ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Գ. Գ. Գևորգյան Լ. Հ. Գալստյան Ա. Կ. Թալալյան
Գ. Վ. Միքայելյան Կ. Ա. Նավասարդյան

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶԻ ԽՆԴՐԱԳԻՐՔ

Առաջին մաս

Չորրորդ լրամշակված
հրատարակություն

Երևան
ԵՊՀ հրատարակչություն
2014

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Գ. Գ. Գևորգյան Լ. Հ. Գալստյան Ա. Կ. Թալալյան
Գ. Վ. Միքայելյան Կ. Ա. Նավասարդյան

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶԻ ԽՆԴՐԱԳԻՐՔ

Առաջին մաս

Չորրորդ լրամշակված
հրատարակություն

Երևան
ԵՊՀ հրատարակչություն
2014

Երաշխավորված է ՀՀ ԿԳ նախարարության կողմից
որպես բուհերի ուսումնական ձեռնարկ

ՀՏԴ 517(076.1)
ԳՄԴ 22.161 ց7
Մ 151

Մ 151 Մաթեմատիկական անալիզի խնդրագիրք/ Գ. Գ. Գևորգյան, Լ. Հ. Գալստյան, Ա. Կ. Թասլաքյան, Գ. Վ. Միքայելյան, Կ. Ա. Նավասարդյան.- 4-րդ լրամշ. հրատ. -Եր.: ԵՊՀ հրատ., 2014. Մաս 1.- 266 էջ:

Ուսումնական ձեռնարկը նախատեսված է բուհերի ֆիզիկամաթեմատիկական և բնագիտական ֆակուլտետների համար:

ՀՏԴ 517(076.1)
ԳՄԴ 22.161 ց7

ISBN 978-5-8084-1833-2

Չորրորդ հրատարակության նախաբան

Այս հրատարակությունը պարունակում է նախորդ հրատարակությունների՝ ըստ էության բոլոր խնդիրներն ու վարժությունները:

Որոշ բաժինների Ա խմբերը լրացվել են մեթոդական առումով կարևոր նոր վարժություններով: Նույն նկատառումով կատարվել են մի շարք վարժությունների և խնդիրների վերադասավորում, ձևակերպումների փոփոխություններ և շտկումներ: Ինչ-որ չափով թարմացվել է խնդիրներին նախորդող տեսական նյութը:

Լսարանում աշխատելու ընթացքում տեքստերում և պատասխաններում նկատվել են որոշ անճշտություններ և վրիպակներ, որոնց ուղղումները մեզ ներկայացրել են ամբիոնի աշխատակիցներ Ա. Մ. Հակոբյանը, Մ. Ս. Մարտիրոսյանը և Մ. Պ. Պողոսյանը: Նրանց հայտնում ենք մեր անկեղծ երախտագիտությունը:

Երևան, 2014թ. Հեղինակներ

Առաջին հրատարակության նախաբան

Ընթերցողի ուշադրությանը ներկայացվող «Մաթեմատիկական անալիզի խնդրագիրքը» հայերենով համապարփակ և ծավալուն ժողովածուի հրատարակման առաջին փորձն է: Այն ընդգրկում է համալսարանների առաջին և երկրորդ կուրսերի ծրագրով նախատեսված մաթեմատիկական անալիզի գրեթե բոլոր բաժինները:

Խնդրագիրքը լույս է տեսնում երկու հատորով: Առաջին հատորը նվիրված է թվային հաջորդականություններին ու մեկ փոփոխականի իրականարժեք ֆունկցիաների դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշվին: Երկրորդ հատորում շարադրվում են խնդիրներ և վարժություններ՝ շարքերի (այդ թվում աստիճանային և Ֆուրիեի շարքերի), անվերջ արտադրյալների, պարամետրից կախված ինտեգրալների, շատ փոփոխականի ֆունկցիաների դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշվի ու Ստիլտեսի ինտեգրալի վերաբերյալ:

Խնդրագրքում անալիզի յուրաքանչյուր ամբողջական բաժին ներկայացված է առանձին գլխով, որն սկսվում է անհրաժեշտ տեսական նյութի սեղմ շարադրանքով: Յուրաքանչյուր գլուխ տրոհված է հիմնականում ըստ խնդիրների բարդության, Ա, Բ և Գ խմբերի: Ա խմբի վարժությունների զգալի մասը վերցված է Բ.Պ. Դեմիդովիչի «Сборник задач и упражнений по математическому анализу» դասական ժողովածուից: Ուսումնական գործընթացում դրանց օգտակարությունը հաստատված է տասնամյակների փորձով: Նույն այդ խնդրագրքի որոշ խնդիրներ, որոնք տեղ են գտել նաև Բ և Գ խմբերում, մեր կողմից շակվել են, վերստին համակարգվել, լրացվել են անհրաժեշտ ընդհանրացումներով և հակադարձ խնդիրներով: Գ խմբի խնդիրներից շատերը հետազոտական բնույթի են և դրանց հաղթահարումը երբեմն մեծ հմտություն է պահանջում: Այդ խնդիրներն ընտրված են Գ. Պոլիայի և Գ. Սեգյոյի «Задачи и теоремы из анализа» հայտնի խնդրագրքից, միջազգային ուսանողական մաթեմատիկական տարբեր օլիմպիադաների առաջադրանքներից, ինչպես նաև մի շարք այլ հայտնի աղբյուրներից, որոնց ցուցակը բերված է երկրորդ հատորի վերջում:

Նշենք, որ Գ խմբի խնդիրները հիմնականում նախատեսված են ֆիզիկամաթեմատիկական ֆակուլտետներում կազմակերպվող արտալսարանային պարապմունքների կամ ուսանողների ինքնուրույն աշխատանքի համար:

Վերջին տարիներին տեսաբազմական, տոպոլոգիական և հանրահաշվական տարրեր հասկացությունների բուռն ներթափանցումը մաթեմատիկական անալիզ մի շարք սահմանումների և թեորեմների նոր, արդիական շունչ է հաղորդել: Մենք փորձել ենք, իհարկե խուսափելով ավելորդ ծայրահեղություններից, թե՛ տեսական նյութի և թե՛ խնդիրների շարադրանքում հետևել ժամանակակից ոճին: Մասնավորապես, ֆունկցիայի անընդհատության, դիֆերենցիալի այստեղ բերված սահմանումները տարբերվում են Գ. Մ. Ֆիխտենգոլցի «Դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշվի դասընթացում» տրված սահմանումներից: Հրաժարվել ենք մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի բարձր կարգի դիֆերենցիալների անպտուղ գաղափարից: Երկրորդ հատորում, սահմանելով հաշվելի բազմության և զրո չափի բազմության գաղափարները, հնարավորություն ենք ստացել շարադրելու բազմաթիվ խնդիրներ, որոնք առաջին և երկրորդ կուրսերում ավանդաբար օգտագործվող խնդրագրքերում երբևէ չեն ընդգրկվել:

Խնդիրների և վարժությունների դասակարգման լայն սպեկտրը հնարավորություն է տալիս խնդրագիրքն օգտագործել ոչ միայն ֆիզիկամաթեմատիկական ֆակուլտետներում, այլև տեխնիկական բուհերում և բնագիտական այն ֆակուլտետներում, որտեղ դասավանդվում է *մաթեմատիկական անալիզ* առարկան:

Գրքի ձեռագիրն ընթերցվել և քննարկվել է Երևանի պետական համալսարանի մաթեմատիկական անալիզի, կիրառական անալիզի, ֆիզիկայի ֆակուլտետի բարձրագույն մաթեմատիկայի և ռադիոֆիզիկայի ֆակուլտետի բարձրագույն մաթեմատիկայի ամբիոններում: Առանձնապես օգտակար են եղել Ռ. Ա. Ավետիսյանի, Ռ. Ս. Դավթյանի, Ս. Ա. Հակոբյանի և Լ. Վ. Միքայելյանի դիտողություններն ու առաջարկությունները: Մենք մեր անկեղծ երախտագիտությունն ենք հայտնում ոչ միայն նրանց, այլև մեր բոլոր այն գործընկերներին, որոնց բարեկամական աջակցությունն էապես նպաստել է գրքի լույս ընծայմանը:

Երևան, 1998թ. Հեղինակներ

Գլուխ 1

Թվային բազմություններ, տարրական ֆունկցիաներ

Բազմությունները հիմնականում նշանակվում են լատիներենի մեծատառերով: Այն փաստը, որ a-ն A բազմության տարր է, գրվում է $a \in A$ (a-ն պատկանում է A-ին) տեսքով: Նույն փաստի բացասման համար օգտագործվում է $a \notin A$ ձևը:

Եթե A բազմության յուրաքանչյուր տարրը պատկանում է նաև B բազմությանը, ապա A-ն անվանում են B-ի *ենթաբազմություն* և գրում՝ $A \subset B$ կամ $B \supset A$ (A-ն ընկած է B-ի մեջ, A-ն պարունակվում է B-ում կամ B-ն պարունակում է A-ն):

Տեսաբազմական գործողություններ: A և B բազմությունների *միավորումը* $(A \cup B)$ բազմություն է, որը կազմված է այն տարրերից, որոնք պատկանում են A և B բազմություններից գոնե մեկին: A և B բազմությունների *հատումը* $(A \cap B)$ բազմություն է, որը կազմված է այն տարրերից, որոնք պատկանում են թե՛ A-ին և թե՛ B-ին: A և B բազմությունների *տարբերությունը* $(A \setminus B)$ կազմված է A-ի այն տարրերից, որոնք չեն պատկանում B-ին: Ոչ մի տարր չպարունակող բազմությունը կոչվում է *դատարկ բազմություն* և նշանակվում՝ $\varnothing$:

Բազմությունը, որի տարրերը բազմություններ են, կանվանենք *ընտանիք*: α ընտանիքի *միավորումը*՝ $\bigcup\alpha$-ն, այն տարրերի բազմություն է, որոնք պատկանում են α ընտանիքի բազմություններից առնվազն մեկին: α ընտանիքի *հատումը*՝ $\bigcap\alpha$-ն, այն տարրերի բազմությունն է, որոնք պատկանում են α ընտանիքի բազմություններից յուրաքանչյուրին:

Մաթեմատիկական տեքստերում հանդիպող "ցանկացած" և "գոյություն ունի" արտահայտությունների փոխարեն հաճախ օգտագործվում են համապատասխանաբար $\forall$ և $\exists$ նշանները: Օրինակ, $\forall x \in A \ \exists y \in B \left(x + y = 1\right)$ արտահայտությունը կարդացվում է՝ A բազմությանը պատկանող ցանկացած x տարրի համար գոյություն ունի B-ին պատկանող y տարր, այնպիսին, որ ճշմարիտ է $x + y = 1$ հավասարությունը:

A բազմության այն տարրերի ենթաբազմությունը, որոնք բավարարում են P պայմանին, նշանակվում է՝ $\{x \in A : P\}$: Մասնավորապես, $\{x \in A : x > 0\}$-ն A-ին պատկանող դրական թվերի բազմությունն է, իսկ $\{x \in A : x \notin B\}$-ն վերը սահմանված $A \setminus B$ բազմությունն է:

Եթե α ընտանիքի բազմությունները ինդեքսավորված են, օրինակ $\alpha = \{A_n : n \in N\}$, ապա $\bigcup\alpha$-ի և $\bigcap\alpha$-ի համար օգտագործվում են նաև $\bigcup\limits_{n \in N} A_n$ և $\bigcap\limits_{n \in N} A_n$ նշանակումները:

Ստորև շարադրվելիք խնդիրներում և վարժություններում հանդիպում են բազմությունների նշանակման այլ, ավելի կրճատ ձևեր: Օրինակ, $\{m \in N : \exists k \in N (m = 4k)\}$ բազմության համար հավասարապես օգտագործվում են ինչպես $\{4k\}_{k \in N}$, այնպես էլ $\{4k : k \in N\}$ նշանակումները: Եթե բազմությունը վերջավոր է (կազմված է վերջավոր թվով տարրերից), ապա այն կարող է ներկայացվել ձևավոր փակագծերով, որոնց ներսում մեկ առ մեկ, ստորակետերով անջատված, նշված են այդ բազմության բոլոր տարրերը: Մասնավորապես, $\{a\}$-ն միայն a տարրից կազմված բազմությունն է:

Թ վ ա յ ի ն բ ա զ մ ո ւ թ յ ո ւ ն ն ե ր ի օ ր ի ն ա կ ն ե ր : Բազմությունը, որի տարրերը թվեր են, կոչվում է թվային բազմություն: Մաթեմատիկական անալիզում առավել հաճախ հանդիպող թվային բազմություններից են՝

$R=(-\infty;+\infty)$ (*իրական թվեր*):

$N=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$ (*բնական թվեր*);

$Z=\{0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm n,\cdots\}$ (*ամբողջ թվեր*);

$Q=\left\{\dfrac{p}{q}:p\in Z,q\in N\right\}$ (*ռացիոնալ թվեր*);

$I=R\setminus Q$ (*իռացիոնալ թվեր*);

$[a;b]=\{x\in R:a\le x\le b\}$ (*փակ միջակայք* կամ *հատված*);

$(a;b)=\{x\in R:a<x<b\}$ (*միջակայք* կամ *բաց միջակայք*);

$$\left.\begin{array}{l}[a;b)=\{x\in R:a\le x<b\}\\ (a;b]=\{x\in R:a<x\le b\}\end{array}\right\}$$ (*կիսաբաց* կամ *կիսափակ միջակայքեր*);

$$\left.\begin{array}{l}(a;+\infty)=\{x\in R:x>a\}\\ [a;+\infty)=\{x\in R:x\ge a\}\\ (-\infty;a)=\{x\in R:x<a\}\\ (-\infty;a]=\{x\in R:x\le a\}\end{array}\right\}$$ *անվերջ բաց, փակ միջակայքեր* կամ *ճառագայթներ*.

Ցանկացած $A\subset R$ բազմության համար կնշանակենք.

$A_-=\{x\in A:x\le 0\}$, $A_+=\{x\in A:x\ge 0\}$:

$A\subset R$ բազմության համար $R\setminus A$ բազմությունը կոչվում է A-ի *լրացում* և նշանակվում՝ A^c :

Թ վ ա յ ի ն բ ա զ մ ո ւ թ յ ո ւ ն ն ե ր ի հ ա ն ր ա հ ա շ վ ա կ ա ն գ ու մ ա ր և ա ր տ ա դ ր յ ա լ : A և B բազմությունների *հանրահաշվական գումարը* ($A+B$) և *արտադրյալը* ($A\cdot B$) սահմանվում են հետևյալ ձևով.

$A+B=\{a+b:a\in A,\ b\in B\}$, $A\cdot B=\{ab:a\in A,\ b\in B\}$:

Եթե $A=\{a\}$, ապա $\{a\}\cdot B$ գրելու փոխարեն գրում են aB: Ընդունված են նաև հետևյալ նշանակումները. $a+A=\{a\}+A$, $-A=(-1)\cdot A$, $A-B=A+(-B)$:

Դ ե կ ա ր տ յ ա ն ա ր տ ա դ ր յ ա լ : Կամայական a և b թվերի համար (a,b) զույգն անվանում են *կարգավորված զույգ*, նկատի ունենալով, որ եթե $a\ne b$, ապա $(a,b)\ne(b,a)$:

$A\times B=\{(a,b):a\in A,b\in B\}$ կարգավորված զույգերի բազմությունը կոչվում է A և B բազմությունների *դեկարտյան արտադրյալ*: Ցանկացած $P\subset A\times B$ ենթաբազմության համար

$P_A=\{a\in A:\exists b\in B\,((a,b)\in P)\}$ և $P_B=\{b\in B:\exists a\in A\,((a,b)\in P)\}$

բազմությունները կոչվում են P բազմության պրոյեկցիաներ համապատասխանաբար A-ի և B-ի վրա: Մասնավորապես՝ $(A\times B)_A=A$, $(A\times B)_B=B$:

Դեկարտյան արտադրյալի օրինակ է դեկարտյան հարթությունը: Այն իրենից ներկայացնում է Ox և Oy թվային առանցքների դեկարտյան արտադրյալը: Այս դեպքում հարթության յուրաքանչյուր կետ ընդունված կարգով նույնացվում է որոշակի (x,y) կարգավորված թվազույգի հետ, որում x-ը կոչվում է այդ կետի աբսցիս, իսկ y-ը՝ օրդինատ:

$A\times A$-ի փոխարեն հաճախ գրում են A^2: Մասնավորապես, դեկարտյան հարթության համար ընդունված է R^2 նշանակումը, որտեղ R-ը իրական թվերի բազմությունն է:

Սահմանափակ բազմություններ: A թվային բազմությունը կոչվում է *վերևից* (*ներքևից*) սահմանափակ, եթե $\exists M\in R\ \forall x\in A\left(x\le M\right)$ $\left(\exists m\in R\ \forall x\in A\ \left(x\ge m\right)\right)$: Եվ վերևից և ներքևից սահմանափակ բազմությունն անվանում են *սահմանափակ բազմություն*:

Եթե M_0 թիվն այնպիսին է, որ

$$\forall x\in A\left(x\le M_0\right) \text{ և } \forall\varepsilon>0\ \exists x_0\in A\left(x_0>M_0-\varepsilon\right),$$

ապա M_0-ն անվանում են A բազմության *ճշգրիտ վերին եզր* և նշանակում՝ $M_0=\sup A$: Նույն ձևով, եթե գոյություն ունի m_0 թիվ այնպիսին, որ

$$\forall x\in A\left(x\ge m_0\right) \text{ և } \forall\varepsilon>0\ \exists x_0\in A\left(x_0<m_0+\varepsilon\right),$$

ապա այն կոչվում է A բազմության *ճշգրիտ ստորին եզր* և նշանակվում՝ $m_0=\inf A$:

Թեորեմ: Վերևից (ներքևից) սահմանափակ ցանկացած ոչ դատարկ բազմություն ունի ճշգրիտ վերին (ստորին) եզր:

Եթե A-ն սահմանափակ չէ վերևից (ներքևից), ապա պայմանավորվում ենք գրել՝ $\sup A=+\infty$ $\left(\inf A=-\infty\right)$:

Բաց, փակ բազմություններ: Կուտակման կետ: Թվային բազմության տարրերը հաճախ անվանում են կետեր:

Տրված x_0 կետի և $\varepsilon>0$ թվի համար $\left(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon\right)$ միջակայքը կոչվում է x_0-ի ε-*շրջակայք* կամ ուղղակի՝ x_0-ի շրջակայք: Երբեմն $\left(-\infty;a\right)$, $\left(a;+\infty\right)$ և $\left(-\infty;a\right)\cup\left(a;+\infty\right)$ բազմությունները անվանում են համապատասխանաբար $-\infty$-ի, $+\infty$-ի և ∞-ի շրջակայքեր:

A բազմության a կետը կոչվում է այդ բազմության *ներքին կետ*, եթե գոյություն ունի a-ի շրջակայք, որը պատկանում է A-ին: A-ն կոչվում է *բաց բազմություն*, եթե նրա բոլոր կետերը ներքին կետեր են: Բաց բազմության պարզագույն օրինակներ են վերջավոր կամ անվերջ բաց միջակայքերը:

Բազմությունը կոչվում է *փակ*, եթե նրա լրացումը բաց է:

Բազմության լրացման ներքին կետերն այդ բազմության համար կոչվում են *արտաքին կետեր*:

Եթե a կետի ցանկացած շրջակայք պարունակում է կետեր թե՛ A-ից և թե՛ A^c-ից, ապա a-ն անվանում են A բազմության *եզրային կետ*: A բազմության եզրային կետերի բազմությունն անվանում են A-ի *եզր* և նշանակում՝ ∂A:

Եթե $x_0\in R$ կետի ցանկացած շրջակայքում կա x_0-ից տարբեր առնվազն մեկ կետ A-ից, ապա x_0-ն անվանում են A բազմության *սահմանային* կամ *կուտակման կետ*: A բազմության կուտակման կետերի բազմությունը նշանակում են A', իսկ $\overline{A}=A\cup A'$ բազմությունն անվանում են A-ի *փակում*:

$A\setminus A'$ բազմության կետերն անվանում են A բազմության *մեկուսացված կետեր*:

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքը: Բնական թվերի համար որևէ պնդում համարվում է ապացուցված, եթե՝

ա) $n=1$ թվի համար պնդումը ճշմարիտ է;

բ) ենթադրելով, որ պնդումը ճշմարիտ է n-ից փոքր բոլոր բնական թվերի համար, կարելի է ապացուցել, որ այն ճշմարիտ է նաև n-ի համար:

Ընդունված նշանակումներ են՝

$0!=1,\ 1!=1,\ n!=n\cdot\left(n-1\right)!=1\cdot2\cdot\dots\cdot n,\ n\in N$ (n ֆակտորիալ);

$$\left.\begin{array}{l} 2!!=2,\ (2n)!!=2\cdot 4\cdot\dots\cdot 2n,\ n\in N, n>1 \\ 1!!=1,\ (2n+1)!!=1\cdot 3\cdot\dots\cdot(2n+1),\ n\in N \end{array}\right\}$$ (կիսաֆակտորիալներ);

$C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $n,k\in Z_+$, $k\le n$ (զուգորդությունն n-ից k-ական):

Ֆունկցիայի գաղափարը: Դիցուք X-ը և Y-ը ոչ դատարկ բազմություններ են: Եթե X բազմության յուրաքանչյուր x տարրին համապատասխանեցված է Y բազմության որոշակի մեկ y տարր, ապա ասում են, որ տրված է $f: X\to Y$ ֆունկցիա, որի համար X-ը *որոշման տիրույթն* է, իսկ Y-ը՝ *փոփոխման տիրույթը*: Սովորաբար այն միակ y-ը, որը համապատասխանում է $x\in X$ տարրին, նշանակում են $f(x)$: Հաճախ x փոփոխականն անվանում են *արգումենտ*, իսկ $f(x)$-ը՝ x կետում *ֆունկցիայի արժեք*: Ընդունված է նաև $f: X\to Y$ ֆունկցիան անվանել X բազմության *արտապատկերում* Y*-ի մեջ*: $Y_0=\{f(x): x\in X\}$ բազմությունը կոչվում է f ֆունկցիայի *արժեքների բազմություն*: Այդ կապակցությամբ ասում են նաև, որ f-ը X բազմությունն *արտապատկերում է* Y_0*-ի վրա*: Ֆունկցիան, որի արժեքների բազմությունը բաղկացած է միայն մեկ տարրից, կոչվում է *հաստատուն ֆունկցիա*:

Ընդունված նշանակումներ են՝

$f(A)=\{f(x): x\in A\}$ ($A\subset X$ *բազմության պատկեր*);

$f^{-1}(B)=\{x\in X: f(x)\in B\}$ ($B\subset Y$ *բազմության նախապատկեր*):

Ֆունկցիան կոչվում է *փոխմիարժեք* (*հակադարձելի*), եթե որոշման տիրույթի տարբեր կետերում ընդունում է տարբեր արժեքներ: Դիցուք $f: X\to Y$ ֆունկցիան X-ը փոխմիարժեք արտապատկերում է Y-ի վրա: Այդ դեպքում յուրաքանչյուր $y\in Y$ տարրին համապատասխանեցնելով այն միակ x-ը, որի համար $f(x)=y$, ստանում ենք Y-ը X-ի վրա արտապատկերող ֆունկցիա, որը կոչվում է f ֆունկցիայի *հակադարձ ֆունկցիա* և նշանակվում՝ $f^{-1}: Y\to X$:

Տրված $f: X\to Y$ և $g: Y\to Z$ ֆունկցիաների $g\circ f: X\to Z$ վերադրումը (բարդ ֆունկցիան) սահմանվում է հետևյալ բանաձևով. $(g\circ f)(x)=g(f(x))$, $x\in X$:

Իրական փոփոխականի իրականարժեք ֆունկցիաներ: Եթե X-ը և Y-ը թվային բազմություններ են, ապա $f: X\to Y$ ֆունկցիան ընդունված է անվանել *իրական փոփոխականի իրականարժեք ֆունկցիա*:

$f: X\to Y$ ֆունկցիան կոչվում է *աճող* (*չնվազող, նվազող, չաճող*), եթե $x_1, x_2\in X$ և $x_1<x_2$ պայմաններից հետևում է, որ $f(x_1)<f(x_2)$ (համապատասխանաբար՝ $f(x_1)\le f(x_2)$, $f(x_1)>f(x_2)$, $f(x_1)\ge f(x_2)$): Այս չորս տիպի ֆունկցիաները միասին կոչվում են *մոնոտոն ֆունկցիաներ*:

$f: X\to Y$ ֆունկցիան կոչվում է՝

ա) *զույգ ֆունկցիա*, եթե $X=-X$ և $\forall x\in X\ (f(-x)=f(x))$;

բ) *կենտ ֆունկցիա*, եթե $X=-X$ և $\forall x\in X\ (f(-x)=-f(x))$:

$f: X\to R$ ֆունկցիան կոչվում է *պարբերական* (T*-պարբերական*) *ֆունկցիա*, եթե $\exists T\ne 0$ այնպիսին, որ $X+T=X$ և $\forall x\in X\ (f(x+T)=f(x))$: Այդ դեպքում T-ն անվանում են *պարբերություն*:

Դեկարտյան հարթության վրա $\{(x, f(x)) : x \in X\}$ կարգավորված զույգերի բազմությունն անվանում են $f : X \to Y$ ֆունկցիայի *գրաֆիկ*։

Դեկարտյան և բևեռային կոորդինատների կապը։ Եթե (r, φ)-ն և (x, y)-ը միևնույն կետի կոորդինատներն են համապատասխանաբար բևեռային և դեկարտյան կոորդինատների համակարգերում, ապա $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ ։

Ա

1. Գտնել A և B բազմությունների միավորումը.
ա) $A = \{-2, 1, 3, 7\}$, $B = \{0, 1, \sqrt{2}, 7, 9\}$;
բ) $A = [1;4]$, $B = [3;6)$; գ) $A = [2;3)$, $B = [3;4]$;
դ) $A = (-\infty;0)$, $B = [0;+\infty)$; ե) $A = Q$, $B = I$;
զ) $A = \{2k : k \in N\}$, $B = \{2k - 1 : k \in N\}$ ։
2. Գտնել A և B բազմությունների հատումը.
ա) $A = \{-1, 2, 3, 8\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$; բ) $A = [-3;2]$, $B = (0;4]$;
գ) $A = [0;2]$, $B = (0;4]$; դ) $A = (3,7]$, $B = (7;11)$;
ե) $A = Z$, $B = (-5;+\infty)$; զ) $A = Q$, $B = I$;
է) $A = (-\infty;7]$, $B = \{n^2 - 9 : n \in N\}$ ։
3. Գտնել A և B բազմությունների տարբերությունը.
ա) $A = \{-3, 2, 1\}$, $B = \{-5, -3, 1, 4, 6\}$; բ) $A = [5;11]$, $B = (7;9)$;
գ) $A = [2;7)$, $B = (3;4]$; դ) $A = Z_+$, $B = N$; ե) $A = R$, $B = I$ ։
4. Գտնել բազմության լրացումը.
ա) $[0;1]$, բ) $(-\infty;3)$, գ) $(-\infty;0) \cup (1;+\infty)$,
դ) I , ե) $(-3;-1) \cup (1;3)$, զ) $\{x \in R : x^2 - 3x + 2 = 0\}$ ։
5. Գտնել $A = \{4k : k \in N\}$ և $B = \{6k : k \in N\}$ բազմությունների հատումը։
6. Գտնել $\{3k\}_{k \in Z_+}$, $\{3k + 1\}_{k \in Z_+}$ և $\{3k + 2\}_{k \in Z_+}$ բազմությունների միավորումը։
7. Ցանկացած $p \in N$ թվի համար գտնել $\{pk + n\}_{k \in Z_+}$, $n = 0, 1, \cdots, p - 1$, բազմությունների միավորումը։
8. Գտնել A և B բազմությունների հանրահաշվական գումարն ու տարբերությունը.
ա) $A = [2;5]$, $B = [-3;7]$; բ) $A = [0;+\infty)$, $B = Z$; գ) $A = N$, $B = -N$ ։

9. Գտնել A և B բազմությունների համրահաշվական արտադրյալը.

ա) $A=\{1,2\}$, $B=[-3;1]$; բ) $A=\{0\}$, $B=R$; գ) $A=N$, $B=-N$:

10. Դիցուք A-ն թվային բազմություն է: Ճշմարի՞տ են արդյոք $A+A=2A$, $A-A=\{0\}$ հավասարությունները:

11. Դեկարտյան հարթության վրա պատկերել հետևյալ բազմությունները.

ա) $[1;4]\times[-2;5]$; բ) $(2;3)\times((-1;2)\cup[4;6])$; գ) $(0;+\infty)\times(1;3]$;

դ) $Z\times R_+$; ե) $R_+\times Z$; զ) R_+^2; է) Z^2:

12. Դիցուք A-ն և B-ն թվային բազմություններ են: Ճշմարի՞տ են արդյոք $A\times B=B\times A$, $A\cdot A=A^2$, $\{0\}\times B=\{0\}$ հավասարությունները:

13. Դիցուք P_x-ը և P_y-ը $P\subset R^2$ բազմության պրոյեկցիաներն են, համապատասխանաբար Ox և Oy առանցքների վրա: Հետևյալ առնչություններից ո՞րն է ճշմարիտ կամայական P բազմության համար.

1) $P_x\times P_y=P$, 2) $P_x\times P_y\subset P$, 3) $P_x\times P_y\supset P$:

14. Դեկարտյան հարթության վրա պատկերել $P=\{(x;y):x^2+y^2\le 1\}$ կարգավորված զույգերի բազմությունը, գտնել այդ բազմության P_x և P_y պրոյեկցիաները, հարթության վրա պատկերել $P_x\times P_y$ արտադրյալը և համեմատել այն P-ի հետ:

***

15. Ապացուցել, որ ցանկացած երկու ռացիոնալ թվերի գումարը, արտադրյալը և քանորդը (եթե բաժանարարը զրո չէ) ռացիոնալ թվեր են:

16. Ապացուցել, որ ցանկացած երկու իրարից տարբեր ռացիոնալ թվերի միջև գոյություն ունի երրորդը:

17. Դիցուք $a,b,c,d\in N$ և $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$: Ստուգել, որ ցանկացած m և n բնական թվերի համար

$$\frac{a}{b}<\frac{ma+nc}{mb+nd}<\frac{c}{d}:$$

18. Ապացուցել, որ $\sqrt{2}$ և $\sqrt{3}$ թվերը իռացիոնալ են:

19. Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ ցանկացած երկու իռացիոնալ թվերի գումարը և արտադրյալը իռացիոնալ թվեր են:

20. Ապացուցել, որ եթե $r\in Q$ և $\alpha\in I$, ապա $r+\alpha\in I$, $r-\alpha\in I$ և եթե $r\neq 0$, ապա $r\alpha\in I$:

21. Ցույց տալ, որ ցանկացած r ռացիոնալ թիվ կարող է ներկայացվել որպես՝ ա) երկու իռացիոնալ թվերի գումար; բ) երկու իռացիոնալ թվերի արտադրյալ, եթե $r \neq 0$:

22. Նկարագրել $Q+Q$, $I+Q$, $I+I$, $Q \cdot Q$ և $I \cdot I$ բազմությունները:

23. Ապացուցել, որ եթե α-ն և β-ն իռացիոնալ թվեր են, ապա $\alpha+\beta$ և $\alpha-\beta$ թվերից առնվազն մեկն իռացիոնալ է:

24. Ցույց տալ, որ ցանկացած երկու իրարից տարբեր իռացիոնալ թվերի միջև կա երրորդը:

25. Ապացուցել, որ ցանկացած a և b թվերի համար տեղի ունեն՝

ա) $|a+b| \leq |a|+|b|$; բ) $|a-b| \geq \big||a|-|b|\big|$

անհավասարությունները: Ստուգել, որ հավասարություն տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $a \cdot b \geq 0$:

***

26. Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցել, որ ցանկացած $a_1, a_2, \cdots, a_n$ թվերի համար ճշմարիտ է

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n| \leq |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$$

անհավասարությունը:

27. Կիրառելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքը՝ ապացուցել, որ ցանկացած $n \in N$ թվի համար ճշմարիտ են հետևյալ հավասարությունները.

ա) $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$;

բ) $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

գ) $1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2=\dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$;

դ) $1^3+2^3+\cdots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$;

ե) $1^3+3^3+\cdots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$;

զ) $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)=\dfrac{n+2}{2n+2}$;

է) $\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\cdots+\dfrac{n}{(n+1)!}=1-\dfrac{1}{(n+1)!}$;

ը) $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\dfrac{n}{3n+1}$;

բ) $\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx=\dfrac{\sin\dfrac{nx}{2}\sin\dfrac{n+1}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}}$;

ժ) $\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\dfrac{\sin\dfrac{nx}{2}\cos\dfrac{n+1}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}}$:

28. Ստուգել, որ ցանկացած $m,n\in N$ $(m\le n)$ թվերի համար՝

ա) $C_n^m=C_n^{n-m}$; բ) $C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$:

29. Ապացուցել Նյուտոնի երկանդամի բանաձևը.

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}\quad (n\in N):$$

30. Օգտվելով Նյուտոնի երկանդամի բանաձևից՝ ապացուցել, որ

ա) $\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k=2^n$; բ) $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k=0$;

գ) $(1+x)^n\ge\dfrac{n(n-1)}{2}x^2\quad(x\ge 0)$; դ) $\sqrt[n]{n}<1+\dfrac{2}{\sqrt{n}}$:

31. Ապացուցել, որ նշված բնական թվերի համար ճշմարիտ է անհավասարությունը.

ա) $2^n>2n+1$ $(n>2)$; բ) $2^{\frac{n(n-1)}{2}}>n!$ $(n\ge 3)$;

գ) $\dfrac{n}{2}<1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2^n-1}<n\quad(n>1)$;

դ) $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n},\quad(n\ge 2)$;

ե) $n!>n^{\frac{n}{2}}$ $(n>2)$; զ) $(2n)!<2^{2n}(n!)^2$;

է) $\left|\sin\left(\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\right)\right|\le\sum\limits_{k=1}^{n}\sin x_k\quad(0\le x_k\le\pi;\ k=1;2;\ldots;n)$;

ը) $|\sin nx|\le n|\sin x|\quad(n\ge 1)$:

32. Ապացուցել Բեռնուլիի անհավասարությունները.

ա) ցանկացած $x>-1$ թվի և n բնական թվի համար $(1+x)^n \ge 1+nx$: Ստուգել, որ երբ $n>1$, հավասարությունը տեղի ունի միայն $x=0$ դեպքում:

բ) եթե $x_1, x_2, \cdots, x_n$ թվերը միևնույն նշանի են և մեծ -1-ից, ապա

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \ge 1+x_1+x_2+\cdots+x_n:$$

33. Օգտվելով Բեռնուլիի անհավասարությունից՝ ապացուցել, որ ցանկացած $n>1$ բնական թվի համար $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n!$:

34. Կիրառելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքը՝ ապացուցել, որ ցանկացած $n \in N$ թվի համար

ա) $\left(11^{n+2}+12^{2n+1}\right)$-ը առանց մնացորդի բաժանվում է 133-ի;

բ) $\left(3^{2n+1}+40n-67\right)$-ը առանց մնացորդի բաժանվում է 64-ի:

***

35. Հետազոտել հետևյալ բազմությունների սահմանափակությունը.

ա) $[0;1]$; բ) $(0;1)$; գ) $(-3;1)\cup[4;71]$;

դ) $(0;+\infty)$; ե) $(-\infty;6]$; զ) $(-\infty;1]\cup[3;+\infty)$:

36. Դիցուք A-ն սահմանափակ բազմություն է: Ապացուցել, որ՝

ա) A-ի ցանկացած ենթաբազմություն սահմանափակ է;

բ) ցանկացած B բազմության համար $A\cap B$ և $A\setminus B$ բազմությունները սահմանափակ են;

գ) եթե B-ն սահմանափակ բազմություն է, ապա $A\cup B$, $A+B$ և $A\cdot B$ բազմություններից յուրաքանչյուրը սահմանափակ է:

37. Ապացուցել, որ

ա) $\sup\left\{\frac{n-1}{n}: n\in N\right\}=1$; բ) $\inf\left\{\frac{n-1}{n}: n\in N\right\}=0$;

գ) $\sup\left\{\frac{1}{n^2}: n\in N\right\}=1$; դ) $\inf\left\{\frac{1}{n^2}: n\in N\right\}=0$;

ե) $\sup\left\{\frac{(-1)^n}{n}: n\in N\right\}=\frac{1}{2}$; զ) $\inf\left\{\frac{(-1)^n}{n}: n\in N\right\}=-1$;

է) $\sup\left\{\frac{n}{n+1}\sin\frac{2\pi n}{3}: n\in N\right\}=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

ը) $\inf\left\{\frac{n}{n+1}\sin\frac{2\pi n}{3} n\in N\right\}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$:

38. Գտնել տրված բազմության ճշգրիտ ստորին և վերին եզրերն ու ամենափոքրը և ամենամեծ տարրերը (եթե այդպիսիք գոյություն ունեն).

ա) $[0;1]$; բ) $(0;1]$; գ) $[0;+\infty)$; դ) $(0;+\infty)$; ե) Q; զ) $I\cap R_+$;

է) $I\cap[0;1]$; ը) $Q\cap R_+$; թ) $Q\cap[0;1]$:

39. Ապացուցել, որ եթե A ոչ դատարկ բազմությունը սահմանափակ է վերևից (ներքևից), ապա $-A$ բազմությունը սահմանափակ է ներքևից (վերևից), ընդ որում՝

ա) $\inf(-A)=-\sup A$; բ) $\sup(-A)=-\inf A$:

40. Ապացուցել, որ եթե $A\subset B$, ապա

ա) $\sup A\le\sup B$; բ) $\inf A\ge\inf B$:

41. Ապացուցել, որ ցանկացած A և B ոչ դատարկ սահմանափակ բազմությունների համար

ա) $\sup(A\cup B)=\max\{\sup A;\sup B\}$;

բ) $\inf(A\cup B)=\min\{\inf A;\inf B\}$;

գ) $\max\{\inf A;\inf B\}\le\inf(A\cap B)\le\min\{\sup A;\sup B\}$:

42. Ստուգել, որ $(0;1)$, $(0;+\infty)$ և $(-\infty;0)$ միջակայքերը բաց բազմություններ են:

43. Ապացուցել, որ ցանկացած a և b $(b\ge a)$ թվերի համար $(a;b)$ միջակայքը բաց բազմություն է, իսկ $[a;b]$ հատվածը՝ փակ: Այստեղից հետևեցնել, որ ցանկացած կետի ցանկացած շրջակայքը բաց բազմություն է:

44. Պարզել՝ հետևյալ բազմություններից որոնք են բաց, որոնք՝ փակ և որոնք՝ ո՛չ բաց և ո՛չ էլ փակ.

ա) $(0;1)\cup(3;+\infty)$; բ) $(-3;2)\cup(4;7]$; գ) $[-3;1]\cup[3;7]$;

դ) $[-2;5]\cup[7;+\infty)$; ե) $[-5;2]\cap(1;3)$; զ) $[-4;1)\cap(0;6]$;

է) $\{-5\}$; ը) $\{-5;7\}$; թ) Z:

45. Ապացուցել, որ երկու բաց բազմությունների միավորումը բաց է:

46. Ապացուցել, որ եթե $a\ne b$, ապա

ա) գոյություն ունի a կետի V_a շրջակայք, որը չի պարունակում b-ն;

բ) գոյություն ունեն a և b կետերի V_a և V_b շրջակայքեր, որոնք չեն հատվում:

47. Ստուգել, որ a կետի ցանկացած երկու շրջակայքի հատումն a-ի շրջակայք է:

48. Ապացուցել, որ երկու բաց բազմությունների հատումը բաց բազմություն է:

49. Ապացուցել, որ բազմությունը փակ է այն և միայն այն դեպքում, երբ պարունակում է իր բոլոր կուտակման կետերը:

50. Ստուգել, որ R-ը միաժամանակ թե՛ բաց է, թե՛ փակ:

***

51. Հետևյալ արտահայտություններում գտնել x փոփոխականի թույլատրելի արժեքների բազմությունը (ԹԱԲ) .

ա) $\dfrac{2x-3}{x^2+3x+2}$; բ) $\sqrt{3x-x^3}$; գ) $\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$;

դ) $\log_2\dfrac{1+x}{1-x}$; ե) $\arcsin\dfrac{2x-5}{3}$; զ) $\log_2\log_3 x$;

է) $\dfrac{1+x^2}{1-tgx}$; ը) $\arccos\dfrac{1+x^2}{2x}$; թ) $\dfrac{ctgx}{1+\log_2^2(1-|x|)}$:

Այսուհետև, եթե վարժության մեջ $y=f(x)$ բանաձևով տրված ֆունկցիայի որոշման տիրույթը նշված չէ, ապա համարվում է, որ այն $f(x)$ արտահայտության ԹԱԲ-ն է:

52. Ստուգել, որ հետևյալ ֆունկցիաները մոնոտոն են և պարզել յուրաքանչյուրի մոնոտոնության բնույթը.

ա) $y=2x-7$; բ) $y=5-0{,}5x$; գ) $y=arctgx$;

դ) $y=x^2,\ x\in R_+$; ե) $y=x^2,\ x\in R_-$; զ) $y=ctgx, x\in(0;\pi)$;

է) $y=\cos x,\ x\in(0;\pi)$; ը) $y=\cos x,\ x\in(-\pi;0)$; թ) $y=a^x$ $(a>0)$;

53. Պարզել, թե հետևյալ ֆունկցիաներից որոնք են զույգ, որոնք՝ կենտ և որոնք՝ ո՛չ զույգ և ո՛չ էլ կենտ.

ա) $y=3x-x^3$; բ) $y=x+x^2$; գ) $y=|\sin 3x|$;

դ) $y=\sin^4 3x$; ե) $y=5^x+5^{-x}$; զ) $y=5^x-5^{-x}$;

է) $y=(x-2)^2$; ը) $y=\lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$; թ) $y=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$:

54. Ստուգել, որ հետևյալ ֆունկցիաները պարբերական են.

ա) $y=\sin 3x$; բ) $y=\cos^2 x$; գ) $y=1+\cos x+\sin 2x$:

55. Ապացուցել, որ եթե T-ն $f:R\to R$ ֆունկցիայի համար պարբերություն է, ապա mT $(m\in Z, m\neq 0)$ թվերից յուրաքանչյուրը նույնպես պարբերություն է:

56. Ապացուցել, որ Դիրիխլեի ֆունկցիայի՝

$$\chi(x)=\begin{cases}1, \text{երբ } x\in Q,\\ 0, \text{երբ } x\in I,\end{cases}$$

համար ցանկացած զրոյից տարբեր ռացիոնալ թիվ պարբերություն է:

57. Ստուգել, որ $y=\operatorname{sgn} x$ (սիգնում իքս) ֆունկցիան՝

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, \text{երբ } x < 0, \\ 0, \text{երբ } x = 0, \\ 1, \text{երբ } x > 0, \end{cases}$$

կենտ է: Ցույց տալ, որ $|x| = x \operatorname{sgn} x$:

58. $y = [x]$ (ամբողջ մաս իքս) ֆունկցիան սահմանվում է հետևյալ կերպ. եթե $x = n + r$, որտեղ $n \in Z$ և $r \in [0;1)$, ապա $[x] = n$;

ա) գտնել $y = [x]$ ֆունկցիայի արժեքները $0; \pm 0{,}75; \pm\sqrt{2}; \pm\pi$ կետերում;

բ) գտնել ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը;

գ) ապացուցել, որ ֆունկցիան չնվազող է;

դ) պարզել՝ կենտ է այն, թե՝ ոչ:

59. Ապացուցել, որ $y = x - [x]$ (կոտորակային մաս իքս) ֆունկցիան պարբերական է և գտնել նրա փոքրագույն դրական պարբերությունը: Ո՞րն է ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը:

60. Դիցուք $f(y)$ արտահայտության ԹԱԲ-ը $(0;1)$ միջակայքն է: Գտնել ա) $f(\sin x)$; բ) $f(\lg x)$ արտահայտություններից յուրաքանչյուրի ԹԱԲ-ը:

61. Տրված $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ֆունկցիայից կազմել $y = f(f(x))$, $y = f(f(f(x)))$ վերադրումները:

62. Տրված $\varphi : X \to Y$ և $\psi : Y \to Z$ ֆունկցիաների համար կազմել $\psi \circ \varphi : X \to Z$ բարդ ֆունկցիան.

ա) $\varphi(x) = x^2$, $\psi(y) = 2^y$; բ) $\varphi(x) = 2^x$, $\psi(y) = y^2$;

գ) $\varphi(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$, $\psi(y) = \arccos y$; դ) $\varphi(x) = 1 + \sin^2 x$, $\psi(y) = \log_2 y$:

63. Ապացուցել, որ եթե $y = \varphi(x)$ $(x \in R)$ ֆունկցիան զույգ է (պարբերական է), ապա ցանկացած $\psi(y)$ $(y \in R)$ ֆունկցիայի համար $\psi(\varphi(x))$ $(x \in R)$ ֆունկցիան կլինի զույգ (պարբերական):

64. Դիցուք $\varphi : X \to Y$ և $\psi : Y \to Z$ ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրն իր որոշման տիրույթում մոնոտոն է: Ի՞նչ կարելի է ասել $z = \psi(\varphi(x))$ $(x \in X)$ բարդ ֆունկցիայի մոնոտոնության վերաբերյալ:

65. Դիցուք a-ն, b-ն դրական թվեր են և $c > 1$: $y = x^2$ և $y = \log_c x$ ֆունկցիաների ո՞ր հատկության վրա են հիմնված հետևյալ պնդումները.

ա) $a > b$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $a^2 > b^2$;

բ) $a > b$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $\log_c a > \log_c b$:

Եթե $0 < c < 1$, ապա ինչպե՞ս պետք է ձևափոխել բ) պնդումը:

66. Ապացուցել, որ ցանկացած աճող (նվազող) ֆունկցիա հակադարձելի է: Ճշմարի՞տ է արդյոք պնդումը ցանկացած չնվազող (չաճող) ֆունկցիայի համար: Բերել համապատասխան օրինակներ:

67. Ստուգել, որ

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ երբ } x \in Q, \\ -x, \text{ երբ } x \in \mathrm{I}, \end{cases}$$

ֆունկցիան ոչ մի միջակայքի վրա մոնոտոն չէ, բայց հակադարձելի է :

68. Համոզվել, որ $y = f(x)$ $(x \in X)$ ֆունկցիան հակադարձելի է, նշել հակադարձ ֆունկցիայի որոշման Y տիրույթը և տալ $x = f^{-1}(y)$ $(y \in Y)$ ֆունկցիան բանաձևով.

ա) $y = 3x - 1,\ x \in R$; բ) $y = \log_2 x,\ x \in (0;+\infty)$;

գ) $y = x^2,\ x \in R_+$; դ) $y = x^2,\ x \in R_-$;

ե) $y = tg^2 x,\ x \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)$; զ) $y = tg^4 x,\ x \in \left(-\dfrac{\pi}{2};0\right]$:

69. ա) Ապացուցել, որ զույգ ֆունկցիայի գրաֆիկը համաչափ է Oy առանցքի նկատմամբ, իսկ կենտ ֆունկցիայինը՝ կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ:

բ) Ապացուցել, որ եթե $f: X \to Y$ ֆունկցիան X-ը փոխմիարժեք արտապատկերում է Y-ի վրա, ապա $y = f(x)$ $(x \in X)$ և $y = f^{-1}(x)$ $(x \in Y)$ ֆունկցիաներից մեկի գրաֆիկը $y = x$ ուղիղի նկատմամբ համաչափ է մյուսի գրաֆիկին:

Հետևյալ վարժություններում (70-110) պահանջվում է կառուցել տրված ֆունկցիայի գրաֆիկը: Դրա համար անհրաժեշտ է.

1) եթե բանաձևով տրված ֆունկցիայի կողքին նշված չէ որոշման տիրույթը, ապա գտնել այն (տես 52 վարժությունից առաջ արված դիտողությունը);

2) հետազոտել ֆունկցիան զույգության, կենտության, պարբերականության և մոնոտոնության առումով;

3) ուսումնասիրել ֆունկցիայի վարքը որոշման տիրույթի եզրային կետերի շրջակայքում;

4) գտնել առանցքների հետ գրաֆիկի հնարավոր հատման կետերը;

5) որոշման տիրույթի մի քանի կետում հաշվել ֆունկցիայի արժեքները և հարթության վրա նշել այդ արժեքներին համապատասխանող կետերը: Տարրական ֆունկցիաների գրաֆիկները, որպես կանոն, ստացվում են նշված կետերը «սահուն» գծով միացնելիս: Դա կատարելիս անհրաժեշտ է հաշվի առնել ֆունկցիայի վերը թվարկված բոլոր առանձնահատկությունները:

70. Կոորդինատների միևնույն համակարգում կառուցել $y = ax$ գծային և համասեռ ֆունկցիայի գրաֆիկը, երբ $a = 0; -\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}; -2$ և 2:Համեմատել ստացված

գրաֆիկները:

71. Գծել $y=x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը (պարաբոլ): Կառուցել $y=x^2+2x+2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ ֆունկցիան նախապես ներկայացնելով $y=y_0+(x-x_0)^2$ տեսքով:

72. Կոորդինատների միևնույն համակարգում կառուցել հետևյալ աստիճանային ֆունկցիաների գրաֆիկները.

ա) $y=x^3$; բ) $y=x^4$; գ) $y=\dfrac{1}{x^2}$; դ) $y=\sqrt{x}$; ե) $y=\sqrt[3]{x}$:

Կառուցել կոտորակագծային ֆունկցիայի գրաֆիկը (հիպերբոլներ) (73-75).

73. $y=\dfrac{1}{x}$: 74. $y=1+\dfrac{1}{x-2}$: 75. $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$:

Կառուցել ռացիոնալ ֆունկցիայի գրաֆիկը (76-81).

76. $y=x+\dfrac{1}{x}$ (հիպերբոլ): 77. $y=x^2+\dfrac{1}{x}$ (Նյուտոնի եռաժանի):

78. $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$ (Նյուտոնի օձագալար): 79. $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ (Անյեզիի կոր):

80. $y=\dfrac{1}{1-x^2}$: 81. $y=\dfrac{x}{1-x^2}$:

Կառուցել իռացիոնալ ֆունկցիայի գրաֆիկը (82-84).

82. ա) $y=-\sqrt{-x-2}$; բ) $y=\sqrt{-x-2}$;

83. ա) $y=-\dfrac{1}{2}\sqrt{100-x^2}$; բ) $y=\dfrac{1}{2}\sqrt{100-x^2}$;

84. ա) $y=-\sqrt{x^2-1}$; բ) $y=\sqrt{x^2-1}$:

Կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը (85-100).

85. ա) $y=\sin\dfrac{1}{2}x$; բ) $y=\sin 2x$: 86. ա) $y=|\sin x|$; բ) $y=\sin^2 x$:

87. ա) $y=\sin x^2$; բ) $y=\sin\dfrac{1}{x}$: 88. ա) $y=tg3x$; բ) $y=\dfrac{1}{3}tgx$:

89. ա) $y=\sin(\arcsin x)$; բ) $y=\arcsin(\sin x)$:

90. ա) $y=2^x$; բ) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$: 91. ա) $y=\log_2 x$; բ) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$:

92. ա) $y = 3^{|x|}$; բ) $y = \log_3 |x|$: 93. ա) $y = |\log_3 x|$; բ) $y = |\log_3 |x||$:

94. ա) $y = x \sin x$; բ) $y = x^2 \sin x$; գ) $y = \frac{1}{x} \cos x$:

95. ա) $y = 2^x \sin x$; բ) $y = 2^x \sin^2 x$:

96. ա) $y = x \sin \frac{1}{x}$; բ) $y = x^2 \sin \frac{1}{x}$:

97. $y = \frac{1}{\sin x}$: 98. $y = arctg \frac{1}{x}$: 99. $y = 2^{\frac{1}{x}}$: 100. $y = 2^{-\frac{1}{x^2}}$:

Բևեռային կոորդինատների համակարգում կառուցել տրված $r = r(\varphi)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը (101-107).

101. $r = 3$ (շրջանագիծ): 102. $\varphi = \frac{\pi}{3}$ (ճառագայթ):

103. $r = \varphi$ (Արքիմեդի գալարագիծ):

104. $r = \frac{\pi}{\varphi}$ (հիպերբոլական գալարագիծ):

105. $r = 2(1 + \cos\varphi)$ (սրտաձև գիծ): 106. $r = 10 \sin 3\varphi$ (եռաթերթ վարդ):

Դիցուք տրված են $x = \varphi(t)$ և $y = \psi(t)$ $(t \in T)$ ֆունկցիաները (պարամետրական հավասարումները): Դեկարտյան հարթության վրա $\{(\varphi(t), \psi(t)) : t \in T\}$ կետերի բազմությունն անվանում են տրված պարամետրական հավասարումներով որոշվող կոր:

Կառուցել հետևյալ պարամետրական հավասարումներով որոշվող կորերը (107-110).

107. $x = 1 - t$, $y = 1 - t^2$: 108. $x = 10 \cos t$, $y = \sin t$ (էլիպս):

109. $x = 5 \cos t$, $y = 5 \sin t$ (շրջանագիծ):

110. $x = 2^t + 2^{-t}$, $y = 2^t - 2^{-t}$ (հիպերբոլ):

Տրված $F(x, y) = 0$ հավասարմամբ որոշվող կորն այն հավասարմանը բավարարող (x, y) կարգավորված զույգերի բազմությունն է:

Կառուցել հետևյալ հավասարումներով որոշվող կորերը (111-114).

111. ա) $x^2 - y^2 = 0$; բ) $xy = 0$: 112. $x^2 - 4x + y^2 = 0$:

113. ա) $x^2 - a^2 = 0$; բ) $y^2 - b^2 = 0$; գ) $y^2 - y = 0$:

114. ա) $\min\{x, y\} = 1$; բ) $\max\{x, y\} = 1$; գ) $\min\{x^2, y\} = 1$:

Բ

115. Ստուգել, որ ցանկացած A, B և C բազմությունների համար ճշմարիտ են զուգորդական և բաշխական հետևյալ օրենքները.

ա) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$; բ) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

գ) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$;

դ) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$:

116. Ստուգել, որ ցանկացած A և B բազմությունների համար $A\cap B=A\setminus(A\setminus B)$:

117. Ապացուցել Դ՛Մորգանի երկակիության օրենքները՝

ա) $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$; բ) $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$:

118. Ապացուցել, որ $A\cup B=A$ և $A\cap B=B$ հավասարություններից յուրաքանչյուրը ճշմարիտ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $B\subset A$:

119. Յուրաքանչյուր $\alpha\in R$ թվի համար նշանակենք $Q_\alpha=\alpha+Q$: Ապացուցել, որ ցանկացած α և β թվերի համար ճշմարիտ է հետևյալ հավասարություններից մեկը և միայն մեկը. $Q_\alpha=Q_\beta$, $Q_\alpha\cap Q_\beta=\varnothing$:

120. Ցանկացած X_1, X_2, Y_1 և Y_2 բազմությունների համար ապացուցել հետևյալ առնչությունները.

ա) $(X_1\cup X_2)\times Y_1=(X_1\times Y_1)\cup(X_2\times Y_1)$;

բ) $X_1\times(Y_1\cup Y_2)=(X_1\times Y_1)\cup(X_1\times Y_2)$;

գ) $(X_1\cap X_2)\times Y_1=(X_1\times Y_1)\cap(X_2\times Y_1)$;

դ) եթե $X_1\subset X_2$, ապա $X_1\times Y_1\subset X_2\times Y_1$:

***

121. Ապացուցել, որ հետևյալ թվերն իռացիոնալ են. ա) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; բ) $\sqrt[3]{3}$; գ) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$; դ) $\log_4 18$; ե) $tg15°$; զ) $tg5°$:

122. ա) Ապացուցել, որ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ թվերը չեն կարող լինել միևնույն թվաբանական պրոգրեսիայի որևէ անդամներ:

բ) Կարո՞ղ են արդյոք 10, 11, 12 թվերը լինել միևնույն երկրաչափական պրոգրեսիայի անդամներ:

123. Կարո՞ղ է արդյոք իռացիոնալ թվի իռացիոնալ աստիճանը լինել ռացիոնալ թիվ:

124. Ապացուցել հավասարությունները.

ա) $\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}$;   բ) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k kC_n^k = 0 \quad (n>1)$;

գ) $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$;

դ) $\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$ ։

125. Ապացուցել անհավասարությունները.

ա) $2\left(\sqrt{n+1}-1\right)<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1 \ (n>1)$;

բ) $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\le\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$;   գ) $\sqrt[n]{n}>\sqrt[n+1]{n+1} \ (n\ge 3)$;

դ) $n!<\left(\frac{n}{2}\right)^n \quad (n\ge 6)$;   ե) $\frac{a^n+b^n}{2}\ge\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \quad (a,b>0)$։

126. Տրված են $x_1, x_2, \cdots, x_n$ դրական թվերը։ Ապացուցել, որ

ա) եթե $x_1x_2\cdots x_n=1$, ապա $x_1+x_2+\cdots+x_n\ge n$;

բ) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}\ge n$;

գ) $\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\le\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$;

դ) $\left(\frac{x_1^{-1}+x_2^{-1}+\cdots+x_n^{-1}}{n}\right)^{-1}\le\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$;

ե) նախորդ կետերից յուրաքանչյուրում հավասարությունը տեղի ունի միայն այն դեպքում, երբ $x_1=x_2=\cdots=x_n$ ։

***

127. Դիցուք A-ն և B-ն ոչ դատարկ սահմանափակ թվային բազմություններ են։ Ապացուցել, որ

ա) $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$;   բ) $\inf(A+B)=\inf A+\inf B$ ։

128. Ապացուցել, որ եթե A և B բազմությունները կազմված են ոչ բացասական տարրերից, ապա

ա) $\sup(A\cdot B)=\sup A\cdot\sup B$;   բ) $\inf(A\cdot B)=\inf A\cdot\inf B$ ։

129. Բերել A և B բազմությունների այնպիսի օրինակներ, որ 41 վարժության մեջ առաջարկված անհավասարություններից ա) միայն մեկը լինի խիստ; բ) երկուսն էլ լինեն խիստ:

130. ա) Ապացուցել, որ վերջավոր բազմության բոլոր կետերը մեկուսացված կետեր են: Ո՞րն են այդ բազմության եզրային կետերը:

բ) Բերել անվերջ և սահմանափակ բազմության օրինակ, որի բոլոր կետերը մեկուսացված են:

131. Դիցուք X-ը և Y-ը ոչ դատարկ թվային բազմություններ են և $\forall x \in X\ \forall y \in Y\ (x \le y)$: Օգտվելով ճշգրիտ վերին եզրի գոյության մասին թեորեմից՝ ապացուցել, որ գոյություն ունի այնպիսի $z \in R$, որ $\forall x \in X\ \forall y \in Y\ (x \le z \le y)$:

132. ա) Ապացուցել, որ ոչ դատարկ փակ և սահմանափակ բազմությունն ունի թե՛ ամենամեծ և թե՛ ամենափոքր տարրեր:

բ) Ապացուցել, որ բաց բազմությունը չունի ո՛չ ամենամեծ և ո՛չ էլ ամենափոքր տարր:

133. Ապացուցել, որ եթե a-ն X բազմության կուտակման կետ է, ապա a-ի ցանկացած շրջակայք պարունակում է X-ին պատկանող անվերջ թվով կետեր:

***

134. Դիցուք $y = f(x)$ ֆունկցիան զույգ է: Ստուգել, որ հետևյալ ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը զույգ է.

ա) $y = f^2(x)$; բ) $y = f^3(x)$; գ) $y = |f(x)|$; դ) $y = f(|x|)$:

135. Ցույց տալ, որ եթե $y = f(x)$ ֆունկցիան զույգ է (կենտ է), ապա $y = y_0 + f(x - x_0)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը համաչափ է $x = x_0$ ուղղի ($(x_0; y_0)$ կետի) նկատմամբ:

136. Ապացուցել, որ $(-a; a)$ միջակայքում տրված ցանկացած իրականարժեք ֆունկցիա միակ ձևով կարելի է ներկայացնել որպես զույգ և կենտ ֆունկցիաների գումար:

137. Դիցուք՝ $X_0 \subset X_1$, $X_0 \ne X_1$: $F : X_1 \to Y_1$ ֆունկցիան կոչվում է $f : X_0 \to Y_0$ ֆունկցիայի *շարունակություն*, եթե $\forall x \in X_0\ (F(x) = f(x))$:

Տրված է $f : (0; a) \to R$ ֆունկցիան: Կառուցել f-ի $F : (-a; a) \to R$ շարունակությունն այնպես, որ

ա) F-ը լինի զույգ ֆունկցիա; բ) F-ը լինի կենտ ֆունկցիա:

138. Ապացուցել, որ եթե $f : R \to R$ ֆունկցիայի համար ցանկացած իռացիոնալ թիվ պարբերություն է, ապա f-ը հաստատուն ֆունկցիա է:

139. α և β թվերը կոչվում են *համաչափելի*, եթե $\alpha = r \cdot \beta$, որտեղ $r \in Q \setminus \{0\}$: Ապացուցել, որ եթե երկու պարբերական ֆունկցիաների պարբերությունները

համաչափելի են, ապա դրանց թե՛ գումարը և թե՛ արտադրյալը պարբերական ֆունկցիաներ են:

140. Դիցուք $f : R \to R$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունեն $k > 0$ և $T > 0$ հաստատուններ, այնպիսիք, որ $\forall x \in R\left(f(x+T) = kf(x)\right)$:Ապացուցել, որ f -ը կարելի է ներկայացնել $f(x) = a^x \varphi(x)$ տեսքով, որտեղ $a > 0$, իսկ $\varphi(x)$-ը T պարբերությամբ ֆունկցիա է:

141. Դիցուք $f : [a;b] \to R$ ֆունկցիան մոնոտոն է: Ապացուցել, որ f -ի արժեքների բազմությունը սահմանափակ է: Ճշմարի՞տ է արդյոք պնդումն $(a;b)$ բաց միջակայքում մոնոտոն ֆունկցիայի համար: Բերել օրինակներ:

142. Դիցուք X փակ և սահմանափակ բազմության վրա որոշված $f : X \to R$ ֆունկցիան մոնոտոն է: Ապացուցել, որ

ա) f -ի արժեքների $f(X)$ բազմությունը սահմանափակ է;

բ) $f(X)$ բազմության մեջ կա ամենամեծը և ամենափոքրը:

143. Ապացուցել, որ եթե $f : X \to R$ ֆունկցիան մոնոտոն չէ, ապա X -ում կա կետերի այնպիսի $x_1 < x_2 < x_3$ եռյակ, որ $f(x_2)$-ը չի գտնվում $f(x_1)$-ի և $f(x_3)$-ի միջև:

144. Դիցուք $f : X \to R$ ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը սահմանափակ է: Ստուգել, որ

ա) $\varphi(x) = \sup\{f(\xi) : \xi \in X \text{ և } \xi \le x\}$ ֆունկցիան չնվազող է;

բ) $\psi(x) = \inf\{f(\xi) : \xi \in X \text{ և } \xi \le x\}$ ֆունկցիան չաճող է;

գ) եթե f -ը մոնոտոն է, ապա φ և ψ ֆունկցիաներից մեկը համընկնում է f -ին, իսկ մյուսը հաստատուն է:

145. Տրված է $f : X \to Y$ արտապատկերումը: Գտնել նշված A_1, A_2, A_3 բազմությունների պատկերները.

ա) $y = 2x - 0{,}5$, $A_1 = R$, $A_2 = [-1;2)$, $A_3 = Q$;

բ) $y = x^2 - 4x + 3$, $A_1 = R$, $A_2 = [2;+\infty)$, $A_3 = (1;3)$;

գ) $y = \sin x$, $A_1 = R$, $A_2 = \left[0;\frac{\pi}{2}\right)$, $A_3 = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;

դ) $y = \lg x$, $A_1 = (0;+\infty)$, $A_2 = (0;1]$, $A_3 = (1;10)$;

ե) $y = 2 + 2^x$, $A_1 = R$, $A_2 = [-1;3]$, $A_3 = (0;+\infty)$:

146. Տրված է $f : X \to R$ արտապատկերումը: Գտնել B_1, B_2, B_3 բազմությունների նախապատկերները.

ա) $y = 3x + 1$, $B_1 = R$, $B_2 = [-2;7]$, $B_3 = Q$;

բ) $y=4x-x^2$, $B_1=(0;4)$, $B_2=\{0\}$, $B_3=(5;+\infty)$;

գ) $y=\cos 2x$, $B_1=(-1;1]$, $B_2=\{-1,1\}$, $B_3=(\sqrt{2};+\infty)$;

դ) $y=2^x$, $B_1=(0;+\infty)$, $B_2=(-\infty;0]$, $B_3=\{-1;1\}$;

ե) $y=\arcsin x$; $B_1=R$, $B_2=[\pi;3\pi]$, $B_3=\left\{\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right\}$:

147. Ստուգել, որ $y=ctg\pi x$ ֆունկցիան $(0;1)$ միջակայքը փոխմիարժեք արտապատկերում է R-ի վրա:

148. Կառուցել ֆունկցիա, որը տրված X բազմությունը փոխմիարժեք արտապատկերում է Y-ի վրա.

ա) $X=[0;1]$, $Y=[0;2]$; բ) $X=N$, $Y=\{2n: n\in N\}$;

գ) $X=[3;7]$, $Y=[7;15]$; դ) $X=(-\infty;0)$, $Y=R$;

ե) $X=R$, $Y=(-1;1)$; զ) $X=Q$, $Y=Q\setminus Q_-$:

149. Տրված է $f:X\to Y$ ֆունկցիան: Ապացուցել, որ ցանկացած $X_1,X_2\subset X$ բազմությունների համար

ա) $f(X_1\cup X_2)=f(X_1)\cup f(X_2)$;

բ) $f(X_1\cap X_2)\subset f(X_1)\cap f(X_2)$;

գ) $f(X_1\setminus X_2)\supset f(X_1)\setminus f(X_2)$:

Օրինակներով համոզվել, որ բ) և գ) կետերում պարունակման նշանը չի կարելի փոխարինել հավասարման նշանով:

150. Տրված է $f:X\to Y$ ֆունկցիան: Ապացուցել, որ ցանկացած $Y_1,Y_2\subset Y$ բազմությունների համար

ա) $f^{-1}(Y_1\cup Y_2)=f^{-1}(Y_1)\cup f^{-1}(Y_2)$;

բ) $f^{-1}(Y_1\cap Y_2)=f^{-1}(Y_1)\cap f^{-1}(Y_2)$;

գ) $f^{-1}(Y_1\setminus Y_2)=f^{-1}(Y_1)\setminus f^{-1}(Y_2)$:

151. Ստուգել, որ

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{ երբ } x\neq 0,\\ a, \text{ երբ } x=0\ (a\in R)\end{cases}$$

ֆունկցիան բավարարում է հետևյալ ֆունկցիոնալ հավասարմանը. $xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x)f(y)$:

152. Ստուգել, որ $f(x)=\frac{1}{2}\left(a^x+a^{-x}\right)$ ֆունկցիան բավարարում է հետևյալ ֆունկցիոնալ հավասարմանը. $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$:

153. Հայտնի է, որ $y=f(x)$ ֆունկցիան բավարարում է $2f(x)-3f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2$ ֆունկցիոնալ հավասարմանը: Գտնել $f(x)$-ը:

154. Գտնել $f(x)$-ը, եթե

ա) $f(x+1)=x^2-3x+2$; բ) $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$;

գ) $f\left(\frac{x}{x+1}\right)=x^2$; դ) $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}$:

155. Կառուցել $\varphi(\psi(x))$ և $\psi(\varphi(x))$ բարդ ֆունկցիաները և գտնել դրանցից յուրաքանչյուրի արժեքների բազմությունը, եթե

ա) $\varphi(x)=\operatorname{sgn}x$, $\psi(x)=|x|$; բ) $\varphi(x)=[x]$, $\psi(x)=\sin\pi x$:

156. Կառուցել $y=[x]-2\left[\frac{x}{2}\right]$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, նախապես համոզվելով, որ ֆունկցիան պարբերական է:

157. Կառուցել $y=f(x)$ $(x\in R)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, եթե հայտնի է, որ ֆունկցիան բավարարում է $f(x+1)=f(x)$ ֆունկցիոնալ հավասարմանը և, բացի այդ, $f(x)=x(1-x)$, երբ $x\in[0;1]$:

158. Տրված է՝ $y=f(x)$ $(x\in R)$ ֆունկցիան բավարարում է $f(x+\pi)=$ $=f(x)+\sin x$ ֆունկցիոնալ հավասարմանը և $f(x)=0$, երբ $0\le x\le\pi$: Կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը:

159. Կառուցել հետևյալ հավասարումներով որոշվող կորերը.

ա) $x^2-xy+y^2=1$ (էլիպս); բ) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ (պարաբոլ);

գ) $\sin x=\sin y$; դ) $\cos(\pi x^2)=\cos(\pi y)$:

160. Կոորդինատների միևնույն համակարգում կառուցել հետևյալ հավասարումներով որոշվող կորերը.

ա) $|x|+|y|=a$; բ) $x^2+y^2=a^2$;

գ) $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$ (աստղաձև գիծ):

161. Բևեռային կոորդինատների համակարգում կառուցել հետևյալ հավասարումներով որոշվող կորերը.

ա) $r^2=36\cos2\varphi$ (Բեռնուլիի լեմնիսկատ); բ) $r^2+\varphi^2=1$:

Գ

162. Ապացուցել, որ

ա) $(0;1)=\bigcup\limits_{n\in N}\left[\frac{1}{n+1};\frac{n}{n+1}\right]=\bigcup\limits_{n\in N}\left(\frac{1}{n+1};\frac{n}{n+1}\right)$;

բ) $[0;1]=\bigcap\limits_{n\in N}\left[-\frac{1}{n};\frac{n+1}{n}\right]=\bigcap\limits_{n\in N}\left(-\frac{1}{n};\frac{n+1}{n}\right)$:

գ) $\bigcap\limits_{n\in N}\left[0;\frac{1}{n}\right]=\{0\}$;

դ) $\bigcap\limits_{n\in N}\left(0;\frac{1}{n}\right)=\varnothing$;

ե) $\bigcap\limits_{n\in N}[n;+\infty)=\varnothing$;

զ) $\bigcup\limits_{n\in N}(-n;n)=R$:

163. Ապացուցել, որ

ա) բաց բազմություններից կազմված ցանկացած ընտանիքի միավորումը բաց բազմություն է;

բ) փակ բազմություններից կազմված ցանկացած ընտանիքի հատումը փակ բազմություն է;

գ) բաց բազմություններից կազմված ցանկացած վերջավոր ընտանիքի հատումը բաց բազմություն է;

դ) փակ բազմություններից կազմված ցանկացած վերջավոր ընտանիքի միավորումը փակ բազմություն է:

164. Ստուգել, որ Q և I բազմությունները ո՛չ բաց են, ո՛չ փակ: Ապացուցել, որ $\partial Q=\partial I=R$:

165. Ապացուցել, որ ցանկացած բազմության

ա) ներքին կետերի բազմությունը բաց բազմություն է;

բ) եզրային կետերի բազմությունը փակ բազմություն է;

գ) կուտակման կետերի բազմությունը փակ բազմություն է:

166. Ապացուցել հավասարությունները.

ա) $[a;b]+[c;d]=[a+c;b+d]$;

բ) $(a;b)+(c;d)=(a+c;b+d)$;

գ) $[a;b]\cdot[c;d]=[ac;bd]\quad(a>0,c>0)$;

դ) $(a;b)\cdot(c;d)=(ac;bd)\quad(a>0,c>0)$:

167. Ապացուցել, որ եթե A և B բազմությունները բաց են, ապա բաց են նաև $A+B$ և $A\cdot B$ բազմությունները:

168. Ապացուցել, որ եթե $[a;b]=A\bigcup B$, որտեղ A-ն և B-ն ոչ դատարկ փակ բազմություններ են, ապա A և B բազմությունները ունեն գոնե մեկ ընդհանուր կետ:

169. Դիցուք A-ն բաց բազմություն է, իսկ B-ն՝ փակ: Ստուգել, որ $A \setminus B$ բազմությունը բաց է, իսկ $B \setminus A$-ն՝ փակ:

170. Ապացուցել, որ եթե $X \subset R$ բազմությունը միաժամանակ բաց է և փակ, ապա $X = \varnothing$ կամ $X = R$:

171. $X \subset R$ բազմությունն անվանենք *կապակցված բազմություն*, եթե այն իր ցանկացած $x_1 < x_2$ տարրերի հետ մեկտեղ պարունակում է ողջ $(x_1; x_2)$ միջակայքը:

Ապացուցել, որ R-ում կապակցված բազմություններ են բոլոր բաց, փակ, կիսաբաց, վերջավոր և անվերջ միջակայքերը և միայն դրանք:

172. Ապացուցել, որ $X \subset R$ բազմությունը կապակցված է այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն չունեն հետևյալ պայմաններին բավարարող G_1 և G_2 բաց բազմություններ.

$$G_1 \cap X \neq \varnothing, \quad G_2 \cap X \neq \varnothing, \quad G_1 \cap G_2 = \varnothing, \quad X \subset G_1 \cup G_2 :$$

173. Որպեսզի $F \subset R$ բազմությունը լինի փակ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ F-ի հետ հատվող ցանկացած $[a;b]$ հատվածի համար $F \cap [a;b]$ բազմությունն ունենա ամենամեծ և ամենափոքր տարրեր: Ապացուցե՛լ:

***

174. Գտնել x-ի բոլոր ա) ամբողջ, բ) ռացիոնալ արժեքների բազմությունը, որոնց համար $\sqrt{x^2 + x + 1}$-ը ռացիոնալ թիվ է:

175. Ստուգել, որ ցանկացած $n \geq 2$ բնական թվի համար $\sqrt{1 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{n}}}$ թիվը իռացիոնալ է:

176. Ապացուցել, որ եթե $x_1, x_2, \ldots, x_n$ և $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \cdots + \sqrt{x_n}$ թվերը ռացիոնալ են, ապա $\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \ldots, \sqrt{x_n}$ թվերը նույնպես ռացիոնալ են:

177. Ապացուցել, որ $\sqrt[3]{2}$ թիվը հնարավոր չէ ներկայացնել $p + q\sqrt{r}$ տեսքով, որտեղ p, q և r թվերը ռացիոնալ են:

178. Գտնել $\left\{ \sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{m} : n, m \in N \right\}$ բազմության կուտակման կետերի բազմությունը:

179. Գտնել հետևյալ բազմություններից յուրաքանչյուրի փակումը.

ա) $\left\{ \dfrac{p^2}{q^2} : p, q \in N \right\}$; բ) $\left\{ 2^{\frac{p}{q}} : p, q \in N \right\}$:

***

180. Ապացուցել, որ եթե $y=f(x)$ $(x\in R)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը համաչափ է $x=a$ և $x=b$ $(b\neq a)$ ուղիղների նկատմամբ, ապա f-ը պարբերական է:

181. Ապացուցել, որ եթե $y=f(x)$ $(x\in R)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը համաչափ է $A(a_1,b_1)$ և $B(a_2,b_2)$ $(a_1\neq a_2)$ կետերի նկատմամբ, ապա f-ը գծային և պարբերական ֆունկցիաների գումար է: Մասնավորապես, եթե $b_1=b_2$, ապա f-ը պարբերական է:

182. Ապացուցել, որ եթե $y=f(x)$ $(x\in R)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը համաչափ է $A(a,b)$ կետի և $x=c$ $(c\neq a)$ ուղղի նկատմամբ, ապա f-ը պարբերական է:

183. Ստուգել, որ Ռիմանի ֆունկցիան՝

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, \text{ երբ } x=\dfrac{p}{q} & \text{անկրճատելի կոտորակ է և } q\in N,\\ 0, \text{ երբ } x\in I,\end{cases}$$

պարբերական է և գտնել նրա փոքրագույն դրական պարբերությունը:

184. Կառուցել հետևյալ հավասարումներով որոշվող կորերը.

ա) $x^4+y^4=x^2y$; բ) $\left(x^2+y^2\right)^2=2xy$ (լեմնիսկատ);

գ) $x^3+y^3-3xy=0$ (Դեկարտի տերև);

դ) $\left(x^2+y^2\right)^2=4\left(x^2-y^2\right)$ (լեմնիսկատ):

185. Բևեռային կոորդինատների համակարգում կառուցել հետևյալ հավասարումներով որոշվող կորերը.

ա) $\varphi=2\pi\sin r$; բ) $r=\max\left\{2\left|\cos2\varphi\right|,1\right\}$:

186. Դիցուք $x^2+(y-a)^2=a^2$ հավասարումով որոշվող շրջանագիծը (անիվը), որի վրա նշված է $A(0;0)$ կետը, գլորվում է Ox առանցքի վրայով: Գտնել A կետի հետագծի (ցիկլոիդի) պարամետրական հավասարումները՝ որպես պարամետր ընտրելով շրջանագծի կենտրոնը A կետին միացնող շառավիղվեկտորի պտտման անկյունը:

187. Ստուգել, որ բևեռային կոորդինատների համակարգում $r^2=18\cos2\varphi$ հավասարումով որոշվող կորը (Բեռնուլիի լեմնիսկատը) այն (r,φ) կետերի բազմությունն է, որոնց $F_1(3,\pi)$ և $F_2(3,0)$ կետերից (լեմնիսկատի ֆոկուսներից) ունեցած հեռավորությունների արտադրյալը հաստատուն է: Գտնել այդ հաստատունը:

Գլուխ 2

Թվային հաջորդականություններ

Բնական թվերի բազմության վրա որոշված $f: N \to X$ ֆունկցիան կոչվում է հաջորդականություն: Եթե X-ը թվային բազմություն է, ապա f-ն անվանում են *թվային հաջորդականություն* : Յանկացած $n \in N$ թվի համար $x_n = f(n)$ արժեքն անվանում են հաջորդականության n-րդ կամ ընդհանուր անդամ: Այսուհետև $f: N \to X$ հաջորդականությունը պարզապես կանվանենք x_n հաջորդականություն: Տրված x_n-ի համար x_{n-1}-ը և x_{n+1}-ը կոչվում են համապատասխանաբար նախորդ և հաջորդ անդամներ: Ֆունկցիայի մոնոտոնության, սահմանափակության, հաստատունության սահմանումները պահպանվում են նաև հաջորդականությունների համար: Ավելացնենք միայն, որ x_n հաջորդականությունը կանվանենք *ի վերջո մոնոտոն* (հաստատուն), եթե գոյություն ունի $n_0 \in N$, այնպիսին, որ x_n-ը մոնոտոն է (հաստատուն է) $\{n_0, n_0+1, \ldots\}$ բազմության վրա:

Հ ա ջ ո ր դ ա կ ա ն ո ւ թ յ ա ն   ս ա հ մ ա ն: a թիվը կոչվում է x_n հաջորդականության սահման, եթե ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $n_0 \in N$, այնպիսին, որ բոլոր $n \ge n_0$ բնական թվերի համար տեղի ունի $|x_n - a| < \varepsilon$ անհավասարությունը.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N\ \forall n \in N \left(n \ge n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon\right):$$

Եթե a թիվը x_n հաջորդականության սահմանն է, ապա գրում են $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ կամ $x_n \to a$ (x_n-ը ձգտում է a-ին): Վերջավոր սահման ունեցող հաջորդականությունը կոչվում է զուգամետ, չունեցողը՝ տարամետ:

Զուգամետ հաջորդականության սահմանը միակն է:

x_n հաջորդականությունը կոչվում է անվերջ փոքր, եթե $x_n \to 0$: x_n հաջորդականությունը կոչվում է անվերջ մեծ, եթե $\forall E > 0\ \exists n_0 \in N\ \forall n \in N \left(n \ge n_0 \Rightarrow |x_n| > E\right)$: Այս դեպքում գրում են $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ կամ $x_n \to \infty$: Ընդունված են նաև ա) $x_n \to -\infty$, բ) $x_n \to +\infty$ նշանակումները, եթե ա) $\forall E > 0\ \exists n_0 \in N\ \forall n \in N \left(n \ge n_0 \Rightarrow x_n < -E\right)$; բ) $\forall E > 0\ \exists n_0 \in N\ \forall n \in N$ $\left(n \ge n_0 \Rightarrow x_n > E\right)$:

Ն ե ր դ ր վ ա ծ   մ ի ջ ա կ ա յ ք ե ր ի   լ ե մ մ ա ն : Փակ միջակայքերի (հատվածների) $\{[a_n; b_n] : n \in N\}$ ընտանիքը կոչվում է ներդրված միջակայքերի ընտանիք, եթե $\forall n \in N$ $\left([a_n; b_n] \supset [a_{n+1}; b_{n+1}]\right)$:

Լեմմա (Կոշի-Կանտորի սկզբունքը): Եթե ներդրված միջակայքերի $\{[a_n; b_n] : n \in N\}$ ընտանիքն այնպիսին է, որ $b_n - a_n \to 0$, ապա գոյություն ունի c թիվ, ընդ որում միակը, որը պատկանում է այդ միջակայքերից յուրաքանչյուրին. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n] = \{c\}$:

Սահմանի գոյության հայտանիշներ: Եթե y_n և z_n հաջորդականությունները զուգամետ են և $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, ապա ցանկացած x_n հաջորդականություն, որը բավարարում է $y_n \le x_n \le z_n$ անհավասարություններին, նույնպես զուգամետ է և $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$:

Վայերշտրասի թեորեմը: Ցանկացած ի վերջո չնվազող և վերևից սահմանափակ հաջորդականություն զուգամետ է:

Կոշիի զուգամիտության սկզբունքը: x_n հաջորդականությունը կոչվում է ֆունդամենտալ, եթե

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in N\ \ \forall m,n\in N\ \left(m>n\ge n_0\Rightarrow\left|x_m-x_n\right|<\varepsilon\right):$$

Որպեսզի x_n հաջորդականությունը լինի զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն լինի ֆունդամենտալ:

Թվաբանական գործողություններ և անհավասարություններ: Եթե x_n և y_n հաջորդականությունները զուգամետ են, ապա զուգամետ են $x_n \pm y_n$, $x_n y_n$, իսկ եթե $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \ne 0$, $\dfrac{x_n}{y_n}$ հաջորդականությունները, ընդ որում

ա) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n \pm y_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

բ) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

գ) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$:

Եթե $\forall n\ge n_0\ \left(x_n\le y_n\right)$, ապա $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$:

Ենթահաջորդականություններ և մասնակի սահմաններ: Բնական թվերից կազմված ցանկացած $k_1<k_2<\cdots<k_n<\cdots$ հաջորդականության համար $z_n = x_{k_n}$ հաջորդականությունը կոչվում է x_n հաջորդականության ենթահաջորդականություն:

a թիվը ($-\infty$-ը, $+\infty$-ը) կոչվում է x_n հաջորդականության մասնակի սահման, եթե x_n հաջորդականության որևէ ենթահաջորդականություն ձգտում է a-ի ($-\infty$-ի, $+\infty$-ի): x_n հաջորդականության մասնակի սահմաններից ամենափոքրին (ամենամեծին) անվանում են x_n հաջորդականության ստորին (վերին) սահման և նշանակում $\underline{\lim}\limits_{n\to\infty} x_n$ ($\overline{\lim}\limits_{n\to\infty} x_n$): Ընդ որում, եթե $x_n\to-\infty\ (+\infty)$, ապա $\underline{\lim}\limits_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty\ (+\infty)$:

Որպեսզի x_n հաջորդականությունն ունենա սահման (վերջավոր կամ անվերջ), անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\underline{\lim}\limits_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}\limits_{n\to\infty} x_n$:

Բոլցանո–Վայերշտրասի լեմման: ա) Ցանկացած անվերջ և սահմանափակ բազմություն ունի առնվազն մեկ կուտակման կետ: բ) Ցանկացած սահմանափակ հաջորդականություն ունի զուգամետ ենթահաջորդականություն:

Ապացուցել x_n հաջորդականության սահմանափակությունը (188-197).

188. $x_n = (-1)^n$:

189. $x_n = \sin n!$:

190. $x_n = \dfrac{1-n}{\sqrt{n^2+1}}$:

191. $x_n = \dfrac{n+(-1)^n}{3n-1}$:

192. $x_n = \dfrac{5n^2+6}{(n^4+1)(n^2-2)}$:

193. $x_n = \dfrac{\sqrt{n^2+2}}{(n+3)(\sqrt{n}+1)}$:

194. $x_n = \dfrac{n+arctgn}{n+\ln n}$:

195. $x_n = \dfrac{\lg^2 n+10}{\lg^2 n+2}$:

196. $x_n = \lg\left(\sqrt{2n^2+1}-n\right)-\lg n$:

197. $x_n = \dfrac{5^{2n+1}+2^n}{1-25^n}$:

Ստուգել, որ x_n հաջորդականությունը սահմանափակ չէ (198-206).

198. $x_n = (-1)^n n^2$:

199. $x_n = q^n \quad (q>1)$:

200. $x_n = n+(-1)^n n$:

201. $x_n = n\sin\dfrac{\pi n}{4}$:

202. $x_n = 2^{n(-1)^n}$:

203. $x_n = \dfrac{1-n}{\sqrt{n}}$:

204. $x_n = (n-1)^{\sin\frac{n\pi}{2}}$:

205. $x_n = \dfrac{3^n-2^n}{2^n+1}$:

206. $x_n = \dfrac{\sqrt{n^3+2n}}{\sqrt{n+1}}$:

Ապացուցել, որ x_n հաջորդականությունը մոնոտոն (ի վերջո մոնոտոն) է և պարզել մոնոտոնության բնույթը (207-217).

207. $x_n = \dfrac{100n}{n^2+16}$:

208. $x_n = n^3-6n$:

209. $x_n = nq^n, q>0$:

210. $x_n = \dfrac{1-n}{\sqrt{n}}$:

211. $x_n = \frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}}$:

212. $x_n = 2^n - 100n$:

213. $x_n = 3^n - 2^n$:

214. $x_n = \frac{2^n}{n}$:

215. $x_n = \lg(n+1) - \lg n$:

216. $x_n = \lg\left(n^2+9n\right) - 2\lg n$:

217. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k(2k+1)} - \frac{1}{2(n+1)}$:

Ելնելով հաջորդականության սահմանի սահմանումից՝ ապացուցել հավասարությունը (218-226).

218. ա) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$; բ) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{2n-1} = \frac{3}{2}$:

219. ա) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$; բ) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0,\ p > 0$:

220. ա) $\lim_{n\to\infty} \frac{2+(-1)^n}{n} = 0$; բ) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sin\frac{n\pi}{12} = 0$:

221. ա) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{3n-1}} = 0$; բ) $\lim_{n\to\infty} q^n = 0,\ |q| < 1$:

222. ա) $\lim_{n\to\infty} \log_{n+1} 2 = 0$; բ) $\lim_{n\to\infty} \log_2 \frac{2n+1}{n} = 1$:

223. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2+n+1} = 1$:

224. $\lim_{n\to\infty} \frac{3n\sin n + 1}{2n^2+n-1} = 0$:

225. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{8n^2-2n+10} = \frac{1}{4}$:

226. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n^2+1}}{\sqrt{n^2+2n+10}} = \sqrt{3}$:

227. Գտնել բոլոր այն բնական n-երը, որոնց համար $\frac{1}{2} < \frac{n+10}{2n-1} < \frac{1}{2} + \varepsilon$, որտեղ

ա) $\varepsilon = \frac{1}{2}$; բ) $\varepsilon = \frac{1}{k+1},\ k \in N$:

228. Դիցուք $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ և $y_n = x_{n+p}$ $(p \in N)$: Ապացուցել, որ y_n հաջորդականությունը զուգամետ է և $\lim_{n\to\infty} y_n = a$:

229. Ապացուցել, որ զուգամետ հաջորդականությունը սահմանափակ է:

230. Ապացուցել, որ ի վերջո հաստատուն հաջորդականությունը զուգամետ է:

231. Տրված է $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$: Ապացուցել, որ $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$: Օրինակներով համոզվել, որ $|x_n| \to |a| \Rightarrow x_n \to a$ հետևությունը ճշմարիտ չէ:

231.1. Տրված է $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$: Ապացուցել, որ ցանկացած բնական k թվի համար $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{2k} = a^{2k}$: Կառուցել x_n հաջորդականության օրինակ, որի համար $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{2k} = a^{2k}$, բայց x_n -ը չի ձգտում a -ի:

231.2. Ապացուցել, որ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{2k-1} = a^{2k-1}$ $(k \in N)$:

232. Ապացուցել, որ եթե $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ և ինչ-որ համարից սկսած $x_n \geq b$ $(x_n \leq c)$, ապա $a \geq b$ $(a \leq c)$:

233. Ապացուցել, որ եթե $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > a$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n < b$), ապա ինչ-որ համարից սկսած՝ $x_n > a$ ($x_n < b$):

234. Ապացուցել, որ

ա) անվերջ փոքր հաջորդականության և սահմանափակ հաջորդականության արտադրյալն անվերջ փոքր է;

բ) զրոյից տարբեր անդամներով x_n հաջորդականությունն անվերջ փոքր է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\dfrac{1}{x_n}$ հաջորդականությունն անվերջ մեծ է:

235. Ստուգել, որ հետևյալ հաջորդականություններն անվերջ փոքր են.

ա) $x_n = \dfrac{\sin n}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$; բ) $x_n = \dfrac{(-1)^n n}{n^2+1}$; գ) $x_n = \dfrac{[\sqrt{n}]}{n\sqrt{n}}$:

Ստուգել, որ x_n հաջորդականությունն անվերջ մեծ է (236-241).

236. $x_n = (-1)^n n$:

237. $x_n = \lg\lg n$:

238. $x_n = (\lg n)^3$:

239. $x_n = q^n$, $|q| > 1$:

240. $x_n = 4\sqrt{n} - n$:

241. $x_n = \dfrac{2^n(n+1)}{2n+1}$:

242. Ստուգել, որ $x_n = n^{(-1)^n}$ հաջորդականությունը սահմանափակ չէ, բայց անվերջ մեծ էլ չէ:

Ապացուցել, որ x_n հաջորդականությունը տարամետ է (243-248).

243. $x_n = (-1)^n$:

244. $x_n = \sin\frac{n\pi}{12}$:

245. $x_n = \frac{n}{n+1}\cos\frac{2\pi n}{3}$:

246. $x_n = 2^{(-1)^n n}$:

247. $x_n = \frac{n^2-2n}{n+1}$:

248. $x_n = n^2\sin\frac{\pi n}{4}$:

Ապացուցել հավասարությունը (249-256).

249. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n} = 0$:

250. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n} = 0 \quad (a>1)$:

251. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0$:

252. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1 \quad (a>0)$:

253. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$:

254. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln n} = 1$:

255. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n} = 0 \quad (a>1)$:

256. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$:

Հաշվել սահմանը (257-271).

257. ա) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$: բ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+a_1)(n+a_2)}-n\right)$.

258. ա) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$; բ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\cdot arctg 2^n}{2^n}$:

259. ա) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2}{n^3}$; բ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}{n^3}$:

260. ա) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$; բ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}\right)$:

261. ա) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left[2+(-1)^n\right]^n}{3^n\lg n}$; բ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+3^{-n}}{2^{-n}-3^n}$:

262. ա) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3+2n^2+1}{n^3-n+10}$; բ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-5n+3}{n^3+n^2-7}$;

գ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4+2n^3-1}{3n^3+n^2-5}$;

դ) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \cdots + a_{p-1} n + a_p}{b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + \cdots + b_{q-1} n + b_q}$ $(a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, p, q \in N)$:

263. ա) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+4}-2}{3n}$; բ) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(n\sqrt{n^2+1}-n^2\right)}$:

264. ա) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}\right)$;

բ) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}$:

265. ա) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+2n^2}-n\right)$; բ) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2}\right)$:

266. ա) $\lim_{n\to\infty} \frac{5+\lg n}{1+\lg n^2}$; բ) $\lim_{n\to\infty} \frac{\lg(2^n+1)}{n+1}$:

267. ա) $\lim_{n\to\infty} \frac{n \log_2(n+3)}{n^2+2}$; բ) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+\sqrt{n}\ln n}{n^2+n+1}$:

268. ա) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+3^n}{n+3^n}$; բ) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+\ln n+5^n}{n^2-5^n}$:

269. $\lim_{n\to\infty} n^2\left(\left(1+\frac{p}{n}\right)^q - \left(1+\frac{q}{n}\right)^p\right)$ $(p, q \in N)$:

270. $\lim_{n\to\infty} \frac{1-2+3-\cdots+(2n-1)-2n}{\sqrt{n^2+1}}$:

271. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\left(a+\frac{1}{n}\right)^2 + \left(a+\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(a+\frac{n-1}{n}\right)^2\right]$:

Օգտվելով մոնոտոն հաջորդականության զուգամիտության վերաբերյալ թեորեմից՝ ապացուցել հաջորդականության զուգամիտությունը (272-276).

272. ա) $x_n = \frac{1}{n}$; բ) $x_n = \frac{n+1}{3n+7}$:

273. ա) $x_n = \frac{n}{3^n}$; բ) $x_n = \frac{3n}{n^2+7n-1}$:

274. ա) $x_n = \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$; բ) $x_n = \dfrac{10}{1}\cdot\dfrac{11}{3}\cdots\dfrac{n+9}{2n-1}$:

275. ա) $x_n = \left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$;

բ) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n\left(1-\dfrac{1+(-1)^n}{2n}\right)$:

276. ա) $x_n = \dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\cdots+\dfrac{1}{2n}$; բ) $x_n = \dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}$:

277. Ապացուցել, որ եթե մոնոտոն հաջորդականությունը սահմանափակ չէ, ապա անվերջ մեծ է:

278. Դիցուք՝ $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $y_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$: Ապացուցել, որ

ա) x_n հաջորդականությունը աճող է, իսկ y_n-ը՝ նվազող ;

բ) ցանկացած բնական m-ի և n-ի համար $x_m < y_n$;

գ) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ (այդ սահմանը նշանակում են e);

դ) $2 < e < 3$;

ե) $0 < e - x_n < \dfrac{e}{n}$;

զ) $\dfrac{1}{n+1} < \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) < \dfrac{1}{n}$, որտեղ նշանակված է $\ln x = \log_e x$:

Օգտվելով Կոշիի զուգամիտության սկզբունքից՝ ապացուցել հաջորդականության զուգամիտությունը (279-283).

279. ա) $x_n = \dfrac{1}{n+2}$; բ) $x_n = \dfrac{n+1}{n^2+3}$:

280. ա) $x_n = \dfrac{2n+1}{3n+2}$; բ) $x_n = \dfrac{n+\sin n}{n+7}$:

281. ա) $x_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1}, |q| < 1$;

բ) $x_n = \dfrac{\sin 1}{2}+\dfrac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\dfrac{\sin n}{2^n}$:

282. ա) $x_n = \dfrac{1}{1\cdot 2}-\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$;

բ) $x_n = \frac{\cos 1!}{1\cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}$:

283. ա) $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$; բ) $x_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}$ $(p > 2)$:

Օգտվելով Կոշիի զուգամիտության սկզբունքից՝ ապացուցել հաջորդականության տարամիտությունը (284-286).

284. ա) $x_n = (-1)^n + 1$; բ) $x_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$:

285. ա) $x_n = \sin \frac{\pi n}{4}$; բ) $x_n = \frac{n \cos n\pi - 1}{2n}$:

286. ա) $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ բ) $x_n = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$:

287. Զուգամե՞տ է արդյոք x_n հաջորդականությունը, եթե ցանկացած p բնական թվի համար $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+p} - x_n) = 0$: Բերել համապատասխան օրինակ:

287.1. ա) Դիցուք x_n հաջորդականության համար $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = a$ և $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = b$: Ապացուցել, որ x_n հաջորդականության մասնակի սահմանների բազմությունը $\{a;b\}$-ն է:

բ) Դիցուք $p \in N$ և $\lim\limits_{n\to\infty} x_{pn+k} = a_k$, $k = 0;1;\ldots;p-1$: Ապացուցել, որ x_n հաջորդականության մասնակի սահմանների բազմությունը $\{a_0;a_1;\ldots;a_{p-1}\}$-ն է:

Գտնել $\inf x_n$-ը, $\sup x_n$-ը, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$-ը և $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$-ը (288-295).

288. $x_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \frac{3}{n}\right)$:

289. $x_n = 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{3}$:

290. $x_n = \frac{n}{n+1}\sin^2\frac{\pi n}{4}$:

291. $x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$:

292. $x_n = \frac{n-1}{n+1}\cos\frac{2n\pi}{3}$:

293. $x_n = n^{(-1)^n}$:

294. $x_n = \frac{1}{n - 10,2}$;

295. $x_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}}$:

296. Դիցուք՝ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, իսկ y_n-ը ցանկացած թվային հաջորդականություն է: Կարելի՞ է արդյոք պնդել, որ $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = 0$: Բերել համապատասխան օրինակներ:

297. Դիցուք՝ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

ա) Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ կա՛մ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, կա՛մ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$:

բ) Կարո՞ղ են արդյոք x_n և y_n հաջորդականությունները միաժամանակ լինել անսահմանափակ:

Բերել համապատասխան օրինակներ:

գ) Ապացուցել, որ եթե x_n և y_n հաջորդականությունները դրական են, ապա կամ այդ հաջորդականություններից գոնե մեկը ձգտում է զրոյի, կամ $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n = 0$:

Այսուհետև պայմանավորվենք օգտագործել հետևյալ «թվաբանական» կանոնները.

$+\infty + (+\infty) = +\infty$, $+\infty + a = +\infty$, $+\infty \cdot (+\infty) = +\infty$,

$-\infty + (-\infty) = -\infty$, $-\infty + a = -\infty$, $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$:

298. Ապացուցել, որ a թիվը ($-\infty$-ը, $+\infty$-ը) կլինի x_n հաջորդականության մասնակի սահման այն և միայն այն դեպքում, երբ a-ի ($-\infty$-ի, $+\infty$-ի) ցանկացած շրջակայք պարունակում է x_n-ի անվերջ թվով անդամներ:

Գտնել հաջորդականության մասնակի սահմանները (299-302):

299. $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{7}{8}, \dots, \dfrac{1}{2^n}, \dfrac{2^n-1}{2^n}, \dots$; 300. $x_n = \cos\dfrac{n\pi}{2} + \dfrac{1}{n}$;

301. $x_n = 3\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) + 2(-1)^n$; 302. $x_n = \dfrac{1}{2}\left[(a+b) + (-1)^n (a-b)\right]$;

303. Բերել թվային հաջորդականության օրինակ, որի մասնակի սահմանները նախապես տրված $a_1, a_2, \dots, a_p$ թվերն են:

Բ

Ապացուցել հաջորդականության սահմանափակությունը (304-307).

304. $x_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dots + \dfrac{1}{n} - \ln n$: 305. $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{4k^2 - 1}$:

306. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}$: 307. $x_n = \log_2\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right), n \geq 2$:

308. Ինչպիսի՞ p-ի և q-ի համար, $0 \leq q < p$,

$$x_n = \sqrt[k]{n^p + an^q + 1} - \sqrt[k]{n^p + bn^q + 1} \quad (a \neq b)$$

հաջորդականությունը կլինի սահմանափակ:

309. x_n բնական թվերի հաջորդականությունն այնպիսին է, որ $S_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է: Ապացուցել, որ սահմանափակ է նաև $y_n = \left(1+\frac{1}{x_1}\right)\left(1+\frac{1}{x_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x_n}\right)$ հաջորդականությունը:

Անդրադարձ բանաձևով տրված հաջորդականության ընդհանուր անդամն արտահայտել n-ով և հետազոտել սահմանափակությունը (310-313).

310. $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_{n+1} = \frac{1}{2-x_n}$:

311. $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_{n+2} = \frac{3x_{n+1} - x_n}{2}$:

312. $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n$:

313. $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_{n+2} = -3x_{n+1} - 2x_n + 6$:

Ապացուցել, որ x_n հաջորդականությունը սահմանափակ չէ (314-317).

314. ա) $x_n = \sum_{k=1}^{n} kq^{n-k}$, $q \in R$, $q \neq 0$; բ) $x_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2$:

315. ա) $x_n = \frac{2^n}{n^2}$; բ) $x_n = \frac{n+1}{\log_2(n+1)}$:

316. ա) $x_n = \sqrt[n]{n!}$ բ) $x_n = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}$:

317. $x_1 = x_2 = 1$, $x_{n+2} = x_{n+1} + 6x_n$:

Ապացուցել, որ x_n հաջորդականությունը մոնոտոն (ի վերջո մոնոտոն) է (318-321).

318. $x_n = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=1}^{n} k \cdot k!$: 319. $x_n = \frac{a^n - 1}{n}$, $a > 0$:

320. $x_n=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n,\ x>0$:

321. $x_1=0,\ x_{n+1}=\frac{x_n+1}{n+1}$:

322. Դիցուք՝ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ և $x_n\geq-1,\ n\in N$: Ապացուցել, որ ցանկացած p-ի համար $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[p]{1+x_n}=1$:

323. Դիցուք՝ $x_n\to\infty$, երբ $n\to\infty$: Ապացուցել, որ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}=e$:

324. Դիցուք՝ $x_n>0$ և $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\neq0$:Ապացուցել, որ $\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=\ln a$:

325. Ապացուցել, որ $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)=\ln a\quad(a>0)$:

326. Ապացուցել, որ $x_n=\sin n$ հաջորդականությունը տարամետ է:

Հաշվել սահմանը (327-340).

327. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}$:

328. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$:

329. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$:

330. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}\right)$:

331. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right]$:

332. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\cdot3^n+1}{n!+1}$:

333. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}+(n+1)!}{n(3^n+n!)}$:

334. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}-1}{\sqrt[n]{b}-1}\quad(a,b>1)$:

335. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2+4^n}{n+5^n}}$:

336. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^n+n^2 2^n-1}{n^4+(n!)^2}$:

337. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\cdots+\sqrt[n]{a_m}}{m}\right)^n$, որտեղ $a_i>0,\ i=1,2,\ldots,m$:

338. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}\right)$, որտեղ a_n-ը զրոյից տարբեր անդամներով և $d\neq 0$ տարբերությամբ թվաբանական պրոգրեսիա է:

339. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}\right)$, որտեղ a_n-ը դրական անդամներով և $d\neq 0$ տարբերությամբ թվաբանական պրոգրեսիա է:

340. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(q+2q^2+\cdots+nq^n\right)$ $\quad(|q|<1)$:

341. Ապացուցել, որ

ա) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=e$; $\qquad$ բ) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}=\frac{1}{e}$:

342. Դիցուք $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$: Ապացուցել, որ

ա) $e-S_n<\frac{n+2}{n!(n+1)^2}$; $\qquad$ բ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e-S_n}{e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=0$:

343. Ապացուցել, որ $\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<e\left(\frac{n}{2}\right)^n$:

344. Դիցուք $m\in N$ և $M=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}$: Ապացուցել, որ $e^M>m+1$:

Հետազոտել հաջորդականության զուգամիտությունը և հաշվել սահմանը (345-351).

345. $x_1=0,\ x_{n+1}=\frac{x_n+1}{x_n+2}$: $\qquad$ 346. $0<x_1<1,\ x_{n+1}=x_n(2-x_n)$:

347. $x_1=13,\ x_{n+1}=\sqrt{12+x_n}$: $\qquad$ 348. $x_1=\sqrt[k]{a},\ x_{n+1}=\sqrt[k]{ax_n},\ a>0$:

349. $x_1=0,\ x_{n+1}=\frac{x_n+A}{4}$: $\qquad$ 350. $x_1=M>0,\ x_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2x_n+\frac{M}{x_n^2}\right)$:

351. $x_1=\sqrt{a},\ x_{n+1}=\sqrt{a+x_n},\ a>0$:

352. Տրված է $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$: Ի՞նչ կարելի է ասել $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$-ի մասին:

353. Դիցուք x_n հաջորդականությունը սահմանափակ է վերևից և բավարա-

բում է $x_{n+1}-x_n>-\frac{1}{n^2}$ $(n\in N)$ անհավասարությունը: Ապացուցել, որ x_n-ը զուգամետ է:

354. Դիցուք x_n հաջորդականության համար $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+2}-x_n)=0$: Ապացուցել, որ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=0$:

355. Գտնել $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\ldots$ հաջորդականության մասնակի սահմանների բազմությունը:

356. Ապացուցել, որ ցանկացած հաջորդականություն ունի մոնոտոն ենթահաջորդականություն:

357. Ապացուցել, որ

$$\inf x_n\le\varliminf_{n\to\infty}x_n\le\varlimsup_{n\to\infty}x_n\le\sup x_n:$$

Բերել օրինակներ, որ անհավասարության տարբեր մասերում լինի ա) հավասարություն; բ) խիստ անհավասարություն:

357.1. Ապացուցել, որ

ա) $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{k\ge n}x_k$; բ) $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\inf\limits_{k\ge n}x_k$:

358. Ապացուցել, որ եթե x_n հաջորդականությունը զուգամետ է, ապա ցանկացած y_n հաջորդականության համար ճշմարիտ են հետևյալ հավասարությունները.

ա) $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n$;

բ) $\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n+\varliminf\limits_{n\to\infty}y_n$:

359. Ապացուցել, որ եթե x_n,y_n հաջորդականություններից որևէ մեկը սահմանափակ է, ապա

ա) $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n+\varliminf\limits_{n\to\infty}y_n\le\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)\le\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n$;

բ) $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n\le\varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)\le\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n$:

Բերել հաջորդականությունների օրինակներ, որ անհավասարությունների բոլոր մասերում լինեն խիստ անհավասարություններ:

360. Ապացուցել, որ եթե $0<\lim\limits_{n\to\infty}x_n<+\infty$, ապա ցանկացած y_n հաջորդականության համար $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_ny_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n$:

361. Ապացուցել, որ եթե $x_n > 0$ $(n \in N)$ և $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{1}{x_n} = 1$, ապա x_n հաջորդականությունը զուգամետ է:

362. Դիցուք x_n հաջորդականությունը բավարարում է $0 \le x_{m+n} \le x_m + x_n$ $(m, n \in N)$ պայմանին:Ապացուցել, որ $\frac{x_n}{n}$ հաջորդականությունը զուգամետ է:

363. Ապացուցել, որ զուգամետ հաջորդականությունն ունի փոքրագույն կամ մեծագույն անդամ:

364. x_n հաջորդականությունն անվանում են սահմանափակ վոփոխության հաջորդականություն, եթե գոյություն ունի այնպիսի C հաստատուն, որ կամայական n-ի համար

$$\sigma_n = |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| < C:$$

Ապացուցել, որ

ա) մոնոտոն և սահմանափակ հաջորդականությունն ունի սահմանափակ վոփոխություն;

բ) սահմանափակ վոփոխության հաջորդականությունը զուգամետ է: Բերել x_n հաջորդականության օրինակ, որը զուգամետ է,բայց սահմանափակ վոփոխության չէ:

գ) ցանկացած սահմանափակ փոփոխության հաջորդականության համար գոյություն ունեն a_n և b_n մոնոտոն աճող ու սահմանափակ հաջորդականություններ, այնպիսիք որ $x_n = a_n - b_n$, $(n \in N)$:

365. Ապացուցել, որ եթե x_n հաջորդականությունը զուգամետ է, ապա

$y_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$, $(n \in N)$ հաջորդականությունը նույնպես զուգամետ է և $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$: Ընդհանուր դեպքում y_n հաջորդականության զուգամիտությունից չի հետևում x_n հաջորդականության զուգամիտությունը: Բերել օրինակ:

366. Դիցուք x_n հաջորդականության համար $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = a$ և $\lim\limits_{n\to\infty} n(x_{n+1} - x_n) = 0$: Ապացուցել, որ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$:

367. Ապացուցել, որ եթե $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, ապա $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) = +\infty$:

368. Ապացուցել, որ եթե x_n հաջորդականությունը զուգամետ է և $x_n > 0$, ապա $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$:

369. Ապացուցել, որ եթե $x_n > 0$ և գոյություն ունի $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$, ապա

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$:

370. Ապացուցել, որ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$:

371. Ապացուցել, որ ցանկացած սահմանափակ անվերջ բազմություն ունի կուտակման կետ:

372. Դիցուք՝ $[a_1;b_1] \supset [a_2;b_2] \supset \cdots \supset [a_n;b_n] \supset \cdots$: Ապացուցել, որ

ա) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n;b_n] \neq \varnothing$;

բ) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n;b_n]$ բաղկացած է մեկ կետից այն և միայն այն դեպքում, երբ $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$;

գ) ճշմարի՞տ են արդյոք ձևակերպված պնդումները $(a_n;b_n)$ բաց միջակայքերի համար:

373. Դիցուք N_1 և N_2 բազմությունների միավորումը բնական թվերի բազմությունն է: Ապացուցել, որ եթե $\{x_n\}_{n\in N_1}$ հաջորդականության մասնակի սահմանների բազմությունը A-ն է, իսկ $\{x_n\}_{n\in N_2}$ հաջորդականության մասնակի սահմանների բազմությունը՝ B-ն, ապա x_n հաջորդականության մասնակի սահմանների բազմությունը $A \bigcup B$-ն է:

Գ.

374. Հետազոտել $x_n = \left(1 + \frac{1}{a_1}\right)\left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)$ հաջորդականության սահմանափակությունը, որտեղ $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (n+1)(a_n + 1)$:

Ապացուցել x_n հաջորդականության սահմանափակությունը (375-377).

375. $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}$: 376. $x_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{k}\frac{1}{n+1-j}$: 377. $x_n=\frac{1}{(2n-1)!}\sum\limits_{k=1}^{n}k\cdot k!$:

378. Տրված է՝ $x_1=2$, $x_{n+1}=\frac{x_n^4+1}{5x_n}$: Ապացուցել, որ $\frac{4\sqrt[4]{3}}{15}<x_n\le 2$:

379. Դիցուք՝ $x_1=a$ և $x_n=\frac{x_{n-1}}{2+x_{n-1}}$, $n>1$: Ինչպիսի՞ a-երի դեպքում բոլոր n-երի համար x_n-ը կլինի որոշված:

380. Դիցուք՝ $x_1=a$:

ա) Ապացուցել, որ եթե $a\notin[3;4]$, ապա գոյություն ունի x_n հաջորդականություն, որը բավարարում է $x_{n+1}=\frac{x_n}{4-x_n}$ $(n\in N)$ հավասարմանը;

բ) գտնել a-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում գոյություն չունի նշված հավասարմանը բավարարող հաջորդականություն:

381. Տրված է՝ $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+y_n)$, $y_{n+1}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(x_n^2+y_n^2\right)}$, $x_1=a>0$, $y_1=b>a$: Ապացուցել, որ

ա) $y_n\ge x_n$, $x_n\uparrow$ (աճող է), $y_n\downarrow$ (նվազող է);

բ) $y_{n+1}-x_{n+1}\le\frac{b-a}{4^n}$:

382. Տրված է՝ $x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}$, $y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}$, $x_1=a>0$, $y_1=b>a$: Ապացուցել, որ

ա) $x_n\uparrow$, $y_n\downarrow$ և x_n, y_n հաջորդականությունները սահմանափակ են;

բ) $y_{n+1}-x_{n+1}\le\frac{b-a}{2^n}$ $(n\in N)$:

383. x_n և y_n հաջորդականությունները բավարարում են $x_1=a>0$, $y_1=b>0$, $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+y_n)$, $y_{n+1}=\frac{2x_ny_n}{x_n+y_n}$ պայմաններին: Ապացուցել, որ այդ հաջորդականությունները զուգամետ են և ունեն միևնույն սահմանը: Գտնել այդ սահմանը:

384. Դիցուք՝ $\binom{0}{\alpha}=1$, $\binom{n}{\alpha}=\binom{n-1}{\alpha}\frac{\alpha-n+1}{n}$, $(n\in N,\alpha\in R)$: Ապացուցել, որ

ա) եթե $\alpha\geq -1$, ապա $\left|\binom{n}{\alpha}\right|$ հաջորդականությունն ի վերջո չաճող է;

բ) եթե $\alpha<-1$, ապա $\left|\binom{n}{\alpha}\right|$ հաջորդականությունն ի վերջո չնվազող է:

385. Դիցուք՝ $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{t}{n}\right)$: Ապացուցել, որ ցանկացած $t\in\left[0;\frac{1}{2}\right)$ թվի համար a_n հաջորդականությունն ի վերջո աճող է, իսկ ցանկացած $t\in\left[\frac{1}{2};1\right]$ թվի համար՝ նվազող:

386. Դիցուք՝ $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$: Ապացուցել, որ

ա) $\frac{1}{4}<n\left(\frac{e}{x_n}-1\right)<\frac{1}{2}$ $(n=1,2,\cdots)$;

բ) $\frac{3x_n+y_n}{4}<e<\frac{x_n+y_n}{2}$;

գ) $\frac{e}{4n+4}<e-x_n<\frac{e}{2n}$:

387. Դիցուք՝ $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$: Ապացուցել, որ

ա) կամայական $t\in\left[0;\frac{1}{2}\right)$ թվի համար գոյություն ունի այնպիսի $n_0=n_0(t)$ համար, որ $(1-t)x_n+ty_n<e$, երբ $n>n_0$;

բ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n\left(1+\frac{1}{2n}\right)-e}{e-x_n}=0$;

գ) $\frac{e}{2n+2}<e-x_n<\frac{e}{2n+1}$:

388. Ապացուցել, որ.

ա) եթե $a<e$, ապա ի վերջո $n!\left(\frac{a}{n}\right)^n<e$; բ) $\lim\limits_{n\to\infty} n!\left(\frac{e}{n}\right)^n=+\infty$:

389. Դիցուք $\sigma_n=3-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+1)!}$: Ապացուցել, որ

ա) $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=e$; բ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sigma_n-e}{e-S_n}=0$, որտեղ $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$:

390. Դիցուք $a_n>0$ $(n\in N)$:Ապացուցել, որ $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left(\frac{a_1+a_{n+1}}{a_n}\right)^n\geq e$:

Հետազոտել հաջորդականության զուգամիտությունը (391-394).

391. $x_1=\frac{1}{2}$, $x_{n+1}=(1-x_n)^2$:

392. $x_1=a$, $0<a<1$, $x_{n+1}=1-x_n^2$:

393. $x_1>0$, $x_{n+1}=\frac{a}{x_n}+b$, $a>0$, $b>0$:

394. $x_1=\frac{1}{2}$, $x_{n+1}=\frac{4}{3}x_n-x_n^2$:

395. Դիցուք՝ $x_n=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n}}}}$: Ապացուցել, որ

ա) x_n հաջորդականությունը մոնոտոն է և սահմանափակ;

բ) ցանկացած n և k բնական թվերի համար $x_n<x_k+\frac{1}{2^{k-1}}$:

396. Դիցուք՝ $x_n=\sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\cdots+\sqrt{a_n}}}$ $(a_i>1, i\in N)$: Ապացուցել, որ x_n հաջորդականությունը զուգամետ է, եթե $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\ln\ln a_n<\ln 2$:

397. Տրված է x_n հաջորդականությունը: Դիցուք ցանկացած $\alpha>1$ թվի համար $\lim\limits_{m\to\infty}x_{[\alpha m]}=0$, որտեղ $[\alpha m]$-ը $(m\in N)$ αm-ի ամբողջ մասն է: Ապացուցել, որ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$:

398. Դիցուք՝ $x_n>0$ և $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$: Ապացուցել, որ

ա) գոյություն ունեն անվերջ թվով n_k համարներ, այնպիսիք, որ $\forall n\in N$ $(n<n_k\Rightarrow x_n>x_{n_k})$;

բ) գոյություն ունեն անվերջ թվով n_k համարներ, այնպիսիք, որ $\forall n\in N$ $(n>n_k\Rightarrow x_n<x_{n_k})$:

399. Դիցուք x_n-ը ոչ բացասական թվերի հաջորդականություն է, որը բավարարում է $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} < +\infty$ և $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=0$ պայմաններին: Ապացուցել, որ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n^2}=0$:

a-ի և b-ի ինչ՞ արժեքների դեպքում x_n հաջորդականությունը կլինի զուգամետ (400-402).

400. $x_1=a$, $x_2=b$, $x_{n+2}=4x_{n+1}-3x_n$: 401. $x_1=a$, $x_2=b$, $x_{n+2}=x_{n+1}+2x_n$:

402. $x_1=a$, $x_2=b$, $x_{n+2}=\frac{5}{2}x_{n+1}+x_n$:

403. Տրված է $x_1=a$, $x_{n+1}=a\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)$ հաջորդականությունը: Ապացուցել, որ

ա) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$, եթե $a\geq 1$; բ) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{\frac{a}{1-a}}$, եթե $0<a<1$:

404. Հետազոտել $x_n=\sqrt{2\sqrt{3\cdots\sqrt{n}}}$ հաջորդականության զուգամիտությունը:

405. Դիցուք՝ $x_1=1$, $x_2=1$, $x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$ (Ֆիբոնաչիի հաջորդականություն): Ապացուցել, որ $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ հաջորդականությունը զուգամետ է և գտնել նրա սահմանը:

406. Դիցուք $x_1=a$, $x_2=b$, $x_{n+2}=px_{n+1}+qx_n$, որտեղ a,b,p,q-ն տրված հաստատուն թվեր են: Ապացուցել, որ

ա) եթե $\lambda^2-p\lambda-q=0$ հավասարումն ունի λ_1 և λ_2 իրարից տարբեր իրական արմատներ, ապա

$$x_n=\frac{(\lambda_2a-b)\lambda_1^{n-1}-(\lambda_1a-b)\lambda_2^{n-1}}{\lambda_2-\lambda_1};$$

բ) եթե $\lambda^2-p\lambda-q=0$ հավասարումն ունի $\lambda_0\neq 0$ կրկնակի իրական արմատ, ապա $x_n=\left(2a\lambda_0-b+n(b-a\lambda_0)\right)\lambda_0^{n-2}$;

407. Կառուցել թվային հաջորդականություն, որի համար $A=\{a_i : i\in N\}$ բազմության բոլոր տարրերը լինեն մասնակի սահմաններ: Ստուգել, որ այդպիսի հաջորդականության համար A բազմության բոլոր կուտակման կետերը նույնպես մասնակի սահմաններ են:

408. Ապացուցել, որ

ա) ցանկացած հաջորդականության մասնակի սահմանների բազմությունը փակ է;

բ) ցանկացած A փակ և սահմանափակ բազմության համար գոյություն ունի հաջորդականություն, որի մասնակի սահմանների բազմությունը A-ն է:

409. Կառուցել հաջորդականություն,

ա) որը չունի վերջավոր մասնակի սահման;

բ) որն ունի միակ վերջավոր մասնակի սահմանը, բայց զուգամետ չէ;

գ) որն ունի անվերջ թվով մասնակի սահմաններ;

դ) որի համար յուրաքանչյուր իրական թիվ հանդիսանում է մասնակի սահման:

410. Ապացուցել, որ եթե A և B բազմությունները փակ են և սահմանափակ, ապա $A+B$ և $A \cdot B$ բազմությունները նույնպես փակ են և սահմանափակ: Բերել A և B փակ բազմությունների օրինակներ, որոնց համար $A+B$ և $A \cdot B$ բազմությունները փակ չեն:

411. Ապացուցել, որ եթե x_n հաջորդականությունը սահմանափակ է և $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$, ապա այդ հաջորդականության մասնակի սահմանների բազմությունը $\left[\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n ; \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n\right]$ հատվածն է:

412. Կառուցել հաջորդականություն, որի համար $\varliminf\limits_{n\to\infty}|x_{n+1}-x_n|>0$ և $\left[\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n ; \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n\right]$ հատվածի ցանկացած թիվ այդ հաջորդականության մասնակի սահման է:

413. Ապացուցել, որ ցանկացած a_n չնվազող հաջորդականության համար $x_n=\dfrac{a_n}{n+a_n}$ հաջորդականության մասնակի սահմանների բազմությունը հատված է կամ, եթե x_n-ը զուգամետ է՝ կետ: Բերել a_n հաջորդականության օրինակ, որի դեպքում x_n հաջորդականության մասնակի սահմանների բազմությունը $[0;1]$ հատվածն է:

414. Ապացուցել, որ

ա) $x_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$ հաջորդականությունը զուգամետ է (այդ հաջորդականության սահմանն անվանում են Էյլերի հաստատուն և նրա մոտավոր արժեքն է՝ $C \approx 0{,}577216$);

p) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\ln 2$:

415. Ապացուցել Շտոլցի թեորեմը. դիցուք x_n հաջորդականությունն ի վերջո մոնոտոն է, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$, իսկ y_n հաջորդականությունն այնպիսին է, որ

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}=a$: Ապացուցել, որ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=a$:

416. Դիցուք x_n հաջորդականությունն ի վերջո մոնոտոն է, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$,

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$ և $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}=a$, որտեղ $a\in R$ կամ $a=\pm\infty$: Ապացուցել, որ

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=a$:

Հաշվել սահմանը (417-422).

417. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+1}}\left(1^p+2^p+\cdots+n^p\right)\quad(p\in N)$:

418. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^p}\left(1^p+2^p+\cdots+n^p\right)-\frac{n}{p+1}\right)\quad(p\in N)$:

419. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}$:

420. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2^2+\cdots+n^n}{n^n}$:

421. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\ln\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\right|^p$:

422. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdots\frac{2}{\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\sqrt{2}}}}_{n\ \text{հատ}}}$:

423. Դիցուք a_n սահմանափակ հաջորդականության անդամները բնական թվեր են: Տրված է՝ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=1$: Ապացուցել, որ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=1$:

424. Դիցուք x_n հաջորդականությունը ցանկացած $m,n\in N$, $m\neq n$, թվերի համար բավարարում է $\left|x_m-x_n\right|>\dfrac{1}{n}$ պայմանին: Ապացուցել, որ x_n-ը սահմանափակ չէ:

425. Դիցուք $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}b_n=+\infty$: Ապացուցել, որ գոյություն ունեն այնպիսի m և n բնական թվեր, որ $\left|a_m-a_n\right|>1$ և $\left|b_m-b_n\right|>1$:

426. Տրված է՝ x_n հաջորդականությունը սահմանափակ է և բավարարում է $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n-2x_{n+1}+x_{n+2}\right)=0$ պայմանին: Ապացուցել, որ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n-x_{n+1}\right)=0$:

427. Դիցուք x_n հաջորդականությունը վերևից սահմանափակ է և բավարարում է $x_{n+1}-x_n\geq -a_n$ պայմանին, որտեղ $a_n\geq 0$ $(n\in N)$ և ցանկացած k-ի համար $\sum\limits_{n=1}^{k}a_n<1$: Ապացուցել, որ x_n-ը զուգամետ է:

428. Դիցուք $\{X_n:n\in N\}$-ը ոչ դատարկ, փակ և սահմանափակ ներդրված թվային բազմությունների ցանկացած ընտանիք է: Ապացուցել, որ

ա) $\bigcap\limits_{n\in N}X_n\neq\varnothing$;

բ) $\bigcap\limits_{n\in N}X_n$-ը կազմված է մեկ կետից, այն և միայն այն դեպքում, երբ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup X_n-\inf X_n\right)=0$;

գ) բերել $\{X_n:n\in N\}$ ներդրված փակ բազմությունների ընտանիքի այնպիսի օրինակ, որ $\bigcap\limits_{n\in N}X_n=\varnothing$;

դ) բերել $\{X_n:n\in N\}$ ներդրված սահմանափակ բազմությունների ընտանիքի օրինակ, որի համար $\bigcap\limits_{n\in N}X_n=\varnothing$:

Գլուխ 3

Ֆունկցիայի սահման

Սահմանափակ ֆունկցիաներ: $f:X\to R$ ֆունկցիան կոչվում է *սահմանափակ*, եթե սահմանափակ է f-ի արժեքների բազմությունը: Այս դեպքում $\sup\limits_{x\in X} f(x)=\sup\{f(x):x\in X\}$ և $\inf\limits_{x\in X} f(x)=\inf\{f(x):x\in X\}$ թվերը կոչվում են ֆունկցիայի համապատասխանաբար ճշգրիտ վերին և ճշգրիտ ստորին եզրեր: Եթե f-ի արժեքների բազմությունը վերևից (ներքևից) սահմանափակ չէ, ապա գրում են $\sup\limits_{x\in X} f(x)=+\infty$ $\left(\inf\limits_{x\in X} f(x)=-\infty\right)$:

f ֆունկցիան կոչվում է a *կետում սահմանափակ*, եթե գոյություն ունի a կետի U_a շրջակայք, այնպիսին, որ $X\cap U_a$ բազմության վրա f-ի ընդունած արժեքների բազմությունը սահմանափակ է:

Ֆունկցիայի սահման: Դիցուք a-ն X բազմության կուտակման կետ է: A թիվը կոչվում է $f:X\to R$ *ֆունկցիայի սահման* a կետում և նշանակվում՝ $A=\lim\limits_{x\to a} f(x)$, եթե

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in X\ \left(0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon\right)$$

(ֆունկցիայի սահման ըստ Կոշիի):

Որպեսզի A թիվը լինի f ֆունկցիայի սահմանը a կետում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ ցանկացած $x_n\to a$ $(x_n\in X, x_n\neq a, n=1,2,\dots)$ հաջորդականության համար $y_n=f(x_n)$ հաջորդականությունը ձգտի A-ի (ֆունկցիայի սահման ըստ Հայնեի):

Ասում են, որ $f:X\to R$ ֆունկցիան a կետում ունի *անվերջ սահման* և գրում՝

ա) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, բ) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$, գ) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, եթե

ա) $\forall E>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in X\ \left(0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)|>E\right)$,

բ) $\forall E>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in X\ \left(0<|x-a|<\delta\Rightarrow f(x)<-E\right)$,

գ) $\forall E>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in X\ \left(0<|x-a|<\delta\Rightarrow f(x)>E\right)$:

Դիցուք ∞-ի ցանկացած շրջակայք X բազմության հետ ունի ոչ դատարկ հատում: A թիվն անվանում են $f:X\to R$ ֆունկցիայի *սահման անվերջում* և գրում $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$, եթե

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\Delta>0\ \forall x\in X\ \left(|x|>\Delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon\right):$$

Համանմանորեն սահմանվում են ֆունկցիայի վերջավոր կամ անվերջ սահմաններ $-\infty$-ում և $+\infty$-ում:

Ծանոթություն: Եթե $f:X\to R$ ֆունկցիան a կետում ունի վերջավոր սահման, ապա f-ն a կետում սահմանափակ է:

Կոշիի սկզբունքը: Որպեսզի $f:X\to R$ ֆունկցիան $a\in X'$ կետում ունենա վերջավոր սահման, անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x_1,x_2\in X\ \left(0<|x_1-a|<\delta \text{ և } 0<|x_2-a|<\delta\Rightarrow|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon\right):$$

Թեորեմ: Եթե f և g ֆունկցիաները a կետում ունեն վերջավոր սահման, ապա $f\pm g$, $f\cdot g$ և, եթե $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$, $f(x)/g(x)$ ֆունկցիաները նույնպես ունեն վերջավոր սահման, ընդ որում՝

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x),$$

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x),$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}:$$

Միակողմանի սահմաններ: Մասնակի սահմաններ: Դիցուք X բազմության a կուտակման կետն այնպիսին է, որ ցանկացած $\delta>0$ թվի համար $(a-\delta;a)$ միջակայքն X բազմության հետ ունի ոչ դատարկ հատում: A թիվը կոչվում է $f:X\to R$ ֆունկցիայի *ձախակողմյան սահման* a կետում, եթե

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in X\ \left(a-\delta<x<a\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon\right):$$

Նույն ձևով սահմանվում է ֆունկցիայի *աջակողմյան սահմանը* a կետում: Ձախակողմյան և աջակողմյան սահմանները համապատասխանաբար նշանակվում են $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=f(a-0)$ և $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a+0)$:

Դիցուք ցանկացած $\delta>0$ թվի համար $(a-\delta;a)$ և $(a;a+\delta)$ միջակայքերից յուրաքանչյուրն X բազմության հետ ունի ոչ դատարկ հատում: Որպեսզի a կետում $f:X\to R$ ֆունկցիան ունենա սահման, անհրաժեշտ է և բավարար, որ a կետում գոյություն ունենան ֆունկցիայի միակողմանի սահմանները և լինեն հավասար $\left(f(a-0)=f(a+0)\right)$:

A թիվը կոչվում է $f:X\to R$ ֆունկցիայի *մասնակի սահման* կամ *սահմանային արժեք* a կետում, եթե գոյություն ունի $x_n\to a$ ($x_n\in X, x_n\neq a, n=1,2,\dots$) հաջորդականություն, որի համար $y_n=f(x_n)$ հաջորդականությունը ձգտում է A-ի:

Տրված a կետում f ֆունկցիայի մասնակի սահմաններից փոքրագույնը (մեծագույնը) կոչվում է *ստորին (վերին) սահման* և նշանակվում՝ $\varliminf\limits_{x\to a} f(x)$ $\left(\varlimsup\limits_{x\to a} f(x)\right)$: Որպեսզի ֆունկցիան տրված կետում ունենա սահման, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ կետում նրա ստորին և վերին սահմանները համընկնեն:

Անվերջ մեծ և անվերջ փոքր ֆունկցիաներ: f ֆունկցիան a կետում կոչվում է *անվերջ փոքր*, եթե $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$: Իսկ եթե $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, ապա f ֆունկցիան a կետում կոչվում է *անվերջ մեծ*:

Դիցուք f-ը և g-ն X-ի վրա որոշված ֆունկցիաներ են, $a\in X'$ և g-ն a-ի շրջակայքում ներկայացված է $g(x)=\alpha(x)f(x)$ տեսքով:

1) Եթե α-ն սահմանափակ ֆունկցիա է, ապա գրում են $g(x)=O(f(x))$, երբ $x\to a$: Եթե նաև $f(x)=O(g(x))$, երբ $x\to a$, ապա f-ը և g-ն կոչվում են *միևնույն կարգի ֆունկցիաներ* x-ը a-ի ձգտելիս:

2) Եթե $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=1$, ապա f-ը և g-ն կոչվում են ***համարժեք*** (ասիմպտոտորեն համարժեք) ֆունկցիաներ x-ը a-ի ձգտելիս: Այս դեպքում գրում են $f(x)\sim g(x)$, $x\to a$:

3) Եթե $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, ապա g-ն անվանում են f-ի նկատմամբ անվերջ փոքր և գրում՝ $g(x)=o(f(x))$, երբ $x\to a$: Մասնավորապես, եթե գրված է $g(x)=o(1)$, $x\to a$, նշանակում է g-ն անվերջ փոքր է x-ը a-ի ձգտելիս:

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան անվերջ փոքր է (մեծ է), երբ $x\to a$: Եթե f-ն a կետի շրջակայքում ներկայացված է $f(x)=g(x)+o(g(x))$ տեսքով, ապա g-ն անվանում են f-ի գլխավոր մաս:

Ա

429. Ցույց տալ $f(x)$ ֆունկցիայի սահմանափակությունը.

ա) $f(x)=\dfrac{\sin x^6}{1+x^4}$; բ) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$;

գ) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; դ) $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x^4}$:

430. Հետազոտել $f(x)=\ln x\cdot\sin^2\dfrac{\pi}{x}$ ֆունկցիայի սահմանափակությունը $(0;\varepsilon)$ միջակայքում:

431. Ապացուցել, որ $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ ֆունկցիայի համար $\sup\limits_{x\in[0;+\infty)} f(x)=1$, $\inf\limits_{x\in[0;+\infty)} f(x)=0$:

Հաշվել $f(x)$ ֆունկցիայի ճշգրիտ ստորին և վերին եզրերը նշված բազմության վրա (432-438).

432. $f(x)=x^2$, $[-2;5]$: **433.** $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, $(-\infty;+\infty)$:

434. $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$, $(-\infty;+\infty)$: **435.** $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$, $(0;+\infty)$:

436. $f(x)=\sin x+\cos x$, ա) $[0;2\pi]$, բ) R:

437. $f(x)=[x]$, ա) $[0;2)$, բ) $(0;2]$:

438. $f(x)=\cos(x^2+x+1)$, $[0;1]$:

«$\varepsilon-\delta$» լեզվով ձևակերպել հետևյալ պնդումները (439-441).

439. ա) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$; բ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$; գ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$:

440. ա) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$; բ) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=+\infty$; գ) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=+\infty$:

441. ա) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$; բ) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$; գ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$:

Ելնելով ֆունկցիայի սահմանի սահմանումից՝ ապացուցել հավասարությունը (442-445).

442. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-4x+1}{x-1}=2$:

443. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3-3x^2}{x-3}=9$:

444. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}=\dfrac{7}{3}$:

445. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x-7}{x^2-1}=3$:

446. Ապացուցել, որ եթե x_0 կետի որևէ շրջակայքում տեղի ունեն $g_1(x)\le f(x)\le g_2(x)$ $(x\ne x_0)$ անհավասարությունները և $\lim\limits_{x\to x_0} g_1(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g_2(x)=a$, ապա $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$:

447. Դիցուք $f:(a;b)\to R$ ֆունկցիան մոնոտոն է: Ապացուցել, որ

ա) ցանկացած $x_0\in(a;b)$ կետում f-ն ունի $f(x_0-0)$ և $f(x_0+0)$ վերջավոր միակողմանի սահմաններ;

բ) a և b կետերից յուրաքանչյուրում գոյություն ունեն վերջավոր կամ անվերջ սահմաններ:

448. Ցույց տալ, որ $x=0$ կետում $f(x)$ ֆունկցիան սահման չունի.

ա) $f(x)=arctg\dfrac{1}{x}$; բ) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$; գ) $f(x)=\operatorname{sgn}\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)$:

449. Ցույց տալ, որ $f(x)$ ֆունկցիան սահման չունի, երբ $x\to\pm\infty$.

ա) $f(x)=\cos x$; բ) $f(x)=x-[x]$:

450. Դիցուք $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները x_0 կետում սահման չունեն: Հետևու՞մ է արդյոք դրանից, որ $f(x)+g(x)$ և $f(x)\cdot g(x)$ ֆունկցիաները նույնպես սահման չունեն:

451. Տրված է $P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ $(n\in N,\ a_n\ne0)$ բազմանդամը: Ապացուցել, որ $\lim\limits_{x\to\infty}|P(x)|=+\infty$:

452. Տրված է $Q(x)=\dfrac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}$ $(a_n\neq 0, b_m\neq 0)$ ռացիոնալ ֆունկցիան: Ապացուցել, որ

$$\lim_{x\to\infty}Q(x)=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_m} \text{ երբ } n=m,\\ 0, \text{ երբ } n<m,\\ \infty, \text{ երբ } n>m:\end{cases}$$

Հաշվել սահմանը (453-475).

453. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$:

454. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$:

455. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$, $m,n\in N$:

456. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$:

457. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$:

458. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$:

459. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+20)^{30}}{(2x+1)^{50}}$:

460. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$:

461. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$:

462. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$, $m,n\in N$:

463. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$:

464. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{\sqrt[3]{x}+2}$:

465. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$:

466. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$:

467. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$:

468. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)$:

469. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)$:

470. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x}$:

471. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}$:

472. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$:

473. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{\sqrt[4]{x+9}-2}$:

474. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$:

475. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+P(x)}-1}{x}$, որտեղ $P(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$:

476. Օգտվելով $\sin x<x<tgx$, $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, անհավասարություններից՝ ապացուցել, որ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$:

477. Ապացուցել, որ

ա) $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$;

բ) $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$;

գ) $\lim\limits_{x\to a}tgx=tga$, $a\neq\dfrac{2n-1}{2}\pi$, $n\in Z$;

դ) $\lim\limits_{x\to a}ctgx=ctga$, $a\neq\pi n$, $n\in Z$:

Հաշվել սահմանը (478-493).

478. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$:

479. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x-a)}{x-a}$:

480. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$, $\beta\neq 0$:

481. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}$:

482. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{\sin 5x}$:

483. $\lim\limits_{x\to 0}x^2ctg^2x$:

484. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$:

485. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{tgx-tga}{x-a}$:

486. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$:

487. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{\sin^3 x}$:

488. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$:

489. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$:

490. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}tg2x\,tg\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$:

491. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$:

492. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x^3-1}{\sin^6 2x}$:

493. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\cos\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{3}{x}\right)$:

494. Ապացուցել, որ ա) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$; բ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x} = 0$:

495. Ապացուցել, որ ա) $\lim\limits_{x\to a}\ln x = \ln a \quad (a>0)$; բ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$:

496. Ապացուցել, որ ա) $\lim\limits_{x\to b} a^x = a^b \ (a>0)$; բ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a \ (a>0, a\neq 1)$:

496.1. Ապացուցել, որ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$:

497. Դիցուք՝ $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 0$, իսկ $v(x)$ ֆունկցիան այնպիսին է, որ գոյություն ունի $\lim\limits_{x\to a} u(x)v(x)$: Ապացուցել, որ $\lim\limits_{x\to a}[1+u(x)]^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} u(x)v(x)}$:

497.1. ա) Դիցուք $u(x)\geq 0$, $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ և $\lim\limits_{x\to a} v(x) = c \quad (b<\infty, 0<c<\infty)$: Ապացուցել, որ $\lim\limits_{x\to a}(u(x))^{v(x)} = b^c$:

բ) Դիցուք $u(x)\geq 0$, $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ և $\lim\limits_{x\to a} v(x) = +\infty$: Ապացուցել, որ եթե $b<1$, ապա $\lim\limits_{x\to a}(u(x))^{v(x)} = 0$:

Հաշվել սահմանը (498-510).

498. ա) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$; բ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$:

499. ա) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}$; բ) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}+0}\left[tg\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right]^{tg\,2x}$:

500. ա) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$; բ) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^x$:

501. ա) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$; բ) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x}-x\right)^{x^{-1}}$:

502. ա) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{x^{-2}}$; բ) $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{ctg\,\pi x}$:

503. ա) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+tgx}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$; բ) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$:

504. ա) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$; $(a>0)$; բ) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(x+h)+\ln(x-h)-2\ln x}{h^2}$:

505. ա) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln tgx}{1-ctgx}$; բ) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^2-4x+4)}{\ln(x^{10}+5x+2)}$:

506. ա) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x2^x}{1+x3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; բ) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+x}{2+xe^x}\right)^{ctg^2x}$:

507. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(1+xe^x)}$: 508. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+\sin x}-1}{\ln(1+tgx)}$:

509. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$ $(a>0,b>0)$:

510. ա) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$; բ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$:

511. Հետևյալ ֆունկցիաները անվանում են հիպերբոլական ֆունկցիաներ.

$shx=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, $x\in R$ (հիպերբոլական սինուս),

$chx=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, $x\in R$ (հիպերբոլական կոսինուս),

$thx=\dfrac{shx}{chx}$, $x\in R$ (հիպերբոլական տանգենս),

$cthx=\dfrac{chx}{shx}$, $x\in R\setminus\{0\}$ (հիպերբոլական կոտանգենս):

Ապացուցել, որ ա) $\lim\limits_{x\to x_0} shx=shx_0$; բ) $\lim\limits_{x\to x_0} chx=chx_0$; գ) $\lim\limits_{x\to x_0} thx=thx_0$; դ) $\lim\limits_{x\to x_0} cthx=cthx_0$ $(x_0\neq 0)$:

512. Ապացուցել, որ ա) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{shx}{x}=1$; բ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{thx}{x}=1$; գ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{chx-1}{x^2}=\dfrac{1}{2}$:

Հաշվել սահմանը (513-515).

513. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{shx-sha}{x-a}$: 514. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{chx-cha}{x-a}$: 515. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln chx}{\ln\cos x}$:

516. Ապացուցել, որ ա) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$; բ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx}{x}=1$:

Հաշվել սահմանը (517-520).

517. $\lim\limits_{x\to\infty}\arcsin\dfrac{1-x}{1+x}$: 518. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\dfrac{\pi}{4}-arctg\dfrac{x}{x+1}\right)$:

519. $\lim\limits_{x\to+\infty}\arccos\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$: 520. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{arctg(x+h)-arctgx}{h}$:

521. Տրված է $y=f(x)$ ֆունկցիան: «$\varepsilon-\delta$» լեզվով ձևակերպել, են ի՞նչ է նշանակում ֆունկցիայի սահման ներքևից կամ վերևից.

ա) $y\to b-0$, երբ $x\to a$; բ) $y\to b-0$, երբ $x\to+\infty$;

գ) $y\to b+0$, երբ $x\to a-0$; դ) $y\to b+0$, երբ $x\to\infty$:

Հաշվել սահմանը և պարզել, թե ֆունկցիան իր սահմանին ձգտում է վերևի՞ց, թե՞ ներքևից (522-525).

522. ա) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{1+x}$; բ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{1+x}$:

523. ա) $\lim\limits_{x\to 1-0}arctg\dfrac{1}{1-x}$; բ) $\lim\limits_{x\to 1+0}arctg\dfrac{1}{1-x}$:

524. ա) $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ բ) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$;

525. ա) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$; բ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$:

Գտնել $f(x_0-0)$-ն և $f(x_0+0)$-ն (526-534).

526. $f(x)=\dfrac{x-|x|}{2x}$, $x_0=0$: 527. $f(x)=2^{ctgx}$, $x_0=0$:

528. $f(x)=\dfrac{2(1-x^2)+|x^2-1|}{3(1-x^2)-|1-x^2|}$, $x_0=1$: 529. $f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$:

530. $f(x)=\dfrac{1}{x+3^{\frac{1}{3-x}}}$, $x_0=3$: 531. $f(x)=x+[x^2]$, $x_0=10$:

532. $f(x)=\frac{1}{x-[x]}$, $x_0=-1$:

533. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}$, $x_0=1$:

534. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2x^n-3}{x^n-1}$, $x_0=1$:

Գտնել $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$-ը և $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$-ը (535-537).

535. $f(x)=\left(\frac{1+x}{1+2x}\right)^x$:

536. $f(x)=\left(1+\frac{1}{|x|}\right)^x$:

537. $f(x)=\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$:

538. Ստուգել, որ եթե $f(x)=o(1)$, $g(x)=o(1)$ և $f\sim g$, երբ $x\to a$, ապա $f-g=o(f)$, երբ $x\to a$:

539. Ապացուցել, որ

ա) $O(1)+O(1)=O(1)$; բ) $o(1)+O(1)=O(1)$;

գ) $O(f(x))+o(f(x))=O(f(x))$; դ) $o(1)+o(1)=o(1)$;

ե) $o(o(f(x)))=o(f(x))$; զ) $O(o(f(x)))=o(f(x))$:

540. Դիցուք $x\to0$ և $m>n>0$: Ապացուցել, որ

ա) $O(x^n)+O(x^m)=O(x^n)$; բ) $O(x^n)\cdot O(x^m)=O(x^{m+n})$:

541. Դիցուք $x\to\infty$ և $m>n>0$: Ապացուցել, որ

ա) $O(x^n)+O(x^m)=O(x^m)$; բ) $O(x^n)\cdot O(x^m)=O(x^{m+n})$:

542. Դիցուք՝ $x\to0$: Ապացուցել, որ

ա) $2x-x^2=O(x)$; բ) $x\sin\sqrt{x}=O\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$; գ) $x\sin\frac{1}{x}=O(|x|)$:

543. Դիցուք՝ $x\to+\infty$: Ապացուցել, որ

ա) $\frac{x+1}{x^2+x}=O\left(\frac{1}{x}\right)$; բ) $x+x^2\sin x^2=O(x^2)$;

գ) $\frac{arctgx}{1+x^2}=O\left(\frac{1}{x^2}\right)$; դ) $x^pe^{-x}=o(x^{-2})$:

544. Ապացուցել, որ

ա) $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$, երբ $x\to0$; բ) $tg(x-1)\sim x-1$, երբ $x\to1$;

գ) $arctg\frac{1}{x}\sim\frac{1}{x}$, երբ $x\to\infty$; դ) $tgx-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3$, երբ $x\to0$;

ե) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} \sim \sqrt[8]{x}$,երբ $x \to 0$; զ) $x^2 + x\ln^{100} x \sim x^2$,երբ $x \to +\infty$:

545. Ապացուցել հետևյալ ասիմպտոտիկ բանաձևերը $(x \to 0)$.

ա) $\sin x = x + o(x)$; բ) $tgx = x + o(x)$;

գ) $e^x = 1 + x + o(x)$; դ) $a^x = 1 + x\ln a + o(x)$;

ե) $\ln(1+x) = x + o(x)$; զ) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$;

է) $\arcsin x = x + o(x)$; ը) $arctgx = x + o(x)$:

546. Ապացուցել ասիմպտոտիկ բանաձևը՝

$$\sqrt{x^2 + px + q} = x + \frac{p}{2} + O\left(\frac{1}{x}\right),\ x \to +\infty :$$

Օգտվելով 545 խնդրում բերված ասիմպտոտիկ բանաձևերից՝ հաշվել սահմանը (547-557).

547. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln\cos 5x}{\ln\cos 4x}$:

548. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\sin 5x} - e^{\sin x}}{\ln(1+2x)}$:

549. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg2x - 3\arcsin 4x}{\sin 5x - 6arctg7x}$:

550. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin\sin tg\dfrac{x^2}{2}}{\ln\cos 3x}$:

551. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{arctg(2-x) + \sin(x-2)^2}{x^2 - 4}$:

552. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[4]{1+x^2} + x^3 - 1}{\ln\cos x}$:

553. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3\sqrt[10]{x}\cos x + \sin^3 x}{1 - \sqrt{1+x^3}}$:

554. $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{2\sin\sqrt{x^2 + \sqrt{x^3}} + \ln(1+x)}{x + \sqrt{x\sqrt{x}}}$:

555. $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}\left(e^{7\sqrt[3]{x}} - 1\right)}{\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\cdot\ln(1+3x)}$:

556. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sin 2x - 2tgx)^2 + (1-\cos 2x)^3}{tg^7 6x + \sin^6 x}$:

557. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln\left(1+x+x^2\right) + \arcsin 2x - 3x^3}{\sin 3x + tg^2 x + \left(e^x - 1\right)^{10}}$:

558. Դիցուք f-ն անվերջ փոքր է, երբ $x \to a$: Կասենք, որ f-ը $(x-a)$-ի նկատմամբ k-րդ կարգի $(k > 0)$ անվերջ փոքր է, եթե f-ն ու $(x-a)^k$-ը միևնույն կարգի են: Որոշել անվերջ փոքր ֆունկցիայի կարգը, երբ $x \to 0$.

ա) $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$; բ) $f(x) = \sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}$;

գ) $f(x) = \sqrt{4 - x^4} + x^2 - 2$; դ) $f(x) = \sin\left(\sqrt{x^2+9} - 3\right)$;

ե) $f(x)=2^{x^2}-1$;   զ) $f(x)=1-x^4-\cos^2 x$:

559. Դիցուք f-ն անվերջ մեծ է, երբ $x\to a$: Կասենք, որ f-ը $\frac{1}{x-a}$-ի նկատմամբ (եթե $a=\infty$՝ x-ի նկատմամբ) k-րդ կարգի $(k>0)$ անվերջ մեծ է, եթե f-ն ու $\frac{1}{(x-a)^k}$-ը (x^k-ը) միևնույն կարգի են: Որոշել անվերջ մեծ ֆունկցիայի կարգը.

ա) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$, երբ $x\to+\infty$;

բ) $f(x)=\dfrac{\ln x}{(x-1)^2}$, երբ $x\to 1$;   գ) $f(x)=ctg^2 x^3$, երբ $x\to 0$;

դ) $f(x)=\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^5}$, երբ $x\to 0$:

Պարզել թե հետևյալ ֆունկցիաներից որո՞նք են անվերջ փոքր (560-562).

560. $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$, $x\to 0$:

561. $f(x)=\sin\ln(x^2+1)-\sin\ln(x^2-1)$, $x\to\infty$:

562. $f(x)=\dfrac{1}{1+2^x}$ ա) երբ $x\to-\infty$; բ) երբ $x\to+\infty$:

Պարզել թե հետևյալ ֆունկցիաներից որո՞նք են անվերջ մեծ (563-566).

563. $f(x)=x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$, ա) $x\to-\infty$; բ) $x\to+\infty$:

564. $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}}$, $x\to\dfrac{\pi}{2}$:

565. $f(x)=(1-x)^{\frac{1}{x^2}}$ ա) $x\to+0$; բ) $x\to-0$:

566. $f(x)=chx-shx$ ա) $x\to-\infty$; բ) $x\to+\infty$:

567. Դիցուք՝ $x\to 1$: Հետևյալ ֆունկցիաներից անջատել գլխավոր մասը $C(x-1)^n$ տեսքով և որոշել անվերջ փոքրի կարգը $(x-1)$-ի նկատմամբ.

ա) $y=\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$;   բ) $y=\ln x$;   գ) $y=e^x-e$;   դ) $y=x^x-1$:

568. Դիցուք՝ $x\to+\infty$: Հետևյալ ֆունկցիաներից անջատել գլխավոր մասը Cx^n տեսքով և որոշել անվերջ մեծի կարգը x-ի նկատմամբ.

ա) $y=\dfrac{2x^5}{x^3-3x+1}$; բ) $y=\sqrt[3]{x^2-x}+\sqrt{x}$; գ) $y=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}$:

569. Հաշվել $\overline{\lim\limits_{x\to 0}} f(x)$-ը և $\underline{\lim\limits_{x\to 0}} f(x)$-ը, եթե

ա) $f(x)=\sin^2\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{\pi}arctg\dfrac{1}{x}$; բ) $f(x)=(2-x^2)\cos\dfrac{1}{x}$:

570. Հաշվել $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}} f(x)$-ը և $\underline{\lim\limits_{x\to\infty}} f(x)$-ը, եթե

ա) $f(x)=\sin x$; բ) $f(x)=x^2\cos^2 x$;

գ) $f(x)=\dfrac{\pi}{2}\cos^2 x-arctgx$:

571. Ապացուցել, որ Դիրիխլեի ֆունկցիան՝

$$\chi(x)=\begin{cases}1, \text{ եթե } x\text{ - ը ռացիոնալ է,}\\ 0, \text{ եթե } x\text{ - ը իռացիոնալ է,}\end{cases}$$

ոչ մի կետում սահման չունի:

572. Կառուցել ֆունկցիա, որը միայն մեկ կետում ունի վերջավոր սահման:

Բ

573. Դիցուք $f_1(x)$ և $f_2(x)$ ֆունկցիաները որոշված են X բազմության վրա: Ապացուցել, որ

$$\sup(f_1(x)+f_2(x))\le\sup f_1(x)+\sup f_2(x);$$
$$\inf(f_1(x)+f_2(x))\ge\inf f_1(x)+\inf f_2(x):$$

Կառուցել $f_1(x)$ և $f_2(x)$ ֆունկցիաներն այնպես, որ ա) բերված անհավասարությունները լինեն խիստ, բ) տեղի ունենա հավասարություն:

574. Դիցուք

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{եթե } x\text{ -ն իռացիոնալ է,}\\ n, & \text{եթե } x=\dfrac{m}{n}\in Q \text{ (անկրճատելի կոտորակ է և } n\in N\text{):}\end{cases}$$

Ապացուցել, որ $f(x)$-ը ոչ մի կետում սահմանափակ չէ:

575. Ապացուցել, որ Ռիմանի ֆունկցիան՝

$$R(x)=\begin{cases}\frac{1}{q}, & \text{երբ } x=\frac{p}{q} \text{ (անկրճատելի կոտորակ է և } q\in N\text{)},\\ 0, & \text{երբ } x\text{-ն իռացիոնալ է},\end{cases}$$

բոլոր կետերում ունի սահման:

576. Դիցուք $y=R(x)$-ը Ռիմանի ֆունկցիան է և $f(y)=\operatorname{sgn}|y|$: Ստուգել, որ $\lim\limits_{x\to0}R(x)=0$, $\lim\limits_{y\to0}f(y)=1$, սակայն $f(R(x))$ բարդ ֆունկցիան $x_0=0$ կետում սահման չունի:

577. Ապացուցել, որ եթե $f(x)\neq b$, երբ $x\neq a$ և գոյություն ունեն $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$, $\lim\limits_{y\to b}g(y)$ սահմանները, ապա a կետում գոյություն ունի $g(f(x))$ բարդ ֆունկցիայի սահմանը և $\lim\limits_{x\to a}g(f(x))=\lim\limits_{y\to b}g(y)$:

577.1. Ապացուցել, որ եթե գոյություն ունեն $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ և $\lim\limits_{y\to b}g(y)=g(b)$ սահմանները, ապա a կետում գոյություն ունի $g(f(x))$ բարդ ֆունկցիայի սահմանը և $\lim\limits_{x\to a}g(f(x))=g(b)$:

Հաշվել սահմանը (578-585).

578. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{\left[(nx)^n+1\right]^{\frac{n+1}{2}}}$:

579. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$, $n\in N$:

580. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\left(x^n-a^n\right)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$, $n\in N$:

581. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$, $m,n\in N$:

582. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$:

583. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$, $m,n\in N$:

584. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt[3]{x}\right)\cdots\left(1-\sqrt[n]{x}\right)}{(1-x)^{n-1}}$, $n\in N$:

585. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)}-x\right)$:

586. Ընտրել a_i և b_i $(i=1,2)$ թվերն այնպես, որ ճշմարիտ լինեն

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1\right)=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-a_2x-b_2\right)=0$$

հավասարությունները:

587. Ընտրել λ և μ թվերն այնպես, որ

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_kx^2+b_kx+c_k}-\lambda x-\mu \quad (a_k>0, k=1,2,\dots,n)$$

ֆունկցիան լինի անվերջ փոքր, երբ $x\to+\infty$:

Հաշվել սահմանը (588-609).

588. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(a+2x)-2\cos(a+x)+\cos a}{x^2}$:

589. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ctg(a+2x)-2ctg(a+x)+ctga}{x^2}$:

590. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$:

591. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(a+x)tg(a-x)-tg^2a}{x^2}$:

592. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$:

593. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$:

594. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$:

595. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^x$, $a_1,a_2>0$;

596. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+tgx}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$:

597. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tgx}$:

598. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{\cos\alpha x}-\sqrt[m]{\cos\beta x}}{x^2}$:

599. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(tg\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)\right)}{\sin bx}$:

600. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x}\right)^{ctg^3x}$:

601. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\pi x^\alpha}{\sin\pi x^\beta}$:

602. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin^2(2^x\pi)}{\ln(\cos(2^x\pi))}$:

603. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$:

604. ա) $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{a^x-a^b}{x-b}$, $a>0$; բ) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$, $a>0$:

605. ա) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^\alpha-a^\alpha}{x^\beta-a^\beta}$, $a>0$; բ) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-a^a}{x-a}$:

606. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-a^a}$, $a>0$:

607. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$:

608. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}$, $a,b,c>0$:

609. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}}$, $a,b>0$:

610. Ապացուցել, որ եթե $a>1, n>0, \varepsilon>0$, ապա

ա) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{a^x}=0$; բ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_a x}{x^\varepsilon}=0$; գ) $\lim\limits_{x\to+0}x^\varepsilon\log_a x=0$:

Հաշվել սահմանը (611-625).

611. $\lim\limits_{x\to+0}\ln(x\ln a)\ln\left(\dfrac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}\right)$, $a>1$: 612. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{ch\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)^{n^2}$:

613. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx-n}{\sin x^2}$:

614. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx}{\sqrt{1+2x}-1}$: 615. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx+tg2x+\cdots+tgnx}{arctgx}$:

616. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{e^{\sin x}-e^{\sin 2x}}{\sqrt[3]{\pi x^2}-\pi}$: 617. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\ln\sin\frac{x}{2}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{\pi}}$:

618. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\left(x^2+\cos\frac{\pi x}{2}\right)}{\sqrt{x}-1}$: 619. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^{x^2}-16}{\ln(x^2-x-1)}$:

620. $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{\arccos x}{\sqrt{-\ln x}}$: 621. $\lim\limits_{x\to 1-0}\left(tg\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\frac{1}{\arccos^2 x}}$:

622. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\dfrac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\cdots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}\right)$:

623. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+x\right)\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)\cdots\left(1+x^{2^n}\right),\ |x|<1$:

624. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)},\ a>0$: 625. $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$::

α-ի և β-ի ինչպիսի արժեքների դեպքում $f(x)$ ֆունկցիան կլինի անվերջ փոքր (626-630).

626. $f(x)=\dfrac{xe^x}{e^x-1}-\alpha x-\beta$ ա) $x\to+\infty$; բ) $x\to-\infty$:

627. $f(x)=(x+4)e^{\frac{1}{x}}-\alpha x-\beta,\ x\to\infty$:

628. $f(x)=\ln\left(1+e^{3x}\right)-\alpha x-\beta$ ա) $x\to+\infty$; բ) $x\to-\infty$:

629. $f(x)=x\,arctgx-\alpha x-\beta$ ա) $x\to+\infty$; բ) $x\to-\infty$:

630. $f(x)=\dfrac{\ln\left(1+x^\alpha\right)}{x^\beta},\ x\to+0$:

631. Դիցուք՝ $x\to0$: Գտնել $f(x)$ ֆունկցիայի գլխավոր մասը՝ Cx^α տեսքով.

ա) $f(x)=(\cos x)^{2\sin x}-e^{-x^2}$; բ) $f(x)=\sqrt[3]{\cos\sqrt{6x}}-1-2\ln\left(1-x^2\right)$:

632. Հաշվել $\overline{\lim\limits_{x\to a}}f(x)$-ը և $\underline{\lim\limits_{x\to a}}f(x)$-ը, եթե

ա) $f(x)=2^{\sin x^2},\ a=\infty$; բ) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2\sin^2x},\ a=+\infty$;

գ) $f(x)=e^{\cos\frac{1}{x^2}},\ a=0$; դ) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}},\ a=0$;

ե) $f(x)=arctg\dfrac{1}{x-2}\cdot\sin\dfrac{\pi}{x-2},\ a=2$:

633. Գտնել $f(x)$ ֆունկցիայի սահմանային արժեքների բազմությունը.

ա) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x},\ x\to0$; բ) $f(x)=\dfrac{1}{x-[x]},\ x\to\infty$:

634. Ապացուցել, որ $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}}(\cos4x+\sin x)=2$:

Կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը (635-640).

635. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n},\ x\ge0$: 636. $y=\lim\limits_{n\to\infty}(x-1)arctgx^n$:

637. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+e^{n(x+1)}}$: 638. $y=\lim\limits_{t\to x}\dfrac{1}{t-x}\ln\dfrac{t}{x},\ x>0$:

639. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{xtg^{2n}\frac{\pi x}{4}+\sqrt{x}}{tg^{2n}\frac{\pi x}{4}+1}$, $x\geq 0$: 640. $y=\lim\limits_{n\to\infty}x\operatorname{sgn}|\sin(n!\pi x)|$:

Գ

641. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $(a;+\infty)$ բազմության վրա և սահմանափակ է ցանկացած $(a;b)$ միջակայքում: Ապացուցել, որ

ա) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))$;

բ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x))^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+1)}{f(x)}$ $(f(x)\geq c>0)$,

ենթադրելով, որ աջ կողմում գրված սահմանները գոյություն ունեն և վերջավոր են:

642. Հաշվել հետևյալ սահմանները. ա) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$; բ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$:

643. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $(a;+\infty)$ բազմության վրա, սահմանափակ է ցանկացած $(a;b)$ միջակայքում և

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=\infty$, ապա $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\infty$:

644. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $(a;+\infty)$ բազմության վրա, սահմանափակ է ցանկացած $(a;b)$ միջակայքում և գոյություն ունի

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}=l$$

վերջավոր կամ անվերջ սահմանը, ապա

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}}=\frac{l}{n+1}:$$

645. Դիցուք α_{mn} հաջորդականությունը m-ի նկատմամբ հավասարաչափ ձգտում է զրոյի, երբ $n\to\infty$. $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in N\ \ \forall m,n\in N\ \left(n\geq n_0\Rightarrow|\alpha_{mn}|<\varepsilon\right)$: Ապացուցել, որ եթե f և g ֆունկցիաները որոշված են $x=0$ կետի շրջակայքում, $f(x)>0$ և $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{f(x)}=1$, ապա

$$\lim_{n\to\infty}\left(g(\alpha_{1n})+g(\alpha_{2n})+\cdots+g(\alpha_{nn})\right)=\lim_{n\to\infty}\left(f(\alpha_{1n})+f(\alpha_{2n})+\cdots+f(\alpha_{nn})\right),$$

ընդունելով, որ աջ կողմում սահմանը գոյություն ունի:

Օգտվելով նախորդ խնդրից՝ հաշվել սահմանը (646-649).

646. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{k}{n^2}}-1\right)$:

647. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\dfrac{ka}{n^2}$:

648. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(a^{\frac{k}{n^2}}-1\right), a>0$:

649. $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{ka}{n\sqrt{n}}$:

650. Գտնել $f(x)$-ը, եթե $f(0)=1$, $f(2x)=f(x)\cos^2 x$ և $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$:

651. Դիցուք $x_0=m$, $x_n=m+\varepsilon\sin x_{n-1}$ $(n\in N, 0<\varepsilon<1)$: Ապացուցել, որ գոյություն ունի x_n հաջորդականության սահմանը և այն հանդիսանում է $x-\varepsilon\sin x=m$ հավասարման (Կեպլերի հավասարման) միակ լուծումը:

652. Ապացուցել, որ ինչպիսին էլ լինեն անվերջի ձգտող $f_1(x), f_2(x),\ldots,f_n(x),\ldots$ $(x_0<x<+\infty)$ ֆունկցիաները, գոյություն ունի $f(x)$ ֆունկցիա, որն ավելի արագ է աճում, քան $f_n(x)$-երից յուրաքանչյուրը. ցանկացած n-ի համար $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{f_n(x)}=\infty$:

653. Դիցուք $f:[a;b]\to R$ ֆունկցիան $[a;b]$ հատվածի յուրաքանչյուր կետում ունի վերջավոր սահման: Ապացուցել, որ f-ը սահմանափակ է:

654. Դիցուք f և g ֆունկցիաները որոշված են ամբողջ թվային առանցքի վրա և պարբերական են: Հայտնի է, որ $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-g(x))=0$: Ապացուցել, որ $f(x)\equiv g(x)$:

655. Դիցուք $f:(0;+\infty)\to R$ ֆունկցիան $(0;1)$ միջակայքում սահմանափակ է և ցանկացած x և y դրական թվերի համար $f(x+y)\le f(x)+f(y)$: Ապացուցել, որ գոյություն ունի $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ սահմանը (վերջավոր կամ անվերջ):

656. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան $(0;+\infty)$ միջակայքում մոնոտոն է, դրական և $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2x)}{f(x)}=1$: Ապացուցել, որ ցանկացած C դրական թվի համար $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(Cx)}{f(x)}=1$:

657. Տրված է՝ $\lambda, \mu \in R$, $\lambda \neq \mu$: Ապացուցել, որ $\overline{\lim_{x\to\infty}}|\sin\lambda x - \sin\mu x| \geq 1$:

658. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է R-ի վրա և ցանկացած a-ի համար $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{a}{n}\right) = 0$: Հետևո՞ւմ է արդյոք այդտեղից, որ $x=0$ կետում $f(x)$ ֆունկցիան ունի սահման:

Գլուխ 4

Անընդհատ ֆունկցիաներ, հավասարաչափ անընդհատություն

Ֆունկցիայի անընդհատությունը: $f:X\to R$ ֆունկցիան $x_0\in X$ կետում կոչվում է *անընդհատ*, եթե

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in X\left(|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\right):$$

Եթե $f:X\to R$ ֆունկցիան անընդհատ է X բազմության յուրաքանչյուր կետում, ապա այն անվանում են X-ի վրա *անընդհատ ֆունկցիա* և գրում՝ $f\in C(X)$:

Եթե որևէ $x_0\in X$ կետում ֆունկցիան անընդհատ չէ, ապա այն անվանում են *խզվող ֆունկցիա*, իսկ x_0-ն՝ ֆունկցիայի *խզման կետ*:

$f:[a;b]\to R$ ֆունկցիայի խզման կետերը դասակարգվում են երկու սեռի. $x_0\in(a;b)$ խզման կետը կոչվում է *առաջին սեռի*, եթե f-ն այդ կետում ունի $f(x_0-0)$ և $f(x_0+0)$ վերջավոր միակողմանի սահմաններ: Ընդ որում, երբ $f(x_0-0)=f(x_0+0)$՝ խզումը կոչվում է *վերացնելի*: Իսկ երբ $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$, այդ դեպքում $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ թիվն անվանում են x_0 կետում ֆունկցիայի *թռիչք*: Հատվածի ծայրակետում ֆունկցիայի խզումը կոչվում է առաջին սեռի, եթե գոյություն ունի միակողմանի սահմանը:

Եթե ֆունկցիայի խզումը առաջին սեռի չէ, ապա այն անվանում են *երկրորդ սեռի խզում*:

Անընդհատ ֆունկցիայի լոկալ հատկությունները: Եթե $f:X\to R$ ֆունկցիան $x_0\in X$ կետում անընդհատ է, ապա այն x_0 կետում սահմանափակ է: Եթե նաև $f(x_0)>p$ $\left(f(x_0)<q\right)$, ապա գոյություն ունի $\delta>0$ այնպիսին, որ ցանկացած $x\in X\bigcap(x_0-\delta,x_0+\delta)$ կետում $f(x)>p$ $\left(f(x)<q\right)$:

Դիցուք $g:X\to R$ ֆունկցիան x_0 կետում նույնպես անընդհատ է: Այդ դեպքում $f\pm g$, fg ֆունկցիաները, ինչպես նաև $\dfrac{f}{g}$ ֆունկցիան, եթե $g(x_0)\neq0$, անընդհատ են x_0 կետում:

Եթե $f:X\to Y$ ֆունկցիան անընդհատ է $x_0\in X$ կետում, իսկ $g:Y\to Z$ ֆունկցիան անընդհատ է $y_0=f(x_0)$ կետում, ապա $z=g(f(x))$ բարդ ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում:

Անընդհատ ֆունկցիայի գլոբալ հատկությունները: Դիցուք $f\in C[a;b]$: Այդ դեպքում.

ա) եթե $f(a)f(b)<0$, ապա գոյություն ունի $c\in(a;b)$, այնպիսին, որ $f(c)=0$ (Բոլցանո-Կոշիի թեորեմ);

բ) f-ը սահմանափակ ֆունկցիա է: Գոյություն ունի կետ, որում ֆունկցիան ընդունում է իր մեծագույն արժեքը և գոյություն ունի կետ, որում ֆունկցիան ընդունում է իր փոքրագույն արժեքը (Վայերշտրասի թեորեմ);

գ) եթե f-ը աճող (նվազող) է $[a;b]$-ում, ապա f-ի արժեքների բազմությունը $[f(a);f(b)]$ ($[f(b);f(a)]$) հատվածն է, և f^{-1} ֆունկցիան այդ հատվածի վրա անընդհատ է:

Հավասարաչափ անընդհատություն: $f:X\to R$ ֆունկցիան կոչվում է *հավասարաչափ անընդհատ ֆունկցիա*, եթե

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x_1,x_2\in X\ \left(|x_1-x_2|<\delta\Rightarrow|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon\right):$$

Բաց բազմությունների Σ ընտանիքը կոչվում է X բազմության *բաց ծածկույթ*, եթե $X\subset\bigcup\Sigma$: Եթե $\Sigma_0\subset\Sigma$ վերջավոր ընտանիքն այնպիսին է, որ $X\subset\bigcup\Sigma_0$, ապա Σ_0-ն անվանում են X բազմության Σ ծածկույթից անջատված *վերջավոր ենթածածկույթ*:

Բորել-Լեբեգի լեմման: $[a;b]$ հատվածի ցանկացած բաց ծածկույթից կարելի է անջատել վերջավոր ենթածածկույթ:

Կանտորի թեորեմը: $[a;b]$ հատվածի վրա անընդհատ ֆունկցիան հավասարաչափ անընդհատ է:

Ա

659. Ցույց տալ, որ եթե $f:X\to R$ ֆունկցիայի x_0 անընդհատության կետը X բազմության կուտակման կետ է, ապա f-ը այդ կետում ունի սահման, ընդ որում՝ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$:

660. Ելնելով ֆունկցիայի անընդհատության սահմանումից՝ համոզվել, որ ֆունկցիան իր որոշման տիրույթի բոլոր մեկուսացված կետերում անընդհատ է:

661. Ապացուցել, որ որպեսզի f-ն x_0 կետում լինի անընդհատ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն լինի x_0-ում թե՛ ձախից և թե՛ աջից անընդհատ:

662. Ստուգել, որ հետևյալ ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրն իր որոշման տիրույթի վրա անընդհատ է (տես վարժ. 477, 495, 496).

ա) $y=ax+b$; բ) $y=x^2$; գ) $y=\sqrt{x}$;

դ) $y=x^n\ \ (n\in N)$; ե) $y=\cos x$; զ) $y=tgx$;

է) $y=arctgx$; ը) $y=\ln x$; թ) $y=2^x$:

Հետազոտել ֆունկցիայի անընդհատությունը: Դասակարգել խզման կետերն ըստ սեռի (663-682).

663. $y=[x]$: 664. $y=x-[x]$: 665. $y=\operatorname{sgn}x$: 666. $y=\operatorname{sgn}|x|$:

667. $y=\begin{cases}x^2, & \text{երբ } x\in(-\infty;1),\\ 2x-1, & \text{երբ } x\in[1;+\infty):\end{cases}$

668. $y=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, \text{ երբ } x\neq 2,\\ 4, \text{ երբ } x=2:\end{cases}$

669. $f(x)=\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|$, երբ $x\neq 0$, $f(0)=1:$

670. $f(x)=\dfrac{1}{x}$, երբ $x\neq 0$, $f(0)=0:$

671. $f(x)=ctgx$, երբ $x\neq \pi n$, $f(\pi n)=0$ $(n\in Z):$

672. $f(x)=\dfrac{1+x}{1+x^3}$, երբ $x\neq -1$, $f(-1)=\dfrac{1}{3}:$

673. $f(x)=\sqrt{x}-[\sqrt{x}]:$

674. $f(x)=x^2-[x^2]:$

675. $f(x)=x[x]:$

676. $f(x)=\mathrm{sgn}(\sin x):$

677. $y=\left[\dfrac{1}{x}\right]:$

678. $y=\mathrm{sgn}(x-[x]):$

679. $y=[x]\sin \pi x:$

680. $y=(-1)^{[x^2]}:$

681. $y=x\ln x$, երբ $x>0$, $y(0)=0:$

682. $y=e^{-\frac{1}{|x|}}$, երբ $x\neq 0$, $y(0)=0:$

683. Ընտրել a պարամետրի արժեքն այնպես, որ ֆունկցիան լինի անընդհատ.

ա) $y=\begin{cases}x^2, \text{ երբ } x\leq 4,\\ 3x+a, \text{ երբ } x>4;\end{cases}$

բ) $y=\begin{cases}\sin|x|-\ln|x|, \text{ երբ } |x|\geq 1,\\ ax^2-1, \text{ երբ } |x|<1:\end{cases}$

գ) $y=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}, \text{ երբ } -1<x<0,\\ e^{ax+1}, \text{ երբ } x\geq 0;\end{cases}$

դ) $y=\begin{cases}(1+x)^{1+x}, \text{ երբ } x<1,\\ a^2x^2-2ax+1, \text{ երբ } x\geq 1:\end{cases}$

684. Համոզվել, որ a պարամետրի ցանկացած արժեքի համար

ա) $y=\begin{cases}\ln|x|, \text{ երբ } x\neq 0,\\ a, \text{ երբ } x=0;\end{cases}$

բ) $y=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{|x|}, \text{ երբ } x\neq 0,\\ a, \text{ երբ } x=0\end{cases}$

ֆունկցիաները $x_0=0$ կետում խզվող են: Պարզել խզման տեսքը:

685. Ստուգել, որ Դիրիխլեի ֆունկցիան՝

$$\chi(x)=\begin{cases}1, \text{ երբ } x\in Q,\\ 0, \text{ երբ } x\in I,\end{cases}$$

ամենուրեք խզվող է: Պարզել խզումների տեսքը:

686. Ապացուցել, որ եթե $f:X\to R$ ֆունկցիան անընդհատ է $x_0\in X$ կետում, ապա $|f(x)|$ ֆունկցիան այդ կետում նույնպես անընդհատ է: Բերել $f(x)$ խզվող ֆունկցիայի այնպիսի օրինակ, որ $|f(x)|$ և $f^2(x)$ ֆունկցիաները լինեն անընդհատ:

687. Դիցուք տրված է $f:X\to R$ ֆունկցիան: Ապացուցել, որ

ա) $|f(x)|$ և $f^2(x)$ ֆունկցիաներից մեկի $x_0\in X$ կետում անընդհատությունից հետևում է մյուսի անընդհատությունը նույն կետում;

բ) $f(x)$ և $f^3(x)$ ֆունկցիաներից մեկի $x_0\in X$ կետում անընդհատությունից հետևում է մյուսի անընդհատությունը նույն կետում:

688. Դիցուք $f:X\to R$ և $g:X\to R$ ֆունկցիաներից մեկը $x_0\in X$ կետում անընդհատ է, իսկ մյուսը՝ խզվող: Հետազոտել $f+g$, fg ֆունկցիաների անընդհատությունն այդ կետում:

689. Դիցուք $f:X\to R$ և $g:X\to R$ ֆունկցիաները $x_0\in X$ կետում խզվող են: Հետազոտել x_0 կետում

ա) $f+g$ ֆունկցիայի անընդհատությունը;

բ) fg ֆունկցիայի անընդհատությունը:

Բերել համապատասխան օրինակներ:

690. Տրված են $f:X\to Y$ և $g:Y\to R$ ֆունկցիաները: Դիցուք f-ը $x_0\in X$ կետում կամ g-ն $y_0=f(x_0)$ կետում խզվող է: Կարելի՞ է արդյոք պնդել, որ $z=g(f(x))$ $(x\in X)$ բարդ ֆունկցիան x_0 կետում խզվող է: Բերել համապատասխան օրինակներ:

691. Կառուցել $f:R\to R$ ամենուրեք խզվող ֆունկցիայի օրինակ, այնպիսին, որ $y=f(f(x))$ $(x\in R)$ ֆունկցիան լինի ամենուրեք անընդհատ:

692. Կառուցել $f:R\to R$ ֆունկցիա, որի անընդհատության կետերի բազմությունը կազմված է նախապես տրված $a_1,a_2,\dots,a_n$ թվերից:

693. Կառուցել $f:R\to R$ չնվազող ֆունկցիա, որի խզման կետերի բազմությունը կազմված է նախապես տրված $a_1<a_2<\dots<a_n$ թվերից:

Հետազոտել ֆունկցիայի անընդհատությունը (694-699).

694. $y=\lim\limits_{n\to\infty}x^n$ $(0\le x\le 1)$:

695. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^n}$ $(x\ge 0)$:

696. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}$:

697. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\cos^{2n}x$:

698. $y=\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+e^{\alpha x}\right)}{\ln\left(1+e^{\alpha}\right)}$:   **699.** $y=\lim\limits_{\alpha\to+\infty}(1+x)th\alpha x$:

700. Գտնել

$$y=\begin{cases}\sin\pi x, \text{ երբ } x\in Q,\\ 0, \text{ երբ } x\in I\end{cases}$$

ֆունկցիայի անընդհատության կետերի բազմությունը:

701. Կառուցել $[a;b]$ հատվածի վրա որոշված այնպիսի ֆունկցիայի օրինակ, որն ընդունում է տարբեր նշանի արժեքներ, սակայն ոչ մի կետում զրո չի դառնում:

702. Կառուցել X բազմություն և նրա վրա անընդհատ այնպիսի ֆունկցիայի օրինակ, որն ընդունում է տարբեր նշանի արժեքներ, բայց ոչ մի կետում զրո չի դառնում:

703. Ստուգել, որ

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, \text{ երբ } x\neq 0,\\ 0, \text{ երբ } x=0\end{cases}$$

ֆունկցիան անընդհատ չէ, սակայն ցանկացած $[a;b]$ հատվածում ընդունում է $f(a)$-ի և $f(b)$-ի միջև ընկած բոլոր արժեքները:

704. Ստուգել, որ հետևյալ հավասարումներից յուրաքանչյուրը նշված միջակայքում ունի առնվազն մեկ իրական արմատ.

ա) $x^3+5x^2-7=0$, $x\in[1;2]$;   բ) $x^4+6x^3-1=0$, $x\in[0;1]$;

գ) $16x^2-2tgx-7=0$, $x\in\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$;   դ) $x^3+\ln x-20=0$, $x\in(0;e)$:

705. Ապացուցել, որ հետևյալ հավասարումներից յուրաքանչյուրն ունի առնվազն երկու իրական արմատ.

ա) $2x^2+9\sin x-1=0$;   բ) $sh^2x+3x^5-2=0$;

գ) $e^x-x-2=0$;   դ) $x^3\operatorname{sgn}x+x^2+3x-1=0$:

706. Ապացուցել, որ կենտ աստիճանի ցանկացած հանրահաշվական բազմանդամ ունի առնվազն մեկ իրական արմատ:

707. Պարզել, թե հետևյալ բազմություններից ո՞րը կարող է լինել $[a;b]$ հատվածի վրա անընդհատ որևէ ֆունկցիայի արժեքների բազմություն.

ա) $[-3;1]$;   բ) $(-3;1)$;   գ) $(-3;1]$;

դ) $\{-3\}$;   ե) $\{-3;1\}$;   զ) $[-3;1]\cup[2;3]$;

է) $[-3;+\infty)$;   ը) Q;   թ) R:

708. Կառուցել $(0;1)$ միջակայքի վրա այնպիսի անընդհատ ֆունկցիա, որը չունենա ո՛չ ամենամեծ, ո՛չ ամենափոքր արժեքներ:

709. Կառուցել $[0;1)$ կիսաբաց միջակայքի վրա այնպիսի անընդհատ ֆունկցիա, որը չունենա ո՛չ ամենամեծ, ո՛չ ամենափոքր արժեքներ:

710. Ապացուցել, որ եթե ֆունկցիան որոշված է և անընդհատ $[0;1]\cup[2;4]$ բազմության վրա, ապա այն ունի ամենամեծ և ամենափոքր արժեքներ:

711. Բերել $[a;b]$ հատվածի վրա որոշված խզվող ֆունկցիայի օրինակ, որը ցանկացած $(\alpha;\beta)\subset[a;b]$ միջակայքում ընդունում է մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ:

712. Ապացուցել, որ եթե $f:[a;b]\to R$ ֆունկցիան անընդհատ է և չնվազող, ապա $f([a;b])=[f(a);f(b)]$:

713. Կառուցել $[a;b]$ հատվածի վրա որոշված այնպիսի փոխմիարժեք և խզվող ֆունկցիա, որի համար $f([a;b])=[f(a);f(b)]$:

***

714. Ապացուցել, որ հավասարաչափ անընդհատ ֆունկցիան անընդհատ է:

715. Բերել $(a;b)$ միջակայքի վրա անընդհատ ֆունկցիայի օրինակ, որը հավասարաչափ անընդհատ չէ:

716. Ապացուցել, որ եթե $y=f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $(a;b)$ միջակայքի վրա, որտեղ $-\infty\le a<b\le+\infty$, և գոյություն ունեն $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ և $\lim\limits_{x\to b}f(x)$ վերջավոր սահմանները, ապա $f(x)$-ը $(a;b)$-ի վրա հավասարաչափ անընդհատ է:

717. Ապացուցել, որ $f(x)$ ֆունկցիան X բազմության վրա հավասարաչափ անընդհատ չէ, այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունեն ε_0 դրական թիվ և $x_n', x_n''\in X$ հաջորդականություններ այնպես, որ $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$ և $|f(x_n')-f(x_n'')|\ge\varepsilon_0$:

Հետազոտել ֆունկցիայի հավասարաչափ անընդհատությունը (718-729).

718. $y=2x-3$, $x\in R$:

719. $y=\sqrt{x}$, $x\in R_+$:

720. $y=x^3$, $x\in R$:

721. $y=\sqrt[3]{x}$, $x\in R$:

722. $y=\dfrac{1}{x^2}$, ա) $x\in(0;+\infty)$; բ) $x\in[1;+\infty)$:

723. $y = \dfrac{1+x}{1+x^2}$, $x \in R$:

724. $y = \dfrac{\sin x}{x}$, $x \in (0;+\infty)$:

725. $y = \sin 2x$, $x \in R$:

726. $y = arctgx$, $x \in R$:

727. $y = tgx$, ա) $x \in \left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$; բ) $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$:

728. $y = \ln x$, ա) $x \in [1;+\infty)$; բ) $x \in (0;1)$:

729. $y = e^x$, ա) $x \in R$; բ) $x \in R_-$:

Բ

Հետազոտել ֆունկցիայի անընդհատությունը: Դասակարգել խզումները ըստ սեռի (730-733).

730. $y = x\sin\dfrac{1}{x}$, երբ $x \neq 0$, $y(0) = 0$:

731. $y = arctg\dfrac{1}{x}$, երբ $x \neq 0$, $y(0) = 0$:

732. $f(x) = (x-2)\chi(x)$, որտեղ $\chi(x)$-ը Դիրիխլեի ֆունկցիան է:

733. $y = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)\chi(x)$, որտեղ $a_1, a_2, \ldots, a_n$-ը իրարից տարբեր իրական թվեր են:

734. Ապացուցել, որ Ռիմանի ֆունկցիան (տես վարժ. 575) անընդհատ է բոլոր իռացիոնալ կետերում և խզվող՝ ռացիոնալ կետերում:

735. Դիցուք $Q_2 = \left\{\dfrac{2p-1}{2^q} : p \in Z, q \in Z_+\right\}$-ը երկուական ռացիոնալ թվերի բազմությունն է: Ապացուցել, որ

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^q}, \text{ երբ } x = \dfrac{2p-1}{2^q} \in Q_2, \\ 0, \text{ երբ } x \in R \setminus Q_2 \end{cases}$$

ֆունկցիան անընդհատ է $R \setminus Q_2$ բազմության վրա և խզվող՝ Q_2-ի վրա: Պարզել խզումների սեռը:

736. Հետազոտել հետևյալ ֆունկցիայի անընդհատությունը.

$$\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{p}{q+1}, \text{ երբ } x = \dfrac{p}{q} \quad (\text{անկրճատելի կոտորակ է և } q \in N), \\ |x|, \text{ երբ } x \in I: \end{cases}$$

737. Տրված $M \subset R$ բազմության համար

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1, \text{ երբ } x \in M, \\ 0, \text{ երբ } x \in M^c \end{cases}$$

ֆունկցիան կոչվում է M բազմության *բնութագրիչ ֆունկցիա* : Նկարագրել այդ ֆունկցիայի անընդհատության և խզման կետերի բազմությունները և դասակարգել խզումներն ըստ սեռի:

738. Հետազոտել $\varphi \circ \psi$ և $\psi \circ \varphi$ բարդ ֆունկցիաների անընդհատությունը, եթե

ա) $\varphi(x) = \operatorname{sgn} x$, $\psi(x) = 1 + x^2$;

բ) $\varphi(x) = |2x-1|$, $\psi(x) = \chi(x)$ (Դիրիխլեի ֆունկցիան է);

գ) $\varphi(x) = \psi(x) = \chi(x)$:

$f : X \to R$ ֆունկցիան $x_0 \in X$ կետում կոչվում է

1) ձախից անընդհատ, եթե

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X\ \left(x_0 - \delta < x \le x_0 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\right)$;

2) աջից անընդհատ, եթե

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X\ \left(x_0 \le x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\right)$:

739. Դիցուք $f : X \to R$ ֆունկցիան բավարարում է հետևյալ պայմաններից որևէ մեկին.

ա) $\forall \delta > 0\ \exists \varepsilon > 0\ \forall x \in X\ \left(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\right)$;

բ) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X\ \left(|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow |x - x_0| < \delta\right)$;

գ) $\forall \delta > 0\ \exists \varepsilon > 0\ \forall x \in X\ \left(|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow |x - x_0| < \delta\right)$:

Հետևու՞մ է արդյոք այդտեղից, որ f -ը x_0 կետում անընդհատ է: Եթե ոչ, ապա ա), բ), գ) պայմաններից որը ֆունկցիայի ինչ հատկություն է բնորոշում:

Հետազոտել ֆունկցիայի անընդհատությունը, անընդհատությունը ձախից և աջից (740-744).

740. $y = \dfrac{|\sin x|}{x}$, երբ $x \ne 0$, $y(0) = -1$:

741. $y = \dfrac{e^x - 1}{|x|}$, երբ $x \ne 0$, $y(0) = -1$:

742. $y = [\ln x]$:　　　**743.** $y = \ln x - [\ln x]$:

744. $y = \operatorname{sgn}(ctgx)$, երբ $x \ne \pi n$, $y(\pi n) = (-1)^n$, $n \in Z$:

745. Դիցուք $f : [a;b] \to R$ ֆունկցիան սահմանափակ է: Ապացուցել, որ

ա) $m(x) = \inf f([a;x))$ և $M(x) = \sup f([a;x))$

ֆունկցիաները $(a;b]$-ի յուրաքանչյուր կետում ձախից անընդհատ են;

բ) եթե f-ը անընդհատ է, ապա $m(x)$ և $M(x)$ ֆունկցիաները նույնպես անընդհատ են:

746. Ապացուցել, որ եթե $f: X \to R$ և $g: X \to R$ ֆունկցիաները $x_0 \in X$ կետում անընդհատ են, ապա այդ կետում անընդհատ են նաև

$$\varphi(x) = \min\{f(x), g(x)\} \text{ և } \psi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

ֆունկցիաները:

747. Դիցուք $f: X \to R$ ֆունկցիան X-ի վրա անընդհատ է և $c > 0$: Ապացուցել, որ

$$f_c(x) = \begin{cases} -c, \text{ եթե } f(x) < -c, \\ f(x), \text{ եթե } |f(x)| \le c, \\ c, \text{ եթե } f(x) > c \end{cases}$$

ֆունկցիան X-ի վրա անընդհատ է:

748. Ապացուցել, որ $f: X \to R$ ֆունկցիան անընդհատ է $x_0 \in X$ կետում այն և միայն այն դեպքում, երբ X-ի կետերից կազմված ցանկացած $x_n \to x_0$ հաջորդականության համար $f(x_n) \to f(x_0)$ (անընդհատություն ըստ Հայնեի):

749. Ապացուցել, որ եթե $f \in C[a;b]$ ֆունկցիան աճող է (նվազող է), ապա ցանկացած x_n հաջորդականության համար

$$f(x_n) \to f(x_0) \Rightarrow x_n \to x_0:$$

750. Ստուգել, որ $y = (1 + x^2)\operatorname{sgn} x$ ֆունկցիան հակադարձելի է և խզվող, սակայն հակադարձ ֆունկցիան անընդհատ է:

751. Ապացուցել, որ եթե f-ը $(a;b)$ միջակայքի վրա մոնոտոն է և հակադարձելի, ապա f^{-1}-ն իր որոշման տիրույթում ամենուրեք անընդհատ է: Ճշմարի՞տ է արդյոք պնդումը ցանկացած հակադարձելի, բայց ոչ մոնոտոն ֆունկցիայի համար:

752. Կառուցել $f: X \to R$ փոխմիարժեք ֆունկցիա, որը $x_0 \in X$ կետում անընդհատ է, բայց նրա հակադարձը $y_0 = f(x_0)$ կետում խզվող է:

753. Ապացուցել, որ եթե f-ն անընդհատ է $[a;b]$ հատվածի վրա և հակադարձելի, ապա այն $[a;b]$-ի վրա մոնոտոն է:

754. Ապացուցել, որ մոնոտոն ֆունկցիայի խզումները կարող են լինել միմիայն առաջին սեռի:

755. Կառուցել $[0;1]$ հատվածի վրա որոշված մոնոտոն և սահմանափակ ֆունկցիա, որի խզման կետերի բազմությունն անվերջ է:

756. Դիցուք $f:R\to R$ ֆունկցիան անընդհատ է և ունի T պարբերություն: Ապացուցել, որ գոյություն ունի $x_0\in R$, այնպիսին, որ $f\left(x_0+\frac{T}{2}\right)=f(x_0)$:

757. Ապացուցել, որ եթե $f:R\to R$ ֆունկցիան անընդհատ է և պարբերական, ապա այն սահմանափակ է:

758. Ապացուցել, որ եթե $f:R\to R$ ֆունկցիան անընդհատ է և պարբերական, ապա կա՛մ այն ունի փոքրագույն դրական պարբերություն, կա՛մ հաստատուն է:

759. $x_0\in X$ կետը կոչվում է $f:X\to R$ ֆունկցիայի *անշարժ կետ*, եթե $f(x_0)=x_0$:

Ապացուցել, որ եթե $f:[0;1]\to[0;1]$ ֆունկցիան անընդհատ է, ապա այն ունի անշարժ կետ:

760. Կառուցել $f:R\to R$ անընդհատ ֆունկցիա, որն անշարժ կետ չունի:

761. Կառուցել $f:(0;1)\to(0;1)$ անընդհատ ֆունկցիա, որն անշարժ կետ չունի:

762. Ապացուցել, որ հատվածի վրա անընդհատ ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը հատված է:

763. Դիցուք $f\in C[a;b]$: Ապացուցել, որ եթե f-ն $[a;b]$ հատվածի ոչ մի կետում զրո չի դառնում, ապա գոյություն ունի $\delta>0$, այնպիսին, որ $[a;b]$-ի բոլոր կետերում $|f(x)|>\delta$: Կմնա՞ արդյոք պնդումը ճշմարիտ, եթե $[a;b]$ հատվածը փոխարինենք $(a;b)$ միջակայքով:

***

764. Ապացուցել Բորել-Լեբեգի լեմմայի հետևյալ ընդհանրացումը. $[a;b]\cup[c;d]$ բազմության ցանկացած բաց ծածկույթից կարելի է անջատել վերջավոր ենթածածկույթ:

765. Բերել $(a;b)$ միջակայքի այնպիսի բաց ծածկույթի օրինակ, որից հնարավոր չէ անջատել վերջավոր ենթածածկույթ:

766. Բերել $[a;+\infty)$ միջակայքի այնպիսի բաց ծածկույթի օրինակ, որից հնարավոր չէ անջատել վերջավոր ենթածածկույթ:

767. Ապացուցել, որ եթե F բազմության ցանկացած բաց ծածկույթից հնարավոր է անջատել վերջավոր ենթածածկույթ, ապա F-ը սահմանափակ է:

768. Փակ բազմությունների α ընտանիքն անվանենք F բազմության փակ ծածկույթ, եթե $F\subset\bigcup\alpha$: Կառուցել $[a;b]$ հատվածի փակ ծածկույթ, որից հնարավոր չէ անջատել վերջավոր ենթածածկույթ:

769. Դիցուք f ֆունկցիան որոշված է և հավասարաչափ անընդհատ $(a;b)$ վերջավոր միջակայքի վրա: Ապացուցել, որ

ա) f-ը սահմանափակ է;

բ) գոյություն ունեն $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ և $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$ վերջավոր սահմանները;

գ) գոյություն ունի (ընդ որում միակը) f-ի $F:[a;b]\to R$ անընդհատ շարունակություն:

770. Դիցուք f ֆունկցիան որոշված է և հավասարաչափ անընդհատ $[a;+\infty)$ միջակայքի վրա: Ճշմարի՞տ են արդյոք հետևյալ պնդումները.

ա) f-ը սահմանափակ է;

բ) գոյություն ունի $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ վերջավոր սահման:

Բերել համապատասխան օրինակներ:

771. Ապացուցել, որ եթե վերջավոր կամ անվերջ միջակայքում անընդհատ և սահմանափակ ֆունկցիան մոնոտոն է, ապա այն այդ միջակայքի վրա հավասարաչափ անընդհատ է:

772. Ապացուցել, որ եթե ֆունկցիան անընդհատ է $[a;b]$ և $[c;d]$ հատվածներից յուրաքանչյուրի վրա, ապա այն $[a;b]\cup[c;d]$ բազմության վրա հավասարաչափ անընդհատ է:

773. Ստուգել, որ $y=\dfrac{\sin x}{|x|}$ ֆունկցիան հավասարաչափ անընդհատ է $[-1;0)$ և $(0;1]$ միջակայքերից յուրաքանչյուրի վրա, սակայն $[-1;0)\cup(0;1]$ բազմության վրա հավասարաչափ անընդհատ չէ:

774. Ապացուցել, որ եթե $f:R\to R$ ֆունկցիան անընդհատ է և պարբերական, ապա այն R-ի վրա հավասարաչափ անընդհատ է:

775. Դիցուք $f:X\to R$ և $g:X\to R$ ֆունկցիաները հավասարաչափ անընդհատ են: Ապացուցել, որ

ա) $f+g$ ֆունկցիան հավասարաչափ անընդհատ է;

բ) եթե X-ը վերջավոր միջակայք է, ապա $f\cdot g$ ֆունկցիան հավասարաչափ անընդհատ է:

776. Ստուգել, որ $y=x$ և $y=\sin x$ ֆունկցիաները R-ի վրա հավասարաչափ անընդհատ են, սակայն $y=x\sin x$ ֆունկցիան R-ի վրա հավասարաչափ անընդհատ չէ:

Հետազոտել ֆունկցիայի հավասարաչափ անընդհատությունը (777-786).

777. $y=\sin x^2$, $x\in(0;+\infty)$:

778. $y=\sin\dfrac{1}{x}$, $x\in(0;1)$:

779. $y=x\sin\dfrac{1}{x}$, $x\in R\setminus\{0\}$:

780. $y=\dfrac{\sin x^2}{x}$, $x\in(0;+\infty)$:

781. $y = x\,arctgx^2$, $x \in R$:

782. $y = x^2 arctgx$, $x \in R$:

783. $y = x + \sin x$, $x \in R$:

784. $y = x^n e^{-|x|}$ $(n \in N)$, $x \in R$:

785. $y = \dfrac{1}{x} e^{-\frac{1}{|x|}}$, $x \in R \setminus \{0\}$:

786. $y = \sqrt{x} \ln x$, $x \in (0;+\infty)$:

787. Դիցուք $P(x)$-ը հանրահաշվական բազմանդամ է: Ապացուցել, որ $y = P\left(\dfrac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$ ֆունկցիան $R \setminus \{0\}$ բազմության վրա հավասարաչափ անընդհատ է:

788. Տրված $f : X \to R$ սահմանափակ ֆունկցիայի և ցանկացած $\delta > 0$ թվի համար

$$\omega_f(\delta) = \sup\{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in X \text{ և } |x_1 - x_2| < \delta\}$$

ֆունկցիան անվանում են f ֆունկցիայի *անընդհատության մոդուլ*:

Ցույց տալ, որ

ա) $\omega_f(\delta)$-ն ոչ բացասական չնվազող ֆունկցիա է և, հետևաբար, գոյություն ունի $\omega_f(+0) = \lim\limits_{\delta \to +0} \omega_f(\delta)$ վերջավոր սահմանը;

բ) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x_1, x_2 \in X\ \left(|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \omega_f(+0) + \varepsilon\right)$;

գ) եթե $g : X \to R$-ը մեկ այլ սահմանափակ ֆունկցիա է, ապա

$$\omega_{f+g}(\delta) \le \omega_f(\delta) + \omega_g(\delta);$$

դ) $f : X \to R$ սահմանափակ ֆունկցիան X բազմության վրա կլինի հավասարաչափ անընդհատ այն և միայն այն դեպքում, երբ $\omega_f(+0) = 0$:

789. Հետևյալ ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրի անընդհատության մոդուլի համար ստանալ $\omega_f(\delta) \le C \cdot \delta^\alpha$ տեսքի գնահատական (C-ն և α-ն հաստատուններ են).

ա) $y = x^3$, $x \in [0;1]$;

բ) $y = \sqrt{x}$, $x \in [0;1]$;

գ) $y = arctgx$, $x \in R$;

դ) $y = \sin x + \cos x$, $x \in R$;

ե) $y = \sin x^2$, $x \in R$;

զ) $y = \sin\dfrac{1}{x}$, $x \in (0;+\infty)$:

***

$f : R \to R$ ֆունկցիան կոչվում է *ադիտիվ ֆունկցիա*, եթե այն բավարարում է $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ֆունկցիոնալ հավասարմանը:

790. Ապացուցել, որ միակ անընդհատ և ադիտիվ ֆունկցիան $f(x) = ax$ գծային և համասեռ ֆունկցիան է, որտեղ $a = f(1)$:

791. Ապացուցել, որ եթե $f:R\to R$ ֆունկցիան մոնոտոն է և ադիտիվ, ապա այն գծային է և համասեռ:
792. Ապացուցել, որ եթե ադիտիվ ֆունկցիան $x=0$ կետում սահմանափակ է, ապա այն գծային է և համասեռ:
793. $f:R\to R$ ֆունկցիան անվանենք x_0 կետում Չեզարոյի իմաստով անընդհատ, եթե ցանկացած x_n հաջորդականության համար

$$\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\to x_0\Rightarrow\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}\to f(x_0):$$

Ցույց տալ, որ

ա) $f(x)=ax+b$ գծային ֆունկցիան Չեզարոյի իմաստով անընդհատ է R-ի վրա;

բ) եթե f-ը Չեզարոյի իմաստով անընդհատ է առնվազն մեկ կետում, ապա այն գծային է:

794. Դիցուք $f:R\to R$ ֆունկցիան բավարարում է $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ ֆունկցիոնալ հավասարմանը: Ապացուցել, որ

ա) եթե f-ը հաստատունից տարբեր է և անընդհատ, ապա այն ցուցչային ֆունկցիա է. $f(x)=a^x$, որտեղ $a=f(1)$;

բ) եթե f-ը հաստատունից տարբեր է և $(0;\varepsilon)$ միջակայքում սահմանափակ, ապա այն ցուցչային է:

795. Ապացուցել, որ միակ անընդհատ և նույնաբար զրոյից տարբեր f ֆունկցիան, որը ցանկացած x,y դրական թվերի համար բավարարում է $f(xy)=$ $=f(x)+f(y)$ հավասարմանը և $f(a)=1$ պայմանին, $f(x)=\log_a x$ ֆունկցիան է, որտեղ a-ն 1-ից տարբեր դրական հաստատուն է:
796. Ապացուցել, որ նույնաբար զրոյից տարբեր միակ անընդհատ ֆունկցիան, որը բավարարում է $f(xy)=f(x)f(y)$ $(x,y>0)$ ֆունկցիոնալ հավասարմանը, $f(x)=x^a$ աստիճանային ֆունկցիան է:
797. Գտնել բոլոր $f(x)$ $(x\in R)$ անընդհատ ֆունկցիաները, որոնք բավարարում են $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$ ֆունկցիոնալ հավասարմանը:
798. Դիցուք տրված է $f:R\to R$ ֆունկցիան: Հետևյալ արտահայտությունները կոչվում են f-ի համապատասխանաբար *առաջին* և *երկրորդ կարգի վերջավոր աճեր.*

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x),\ \Delta^2 f(x)=\Delta(\Delta f(x)):$$

Ապացուցել, որ եթե f-ն անընդհատ է և ցանկացած x-ի ու Δx-ի համար $\Delta^2 f(x)=0$, ապա f-ը գծային է. $f(x)=ax+b$:

Գ.

799. Տրված է $f:X\to R$ ֆունկցիան: Ապացուցել, որ f-ը $x_0\in X$ կետում անընդհատ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $f(x_0)$ կետի ցանկացած V շրջակայքի համար գոյություն ունի x_0 կետի U շրջակայք այնպիսին, որ $f(U\cap X)\subset V$:

800. Ապացուցել, որ $f:R\to R$ ֆունկցիան R-ի վրա անընդհատ է այն և միայն այն դեպքում, երբ

ա) ցանկացած $G\subset R$ բաց բազմության $f^{-1}(G)$ նախապատկերը բաց բազմություն է;

բ) ցանկացած F փակ բազմության նախապատկերը փակ է:

801. Ապացուցել, որ $f:X\to R$ ֆունկցիան X-ի վրա անընդհատ է այն և միայն այն դեպքում, երբ

ա) ցանկացած G բաց բազմության համար գոյություն ունի P բաց բազմություն, այնպիսին, որ $f^{-1}(G)=P\cap X$;

բ) ցանկացած F փակ բազմության համար գոյություն ունի K փակ բազմություն, այնպիսին, որ $f^{-1}(F)=K\cap X$:

802. Ապացուցել, որ $f:R\to R$ ֆունկցիան կլինի ամենուրեք անընդհատ այն և միայն այն դեպքում, երբ ցանկացած $a\in R$ թվի համար

ա) $\{x\in R: f(x)<a\}$ և $\{x\in R: f(x)>a\}$ բազմությունները լինեն բաց;

բ) $\{x\in R: f(x)\le a\}$ և $\{x\in R: f(x)\ge a\}$ բազմությունները լինեն փակ:

803. Տրված է $f:X\to R$ ֆունկցիան: Ցանկացած $a\in R$ թվի համար $\{x\in X: f(x)=a\}$ բազմությունը կոչվում է f ֆունկցիայի *a-կետերի բազմություն*: Ապացուցել, որ եթե X բազմությունը փակ է և $f\in C(X)$, ապա ցանկացած $a\in R$ թվի համար f-ի a-կետերի բազմությունը փակ է:

804. Դիցուք՝ $f,g\in C[a;b]$: Ապացուցել, որ $\{x\in[a;b]: f(x)=g(x)\}$ բազմությունը փակ է:

805. $f:R\to R$ ֆունկցիան կոչվում է *բաց արտապատկերում*, եթե ցանկացած G բաց բազմության $f(G)$ պատկերը բաց է: Ապացուցել, որ եթե f բաց արտապատկերումն անընդհատ է, ապա այն մոնոտոն է:

806. Տրված է $f:R\to R$ ֆունկցիան: Ապացուցել, որ եթե ցանկացած $\alpha<\beta$ թվերի համար $(\alpha;\beta)$-ի պատկերը $f(\alpha)$, $f(\beta)$ ծայրակետերով միջակայքն է, ապա f-ն անընդհատ է և աճող:

807. Դիցուք $f:R\to R$ ֆունկցիան անընդհատ է: Ապացուցել, որ եթե ցանկացած $G\subset R$ բաց բազմության $f(G)$ պատկերը փակ է, ապա f-ը հաստատուն է:

808. Ապացուցել, որ եթե $f:R\to R$ ֆունկցիան անընդհատ է, ապա ցանկացած $X\subset R$ կապակցված բազմության $f(X)$ պատկերը կապակցված է (տես 171 խնդիրը):

809. Դիցուք $f:R\to R$ ֆունկցիան մոնոտոն է: Ապացուցել, որ եթե ցանկացած A կապակցված բազմության $f(A)$ պատկերը կապակցված է, ապա f-ն անընդհատ է:

810. Դիցուք $f:[a;b]\to R$ ֆունկցիան անընդհատ է և $f(a)\cdot f(b)<0$: Ստուգել, որ $\{x\in(a;b): f(x)>0\}$ և $\{x\in(a;b): f(x)<0\}$ բազմությունները բաց են և ոչ դատարկ: Օգտվելով 171 խնդրում ձևակերպված պնդումից, ապացուցել միջանկյալ արժեքի վերաբերյալ Բոլցանո-Կոշիի թեորեմը:

811. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $(a;b)$ միջակայքում և $x_1,x_2,\dots,x_n$ կետերը այդ միջակայքից են, ապա դրանց միջև կգտնվի մի ξ կետ, այնպիսին, որ

$$f(\xi)=\frac{1}{n}\left[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\right]:$$

812. Դիցուք f-ը որոշված է և անընդհատ $(a;b)$ $(b\le+\infty)$ վերջավոր կամ անվերջ միջակայքում: Ապացուցել, որ b կետում ֆունկցիայի *սահմանային արժեքների բազմությունը* փակ է և կապակցված: Այլ կերպ՝ եթե $l=\underline{\lim}_{x\to b} f(x)$ և $L=\overline{\lim}_{x\to b} f(x)$, ապա ցանկացած $l\le\lambda\le L$ թվի համար գոյություն ունի $x_n\to b$ $\quad (x_n\in(a;b), n=1,2,\dots)$ հաջորդականություն, այնպիսին, որ $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lambda$:

813. Դիցուք $y=f(x)$ ֆունկցիան $(0;+\infty)$ միջակայքում անընդհատ է և սահմանափակ: Ապացուցել, որ ցանկացած T թվի համար գոյություն ունի $x_n\to+\infty$ հաջորդականություն, այնպիսին, որ $\lim_{n\to\infty}\left[f(x_n+T)-f(x_n)\right]=0$:

814. Դիցուք $f:[0;1]\to R$ ֆունկցիան անընդհատ է և $f(0)=f(1)$: Ապացուցել, որ

ա) ցանկացած $n \in N$ բնական թվի համար գոյություն ունի $\frac{1}{n}$ երկարության հորիզոնական հատված, որի ծայրակետերը գտնվում են f ֆունկցիայի գրաֆիկի վրա (հատվածը ներգծված է գրաֆիկին);

բ) եթե $l \neq 0$ թիվը $\frac{1}{n}$ տեսքի չէ, ապա կարելի է կառուցել նշված պայմաններին բավարարող f ֆունկցիա, որի գրաֆիկին l երկարությամբ հորիզոնական հատված ներգծելն անհնար է:

815. Դիցուք $f:[a;b] \to R$ ֆունկցիան չնվազող է և $Q \cap [f(a);f(b)] \subset \subset f([a;b])$: Ապացուցել, որ f-ն անընդհատ է:

816. $A \subset [a;b]$ բազմությունը կոչվում է $[a;b]$-ում *խիտ*, եթե $\overline{A} = [a;b]$: Ապացուցել, որ եթե $f:[a;b] \to R$ ֆունկցիան չնվազող է և նրա արժեքների բազմությունը խիտ է $[f(a);f(b)]$-ում, ապա f-ն անընդհատ է:

817. Դիցուք $f, g \in C[a;b]$: Ապացուցել, որ եթե $\{x \in [a;b]: f(x) = g(x)\}$ բազմությունը խիտ է $[a;b]$-ում, ապա $f = g$:

818. Դիցուք $f_1:[0;1] \to [0;1]$ ֆունկցիան անընդհատ է և $f_1(0) = 0$, $f_1(1) = 1$: Նշանակենք $f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x))$ $(n \in N)$: Ապացուցել հետևյալ պնդումները.

ա) $\forall x \in [0;1]\ (f_2(x) = x) \Rightarrow \forall x \in [0;1]\ (f_1(x) = x)$;

բ) $\exists n \in N\ \forall x \in [0;1]\ (f_n(x) = x) \Rightarrow \forall x \in [0;1]\ (f_1(x) = x)$;

գ) $\forall x \in [0;1]\ \exists n_x \in N\ (f_{n_x}(x) = x) \Rightarrow \forall x \in [0;1]\ (f_1(x) = x)$:

819. Դիցուք f և g ֆունկցիաները $[0;1]$ հատվածն անընդհատ արտապատկերում են $[0;1]$-ի մեջ, ընդ որում՝ $f \circ g = g \circ f$: Ապացուցել, որ գոյություն ունի $c \in [0;1]$ կետ, որ $f(c) = g(c)$:

820. Դիցուք $f:[0;1] \to R$ ֆունկցիան բավարարում է $f(0) > 0$ և $f(1) < 0$ պայմաններին: Ապացուցել, որ եթե $f = g + h$, որտեղ g-ն անընդհատ է, իսկ h-ը՝ չնվազող, ապա գոյություն ունի $x_0 \in (0;1)$ կետ, այնպիսին, որ $f(x_0) = 0$:

821. Տրված է $f: R_+ \to R_+$ անընդհատ ֆունկցիան: Դիցուք կամայական $h > 0$ թվի համար $\lim\limits_{n \to \infty} f(nh) = 0$ $(n \in N)$: Ապացուցել, որ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$:

822. Դիցուք $f: R_+ \to R$ ֆունկցիան անընդհատ է և կամայական $x \in R_+$ թվի համար $\lim\limits_{n \to \infty} f(x + n) = 0$ $(n \in N)$: Կարելի՞ է արդյոք պնդել, որ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$: Կառուցել համապատասխան օրինակ:

823. Ապացուցել, որ եթե $f:R_+ \to R$ ֆունկցիան հավասարաչափ անընդհատ է և կամայական $x \in R_+$ թվի համար $\lim\limits_{n\to\infty} f(x+n)=0 \quad (n\in N)$, ապա $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$:

824. Ապացուցել, որ եթե $f:R_+ \to R$ ֆունկցիան անընդհատ է և կամայական $x \in R_+$ թվի համար $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x+\sqrt{n}\right)=0 \quad (n\in N)$, ապա $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$:

825. Դիցուք $f:R_+ \to R$ ֆունկցիան անընդհատ է, իսկ դրական թվերից կազմված c_n անող հաջորդականությունը բավարարում է $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=+\infty$ և $\lim\limits_{n\to+\infty}(c_{n+1}-c_n)=0$ պայմաններին: Ապացուցել, որ եթե ցանկացած $x\in R_+$ թվի համար $\lim\limits_{n\to\infty} f(x+c_n)=0$, ապա $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$:

826. Տրված $f:X\to R$ ֆունկցիայի և $x_0\in X$ կետի համար նշանակենք՝

$$\Omega_f(x_0;\delta)=\sup\{f(x_1)-f(x_2):x_1,x_2\in(x_0-\delta;x_0+\delta)\cap X\}:$$

Ապացուցել, որ

ա) $0\le\Omega_f(x_0;\delta)\le+\infty$ և որպես δ-ից կախված ֆունկցիա $\Omega_f(x_0;\delta)$-ն $(0;+\infty)$ միջակայքի վրա չնվազող է;

բ) գոյություն ունի $\Omega_f(x_0)=\lim\limits_{\delta\to+0}\Omega_f(x_0;\delta)$ վերջավոր կամ անվերջ սահմանը (կոչվում է f *ֆունկցիայի տատանում* x_0 *կետում*);

գ) f-ը x_0 կետում անընդհատ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\Omega_f(x_0)=0$ (անընդհատություն ըստ Բեռի);

դ) եթե X-ը փակ բազմություն է, ապա ցանկացած $a\in(0;+\infty)$ թվի համար $\{x\in X:\Omega_f(x)\ge a\}$ բազմությունը փակ է;

ե) $\bigcup\limits_{n\in N}\left\{x\in X:\Omega_f(x)\ge\dfrac{1}{n}\right\}$-ը f ֆունկցիայի խզման կետերի բազմությունն է:

827. Դիցուք F-ը կամայական փակ բազմություն է: Կառուցել $f:R\to R$ ֆունկցիա, որի խզման կետերի բազմությունը F-ն է:

Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ ցանկացած ֆունկցիայի խզման կետերի բազմությունը փակ է:

828. Տրված է $f:R\to R$ ֆունկցիան: Ապացուցել, որ f-ն անընդհատ է այն և միայն այն դեպքում, երբ ցանկացած $c>0$ թվի համար

$$f_c(x)=\begin{cases}-c, \text{երբ } f(x)<-c,\\ f(x), \text{երբ } |f(x)|\le c,\\ c, \text{երբ } f(x)>c\end{cases}$$

ֆունկցիան անընդհատ է:

829. Դիցուք $f:R\to R$ ֆունկցիան անընդհատ է և

$$\forall x_1,x_2\in R\ \left(|f(x_1)-f(x_2)|\ge|x_1-x_2|\right):$$

Ապացուցել, որ f-ը փոխմիարժեք արտապատկերում է R-ը R-ի վրա:

830. K բազմությունը կոչվում է *կոմպակտ*, եթե նրա ցանկացած բաց ծածկույթից կարելի է անջատել վերջավոր ենթածածկույթ: Ապացուցել, որ $K\subset R$ բազմությունը կոմպակտ է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն փակ է և սահմանափակ:

831. Ապացուցել Վայերշտրասի թեորեմի հետևյալ ընդհանրացումը.

ա) կոմպակտի վրա անընդհատ ֆունկցիան սահմանափակ է;

բ) կոմպակտի վրա անընդհատ ֆունկցիան ունի մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ;

գ) կոմպակտի վրա անընդհատ ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը կոմպակտ է (կոմպակտի անընդհատ պատկերը կոմպակտ է):

832. Ապացուցել նախորդ խնդրի ա) պնդման հետևյալ ընդհանրացումը. եթե $f:K\to R$ ֆունկցիան որոշված է K կոմպակտի վրա և յուրաքանչյուր կետում ունի վերջավոր սահման, ապա f-ը սահմանափակ է:

833. Ապացուցել Կանտորի թեորեմի հետևյալ ընդհանրացումը. կոմպակտի վրա անընդհատ ֆունկցիան հավասարաչափ անընդհատ է:

834. Դիցուք X-ը թվային բազմություն է: Ապացուցել Վայերշտրասի թեորեմի հետևյալ շրջումը.

ա) եթե կամայական $f:X\to R$ անընդհատ ֆունկցիա սահմանափակ է, ապա X-ը կոմպակտ է:

բ) եթե կամայական $f:X\to R$ անընդհատ ֆունկցիա ունի մեծագույն արժեք, ապա X-ը կոմպակտ է:

835. Դիցուք X-ը թվային բազմություն է:Ճշմարի՞տ է արդյոք Կանտորի թեորեմի հետևյալ շրջումը. եթե կամայական $f:X\to R$ անընդհատ ֆունկցիա հավասարաչափ անընդհատ է, ապա X-ը կոմպակտ է: Բերել համապատասխան օրինակ:

836. Ապացուցել, որ եթե $f:R\to R$ ֆունկցիան հավասարաչափ անընդհատ է, ապա գոյություն ունեն a և b հաստատուններ, այնպիսիք, որ $|f(x)|\le a|x|+b$:

ճշմարի՞տ է արդյոք հակադարձ պնդումը: Կառուցել $f:R\to R$ անընդհատ և աճող ֆունկցիա, որը բավարարում է $|f(x)|\le|x|$ անհավասարությանը, բայց R-ի վրա հավասարաչափ անընդհատ չէ:

837. Ապացուցել, որ սահմանափակ բազմության վրա հավասարաչափ անընդհատ ֆունկցիան սահմանափակ է:

838. Դիցուք A-ն ոչ դատարկ և սահմանափակ թվային բազմություն է, իսկ $\overline{A}$-ն՝ A-ի փակումը: Ապացուցել, որ $f:A\to R$ ֆունկցիան ունի $F:\overline{A}\to R$ անընդհատ շարունակություն այն և միայն այն դեպքում, երբ f-ը A-ի վրա հավասարաչափ անընդհատ է: Համոզվել, որ այդպիսի շարունակությունը միակն է:

Գլուխ 5

Ֆունկցիայի ածանցյալ

Տրված է $f: X \to R$ ֆունկցիան: Դիցուք $x_0 \in X$ կետը X-ի կուտակման կետ է: Ցանկացած $x \in X$ կետի համար $\Delta x = x - x_0$ տարբերությունը կանչվում է *արգումենտի աճ*, իսկ $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ տարբերությունը՝ Δx աճին համապատասխանող *ֆունկցիայի աճ*:

Սահմանում: Եթե գոյություն ունի

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

վերջավոր, $+\infty$ կամ $-\infty$ սահման, ապա այն կոչվում է f ֆունկցիայի *ածանցյալ* x_0 կետում:

Միակողմանի ածանցյալներ: Եթե x_0 կետում գոյություն ունի $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ հարաբերության ձախակողմյան (աջակողմյան) սահմանը, ապա այն կոչվում է f ֆունկցիայի *ձախակողմյան (աջակողմյան) ածանցյալ* x_0 կետում և նշանակվում՝ $f'_-(x_0)$ $(f'_+(x_0))$:

Որպեսզի f ֆունկցիան x_0 կետում ունենա վերջավոր ածանցյալ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ կետում գոյություն ունենան նրա վերջավոր միակողմանի ածանցյալները և լինեն իրար հավասար:

Ֆունկցիայի դիֆերենցիալ: Եթե գոյություն ունի A հաստատուն, այնպիսին, որ f ֆունկցիայի աճը x_0 կետում ներկայացվում է

$$\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0)$$

տեսքով, ապա f-ն անվանում են x_0 կետում *դիֆերենցելի*:

Որպեսզի f-ն x_0 կետում լինի դիֆերենցելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն այդ կետում ունենա վերջավոր ածանցյալ: Ընդ որում՝ $A = f'(x_0)$:

Դիցուք $f: X \to R$ ֆունկցիան $x_0 \in X$ կետում դիֆերենցելի է.

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0):$$

Սահմանում: Δx-ին $f'(x_0) \cdot \Delta x$-ը համապատասխանեցնող գծային ֆունկցիան կոչվում է x_0 կետում *f ֆունկցիայի դիֆերենցիալ* և նշանակվում՝ $df(x_0)$.

$$(df(x_0))(\Delta x) = f'(x_0) \cdot \Delta x:$$

Մասնավորապես, $f(x) = x$ ֆունկցիայի համար, $(dx)(\Delta x) = (x)' \cdot \Delta x = \Delta x$ և հետևաբար կարող ենք գրել.

$$df(x_0) = f'(x_0)dx,$$

որտեղ dx-ն $y = x$ ֆունկցիայի դիֆերենցիալն է:

Ածանցման կանոնները: Դիցուք c-ն հաստատուն է, իսկ $u=u(x)$ և $v=v(x)$ ֆունկցիաները x_0 կետում դիֆերենցելի են: Այդ դեպքում

1. $(cu)' = cu'$; 2. $(u+v)' = u'+v'$;

3. $(uv)' = u'v+uv'$; 4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$:

Եթե $x=\varphi(t)$-ն դիֆերենցելի է t_0 կետում, իսկ $y=f(x)$ ֆունկցիան՝ $x_0=\varphi(t_0)$ կետում, ապա $f\circ\varphi$ բարդ ֆունկցիան դիֆերենցելի է t_0 կետում և

$$(f\circ\varphi)'(t_0)=f'(x_0)\cdot\varphi'(t_0):$$

Բարդ ֆունկցիայի դիֆերենցիալի համար ստացվում է հետևյալ բանաձևը՝

$$d(f\circ\varphi)(t_0)=f'(x_0)\cdot\varphi'(t_0)dt=f'(x_0)d\varphi=f'(x_0)dx,$$

որի կապակցությամբ ասում են, որ $y=f(x)$ ֆունկցիայի դիֆերենցիալի տեսքը մնում է անփոփոխ, երբ x-ը դառնում է որևէ այլ փոփոխականից կախված ֆունկցիա:

Եթե $f:X\to Y$ հակադարձելի ֆունկցիան $x_0\in X$ կետում դիֆերենցելի է, $f'(x_0)\neq 0$ և f^{-1} հակադարձ ֆունկցիան $y_0=f(x_0)$ կետում անընդհատ է, ապա f^{-1}-ը y_0-ում դիֆերենցելի է և $\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$:

Տարրական ֆունկցիաների ածանցյալների աղյուսակը:

1. $c'=0$: 2. $\left(x^\alpha\right)'=\alpha x^{\alpha-1}$:

3. $\left(a^x\right)'=a^x\ln a$ $\left(\left(e^x\right)'=e^x\right)$: 4. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$ $\left((\ln x)'=\dfrac{1}{x}\right)$:

5. $(\sin x)'=\cos x$: 6. $(\cos x)'=-\sin x$:

7. $(tgx)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$: 8. $(ctgx)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$:

9. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$: 10. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$:

11. $(arctgx)'=\dfrac{1}{1+x^2}$: 12. $(arcctgx)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$:

13. $(shx)'=chx$: 14. $(chx)'=shx$:

15. $(thx)'=\dfrac{1}{ch^2x}$: 16. $(cthx)'=-\dfrac{1}{sh^2x}$:

Ածանցյալի մեխանիկական իմաստը: Դիցուք կետը ուղղագիծ շարժվում է $S=S(t)$ օրենքով, որտեղ t-ն ժամանակն է, իսկ $S(t)$-ն՝ ժամանակի t պահին կետի անցած ճանապարհը: $S(t)$ ֆունկցիայի ածանցյալն ըստ t-ի՝ $S'(t)$-ն, ժամանակի t պահին կետի շարժման արագությունն է: Եթե կետի ուղղագիծ շարժման արագությունը փոփոխվում է $V=V(t)$ օրենքով, ապա $V'(t)$-ն ժամանակի t պահին կետի շարժման արագացումն է:

Ածանցյալի երկրաչափական իմաստը: Եթե $y=f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում դիֆերենցելի է, ապա $y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$-ն $(x_0,f(x_0))$ կետում $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի *շոշափողի հավասարումն* է: Փաստորեն, $f'(x_0)$-ն շոշափողի *անկյունային գործակիցն* է:

Ուղիղը, որն անցնում է $(x_0,f(x_0))$ կետով և ուղղահայաց է այդ կետում գրաֆիկի շոշափողին, կոչվում է *նորմալ*: Եթե $f'(x_0)\neq 0$, ապա նորմալի հավասարումն է՝ $y=f(x_0)-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$: Այն դեպքում, երբ շոշափողն ունի հորիզոնական դիրք՝ $f'(x_0)=0$, նորմալի հավասարումն ընդունում է $x=x_0$ տեսքը:

Ասում են, որ $y=f(x)$ և $y=g(x)$ ֆունկցիաների գրաֆիկներն x_0 աբսցիսն ունեցող կետում հատվում են φ անկյան տակ, եթե $f(x_0)=g(x_0)$ և այդ կետով գրաֆիկներին տարված շոշափողները կազմում են φ անկյուն.

$$tg\varphi=\left|\frac{f'(x_0)-g'(x_0)}{1+f'(x_0)g'(x_0)}\right| \quad \left(0\leq\varphi<\frac{\pi}{2}\right):$$

Այն դեպքում, երբ $1+f'(x_0)g'(x_0)=0$՝ $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$: Նկատենք, որ φ-ն x_0 աբսցիս ունեցող կետով գրաֆիկներին տարված շոշափողների կազմած սուր անկյունն է:

Պարամետրական հավասարումներով տրված ֆունկցիայի ածանցյալը: Տրված են $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ $(t\in T)$ պարամետրական հավասարումները: Եթե t պարամետրի փոփոխման այս կամ այն միջակայքում պարամետրական հավասարումներով որոշվող կորի աղեղն իրենից ներկայացնում է որոշակի $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկ, ապա f-ն անվանում են պարամետրական հավասարումներով տրված ֆունկցիա: Դա մասնավորապես կարող է տեղի ունենալ այն դեպքում, երբ $x=\varphi(t)$ ֆունկցիան $T_0\subset T$ միջակայքում հակադարձելի է: Այդ դեպքում $f(x)=\psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$:

Եթե φ և ψ ֆունկցիաները $t=t_0$ կետում բավարարում են φ^{-1} հակադարձ ֆունկցիայի և $\psi\circ\varphi^{-1}$ բարդ ֆունկցիայի դիֆերենցելիության պայմաններին, ապա f-ն $x_0=\varphi(t_0)$ կետում դիֆերենցելի է, ընդ որում

$$f'(x_0)=y'_x(x_0)=\frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)} \quad \left(t_0=\varphi^{-1}(x_0)\right):$$

Բարձր կարգի ածանցյալներ: Եթե $f:X\to R$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $x_0\in X$ կետի որևէ շրջակայքի յուրաքանչյուր կետում, ապա այդ շրջակայքում որոշված $f'(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալն x_0 կետում կոչվում է f ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալ x_0-ում և նշանակվում՝ $f''(x_0)$ կամ $\dfrac{d^2f(x_0)}{dx^2}$: Համանմանորեն սահմանվում են երրորդ՝ $f'''(x_0)$, չորրորդ՝ $f^{(4)}(x_0)$ և ավելի բարձր կարգի ածանցյալները:

Եթե f ֆունկցիայի n-րդ կարգի ածանցյալը՝ $f^{(n)}(x)$-ը, գոյություն ունի X բազմության յուրաքանչյուր կետում և ներկայացնում է անընդհատ ֆունկցիա, ապա գրում են՝ $f \in C^n(X)$:

Տարրական ֆունկցիաների n-րդ կարգի ածանցյալների աղյուսակ.

1. $\left(x^{\alpha}\right)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$:
2. $\left(a^{x}\right)^{(n)} = a^{x}\ln^{n} a \quad \left(\left(e^{x}\right)^{(n)} = e^{x}\right)$:
3. $(\ln x)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^{n}}$:
4. $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$:
5. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$:

Լայբնիցի բանաձևը: Եթե u և v ֆունկցիաները n անգամ դիֆերենցելի են, ապա $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$, որտեղ $u^{(0)} = u$ և $v^{(0)} = v$:

Ա

839. Տրված է $f : X \to R$ ֆունկցիան: Դիցուք x փոփոխականի աճն x_0 կետում Δx-ն է: Գտնել $\Delta f(x_0)$ աճը, եթե

ա) $f(x) = ax + b$; բ) $f(x) = ax^2 + bx + c$; գ) $f(x) = a^x$; դ) $f(x) = tgx$:

840. Ստուգել, որ

ա) $\Delta[f(x) \pm g(x)] = \Delta f(x) \pm \Delta g(x)$;

բ) $\Delta[f(x)g(x)] = g(x+\Delta x)\Delta f(x) + f(x)\Delta g(x)$;

գ) $\Delta\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{g(x)\Delta f(x) - f(x)\Delta g(x)}{g(x)g(x+\Delta x)}$:

841. Ելնելով ածանցյալի սահմանումից՝ գտնել հետևյալ ֆունկցիաների ածանցյալները.

ա) $y = x^2$; բ) $y = \dfrac{1}{x}$; գ) $y = \sqrt{x}$; դ) $y = \sqrt[3]{x}$;

ե) $y = \sin x$; զ) $y = \arccos x$; է) $y = arctgx$:

842. Ցույց տալ, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $x=0$ կետում և $f(0)=0$, ապա $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)$:

843. Ցույց տալ, որ եթե $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները դիֆերենցելի են $x=0$ կետում, $f(0)=g(0)=0$ և $g'(0)\neq 0$, ապա $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(0)}{g'(0)}$:

844. Ելնելով ածանցյալի սահմանումից, հաշվել հետևյալ ֆունկցիաների ածանցյալները $x=x_0$ կետում.

ա) $y=x^2+3x-1$, $x_0=1$; բ) $y=2x^3-2x+3$, $x_0=0$;

գ) $y=x^2\sin(x-2)$, $x_0=2$; դ) $y=x+(x-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}$, $x_0=1$;

ե) $y=x|x|$, $x_0=0$:

845. Ստուգել, որ հետևյալ ֆունկցիաները $x=x_0$ կետում դիֆերենցելի չեն.

ա) $y=\sqrt{x}$, $x_0=0$; բ) $y=|x|$, $x_0=0$;

գ) $y=\sqrt[3]{x-1}$, $x_0=1$; դ) $y=|\ln x|, x_0=1$:

846. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում դիֆերենցելի է և $n\in N$, ապա

$$\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x_0)\right]=f'(x_0):$$

Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ եթե նշված սահմանը գոյություն ունի, ապա f-ն x_0 կետում դիֆերենցելի է:

Ցուցում: Դիտարկել Դիրիխլեի ֆունկցիան:

847. Դիցուք $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները դիֆերենցելի են: Ապացուցել, որ $f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$ և եթե $g(x)\neq 0$, ապա նաև $\frac{f(x)}{g(x)}$ ֆունկցիաները նույնպես դիֆերենցելի են և ճշմարիտ են ածանցման հետևյալ կանոնները.

ա) $(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$;

բ) $(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$;

գ) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$:

Գտնել ֆունկցիայի ածանցյալը (848-954).

848. $y = x^3(x^2 - 1)$:

849. $y = (x^2 + 1)(3x - 2)(1 - x^3)$:

850. $y = \frac{ax + b}{cx + d}$:

851. $y = \frac{1 + x - x^2}{1 - x + x^2}$:

852. $y = \frac{x}{(1 - x)^2(1 + x)^3}$:

853. $y = \frac{(2 - x^2)(3 - x^3)}{(1 - x)^2}$:

854. $y = \sqrt[3]{x}$:

855. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$:

856. $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$:

857. $y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$:

858. $y = x\sqrt[4]{x}$:

859. $y = \frac{x + \sqrt{x}}{x - 2\sqrt[3]{x}}$:

860. $y = x\sin x - x^2\cos x$:

861. $y = x\,tgx + ctgx$:

862. $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$:

863. $y = \frac{x\sin x}{1 + tgx}$:

864. $y = e^x(x^2 + x - 1)$:

865. $y = e^x\sin x + x\ln x$:

866. $y = 2^x ctgx$:

867. $y = (1 + 3x)^5$:

868. $y = \sqrt{2 - 3x}$:

869. $y = \sqrt[3]{1 - x^2}$:

870. $y = x\sqrt{1 + x^2}$:

871. $y = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$:

872. $y = \left(\frac{1 + x^2}{1 - x}\right)^3$:

873. $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$:

874. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + x\sqrt{x}}}$:

875. $y = \sqrt[3]{\frac{1 + x^3}{1 - x^3}}$:

876. $y = \sin^3 3x$:

877. $y = \cos(3x - 1)\sin 2x$:

878. $y = tg(x^2 + 1) + tg2$:

879. $y = (2 - x^2)\cos x + 2x\sin x$:

880. $y = \sqrt{1 + \sin 2x}$:

881. $y = \sin^2 x^2$:

882. $y = \cos^2\sqrt[3]{x^2 - 1}$:

883. $y = \frac{\sin^2 x}{\cos x}$:

884. $y = tg\frac{x}{2} - \frac{1}{3}tg^3 x$:

885. $y = tg^5\left(x^2 + 2x - 1\right)$:

886. $y = \sqrt[3]{ctg^2 x}$:

887. $y = x^2 \sin(\sin x)$:

888. $y = \sin\left(\cos\frac{1}{x}\right)$:

889. $y = \sin\left(\cos^2\left(tg^3 x\right)\right)$:

890. $y = \frac{\sin^2 3x}{1 + ctg 3x}$:

891. $y = \sqrt{1 + tg\left(x^2 + x^{-2}\right)}$:

892. $y = 2^{tg\frac{1}{x}}$:

893. $y = e^{-x^2}\cos\frac{x}{2}$:

894. $y = x^2 e^{-2x^3}$:

895. $y = e^{\cos x}\sin x^2$:

896. $y = e^{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}$:

897. $y = sh(\cos x)$:

898. $y = e^{-2x} chx^3$:

899. $y = \frac{chx^2}{sh^2 x^2}$:

900. $y = e^{e^x}$:

901. $y = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x}$:

902. $y = \ln(3x + 1) + \ln 3$:

903. $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$:

904. $y = \ln\left(\sqrt{x - 1} + \sqrt{x^2 + 1}\right)$:

905. $y = \lg^3 x^2$:

906. $y = \log_2^3(2x + 3)^2$:

907. $y = 10^{\frac{x}{\log_3 x}}$:

908. $y = e^{\sqrt{\ln\left(x^2 + x + 1\right)}}$:

909. $y = \ln\left(\sqrt{2}\cos x + \sqrt{\cos 2x}\right)$:

910. $y = \ln(\ln(\ln x))$:

911. $y = \ln\left(\ln^2\left(\ln^3 x\right)\right)$:

912. $y = \frac{1}{4}\ln\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$:

913. $y = \ln tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$:

914. $y = \ln^2(1 + \cos x)$:

915. $y = \ln\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$:

916. $y = \frac{1}{4x^4}\ln\frac{1}{x} - \frac{1}{16x^4}$:

917. $y = x(\sin\ln x - \cos\ln x)$:

918. $y = \arcsin\frac{x}{2}$:

919. $y = \arccos\frac{1}{x}$:

920. $y=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{\sqrt{2}}{x}$:

921. $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$:

922. $y=\arccos(\cos^2 x)$:

923. $y=arctg\frac{1+x}{1-x}$:

924. $y=\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$

925. $y=\ln\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$:

926. $y=\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}$:

927. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{\arcsin x^2}$

928. $y=\frac{1+x^2arctgx^2}{\sqrt{1+x^4}}$:

929. $y=3^{arctg(2x+\pi)}$:

930. $y=\frac{x}{\sqrt{e^{2x}-1}}-arctg\sqrt{e^{2x}-1}$:

931. $y=arctge^{\frac{x}{2}}-\ln\sqrt{\frac{e^x}{e^x+1}}$:

932. $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}$:

933. $y=arctg\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$:

934. $y=\arccos(\sin x^2-\cos x^2)$

935. $y=arctg(tg^2x)$:

936. $y=\arcsin(\sin x^2)+\arccos(\cos x^2)$:

937. $y=\arcsin\frac{\sin\alpha\sin x}{1-\cos\alpha\cos x}$:

938. $y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{|a|}$:

939. $y=x-\ln\sqrt{1+e^{2x}}+e^{-x}arctge^x$:

940. $y=\arccos(\sin^2 x^4-\cos^2 x^4)$:

941. $y=\sqrt{arctg\sqrt{\cos\ln^3 x}}$:

942. $y=arctg(thx)$:

943. $y=\arccos\left(\frac{1}{chx}\right)$:

944. $y=x^x$:

945. $y=x^{x^x}$:

946. $y=x^{e^x}$:

947. $y=(chx)^{e^x}$:

948. $y=x^{\frac{1}{x}}$:

949. $y=x^{x^a}+x^{a^x}+a^{x^x}$:

950. $y=\frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$:

951. $y=(\sin x)^{\cos x}$:

952. $y=\left(tg\frac{x}{2}\right)^{x\arcsin 2x}$:

953. $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$:

954. $y=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x$:

$y=f(x)$ ֆունկցիայի մոդուլի լոգարիթմի ածանցյալը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի *լոգարիթմական ածանցյալ.* $\frac{d}{dx}\ln|f(x)|=\frac{f'(x)}{f(x)}$: Գտնել ֆունկցիայի լոգարիթմական ածանցյալը (955-958).

955. $y=x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$:

956. $y=\frac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$:

957. $y=(x-a_1)^{\alpha_1}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n}$:

958. $y=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^n$:

Գտնել ֆունկցիայի աջակողմյան և ձախակողմյան ածանցյալները x_0 կետում (959-965).

959. $y=|x|$, $x_0=0$:

960. $y=|x^2-5x+6|$, $x_0=2$:

961. $y=|2^x-2|$, $x_0=1$:

962. $y=x|\sin x|$, $x_0=1$:

963. $y=\sqrt{1-e^{-x^2}}$, $x_0=0$:

964. $y=\begin{cases} x^2, x\le 1, \\ 2-x, x>1, \end{cases}$ $x_0=1$:

965. $y=\begin{cases} e^x, x\le 0, \\ x^2+2x, x>0, \end{cases}$ $x_0=0$:

Գտնել ածանցյալը (966-971).

966. $y=\left|(x-1)^2(x+1)^3\right|$:

967. $y=|\sin^3 x|$:

968. $y=\begin{cases} 1-x, \ -\infty<x<1, \\ (1-x)(2-x), 1\le x\le 2, \\ x-2, \ 2<x<+\infty : \end{cases}$

969. $y=\begin{cases} (x-a)^2(x-b)^2, \ x\in[a;b], \\ 0, \ x\notin[a;b] : \end{cases}$

970. $y=\begin{cases} x, \ x<0, \\ \ln(1+x), \ x\ge 0 : \end{cases}$

971. $y=\begin{cases} x^2e^{-x^2}, \ |x|\le 1, \\ \frac{1}{e}, \ |x|>1 : \end{cases}$

972. Գտնել $x=x(y)$ հակադարձ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը և ածանցյալը.

ա) $y=x+\ln x$; բ) $y=chx$, $x\in R_+$; գ) $y=x+e^x$;

դ) $y=thx$; ե) $y=shx$:

Գտնել y'_x -ը (973-981).

973. $x=\sqrt[3]{1-\sqrt{t}}$, $y=\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}$:

974. $x=\sqrt{t^2+t}$, $y=\dfrac{t-1}{\sqrt{t^2+1}}$:

975. $x=\sin^2 t$, $y=\cos^2 t$:

976. $x=a\cos t$, $y=b\sin t$:

977. $x=acht$, $y=bsht$:

978. $x=a\cos^5 t$, $y=a\sin^5 t$:

979. $x=e^t(\cos t+\sin t)$, $y=e^t(\cos t-\sin t)$:

980. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$:

981. $x=\arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $y=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$:

Գրել տրված կետում կորի շոշափողի և նորմալի հավասարումները (982-988).

982. $y=(x+1)\sqrt[3]{3-x}$ ա) $x=-1$; բ) $x=2$:

983. $y=2^{-x^2}\sin\pi x$ ա) $x=0$; բ) $x=1$:

984. $y=x^2\arccos\dfrac{x}{2}$ ա) $x=1$; բ) $x=\sqrt{3}$:

985. $y=x^3 ctg\pi x$ ա) $x=\dfrac{1}{4}$; բ) $x=\dfrac{1}{2}$:

986. $x=2t-t^2$, $y=3t-t^3$ ա) $t=0$; բ) $t=1$:

987. $x=e^{-t}\sin t$, $y=e^{-t}\cos t$ ա) $t=0$; բ) $t=\dfrac{\pi}{4}$:

988. $x=\dfrac{2t+t^2}{1+t^3}$, $y=\dfrac{2t-t^2}{1+t^3}$ ա) $t=0$; բ) $t=1$:

Գտնել կորերի հատման կետում նրանց կազմած անկյունը (989-992).

989. $y=x^2$, $x=y^2$:

990. $y=\dfrac{x^2}{2}$, $y=\dfrac{1}{1+x^2}$:

991. $y=\sin x$, $y=\cos x$:

992. $y=x^2\ln x$, $y=4-4x^2$:

993. $y=2+x+x^2$ կորի ո՞ր կետերով նրան տարված շոշափողը կլինի զուգահեռ ա) աբսցիսների առանցքին; բ) $y=x$ ուղիղին:

994. Ապացուցել, որ

$y=a(x-x_1)(x-x_2)$ $(a\neq 0,\ x_1\neq x_2)$

պարաբոլն x-երի առանցքը երկու անգամ հատում է միևնույն սուր անկյան տակ:

995. a, b, c գործակիցների միջև ի՞նչ կապի դեպքում $y = ax^2 + bx + c$ պարաբոլը կշոշափի x-երի առանցքը:

996. Ի՞նչ պայմանների դեպքում $y = x^3 + px + q$ խորանարդ պարաբոլը կշոշափի x-երի առանցքը:

997. a պարամետրի ի՞նչ արժեքների դեպքում $y = ax^2$ պարաբոլը կշոշափի $y = \ln x$ կորը (հատման կետում կորերի կազմած անկյունը կլինի 0):

Գտնել ֆունկցիայի դիֆերենցիալը (998-1003).

998. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$: 999. $y = \cos x + \sqrt[3]{x}$:

1000. $y = \sqrt{\arccos x} + 2^{-x}$: 1001. $y = 3^{\sqrt{arctg x^2}}$:

1002. $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$: 1003. $y = \dfrac{1}{\sin^3 2x}$:

1004. Դիցուք $u = u(x)$, $v = v(x)$ և $w = w(x)$ ֆունկցիաները դիֆերենցելի են: Գտնել y ֆունկցիայի դիֆերենցիալը, եթե

ա) $y = uvw$; բ) $y = \dfrac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}$; գ) $y = arctg\dfrac{u}{v}$; դ) $y = \ln\sqrt{u^2 + v^2}$:

1005. Գտնել ածանցյալը.

ա) $\dfrac{d}{d(x^3)}\left(x^3 - 2x^6 - x^9\right)$; բ) $\dfrac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$; գ) $\dfrac{d}{d(x^2)}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$; դ) $\dfrac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)}$:

Փոխարինելով ֆունկցիայի աճը դիֆերենցիալի արժեքով, գտնել արտահայտության մոտավոր արժեքը (1006-1010).

1006. $\sqrt[3]{1{,}02}$: 1007. $\sin 29^\circ$: 1008. $\cos 151^\circ$:

1009. $arctg 1{,}05$: 1010. $\sqrt[5]{\dfrac{2 - x}{2 + x}}$, երբ $x = 0{,}15$:

1011. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում դիֆերենցելի է, ապա այն այդ կետում անընդհատ է:

1012. Կարո՞ղ է արդյոք ֆունկցիան իր խզման կետում ունենալ անվերջ ածանցյալ:

1013. Կառուցել ֆունկցիա, որը լինի անընդհատ R-ի վրա, բայց

ա) դիֆերենցելի չլինի միայն մեկ կետում;

բ) դիֆերենցելի չլինի միայն երկու կետում:

1014. Կարո՞ղ է արդյոք $f(x)+g(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում լինել դիֆերենցելի, եթե

ա) $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է x_0 կետում, իսկ $g(x)$-ը՝ ոչ;

բ) $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները դիֆերենցելի չեն x_0 կետում:

1015. Կարո՞ղ է արդյոք $f(x)g(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում լինել դիֆերենցելի, եթե

ա) $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է x_0 կետում, իսկ $g(x)$-ը՝ ոչ;

բ) $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները x_0 կետում դիֆերենցելի չեն:

1016. Դիֆերենցելի՞ են արդյոք հետևյալ ֆունկցիաները.

ա) $y=x|x|$; բ) $y=\left|x^3\right|$; գ) $y=x|\sin x|$:

1017. Ապացուցել, որ R-ի վրա դիֆերենցելի զույգ ֆունկցիայի ածանցյալը կենտ ֆունկցիա է, իսկ կենտ ֆունկցիայինը՝ զույգ:

1018. Ապացուցել, որ դիֆերենցելի և պարբերական ֆունկցիայի ածանցյալը պարբերական ֆունկցիա է:

1019. Մոնոտո՞ն է արդյոք մոնոտոն ֆունկցիայի ածանցյալը:

Ցուցում: Դիտարկել $y=x+\sin x$ ֆունկցիան:

Գտնել y''-ը (1020-1026).

1020. $y=x\sqrt{1+x^2}$:

1021. $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$:

1022. $y=e^{-x^2}$:

1023. $y=tgx$:

1024. $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$:

1025. $y=\left(1+x^2\right)arctgx$:

1026. $y=x^x$:

1027. Ապացուցել հետևյալ բանաձևերը.

ա) $\left(e^x\right)^{(n)}=e^x$;

բ) $\left(a^x\right)^{(n)}=a^x\ln^n a$;

գ) $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\dfrac{\pi n}{2}\right)$;

դ) $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\dfrac{\pi n}{2}\right)$;

ե) $\left(x^m\right)^{(n)}=m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$;

զ) $(\ln x)^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$:

1028. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան ունի n-րդ կարգի ածանցյալ, ապա

$$[f(ax+b)]^{(n)}=a^n f^{(n)}(ax+b):$$

Գտնել $y=y(x)$ ֆունկցիայի n-րդ կարգի ածանցյալը (1029-1048).

1029. $y=\frac{1}{2x+3}$:

1030. $y=\frac{ax+b}{cx+d}$:

1031. $y=\frac{1}{x(1-x)}$:

1032. $y=\frac{1}{x^2+3x+2}$:

1033. $y=\frac{1}{\sqrt{1-2x}}$:

1034. $y=\frac{x+2}{\sqrt[3]{1-x}}$:

1035. $y=\sin^2 x$:

1036. $y=\sin^3 x$:

1037. $y=\cos^4 x$:

1038. $y=\cos ax\cos bx$:

1039. $y=\sin x\cos^2 2x$:

1040. $y=x^2\sin^2 x$:

1041. $y=x^2\ln(1+x)$:

1042. $y=e^{3x}\sin 4x$:

1043. $y=e^x\cos^2 x$:

1044. $y=x\operatorname{sh}x$:

1045. $y=\operatorname{ch}ax\operatorname{ch}bx$:

1046. $y=x^n e^x$:

1047. $P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$:

1048. $y=\ln\frac{1-x}{1+x}$:

1049. Դիցուք՝ $f(x)=x^n, n\in N$: Ստուգել, որ $f(1)+\frac{f'(1)}{1!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(1)}{n!}=2^n$:

1050. Դիցուք՝ $f(x)=x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}, n\in N$: Ստուգել, որ $[f(x)]^{(n)}=(-1)^n\frac{f(x)}{x^{2n}}$:

Գտնել պարամետրական հավասարումներով տրված ֆունկցիայի նշված կարգի ածանցյալը (1051-1056).

1051. y''_{xx}-ը, եթե $x=2t-t^2$, $y=3t-t^3$:

1052. y''_{xx}-ը, եթե $x=a\cos t$, $y=a\sin t$:

1053. y'''_{xxx}-ը, եթե $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$:

1054. y'''_{xxx}-ը, եթե $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$:

1055. y''_{xx}-ը, եթե $x=\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)$, $y=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$:

1056. y'''_{xxx}-ը, եթե $x=t^2$, $y=\ln\sin t-t\cdot\operatorname{ctg}t$:

Հավասարման մեջ կատարել փոփոխականի նշված փոխարինումը (1057-1059).

1057. $x^2y''-4xy'+6y=0$, $x=e^t$, $y=y(t)$:

1058. $u'' - q(t)u = 0$, $u = \sqrt{t}v$, $s = \frac{1}{2}\ln t$, $v = v(s)$:

1059. $(x^2 + y^2)^3 y'' - 2(xy' - y)(yy' + x)^2 = 0$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r = r(\varphi)$:

Դիցուք $u = \varphi(x)$ և $v = \psi(x)$ ֆունկցիաները երկու անգամ դիֆերենցելի են: Գտնել y''-ը (1060-1065).

1060. $y = u^2$:   1061. $y = u \cdot v$:   1062. $y = \frac{u}{v}$:

1063. $y = \ln\frac{u}{v}$:   1064. $y = \sqrt{u^2 + v^2}$:   1065. $y = u^v$:

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան երեք անգամ դիֆերենցելի է: Գտնել y''-ը և y'''-ը (1066-1068).

1066. $y = f(x^2)$:   1067. $y = f\left(\frac{1}{x}\right)$:   1068. $y = f(e^x)$:

Հետևյալ խնդիրներում, եթե հատուկ նշված չէ, ճանապարհի չափման միավորն է՝ մետր, ժամանակինը՝ վայրկյան, արագությանը՝ մ/վրկ, արագացմանը՝ մ/վրկ^2:

1069. Մարմինը շարժվում է ուղղագիծ՝ $S = 1 + 2t + t^2$ օրենքով: Հաշվել նրա արագությունը ժամանակի $t = 2$ պահին:

1070. Ուղղագիծ շարժվող մարմնի արագությունը որոշվում է $V = 3t + t^2 + t^3$ բանաձևով: Ինչպիսի՞ արագացում կունենա մարմինը շարժման սկզբից 4 վրկ անց:

1071. Ուղղագիծ շարժվող մարմնի անցած S ճանապարհը որոշվում է $S = \frac{1}{8}t^3 + 3t^2 + t$ բանաձևով: Գտնել շարժման արագությունը և արագացումը, երբ $t = 10$:

1072. Պտտվող թափանիվը, որին պահում է արգելակը, t վայրկյանի ընթացքում պտտվում է $\varphi = \alpha + \beta t - \gamma t^2$ անկյունով(α, β, γ -ն դրական հաստատուններ են): Գտնել անկյունային արագությունը և պտտման արագացումը: Անիվը ե՞րբ կանգ կառնի:

1073. 100 կգ զանգվածով մարմինը շարժվում է ուղղագիծ՝ $S = 2t^2 + 3t + 1$ օրենքով: Գտնել մարմնի կինետիկ էներգիան $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ շարժումն սկսելուց 5 վրկ անց:

1074. Ապացուցել, որ եթե մարմինը շարժվում է $S = ae^t + be^{-t}$ օրենքով, ապա արագացման թվային արժեքը հավասար է ճանապարհի թվային արժեքին:

1075. Մարմնի շարժման օրենքը տրված է $S = a + bt + ct^2$ բանաձևով: Ապացուցել, որ մարմնի վրա ազդող ուժը՞ հաստատուն է:

1076. 1,7 մ հասակ ունեցող մարդը 5 կմ/ժ արագությամբ հեռանում է լույսի աղբյուրից, որը գտնվում է $h > 1,7$ մ բարձրության վրա,: Գտնել նրա գլխի ստվերի շարժման արագությունը:

1077. Մարմինը շարժվում է $y = 2x + 3$ ուղիղով այնպես, որ նրա աբսցիսը աճում է $V_x = 3$ հաստատուն արագությամբ: Ի՞նչ արագությամբ է փոփոխվում օրդինատը:

1078. Մարմինը շարժվում է $x^2 + y^2 = 100$ $(x, y > 0)$ շրջանագծի աղեղով այնպես, որ նրա օրդինատը աճում է $V = 3$ հաստատուն արագությամբ: Ի՞նչ արագությամբ է փոփոխվում աբսցիսը: Գտնել աբսցիսի փոփոխման արագությունն այն պահին, երբ օրդինատը հավասար է 6-ի:

1079. Մարմինը շարժվում է $12y = x^3$ կորով: Նրա ո՞ր կոորդինատն է փոփոխվում ավելի արագ:

Բ

1080. Գտնել $f'(0)$-ն, եթե

ա) $f(x) = |x|(1 - \cos x)$; բ) $f(x) = \prod_{k=0}^{n}(x + k)$; գ) $f(x) = \prod_{k=1}^{n}(x + k)$;

դ) $f(x) = \begin{cases} \sin\left(x^4 \sin\frac{5}{x}\right), x \neq 0, \\ 0, x = 0; \end{cases}$ ե) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\frac{4}{3x} + \frac{x}{2}, x \neq 0, \\ 0, x = 0: \end{cases}$

Հաշվել ֆունկցիայի ածանցյալը (1081-1084).

1081. $y = \arccos\frac{1}{|x|}$: **1082.** $y = [x]\sin^2 \pi x$:

1083. $y = \begin{cases} (x+1)\,arctg^2\frac{1}{x+1} + 2x, x \neq -1, \\ -2, x = -1: \end{cases}$

1084. $y=\begin{cases} arctgx, |x|\le 1, \\ \frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} x+\frac{x-1}{2}, |x|>1: \end{cases}$

1085. Ապացուցել արտադրյալի ածանցման հետևյալ կանոնը

$$\left(f_1(x)\cdots f_n(x)\right)'=\sum_{k=1}^{n} f_1(x)\cdots f_k'(x)\cdots f_n(x):$$

1086. a -ի ի՞նչ արժեքների դեպքում $f(x)$ ֆունկցիան կլինի անընդհատ $x=0$ կետում: Ստուգել $f'(0)$ ածանցյալի գոյությունը և հաշվել այն, եթե

ա) $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin^2 x}{x}, x\ne 0, \\ a, x=0; \end{cases}$ բ) $f(x)=\begin{cases} \frac{\left(e^x-1\right)^2}{x}, x\ne 0, \\ a, x=0; \end{cases}$

1087. Դիցուք g և φ ֆունկցիաները որոշված են համապատասխանաբար $\{x: x\ge a\}$ և $\{x: x\le a\}$ բազմությունների վրա և

$$f(x)=\begin{cases} g(x), & x\ge a, \\ \varphi(x), & x<a: \end{cases}$$

Ապացուցել, որ $f(x)$ ֆունկցիայի դիֆերենցելիության համար հետևյալ պայմանները անհրաժեշտ են և բավարար.

1) $g(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $\{x: x>a\}$ բազմության վրա, իսկ $\varphi(x)$-ը՝ $\{x: x<a\}$ բազմության վրա;

2) $g(a)=\varphi(a)$;

3) $g_+'(a)=\varphi_-'(a)$:

a և b թվերի ինչպիսի՞ ընտրության դեպքում ֆունկցիան կլինի դիֆերենցելի (1088-1091).

1088. $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1, \\ ax+b, x>1: \end{cases}$ 1089. $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\le 0, \\ x^2+ax+b, x>0: \end{cases}$

1090. $f(x)=\begin{cases} a+bx^2, & |x|<1, \\ \frac{1}{|x|}, & |x|\ge 1: \end{cases}$ 1091. $f(x)=\begin{cases} ax+b, & x<0, \\ a\cos x+b\sin x, x\ge 0: \end{cases}$

Ընտրել a_1, b_1, a_2, b_2 թվերն այնպես, որ $f(x)$ ֆունկցիան լինի դիֆերենցելի (1092-1095).

1092. $f(x)=\begin{cases} a_1x+b_1,\ x>\dfrac{\pi}{2}, \\ \cos x,\ x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right], \\ a_2x+b_2,\ x<-\dfrac{\pi}{2}: \end{cases}$ 1093. $f(x)=\begin{cases} a_1x^2+b_1,\ x>1, \\ x\sin\pi x,\ x\in[-1;1], \\ a_2x+b_2,\ x<-1: \end{cases}$

1094. $f(x)=\begin{cases} a_1(x-2)^2+b_1,\ x>1, \\ x^2 arctgx,\ x\in[-1;1], \\ a_2(x+2)^2+b_2,\ x<-1: \end{cases}$

1095. $f(x)=\begin{cases} a_1x^2+b_1,\ x<\dfrac{1}{e}, \\ x^2\ln x,\ x\in\left[\dfrac{1}{e};e\right], \\ a_2x+b_2,\ x>e: \end{cases}$

Գտնել ածանցյալը (1096-1099).

1096. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n} ch\dfrac{x}{2^k}:$ 1097. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=0}^{n}\left(1+x^{2^k}\right),\ |x|<1:$

Հետազոտել ֆունկցիայի դիֆերենցելիությունը (1098-1100).

1098. $f(x)=\left|(x-1)(x-2)^2(x-3)^3\right|:$ 1099. $f(x)=|\cos x|:$

1100. $f(x)=\left|\pi^2-x^2\right|\sin^2 x:$

Գտնել $x=0$ կետում $f(x)$ ֆունկցիայի մինչև այն կարգի ածանցյալները, որոնք գոյություն ունեն (1101-1104).

1101. $f(x)=\begin{cases} x^{10}, \text{երբ } x\in Q, \\ -x^{10}, \text{երբ } x\in I: \end{cases}$ 1102. $f(x)=|x|^3:$

1103. $f(x)=\begin{cases} 1-\cos x,\ x<0, \\ \ln(1+x)-x,\ x\geq 0: \end{cases}$ 1104. $f(x)=\begin{cases} shx-x, x<0, \\ x-\sin x, x\geq 0: \end{cases}$

1105. Ստուգել, որ

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0, \\ 0, x=0 \end{cases}$$

ֆունկցիան ունի խզվող ածանցյալ:

1106. α -ի ի՞նչ արժեքների դեպքում

$$f(x)=\begin{cases}|x|^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0,\\ 0, x=0\end{cases}$$

ֆունկցիան $x=0$ կետում

ա) կլինի անընդհատ;

բ) կլինի դիֆերենցելի;

գ) կունենա անընդհատ ածանցյալ:

1107. α -ի և β -ի $(\beta>0)$ ի՞նչ արժեքների դեպքում

$$f(x)=\begin{cases}|x|^{\alpha}\sin\dfrac{1}{|x|^{\beta}}, x\neq 0,\\ 0, x=0\end{cases}$$

ֆունկցիան $x=0$ կետի շրջակայքում ունի

ա) սահմանափակ ածանցյալ;

բ) անսահմանափակ ածանցյալ:

1108. Դիցուք $f(x), g(x), h(x)$ ֆունկցիաները որոշված են x_0 կետի շրջակայքում և բավարարում են հետևյալ պայմաններին.

1) $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$, $f(x_0)=h(x_0)$;

2) $f(x)$ և $h(x)$ ֆունկցիաները դիֆերենցելի են x_0 կետում;

3) $f'(x_0)=h'(x_0)$:

Ապացուցել, որ $g(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում դիֆերենցելի է և $g'(x_0)=f'(x_0)=h'(x_0)$:

1109. Դիցուք $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx$ ֆունկցիան բավարարում է $|f(x)|\leq|\sin x|$ անհավասարությանը: Ապացուցել, որ $|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leq 1$:

1110. Գտնել $f'(a)$-ն, եթե $f(x)=(x-a)\varphi(x)$, որտեղ $\varphi(x)$ ֆունկցիան $x=a$ կետում անընդհատ է:

1111. Ապացուցել, որ եթե $\varphi(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $x=a$ կետում և $\varphi(a)\neq 0$, ապա $f(x)=|x-a|\varphi(x)$ ֆունկցիան a կետում դիֆերենցելի չէ: Հաշվել $f'_-(a)$ և $f'_+(a)$ միակողմանի ածանցյալները:

1112. Կառուցել անընդհատ ֆունկցիա, որը տրված $a_1, a_2, \ldots, a_n$ կետերում (և միայն այդտեղ) դիֆերենցելի չէ:

1113. Ստուգել, որ

$$f(x)=\begin{cases} x^2, \text{ երբ } x\text{-ը ռացիոնալ է,} \\ 0, \text{ երբ } x\text{-ն իռացիոնալ է:} \end{cases}$$

ֆունկցիան դիֆերենցելի է միայն $x=0$ կետում:

1114. Ապացուցել, որ

$$f(x)=\begin{cases} x^2\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right|, x\neq 0, \\ 0, x=0 \end{cases}$$

ֆունկցիան $x=0$ կետում դիֆերենցելի է, բայց այդ կետի ոչ մի շրջակայքում դիֆերենցելի չէ:

Գտնել $f(x)$ ֆունկցիայի $f'_-(x)$ և $f'_+(x)$ միակողմանի ածանցյալները այն կետերում, որտեղ f-ը դիֆերենցելի չէ (1115-1125).

1115. $f(x)=[x]\sin\pi x$:

1116. $f(x)=\sqrt{\sin x^2}$:

1117. $f(x)=\begin{cases} x\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right|, x\neq 0, \\ 0, x=0: \end{cases}$

1118. $f(x)=\begin{cases} arctg\dfrac{1}{x}, x\neq 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, x=0: \end{cases}$

1119. $f(x)=\begin{cases} arctg\dfrac{1+x}{1-x}, x\neq 1, \\ \dfrac{\pi}{2}, x=1: \end{cases}$

1120. $f(x)=\begin{cases} (x-4)arctg\dfrac{1}{x-4}, x\neq 4, \\ 0, x=4: \end{cases}$

1121. $f(x)=\left|\ln|x|\right|$:

1122. $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$:

1123. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2^{\frac{1}{x}}-1}, x\neq 0, \\ 0, x=0: \end{cases}$

1124. $f(x)=\arcsin e^{-x^2}$:

1125. $f(x)=\arccos\sqrt{1-x^2}$:

Գտնել $f'_-(0)$-ն և $f'_+(0)$-ն (1126-1129).

1126. $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$:

1127. $f(x)=\begin{cases} x, x\leq 0, \\ \sqrt[3]{x^4}\ln x, x>0: \end{cases}$

1128. $f(x)=\begin{cases} 2x, x\le 0, \\ \ln\left(1+\sqrt[5]{x^7}\right), x>0: \end{cases}$ 1129. $f(x)=\begin{cases} 1+e^{\frac{1}{x}}, x<0, \\ \sqrt{1+\sqrt[3]{x^4}}, x\ge 0: \end{cases}$

1130. Ապացուցել, որ

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, x\ne 0, \\ 0, x=0 \end{cases}$$

ֆունկցիան անընդհատ է $x=0$ կետում, բայց այդ կետում չունի միակողմանի ածանցյալներ:

1131. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $x=x_0$ կետում, $f(x_0)\ne 0$, իսկ $g(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում անընդհատ է, բայց՝ ոչ դիֆերենցելի: Ապացուցել, որ $f(x)g(x)$ ֆունկցիան այդ կետում դիֆերենցելի չէ:

1132. Ի՞նչ կարելի է ասել $x=x_0$ կետում $f(g(x))$ ֆունկցիայի դիֆերենցելիության մասին, եթե

ա) $f(y)$-ն $y_0=g(x_0)$ կետում դիֆերենցելի է, $g(x)$-ն $x=x_0$ կետում դիֆերենցելի չէ;

բ) $f(y)$-ն y_0-ում դիֆերենցելի չէ, $g(x)$-ն x_0-ում դիֆերենցելի է;

գ) $f(y)$-ն y_0-ում դիֆերենցելի չէ, $g(x)$-ն x_0-ում դիֆերենցելի չէ:

1133. Դիցուք $f(y)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $y=0$ կետում և

$$g(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, x\ne 0, \\ 0, x=0: \end{cases}$$

Ապացուցել, որ $f(g(x))$ ֆունկցիան $x=0$ կետում ունի զրոյի հավասար ածանցյալ:

1134. Կարելի՞ է արդյոք ֆունկցիաների միջև անհավասարությունն ածանցել. $f(x)\le g(x)$ անհավասարությունից հետևու՞մ է արդյոք $f'(x)\le g'(x)$ անհավասարությունը:

Հաշվել գումարը (1135-1138).

1135. ա) $1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$;

բ) $1^2+2^2x+3^2x^2+\cdots+n^2x^{n-1}$:

1136. ա) $\sin x+2\sin 2x+\cdots+n\sin nx$;

բ) $\cos x+2\cos 2x+\cdots+n\cos nx$:

1137. ա) $\cos x+3\cos 3x+\cdots+(2n-1)\cos(2n-1)x$;

բ) $\sin x+3\sin 3x+\cdots+(2n-1)\sin(2n-1)x$:

1138. $\frac{1}{2}tg\frac{x}{2}+\frac{1}{4}tg\frac{x}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}tg\frac{x}{2^n}$:

Ցուցում: Օգտվել $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$ նույնությունից:

Ապացուցել, որ տրված հավասարումից որոշվող $y=y(x)$ ֆունկցիան միակն է և գտնել y'_x-ը (1139-1140).

1139. $y^3+3y=x$:

1140. $y-\varepsilon\sin y=x$ $(0\le\varepsilon<1)$:

1141. Ստուգել, որ $x=2t+|t|$ և $y=5t^2+4t|t|$ հավասարումներից որոշվող $y=y(x)$ ֆունկցիան պարամետրի $t=0$ արժեքի դեպքում դիֆերենցելի է, բայց նրա ածանցյալը չի կարելի հաշվել $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}$ բանաձևով:

1142. Ապացուցել n-րդ կարգի որոշիչի ածանցման հետևյալ կանոնը.

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \cdots & f_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}' = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \cdots & f'_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

1143. Հաշվել $F'(x)$-ը, եթե

ա) $F(x)=\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix}$;   բ) $F(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}$:

1144. Գտնել y'_x ածանցյալը, եթե ա) $r=a\varphi$; բ) $r=a(1+\cos\varphi)$; գ) $r=ae^{m\varphi}$, որտեղ r-ը և φ-ն $(x;y)$ կետի բևեռային կոորդինատներն են:

1145. Պարզել, թե $y=x+\sqrt[3]{\sin x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը ո՞ր կետերում ունի ուղղաձիգ շոշափող:

1146. Գտնել միևնույն շառավղով երկու շրջանագծերի կազմած անկյունը, եթե այդ շրջանագծերից մեկի կենտրոնը գտնվում է մյուս շրջանագծի վրա:

1147. Ցույց տալ, որ $y=|x|^\alpha$ կորը շոշափում է

ա) y-ների առանցքը, երբ $0<\alpha<1$;

բ) x-երի առանցքը, երբ $1<\alpha<\infty$:

1148. Ապացուցել, որ $r = ae^{m\varphi}$ (a-ն և m-ը հաստատուններ են) լոգարիթմական գալարագծի շոշափողի և շոշափման կետի շառավիղ-վեկտորի կազմած անկյունը հաստատուն է:

1149. Ապացուցել, որ հիպերբոլների հետևյալ ընտանիքները՝

$$x^2 - y^2 = a, \; xy = b,$$

կազմում են օրթոգոնալ ցանց. այդ ընտանիքներից մեկին պատկանող ցանկացած հիպերբոլ մյուս ընտանիքի ցանկացած հիպերբոլի հետ հատվում է ուղիղ անկյան տակ:

1150. Ապացուցել, որ պարաբոլների

$$y^2 = 4a(a - x), \; y^2 = 4b(b + x) \; (a > 0, b > 0)$$

ընտանիքները կազմում են օրթոգոնալ ցանց:

1151. Գտնել ֆունկցիայի n-րդ կարգի ածանցյալը.

ա) $y = \arcsin x$; բ) $y = arctgx$:

1152. Գտնել $f^{(n)}(a)$-ն, եթե $f(x) = (x-a)^n \varphi(x)$, որտեղ $\varphi(x)$ ֆունկցիան a կետի շրջակայքում ունի $(n-1)$-րդ կարգի անընդհատ ածանցյալ:

1153. Ապացուցել, որ

$$f(x) = \begin{cases} x^{2n} \sin \dfrac{1}{x}, x \neq 0, \\ 0, x = 0 \end{cases} \quad n \in N,$$

ֆունկցիան $x = 0$ կետում ունի մինչև n-րդ կարգի ածանցյալները և չունի $(n+1)$-րդ կարգի ածանցյալ:

1154. Ստուգել, որ

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0, \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

ֆունկցիան անվերջ դիֆերենցելի է և հաշվել $f^{(n)}(0)$-ն $(n \in N)$:

1155. Ստուգել, որ

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, x > 0, \\ 0, x \leq 0 \end{cases}$$

ֆունկցիան անվերջ դիֆերենցելի է և հաշվել $f^{(n)}(0)$-ն, $n \in N$:

1156. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան $(-\infty; x_0]$ միջակայքում երկու անգամ դիֆերենցելի է: a, b, c թվերի ի՞նչ արժեքների դեպքում

$$g(x) = \begin{cases} f(x), x \leq x_0, \\ a(x-x_0)^2 + b(x-x_0) + c, x > x_0 \end{cases}$$

ֆունկցիան կլինի երկու անգամ դիֆերենցելի:

1157. Ստուգել, որ $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \dfrac{d^2}{dx^2}\sqrt{ax^2+bx+c}=0 \ \left(a>0\right)$:

1158. Ապացուցել հավասարությունը.

ա) $\left[e^{ax}\sin(bx+c)\right]^{(n)}=e^{ax}\left(a^2+b^2\right)^{\frac{n}{2}}\sin(bx+c+n\varphi)$;

բ) $\left[e^{ax}\cos(bx+c)\right]^{(n)}=e^{ax}\left(a^2+b^2\right)^{\frac{n}{2}}\cos(bx+c+n\varphi)$;

որտեղ $\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$:

1159. Դիցուք $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$: Ապացուցել, որ $f(x)$-ը ռացիոնալ ֆունկցիա չէ. չի կարող ներկայացվել որպես երկու հանրահաշվական բազմանդամների հարաբերություն:

Գ.

1160. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $(a;b)$ վերջավոր միջակայքում և $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$: Այստեղից հետևու՞մ է արդյոք, որ

ա) $\lim\limits_{x\to a} f'(x)=\infty$; բ) $\overline{\lim\limits_{x\to a}}\left|f'(x)\right|=+\infty$:

1161. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $(a;b)$ վերջավոր միջակայքում և $\lim\limits_{x\to a} f'(x)=\infty$: Հետևու՞մ է արդյոք այդտեղից, որ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$:

1162. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $(a;+\infty)$ բազմության վրա և գոյություն ունի $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ վերջավոր սահման: Կարելի՞ է արդյոք պնդել, որ $f'(x)$-ը $+\infty$-ում ունի վերջավոր կամ անվերջ սահման:

1163. Դիցուք $f(x)$ սահմանափակ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $(a;+\infty)$ բազմության վրա և գոյություն ունի $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ վերջավոր սահման: Հետևու՞մ է արդյոք այդտեղից, որ գոյություն ունի $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ վերջավոր կամ անվերջ սահման:

1164. Կառուցել ֆունկցիա, որը լինի դիֆերենցելի $0;-1;1$ կետերում և խզվող՝ $[-2;2]$ հատվածի մնացած կետերում:

1165. Ապացուցել, որ

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x-1)^2}}, |x|<1, \\ 0, |x|\geq 1 \end{cases}$$

ֆունկցիան անվերջ դիֆերենցելի է:

Կառուցել անվերջ դիֆերենցելի ֆունկցիա, որը $(0;\varepsilon)$ միջակայքում դրական է, իսկ այդ միջակայքից դուրս՝ զրո:

1166. $f(x)$ ֆունկցիան կանվանենք *ողորկ* x_0 կետում, եթե

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h}=0:$$

Ապացուցել, որ

ա) եթե $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է x_0 կետում, ապա այդ կետում այն ողորկ է;

բ) կառուցել ֆունկցիա, որը տվյալ կետում ողորկ է, բայց դիֆերենցելի չէ:

1167. Դիցուք f-ը դիֆերենցելի է x_0 կետում, $\alpha_n<x_0<\beta_n$ $(n\in N)$ և $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=x_0$: Ապացուցել, որ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=f'(x_0)$:

1168. Դիցուք f-ը դիֆերենցելի է x_0 կետում, $x_0<\alpha_n<\beta_n$ $(n\in N)$ և $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=x_0$:

ա) Կառուցել x_0 կետում դիֆերենցելի ֆունկցիա, որի համար հնարավոր լինի խնդրի պայմաններին բավարարող α_n և β_n հաջորդականությունները ընտրել այնպես, որ $\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}$ հաջորդականությունը չզուգամիտի $f'(x_0)$-ին;

բ) ապացուցել, որ եթե $\frac{\beta_n-x_0}{\beta_n-\alpha_n}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է, ապա $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=f'(x_0)$:

1169. Ապացուցել, որ եթե $f:R\to R$ ֆունկցիան բավարարում է

$$f(x+y)=f(x)f(y),\ (x,y\in R)$$

ֆունկցիոնալ հավասարմանը և դիֆերենցելի է $x=0$ կետում, ապա այն ամենուրեք դիֆերենցելի է ցանկացած $x \in R$ կետում և $f^{(n)}(x)=[f'(0)]^n f(x)$:

1170. Տրված է $y=(1+x)^x$ ֆունկցիան: Ապացուցել, որ

$$y^{(n+1)}(0)=(-1)^{n+1}n!\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{y^{(k)}(0)}{k!}\cdot\frac{n-k+1}{n-k} \quad (n \in N):$$

1171. Դիցուք՝ $a_1<a_2<\cdots<a_{2n}$: Ապացուցել, որ

$$\left[\frac{(x-a_1)(x-a_3)\cdots(x-a_{2n-1})}{(x-a_2)(x-a_4)\cdots(x-a_{2n})}\right]'<0:$$

1172. Դիցուք $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ թվերը ցանկացած բնական k-ի դեպքում բավարարում են $\lambda_1^k+\lambda_2^k+\cdots+\lambda_n^k>0$ անհավասարությանը և

$$f(x)=\frac{1}{(1-\lambda_1 x)(1-\lambda_2 x)\cdots(1-\lambda_n x)}:$$

Ապացուցել, որ $f^{(k)}(0)>0$ $(k \in N)$:

1173. Դիցուք n-րդ աստիճանի, $n>1$, $P(x)$ հանրահաշվական բազմանդամի $x_1,x_2,\ldots,x_n$ արմատներն իրական են և միմյանցից տարբեր: Ապացուցել հավասարությունը.

$$\frac{1}{P'(x_1)}+\frac{1}{P'(x_2)}+\cdots+\frac{1}{P'(x_n)}=0:$$

1174. Ապացուցել հավասարությունը.

$$\left(x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right):$$

Ապացուցել բանաձևը (1175-1176).

1175. $$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n\ln x\right)=n!\left(\ln x+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) \quad (x>0):$$

1176. $$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{(2n)!}{x^{2n+1}}\left[C_n(x)\sin x-S_n(x)\cos x\right],$$

որտեղ

$$C_n(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad S_n(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}:$$

1177. Ապացուցել, որ

$$\lim_{x\to 0}\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)=\begin{cases}0, \text{ երբ } n=2k-1,\\ (-1)^k\dfrac{2^{2k}}{(k+1)(2k+1)}, \text{ երբ } n=2k:\end{cases}$$

1178. Ստուգել, որ

$$T_m(x)=\frac{1}{2^{m-1}}\cos(m\cdot\arccos x)\ \ (m\in N)$$

ֆունկցիաները հանրահաշվական բազմանդամներ են (Չեբիշևի բազմանդամներ) և բավարարում են

$(1-x^2)T_m''(x)-xT_m'(x)+m^2T_m(x)=0$ դիֆերենցիալ հավասարմանը:

1179. Ապացուցել, որ Լեժանդրի բազմանդամները՝

$$P_m(x)=\frac{1}{2^m m!}\left[(x^2-1)^m\right]^{(m)}\ \ (m=0,1,2,\ldots),$$

բավարարում են

$(1-x^2)P_m''(x)-2xP_m'(x)+m(m+1)P_m(x)=0$ դիֆերենցիալ հավասարմանը:

Ցուցում: $(x^2-1)u'=2mxu$ հավասարությունը, որտեղ $u=(x^2-1)^m$, ածանցել $m+1$ անգամ:

1180. Լագերի բազմանդամները սահմանվում են հետևյալ բանաձևով.

$$L_m(x)=e^x\left(x^m e^{-x}\right)^{(m)}\ \ (m=0,1,2,\ldots):$$

Ապացուցել, որ $L_m(x)$-ը բավարարում է հետևյալ հավասարմանը.

$$xL_m''(x)+(1-x)L_m'(x)+mL(x)=0:$$

Ցուցում: Օգտագործել $xu'=(m-x)u$ հավասարությունը, որտեղ $u=x^m e^{-x}$:

1181. Դիցուք $y=f(u)$ և $u=\varphi(x)$ ֆունկցիաները n անգամ դիֆերենցելի են: Ապացուցել, որ

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\sum_{k=1}^{n}A_k(x)f^{(k)}(u)$$

ներկայացման մեջ $A_k(x)$ գործակիցները f ֆունկցիայից կախված չեն:

1182. Ապացուցել $y=f(x^2)$ ֆունկցիայի ածանցման հետևյալ կանոնը.

$$\frac{d^n y}{dx^n}=(2x)^n f^{(n)}(x^2)+\frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2}f^{(n-1)}(x^2)+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4}f^{(n-2)}(x^2)+\cdots:$$

1183. Հերմիտի բազմանդամները սահմանվում են

$$H_m(x)=(-1)^m e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)^{(m)} \quad (m=0,1,2,\ldots)$$

բանաձևով: Ապացուցել, որ $H_m(x)$-ը բավարարում է

$$H_m''(x)-2xH_m'(x)+2mH_m(x)=0 \text{ դիֆերենցիալ հավասարմանը:}$$

Ցուցում: Օգտագործել $u'=-2xu$ հավասարությունը, որտեղ $u=e^{-x^2}$

1184. Ապացուցել, որ եթե $P_1(x)$ և $P_2(x)$ n-րդ աստիճանի բազմանդամների արժեքները $n+1$ կետերում համընկնում են,ապա $P_1(x)\equiv P_2(x)$:

1185. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է R-ի վրա և $x_0,x_1,\ldots,x_n$-ը իրարից տարբեր իրական թվեր են: Ապացուցել, որ Լագրանժի ինտերպոլացիոն բազմանդամը՝

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} \text{-ը,}$$

միակ n-րդ աստիճանի բազմանդամն է, որը բավարարում է $L_n(x_i)=f(x_i)$ $(i=0,1,\ldots,n)$ պայմաններին:

1186. Դիցուք $k_1,k_2,\ldots,k_n$-ը բնական թվեր են, $x_1,x_2,\ldots,x_n$-ը՝ իրարից տարբեր իրական թվեր, իսկ $P_1(x)$-ը և $P_2(x)$-ը

$$P_1^{(i)}(x_j)=P_2^{(i)}(x_j) \quad (j=1,2,\ldots,n, i=0,\ldots,k_j-1)$$

պայմաններին բավարարող $(k_1+k_2+\cdots+k_n-1)$-րդ աստիճանի բազմանդամներ են: Ապացուցել, որ $P_1(x)\equiv P_2(x)$:

1187. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան x_i, $i=1,2,\ldots,n$ կետերում k_i-1 անգամ դիֆերենցելի է: Ապացուցել, որ գոյություն ունի m-րդ կարգի $(m=k_1+k_2+\cdots+k_n-1)$ միակ $H_m(x)$ բազմանդամ, որը բավարարում է

$$H_m^{(i)}(x_j)=f^{(i)}(x_j) \quad (j=1,2,\ldots,n,\ i=0,1,\ldots,k_j-1)$$

պայմաններին (Հերմիտի ինտերպոլացիոն բազմանդամ):

1188. Ընտրել ամենացածր աստիճանի $P(x)$ բազմանդամն այնպես, որ $f(x)$ ֆունկցիան լինի 1) անընդհատ; 2) դիֆերենցելի.

ա) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{5x}{4+x^2}, |x|\geq 1,\\ P(x), |x|<1;\end{cases}$ բ) $f(x)=\begin{cases}x^2e^{-2x}, |x|\leq 1,\\ P(x), |x|>1:\end{cases}$

1189. Ապացուցել, որ Ռիմանի ֆունկցիան ոչ մի կետում դիֆերենցելի չէ:

1190. Ապացուցել, որ

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{q^3}, \text{ երբ } x=\frac{p}{q} & (\text{անկրճատելի կոտորակ է, } q\in N)\\ 0, \text{ երբ } x\in I\end{cases}$$

ֆունկցիան ցանկացած $k\in N\setminus\left\{n^2:n\in N\right\}$ թվի համար $x=\sqrt{k}$ կետում դիֆերենցելի է:

1191. Կառուցել $f:R\to R$ հակադարձելի ֆունկցիա, որն x_0 կետում դիֆերենցելի է, $f'(x_0)\neq 0$, իսկ f^{-1} հակադարձ ֆունկցիան $y_0=f(x_0)$ կետում դիֆերենցելի չէ:

Գլուխ 6

Դիֆերենցիալ հաշվի հիմնական թեորեմները, ածանցյալի կիրառությունները

Ռոլլի թեորեմը: Եթե $f\in C[a;b]$ ֆունկցիան $(a;b)$ միջակայքում դիֆերենցելի է և $f(a)=f(b)$, ապա գոյություն ունի $\xi\in(a;b)$ կետ, որի համար $f'(\xi)=0$:

Լագրանժի թեորեմը (վերջավոր աճերի բանաձևը): Եթե $f\in C[a;b]$ ֆունկցիան $(a;b)$ միջակայքում դիֆերենցելի է, ապա գոյություն ունի $\xi\in(a;b)$ կետ, որի համար

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a):$$

Կոշիի թեորեմը: Եթե $f,g\in C[a;b]$ ֆունկցիաները $(a;b)$ միջակայքում դիֆերենցելի են և $g'(x)\neq 0$, ապա գոյություն ունի $\xi\in(a;b)$ կետ, այնպիսին, որ

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}:$$

Թեյլորի բանաձևը: Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում n անգամ դիֆերենցելի է:

$$P_n(x_0,x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

հանրահաշվական բազմանդամը կոչվում է x_0 կետում f ֆունկցիայի n-րդ կարգի *Թեյլորի բազմանդամ*:

Թեյլորի բանաձևը հետևյալն է.

$$f(x)=P_n(x_0,x)+r_n(x_0,x),$$

որտեղ $r_n(x_0,x)=f(x)-P_n(x_0,x)$-ը կոչվում է մնացորդային անդամ:

Եթե f-ն x_0 կետում n անգամ դիֆերենցելի է, ապա

$r_n(x_0,x)=o\left((x-x_0)^n\right)$ (մնացորդային անդամի Պեանոյի ներկայացում):

Եթե $f\in C^n[x_0;x]$ և $(x_0;x)$ միջակայքում f-ն ունի $(n+1)$-րդ կարգի վերջավոր ածանցյալ, ապա գոյություն ունի $\xi\in(x_0;x)$ կետ, այնպիսին, որ

1) $r_n(x_0,x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-x_0)$ (մնացորդային անդամի Կոշիի ներկայացում);

2) $r_n(x_0,x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$ (մնացորդային անդամի Լագրանժի ներկայացում):

Լոպիտալի կանոնը: Դիցուք f և g ֆունկցիաները որոշված են և դիֆերենցելի $(a;b)$ վերջավոր կամ անվերջ միջակայքում, ընդ որում՝ $g'(x)\neq 0$: Եթե գոյություն ունի $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ վերջավոր կամ անվերջ ($-\infty$ կամ $+\infty$) սահմանը և

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0 \text{ կամ } \lim_{x\to a} g(x)=\infty$$

ապա

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A:$$

Ֆունկցիայի հետազոտումը: Դիցուք f ֆունկցիան որոշված է $(a;b)$ միջակայքում և դիֆերենցելի է:

Թեորեմ 1: f-ն $(a;b)$-ում կլինի հաստատուն այն և միայն այն դեպքում, երբ $f'(x)\equiv 0$:

Թեորեմ 2: f-ն $(a;b)$-ում չնվազող է (չաճող է) այն և միայն այն դեպքում, երբ միջակայքի բոլոր կետերում $f'(x)\geq 0$ (≤ 0):

Ուռուցիկ ֆունկցիաներ: Դիցուք X-ը կապակցված բազմություն է: $f:X\to R$ ֆունկցիան կոչվում է *ուռուցիկ*, եթե ցանկացած $x_1,x_2\in X$ կետերի և $0\leq\alpha\leq 1$ թվի համար տեղի ունի

$$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\leq \alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$$

անհավասարությունը: Եթե $x_1\neq x_2$, $\alpha\neq 0$ և $\alpha\neq 1$ դեպքում անհավասարությունը խիստ է, ապա f-ը կոչվում է *խիստ ուռուցիկ ֆունկցիա*: f-ը կանվանենք *գոգավոր ֆունկցիա*, եթե $-f$-ը ուռուցիկ է:

Թեորեմ 3: Որպեսզի $(a;b)$ միջակայքում դիֆերենցելի f ֆունկցիան լինի ուռուցիկ (գոգավոր), անհրաժեշտ է և բավարար, որ $f'(x)$ ֆունկցիան լինի չնվազող (չաճող):

Հետևանք: $(a;b)$ միջակայքում երկու անգամ դիֆերենցելի f ֆունկցիան կլինի ուռուցիկ (գոգավոր) այն և միայն այն դեպքում, երբ միջակայքի յուրաքանչյուր կետում $f''(x)\geq 0$ (≤ 0):

Շրջման կետ: Դիցուք f-ն x_0 կետի U_{x_0} շրջակայքում դիֆերենցելի է: Նշանակենք $U^-_{x_0}=\{x\in U_{x_0}: x<x_0\}$, $U^+_{x_0}=\{x\in U_{x_0}: x>x_0\}$: Եթե $U^-_{x_0}$ և $U^+_{x_0}$ կիսաշրջակայքերից մեկում ֆունկցիան խիստ ուռուցիկ է, իսկ մյուսում՝ խիստ գոգավոր, ապա x_0-ն անվանում են *շրջման կետ*:

Եթե x_0 շրջման կետում f-ը երկու անգամ դիֆերենցելի է, ապա $f''(x_0)=0$:

Էքստրեմումներ: $x_0\in(a;b)$ կետը կոչվում է f ֆունկցիայի *լոկալ մինիմումի* (*մաքսիմումի*) կետ, եթե գոյություն ունի x_0-ի U_{x_0} շրջակայք այնպիսին, որ

$$x\in U_{x_0}\Rightarrow f(x)\geq f(x_0)\ \ (f(x)\leq f(x_0)):$$

Եթե այս անհավասարությունը խիստ է, երբ $x\neq x_0$, ապա x_0-ն անվանում են խիստ մինիմումի (մաքսիմումի) կետ: Լոկալ մինիմումի և մաքսիմումի կետերը միասին կոչվում են ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումի կետեր:

Ֆ ե ր մ ա յ ի թ ե ո ր ե մ ը (էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը): Եթե x_0-ն f ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումի կետ է և այդ կետում f-ը դիֆերենցելի է, ապա $f'(x_0)=0$:

Թ ե ո ր ե մ 4 (էքստրեմումի բավարար պայմանը): Դիցուք f-ն x_0 կետի U_{x_0} շրջակայքում անընդհատ է և ամենուրեք (բացի գուցե x_0 կետից) ունի վերջավոր ածանցյալ:

Ճշմարիտ են հետևյալ պնդումները.

ա) $\forall x\in U_{x_0}^{-}$ $\left(f'(x)>0\right)$ և $\forall x\in U_{x_0}^{+}$ $\left(f'(x)<0\right)\Rightarrow$ x_0-ն խիստ մաքսիմումի կետ է;

բ) $\forall x\in U_{x_0}^{-}$ $\left(f'(x)<0\right)$ և $\forall x\in U_{x_0}^{+}$ $\left(f'(x)>0\right)\Rightarrow$ x_0-ն խիստ մինիմումի կետ է:

Թ ե ո ր ե մ 5: Դիցուք f-ն x_0 կետի U_{x_0} շրջակայքում n անգամ դիֆերենցելի է, ընդ որում՝ $f'(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$ և $f^{(n)}(x_0)\neq 0$: Եթե n-ը կենտ է, ապա f-ն x_0 կետում էքստրեմում չունի: Եթե n-ը զույգ է, ապա $f^{(n)}(x_0)>0$ դեպքում x_0-ն խիստ մինիմումի կետ է, իսկ $f^{(n)}(x_0)<0$ դեպքում՝ խիստ մաքսիմումի:

Դիցուք՝ $f\in C[a;b]$: $x_0\in[a;b]$ կետը կոչվում է f ֆունկցիայի կրիտիկական կետ, եթե $f'(x_0)=0$ կամ f-ն x_0 կետում դիֆերենցելի չէ: Ֆունկցիայի փոքրագույն (մեծագույն) արժեքը ստանալու համար բավական է հաշվել նրա արժեքները կրիտիկական կետերում, ինչպես նաև a և b կետերում, և ընտրել այդ արժեքներից փոքրագույնը (մեծագույնը):

Ա ս ի մ պ տ ո տ ն ե ր: $y=c_0+c_1x$ ուղիղը կոչվում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի *ասիմպտոտ* (*թեք ասիմպտոտ*) x-ը $-\infty$-ի ($+\infty$-ի) ձգտելիս, եթե $f(x)=c_0+c_1x+o(1)$, երբ $x\to-\infty$ $(+\infty)$: Այս դեպքում

$$c_1=\lim_{x\to-\infty(+\infty)}\frac{f(x)}{x},\quad c_0=\lim_{x\to-\infty(+\infty)}\left[f(x)-c_1x\right]:$$

Եթե $\lim\limits_{x\to a-}f(x)=\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\infty\right)$, ապա $x=a$ ուղիղն անվանում են f ֆունկցիայի *ուղղաձիգ ասիմպտոտ*:

Ա

1192. Ստուգել, որ $f(x)=|x|$ ֆունկցիան անընդհատ է $[-1;1]$ հատվածի վրա, ծայրակետերում ընդունում է հավասար արժեքներ, սակայն գոյություն չունի $\xi\in[-1;1]$ կետ, որի համար $f'(\xi)=0$: Չի՞ հակասում արդյոք այս փաստը Ռոլլի թեորեմին:

1193. Տրված է

$$f(x)=\begin{cases}x, \text{ երբ } 0<x\le 1,\\ 1, \text{ երբ } x=0\end{cases}$$

ֆունկցիան: Համոզվել, որ այն $[0;1]$ հատվածի ծայրակետերում ունի հավասար արժեքներ, $(0;1)$ միջակայքում դիֆերենցելի է, սակայն $f'(x)$-ը ոչ մի կետում զրո չի դառնում: Պարզել Ռոլի թեորեմի հետ թվացյալ հակասության պատճառը:

1194. Ճշմարի՞տ է արդյոք վերջավոր աճերի բանաձևը $y=\frac{1}{x}$ $(x\in[a;b])$ ֆունկցիայի համար, եթե ա) $a\cdot b>0$; բ) $a\cdot b<0$: Պատասխանը հիմնավորել:

1195. Ստուգել, որ $[-1;1]$ միջակայքում $f(x)=x^2$ և $g(x)=x^3$ ֆունկցիաների համար Կոշիի թեորեմի կիրառումը բերում է սխալ արդյունքի և պարզել պատճառը:

1196. Դիցուք $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$: Ապացուցել, որ $f'(x)=0$ հավասարման բոլոր արմատներն իրական են և ընկած են $(0;4)$ միջակայքում:

1197. Ապացուցել, որ եթե $P(x)$ հանրահաշվական բազմանդամի համար x_0-ն բազմապատիկ արմատ է, ապա այն արմատ է նաև $P'(x)$-ի համար:

1198. Ապացուցել, որ եթե $P(x)$ հանրահաշվական բազմանդամի բոլոր արմատներն իրական են, ապա $P'(x)$-ի բոլոր արմատները նույնպես իրական են:

1199. Տրված է $y=x^2$ ֆունկցիան: Համոզվել, որ ցանկացած $[a;b]$ հատվածի համար վերջավոր աճերի բանաձևում առկա ξ կետը միակն է և գտնել այն:

1200. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիայի համար վերջավոր աճերի բանաձևը ներկայացված է

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1)$$

տեսքով: Գտնել θ-ի կախումն x-ից և Δx-ից, եթե

ա) $f(x)=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$; բ) $f(x)=\frac{1}{x}$; գ) $f(x)=e^x$:

1201. $y=x^3$ ֆունկցիայի գրաֆիկի վրա նշել այն $(\xi;\xi^3)$ կետը, որով տարված շոշափողը զուգահեռ է $A(-1;-1)$ և $B(2;8)$ կետերը միացնող լարին:

1202. Կառուցել (գրաֆիկորեն) $[a;b]$ հատվածի վրա որոշված ֆունկցիա, որի համար գոյություն ունի Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձևում առկա

ա) ճիշտ երկու ξ կետ; բ) ճիշտ երեք ξ կետ:

1203. Ապացուցել անհավասարությունը.

ա) $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$; բ) $|arctgx-arctgy|\le|x-y|$;

գ) $py^{p-1}(x-y)\le x^p-y^p\le px^{p-1}(x-y) \quad (p>1,\ 0<y<x)$;

դ) $\frac{x-y}{x}<\ln\frac{x}{y}<\frac{x-y}{y}\quad (0<y<x)$:

1204. Ապացուցել, որ եթե $(a;b)$ միջակայքում $f'(x)\equiv 0$, ապա f-ն այդ միջակայքում հաստատուն է:

1205. Ապացուցել, որ եթե $(a;b)$ միջակայքում $f'(x)\equiv g'(x)$, ապա այդ միջակայքում f և g ֆունկցիաների տարբերությունը հաստատուն է:

1206. Ապացուցել նույնությունը.

ա) $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$; բ) $arctgx+arctg\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}x\quad (x\neq 0)$;

գ) $2arctgx+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi\operatorname{sgn}x\quad (|x|\geq 1)$;

դ) $3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)=\pi\quad \left(|x|\leq\frac{1}{2}\right)$:

1207. Ստուգել, որ $f(x)=arctg\frac{1+x}{1-x}$ և $g(x)=arctgx$ ֆունկցիաները $(-\infty;1)$ և $(1;+\infty)$ միջակայքերից յուրաքանչյուրի վրա տարբերվում են համապատասխան հաստատուն գումարելիով: Գտնել այդ հաստատունները:

1208. Ապացուցել, որ R-ի վրա դիֆերենցելի միակ ֆունկցիան, որի ածանցյալը հաստատուն է՝ $f'(x)\equiv k$, $f(x)=kx+b$ գծային ֆունկցիան է:

1209. Ստուգել, որ $x_0=0$ կետի շրջակայքում ցանկացած n բնական թվի համար ճշմարիտ են Թեյլորի հետևյալ վերլուծությունները.

ա) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$;

բ) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n})$;

գ) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$;

դ) $shx=x+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n})$;

ե) $chx=1+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$;

զ) $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$;

ե) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$:

1210. Ապացուցել, որ եթե f ֆունկցիան զույգ է, ապա $x_0=0$ կետի շրջակայքում նրա Թեյլորի բազմանդամը բաղկացած է x-ի միայն զույգ աստիճաններից, իսկ եթե f-ը կենտ է՝ x-ի միայն կենտ աստիճաններից:

1211. Վերլուծել $P(x)=1-3x+x^3$ բազմանդամն ըստ $(x+1)$-ի աստիճանների. $P(x)=a_0+a_1(x+1)+a_2(x+1)^2+a_3(x+1)^3$:

Գտնել $f(x)$ ֆունկցիայի Թեյլորի բազմանդամն x_0 կետի շրջակայքում (1212-1223).

1212. $f(x)=e^{2x}$, $x_0=0$:

1213. $f(x)=xe^{-x}$, $x_0=0$:

1214. $f(x)=e^{x^2}$, $x_0=0$:

1215. $f(x)=2\sin^2 2x$, $x_0=0$:

1216. $f(x)=\ln\sqrt{x}$, $x_0=1$:

1217. $f(x)=(1-x)\ln x$, $x_0=1$:

1218. $f(x)=x^3 ch3x$, $x_0=0$:

1219. $f(x)=e^x-shx$, $x_0=0$:

1220. $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$, $x_0=0$:

1221. $f(x)=\ln(1-x^3)$, $x_0=0$:

1222. $f(x)=a^x$, $x_0=0$:

1223. $f(x)=\log_a|x|$, $x_0=1$:

1224. Հետևյալ մոտավոր բանաձևերում գնահատել բացարձակ սխալանքը.

ա) $e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$, $0\le x\le 1$;

բ) $\sin x\approx x-\frac{x^3}{6}$, $|x|\le\frac{1}{2}$;

գ) $tgx\approx x+\frac{x^3}{3}$, $|x|\le 0{,}1$;

դ) $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$, $0\le x\le 1$:

1225. Պարզել, թե x-ի ինչ արժեքների դեպքում $\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2}$ բանաձևում բացարձակ սխալանքը չի գերազանցի $0{,}0001$-ը:

1226. Ապացուցել հետևյալ բանաձևը.

$$\sqrt[n]{a^n+x}=a+\frac{x}{na^{n-1}}-r,\ a>0,\ x>0,$$

որտեղ $0<r<\frac{n-1}{2n^2}\cdot\frac{x^2}{a^{2n-1}}$:

1227. Թեյլորի բանաձևի միջոցով գտնել հետևյալ արտահայտություններից յուրաքանչյուրի մոտավոր արժեքը: Սխալանքը գնահատելու համար օգտագործել մնացորդային անդամի Լագրանժի ներկայացումը.

ա) $\sqrt[3]{30}$; բ) $\sqrt[5]{250}$; գ) $\sqrt[7]{e}$; դ) $\sin 18°$; ե) $\ln 1{,}01$; զ) $1{,}1^{1{,}2}$:

1228. Հաշվել՝

ա) e-ն՝ 10^{-6}-ի ճշտությամբ; բ) $sh0{,}5$-ը՝ 10^{-3}-ի ճշտությամբ;

գ) $\sin 1°$-ը՝ 10^{-5}-ի ճշտությամբ; դ) $\sqrt{5}$-ը՝ 10^{-4}-ի ճշտությամբ:

Օգտվելով վարժություն 1209-ում ստացված վերլուծություններից՝ հաշվել սահմանը (1229-1240).

1229. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$:

1230. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$:

1231. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2(1+x)-sh^2x}{1-e^{-x^2}}$:

1232. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x+3^{-x}-2}{x^2}$:

1233. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$:

1234. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$:

1235. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$:

1236. $\lim\limits_{x\to +\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$:

1237. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$:

1238. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-ctgx\right)$:

1239. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$:

1240. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sh(tgx)-x}{x^3}$:

Գտնել ֆունկցիայի նշված n-րդ կարգի Թեյլորի բազմանդամը $x_0=0$ կետի շրջակայքում (1241-1248).

1241. $f(x)=\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$, $n=4$:

1242. $f(x)=e^{2x-x^2}$, $n=5$:

1243. $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$, $n=4$:

1244. $f(x)=\ln\cos x$, $n=6$:

1245. $f(x)=\sin\sin x$, $n=3$:

1246. $f(x)=tgx$, $n=5$:

1247. $f(x)=arctgx$, $n=10$:

1248. $f(x)=\arcsin x$, $n=10$:

1249. Գտնել $f(x)=\sqrt{x}$ ֆունկցիայի $x_0=1$ կետում Թեյլորի վերլուծության առաջին երեք անդամները:

Օգտվելով Լոպիտալի կանոնից՝ հաշվել սահմանը (1250-1291).

1250. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$:

1251. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{chx-\cos x}{x^2}$:

1252. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-x}{x-\sin x}$:

1253. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg4x-4tgx}{\sin 4x-4\sin x}$:

1254. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x-arctgx}{\ln(1+x^3)}$:

1255. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{tgx}-\frac{1}{e^x-1}\right)$:

1256. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(tgx+\frac{2}{2x-\pi}\right)$:

1257. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xctgx-1}{x^2}$:

1258. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt[3]{tgx}-1}{2\sin^2 x-1}$:

1259. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$:

1260. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-a^{\sin x}}{x^3}$:

1261. $\lim\limits_{x\to 0}x^x$:

1262. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$:

1263. $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$:

1264. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$:

1265. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}$:

1266. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos\sin x-\cos x}{x^4}$:

1267. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$:

1268. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$:

1269. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg2x}$:

1270. $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\sin x}$:

1271. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^a}{e^x}$:

1272. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^a}\quad (\alpha>0)$:

1273. $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+2^x)^{\frac{1}{x}}$:

1274. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(tg\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$:

1275. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-ctg^2x\right)$:

1276. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x-x}{\ln x-x+1}$:

1277. $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}$:

1278. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(a+x)^x-a^x}{x^2}$:

1279. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

1280. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^{x}$:

1281. $\lim\limits_{x\to +\infty}(thx)^{x}$:

1282. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$:

1283. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$:

1284. $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln tg\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{x}\right)$:

1285. $\lim\limits_{x\to +0} x\ln\ln\dfrac{1}{x}$:

1286. $\lim\limits_{x\to +0}\sin x\cdot\ln x$:

1287. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$:

1288. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{chx}\right)^{\frac{1}{x^2}}$:

1289. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln chx}{\sqrt[m]{chx}-\sqrt[n]{chx}}$:

1290. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+e^{x}}{2}\right)^{cthx}$:

1291. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{thx}-\dfrac{1}{tgx}\right)$:

1292. Թույլատրելի՞ է արդյոք Լոպիտալի կանոնի կիրառումը հետևյալ օրինակներում.

ա) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$;

բ) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\cos x}$;

գ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xchx}{1+e^{-x}}$;

դ) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x+\sin x}$:

Գտնել ֆունկցիայի աճման և նվազման միջակայքերը (1293-1304).

1293. $y=x^2e^{-x}$:

1294. $y=\sqrt[3]{x^2}(x-2)^3$:

1295. $y=\dfrac{3x-7}{\left(x^2-1\right)^2}$:

1296. $y=\dfrac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}$:

1297. $y=\operatorname{arctg}x-\ln x$:

1298. $y=x-\sin 2x$:

1299. $y=x^{x}$:

1300. $y=x^{\frac{1}{x}}$:

1301. $y=x^2-\ln x^2$:

1302. $y=\frac{\pi x}{2}-x\,arctgx$:

1303. $y=\frac{x^2}{2^x}$:

1304. $y=\frac{\ln x}{x^2}$:

1305. Դիցուք f և g ֆունկցիաները $(a;b)$ միջակայքում դիֆերենցելի են: Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ

ա) $\forall x\in(a;b)\ (f(x)>g(x))\Rightarrow\forall x\in(a;b)\ (f'(x)>g'(x))$;

բ) $\forall x\in(a;b)\ (f'(x)>g'(x))\Rightarrow\forall x\in(a;b)\ (f(x)>g(x))$:

Բերել համապատասխան օրինակներ:

1306. Ապացուցել հետևյալ պնդումը. եթե f և g ֆունկցիաները $[x_0;b)$ $(b\le+\infty)$ միջակայքում դիֆերենցելի են, $f(x_0)=g(x_0)$ և ցանկացած $x\in(x_0;b)$ կետում $f'(x)>g'(x)$, ապա $(x_0;b)$ միջակայքում ամենուրեք $f(x)>g(x)$:

1307. Օգտվելով նախորդ խնդրից՝ ապացուցել անհավասարությունը.

ա) $e^x>1+x\ \ (x\ne0)$;

բ) $e^x>e\cdot x\ \ (x>1)$;

գ) $\sin x<x\ \ (x>0)$;

դ) $tgx>x\ \ \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$;

ե) $\cos x>1-\frac{x^2}{2}\ \ (x>0)$;

զ) $\ln x<x-1\ \ (x>1)$:

Գտնել ֆունկցիայի ուռուցիկության և գոգավորության միջակայքերը: Նշել շրջման կետերը (1308-1316).

1308. $y=3x^2-x^3$:

1309. $y=\frac{a^3}{a^2+x^2}\ \ (a>0)$:

1310. $y=x+\sqrt[3]{x^5}$:

1311. $y=\sqrt{1+x^2}$:

1312. $y=x+\sin x$:

1313. $y=e^{-x^2}$:

1314. $y=\ln(1+x^2)$:

1315. $y=x\cdot\sin(\ln x)$:

1316. $y=x^x$:

1317. Ցույց տալ, որ $x^\alpha\ \ (\alpha>1)$, e^x, $x\ln x$ ֆունկցիաները $(0;+\infty)$ միջակայքում ուռուցիկ են, իսկ $x^\alpha\ \ (0<\alpha<1)$ և $\ln x$ ֆունկցիաները՝ գոգավոր:

1318. Ապացուցել հետևյալ անհավասարությունները և մեկնաբանել դրանք երկրաչափորեն.

ա) $\frac{1}{2}(x^\alpha+y^\alpha)>\left(\frac{x+y}{2}\right)^\alpha\ (x,y>0,x\ne y,\alpha>1)$;

բ) $\dfrac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}\quad (x\neq y)$;

գ) $x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\dfrac{x+y}{2}\quad (x,y>0, x\neq y)$:

Գտնել ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը և պարզել՝ էքստրեմումի կետեր են դրանք, թե ոչ (1319-1328).

1319. $y=2+x-x^2$:

1320. $y=(x-1)^3$:

1321. $y=(x-1)^4$:

1322. $y=x^m(1-x)^n\quad (m,n\in N)$:

1323. $y=\cos x$:

1324. $y=chx$:

1325. $y=\cos x+chx$:

1326. $y=(x+1)^{10}\cdot e^{-x}$:

1327. $y=|x|$:

1328. $y=\sqrt[3]{x(1-x)^2}$:

Գտնել ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը և հաշվել էքստրեմալ արժեքները (1329-1342).

1329. $y=x^3-6x^2+9x-4$:

1330. $y=2x^2-x^4$:

1331. $y=x(x-1)^2(x-2)^3$:

1332. $y=x+\dfrac{1}{x}$:

1333. $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$:

1334. $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1}$:

1335. $y=x\cdot\sqrt[3]{x-1}$:

1336. $y=xe^{-x}$:

1337. $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$:

1338. $y=\cos x+\dfrac{1}{2}\cos 2x$:

1339. $y=\dfrac{10}{1+\sin^2 x}$:

1340. $y=arctgx-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$:

1341. $y=e^x\sin x$:

1342. $y=(x^2-3)e^{-x}$:

Գտնել նշված միջակայքում ֆունկցիայի փոքրագույն և մեծագույն արժեքները (1343-1352).

1343. $y=2^x$, $x\in[-1;5]$:

1344. $y=\log_2 x$, $x\in[1;16]$:

1345. $y=x^4+32x+1$, ա) $x\in[-2;0]$; բ) $x\in[-5;0]$:

1346. $y=x^3-6x^2+9x-1$, ա) $x\in[4;5]$; բ) $x\in[-1;4]$:

1347. $y=x^3-3x^2+6x-2$, $x\in[-4;3]$:

1348. $y=|x^2-3x+2|$, $x\in[-10;10]$:

1349. $y=\sqrt{2x-x^2}$:

1350. $y=\sqrt{x}\ln x$, $x\in(0;1]$:

1351. $y=\sqrt{5-4x}$, $x\in[-1;1]$:

1352. $y=|x|+\frac{x^3}{3}$, $x\in[-1;1]$:

Գտնել ֆունկցիայի ճշգրիտ ստորին և վերին եզրերը (1353-1357).

1353. $y=xe^{-2x}$, $x\in(0;+\infty)$:

1354. $y=\frac{1+x^2}{1+x^4}$, $x\in(0;+\infty)$:

1355. $y=e^{-x^2}\cos x^2$, $x\in R$:

1356. $y=\frac{(x+2)^2}{x^2+10}$, $x\in R$:

1357. $y=\frac{x^2+x\sqrt{3+x^2}}{3+x^2}$, ա) $x\in(0;+\infty)$; բ) $x\in R$; գ) $x\in[-1;1]$:

Գտնել x_n հաջորդականության մեծագույն անդամը և համոզվել, որ այդ անդամից սկսած x_n-ը նվազում է (1358-1359).

1358. $x_n=\frac{n^{10}}{e^n}$ $(n\in N)$:

1359. $x_n=\sqrt[n]{n}$ $(n\in N)$:

Գտնել ֆունկցիայի ասիմպտոտները (1360-1365).

1360. $y=\frac{x^2+1}{2x-1}$:

1361. $y=\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}$:

1362. $y=x-\frac{1}{x}$:

1363. $y=2x-xe^x$:

1364. $y=\frac{\sin x}{x^2}$:

1365. $y=x\,arcctgx$:

***

Կառուցել ֆունկցիայի գրաֆիկը (1366-1409).

Ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելիս անհրաժեշտ է.
1) գտնել ֆունկցիայի որոշման տիրույթը;
2) պարզել ֆունկցիայի վարքը որոշման տիրույթի եզրային կետերում;
3) հետազոտել ֆունկցիան զույգության, կենտության և պարբերականության առումով;
4) հնարավորության դեպքում գտնել ֆունկցիայի զրոները;
5) գտնել էքստրեմումի կետերը և հաշվել ֆունկցիայի էքստրեմալ արժեքները (այդ թվում մեծագույն և փոքրագույն արժեքները, եթե դրանք գոյություն ունեն);
6) գտնել մոնոտոնության և ուռուցիկության միջակայքերը;
7) գտնել ասիմպտոտները, եթե այդպիսիք գոյություն ունեն:

1366. $y=3x-x^3$:

1367. $y=1+x^2-\frac{x^4}{2}$:

1368. $y=(x+1)(x-2)^2$:

1369. $y=\dfrac{x^4}{(1+x)^3}$:

1370. $y=\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^4$:

1371. $y=\dfrac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$:

1372. $y=\dfrac{x}{(1-x^2)^2}$:

1373. $y=\dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^2}$:

1374. $y=(x-3)\sqrt{x}$:

1375. $y=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{10}{3x^2}-\dfrac{1}{x-1}$:

1376. $y=\sqrt{8x^2-x^4}$:

1377. $y=\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}$:

1378. $y=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2+1}$:

1379. $y=\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{(x-2)^2}$:

1380. $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$

1381. $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$:

1382. $y=\dfrac{x^2\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1}$:

1383. $y=\dfrac{|1+x|^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$:

1384. $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x+1}}$:

1385. $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1}$:

1386. $y=\sin x+\cos^2 x$:

1387. $y=(7+2\cos x)\sin x$:

1388. $y=\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$:

1389. $y=\cos x-\dfrac{1}{2}\cos 2x$:

1390. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$:

1391. $y=\sin x\cdot\sin 3x$:

1392. $y=\dfrac{\sin x}{\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}$:

1393. $y=\dfrac{\cos x}{\cos 2x}$:

1394. $y=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$:

1395. $y=2x-tgx$:

1396. $y=e^{2x-x^2}$:

1397. $y=(1+x^2)e^{-x^2}$:

1398. $y=x+e^{-x}$:

1399. $y=x^{\frac{2}{3}}e^{-x}$:

1400. $y=e^{-2x}\sin^2 x$:

1401. $y=\dfrac{e^x}{1+x}$:

1402. $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$:

1403. $y=x^x$:

1404. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$:

1405. $y=x+arctgx$:

1406. $y=\frac{x}{2}+arcctgx$:

1407. $y=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$:

1408. $y=\arccos\frac{1-x}{1-2x}$:

1409. $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$:

***

1410. Ապացուցել, որ եթե $f(x)\geq 0$, ապա $F(x)=c\cdot f^2(x)$, $c\neq 0$, ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը համընկնում են f-ի էքստրեմումի կետերի հետ:

1411. Ապացուցել, որ եթե $\varphi(x)$ $(x\in R)$ ֆունկցիան աճող է, ապա f և $\varphi\circ f$ ֆունկցիաները ունեն միևնույն էքստրեմումի կետերը:

1412. Տրված են m և n դրական թվերը: Գտնել x^m+y^n արտահայտության փոքրագույն արժեքը, եթե հայտնի է, որ $x>0, y>0$ և $xy=a$ $(a=const)$:

1413. Տրված են m և n դրական թվերը: Գտնել $x^m y^n$ $(x>0, y>0)$ արտահայտության մեծագույն արժեքը, եթե $x+y=a$:

1414. Տրված S մակերեսն ունեցող ուղղանկյուններից գտնել այն, որի պարագիծը փոքրագույնն է:

1415. Տրված P պարագիծն ունեցող ուղղանկյուններից գտնել այն, որի մակերեսն ամենամեծն է:

1416. Ուղղանկյուն եռանկյան էջի և ներքնաձիգի գումարը հաստատուն է: Ինչպիսի՞ն պետք է լինեն այդպիսի եռանկյան սուր անկյունները, որպեսզի այն ունենա մեծագույն մակերես:

1417. Գերանի լայնակի կտրվածքը d տրամագծով շրջան է: Գերանը տաշելով պատրաստում են չորսու, որի լայնակի կտրվածքը b հիմքով և h բարձրությամբ ուղղանկյուն է: Հայտնի է, որ չորսուի ամրությունը գնահատվում է bh^2 մեծությամբ: Ի՞նչ համամասնությամբ պետք է տաշել գերանը, որպեսզի նրանից ստացվող չորսուն լինի մաքսիմալ ամրության:

1418. b հիմք և h բարձրություն ունեցող սուրանկյուն եռանկյանը ներգծված է ուղղանկյուն, որի երկու գագաթը գտնվում են եռանկյան հիմքի վրա: Գտնել այդպիսի ուղղանկյան առավելագույն մակերեսը:

1419. Տրված l ծնիչն ունեցող կոներից գտնել այն, որի ծավալը մեծագույնն է:

1420. R շառավղով գնդին ներգծել գլան, որի լրիվ մակերևույթի մակերեսը լինի մեծագույնը:

1421. R շառավղով գնդին ներգծել գլան, որի ծավալը մեծագույնն է:

1422. Գտնել $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(0<b<a)$ էլիպսի մեծագույն լարը, որի մի ծայրակետը $B(0;-b)$-ն է:

1423. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ էլիպսին տանել այնպիսի շոշափող, որ կոորդինատների առանցքների հետ նրա հատումից առաջացած եռանկյունն ունենա փոքրագույն մակերես:

1424. a երկարությամբ հատվածի A և B ծայրակետերում տեղավորված են համապատասխանաբար S_A և S_B մոմանոց լուսաղբյուրներ: Գտնել հատվածի ամենաքիչ լուսավորված կետի հեռավորությունը A-ից, եթե հայտնի է, որ կետի լուսավորվածությունը հակադարձ համեմատական է լուսաղբյուրից ունեցած հեռավորության քառակուսուն:

1425. Կլոր սեղանի կենտրոնից ի՞նչ բարձրության վրա պետք է կախել էլեկտրական լամպը, որպեսզի սեղանի եզրը լինի մաքսիմալ լուսավորված: Հայտնի է, որ կետի լուսավորվածությունը արտահայտվում է $I=k\frac{\sin\varphi}{r^2}$ բանաձևով, որտեղ φ-ն սեղանի հարթության վրա ճառագայթի անկման անկյունն է, r-ը լուսաղբյուրից եղած հեռավորությունը, իսկ k-ն՝ լուսաղբյուրի լույսի ուժը:

1426. Բեռը դրված է հորիզոնական հարթության վրա, որի հետ շփման գործակիցը k է: Հարթության նկատմամբ ի՞նչ անկյան տակ պետք է քաշել այդ բեռը, որպեսզի այն տեղաշարժելու համար պահանջվի մինիմալ մեծության ուժ:

1427. a շառավիղ ունեցող կիսագնդաձև գավաթի մեջ դրված է l երկարության ձող $(2a<l<4a)$: Գտնել ձողի հավասարակշռության դիրքը, եթե հայտնի է, որ այդ դիրքում նրա ծանրության կենտրոնը (ձողի միջնակետը) զբաղեցնում է հնարավոր ամենացածր մակարդակը:

Բ

1428. Դիցուք՝ $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $(a;b)$ վերջավոր կամ անվերջ միջակայքում և $f(a+0)=f(b-0)=A$ $(-\infty\le A\le+\infty)$: Ապացուցել, որ գոյություն ունի $\xi\in(a;b)$ կետ, այնպիսին, որ $f'(\xi)=0$:

1429. Դիցուք $f\in C^{n-1}[x_0;x_n]$, $(x_0;x_n)$ միջակայքի բոլոր կետերում f-ն ունի n-րդ կարգի վերջավոր ածանցյալ և բացի այդ՝ $f(x_0)=f(x_1)=\cdots=f(x_n)$

$(x_0 < x_1 < \cdots < x_n)$: Ապացուցել, որ գոյություն ունի $\xi \in (x_0; x_n)$ կետ, որի համար $f^{(n)}(\xi) = 0$:

1430. Դիցուք՝ $f \in C^{p+q}[a;b]$ և $(a;b)$ միջակայքում f-ն ունի $(p+q+1)$-րդ կարգի վերջավոր ածանցյալ: Ապացուցել, որ եթե

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(p)}(a) = 0,$$
$$f(b) = f'(b) = \cdots = f^{(q)}(b) = 0,$$

ապա գոյություն ունի $\xi \in (a;b)$ կետ, որի համար $f^{(p+q+1)}(\xi) = 0$:

1431. Ապացուցել, որ Լեժանդրի բազմանդամի՝

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]\text{-ի},$$

բոլոր արմատներն իրական են և ընկած են $(-1;1)$ միջակայքում:

1432. Ապացուցել, որ Լագերի բազմանդամի՝

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right)\text{-ի},$$

բոլոր արմատները դրական են:

1433. Ապացուցել, որ Հերմիտի բազմանդամի՝

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)\text{-ի},$$

բոլոր արմատներն իրական են:

1434. Ապացուցել, որ եթե $P(x)$-ը $(n-1)$-րդ աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամ է, ապա $P^{(n)}(x) \equiv 0$:

1435. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան R-ի վրա n անգամ դիֆերենցելի է և $f^{(n)}(x) \equiv 0$, ապա f-ը ոչ ավելի, քան $(n-1)$-րդ աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամ է:

1436. Դիցուք՝ f-ը R-ի վրա դիֆերենցելի է և ցանկացած x-ի ու h-ի համար

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x):$$

Ապացուցել, որ f-ը գծային է. $f(x) = ax + b$:

1437. Դիցուք f-ը R-ի վրա երկու անգամ դիֆերենցելի է և ցանկացած x-ի ու h-ի համար

$$f(x+h) - f(x) = hf'\left(x + \frac{h}{2}\right):$$

Ապացուցել, որ f-ը քառակուսային ֆունկցիա է. $f(x) = ax^2 + bx + c$:

1438. Համաձայն վերջավոր աճերի բանաձևի, ցանկացած $x \geq 0$ արժեքի համար

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

որտեղ $0<\theta(x)<1$: Ապացուցել, որ այս դեպքում՝

ա) $\frac{1}{4} \leq \theta(x) \leq \frac{1}{2}$;

բ) $\lim_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{4}$, $\lim_{x\to +\infty}\theta(x)=\frac{1}{2}$:

1439. Ստուգել, որ հետևյալ ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը $[0;2]$ հատվածում բավարարում է Լագրանժի թեորեմի բոլոր պայմաններին և գտնել համապատասխան ξ կետը, որի համար ճշմարիտ է վերջավոր աճերի բանաձևը.

ա) $f(x)=\begin{cases}\frac{3-x^2}{2}, 0 \leq x \leq 1,\\ \frac{1}{x}, 1<x\leq 2;\end{cases}$ բ) $f(x)=\begin{cases} arctgx, 0\leq x \leq 1,\\ \frac{\pi-1}{2}x-\frac{\pi-2}{4}x^2, \ 1<x\leq 2:\end{cases}$

1440. Համոզվել, որ հետևյալ ֆունկցիաները $[-1;1]$ հատվածի ոչ բոլոր կետերում են դիֆերենցելի, սակայն ցանկացած $[a;b]\subset[-1;1]$ հատվածի վրա դրանցից յուրաքանչյուրի համար ճշմարիտ է վերջավոր աճերի բանաձևը.

ա) $f(x)=\sqrt[3]{x}$; բ) $f(x)=\sqrt{|x|}\,\mathrm{sgn}\, x$:

1441. Դիցուք f և g ֆունկցիաները $[a;b]$ հատվածում անընդհատ են, իսկ $(a;b)$-ում՝ դիֆերենցելի: Ապացուցել, որ եթե $g(a)\neq g(b)$, ապա Կոշու թեորեմում $g'(x)\neq 0$ պայմանը կարելի է փոխարինել $f'(x)\neq 0$ պայմանով:

1442. Դիցուք f -ը դիֆերենցելի է $(a;b)$ միջակայքում: Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ ցանկացած $\xi\in(a;b)$ կետի համար գոյություն ունի կետերի $x_1,x_2\in(a;b)$ զույգ, այնպիսին, որ

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=f'(\xi) \ \ (x_1<\xi<x_2):$$

Բերել համապատասխան օրինակ:

1443. f ֆունկցիան անվանենք $[a;b]$ հատվածում հավասարաչափ դիֆերենցելի, եթե այն $[a;b]$-ում դիֆերենցելի է և, բացի այդ,

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x_1,x_2\in[a;b]\left(0<|x_1-x_2|<\delta\Rightarrow\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}-f'(x_1)\right|<\varepsilon\right):$$

Ապացուցել, որ f -ն $[a;b]$-ում հավասարաչափ դիֆերենցելի է այն և միայն այն դեպքում, երբ $f\in C^1[a;b]$:

1444. Ապացուցել, որ եթե n անգամ դիֆերենցելի f ֆունկցիայի արժեքները $n+1$ կետում համընկնում են $(n-1)$-րդ աստիճանի որևէ հանրահաշվական բազմանդամի արժեքներին, ապա գոյություն ունի միջանկյալ կետ, որում $f^{(n)}(x)$-ը զրո է:

1445. Հայտնի է, որ $P(x)$ հանրահաշվական բազմանդամի բոլոր արմատներն իրական են: Ցույց տալ, որ եթե a -ն $P'(x)$ բազմանդամի համար բազմապատիկ արմատ է, ապա այն արմատ է նաև $P(x)$-ի համար:

1446. Դիցուք f -ը դիֆերենցելի է $[x_1;x_2]$ հատվածում, ընդ որում՝ $x_1\cdot x_2>0$: Ապացուցել, որ գոյություն ունի $\xi\in(x_1;x_2)$ կետ, որի համար

$$\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi):$$

1447. Դիցուք f և g ֆունկցիաները դիֆերենցելի են $[x_1;x_2]$ հատվածում, ընդ որում՝ $g(x)g'(x)\neq 0$: Ապացուցել, որ գոյություն ունի $\xi\in(x_1;x_2)$ կետ, որի համար՝

$$\frac{1}{g(x_1)-g(x_2)}\begin{vmatrix}g(x_1) & g(x_2)\\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}=\frac{1}{g'(\xi)}\begin{vmatrix}f(\xi) & g(\xi)\\ f'(\xi) & g'(\xi)\end{vmatrix}:$$

1448. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $(a;b)$ վերջավոր միջակայքում և սահմանափակ չէ, ապա $f'(x)$-ը նույնպես սահմանափակ չէ: Օրինակով համոզվել, որ հակադարձ պնդումը ճշմարիտ չէ:

1449. Ապացուցել, որ եթե f -ն $(a;b)$ վերջավոր կամ անվերջ միջակայքում ունի սահմանափակ ածանցյալ $(|f'(x)|\leq K)$, ապա՝

ա) f -ը բավարարում է Լիպշիցի պայմանին.

$\forall x,y\in(a;b)\ (|f(x)-f(y)|\leq K|x-y|);$

բ) f -ն $(a;b)$-ի վրա հավասարաչափ անընդհատ է:

1450. Ապացուցել, որ եթե f -ն $(a;+\infty)$-ում դիֆերենցելի է և $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$, ապա՝ ա) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=0$; բ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$:

1451. Ապացուցել, որ եթե f -ը դիֆերենցելի է $(a;+\infty)$ միջակայքում և $f(x)=o(x)$, երբ $x\to+\infty$, ապա $\underline{\lim}_{x\to+\infty}|f'(x)|=0$: Բերել մոնոտոն և դիֆերենցելի ֆունկցիայի օրինակ, որի համար $f(x)=o(1)$, երբ $x\to+\infty$, բայց $\overline{\lim}_{x\to+\infty}|f'(x)|=+\infty$:

1452. Դիցուք f -ն $[a;b]$ հատվածում անընդհատ է, իսկ $(a;b)$ միջակայքում՝ դիֆերենցելի: Ապացուցել, որ եթե գոյություն ունի $\lim\limits_{x\to a+0} f'(x)=f'(a+0)$ վերջավոր կամ անվերջ սահմանը, ապա գոյություն կունենա նաև $f'_+(a)$ համապատասխանաբար վերջավոր կամ անվերջ միակողմանի ածանցյալը, ընդ որում՝ $f'_+(a)=f'(a+0)$:

1453. Ստուգել, որ

$$f(x)=arctg\frac{1+x}{1-x}\ \ (x\neq 1),\ f(1)=0$$

ֆունկցիայի համար գոյություն ունի $\lim\limits_{x\to 1} f'(x)$ վերջավոր սահմանը, սակայն f -ը $x=1$ կետում չունի վերջավոր միակողմանի ածանցյալներ: Պարզել նախորդ խնդրի հետ թվացյալ հակասության պատճառը:

1454. Ապացուցել, որ $y(x)\ (x\in R)$ ֆունկցիան բավարարում է $y'=\lambda y$ $(\lambda=const)$ դիֆերենցիալ հավասարմանը, այն և միայն այն դեպքում, երբ $y=C\cdot e^{\lambda x}$, որտեղ C -ն կամայական հաստատուն է:

1455. Ապացուցել, որ $y(x)$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ ֆունկցիան բավարարում է $y'tgx-y=a\ (a=const)$ դիֆերենցիալ հավասարմանը, այն և միայն այն դեպքում, երբ $y=C\sin x-a$, որտեղ C -ն կամայական հաստատուն է:

1456. Դիցուք $f(x)=\cos\chi(x)$, որտեղ $\chi(x)$-ը Դիրիխլեի ֆունկցիան է: Ստուգել, որ f -ը $x_0=0$ կետի շրջակայքում նույնիսկ մեկ անգամ դիֆերենցելի չէ և, այնուամենայնիվ, պարզել՝ ճշմարի՞տ է արդյոք ֆունկցիայի հետևյալ վերլուծությունը.

$$f(x)=1-\frac{\chi^2(x)}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{\chi^{2n}(x)}{(2n)!}+r_{2n}(x),$$

որտեղ $|r_{2n}(x)|\le\frac{1}{(2n+2)!}$:

1457. Ստուգել, որ

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, \text{ երբ } x\neq 0,\\ 0, \text{ երբ } x=0\end{cases}$$

ֆունկցիան $x_0=0$ կետում անվերջ դիֆերենցելի է, ընդ որում՝ $f^{(n)}(0)=0$ $(n\in N)$:

ա) Ճշմարի՞տ է արդյոք հետևյալ վերլուծությունը.

$$e^{-\frac{1}{x^2}}=1-\frac{1}{x^2}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!x^{2n}}+o\left(\frac{1}{x^{2n}}\right)\quad(x\to\infty):$$

բ) Գտնել ֆունկցիայի $x_0=0$ կետի շրջակայքում Թեյլորի վերլուծության n-րդ մնացորդային անդամը ($r_n(x_0,x)$-ը):

1458. Ստուգել, որ $y=e^{|x|}$ ֆունկցիան $x_0=0$ կետում դիֆերենցելի չէ և պարզել՝ ճշմարի՞տ է արդյոք հետևյալ վերլուծությունը.

$$e^{|x|}=1+|x|+\cdots+\frac{|x|^n}{n!}+o(x^n):$$

Գտնել անվերջ փոքր ֆունկցիայի գլխավոր մասը՝ $C\cdot x^n$ $(x\to 0)$ տեսքով (1459-1462).

1459. $f(x)=tg\sin x-\sin tgx$:

1460. $f(x)=(1+x)^x-1$:

1461. $f(x)=1-\frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}}$:

1462. $f(x)=\ln\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$:

1463. Ընտրել a և b գործակիցներն այնպես, որ ճշմարիտ լինի հետևյալ ասիմպտոտիկ բանաձևը.

$$ctgx=\frac{1+ax^2}{x+bx^3}+O(x^5)\quad(x\to 0):$$

1464. Ընտրել a,b,c,d թվերն այնպես, որ ճշմարիտ լինի հետևյալ ասիմպտոտիկ բանաձևը.

$$e^x=\frac{1+ax+bx^2}{1+cx+dx^2}+O(x^5)\quad(x\to 0):$$

1465. Ընտրել a,b,c թվերն այնպես, որ հետևյալ ասիմպտոտիկ բանաձևերը լինեն ճշմարիտ n-ի հնարավոր ամենամեծ արժեքի համար $(x \to 0)$.

ա) $\ln(1+x) = \dfrac{ax^2+x}{bx+1} + O(x^n)$;

բ) $arctgx = \dfrac{ax^3+x}{bx^2+1} + O(x^n)$;

գ) $\arcsin x = \dfrac{ax^3+x}{bx^2+1} + O(x^n)$;

դ) $(1+x)^x = \dfrac{ax^2+bx+1}{cx+1} + O(x^n)$;

ե) $\sqrt[k]{1+x} = \dfrac{ax+1}{bx+1} + O(x^n)$:

1466. Հետազոտել $f(x)$ ֆունկցիայի դիֆերենցելիությունն $x_0 = 0$ կետում.

ա) $f(x) = \sqrt[3]{e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}}$; բ) $f(x) = \sqrt[4]{\cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}}$;

գ) $f(x) = (x - \ln(1+x)) \cdot \operatorname{sgn} x$; դ) $f(x) = (shx - tgx)\chi(x)$,

որտեղ $\chi(x)$-ը Դիրիխլեի ֆունկցիան է:

1467. Գտնել $f(h) = \ln(x+h)$ $(x>0)$ ֆունկցիայի վերլուծությունն ըստ h-ի աստիճանների:

1468. Դիցուք f-ն x_0 կետում $n+1$ անգամ դիֆերենցելի է, ընդ որում՝ $\lim\limits_{x \to x_0} f^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$:

Ապացուցել, որ Թեյլորի վերլուծության մեջ՝

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0+\theta h)}{n!}h^n,$$

$$\lim_{h \to 0} \theta = \frac{1}{n+1}:$$

1469. Ապացուցել, որ ցանկացած

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad (n \geq 1, a_n \neq 0),$$

հանրահաշվական բազմանդամի համար գոյություն ունի այնպիսի x_0, որ $(-\infty; -x_0)$ և $(x_0; +\infty)$ միջակայքերից յուրաքանչյուրի վրա $P(x)$-ը խիստ մոնոտոն է:

1470. Ապացուցել, որ ցանկացած ռացիոնալ ֆունկցիա՝

$$Q(x)=\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}\ \ (m+n>0, a_nb_m\neq 0),$$

$(-\infty;-x_0)$ և $(x_0;+\infty)$ միջակայքերից յուրաքանչյուրի վրա, որտեղ x_0-ն բավականաչափ մեծ դրական թիվ է, խիստ մոնոտոն է:

1471. Ապացուցել, որ եթե f և φ ֆունկցիաները $[x_0;+\infty)$ միջակայքում դիֆերենցելի են, φ-ն աճող է և $|f'(x)|\leq\varphi'(x)$ $(x\geq x_0)$, ապա

$$|f(x)-f(x_0)|\leq\varphi(x)-\varphi(x_0)\ \ (x\geq x_0):$$

1472. $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է x_0 *կետում աճող*, եթե x_0-ի որևէ շրջակայքում արգումենտի $\Delta x=x-x_0$ աճը և ֆունկցիայի $\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)$ աճը միևնույն նշանի են:

Ապացուցել, որ եթե f-ն $[a;b]$ միջակայքի յուրաքանչյուր կետում աճող է, ապա այն այդ միջակայքում աճող է:

1473. Ստուգել, որ $f(x)=x+x^2\sin\frac{2}{x}$ $(x\neq 0)$, $f(0)=0$ ֆունկցիան $x_0=0$ կետում աճող է (տես նախորդ խնդիրը), սակայն այդ կետի ոչ մի շրջակայքում աճող չէ:

1474. Դիցուք φ և ψ ֆունկցիաները $[x_0;+\infty)$ միջակայքում n անգամ դիֆերենցելի են, ընդ որում՝ $\varphi^{(k)}(x_0)=\psi^{(k)}(x_0)$ $(k=0,1,\ldots,n-1)$: Ապացուցել, որ եթե $\varphi^{(n)}(x)>\psi^{(n)}(x)$ $(x>x_0)$, ապա $\varphi(x)>\psi(x)$ $(x>x_0)$:

1475. Օգտվելով նախորդ խնդրում ձևակերպված պնդումից՝ ապացուցել հետևյալ անհավասարությունները.

ա) $x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$ $(x>0)$;

բ) $\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}$ $(x>0)$; գ) $tgx>x+\frac{x^3}{3}$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$:

1476. Դիցուք $P(x)$-ն n-րդ աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամ է և $a\in R$: Ապացուցել, որ եթե $P(a)\geq 0$, $P'(a)\geq 0$, ... , $P^{(n-1)}(a)\geq 0$ և $P^{(n)}(a)>0$, ապա $P(x)$ բազմանդամի իրական արմատները չեն գերազանցում a-ն:

Ապացուցել անհավասարությունը (1477-1485).

1477. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ $(x>0)$:

1478. $1+2\ln x \le x^2 \quad (x>0)$:

1479. $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x \quad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$:

1480. $\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{x-a} \quad (x>a>0)$:

1481. $\cos x < \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 \quad \left(0<|x|<\frac{\pi}{2}\right)$:

1482. $\sin x + tgx > 2x \quad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$:

1483. $\sin x \le \frac{4x}{\pi^2}(\pi - x) \quad (0\le x\le \pi)$:

1484. $\cos x \le 1-\frac{4x^2}{\pi^2} \quad \left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$:

1485. ա) $tgx \ge \frac{2x}{\pi-2x} \quad \left(0\le x\le\frac{\pi}{4}\right)$; բ) $tgx \le \frac{2x}{\pi-2x} \quad \left(\frac{\pi}{4}\le x<\frac{\pi}{2}\right)$:

Գտնել պարամետրական հավասարումներով տրված $y=y(x)$ ֆունկցիայի աճման և նվազման միջակայքերը (1486-1491).

Այս վարժությունները կատարելիս անհրաժեշտ է նախ գտնել t պարամետրի փոփոխման այն միջակայքերը, որոնցում y-ը որոշվում է որպես x-ից կախված միարժեք ֆունկցիա և, այնուհետև, հետազոտել ստացված ֆունկցիայի մոնոտոնության առումով:

1486. $x=2t-t^2$, $y=3t-t^3$:

1487. $x=\frac{(t+1)^2}{4}$, $y=\frac{(t-1)^2}{4}$:

1488. $x=t+e^{-t}$, $y=2t+e^{-2t}$:

1489. $x=t\ln t$, $y=\frac{\ln t}{t}$:

1490. $x=\cos^4 t$, $y=\sin^4 t$:

1491. $x=sht-t$, $y=cht-1$:

1492. Կառուցել R-ի վրա դիֆերենցելի և խիստ մոնոտոն ֆունկցիա, որի ածանցյալն անվերջ թվով կետերում զրո է:

1493. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $(a;b)$ վերջավոր կամ անվերջ միջակայքում, $f'(x)\ge 0$ և $f'(x)$-ի զրոները միմյանցից մեկուսացված կետեր են, ապա $f(x)$-ն աճող է:

1494. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $(a;b)$ միջակայքում և $f'(x)$ ֆունկցիան սահմանափակ է, ապա f-ը կարելի է ներկայացնել որպես երկու աճող ֆունկցիաների տարբերություն:

1495. Ցույց տալ, որ $y=\frac{x+1}{x^2+1}$ ֆունկցիան ունի երեք շրջման կետ: Ստուգել, որ գրաֆիկի համապատասխան կետերը գտնվում են մի ուղղի վրա:

1496. Ընտրել h պարամետրի արժեքն այնպես, որ $y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$ $(h>0)$ կորն $x=\pm\sigma$ կետերում ունենա շրջում:

1497. Ապացուցել հետևյալ անհավասարությունները.

ա) $x^{\alpha}-1\le\alpha(x-1)$ $(x>0, 0<\alpha<1)$;

բ) $x^{\alpha}-1\ge\alpha(x-1)$ $(x>0, \alpha<0$ կամ $\alpha>1)$:

1498. Դիցուք՝ $a>0$, $b>0$, իսկ p և q թվերն այնպիսին են, որ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$: Ապացուցել Յունգի անհավասարությունները.

ա) $a^{\frac{1}{p}}\cdot b^{\frac{1}{q}}\le\frac{a}{p}+\frac{b}{q}$ $(p>1)$; բ) $a^{\frac{1}{p}}\cdot b^{\frac{1}{q}}\ge\frac{a}{p}+\frac{b}{q}$ $(p<1)$:

Ցուցում: Նախորդ խնդրում տեղադրել $x=\frac{a}{b}$ և $\alpha=\frac{1}{p}$:

1499. Դիցուք՝ $x_i, y_i\in R_+$ $(i=1,2,\ldots,n)$ և $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$: Ապացուցել Հյոլդերի անհավասարությունները.

ա) $\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i\le\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^p\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^q\right\}^{\frac{1}{q}}$ $(p>1)$;

բ) $\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i\ge\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^p\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^q\right\}^{\frac{1}{q}}$ $(p<1, p\ne 0)$

(երբ $p<0$՝ ընդունել $x_i>0$, $i=1,2,\ldots,n$):

Ցույց տալ, որ հավասարությունը տեղի ունի միայն այն դեպքում, երբ $x_i=\lambda y_i$, $i=1,2,\ldots,n$ $(\lambda=const)$:

Ցուցում: Յունգի անհավասարության մեջ տեղադրել $a=\frac{x_i^p}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^p}$, $b=\frac{y_i^q}{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^q}$:

1500. Դիցուք՝ $x_i, y_i\in R_+$ $(i=1,2,\ldots,n)$: Ապացուցել Մինկովսկու անհավասարությունները.

ա) $\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right\}^{\frac{1}{p}}\le\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^p\right\}^{\frac{1}{p}}+\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^p\right\}^{\frac{1}{p}}$ $(p>1)$;

բ) $\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right\}^{\frac{1}{p}} \geq \left\{\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right\}^{\frac{1}{p}} \quad (p<1,\ p\neq 0)$

($p<0$ դեպքում ընդունել $x_i, y_i > 0$, $i=1,2,\dots,n$):

Ստուգել, որ հավասարությունը տեղի ունի միայն այն դեպքում, երբ $x_i=\lambda y_i$, $i=1,2,\dots,n$ $(\lambda = const)$:

Ցուցում: $\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p = \sum_{i=1}^{n}x_i(x_i+y_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n}y_i(x_i+y_i)^{p-1}$ նույնության աջ կողմի նկատմամբ կիրառել Հյոլդերի անհավասարությունը:

1501. Դիցուք f -ն $(a;b)$ միջակայքում ուռուցիկ ֆունկցիա է: Ապացուցել, որ այդ միջակայքի ցանկացած $x_1,x_2,\dots,x_n$ կետերի և ցանկացած $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ $(\alpha_i>0, i=1,2,\dots,n)$ թվերի համար ճշմարիտ է Յենսենի անհավասարությունը.

$$f\left(\frac{\alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n}{\alpha_1+\dots+\alpha_n}\right) \leq \frac{\alpha_1f(x_1)+\dots+\alpha_nf(x_n)}{\alpha_1+\dots+\alpha_n}:$$

1502. Օգտագործելով լոգարիթմական ֆունկցիայի ուռուցիկությունը՝ ապացուցել հետևյալ անհավասարությունը. ցանկացած $x_i>0$, $p_i\geq 0$, $i=1,\dots,n$, $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$, թվերի համար $\prod_{i=1}^{n}x_i^{p_i} \leq \sum_{i=1}^{n}p_ix_i$: Այստեղից ստանալ Յունգի անհավասարության նոր ապացույց:

1503. Համոզվել, որ $\ln(1+e^x)$ ֆունկցիան ուռուցիկ է և դա օգտագործելով՝ ապացուցել հետևյալ անհավասարությունը. ցանկացած a_i, b_i, α_i, $i=1,2,\dots,n$, դրական թվերի համար $(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n=1)$

$$a_1^{\alpha_1}\cdots a_n^{\alpha_n}+b_1^{\alpha_1}\cdots b_n^{\alpha_n} \leq (a_1+b_1)^{\alpha_1}\cdots(a_n+b_n)^{\alpha_n}:$$

1504. Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է x_0 կետի շրջակայքում և x_0-ն նրա համար մաքսիմումի կետ է: Կարելի՞ է արդյոք պնդել, որ գոյություն ունի U_{x_0} շրջակայք, այնպիսին, որ $U_{x_0}^-$ -ի վրա f -ն աճող է, իսկ $U_{x_0}^+$ -ի վրա՝ նվազող: Բերել համապատասխան օրինակ:

1505. Ստուգել, որ $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$ $(x\neq 0)$, $f(0)=0$ և $g(x)=xf(x)$ ֆունկցիաները $x=0$ կետում բավարարում են միևնույն՝ $f^{(n)}(0)=g^{(n)}(0)=0$ $(n\in N)$, պայմանին, բայց f -ն այդ կետում ունի մաքսիմում, իսկ g -ի համար այն էքստրեմումի կետ չէ:

1506. Ապացուցել անհավասարությունը.

ա) $\left|3x-x^3\right|\le 2$, երբ $|x|\le 2$;

բ) $\dfrac{1}{2^{p-1}}\le x^p+(1-x)^p\le 1$, երբ $0\le x\le 1$, $p>1$;

գ) $x^\alpha(c-x)^\beta\le \dfrac{\alpha^\alpha\beta^\beta}{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}c^{\alpha+\beta}$, երբ $\alpha>0$, $\beta>0$ և $0\le x\le c$:

1507. Ապացուցել, որ երկու անգամ դիֆերենցելի ցանկացած ֆունկցիայի էքստրեմումի երկու կետերի միջև գոյություն ունի կետ, որտեղ ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալը զրո է:

1508. Կառուցել ֆունկցիա, որի երկու շրջման կետերի միջև գոյություն չունենա էքստրեմումի կետ:

1509. Համոզվել, որ ֆունկցիայի շրջման կետը չի կարող միաժամանակ լինել խիստ էքստրեմումի կետ:

Դիցուք f և g ֆունկցիաները որոշված են $[a;b]$ հատվածի վրա:

$$\Delta=\sup_{a\le x\le b}\left|f(x)-g(x)\right|$$

արտահայտությունը կոչվում է $[a;b]$ հատվածի վրա f և g ֆունկցիաների *շեղում*:

1510. Գտնել $f(x)=x^2$ և $g(x)=x^3$ ֆունկցիաների շեղումը $[0;1]$ հատվածի վրա:

1511. Գտնել $[-2;1]$ հատվածի վրա $P(x)=x(x-1)^2(x+2)$ բազմանդամի շեղումը զրոյից:

1512. q պարամետրի ի՞նչ արժեքի դեպքում $[-1;1]$ հատվածի վրա $P(x)=x^2+q$ ֆունկցիայի շեղումը զրոյից կլինի նվազագույնը:

1513. $f(x)=ax+b$ գծային ֆունկցիան ընտրել այնպես, որ $[-1;2]$ հատվածի վրա նրա շեղումը $g(x)=|x|$ ֆունկցիայից լինի նվազագույնը:

1514. $f(x)=ax+b$ գծային ֆունկցիան ընտրել այնպես, որ $[0;1]$ հատվածի վրա նրա շեղումը $g(x)=x^2$ ֆունկցիայից լինի նվազագույնը:

***

1515. Ապացուցել, որ եթե $y=y(x)$ ֆունկցիան տրված է $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ հավասարումներով և նրա գրաֆիկն ունի կոորդինատների առանցքներին ոչ զուգահեռ ասիմպտոտ, ապա գոյություն ունի t_0 $(-\infty\le t_0\le+\infty)$, այնպիսին, որ միաժամանակ

$$\lim_{t\to t_0}\varphi(t)=\infty \quad \text{և} \quad \lim_{t\to t_0}\psi(t)=\infty:$$

Ընդսմին, եթե ասիմպտոտի հավասարումն է՝ $y = ax + b$, ապա

$$a = \lim_{t \to t_0} \frac{\psi(t)}{\varphi(t)}, \quad b = \lim_{t \to t_0} [\psi(t) - a\varphi(t)]:$$

Ինչպե՞ս գտնել առանցքներին զուգահեռ ասիմպտոտները:

1516. Գտնել հետևյալ կորերի ասիմպտոտները.

ա) $x = \dfrac{1}{t}$, $y = \dfrac{t}{t+1}$; բ) $x = \dfrac{2t}{1-t^2}$, $y = \dfrac{t^2}{1-t^2}$:

Կառուցել հետևյալ պարամետրական հավասարումներով որոշվող կորերը (1517-1520).

1517. $x = t^3 + 3t + 1$, $y = t^3 - 3t + 1$:

1518. $x = \dfrac{3t}{1+t^3}$, $y = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$:

1519. $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$:

1520. $x = te^t$, $y = te^{-t}$:

Կառուցել հետևյալ հավասարումներով որոշվող կորերը (1521-1524).

Ցուցում: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ բանաձևերով անցնել բևեռային կոորդինատների, կամ դրանց միջոցով՝ պարամետրական հավասարումների:

1521. $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$: 1522. $y^2(a-x) = x^2(a+x)$ $(a > 0)$:

1523. $y^2(2a-x) = x^3$: 1524. $x^2y^2 = a(x^3 + y^3)$ $(a > 0)$:

***

1525. Ցույց տալ, որ $xe^x = 2$ հավասարումն ունի միայն մեկ իրական արմատ և այն էլ $(0;1)$ միջակայքում:

1526. Դիցուք f-ն անընդհատ է $[x_0;+\infty)$ միջակայքում, $f'(x) > k > 0$, երբ $x > x_0$ $(k = const)$: Ապացուցել, որ եթե $f(x_0) < 0$, ապա $f(x) = 0$ հավասարումն $\left(x_0; x_0 - \dfrac{f(x_0)}{k}\right)$ միջակայքում ունի ճիշտ մեկ իրական արմատ:

1527. Դիցուք $[x_0;+\infty)$ միջակայքում երկու անգամ դիֆերենցելի $f(x)$ ֆունկցիան բավարարում է $f(x_0) > 0$, $f'(x_0) < 0$ և $f''(x) \le 0$ $(x > x_0)$ պայմաններին: Ապացուցել, որ $f(x) = 0$ հավասարումն $[x_0;+\infty)$ միջակայքում ունի ճիշտ մեկ իրական արմատ:

Գտնել հավասարման արմատների թիվը և սահմանազատել դրանք շրջակայքերով (1528-1533).

1528. $x^3 - 6x^2 + 9x - 10 = 0$: 1529. $x^5 - 5x = a$:

1530. $\ln x = kx$:   1531. $e^x = ax^2$:

1532. $\sin^3 x \cdot \cos x = a \quad (0 \le x \le \pi)$:   1533. $chx = kx$:

1534. Պարզել, թե p և q պարամետրերի ի՞նչ արժեքների համար $x^3 + px + q = 0$ հավասարումը կունենա

ա) ճիշտ մեկ իրական արմատ;
բ) ճիշտ երեք իրական արմատ:

Գ

1535. Դիցուք f-ը դիֆերենցելի է $[a;+\infty)$ միջակայքում և $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$: Ապացուցել, որ $f'(x) = 0$ հավասարման արմատների քանակը ավելի քիչ չէ, քան $f(x) = 0$ հավասարմանը:

1536. Ապացուցել, որ եթե $(0;+\infty)$-ում դիֆերենցելի $f(x)$ ֆունկցիայի զրոների քանակն n է, ապա ցանկացած $\alpha \in R$ թվի համար $g(x) = f'(x) + \alpha f(x)$ ֆունկցիայի զրոների քանակը $(n-1)$-ից պակաս չէ: Ավելին, եթե $\lim_{x\to+\infty} e^{\alpha x} f(x) = 0$, ապա $g(x)$-ը $(0;+\infty)$-ում ունի առնվազն n զրո:

1537. Դիցուք $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$ հավասարման բոլոր արմատներն իրական են: Ապացուցել, որ եթե $P(x)$ հանրահաշվական բազմանդամի բոլոր արմատներն իրական են, ապա $a_0 P(x) + a_1 P'(x) + \cdots + a_n P^{(n)}(x) = 0$ հավասարման բոլոր արմատները նույնպես իրական են:

1538. Դիցուք f-ն n անգամ դիֆերենցելի է $(a;b)$ միջակայքում $(0 < a < b)$ և այդ միջակայքի $n+1$ կետերում դառնում է զրո: Ապացուցել, որ եթե $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ բազմանդամի բոլոր արմատներն իրական են, ապա $(a;b)$ միջակայքում գոյություն ունի ξ կետ, այնպիսին, որ

$$a_0 f(\xi) + a_1 f'(\xi) + \cdots + a_n f^{(n)}(\xi) = 0:$$

1539. Ապացուցել, որ եթե $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$ հավասարման բոլոր արմատներն իրական են, ապա իրական են նաև

$$a_0 + \frac{a_1}{1!} x + \cdots + \frac{a_n}{n!} x^n = 0$$

հավասարման բոլոր արմատները:

1540. Տրված է $[0;+\infty)$ միջակայքում անընդհատ և $(0;+\infty)$-ում դիֆերենցելի f ֆունկցիա: Դիցուք $\xi=\xi(x)$ ֆունկցիան ընտրված է այնպես, որ ցանկացած $x>0$ արժեքի համար ճշմարիտ է վերջավոր աճերի բանաձևը.

$$f(x)-f(0)=xf'(\xi(x)),\quad 0<\xi(x)<x:$$

Ապացուցել, որ եթե $f(x)=x\sin(\ln x)$ $(x>0)$, $f(0)=0$, ապա ցանկացած $(0;\varepsilon)$ միջակայքում $\xi(x)$ ֆունկցիան խզվող է:

1541. Ապացուցել, որ եթե f-ը $(0;+\infty)$-ում անընդհատ դիֆերենցելի է, իսկ $f'(x)$-ը՝ խիստ մոնոտոն (աճող կամ նվազող), ապա նախորդ խնդրում սահմանված $\xi(x)$ ֆունկցիան միակն է և անընդհատ է:

1542. Ցույց տալ, որ ցանկացած $n\in N$ թվի համար $(-1;+\infty)$ միջակայքում

$$(1+x)^{\alpha}-\left(1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n\right)\quad (\alpha\notin N\cup\{0\})$$

տարբերության միակ 0-կետը $x=0$-ն է:

1543. Ստուգել, որ

$$e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)=0$$

հավասարման միակ արմատը $x=0$-ն է:

1544. Ապացուցել, որ

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}=0$$

հավասարումը կամ իրական արմատ չունի (n-ը զույգ է), կամ ունի միայն մեկ իրական արմատ (n-ը կենտ է): Համոզվել, որ երկրորդ դեպքում արմատը բազմապատիկ չէ:

1545. Դիցուք $P(x)$-ն $(n-1)$-րդ աստիճանի դրական գործակիցներով բազմանդամ է: Ապացուցել, որ $x^n=P(x)$ հավասարումն ունի միայն մեկ դրական արմատ:

1546. Տրված է՝ $c_0+\frac{c_1}{2}+\cdots+\frac{c_n}{n+1}=0$:Ապացուցել,որ $c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n=0$ հավասարումն ունի առնվազն մեկ իրական արմատ:

1547. Ապացուցել, որ

$$P(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(2x-x^2)^k-2x^k}{k}$$

բազմանդամի համար $x=0$-ն $(n+1)$-պատիկ արմատ է:

1548. Դիցուք՝ $f \in C^{\infty}(R)$ և $M = \{0;1;...;n\}$: Ապացուցել, որ եթե

$$\forall x \in R \;\; \exists n_x \in M \;\; \left(f^{(n_x)}(x) = 0\right),$$

ապա f-ը ոչ ավելի, քան $(n-1)$-րդ աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամ է:

1549. Դիցուք f-ը դիֆերենցելի է $(0;+\infty)$ միջակայքում և

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+f'(x)\right] = A:$$

Ապացուցել, որ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$: Կմնա՞ արդյոք պնդումը ճշմարիտ, եթե խնդրի պայմանում $f(x)+f'(x)$-ը փոխարինենք $f(x)-f'(x)$-ով:

1550. Դիցուք f-ը $(0;+\infty)$ միջակայքում երկու անգամ դիֆերենցելի է և

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+f'(x)+f''(x)\right] = A:$$

Ապացուցել, որ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$:

1551. Տրված է՝ $f:[0;1]\to[0;1]$ ֆունկցիան անընդհատ է, $(0;1)$ միջակայքում՝ դիֆերենցելի, $f(0)=0$, $f(1)=1$: Ապացուցել, որ գոյություն ունի միմյանցից տարբեր կետերի $a,b\in(0;1)$ զույգ, այնպիսին, որ $f'(a)\cdot f'(b)=1$:

1552. Ապացուցել Դարբուի թեորեմը. եթե f ֆունկցիան դիֆերենցելի է $[a;b]$ հատվածում և $f'(a)\cdot f'(b)<0$, ապա գոյություն ունի $\xi\in(a;b)$ կետ, որի համար $f'(\xi)=0$:

1553. Տրված է $[0;1]$ հատվածում դիֆերենցելի f ֆունկցիա, որը բավարարում է $f'(0)=1$ և $f'(1)=0$ պայմաններին: Ապացուցել, որ գոյություն ունի $\xi\in(0;1)$ կետ, որի համար $f'(\xi)=\xi$:

1554. Դիցուք f-ը դիֆերենցելի է $(a;b)$ միջակայքում: Ապացուցել, որ $f'(x)$ ֆունկցիայի խզումները կարող են լինել միմիայն երկրորդ սեռի:

Նկատենք, որ $y=|x|$ ֆունկցիայի ածանցյալն x-ը զրոյի ձգտելիս ունի վերջավոր միակողմանի սահմաններ: Չի՞ հակասում արդյոք այս փաստը խնդրում ձևակերպված պնդմանը:

1555. Դիցուք f-ը դիֆերենցելի է $(a;b)$ միջակայքում և ամենուրեք, բացի գուցե վերջավոր թվով կետերից, $f'(x)=0$: Ապացուցել, որ $f=const$:

1556. Տրված է $f:R\to R$ դիֆերենցելի ֆունկցիան: Ապացուցել, որ եթե ցանկացած $a\in R$ թվի համար $f'(x)$ ֆունկցիայի a-կետերի (տես խնդիր 803) բազմությունը փակ է, ապա $f'(x)$-ը անընդհատ է:

1557. Դիցուք f-ը դիֆերենցելի է $x=0$ կետի շրջակայքում և $f(0)=0$: Համաձայն Լագրանժի թեորեմի՝ բավականաչափ փոքր $h>0$ թվի համար

$$\frac{f(-h)}{-h}=f'(\zeta),\quad \frac{f(h)}{h}=f'(\xi),$$

որտեղ $-h<\zeta<0<\xi<h$: Ապացուցել, որ եթե $x=0$ կետում գոյություն ունի f-ի երկրորդ կարգի ածանցյալը և $f''(0)\neq 0$, ապա $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\xi-\zeta}{h}=1$:

1558. Դիցուք f-ն $(a;b)$ միջակայքում երկու անգամ դիֆերենցելի է և $\xi\in(a;b)$: Ապացուցել, որ եթե $f''(\xi)\neq 0$, ապա $(a;b)$-ում գոյություն ունեն x_1,x_2 կետեր $(x_1<\xi<x_2)$, որոնց համար

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=f'(\xi):$$

1559. Դիցուք f ֆունկցիան անընդհատ է $[a;b]$ հատվածում, իսկ $(a;b)$-ում՝ դիֆերենցելի: Ապացուցել, որ եթե f-ը գծային չէ, ապա գոյություն ունի $\xi\in(a;b)$ կետ, որի համար

$$|f'(\xi)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|:$$

1560. Ապացուցել, որ եթե f-ն $[a;b]$-ում երկու անգամ դիֆերենցելի է և $f'(a)=f'(b)=0$, ապա գոյություն ունի $\xi\in(a;b)$ կետ, այնպիսին, որ

$$|f''(\xi)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|:$$

1561. Դիցուք f-ն $[a;b]$ հատվածում n անգամ դիֆերենցելի է և

$$f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0,$$
$$f'(b)=f''(b)=\cdots=f^{(n-1)}(b)=0:$$

Ապացուցել, որ գոյություն ունի $\xi\in(a;b)$ կետ, որի համար

$$\left|f^{(n)}(\xi)\right|\geq\frac{2^{n-1}\cdot n!}{(b-a)^n}|f(b)-f(a)|:$$

1562. Դիցուք $f\in C^2[0;1]$ և $f(0)=f(1)=0$: Ապացուցել, որ

$$\forall x\in(0;1)\ \left(|f''(x)|\leq A\right)\Rightarrow\forall x\in[0;1]\left(|f'(x)|\leq\frac{A}{2}\right):$$

1563. Տրված է $[-1;1]$ հատվածում անընդհատ և $(-1;1)$-ում երկու անգամ դիֆերենցելի f ֆունկցիա: Հայտնի է նաև, որ $f(-1)=f(1)=0$: Ապացուցել, որ

$$\forall x\in[-1;1]\,\left(|f''(x)|\le A\right)\Rightarrow \forall x\in[-1;1]\left(|f(x)|\le \frac{A}{2}\left(1-x^2\right)\right):$$

1564. Դիցուք f-ն R-ի վրա երկու անգամ դիֆերենցելի է և

$$M_k=\sup_{x\in R}\left|f^{(k)}(x)\right|<+\infty \quad (k=0,1,2):$$

Ապացուցել անհավասարությունը. $M_1^2\le 2M_0M_2$:

1565. Դիցուք f-ը երկու անգամ դիֆերենցելի է $[-a;a]$ հատվածում և

$$M_k=\sup_{-a\le x\le a}\left|f^{(k)}(x)\right|<+\infty \quad (k=0,1,2):$$

Ապացուցել, որ

ա) $|f'(x)|\le \dfrac{M_0}{a}+\dfrac{x^2+a^2}{2a}M_2$;

բ) եթե $a\ge\sqrt{\dfrac{M_0}{M_2}}$, ապա $M_1^2\le 4M_0M_2$:

Օրինակով համոզվել, որ այս վերջին անհավասարության մեջ գործակիցը չի կարելի փոխարինել ավելի փոքրով:

1566. Դիցուք f ֆունկցիան p անգամ դիֆերենցելի է և

$$M_k=\sup_{x\in R}\left|f^{(k)}(x)\right| \quad (k=0,1,\ldots,p):$$

Ապացուցել, որ եթե M_0-ն և M_p-ն վերջավոր են, ապա վերջավոր են նաև M_1-ը, M_2-ը, …, M_{p-1}-ը, ընդ որում՝

$$M_k\le 2^{\frac{k(p-k)}{2}}M_0^{1-\frac{k}{p}}\cdot M_p^{\frac{k}{p}} \quad (k=1,\ldots,p-1):$$

1567. Տրված է $[0;1]$ հատվածում երկու անգամ դիֆերենցելի f ֆունկցիա, որը բավարարում է $f(0)=f(1)=0$ և $\min\limits_{x\in[0;1]}f(x)=-1$ պայմաններին: Ապացուցել, որ $\max\limits_{x\in[0;1]}f''(x)\ge 8$:

1568. Դիցուք $f\in C^2[0;+\infty)$ և ամենուրեք՝ $|f''(x)|\le 1$: Ապացուցել, որ եթե $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, ապա $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$:

1569. Դիցուք f ֆունկցիան դիֆերենցելի է $[0;1]$ հատվածի վրա, $f(0)=0$ և գոյություն ունի k հաստատուն, այնպիսին, որ ցանկացած $x\in[0;1]$ կետում՝ $|f'(x)|\le k|f(x)|$: Ապացուցել, որ $f(x)\equiv 0$:

1570. Դիցուք $f\in C^{\infty}(R)$ և գոյություն ունի L հաստատուն, այնպիսին, որ բոլոր $n\in N$ և $x\in R$ թվերի համար $\left|f^{(n)}(x)\right|\le L$: Ապացուցել, որ եթե ցանկացած բնական թվի համար $f\left(\frac{1}{n}\right)=0$, ապա $f(x)\equiv 0$:

1571. Տրված է $f\in C^{\infty}(R)$ ֆունկցիան: Հայտնի է, որ ցանկացած $n\in Z_+$ և $x\in R$ թվերի համար $f^{(n)}(0)=0$ և $f^{(n)}(x)\ge 0$: Ապացուցել, որ $f(x)\equiv 0$:

1572. Դիցուք $f\in C^{\infty}[-1;1]$, ցանկացած $n\in Z_+$ թվի համար $f^{(n)}(0)=0$ և գոյություն ունի $\alpha\in(0;1)$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\sup_{x\in[-1;1]}\left|f^{(n)}(x)\right|\le \alpha^n n!\quad (n=0,1,2,\ldots):$$

Ապացուցել, որ $f(x)\equiv 0$:

1573. Դիցուք f-ը որոշված է x_0 կետի շրջակայքում: Եթե գոյություն ունի

$$f_s'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)-f\left(x_0-\frac{h}{2}\right)}{h}$$

վերջավոր սահմանը, ապա այն կոչվում է x_0 կետում f ֆունկցիայի առաջին կարգի *սիմետրիկ ածանցյալ* կամ *ածանցյալ ըստ Շվարցի*:
Ապացուցել, որ եթե f-ն անընդհատ է $[a;b]$ հատվածում, $(a;b)$ միջակայքի բոլոր կետերում ունի $f_s'(x)$ սիմետրիկ ածանցյալ և $f(a)<f(b)$, ապա գոյություն ունի $\xi\in(a;b)$ կետ, որում $f_s'(\xi)\ge 0$:

1574. Ապացուցել, որ եթե $f\in C[a;b]$, $f(a)=f(b)$ և $(a;b)$-ում f-ն ունի $f_s'(x)$ սիմետրիկ ածանցյալ, ապա գոյություն ունեն $x_1,x_2\in(a;b)$ կետեր, այնպիսիք, որ $f_s'(x_1)\le 0$ և $f_s'(x_2)\ge 0$:

Կառուցել խնդրի բոլոր պայմաններին բավարարող $f(x)$ ֆունկցիա, որի սիմետրիկ ածանցյալը ոչ մի կետում զրո չէ:

1575. Դիցուք $f\in C[a;b]$ և $(a;b)$ միջակայքի բոլոր կետերում գոյություն ունի $f_s'(x)$ սիմետրիկ ածանցյալ: Ապացուցել, որ գոյություն ունի $x_1,x_2\in(a;b)$ կետերի զույգ, այնպիսին, որ

$$f'_s(x_1)\le\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\le f'_s(x_2):$$

1576. Ապացուցել, որ եթե $(a;b)$ միջակայքում f ֆունկցիան անընդհատ է և ամենուրեք $f'_s(x)=0$, ապա $f=const$:

1577. Երկրորդ կարգի սիմետրիկ ածանցյալը, կամ Շվարցի երկրորդ ածանցյալը, սահմանվում է հետևյալ կերպ.

$$f''_s(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}:$$

Ապացուցել, որ եթե f-ը x կետում երկու անգամ դիֆերենցելի է, ապա գոյություն ունի $f''_s(x)$-ը և $f''_s(x)=f''(x)$:

1578. Դիցուք x_0 կետի շրջակայքում f ֆունկցիան ունի հետևյալ վերլուծությունը. $f(x_0+h)=f(x_0)+Ah+\dfrac{Bh^2}{2!}+o(h^2)$: Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ ա) $B=f''(x_0)$; բ) $B=f''_s(x_0)$: Պատասխանը հիմնավորել:

1579. Նշանակելով $\Delta_s f(x)=f\left(x+\frac{h}{2}\right)-f\left(x-\frac{h}{2}\right)$, $\Delta_s^2 f(x)=\Delta_s(\Delta_s f(x))=$ $=f(x+h)+f(x-h)-2f(x)$՝ սահմանենք x կետում f ֆունկցիայի n-րդ կարգի սիմետրիկ աճը՝ $\Delta_s^n f(x)=\Delta_s\left(\Delta_s^{n-1}f(x)\right)$ անդրադարձ բանաձևով:

Ապացուցել, որ

ա) $\Delta_s^k(f+g)=\Delta_s^k(f)+\Delta_s^k(g)$;

բ) $\Delta_s^k(cf)=c\Delta_s^k f$;

գ) $\Delta_s^n f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k f\left(x+\dfrac{n-2k}{2}h\right)$, $n\in N$:

1580. Եթե x_0 կետում գոյություն ունի

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta_s^k f(x_0)}{h^k}=f_s^{(k)}(x_0)$$

սահմանը, ապա այն անվանում են f ֆունկցիայի x_0 կետում k-րդ կարգի սիմետրիկ ածանցյալ կամ Շվարցի ածանցյալ: Ապացուցել, որ եթե f-ն x_0 կետում k անգամ դիֆերենցելի է, ապա $f_s^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0)$:

1581. Դիցուք x_0 կետի շրջակայքում f ֆունկցիան ունի

$$f(x_0+h)=c_0+c_1h+\cdots+c_nh^n+o(h^n)$$

վերլուծություն: Ապացուցել, որ x_0 կետում գոյություն ունեն f ֆունկցիայի ընդհուպ մինչև n-րդ կարգի Շվարցի ածանցյալները, ընդ որում՝

$$c_0 = \lim_{h\to 0} f(x_0 + h),\ c_k = \frac{f_s^{(k)}(x_0)}{k!}\ (k = 1,2,\ldots,n):$$

Ստուգել, որ եթե f-ն x_0 կետում անընդհատ է, ապա այն նաև դիֆերենցելի է: Այս պայմաններում երաշխավորվա՞ծ է արդյոք f-ի երկրորդ ածանցյալի գոյությունը:

1582. Ապացուցել, որ եթե $f \in C[a;b]$ և $(a;b)$ միջակայքում ամենուրեք $f_s''(x) = 0$, ապա f-ը գծային է. $f(x) = c_0 + c_1 x$:

1583. Ապացուցել, որ եթե $[a;b]$ հատվածի վրա անընդհատ f ֆունկցիայի $f_s'(x)$ սիմետրիկ ածանցյալը ամենուրեք դրական է, ապա f-ը աճող է:

1584. Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ եթե դիֆերենցելի ֆունկցիայի ածանցյալը որևէ կետում դրական է, ապա այդ կետի շրջակայքում ֆունկցիան աճող է: Բերել համապատասխան օրինակ:

Ապացուցել անհավասարությունը (1585-1593).

1585. $\dfrac{\ln x}{x-1} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}\quad (x > 0, x \ne 1)$:

1586. $\dfrac{2}{2x+1} < \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) < \dfrac{2x+1}{2x(x+1)}\quad (x > 0)$:

1587. $|x - y| \le \left|x^2 \ln x - y^2 \ln y\right| \le 3e|x - y|\quad (1 \le x, y \le e)$:

1588. $\left|\dfrac{\ln x - \ln y}{x - y} - \dfrac{1}{y}\right| \le \dfrac{1}{2}|x - y|\quad (x, y \ge 1, x \ne y)$:

1589. $\left|x^2 arctgx - y^2 arctgy\right| \le \dfrac{\pi + 1}{2}|x - y|\quad (0 \le x, y \le 1)$:

1590. $\left|\dfrac{\sin x - \sin y}{x - y} - \cos y\right| \le \dfrac{1}{2}|x - y|$:

1591. $\left(x^\alpha + y^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} > \left(x^\beta + y^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}\quad (x, y > 0,\ \beta > \alpha > 0)$:

1592. $x^y + y^x > 1\quad (x, y > 0)$:

1593. $x + y + \cos(xy) \ge 1\quad (x, y \ge 0)$:

1594. Տրված են $x_i > 0$, $\alpha_i > 0$ $(i = 1,\ldots,n)$ թվերը, ընդ որում՝ $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$: Դիտարկենք

$$M_t(x;\alpha)=\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^t\right\}^{\frac{1}{t}} \quad (t\neq 0)$$

ֆունկցիան: Այն անվանում են x_i թվերի α կշռով t-րդ կարգի միջին:

ա) Հաշվել $M_0(x;\alpha)=\lim\limits_{t\to 0}M_t(x;\alpha)$ սահմանը:

բ) Ցույց տալ, որ երբ $\alpha_1=\cdots=\alpha_n=\dfrac{1}{n}$, ապա $t=-1,\ 0,\ 1$ և 2 արժեքների դեպքում ստացվում են x_i թվերի համապատասխանաբար հարմոնիկ, երկրաչափական, թվաբանական և քառակուսային միջինները:

գ) Ստուգել, որ $M_t(x;\alpha)$-ն որպես t-ի ֆունկցիա R-ի վրա չնվազող է, ընդ որում աճող է, եթե $n>1$ և x_i թվերից ոչ բոլորն են միմյանց հավասար:

1595. Դիցուք $(a;b)$ միջակայքում որոշված $f(x)$ ֆունկցիան այդ միջակայքի ցանկացած x_1,x_2 կետերի համար բավարարում է

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

անհավասարությանը: Ապացուցել, որ

ա) ցանկացած $n\in N$ թվի և $x_1,\ldots,x_n\in(a;b)$ կետերի համար

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\le\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n};$$

բ) ցանկացած $r\in Q\cap[0;1]$ թվի և $x_1,x_2\in(a;b)$ կետերի համար

$$f(rx_1+(1-r)x_2)\le rf(x_1)+(1-r)f(x_2);$$

գ) եթե f-ն անընդհատ է, ապա այն ուռուցիկ է:

1596. Դիցուք f-ը որոշված է $[a;b]$ հատվածում և սահմանափակ է $(\alpha;\beta)\subset[a;b]$ միջակայքում: Ապացուցել, որ եթե կետերի կամայական $x_1,x_2\in[a;b]$ զույգի համար

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

ապա

ա) f-ը սահմանափակ է $[a;b]$ հատվածում;

բ) f-ն անընդհատ է (հետևաբար նաև ուռուցիկ է) $(a;b)$ միջակայքում:

1597. Դիցուք $f\in C[a;b]$ և ցանկացած $[\alpha;\beta]\subset[a;b]$ հատվածում գոյություն ունի $x=p\alpha+(1-p)\beta\in(\alpha;\beta)$ $(0<p<1)$ կետ, այնպիսին, որ

$$f(p\alpha+(1-p)\beta)\le pf(\alpha)+(1-p)f(\beta):$$

Ապացուցել, որ f -ն ուռուցիկ է:

1598. Ապացուցել, որ եթե $f:(a;b)\to R$ ֆունկցիան ուռուցիկ է, ապա այն անընդհատ է: Ճշմարի՞տ է արդյոք պնդումն $[a;b]$ հատվածի համար:

1599. Ապացուցել, որ եթե $f:[a;b]\to R$ ֆունկցիան ուռուցիկ է և որևէ $x_0=pa+(1-p)b$ $(0<p<1)$ կետում $f(x_0)=pf(a)+(1-p)f(b)$, ապա f -ը գծային է:

1600. Դիցուք $f:(a;b)\to R$ ֆունկցիան անընդհատ դիֆերենցելի է և ցանկացած $x_1,x_2\in(a;b)$ կետերի համար գոյություն ունի միայն մեկ ξ կետ, որի համար

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=f'(\xi):$$

Ապացուցել, որ f -ն ուռուցիկ է կամ գոգավոր:

1601. Ապացուցել, որ եթե $f:R\to R$ ֆունկցիան ուռուցիկ է և վերևից սահմանափակ, ապա այն հաստատուն է:

1602. Դիցուք $f:R\to R$ ֆունկցիան ուռուցիկ է: Ապացուցել, որ եթե

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0,$$

ապա f -ը հաստատուն է:

1603. Ապացուցել, որ եթե $f:R\to R$ ֆունկցիան ուռուցիկ է և գոյություն ունեն a և b հաստատուններ, այնպիսիք, որ $|f(x)|\le a|x|+b$ $(x\in R)$, ապա f -ը R -ի վրա հավասարաչափ անընդհատ է (տես խնդիր 836):

1604. Դիցուք $f:(a;b)\to R$ ֆունկցիան ուռուցիկ է: Ապացուցել, որ

ա) $(a;b)$ միջակայքի յուրաքանչյուր կետում գոյություն ունեն $f'_-(x)$ և $f'_+(x)$ միակողմանի ածանցյալներ, ընդ որում՝ $f'_-(x)\le f'_+(x)$;

բ) ցանկացած $x_1<x_2$ կետերի համար՝ $f'_+(x_1)\le f'_-(x_2)$:

1605. Ապացուցել, որ եթե նույնաբար զրոյից տարբեր f ֆունկցիան $(x_0;+\infty)$ միջակայքում երկու անգամ դիֆերենցելի է և

$$\lim_{x\to x_0+0}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=0,$$

ապա այդ միջակայքում գոյություն ունի կետ, որտեղ ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալը զրո է:

1606. Դիցուք f-ը $(x_0;+\infty)$ միջակայքում երկու անգամ դիֆերենցելի է և $f''(x)\neq 0$, $x\in(x_0;+\infty)$: Ապացուցել, որ եթե $y=kx+b$ ուղիղն f ֆունկցիայի ասիմպտոտն է, երբ $x\to+\infty$, ընդ որում՝ $f(x)\geq kx+b$ $(x>x_0)$, ապա f-ը ուռուցիկ է և $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=k$:

1607. Դիցուք f-ը $(x_0;+\infty)$ միջակայքում երկու անգամ դիֆերենցելի է և $f''(x)\neq 0$, $x\in(x_0;+\infty)$: Ապացուցել, որ եթե $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ սահմանը վերջավոր է, ապա $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$:

1608. Ապացուցել, որ եթե $[x_0;+\infty)$ միջակայքում սահմանափակ ֆունկցիան ունի մոնոտոն ածանցյալ, ապա $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x)=0$:

1609. Դիցուք թվային առանցքի վրա երկու անգամ դիֆերենցելի f ֆունկցիան բավարարում է $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-|x|\right]=0$ պայմանին: Ապացուցել, որ եթե առնվազն մեկ կետում $f(x)\leq 0$, ապա գոյություն ունի ξ կետ, որում $f''(\xi)=0$:

1610. Ապացուցել, որ երկուսից մեծ ցանկացած կենտ աստիճանի ցանկացած հանրահաշվական բազմանդամ ունի առնվազն մեկ շրջման կետ:

1611. Ապացուցել, որ եթե հաստատունից տարբեր, դրական գործակիցներով հանրահաշվական բազմանդամը զույգ ֆունկցիա է, ապա այն նաև ուռուցիկ է: Ստուգել, որ այդպիսի բազմանդամի միակ էքստրեմումի կետը մինիմումի կետ է:

1612. Գտնել ամենացածր աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամ, որը $x=1$ կետում ընդունում է $y=6$ մաքսիմալ արժեք, իսկ $x=3$ կետում՝ $y=2$ մինիմալ արժեք:

1613. Գտնել մեծագույն α և փոքրագույն β թվերը, որոնց համար ճշմարիտ է

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}\leq e\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\beta}\quad (n\in N)$$

անհավասարությունը:

Գլուխ 7

Նախնական ֆունկցիա, անորոշ ինտեգրալ

Սահմանում: $F(x)$-ը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի *նախնական* $(a;b)$ վերջավոր կամ անվերջ միջակայքում, եթե F-ն $(a;b)$-ում դիֆերենցելի է և $F'(x)=f(x)$, $x\in(a;b)$:

Եթե F-ն $(a;b)$ միջակայքում f ֆունկցիայի նախնականն է, ապա f-ի նախնականներ են $F(x)+C$ $(C=const)$ տեսքի բոլոր ֆունկցիաները և միայն դրանք:

Դիցուք F-ը տրված միջակայքում f-ի որևէ նախնականն է:

Սահմանում: f ֆունկցիայի բոլոր նախնականների բազմությունը՝ $\{F(x)+C:C\in R\}$-ը, կոչվում է f-ի *անորոշ ինտեգրալ* և նշանակվում՝

$$\int f \quad \text{կամ} \quad \int f(x)dx:$$

Այս նշանակման մեջ f-ը կոչվում է *ենթաինտեգրալ ֆունկցիա*, իսկ $f(x)dx$-ը՝ *ենթաինտեգրալ արտահայտություն*:

Տարրական ֆունկցիաների նախնականների աղյուսակ.

1. $\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \quad (\alpha\neq-1)$;

2. $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$;

3. $\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+C \quad (a>0, a\neq1)$, $\int e^{x}dx=e^{x}+C$;

4. $\int\sin xdx=-\cos x+C$;

5. $\int\cos xdx=\sin x+C$;

6. $\int\frac{dx}{\cos^{2}x}=tgx+C$;

7. $\int\frac{dx}{\sin^{2}x}=-ctgx+C$;

8. $\int shxdx=chx+C$;

9. $\int chxdx=shx+C$;

10. $\int\frac{dx}{ch^{2}x}=thx+C$;

11. $\int\frac{dx}{sh^{2}x}=-cthx+C$;

12. $\int\frac{dx}{x^{2}+a^{2}}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C_1=-\frac{1}{a}arcctg\frac{x}{a}+C_2 \quad (a\neq0)$;

13. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}}=\arcsin\frac{x}{a}+C_1=-\arccos\frac{x}{a}+C_2 \quad (a>0)$;

14. $\int\frac{dx}{x^{2}-a^{2}}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C \quad (a\neq0)$;

15. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^{2}+a}}=\ln\left|x+\sqrt{x^{2}+a}\right|+C \quad (a\neq0)$:

Անորոշ ինտեգրալի հաշվման (ինտեգրման) հիմնական եղանակները:

1. Ինտեգրալի գծայնությունը: Դիցուք u և v ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը տրված միջակայքում ունի նախնական: Ցանկացած α և β հաստատունների համար $\alpha u+\beta v$ ֆունկցիան այդ միջակայքում նույնպես կունենա նախնական, ընդ որում՝

$$\int(\alpha u+\beta v)=\alpha\int u+\beta\int v:$$

2. Մասերով ինտեգրում: Եթե $u(x)$ և $v(x)$ ֆունկցիաները տրված միջակայքում դիֆերենցելի են, $u'(x)v(x)$ և $v'(x)u(x)$ ֆունկցիաներից որևէ մեկն ունի նախնական, ապա մյուսը նույնպես ունի նախնական և

$$\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx:$$

3. Փոփոխականի փոխարինում կամ տեղադրում: Եթե $(a;b)$ միջակայքում որոշված $f(x)$ ֆունկցիայի նախնականը $F(x)$-ն է և $x=\varphi(t)$ $(t\in(\alpha;\beta))$ անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիայի արժեքները ընկած են $(a;b)$-ում, ապա ճշմարիտ է ինտեգրման հետևյալ բանաձևը.

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(\varphi(t))+C,\quad t\in(\alpha;\beta):$$

4. Ռացիոնալ ֆունկցիայի ինտեգրումը: Տրված է $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ռացիոնալ ֆունկցիան: Եթե $Q(x)$ հանրահաշվական բազմանդամը ներկայացված է

$$Q(x)=(x-x_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-x_l)^{k_l}\cdot\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{m_1}\cdot\ldots\cdot\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{m_s}$$

տեսքով, որտեղ $x_1,\ldots,x_l$-ը $Q(x)$-ի իրարից տարբեր իրական արմատներն են և $(p_i,q_i)\neq(p_j,q_j)$, երբ $i\neq j$, ապա հնարավոր է ստանալ $R(x)$-ի հետևյալ վերլուծությունը.

$$R(x)=p(x)+\sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{k_i}\frac{a_{ik}}{(x-x_i)^k}+\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{m_i}\frac{b_{ik}x+c_{ik}}{\left(x^2+p_ix+q_i\right)^k}:$$

Այստեղ $p(x)$-ը $P(x)$ բազմանդամը $Q(x)$-ի վրա բաժանելիս ստացված քանորդն է և հետևաբար հայտնվում է միայն այն դեպքում, երբ $P(x)$-ի կարգը փոքր չէ $Q(x)$-ի կարգից: Իսկ a_{ik}, b_{ik} և c_{ik} հաստատունները միարժեքորեն որոշվում են որպես գծային հավասարումների համակարգի լուծումներ, որը ստացվում է «անորոշ գործակիցների մեթոդ» կիրառելիս. $R(x)$-ի վերլուծության աջ կողմը բերվում է ընդհանուր հայտարարի (այն համընկնում է $Q(x)$-ին) և, այնուհետև, համարիչում ստացվող անհայտ գործակիցներով բազմանդամը նույնացվում է $P(x)$-ի հետ: Օգտագործելով ինտեգրալի գծայնությունը՝ $R(x)$-ի ինտեգրման խնդիրը հանգեցվում է տարրական ֆունկցիաների և պարզագույն ռացիոնալ կոտորակների ինտեգրմանը:

Սահմանում: $F\in C(a;b)$ ֆունկցիան կոչվում է $f:(a;b)\to R$ ֆունկցիայի ընդհանրացված նախնական, եթե $(a;b)$ միջակայքում ամենուրեք, բացի գուցե վերջավոր թվով կետերից, F-ը դիֆերենցելի է և $F'(x)=f(x)$:

Ա

Կատարելով փոփոխականի պարզագույն փոխարինում և օգտվելով նախնականների աղյուսակից՝ գտնել ինտեգրալը (1614-1697).

1614. $\int \sqrt[3]{2x}dx$:

1615. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{5x}}$:

1616. $\int x^2(x^2-3)dx$:

1617. $\int(\sqrt{x}+1)(x+\sqrt{x}-2)dx$:

1618. $\int \frac{(1+\sqrt[3]{x})^3}{\sqrt[3]{x}}dx$:

1619. $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx$:

1620. $\int e^{-x-3}dx$:

1621. $\int a^{x+1}e^{x+1}dx$:

1622. $\int \frac{dx}{x\ln x}$:

1623. $\int \cos(x+1)dx$:

1624. $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$:

1625. $\int ctg^2 x dx$:

1626. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot \sin^2 x}dx$:

1627. $\int \frac{dx}{\cos 2x+\sin^2 x}$:

1628. $\int \frac{3\cdot 2^x-2\cdot 3^x}{2^x}dx$:

1629. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$:

1630. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1-tgx}}$:

1631. $\int \frac{dx}{x\cos^2(1+\ln x)}$:

1632. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$:

1633. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$:

1634. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$:

1635. $\int e^x\sin(e^x)dx$:

1636. $\int e^{\cos x}\sin x dx$:

1637. $\int xe^{x^2}dx$:

1638. $\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}dx$:

1639. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$:

1640. $\int \frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^{10}}}$:

1641. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt[5]{2x^4+1}}$:

1642. $\int \frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+a^2}$:

1643. $\int \sqrt[4]{1-3x}\,dx$:

1644. $\int 2^{-2x-7}dx$:

1645. $\int \left(e^{2x}-1\right)^3 dx$:

1646. $\int \frac{x\left(1-x^2\right)}{1+x^4}dx$:

1647. $\int \frac{xdx}{x+4}$:

1648. $\int \frac{3+x}{3-x}dx$:

1649. $\int \frac{x^2dx}{2+x^2}$:

1650. $\int \frac{x^2dx}{1-3x^2}$:

1651. $\int \frac{x^2+3}{x^2-1}dx$:

1652. $\int \frac{e^{2x}+1}{e^x+1}dx$:

1653. $\int (a\cdot sh3x+b\cdot ch4x)dx$:

1654. $\int th^2xdx$:

1655. $\int \frac{shxdx}{a^2+ch^2x}$:

1656. $\int \frac{dx}{x(x-1)}$:

1657. $\int \frac{dx}{x^2+3x-10}$:

1658. $\int \frac{dx}{(x+1)(2x-3)}$:

1659. $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+2\right)}$:

1660. $\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)\left(x^2+b^2\right)}$ $\left(a^2 \neq b^2\right)$:

1661. $\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2}$ $(a \neq b)$:

1662. $\int \sin^2 xdx$:

1663. $\int \sin 3x \cdot \sin 5xdx$:

1664. $\int \cos^3 xdx$:

1665. $\int \sin^4 xdx$:

1666. $\int tg^3xdx$:

1667. $\int \sin^2 3x \cdot \sin^2 2xdx$:

1668. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$:

1669. $\int \frac{\cos^2 xdx}{\sin x}$:

1670. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$:

1671. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$:

1672. $\int e^x\sqrt{e^x+1}\,dx$:

1673. $\int \frac{\left(1+e^x\right)^2}{e^{2x}}dx$:

1674. $\int \frac{\left(2x-\sqrt{\arcsin x}\right)}{\sqrt{1-x^2}}dx$:

1675. $\int \frac{x+\left(\arccos 3x\right)^2}{\sqrt{1-9x^2}}dx$:

1676. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}dx$:

1677. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$:

1678. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$:

1679. $\int \frac{x^2dx}{\left(8x^3+27\right)^{2/3}}$:

1680. $\int \frac{xdx}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}$:

1681. $\int \frac{dx}{x\ln x\ln\ln x}$:

1682. $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx$:

1683. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}dx$:

1684. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt[4]{ctgx}}$:

1685. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x}$:

1686. $\int \frac{dx}{\cos x}$:

1687. $\int \frac{x^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+x^{n+2}}}dx \quad (n\neq -2)$:

1688. $\int \frac{x^4dx}{x^{10}+3}$:

1689. $\int \frac{2^x3^x}{9^x-4^x}dx$:

1690. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$:

1691. $\int \frac{dx}{2+e^x+e^{-x}}$:

1692. $\int \frac{x^2dx}{(1-x)^{100}}$:

1693. $\int \frac{x^5dx}{x+1}$:

1694. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$:

1695. $\int x\sqrt{2-5x}dx$:

1696. $\int \frac{x^3dx}{x^8-2}$:

1697. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{1-3x}}$:

Կատարելով փոփոխականի փոխարինում՝ գտնել նախնականը (1698-1706).

1698. $\int x^2\sqrt[3]{1-x}dx$:

1699. $\int x^3\left(1-5x^2\right)^{10}dx$:

1700. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{2-x}}$:

1701. $\int \frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}$:

1702. $\int \frac{\sin x \cos^2 x}{1+\cos^2 x} dx$:

1703. $\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$:

1704. $\int \frac{dx}{e^{x/2}+e^x}$:

1705. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$:

1706. $\int \frac{arctg\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}(1+x)}$:

Կատարելով փոփոխականի $x = a\sin t$, $x = atgt$, $x = a\sin^2 t$ $(a>0)$ փոխարինում՝ գտնել ևախնականը (1707- 1712).

1707. $\int \frac{dx}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$:

1708. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$:

1709. $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$:

1710. $\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}$:

1711. $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx$:

1712. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$:

Կատարելով փոփոխականի $x = asht$, $x = acht$, $x = atht$ $(a>0)$ փոխարինում՝ գտնել նախնականը (1713-1715).

1713. $\int \sqrt{a^2+x^2}dx$:

1714. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$:

1715. $\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx$:

Կիրառելով մասերով ինտեգրման մեթոդը՝ գտնել նախնականը (1716-1746).

1716. $\int \ln x dx$:

1717. $\int x^n \ln x dx \quad (n \neq -1)$:

1718. $\int \sqrt{x}\ln^2 x dx$:

1719. $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$:

1720. $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx$:

1721. $\int xe^{-x}dx$:

1722. $\int x^3 e^{-x^2}dx$:

1723. $\int x\cos x dx$:

1724. $\int x^2 \sin 2x dx$:

1725. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$:

1726. $\int x\sin^2 x dx$:

1727. $\int \sin x \ln tgx dx$:

1728. $\int x^2 chx dx$:

1729. $\int arctgx dx$:

1730. $\int x arctgx dx$:

1731. $\int \arccos(5x-2)dx$:

1732. $\int x^2 \arcsin 2x dx$:

1733. $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$:

1734. $\int \frac{x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$:

1735. $\int (\arcsin x)^2 dx$:

1736. $\int \frac{x \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}} dx$:

1737. $\int e^{\sqrt{x}} dx$:

1738. $\int x \sin \sqrt{x} dx$:

1739. $\int \sin \ln x dx$:

1740. $\int e^{ax} \cos bx dx$:

1741. $\int e^{ax} \sin bx dx$:

1742. $\int e^{2x} \sin^2 x dx$:

1743. $\int \frac{e^{arctgx}}{\left(1+x^2\right)^{3/2}} dx$:

1744. $\int \left(e^x - \cos x\right)^2 dx$:

1745. $\int \frac{\ln \sin x}{\sin^2 x} dx$:

1746. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$:

Քառակուսի եռանդամից լրիվ քառակուսի անջատելով՝ գտնել նախնականը (1747-1761).

1747. $\int \frac{dx}{x^2 - x + 2}$:

1748. $\int \frac{dx}{3x^2 - 2x - 1}$:

1749. $\int \frac{xdx}{x^4 - 2x^2 - 1}$:

1750. $\int \frac{(x+1)}{x^2 + x + 1} dx$:

1751. $\int \frac{x^5 dx}{x^6 - x^3 - 2}$:

1752. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$:

1753. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}$:

1754. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - x + 2}}$:

1755. $\int \frac{xdx}{x^2 - 2x\cos a + 1}$, $\sin a \neq 0$:

1756. $\int \frac{(4-3x)dx}{5x^2 + 6x + 18}$:

1757. $\int \frac{(3x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$:

1758. $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}}$:

1759. $\int \sqrt{x-x^2}\,dx$:

1760. $\int \frac{xdx}{x^4+6x^2+5}$:

1761. $\int \sqrt{x^2+2x+5}\,dx$:

Գտնել ռացիոնալ ֆունկցիայի նախնականը (1762-1776).

1762. $\int \frac{(2x+3)dx}{(x-2)(x+5)}$:

1763. $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$:

1764. $\int \frac{x^3dx}{x^2+x-2}$:

1765. $\int \frac{x^4dx}{x^4+5x^2+4}$:

1766. $\int \frac{(x^2+1)dx}{(x+1)^2(x-1)}$:

1767. $\int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}$:

1768. $\int \frac{(x^2+1)dx}{(x^2-1)(x^2-4)}$:

1769. $\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$:

1770. $\int \frac{xdx}{x^3-1}$:

1771. $\int \frac{(5x-14)dx}{x^3-x^2-4x+4}$:

1772. $\int \frac{x^5-2x^2+3}{x^2-4x+4}dx$:

1773. $\int \frac{x^3+x+1}{x^4-1}dx$:

1774. $\int \frac{(x^4+1)dx}{(x-1)(x^4-1)}$:

1775. $\int \frac{(x^3-6)dx}{x^4+6x^2+8}$:

1776. $\int \frac{x^6+x-1}{(x^6-x^5)(x+1)}dx$:

Գտնել իռացիոնալ ֆունկցիայի նախնականը (1777-1785).

$R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ արտահայտության ինտեգրումը, որտեղ $R(u,v)$-ն ռացիոնալ ֆունկցիա է, իսկ a,b,c,d թվերը հաստատուններ են, $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ տեղադրումով բերվում է ռացիոնալ ֆունկցիայի ինտեգրմանը:

1777. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$:

1778. $\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx$:

1779. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^3}$:

1780. $\int \frac{\sqrt[6]{x}dx}{1+\sqrt[3]{x}}$:

1781. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}$:

1782. $\int \sqrt[5]{\frac{x}{x+1}}\frac{dx}{x^3}$:

1783. $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$:

1784. $\int \frac{dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}}$:

1785. $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$:

Ինտեգրել եռանկյունաչափական արտահայտությունը (1786-1803).

$\int R(\sin x, \cos x)dx$ տեսքի ինտեգրալը, որտեղ $R(u,v)$-ն ռացիոնալ ֆունկցիա է, ընդհանուր դեպքում բերվում է ռացիոնալ ֆունկցիայի ինտեգրալի՝ փոփոխականի $t = tg\frac{x}{2}$ փոխարինման միջոցով: Եթե հայտնի է նաև, որ $R(-u,v)=-R(u,v)$ կամ $R(u,-v)=-R(u,v)$ կամ $R(-u,-v)=R(u,v)$, ապա ավելի հարմար է կատարել համապատասխանաբար $t=\cos x$, $t=\sin x$, $t=tgx$ փոխարինումը:

1786. $\int \cos^5 xdx$:

1787. $\int \sin^6 xdx$:

1788. $\int \sin^4 x\cos^5 xdx$:

1789. $\int \sin x\sin 2x\sin 3xdx$:

1790. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^3 x}dx$:

1791. $\int \frac{\sin 3xdx}{\cos x}$:

1792. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}dx$:

1793. $\int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x}$:

1794. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$:

1795. $\int \frac{dx}{\sin x(1+\cos x)}$:

1796. $\int \frac{\cos xdx}{\sin^2 x-6\sin x+5}$:

1797. $\int \frac{dx}{\cos x+\cos a}$, $\sin a\neq 0$:

1798. $\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$:

1799. $\int \frac{\sin^2 xdx}{1+\sin^2 x}$:

1800. $\int \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$ ա) $0<\varepsilon<1$; բ) $\varepsilon>1$:

1801. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$:

1802. $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$:

1803. $\int tgx\,tg(x+a)dx$:

Գտնել ինտեգրալը (1804-1829).

1804. $\int x\sqrt[3]{a+x}dx$:

1805. $\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}dx$:

1806. $\int xe^{\sqrt[3]{x}}dx$:

1807. $\int arctg\left(1+\sqrt{x}\right)dx$:

1808. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$:

1809. $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2}dx$:

1810. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x-1}}$:

1811. $\int \frac{x^2dx}{x^2+12x+35}$:

1812. $\int \frac{xdx}{2x^2-x+1}$:

1813. $\int \frac{x^4dx}{x^2+4}$:

1814. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$:

1815. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+x\sqrt[4]{x}}$:

1816. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$:

1817. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^2}}$:

1818. $\int \sqrt{4x^2-4x+3}dx$:

1819. $\int \frac{\sin xdx}{1+\sin x}$:

1820. $\int \left(tg^2x+tg^4x\right)dx$:

1821. $\int sh^3xch^4xdx$:

1822. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+\cos x}}$:

1823. $\int \frac{tgxdx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$:

1824. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}$:

1825. $\int x^3\sin x^2dx$:

1826. $\int \frac{xe^x}{\left(1+e^x\right)^2}dx$:

1827. $\int e^{x+e^x}dx$:

1828. $\int \frac{\ln x\cos\ln x}{x}dx$:

1829. $\int \arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx$:

1830. Դիցուք $F'(x)=f(x)$ $(x\in R)$: Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ

ա) եթե $f(x)$-ը պարբերական ֆունկցիա է, ապա $F(x)$-ը ևս պարբերական է;

բ) եթե $f(x)$-ը կենտ ֆունկցիա է, ապա $F(x)$-ը զույգ ֆունկցիա է;

գ) եթե $f(x)$-ը զույգ ֆունկցիա է, ապա $F(x)$-ը կենտ ֆունկցիա է:

1831. Ապացուցել, որ $f(x)=\operatorname{sgn} x$ ֆունկցիան R-ի վրա նախնական չունի:

1832. Բերել խզվող ֆունկցիայի օրինակ, որն R-ի վրա ունի նախնական:

Գտնել ինտեգրալը (1833-1839).

1833. $\int |x|dx$:　　1834. $\int x|x|dx$:　　1835. $\int e^{-|x|}dx$:

1836. $\int \left(|x+1|-|1-x|\right)dx$:　　1837. $\int |shx|dx$:

1838. $\int f'(2x)dx$:　　1839. $\int xf''(x)dx$:

1840. Գտնել $f(x)$-ը, եթե $f(0)=0$ և

ա) $f'\left(\sin^2 x\right)=\cos^2 x$;　　բ) $f'(\ln x)=\begin{cases}1, 0<x\le 1,\\ x, 1<x<+\infty :\end{cases}$

1841. Դիցուք $p^2-4q<0$: Կատարելով համապատասխան ձևափոխություններ՝ $\int \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx$ $(n\in N)$ ինտեգրալի հաշվումը բերել $I_n=\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}$ ինտեգրալի հաշվմանը և վերջինիս համար ստանալ աստիճանի իջեցման հետևյալ բանաձևը

$$I_n=\frac{1}{2(n-1)a^2}\left(\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}+(2n-3)I_{n-1}\right):$$

1842. Օգտվելով նախորդ խնդրում ստացված բանաձևից՝ գտնել նախնականը.

ա) $\int \frac{x^2dx}{\left(1+x^2\right)^2}$;　　բ) $\int \frac{dx}{\left(4+x^2\right)^3}$:

Գտնել ռացիոնալ ֆունկցիայի ինտեգրալը (1843-1851).

1843. $\int \frac{dx}{x^4+1}$: 1844. $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$: 1845. $\int \frac{dx}{x^6+1}$:

1846. $\int \frac{dx}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}$: 1847. $\int \frac{x^4+2x^2+4}{\left(x^2+1\right)^3}dx$:

1848. $\int \frac{x^4-2x^2+2}{\left(x^2-2x+2\right)^2}dx$: 1849. $\int \frac{dx}{x^6+2x^4+x^2}$:

1850. $\int \frac{dx}{x^4\left(x^3+1\right)^2}$: 1851. $\int \frac{dx}{x^8+x^4+1}$:

1852. Ապացուցել, որ եթե $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$, ապա

ա) $\int \frac{dx}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{y'}{2}+\sqrt{ay}\right|+C$, երբ $a>0$;

բ) $\int \frac{dx}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\left(-\frac{y'}{\sqrt{b^2-4ac}}\right)+C$, երբ $a<0$:

1853. Դիցուք $P_n(x)$-ն n-րդ աստիճանի բազմանդամ է և $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$: Ապացուցել, որ գոյություն ունեն $(n-1)$-րդ աստիճանի $Q_{n-1}(x)$ բազմանդամ և λ թիվ, այնպիսիք, որ

$$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{y}}=Q_{n-1}(x)\sqrt{y}+\lambda\int \frac{dx}{\sqrt{y}}:$$

Գտնել ինտեգրալը (1854-1860).

1854. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$: 1855. $\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$:

1856. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$: 1857. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$:

1858. $\int \frac{dx}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}$: 1859. $\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}}$:

1860. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}dx$:

Կատարելով Էյլերյան տեղադրությունները՝

1) $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+z$, $a>0$,

2) $\sqrt{ax^2+bx+c}=xz\pm\sqrt{c}$, $c>0$,

3) $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=z(x-x_1)$,

գտնել ինտեգրալը (1861-1866).

1861. $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$:

1862. $\int x\sqrt{x^2-2x+2}dx$:

1863. $\int\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}dx$:

1864. $\int\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+2}dx$:

1865. $\int\frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}}dx$:

1866. $\int\frac{x^3dx}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}$:

Գտնել բինոմական դիֆերենցիալի ինտեգրալը (1867-1872).

$\int x^m(a+bx^n)^p dx$ ինտեգրալի հաշվումը, որտեղ $m,n,p\in Q$, բերվում է ռացիոնալ ֆունկցիայի ինտեգրմանն միայն հետևյալ երեք դեպքերում (Չեբիշևի թեորեմ). ա) երբ p-ն ամբողջ է, տեղադրում են $x=z^k$, որտեղ k-ն m և n կոտորակների ընդհանուր հայտարարն է; բ) երբ $\frac{m+1}{n}$-ն ամբողջ է, տեղադրում են $a+bx^n=z^k$, որտեղ k-ն p-ի հայտարարն է; գ) երբ $\frac{m+1}{n}+p$-ն ամբողջ է, տեղադրում են $ax^{-n}+b=z^k$, որտեղ k-ն p-ի հայտարարն է:

1867. $\int\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}dx$:

1868. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$:

1869. $\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}$:

1870. $\int\sqrt[3]{3x-x^3}dx$:

1871. $\int\frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$:

1872. $\int\frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}$:

Ինտեգրել եռանկյունաչափական արտահայտությունը (1873-1884).

1873. $\int\frac{dx}{2\cos^2 x+\frac{1}{2}\sin 2x+\sin^2 x}$:

1874. $\int\frac{dx}{\cos 2x-\sin 2x}$:

1875. $\int\frac{dx}{2+3\sin 2x-4\cos^2 x}$:

1876. $\int\frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$:

1877. $\int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$:

1878. $\int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}$:

1879. $\int \frac{dx}{(1+\varepsilon \cos x)^2}$, $0 < \varepsilon < 1$:

1880. $\int \frac{\sin 4x dx}{\sin^8 x + \cos^8 x}$:

1881. $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1+\cos^4 x}}$:

1882. $\int \frac{1 - 2\sin 2x + 2\cos^2 x}{\sin x + \cos x} dx$:

1883. $\int \frac{3\sin x + \cos x + 1}{\sin x + 3\sin^2 x} dx$:

1884. $\int \frac{ctg^3 x + ctgx}{4 + tg^2 x} dx$:

Ինտեգրել հիպերբոլական արտահայտությունը (1885-1893).

1885. $\int \frac{dx}{1 - thx}$:

1886. $\int \frac{dx}{4 + 3sh^2 x}$:

1887. $\int \frac{ch2xdx}{sh^4 x + ch^4 x}$:

1888. $\int \frac{dx}{2shx - chx}$:

1889. $\int \frac{dx}{achx + bshx}$, $a > 0$, $a^2 \neq b^2$:

1890. $\int \frac{sh2xdx}{5shx + 3chx}$:

1891. $\int \frac{chx + 2shx + 3}{4chx + 5shx + 6} dx$:

1892. $\int \sqrt{thx} dx$:

1893. $\int \frac{\sqrt[3]{th^2 x}}{ch^4 x} dx$:

Գտնել ինտեգրալը (1894-1948).

1894. $\int \frac{dx}{1 + e^x + e^{2x} + e^{3x}}$:

1895. $\int \frac{dx}{(e^x - 1)^4}$:

1896. $\int \frac{dx}{(e^{x-1}+1)^2 - (e^{x+1}+1)^2}$:

1897. $\int (x^3 + x) e^{-x^2} dx$:

1898. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2 + \sin 2x}}$:

1899. $\int e^x \ln(1 + e^{-x}) dx$:

1900. $\int \frac{\ln(1 - x + x^2)}{x^2} dx$:

1901. $\int \frac{(x \ln x)^2}{\sqrt{x}} dx$:

1902. $\int \ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) dx$:

1903. $\int arctg \frac{1}{x-1} dx$:

1904. $\int x^7 arctgxdx$:

1905. $\int x\sqrt{1-x^2} \arccos x dx$:

1906. $\int e^{-x}\arcsin e^{x}dx$:

1907. $\int e^{\arcsin x}dx$:

1908. $\int \frac{\ln x-1}{\ln^{2}x}dx$:

1909. $\int \frac{\ln x dx}{(\ln x+1)^{2}}$:

1910. $\int \frac{\ln\left(x+\sqrt{x^{2}+1}\right)}{\sqrt{x^{2}+1}\left(x^{2}+1\right)}dx$:

1911. $\int \frac{\ln\left|x+\sqrt{x^{2}-1}\right|}{x^{2}}dx$:

1912. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x-1}}dx$:

1913. $\int \frac{\ln|x|}{(x+2)^{2}}dx$:

1914. $\int \frac{x\ln|x|}{\left(1-x^{2}\right)\sqrt{x^{2}-1}}dx$:

1915. $\int \frac{ax^{2}+b}{x^{2}-1}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|dx$:

1916. $\int \frac{dx}{(2+\sin x)^{2}}$:

1917. $\int \frac{\sqrt{\sin^{3}2x}}{\sin^{5}x}dx$:

1918. $\int \sqrt{th^{2}x+1}dx$:

1919. $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^{x}dx$:

1920. $\int \frac{dx}{\cos^{3}x\sqrt{\sin 2x}}$:

1921. $\int \frac{x\sin x dx}{(1+\cos x)^{2}}$:

1922. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^{5}x\cos x}}$:

1923. $\int \frac{2x^{4}-2x^{3}-x^{2}+2}{2x^{3}-4x^{2}+3x-1}dx$:

1924. $\int \frac{5x^{7}-5x^{2}-18x}{x^{5}+3x^{2}-1}dx$:

1925. $\int \frac{dx}{(x-1)^{3}\sqrt{x^{2}-2x-1}}$:

1926. $\int \frac{x^{3}+2x^{2}+3x+4}{\sqrt{x^{2}+2x+2}}dx$:

1927. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^{3}-x^{2}-x+1}}$:

1928. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^{2}(1-x)}}$:

1929. $\int \frac{dx}{\left(3+5x^{3}\right)\sqrt[3]{3+4x^{3}}}$:

1930. $\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt{x^{2}+x}\right)^{2}}$:

1931. $\int \frac{dx}{x^{2}\sqrt[3]{\left(2+x^{3}\right)^{5}}}$:

1932. $\int \frac{x\ln|x|}{(1+x^2)^2}dx$:

1933. $\int \frac{arctge^{\frac{x}{2}}}{e^{x/2}(1+e^x)}dx$:

1934. $\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}dx$:

1935. $\int \frac{x^2\arccos(x\sqrt{x})}{(1-x^3)^2}dx$:

1936. $\int \frac{3x^2-1}{x\sqrt{x}}arctgxdx$:

1937. $\int \frac{x\sin x}{\sqrt{(4-\sin^2 x)^3}}dx$:

1938. $\int x^{a-1}\ln^{b-1}x(a\ln x+b)dx$:

1939. $\int \frac{thxdx}{\sqrt{1-thx}}$:

1940. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(1+\sqrt[3]{x})^3}$:

1941. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^{10}}$:

1942. $\int \frac{dx}{x\sqrt[6]{x^6+1}}$:

1943. $\int \frac{xdx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}$:

1944. $\int \frac{dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^2}}$:

1945. $\int \frac{11x-13}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+1}}dx$:

1946. $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$:

1947. $\int \frac{x^2dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$:

1948. $\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}dx$:

Գ

Գտնել ինտեգրալը (1949-1952).

1949. $\int \max(1,x^2)dx$:

1950. $\int [x]|\sin \pi x|dx \quad (x\geq 0)$:

1951. $\int f(x)dx$, որտեղ $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & |x|\leq 1,\\ 1-|x|, & |x|>1:\end{cases}$

1952. $\int f(x)dx$, որտեղ $f(x)=\begin{cases}1, & -\infty<x<0,\\ x+1, & 0\le x\le 1,\\ 2x, & 1<x<+\infty:\end{cases}$

1953. Դիցուք $\varphi(x)$-ը x թվի հեռավորությունն է x-ին ամենամոտ ամբողջ թվից: Գտնել $\int \varphi(x)dx$-ը:

1954. Դիցուք $f(x)$-ը մոնոտոն և անընդհատ ֆունկցիա է, իսկ $f^{-1}(x)$-ը՝ նրա հակադարձ ֆունկցիան: Ապացուցել, որ եթե

$$\int f(x)dx = F(x)+C\ ,$$

ապա

$$\int f^{-1}(x)dx = xf^{-1}(x)-F\left(f^{-1}(x)\right)+C:$$

Դիտարկել՝ ա) $f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha>0$; բ) $f(x)=e^{x}$; գ) $f(x)=\arcsin x$ ֆունկցիաները:

1955. Դիցուք $P(x)$-ը n-րդ աստիճանի բազմանդամ է, $a\neq 0$: Ապացուցել, որ

ա) $$\int P(x)e^{ax}dx=\left(P(x)-\frac{P'(x)}{a}+\cdots+(-1)^n\frac{P^{(n)}(x)}{a^n}\right)\frac{e^{ax}}{a}+C;$$

բ) $$\int P(x)\sin ax dx=-\left(P(x)-\frac{P''(x)}{a^2}+\frac{P^{(4)}(x)}{a^4}-\cdots\right)\frac{\cos ax}{a}+$$
$$+\left(\frac{P'(x)}{a}-\frac{P^{(3)}(x)}{a^3}+\frac{P^{(5)}(x)}{a^5}-\cdots\right)\frac{\sin ax}{a}+C;$$

գ) $$\int P(x)\cos ax dx=\left(P(x)-\frac{P''(x)}{a^2}+\frac{P^{(4)}(x)}{a^4}-\cdots\right)\frac{\sin ax}{a}+$$
$$+\left(\frac{P'(x)}{a}-\frac{P^{(3)}(x)}{a^3}+\frac{P^{(5)}(x)}{a^5}-\cdots\right)\frac{\cos ax}{a}+C:$$

Ինտեգրալի համար ստանալ աստիճանի իջեցման բանաձև $(n\in N)$ (1956-1963).

1956. $I_n=\int x^n e^{ax}dx \quad (a\neq 0):$

1957. $I_n=\int x^{\alpha}\ln^n x dx \quad (\alpha\neq -1):$

1958. $I_n=\int \frac{x^n dx}{\sqrt{x^2+a}}:$

1959. $I_n=\int \sin^n x dx:$

1960. $I_n = \int ch^n x dx$:

1961. $I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}$:

1962. $I_n = \int \frac{dx}{ch^n x}$:

1963. $I_n = \int tg^n x dx$:

Ապացուցել անդրադարձ բանաձևը $(m, n \in N, m > 1, n > 1)$ (1964-1967).

1964. $a \neq 0$ դեպքում

$$I_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{na}\left(x^{n-1}\sqrt{ax^2 + bx + c} - \frac{b}{2}(2n-1)I_{n-1} - c(n-1)I_{n-2}\right):$$

1965. $I_{n,m} = \int \sin^n x \cos^m x dx$:

ա) $I_{n,m} = -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{n+m} + \frac{n-1}{n+m} I_{n-2,m}$;

բ) $I_{n,m} = \frac{\sin^{n+1} \cos^{m-1} x}{n+m} + \frac{m-1}{n+m} I_{n,m-2}$:

1966. $I_n = \int \frac{dx}{(a\cos x + b\sin x)^n}$, $a^2 + b^2 \neq 0$:

$$I_n = \frac{1}{(n-1)(a^2+b^2)}\left[\frac{a\sin x - b\cos x}{(a\cos x + b\sin x)^{n-1}} + (n-2)I_{n-2}\right]:$$

Գտնել $\int \frac{dx}{(2\cos x + \sin x)^3}$ -ը:

1967. $I_n = \int \left(\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}\right)^n dx$, $n \in N$:

$$I_n = \frac{2\sin a}{n-1}\left(\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}\right)^{n-1} + 2I_{n-1}\cos a - I_{n-2}:$$

1968. Գտնել $\int \frac{\left(\cos\frac{x+a}{2}\right)^{n-1}}{\left(\sin\frac{x-a}{2}\right)^{n+1}} dx$ -ը $(\cos a \neq 0)$:

1969. Ապացուցել, որ

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a\sin x + b\cos x + c} dx = Ax + B\ln|a\sin x + b\cos x + c| +$$

$$+C\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x+c}\quad\left(a^2+b^2\neq 0\right):$$

Գտնել A,B,C գործակիցները:

Գտնել ինտեգրալը (1970-1971).

1970. $\int\frac{2\sin x+\cos x}{3\sin x+4\cos x-2}dx$: 1971. $\int\frac{\sin x}{\sqrt{2}+\sin x+\cos x}dx$:

1972. Ապացուցել, որ

$$\int\frac{a_1\sin^2 x+2b_1\sin x\cos x+c_1\cos^2 x}{a\sin x+b\cos x}dx=A\sin x+B\cos x+$$

$$+C\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x},\ a^2+b^2\neq 0:$$

Գտնել A,B,C գործակիցները:

Գտնել ինտեգրալը (1973-1974).

1973. $\int\frac{\sin^2 x-4\sin x\cos x+3\cos^2 x}{\sin x+\cos x}dx$:

1974. $\int\frac{\sin^2 x-\sin x\cos x+2\cos^2 x}{\sin x+2\cos x}dx$:

1975. Դիցուք $(a-c)^2+b^2\neq 0$: Ընտրել A և B հաստատունները այնպես, որ տեղի ունենա

$$\int\frac{a_1\cos x+b_1\sin x}{a\cos^2 x+2b\sin x\cos x+c\sin^2 x}dx=A\int\frac{du_1}{k_1u_1^2+\lambda_1}+B\int\frac{du_2}{k_2u_2^2+\lambda_2}$$

հավասարությունը, որտեղ λ_1,λ_2-ը $(\lambda-a)(\lambda-c)=b^2$ հավասարման արմատները են $(\lambda_1\neq\lambda_2)$, $u_i=(a-\lambda_i)\sin x+b\cos x$ և $k_i=\frac{1}{c-\lambda_i}$, $i=1,2$:

Գտնել ինտեգրալը (1976-1977).

1976. $\int\frac{(\sin x+\cos x)dx}{2\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\cos^2 x}$:

1977. $\int\frac{\sin x-2\cos x}{1+4\sin x\cos x}dx$:

1978. Դիցուք

$$I_n=\int\frac{dx}{(a\cos x+c)^n},\ \left(|a|\neq|c|,n\in N\right):$$

Ստանալ հետևյալ անդրադարձ բանաձևը.

$$I_n = \frac{1}{(n-1)(a^2-c^2)}\left[\frac{a\sin x}{(a\cos x+c)^{n-1}} - (2n-3)cI_{n-1} + (n-2)I_{n-2}\right]:$$

1979. Գտնել ինտեգրալը՝ $\int \frac{dx}{(1+\varepsilon\cos x)^3}$, $\varepsilon > 1$:

1980. Տրված է՝ $I_m = \int x^m (ax^n + b)^p dx$ $(m, n \in N, m > n)$: Ապացուցել, որ I_m-ը բավարարում է հետևյալ անդրադարձ հավասարմանը.

$$a(m+1+np)I_m = x^{m+1-n}(ax^n+b)^{p+1} - b(m+1-n)I_{m-n}:$$

Գտնել ինտեգրալը (1981-2007).

1981. $\int \frac{dx}{x^7\sqrt{1+x^4}}$:

1982. $\int \frac{(a+\cos x)dx}{1+2a\cos x+a^2}$:

1983. $\int \frac{dx}{a+tg^2 x}$:

1984. $\int \frac{dx}{(a\cos x+b\sin x)^2}$ $(a^2+b^2 \neq 0)$:

1985. $\int \frac{dx}{[a\cos x+(ax+b)\sin x]^2}$ $(ab \neq 0)$:

1986. $\int \left(\frac{\sin 2x}{\sin^3 x+\cos^3 x}\right)^2 dx$:

1987. $\int \frac{arctgx dx}{(ax^2+b)\sqrt{ax^2+b}}$ $(a \neq 0)$:

1988. $\int \frac{dx}{[x^2+(a+b)x+ab]^2}$ $(a \neq b)$:

1989. $\int \frac{dx}{x^4+(a^2+b^2)x^2+a^2b^2}$ $(ab \neq 0)$:

1990. $\int \left(\frac{x+a}{x+b}\right)^n dx$ $(n \in N)$:

1991. $\int \frac{a_1 chx+b_1 shx}{achx+bshx}dx$ $(a^2+b^2 \neq 0)$:

1992. $\int \frac{dx}{3chx+5shx+3}$:

1993. $\int \frac{2shx+chx}{(3shx+4chx)^2}dx$:

1994. $\int \frac{sh2x - 2shx}{sh^6 \frac{x}{2} - sh^3 x} dx$:

1995. $\int \frac{(\sin x - \cos x)\sin 2x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx$:

1996. $\int \frac{a_1 \cos x + b_1 \sin x}{(a\cos x + b\sin x)^2} dx \quad (a^2 + b^2 \neq 0)$:

1997. $\int \frac{\cos^2 x}{(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)^2} dx, \ a^2 + b^2 \neq 0$:

1998. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x \cos^5 x}}$:

1999. $\int \frac{dx}{x^{2n} - a^{2n}} \quad (n \in N, a > 0)$:

2000. $\int \frac{dx}{(x^2 - a^2)\sqrt{b^2 - x^2}} \quad (ab \neq 0)$:

2001. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n + a}} \quad (a \neq 0, n \in N)$:

2002. $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}} \quad (n \in N)$:

2003. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x+a}} dx$:

2004. $\int \frac{\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right|}{x^2} dx$:

2005. $\int \left(\frac{x}{(ax - b)\sin x + (a + bx)\cos x} \right)^2 dx \quad (a^2 + b^2 \neq 0)$:

2006. $\int \frac{x \arcsin x}{(1 + ax^2)^2} dx$:

2007. $\int \frac{2\sin x - \sin 2x}{\sin^3 x + (1 - \cos x)^3} dx$:

Գտնել ֆունկցիայի ընդհանրացված նախնականը (2008-2011).

2008. $y = \operatorname{sgn}(x - a)$:

2009. $y = [x]$:

2010. $y = \begin{cases} arctg \frac{1}{x}, x \neq 0, \\ 0, x = 0: \end{cases}$

2011. $y = \begin{cases} \ln x, x > 0, \\ 1, x \leq 0: \end{cases}$

2012. Ապացուցել, որ Ռիմանի ֆունկցիան ոչ մի միջակայքում նախնական չունի:

Գլուխ 8

Ռիմանի ինտեգրալ, անիսկական ինտեգրալներ

Տրված $[a;b]$ $(a<b)$ հատվածի համար կետերի $P=(x_0,x_1,\dots,x_n)$ շարվածքը կոչվում է այդ հատվածի *տրոհում*, եթե $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$: Դրան համապատասխան` $\Delta_i=[x_i,x_{i+1}]$ հատվածները կոչվում են *տրոհման հատվածներ*, իսկ $\lambda(P)=\max\limits_{0\le i\le n-1}\Delta x_i$-ն, որտեղ $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$, *տրոհման տրամագիծ*:

Դիցուք f-ն $[a;b]$ հատվածի վրա որոշված ֆունկցիա է: Այդ հատվածի ցանկացած P տրոհման և ցանկացած $\xi_i\in\Delta_i$ $(i=0,1,\dots,n-1)$ կետերի համար կազմենք

$$\sigma_f(P,\xi)=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i$$

գումարը: Այն կոչվում է f ֆունկցիայի $[a;b]$ հատվածի P տրոհմանը և ξ_i կետերին համապատասխանող *ինտեգրալային գումար*:

Սահմանում: I թիվը կոչվում է f ֆունկցիայի որոշյալ *ինտեգրալ* (*Ռիմանի ինտեգրալ*) $[a;b]$ հատվածում, եթե ցանկացած $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta>0$ թիվ, այնպիսին, որ $[a;b]$ հատվածի ցանկացած P տրոհման և դրան համապատասխան` ξ_i կետերի կամայական ընտրության դեպքում

$$\lambda(P)<\delta \Rightarrow \left|\sigma_f(P,\xi)-I\right|<\varepsilon:$$

Եթե այդպիսի I թիվը գոյություն ունի, ապա f-ը կոչվում է $[a;b]$ հատվածում *ինտեգրելի* (Ռիմանի իմաստով ինտեգրելի) և նշանակվում է`

$$I=\lim_{\lambda(P)\to 0}\sigma_f(P,\xi)=\int_a^b f(x)dx:$$

Տրված $[a;b]$ հատվածի վրա Ռիմանի իմաստով ինտեգրելի ֆունկցիաների բազմությունը նշանակվում է $\Re[a;b]$-ով:

Ինտեգրելիության անհրաժեշտ պայմանը: Ռիմանի իմաստով ինտեգրելի ֆունկցիան սահմանափակ է:

Ինտեգրելիության անհրաժեշտ և բավարար պայմանը: Դիցուք $f:[a;b]\to R$ ֆունկցիան սահմանափակ է: $[a;b]$ հատվածի P տրոհման համար նշանակենք`

$$m_i=\inf_{x\in\Delta_i}f(x),\quad M_i=\sup_{x\in\Delta_i}f(x),\quad \Omega_i=M_i-m_i\quad (i=0,1,\dots,n-1):$$

Որպեսզի f-ը լինի Ռիմանի իմաստով ինտեգրելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ կամայական $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունենա $\delta>0$ թիվ, այնպիսին, որ $[a;b]$ հատվածի ցանկացած P տրոհման համար

$$\lambda(P)<\delta \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1}\Omega_i\Delta x_i<\varepsilon :$$

Հետևյալ գումարները կոչվում են Դարբուի համապատասխանաբար *ստորին* և *վերին գումարներ*.

$$L_f(P)=\sum_{i=0}^{n-1}m_i\Delta x_i\ , \quad U_f(P)=\sum_{i=0}^{n-1}M_i\Delta x_i :$$

Այս նշանակումներով ինտեգրելիության անհրաժեշտ և բավարար պայմանը կարող է գրվել նաև հետևյալ կերպ. $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0}\left(U_f(P)-L_f(P)\right)=0$:

Ցանկացած $f:[a;b]\to R$ սահմանափակ ֆունկցիայի համար գոյություն ունեն

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}L_f(P)=L\int_a^b f(x)dx \quad \text{և} \quad \lim_{\lambda(P)\to 0}U_f(P)=U\int_a^b f(x)dx$$

վերջավոր սահմանները, որոնք կոչվում են $[a;b]$ հատվածում f ֆունկցիայի համապատասխանաբար *ստորին* և *վերին* ինտեգրալներ: Դրանց հավասարությունը անհրաժեշտ և բավարար է, որպեսզի f-ն $[a;b]$-ում լինի ինտեգրելի:

Ինտեգրելի ֆունկցիաների դասեր: Եթե $f:[a;b]\to R$ ֆունկցիան անընդհատ է, ապա այն $[a;b]$-ում ինտեգրելի է. $C[a;b]\subset\Re[a;b]$:

Եթե f-ն $[a;b]$ հատվածում սահմանափակ է և ունի միայն վերջավոր թվով խզումներ, ապա այն $[a;b]$-ում ինտեգրելի է:

Եթե $f:[a;b]\to R$ ֆունկցիան մոնոտոն է, ապա այն ինտեգրելի է:

$\Re[a;b]$ դասի կառուցվածքը: Ցանկացած $f,g\in\Re[a;b]$ ֆունկցիաների համար՝

ա) $\alpha f+\beta g\in\Re[a;b]$ $(\alpha,\beta\in R)$, ընդ որում՝

$$\int_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$$ (ինտեգրալի գծայնություն);

բ) $|f|\in\Re[a;b]$;

գ) $f\cdot g\in\Re[a;b]$;

դ) եթե $[c;d]\subset[a;b]$ $(c<d)$, ապա f-ը $[c;d]$ հատվածի վրա ինտեգրելի է:

Եթե $f\in\Re[a;b]$, ապա ընդունված է գրել. $\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^a f(x)dx=0$:

Ինտեգրալի ադիտիվությունը: Եթե $f\in\Re[a;b]$, ապա ցանկացած $\alpha,\beta,\gamma\in[a;b]$ կետերի համար ճշմարիտ է

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_\beta^\gamma f(x)dx=\int_\alpha^\gamma f(x)dx$$

հավասարությունը:

Ինտեգրալի մոնոտոնությունը: Դիցուք՝ $f,g\in\Re[a;b]$: Եթե $a\le b$ և $f(x)\le g(x)$ $(a\le x\le b)$, ապա

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx :$$

Միջին արժեքի առաջին թեորեմը: Եթե $f \in \Re[a;b]$, $m = \inf\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ և $M = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x)$, ապա գոյություն ունի $\mu \in [m;M]$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a):$$

Մասնավորապես, եթե $f \in C[a;b]$, ապա գոյություն ունի $\xi \in [a;b]$ կետ, այնպիսին, որ

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a):$$

Միջին արժեքի ընդհանրացված թեորեմ: Եթե $f,g \in \Re[a;b]$, $g(x) \ge 0$, $m = \inf\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ և $M = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x)$, ապա գոյություն ունի $\mu \in [m;M]$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx :$$

Միջին արժեքի երկրորդ թեորեմը (Բոնեի բանաձևը): Եթե $f,g \in \Re[a;b]$ և g-ն $[a;b]$-ի վրա մոնոտոն է, ապա գոյություն ունի $\xi \in [a;b]$ կետ, այնպիսին, որ

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx :$$

Ինտեգրալը որպես փոփոխական վերին սահմանի ֆունկցիա: Դիցուք՝ $f \in \Re[a;b]$:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (a \le x \le b)$$

ֆունկցիան կոչվում է փոփոխական վերին սահմանով ինտեգրալ:

Ճշմարիտ են հետևյալ պնդումները.

ա) $F \in C[a;b]$;

բ) եթե f-ն $x_0 \in [a;b]$ կետում անընդհատ է, ապա F-ն այդ կետում դիֆերենցելի է և $F'(x_0) = f(x_0)$: Մասնավորապես, եթե $f \in C[a;b]$, ապա F-ն f-ի նախնական է:

Նյուտոն–Լայբնիցի բանաձևը: Դիցուք՝ $f \in \Re[a;b]$, f-ն $[a;b]$-ում ունի ոչ ավելի, քան վերջավոր թվով խզումներ և $F:[a;b] \to R$ ֆունկցիան f-ի (ընդհանրացված) նախնական է: Ճշմարիտ է հետևյալ բանաձևը.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a):$$

Մասերով ինտեգրում: Եթե $u(x)$ և $v(x)$ ֆունկցիաները $[a;b]$ հատվածում անընդհատ դիֆերենցելի են, ապա՝

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \left(u(x)v(x)\right)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx \ :$$

Փոփոխականի փոխարինում: Եթե $\varphi:[\alpha;\beta]\to[a;b]$ ֆունկցիան անընդհատ դիֆերենցելի է, $\varphi(\alpha)=a$ և $\varphi(\beta)=b$, ապա ցանկացած $f\in C[a;b]$ ֆունկցիայի համար $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ ֆունկցիան $[\alpha;\beta]$ միջակայքում ինտեգրելի է, ընդ որում

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \ :$$

Անիսկական ինտեգրալներ: Դիցուք $f:[a,\omega)\to R$ ($\omega\in R$ կամ $\omega=+\infty$) ֆունկցիան ցանկացած $[a;b]$ $(a<b<\omega)$ միջակայքում Ռիմանի իմաստով ինտեգրելի է:

Սահմանում: $\int_a^\omega f(x)dx$ սիմվոլն անվանում են $[a;\omega)$ միջակայքում f ֆունկցիայի *անիսկական ինտեգրալ*: Եթե գոյություն ունի $\lim\limits_{b\to\omega}\int_a^b f(x)dx$ սահմանը, ապա այն ընդունում են որպես $\int_a^\omega f(x)dx$ -ի արժեք և եթե այդ սահմանը վերջավոր է, ապա անիսկական ինտեգրալն անվանում են *զուգամետ*: Իսկ եթե նշված սահմանը գոյություն չունի կամ անվերջ է, ապա անիսկական ինտեգրալն անվանում են *տարամետ*: ω -ն անվանում են անիսկական ինտեգրալի կամ ընդինտեգրալ ֆունկցիայի *եզակիություն*:

Համանմանորեն սահմանվում է $\int_{\omega_1}^b f(x)dx$ անիսկական ինտեգրալը, որտեղ $\omega_1\in R$ կամ $\omega_1=-\infty$: Եթե $f:(\omega_1;\omega)\to R$ ֆունկցիան ցանկացած $[a;b]\subset(\omega_1;\omega)$ հատվածում Ռիմանի իմաստով ինտեգրելի է, ապա սահմանվում է նաև $\int_{\omega_1}^\omega f(x)dx$ անիսկական ինտեգրալը, որը համարվում է զուգամետ միայն այն դեպքում, երբ որևէ $c\in(\omega_1;\omega)$ թվի համար $\int_{\omega_1}^c f(x)dx$ և $\int_c^\omega f(x)dx$ անիսկական ինտեգրալները միաժամանակ զուգամետ են: Ընդ որում ընդունվում է՝

$$\int_{\omega_1}^\omega f(x)dx = \int_{\omega_1}^c f(x)dx + \int_c^\omega f(x)dx \ :$$

Եթե գոյություն ունի $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{-b}^{b} f(x)dx$ վերջավոր սահմանը, ապա այն անվանում են *անիսկական ինտեգրալի գլխավոր արժեք* և նշանակում՝ $v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$:

Համանմանորեն, տրված $\int\limits_{a}^{\omega} f(x)dx$ և $\int\limits_{\omega}^{b} f(x)dx$ $(a<\omega<b)$ անիսկական ինտեգրալների գումարը նույնպես անվանում են անիսկական ինտեգրալ և նշանակում՝ $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$: Այս գումարն էլ համարվում է զուգամետ միայն այն դեպքում, երբ գումարելիներից յուրաքանչյուրը զուգամետ է: Եթե գոյություն ունի $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_{a}^{\omega-\varepsilon} f(x)dx+\int\limits_{\omega+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right)$ վերջավոր սահմանը, ապա այն ընդունում են որպես *ինտեգրալի գլխավոր արժեք* և նշանակում՝ $v.p.\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$:

Անիսկական ինտեգրալի սահմանումն ադիտիվության սկզբունքով ընդհանրացվում է վերջավոր թվով եզակիություններ ունեցող ֆունկցիաների համար:

Գծայնության, ադիտիվության և մոնոտոնության հատկությունները զուգամետ անիսկական ինտեգրալների համար նույնությամբ պահպանվում են:

Մասերով ինտեգրման բանաձևը անիսկական ինտեգրալների համար: Դիցուք $u,v\in C^1[a;\omega)$: Եթե գոյություն ունի $\lim\limits_{x\to\omega-0}u(x)v(x)$ վերջավոր սահմանը, ապա $\int\limits_{a}^{\omega} u(x)v'(x)dx$ և $\int\limits_{a}^{\omega} u'(x)v(x)dx$ անիսկական ինտեգրալները միաժամանակ զուգամետ են կամ միաժամանակ տարամետ, ընդ որում առաջին դեպքում՝

$$\int\limits_{a}^{\omega} u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)\Big|_{a}^{\omega}-\int\limits_{a}^{\omega} u'(x)v(x)dx,$$

որտեղ

$$u(x)v(x)\Big|_{a}^{\omega}=\lim_{x\to\omega}u(x)v(x)-u(a)v(a):$$

Անիսկական ինտեգրալի զուգամիտության հայտանիշները: Դիցուք $f:[a;\omega)\to R$ ֆունկցիան կամայական $[a;b]\subset[a;\omega)$ հատվածում Ռիմանի իմաստով ինտեգրելի է:

Կոշիի սկզբունքը: Որպեսզի $\int\limits_{a}^{\omega} f(x)dx$ անիսկական ինտեգրալը լինի զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ կամայական $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունենա այնպիսի

$\Delta \in [a;\omega)$ թիվ, որ ցանկացած $b_1, b_2 \in [\Delta,\omega)$ կետերի համար տեղի ունենա $\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$ անհավասարությունը:

Սահմանում: $\int_a^{\omega} f(x)dx$ անիսկական ինտեգրալը կոչվում է *բացարձակ զուգամետ*, եթե զուգամետ է $\int_a^{\omega} |f(x)|dx$ ինտեգրալը: Բացարձակ զուգամետ անիսկական ինտեգրալը զուգամետ է: Եթե անիսկական ինտեգրալը զուգամետ է, բայց ոչ բացարձակ, ապա ասում են, որ այն *պայմանական զուգամետ* է:

Բաղդատման առաջին հայտանիշ: Դիցուք f և g ֆունկցիաները որոշված են $[a;\omega)$ միջակայքում և ցանկացած $[a;b]\subset[a;\omega)$ հատվածում ինտեգրելի են: Եթե $|f(x)|\le g(x)$ $(a\le x<\omega)$ և $\int_a^{\omega} g(x)dx$ -ը զուգամետ է, ապա $\int_a^{\omega} f(x)dx$ -ը բացարձակ զուգամետ է:

Բաղդատման երկրորդ հայտանիշ: Եթե f և g ֆունկցիաները $[a;\omega)$ միջակայքում ոչ բացասական են և գոյություն ունեն c_1, c_2 դրական հաստատուններ, այնպիսիք, որ $c_1 f(x)\le g(x)\le c_2 f(x)$, ապա $\int_a^{\omega} f(x)dx$ և $\int_a^{\omega} g(x)dx$ անիսկական ինտեգրալները միաժամանակ զուգամետ են կամ միաժամանակ տարամետ:

Աբելի հայտանիշը: Եթե $\int_a^{\omega} f(x)dx$ անիսկական ինտեգրալը զուգամետ է, իսկ $g:[a;\omega)\to R$ ֆունկցիան մոնոտոն է և սահմանափակ, ապա $\int_a^{\omega} f(x)g(x)dx$ -ը զուգամետ է:

Դիրիխլեի հայտանիշը: Եթե $F(z)=\int_a^{z} f(x)dx$ ֆունկցիան $[a;\omega)$ միջակայքում սահմանափակ է, իսկ $g:[a;\omega)\to R$ ֆունկցիան մոնոտոն ձգտում է զրոյի, երբ $x\to\omega-0$, ապա $\int_a^{\omega} f(x)g(x)dx$ ինտեգրալը զուգամետ է:

Ա

Տրոհելով տրված հատվածն n հավասար մասերի և տրոհման յուրաքանչյուր հատվածում որպես ξ_i կետ ընտրելով հատվածի միջնակետը՝ կազմել ֆունկցիայի ինտեգրալային գումարը և հաշվել այն (2013-2016).

2013. $y=1+x,\ x\in[-1;4]$:　　**2014.** $y=3x^2+3x,\ x\in[0;4]$:

2015. $y=\sin x,\ x\in[0;\pi]$:

2016. $y=\chi(x)$ (Դիրիխլեի ֆունկցիան է) ա) $x\in[-3;7]$; բ) $x\in\left[-\sqrt{2};1-\sqrt{2}\right]$:

Տրոհելով տրված հատվածն n հավասար մասերի՝ գտնել Դարբուի ստորին և վերին գումարները (2017-2020).

2017. $f(x)=2x-1,\ x\in[-2;5]$:　　**2018.** $f(x)=2^x,\ x\in[0;10]$:

2019. $f(x)=\cos x,\ x\in[0;\pi/2]$:　　**2020.** $f(x)=\chi(x),\ x\in[a;b]$:

Ընդունելով ինտեգրալի գոյությունը՝ հաշվել այն՝ որպես հարմար ձևով կազմված ինտեգրալային գումարների սահման (2021-2026).

2021. $\int\limits_{-1}^{2} x^2dx$:　　**2022.** $\int\limits_{0}^{\pi} \sin x dx$:

2023. $\int\limits_{0}^{1} a^x dx \quad (a>0)$:　　**2024.** $\int\limits_{0}^{\pi/2} \cos t dt$:

2025. $\int\limits_{a}^{b} \frac{dx}{x^2} \quad (0<a<b)$:　　**2026.** $\int\limits_{a}^{b} \frac{dx}{x} \quad (0<a<b)$:

Ցուցում: Վերջին երկուսում տրոհման կետերն ընտրել այնպես, որ դրանք կազմեն երկրաչափական պրոգրեսիա:

2027. Ելնելով ինտեգրալի սահմանումից՝ համոզվել, որ $[a;b]$ հատվածի վրա որոշված $y=C$ հաստատուն ֆունկցիան ինտեգրելի է և գտնել նրա ինտեգրալը:

2028. Ցանկացած հատվածում հաշվել Դիրիխլեի ֆունկցիայի Դարբուի ստորին և վերին ինտեգրալները և համոզվել, որ այդ ֆունկցիան ոչ մի հատվածում ինտեգրելի չէ:

2029. Դիցուք f-ն $[a;b]$ $(a<b)$ հատվածում ինտեգրելի է: Ապացուցել, որ $|f|$ ֆունկցիան այդ նույն հատվածում նույնպես ինտեգրելի է, ընդ որում՝

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|dx:$$

2030. Տրված է $f:[a;b]\to R$ ֆունկցիան: Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ եթե $|f|$-ն $[a;b]$-ում ինտեգրելի է, ապա f-ը նույնպես ինտեգրելի է:

Օգտվելով Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևից՝ հաշվել ինտեգրալը (2031-2040).

2031. $\int_{-1}^{8} \sqrt[3]{x}\,dx$:

2032. $\int_{0}^{\pi} \cos^2 2x\,dx$:

2033. $\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$:

2034. $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$:

2035. $\int_{sh1}^{sh2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$:

2036. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-2x\cos\alpha+1}$ $(0<\alpha<\pi)$:

2037. $\int_{0}^{\pi/4} \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$ $(ab\neq 0)$:

2038. $\int_{0}^{1} \frac{x^2}{1+x^6}dx$:

2039. $\int_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$:

2040. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\,dx$:

Հաջորդականության անդամները ներկայացնելով որպես որոշակի ֆունկցիայի ինտեգրալային գումարներ՝ գտնել հաջորդականության սահմանը (2041-2047).

2041. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$:

2042. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$:

2043. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$:

2044. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$:

2045. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{2n^2}\right)$:

2046. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$ $(p>0)$:

2047. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}$:

2048. Դիցուք՝ $f\in C[a;b]$, $\varphi:[\alpha;\beta]\to[a;b]$ և $\psi:[\alpha;\beta]\to[a;b]$ ֆունկցիաները դիֆերենցելի են: Ապացուցել փոփոխական վերին սահմաններով ինտեգրալի ածանցման հետևյալ կանոնը.

$$\frac{d}{dt}\int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(x)dx = f(\psi(t))\psi'(t) - f(\varphi(t))\varphi'(t):$$

Գտնել ածանցյալը (2049-2054).

2049. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^b \sin x^2 dx:$

2050. $\dfrac{d}{da}\displaystyle\int_a^b \sin x^2 dx:$

2051. $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^{t^2} \sqrt{1+x^2}\,dx:$

2052. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}:$

2053. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi x^2)dx:$

2054. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{x^4} e^{x^2} dx:$

Օգտվելով Լոպիտալի կանոնից՝ գտնել սահմանը (2055-2058).

2055. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos x^2 dx}{x^2+x}:$

2056. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\int_0^x (arctgx)^2 dx}{\sqrt{x^2+1}}:$

2057. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\left(\int_0^x e^{u^2} du\right)^2}{\int_0^x e^{2u^2} du}:$

2058. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{2x} \ln(1+t)dt}{\int_{x^4}^{x^2} \frac{\sin t}{t} dt}:$

2059. Հաշվել ինտեգրալը.

ա) $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx$, որտեղ $f(x)=\begin{cases} x^2, 0\le x\le 1, \\ 2-x, 1<x\le 2; \end{cases}$

բ) $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$, որտեղ $f(x)=\begin{cases} x, 0\le x\le t, \\ t\dfrac{1-x}{1-t}, t<x\le 1: \end{cases}$

Կատարելով մասերով ինտեգրում՝ հաշվել ինտեգրալը (2060-2067).

2060. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} xe^{-x} dx:$

2061. $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x dx:$

2062. $\int\limits_0^{2\pi} x^2 \cos x dx$:

2063. $\int\limits_0^1 \arccos x dx$:

2064. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx$:

2065. $\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x dx$:

2066. $\int\limits_1^2 x \ln x dx$:

2067. $\int\limits_{1/e}^{e} |\ln x| dx$:

Կատարելով փոփոխականի փոխարինում՝ հաշվել ինտեգրալը (2068-2073).

2068. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$:

2069. $\int\limits_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$:

2070. $\int\limits_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx$:

2071. $\int\limits_e^{e^2} \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$:

2072. $\int\limits_0^{\ln 2} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$:

2073. $\int\limits_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$:

2074. Հետևյալ ինտեգրալներում փոփոխականի նշված $x=\varphi(t)$ փոխարինումը բերում է սխալ արդյունքի: Պարզել պատճառը:

ա) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$, $x=\frac{1}{t}$;

բ) $\int\limits_{-1}^{1} (1+x^2) dx$, $x = ctgt$ $\left(-\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{4}\right)$:

2075. Կարելի՞ է արդյոք $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ ինտեգրալում $x=\sin t$ տեղադրում կատարելիս որպես t-ի փոփոխման սահմաններ վերցնել π-ն և $\frac{\pi}{2}$-ը:

2076. Ապացուցել, որ ցանկացած $f \in \Re[a;b]$ ֆունկցիայի համար

$$\int\limits_a^b f(x)dx = (b-a)\int\limits_0^1 f(a+(b-a)x)dx:$$

2077. Ապացուցել հավասարությունը.

$$\int_0^a x^3 f(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)dx \quad (f \in \Re[0;a^2],\ a>0):$$

2078. Ապացուցել, որ եթե $f \in \Re[-l;l]$ ֆունկցիան

ա) զույգ է, ապա $\int_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int_0^l f(x)dx$;

բ) կենտ է, ապա $\int_{-l}^{l} f(x)dx = 0$:

Գտնել ինտեգրալը (2079-2086).

2079. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$:

2080. $\int_0^1 \frac{x+3}{(x+1)^2}dx$:

2081. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$:

2082. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} tgx dx$:

2083. $\int_0^{\pi/2} \sin x \sin 2x \sin 3x dx$:

2084. $\int_0^{\ln 2} sh^4 x dx$:

2085. $\int_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx$:

2086. $\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx$:

2087. Օգտագործելով ադիտիվության և մոնոտոնության հատկությունները՝ պարզել, թե հետևյալ ինտեգրալներից ո՞րն է դրական և ո՞րը բացասական.

ա) $\int_{1/2}^{1} x^2 \ln x dx$;

բ) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$;

գ) $\int_{-2}^{2} x^3 2^x dx$;

դ) $\int_0^{2\pi} x \sin x dx$:

2088. Տրված երկու ինտեգրալներից ո՞րն է մեծ.

ա) $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$, $I_2 = \int_0^{\pi/2} x^2 dx$;

բ) $I_1 = \int_0^1 e^{-x} dx$, $I_2 = \int_0^1 e^{-x^2} dx$;

գ) $I_1=\int_0^{\pi} e^{-x^2}\cos^2 x dx$, $\quad I_2=\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2}\cos^2 x dx$:

2089. Դիցուք $f\in C[0;+\infty)$: Համաձայն միջին արժեքի առաջին թեորեմի՝

$$\int_0^x f(t)dt = x\cdot f(\xi(x)) \quad (0<\xi(x)<x):$$

Գտնել $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\xi(x)}{x}$ և $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\xi(x)}{x}$ սահմանները, եթե

ա) $f(t)=t^{\alpha}\quad(\alpha>0)$; բ) $f(t)=e^t$:

2090. Գնահատել հետևյալ ինտեգրալները.

ա) $I=\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{1+x}}dx$; բ) $I=\int_0^{100}\frac{e^{-x}}{x+100}dx$:

Օգտվելով միջին արժեքի երկրորդ թեորեմից՝ գնահատել ինտեգրալը (2091-2092).

2091. $I=\int_{100\pi}^{200\pi}\frac{\sin x}{x}dx$: **2092.** $I=\int_a^b e^{-x}\frac{\sin x}{x}dx\quad(0<a<b)$:

***

Հաշվել անիսկական ինտեգրալը (2093-2099).

2093. ա) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$; բ) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$:

2094. ա) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{4+x^2}$; բ) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$:

2095. ա) $\int_0^1\ln x dx$; բ) $\int_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$:

2096. ա) $\int_1^{+\infty}e^{-3x}dx$; բ) $\int_0^{+\infty}x2^{-x}dx$:

2097. ա) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x-2}$; բ) $\int_0^{+\infty}\frac{arctgx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$:

2098. ա) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}dx$; բ) $\int\limits_0^{4} \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$:

2099. ա) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$; բ) $\int\limits_0^{1} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$:

2100. Ստուգել, որ $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ $(a>0)$ անիսկական ինտեգրալը զուգամետ է միայն $p>1$ դեպքում, իսկ $\int_0^{a} \frac{dx}{x^p}$ $(a>0)$ ինտեգրալը՝ միայն $p<1$ դեպքում:

Հետազոտել անիսկական ինտեգրալի զուգամիտությունը (2101-2107).

2101. ա) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{x^4-x^2+1}$; բ) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$:

2102. ա) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{2+\cos x}{\sqrt{x}}dx$; բ) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}dx$:

2103. ա) $\int\limits_3^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}$; բ) $\int\limits_1^{\infty} \frac{tg\,\frac{1}{x}}{1+x\sqrt{x}}dx$:

2104. ա) $\int\limits_1^{+\infty} \left(1-\cos\frac{2}{x}\right)dx$; բ) $\int\limits_0^{1} \frac{e^x}{\sqrt{1-\cos x}}dx$:

2105. ա) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{arctgx}{x}dx$; բ) $\int\limits_0^{1} \frac{e^x}{\sqrt{1-x^3}}dx$:

2106. ա) $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{x-\sin x}$; բ) $\int\limits_0^{2} \frac{\ln\left(1+\sqrt[5]{x^3}\right)}{e^{\sin x}-1}dx$:

2107. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p+x^q}$:

2108. Գտնել տարամետ անիսկական ինտեգրալի գլխավոր արժեքը.

ա) $v.p.\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$; բ) $v.p.\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1-x^2}$;

գ) $v.p.\int\limits_{1/2}^{2}\frac{dx}{x\ln x}$; դ) $v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^2}dx$:

Բ

2109. Տրված է $f:[a;b]\to R$ ֆունկցիան: Ապացուցել ինտեգրելիության բավարար պայմանի հետևյալ ուժեղացումը. եթե կամայական $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի $[a;b]$ հատվածի $P=(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ տրոհում, այնպիսին, որ $\sum\limits_{i=0}^{n-1}\Omega_i\Delta x_i<\varepsilon$, ապա $f\in\Re[a;b]$:

2110. Ապացուցել ինտեգրելիության հետևյալ հայտանիշը. $f:[a;b]\to R$ սահմանափակ ֆունկցիան Ռիմանի իմաստով ինտեգրելի է այն և միայն այն դեպքում, երբ ցանկացած ε և δ դրական թվերի համար գոյություն ունի $[a;b]$ հատվածի տրոհում, որի այն հատվածների երկարությունների գումարը, որոնցից յուրաքանչյուրի վրա f-ի տատանումը մեծ է δ-ից, փոքր է ε-ից:

2111. Ապացուցել Դյուբուա-Ռայմոնի հայտանիշը. որպեսզի $[a;b]$ հատվածի վրա սահմանափակ f ֆունկցիան լինի Ռիմանի իմաստով ինտեգրելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ կամայական ε և δ դրական թվերի համար $[a;b]$ հատվածի բոլոր այն կետերի բազմությունը, որոնցից յուրաքանչյուրում f-ի տատանումը մեծ է δ-ից, հնարավոր լինի ծածկել վերջավոր թվով միջակայքերով, որոնց երկարությունների գումարը փոքր է ε-ից:

2112. Տրված է՝ $f,g\in\Re[a;b]$: Դիցուք $P=(x_0,x_1,\ldots,x_n)$-ը $[a;b]$ հատվածի տրոհում է և $\xi_i,\eta_i\in\Delta_i$ $(i=0,1,\ldots,n-1)$: Ապացուցել, որ

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i=\int\limits_a^b f(x)g(x)dx:$$

2113. Դիցուք՝ $f\in\Re[a;b]$: Ապացուցել, որ եթե $f^*:[a;b]\to R$ ֆունկցիան f - ից տարբերվում է միայն վերջավոր թվով կետերում, ապա $f^*\in\Re[a;b]$, ընդ որում՝

$$\int_a^b f^*(x)dx=\int_a^b f(x)dx:$$

Ապացուցել ֆունկցիայի ինտեգրելիությունը(2114-2116).

2114. $f(x)=\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$, երբ $x\in(0;1]$, $f(0)=0$:

2115. $f(x)=\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]$, երբ $x\in(0;1]$, $f(0)=0$:

2116. $f(x)=R(x)$ (Ռիմանի ֆունկցիան է), $x\in[a;b]$:

2117. Տրված է՝ $f\in\Re[a;b]$: Դիցուք յուրաքանչյուր $n\in N$ թվի համար $[a;b]$ հատվածը տրոհված է $x_i=a+i\frac{b-a}{n}$, $i=0,1,\ldots,n$, կետերով: Ապացուցել, որ $f_n(x)=\sup\limits_{t\in\Delta_i}f(t)$, երբ $x\in\Delta_i$, որտեղ $\Delta_0=[x_0;x_1]$, $\Delta_i=(x_i;x_{i+1}]$, $i=1,2,\ldots,n-1$, ֆունկցիաները $[a;b]$ հատվածի վրա ինտեգրելի են, ընդ որում՝

ա) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx$;

բ) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(x)-f(x)|dx=0$:

2118. Ապացուցել, որ ցանկացած $f\in\Re[a;b]$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունի $[a;b]$ հատվածի վրա անընդհատ $\varphi_n(x)$ $(n\in N)$ ֆունկցիաների հաջորդականություն, այնպիսին, որ

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b|\varphi_n(x)-f(x)|dx=0:$$

2119. Դիցուք՝ $f\in\Re[a;b]$ և $[c;d]\subset(a;b)$: Ապացուցել, որ f -ն օժտված է «ինտեգրալային անընդհատության» հետևյալ հատկությամբ.

$$\lim_{h\to0}\int_c^d|f(x+h)-f(x)|dx=0:$$

2120. Դիցուք $\varphi:[\alpha;\beta]\to[a;b]$ ֆունկցիան ինտեգրելի է և $f\in C[a;b]$: Ապացուցել, որ $f\circ\varphi\in\Re[\alpha;\beta]$:

2121. Ստուգել, որ եթե $f,g\in\Re[a;b]$, ապա $\max\{f;g\}\in\Re[a;b]$ և $\min\{f;g\}\in\Re[a;b]$:

2122. Դիցուք $f:[a;b]\to R$ ֆունկցիան ուռուցիկ է: Ապացուցել, որ $f\in\Re[a;b]$, ընդ որում՝

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le\frac{f(a)+f(b)}{2}:$$

2123. Տրված է՝ $f:[1;+\infty)\to R$ ֆունկցիան չնվազող է և գոգավոր: Ապացուցել, որ

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)=\frac{1}{2}f(n)+\int_1^n f(x)dx+O(1)\quad(n\to\infty):$$

2124. Դիցուք $f:[0;1]\to R$ ֆունկցիան մոնոտոն է: Ապացուցել, որ

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right)\quad(n\to\infty):$$

2125. Դիցուք՝ $f\in C^1[a;b]$ և

$$d_n=\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right):$$

Գտնել $\lim\limits_{n\to\infty} nd_n$ սահմանը:

2126. Դիցուք՝ $f\in\Re[a;b]$ և ամենուրեք՝ $f(x)\ge 0$: Ապացուցել, որ եթե $\int_a^b f(x)dx=0$, ապա f-ի բոլոր անընդհատության կետերում $f(x)=0$: Մասնավորապես, եթե $f\in C[a;b]$, ապա $f(x)\equiv 0$:

2127. Դիցուք՝ $\int_a^b f(x)dx>0$: Ապացուցել, որ գոյություն ունի $[c;d]\subset[a;b]$ $(c<d)$ հատված, որի վրա ամենուրեք՝ $f(x)>0$:

2128. Ապացուցել, որ եթե $f\in C[a;b]$ ֆունկցիան նույնաբար զրո չէ, ապա գոյություն ունի $[c;d]\subset[a;b]$ հատված, այնպիսին, որ $\int_c^d f(x)dx\ne 0$:

2129. Ստուգել, որ ցանկացած $f\in\Re[0;1]$ ֆունկցիայի համար՝

ա) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$;

բ) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$;

գ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\cos xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos^2 x)\cos xdx$:

2130. Տրված է՝ $f \in \Re[a;b]$ և ցանկացած $z \in [0;b-a]$ կետում $f(a+z) = f(b-z)$: Ստուգել, որ

$$\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx:$$

2131. Դիցուք $f: R \to R$ ֆունկցիան $[0;T]$ հատվածում ինտեգրելի է և ունի T պարբերություն: Ապացուցել, որ ցանկացած $a \in R$ թվի համար՝

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx:$$

2132. Դիցուք՝ $f \in C(R)$ և ցանկացած $a \in R$ թվի համար՝

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx \quad (T \neq 0):$$

Ապացուցել, որ f -ը T -պարբերական ֆունկցիա է:

2133. Տրված է՝ $f \in C[-l;l]$ և ցանկացած $0 < a \le l$ թվի համար

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx:$$

Ապացուցել, որ f -ը զույգ ֆունկցիա է:

2134. Ապացուցել, որ ցանկացած $n \in N$ թվի համար

$$F(x) = \int_0^x \sin^n tdt \quad \text{և} \quad G(x) = \int_0^x \cos^n tdt$$

ֆունկցիաները, երբ n-ը կենտ է, 2π -պարբերական ֆունկցիաներ են. իսկ երբ n-ը զույգ է, ապա դրանցից յուրաքանչյուրը ներկայացնում է մեկական գծային և պարբերական ֆունկցիաների գումար:

2135. Դիցուք $f \in C(R)$ ֆունկցիան ունի T պարբերություն: Ապացուցել, որ $F(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ ֆունկցիան կարելի է ներկայացնել որպես գծային ֆունկցիայի և T-պարբերական ֆունկցիայի գումար:

2136. Տրված է՝ f-ը ցանկացած $[0;a]$ հատվածում ինտեգրելի է և $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$: Գտնել սահմանը.

$$\text{ա)}\ \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)dx; \qquad \text{բ)}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt:$$

Գտնել գումարի սահմանը (2137-2140).

Ցուցում: Գումարելիներից յուրաքանչյուրում առանձնացնել բարձր կարգի անվերջ փոքրերը և գնահատելով դրանք՝ դեն նետել:

2137. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n^2}+\left(1+\frac{2}{n}\right)\sin\frac{2\pi}{n^2}+\cdots+\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\sin\frac{(n-1)\pi}{n^2}\right]$:

2138. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$:

2139. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}}{n^2}\quad (x>0)$:

2140. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)$:

2141. Ապացուցել անվերջ փոքրերի համարժեքությունը $(x\to+0)$.

$$\text{ա)}\ \int_0^{\sin x}\sqrt{tgt}\,dt \sim \int_0^{tgx}\sqrt{\sin t}\,dt; \qquad \text{բ)}\ \int_x^{x^2}\ln t\,dt \sim \int_{x^{2x}}^{x^x}\frac{dt}{t}:$$

2142. Գոյություն ունի՞ արդյոք $f \in \Re[0;1]$ ոչ բացասական ֆունկցիա, որը որևէ $\alpha \in R$ թվի համար բավարարում է

$$\int_0^1 f(x)dx=1,\ \int_0^1 xf(x)dx=\alpha \text{ և } \int_0^1 x^2 f(x)dx=\alpha^2$$

պայմաններին:

2143. Դիցուք f-ը $[0;+\infty)$ միջակայքում դրական և անընդհատ ֆունկցիա է: Ապացուցել, որ

$$\varphi(x)=\frac{\int\limits_0^x uf(u)du}{\int\limits_0^x f(u)du}$$

ֆունկցիան $(0;+\infty)$-ում աճող է:

2144. Ապացուցել անհավասարությունը.

ա) $\left|\int\limits_\alpha^{\alpha+1}\sin x^2dx\right|\le\frac{1}{\alpha}\quad(\alpha>0)$; բ) $\int\limits_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}}dx<\int\limits_0^1\frac{\cos x}{\sqrt{1+x^2}}dx$:

Հաշվել ինտեգրալը (2145-2150).

2145. $\int\limits_{1/2}^2\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$:

2146. $\int\limits_{e^{-2\pi n}}^1\left|\left(\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right)'\right|dx\quad(n\in N)$: **2147.** $\int\limits_0^\pi\frac{\sin^2 xdx}{1+2\alpha\cos x+\alpha^2}\quad(\alpha=const)$:

2148. $\int\limits_0^\pi\frac{\sin xdx}{\sqrt{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}}\quad(\alpha=const)$:

2149. $\int\limits_0^\pi\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$: **2150.** $\int\limits_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx$:

Ապացուցել հավասարությունը (2151-2152).

2151. $\int\limits_{-\pi}^\pi\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}dx=2\pi\,\mathrm{sgn}(1-r)\quad(r\in R_+)$:

2152. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\left(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x\right)^2}=\frac{\pi}{4}\frac{a^2+b^2}{a^3b^3}\quad(a,b>0)$:

2153. $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \qquad (n \in N, n \geq 2)$ ինտեգրալի համար ապացուցել $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ անդրադարձ բանաձևը:

2154. Հաշվել ինտեգրալը.

ա) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx$; բ) $\int\limits_0^{\pi} \sin^7 x dx$; գ) $\int\limits_0^{\pi} \cos^8 x dx$:

2155. Ստուգել, որ ցանկացած $n \in N$ թվի համար

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}, \text{ երբ } n \text{ - ը զույգ է}, \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, \text{ երբ } n \text{ - ը կենտ է}: \end{cases}$$

2156. Ապացուցել Վալիսի բանաձևը.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2n+1} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 = \frac{\pi}{2}:$$

2157. Ապացուցել եռանկյունաչափական համակարգի օրթոգոնալությունը $[-\pi;\pi]$ հատվածում.

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin kx dx =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 0 \quad (m, n, k \in Z_+, \ m \neq n):$$

2158. Ապացուցել Լեժանդրի բազմանդամների համակարգի (տես խնդիր 1179) օրթոգոնալությունը $[-1;1]$ հատվածում.

$$\int\limits_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0, \text{ երբ } m \neq n; \\ \frac{2}{2n+1}, \text{ երբ } m = n: \end{cases}$$

2159. $I_n = \int\limits_0^1 (\arccos x)^n dx$ ինտեգրալի համար ապացուցել

$$I_n = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - n(n-1) I_{n-2} \quad (n > 1)$$

անդրադարձ բանաձևը:

Ապացուցել, որ ցանկացած $n \in N$ թվի համար ճշմարիտ է հավասարությունը (2160-2163).

2160. ա) $\int_0^a \left(a^2 - x^2\right)^n dx = a^{2n+1} \cdot \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$;

բ) $\int_0^a \left(a^2 - x^2\right)^{\frac{2n-1}{2}} dx = a^{2n} \cdot \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \dfrac{\pi}{2} \quad (a > 0)$:

2161. ա) $\int_0^{\pi/2} \cos^n x \cos(n+2)x dx = 0$;

բ) $\int_0^{\pi/2} \cos^n x \sin(n+2)x dx = \dfrac{1}{n+1}$;

գ) $\int_0^{\pi/2} \sin^n x \cos(n+2)x dx = -\dfrac{1}{n+1} \sin\dfrac{\pi n}{2}$;

դ) $\int_0^{\pi/2} \sin^n x \sin(n+2)x dx = \dfrac{1}{n+1} \cos\dfrac{\pi n}{2}$:

2162. ա) $\int_0^{\pi/2} \cos^n x \sin nx dx = \dfrac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{2^k}{k}$;

բ) $\int_0^{\pi/2} \cos^n x \cos nx dx = \dfrac{\pi}{2^{n+1}}$:

2163. $\int_0^{2\pi} \sin(\sin x + nx) dx = 0 \quad (n \in Z)$:

Աստիճանի իջեցման եղանակով հաշվել ինտեգրալը (2164-2167).

2164. $I_{n,m} = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx \quad (m, n \in Z_+)$:

2165. $I_{n,m} = \int_0^1 x^m \ln^n x dx \quad (m, n \in N)$:

2166. $I_n = \int\limits_0^{\pi/4} tg^{2n} x dx \quad (n \in N)$:

2167. $I_n = \int\limits_0^{\pi/4} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \right)^{2n+1} dx \quad (n \in N)$:

2168. Դիցուք՝ $u, v \in C^{n+1}[a;b]$: Ապացուցել մասերով ինտեգրման բանաձևի հետևյալ ընդհանրացումը.

$$\int\limits_a^b u(x) v^{(n+1)}(x) dx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x) \Big|_a^b - (-1)^n \int\limits_a^b u^{(n+1)}(x) v(x) dx:$$

2169. Դիցուք՝ $f \in C^{n+1}[a;b]$ և $x_0, x \in [a;b]$: Ապացուցել Թեյլորի բանաձևը՝ մնացորդային անդամի ինտեգրալային տեսքով.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{1}{n!} \int\limits_{x_0}^{x} (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt:$$

Գտնել ֆունկցիայի ընդհանրացված նախնականը (2170-2173).

2170. $\int \operatorname{sgn}(\sin x) dx$:

2171. $\int x[x] dx$:

2172. $\int (x - [x]) dx$:

2173. $\int (-1)^{[x]} dx$:

Հաշվել ինտեգրալը (2174-2177).

2174. $\int\limits_0^2 [e^x] dx$:

2175. $\int\limits_1^{n+1} \ln[x] dx \quad (n \in N)$:

2176. $\int\limits_0^{\pi} x \operatorname{sgn}(\cos x) dx$:

2177. $\int\limits_0^6 [x] \sin \frac{\pi x}{6} dx$:

Ապացուցել անհավասարությունը (2178-2183).

2178. $\int\limits_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx > 0$:

2179. $\int\limits_{\pi/2}^{x} \frac{\cos u}{u} du < 0 \quad \left(x > \frac{\pi}{2} \right)$:

2180. $\int\limits_1^2 2^{\frac{1}{x}} dx < 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$:

2181. $\int\limits_0^{\pi} e^{\sin^2 \varphi} d\varphi > \frac{3\pi}{2}$:

2182. $\int\limits_0^{\pi/2} e^{-R \sin \varphi} d\varphi < \frac{\pi}{2R} \left(1 - e^{-R} \right) \quad (R > 0)$:

2183. $\int\limits_a^b e^{-x^2}dx < \frac{1}{2a}e^{-a^2} \quad (0 < a < b)$:

2184. Ապացուցել միջին արժեքի ընդհանրացված թեորեմի հետևյալ ճշգրտումը. եթե $f \in C[a;b]$, $g \in \Re[a;b]$ և $g(x) \geq 0 \quad (a \leq x \leq b)$, ապա գոյություն ունի $\xi \in [a;b]$ կետ, այնպիսին, որ

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int\limits_a^b g(x)dx:$$

2185. Տրված է՝ $f \in C[a;b]$, $g \in C^1[a;b]$ և g-ն $[a;b]$-ում չնվազող է: Օգտվելով նախորդ խնդրից և կատարելով մասերով ինտեգրում՝ ապացուցել միջին արժեքի երկրորդ թեորեմը:

***

Աստիճանի իջեցման եղանակով հաշվել անիսկական ինտեգրալը (2186-2190).

2186. $I_n = \int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx$:

2187. $I_n = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)}$:

2188. $I_n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^n} \quad (ac - b^2 > 0)$:

2189. $I_n = \int\limits_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$:

2190. $I_n = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{ch^{n+1}x}$:

2191. Հաշվել ինտեգրալը.

ա) $\int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin x dx$;

բ) $\int\limits_0^{\pi/2} \ln\cos x dx$;

գ) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x ctg x dx$;

դ) $\int\limits_0^1 \frac{\ln x dx}{\sqrt{1-x^2}}$:

2192. Ապացուցել, որ

ա) $\int\limits_0^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right)dx = \frac{1}{a}\int\limits_0^{+\infty} f\left(\sqrt{x^2+4ab}\right)dx \quad (a, b > 0)$;

բ) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right)dx$,

ենթադրելով, որ ձախ կողմում գրված ինտեգրալները զուգամետ են:

Հետազոտել անիսկական ինտեգրալի զուգամիտությունը (2193-2204)

2193. $\int\limits_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^4}}$:

2194. $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx$:

2195. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$:

2196. $\int\limits_0^{+\infty} x^p |x-1|^q dx$:

2197. $\int\limits_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx$:

2198. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$:

2199. $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x (\ln\ln x)^r}$:

2200. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}dx$:

2201. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$:

2202. ա) $\int\limits_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}dx$; բ) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx$:

2203. ա) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{b^2+x^2}dx$; բ) $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}dx$:

2204. ա) $\int\limits_0^{\infty} e^{\sin x} \frac{\sin 2x}{x^\alpha}dx$; բ) $\int\limits_1^{\infty} (\ln x)^\alpha \frac{\sin x}{x}dx$:

2205. Ապացուցել, որ $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ ինտեգրալը բացարձակ զուգամետ է $\alpha > 1$ դեպքում, պայմանական զուգամետ՝ $0 < \alpha \le 1$ դեպքում:

Հետազոտել անիսկական ինտեգրալի պայմանական և բացարձակ զուգամիտությունը (2206-2210).

2206. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$:   **2207.** $\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2 dx$:

2208. $\int\limits_0^{+\infty} \sin x^n dx$:   **2209.** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^q}{x^p} dx$:

2210. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$, $q \geq 0$:

2211. Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ եթե $\int_a^{+\infty} f(x)dx$-ը զուգամետ է, ապա

ա) $f(x) \to 0$ երբ $x \to +\infty$;

բ) f-ը սահմանափակ է $+\infty$-ի շրջակայքում:

Բերել համապատասխան օրինակներ:

2212. Դիցուք՝ $f \in C^1[a;+\infty)$, $|f'(x)| \leq M \quad (x \geq a)$ և $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$-ը զուգամետ է: Ապացուցել, որ $f(x) \to 0$, երբ $x \to +\infty$:

2213. Ապացուցել, որ եթե f-ը $[a;+\infty)$-ում մոնոտոն է և $\int_a^{+\infty} f(x)dx$-ը զուգամետ է, ապա $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$, երբ $x \to +\infty$:

2214. Կարելի՞ է արդյոք $f:[a;b] \to R$ ֆունկցիայի զուգամետ անիսկական ինտեգրալը՝ $\int_a^b f(x)dx$-ը, սահմանել որպես ինտեգրալային գումարների սահման:

2215. Դիցուք f-ը $(0;1]$ միջակայքում մոնոտոն և զրոյի շրջակայքում անսահմանափակ ֆունկցիա է: Ապացուցել, որ եթե $\int_0^1 f(x)dx$-ը զուգամետ է, ապա

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int\limits_0^1 f(x)dx:$$

Օգտվելով այս փաստից՝ հաշվել $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$-ը:

2216. Տրված է՝ $f \in C[1;+\infty)$: Ապացուցել, որ եթե $\int_1^{+\infty} xf(x)dx$-ը զուգամետ է, ապա զուգամետ է նաև $\int_1^{+\infty} f(x)dx$-ը:

2217. Դիցուք $f: R \to R$ ֆունկցիան ցանկացած հատվածում ինտեգրելի է, ունի T պարբերություն և $\int_0^T f(x)dx = 0$: Ապացուցել, որ եթե g-ն $[a;+\infty)$-ում մոնոտոն է և $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, ապա $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$-ը զուգամետ է:

2218. Դիցուք f և g ֆունկցիաները $[a;\omega)$ միջակայքի ցանկացած հատվածում ինտեգրելի են: Ապացուցել, որ եթե $\int_a^{\omega} f^2(x)dx$ և $\int_a^{\omega} g^2(x)dx$ ինտեգրալները զուգամետ են, ապա զուգամետ է նաև $\int_a^{\omega} f(x)g(x)dx$ ինտեգրալը, ընդ որում՝

$$\left[\int_a^{\omega} f(x)g(x)dx\right]^2 \le \int_a^{\omega} f^2(x)dx \cdot \int_a^{\omega} g^2(x)dx:$$

Գ

2219. Ապացուցել, որ եթե $f:[a;b] \to R$ ֆունկցիան $[a;b]$ հատվածի յուրաքանչյուր կետում ունի վերջավոր սահման, ապա $f \in \Re[a;b]$:

2220. Ապացուցել, որ եթե $f:[a;b] \to R$ ֆունկցիայի խզումները առաջին սեռի են, ապա $f \in \Re[a;b]$:

2221. Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ տրված հատվածում նախնական ունեցող ցանկացած ֆունկցիա այդ հատվածում Ռիմանի իմաստով ինտեգրելի է: Բերել համապատասխան օրինակ:

2222. Կառուցել $f \in \Re[0;1]$ և $\varphi:[0;1] \to [0;1]$ ֆունկցիաներ, այնպիսիք, որ φ-ն խիստ մոնոտոն է և դիֆերենցելի, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$, սակայն

$$\int_0^1 f(x)dx \ne \int_0^1 f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

այն պատճառով, որ աջ կողմում ինտեգրալը գոյություն չունի:

2223. Դիցուք $f:[a;b]\to R_+$ ֆունկցիան Ռիմանի իմաստով ինտեգրելի է: Ապացուցել, որ ցանկացած $p>1$ թվի համար $f^p(x)$ ֆունկցիան $[a;b]$ հատվածում նույնպես ինտեգրելի է և գտնել

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{(\Delta x_i)^{p-1}}\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt\right)^p$$

սահմանը, որտեղ $P=(x_0;x_1;...;x_n)$-ն $[a;b]$-ի տրոհում է:

2224. Դիցուք $f\in C[a;b]$ ֆունկցիան աճող է և դրական: Ապացուցել, որ

$$\int_a^b f(x)dx+\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)dy=bf(b)-af(a):$$

2225. Ապացուցել, որ եթե $f\in\Re[0;1]$, ապա ցանկացած $\alpha\in[0;1]$ թվի համար

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+\alpha}{n}} f(x)dx=\alpha\int_0^1 f(x)dx:$$

2226. Դիցուք $f:[0;1]\to R$ ֆունկցիան չաճող է: Ապացուցել, որ ցանկացած $\alpha\in[0;1]$ թվի համար $\int_0^\alpha f(x)dx\ge\alpha\int_0^1 f(x)dx$:

2227. Ապացուցել, որ եթե $f:[0;a]\to R$ ֆունկցիան չնվազող է, ապա $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$ ֆունկցիան $(0;a]$ միջակայքում չնվազող է:

2228. Դիցուք $f:R_+\to R$ ֆունկցիան չնվազող է և $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=A$: Ապացուցել, որ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$:

2229. Ապացուցել, որ եթե $f:[a;b]\to R$ ֆունկցիան չնվազող է, ապա ցանկացած $x\in(a;b)$ թվի համար

$$\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\le\frac{1}{b-x}\int_x^b f(t)dt:$$

2230. Դիցուք f և g ֆունկցիաները որոշված են $[0;1]$ հատվածում, ընդ որում՝ f-ը չնվազող է, իսկ g-ն՝ չաճող: Ապացուցել անհավասարությունը.

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx \le \int_0^1 f(x)dx \cdot \int_0^1 g(x)dx :$$

2231. Ապացուցել, որ եթե $[0;1]$ հատվածում որոշված f և g ֆունկցիաները երկուսն էլ չնվազող են կամ՝ երկուսն էլ չաճող, ապա

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx \ge \int_0^1 f(x)dx \cdot \int_0^1 g(x)dx :$$

2232. Դիցուք՝ $f \in C^1[0;1]$ և $f(1)-f(0)=1$: Ապացուցել, որ $\int_0^1 (f'(x))^2 dx \ge 1$:

2233. Դիցուք՝ $f \in C^1[0;1]$ և $f(1)=0$: Ապացուցել, որ

$$\int_0^1 (f'(x))^2 dx \ge 3\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 :$$

2234. Տրված է՝ $f \in C^1[a;b]$ և $f(a)=f(b)=0$: Ապացուցել, որ

$$\max_{a\le x\le b}|f'(x)| \ge \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|dx :$$

2235. Դիցուք f -ը $[0;1]$ հատվածում նվազող և դրական ֆունկցիա է: Ապացուցել անհավասարությունը.

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)dx}{\int_0^1 xf(x)dx} \le \frac{\int_0^1 f^2(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx} :$$

2236. Դիցուք $f \in C[0;1]$ ֆունկցիան գոգավոր է, դրական և $f(0)=1$: Ապացուցել, որ

$$\int_0^1 xf(x)dx \le \frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 :$$

2237. Տրված է՝ $f \in \Re[a;b]$ և $\inf\limits_{x\in[a;b]} f(x) > 0$: Ապացուցել $[a;b]$ հատվածում f ֆունկցիայի «միջին երկրաչափական» և «միջին թվաբանական» արժեքների միջև հետևյալ անհավասարությունը.

$$\exp\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx\right\} \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \qquad \left(\exp\{u\}=e^u\right):$$

2238. Դիցուք $f \in C(R)$ ֆունկցիան դրական է և 1-պարբերական: Ապացուցել, որ ցանկացած $a \in R$ թվի համար՝

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x+a)}dx \ge 1:$$

2239. Դիցուք՝ $f, g \in \Re[a;b]$: Օգտվելով գումարների համար Հյոլդերի անհավասարությունից (տես խնդիր 1499)՝ ապացուցել Հյոլդերի անհավասարությունն ինտեգրալների համար.

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

որտեղ $p, q > 1$ և $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$:

2240. Դիցուք՝ $f, g \in \Re[a;b]$ և $p \ge 1$: Օգտվելով գումարների համար Մինկովսկու անհավասարությունից (տես խնդիր 1500)՝ ապացուցել Մինկովսկու անհավասարությունն ինտեգրալների համար.

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}:$$

Ցույց տալ, որ $0 < p < 1$ դեպքում գրված անհավասարությունը փոխարինվում է հակադիր անհավասարությամբ:

2241. Դիցուք՝ $f, g \in C[a;b]$: Ապացուցել, որ եթե ցանկացած $x \in [a;b]$ կետում $f(x) = \int_a^x f(t)g(t)dt$, ապա $f(x) \equiv 0$:

2242. Դիցուք՝ $f \in C[a;b]$ և $\int_a^b f(x)dx = 0$: Ապացուցել, որ գոյություն ունի $\xi \in (a;b)$ կետ, այնպիսին, որ $\int_a^\xi f(x)dx = f(\xi)$:

2243. Տրված է՝ $f \in C^1[0;1]$ և $f'(0) \ne 0$: Դիցուք $\xi(x)$ ֆունկցիան բավարարում է $\int_0^x f(t)dt = xf(\xi(x))$ և $0 \le \xi(x) \le x$ պայմաններին: Գտնել $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi(x)}{x}$-ը:

2244. Տրված է՝ $f \in C[a;b]$: Ապացուցել, որ

$$\lim_{p\to+\infty}\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \max_{a\le x\le b}|f(x)|:$$

2245. Դիցուք՝ $f \in C[0;1]$ և ամենուրեք՝ $f(x)>0$: Նշանակենք՝

$$F(\alpha)=\int_0^1 [f(x)]^\alpha dx:$$

Հաշվել $\lim\limits_{\alpha\to+0}\dfrac{\ln F(\alpha)}{\alpha}$-ն:

2246. Դիցուք՝ $f,g \in C[0;1]$ և ամենուրեք՝ $g(x)>0$: Գտնել սահմանը.

ա) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\int_0^1 x^n f(x)dx}{\int_0^1 x^n g(x)dx}$; բ) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_0^1 \sqrt[n]{g(x)}dx\right)^n$:

2247. $\varphi:[a;b]\to R$ ֆունկցիան կոչվում է *կտոր առ կտոր հաստատուն* կամ *աստիճանաձև* ֆունկցիա, եթե գոյություն ունի $[a;b]$ հատվածի այնպիսի $P=(x_0;x_1;...;x_n)$ տրոհում, որ $(x_i;x_{i+1})$ միջակայքերից յուրաքանչյուրի վրա φ-ն հաստատուն է:

Դիցուք՝ $f \in \Re[a;b]$: Ապացուցել, որ ցանկացած $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի $[a;b]$-ում կտոր առ կտոր հաստատուն φ և ψ ֆունկցիաների զույգ, այնպիսին, որ $\varphi(x)\le f(x)\le\psi(x)$ $(x\in[a;b])$ և

$$\int_a^b \psi(x)dx-\int_a^b \varphi(x)dx<\varepsilon:$$

2248. Տրված է՝ $f \in \Re[a;b]$: Ապացուցել, որ

ա) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx dx=0$;

բ) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)|\sin nx|dx=\dfrac{2}{\pi}\int_a^b f(x)dx$:

2249. Դիցուք՝ $f \in \Re[0;1]$, իսկ $g \in C(R)$ ֆունկցիան T-պարբերական է: Ապացուցել, որ

$$\lim_{\alpha \to \infty} \int_0^1 f(x) g(\alpha x) dx = \frac{1}{T} \int_0^T g(x) dx \cdot \int_0^1 f(x) dx :$$

2250. Ապացուցել, որ եթե $f \in \Re[a;b]$ և $x_0 \in (a;b)$ կետում f-ն ունի առաջին սեռի խզում, ապա $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ ֆունկցիան x_0 կետում դիֆերենցելի չէ: Ցույց տալ, որ x_0-ում F-ն ունի սիմետրիկ ածանցյալ (տես խնդիր 1573) և

$$F_s'(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2} :$$

2251. Ապացուցել, որ եթե $f \in C(a;b)$ և ցանկացած $x \in (a;b)$ կետում

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h^2} \int_0^h [f(x+t) - f(x)] dt = 0 ,$$

ապա f-ը հաստատուն ֆունկցիա է:

2252. Դիցուք $f \in C[a;b]$ և ցանկացած $[\alpha;\beta] \subset [a;b]$ հատվածի համար

$$\left| \int_\alpha^\beta f(x) dx \right| \le M |\alpha - \beta|^{1+\delta} ,$$

որտեղ M-ը և δ-ն դրական հաստատուններ են: Ապացուցել, որ $f(x) \equiv 0$:

2253. Դիցուք x_n $(n \in N)$ հաջորդականության բոլոր անդամները $[0;1]$ հատվածից են: Տրված $(\alpha;\beta) \subset [0;1]$ միջակայքի համար նշանակենք $\nu_n(\alpha,\beta)$-ով x_n հաջորդականության այն անդամների քանակը, որոնք ընկած են $(\alpha;\beta)$-ի մեջ և որոնց համարները չեն գերազանցում n-ը:

Կասենք, որ x_n հաջորդականությունը $[0;1]$ հատվածում հավասարաչափ է բաշխված, եթե ցանկացած $(\alpha;\beta) \subset [0;1]$ միջակայքի համար $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\nu_n(\alpha,\beta)}{n} = \beta - \alpha$: Ապացուցել, որ x_n հաջորդականությունը $[0;1]$-ում հավասարաչափ է բաշխված այն և միայն այն դեպքում, երբ ցանկացած $f \in \Re[0;1]$ ֆունկցիայի համար

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} = \int_0^1 f(x) dx :$$

2254. Գտնել սահմանը. $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\cos x^n dx$:

2255. Հաշվել ինտեգրալը.

ա) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}$; բ) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{(x^{\alpha}+1)(x^2+1)}$ $(\alpha>0)$;

գ) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x^2)^2}dx$; դ) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{\pi^2-x^2}dx$:

2256. Ցանկացած $n\in N$ թվի համար հաշվել ինտեգրալը.

ա) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}d\varphi$; բ) $\int\limits_{0}^{\pi}\left(\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}\right)^2 d\varphi$:

2257. Ստուգել, որ ցանկացած n-րդ աստիճանի $P(x)$ հանրահաշվական բազմանդամի համար

$$\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-x}P(x)dx=P(0)+P'(0)+\cdots+P^{(n)}(0):$$

2258. Դիցուք $P(x)$-ը n-րդ աստիճանի հանրահաշվական բազմանդամ է: Ապացուցել, որ եթե $\int_0^1 x^k P(x)dx=0$ $(k=1,2,\ldots,n)$, ապա

$$\int\limits_{0}^{1}P^2(x)dx=(n+1)^2\left(\int\limits_{0}^{1}P(x)dx\right)^2:$$

2259. Դիցուք $f\in C[1;+\infty)$ ֆունկցիան T-պարբերական է: Ընտրել α պարամետրի արժեքն այնպես, որ $\int_1^{+\infty}\left(f(x^2)+\alpha\right)dx$ ինտեգրալը լինի զուգամետ:

2260. Տրված է՝ $f\in C[0;+\infty)$, $f(x)>0$ $(x\ge 0)$ և $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{f(x)}$-ը զուգամետ է: Ապացուցել, որ

$$\lim_{a\to+\infty}\frac{1}{a^2}\int\limits_{0}^{a}f(x)dx=+\infty:$$

2261. Դիցուք $f \in C^1[0;+\infty)$ և ամենուրեք՝ $f(x) > 0$: Ապացուցել, որ

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+f'^2(x)}}{f(x)} dx = +\infty :$$

2262. Դիցուք $f \in C^1[0;+\infty)$ և ամենուրեք՝ $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$: Ապացուցել, որ եթե $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{f(x)+f'(x)} < +\infty$ (զուգամետ է), ապա $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{f(x)} < +\infty$:

2263. Տրված է՝ $f:(0;a) \to R$ ֆունկցիան մոնոտոն է, իսկ $\int_0^a x^p f(x)dx$ -ը՝ զուգամետ: Ապացուցել, որ $\lim\limits_{x\to 0} x^{p+1} f(x) = 0$:

2264. Դիցուք՝ $f \in C(R_+)$, $\int_0^{+\infty} f^2(x)dx < +\infty$ և $g(x) = f(x) - 2e^{-x}\int_0^x e^z f(z)dz$: Ապացուցել, որ

$$\int_0^{+\infty} g^2(x)dx = \int_0^{+\infty} f^2(x)dx :$$

Գլուխ 9

Ինտեգրալի կիրառություններ

Սեղանակերպի մակերես: Դիցուք՝ $f\in\Re[a;b]$ և $f(x)\ge 0$: Դեկարտյան հարթության վրա

$$\begin{cases} a\le x\le b, \\ 0\le y\le f(x) \end{cases}$$

անհավասարություններով որոշվող պատկերի (սեղանակերպի) S մակերեսը որոշվում է

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

բանաձևով:

Եթե $y=f(x)$ ֆունկցիան տրված է $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ $(\alpha\le t\le\beta)$ պարամետրական հավասարումներով, $\varphi\in C^1[\alpha;\beta]$, $\varphi'(t)\ge 0$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, $\psi\in C[\alpha;\beta]$ և $\psi(t)\ge 0$, ապա

$$S=\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt:$$

Սեկտորի մակերես: Բևեռային կոորդինատների համակարգում $r=r(\varphi)$ $(\varphi_0\le\varphi\le\phi, 0<\phi-\varphi_0\le 2\pi)$ անընդհատ ֆունկցիայի գրաֆիկով և $\varphi=\varphi_0$, $\varphi=\phi$ ճառագայթներով սահմանափակված պատկերի (սեկտորի) մակերեսը որոշվում է

$$S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\phi} r^2(\varphi)d\varphi$$

բանաձևով:

Կորի երկարություն: Դիցուք տարածական L կորը տրված է $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\lambda(t)$ $(\alpha\le t\le\beta)$ պարամետրական հավասարումներով: Եթե $\varphi,\psi,\lambda\in C^1[\alpha;\beta]$, ապա L կորի երկարությունը որոշվում է

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\lambda'^2(t)}dt$$

բանաձևով:

Հարթ կորի դեպքում $(\lambda(t)\equiv 0)$ կորի երկարության բանաձևն ընդունում է

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$$

տեսքը: Մասնավորապես, $f\in C^1[a;b]$ ֆունկցիայի գրաֆիկն ունի

$$l=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(t)}dt$$

երկարություն:

Եթե L հարթ կորը բևեռային կոորդինատների համակարգում տրված է $r=r(\varphi)$ $(\varphi_0\le\varphi\le\phi)$ հավասարումով, որտեղ $r(\varphi)$ ֆունկցիան անընդհատ դիֆերենցելի է, ապա

$$l=\int_{\varphi_0}^{\phi}\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}d\varphi:$$

Պտտման մարմնի ծավալը: Տրված $f\in C[a;b]$ ֆունկցիայի գրաֆիկով և $x=a$, $x=b$, $y=0$ ուղիղներով սահմանափակված պատկերն Ox առանցքի շուրջը պտտելիս առաջացած մարմնի V ծավալը որոշվում է

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

բանաձևով:

Պտտման մակերևույթի մակերեսը: Տրված $f\in C^1[a;b]$ ֆունկցիայի գրաֆիկն Ox առանցքի շուրջը պտտելիս առաջացած մակերևույթի S մակերեսը որոշվում է

$$S=2\pi\int_a^b|f(x)|\sqrt{1+f'^2(x)}dx$$

բանաձևով:

Ինտեգրալի կիրառությունները մեխանիկայում: Դիցուք $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t_0\le t\le T$, l երկարությամբ կորի երկայնքով բաշխված է $\rho=1$ հաստատուն խտությամբ զանգված: Հետևյալ բանաձևերով հաշվում են.

կորի ստատիկ մոմենտները Ox և Oy առանցքների նկատմամբ՝

$$M_x=\int_{t_0}^{T}\psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt,\qquad M_y=\int_{t_0}^{T}\varphi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt,$$

ծանրության կենտրոնի կոորդինատները՝

$$x_c=\frac{M_y}{l},\qquad y_c=\frac{M_x}{l},$$

իներցիայի մոմենտները Ox և Oy առանցքների նկատմամբ՝

$$I_x=\int_{t_0}^{T}\psi^2(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt,\qquad I_y=\int_{t_0}^{T}\varphi^2(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt:$$

Դիցուք P պատկերը տրված է հետևյալ անհավասարումներով՝

$a\le x\le b$, $f_1(x)\le y\le f_2(x)$,

որտեղ $f_1,f_2\in C[a;b]$: Եթե P-ի վրա բաշխված է $\rho=1$ հաստատուն խտությամբ զանգված, ապա պատկերի m զանգվածը, M_x և M_y ստատիկ մոմենտները, ծանրության կենտրոնի x_c և

y_c կոորդինատները, ինչպես նաև իներցիայի I_x և I_y մոմենտները հաշվում են հետևյալ բանաձևերով.

$$m=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx:$$

$$M_x=\frac{1}{2}\int_a^b \left(f_2^2(x)-f_1^2(x)\right)dx, \quad M_y=\int_a^b x(f_2(x)-f_1(x))dx:$$

$$x_c=\frac{M_y}{m}, \quad y_c=\frac{M_x}{m}:$$

$$I_x=\frac{1}{3}\int_a^b \left(f_2^3(x)-f_1^3(x)\right)dx, \quad I_y=\int_a^b x^2(f_2(x)-f_1(x))dx:$$

Ա

Այս գլխի խնդիրներում հանդիպող պարամետրերը դրական են:

Հաշվել տրված կորերով սահմանափակված սեղանակերպի մակերեսը (2265-2268).

2265. $y=\sin x$, $y=0$, $x=0$, $x=\pi$:

2266. $y=e^{-x}$, $y=0$, $x=0$, $x=a$:

2267. $y=xe^{x}$, $y=0$, $x=1$:

2268. $y=|\log_a x|$, $y=0$, $x=\dfrac{1}{a}$, $x=a$ $(a>1)$:

Հաշվել տրված կորերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը (2269-2282).

2269. $y=x^2$, $x+y=2$:

2270. $y=x-\dfrac{\pi}{2}$, $y=\cos x$, $x=0$:

2271. $y=\sin^2 x$, $y=x\sin x$ $(0\le x\le\pi)$:

2272. $y=\ln(1+x)$, $y=-xe^{-x}$, $x=1$:

2273. $y=\sin^3 x+\cos^3 x$, $y=0$ $\left(-\dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{3\pi}{4}\right)$:

2274. $y=|x|^3 e^{-x^2}$, $|x|=a$, $y=0$:

2275. $x=y^2(y-1)$, $x=0$:

2276. $x^2+y^2=2$, $y^2=2x-1$ $\left(x\ge\dfrac{1}{2}\right)$:

2277. $y=(x+1)^2$, $x=\sin \pi y$, $y=0$ $(0\le y\le 1)$:

2278. $y=x$, $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{10}{3}-x$ $(x\ge 1)$:

2279. $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=0$:

2280. $y=\sqrt{3}x^2$, $y=\sqrt{4-x^2}$:

2281. $y=x^2$, $y=x^2+x-1$, $y=\frac{5}{2}x$ $(y\le x^2)$:

2282. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$:

2283. Դիցուք՝ $y(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ և $y(x)\ge 0$, երբ $x_1\le x\le x_2$: Ապացուցել, որ $0\le y\le y(x)$, $x_1\le x\le x_2$ անհավասարություններով որոշվող պատկերի մակերեսը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով (Սիմպսոնի բանաձև).

$$S=\frac{1}{6}(x_2-x_1)\left[y(x_1)+y(x_2)+4y\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right]:$$

Հաշվել կորի երկարությունը (2284-2290).

2284. $y=x^{\frac{3}{2}}$, $0\le x\le 4$:

2285. $y=e^x$, $0\le x\le \ln 7$:

2286. $y=\frac{x^2}{2}-\frac{\ln x}{4}$, $1\le x\le 3$:

2287. $y=\ln\sin x$, $\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{2\pi}{3}$:

2288. $y=\ln(x^2-1)$, $2\le x\le 5$:

2289. $y=\arcsin e^x$, $-\ln 7\le x\le -\ln 2$:

2290. $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$, $0\le x\le\frac{9}{16}$:

Հաշվել պարամետրական հավասարումներով տրված կորի երկարությունը (2291-2298).

2291. $x=6-3t^2$, $y=4t^3$ $(x\ge 0)$:

2292. $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $0\le t\le 2\pi$ (աստղաձև գիծ):

2293. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$ (ցիկլոիդ):

2294. $x=2a\sin^2 t$, $y=2a\cos t$:

2295. $x=6at^5$, $y=5at(1-t^8)$, $A(0;0)$ կետից մինչև $B(6a;0)$ կետը:

2296. $x=ae^{bt}\cos t$, $y=ae^{bt}\sin t$, $0\le t\le\pi$:

2297. $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$, $0\le t\le T$:

2298. $x = ch^3t$, $y = sh^3t$, $0 \le t \le T$:

Հաշվել տարածական կորի երկարությունը (2299-2304).

2299. $x = 2a\cos t$, $y = 2a\sin t$, $z = at$, $0 \le t \le 2\pi$:

2300. $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = \sqrt{2}t$, $0 \le t \le T$:

2301. $x = \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2$, $y = -\frac{4}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2$, $z = \frac{1}{3}t^3 + t^2$, $0 \le t \le 1$:

2302. $x = e^t(\cos t + \sin t)$, $y = e^t(\cos t - \sin t)$, $z = e^t$, $0 \le t \le 2\pi$:

2303. $x = acht$, $y = bsht$, $z = at$, $0 \le t \le T$:

2304. $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $z = \cos 2t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$:

Հաշվել բևեռային կոորդինատների համակարգում տրված կորի երկարությունը (2305-2309).

2305. $r = a\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ (Արքիմեդի գալարագիծ):

2306. $r = \varphi^2$, $0 \le \varphi \le \pi$:

2307. $r = a\sin\varphi$ (շրջանագիծ):

2308. $r = a(1 + \cos\varphi)$ (սրտաձև գիծ):

2309. $r = \cos^3\frac{\varphi}{3}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$:

2310. Հաշվել կոնի ծավալը, եթե նրա հիմքի շառավիղն r է, իսկ բարձրությունը՝ h :

2311. Հաշվել հատած կոնի ծավալը, եթե նրա հիմքերի շառավիղներն են R և r, իսկ բարձրությունը՝ h :

2312. Հաշվել R շառավղով գնդի ծավալը:

Հաշվել տրված կորերով սահմանափակված պատկերը Ox առանցքի շուրջը պտտելիս առաջացած մարմնի ծավալը (2313-2320).

2313. $y = x^{\frac{2}{3}}$, $y = 0$, $x = 1$ $(x \ge 0)$:   **2314.** $y = \sin 2x$, $y = 0$ $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$:

2315. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = 0$ $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$:

2316. $y^2 = 2x$, $y = 2$, $x = 0$:

2317. $y = \sin^2 x$, $y = x\sin x$ $(0 \le x \le \pi)$:

2318. $y=e^x$, $y=x+1$, $x=3$:

2319. $y=e^{-x}$, $y=0$ $(0\le x<+\infty)$:

2320. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$:

Հաշվել տրված կորի Ox առանցքի շուրջը պտտելիս առաջացած մակերևույթի մակերեսը (2321-2324).

2321. $y=\sqrt{x}$ $(2\le x\le 6)$:

2322. $y=e^{-x}$ $(0\le x\le 1)$:

2323. $y=\sin x$ $(0\le x\le \pi)$:

2324. $y=\dfrac{1}{x}$ $(1\le x\le 2)$:

Հաշվել տրված կորի Oy առանցքի շուրջը պտտելիս առաջացած մակերևույթի մակերեսը (2325-2328).

2325. $y=\dfrac{x^2}{6}$ $(0\le x\le 4)$:

2326. $3x=4\cos y$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\le y\le 0\right)$:

2327. $x=chy$ $(\ln 2\le y\le \ln 3)$:

2328. $4x+2\ln y=y^2$ $(e^{-1}\le y\le e)$:

Բ

2329. Հաշվել $y=x^2-2x+3$ պարաբոլով, $(3;6)$ կետով նրան տարված շոշափողով և կոորդինատական առանցքներով սահմանափակված պատկերի մակերեսը:

2330. Հաշվել $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ էլիպսով, $\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{b\sqrt{3}}{2}\right)$ կետով նրան տարված շոշափողով և $y=0$ ուղիղով սահմանափակված կորագիծ եռանկյան մակերեսը:

2331. Հաշվել աբսցիսների առանցքով, $y=(x-1)^5+1$ կորով և նրան $10x-2y-5=0$ ուղիղին զուգահեռ տարված շոշափողով սահմանափակված պատկերի մակերեսը:

2332. Հաշվել տրված պարաբոլով և նշված աբսցիսն ունեցող կետերում պարաբոլի շոշափողներով սահմանափակված պատկերի մակերեսը.

ա) $y=x^2+4x+9$, $x_1=-3$, $x_2=0$;

բ) $y=4x-x^2+1$, $x_1=0$, $x_2=3$:

2333. Գտնել k-ի այն արժեքը, որի դեպքում $y=kx+b$ ուղիղով և $y=x^2+px+q$ պարաբոլով սահմանափակված պատկերն ունի փոքրագույն մակերես $(b\ge q)$:

2334. Գտնել $y^2=2px$ պարաբոլի վրա կետ, որում պարաբոլին տարված նորմալը պարունակող ուղիղով և պարաբոլով սահմանափակված պատկերն ունի փոքրագույն մակերես:

Հաշվել պարամետրական հավասարումներով տրված կորերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը (2335-2340).

2335. $x=a\cos t$, $y=b\sin t$:　　2336. $y=a\cos^3 t$, $x=a\sin^3 t$:

2337. $x=a\sin t$, $y=a\sin 2t$:　　2338. $x=2t-t^2$, $y=2t^2-t^3$:

2339. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$, $y=0$:

2340. $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$ և $x=a$, $y\le 0$ ճառագայթով:

Հաշվել բևեռային կոորդինատների համակարգում տրված կորերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը (2341-2345).

2341. $r=\dfrac{a}{2\pi}\varphi$, $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$, $\varphi=\pi$:

2342. $r=Le^{k\varphi}$, $\varphi=0$, $\varphi=2\pi$ $(k>0)$:

2343. $r=a(1+\cos\varphi)$:　　2344. $r=\dfrac{P}{1+\varepsilon\cos\varphi}$ $(0<\varepsilon<1)$:

2345. ա) $r^2+\varphi^2=1$;　　բ) $\varphi=r\operatorname{arctg} r$, $\varphi=0$, $\varphi=\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$:

Անցնելով պարամետրական հավասարումների՝ գտնել տրված կորով սահմանափակված պատկերի մակերեսը (2346-2349).

2346. $x^3+y^3=axy$:　　2347. $(x+y)^3=axy$:

2348. $x^4+y^4=ax^2y$:　　2349. $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$:

Անցնելով բևեռային կոորդինատների՝ հաշվել տրված կորերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը (2350-2353).

2350. $x^4+y^4=ax^2$:　　2351. $(x^2+y^2)^3=ax^4y$:

2352. $x^6+y^6=a(x^4+y^4)$:

2353. $(x^2+y^2)^2=a(x^2-y^2)$, $(x^2+y^2)^2=2axy$:

2354. Դիցուք՝ $f\in C^2(a;b)$: Ապացուցել, որ

$$x=f'(t)\cos t+f(t)\sin t,\ y=f(t)\cos t-f'(t)\sin t,\ a<t_1\le t\le t_2<b$$

կորի L երկարությունը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$L=\int_{t_1}^{t_2}|f(t)+f''(t)|dt:$$

Օգտվելով նախորդ խնդրից՝ գտնել կորի երկարությունը (2355-2356).

2355. $x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t,\ y=(t^2-2)\cos t-2t\sin t\quad (0\le t\le\pi):$

2356. $x=a(2\cos 2t\cos t+\sin 2t\sin t),\ y=a(\sin 2t\cos t-2\cos 2t\sin t)$
$(0\le t\le\pi):$

2357. Դիցուք՝ $f,g\in C^2[a;b]$: Ապացուցել, որ

$$x=f(t)-g'(t),\ y=f'(t)+g(t),\ a\le t\le b$$

և

$$x=f'(t)\sin t-g'(t)\cos t,\ y=f'(t)\cos t+g'(t)\sin t,\ a\le t\le b$$

կորերի երկարությունները հավասար են:

Հաշվել կորի երկարությունը (2358-2361).

2358. $y=\int_1^x\sqrt{t^4-1}dt,\ 1\le x\le 2:$

2359. $y=\int_0^x\sqrt{\cos 2t}dt,\ 0\le x\le\frac{\pi}{4}:$

2360. $\varphi=\sqrt{r}\quad (0\le r\le R):$

2361. $\varphi=\int_0^r\frac{sh\rho}{\rho}d\rho\quad (0\le r\le R):$

Անցնելով պարամետրական հավասարումների՝ հաշվել կորի երկարությունը (2362-2364).

2362. $(y-\arcsin x)^2=1-x^2:$

2363. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}:$

2364. $\sqrt[3]{\left(\frac{x}{a}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{y}{b}\right)^2}=1:$

2365. Դիցուք՝ $f\in C[a;b]$ $(a>0)$ և $f(x)\ge 0$: Ապացուցել, որ $a\le x\le b$ և $0\le y\le f(x)$ անհավասարություններով որոշվող պատկերն Oy առանցքի շուրջը պտտելիս առաջացած մարմնի ծավալը հաշվվում է

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)dx$$

բանաձևով:

Հաշվել տրված կորերով սահմանափակված պատկերը Oy առանցքի շուրջը պտտելիս առաջացած մարմնի ծավալը (2366-2370).

2366. $y=3\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$, $y=0$, $x=2$ $(x\geq 0)$:

2367. $y=\cos x^2$, $y=1$, $x=1$ $(0\leq x\leq 1)$:

2368. $y^2=4x$, $y=x$:   2369. $y=\frac{a^3}{a^2+x^2}$, $y=\frac{a}{2}$:

2370. $y=e^x+6$, $y=e^{2x}$, $x=0$:

Հաշվել հետևյալ կորը նշված ուղիղի շուրջը պտտելիս առաջացած մակերևույթներով սահմանափակված մարմնի ծավալը (2371-2373).

2371. $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ ա) Ox առանցքի շուրջը; բ) $x=a$ ուղիղի շուրջը:

2372. $x=a\sin t$, $y=a\sin 2t$ ա) Ox առանցքի շուրջը; բ) Oy առանցքի շուրջը; գ) $x=a$ ուղիղի շուրջը; դ) $y=a$ ուղիղի շուրջը:

2373. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\leq t\leq 2\pi)$, $y=0$ ա) Ox առանցքի շուրջը; բ) Oy առանցքի շուրջը; գ) $y=2a$ ուղիղի շուրջը:

2374. Դիցուք $r=r(\varphi)$-ն անընդհատ է $[\alpha;\beta]$-ի վրա ($0\leq\alpha<\beta\leq\pi$, r-ը և φ-ն բևեռային կոորդինատներն են): Ապացուցել, որ $\alpha\leq\varphi\leq\beta$ և $0\leq r\leq r(\varphi)$ անհավասարություններով որոշվող սեկտորը բևեռային առանցքի շուրջը պտտելիս առաջացած մարմնի ծավալը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\varphi)\sin\varphi d\varphi:$$

Հաշվել բևեռային կոորդինատներով տրված կորը բևեռային առանցքի շուրջը պտտելիս առաջացած մարմնի ծավալը (2375-2376).

2375. $r=a(1+\cos\varphi)$ $(0\leq\varphi\leq 2\pi)$:   2376. $r=a\varphi$ $(0\leq\varphi\leq\pi)$:

2377. Դիցուք կորը տրված է $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in[\alpha;\beta]$, պարամետրական հավասարումներով, որտեղ $\varphi,\psi\in C^1[\alpha;\beta]$ և $\psi(t)\geq 0$: Ապացուցել, որ այդ կորը Ox առանցքի շուրջը պտտելիս առաջացած մակերևույթի մակերեսը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt:$$

Հաշվել պարամետրական հավասարումներով տրված կորը ա) Ox, բ) Oy առանցքի շուրջը պտտելիս առաջացած մակերևույթի մակերեսը (2378-2380).

2378. $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)\ \ (0 \le t \le 2\pi)$:

2379. $x = a(3\cos t - \cos 3t),\ y = a(3\sin t - \sin 3t)\ \ \left(0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}\right)$:

2380. $x = \sqrt{2}\sin t,\ \ y = \dfrac{1}{4}\sin 2t\ \ (0 \le t \le \pi)$:

2381. Ապացուցել, որ բևեռային կոորդինատներով տրված $r = r(\varphi)$ $(0 \le \alpha \le \le \varphi \le \beta \le \pi)$ կորը բևեռային առանցքի շուրջը պտտելիս առաջացած մակերևույթի մակերեսը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$S = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\sin\varphi d\varphi :$$

Հաշվել բևեռային կոորդինատներով տրված կորը բևեռային առանցքի շուրջը պտտելիս առաջացած մակերևույթի մակերեսը (2382-2384).

2382. $r = a(1 + \cos\varphi)$: 2383. $r = 2a\sin\varphi$: 2384. $r = a + b\cos\varphi\ \ (a > b)$:

2385. Գտնել $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ կորը նշված առանցքի շուրջը պտտելիս առաջացած մակերևույթի մակերեսը. ա) բևեռային առանցքի; բ) $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ առանցքի; գ) $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ առանցքի:

2386-2399 խնդիրներում ընդունել $\rho = 1$:

Գտնել կորի M_x և M_y ստատիկ մոմենտները (2386-2389).

2386. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1\ \ (x \ge 0, y \ge 0)$: 2387. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ \ (y \ge 0, a > b)$:

2388. $x = a\sin^3 t,\ y = a\cos^3 t\ \ \left(0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}\right)$:

2389. $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)\ \ (0 \le t \le 2\pi)$:

Գտնել կորի ծանրության կենտրոնի կոորդինատները (2390-2391).

2390. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}\ \ (x \ge 0, y \ge 0)$:

2391. $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)\ \ (0 \le t \le 2\pi)$:

Գտնել կորի I_x իներցիայի մոմենտը (2392-2393).

2392. $y=e^x$ $\left(0\le x\le\frac{1}{2}\right)$:

2393. $x^2+(y-a)^2=R^2$ $(a>R)$:

Գտնել տրված կորերով սահմանափակված պատկերի ստատիկ մոմենտները (2394-2395).

2394. $y=\cos x$ $\left(|x|\le\frac{\pi}{2}\right)$, $y=0$:

2395. $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$:

Գտնել տրված կորերով սահմանափակված պատկերի ծանրության կենտրոնի կոորդինատները (2396-2397).

2396. $x^2+y^2=R^2$ $(y\ge 0)$, $y=0$:

2397. $y^2=2px$, $x^2=2py$:

2398. Գտնել a հիմքով և h բարձրությամբ ուղղանկյան իներցիայի մոմենտը նրա հիմքի նկատմամբ:

2399. Գտնել $y^2=4ax$ պարաբոլով և $x=a$ ուղիղով սահմանափակված պատկերի իներցիայի մոմենտը Oy առանցքի նկատմամբ:

Գ

2400. Դիցուք՝ $f,g\in C[0;1]$: Ապացուցել անհավասարությունը.

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2+\left(\int_0^1 g(x)dx\right)^2\le\left(\int_0^1\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}dx\right)^2:$$

Ո՞ր դեպքում է հնարավոր հավասարությունը:

2401. Դիցուք $\varphi(x)$-ն R_+-ի վրա աճող և անընդհատ ֆունկցիա է, ընդ որում՝ $\varphi(0)=0$: Ապացուցել, որ ցանկացած $a,b\ge 0$ և $b\in\varphi(R_+)$ թվերի համար

$$ab\le\int_0^a\varphi(x)dx+\int_0^b\varphi^{-1}(x)dx,$$

որտեղ φ^{-1}-ը φ-ի հակադարձ ֆունկցիան է:

Ո՞ր դեպքում է հնարավոր հավասարությունը:

2402. Դիցուք՝ $f\in C^2[0;a]$, $f(x)\ge 0$, $f''(x)\ge 0$, $f(0)=0$ և $f(a)=b$: Ապացուցել անհավասարությունը.

$$\int_0^a f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx\le\frac{b}{2}\sqrt{a^2+b^2}:$$

Ո՞ր դեպքում է հնարավոր հավասարությունը:

2403. Դիցուք $f\in C[0;1]$ ֆունկցիան չնվազող է, $f(0)=0$, $f(1)=1$ և l-ը այդ ֆունկցիայի գրաֆիկի երկարությունն է:

ա) Ապացուցել, որ $l\le 2$:

բ) Համոզվել, որ նախորդ կետում գրված անհավասարության մեջ 2-ը չի կարելի փոխարինել ավելի փոքր թվով:

2404. Դիցուք $f\in C(R_+)$ ֆունկցիան դրական է և $S(t)$-ն $y=f(x)$ կորով, $x=t$ ուղիղով և կոորդինատների առանցքներով սահմանափակված պատկերի մակերեսն է: Գտնել f-ը, եթե ցանկացած $t>0$ համար $S(t)=\alpha tf(t)$ $(0<\alpha\le 1)$:

2405. Գտնել այն շրջանագծի շառավիղը, որի կենտրոնը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում և $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(x\ge 0, y\ge 0)$ աստղաձև գծի աղեղը բաժանում է հավասար երկարությամբ երեք աղեղների:

2406. Ապացուցել, որ $r=ae^{k\varphi}$ լոգարիթմական գալարագծի $2\pi n\le\varphi\le$ $\le 2\pi(n+1)$, $n\in Z_+$, գալարների երկարությունները կազմում են երկրաչափական պրոգրեսիա: Գտնել պրոգրեսիայի հայտարարը:

2407. Ապացուցել, որ a, b $(a\ne b)$ կիսաառանցքներով էլիպսի l երկարությունը բավարարում է

$$\pi(a+b)<l<\pi\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}$$

անհավասարություններին:

2408. Գտնել $y=f(x)$, $x\ge 0$ ($f(x)>0$, երբ $x>0$) կորը, եթե ցանկացած a-ի համար $0\le x\le a$, $0\le y\le f(x)$ անհավասարություններով տրված պատկերն Ox առանցքի շուրջը պտտելիս առաջացած մարմնի ծավալը հաշվվում է $\lambda\pi af^2(a)$ $(0<\lambda<1)$ բանաձևով:

2409. Ապացուցել, որ C հարթ կորն իրեն չհատող և իր հարթության մեջ գտնվող առանցքի շուրջը պտտելիս առաջացած մակերևույթի մակերեսը հավասար է C-ի երկարության և C-ի ծանրության կենտրոնի գծած շրջանագծի երկարության արտադրյալին (Գուլդինի առաջին թեորեմ):

2410. Ապացուցել, որ S հարթ պատկերն իրեն չհատող և իր հարթության մեջ գտնվող առանցքի շուրջը պտտելիս առաջացած մարմնի ծավալը հավասար է S-ի մակերեսի և S-ի ծանրության կենտրոնի գծած շրջանագծի երկարության արտադրյալին (Գուլդինի երկրորդ թեորեմ):

2411. a կողմով հավասարակողմ եռանկյունը պտտվում է իր ծանրության կենտրոնից d $(d>a)$ հեռավորության վրա գտնվող առանցքի շուրջը: Գտնել առաջացած մարմնի ծավալը և մակերևույթի մակերեսը:

2412. Գտնել $y=\sqrt{R^2-x^2}$, $x\in\left[-R;R\right]$, կիսաշրջանագծի և այդ կիսաշրջանագծով ու Ox առանցքով սահմանափակված կիսաշրջանի ծանրության կենտրոնները:

2413. Գտնել Ox առանցքով և $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ ցիկլոիդի մեկ կամարով սահմանափակված պատկերի ծանրության կենտրոնը:

Պատասխաններ

Գլուխ 1

1. ա) $\{-2;0;1;\sqrt{2};3;7;9\}$; բ) $[1;6)$; գ) $[2;4]$; դ) R; ե) R; զ) N: 2. ա) $\{2;8\}$; բ) $(0;2]$; գ) $(0;2]$; դ) $\varnothing$; ե) $\{-4;-3;...\}$; զ) $\varnothing$; է) $\{-8;-5;0;7\}$: 3. ա) $\{2\}$; բ) $[5;7]\cup[9;11]$; գ) $[2;3]\cup(4;7)$; դ) $\{0\}$; ե) Q: 4. ա) $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$; բ) $[3;+\infty)$; գ) $[0;1]$; դ) Q; ե) $(-\infty;-3]\cup[-1;1]\cup[3;+\infty)$; զ) $(-\infty;1)\cup(1;2)\cup(2;+\infty)$: 5. $\{12k:k\in N\}$: 6. Z_+: 7. Z_+: 8. ա) $[-1;12],[-5;8]$; բ) R,R; գ) Z, $N\setminus\{1\}$: 9. ա) $[-6;2]$; բ) $\{0\}$; գ) $-N$: 10. Ոչ:12. Ընդհանրապես ասած՝ ոչ: 13. 3)-ը:19. Ոչ: 22. $Q,I,R,Q,R\setminus\{0\}$: 35. ա) Սահմանափակ է; բ) սահմանափակ է; գ) սահմանափակ է; դ) սահմանափակ է ներքևից; ե) սահմանափակ է վերևից; զ) ո՛չ վերևից, ո՛չ ներքևից սահմանափակ չէ: 38. ա) $\min A=0,\max A=1$; բ) $\inf A=0$, $\max A=1$; գ) $\min A=0$, $\sup A=+\infty$; դ) $\inf A=0$, $\sup A=+\infty$; ե) $\inf A=-\infty,\sup A=+\infty$; զ) $\inf A=0,\sup A=+\infty$; է) $\inf A=0$, $\sup A=1$; ը) $\min A=0$, $\sup A=+\infty$; թ) $\min A=0,\max A=1$: 44. ա) Բաց է; բ) ո՛չ բաց է, ո՛չ փակ; գ) փակ է; դ) փակ է; ե) ո՛չ բաց է,ո՛չ փակ; զ) բաց է; է) փակ է; ը) փակ է; թ) փակ է: 51. ա) $R\setminus\{-1;-2\}$; բ) $(-\infty;-\sqrt{3}]\cup[0;\sqrt{3}]$; գ) $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$; դ) $(-1;1)$; ե) $[1;4]$; զ) $(1;+\infty)$; է) $R\setminus\left(\{\frac{\pi}{2}+\pi k:k\in Z\}\cup\{\frac{\pi}{4}+\pi k:k\in Z\}\right)$; ը) $\{-1;1\}$; թ) $(-1;0)\cup(0;1)$: 52. ա) աճող է; բ) նվազող է; գ) աճող է; դ) աճող է; ե) նվազող է; զ) նվազող է; է) նվազող է; ը) աճող է; թ) երբ $0<a<1$, նվազող է, երբ $a>1$, աճող է: 53. ա) Կենտ է; բ) ո՛չ զույգ է, ո՛չ կենտ; գ) զույգ է; դ) զույգ է; ե) զույգ է; զ) կենտ է; է) ո՛չ զույգ է, ո՛չ կենտ; ը) կենտ է; թ) կենտ է: 58. ա) $[0]=0$, $[-0{,}75]=-1$, $[0{,}75]=0$, $[-\sqrt{2}]=-2$, $[\sqrt{2}]=1$, $[-\pi]=-4$, $[\pi]=3$; բ) Z; դ) ոչ: 59. $T=1$, $Y_0=[0;1)$: 60. ա) $\bigcup\limits_{k\in Z}(2\pi k;\pi+2\pi k)$; բ) $(1;10)$: 61. $\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$, $\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$: 62. ա) 2^{x^2}; բ) 2^{2x}; գ) $\arccos\frac{2x}{1+x^2}$; դ) $\log_2(1+\sin^2 x)$: 64. Եթե φ-ն և ψ-ն երկուսն էլ չնվազող են, կամ երկուսն էլ չաճող, ապա $\psi\circ\varphi$-ն չնվազող է: Եթե φ և ψ ֆունկցիաներից մեկը չաճող է, մյուսը՝ չնվազող, ապա $\psi\circ\varphi$-ն չաճող է: 65. Ֆունկցիաները աճող են: 66. Ոչ: 68. ա) R, $x=\frac{y+1}{3}$; բ)

R, $x=2^y$; գ) R_+, $x=\sqrt{y}$; դ) R_+, $x=-\sqrt{y}$; ե) R_+, $x=arctg\sqrt{y}$; զ) R_+, $x=-arctg\sqrt[4]{y}$: **122.** բ) Ոչ: **123.** Այո: **141.** Ոչ: **145.** ա) R, $[-2,5;3,5)$, Q; բ) $[-1;+\infty)$, $[-1;+\infty)$, $[-1;0)$; գ) $[-1;1]$, $[0;1)$, $[-1;1]$; դ) R, R_-, $(0;1)$; ե) $(2;+\infty)$, $[2,5;10]$, $(3;+\infty)$: **146.** ա) R, $[-1;2]$, Q; բ) $(0;2)\cup(2;4)$, $\{0;4\}$, $\varnothing$; գ) $R\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k : k\in Z\right\}$, $\left\{\frac{\pi k}{2} : k\in Z\right\}$, $\varnothing$; դ) R, $\varnothing$, $\{0\}$; ե) $[-1;1]$, $\varnothing$, $\left\{\frac{1}{2};1\right\}$:**148.** ա) $y=2x$; բ) $y=2x$; գ) $y=2x+1$; դ) $y=\ln(-x)$; ե) $y=\dfrac{2}{\pi}arctgx$; զ) $y=-\dfrac{1}{x}$, երբ $x\le -1$ և $x+2$, երբ $x>-1$: **153.** $-\dfrac{1}{5}\left(2x^2+\dfrac{3}{x^2}\right)$: **154.** ա) x^2-5x+6; բ) x^2-2; գ) $\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2$; դ) x^3-3x: **155.** ա) $\{0;1\},\{0;1\}$; բ) $\{-1;0;1\}$, $\{0\}$: **174.** ա) $\{-1;0\}$; բ) $\left\{\dfrac{1-r^2}{2r-1} : r\in Q\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}\right\}$: **178.** R: **179.** ա) R_+; բ) $[1;+\infty)$: **183.** $T=1$: **186.** $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$: **187.** 9:

Գլուխ 2

227. ա) $n>11$; բ) $n>\frac{21(k+1)+2}{4}$: **257.** ա) 0; բ) $\dfrac{a_1+a_2}{2}$: **258.** ա) 0; բ) 0: **259.** ա) $1/3$; բ) $4/3$: **260.** ա) 1; բ) 2: **261.** ա) 0; բ) 0: **262.** ա) 3; բ) 0; գ) ∞; դ) a_0/b_0, երե $p=q$; 0, երե $p<q$; ∞, երե $p>q$: **263.** ա) $1/3$; բ) 2: **264.** ա) 0; բ) 0: **265.** ա) $2/3$; բ) 0: **266.** ա) $1/2$; բ) $\lg 2$: **267.** ա) 0; բ) 2: **268.** ա) 1; բ) -1: **269.** $\dfrac{qp(q-p)}{2}$: **270.** -1: **271.** $a^2+a+\frac{1}{3}$: **287.** Ոչ: **288.** $\inf x_n=-3,5$; $\sup x_n=5$; $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n=-2$; $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n=2$: **289.** $\inf x_n=0$; $\sup x_n=2$; $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n=0$; $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n=2$: **290.** $\inf x_n=0$; $\sup x_n=1$; $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n=0$; $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n=1$: **291.** $\inf x_n=-4$; $\sup x_n=6$; $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n=-4$; $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n=6$: **292.** $\inf x_n=-1/2$; $\sup x_n=1$; $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n=-1/2$; $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n=1$: **293.** $\inf x_n=0$; $\sup x_n=+\infty$;

$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$: **294.** $\inf x_n = -5$; $\sup x_n = 1{,}25$; $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 0$: **295.** $\inf x_n = 1$; $\sup x_n = \sqrt{5}$; $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 1$; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 2$: **296.** Ոչ: **297.** ա) Ոչ; բ) Այո: **299.** $\{0;1\}$: **300.** $\{-1;0;1\}$: **301.** $\{1;5\}$: **302.** $\{a;b\}$: **308.** $p \ge \frac{kq}{k-1}$: **310.** $x_n = \frac{n}{n+1}$; սահմանափակ է: **311.** $x_n = 2 - 2^{2-n}$; սահմանափակ է: **312.** $x_n = (b-a)2^{n-1} + 2a - b$, սահմանափակ է, եթե $a = b$: **313.** $x_n = (2a+b-3)(-1)^{n-1} - (a+b-2)(-2)^{n-1} + 1$; սահմանափակ է, երբ $a + b = 2$: **327.** $2/3$: **328.** 3: **329.** 1: **330.** $\sqrt{2}/2$: **331.** $1/4$: **332.** 0: **333.** 1: **334.** $\dfrac{\ln a}{\ln b}$: **335.** $4/5$: **336.** 0: **337.** $\sqrt[m]{a_1 a_2 \ldots a_m}$: **338.** $1/da_1$: **339.** $1/\sqrt{d}$: **340.** $q/(1-q)^2$: **345.** Զուգամետ է; $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$: **346.** Զուգամետ է; 1: **347.** Զուգամետ է; 4: **348.** Զուգամետ է; $\sqrt[k-1]{a}$: **349.** Զուգամետ է; $A/3$: **350.** Զուգամետ է; $\sqrt[3]{M}$: **351.** Զուգամետ է; $\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$: **352.** 1, եթե $a \ne 0$; եթե $a = 0$՝ սահմանը գոյություն չունի կամ պատկանում է $[-1;1]$ հատվածին: **355.** $[0;1]$: **372.** գ) Ոչ: **374.** Սահմանափակ է: **379.** $a \notin \left\{-\dfrac{2^k}{2^k-1} : k \in N\right\}$; $x_n = \dfrac{a}{(a+1)2^{n-1} - a}$: **380.** ա) $x_n = \dfrac{3a}{a-(a-3)4^{n-1}}$; բ) $a \in \left\{\dfrac{3\cdot 4^k}{4^k-1} : k \in N\right\}$: **383.** $\sqrt{ab}$: **391.** Տարամետ է: **392.** Զուգամետ է, երբ $a = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$: **393.** Զուգամետ է: **394.** Զուգամետ է: **400.** $a = b$: **401.** $a = b = 0$: **402.** $b = \dfrac{a}{4}\left(5 - \sqrt{41}\right)$: **404.** Զուգամետ է: **405.** $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$: **417.** $\dfrac{1}{p+1}$: **418.** $\dfrac{1}{2}$: **419.** $4/e$: **420.** 1: **421.** 0: **422.** $\pi/2$:

Գլուխ 3

430. Սահմանափակ չէ: **432.** $\inf f(x) = 0$; $\sup f(x) = 25$: **433.** $\inf f(x) = 0$; $\sup f(x) = 1$: **434.** $\inf f(x) = -1$; $\sup f(x) = 1$: **435.**

$\inf f(x)=2$; $\sup f(x)=+\infty$: 436. ա) $\inf f(x)=-\sqrt{2}$; $\sup f(x)=\sqrt{2}$; բ) $\inf f(x)=-\sqrt{2}$; $\sup f(x)=\sqrt{2}$: 437. ա) $\inf f(x)=0$; $\sup f(x)=1$; բ) $\inf f(x)=0$; $\sup f(x)=2$: 438. $\inf f(x)=\cos 3$, $\sup f(x)=\cos 1$: 450. Ոչ: 453. 1: 454. 10: 455. $\dfrac{mn(n-m)}{2}$: 456. 0,5: 457. 1/4: 458. 5^{-5}: 459. $(3/2)^{30}$: 460. $(3/2)^{10}$: 461. $\dfrac{n(n+1)}{2}$: 462. m/n: 463. 1: 464. -2: 465. $1/\sqrt{2a}$: 466. 0,25: 467. 2,4: 468. $(a+b)/2$: 469. $-0,25$: 470. -2: 471. 0,25: 472. 1,5: 473. 16/3: 474. n/m: 475. a_1/m: 478. 0: 479. 1: 480. α/β: 481. 1: 482. 3/5: 483. 1: 484. $\cos a$: 485. $1/\cos^2 a$: 486. 0,5: 487. 0,5: 488. 1: 489. $1/p$: 490. 0,5: 491. $\sqrt{2}$: 492. $-9/128$: 493. 4: 498. ա) 0,5; բ) 1: 499. ա) 0; բ) 0: 500. ա) 1; բ) e^4: 501. ա) e^3; բ) $e^{-0,5}$: 502. ա) $\sqrt{e}$; բ) e^{-1}: 503. ա) 1; բ) $e^{1,5}$: 504. ա) $1/a$; բ) $-x^{-2}$: 505. ա) 1; բ) 0,2: 506. ա) 2/3; բ) $e^{-0,5}$: 507. 1: 508. 1/5: 509. $\sqrt{ab}$: 510. ա) 0; բ) $\log_2^3$: 513. cha: 514. sha: 515. -1: 517. $-\pi/2$: 518. 0,5: 519. $\pi/3$: 520. $1/(1+x^2)$: 522. ա) 2; վերևից; բ) 2; ներքևից: 523. ա) $\pi/2$; ներքևից; բ) $-\pi/2$; վերևից: 524. ա) 1; ներքևից; բ) 0; վերևից: 525. ա) 0; ներքևից; բ) 1; վերևից: 526. $f(-0)=1$; $f(+0)=0$: 527. $f(-0)=0$; $f(+0)=+\infty$: 528. $f(1-0)=1,5$; $f(1+0)=0,25$: 529. $f\left(\dfrac{\pi}{2}-0\right)=1$; $f\left(\dfrac{\pi}{2}+0\right)=-1$: 530. $f(3-0)=0$; $f(3+0)=1/3$: 531. $f(10-0)=109$; $f(10+0)=110$: 532. $f(-1-0)=1$; $f(-1+0)=+\infty$: 533. $f(1-0)=0$; $f(1+0)=1$: 534. $f(1-0)=3$; $f(1+0)=2$: 535. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$: 536. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=e^{-1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=e$: 537. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$: 547. 25/16: 548. 2: 549. 10/37: 550. $-1/9$: 551. $-0,25$: 552. $-0,5$: 553. -2: 554. 2: 555. 7/3: 556. 12: 557. 1: 558. ա) 1; բ) 2; գ) 2; դ) 2; ե) 2; զ) 2: 559. ա) 2; բ) 1; գ) 6; դ) 3: 560. Անվերջ փոքր է: 561. Անվերջ փոքր է: 562. ա) Անվերջ փոքր չէ; բ) անվերջ փոքր է: 563. ա) Անվերջ մեծ է; բ) անվերջ մեծ չէ: 564. Անվերջ մեծ է: 565. ա) Անվերջ մեծ չէ; բ) անվերջ մեծ է: 566. ա) Անվերջ մեծ է; բ) անվերջ մեծ չէ: 567. ա) $-\sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}$; բ) $x-1$; գ) $e(x-1)$; դ) $x-1$: 568. ա) $2x^2$; բ) $x^{\frac{2}{3}}$; գ) $x^{\frac{1}{8}}$: 569. ա) $\underline{\lim}_{x\to0} f(x)=-1$; $\overline{\lim}_{x\to0} f(x)=2$; բ) $\underline{\lim}_{x\to0} f(x)=-2$; $\overline{\lim}_{x\to0} f(x)=2$: 570. ա) $\underline{\lim}_{x\to\infty} f(x)=-1$; $\overline{\lim}_{x\to\infty} f(x)=1$; բ) $\underline{\lim}_{x\to\infty} f(x)=0$; $\overline{\lim}_{x\to\infty} f(x)=+\infty$; գ) $\underline{\lim}_{x\to\infty} f(x)=-\frac{\pi}{2}$; $\overline{\lim}_{x\to\infty} f(x)=\pi$: 578. $n^{\frac{n(n+1)}{2}}$: 579. $\frac{n(n+1)}{2}$: 580. $\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}$: 581. $\frac{m-n}{2}$: 582. $-0{,}5$: 583. $\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}$: 584. $1/n!$: 585. $(a_1+a_2+\cdots+a_n)/n$: 586. $a_1=-1; b_1=0{,}5; a_2=1; b_2=-0{,}5$: 587. $\lambda=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}$, $\mu=\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{2\sqrt{a_k}}$: 588. $-\cos a$: 589. $2\cos a/\sin^3 a$, $a\notin\{\pi k : k\in Z\}$: 590. 14 : 591. $-\cos 2a/\cos^4 a$: 592. $4/3$: 593. $-1/12$: 594. 3 : 595. 0, եթե $a_1<a_2$; $e^{\frac{b_1-b_2}{a_1}}$, եթե $a_1=a_2$; $+\infty$, եթե $a_1>a_2$: 596. $\sqrt{e}$: 597. 1: 598. $\frac{\beta^2-\alpha^2}{2m}$: 599. $\frac{2a}{b}$: 600. $e^{\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}}$: 601. α/β: 602. -2: 603. 1: 604. ա) $a^b\ln a$; բ) $a^a\ln(a/e)$: 605. ա) $\frac{\alpha}{\beta}a^{\alpha-\beta}$; բ) $a^a\ln ae$: 606. $a^{a^a}(\ln a-1)$: 607. e^{-a-b}: 608. $(a^ab^bc^c)^{\frac{1}{a+b+c}}$: 609. $1/\sqrt{ab}$: 611. $2\ln a$: 612. e^{π^2}: 613. $-\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$: 614. $\frac{n(n+1)}{2}$: 615. $\frac{n(n+1)}{2}$: 616. $-4{,}5$: 617. 0: 618. $4-\pi$: 619. $\frac{64}{3}\ln 2$: 620. $\sqrt{2}$: 621. $e^{-\frac{\pi}{4}}$: 622. 0: 623. $\frac{1}{1-x}$: 624. 0: 625. $\frac{\sin x}{x}$: 626. ա) $\alpha=1$, $\beta=0$; բ) $\alpha=\beta=0$: 627. $\alpha=1, \beta=5$: 628. ա) $\alpha=3$, $\beta=0$; բ) $\alpha=\beta=0$: 629. ա) $\alpha=\pi/2$, $\beta=-1$; բ) $\alpha=-\pi/2$, $\beta=-1$: 630. $\beta<0$ կամ $0\le\beta<\alpha$: 631. ա) x^2; բ) x^2: 632. ա)

$\underline{\lim}_{x\to\infty} f(x)=\frac{1}{2}$, $\overline{\lim}_{x\to\infty} f(x)=2$; բ) $\underline{\lim}_{x\to+\infty} f(x)=0$, $\overline{\lim}_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; գ) $\underline{\lim}_{x\to0} f(x)=\frac{1}{e}$, $\overline{\lim}_{x\to0} f(x)=e$; դ) $\underline{\lim}_{x\to0} f(x)=-\frac{1}{2}$, $\overline{\lim}_{x\to0} f(x)=+\infty$; ե) $\underline{\lim}_{x\to2} f(x)=-\frac{\pi}{2}$, $\overline{\lim}_{x\to2} f(x)=\frac{\pi}{2}$: **633.** ա) $[-1;1]$; բ) $[1;+\infty)$:**642.** ա) 1; բ) 1: **646.** 1/6: **647.** $a/2$: **648.** $\frac{\ln a}{2}$: **649.** $\sqrt[3]{e^{-a^2}}$: **650.** $f(x)=\frac{\sin^2 x}{x^2}$:

Գլուխ 4

659. ա) Ոչ. f-ը x_0-ի ցանկացած շրջակայքում սահմանափակ է; բ) ոչ. եթե X-ը սահմանափակ է, ապա ցանկացած $f: X\to R$ ֆունկցիա բավարարում է նշված պայմանին, իսկ եթե X-ը սահմանափակ չէ, ապա $\lim_{x\to\infty}|f(x)|=+\infty$; գ) ոչ. եթե նշված պայմանը տեղի ունի յուրաքանչյուր $x_0\in X$ կետում, ապա f-ը հակադարձելի է, ընդ որում f^{-1}-ը անընդհատ է: **663.** Z բազմության բոլոր կետերում ֆունկցիան ունի առաջին սեռի խզում: **664.** Z բազմության բո-լոր կետերում ֆունկցիան ունի առաջին սեռի խզում: **665.** $x_0=0$-ն առաջին սեռի խզման կետ է: **666.** $x_0=0$-ն վերացնելի խզման կետ է: **667.** Անընդհատ է: **668.** Անընդհատ է: **669.** Անընդհատ է: **670.** $x_0=0$-ն երկրորդ սեռի խզման կետ է: **671.** $\{\pi n : n\in Z\}$ բազմության կետերը երկրորդ սեռի խզման կետեր են: **672.** Անընդհատ է: **673.** $\{n^2 : n\in N\}$ բազմության կետերն առաջին սեռի խզման կետեր են: **674.** $\{\pm\sqrt{n} : n\in N\}$ բազմության կետերն առաջին սեռի խզման կետեր են: **675.** $Z\setminus\{0\}$ բազմության կետերն առաջին սեռի խզման կետեր են: **676.** $\{\pi n : n\in N\}$ բազմության կետերն առաջին սեռի խզման կետեր են: **677.** $\{1/n : n\in Z\setminus\{0\}\}$ բազմության կետերն առաջին սեռի խզման կետեր են: **678.** Z բազմության կետերը վերացնելի խզման կետեր են: **679.** Անընդհատ է: **680.** $\{\pm\sqrt{n} : n\in N\}$ բազմության կետերն առաջին սեռի խզման կետեր են: **681.** Անընդհատ է: **682.** Անընդհատ է: **683.** ա) 4; բ) $\sin 1+1$; գ) $a\in R$; դ) $3;-1$: **684.** ա) Երկրորդ սեռի է; բ) առաջին սեռի է: **685.** Երկրորդ սեռի է: **690.** Ոչ: **694.** $x=1$-ում y-ն ունի առաջին սեռի խզում: **695.** $x=1$-ում y-ն ունի առաջին սեռի խզում: 696. Անընդհատ է: 697. $\{\pi n : n \in Z\}$ բազմության կետերը վերացնելի խզման կետեր են: 698. Անընդհատ է: 699. $x=0$ կետն առաջին սեռի խզման կետ է: 700. Z : 707. ա)-ն և դ)-ն: 718. Հավասարաչափ անընդհատ է: 719. Հավասարաչափ անընդհատ է: 720. Հավասարաչափ անընդհատ չէ: 721. Հավասարաչափ անընդհատ է: 722. ա) Հավասարաչափ անընդհատ չէ; բ) հավասարաչափ անընդհատ է: 723. Հավասարաչափ անընդհատ է: 724. Հավասարաչափ անընդհատ է: 725. Հավասարաչափ անընդհատ է: 726. Հավասարաչափ անընդհատ է: 727. ա) Հավասարաչափ անընդհատ է; բ) հավասարաչափ անընդհատ չէ: 728. ա) Հավասարաչափ անընդհատ է; բ) հավասարաչափ անընդհատ չէ: 729. ա) Հավասարաչափ անընդհատ չէ; բ) հավասարաչափ անընդհատ է: 730. Անընդհատ է: 731. $x=0$ կետում առաջին սեռի խզում է: 732. Անընդհատ է $x=2$ կետում; խզման կետերը երկրորդ սեռի են: 733. Անընդհատ է $a_1, a_2, \ldots, a_n$ կետերում: Խզման կետերը երկրորդ սեռի են: 735. Խզումները վերացնելի են: 736. $(-\infty;0)$ միջակայքի բոլոր կետերը երկրորդ սեռի խզման կետեր են, իսկ $(0;+\infty)$ միջակայքի ռացիոնալ կետերը խզման կետեր են: 737. Խզման կետերի բազմությունը ∂M-ն է: Ընդ որում ∂M բազմության մեկուսացված կետերում ֆունկցիայի խզումն առաջին սեռի է, իսկ մնացած կետերում՝ երկրորդ սեռի: 738. ա) $\varphi \circ \psi$-ն անընդհատ է, $\psi \circ \varphi$-ն՝ խզվող; բ) $\varphi \circ \psi$-ն անընդհատ է, $\psi \circ \varphi$-ն՝ խզվող; գ) անընդհատ է: 740. $x=0$ կետում ձախից անընդհատ է: 741. $x=0$ կետում ձախից անընդհատ է: 742. $\{e^n : n \in Z\}$ բազմության կետերում աջից անընդհատ է: 743. $\{e^n : n \in Z\}$ բազմության կետերում աջից անընդհատ է: 744. $\{\pi n/2 : n \in Z\}$ բազմության կետերը թռիչքի կետեր են, $\{2\pi k : k \in Z\}$ բազմության կետերում անընդհատ է աջից, իսկ $\{2\pi k + \pi : k \in Z\}$ բազմության կետերում՝ ձախից: 751. Ոչ: 763. Ոչ: 770. ա) Ոչ; բ) ոչ: 777. Հավասարաչափ անընդհատ չէ: 778. Հավասարաչափ անընդհատ չէ: 779. Հավասարաչափ անընդհատ է: 780. Հավասարաչափ անընդհատ է: 781. Հավասարաչափ անընդհատ է: 782. Հավասարաչափ անընդհատ չէ: 783. Հավասարաչափ անընդհատ է: 784. Հավասարաչափ անընդհատ է: 785. Հավասարաչափ անընդհատ է: 786. Հավասարաչափ անընդհատ է: 789. ա) $\omega_f(\delta) \le 3\delta$; բ) $\omega_f(\delta) \le \sqrt{\delta}$; գ) $\omega_f(\delta) \le \delta$; դ) $\omega_f(\delta) \le \sqrt{2}\delta$; ե) $\omega_f(\delta) \le 2$; զ) $\omega_f(\delta) \le 2$: 797. $f(x) \equiv 0$; $f(x) = \cos ax$; $f(x) = chax$: 822. Ոչ: 827. Ոչ: 835. Ոչ: 836. Ոչ:

Գլուխ 5

839. ա) $a\Delta x$; բ) $(2ax_0+b)\Delta x+a(\Delta x)^2$; գ) $a^{x_0}\left(a^{\Delta x}-1\right)$; դ) $\dfrac{tg\Delta x}{\cos^2 x_0(1-tgx_0 tg\Delta x)}$: 841. ա) $2x$; բ) $-\dfrac{1}{x^2}$; գ) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; դ) $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; ե) $\cos x$; զ) $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; է) $\dfrac{1}{1+x^2}$: 844. ա) 5; բ) -2; գ) 4; դ) $\dfrac{\pi}{4}+1$; ե) 0: 846. Ոչ: 848. $5x^4-3x^2$: 849. $2x(3x-2)(1-x^3)+3(x^2+1)(1-x^3)-3x^2(x^2+1)(3x-2)$: 850. $\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$: 851. $\dfrac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}$: 852. $\dfrac{1-x+4x^2}{(1-x)^3(1+x)^4}$: 853. $(-3x^5+5x^4+2x^3-6x^2-6x+12)/(1-x)^3$: 854. $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$: 855. $-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}$: 856. $\dfrac{x-1}{2x\sqrt{x}}$: 857. $-\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}\right)$: 858. $\dfrac{5}{4}\sqrt[4]{x}$: 859. $-\dfrac{8\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x^2}+2}{6\sqrt[6]{x}\left(x-2\sqrt[3]{x}\right)^2}$: 860. $\sin x-x\cos x+x^2\sin x$: 861. $\dfrac{x}{\cos^2 x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}+tgx$: 862. $\dfrac{1}{1+\cos x}$: 863. $\dfrac{\sin x\cos^2 x+\sin^2 x\cos x+x\cos^3 x-x\sin^3 x}{1+\sin 2x}$: 864. $e^x\left(x^2+3x\right)$: 865. $1+\ln x+e^x(\cos x+\sin x)$: 866. $2^x\ln 2ctgx-\dfrac{2^x}{\sin^2 x}$: 867. $15(1+3x)^4$: 868. $\dfrac{-3}{2\sqrt{2-3x}}$: 869. $\dfrac{-2x}{3\sqrt[3]{\left(1-x^2\right)^2}}$: 870. $\dfrac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$: 871. $\dfrac{4}{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}$: 872. $\dfrac{3\left(1+x^2\right)^2\left(2x-x^2+1\right)}{(1-x)^4}$: 873. $\dfrac{1+2\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}$: 874. $\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+x\sqrt{x}}}}\left(1+\dfrac{1+\frac{3}{2}\sqrt{x}}{2\sqrt{x+x\sqrt{x}}}\right)$: 875. $\dfrac{2x^2}{1-x^6}\times\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$: 876. $9\sin^2 3x\cos 3x$: 877. $-3\sin(3x-1)\sin 2x+2\cos(3x-1)\times\cos 2x$: 878. $\dfrac{2x}{\cos^2\left(x^2+1\right)}$: 879. $x^2\sin x$: 880. $\dfrac{\cos 2x}{|\sin x+\cos x|}$: 881. $2x\sin 2x^2$:

882. $-\dfrac{2x\sin\left(2\sqrt[3]{x^2-1}\right)}{3\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}}$: 883. $\sin x+\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$: 884. $\dfrac{1}{2\cos^2\dfrac{x}{2}}-\dfrac{tg^2x}{\cos^2 x}$: 885. $\dfrac{10(x+1)tg^4\left(x^2+2x-1\right)}{\cos^2\left(x^2+2x-1\right)}$: 886. $\dfrac{-2}{3\sin^2 x\sqrt[3]{ctgx}}$: 887. $2x\sin(\sin x)+x^2\cos x\times\times\cos(\sin x)$: 888. $\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}\cos\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)$: 889. $-3\dfrac{tg^2x}{\cos^2 x}\sin\left(2tg^3x\right)\times\times\cos\left(\cos^2\left(tg^3x\right)\right)$: 890. $\dfrac{3\sin 6x(1+ctg3x)+3}{(1+ctg3x)^2}$: 891. $\dfrac{x^4-1}{x^3\cos^2\left(x^2+x^{-2}\right)\sqrt{1+tg\left(x^2+x^{-2}\right)}}$: 892. $-\dfrac{2^{tg\frac{1}{x}}\ln 2}{x^2\cos^2\frac{1}{x}}$: 893. $e^{-x^2}(-2x\cos x/2-$ $-\dfrac{1}{2}\sin x/2)$: 894. $2x\left(1-3x^3\right)e^{-2x^3}$: 895. $\left(2x\cos x^2-\sin x\sin x^2\right)e^{\cos x}$: 896. $\dfrac{e^{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}}{(1-x)^2\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}}$: 897. $-\sin x ch\cos x$: 898. $e^{-2x}\left(-2chx^3+3x^2shx^3\right)$: 899. $-2x\dfrac{sh^2x^2+2}{sh^3x^2}$: 900. $e^xe^{e^x}$: 901. $a^ax^{a^a-1}+ax^{a-1}a^{x^a}\ln a+a^xa^{a^x}\ln^2 a$: 902. $\dfrac{3}{3x+1}$: 903. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$: 904. $\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2+1}}$: 905. $\dfrac{6\lg^2 x^2}{x\ln 10}$: 906. $\dfrac{12\log_2^2(2x+3)^2}{(2x+3)\ln 2}$: 907. $10^{\frac{x}{\log_3 x}}\cdot\ln 10\cdot\dfrac{\log_3\dfrac{x}{e}}{\log_3^2 x}$: 908. $\dfrac{(2x+1)}{2\left(x^2+x+1\right)}\times\times\dfrac{e^{\sqrt{\ln\left(x^2+x+1\right)}}}{\sqrt{\ln\left(x^2+x+1\right)}}$: 909. $\dfrac{-\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}$: 910. $\dfrac{1}{x\ln x\ln\ln x}$: 911. $\dfrac{6}{x\ln x\ln\ln^3 x}$: 912. $\dfrac{x}{x^4-1}$: 913. $\dfrac{1}{\cos x}$: 914. $\dfrac{-2\sin x}{1+\cos x}\ln(1+\cos x)$: 915. $-\dfrac{1}{\cos x}$: 916. $\dfrac{\ln x}{x^5}$: 917.

$2\sin\ln x$: 918. $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$: 919. $\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$: 920. $\dfrac{-1}{x^2+2}$: 921. $-\dfrac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{1-x^2}}$ $(x\neq 0)$: 922. $\dfrac{2\operatorname{sgn}(\sin x)\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$ $(\sin x\neq 0)$: 923. $\dfrac{1}{1+x^2}$: 924. $\dfrac{-2\operatorname{sgn} x}{1+x^2}$ $(x\neq 0)$: 925. $\dfrac{1}{2x\sqrt{x-1}\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}}$: 926. $\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$: 927. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\arcsin x^2}\dfrac{2x\ln\frac{1}{3}}{\sqrt{1-x^4}}$:

928. $\dfrac{2x\,arctg x^2}{(1+x^4)\sqrt{1+x^4}}$: 929. $3^{arctg(2x+\pi)}\dfrac{2\ln 3}{1+(2x+\pi)^2}$: 930. $-\dfrac{xe^{2x}}{(e^{2x}-1)\sqrt{e^{2x}-1}}$:

931. $\dfrac{e^{\frac{x}{2}}-1}{2(e^x+1)}$: 932. $\dfrac{x\arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$: 933. $\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$: 934. $\dfrac{2x(\cos x^2+\sin x^2)}{\sqrt{\sin(2x^2)}}$:

935. $\dfrac{2\sin 2x}{2-\sin^2 2x}$: 936. $2x[\operatorname{sgn}\cos x^2+\operatorname{sgn}\sin x^2]$ $\left(x^2\neq\dfrac{\pi k}{2}, k\in Z_+\right)$: 937. $\dfrac{\sin\alpha\operatorname{sgn}(\cos x-\cos\alpha)}{1-\cos\alpha\cos x}$ $(\cos x\neq\cos\alpha)$: 938. $\sqrt{a^2-x^2}$: 939. $\dfrac{2}{1+e^{2x}}-$ $-e^{-x}arctg e^x$: 940. $-8x^3\operatorname{sgn}\sin 2x^4$ $(\sin 2x^4\neq 0)$: 941. $-\dfrac{3\ln^2 x\sin\ln^3 x}{4x(1+\cos\ln^3 x)\sqrt{\cos\ln^3 x}\sqrt{arctg\sqrt{\cos\ln^3 x}}}$: 942. $\dfrac{1}{(1+th^2x)ch^2x}$: 943. $\dfrac{\operatorname{sgn} shx}{chx}$ $(x\neq 0)$: 944. $x^x(1+\ln x)$: 945. $x^x x^{x^x}\left(\ln^2 x+\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$: 946. $e^x x^{e^x}\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$: 947. $e^x(chx)^{e^x}(\ln chx+thx)$: 948. $\dfrac{x^{\frac{1}{x}}(1-\ln x)}{x^2}$: 949. $x^{a-1}x^{x^a}(1+a\ln x)+a^x x^{a^x}\left(\ln a\ln x+\dfrac{1}{x}\right)+x^x a^{x^x}\ln a(1+\ln x)$: 950. $\dfrac{(\ln x)^{x-1}[x-2\ln^2 x+x\ln x\cdot\ln\ln x]}{x^{\ln x+1}}$: 951. $\sin x(\sin x)^{\cos x}(ctg^2x-\ln\sin x)$: 952. $\left(tg\dfrac{x}{2}\right)^{x\arcsin 2x}\left(\arcsin 2x\cdot\ln tg\dfrac{x}{2}+\dfrac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}\ln tg\dfrac{x}{2}+\dfrac{x\arcsin 2x}{\sin x}\right)$:

953. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right)$: 954. $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x\left(\ln\frac{\sin x}{x}+xctgx-1\right)$: 955. $\frac{1-x-x^2}{x\left(1-x^2\right)}$: 956. $\frac{2x^3+4x^2-36x+54}{3x(1-x)\left(9-x^2\right)}$: 957. $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{x-a_k}$: 958. $\frac{n}{\sqrt{1+x^2}}$: 959. $1;-1$: 960. $1;-1$: 961. $2\ln 2;-2\ln 2$: 962. $\cos 1+\sin 1$: 963. $1;-1$: 964. $-1;2$: 965. $-\infty;1$: 966. $(x-1)(x+1)^2(5x-1)\operatorname{sgn}(x+1)$: 967. $\frac{3}{2}\sin 2x|\sin x|$: 968. -1, երբ $x<1$; $2x-3$, երբ $1\le x\le 2$; 1, երբ $x>2$: 969. $2(x-a)(x-b)(2x-a-b)$, երբ $x\in[a;b]$; 0, երբ $x\notin[a;b]$: 970. 1, երբ $x<0$; $\frac{1}{1+x}$, երբ $x\ge 0$: 971. $2xe^{-x^2}\left(1-x^2\right)$, երբ $|x|\le 1$; 0, երբ $|x|>1$: 972. ա) R, $\frac{x(y)}{x(y)+1}$; բ) $[1;+\infty)$, $\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$ $(y>1)$; գ) R, $\frac{1}{1+e^{x(y)}}$; դ) $(-1;1)$, $\frac{1}{1-y^2}$; ե) R, $\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$: 973. $\sqrt[6]{\frac{\left(1-\sqrt{t}\right)^4}{t\left(1-\sqrt[3]{t}\right)^3}}$: 974. $\frac{2(t+1)}{(2t+1)\left(t^2+1\right)}\sqrt{\frac{t^2+t}{t^2+1}}$: 975. -1: 976. $-\frac{b}{a}ctgt$: 977. $\frac{b}{a}ctht$: 978. $-tg^3t$: 979. $-tgt$: 980. $ctg\frac{t}{2}$: 981. $\operatorname{sgn}t$ $(t\ne 0)$:

982. ա) $y=\sqrt[3]{4}(x+1)$, $y=-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(x+1)$; բ) $y=3$, $x=2$: 983. ա) $y=\pi x$, $y=-\frac{1}{\pi}x$; բ) $y=-\frac{\pi}{2}(x-1)$, $y=\frac{2}{\pi}(x-1)$: 984. ա) $y=\frac{\pi}{3}+\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\times$ $\times(x-1)$, $y=\frac{\pi}{3}-\frac{3}{2\pi-\sqrt{3}}(x-1)$; բ) $y=\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-3\right)\left(x-\sqrt{3}\right)$, $y=\frac{\pi}{2}-$ $-\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-3}\left(x-\sqrt{3}\right)$: 985. ա) $y=\frac{1}{64}+\frac{6-\pi}{32}\left(x-\frac{1}{4}\right)$, $y=\frac{1}{64}+\frac{32}{\pi-6}\left(x-\frac{1}{4}\right)$; բ) $y=-\frac{\pi}{8}\left(x-\frac{1}{2}\right)$, $y=\frac{8}{\pi}\left(x-\frac{1}{2}\right)$: 986. ա) $3x-2y=0$, $2x+3y=0$; բ) $3x-y-1=0$, $x+3y-7=0$: 987. ա) $y=1-x$, $y=1+x$; բ) $x=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$,

$y=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$: 988. ա) $y=x$, $y=-x$; բ) $3x-y-4=0$, $x+3y-3=0$: 989. $\frac{\pi}{2}$, $arctg\frac{3}{4}$: 990. $arctg3$: 991. $arctg2\sqrt{2}$: 992. $arctg\frac{9}{7}$: 993. ա) $\left(-\frac{1}{2};\frac{7}{4}\right)$; բ) $(0;2)$: 995. $b^2-4ac=0$. 996. $\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2=0$: 997. $a=\frac{1}{2e}$: 998. $-\frac{dx}{2\sqrt{x^3}}$: 999. $\left(-\sin x+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$: 1000. $\left(\frac{-1}{2\sqrt{(1-x^2)}\arccos x}-2^{-x}\ln 2\right)dx$:

1001. $\frac{3^{\sqrt{arctgx^2}}x\ln 3}{(1+x^4)\sqrt{arctgx^2}}dx$: 1002. $\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}dx$: 1003. $-\frac{6\cos 2x}{\sin^4 2x}dx$: 1004. ա) $vwdu+uwdv+uvdw$; բ) $-\frac{udu+vdv}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}$; գ) $\frac{vdu-udv}{u^2+v^2}$; դ) $\frac{udu+vdv}{u^2+v^2}$: 1005. ա) $1-4x^3-3x^6$; բ) $-ctgx$; գ) $\frac{1}{2x^2}\left(\cos x-\frac{\sin x}{x}\right)$; դ) -1: 1006. $1{,}007$: 1007. $0{,}4849$: 1008. $-0{,}8747$: 1009. $0{,}8104$: 1010. $0{,}925$: 1012. Կարող է: 1014. ա) Չի կարող; բ) կարող է: 1015. ա) Կարող է; բ) կարող է: 1016. ա) Այո; բ) այո; գ) դիֆերենցելի չէ $x=\pi k$, $k\in Z\setminus\{0\}$, կետերում: 1020. $\frac{x(3+2x^2)}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$: 1021. $\frac{3x}{\sqrt{(1-x^2)^5}}$: 1022. $2e^{-x^2}(2x^2-1)$: 1023. $\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$: 1024. $\frac{3x}{(1-x^2)^2}+$ $+\frac{(1+2x^2)\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^5}}$: 1025. $\frac{2x}{1+x^2}+2arctgx$: 1026. $x^x(1+\ln x)^2+x^{x-1}$: 1029. $\frac{(-1)^n 2^n n!}{(2x+3)^{n+1}}$: 1030. $\frac{(-1)^{n-1}n!c^{n-1}(ad-bc)}{(cx+d)^{n+1}}$: 1031. $n!\left[\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}+\frac{1}{(1-x)^{n+1}}\right]$:

1032. $(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x+1)^{n+1}}-\frac{1}{(x+2)^{n+1}}\right]$: 1033. $\frac{(2n-1)!!}{(1-2x)^{n+\frac{1}{2}}}$: 1034. $\frac{(-1)^n}{3^n}1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(3n-5)(1-x)^{-n-\frac{1}{3}}(9n-2x-4)$, $n\geq 2$: 1035.

$-2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{\pi n}{2}\right)$: 1036. $\frac{3}{4}\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)-\frac{3^n}{4}\sin\left(3x+\frac{\pi n}{2}\right)$: 1037. $2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{\pi n}{2}\right)+2^{2n-3}\cos\left(4x+\frac{\pi n}{2}\right)$: 1038. $\frac{(a-b)^n}{2}\cos\left[(a-b)x+\frac{\pi n}{2}\right]+$ $+\frac{(a+b)^n}{2}\cos\left[(a+b)x+\frac{\pi n}{2}\right]$: 1039. $\frac{1}{2}\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)-\frac{3^n}{4}\sin\left(3x+\frac{\pi n}{2}\right)+$ $+\frac{5^n}{4}\sin\left(5x+\frac{\pi n}{2}\right)$:1040. $-2^{n-3}\left[4x^2\cos\left(2x+\frac{\pi n}{2}\right)+4nx\cos\left(2x+\frac{\pi(n-1)}{2}\right)+\right.$ $\left.(n^2-n)\cos\left(2x+\frac{\pi(n-2)}{2}\right)\right]$, $n\geq 3$: 1041. $\frac{(-1)^{n-1}(n-3)!}{(x+1)^n}\left(2x^2+2xn+n^2-n\right)$, $n\geq 3$: 1042. $5^n e^{3x}\sin(4x+n\varphi)$, $\varphi=\arcsin\frac{4}{5}$: 1043. $\frac{e^x}{2}+\frac{e^x}{2}5^{\frac{n}{2}}\times$ $\times\cos(2x+n\varphi)$, $\varphi=\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}$: 1044. $\frac{1}{2}\left\{\left[(x+n)-(-1)^n(x-n)\right]chx+\right.$ $\left.+\left[(x+n)+(-1)^n(x-n)\right]shx\right\}$: 1045. $y^{(2k)}=\frac{1}{2}(a+b)^{2k}ch(a+b)x+$ $+\frac{1}{2}(a-b)^{2k}ch(a-b)x$, $y^{(2k-1)}=\frac{1}{2}(a+b)^{2k-1}sh(a+b)x+\frac{1}{2}(a-b)^{2k-1}\times$ $\times sh(a-b)x$, $k\in N$: 1046. $e^x\left[x^n+n^2x^{n-1}+\frac{n^2(n-1)^2}{2!}x^{n-2}+\cdots+n!\right]$: 1047. $a_n n!$: 1048. $-\frac{(n-1)!}{\left(1-x^2\right)^n}\left[(1+x)^n+(-1)^{n-1}(1-x)^n\right]$: 1051. $\frac{3}{4(1-t)}$: 1052. $-\frac{1}{a\sin^3 t}$: 1053. $\frac{\cos\frac{t}{2}}{4a^2\sin^7\frac{t}{2}}$: 1054. $\frac{e^{-2t}(2\sin t+\cos t)}{\sqrt{2}\cos^5\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}$: 1055. $\frac{t^2-1}{\left(1+t^2\right)\sqrt{1+t^2}}$:

1056. $\frac{t+2t\cos^2 t+\frac{1}{2}\sin 2t}{4t^3\sin^4 t}$: 1057. $y''-5y'+6y=0$: 1058. $v''-$ $-\left[1+4e^{4s}q\left(e^{2s}\right)\right]v=0$: 1059. $r''-r=0$: 1060. $2\left(uu''+u'^2\right)$: 1061. $uv''+$

$+2u'v'+vu''$: 1062. $\dfrac{v(u''v-uv'')-2v'(vu'-uv')}{v^3}$: 1063. $\dfrac{uu''-u'^2}{u^2}-\dfrac{vv'-v'^2}{v^2}$:

1064. $\dfrac{(u^2+v^2)(uu''+vv'')+(u'v-uv')^2}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}$: 1065. $u^v\left[\left(v\dfrac{u'}{u}+v'\ln u\right)^2+\dfrac{2u'v'}{u}+\right.$

$\left.+v\dfrac{uu''-u'^2}{u^2}+v''\ln u\right]$: 1066. $y''=4x^2f''(x^2)+2f'(x^2)$, $y'''=8x^3f'''(x^2)+$

$12xf''(x^2)$:1067. $y''=\dfrac{1}{x^4}f''\left(\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{2}{x^3}f'\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $y'''=-\dfrac{1}{x^6}f'''\left(\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{6}{x^5}f''\left(\dfrac{1}{x}\right)-$

$\dfrac{6}{x^4}f'\left(\dfrac{1}{x}\right)$: 1068. $y''=e^{2x}f''(e^x)+e^xf'(e^x)$, $y'''=e^{3x}f'''(e^x)+3e^{2x}f''(e^x)+$

$+e^xf'(e^x)$: 1069. 6 : 1070. 59: 1071. 98,5 ; 13,5 : 1072. $v=\beta-2\gamma t$, $a=-2\gamma$;

անիվը կանգ կառնի, երբ $t=\dfrac{\beta}{2\gamma}$: 1073. 26450: 1076. $\dfrac{5h}{h-1{,}7}$կմ/ժ : 1077. 6:

1078. $-\dfrac{3y}{\sqrt{100-y^2}}$; $-2{,}25$: 1079. Օրդինատը փոփոխվում է ավելի արագ, երբ

$|x|>2$, ավելի դանդաղ՝ երբ $|x|<2$: 1080. ա) 0 ; բ) $n!$; գ) $n!\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$; դ) 0 ; ե) $\dfrac{1}{2}$:

1081. $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$: 1082. $\pi[x]\sin 2\pi x$: 1083. $y'=-\dfrac{2(x+1)arctg\frac{1}{x+1}}{x^2+2x+2}+$

$+arctg^2\dfrac{1}{x+1}+2$, երբ $x\neq-1$, $y'(-1)=\dfrac{\pi^2}{4}+2$: 1084. $\dfrac{1}{x^2+1}$, երբ $-1<x\leq 1$,

$\dfrac{1}{2}$, երբ $|x|>1$: 1086. ա) $a=0$, $f'(0)=1$; բ) $a=0$, $f'(0)=1$: 1088. $a=2$,
$b=-1$: 1089. $a=1$, $b=1$: 1090. $a=1{,}5$, $b=-0{,}5$: 1091. $a=b$: 1092.
$a_1=-1$, $b_1=\pi/2$, $a_2=1$, $b_2=\pi/2$: 1093. $a_1=-\pi/2$, $b_1=\pi/2$, $a_2=\pi$,
$b_2=\pi$: 1094. $a_1=-\dfrac{\pi+1}{4}$, $b_1=\dfrac{2\pi+1}{4}$, $a_2=\dfrac{\pi+1}{4}$, $b_2=-\dfrac{2\pi+1}{4}$: 1095.
$a_1=-\dfrac{1}{2}$, $b_1=-\dfrac{1}{2e^2}$, $a_2=3e$, $b_2=-2e^2$: 1096. $f(x)=\dfrac{xchx-shx}{x^2}$, $x\neq 0$;

$f'(0)=0$: 1097. $\dfrac{1}{(1-x)^2}$: 1098. Դիֆերենցելի չէ $x=1$ կետում: 1099. Դիֆերենցելի չէ $\left\{\dfrac{2k-1}{2}\pi : k\in Z\right\}$ բազմության կետերում: 1100. Դիֆերենցելի է: 1101. $f'(0)=0$: 1102. $f'(0)=0$, $f''(0)=0$: 1103. $f'(0)=0$: 1104. $f'(0)=0$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=1$, $f^{(4)}(0)=0$: 1106. ա) $\alpha>0$; բ) $\alpha>1$; գ) $\alpha>2$: 1107. ա) $\alpha\geq\beta+1$; բ) $1<\alpha<\beta+1$: 1110. $\varphi(a)$: 1111. $f'_-(a)=-\varphi(a)$, $f'_+(a)=\varphi(a)$: 1115. $f'_-(k)=(-1)^k(k-1)\pi$, $f'_+(k)=(-1)^k k\pi$, $k\in Z$: 1116. $f'_-(0)=-1$, $f'_+(0)=1$, $f'_-\left(\pm\sqrt{(2k+1)\pi}\right)=\mp\infty$, $k\in Z_+$, $f'_+\left(\pm\sqrt{2\pi k}\right)=\pm\infty$, $k\in N$: 1117. $f'_-\left(\dfrac{2}{2k+1}\right)=-(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $f'_+\left(\dfrac{2}{2k+1}\right)=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $k\in Z$: 1118. $f'_-(0)=-1$, $f'_+(0)=+\infty$: 1119. $f'_+(1)=-\infty$, $f'_-(1)=\dfrac{1}{2}$: 1120. $f'_-(4)=-\dfrac{\pi}{2}$, $f'_+(4)=\dfrac{\pi}{2}$: 1121. $f'_-(\pm1)=-1$, $f'_+(\pm1)=1$: 1122. $f'_-(\pm1)=\pm1$, $f'_+(\pm1)=\mp1$: 1123. $f'_-(0)=-1$, $f'_+(0)=0$: 1124. $f'_-(0)=\sqrt{2}$, $f'_+(0)=-\sqrt{2}$: 1125. $f'_-(0)=-1$, $f'_+(0)=1$: 1126. $f'_-(0)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $f'_+(0)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$: 1127. $f'_-(0)=1$, $f'_+(0)=0$: 1128. $f'_-(0)=2$, $f'_+(0)=0$: 1129. $f'_-(0)=0$, $f'_+(0)=0$: 1132. ա), բ), գ) Կարող է դիֆերենցելի լինել, կարող է և չլինել: 1134. Ընդհանրապես՝ ոչ: 1135. ա) $\dfrac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$, բ) $\dfrac{(1+x-(n+1)^2x^n+(2n^2+2n-1)x^{n+1}-n^2x^{n+2})}{(1-x)^3}$: 1136. $\dfrac{\frac{1}{2}\sin nx-n\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\sin\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}$; բ) $\dfrac{n\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\sin\frac{x}{2}-\sin^2\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}$: 1137. ա) $\dfrac{\sin nx(2n\cos nx\sin x-\sin nx\cos x)}{\sin^2 x}$; բ) $\dfrac{\sin 2nx\cos x-2n\cos 2nx\sin x}{2\sin^2 x}$: 1138. $\dfrac{1}{2^n}ctg\dfrac{x}{2^n}-ctgx$: 1139. $\dfrac{1}{3(y^2+1)}$: 1140. $\dfrac{1}{1-\varepsilon\cos y}$: 1143. ա) $3x^2+15$; բ)

$6x^2$: **1144.** ա) $tg(\varphi + arctg\varphi)$; բ) $-ctg\dfrac{3\varphi}{2}$; գ) $tg\left(\varphi + arctg\dfrac{1}{m}\right)$: **1145.** $x = \pi k$, $k \in Z$: **1146.** $\dfrac{\pi}{3}$: **1151.** ա) $\dfrac{1}{2^{n-1}\sqrt{1-x^2}}\left\{\dfrac{(2n-3)!!}{(1+x)^{n-1}} - (n-1)\dfrac{(2n-5)!!\cdot 1!!}{(1+x)^{n-2}(1-x)} + \dfrac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}\dfrac{(2n-7)!!3!!}{(1+x)^{n-3}(1-x)^2} + \cdots\right\}$, $n > 3$; բ) $\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}\sin(narcctgx)$: **1152.** $n!\varphi(a)$: **1154.** $f^{(n)}(0) = 0$: **1155.** $f^{(n)}(0) = 0$: **1156.** $a = \dfrac{1}{2}f''(x_0)$, $b = f'(x_0)$, $c = f(x_0)$: **1160.** ա) Ընդհանրապես՝ ոչ; բ) այո: **1161.** Ընդհանրապես՝ ոչ: **1162.** Ոչ: **1163.** Ոչ: **1188.** ա) 1) x, 2) $-\dfrac{1}{5}x^3 + \dfrac{6}{5}x$; բ) 1) $ch2 - xsh2$, 2) $\left(-\dfrac{3}{4}e^2 - \dfrac{e^{-2}}{4}\right)x^3 + e^2x^2 - sh2 + \left(\dfrac{3}{4}e^{-2} + \dfrac{1}{4}e^2\right)x$:

Գլուխ 6

1194. ա) Այո; բ) ոչ: **1199.** $\xi = (a+b)/2$: **1200.** ա) $\theta = 1/2$; բ) $\theta = \dfrac{x}{\Delta x}\left(\sqrt{1+\dfrac{\Delta x}{x}} - 1\right)$ $(x(x+\Delta x) > 0)$; գ) $\theta = \dfrac{1}{\Delta x}\ln\dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$: **1201.** $A(-1;-1)$; $C(1;1)$: **1207.** $\dfrac{\pi}{4}$, երբ $x \in (-\infty;1)$; $-\dfrac{3\pi}{4}$, երբ $x \in (1;+\infty)$: **1211.** $P(x) = 3 - 3(x+1)^2 + (x+1)^3$: **1212.** $1 + 2x + \dfrac{2^2}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{2^n}{n!}x^n$: **1213.** $x - x^2 + \dfrac{x^3}{2!} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{(n-1)!}$: **1214.** $1 + x^2 + \dfrac{x^4}{2!} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{n!}$: **1215.** $\dfrac{4^2}{2!}x^2 - \dfrac{4^4x^4}{4!} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{4^{2n}}{(2n)!}x^{2n}$: **1216.** $\dfrac{1}{2}(x-1) - \dfrac{1}{4}(x-1)^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{(x-1)^n}{2n}$: **1217.**

$-(x-1)^2+\frac{(x-1)^3}{2}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n-1}$: 1218. $x^3+\frac{3^2}{2!}x^5+\cdots+\frac{3^{2n}}{(2n)!}x^{2n+3}$:

1219. $1+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{2n!}$: 1220. $1+x^2+\cdots+x^{2n}$: 1221. $-x^3-\frac{x^6}{2}-\cdots-\frac{x^{3n}}{n}$:

1222. $1+\frac{\ln a}{1!}x+\frac{\ln^2 a}{2!}x^2+\cdots+\frac{\ln^n a}{n!}x^n$: 1223. $\frac{x-1}{\ln a}-\frac{(x-1)^2}{2\ln a}+\cdots+$ $+(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n\ln a}$ 1224. ա) Փոքր է $\frac{e}{(n+1)!}$-ից; բ) փոքր է $\frac{1}{3840}$-ից; գ) փոքր է $2\cdot10^{-6}$-ից; դ) փոքր է $\frac{1}{16}$-ից: 1225. $|x|\le\frac{\sqrt[4]{24}}{10}$: 1227. ա) 3,107; բ) 3,0171; գ) 1,1535; դ) 0,309; ե) 0,00995; զ) 1,121: 1228. ա) 2,718282; բ) 0,021; գ) 0,01745; դ) 2,2361: 1229. $-\frac{1}{12}$: 1230. $1/3$: 1231. 0: 1232. $\ln^2 3$: 1233. $1/3$: 1234. $1/2$: 1235. $1/6$: 1236. $-1/4$: 1237. 0: 1238. $1/3$: 1239. $1/2$: 1240. $1/2$: 1241. $1+2x+2x^2-2x^4$: 1242. $1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^4-\frac{1}{15}x^5$: 1243. $1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{720}$: 1244. $-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}$: 1245. $x-\frac{x^3}{3}$: 1246. $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}$: 1247. $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}$: 1248. $x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{x^7}{7}+$ $+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{x^9}{9}$: 1249. $1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2$: 1250. $\frac{a}{b}$: 1251. 1: 1252. 2: 1253. -2: 1254. $\frac{1}{2}$: 1255. $\frac{1}{2}$: 1256. 0: 1257. $-\frac{1}{3}$: 1258. $\frac{1}{3}$: 1259. $\frac{1}{6}$: 1260. $\frac{\ln a}{6}$: 1261. 1: 1262. $\frac{1}{2}$: 1263. $1/e$: 1264. $-e/2$: 1265. 1: 1266. $1/6$: 1267. 1: 1268. $(a/b)^2$: 1269. $1/e$: 1270. 1: 1271. 0: 1272. 0: 1273. 2: 1274. 1: 1275. $2/3$: 1276. -2: 1277. $a^a(\ln a-1)$: 1278. $1/a$: 1279. $e^{-\frac{1}{6}}$: 1280. $e^{-\frac{2}{\pi}}$: 1281. 1: 1282. $e^{-\frac{1}{6}}$: 1283. $e^{-\frac{1}{3}}$: 1284. 2π: 1285. 0: 1286. 0: 1287. $e^{-\frac{1}{2}}$: 1288. $1/e$: 1289. $\frac{mn}{n-m}$: 1290. $\sqrt{e}$: 1291. $\frac{2}{3}$: 1292. Ոչ: 1293. Նվազող է $(-\infty;0]$ և $[0;+\infty)$ միջակայքերում, աճող՝ $[0;2]$ միջակայքում: **1294.** Նվազող է $\left[0;\frac{4}{11}\right]$ միջակայքում, աճող՝ $(-\infty;0]$ և $\left[\frac{4}{11};+\infty\right)$ միջակայքերում: **1295.** Նվազող է $(-\infty;-1)$, $[1/9;1)$ և $[3;+\infty)$ միջակայքերում, աճող՝ $(-1;1/9]$ և $(1;3]$ միջակայքերում: **1296.** Նվազող է $(0;1]$ և $\left[e^4;+\infty\right)$ միջակայքերում, աճող՝ $\left[1;e^4\right]$ միջակայքում: **1297.** Նվազող է $(0;+\infty)$ միջակայքում: **1298.** Նվազող է $\left[-\frac{\pi}{6}+\pi k;\frac{\pi}{6}+\pi k\right]$, $k\in Z$, միջակայքերում, աճող՝ $\left[\frac{\pi}{6}+\pi k;\frac{5\pi}{6}+\pi k\right]$, $k\in Z$, միջակայքերում: **1299.** Նվազող է $\left(0;e^{-1}\right]$ միջակայքում, աճող՝ $\left[e^{-1};+\infty\right)$ միջակայքում: **1300.** Նվազող է $[e;+\infty)$ միջակայքում, աճող՝ $(0;e]$ միջակայքում: **1301.** Նվազող է $(-\infty;-1]$ և $(0;1]$ միջակայքերում, աճող՝ $[-1;0)$ և $[1;+\infty)$ միջակայքերում: **1302.** Աճող է R-ում: **1303.** Նվազող է $(-\infty;0]$ և $[2/\ln 2;+\infty)$ միջակայքերում, աճող՝ $[0;2/\ln 2]$ միջակայքում: **1304.** Նվազող է $\left[\sqrt{e};+\infty\right)$ միջակայքում, աճող՝ $\left(0;\sqrt{e}\right]$ միջակայքում: **1305.** ա) Ոչ; բ) ոչ: **1308.** Ուռուցիկ է $(-\infty;1]$-ում, գոգավոր՝ $[1;+\infty)$-ում, $x=1$-ը շրջման կետ է: **1309.** Ուռուցիկ է $\left(-\infty;-\frac{a}{\sqrt{3}}\right]$ և $\left[\frac{a}{\sqrt{3}};+\infty\right)$ միջակայքերում, գոգավոր՝ $\left[-\frac{a}{\sqrt{3}};\frac{a}{\sqrt{3}}\right]$ միջակայքում, շրջման կետերն են՝ $\mp\frac{a}{\sqrt{3}}$: **1310.** Ուռուցիկ է R_+-ում, գոգավոր՝ R_--ում, $x=0$-ն շրջման կետ է: **1311.** Ուռուցիկ է R-ում: **1312.** Ուռուցիկ է $[-\pi+2\pi k;2\pi k]$, $k\in Z$, միջակայքերում, գոգավոր՝ $[2\pi k;\pi+2\pi k]$, $k\in Z$, միջակայքերում, շրջման կետերն են՝ $x=\pi k$, $k\in Z$: **1313.** Ուռուցիկ է $\left(-\infty;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ և $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}+\infty\right)$ միջակայքերում, գոգավոր՝ $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ միջակայքում, շրջման կետերն են՝ $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$: **1314.** Ուռուցիկ է $[-1;1]$ միջակայքում, գոգավոր՝ $(-\infty;-1]$ և

$[1;+\infty)$ միջակայքերում, շրջման կետերն են՝ ± 1: **1315.** Ուռուցիկ է $\left[e^{-\frac{3\pi}{4}+2\pi k};e^{\frac{\pi}{4}+2\pi k}\right]$, $k\in Z$, միջակայքերում, գոգավոր՝ $\left[e^{\frac{\pi}{4}+2\pi k};e^{\frac{5\pi}{4}+2\pi k}\right]$, $k\in Z$, միջակայքերում, շրջման կետերն են՝ $x=e^{\frac{\pi}{4}+\pi k}$, $k\in Z$: **1316.** Ուռուցիկ է $(0;+\infty)$ միջակայքում: **1319.** $x_{max}=1/2$: **1320.** $x=1$-ը կրիտիկական կետ է: **1321.** $x_{min}=1$: **1322.** $x_{max}=\dfrac{m}{m+n}$; երբ m-ը զույգ է, $x_{min}=0$; երբ n-ը զույգ է, $x_{min}=1$: **1323.** $x_{max}=2\pi k$, $x_{min}=\pi+2\pi k$ $(k\in Z)$: **1324.** $x_{min}=0$: **1325.** $x_{min}=0$: **1326.** $x_{min}=-1$, $x_{max}=9$: **1327.** $x_{min}=0$: **1328.** $x_{min}=1$, $x_{max}=\dfrac{1}{3}$, $x=0$-ն կրիտիկական կետ է: **1329.** $x_{max}=1$, $y(1)=0$; $x_{min}=3$, $y(3)=-4$: **1330.** $x_{max}=\pm 1$, $y(1)=y(-1)=1$; $x_{min}=0$, $y(0)=0$: **1331.** $x_{min}=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{6}$, $y\left(\dfrac{5+\sqrt{13}}{6}\right)\approx -0{,}05$, $y\left(\dfrac{5-\sqrt{13}}{6}\right)\approx -0{,}76$; $x_{max}=1$, $y(1)=0$: **1332.** $x_{max}=-1$, $y(-1)=-2$; $x_{min}=1$, $y(1)=2$: **1333.** $x_{min}=-1$, $y(-1)=-1$; $x_{max}=1$, $y(1)=1$: **1334.** $x_{min}=\dfrac{7}{5}$, $y\left(\dfrac{7}{5}\right)=-\dfrac{1}{24}$: **1335.** $x_{min}=\dfrac{3}{4}$, $y\left(\dfrac{3}{4}\right)=-\dfrac{3}{8}\sqrt[3]{2}$: **1336.** $x_{max}=1$, $y(1)=1/e$: **1337.** $x_{min}=1$, $y(1)=0$; $x_{max}=e^2$, $y(e^2)=4/e^2$: **1338.** $x_{max}=\pi k$, $y(\pi k)=(-1)^k+1/2$, $k\in Z$; $x_{min}=\pm 2\pi/3+2\pi k$, $y(\pm 2\pi/3+2\pi k)=-3/4$, $k\in Z$: **1339.** $x_{max}=\pi k$, $y(\pi k)=10$, $k\in Z$; $x_{min}=\pi/2+\pi k$, $y(\pi/2+\pi k)=5$, $k\in Z$: **1340.** $x_{max}=1$, $y(1)=\pi/4-\ln 2/2$: **1341.** $x_{min}=-\pi/4+2\pi k$, $y(-\pi/4+2\pi k)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}$, $k\in Z$; $x_{max}=3\pi/4+2\pi k$, $y(3\pi/4+2\pi k)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}$, $k\in Z$: **1342.** $x_{min}=-1$, $y(-1)=-2e$; $x_{max}=3$, $y(3)=6e^{-3}$: **1343.** $\min y=1/2$, $\max y=32$: **1344.** $\min y=0$, $\max y=4$: **1345.** ա) $\min y=-47$, $\max y=1$; բ) $\min y=-47$; $\max y=466$: **1346.** ա) $\min y=3$, $\max y=19$; բ)

$\min y=-17$, $\max y=3$: 1347. $\min y=-138$, $\max y=16$: 1348. $\min y=0$, $\max y=132$: 1349. $\min y=0$, $\max y=1$: 1350. $\min y=-2/e$, $\max y=0$: 1351. $\min y=1$, $\max y=3$: 1352. $\min y=0$, $\max y=4/3$: 1353. $\inf y=0$, $\max y=1/(2e)$: 1354. $\inf y=0$, $\max y=\left(\sqrt{2}+1\right)/2$: 1355. $\min y= =-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}$, $\max y=1$: 1356. $\min y=0$, $\max y=7/5$: 1357. ա) $\inf y=0$, $\sup y=2$; բ) $\min y=-1/4$, $\sup y=2$; գ) $\min y=-1/4$, $\max y=3/4$: 1358. $\max x_n=\left(10/e\right)^{10}$: 1359. $\max x_n=\sqrt[3]{3}$: 1360. $y=x/2+1/4$, երբ $x\to\infty$; $x=1/2$: 1361. $y=x/2$, երբ $x\to+\infty$; $y=-x/2$, երբ $x\to-\infty$: 1362. $y=x$, երբ $x\to\infty$; $x=0$: 1363. $y=2x$, երբ $x\to-\infty$: 1364. $x=0$; $y=0$: 1365. $y=\pi x/2-1$, երբ $x\to+\infty$; $y=-\pi x/2-1$, երբ $x\to-\infty$: 1412. $(m+n)\left(\dfrac{a^{mn}}{m^m n^n}\right)^{\frac{1}{m+n}}$: 1413. $m^m n^n\left(\dfrac{a}{m+n}\right)^{m+n}$: 1414. $\sqrt{S}$ կողմով քառակուսի: 1415. $\dfrac{P}{4}$ կողմով քառակուսի: 1416. 30°, 60°: 1417. $b=\dfrac{d}{\sqrt{3}}$; $h=d\sqrt{\dfrac{2}{3}}$: 1418. $S=\dfrac{bh}{4}$: 1419. $V=\dfrac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$: 1420. $S=\pi R^2\left(1+\sqrt{5}\right)$: 1421. $V=\dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}R^3$: 1422. Երբ $\sqrt{2}b<a$, ապա մեծագույն լարն ունի $|MB|=\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$ երկարություն, որտեղ M-ի կոորդինատներն են $\left(\pm\dfrac{a^2}{a^2-b^2}\sqrt{a^2-2b^2};\dfrac{b^3}{a^2-b^2}\right)$; երբ $\sqrt{2}b\geq a$, ապա մեծագույն լարն ունի $|MB|=2b$ երկարություն, որտեղ M-ի կոորդինատներն են $(0;b)$: 1423. Շոշափման կետերն են՝ $\left(\pm\dfrac{a}{\sqrt{2}};\pm\dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)$: 1424. $a\left(1+\sqrt[3]{\dfrac{S_B}{S_A}}\right)^{-1}$: 1425. $\dfrac{R}{\sqrt{2}}$, որտեղ R-ը սեղանի շառավիղն է: 1426. $arctgk$: 1427. Հորիզոնի նկատմամբ ծողի կազմած α անկյունը որոշվում է $\cos\alpha=\dfrac{l+\sqrt{l^2+128a^2}}{16a}$ հավասարումից: 1439. ա) $1/2$, $\sqrt{2}$; բ) 1: 1442. Ոչ:

1456. Այո: 1457. ա) Այո; բ) $e^{-\frac{1}{x^2}}$: 1458. Այո: 1459. $x^7/30$: 1460. x^2: 1461. $x/2$: 1462. $2x$: 1463. $a=-2/5$, $b=-1/15$: 1464. $a=1/2$, $b=d=1/12$, $c=-1/2$: 1465. ա) $a=1/6$, $b=2/3$, $n=4$: բ) $a=4/15$, $b=3/5$, $n=7$; գ) $a=-17/60$; $b=-9/20$, $n=7$; դ) $a=1$, $b=c=1/2$, $n=4$; ե) $a=(k+1)/2k$, $b=(k-1)/2k$, $n=3$: 1466. Դիֆերենցելի են: 1467. $f(h)= =\ln x+\dfrac{h}{x}-\dfrac{h^2}{2x^2}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{h^n}{nx^n}+o(h^n)$: 1486. Նվազող է, երբ $t\in(-\infty;-1]$, աճող է, երբ $t\in[-1;1]$ կամ $t\in[1;+\infty]$: 1487. Նվազող է, երբ $t\in[-1;1]$, աճող է, երբ $t\in(-\infty;-1]$ կամ $t\in[1;+\infty)$: 1488. Աճող է, երբ $t\in(-\infty;0]$ կամ $t\in[0;+\infty)$: 1489. Նվազող է, երբ $t\in(0;1/e)$ կամ $t\in(e;+\infty)$, աճող է, երբ $t\in(1/e;e)$: 1490. Նվազող է, երբ $t\in[\pi k/2;\pi(k+1)/2]$, $k\in Z$: 1491. Նվազող է, երբ $t\in(-\infty;0]$, աճող է, երբ $t\in[0;+\infty)$: 1496. $h=1/\sqrt{2}\sigma$: 1504. Ոչ: 1510. $4/27$: 1511. $\dfrac{9+6\sqrt{3}}{4}$: 1512. $q=-1/2$: 1513. $f(x)=\dfrac{x+2}{3}$: 1514. $f(x)=x-\dfrac{1}{8}$: 1516. ա) $y=0$, $x=-1$; բ) $y=\pm\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}$: 1528. Մեկ արմատ $(3;+\infty)$ միջակայքում: 1529. Երբ $a>4$, հավասարումն ունի մեկ արմատ $(1;+\infty)$ միջակայքում; երբ $a<-4$՝ մեկ արմատ $(-\infty;-1)$ միջակայքում; երբ $-4<a<4$՝ մեկական արմատ $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$ և $(1;+\infty)$ միջակայքերում; երբ $a=-4$՝ մեկ արմատ $(-\infty;-1)$-ում և $x=1$ կրկնակի արմատ; երբ $a=4$՝ մեկ արմատ $(1;+\infty)$-ում և $x=-1$ կրկնակի արմատ: 1530. Երբ $k>1/e$՝ արմատ չունի; երբ $k=1/e$՝ $x=e$-ն կրկնակի արմատ է; երբ $0<k<1/e$՝ մեկական արմատ $(1;1/k)$ և $(1/k;+\infty)$ միջակայքերում; երբ $k\le 0$՝ մեկ արմատ $(0;1]$-ում: 1531. Երբ $a\le 0$՝ արմատ չունի,; երբ $0<a<e^2/4$՝ մեկ արմատ $(-\infty;0)$-ում; երբ $a=e^2/4$՝ մեկ արմատ $(-\infty;0)$-ում և $x=2$ կրկնակի արմատ; երբ $a>e^2/4$՝ մեկական արմատ $(-\infty;0)$, $(0;2)$ և $(2;+\infty)$ միջակայքերում: 1532. Երբ $|a|>3\sqrt{3}/16$ հավասարումն արմատ չունի; երբ $-3\sqrt{3}/16<a<0$՝ մեկական արմատ $(\pi/2;2\pi/3)$-ում և $(2\pi/3;\pi)$-ում; երբ $0<a<3\sqrt{3}/16$՝ մեկական արմատ $(0;\pi/3)$-ում և $(\pi/3;\pi/2)$-ում; երբ $a=0$՝ $x=0$-ն և $x=\pi$-ն եռապատիկ արմատներ են,իսկ $x=\pi/2$-ը պարզ արմատ է; երբ $a=\pm 3\sqrt{3}/16$, համապատասխանաբար $x=\pi/2\mp\pi/6$-ը կրկնակի արմատ է: **1533.** Երբ $|k|>sh\xi$, որտեղ ξ-ն $cthx=x$ հավասարման դրական արմատն է, ապա մեկական արմատ $(0;\xi)$-ում և $(\xi;+\infty)$-ում; երբ $|k|<sh\xi$, հավասարումն արմատ չունի: **1534.** ա) $p^3/27+q^2/4>0$; բ) $p^3/27+q^2/4<0$: **1549.** Ոչ: **1578.** ա) Ոչ; բ) այո: **1581.** Ոչ: **1584.** Ոչ: **1594.** ա) $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$: **1598.** Ոչ: **1612.** x^3-6x^2+9x+2: **1613.** $\alpha=\dfrac{1}{\ln 2}-1$; $\beta=\dfrac{1}{2}$:

Գլուխ 7

1614. $\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{2}x^{\frac{4}{3}}$: **1615.** $\dfrac{5}{4}\sqrt[5]{x^4/5}$: **1616.** $\dfrac{x^5}{5}-x^3$: **1617.** $x^2\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{5}+1\right)-2x\left(\dfrac{\sqrt{x}}{3}+1\right)$: **1618.** $\dfrac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+\dfrac{9}{4}x^{\frac{4}{3}}+3x+\dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$: **1619.** $\dfrac{8}{15}x^{\frac{15}{8}}$: **1620.** $-e^{-x-3}$: **1621.** $\dfrac{(ae)^{x+1}}{1+\ln a}$: **1622.** $\ln|\ln x|$: **1623.** $\sin(x+1)$: **1624.** $\dfrac{1}{3}tg3x$: **1625.** $-x-ctgx$: **1626.** $-tgx-ctgx$: **1627.** tgx: **1628.** $3x-\dfrac{2}{\ln 3-\ln 2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^x$: **1629.** $3\sqrt[3]{\sin x}$: **1630.** $-2\sqrt{1-tgx}$: **1631.** $tg(1+\ln x)$: **1632.** $\dfrac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}}$: **1633.** $\sqrt{x^2+1}$: **1634.** $\dfrac{-1}{\arcsin x}$: **1635.** $-\cos\left(e^x\right)$: **1636.** $-e^{\cos x}$: **1637.** $\dfrac{e^{x^2}}{2}$: **1638.** $\ln|x|-\dfrac{1}{4x^4}$: **1639.** $\arcsin x+\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$: **1640.** $\dfrac{1}{5}\arcsin x^5$: **1641.** $\dfrac{5}{32}\left(2x^4+1\right)^{\frac{4}{5}}$: **1642.** $\dfrac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+a^2\right)$: **1643.** $-\dfrac{4}{15}(1-3x)^{\frac{5}{4}}$: **1644.** $-\dfrac{1}{\ln 4}2^{-2x-7}$: **1645.** $\dfrac{1}{6}e^{6x}-\dfrac{3}{4}e^{4x}+\dfrac{3}{2}e^{2x}-x$: **1646.** $\dfrac{1}{2}arctgx^2-\dfrac{1}{4}\ln\left(1+x^4\right)$: **1647.** $x-4\ln|x+4|$: **1648.** $-x-6\ln|x-3|$: **1649.** $x-\sqrt{2}arctg\dfrac{x}{\sqrt{2}}$: **1650.** $\dfrac{\sqrt{3}}{18}\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{3}x}{1-\sqrt{3}x}\right|-\dfrac{x}{3}$: **1651.** $x+$

$+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$: 1652. $e^x+x-2\ln\left(1+e^x\right)$: 1653. $\frac{a}{3}ch3x+\frac{b}{4}sh4x$: 1654. $x-thx$: 1655. $\frac{1}{a}arctg\frac{chx}{a}$: 1656. $\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$: 1657. $\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-2}{x+5}\right|$: 1658. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+2}\right|$: 1659. $arctgx-\frac{\sqrt{2}}{2}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}$: 1660. $\frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}-\frac{1}{b}arctg\frac{x}{b}\right)$: 1661. $-\frac{2x+a+b}{(a-b)^2(x+a)(x+b)}+\frac{2}{(a-b)^3}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right|$: 1662. $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x$: 1663. $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x$: 1664. $\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}$: 1665. $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x$: 1666. $\frac{1}{2}tg^2x+\ln|\cos x|$: 1667. $\frac{x}{4}+\frac{\sin 2x}{16}-\frac{\sin 4x}{16}-\frac{\sin 6x}{24}+\frac{\sin 10x}{80}$: 1668. $tgx-ctgx$: 1669. $\cos x+\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|$: 1670. $tgx+\frac{tg^3x}{3}$: 1671. $-e^{\frac{1}{x}}$: 1672. $\frac{2}{3}\left(e^x+1\right)^{\frac{3}{2}}$: 1673. $x-2e^{-x}-\frac{1}{2}e^{-2x}$: 1674. $-2\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{3}(\arcsin x)^{\frac{3}{2}}$: 1675. $-\frac{1}{9}\sqrt{1-9x^2}-\frac{1}{9}(\arccos 3x)^3$: 1676. $\left(\arcsin\sqrt{x}\right)^2$: 1677. $\ln\left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}\right|$: 1678. $2arctg\sqrt{x}$: 1679. $\frac{1}{8}\sqrt[3]{8x^3+27}$: 1680. $\frac{-1}{\sqrt{1+x^2}}$: 1681. $\ln|\ln\ln x|$: 1682. $\frac{3}{2}(1-\sin 2x)^{\frac{1}{3}}$: 1683. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\cos x+\sqrt{\cos^2 x-\frac{1}{2}}\right|$: 1684. $-\frac{4}{3}(ctgx)^{\frac{3}{4}}$: 1685. $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\frac{tgx}{\sqrt{2}}\right)$: 1686. $\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$: 1687. $\frac{2}{n+2}\ln\left(x^{\frac{n+2}{2}}+\sqrt{1+x^{n+2}}\right)$: 1688. $\frac{1}{5\sqrt{3}}arctg\frac{x^5}{\sqrt{3}}$: 1689. $\frac{1}{2(\ln 3-\ln 2)}\ln\left|\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}\right|$: 1690. $-\ln\left(e^{-x}+\quad+\sqrt{1+e^{-2x}}\right)$: 1691. $-\frac{1}{e^x+1}$: 1692. $\frac{1}{99(1-x)^{99}}-\frac{1}{49(1-x)^{98}}+\frac{1}{97(1-x)^{97}}$: 1693. $\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln|x+1|$: 1694. $\frac{1}{3}\left[(x+1)^{\frac{3}{2}}-(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]$: 1695.

$-\frac{8+30x}{375}(2-5x)^{\frac{3}{2}}$: 1696. $\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right|$: 1697. $-\frac{1+2x}{10}(1-3x)^{\frac{2}{3}}$: 1698. $\frac{-3}{140}\left(9+12x+14x^2\right)(1-x)^{\frac{4}{3}}$: 1699. $-\frac{1+55x^2}{6600}\left(1-5x^2\right)^{11}$: 1700. $\frac{-2}{15}(32+8x+$ $+3x^2)\sqrt{2-x}$: 1701. $\frac{-1}{15}\left(8+4x^2+3x^4\right)\sqrt{1-x^2}$: 1702. $arctg(\cos x)-\cos x$: 1703. $\frac{2}{3}(\ln x-2)\sqrt{1+\ln x}$: 1704. $-2e^{-\frac{x}{2}}+2\ln\left(1+e^{-\frac{x}{2}}\right)$: 1705. $x-$ $-2\ln\left(1+\sqrt{1+e^x}\right)$: 1706. $\left(arctg\sqrt{x}\right)^2$: 1707. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$: 1708. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$: 1709. $-\sqrt{a^2-x^2}+a\cdot\arcsin\frac{x}{a}$: 1710. $\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$: 1711. $-\frac{3a+x}{2}\sqrt{x(2a-x)}+3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}}$: 1712. $\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}$: 1713. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$: 1714. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$: 1715. $\sqrt{x^2-a^2}-2a\ln\left(\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a}\right)$, երբ $x>a$; $-\sqrt{x^2-a^2}+2a\ln\left(\sqrt{-x+a}+\sqrt{-x-a}\right)$, երբ $x<-a$: 1716. $x(\ln x-1)$: 1717. $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)$: 1718. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left(\ln^2 x-\frac{4}{3}\ln x+\frac{8}{9}\right)$: 1719. $x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}$: 1720. $x-\frac{1-x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$: 1721. $-(x+1)e^{-x}$: 1722. $-\frac{x^2+1}{2}e^{-x^2}$: 1723. $x\sin x+\cos x$: 1724. $-\frac{2x^2-1}{4}\cos 2x+\frac{x}{2}\sin 2x$: 1725. $xtgx+\ln|\cos x|$: 1726. $\frac{x^2}{4}-\frac{x\sin 2x}{4}-\frac{\cos 2x}{8}$: 1727. $\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|-\cos x\ln tgx$: 1728. $x^2shx-2xchx+2shx$: 1729. $xarctgx-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$: 1730. $-\frac{x}{2}+$ $+\frac{1+x^2}{2}arctgx$: 1731. $x\arccos(5x-2)+\frac{2}{5}\arcsin(5x-2)-\frac{1}{5}\sqrt{1-(5x-2)^2}$:

1732. $\frac{1}{3}x^3\arcsin 2x+\frac{1}{36}\left(1+2x^2\right)\sqrt{1-4x^2}$: 1733. $-\frac{\arcsin x}{x}-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|$:

1734. $-x-\sqrt{1-x^2}\arccos x$: 1735. $x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x$: 1736. $\sqrt{1+x^2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-x$: 1737. $2\left(\sqrt{x}-1\right)e^{\sqrt{x}}$: 1738. $2(6-x)\sqrt{x}\cos\sqrt{x}-$ $-6(2-x)\sin\sqrt{x}$: 1739. $\frac{x}{2}[\sin\ln x-\cos\ln x]$: 1740. $\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax}$:

1741. $\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}$: 1742. $\frac{e^{2x}}{8}(2-\sin 2x-\cos 2x)$: 1743. $\frac{(1+x)e^{arctgx}}{2\sqrt{1+x^2}}$:

1744. $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x-e^x(\cos x+\sin x)+\frac{1}{2}e^{2x}$: 1745. $-[x+ctgx\ln(e\sin x)]$: 1746. $\frac{e^x}{x+1}$: 1747. $\frac{2}{\sqrt{7}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{7}}$: 1748. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{3x+1}\right|$: 1749. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}-1}{x^2+\sqrt{2}-1}\right|$:

1750. $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$: 1751. $\frac{1}{9}\ln\left\{\left|x^3+1\right|\left(x^3-2\right)^2\right\}$: 1752. $\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}$: 1753. $\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right|$: 1754. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-\frac{x}{2}+1}\right|$:

1755. $\frac{1}{2}\ln\left(x^2-2x\cos a+1\right)+ctga\cdot arctg\frac{x-\cos a}{\sin a}$: 1756. $\frac{29}{45}arctg\frac{5x+3}{9}-$ $-\frac{3}{10}\ln\left(5x^2+6x+18\right)$: 1757. $3\sqrt{x^2+2x+2}-4\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)$:

1758. $-\frac{1}{4}\sqrt{3+4x-4x^2}+\frac{7}{4}\arcsin\frac{2x-1}{2}$: 1759. $\frac{2x-1}{4}\sqrt{x-x^2}+$ $+\frac{1}{8}\arcsin(2x-1)$: 1760. $\frac{1}{8}\ln\frac{x^2+1}{x^2+5}$: 1761. $\frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+5}+2\ln(x+1+$ $+\sqrt{x^2+2x+5}\Big)$: 1762. $\ln|(x-2)(x+5)|$: 1763. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3}\right|$: 1764. $\frac{x^2}{2}-$ $-x+\frac{1}{3}\ln|x-1|+\frac{8}{3}\ln|x+2|$: 1765. $x+\frac{1}{3}arctgx-\frac{8}{3}arctg\frac{x}{2}$: 1766. $\frac{1}{x+1}+$

$+\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|$: 1767. $\frac{1}{33}\ln\left|\frac{(3x+1)^9(2x-3)^2}{x^{11}}\right|$: 1768. $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{(x+1)^4(x-2)^5}{(x-1)^4(x+2)^5}\right|$:

1769. $\frac{1}{2-x}-arctg(x-2)$: 1770. $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$: 1771.

$\ln\left|\frac{(x-1)^3}{(x-2)(x+2)^2}\right|$: 1772. $\frac{x^4}{4}+\frac{4}{3}x^3+6x^2+30x-\frac{27}{x-2}+72\ln|x-2|$: 1773.

$\frac{3}{4}\ln|x-1|+\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{2}arctgx$: 1774. $\frac{1}{4}\ln\left|x^4-1\right|+\frac{1}{2}arctgx-\frac{1}{2(x-1)}$: 1775.

$\ln\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{3}{2}arctg\frac{x}{2}-\frac{3}{\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}$:1776. $-\frac{1}{4x^4}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x}+\ln|x|+$

$+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$: 1777. $2\sqrt{x}-2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)$: 1778. $\frac{3}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2-\frac{3}{4}\ln|t-1|+$

$+\frac{15}{8}\ln\left(t^2+t+2\right)-\frac{27}{4\sqrt{7}}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{7}}$, $t=\sqrt[3]{2+x}$: 1779. $\frac{2}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2}-\frac{4}{1+\sqrt[4]{x}}$:

1780. $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}-6arctg\sqrt[6]{x}$: 1781. $\sqrt{x}+\frac{3}{4}\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}+\frac{3}{4}\sqrt[6]{x}+$

$+3\sqrt[12]{x}+\frac{12}{5}\ln\left|1-\sqrt[12]{x}\right|-\frac{3}{40}\ln\left(1+2\sqrt[12]{x}+2\sqrt[6]{x}\right)-\frac{9}{20}arctg\left(1+2\sqrt[12]{x}\right)$: 1782.

$\frac{5}{4}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{4/5}-\frac{5}{9}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{9/5}$: 1783. $\frac{x^2}{2}-\frac{x\sqrt{x^2-1}}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$: 1784.

$\ln\left|1+3\sqrt[3]{x}\right|$: 1785. $\frac{1}{2}(x-2)\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$: 1786. $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+$

$+\frac{1}{5}\sin^5 x$: 1787. $\frac{5}{16}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x$: 1788. $\frac{\sin^5 x}{5}-$

$-\frac{2\sin^7 x}{7}+\frac{\sin^9 x}{9}$: 1789. $\frac{\cos 6x}{24}-\frac{\cos 4x}{16}-\frac{\cos 2x}{8}$: 1790. $\frac{2}{\cos x}$: 1791.

$\ln|\cos x|-\cos 2x$: 1792. $-\frac{ctg^4 x}{4}$: 1793. $\frac{tg^2 x}{2}+\ln|tgx|$: 1794. $-\frac{ctg^3 x}{3}-ctgx$:

1795. $\frac{1}{4}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+\frac{1}{2(1+\cos x)}$: 1796. $\frac{1}{4}\ln\frac{5-\sin x}{1-\sin x}$: 1797. $\frac{1}{\sin a}\ln\left|\frac{\cos\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right|$:

1798. $\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{3tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}$: 1799. $x-\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\sqrt{2}tgx\right)$: 1800. ш) $\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}arctg\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}tg\frac{x}{2}\right)$; р) $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\left|\frac{\varepsilon+\cos x+\sqrt{\varepsilon^2-1}\sin x}{1+\varepsilon\cos x}\right|$: 1801. $\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|$: 1802. $\frac{1}{6}\ln\frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3}$: 1803. $-x+ctga\ln\left|\frac{\cos x}{\cos(x+a)}\right|$: 1804. $\frac{3}{7}(a+x)^{7/3}-\frac{3}{4}a(a+x)^{4/3}$: 1805. $4\sqrt{x+1}\times\times\left(\ln\sqrt{x+1}-1\right)$: 1806. $3e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x^5}-5\sqrt[3]{x^4}+20x-60\sqrt[3]{x^2}+120\sqrt[3]{x}-120\right)$: 1807. $xarctg\left(1+\sqrt{x}\right)-\sqrt{x}+\ln\left|x+2\sqrt{x}+2\right|$: 1808. $\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}--\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$: 1809. $\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right|-\frac{\sqrt{2x+1}}{4x}$: 1810. $arctg\sqrt{x-1}++\frac{\sqrt{x-1}}{x}$: 1811. $x+\frac{25\ln|x+5|-49\ln|x+7|}{2}$: 1812. $\frac{1}{4}\ln\left(2x^2-x+1\right)++\frac{1}{2\sqrt{7}}arctg\frac{4x-1}{\sqrt{7}}$: 1813. $\frac{x^3}{3}-4x+8arctg\left(\frac{x}{2}\right)$: 1814. $6\sqrt[6]{x}-3\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}--6\ln\left(1+\sqrt[6]{x}\right)$: 1815. $-\frac{2}{3}\ln\frac{(1+y)^2}{1-y+y^2}+\frac{4}{\sqrt{3}}arctg\frac{2y-1}{\sqrt{3}}$, $y=\sqrt[4]{x}$: 1816. $\left(1+\sqrt[4]{2x-1}\right)^2+2\ln\left|1-\sqrt[4]{2x-1}\right|$: 1817. $\frac{x^2-2}{3}\sqrt{1+x^2}$: 1818. $\frac{2x-1}{4}\times\times\sqrt{4x^2-4x+3}+\frac{1}{2}\ln\left(2x-1+\sqrt{4x^2-4x+3}\right)$: 1819. $x-tgx+\frac{1}{\cos x}$: 1820. $\frac{tg^3x}{3}$: 1821. $\frac{ch^7x}{7}-\frac{ch^5x}{5}$: 1822. $\sqrt{2}\ln ctg\left(\frac{\pi-x}{4}\right)$: 1823. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\sin^2 x}}{|\cos x|}\right)$: 1824. $\frac{1}{4}\ln\frac{\left(\sqrt{1+e^x}-1\right)\left(1-\sqrt{1-e^x}\right)}{\left(\sqrt{1+e^x}+1\right)\left(1+\sqrt{1-e^x}\right)}-e^{-x}\times$

$\times\dfrac{\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x}}{2}$:1825. $\dfrac{1}{2}\sin x^2-\dfrac{1}{2}x^2\cos x^2$: 1826. $\dfrac{xe^x}{1+e^x}-\ln\left(1+e^x\right)$: 1827. e^{e^x} : 1828. $\ln x\cdot\sin\ln x+\cos\ln x$: 1829. $x\arccos\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}+\sqrt{x}-arctg\sqrt{x}$:1830. ա) Ճշմարիտ չէ; բ) ճշմարիտ է; գ) ճշմարիտ չէ: 1833. $x|x|/2$: 1834. $x^2|x|/3$: 1835. e^x-1, երբ $x<0$ և $1-e^{-x}$, երբ $x\ge 0$: 1836. $\dfrac{(x+1)|1+x|}{2}+\dfrac{(1-x)|1-x|}{2}$:

1837. $1-chx$, երբ $x<0$ և $chx-1$, երբ $x\ge 0$: 1838. $\dfrac{1}{2}f(2x)$: 1839. $xf'(x)-f(x)$: 1840. ա) $x-x^2/2$; բ) x, երբ $-\infty<x\le 0$ և e^x-1, երբ $0<x<+\infty$: 1842. ա) $\dfrac{1}{2}\left(arctgx-\dfrac{x}{1+x^2}\right)$; բ) $\dfrac{1}{128}\left[\dfrac{3x^3+20x}{\left(x^2+4\right)^2}+\dfrac{3}{2}arctg\dfrac{x}{2}\right]$:

1843. $\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\dfrac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(arctg\left(\sqrt{2}x+1\right)+arctg\left(\sqrt{2}x-1\right)\right)$: 1844. $\dfrac{1}{4}\times$ $\times\ln\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\left(arctg\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+arctg\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$: 1845. $\dfrac{1}{6}arctgx^3+$ $+\dfrac{1}{2}arctgx+\dfrac{1}{4\sqrt{3}}\ln\dfrac{1+x\sqrt{3}+x^2}{1-x\sqrt{3}+x^2}$: 1846. $\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{(x-1)^2}{x^2+x+1}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}arctg\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$:

1847. $\dfrac{3x\left(3x^2+5\right)}{8\left(x^2+1\right)^2}+\dfrac{17}{8}arctgx$: 1848. $\dfrac{x^3-2x^2+x+3}{x^2-2x+2}+2\ln\left(x^2-2x+2\right)+$ $+arctg(x-1)$: 1849. $-\dfrac{3x^2+2}{2x\left(x^2+1\right)}-\dfrac{3}{2}arctgx$: 1850. $-\dfrac{2x^3+1}{3x^3\left(x^3+1\right)}+\dfrac{2}{3}\times$ $\times\ln\left|\dfrac{x^3+1}{x^3}\right|$: 1851. $\dfrac{1}{4\sqrt{3}}\ln\dfrac{1+x\sqrt{3}+x^2}{1-x\sqrt{3}+x^2}-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\left(arctg\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+arctg\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$:

1854. $\dfrac{2x-3}{4}\sqrt{1+x+x^2}-\dfrac{1}{8}\ln\left(\dfrac{1}{2}+x+\sqrt{1+x+x^2}\right)$: 1855. $\dfrac{11}{8}\arcsin\dfrac{2x-1}{\sqrt{5}}+$ $+\dfrac{1-2x}{4}\sqrt{1+x-x^2}$: 1856. $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{1-x+\sqrt{2\left(1+x^2\right)}}{1+x}\right|$: 1857. $\arcsin\dfrac{x-2}{\sqrt{2}|x-1|}$:

1858. $\frac{2-x}{3(1-x)^2}\sqrt{1-x^2}$:1859. $\frac{1}{5}\frac{\sqrt{x^2+2x-5}}{x+2}+\frac{1}{5\sqrt{5}}\arcsin\frac{x+7}{\sqrt{6}|x+2|}$: 1860. $\sqrt{x^2+2x+2}+ +\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)-\sqrt{2}\ln\left|\frac{x+2+\sqrt{2(x^2+2x+2)}}{x}\right|$:

1861. $\frac{3}{2(2z+1)}+\frac{1}{2}\ln\frac{z^4}{|2z+1|^3}$ $\left(z=x+\sqrt{x^2+x+1}\right)$: 1862. $\frac{1}{24}\left[(z-1)^3+(z-1)^{-3}\right]+\frac{1}{8}\left[(z-1)^2-(z-1)^{-2}\right]+\frac{1}{8}\left[(z-1)+(z-1)^{-1}\right]+\frac{1}{2}\ln|z-1|$, $z=x+\sqrt{x^2-2x+2}$: 1863. $\sqrt{1+x+x^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}}{\left(2+x+2\sqrt{1+x+x^2}\right)^2}$: 1864. $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2x^2+2}-x}{\sqrt{x^2+2}}$: 1865. $\frac{3}{2}\ln\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+1}\right)- -\ln\frac{2-x+2\sqrt{x^2-x+1}}{x}+\sqrt{x^2-x+1}$ $(x>0)$: 1866. $-\frac{1+x}{2}\sqrt{1+2x-x^2}+ +2\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}x}{x+1}$: 1867. $\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}-4x^{\frac{1}{2}}+18x^{\frac{1}{6}}+\frac{3x^{\frac{1}{6}}}{1+x^{\frac{1}{3}}}- -21arctgx^{\frac{1}{6}}$: 1868. $\frac{1}{6}\ln\frac{z^2+z+1}{(z-1)^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2z+1}{\sqrt{3}}$, $z=\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$: 1869. $-z+\frac{2}{3}z^3-\frac{z^5}{5}$, $z=\sqrt{1-x^2}$: 1870. $\frac{3z}{2z^3+2}-\frac{1}{4}\ln\frac{(z+1)^2}{z^2-z+1}-\frac{\sqrt{3}}{2}arctg\frac{2z-1}{\sqrt{3}}$, $z=\frac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x}$: 1871. $\frac{3}{5}z^5-2z^3+3z$, $z=\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}$: 1872. $\frac{5}{4}z^4-\frac{5}{9}z^9$, $z=\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}$: 1873. $\frac{2}{\sqrt{7}}arctg\frac{2tgx+1}{\sqrt{7}}$: 1874. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{tgx+1+\sqrt{2}}{tgx+1-\sqrt{2}}\right|$: 1875. $\frac{1}{2\sqrt{13}}\ln\left|\frac{2tgx+3-\sqrt{13}}{2tgx+3+\sqrt{13}}\right|$:1876. $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{tg2x}{\sqrt{2}}$:1877. $\frac{1}{6}\ln\frac{(tgx+1)^2}{tg^2x-tgx+1}+$

$+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2tgx-1}{\sqrt{3}}$: 1878. $arctg\frac{tg2x}{2}$: 1879. $\frac{1}{1-\varepsilon^2}\left[\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}arctg\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}tg\frac{x}{2}\right)-\frac{\varepsilon\sin x}{1+\varepsilon\cos x}\right]$: 1880. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{7+4\sqrt{2}+\cos 4x}{7-4\sqrt{2}-\cos 4x}$: 1881. $-\ln\left(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x}\right)$: 1882. $3\cos x-$ $-\sin x+2\sqrt{2}\ln|tg(x/2+\pi/8)|$: 1883. $\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|-\ln\left|\frac{3\sin x+1}{\sin x}\right|$: 1884. $-\frac{1}{8}ctg^2x+$ $+\frac{1}{32}\ln\left(1+4ctg^2x\right)$: 1885. $\frac{x}{2}+\frac{sh2x}{4}+\frac{sh^2x}{2}$: 1886. $-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{thx-2}{thx+2}\right|$: 1887. $-\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{sh2x}{\sqrt{2}}$: 1888. $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{e^x-\sqrt{3}}{e^x+\sqrt{3}}\right|$: 1889. $\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}arctg\frac{ath\frac{x}{2}+b}{\sqrt{a^2-b^2}}$,

երբ $b^2<a^2$, $\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\frac{ath\frac{x}{2}+b-\sqrt{b^2-a^2}}{ath\frac{x}{2}+b+\sqrt{b^2-a^2}}$, երբ $b^2>a^2$: 1890. $\frac{1}{8}\left(5shx-3chx-\frac{15}{4}\ln\left|\frac{3th\frac{x}{2}+1}{th\frac{x}{2}+3}\right|\right)$: 1891. $\frac{2}{3}x-\frac{1}{3\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2th\frac{x}{2}-5+3\sqrt{5}}{2th\frac{x}{2}-5-3\sqrt{5}}\right|-$ $-\frac{1}{3}\ln|4chx+5shx+6|$: 1892. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{thx}}{1-\sqrt{thx}}\right|-arctg\sqrt{thx}$: 1893. $\frac{3}{55}th^{\frac{5}{3}}x\times$ $\times\left(11-5th^2x\right)$: 1894. $x-\frac{1}{2}\ln\left(\left(1+e^x\right)\sqrt{1+e^{2x}}\right)-\frac{1}{2}arctge^x$: 1895. $x-\ln\left|1-e^x\right|+$ $+\frac{1}{1-e^x}+\frac{1}{2\left(1-e^x\right)^2}+\frac{1}{3\left(1-e^x\right)^3}$: 1896. $\frac{1}{4sh1}\left(e^{-x}+ch1\left(x-\ln\left(1+e^xch1\right)\right)\right)$: 1897. $-\left(1+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x^2}$: 1898. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\ln\left(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x}\right)$: 1899. $\left(1+e^x\right)\ln\left(1+e^{-x}\right)+x$: 1900. $\ln\frac{\sqrt{1-x+x^2}}{x}-\frac{\ln\left(1-x+x^2\right)}{x}+\sqrt{3}\times$

$\times arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$: 1901. $\frac{2x^2\sqrt{x}}{125}\left(25\ln^2 x-20\ln x+8\right)$: 1902. $\frac{1}{2}(\arcsin x-x)+$ $+x\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$: 1903. $(x-1)arctg\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\ln\left(x^2-2x+2\right)$: 1904. $\frac{1}{8}\left[\left(x^8-1\right)arctgx-\frac{x^7}{7}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+x\right]$: 1905. $\frac{1}{9}\left(x^3-3x-3\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\arccos x\right)$: 1906. $x-e^{-x}\arcsin e^x-\ln\left(1+\sqrt{1-e^{2x}}\right)$: 1907. $\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)e^{\arcsin x}$: 1908. $\frac{x}{\ln x}$: 1909. $\frac{x}{1+\ln x}$: 1910. $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)$: 1911. $arctg\sqrt{x^2-1}-\frac{\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|}{x}$: 1912. $2\sqrt{x-1}(\ln x-2)+4arctg\sqrt{x-1}$: 1913. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|-\frac{\ln|x|}{x+2}$: 1914. $\frac{\ln|x|}{\sqrt{x^2-1}}+\arcsin\frac{1}{x}$: 1915. $a\left(x\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\ln\left|x^2-1\right|\right)+$ $+\frac{a+b}{4}\ln^2\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$: 1916. $\frac{\cos x}{3(2+\sin x)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}arctg\frac{2tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}$: 1917. $-\frac{4\sqrt{2}}{5}\sqrt{ctg^5x}$:1918. $-2\ln\left(thx+\sqrt{1+th^2x}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{1+th^2x}+\sqrt{2}thx}{\sqrt{1+th^2x}-\sqrt{2}thx}$: 1919. $e^x tg\frac{x}{2}$: 1920. $\frac{\sqrt{2tgx}}{5}\left(5+tg^2x\right)$: 1921. $\frac{x}{1+\cos x}-tg\frac{x}{2}$: 1922. $-\frac{3}{2}(tgx)^{-\frac{2}{3}}$: 1923. $\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\ln\frac{(x-1)^2}{2x^2-2x+1}-3arctg(2x-1)$: 1924. $\frac{5}{3}x^3-3\ln\left|x^5+3x^2-1\right|$: 1925. $\frac{\sqrt{x^2-2x-1}}{4(x-1)^2}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{x-1}$: 1926. $\frac{2x^2+x+7}{6}\sqrt{x^2+2x+2}+$ $+\frac{5}{2}\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)$: 1927. $\frac{1}{2}\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}-\sqrt{3}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}}, t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$: 1928. $\frac{1}{2}\ln\frac{(z+1)^2}{1-z+z^2}-\sqrt{3}arctg\frac{2z-1}{\sqrt{3}}$, $z=\sqrt[3]{\frac{1-x}{x}}$: 1929. $\frac{1}{18}\ln\frac{t^2+2t+1}{t^2-t+1}-$

$-\frac{\sqrt{3}}{9}arctg\frac{2t-1}{\sqrt{3}}$, $t=\frac{\sqrt[3]{3+4x^3}}{x}$: 1930. $\frac{2\sqrt{5}}{25}\ln\frac{2t+\sqrt{5}+1}{2t-\sqrt{5}+1}+\frac{2(4t-3)}{5(t^2+t-1)}$, $t=\sqrt{x^2+x}-x$: 1931. $-\frac{3x^3+4}{8x\sqrt[3]{(2+x^3)^2}}$: 1932. $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2}-\frac{\ln|x|}{2+2x^2}$: 1933. $x-\ln(1+e^x)-\frac{2arctg\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x}}-\left(arctg\sqrt{e^x}\right)^2$: 1934. $\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}-1}\right)+\arcsin(e^{-x})$: 1935. $\frac{\arccos(x\sqrt{x})}{3(1-x^3)}+\frac{x\sqrt{x}}{3\sqrt{1-x^3}}$: 1936. $\frac{2(x^2+1)arctgx}{\sqrt{x}}-4\sqrt{x}$: 1937. $\frac{1}{3}\left(\arcsin\frac{\sin x}{2}-\frac{x\cos x}{\sqrt{4-\sin^2 x}}\right)$: 1938. $x^a\ln^b x$: 1939. $\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{1+e^{2x}}+\ln\left(e^{-x}+\sqrt{1+e^{-2x}}\right)\right]$: 1940. $-\frac{3}{2}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^{-2}$: 1941. $-\frac{1+9\sqrt[4]{x}}{18\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^9}$: 1942. $\frac{1}{6}\ln\frac{t-1}{t+1}-\frac{1}{12}\ln\frac{t^2-t+1}{t^2+t+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}arctg\frac{2t-1}{\sqrt{3}}$, $t=\sqrt[6]{x^6+1}$:

1943. $\frac{\sqrt{1+2x-x^2}}{2(1-x)}-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+2x-x^2}}{1-x}\right|$:1944. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}x}\right|+\frac{x}{2\sqrt{1+x^2}}$: 1945. $-2arctg\frac{\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{2}}-4\sqrt{3}\ln\left|\frac{\sqrt{3t^2+3}+\sqrt{2}t}{\sqrt{3t^2+3}-\sqrt{2}t}\right|$, $t=\frac{1+x}{1-x}$: 1946. $\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}(2x+1)+\sqrt{3(x^2+x-1)}}{\sqrt{2}(2x+1)-\sqrt{3(x^2+x-1)}}\right|$: 1947. $-\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2+2x-x^2}}+\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{2}}{3}arctg\frac{\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{2}(1-x)}$: 1948. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|-\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}+\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)$:1949. x, երբ $|x|\le 1$; $\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}\operatorname{sgn} x$, երբ $|x|>1$:1950. $\frac{[x]}{\pi}\left\{[x]-(-1)^{[x]}\cos\pi x\right\}$:1951. $x-\frac{x^3}{3}$, երբ $|x|\le 1$; $x-\frac{x}{2}|x|+\frac{1}{6}\operatorname{sgn} x$, երբ $|x|>1$: 1952. x, երբ $-\infty < x \le 0$; $\frac{x^2}{2}+x$, երբ $0 \le x \le 1$; $x^2+\frac{1}{2}$, երբ $x>1$: 1953. $\frac{x}{4}+\frac{t}{4}(1-2|t|), t=x-[x]-\frac{1}{2}$: 1956. $I_n=\frac{1}{a}x^n e^{ax}-\frac{n}{a}I_{n-1}$: 1957. $I_n=\frac{x^{\alpha+1}\ln^n x}{\alpha+1}-\frac{n}{\alpha+1}I_{n-1}$: 1958. $I_n=\frac{x^{n-1}\sqrt{x^2+a}}{n}-\frac{n-1}{n}aI_{n-2}$: 1959. $I_n=$

$=-\frac{\cos x\sin^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$: 1960. $I_n=\frac{shxch^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$: 1961. $I_n=$ $=-\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$:1962. $I_n=\frac{shx}{(n-1)ch^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$:1963. $I_n=$ $=\frac{tg^{n-1}x}{n-1}-I_{n-2}$: 1966. $\frac{2\sin x-\cos x}{10(2\cos x+\sin x)^2}+\frac{1}{10\sqrt{5}}\ln\left|tg\frac{x+arctg2}{2}\right|$: 1968. $-\frac{2}{n\cos a}\left(\cos\frac{x+a}{2}\right)^n\left(\sin\frac{x-a}{2}\right)^{-n}$: 1969. $A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}$, $B=\frac{ab_1-ba_1}{a^2+b^2}$, $C=$ $=c_1-c\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}$: 1970. $\frac{2}{5}x+\frac{4}{5\sqrt{21}}\ln\left|\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}(2tg\frac{x}{2}-1)}{\sqrt{7}-\sqrt{3}(2tg\frac{x}{2}-1)}\right|-\frac{1}{5}\ln|3\sin x+$ $+4\cos x-2|$: 1971. $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}tg\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+\sin x+\cos x)$: 1972. $A=\frac{2ab_1+bc_1-ba_1}{a^2+b^2}$, $B=\frac{ac_1-aa_1-2bb_1}{a^2+b^2}$, $C=\frac{a^2c_1+b^2a_1-2abb_1}{a^2+b^2}$: 1973. $3\cos x-\sin x+2\sqrt{2}\ln|tg(x/2+\pi/8)|$: 1974. $\frac{8}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}-1+2tg\frac{x}{2}}{\sqrt{5}+1-2tg\frac{x}{2}}\right|+$ $+\frac{1}{5}(\sin x+3\cos x)$ 1975. $A=\frac{a_1(a-\lambda_2)+bb_1}{b(\lambda_2-\lambda_1)}$, $B=\frac{a_1(a-\lambda_1)+bb_1}{b(\lambda_1-\lambda_2)}$: 1976. $\frac{3}{5}arctg(\sin x-2\cos x)+\frac{1}{10\sqrt{6}}\ln\frac{\sqrt{6}+2\sin x+\cos x}{\sqrt{6}-2\sin x-\cos x}$: 1977. $\frac{3}{4\sqrt{2}}\times$ $\times\ln\left|\frac{\sqrt{2}(\sin x+\cos x)+1}{\sqrt{2}(\sin x+\cos x)-1}\right|-\frac{1}{4\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}(\sin x-\cos x)}{\sqrt{3}-\sqrt{2}(\sin x-\cos x)}\right|$: 1979. $\frac{\varepsilon^2+2}{2(\varepsilon^2-1)^{\frac{5}{2}}}\times$

$\times \ln\left|\frac{\sqrt{\varepsilon-1}\,tg\frac{x}{2}+\sqrt{\varepsilon+1}}{\sqrt{\varepsilon-1}\,tg\frac{x}{2}-\sqrt{\varepsilon+1}}\right| + \frac{\varepsilon\sin x\left(\varepsilon^2-3\varepsilon\cos x-4\right)}{2\left(\varepsilon^2-1\right)^2(1+\varepsilon\cos x)^2}$: 1981. $\frac{2x^4-1}{6x^6}\sqrt{1+x^4}$:

1982. $\frac{x}{2a}+\frac{1}{a}arctg\frac{a-1}{a+1}tg\frac{x}{2}$, երբ $a\neq-1$ և $a\neq 0$; $\sin x$, երբ $a=0$; $-\frac{x}{2}$, երբ $a=-1$: 1983. $\frac{x}{a-1}-\frac{1}{\sqrt{a}(a-1)}arctg\frac{tgx}{a}$, երբ $a>0$, $a\neq 1$; $\frac{x}{a-1}-$ $-\frac{1}{2(a-1)\sqrt{-a}}\ln\left|\frac{tgx-\sqrt{-a}}{tgx+\sqrt{-a}}\right|$, երբ $a<0$; $\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}$, երբ $a=1$; $-ctgx-x$, երբ $a=0$: 1984. $\frac{1}{a^2+b^2}\cdot\frac{a\sin x-b\cos x}{a\cos x+b\sin x}$: 1985. $\frac{tgx}{a\left[a+(ax+b)tgx\right]}$: 1986. $-\frac{4}{3+3tg^3x}$: 1987. $\frac{xarctgx}{b\sqrt{ax^2+b}}-\frac{1}{b\sqrt{a-b}}arctg\sqrt{\frac{ax^2+b}{a-b}}$, երբ $a>b$; $\frac{xarctgx+1}{a\sqrt{b}\sqrt{x^2+1}}$, երբ $a=b$; $\frac{xarctgx}{b\sqrt{ax^2+b}}-\frac{1}{2b\sqrt{b-a}}\ln\frac{\left|\sqrt{ax^2+b}-\sqrt{b-a}\right|}{\sqrt{ax^2+b}+\sqrt{b-a}}$, երբ $a<b$: 1988. $\frac{2}{(a-b)^3}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right|-\frac{2x+a+b}{(a-b)^2(x+a)(x+b)}$: 1989. $\left(\frac{1}{b}arctg\frac{x}{b}-\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}\right)\frac{1}{a^2-b^2}$, երբ $a^2\neq b^2$; $\frac{1}{2b^2}\left(\frac{x}{x^2+b^2}+\frac{1}{b}arctg\frac{x}{b}\right)$, երբ $a^2 \doteq b^2$: 1990. $x+(a-b)\left[n\ln|x+b|-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}C_n^{k-1}\left(\frac{a-b}{x+b}\right)^k\right]$: 1991. $\frac{ab_1-ba_1}{a^2-b^2}\ln|achx+bshx|+\frac{aa_1-bb_1}{a^2-b^2}x$, երբ $a^2\neq b^2$, $\frac{a_1\pm b_1}{2a}x+\frac{a_1\mp b_1}{4a}sh2x+$ $+\frac{b_1\mp a_1}{2a}sh^2x$, երբ $a=\pm b$: 1992. $\frac{1}{5}\ln\left|5th\frac{x}{2}+3\right|$: 1993. $-\frac{1}{7}\left(\frac{5}{4chx+3shx}+\frac{4}{\sqrt{7}}arctg\frac{4th\frac{x}{2}+3}{\sqrt{7}}\right)$: 1994. $\frac{2}{3}\ln\frac{\left(th\frac{x}{2}-2\right)^2}{th^2\frac{x}{2}+2th\frac{x}{2}+4}-\frac{4}{\sqrt{3}}arctg\frac{th\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}$: 1995. $\frac{2}{3}\ln\left|\sin^3x+\cos^3x\right|$: 1996.

$\frac{1}{a^2+b^2}\left(\frac{ab_1-ba_1}{a\cos x+b\sin x}+\frac{aa_1+bb_1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|tg\frac{x+\varphi}{2}\right|\right)$, որտեղ $\sin\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$: 1997. $\frac{1}{2b^2}\left(\frac{tgx}{a^2tg^2x+b^2}+\frac{1}{ab}arctg\left(\frac{a}{b}tgx\right)\right)$, եթե $a\neq 0$, $b\neq 0$; $-\frac{ctg^3x}{3a^4}$, եթե $a\neq 0$, $b=0$; $\frac{tgx}{b^4}$, եթե $a=0$, $b\neq 0$: 1998. $4\sqrt[4]{tgx}$: 1999. $\frac{1}{2na^{2n-1}}\left\{\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+\sum_{k=1}^{n-1}\left[\cos\frac{k\pi}{n}\ln\left(x^2-2ax\cos\frac{k\pi}{n}+a^2\right)-2\sin\frac{k\pi}{n}\times\right.\right.$ $\left.\left.\times arctg\frac{x-a\cos\frac{k\pi}{n}}{a\sin\frac{k\pi}{n}}\right]\right\}$:2000. $\frac{1}{|a|\sqrt{b^2-a^2}}\ln\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{\left|\sqrt{b^2-a^2}x+|a|\sqrt{b^2-x^2}\right|}$, եթե $a^2<b^2$; $-\frac{x}{b^2\sqrt{b^2-x^2}}$, եթե $a^2=b^2$; $\frac{1}{|a|\sqrt{a^2-b^2}}\arccos\frac{\sqrt{a^2-b^2}x}{|b|\sqrt{a^2-x^2}}$, եթե $a^2>b^2$: 2001. $\frac{1}{n\sqrt{a}}\ln\frac{\sqrt{x^n+a}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^n+a}+\sqrt{a}}$, եթե $a>0$; $\frac{2}{n\sqrt{-a}}\arccos\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{x^n}}$, եթե $a<0$: 2002. $\frac{n}{b-a}\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}$, եթե $a\neq b$; $\frac{1}{b-x}$, եթե $a=b$: 2003. $2(\ln x-2)\sqrt{x+a}+2\sqrt{a}\ln\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{a}}{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}$, եթե $a\geq 0$; $2(\ln x-2)\sqrt{x+a}+$ $+4\sqrt{-a}arctg\frac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{-a}}$, եթե $a<0$: 2004. $-\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)}{x}+\frac{1}{\sqrt{a}}\times$ $\times\ln\frac{\sqrt{x^2+a}+\sqrt{a}}{|x|}$, եթե $a>0$; $-\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)}{x}+\frac{1}{\sqrt{-a}}arctg\frac{\sqrt{x^2+a}}{\sqrt{-a}}$, եթե $a<0$; $-\frac{1+\ln 2x}{x}$, եթե $a=0$: 2005. $\frac{x\sin x+\cos x}{b[(ax-b)\sin x+(a+bx)\cos x]}$, եթե $b\neq 0$; $\frac{\sin x-x\cos x}{a^2(x\sin x+\cos x)}$, եթե $b=0$: 2006. $\frac{1}{2a\sqrt{a+1}}arctg\frac{\sqrt{a+1}x}{\sqrt{1-x^2}}-$

$-\dfrac{\arcsin x}{2a\left(1+ax^2\right)}$, երբ $a\in(-1;0)\bigcup(0;+\infty)$; $\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{4}\right)\arcsin x+\dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{4}$, երբ $a=0$; $-\dfrac{\arcsin x}{2a\left(1+ax^2\right)}+\dfrac{1}{4a\sqrt{-a-1}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{-a-1}x}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{-a-1}x}\right|$, երբ $a<-1$; $\dfrac{\arcsin x}{2\left(1-x^2\right)}-\dfrac{x}{2\sqrt{1-x^2}}$, երբ $a=-1$: 2007. $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{\left(tg\frac{x}{2}+1\right)^2}{tg^2\frac{x}{2}-tg\frac{x}{2}+1}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\times$ $\times arctg\dfrac{2tg\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}}$: 2008. $|x-a|$: 2009. $\dfrac{n(2x-n-1)}{2}$, երբ $x\in[n;n+1)$, $n\in Z$: 2010. $x\,arctg\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$: 2011. $x\ln x-x$, երբ $x>0$; x, երբ $x\le 0$:

Գլուխ 8

2013. $12{,}5$: 2014. $88-\dfrac{16}{n^2}$: 2015. $\dfrac{\pi}{n}\cdot\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}}$: 2016. ա) 10; բ) 0: 2017. $\dfrac{49(n-1)}{n}-35$; $\dfrac{49(n+1)}{n}-35$: 2018. $\dfrac{10\left(2^{10}-1\right)}{n\left(2^{\frac{10}{n}}-1\right)}$; $\dfrac{2^{\frac{10}{n}}10\left(2^{10}-1\right)}{n\left(2^{\frac{10}{n}}-1\right)}$: 2019. $\dfrac{\sqrt{2}\pi\cos\frac{n+1}{4n}\pi}{4n\sin\frac{\pi}{4n}}$; $\dfrac{\sqrt{2}\pi\cos\frac{n-1}{4n}\pi}{4n\sin\frac{\pi}{4n}}$: 2020. 0; $b-a$: 2021. 3: 2022. 2: 2023. $\dfrac{a-1}{\ln a}$: 2024. 1: 2025. $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}$: 2026. $\ln\dfrac{b}{a}$: 2027. $C(b-a)$: 2030. Ոչ: 2031. $11{,}25$: 2032. $\dfrac{\pi}{2}$: 2033. $\dfrac{\pi}{6}$: 2034. $\dfrac{\pi}{3}$: 2035. 1: 2036. $\dfrac{\pi}{2\sin\alpha}$: 2037. $\dfrac{1}{ab}arctg\dfrac{a}{b}$: 2038. $\dfrac{\pi}{12}$: 2039. $\ln 2$: 2040. π: 2041. $0{,}5$: 2042. $\ln 2$: 2043 $2/\pi$: 2044. $2\left(2\sqrt{2}-1\right)/3$: 2045. $\pi/4$: 2046. $1/(p+1)$: 2047. $\pi/6$: 2049. 0: 2050. $-\sin a^2$: 2051. $2t\sqrt{1+t^4}$: 2052. $\dfrac{3x^2}{\sqrt{1+x^6}}-\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^4}}$: 2053. $(\sin x-\cos x)\times$ $\times\cos\left(\pi\sin^2 x\right)$: 2054. $4x^3e^{x^8}$: 2055. 1: 2056. $\dfrac{\pi^2}{4}$: 2057. 0: 2058. 2: 2059. ա)

$5/6$; բ) $t/2$: 2060. $\frac{1}{2}\ln\frac{e}{2}$: 2061. π : 2062. 4π : 2063. 1 : 2064. $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$: 2065. $\frac{e^{\pi}-2}{5}$: 2066. $\ln 4-\frac{3}{4}$: 2067. $2\left(1-\frac{1}{e}\right)$: 2068. $1/6$: 2069. $\ln\frac{3+\sqrt{6}}{3}$: 2070. $\frac{64\sqrt{2}}{15}-\frac{86}{15}$: 2071. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$: 2072. $2\ln\frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right)}{1+\sqrt{3}}$: 2073. $\sqrt{3}-1$: 2074. ա) $x=\frac{1}{t}$ ֆունկցիան $t=0$ կետում որոշված չէ; բ) $x=ctgt$ ֆունկցիան $t=0$ կետում որոշված չէ: 2075. Կարելի է: 2079. $\ln\frac{\sqrt{5}-1}{2\left(\sqrt{2}-1\right)}$: 2080. $\ln 2e$: 2081. $\ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$: 2082. 0 : 2083. $1/6$: 2084. $\frac{3}{8}\ln 2-\frac{225}{1024}$: 2085. $\frac{3}{5}\left(e^{\pi}-1\right)$: 2086. $\frac{3\pi}{16}$: 2087. ա) բացասական է; բ) դրական է; գ) դրական է; դ) բացասական է: 2088. ա) I_2-ը; բ) I_2-ը; գ) I_1-ը: 2089. ա) $\frac{1}{(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}$; բ) $\frac{1}{2}$; 1: 2090. $\frac{1}{4\sqrt{2}}<I<\frac{1}{4}$; բ) $0{,}005\cdot\theta<I<0{,}01\cdot\theta$, $\theta=1-e^{-100}$: 2091. $\frac{\theta}{50\pi}$ $\left(0<\theta<1\right)$: 2092. $\frac{2}{a}\theta$ $\left(|\theta|<1\right)$: 2093. ա) 1; բ) 2 : 2094. ա) $\frac{\pi}{2}$; բ) $\sqrt{2}\pi$: 2095. ա) -1; բ) π : 2096. ա) $\frac{1}{3e^3}$; բ) $\frac{1}{\ln^2 2}$: 2097. ա) $\frac{2}{3}\ln 2$; բ) $\frac{\pi}{2}-1$: 2098. ա) 0; բ) $\ln 9$: 2099. ա) $\frac{1}{e}$; բ) $\frac{\pi^2}{8}$: 2101. ա) Զուգամետ է; բ) զուգամետ է: 2102. ա) Տարամետ է; բ) տարամետ է: 2103. ա) Զուգամետ է; բ) զուգամետ է: 2104. ա) Զուգամետ է; բ) տարամետ է: 2105. ա) Տարամետ է; բ) զուգամետ է: 2106. ա) Տարամետ է; բ) զուգամետ է: 2107. Զուգամետ է $\min\{p,q\}<1<\max\{p,q\}$ դեպքում: 2108. ա) 0; բ) 0; գ) 0; դ) π : 2125. $\frac{(a-b)(f(b)-f(a))}{2}$: 2136. ա) A; բ) A : 2137. $5\pi/6$: 2138. $\pi/\sqrt{3}$: 2139. $x+1/2$: 2140. $1/\ln 2$: 2142. Ոչ: 2145. $\frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}$: 2146. $4n$: 2147. $\pi/2$, եթե $|\alpha|\le 1$; $\pi/(2\alpha)$, եթե $|\alpha|>1$: 2148. 2, եթե $|\alpha|\le 1$; $2/|\alpha|$, եթե $|\alpha|>1$: 2149. $\pi^2/4$: 2150. $200\sqrt{2}$: 2154. ա) $8/15$; բ) $32/35$; գ) $35\pi/128$: 2164. $I_{m,n}=m!n!/(m+n+1)!$: 2165. $I_n=(-1)^n n!/(m+1)^{n+1}$: 2166.

$I_n = (-1)^n\left[\frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2k-1}\right]$: 2167. $I_n = (-1)^n\left[-\ln\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right]$: 2170. $\arccos(\cos x)$: 2171. $-\frac{[x]([x]+1)(2[x]+1)}{12} + \frac{x^2[x]}{2}$: 2172. $\frac{x^2}{2} - x[x] + \frac{[x]([x]+1)}{2}$: 2173. $\frac{1}{\pi}\arccos(\cos \pi x)$: 2174. $14 - \ln(7!)$: 2175. $\ln n!$: 2176. $-\frac{\pi^2}{4}$: 2177. $30/\pi$: 2186. $I_n = n!$: 2187. $I_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}C_n^k \ln(k+1)$: 2188. $I_n = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi a^{n-1}\operatorname{sgn} a}{(ac-b^2)^{n+\frac{1}{2}}}$: 2189. $I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}$, երբ n-ը զույգ է; $I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}$, երբ n-ը կենտ է: 2190. $I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}\pi$, երբ n-ը զույգ է; $I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}$, երբ n-ը կենտ է: 2191. ա) $-\pi\ln 2/2$; բ) $-\pi\ln 2/2$; գ) $\pi\ln 2/2$; դ) $-\pi\ln 2/2$: 2193. Զուգամետ է, երբ $n > -1$: 2194. Զուգամետ է: 2195. Զուգամետ է, երբ $p < 1, q < 1$: 2196. Զուգամետ է, երբ $p > -1$, $q > -1$, $p + q < -1$: 2197. Զուգամետ է, երբ $p > -1$, $q > -1$: 2198. Զուգամետ է, երբ $p > 1$, $q < 1$: 2199. Զուգամետ է, երբ $p > 1, r < 1$ և երբ $p = 1, q > 1, r < 1$: 2200. Զուգամետ է: 2201. Զուգամետ է, երբ $1 < p < 2$: 2202. ա) Զուգամետ է, երբ $\alpha > 0$; բ) տարամետ է: 2203. ա) Զուգամետ է; բ) զուգամետ է: 2204. ա) Զուգամետ է, երբ $0 < \alpha < 2$; բ) զուգամետ է, երբ $\alpha > -1$: 2206. Պայմանականն զուգամետ է: 2207. Պայմանական զուգամետ է: 2208. Բացարձակ զուգամետ է, երբ $n < -1$,պայմանական զուգամետ է, երբ $n > 1$: 2209. Բացարձակ զուգամետ է, երբ $-1 < (1-p)/q < 0$; պայմանական զուգամետ է, երբ $0 \le (1-p)/q < 1$: 2210. Բացարձակ զուգամետ է, երբ $p > -2, q > p + 1$; պայմանական զուգամետ է, երբ $p > -2, p < q \le p + 1$: 2211. ա) Ոչ; բ) ոչ: 2214. Ոչ: 2215. $1/e$: 2223. $\int_a^b f^p(x)dx$: 2243. $1/2$: 2245. $\int_0^1 \ln f(x)dx$: 2246. ա) $f(1)/g(1)$; բ) $\exp\left(\int_0^1 \ln g(x)dx\right)$: 2254. 1: 2255. ա) $\pi/4$; բ) $\pi/4$; գ) $-\pi/4$; դ)

0 : 2256. ա) $2\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$, երբ $n=2m$ $(m\in Z_+)$; $\pi/2$, երբ n-ը կենտ է; բ) $n\pi$:

2259. $\alpha=-\frac{1}{T}\int_1^{1+T}f(t)dt$:

Գլուխ 9

2265. 2 : 2266. $1-e^{-a}$: 2267. 1 : 2268. $\frac{a^2-1}{a}-\frac{(a-1)^2}{a\ln a}$: 2269. $4{,}5$: 2270. $1+\frac{\pi^2}{8}$: 2271. $\frac{\pi}{2}$: 2272. $2\ln 2-2e^{-1}$: 2273. $\frac{5}{3}\sqrt{2}$: 2274. $1-e^{-a^2}\left(1+a^2\right)$: 2275. $\frac{1}{12}$: 2276. $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$:2277. $\frac{1}{3}+\frac{2}{\pi}$: 2278. $\frac{20}{9}-\ln 3$: 2279. $\sqrt{2}-1$: 2280. $\frac{2\pi+\sqrt{3}}{3}$: 2281. $\frac{37}{48}$: 2282. πab : 2284. $\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$: 2285. $4\sqrt{2}+\ln\frac{9+4\sqrt{2}}{7}$: 2286. $4+\frac{\ln 3}{4}$: 2287. $\ln 3$: 2288. $3+\ln 2$: 2289. $\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$: 2290. $\frac{\sqrt{2}}{2}$: 2291. 26 : 2292. $6a$: 2293. $8a$: 2294. $a\left(2\sqrt{5}+\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right)$: 2295. $10a$: 2296. $\frac{a\sqrt{b^2+1}}{b}\times$ $\times\left(e^{\pi b}-1\right)$: 2297. $\frac{aT^2}{2}$: 2298. $0{,}5\left(ch^{\frac{3}{2}}(2T)-1\right)$: 2299. $2\sqrt{5}\pi a$: 2300. $2shT$: 2301. $\frac{\sqrt{3}}{21}\left(27-2\sqrt{2}\right)$: 2302. $\sqrt{5}\left(e^{2\pi}-1\right)$: 2303. $\sqrt{a^2+b^2}\,shT$: 2304. $2{,}5$: 2305. $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)$: 2306. $\frac{1}{3}\left(\left(\pi^2+4\right)^{\frac{3}{2}}-8\right)$: 2307. πa : 2308. $8a$: 2309. $\frac{1}{8}\left(2\pi+3\sqrt{3}\right)$: 2310. $\frac{1}{3}\pi r^2h$: 2311. $\frac{1}{3}\pi h\left(R^2+rR+r^2\right)$: 2312. $\frac{4}{3}\pi R^3$: 2313. $\frac{3}{7}\pi$: 2314. $\frac{\pi^2}{4}$: 2315. $\frac{\pi(\pi-2)}{4}$: 2316. 4π : 2317. $\frac{\pi^2\left(4\pi^2-15\right)}{24}$: 2318. $\frac{\pi}{2}\left(e^6-43\right)$: 2319. $\frac{\pi}{2}$: 2320. $\frac{4}{3}\pi ab^2$: 2321. $\frac{49}{3}\pi$: 2322. $\pi\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{e^2+1}}{e^2}-\right.$

$\left.-\ln\frac{1+\sqrt{1+e^2}}{e\left(1+\sqrt{2}\right)}\right)$: 2323. $2\pi\left(\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$: 2324. $\pi\left(\sqrt{2}+\ln\frac{\sqrt{17}+4}{\sqrt{2}+1}-\right.$ $\left.-\frac{\sqrt{17}}{4}\right)$: 2325. $\frac{196}{9}\pi$: 2326. $\frac{\pi}{9}(20+9\ln 3)$: 2327. $\frac{\pi}{144}\left(185+144\ln\frac{3}{2}\right)$: 2328. $\frac{\pi}{8}\left(sh4-4e^{-2}\right)$: 2329. 4,5 : 2330. $\frac{ab}{6}\left(3\sqrt{3}-\pi\right)$: 2331. 1,6 : 2332. ա) 2,25 ; բ) 2,25 : 2333. $k=p$: 2334. $\left(\frac{p}{2};\pm p\right)$: 2335. πab : 2336. $\frac{3\pi}{8}a^2$: 2337. $\frac{8a^2}{3}$: 2338. 8/15 : 2339. $3\pi a^2$: 2340. $a^2\left(4\pi^3+3\pi\right)/3$: 2341. $7\pi a^2/192$: 2342. $\left(e^{4\pi k}-1\right)\times$ $\times L^2/4k$: 2343. $3\pi a^2/2$: 2344. $\pi P^2/\left(1-\varepsilon^2\right)^{\frac{3}{2}}$: 2345. ա) 2/3; բ) $\left(1-\ln 2+\pi/\sqrt{3}\right)/2$: 2346. $a^2/6$: 2347. $a^2/60$: 2348. $\pi a^2/8\sqrt{2}$: 2349. $3\pi a^2/8$: 2350. $\pi a/\sqrt{2}$: 2351. $7\pi a^2/512$: 2352. $2\pi a/3$: 2353. $a\left(1-\sqrt{2}/2\right)$: 2355. $\pi^3/3$: 2356. $6a$: 2358. 7/3: 2359. 1: 2360. $\left((R+4)^{\frac{3}{2}}-8\right)/3$: 2361. shR : 2362. 8 : 2363. $a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)+1\right)$: 2364. $4\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$: 2366. 9π : 2367. $\pi(1-\sin 1)$: 2368. $128\pi/15$: 2369. $\pi a^3(\ln 2-0{,}5)$: 2370. $3\pi\ln 3(2\ln 3-1)$: 2371. ա) $32\pi a^3/105$; բ) $3\pi^2a^3/4$: 2372. ա) $16\pi a^3/15$; բ) $\pi^2a^3/2$; գ) $16\pi a^3/3$; դ) $16\pi a^3/3$: 2373. ա) $5\pi^2a^3$; բ) $6\pi^3a^3$; գ) $7\pi^2a^3$: 2375. $8\pi a^3/3$: 2376. $2a^3\pi^2\left(\pi^2-6\right)/3$: 2378. ա) $64\pi a^2/3$; բ) $16\pi^2a^2$: 2379. ա) $18\pi^2a^2$; բ) $24\pi a^2$: 2380. ա) $\pi/2$; բ) $10\sqrt{2}\pi/3$: 2382. $32\pi a^2/5$: 2383. $4\pi^2a^2$: 2384. $4\pi\left(a^2+\frac{2}{3}b^2-\frac{b^4}{5a^2}\right)$: 2385. ա) $2\pi a^2\left(2-\sqrt{2}\right)$; բ) $2\sqrt{2}\pi a^2$; գ) $4\pi a^2$: 2386. $M_x=\frac{b}{2}\sqrt{a^2+b^2}$, $M_y=\frac{a}{2}\sqrt{a^2+b^2}$: 2387. $M_x=b\left(b+\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)$, $M_y=0$: 2388. $M_x=M_y=\frac{3}{5}a^2$: 2389. $M_x=\frac{32a^2}{3}$, $M_y=8\pi a^2$: 2390. $x_c=y_c=\frac{2a}{5}$: 2391. $x_c=\pi a$, $y_c=\frac{4a}{3}$:

2392. $\frac{1}{3}\left((1+e)^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{2}\right)$: 2393. $\pi R\left(2a^2+R^2\right)$: 2394. $M_x=\frac{\pi}{4}$, $M_y=0$: 2395. $M_x=M_y=\frac{3}{20}$: 2396. $x_c=0$, $y_c=\frac{4R}{3\pi}$: 2397. $x_c=y_c=\frac{9p}{10}$: 2398. $\frac{ah^3}{3}$: 2399. $8a^4/7$: 2400. f -ը և g -ն նշանները չեն փոխում և գոյություն ունեն այնպիսի α, β թվեր, որ $\alpha f(x)\equiv\beta g(x)$ և $\alpha^2+\beta^2\neq 0$: 2401. $\varphi(a)=b$: 2402. $f(x)=\frac{b}{a}x$: 2404. $f(x)=cx^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$ $(c>0)$: 2405. $\frac{a}{\sqrt{3}}$: 2406. $e^{2\pi k}$: 2408. $f(x)=cx^{\frac{1-\lambda}{2\lambda}}$ $(c>0)$: 2411. $S=6\pi ad$, $V=\frac{\sqrt{3}\pi a^2 d}{2}$: 2412. $x_c=0$, $y_c=\frac{2R}{\pi}$ (կիսաշրջանագիծ); $x_c=0$, $y_c=\frac{4R}{3\pi}$ (կիսաշրջան): 2413. $x_c=\pi a$, $y_c=\frac{5a}{6}$:

Բովանդակություն