т. е.

$$\int_0^a y(x)\,dx \to \max(\min),$$

$$\int_0^a \sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx = l,$$

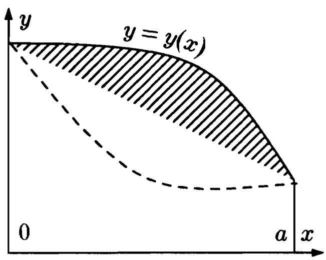

Рис. 7.3

при той или иной фиксации краевых условий, $\{0, y(0)\}$, $\{a, y(a)\}$.

Минимизация лагранжиана

$$\int_0^a \left(y+\lambda\sqrt{1+[y'(x)]^2}\right) dx$$

приводит к уравнению Эйлера, имеющему, опять-таки в силу автономности функционала, первый интеграл (7.6), из которого после элементарных преобразований получается семейство окружностей

$$(x-C_1)^2+(y-C_2)^2 = \lambda^2.$$

Параметры определяются ограничениями. Решением в итоге оказывается дуга окружности, имеющая заданную длину и проходящая через заданные точки. Одна дуга дает максимум площади, другая — минимум.

[19] См. «*катеноид*» по предметному указателю.

7.8. Условный экстремум

Задача оптимального управления (7.1) в векторном виде

$$S = \int_0^T F(x, u, t)\, dt \to \max, \qquad \dot{x} = f(x, u, t), \qquad x(0) = 0,$$

выглядит иначе, чем — изопериметрическая, но это такая же по духу проблема поиска условного экстремума.

Во-первых, обычная подстановка переводит ее в категорию безусловной оптимизации. Действительно, если задача Коши

$$\dot{x} = f(x, u, t), \qquad x(0) = 0,$$

при любом управлении $u(t)$ имеет единственное решение $x(t) = \varphi[u(t)]$, — все сводится к минимизации функционала

$$\int_0^T F(\varphi(u), u, t)\, dt.$$

Но это лишь «абстрактно говоря», потому что для подстановки надо «иметь» $x(t) = \varphi[u(t)]$, факта существования недостаточно.

Во-вторых, работает *метод множителей Лагранжа*, хотя и в другой аранжировке. Функционал не обязан записываться в форме определенного интеграла. Это может быть, например,

$$\varphi(x(t), t)\big|_{t=s} \quad \text{либо} \quad [\dot{x} - f(x, u, t)]\big|_{t=s}.$$

При каждом значении $t = s$ ограничение $\dot{x} - f(x, u, t) = 0$ умножается на свой множитель Лагранжа $\lambda(s)$, что затем суммируется — в данном случае интегрируется — и прибавляется к минимизируемому функционалу. В результате получается *лагранжиан*

$$L(x, u, \lambda) = \int^T \left\{F(x, u, t) + \lambda(t)[f(x, u, t) - \dot{x}]\right\} dt. \qquad (7.17)$$

Максимизация (7.17) по x и u приводит к уравнениям Эйлера,

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \lambda\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} - \lambda\right] = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial u} + \lambda\frac{\partial f}{\partial u} = 0,$$

которые необходимо решать совместно с ограничениями

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(0) = 0,$$

что можно интерпретировать как $\nabla_\lambda L = 0$.

7.9. Гамильтонов формализм

Задача оптимального управления[20)]

$$S = \int_{t_0}^{t_1} F(x, u, t)\, dt \to \max, \quad \dot{x} = f(x, u, t), \tag{7.18}$$

как уже отмечалось, сводится к оптимизации лагранжиана[21)]

$$L(x, u, y) = \int_{t_0}^{t_1} \{F(x, u, t) + y(t)[f(x, u, t) - \dot{x}]\}\, dt. \tag{7.19}$$

(**!**) Везде, где перемножаются векторы или вектор-функции, подразумевается скалярное произведение,

$$a(t)b = \langle a(t), b\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i(t)b_i.$$

В (7.18), (7.19) x, y, $f(\cdot)$ — векторы размерности n. Управление u — вектор, вообще говоря, другой размерности r. Упрощенная запись скалярного произведения (без угловых скобок) используется для удобства тех, кто предпочитает вариант $n = r = 1$.

20) С теми или иными граничными условиями.

21) Для множителей Лагранжа $\lambda(t)$ здесь используется более привычное для *сопряженных переменных* обозначение

$$y(t) = \{y_1(t), \ldots, y_n(t)\}.$$

Интегрирование выражения $y\dot{x}$ по частям преобразует (7.19) к виду

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \{H(x,u,y,t) + x\dot{y}\}\,dt + x(t_0)y(t_0) - x(t_1)y(t_1), \tag{7.20}$$

где

$$H(x,u,y,t) = F(x,u,t) + yf(x,u,t)$$

обозначает *гамильтониан.*

Приравнивая нулю первую вариацию (7.20), получаем[22)]

$$\delta L = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{\partial H}{\partial u}\delta u + \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{y}\right)\delta x \right\} dt = 0,$$

откуда

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}.}$$

Таким образом, присовокупляя $\dot{x} = \partial H/\partial y$, имеем уравнения движения в гамильтоновой форме,

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \tag{7.21}$$

и условие $\boxed{\partial H/\partial u = 0}$ оптимума гамильтониана по управлению, что служит прообразом *принципа максимума* (глава 8).

Если к уравнениям Эйлера добавить условие Вейерштрасса, то соответствующим эквивалентом можно считать гамильтоновы уравнения (7.21), где[23)]

$$H(x,u,y,t) = \max_v H(x,v,y,t). \tag{7.22}$$

[22)] Варьирование граничных условий оставляем за кадром, поскольку на уравнения оптимального движения внутри $[t_0, t_1]$, о чем пока идет речь, оно не влияет.

[23)] Разумеется, после максимизации $H(x,u,y,t)$ не зависит от u. Вместо (7.22) можно было бы писать $\widehat{H}(x,y,t) = \max\limits_v H(x,v,y,t)$, но тогда конструкция утяжелялась бы новой функцией $\widehat{H}$. То и другое плохо по-своему.

Второе уравнение (7.21) в покоординатной записи имеет вид

$$\dot{y}_i = -\frac{\partial F}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{n} y_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

и в случае, когда F не зависит явно от x, совпадает с *уравнением в вариациях* [6, т. 2] для уравнения «попятного движения»

$$\dot{x} = -f(x, u, t).$$

Обратим внимание,

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial u}\dot{u} + \frac{\partial H}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial u}\dot{u} + \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{y}\right) f(x, u, t) + \frac{\partial H}{\partial t},$$

что влечет за собой на экстремали:

$$\boxed{\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}.}$$

Поэтому в автономном случае, когда F и f не зависят явно от времени, гамильтониан постоянен вдоль экстремали.

Задача (7.18) в случае

$$f(x, u, t) = u,$$

т. е.

$$\dot{x} = u,$$

переходит в обычную задачу

$$S = \int_{t_0}^{t_1} F(x, \dot{x}, t)\, dt \to \min. \tag{7.23}$$

Исключая из гамильтоновых уравнений движения (7.21) *сопряженные переменные* $y(t) = \{y_1(t), \dots, y_n(t)\}$, приходим к *уравнениям Эйлера* (?) для задачи (7.23), что свидетельствует о наличии идейной связи между подходами[24].

[24] Представления о скрытых пружинах могут обогатить параллели с аналитической механикой [6, т. 2].

7.10. Взаимная сводимость задач

Основной задачей классического вариационного исчисления считается *задача Больца*:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(x, \dot{x}, t)\, dt + G\big[t_0, t_1, x(t_0), x(t_1)\big] \to \min, \tag{7.24}$$

при возможных дифференциальных ограничениях $\varphi(x, \dot{x}, t) = 0$, а также *терминальных* условиях вида

$$\Phi\big[t_0, t_1, x(t_0), x(t_1)\big] = 0.$$

Задачу (7.24) в случае $G \equiv 0$ называют *задачей Лагранжа*, а при условии $F \equiv 0$ — *задачей Майера*.

На вид задача Больца является более общей, но она легко сводится к двум другим. К задаче Майера, — если ввести дополнительную переменную x_{n+1}, наложить дифференциальное ограничение $\dot{x}_{n+1} = F(x, \dot{x}, t)$ и перейти к минимизации чисто терминального функционала

$$x_{n+1}(t_1) + G\big[t_0, t_1, x(t_0), x(t_1)\big].$$

Сведéние к задаче Лагранжа также обеспечивает дополнительная переменная x_{n+1},

$$\dot{x}_{n+1} = 0, \quad x_{n+1}(t_1) = \frac{G}{t_1 - t_0},$$

после чего все сводится к минимизации интегрального функционала

$$\int_{t_0}^{t_1} \big[F(x, \dot{x}, t) + x_{n+1}\big]\, dt.$$

Выбор формы задачи диктуется соображениями удобства. При этом любую из перечисленных задач можно рассматривать как задачу управления, полагая $\dot{x} = u$.

7.11. Проблема существования

В отличие от $\mathbb{R}^n$, где экстремальные задачи обладают той или иной степенью наглядности, бесконечномерным задачам присуща некоторая «загадочность». Решения нет, почему — не ясно.

Пример Гильберта. Для задачи

$$\int_0^1 (\sqrt[3]{t}\,)^2 \dot{q}^2(t) \to \min, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1,$$

уравнением Эйлера служит

$$\frac{d}{dt}[(\sqrt[3]{t}\,)^2 \dot{q}(t)] = 0,$$

что приводит к решению $q(t) = \sqrt[3]{t}$, которое действительно обеспечивает минимум, но не является непрерывно дифференцируемым на $[0, 1]$.

Пример Вейерштрасса. В задаче

$$\int_0^1 t^2 \dot{q}^2(t) \to \min, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1,$$

уравнение Эйлера

$$\frac{d}{dt}[t^2 \dot{q}(t)] = 0$$

имеет общее решение

$$q(t) = \frac{\alpha}{t} + \beta,$$

ни одно из которых не проходит через нужные точки.

Неприятности могут возникать по нескольким причинам. Одна из них — специфика бесконечномерного пространства. Непрерывный функционал на ограниченном замкнутом множестве не обязан достигать своего минимума. Приятное исключение — гильбертовы пространства.

7.11.1. Теорема. *Непрерывный выпуклый функционал, определенный на гильбертовом пространстве, достигает своего минимума на любом выпуклом замкнутом ограниченном множестве*[25].

---

[25] Детали и описание «внутренней кухни» см. в [6, т. 5].

Такое преимущество жалко терять. Поэтому при исследовании вариационных задач определенную часть пути выгодно проходить по «гильбертовой» территории. Но выгоды, как известно, даром не даются. Приходится жертвовать привычными удобствами — дифференцированием, переходя к обобщенным производным, и т. п. Причем надежды получить в итоге решение «желаемой степени гладкости» не всегда оправдываются.

Другая возможная причина неприятностей — неуправляемость системы, в результате чего перевести объект из одного состояния в другое вообще невозможно. Иными словами, отсутствуют допустимые решения. Но если в $\mathbb{R}^n$ выяснение сводится к проверке разрешимости системы неравенств, то здесь обнаруживается новое явление.

Рассмотрим объект управления

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

где x характеризует состояние, u — управление, A и B — матрицы, размера, соответственно, $n \times n$ и $n \times m$.

Естественный вопрос, который здесь возникает, можно ли перевести систему — управлением $u(t)$ — из любого начального положения $x(0) = x_0$ в любое желаемое, например, $x(T) = 0$? При положительном ответе это называют *управляемостью* системы.

Для управляемости, как оказывается [6, т. 2], необходимо и достаточно условие

$$\operatorname{rank} U = n,$$

где U — прямоугольная матрица[26)]

$$U = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B].$$

Пример

Пусть

$$\dot{x}_1 = -x_2 + u, \quad \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2.$$

[26)] Матрица U строится слева направо — добавляются столбцы A^kB. Число строк U равно n.

Таким образом, управление напрямую действует только на x_1. На x_2 влияние опосредованное. Возможно ли по обеим переменным двигаться в желаемых направлениях — неясно, и геометрическая интуиция в таких задачах пасует. Тем не менее система управляема, поскольку для нее матрица

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

невырождена.

Глава 8

Задачи оптимального управления

По теории оптимального управления существует обширная литература [1]. С течением времени акценты и потребности, конечно, сместились. Если полвека назад ситуацию характеризовали энтузиазм и недостаток информации, то теперь «пенки сняты» и настало время мемуаров. Для защиты диссертаций приходится искать что-нибудь менее исследованное. Поэтому массовый спрос концентрируется, главным образом, в районе простого вопроса «в чем там дело», — об этом, собственно, в главе речь.

8.1. Принятые стандарты

Толщина учебников в значительной мере зависит от многообразия постановок задач. В то же время исчерпать варианты все равно невозможно. Поэтому главное — передать дух теории. В данном случае для этой цели годится всего одна задача: поиск управления $u(t)$ на отрезке $[0, T]$, которое обеспечивает максимум одной координаты, например $x_1(T)$, при движении

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(0) = 0, \quad u \in U. \tag{8.1}$$

Остальные $x_j(T)$ могут быть закреплены либо свободны (полностью или частично) [2].

Недостаточная общность постановки здесь обманчива. Наличие интегрального критерия, скажем,

$$\int_0^T F(x, u, t)\, dt \to \max,$$

[1] См., например, [4, 8, 13, 14, 21].

[2] Принципиальное отличие задачи (8.1) от (7.18) заключается в дополнительном ограничении $u \in U$, характерном для теории управления.

«ликвидируется» стандартным трюком введения дополнительной переменной x_{n+1}, удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$\dot{x}_{n+1} = F(x, \dot{x}, t),$$

и тогда интегральный критерий сводится к

$$x_{n+1} \to \max .$$

Так же легко максимизация $G[x(T)]$ заменяется максимизацией $x_{n+1}(T)$, если положить

$$x_{n+1}(t) = G[x(t)], \qquad \dot{x}_{n+1} = \langle \nabla G(x), f(x, u, t) \rangle.$$

Минимизация $x_{n+1}(T)$ в случае присоединения к (8.1) уравнения $\dot{x}_{n+1} = 1$ равносильна *задаче о быстродействии*[3].

Как правило, оптимальное управление ищется как функция времени, и его при изменении краевых условий приходится искать каждый раз заново. Поэтому предпочтительно решение $u^*(x)$, задающее управление как функцию состояния. Такая задача, называемая *задачей синтеза*, существенно более сложна и удовлетворительно решается в редких случаях.

8.2. Принцип максимума

Добавление к задаче (7.18) ограничения $u \in U$ — например, вида $h(u) = 0$ — добавляет к лагранжиану (7.19) еще одно слагаемое, в результате чего:

$$L(x, u, y, z) = \int_{t_0}^{t_1} \big\{ F(x, u, t) + y(t)[f(x, u, t) - \dot{x}] + z(t)h(u) \big\}\, dt,$$

где $z(t) = \{z_1(t), \ldots, z_r(t)\}$ — множители Лагранжа.

Действуя далее по схеме, описанной в разделе 7.9, получаем «почти то же самое». Интегрирование выражения $y\dot{x}$ по частям снова преобразует $L(x, u, y, z)$

[3] Задаче о переходе системы в заданное состояние за минимальное время.

к виду

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \{H(x,u,y,t) + x\dot{y} + z(t)h(u)\}\, dt + x(t_0)y(t_0) - x(t_1)y(t_1),$$

где по-прежнему гамильтониан

$$H(x,u,y,t) = F(x,u,t) + yf(x,u,t)$$

не зависит от $z(t)$.

Приравнивая нулю первую вариацию $L(x,u,y,z)$ и не трогая граничных условий, получаем

$$\delta L = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \left(\frac{\partial H}{\partial u} + z(t)\frac{\partial h}{\partial u} \right)\delta u + \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{y} \right)\delta x \right\} dt = 0,$$

откуда, как и прежде,

$$\dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Таким образом, уравнения движения не меняются[4]:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

но теперь, в отличие от предыдущего,

$$\frac{\partial H}{\partial u} + z(t)\frac{\partial h}{\partial u} = 0, \quad h(u) = 0,$$

что совпадает с условием максимума (или минимума) функции $H(x,u,y,t)$ по u при условии $h(u) = 0$.

Разумеется, в разветвлениях нужна доработка деталей. Тем не менее центральная идея остается общей. Оптимальное управление определяется системой уравнений

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad H(x,u,y,t) = \max_v H(x,v,y,t), \tag{8.2}$$

которую необходимо решать совместно с теми или иными граничными условиями, вытекающими из постановки задачи.

Заметим, что $H(x,u,y,t)$ в (8.2) фактически от u не зависит (после проведения максимизации по v).

[4] Краевые условия для этих уравнений могут быть получены варьированием терминальных ограничений. Возможны многочисленные варианты, однако сейчас в фокусе внимания — дифференциальные уравнения.

В варианте типа (8.1),

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_j x_j(T) \to \max, \quad \dot{x} = f(x, u, t), \quad x(0) = 0, \quad u \in U, \qquad (8.3)$$

оптимальное $u(t)$ определяется системой (8.2) — в данном случае:

$$\dot{x}_i = f_i(x, u, t), \quad \dot{y}_i = -\sum_{j=1}^{n} y_j \frac{\partial f_j(x, u, t)}{\partial x_i},$$

где $u(t)$ извлекается из соотношения

$$\sum_{j=1}^{n} y_j f_j(x, u, t) = \max_{v \in U} \sum_{j=1}^{n} y_j f_j(x, v, t)$$

и выполняются граничные условия:

$$x(0) = 0, \quad y_j(T) = \gamma_j.$$

(!) При этом интересно обратить внимание на следующую интерпретацию. Если задача (8.3) уже решена, т. е. все функции $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$ — определены, то в силу

$$H(x, u, y, t) = \langle y(t), \dot{x}(t) \rangle$$

получается, что оптимальное управление $u(t)$ ***в каждый момент времени максимально разгоняет изображающую точку*** $x(t)$ ***в направлении*** $y(t)$. Подобный взгляд на роль сопряженных переменных в наглядной форме вскрывает закулисные механизмы[5].

Как правило, оптимизация выводит оптимальные управления на границу области U. Пусть, например, уравнения регулируемого объекта имеют вид:

$$\dot{x}_i = f_i(x) + u_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

а управляющие сигналы $u_i(t)$ ограничены по модулю, $|u_i| \leqslant U_i$.

В этом случае максимум гамильтониана

$$H(x, u, y) = \sum_j \{y_j f_j(x) + y_j u_j\}$$

достигается, очевидно, при условии $\boxed{u_i = U_i \operatorname{sign} y_i}$.

[5] Которые несколько смазываются в присутствии интегральных функционалов.

8.3. Линейные системы

Принцип максимума дает, вообще говоря, лишь необходимые условия оптимума, как и уравнения Эйлера в вариационном исчислении, но для линейных систем он превращается в ***необходимое и достаточное условие***, с некоторыми оговорками [4].

Линейный объект управления

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad u \in U, \tag{8.4}$$

где A и B — $n \times n$ матрицы, а

$$U = \{u : |u_i| \leqslant \xi_i,\ i = 1, \ldots, n\}$$

прямоугольный параллелепипед, — является удобным эталоном для проверки и генерирования идей. В качестве стандартного критерия обычно подразумевается быстродействие.

Оптимальное управление $u^*(t)$ в такой задаче кусочно-постоянно, и значениями $u^*(t)$ являются исключительно вершины многогранника U. При этом число переключений[6] конечно. Если же все собственные значения матрицы A действительны, то $u^*(t)$ имеет не более $n - 1$ переключений (*теорема Фельдбаума*).

8.4. Системы с дискретным временем

Непрерывного времени, вообще говоря, не бывает, но это удобная идеализация. Задачи управления с дискретным временем k подобны тем, что рассматривались выше. Например, поиск управления $\{u^k\}$ на «отрезке» $[0, T]$, которое обеспечивает максимум одной координаты, скажем x_1^T, при динамике

$$x^{k+1} = f(x^k, u^k, k), \quad x^0 = 0, \quad u^k \in U.$$

Возможно также подключение «интегральных» критериев и ограничений.

[6] С одного значения на другое.

Рассмотрим более подробно линейную задачу из [2].

$$\begin{gathered} \sum_{k=1}^{T} \langle c^k, x^k \rangle + \langle b^k, u^k \rangle \to \max, \\ x^k = A_{k-1} x^{k-1} + B_k u^k, \\ D_k u^k \leqslant d^k, \end{gathered} \tag{8.5}$$

где размерности переменных x^k, u^k и матриц A_k, B_k, D_k согласованы должным образом.

С одной стороны, в (8.5) явно просматривается динамическая задача. С другой — это задача линейного программирования с нестандартной нумерацией переменных.

После приведения к каноническому виду можно выписать соответствующую двойственную задачу, которая после некоторой технической эквилибристики приобретает вид

$$\begin{gathered} \langle y^1, A_0 x^0 \rangle + \sum_{k=1}^{T} \langle v^k, d^k \rangle \to \min, \\ y^T = c^T, \quad y^k = y^{k+1} A_k + c^k, \quad k = 1, \dots, T-1, \\ v^k D_k = y^k B_k + b^k, \quad v^k \geqslant 0 \quad k = 1, \dots, T, \end{gathered}$$

где y^k, v^k — двойственные переменные.

Условия дополняющей нежесткости (теорема 4.7.4) в данном случае приводят (для оптимального решения) к соотношениям

$$\langle v^k, D_k u^k - d^k \rangle = 0,$$

которые в совокупности с

$$v^k D_k = y^k B_k + b^k$$

равносильны тому, что при каждом фиксированном $k = 1, \dots, T$ оптимальный вектор u^k является решением задачи

$$\begin{gathered} H(u) = \langle y^k B_k + b^k, u \rangle \to \max, \\ D_k u \leqslant d^k, \end{gathered}$$

что представляет собой частный случай дискретного принципа максимума.

Рассмотренная задача бегло описана не для того, чтобы взвалить на читателя «разбор полетов». Здесь интересно обратить внимание на совпадение динамической задачи управления с задачей линейного программирования. Но если вдуматься, в этом нет ничего удивительного, потому что все оптимизационные задачи стоят на одном фундаменте, на лагранжевой идеологии и гамильтоновом формализме. Поэтому ясно, что аналогичные параллели имеются и в общем нелинейном случае.

Другое дело, что вариационное исчисление выводит исследование в бесконечномерные пространства, где работоспособность тех же методов требует отдельного обоснования. Ситуация же дискретного времени ничего принципиально нового как бы не дает. Можно пользоваться обычными результатами типа *теоремы Куна—Таккера*, но это бывает не совсем удобно из-за специфики задач. Использование старых схем разрушает структуру описания, и динамические модели «теряют лицо». Тем не менее классический подход остается вполне адекватным ситуации, хотя и требует некоторой доработки в конкретных случаях.

Рассмотрим задачу управления

$$x^{T+1} \to \max, \quad x^{k+1} = f(x^k, u^k, k), \quad x^0 = 0, \quad u^k \in U,$$

трактуя ее как обычную задачу на условный экстремум в конечномерном пространстве.

Вводя лагранжиан

$$L = x^{T+1} + \sum_0^T \left\{ \left\langle y^{k+1}, f(x^k, u^k, k) \right\rangle - \left\langle y^{k+1}, x^{k+1} \right\rangle \right\}$$

и выписывая необходимые условия оптимума вида

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \delta_u L = \frac{\partial L}{\partial u} \delta u \leqslant 0, \tag{8.6}$$

приходим к исходному описанию динамики, плюс — к сопряженной системе для импульсов:

$$y^k = y^{k+1} \frac{\partial f}{\partial x^k}, \quad k \leqslant T, \quad y^{T+1} = \{0, \ldots, 0, 1\}.$$

Последнее условие в (8.6) приводит к ограничению на вариацию гамильтониана $H_k = \langle y^{k+1}, f(x^k, u^k, k)\rangle$:

$$\delta_u H_k = \frac{\partial H_k}{\partial u^k}\delta u^k \leqslant 0,$$

но это не означает, что гамильтониан H_k обязан достигать максимума, хотя и показывает, что оптимальное значение u^k является стационарной точкой H_k. Известны примеры, когда на оптимальном управлении гамильтониан H_k вместо максимума имеет минимум либо седловую точку. Поэтому для систем с дискретным временем принцип максимума в привычной форме не справедлив, но обретает прежнюю силу, с некоторыми оговорками, для линейных систем.

8.5. Динамическое программирование

Вся теория экстремальных задач в некотором роде стоит на простом соображении — на обращении в нуль производной оптимизируемого функционала.

Есть еще одно элементарное соображение, на котором *Беллман* построил *динамическое программирование* [3]. Центральная идея тривиальна: «часть экстремали — сама является экстремалью». Действительно, если бы участок CD экстремали AB (рис. 8.1) — сам по себе не был экстремалью, то его надо было бы заменить другой кривой — экстремалью между C и D, которая на рисунке изображена пунктиром.

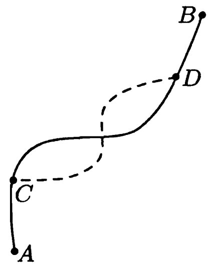

Рис. 8.1

Вот еще один «гуманитарный» вариант формулировки той же идеи. *Оптимальное управление характеризуется тем, что каково бы ни было промежуточное состояние, достигнутое в результате первоначально принятых решений, последующее управление должно быть оптимально относительно этого состояния* [7].

По первому впечатлению из такого ***принципа оптимальности*** трудно выжать что-либо содержательное, но в итоге банальность оказывается ненамного хуже, чем равенство нулю производной.

[7] Здесь, разумеется, остается широкое поле для уточнений.

Посмотрим, как это работает на задаче оптимального управления

$$S(x,u,t) = \int_0^T F(x,u,t)\,dt + \varphi(x(T),T) \to \max,$$

$$\dot{x} = f(x,u,t), \quad x(0) = 0, \quad u(t) \in U.$$

Пусть

$$S^*(x,t) = \int_t^T F(x,u,t)\,dt + \varphi(x(T),T)$$

при условии оптимального управления $u(t)$, т. е. $S^*(x,t)$ значение функционала на экстремали из точки $(x(t),t)$ в точку $(x(T),T)$. В силу отмеченного выше «принципа оптимальности»,

$$S^*(x,t) = \max_u \left\{S^*(x+\Delta x, t+\Delta t) + S(x,u,t)\right\},$$

что после подстановки

$$S^*(x+\Delta x, t+\Delta t) = S^*(x,t) + \frac{\partial S^*}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial S^*}{\partial t}\Delta t + o(\ldots),$$

деления на Δt и перехода к пределу по $\Delta t \to 0$ — приводит к *уравнению Беллмана*

$$\boxed{\frac{\partial S^*}{\partial t} + \max_{u(t)}\left\{\left\langle \frac{\partial S^*}{\partial x}, f(x,u,t)\right\rangle + S(x,u,t)\right\} = 0.}$$

С учетом того, что «гамильтониан, максимизированный по управлению», есть

$$H(x,y,t) = \max_{v(t)} H(x,v,y,t) = \max_{v(t)} \left\{F(x,v,t) + yf(x,v,t)\right\},$$

уравнение Беллмана может быть записано в виде

$$\frac{\partial S^*}{\partial t} + H\left(x, \frac{\partial S^*}{\partial x}, t\right) = 0,$$

что принято называть *уравнением Гамильтона—Якоби.*

8.6. Многошаговые процессы

Динамическое программирование эффективно для некоторых задач управления с дискретным временем вида

$$G(x^{n+1}) \to \max, \quad x^{k+1} = f(x^k, u^k, k),$$
$$x^0 = 0, \quad u^k \in U, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Введем обозначение

$$G_k(x^k) = \max_{u_k, \ldots, u_n} G(x^{n+1}), \quad k = 0, \ldots, n.$$

Очевидно, $G_k(x^k) = \max\limits_{u_k} G_{k+1}(x^{k+1})$, т. е.

$$G_k(x^k) = \max_{u_k} G_{k+1}\left[f(x^k, u^k, k)\right], \tag{8.7}$$

что представляет собой дискретный вариант *уравнения Беллмана.*

Использование (8.7) в качестве основы для вычислений, хотя и дает выигрыш по сравнению с полным перебором, в общем случае не позволяет избежать экспоненциального роста объема вычислений, которые необходимо проводить в *обратном времени.* Сначала из максимизации $\max\limits_{u_n} G[f(x^n, u^n, n)]$ определяется оптимальное значение u_*^n как функция состояния x^n, и эту функцию $u_*^n(x^n)$ необходимо помнить.

Далее определяется оптимальное значение u_*^{n-1}, максимизирующее

$$\max_{u_{n-1}} G\{f[x^n, u_*^n(x^n), n]\} =$$
$$= \max_{u_{n-1}} G\{f[f[x^{n-1}, u^{n-1}, n-1], u_*^n(f[x^{n-1}, u^{n-1}, n-1]), n]\},$$

и так далее. Объем вычислений растет как снежный ком.

Но в некоторых ситуациях методика успешно работает, как, например, в классической задаче поиска критического пути на сетевом графике.

8.7. Критические пути и сетевые графики

Сетевыми графиками называют орграфы[8] *без циклов*. Вершины именуют *событиями*, ребра — *операциями*, или *работами*. Так удобно описывать различные проекты: строительство дома, запуск ракеты на Луну, детективное расследование, научный поиск и т. п.

Структуру сетевого графика определяют ограничения на очередность выполнения работ (стены, потом крыша)[9]. Хорошо поставить задачу, разумеется, нелегко. Необходимо вникнуть в ситуацию, составить список операций, проследить логику выполнения, перепроверить — сто раз. Зато потом — ход работ как на ладони. Хитросплетение обстоятельств заменяется рентгеновским снимком, обнажающим скелет. И одна лишь картинка исключает асфальтирование до прокладки кабеля.

Следующий виток — оптимизация. Операциям приписываются длительности — на рис. 8.2 это числа на дугах, — и ставятся задачи составления расписания работ.

Рассмотрим пример, изображенный на рис. 8.2. Числа на дугах задают длительности операций. Пронумерованные события никакого содержательного значения не имеют. Каждое такое событие лишь отражает тот факт, что входящие в него дуги (операции) выполнены. Событие **6**, например, означает выполнение операций O_{36} и O_{46}.

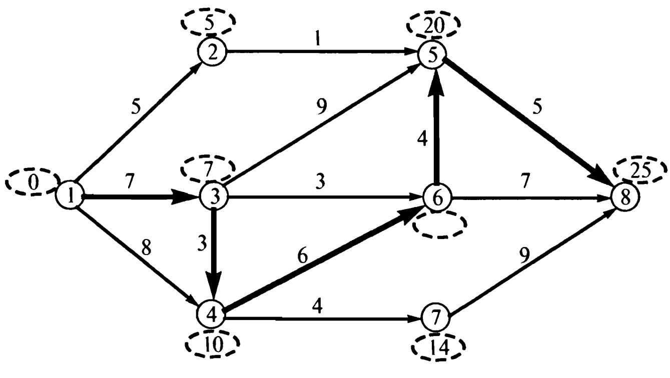

Рис. 8.2

[8] Ориентированные графы.

[9] Если бы граф содержал цикл, операции цикла составляли бы порочный круг — и никогда не могли бы начаться.

Припишем теперь начальному событию **1** время 0 и определим времена наступления других событий, предполагая, что все операции начинаются как только для их выполнения появляется возможность.

Операция O_{12} длится 5 дней, поэтому событие **2** наступит через 5 дней — пишем 5 рядом и обводим пунктиром. Аналогично, время наступления события **3** равно 7. Пишем 7 и обводим пунктиром. Чтобы наступило событие **4**, надо выполнить операции O_{14} и O_{34}. Операция O_{34} длится 3 дня, но она может начаться только по истечению 7 дней (время события **3**). Значит, O_{34} будет завершена через 10 дней $(3 + 7 = 10)$. Время операции O_{14} равно $8 < 10$, — поэтому время события **4** есть $\max\{8, 10\} = 10$.

Дальнейшее определение времен наступления событий при движении по графику слева направо — происходит аналогично. В конце находится время 25 последнего события **8**. Это уже полезный результат. Глядя на график, так сразу ведь не скажешь, что все работы можно завершить за 25 дней.

Следующий этап — просмотр сетевого графика *справа налево* и определение *критического пути* по рецепту *динамического программирования*. Делается это так. Как получилось время 25? — Время события **5** было сложено с длительностью операции O_{58} $\Rightarrow$ операция O_{58} выделяется как *критическая*. Начинается O_{58} в событии **5**, время 20 наступления которого получилось как $16 + 4$ $\Rightarrow$ операция O_{65} *критическая*, ее начало в **6**. И так далее.

В итоге получается выделенный жирным *критический путь*. Это последовательность критических операций, которые необходимо начинать вовремя. Любая задержка с критической операцией увеличивает время окончания всего комплекса работ. Для остальных операций есть резервы времени, которые можно посчитать.

Обдумывание примера в данном случае — простейший путь для понимания сути дела. Формулировка и обоснование общего рецепта могут служить здесь не очень трудным упражнением. Уточнение деталей (типа того, что критических путей может получиться несколько) либо расширение диапазона (задачи распределения ресурсов по операциям) — едва ли в данном контексте имеют смысл. При необходимости проще всего обратиться к специальной литературе.

Глава 9

Негладкая оптимизация

«Нематематическая» часть математики важнее «математической».

9.1. Гуманитарные аспекты

Недифференцируемая оптимизация иногда кажется следствием лености ума. Дескать, стоит закруглить углы, как все становится гладко. Но это не совсем так.

Конечно, если речь идет о прямой $y = \alpha x + \beta$, аппроксимирующей данные измерения

$$(x_1, y_1), \ \ldots, \ (x_m, y_m)$$

по критерию

$$\sum_k |y_k - \alpha x_k - \beta| \to \min,$$

то это либо злой умысел, либо недостаток опыта, потому что *среднеквадратичный критерий*

$$\sum_k (y_k - \alpha x_k - \beta)^2 \to \min$$

выглядит предпочтительнее. И едва ли надо объяснять, что в большинстве случаев человек сам выдумывает критерий, а потом уже терпит муки, оптимизируя.

Однако негладкость часто возникает в глубине задачи, и тогда уже от нее нелегко избавиться. Например, если матрица $A(x)$ гладко зависит от параметра x, то спектральный радиус $\rho(x) = \rho[A(x)]$ таким свойством не обладает, и минимизация

$$\rho(x) \to \min, \quad x \in X,$$

в классическую теорию не помещается. Нечто подобное возникает во многих других ситуациях. Функция

$$\varphi(x) = \min_y \psi(x, y)$$

непрерывна[1], но никакая гладкость $\psi(x, y)$ в общем случае не обеспечивает гладкость $\varphi(x)$, и при необходимости дифференцировать $\varphi(x)$ — есть над чем задуматься.

Подобные аргументы могут показаться все же неубедительными, если не видеть, что стоит за кадром. По первому впечатлению, ничто не мешает «закруглить» $\rho(x)$ или $\varphi(x)$. Но как сглаживать финишное явление, связанное с источником неконтролируемо? Откуда гарантии, что «закругление» не вызовет бифуркацию? Наконец, многие конструкции доказательств перестают работать. И это самое главное. Если функции поддаются сглаживанию, рассуждения — противятся и теряют доказательную силу.

Проблема возникает даже в том случае, когда функциональные зависимости в задаче гладкие, но это неизвестно. Невозможно или очень трудно выяснить. Или нет желания, а риск есть. Не говоря о ситуациях, когда все функции «с изъяном», а их бы надо дифференцировать и приводить в соприкосновение. Вот тогда, собственно, и возникает потребность в подходящей замене градиента. Субдифференциалом или чем-нибудь еще, после чего начинает строиться теория. Субдифференциал суммы равен сумме субдифференциалов и т. д. Зачем все это нужно?

Вопрос естественный, но ответ на него обычно дается торопливый и не вполне адекватный. Дескать, свойства субградиента выясняются для того, чтобы его легче было вычислять. Ответ до некоторой степени правильный, но «100 % вычислений» приходятся на тренировочные упражнения и экзамены. Реальная научная работа очень редко сталкивается с необходимостью конкретных вычислений, чаще — с рассуждениями, где мелькают субградиенты и их свойства. Вот это «мелькание», дающее возможность делать общие выводы, — и есть главная цель построения любой теории.

Комплект свойств — производной, выпуклости, полуупорядоченности, — доведенный и отшлифованный до уровня теории, дает возможность подключить изучаемый сектор к «общей шине» — к функциональному анализу, теории множеств — и пользоваться

[1] Если непрерывна $\psi(x, y)$.

соответствующими инструментами. Понимание этой стороны дела не укладывается в теоремы и формулы, оставаясь «нематематическим» ингредиентом любой специализированной дисциплины, без которого сугубо математическая часть — превращается в груду плохо мотивированных результатов.

9.2. Субдифференциал Кларка

В отсутствие выпуклости не сразу ясно, чем заменить субдифференциал. Предлагалось много вариантов, но в такого рода ситуациях проблема решается обычно единственным способом. Показательно в этом отношении измерение объемов, где напрашивалось много естественных рецептов, но по-настоящему пригодной оказалась лишь *мера Лебега* [6, т. 5].

Что касается негладкой оптимизации, то в десятку здесь попадает *субдифференциал Кларка*. Определение опирается на новое понятие *производной по направлению* $\varphi'_s(x)$ для *липшицевой* функции[2] $\varphi(x)$,

$$\varphi'_s(x) = \limsup_{z \to x,\, \theta \downarrow 0} \frac{\varphi(z+\theta s) - \varphi(z)}{\theta}. \tag{9.1}$$

Существование верхнего предела (9.1) вытекает из липшицевости $\varphi(x)$, которой в общем случае недостаточно для существования обычной производной по направлению.

Функция $\varphi'_s(x)$ выпукла и положительно однородна по s, независимо от выпуклости $\varphi(x)$. В определенной степени это оказывается приятным сюрпризом, и служит основой для удачного развития последующего сюжета, привлекая технику выпуклого анализа для изучения невыпуклых задач.

[2] Функция $\varphi(x)$ называется *липшицевой*, если существует такая константа L, что

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant L\|x - y\|$$

для любых x, y в рассматриваемой области.

Субдифференциал Кларка[3] функции $\varphi(x)$ в точке x определяется как множество[4]

$$\partial\varphi(x) = \left\{h \in \mathbb{R}^n : \forall\, s \in \mathbb{R}^n : \varphi'_s(x) \geqslant \langle s, h\rangle\right\}. \tag{9.2}$$

В случае выпуклой функции (9.2) совпадает с обычным субдифференциалом.

На визуальном уровне (9.2) означает, что $\partial\varphi(x)$ представляет собой выпуклую оболочку всех точек вида $\lim\limits_{k\to\infty} \nabla\varphi(x^k)$, где последовательность $\{x^k\}$ «избегает» точек недифференцируемости $\varphi(x)$ и точек произвольного, но заранее фиксированного множества меры нуль.

9.3. Барьер дифференцируемости

Для конкретизации разговора о недифференцируемой оптимизации рассмотрим задачу максимального быстродействия для динамической системы

$$\dot{x} = f(x, u), \quad u \in U. \tag{9.3}$$

Обозначим через $T(x)$ минимальное время, за которое объект (9.3) переходит из точки x в точку x_0 при оптимальном управлении.

Если движение из точки x происходит вдоль траектории (9.3) в течение времени Δt, а потом по оптимальной траектории в точку x_0, то очевидно,

$$T(x) \leqslant \Delta t + T(x + \dot{x}\Delta t), \tag{9.4}$$

где равенство достигается лишь в том случае, когда движение на первом участке Δt также оптимально по быстродействию.

Деля (9.4) на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем

$$\sum_i \frac{\partial T}{\partial x_i}\dot{x}_i \geqslant -1, \quad \text{т. е.} \quad \sum_i \frac{\partial T}{\partial x_i} f_i(x, u) \geqslant -1,$$

и

$$\max_{u\in U}\left\{-\sum_i \frac{\partial T}{\partial x_i} f_i(x, u)\right\} = 1 \tag{9.5}$$

---

[3] Называемый *Кларком* [14] обобщенным градиентом.

[4] Здесь сохранено обозначение обычного субдифференциала.

на оптимальном управлении, что воплощает ***принцип динамического программирования***, а равенство (9.5) представляет собой частный вариант ***уравнения Беллмана***.

Чтобы легализовать проведенное рассуждение и объявить соотношение (9.5) *необходимым условием* оптимума, — не хватает двух вещей: априорных гарантий *существования оптимального управления и гладкости* $T(x)$.

Было бы еще полбеды, если бы функция $T(x)$ в итоге оказалась гладкой. Но даже в простейших линейных задачах $T(x)$ оказывается недифференцируемой. В результате метод динамического программирования «трещит по швам».

Если предположить, что функция $T(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, справедливы следующие выкладки.

В силу (9.5) частные производные функции

$$S(x,u)=\sum_i \frac{\partial T}{\partial x_i} f_i(x,u)$$

равны нулю, т. е.

$$\frac{\partial S}{\partial x_k}=\sum_i \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_k} f_i(x,u)+\sum_i \frac{\partial T}{\partial x_i}\frac{\partial f_i(x,u)}{\partial x_k}=0,$$

что может быть переписано в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial x_k}\right)+\sum_i \frac{\partial T}{\partial x_i}\frac{\partial f_i(x,u)}{\partial x_k}=0, \tag{9.6}$$

поскольку

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial x_k}\right)=\sum_i \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_k} f_i(x,u).$$

Вводя далее переменные

$$y_k=-\frac{\partial T}{\partial x_k}$$

и функцию

$$H(x,y,u)=\sum_i y_i f_i(x,u),$$

легко видеть, учитывая (9.6), что для оптимального управления обязаны выполняться обычные условия (8.2) принципа максимума.

Ведет ли рассмотренный путь к принципу максимума? Камень преткновения — опять-таки дифференцируемость. Правда, в отличие от динамического программирования, здесь ситуация на вид лучше. В окончательной формулировке принципа максимума «проблематичная» функция $T(x)$ исчезает, и гладкость остается важной лишь для обоснования. Как теперь при доказательстве обойтись без предположений о дифференцируемости?

Обходной путь рассуждений и был, собственно, ценой открытия. Не вполне строгие схемы приводят к принципу максимума очень легко, и это демонстрировалось не только в данном разделе, но и в двух предыдущих главах. Однако обойтись без предположений гладкости было в свое время далеко не просто. Теперь многое упростилось, особенно в связи с появлением различных обобщений дифференцирования, в том числе — субдифференциала Кларка.

Глава 10

Численные методы

Необходимость понимания, что там за кадром, всегда висит на стене — как ружье Станиславского.

Теория мирится с тем, «что получается», практика вычислений допускает лишь то, «что требуется». Поэтому *вычислительные алгоритмы* — это совсем другая наука, где скучные детали представляют наибольший интерес[1]. В то же время здесь важна идеологическая база, без которой нет понимания существа дела. И этот ракурс нуждается в «лихих методах», не обремененных необходимостью «сдать объект под ключ». Глава в этом направлении затрагивает лишь один аспект, помещая в фокус внимания градиентные схемы.

10.1. Градиентные алгоритмы

При безусловной оптимизации функционала $\varphi(x)$ естественно двигаться по градиенту, чтобы найти максимум, либо против градиента, если ищется минимум, т. е.

$$\dot{x} = \nabla\varphi(x) \quad \text{или} \quad \dot{x} = -\nabla\varphi(x).$$

Для определенности будем говорить о минимуме, имея в виду

$$\dot{x} = -\nabla\varphi(x).$$

Судить о сходимости здесь относительно легко, поскольку $\varphi(x)$ на траектории меняется монотонно.

Не менее естественно в задачах оптимизации рассматривать движение материальной точки единичной массы

$$\ddot{x} = -\nabla\varphi(x)$$

[1] Ошибки округления, сложность вычислений, правила остановки, согласование работы отдельных блоков по точности — все это выходит из-за кулис и требует внимания.

под действием сил

$$Q_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}.$$

Минимуму потенциальной энергии $\varphi(x)$ отвечает опять-таки равенство обобщенных сил нулю, $-\nabla\varphi(x) = 0$, т. е. критическая точка $\varphi(x)$. Правда, система «не хочет стоять на месте», но для погашения колебаний достаточно ввести трение, что порождает решающую процедуру

$$\ddot{x} = -\nabla\varphi(x) - \beta\dot{x}, \tag{10.1}$$

которую принято называть *методом тяжелого шарика* [18].

С точки зрения (10.1), обычный градиентный процесс $\dot{x} = -\nabla\varphi(x)$ есть движение с трением невесомого шарика.

Выбором коэффициента трения β в (10.1) можно добиться проскакивания небольших локальных минимумов за счет инерции, — но для этого надо обладать способностью «видеть, что лежит в прикупе». Талантливые программисты умудряются, тем не менее, коечто выжать из идеи, пробуя и ошибаясь.

Поскольку реальность дискретна, вместо $\dot{x} = -\nabla\varphi(x)$ для вычислений используется

$$x_{k+1} = x_k - \gamma_k \nabla\varphi(x_k). \tag{10.2}$$

Движение по-прежнему осуществляется в направлении минус градиента, но ситуация иная. Теперь каждый раз необходимо принимать решение о величине шага, которую в (10.2) регулируют коэффициенты γ_k, и на их выборе концентрируется «вся наука».

В *методе наискорейшего спуска* шаг выбирается решением задачи

$$\min_{\xi} \varphi\big(x_k + \xi\nabla\varphi(x_k)\big) = \varphi(x_{k+1}), \tag{10.3}$$

т. е. движение против градиента идет до тех пор, пока это уменьшает значение потенциала φ. Как только уменьшение потенциала прекращается, вычисляется новый градиент и выполняется следующий шаг.

Дискретным аналогом процедуры (10.1) является двухшаговый алгоритм

$$x_{k+2} = x_{k+1} - \gamma_k \nabla\varphi(x_{k+1}) + \theta_k(x_{k+1} - x_k). \tag{10.4}$$

10.2. Себестоимость комфорта

Проблема выбора коэффициентов γ_k вычислительного процесса (10.2) довольно неприятна. Одномерная минимизация (10.3) в *методе наискорейшего спуска* слишком обременительна и не так уж целесообразна. Поэтому широко распространено управление величиной шага на основе различных эвристических соображений. Но при этом, как правило, дамокловым мечом нависает возможность перерегулирования, что ставит под удар сходимость алгоритма.

Чтобы «освободить руки», часто полагаются на требования

$$\sum_k^{\infty} \gamma_k^2 < \infty, \quad \sum_k^{\infty} \gamma_k = \infty, \tag{10.5}$$

которые в естественных предположениях обеспечивают сходимость и позволяют частично «расслабиться».

Требование

$$\sum_k^{\infty} \gamma_k^2 < \infty$$

проистекает обычно из предположения, что *функцией Ляпунова* для процедуры (10.2) является

$$V(x) = (x - x^*)^2,$$

где x^* — положение минимума $\varphi(x)$. Иными словами, предполагается:

$$\langle \nabla\varphi(x), x - x^* \rangle \leqslant 0. \tag{10.6}$$

Запись $x_{k+1} = x_k - \gamma_k \nabla\varphi(x_k)$ в виде

$$x_{k+1} - x^* = (x_k - x^*) - \gamma_k \nabla\varphi(x_k),$$

после возведения в квадрат, с учетом (10.6), приводит к неравенству

$$(x_{k+1} - x^*)^2 \leqslant (x_k - x^*)^2 + M^2\gamma_k^2, \tag{10.7}$$

где M — максимум модуля $\nabla\varphi(x)$ в рассматриваемой области.

Суммирование (10.7) по k от 0 до N дает

$$(x_{N+1} - x^*)^2 \leqslant (x_0 - x^*)^2 + M^2 \sum_{k=0}^{N} \gamma_k^2,$$

откуда, в силу

$$\sum_{k}^{\infty} \gamma_k^2 < \infty,$$

следует ограниченность последовательности x_k, т. е. $\|x_k\| \leqslant R$. Но, с учетом (10.5)[2] и (10.6), x_k не может оставаться в кольце:

$$0 < r \leqslant \|x_k\| \leqslant R,$$

— что в итоге приводит к $x_k \to x^*$.

Условие монотонности (10.6) с точки зрения достаточности (10.5) — может быть ослаблено, но это не тот случай, где стоит прилагать усилия. Требования (10.5) удобны с теоретической точки зрения, ибо позволяют некоторым образом «завершить разговор», когда ясно, что проблема решена только наполовину. В то же время выбор $\gamma_k = 1/k$ на практике часто представляется расточительным и необдуманным. Эффективные вычисления — это всегда проникновение в конкретику задачи, учет специфики. И там, где заканчивается теоретическое исследование, вычислительные проблемы, как правило, только начинаются.

10.3. Метод Ньютона—Канторовича

Поиск критической точки функционала $\varphi(x)$ является частным случаем поиска нулевого решения уравнения $\Phi(x) = 0$, где Φ — отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Поэтому едва ли не весь арсенал вычислительной математики можно рассматривать в срезе оптимизации. В частности, популярный *метод Ньютона—Канторовича* итерационного решения уравнения $\Phi(x) = 0$ имеет определенные плюсы и в оптимизации.

[2] Расходимость ряда

$$\sum_{k}^{\infty} \gamma_k = \infty$$

нужна, чтобы последовательность x_k не могла сходиться к не критической точке.

Сам метод состоит в следующем. Линеаризация отображения $\Phi(x)$ в точке x_k приводит к замене $\Phi(x) = 0$ уравнением

$$\Phi(x_k) + \Phi'(x_k)(x - x_k) = 0. \tag{10.8}$$

Решение (10.8),

$$x_{k+1} = x_k - [\Phi'(x_k)]^{-1}\Phi(x_k), \tag{10.9}$$

объявляется следующим приближением.

Итерационная процедура (10.9) носит название *метода Ньютона—Канторовича*. В случае $\Phi(x) = \nabla\varphi(x)$ (10.9) превращается в

$$x_{k+1} = x_k - \left[\nabla^2\varphi(x_k)\right]^{-1}\nabla\varphi(x_k),$$

и это довольно эффективный вычислительный процесс, теоретически более целесообразный, чем простое движение по градиенту

$$x_{k+1} = x_k - \gamma_k\nabla\varphi(x_k),$$

хотя последнее интуитивно кажется более естественным. Но вычисление *матрицы Гессе* $\nabla^2\varphi(x_k)$ на каждом шаге с последующим ее обращением — может оказаться слишком дорогим удовольствием.

10.4. Метод сопряженных градиентов

Стандартной задачей оптимизации является минимизация *положительно определенной* квадратичной формы

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\langle Qx, x\rangle - \langle c, x\rangle, \tag{10.10}$$

достигаемая, как нетрудно видеть, на решении линейной системы уравнений $Qx = c$.

Напомним стандартную процедуру *ортогонализации Грама—Шмидта*, в которой осуществляется замена некоторого множества линейно независимых векторов $\{e_1, \dots, e_n\}$ ортонормированной системой $\{f_1, \dots, f_n\}$, которая порождает ту же самую линейную оболочку.

На первом шаге полагается

$$f_1 = \frac{e_1}{\langle e_1, e_1\rangle^{1/2}}.$$

Далее строится вектор

$$h_2 = e_2 - \langle e_2, f_1 \rangle f_1,$$

ортогональный f_1, и опять происходит *нормировка*:

$$f_2 = \frac{h_2}{\langle h_2, h_2 \rangle^{1/2}}.$$

На k-м шаге строится вектор

$$h_k = e_k - \langle e_k, f_{k-1} \rangle f_{k-1} - \ldots - \langle e_2, f_1 \rangle f_1,$$

ортогональный ко всем $\{f_1, \ldots, f_{k-1}\}$, после чего *нормируется*,

$$f_k = \frac{h_k}{\langle h_k, h_k \rangle^{1/2}}.$$

На n-м шаге процесс заканчивается.

Для описанной процедуры совершенно не важно, как конкретно определяется скалярное произведение. Вместо обычного

$$\langle x, y \rangle = x^1 y^1 + \ldots + x^n y^n \tag{10.11}$$

можно взять

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i,j} q_{ij} x^i y^j,$$

где $Q = [q_{ij}]$ — положительно определенная матрица, а координаты помечены верхними индексами. Иными словами, под скалярным произведением можно понимать $\langle Qx, y \rangle$, считая, что угловые скобки работают как в (10.11). При этом векторы x, y, удовлетворяющие равенству $\langle Qx, y \rangle = 0$, обычно называют *сопряженными*, либо *Q-сопряженными*, чтобы подчеркнуть, о какой матрице идет речь.

Наличие полного комплекта (n штук) Q-сопряженных векторов $\{f_1, \ldots, f_n\}$ позволяет решить задачу минимизации квадратичной формы (10.10) за n шагов. Алгоритм следующий. Из любого начального положения x_0 ищется минимум $\varphi(x)$ в направлении f_1, т. е. решается задача

$$\min_{\xi} \varphi(x_0 + \xi f_1) = \varphi(x_1),$$

в результате чего определяется следующее приближение x_1. Затем из x_1 ищется минимум $\varphi(x)$ в направлении f_2 и так n раз.

Сходимость алгоритма за n шагов вытекает из диагонального вида квадратичной формы в базисе $\{f_1, \ldots, f_n\}$,

$$\langle Qx, x \rangle = \sum \nu_i f_i^2.$$

◀ Действительно, подставляя разложение

$$x = \sum_i \alpha_i f_i$$

в $\langle Qx, x\rangle$, имеем

$$\langle Qx, x\rangle = \left\langle Q\sum_i \alpha_i f_i,\ \sum_i \alpha_i f_i\right\rangle = \sum_{i,j}\langle Q\alpha_i f_i,\ \alpha_j f_j\rangle = \sum_i \alpha_i^2\langle Qf_i, f_i\rangle,$$

поскольку $\langle Qf_i, f_j\rangle = 0$ при $i \neq j$. ▶

Для построения *Q-базиса*

$$\{f_1, \dots, f_n\}$$

можно отправляться от любой системы линейно независимых векторов $\{e_1, \dots, e_n\}$. Поскольку *«ортогонализация» Грама—Шмидта* не требует наличия сразу всех e_j, — в качестве e_j берут последовательно градиенты $\nabla\varphi(x_j)$ в точках x_j, получаемых на j-м шаге в результате минимизации

$$\min_\xi \varphi(x_{j-1} + \xi f_j) = \varphi(x_j).$$

Если речь идет о минимизации квадратичной формы, такой процесс, называемый *методом сопряженных градиентов*, сходится за конечное число шагов, но его можно применять и для функций $\varphi(x)$ более общего вида. Конечно, в общем случае рассчитывать на конечную сходимость алгоритма нельзя, но в малой окрестности минимума $\varphi(x)$ обычно хорошо приближается гессианом, и это дает основание ожидать тех же результатов с точностью до «о-малых».

10.5. Почему трудно сделать хороший автомобиль

Переход от разговоров к делу, в данном случае — к вычислениям, — всегда труден. Причины вроде бы очевидны. Богатство реалий, стерильность моделей. Тем не менее иллюзии возникают довольно часто, и это особенно наглядно проявляется за пределами математики.

Немцы и японцы делают хорошие автомобили, что расстраивает соседей, как производителей, и рождает намерения самим вырваться вперед. Но переплюнуть с бухты-барахты не получается, потому что эволюция требует времени. Надо шаг за шагом устранять недоделки, отбирать мутации, изобретать, совершенствовать. И все это должно поддерживаться квалификацией кадров, заинтересованностью, фанатизмом, преемственностью поколений. Короче говоря, надо «стричь — поливать, стричь — поливать, но не менее 300 лет»[3].

Аналогичная ситуация возникает в области вычислительных алгоритмов. Если теоретики часто обрывают исследование в удобном для себя месте, практики обречены «дожимать то, что не дожимается» и, так или иначе, добиваться успеха. Это очень тяжелая работа, причем — не одноразовая. Работа, требующая вычислительных экспериментов, инкубационного вынашивания идей и, нередко, участия нескольких поколений. Последнее отнюдь не перегибает палку. Известны красноречивые примеры [6, т. 3, раздел 10.4], когда численные методы долгое время красиво выглядели на бумаге, но при столкновении с компьютерными вычислениями были полностью вытеснены из алгоритмического арсенала.

[3] Имеется в виду классический анекдот о «секрете» травяных покрытий в Англии.

Глава 11

Задачи большой размерности

Если задача плохо решается,
она плохо поставлена.

О задачах оптимизации большой размерности речь шла в [6, т. 4], где упор делался на вероятностном срезе проблематики. В данной главе соответствующие результаты излагаются с несколько иной расстановкой акцентов.

11.1. Оптимизация и агрегирование

При увеличении размерности исходная постановка задачи часто теряет смысл. Количество переходит в качество. Механические проблемы превращаются в статистические. Но пришествия термодинамики ждать необязательно, — новые свойства появляются в размерностях порядка нескольких сотен, а то и десятков.

Речь идет о достаточно очевидных вещах. Ошибки счета при манипулировании многочисленными параметрами способны в разы менять значения целевых функций и ограничений, не говоря о вычислении градиентов. Но даже это не самое страшное. *Смысловые неточности* моделирования при больших размерностях накапливаются, и сами постановки оптимизационных задач перестают отражать суть дела. Возникает парадокс: чем больше учтено факторов, тем хуже становится модель. Большое число переменных свидетельствует о том, что в задаче не поймано и не выделено главное.

Как, например, оптимизировать эффективность сложной сети транспортных перевозок? Для точного ответа нужен (вроде бы) подробный анализ: распределение транспорта по маршрутам, расписание, пропускная способность узлов и т. п. Но это путь, ведущий в тупик. Чем больше параметров учтено, — тем меньше возможность их контролировать. Тем выше роль случайных обстоятельств, сбоев, неувязок. Вместо модели возникает абсурд.

Выход из описанного положения возможен только революционным изменением подхода. Отказ от детальной информации выглядит неизбежным, но это далеко не «сдача позиций». Приближенные ответы в естественных условиях оказываются довольно точны и практически не зависят от «подробностей». Ничего удивительного в такой метаморфозе, конечно, нет. Пример статистической физики — тому подтверждение. Удивительно, может быть, лишь то, что для приемлемого агрегированного описания системы «термодинамические размерности порядка числа Авогадро» не требуются.

Асимптотическое агрегирование. Адекватная точка зрения могла бы опираться на *нелинейный закон больших чисел*, гарантирующий стабилизацию нелинейных функций

$$y = f_n(x_1, \ldots, x_n)$$

при больших n.

Соответствующая идеология описана в [6, т. 4], но там она завуалирована[1] вероятностной трактовкой. Остановимся на некоторых упрощенных результатах, освобожденных от вероятностной специфики.

Последовательность функций $f_n(x)$ назовем *асимптотически постоянной*, если

$$\sigma\{f_n(x)\} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

где $\sigma\{f_n(x)\}$ — среднеквадратическое уклонение $f_n(x)$ от своего среднего значения[2].

Пусть, для простоты, $x = \{x_1, \ldots, x_n\} \in C_n$, где

$$C_n = [0, 1] \times \ldots \times [0, 1].$$

[1] А для кого-то, наоборот, тем самым обнажена.

[2] Напомним, что в силу *неравенства Чебышева* [6, т. 4] из $\sigma\{f_n(x)\} \to 0$ следует стремление к нулю меры множества, на котором $f_n(x)$ отличается от среднего значения более чем на $\varepsilon > 0$ (сколь угодно малое).

11.1.1. Теорема. *Пусть последовательность функций $f_n(x)$ удовлетворяет неравенствам*

$$\int\limits_{C^n} [\nabla f_n(x)]^2 \, dx_1 \ldots dx_n \leqslant \gamma_n$$

и $\gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда $\sigma\{f_n\} \to 0$, т. е. последовательность функций $f_n(x)$ асимптотически постоянна на кубе C_n.

Результат можно усилить с помощью неравенства[3]

$$\sigma^2(f) \leqslant \int\limits_{C^n} \sum_{i=1}^{n} x_i(1-x_i)\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 dx_1 \ldots dx_n, \qquad (11.1)$$

из которого тем более следует

$$\sigma^2(f) \leqslant \int\limits_{C^n} [\nabla f(x)]^2 \, dx_1 \ldots dx_n.$$

Теорема 11.1.1, например, гарантирует стабилизацию функций

$$f_n(x) = \varphi\left(\frac{a_1 x_1^2 + \ldots + a_n x_n^2}{n}\right)$$

при ограниченности производной $\varphi'(\cdot)$ и коэффициентов a_j.

Преимущества неравенства (11.1) выявляются на такой функции, как

$$f_n(x) = \max_i |x_i|, \quad x \in C_n.$$

Здесь $\|\nabla f_n(x)\| = 1$ почти везде, но (11.1) гарантирует (после аккуратных вычислений)

$$\sigma\{f_n\} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Феномен стабилизации нелинейных функций при больших размерностях довольно существенно влияет на понимание и трактовку задач оптимизации. Упрощенно говоря, теоремы о стабилизации дают гарантию, что почти все выбранные наугад решения примерно одинаковы по качеству, а окрестность оптимума, в которой $f_n(x)$

[3] Существенно более общие оценки на основе понятия *сопряженной плотности* рассматриваются в [6, т. 4].

ощутимо превышает среднее значение, весьма мала, — и туда очень трудно попасть. Более того, «наличие оптимума в руках» практически ничего не дает, потому что малейшие ошибки вычисления и реализации выбивают значения целевой функции в область средних значений.

Таким образом, различные функции $f_n(x)$, $g_n(x)$ стабилизируются около своих средних значений, и при больших n отличие сводится к коэффициенту пропорциональности $f_n(x) \sim \gamma g_n(x)$, что позволяет считать $f_n(x) \sim \gamma_f X$, где агрегат

$$X = \frac{1}{n} \sum_k x_k.$$

К такому примитиву задача, конечно, сводится редко. Ситуацию чаще определяют несколько агрегатов. В транспортной сети, например, это могут быть средние пропускные способности магистралей и узлов, суммарные транспортные ресурсы по категориям и т. п. На формальном уровне это приводит к замене функций

$$f_n(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; z_1, \dots, z_n)$$

приближенными функциональными зависимостями от агрегатов

$$f_n(\cdot) \approx \varphi(X, Y, Z).$$

Построение асимптотической зависимости φ не вполне тривиально даже в простых с виду ситуациях. Вот два примера:

$$f_n(x, y) = \frac{1}{n} \sum_k \min\{x_k, y_k\}, \qquad h_n(x, y) = \sum_k x_k y_k,$$

причем известны только агрегаты

$$X = \sum_k x_k \quad \text{и} \quad Y = \sum_k y_k,$$

по которым необходимо вычислять f_n и h_n. (?)

11.2. Согласование задач

Рассмотрим систему, состоящую из m ячеек, между которыми может происходить обмен (перераспределение) ресурсов. Пусть

$x_i^k \geqslant 0$ обозначает количество i-го вида ресурса в k-й ячейке, $X_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ — общее количество i-го ресурса в системе. Предполагаются выполненными «законы сохранения»:

$$\sum_k x_i^k = X_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

с той или иной интерпретацией. Ресурсы могут перераспределяться без потребления, как объемы в термодинамике. В другом варианте потребление ресурсов может компенсироваться централизованным воспроизводством, как в экономике (бюджет, внешние закупки, регулярная добыча).

Наконец, каждая ячейка характеризуется *функцией полезности*, или *эффектом обладания*

$$s^k = s^k(x^k), \quad x^k = \{x_1^k, \ldots, x_n^k\}.$$

Все функции s^k предполагаются гладкими, монотонно возрастающими и строго вогнутыми — это естественно для большинства приложений. Удобно также предполагать

$$\frac{\partial s^k}{\partial x_i^k} \to \infty \quad \text{при} \quad x_i^k \to 0, \qquad \frac{\partial s^k}{\partial x_i^k} \to 0 \quad \text{при} \quad x_i^k \to \infty,$$

что избавляет от необходимости различных оговорок (насчет существования и единственности решения).

Состояние системы x^* назовем *равновесным*, если суммарный эффект системы

$$S = \sum_k s^k$$

максимален, т. е. x^* определяется решением задачи[4)]

$$\sum_k s^k(x^k) \to \max, \quad \sum_k x^k = X. \tag{11.2}$$

Понятно, что с формальной точки зрения речь идет об оптимальном распределении многомерного ресурса, не более того.

[4)] В указанных выше предположениях решение существует и единственно.

Но для укрупненного описания системы — это лишь стартовая площадка.

Заметим, что одна из стандартных термодинамических задач совпадает в точности с (11.2). Пусть e^k, v^k и $s^k(e^k, v^k)$ — соответственно: энергия, объем и энтропия k-го тела. Равновесные значения e^k и v^k определяются из условия максимума энтропии при заданных значениях общей энергии E и общего объема V:

$$\sum_k s^k(e^k, v^k) \to \max, \quad \sum_k e^k = E, \quad \sum_k v^k = V.$$

Термодинамический эталон подсказывает общесистемное направление мысли.

Укрупненное описание. Из (11.2) следует, что условиями равновесия являются:

$$\frac{\partial s^k}{\partial x_i^k} = \lambda_i, \tag{11.3}$$

где «множители Лагранжа» λ_i определяются из учета *векторного* соотношения

$$\sum_k x^k = X.$$

Величину

$$\lambda_i = \frac{\partial s^k}{\partial x_i^k}$$

естественно называть также *значимостью* i-го ресурса для k-й подсистемы. Согласно (11.3) *в положении равновесия значимости одноименных ресурсов во всех подсистемах выравниваются.*

Систему в целом характеризует *структурная функция*

$$S(X_1, \ldots, X_n) = \max_{x^1,\ldots,x^m} \sum_k s^k(x^k), \quad \sum_k x^k = X, \tag{11.4}$$

для которой, как легко убедиться, выполняются соотношения

$$\frac{\partial S}{\partial X_i} = \lambda_i, \quad dS = \sum_i \lambda_i \, dX_i. \tag{11.5}$$

Из (11.5) видно, что величины λ_i для системы в целом продолжают играть роль значимостей ресурсов.

Пример

$s^1(x^1) = r_1\sqrt{x^1}$, $s^2(x^2) = r_2\sqrt{x^2}$. Суммарный эффект при оптимальном распределении

$$x^1 = \frac{r_1^2}{r_1^2 + r_2^2}X, \quad x^2 = \frac{r_2^2}{r_1^2 + r_2^2}X$$

оказывается равным:

$$S(X) = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}\,\sqrt{X}.$$

Тривиальная в математическом отношении акция (11.4) играет принципиальную роль, являя собой переход к укрупненному описанию системы. Для изучения равновесных свойств составной системы оказывается достаточным знание структурной функции S. Детальная информация о ячейках без ущерба может быть забыта.

Например, если изучается распределение ресурсов между двумя составными системами, то равновесное распределение ресурсов между ними определяется укрупненными описаниями. Действительно, пусть

$$S^1(X) = \max\Big\{\sum_k s^{1k}(x^k) : \sum_k x^k = X\Big\},$$

$$S^2(Y) = \max\Big\{\sum_k s^{2k}(y^k) : \sum_k y^k = Y\Big\},$$

где $X + Y = Z$. Тогда

$$\max\Big\{\sum_k [s^{1k}(x^k) + s^{2k}(y^k)] : \sum_k x^k = X, \sum_k y^k = Y\Big\} = \max_{X+Y=Z}\{S^1(X) + S^2(Y)\}.$$

Таким образом, в равновесии нет никакой разницы между составными и простыми системами. Знания общей структурной функции[5] достаточно для ответа на любой вопрос, касающийся равновесия.

• Если из равновесной системы изымается некоторая подсистема вместе с содержащимися в ней ресурсами, то оставшаяся подсистема будет равновесной. (?)

• Равновесные системы с одинаковыми значимостями ресурсов при объединении образуют равновесную систему. (?)

[5] В данном случае $S(Z) = \max\limits_{X+Y=Z}\{S^1(X) + S^2(Y)\}$.

Описанная выше модель проигрывает термодинамике по части интриги, поскольку в термодинамике энтропия $S(X)$ «возникает» лишь в процессе исследования. Конечно, было бы неразумно создавать искусственные трудности и разыгрывать спектакль, если целевые функции ячеек изначально заданы. Однако в экономике есть немало систем, в которых наличие структурных функций имеет скрытый характер, и они могут быть выявлены лишь на этапе изучения. Вот простейшая постановка задачи такого типа.

Пусть система обладает набором ресурсов

$$x = \{x_1, \ldots, x_n\}$$

и осуществляет с окружением локальные обмены

$$dx = \{dx_1, \ldots, dx_n\},$$

причем $dx_i > 0$, если система «получает», и $dx_i < 0$, если «отдает». Естественно, что любая система, наделенная хотя бы малой толикой активности или пассивной целесообразности, допускает лишь выгодные для себя обмены. Результирующую выгодность можно определять по-разному. Правдоподобным выглядит следующий способ. Каждый i-й ресурс имеет свой коэффициент $\lambda_i > 0$ выгодности, и обмен считается допустимым, если

$$\sum_i \lambda_i \, dx_i \geqslant 0.$$

Другими словами, обмен dx допусти́м, если сумма взвешенных приобретений не меньше суммы взвешенных потерь. Коэффициенты λ_i в общем случае могут зависеть от x, поэтому окончательная форма *локально выгодного обмена* такова:

$$\sum_i \lambda_i(x) \, dx_i \geqslant 0. \tag{11.6}$$

Можно ли такой системе приписать структурную функцию? Да, — если коэффициенты $\lambda_i(x)$ справляются со своей ролью. Например, не позволяют с помощью серии локальных обменов (11.6) перевести систему в состояние с меньшим содержанием всех видов ресурсов, т. е. отобрать ресурсы, ничего не давая взамен[6]. В этом случае можно гарантировать существование у дифференциальной формы

$$\sum_i \lambda_i(x)\,dx_i$$

интегрирующего множителя[7] $\mu(x)$, т. е.

$$\mu(x)\sum_i \lambda_i(x)\,dx_i = dS. \tag{11.7}$$

Функцию $S(x)$, определяемую (11.7), естественно принять за структурную функцию системы, поскольку главная роль структурной функции — служить критерием выгодности обмена, с чем $S(x)$ легко справляется: вместо (11.6) теперь достаточно написать $dS \geqslant 0$. Величины $\mu(x)\lambda_i(x)$ получают при этом интерпретацию значимостей ресурсов, так как

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = \mu(x)\lambda_i(x).$$

11.3. Термодинамические потенциалы

Предыдущий раздел в контексте метода множителей Лагранжа ничего особенного из себя не представляет. Но параллели с термодинамикой дают общесистемным формулам дополнительный импульс, направляя исследование в новое русло.

Рассмотрим *сопряженную* к $S(x)$ функцию

$$\Pi(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = \max_{X_1,\ldots,X_n}\left\{S(X) - \sum_i \lambda_i X_i\right\}. \tag{11.8}$$

Максимум в (11.8) достигается при некоторых $X_1(\lambda),\ldots,X_n(\lambda)$, т. е.

$$\Pi(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = S[X(\lambda)] - \sum_i \lambda_i X_i(\lambda).$$

[6] Это соответствует термодинамическому *принципу адиабатической недостижимости*.

[7] В термодинамике для $\delta Q = du + P\,dV$ интегрирующим множителем оказывается $1/T$, где T абсолютная температура. В результате получается дифференциал энтропии $dS = \delta Q/T$.

Поэтому

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \lambda_i} = \sum_i \left(\frac{\partial S}{\partial X_i} - \lambda_i \right) \frac{\partial X_i}{\partial \lambda_i} - X_i(\lambda),$$

и в силу (11.5)

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \lambda_i} = -X_i, \quad d\Pi = -\sum_i X_i d\lambda_i. \tag{11.9}$$

Переход от функции $S(X)$ и переменных $X_1, \ldots, X_n$ к функции $\Pi(\lambda)$ и переменным $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ называют обычно *преобразованием Лежандра*[8]. В результате такого преобразования в термодинамике возникают термодинамические потенциалы (*свободная энергия Гельмгольца*, *термодинамический потенциал Гиббса*), в аналитической механике — *гамильтонов формализм*.

Соотношения (11.9) позволяют вычислять равновесные количества ресурсов простым дифференцированием термодинамического потенциала $\Pi(\lambda)$. Для этого, правда, необходимо знать равновесные значимости ресурсов, которые бывают ясны из априорных соображений. Например, значимости ресурсов могут определяться «окружающей средой», каковой для «малой» системы может служить — «большая». В экономике, скажем, где значимости λ_i суть цены, — подключение малых фирм к большому рынку не меняет установившихся цен.

В некоторых ситуациях подключение одной системы к другой не меняет значимостей лишь некоторых ресурсов. В этих случаях целесообразно проводить преобразование Лежандра по части переменных, переходя к термодинамическим потенциалам вида

$$\Pi_r(\lambda_1, \ldots, \lambda_r; X_{r+1}, \ldots, X_n) = \max_{X_1, \ldots, X_r} \left\{ S(X) - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i X_i \right\},$$

для которых вместо (11.9) имеет место

$$\frac{\partial \Pi_r}{\partial \lambda_i} = -X_i, \quad i = 1, \ldots, r;$$

$$\frac{\partial \Pi_r}{\partial X_j} = \lambda_j, \quad j = r+1, \ldots, n.$$

[8] О нюансах отличия преобразований *Лежандра* и *Юнга—Фенхеля* см. раздел 3.5.

Базисный ресурс. Отношение λ_j/λ_i назовем *i-м обменным отношением j-го ресурса.* Вместо значимостей часто удобно рассматривать набор обменных отношений некоторого базисного ресурса — пусть это будет первый вид ресурса[9], — что отвечает переходу к новым единицам измерения значимостей, в которых

$$p_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1} = \frac{\partial S}{\partial X_i} \Big/ \frac{\partial S}{\partial X_1}, \quad i = 2, \ldots, n.$$

При этом вместо λ_1 удобно использовать величину

$$\tau = \frac{1}{\lambda_1} = \left(\frac{\partial S}{\partial X_1}\right)^{-1},$$

которая в термодинамике соответствует температуре.

Условия равновесия в новых переменных приобретают вид

$$\tau^k(x^k) = \tau, \quad p_i^k(x^k) = p_i, \quad i = 2, \ldots, n,$$

а вместо Π_r удобнее потенциал $\widetilde{\Pi}_r$, для которого

$$\frac{\partial \widetilde{\Pi}_r}{\partial \tau} = S; \quad \frac{\partial \widetilde{\Pi}_r}{\partial pi} = -X_i, \quad i = 2, \ldots, r;$$

$$\frac{\partial \widetilde{\Pi}_r}{\partial X_j} = p_j, \quad j = r + 1, \ldots, n.$$

Обратим внимание, что переменные, характеризующие равновесие, распадаются на два класса. К первому относятся *экстенсивные переменные*, значения которых в равновесии равны сумме значений для составляющих подсистем (в экономике — ресурсы, деньги; в термодинамике — объемы, энергии, энтропия). Ко второму классу относятся *интенсивные переменные*, принимающие в равновесии равные значения для всех подсистем (в экономике — цены; в термодинамике — давления, температуры).

Манипуляции последних двух разделов можно расценивать по-разному. В «пресном варианте» — это тривиальные преобразования, которые хороши для упражнений. Однако на таких «упражнениях» стоит

---

[9] В экономике базисным ресурсом обычно являются деньги, в термодинамике — энергия.

вся термодинамика, где без ориентации в прямых и двойственных переменных невозможно ориентироваться. Какой-нибудь изобарический процесс можно изучать в средней школе, но как быть с — адиабатическим? Если для описания состояния выбрана энтропия, то каковы должны быть другие параметры, чтобы составлять «комплект»? Все это превращается в загадку без «тривиальных преобразований»[10].

Поэтому рассмотрение соответствующих схем на абстрактном уровне, безусловно, представляет интерес. Систематическое исследование в этом направлении было предпринято Розоноэром[11]. *Вместе с тем надо понимать, что конгломерат формул служит здесь не ядром какой-то теории, а, скорее, образцом для подражания при рассмотрении аналогичных задач.*

11.4. Реакция на внешние воздействия

Тот факт, что в равновесии системы суммарный эффект принимает не просто стационарное, а максимальное значение, — обеспечивает наличие дополнительных свойств.

Рассмотрим составную систему со структурной функцией $S(x)$, находящуюся в равновесии со средой (с большой системой), значимости ресурсов в которой равны $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Пусть в равновесии достигается строгий локальный максимум суммарного эффекта, тогда *матрица Якоби* $\partial^2 S/(\partial x_i \partial x_j)$ отрицательно определена, т. е.

$$d^2S = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} dx_i\, dx_j < 0 \quad \text{при} \quad dx \neq 0. \tag{11.10}$$

Если в окружении происходят какие-либо изменения, то меняются равновесные количества ресурсов $x_1, \dots, x_n$ и равновесные значимости $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, связанные между собой соотношениями

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = \lambda_i,$$

[10] Аналогичный комментарий можно дать к аналитической механике и вариационному исчислению, где похожее жонглирование составляет ядро дисциплины.

[11] *Розоноэр Л. И.* Обмен и распределение ресурсов (обобщенный термодинамический подход), I–III // А и Т. 1973. № 5. С. 115–132; № 6. С. 65–79; № 8. С. 82–103.

из которых следует

$$d\lambda_i = \sum_i \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} dx_j,$$

что в совокупности с (11.10) дает

$$d^2 S = \sum_i d\lambda_i \, dx_i < 0. \tag{11.11}$$

Легко проверяется $d^2\Pi = -d^2 S > 0$, т. е. потенциал Π в равновесии достигает минимума. Неравенства типа (11.11) позволяют судить о характере сдвига равновесия при изменении окружающей среды[12)]. Наибольшей наглядностью обладают выводы в том случае, когда в окружении меняется лишь одна равновесная величина. Например, из (11.11) следует

$$\left|\frac{\partial \lambda_i}{\partial x_i}\right|_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{i-1},\lambda_{i+1},\ldots,\lambda_n} < \left|\frac{\partial \lambda_i}{\partial x_i}\right|_{x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n}, \tag{11.12}$$

что принято интерпретировать как компенсационные свойства систем, которые широко декларируются термодинамическим *принципом Ле Шателье* (см. раздел 2.8).

Неравенство (11.12) означает следующее. Если в равновесии происходит изменение содержания в системе лишь i-го ресурса, то изменение его значимости определяется правой частью (11.12). Если же системе при изменении количества i-го ресурса предоставляется возможность обмена с окружением другими ресурсами, то изменение i-й значимости определяется левой частью (11.12) и оказывается меньше, чем в первом случае. Это означает частичную компенсацию эффекта от изменения i-го ресурса в результате обмена с окружением другими ресурсами.

Принципу Ле Шателье часто приписывают таинственные свойства, ибо он позволяет угадать качественную реакцию системы при отсутствии ее модельного описания. Каждый раз, однако, последующий внимательный анализ показывает, что существо дела заключается в простых неравенствах, вытекающих из экстремальной природы задачи.

[12)] Из (11.11) следует, что система «значимости — минус ресурсы» является *P-системой* [6, т. 3].

11.5. Оптимизация и неопределенность

На практике часто встречаются «недоопределенные» задачи, возникающие из-за того, что какие-то механизмы остаются невскрытыми. Вот показательный пример.

В городе имеется n районов, L_i — число жителей i-го района, W_j — число работающих в j-м районе, x_{ij} — число живущих i-м районе и работающих в j-м. Очевидно,

$$\sum_j x_{ij} = L_i, \quad \sum_i x_{ij} = W_j. \tag{11.13}$$

Величины L_i, W_j известны, необходимо оценить пассажиропотоки x_{ij}, но $2n$ уравнений не хватает для определения n^2 неизвестных.

В таких ситуациях легче всего сказать «нет — и не надо», но после некоторого додумывания постановка задачи приобретает совсем другой вид. Естественные вероятностные предположения о расселении и распределении мест работы выявляют оптимизационную природу задачи, в результате чего становится ясно, что набор x_{ij} надо определять, максимизируя функционал, напоминающий энтропию,

$$H = -\sum_{i,j} x_{ij} \ln x_{ij} \to \max$$

при ограничениях (11.13). Соответствующее модельное обоснование рассматривается в [6, т. 4].

Задача

$$-\sum_{i,j} x_{ij} \ln x_{ij} \to \max, \quad \sum_j x_{ij} = L_i, \quad \sum_i x_{ij} = W_j$$

легко решается методом множителей Лагранжа. В результате получается

$$x_{ij} = e^{-1-\lambda_i-\mu_j},$$

откуда ясно, что все x_{ij} представимы в виде произведения $x_{ij} = u_i v_j$. Подстановка в ограничения дает систему уравнений

$$\sum_j u_i v_j = L_i, \quad \sum_i u_i v_j = W_j,$$

решая которую, окончательно имеем

$$x^*_{ij} = \frac{L_i W_j}{N},$$

что можно интерпретировать как наличие у регионов «потенциалов притяжения», $\frac{L_i}{\sqrt{N}}$ и $\frac{W_j}{\sqrt{N}}$, произведение которых дает пассажиропоток x_{ij}^*.

Принцип максимальной неопределенности. Использование понятия энтропии помогает определить неизвестные плотности распределения переменных, обосновать агрегирование и ввести макропараметры, дающие укрупненное описание системы.

Принцип максимума энтропии звучит так. ***В заданных внешних условиях параметры системы имеют такие плотности распределения, при которых достигается максимум энтропии.***

Вот как это работает. Найдем плотность распределения $\rho(x)$ вектора $x \in \mathbb{R}^n$, если помимо естественного условия нормировки

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\, dx = 1$$

задано единственное макроограничение: фиксировано среднее значение x^2, т. е.

$$\int_{\mathbb{R}^n} x^2 \rho(x)\, dx = n\sigma^2.$$

Максимизируя энтропию

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) \ln \rho(x)\, dx \to \max,$$

при указанных ограничениях, переходим к лагранжиану

$$L(\rho(x), \lambda, \mu) = -\int_{\mathbb{R}^n} \left[\rho(x) \ln \rho(x) + \lambda \rho(x) + \mu x^2 \rho(x)\right] dx$$

и, варьируя плотность $\rho(x)$, получаем необходимое условие максимума:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[\ln \rho(x) + 1 + \lambda + \mu x^2\right] \delta\rho(x)\, dx = 0.$$

В силу произвольности вариации $\delta\rho(x)$, имеем

$$\ln \rho(x) + 1 + \lambda + \mu x^2 = 0,$$

откуда

$$\rho(x) = k e^{-\mu x^2} = k e^{-\mu(x_1^2 + \ldots + x_n^2)}.$$

Параметры k и μ определяются подстановкой в ограничения.

Глава 12

Сводка определений и результатов

12.1. Критические точки и градиентные поля

✓ **Теорема 1.1.1.** *Если функция $\varphi(x)$ в точке x^* дифференцируема и принимает локально экстремальное (максимальное или минимальное) значение, то $\nabla\varphi(x^*) = 0$.*

✓ Теорема 1.1.1 дает лишь необходимые условия оптимума, но фактически их, как правило, достаточно для решения задачи. Причина заключается в том, что условие $\nabla\varphi(x^*) = 0$ для экстремальной точки — обязательно. Поэтому искомое критическое значение x^* неизбежно попадает в число решений системы уравнений $\nabla\varphi(x) = 0$. Последняя в «ситуациях общего положения» имеет либо одно, либо несколько решений. В любом случае «круг подозреваемых» достаточно узок, чтобы оставшуюся часть задачи считать чисто технической.

✓ Если второй дифференциал, называемый *гессианом*, положительно определен, т. е.

$$\sum_{i,j} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j > 0 \quad \text{при} \quad \Delta x \neq 0,$$

то в критической точке x^* — строгий минимум.

✓ **Теорема 1.3.3.** *Критическая точка x^* является положением минимума функции $\varphi(x)$ в томм случае, когда равновесие x^* системы $\dot{x} = -\nabla\varphi(x)$ асимптотически устойчиво.*

✓ **Теорема 1.3.5.** *Если потенциал $\varphi(x)$ имеет в $\mathbb{R}^n$ единственную критическую точку x^*, в которой достигается локальный минимум $\varphi(x)$, то область Ω притяжения x^* при движении $\dot{x} = -\nabla\varphi(x)$ неограниченна.*

✓ **Теорема 1.4.1.** *Если гладкая функция $\varphi(x, \lambda)$ имеет при λ_0 изолированный минимум по x в точке $x^*(\lambda_0)$, то при достаточно малом возмущении $\Delta\lambda$ минимум сохраняется, смещаясь в близлежащую точку $x^*(\lambda_0 + \Delta\lambda)$.*

✓ **Теорема 1.5.1.** *Пусть x^* — единственная критическая точка функции $\varphi(x)$, удовлетворяющей условию неограниченного роста*

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \varphi(x) = \infty,$$

Тогда в x^* достигается глобальный минимум функции $\varphi(x)$.

✓ Пусть Φ обозначает класс *гладких функционалов* $\varphi(x)$ с единственной в шаре $\|x\| \leqslant 1$ нулевой критической точкой. Функционалы $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ называются *гомотопными* в Φ, если существует гладкая *деформация*

$$\varphi(x, \lambda) \in \Phi, \quad \lambda \in [0, 1],$$

такая что

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \varphi(x, 1) = \varphi_1(x).$$

Теорема Бобылева. *Если $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ гомотопны в Φ и нуль — точка локального минимума $\varphi_0(x)$, то нуль — точка локального минимума $\varphi_1(x)$.*

12.2. Условная минимизация

✓ Задача на условный экстремум

$$f(x) \to \min, \quad g_1(x) = 0, \quad \ldots, \quad g_m(x) = 0, \tag{12.1}$$

заменяется оптимизацией *лагранжиана*

$$L(x, \lambda) = f(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x)$$

по x при надлежащем выборе $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

В результате поиск *условного экстремума* сводится к решению системы уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_k}, \quad g_1(x) = 0, \quad \ldots, \quad g_m(x) = 0, \quad k = 1, \ldots, m.$$

✓ Задача *нелинейного программирования*,

$$\begin{gathered} f(x) \to \min, \\ g_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \\ h_j(x) \leqslant 0, \quad j = 1, \ldots, r, \end{gathered} \tag{12.2}$$

отличается от предыдущей наличием дополнительных ограничений в виде неравенств. Ограничения записываются также в векторном виде: $g(x) = 0$, $h(x) \leqslant 0$. Элементы x, удовлетворяющие ограничениям задачи, называются *допустимыми решениями*.

Теорема Каруша—Джона. *Если точка x^* есть решение задачи* (12.2), *то найдутся такие числа $\lambda_0^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*$ и $\mu_1^*, \ldots, \mu_r^*$, не все равные нулю, что*

$$\lambda_0^* \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{r} \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0,$$

причем $\lambda_0^* \geqslant 0$, *все* $\mu_j^* \geqslant 0$ *и*

$$\mu_j^* h_j(x^*) = 0, \quad j = 1, \ldots, r. \tag{12.3}$$

Равенства (12.3) называются *условиями дополняющей нежесткости.*

✓ **Теорема 2.4.1.** *Пусть в задаче на условный* ***минимум*** *существуют допустимые решения, и функционал* $\varphi(x)$ *неограниченно растет на бесконечности,*

$$\varphi(x) \to \infty \quad \text{при} \quad \|x\| \to \infty.$$

Тогда условный минимум существует, в том числе — глобальный.

✓ **Теорема 2.5.2.** *Пусть все функции в регулярной задаче* (12.1) *дважды непрерывно дифференцируемы,* x^* *— критическая точка,* $\lambda^* \gg 0$ *— соответствующий (векторный) множитель Лагранжа и*

$$\langle \nabla_x^2 L(x^*, \lambda^*) y, y \rangle > 0$$

для любого $y \neq 0$, *удовлетворяющего условию* $\nabla g(x^*) y = 0$. *Тогда* x^* *— точка изолированного минимума в задаче* (12.1).

✓ Пусть $\{x^*(b), \lambda^*(b)\}$ обозначает экстремальную точку лагранжиана

$$L(x, \lambda) = f(x) - \lambda[g(x) - b]$$

задачи

$$f(x) \to \min, \quad g(x) = b.$$

Тогда

$$\frac{df}{db} = \lambda^*(b).$$

Таким образом, $\lambda^*(b)$ показывает скорость роста оптимального значения целевой функции f по параметру b. Иными словами, представляет собой *цену ограничения.*

✓ Переход от задачи

$$f(x) \to \min, \quad g(x) = 0, \quad g = \{g_1, \ldots, g_m\}. \tag{12.4}$$

к *безусловной* минимизации функционала

$$f_\mu(x) = f(x) + \mu g^2(x)$$

при достаточно больших μ дает сколь угодно точное решение задачи (12.4).

Метод штрафных функций прост идеологически и достаточно эффективен с вычислительной точки зрения. Понятно, что он легко модифицируется под различные задачи условной оптимизации далеко за пределами постановки (12.4). При этом идея может использоваться не только как алгоритмическая основа, но и как удобная схема для получения теоретических выводов. Например, для обоснования необходимых и достаточных условий оптимума.

12.3. Выпуклый анализ

✓ Выпуклые задачи важны не потому, что распространены, а потому, что хорошо решаются. И хотя это похоже на «поиск под фонарем — ибо там хорошо видно», математика, как и Вселенная, именно так развивается. При этом знания, добытые в «выпуклой области», освещают многое за пределами.

✓ Множество X называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя точками $x, y \in X$ оно содержит отрезок, их соединяющий,

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in X, \quad \lambda \in [0, 1].$$

✓ *Линейную комбинацию*

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j \mathbf{f}_j$$

точек $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_N\}$, при условии $\lambda_j \geqslant 0$,

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j = 1,$$

называют *выпуклой*.

Объединение всех выпуклых комбинаций *конечных* наборов точек из $X \subset \mathbb{R}^n$ называется *выпуклой оболочкой* множества X и обозначается $\operatorname{co} X$.

✓ **Теорема Каратеодори**. *Выпуклая оболочка всегда совпадает с объединением всевозможных выпуклых комбинаций конечных подмножеств $X \subset \mathbb{R}^n$, содержащих не более $n + 1$ точек.*

✓ Выпуклые множества $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ называются *отделимыми*, если существует *разделяющая гиперплоскость* $H \subset \mathbb{R}^n$ $(ax = \beta)$, относительно которой множества располагаются в разных замкнутых полупространствах H^+, H^-:

$$x \in X \quad \Rightarrow \quad ax \leqslant \beta, \quad x \in Y \quad \Rightarrow \quad ax \geqslant \beta.$$

Теорема отделимости. *Непересекающиеся замкнутые выпуклые множества X, Y всегда отделимы, и — строго отделимы, если хотя бы одно их этих множеств ограничено.*

Опорной гиперплоскостью к X называют гиперплоскость H, которая имеет хотя бы одну общую точку с X, и либо $X \subset H^+$, либо $X \subset H^-$.

✓ Замкнутое выпуклое множество $K \subset \mathbb{R}^n$, содержащее вместе с любой точкой $x \in K$ луч λx, проходящий через эту точку, называется *конусом*. Конус, не содержащий противоположных точек,

$$x \in K, \quad x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad -x \notin K,$$

называют *острым*, или *заостренным*.

Множество K^*, состоящее из точек y, для которых скалярное произведение $yx \leqslant 0$ при любом $x \in K$, называется *двойственным конусом* по отношению к K.

✓ Выпуклую оболочку конечного множества точек называют *многогранником*. Пересечение F многогранника P с любой своей опорной гиперплоскостью называют *гранью многогранника*; *k-гранью*, если $\dim F = k$; 0-грани — *вершины*, 1-грани — *ребра*.

✓ **Теорема 3.2.3.** *Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — выпуклые функции на выпуклом множестве X. Возможна одна и только одна из двух альтернатив*:

(*i*) *существует такой вектор $x \in X$, что*

$$\varphi_1(x) < 0, \ldots, \varphi_n(x) < 0;$$

(*ii*) *существует ненулевой вектор $y = \{y_1, \ldots, y_n\} \geqslant 0$, такой что*

$$y_1\varphi_1(x) + \ldots + y_n\varphi_n(x) \geqslant 0 \quad \text{при любом} \quad x \in X.$$

✓ Скалярная функция φ векторного аргумента считается *выпуклой*, если

$$\varphi[\lambda x + (1 - \lambda)y] \leqslant \lambda\varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(y)$$

при любом $\lambda \in [0, 1]$. Выпуклая функция $\varphi(x)$ имеет выпуклый *надграфик* — множество пар (z, x), таких что $z \geqslant \varphi(x)$. Надграфик обозначают как $\operatorname{epi}\varphi$.

✓ **Теорема 3.3.1.** *Для выпуклости дважды непрерывно дифференцируемой функции $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ достаточна неотрицательная определенность ее гессиана.*

✓ **Теорема 3.3.2.** *Для выпуклости непрерывно дифференцируемой функции $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ необходима и достаточна ее монотонность*:

$$\forall x, y : \langle \nabla\varphi(x) - \nabla\varphi(y),\ x - y \rangle \geqslant 0.$$

✓ **Теорема 3.3.3.** *Любая выпуклая на $\mathbb{R}^n$ функция — непрерывна.*

✓ **Лемма 3.3.4.** *Производная $\varphi'_s(x)$ выпуклой функции φ в любой точке x по любому направлению s всегда существует. При этом производные $\varphi'_s(x)$ равномерно ограничены по s.*

✓ Вектор x^* называется *субградиентом* выпуклой функции φ в точке x, если

$$\varphi(x + h) \geqslant \varphi(x) + \langle x^*, h \rangle$$

для любого h.

✓ Множество *субградиентов* φ в x называется *субдифференциалом* функции φ в точке x и обозначается $\partial\varphi(x)$.

✓ **Теорема 3.4.1.** *Необходимым и достаточным условием глобального минимума выпуклой функции в точке x^* является*:

$$0 \in \partial\varphi(x^*).$$

✓ **(i)** *Множество $\partial\varphi(x_0)$ в любой точке x_0 непусто, выпукло, замкнуто и ограничено.*

(ii) *Производная выпуклой функции φ в точке x_0 по любому направлению s всегда существует и определяется равенством*

$$\frac{\partial\varphi(x_0)}{\partial s} = \max_{z\in\partial\varphi(x_0)} \langle z, s\rangle.$$

(iii) Теорема Моро—Рокафеллара. *Если функции φ_1, φ_2 выпуклы, то*

$$\partial(\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \partial\varphi_1(x) + \partial\varphi_2(x).$$

(iv) Теорема Дубовицкого—Милютина. *Если функции φ_1, φ_2 выпуклы и*

$$\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0),$$

то

$$\partial \max\{\varphi_1, \varphi_2\}(x_0) = \mathrm{co}\{\partial\varphi_1(x_0) \cup \partial\varphi_2(x_0)\}.$$

(v) *Если $\omega(x) = \varphi(Ax)$, где A прямоугольная матрица, то*

$$\partial\omega(x) = A^T\partial\varphi(Ax).$$

Под $\partial\varphi(Ax)$ здесь подразумевается субдифференциал φ по отношению к аргументу в точке Ax.

(vi) *В отсутствие дифференцируемости работает аналог теоремы* 3.3.2. *Выпуклая функция всегда монотонна*:

$$\forall\, x, y : \big\langle \partial\varphi(x) - \partial\varphi(y),\ x - y\big\rangle \geqslant 0.$$

✓ Графики выпуклых функций можно рассматривать двояко: как точечные множества и как огибающие опорных гиперплоскостей. Подобная двойственность служит основой для извлечения выгод из перепасовывания результатов, которые трансформируются в новые факты при смене точки зрения.

✓ Представление выпуклой функции как максимума линейных функций:

$$\varphi(x) = \max_z\big\{\varphi(z) + \langle s, x - z\rangle\big\}, \quad s \in \partial\varphi(z),$$

равносильно

$$\forall\, x : \langle s, z\rangle - \varphi(z) \geqslant \langle s, x\rangle - \varphi(x), \quad s \in \partial\varphi(z).$$

Произвол выбора субградиента s из $\partial\varphi(z)$ не влияет на результат. Если $\varphi(x)$ дифференцируема в обычном смысле, то

$$\varphi(x) = \max_z\{\varphi(z) + \langle\varphi'(z), x - z\rangle\}.$$

✓ Выпуклой функции $\varphi(x)$ принято сопоставлять *сопряженную функцию*

$$\varphi^*(y) = \sup_x\{\langle x, y\rangle - \varphi(x)\},$$

базирующуюся на свойстве субградиента (3.5). Переход к φ^* называют *преобразованием Юнга—Фенхеля*.

✓ **Теорема Моро—Фенхеля.** *Если функция $\varphi(x)$ выпукла и замкнута, то $\varphi^{**}(x) = \varphi(x)$.*

✓ **Теорема 3.5.2.** *Для выпуклой замкнутой функции $\varphi(x)$ и любых фиксированных $x, y \in \mathbb{R}^n$ — следующие условия эквивалентны:*

(i) $y \in \partial\varphi(x)$,

(ii) $x \in \partial\varphi^*(y)$,

(iii) $\langle x, y\rangle = \varphi(x) + \varphi^*(y)$.

✓ **Теорема Хелли.** *Пусть $\mathbb{S}$ — конечное семейство из не менее чем $n + 1$ выпуклых множеств в R^n. Тогда, если каждые $n + 1$ множеств из $\mathbb{S}$ имеют непустое пересечение, то пересечение всех множеств из $\mathbb{S}$ не пусто.*

12.4. Выпуклое программирование

✓ Нелинейная задача

$$f(x) \to \min,$$

$$h_j(x) \leqslant 0, \quad j = 1, \dots, r,$$

$$x \in Q,$$

с выпуклыми функциями $f(x)$, $h_j(x)$ и некоторой выпуклой областью Q — называется *задачей выпуклого программирования*. Обычно предполагается выполненным на Q *условие Слейтера*: существует такое $\tilde{x}$, что

$$h_j(\tilde{x}) < 0, \quad j = 1, \dots, r.$$

✓ **Теорема Куна—Таккера.** *Точка $x^* \in Q$ является точкой глобального минимума в задаче выпуклого программирования в томм случае, когда найдутся неотрицательные множители Лагранжа, $y^* = \{y_1^*, \dots, y_r^*\}$, при которых выполнены условия дополняющей нежесткости, $y_j^* h_j(x^*) = 0$, и лагранжиан*

$$L(x, y) = f(x) + \langle y, h(x)\rangle$$

принимает минимальное по x значение, т. е.

$$L(x, y^*) \geqslant L(x^*, y^*), \quad \forall x \in Q,$$

либо в субградиентной форме: $0 \in \partial_x L(x^*, y^*)$.

✓ Пара $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ называется *седловой точкой* функции $\psi(x, y)$, если

$$\psi(x^*, y) \leqslant \psi(x^*, y^*) \leqslant \psi(x, y^*)$$

при любых допустимых x, y. Другими словами, x^* — точка минимума $\psi(x, y^*)$ по x, а y^* — точка максимума $\psi(x^*, y)$ по y.

✓ **Седловой вариант теоремы Куна—Таккера.** *Точка $x^* \in Q$ является точкой глобального минимума в задаче выпуклого программирования в томм случае, когда найдутся неотрицательные множители Лагранжа, $y^* = \{y_1^*, \ldots, y_r^*\}$, при которых (x^*, y^*) — седловая точка лагранжиана,*

$$L(x^*, y) \leqslant L(x^*, y^*) \leqslant L(x, y^*), \quad \forall x \in Q, \quad y \geqslant 0.$$

✓ С помощью функционала $S(x) = \sup\{L(x, y) : y \geqslant 0\}$ задача выпуклого программирования может быть записана в виде

$$S(x) \to \min, \quad x \in Q,$$

а функционал $R(y) = \inf\{L(x, y) : x \in Q\}$ позволяет записать *двойственную задачу*:

$$R(y) \to \max, \quad y \geqslant 0.$$

✓ **Теорема 4.2.1.** *Для любых допустимых значений x и y справедливо неравенство*

$$f(x) \geqslant R(y),$$

переходящее в равенство $f(x^*) = R(y^*)$ в томм случае, когда (x^*, y^*) — седловая точка лагранжиана, а значит, x^* — решение прямой задачи, y^* — двойственной.

✓ **Теорема 4.3.1 о минимаксе.** *Минимакс всегда больше максимина,*

$$\min_x \max_y \psi(x, y) \geqslant \max_y \min_x \psi(x, y). \tag{12.5}$$

Равенство в (12.5) *достигается в томм случае, когда $\psi(x, y)$ имеет седловую точку (x^*, y^*), при этом*

$$\min_x \max_y \psi(x, y) = \max_y \min_x \psi(x, y) = \psi(x^*, y^*).$$

✓ **Теорема 4.3.5.** *Пусть функция $\psi(x, y)$ определена на произведении $X \times Y$ компактов X и Y, выпукла по $x \in X$ и вогнута по $y \in Y$. Тогда $\psi(x, y)$ имеет седловую точку.*

✓ **Теорема 4.4.1.** *Либо неравенство $Ax > 0$ разрешимо, либо $yA = 0$ имеет ненулевое положительное решение.*

✓ **Теорема 4.4.2.** *Либо неравенство $Ax \geqslant 0$ разрешимо ($x \neq 0$), либо $yA = 0$ имеет строго положительное решение $y > 0$.*

✓ Задача линейного программирования

$$\langle c, x\rangle \to \max, \quad Ax \leqslant b, \quad x \geqslant 0, \tag{12.6}$$

характеризуется линейностью *целевой функции* $\langle c, x\rangle$ и ограничений $Ax \leqslant b$.

✓ Использование фиктивных переменных позволяет менять форму задачи до неузнаваемости. Например, вместо $\langle c, x\rangle$ можно максимизировать единственный скалярный параметр $x_{n+1} \to \max$, добавляя к ограничениям условие

$$\langle c, x\rangle - x_{n+1} = 0.$$

✓ Каждое из ограничений

$$\sum_j a_{ij}x_j \leqslant b_i$$

задачи (12.6) определяет в $\mathbb{R}^n$ сдвинутое полупространство, пересечение которых дает выпуклый *допустимый многогранник*, ограниченный или неограниченный, возможно пустой. Линейная целевая функция $\langle c, x\rangle$ растет при движении точки x вдоль c. Поверхностями постоянного уровня, на которых функция $\langle c, x\rangle$ принимает одно и то же значение, являются гиперповерхности $\langle c, x\rangle = \gamma$, ортогональные вектору c.

✓ **Теорема 4.6.1.** *Пусть решение задачи* (12.6) *единственно. Тогда при достаточно малых изменениях вектора c оптимальное решение не меняется* (*достигается в той же самой вершине*).

✓ *Двойственной* к (12.6) оказывается задача

$$\langle b, y\rangle \to \min, \quad A^Ty \geqslant c, \quad y \geqslant 0.$$

✓ **4.7.1.** *Пусть x — допустимый вектор задачи* (4.9), *а y — допустимый вектор двойственной задачи. Тогда*

$$\langle c, x\rangle \leqslant \langle b, y\rangle.$$

✓ **4.7.2.** *Пусть x^* и y^* — допустимые векторы прямой и двойственной задач, причем $\langle c, x^*\rangle = \langle b, y^*\rangle$. Тогда векторы x^*, y^* являются решениями соответствующих задач.*

✓ **Теорема 4.7.3.** *Если прямая и двойственная задача имеют допустимые векторы, то обе они имеют решения.*

✓ **Теорема 4.7.4.** *Для того чтобы допустимые векторы прямой и двойственной задач были решениями этих задач, необходимо и достаточно выполнение следующих условий дополняющей нежесткости*:

$$\begin{cases} y_i^* = 0, & \text{если} \quad \sum_j a_{ij}x_j^* < b_i; \\ x_j^* = 0, & \text{если} \quad \sum_i a_{ij}y_i^* > c_j. \end{cases}$$

✓ **Теорема 4.12.1.** Точка x^* является точкой глобального минимума в задаче квадратичного программирования,

$$\langle Dx, x\rangle + \langle c, x\rangle \to \min, \qquad Ax \leqslant b,$$

в томм случае, когда при некотором $y^* \geqslant 0$ выполняется условие:

$$Dx^* + c + A^T y^* = 0, \quad \left\langle Ax^* - b, y^* \right\rangle = 0.$$

12.5. Теория игр

✓ Самое трудное в любой дисциплине заключается в осознании роли простых понятий. Не теоремы, а исходные категории мышления — вот что необходимо для ориентации.

✓ Помимо экстремума есть несколько других понятий «оптимизационного характера», которые относительно малоизвестны, но не менее важны. Беда заключается в том, что, попав под крышу с обманчивым названием «теория игр», они стали в общественном мнении ассоциироваться с покером. Секрет же заключается в том, что *теория игр* вообще не изучает игры в приземленном понимании этого слова, а занимается «повсеместно распространенными» системами, в которых индивидуальные интересы не совпадают с коллективными.

✓ Имеется два игрока. Первый — выбирает строки матрицы A с вероятностями $\{p_1, \dots, p_n\}$, второй — выбирает столбцы с вероятностями $\{q_1, \dots, q_m\}$. Матожидание выигрыша первого тогда равно

$$W(p,q) = \sum_{i,j} a_{ij}p_iq_j,$$

и он его, так или иначе, пытается максимизировать.

Если игра *антагонистическая* (выигрыш одного есть проигрыш другого), первый так выбирает $\{p_1, \dots, p_n\}$, чтобы добиться максимума W при наихудшем для себя $\{q_1, \dots, q_m\}$, второй — наоборот. В результате решением игры оказываются наборы вероятностей (смешанные стратегии)

$$p^* = \{p_1^*, \dots, p_n^*\}, \quad q^* = \{q_1^*, \dots, q_m^*\},$$

обеспечивающие равенство

$$\max_p \min_q \sum_{i,j} a_{ij} p_i q_j = \min_q \max_p \sum_{i,j} a_{ij} p_i q_j.$$

✓ Пусть каждый игрок A_i распоряжается выбором переменной $x_i \in X_i$, и его «интерес» состоит в максимизации своей *функции выигрыша*

$$D_i(x) = D_i(x_1, \ldots, x_n).$$

Точка x^* называется *решением игры по Нэшу*, если

$$D_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i^*, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \max_{x_i \in X_i} D_i(x), \quad i = 1, \ldots, n,$$

т. е. каждая функция $D_i(x)$ в точке x^* достигает оптимума по собственной переменной x_i.

✓ Альтернатива $x \in X$ при наличии m целевых функций

$$D_1(x), \ldots, D_m(x)$$

называется *неулучшаемой*, если не существует другой альтернативы $y \in X$, для которой

$$D_i(y) \geqslant D_i(x), \quad i = 1, \ldots, m,$$

причем хотя бы одно из этих неравенств строгое. Неулучшаемые альтернативы называют *оптимальными по Парето.*

12.6. Бифуркации и катастрофы

✓ Начальный отрезок ряда Тэйлора,

$$j^k \varphi(x) = \sum_{\alpha=0}^{k} \frac{D^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} x^a,$$

называется *k-струей* функции φ в нуле. Разность $\varphi(x) - j^k\varphi(x)$ называют *хвостом.*

Функция $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет в нуле *порядок* k, если первой ненулевой производной является $D^k\varphi(0)$.

✓ **Лемма Морса.** *Пусть гладкая функция $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет в нуле невырожденную критическую точку и $\varphi(0) = 0$. Тогда в достаточно малой окрестности нуля существует локальная система координат $z_1, \ldots, z_n$, в которой*

$$\varphi[x(z)] = z_1^2 + \ldots + z_k^2 - z_{k+1}^2 \ldots - z_n^2,$$

причем $x(z)$ является диффеоморфизмом.

✓ **Определение 6.3.3.** *Гладкие функции $\varphi, \psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ локально эквивалентны в нуле, если существует такой локальный диффеоморфизм $z(x)$, что*

$$\varphi(x) = \psi[z(x)] + \xi$$

в некоторой окрестности нуля при подходящей константе ξ.

✓ Естественный вопрос: в каком случае и по каким признакам можно гарантировать эквивалентность в нуле функции $\varphi(x)$ и ее k-струи $j^k\varphi(x)$? Иначе говоря, какие свойства полинома $j^k\varphi(x)$ обеспечивают эквивалентность $j^k\varphi(x)$ и $j^k\varphi(x) + q(x)$ при любой функции $q(x)$, разложение которой начинается со степени $m > k$? При положительном ответе на этот вопрос функцию $\varphi(x)$ называют *k-определенной* в нуле.

По первому впечатлению условия *k-определенности* не должны быть очень сложными, по крайней мере идейно. На такую волну настраивает ситуация с невырожденным гессианом. Однако сложность проблемы оказывается несоизмерима с ожиданиями. Пробные попытки довольно быстро заводят в тупик.

Теорема 6.4.1. *Если функция $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является k-определенной, то любой однородный многочлен степени $k+1$ представим в виде*

$$j^{k+1}\left[p_1(x)j^{k-1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)\right] + \ldots + j^{k+1}\left[p_n(x)j^{k-1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)\right],$$

где $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ — полиномы, порядка не менее первого.

✓ *Трансверсальность* — соответствует понятию *ситуации общего положения* при пересечении многообразий. Два подпространства X и Y в $\mathbb{R}^n$ *трансверсальны*, если любой вектор $z \in \mathbb{R}^n$ представи́м в виде

$$z = x + y, \quad x \in X, \quad y \in Y.$$

Гиперплоскости (сдвинутые подпространства) $L, M \subset \mathbb{R}^n$ *трансверсальны*, если их сумма порождает $\mathbb{R}^n$.

Наконец, *гладкие многообразия* в $\mathbb{R}^n$ пересекаются *трансверсально* в точке x_0, если их касательные гиперплоскости в x_0 трансверсальны. О *трансверсальности многообразий* «целиком» говорят в том случае, когда в любой точке пересечения они пересекаются трансверсально.

Таким образом, трансверсальность пересечения многообразий, графиков — есть некий эквивалент *типичности*, отсутствия исключительности, который оказывается лакмусовой бумажкой при выяснении структурной устойчивости. Невырожденность нулевой критической точки $\varphi(x)$ равносильна трансверсальности пересечения в нуле графика градиента $\nabla\varphi(x)$ с графиком нулевой функции. Аналогичным образом характеризуются (как структурно устойчивые) *k-определенные* функции.

✓ **Определение 6.6.1.** *Семейства функций* $\varphi(x, s)$, $\psi(x, s)$, *т. е.*

$$\varphi, \psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R},$$

эквивалентны в нуле, если

$$\varphi(x, s) = \psi[z(x, s), t(s)] + \xi(s),$$

где $\xi(s)$ *— гладкое отображение,* $t(s)$ *— диффеоморфизм,* $z(x, s)$ *— семейство диффеоморфизмов.*

Если $\varphi(x, s)$ эквивалентно в указанном смысле любому $\varphi(x, s) + \Delta\varphi(x, s)$, где $\Delta\varphi(x, s)$ — достаточно мало, то $\varphi(x, s)$ считается *структурно устойчивым семейством.*

✓ При двух параметрах есть всего два структурно устойчивых семейства, *катастрофа сборки* и *катастрофа складки*. При большем числе параметров количество структурно устойчивых эталонных семейств увеличивается.

12.7. Вариационное исчисление

✓ Вариационная *задача с закрепленными концами* состоит в поиске экстремали функционала

$$W = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t)\, dt \tag{12.7}$$

на множестве гладких функций $q(t)$, принимающих на концах заданного промежутка $[t_0, t_1]$ фиксированные значения $q(t_0)$ и $q(t_1)$.

✓ Производная Фреше $\varphi'(x)$ функционала $\varphi : E \to \mathbb{R}$ — это такой вектор из E^*, что

$$\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = \langle \varphi'(x), \Delta x \rangle + o(\|\Delta x\|), \tag{12.8}$$

который называют *градиентом Фреше* функционала $\varphi(x)$ в точке x и обозначают как $\nabla\varphi(x)$. Линейную часть равенства (12.8),

$$\delta\varphi = \varphi(x + \delta x) - \varphi(x) = \langle \varphi'(x), \delta x \rangle,$$

называют *вариацией.*

✓ Функционал $\varphi : E \to \mathbb{R}$ называется *дифференцируемым по Гато* в точке x, если существует такой линейный ограниченный функционал $f \in E^*$, именуемый *градиентом Гато*, что для любого $h \in E$

$$\varphi(x + th) - \varphi(x) = t\langle f, h \rangle + o(t).$$

✓ **Лемма 7.2.1.** *Необходимым условием достижения функционалом $\varphi(x)$ в точке x_0 локального максимума или минимума является обращение в нуль градиента $\nabla\varphi(x_0)$, «равносильно» — вариации $\delta\varphi(x_0)$.*

✓ Экстремаль обязана удовлетворять *уравнениям Эйлера*,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

✓ Если система автономна, L не зависит от t, — уравнение Эйлера имеет первый интеграл

$$L - \left\langle \dot{q}, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right\rangle = \text{const}.$$

✓ Необходимые условия экстремума второго порядка: *условие Лежандра*

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \geqslant 0,$$

условие Вейерштрасса,

$$E(q, \dot{q}, p, t) \geqslant 0,$$

где

$$E(q, \dot{q}, p, t) = L(q, \dot{q}, t) - L(q, p, t) - \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}}(\dot{q} - p),$$

а также *условия Вейерштрасса—Эрдмана*, требующие непрерывности производных

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad \text{и} \quad L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}$$

в точках излома экстремалей.

✓ Необходимое *условие Вейерштрасса* превращается в *достаточное* при дополнительной оговорке о принадлежности экстремали *собственному* или *центральному* полю экстремалей, что обеспечивается *усиленным условием Лежандра*:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} > 0.$$

✓ При поиске экстремали функционала (12.7) граничные условия, одно или оба, могут быть освобождены. Уравнения Эйлера обязаны выполняться, как и прежде. Дополнительные требования (*трансверсальности*) получаются варьированием граничных условий.

✓ Если свободен один конец (t_1, q_1), $q_1 = q(t_1)$, — *условия трансверсальности*:

$$\left(L - \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\bigg|_{t=t_1} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\bigg|_{t=t_1} = 0.$$

Если граничная точка (t_1, q_1) обязана лежать на некоторой кривой $q_1 = f(t_1)$, — *условие трансверсальности* приобретает вид:

$$\left(L + (\dot{f} - \dot{q})\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\Bigg|_{t=t_1} = 0.$$

✓ ***Изопериметрическими задачами*** называют задачи на условный экстремум

$$\int_{t_0}^{t_1} S(q, \dot{q}, t)\,dt \to \max, \qquad \int_{t_0}^{t_1} P(q, \dot{q}, t)\,dt = l.$$

Технология решения — та же самая, что и в конечномерном случае. Переход к поиску стационарной точки *лагранжиана*

$$\mathrm{L}(q, \lambda) = \int_{t_0}^{t_1} S(q, \dot{q}, t)\,dt + \lambda\left\{\int_{t_0}^{t_1} P(q, \dot{q}, t)\,dt - l\right\}$$

сводит задачу к решению уравнения Эйлера с функцией

$$L(q, \dot{q}, \lambda) = S(q, \dot{q}, t) + \lambda P(q, \dot{q}, t).$$

✓ Задача оптимального управления,

$$S = \int_0^T F(x, u, t)\,dt \to \max, \qquad \dot{x} = f(x, u, t), \tag{12.9}$$

выглядит иначе чем — изопериметрическая, но это такая же по духу проблема поиска условного экстремума.

Максимизация лагранжиана данной задачи

$$L(x, u, \lambda) = \int_0^T \left\{F(x, u, t) + \lambda(t)[f(x, u, t) - \dot{x}]\right\} dt$$

по x и u приводит к уравнениям Эйлера,

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \lambda\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} - \lambda\right] = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} + \lambda\frac{\partial f}{\partial u} = 0,$$

которые необходимо решать совместно с ограничениями $\dot{x} = f(x, u, t)$, $x(0) = 0$, что можно интерпретировать как $\nabla_\lambda L = 0$.

✓ Уравнения Эйлера для задачи (12.9) с помощью *гамильтониана*

$$H(x, u, y, t) = F(x, u, t) + yf(x, u, t)$$

могут быть записаны в форме:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{\partial H}{\partial u} = 0.$$

Условие $\partial H/\partial u = 0$ служит прообразом *принципа максимума*

$$H(x, u, y, t) = \max_{v} H(x, v, y, t).$$

12.8. Задачи оптимального управления

✓ Стандартная задача: поиск управления $u(t)$ на отрезке $[0, T]$, которое обеспечивает максимум одной координаты, например $x_1(T)$, при движении

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(0) = 0, \quad u \in U. \tag{12.10}$$

Остальные $x_j(T)$ могут быть закреплены либо свободны, полностью или частично.

Недостаточная общность постановки здесь обманчива. Наличие интегрального критерия, скажем,

$$\int_0^T F(x, u, t)\, dt \to \max,$$

ликвидируется введением дополнительной переменной x_{n+1}, удовлетворяющей дифференциальному уравнению $\dot{x}_{n+1} = F(x, \dot{x}, t)$, и тогда интегральный критерий сводится к $x_{n+1} \to \max$.

В те же рамки легко помещаются и другие задачи, например максимизация функционала $G[x(T)]$. Минимизация $x_{n+1}(T)$ в случае присоединения к (12.10) уравнения $\dot{x}_{n+1} = 1$ равносильна *задаче о быстродействии*.

✓ Оптимальное управление определяется системой уравнений

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad H(x, u, y, t) = \max_{v} H(x, v, y, t),$$

которую необходимо решать совместно с теми или иными граничными условиями, вытекающими из постановки задачи. Гамильтониан определяется как обычно:

$$H(x, u, y, t) = F(x, u, t) + yf(x, u, t).$$

✓ Принцип максимума дает, вообще говоря, лишь необходимые условия оптимума, как и уравнения Эйлера в вариационном исчислении, но для линейных систем он превращается в *необходимое и достаточное условие*, с некоторыми оговорками.

✓ *Динамическое программирование* строится на простом соображении: «часть экстремали — сама является экстремалью», — из которого, для функционала (12.9) на экстремали, выводится *уравнение Беллмана*:

$$\frac{\partial S^*}{\partial t} + \max_{u(t)} \left\{ \left\langle \frac{\partial S^*}{\partial x}, f(x, u, t) \right\rangle + S(x, u, t) \right\} = 0,$$

т. е.

$$\frac{\partial S^*}{\partial t} + H\left(x, \frac{\partial S^*}{\partial x}, t\right) = 0.$$

✓ Динамическое программирование эффективно для некоторых задач управления с дискретным временем вида

$$G(x^{n+1}) \to \max, \quad x^{k+1} = f(x^k, u^k, k),$$

$$x^0 = 0, \quad u^k \in U, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Для этой задачи дискретный аналог *уравнения Беллмана*:

$$G_k(x^k) = \max_{u_k} G_{k+1}[f(x^k, u^k, k)].$$

12.9. Негладкая оптимизация

✓ Негладкость часто возникает в глубине задачи, и тогда от нее нелегко избавиться. Например, если матрица $A(x)$ гладко зависит от параметра x, то спектральный радиус $\rho(x) = \rho[A(x)]$ таким свойством не обладает, и минимизация

$$\rho(x) \to \min, \quad x \in X,$$

в классическую теорию не помещается.

Функция

$$\varphi(x) = \min_y \psi(x, y)$$

непрерывна, но никакая гладкость $\psi(x, y)$ в общем случае не обеспечивает гладкость $\varphi(x)$.

✓ В отсутствие выпуклости не сразу ясно, чем заменить субдифференциал. Выход из положения дает *субдифференциал Кларка*. Определение опирается на новое понятие *производной по направлению* $\varphi'_s(x)$ для *липшицевой* функции $\varphi(x)$,

$$\varphi'_s(x) = \limsup_{z \to x,\, \theta \downarrow 0} \frac{\varphi(z + \theta s) - \varphi(z)}{\theta}.$$

Функция $\varphi'_s(x)$ выпукла и положительно однородна по s, независимо от выпуклости $\varphi(x)$.

Субдифференциал Кларка функции $\varphi(x)$ в точке x определяется как множество

$$\partial\varphi(x) = \left\{h \in \mathbb{R}^n : \forall\, s \in \mathbb{R}^n : \varphi'_s(x) \geqslant \langle s, h\rangle\right\},$$

которое в случае выпуклой функции совпадает с обычным субдифференциалом.

12.10. Градиентные методы

✓ При безусловной оптимизации функционала $\varphi(x)$ естественно двигаться по градиенту, чтобы найти максимум, либо против градиента, если ищется минимум, т. е.

$$\dot{x} = \nabla\varphi(x) \quad \text{или} \quad \dot{x} = -\nabla\varphi(x).$$

Не менее естественно в задачах оптимизации рассматривать движение материальной точки единичной массы $\ddot{x} = -\nabla\varphi(x)$ под действием сил

$$Q_i = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}.$$

Минимуму потенциальной энергии $\varphi(x)$ отвечает опять-таки равенство обобщенных сил нулю, $-\nabla\varphi(x) = 0$. Для погашения колебаний достаточно ввести трение, что порождает решающую процедуру

$$\ddot{x} = -\nabla\varphi(x) - \beta\dot{x},$$

которую принято называть *методом тяжелого шарика*.

✓ В дискретном случае вместо $\dot{x} = -\nabla\varphi(x)$ для вычислений используется

$$x_{k+1} = x_k - \gamma_k\nabla\varphi(x_k).$$

Движение по-прежнему осуществляется в направлении минус градиента, но ситуация иная. Теперь каждый раз необходимо принимать решение о величине шага, которую регулируют коэффициенты γ_k, и на их выборе концентрируется «вся наука». В *методе наискорейшего спуска* шаг выбирается из решения задачи

$$\min_{\xi}\varphi\bigl(x_k + \xi\nabla\varphi(x_k)\bigr) = \varphi(x_{k+1}).$$

Часто полагаются на требования

$$\sum_k^{\infty}\gamma_k^2 < \infty, \quad \sum_k^{\infty}\gamma_k = \infty,$$

которые в естественных предположениях обеспечивают сходимость.

Метод Ньютона—Канторовича приводит к итерационной процедуре

$$x_{k+1} = x_k - [\nabla^2\varphi(x_k)]^{-1}\nabla\varphi(x_k).$$

Это довольно эффективный вычислительный процесс, более целесообразный, чем простое движение по градиенту.

✓ *Метод сопряженных градиентов* опирается на минимизацию *положительно определенной* квадратичной формы

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\langle Qx, x\rangle - \langle c, x\rangle. \tag{12.11}$$

Наличие комплекта Q-сопряженных векторов $\{f_1, \ldots, f_n\}$, $\langle Qf_i, f_j\rangle = 0$, позволяет решить задачу минимизации квадратичной формы (12.11) за n шагов. Алгоритм следующий. Из любого начального положения x_0 ищется минимум $\varphi(x)$ в направлении f_1, т. е. решается задача

$$\min_{\xi} \varphi(x_0 + \xi f_1) = \varphi(x_1),$$

в результате чего определяется следующее приближение x_1. Затем из x_1 ищется минимум $\varphi(x)$ в направлении f_2, и так n раз.

Если речь идет о минимизации квадратичной формы, такой процесс, называемый *методом сопряженных градиентов*, сходится за конечное число шагов, но его можно применять и для функций $\varphi(x)$ более общего вида. Конечно, в общем случае рассчитывать на конечную сходимость алгоритма нельзя, но в малой окрестности минимума $\varphi(x)$ обычно хорошо приближается гессианом, и это дает основание ожидать тех же результатов с точностью до «о-малых».

12.11. Задачи большой размерности

✓ *Смысловые неточности* моделирования при больших размерностях накапливаются, и сами постановки оптимизационных задач перестают отражать суть дела. Возникает парадокс: чем больше учтено факторов, тем хуже становится модель. Большое число переменных свидетельствует о том, что в задаче не поймано и не выделено главное.

Выход из подобного положения требует изменения подхода. Отказ от детальной информации выглядит неизбежным, но это отнюдь не «сдача позиций». Приближенные ответы в естественных условиях оказываются довольно точны и практически не зависят от «подробностей». Пример статистической физики — тому подтверждение. Удивительно лишь то, что для приемлемого агрегированного описания системы «термодинамические размерности» порядка числа Авогадро не требуются.

✓ Последовательность функций $f_n(x)$ называется *асимптотически постоянной*, если

$$\sigma\{f_n(x)\} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

где $\sigma\{f_n(x)\}$ — среднеквадратическое уклонение $f_n(x)$ от своего среднего значения.

✓ **Теорема 11.1.1.** *Пусть последовательность функций $f_n(x)$ удовлетворяет неравенствам*

$$\int\limits_{C^n} [\nabla f_n(x)]^2 \, dx_1 \ldots dx_n \leqslant \gamma_n$$

и $\gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда $\sigma\{f_n\} \to 0$, т. е. последовательность функций $f_n(x)$ асимптотически постоянна на кубе $C_n = [0, 1] \times \ldots \times [0, 1]$.

✓ Феномен стабилизации нелинейных функций при больших размерностях существенно влияет на понимание и трактовку задач оптимизации. Упрощенно говоря, теоремы о стабилизации дают гарантию, что почти все выбранные наугад решения примерно одинаковы по качеству, а окрестность оптимума, в которой $f_n(x)$ ощутимо превышает среднее значение, весьма мала, — и туда очень трудно попасть. Более того, «наличие оптимума в руках» практически ничего не дает, потому что малейшие ошибки вычисления и реализации выбивают значения целевой функции в область средних значений.

На практике ситуацию чаще определяют несколько агрегатов. На формальном уровне это приводит к замене функций

$$f_n(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n; z_1, \ldots, z_n)$$

приближенными функциональными зависимостями от агрегатов

$$f_n(\cdot) \approx \varphi(X, Y, Z).$$

Сокращения и обозначения

◄ и ►
— начало и конец рассуждения, темы, доказательства

(?) — предлагает проверить или доказать утверждение в качестве упражнения, либо довести рассуждение до «логической точки», — но не является вопросом «правильно или неправильно?»

(!) — предлагает обратить внимание

«в томм случае» — «в том и только том случае»

$A \Rightarrow B$ — из A следует B

$x \in X$ — x принадлежит X

$X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \backslash Y$ — объединение, пересечение и разность множеств X и Y

$X \Delta Y = (X \backslash Y) \cup (Y \backslash X)$ — симметрическая разность множеств X и Y

$X \subset Y$ — X подмножество Y, в том числе имеется в виду возможность $X \subsetneqq Y$, т.е. между $X \subset Y$ и $X \subsetneqq Y$ различия не делается

$\overline{X}$ — замыкание X

$\check{X}$ — граница X

$Z = X + Y$ — множество элементов $z = x + y$, где $x \in X$, $y \in Y$

$\chi_A(x)$ — функция-индикатор множества A (равна 1 для $x \in A$ и 0 в противном случае)

2^X — множество всех подмножеств множества X

$\varnothing$ — пустое множество

$B(r, x)$ — шар радиуса r с центром в точке x

$B_r = \{x : \|x\| < r\}$ — шар радиуса r с центром в нуле

$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ — вещественная прямая

$\dim E$ — размерность пространства E

$z = x + iy$ — комплексное число, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ — его тригонометрическая запись, $x = \operatorname{Re} z$ — действительная часть, $y = \operatorname{Im} z$ — мнимая; $\overline{z} = z^* = x - iy$ — комплексно сопряженное число.

$x \leqslant y$ — векторное неравенство: все координаты $x_i \leqslant y_i$

$\langle x, y\rangle$ — скалярное произведение векторов x и y, эквивалентные обозначения: xy, $x \cdot y$

$\rho(A)$ — спектральный радиус оператора A

$\operatorname{co} X$ — выпуклая оболочка множества X

K_+ — конус неотрицательных функций

$\mathbb{R}^n_+$ — неотрицательный ортант

$\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство

$\operatorname{Arg}\min\varphi(x)$ — положение минимума функции $\varphi(x)$

$\nabla f(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x} = \left\{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right\}$ — градиент функции $f(x)$

$\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y}$ — матрица Гессе $\left[\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial y_j}\right]$ функции $\varphi(x, y)$

$\partial\varphi(x)$ — субдифференциал функции φ в точке x

Литература

1. *Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.* Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. М.: Наука, 1982.
2. *Ашманов С. А., Тимохов А. В.* Теория оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1991.
3. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: ИЛ, 1960.
4. *Болтянский В. Г.* Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969.
5. *Босс В.* Интуиция и математика. М.: Айрис-Пресс, 2003.
6. *Босс В.* Лекции по математике. Т. 1. Анализ; Т. 2. Дифференциальные уравнения; Т. 3. Линейная алгебра; Т. 4. Вероятность, информация, статистика; Т. 5. Функциональный анализ; Т. 6. От Диофанта до Тьюринга. М.: URSS, 2004–2006.
7. *Брекер Т., Ландер Л.* Дифференцируемые ростки и катастрофы. М.: Мир, 1977.
8. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961.
9. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
10. *Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В.* Теорема Хелли и ее применения. М.: Мир, 1968.
11. *Демьянов В. Ф., Васильев Л. В.* Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981.
12. *Емельянов С. В., Коровин С. К., Бобылев Н. А., Булатов А. В.* Гомотопии экстремальных задач. М.: Наука, 2001.
13. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
14. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.
15. Линейные неравенства и смежные вопросы. Сб. статей / Под ред. Г. У. Куна и А. У. Таккера. М.: ИЛ, 1959.
16. *Милнор Дж.* Теория Морса. М.: Мир, 1965.
17. *Опойцев В. И.* Нелинейная системостатика. М.: Наука, 1986.
18. *Поляк Б. Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.

19. *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980.

20. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

21. *Эльсгольц Л. Э.* Вариационное исчисление. М.: КомКнига/URSS, 2006. 2002.

Предметный указатель

URSS.ru URSS.ru URSS.ru URSS.ru